Kapitel E

Strategische Spiele und Nash–Gleichgewichte

L'enfer, c'est les autres.

[Die Hölle, das sind die anderen.]

Jean-Paul Sartre (1905-1980), *Huis Clos*

Inhalt dieses Kapitels E

Motivation und Überblick

Im letzten Kapitel D über Markov–Spiele ging es nur um einen Akteur, der sein strategisches Handeln optimiert. In diesem Kapitel beginnen wir die Modellierung und systematische Untersuchung von Spielen mit zwei oder mehr Spielern. Das offenbart völlig neue Phänomene.

Wir definieren hierzu zunächst **strategische Spiele** in Normalform und erklären den Begriff des **Nash–Gleichgewichts**. Solche Gleichgewichte beschreiben **mögliches rationales Verhalten**. Die Definition ist einfach, aber die Interpretation bedarf einiger Übung und zahlreicher Beispiele.

Im Allgemeinen hat ein gegebenes Spiel keine Nash–Gleichgewichte. Dies ändert sich durch seine Fortsetzung zu **gemischten Strategien**. Der **Satz von Nash** (E1F) garantiert: Jedes endliche reelle Spiel hat mindestens ein Nash–Gleichgewicht in gemischten Strategien.

Hieraus erhalten wir unmittelbar John von Neumanns **Hauptsatz für Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele**: Die Nash–Gleichgewichte entsprechen hier den Min-Maximierern und den Max-Minimierern. Die **eindeutige Gleichgewichtsauszahlung** definiert den Wert des Spiels.

Motivation und Überblick

Die **Berechnung** gelingt ad hoc in einigen Spezialfällen und allgemein dank Linearer Programmierung, die wir im nächsten Kapitel erklären.

Eine weitere nützliche Berechnungsmethode ist das Erkennen und Eliminieren von (strikt) **dominierten Strategien**. Die Idee ist leicht, doch die Feinheiten sind subtil und müssen sauber ausgeführt werden. Ich betone dies, weil es erfahrungsgemäß oft falsch angewendet wird.

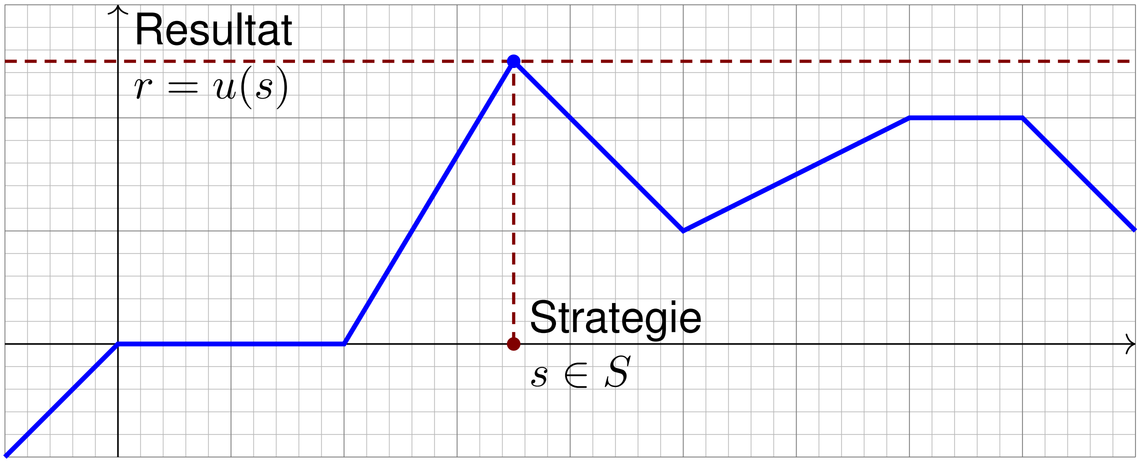
Ein vorrangiges Ziel dieses Kapitels ist daher, eine saubere und tragfähige **Notation** einzuführen. Über viele der beobachteten Phänomene können wir nur damit überhaupt erst sprechen.

Anschließend wollen wir die grundlegenden **Sätze** präzise formulieren und beweisen und als **Rechenregeln** gebrauchsfertig bereitstellen. Das ist manchmal mühsam, aber immer lohnend. In der Literatur wird dies unterschiedlich streng gehandhabt. Wir versuchen unser bestes.

Mit dieser Grundausstattung an **Werkzeug** gerüstet untersuchen wir zahlreiche Anwendungen in diesem und allen folgenden Kapiteln und vor allem in den Gruppenübungen. Üben Sie sich daran!

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

Ein **Spiel** mit nur einem Spieler ist eine Funktion $u : S \to R : s \mapsto u(s)$.



Hierbei ist S die Menge der **Strategien**, die der Spieler wählen kann, und R ist die Menge möglicher **Resultate**, linear geordnet durch $\le$.

Wir nennen u die **Nutzenfunktion**. Meist sind R die reellen Zahlen, ebenso möglich ist jede linear (prä)geordnete Menge $(R, \le)$.

Der Spieler sucht seine Strategie $s \in S$ so, dass sein Resultat $r = u(s)$ maximal ist, also $u(a) \le u(s)$ für alle alternativen Strategien $a \in S$ gilt.

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall eines einzigen Spielers. Gegeben ist die Menge S der möglichen Strategien und hierauf die Nutzenfunktion $u : S \to R$. Der Spieler will nun $s \mapsto u(s)$ maximieren. Wenn die Menge S klein ist, dann genügt ausprobieren. Ist die Menge S hingegen groß und unübersichtlich, dann kann die Optimierung beliebig schwierig werden, siehe das Problem des Handlungsreisenden oder Machine Learning.

Sie kennen einfache Beispiele aus der Schule und lernen Optimierung durch Kurvendiskussion. Als Kontrast hierzu: Unser Kiosk-Beispiel ist ein kombinatorisches Optimierungsproblem; bei einer Lizenz ist es klar und langweilig, bei zweien leicht, bei dreien bereits knifflig und überraschend. Optimiert wurde dort übrigens keine reelle Zahl, sondern das Ergebnis (Marktanteil, Nähe zur Straße) in lexikographischer Ordnung.

Allgemein kann u alles mögliche messen: Geld, Gewinn maximieren, Kosten minimieren, aber auch Einfluss, Ansehen, soziale Stellung, Gerechtigkeit, Umweltschutz, Tierschutz, Glück, Zufriedenheit, etc. Nahezu jede menschliche Aktivität lässt sich so betrachten!

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

$s_2 \in S_2 =$

A \ B ($s_1 \in S_1 =$)	Schere	Stein	Papier
Schere	0 / 0	$+1$ / -1	-1 / $+1$
Stein	-1 / $+1$	0 / 0	$+1$ / -1
Papier	$+1$ / -1	-1 / $+1$	0 / 0

$u_2(s_1, s_2)$
$u_1(s_1, s_2)$

Definition E1A: strategisches Spiel (statisch, in Normalform)

Ein **strategisches Spiel** mit n Spielern ist eine Funktion

$$u : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$$
$$s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \mapsto (u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)) = u(s).$$

Hierbei ist S_i die Menge der **Strategien**, die Spieler i wählen kann, und R_i ist die Menge seiner **Resultate**, linear geordnet durch $\le_i$.

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

Wir wollen Spiele darstellen: einheitlich, übersichtlich, knapp, präzise. Jeder Spieler wählt seine Strategie $s_i \in S_i$ unabhängig von den anderen. Sein Gewinn ist $u_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$, diesen versucht er zu maximieren. Meist sind R_i die reellen Zahlen, und wir nennen u_i die **Nutzenfunktion** für Spieler i. Allerdings kontrolliert der Spieler i nur seine Strategie s_i, nicht jedoch die Strategien $s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n$ der Gegenspieler!

Als konkretes, einfaches Beispiel betrachten wir *Schere-Stein-Papier*. Dies ist ein **Nullsummenspiel**, d.h. stets gilt $u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0$. Es ist zudem **symmetrisch**, d.h. $S_1 = S_2$ und $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$.

Vorteile dieses Modells: Unsere Definition fasst alle zuvor betrachteten Spiele zusammen. Wir haben nun einen gemeinsamen Rahmen, um allgemeine Begriffe und Werkzeuge zu entwickeln! Gewisse Argumente, Rechnungen und Tricks treten immer wieder auf. Wir können sie nun allgemein erklären, präzise formulieren, und ihre Gültigkeit beweisen.

Einschränkungen: Unsere Definition berücksichtigt noch nicht den zeitlichen Verlauf, zufällige Einflüsse oder unvollständige Information.

Was ist ein Nash–Gleichgewicht?

Das Spiel „Straßenverkehr“

A \ B	links	rechts
links	$+1$, $+1$	-8, -8
rechts	-8, -8	$+1$, $+1$

Feiglingspiel / *chicken game*

A \ B	einlenken	gradaus
einlenken	2, 2	1, 5
gradaus	5, 1	-9, -9

Ein Strategiepaar (s_1, s_2) ist **instabil** für Spieler i, falls er sein Ergebnis $u_i(s_1, s_2)$ verbessern kann, indem er einseitig seine Strategie s_i ändert.

Definition E1B: Nash–Gleichgewichte

Wir nennen (s_1, s_2) **Nash–Gleichgewicht**, falls kein Spieler aus eigener Kraft sein Ergebnis verbessern kann, indem er seine Strategie ändert.

Nash–Gleichgewichte erklären zunächst nur, was **rational möglich** ist. Manch Spiel hat mehrere Gleichgewichte, erfordert also Koordinierung. Tradition / Konvention / Erziehung / Moral können eine Auswahl treffen.

Was ist ein Nash–Gleichgewicht?

Spiele sind im Allgemeinen sehr komplex. Zur Vereinfachung betrachten wir zunächst die allereinfachsten: **strategische Spiele in Normalform**. Wir können jedes Spiel in diese Grundform bringen; dabei geht meist Information verloren. Wir betrachten anschließend Verfeinerungen.

Grundlegend für Spiele ist der Begriff des **Nash–Gleichgewichts**. Für seine bahnbrechenden Arbeiten hierzu aus den 1950er Jahren bekam John Nash 1994 den Wirtschafts-Nobelpreis zusammen mit Reinhard Selten (1930–2016) und John Harsanyi (1920–2000).

Anschauliche Beschreibung: Bob fixiert seine Spalte s_2, Alice wählt ihre Zeile s_1 mit maximalem Ergebnis $s_1 \mapsto u_1(s_1, s_2)$. Alice fixiert ihre Zeile s_1, Bob wählt seine Spalte s_2 mit maximalem Ergebnis $s_2 \mapsto u_2(s_1, s_2)$. Gelingt beides zugleich, so haben wir ein Nash–Gleichgewicht.

Das erklärt auch einen einfachen **Algorithmus**, wie wir in einem endlichen Bimatrixspiel alle (reinen) Nash–Gleichgewichte finden: Finde die Maxima in jeder Zeile. Finde die Maxima in jeder Spalte. Wo beides zutrifft, liegt ein Nash–Gleichgewicht.

Was ist ein Nash–Gleichgewicht?

Vorgelegt sei ein Spiel $u : S_1 \times \dots \times S_n \to R_1 \times \dots \times R_n$ in Normalform. Wir nennen $s = (s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n := S$ einen **Strategievektor**. Spieler i kann sich aus eigener Kraft verbessern, falls für ein $a \in S_i$ gilt:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{a}, s_{i+1}, \dots, s_n) \;>\; u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i}, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Andernfalls ist $u_i(s)$ ein **Maximum** bezüglich aller Alternativen $a \in S_i$:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{a}, s_{i+1}, \dots, s_n) \;\le\; u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i}, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Somit ist s_i eine **beste Antwort** auf $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Definition E1c: Nash–Gleichgewichte eines Spiels

Der Strategievektor $s \in S$ ist im **Gleichgewicht für Spieler i**, wenn gilt:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i}, s_{i+1}, \dots, s_n) \;=\; \max_{a \in S_i} u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{a}, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Hierfür schreiben wir $\mathrm{NE}_i(u) := \{\, s \in S \mid s_i \text{ ist beste Antwort auf } s_{-i} \,\}$.

Gilt dies für jeden Spieler i, so nennen wir s ein **Nash–Gleichgewicht**:
$\mathrm{NE}(u) := \bigcap_i \mathrm{NE}_i(u) = \{\, s \in S \mid s \text{ ist ein Nash–Gleichgewicht von } u \,\}$.

Was ist ein Nash–Gleichgewicht?

Zunächst ist ein Nash–Gleichgewicht genau das, was die Definition sagt: Für jeden Spieler $i = 1, \dots, n$ ist seine Strategie s_i eine beste Antwort auf die gegnerischen Strategien $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$. Anders gesagt: Kein Spieler hat Anreiz, seine Strategie zu ändern.

Umgekehrt erwarten wir rational gesehen, dass ein Ungleichgewicht nicht gespielt wird, zumindest nicht auf Dauer, denn mindestens ein Spieler wird wechseln. Dies interpretieren wir normativ oder deskriptiv:

(1) Gibt es nur genau ein Nash–Gleichgewicht, so wird dieses gespielt. Rationale Interpretation: Sind alle Spieler rational, so werden sie ihr Verhalten auf dieses einzige Nash–Gleichgewicht koordinieren.

(2) Die Nash–Gleichgewichte erklären das beobachtete Spielerverhalten. Evolutionäre Interpretation bei wiederholten Spielen, Schwarmintelligenz bei großen Populationen: Ungleichgewichte bleiben nicht bestehen.

In allen Fällen sind die Nash–Gleichgewichte eines Spiels besondere Strategievektoren, die zur weiteren Analyse dienen: Mögliche rationale Lösungen, beobachtetes Spielverhalten, evolutionäre Entwicklung, etc.

Beispiel: ein Erbe teilen

Aufgabe: Alice und Bob erben 10 Dukaten. Das Testament verlangt: Alice wünscht sich $x \in \{1, \dots, 9\}$ und Bob wünscht sich $y \in \{1, \dots, 9\}$, gleichzeitig per Brief an den Notar. Gilt $x + y > 10$, so verfällt das Erbe. Gilt $x + y \le 10$, so werden beide Wünsche erfüllt, etwaiger Rest verfällt.

Aufgabe: (1) Formalisieren Sie dies als ein strategisches Spiel u.
(2) Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte dieses Spiels u.

Lösung: (1) Die Regeln definieren das folgende strategische Spiel:

$$u \,:\, \{1, \dots, 9\}^2 \to \mathbb{R}^2 \,:\, (x, y) \mapsto \begin{cases} (x, y) & \text{falls } x + y \le 10, \\ (0, 0) & \text{falls } x + y > 10. \end{cases}$$

(2) Kein Gleichgewicht ist (x, y) mit $x + y < n$, ebensowenig (x, y) mit $x + y > n$. Somit bleiben nur noch neun Kandidaten:

$$\mathrm{NE}(u) \subseteq \{\, (1,9), (2,8), (3,7), (4,6), (5,5), (6,4), (7,3), (8,2), (9,1) \,\}$$

Jedes dieser Paare ist tatsächlich ein Nash–Gleichgewicht. Also gilt:

$$\mathrm{NE}(u) = \{\, (1,9), (2,8), (3,7), (4,6), (5,5), (6,4), (7,3), (8,2), (9,1) \,\}$$

Beispiel: ein Erbe teilen

Wenn der Anwalt das Paar (x, y) verkündet, könnte er Alice dann Bob separat fragen, ob sie ihren Wunsch ändern möchten. Falls (x, y) kein Gleichgewicht ist, so will mindestens eine:r wechseln. Ist (x, y) hingegen ein Gleichgewicht, so besteht für keine:n irgendein Anlass zu wechseln.

Wenn sich Alice und Bob absprechen können, so können sie jedes der neun Gleichgewichte $(x, y) \in \mathrm{NE}(u)$ auswählen und als gemeinsames Vorgehen vereinbaren. Keine:r hätte anschließend Anlass, abzuweichen. Welches sie auswählen ist frei verhandelbar, siehe Kapitel L.

Aufgabe: Diskutieren Sie die folgende, recht naheliegende Variante: Alice wünscht sich $x \in \{0, \dots, 9\}$ und Bob wünscht sich $y \in \{0, \dots, 9\}$.

Lösung: Die Menge der Nash–Gleichgewichte ändert sich nicht!
Alice' Strategie 0 ist strikt dominiert durch 1: Egal, welche Strategie $y \in \{0, \dots, 9\}$ Bob wählt, für Alice ist 1 immer strikt besser als 0.

Ebenso wird Bobs Strategie 0 strikt dominiert durch die Strategie 1. Die beiden zusätzlichen Optionen werden also rational nie genutzt. Das ändert sich in der folgenden Aufgabe mit $x, y \in \{0, \dots, 10\}$.

Beispiel: ein Erbe teilen

Aufgabe: Alice und Bob erben 10 Dukaten. Das Testament verlangt: Alice wünscht sich $x \in \{0,\dots,10\}$, Bob wünscht sich $y \in \{0,\dots,10\}$, gleichzeitig per Brief an den Notar. Gilt $x+y>10$, so verfällt das Erbe. Gilt $x+y \le 10$, so werden beide Wünsche erfüllt, etwaiger Rest verfällt.

Aufgabe: (1) Formalisieren Sie dies als ein strategisches Spiel u.
(2) Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte dieses Spiels u.

Lösung: (1) Die Regeln definieren das folgende strategische Spiel:

$$u \,:\, \{0,\dots,10\}^2 \to \mathbb{R}^2 \,:\, (x,y) \mapsto \begin{cases} (x,y) & \text{falls } x+y \le 10, \\ (0,0) & \text{falls } x+y > 10. \end{cases}$$

(2) Eine sorgfältige Analyse, wie in der vorigen Aufgabe, ergibt:

$$\begin{aligned} \mathrm{NE}(u) = \{\, & (0,10),\ (1,9),\ (2,8),\ (3,7),\ (4,6),\ (5,5), \\ & (6,4),\ (7,3),\ (8,2),\ (9,1),\ (10,0),\ (10,10) \,\} \end{aligned}$$

Nash–Gleichgewichte erklären zunächst nur, was **rational möglich** ist. Manch Spiel hat mehrere Gleichgewichte, erfordert also Koordinierung!

Beispiel: ein Erbe teilen

⚠ In diesem Spiel kann man das letzte Gleichgewicht $(10,10)$ leicht übersehen; es ist nicht intuitiv, aber dennoch ein Nash–Gleichgewicht! Nash–Gleichgewichte zu prüfen ist leicht, eins/alle zu finden ist schwer. Da hilft nur genau lesen, scharf nachdenken, sorgsam ausführen.

Angenommen, Alice und Bob können sich absprechen – vor Einreichung ihrer Wünsche. Jedes Nicht-Gleichgewicht $(x,y) \in S \setminus \mathrm{NE}(u)$ ist eine unsinnige Vereinbarung, denn mindestens eine:r hat Anlass, die gerade getroffene Absprache sofort zu brechen. Jede Absprache $(x,y) \in \mathrm{NE}(u)$ hingegen ist rational möglich, denn sie ist selbststabilisierend!

Übung: Diskutieren Sie das entsprechende Spiel mit drei Erben Alice, Bob und Chuck, ebenso mit vier Erben, fünf Erben, sechs Erben, etc.

Wenn Sie genauer hinschauen, dann entdecken Sie einige interessante Phänomene. Zum Beispiel sind bei drei Erben manche Gleichgewichte wie $(5,5,5)$ nur stabil unter individueller Maximierung, doch eine/jede Zweier-Koalition könnte und würde koordiniert davon abweichen. Was sind hier die koalitions-stabilen Gleichgewichte?

Empirie: Piraten teilen im Praxistest

Im **Casino Royal** (22.04.2022) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, unsere ersten Überlegungen zu Gleichgewichten in der Praxis zu testen. Ich empfehle nachdrücklich praktische **Experimente zur Spieltheorie**, denn Theorie und Praxis ergänzen und inspirieren sich gegenseitig! Hier mein (stark vereinfachtes) Gedächtnisprotokoll der Ereignisse.

Wir haben zunächst das Piratenspiel mit fünf Piraten gespielt, viermal in jeweils wechselnden Rollen. Vorschläge und Argumente gingen bunt durcheinander, und die Ergebnisse waren wieder erstaunlich (A225). Die Capitaine verteilten großzügig, doch zwei gingen über die Planke.

Erstes Spiel: Auf Vorschlag aus dem Publikum haben wir folgende Spielregeln vereinbart: Vier Piraten A, B, C, D teilen sich 100 Dukaten. Jeder schreibt seinen Wunsch $a, b, c, d \in \{0, \dots, 100\}$ auf einen Zettel. Im Falle $a + b + c + d \le 100$ wird jeder Wunsch ausgezahlt, sonst nichts.

Gespielt wurde zunächst *ohne* vorige Absprache. Die Wünsche waren dann $(25, 20, 20, 25)$. Zwei waren vorsichtig! Es wurden daher nur 90 Dukaten ausgezahlt und 10 Dukaten als Opfergabe ins Meer geworfen.

Empirie: Piraten teilen im Praxistest

Zweites Spiel: Selbe Spielregeln, doch nun durfte zuvor verhandelt werden. Spieler A nutzte die Gelegenheit, um seinen Zettel sofort und endgültig und für alle sichtbar mit 80 zu beschriften (*burning bridges*).

Seine dreiste Strategie schlug jedoch fehl: Die anderen wollten dies nicht hinnehmen und schrieben ebenso überzogene Forderungen auf. So wurden alle 100 Dukaten ins Meer geworfen! Tja, dumm gelaufen.

Rational war das sicher nicht. Der fiese Trick, sich früh festzulegen und damit die anderen zu erpressen, hätte (rational) funktionieren müssen, misslang aber dennoch. Vielleicht wäre die Forderung nach 30 Dukaten noch durchgegangen, oder 40, aber eben nicht 80. Versuch macht kluch.

Drittes Spiel: Selbe Spielregeln, mit Verhandlung. Alle trauerten den vergeudeten 100 Dukaten nach. Sie einigten sich auf $(25, 25, 25, 25)$, so hat es dann jeder aufgeschrieben, und so wurde es ausgezahlt. „Nach den Erfahrungen von eben, macht alles andere keinen Sinn.“

Das ist ein striktes Nash–Gleichgewicht, Abweichen schadet! Nach leidvollen Fehlschlägen hat sich dieses Ergebnis eingependelt.

Empirie: Piraten teilen im Praxistest

Viertes Spiel: Um die Symmetrie zu brechen werden die 100 Dukaten vorneweg in vier Haufen zu $10, 20, 30, 40$ Dukaten aufgeteilt. Jeder Pirat darf sich einen Haufen aussuchen, gleichzeitig per Zettel. Beanspruchen dabei zwei Piraten denselben Haufen, so wird *alles* ins Meer geworfen.

Unsere vier leidgeprüften Piraten wollten rasch zu einem Ergebnis kommen, doch keinerlei Risiko eingehen und haben daher… gelost! Per Schnick-Schnack-Schnuck haben Sie die vier Haufen zugeteilt. Beim Ausfüllen der Zettel ist anschließend keiner (!) davon abgewichen.

☺ Nicht das Ergebnis ist symmetrisch-gerecht, sondern das Verfahren. Es gibt $4! = 24$ solcher Nash–Gleichgewichte. Jedes ist auf seine Weise ungerecht, genau dies haben unsere Piraten durch das Losverfahren „symmetrisiert“, und anschließend das Ergebnis klaglos akzeptiert.

☺ Jede Zuteilung ist ein striktes Gleichgewicht, Abweichen schadet! Wurde erst einmal eines der 24 Gleichgewichte willkürlich ausgewäht, so ist diese Vereinbarung selbst-stabilisierend. Damit haben unsere Piraten nebenbei **korrelierte Gleichgewichte** entdeckt (siehe §I3).

Empirie: Piraten teilen im Praxistest

Zwei Varianten kamen uns noch in den Sinn, die wir aber nicht spielten:

Fünftes Spiel: Selbe Spielregeln, aber ohne die Möglichkeit der vorigen Absprache. Wie sollte jeder Pirat nun vorgehen? Jeder möchte einen großen Haufen, aber gleichzeitig Kollisionen verhindern. Knifflig! Übung: Wie wahrscheinlich sind Kollisionen bei zufälliger Wahl?

Wie gelingt eine möglichst kollisionsfreie Zuteilung, ein gemeinsamer Symmetriebruch, ohne Gedächtnis, Tradition, vorige Absprache, etc.? Willkürlich, z.B. nach Alter? Nähe zur Tür? Oder eine andere Größe, die allen zugänglich ist und allgemein als Arbiter anerkannt wird.

Sechstes Spiel: Fünf Piraten verteilen die Haufen $0, 10, 20, 30, 40$. Wie kann oder soll zugeteilt werden? Willkürlich nach Losverfahren? Wie können unsere besorgten Piraten sicherstellen, dass die getroffene Vereinbarung auch wirklich eingehalten wird? „Wer nichts mehr zu verlieren hat, fühlt sich an Abmachungen vielleicht nicht gebunden.“

☹ Jede Zuteilung ist hier ein Gleichgewicht, aber nicht mehr strikt. Abweichung lohnt zwar nicht, ist aber für einen Spieler dennoch denkbar.

Das Gefangenendilemma / *prisoner's dilemma*

Dieses Spiel ist berühmt für seinen vermeintlich paradoxen Ausgang. Es wurde 1950 von Albert Tucker (1905–1995) vorgestellt und popularisiert.

Bonnie \ Clyde	schweigen	gestehen
schweigen	-1 / -1	0 / -5
gestehen	-5 / 0	-4 / -4

Als Funktion $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bedeutet das ausgeschrieben:

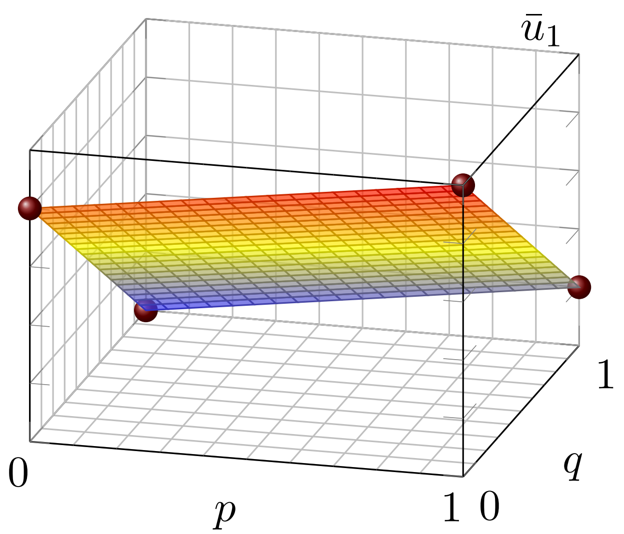
$$\begin{array}{lcl} (\text{schweigen}, \text{schweigen}) & \mapsto & (-1, -1) \\ (\text{schweigen}, \text{gestehen}) & \mapsto & (-5, \quad 0) \\ (\text{gestehen}, \text{schweigen}) & \mapsto & (\quad 0, -5) \\ (\text{gestehen}, \text{gestehen}) & \mapsto & (-4, -4) \end{array}$$

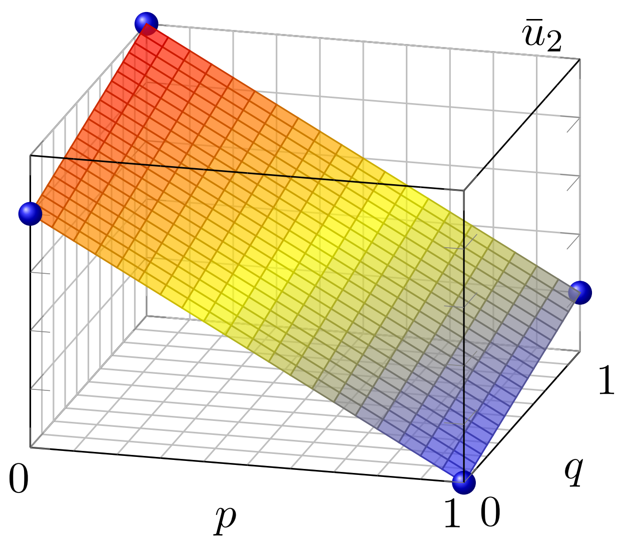
Nash–Gleichgewicht ist hier einzig (gestehen, gestehen).

Das Gefangenendilemma / *prisoner's dilemma*

Zwei Komplizen werden geschnappt und in getrennten Zellen verhört. Wenn beide schweigen, dann genügen die wenigen Beweise vor Gericht vermutlich zur Verurteilung für ein Jahr Gefängnis. Wenn einer gesteht, so wird ihm die Strafe erlassen, aber der andere wird zu fünf Jahren verurteilt. Gestehen beide, so drohen jedem vier Jahre Gefängnis.

Zur Illustration eine graphische Darstellung der beiden Auszahlungen: Bonnie wählt $p \in \{0, 1\}$ und Clyde wählt $q \in \{0, 1\}$.





Das Feiglingspiel / *chicken game*

Auch dieses berühmte Spiel wird oft in Konfliktsituationen beobachtet:

A \ B	einlenken	gradaus
einlenken	2 / 2	5 / 1
gradaus	1 / 5	-9 / -9

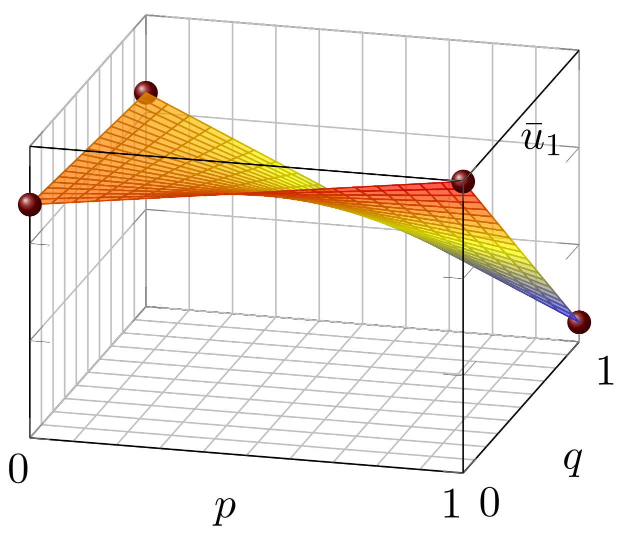
Hier gibt es zwei Nash–Gleichgewichte, aber diese sind asymmetrisch. Beide wollen geradaus. Wer gibt zuerst nach? Bricht die Symmetrie?

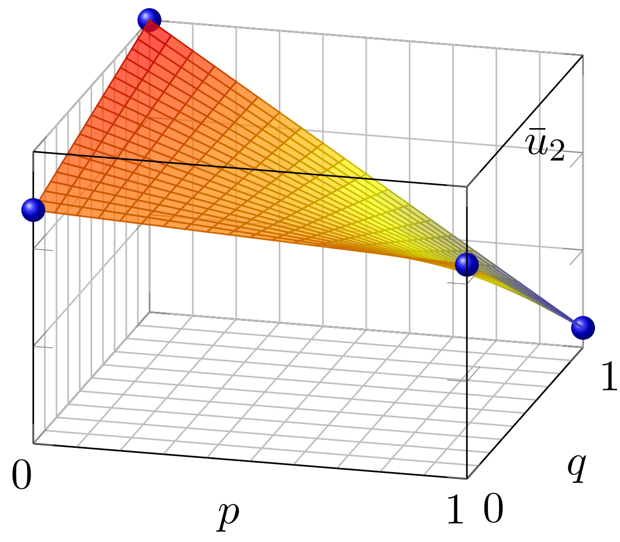
Natürlich ist $(\text{gradaus}, \text{gradaus})$ kein Gleichgewicht: Ein Spieler muss ausweichen, beide wissen es, doch keiner will sich als erster bewegen. Auch $(\text{einlenken}, \text{einlenken})$ ist hier kein Gleichgewicht: Jeder einzelne könnte dies ausnutzen und gradaus fahren. Die beiden Gleichgewichte sind asymmetrisch. Das macht die Koordinierung schwierig. „Soll doch der andere einlenken!“, sagt jeder. Manchmal kommt es zum Crash.

Das Feiglingspiel / *chicken game*

Das Feiglingspiel beschreibt eine Mutprobe oder gegenseitige Drohung: Zwei Autos rasen aufeinander zu. Wer einlenkt, zeigt Angst und verliert. Weicht keiner aus, beweisen beide Spieler zwar Mut und Durchsetzung, aber durch den Zusammenprall entsteht allseits ein großer Schaden. Dieses Drohszenario findet sich häufig bei Verhandlungen.

Zur Illustration eine graphische Darstellung der beiden Auszahlungen: Spielerin A wählt $p \in \{0, 1\}$ und Spieler B wählt $q \in \{0, 1\}$.



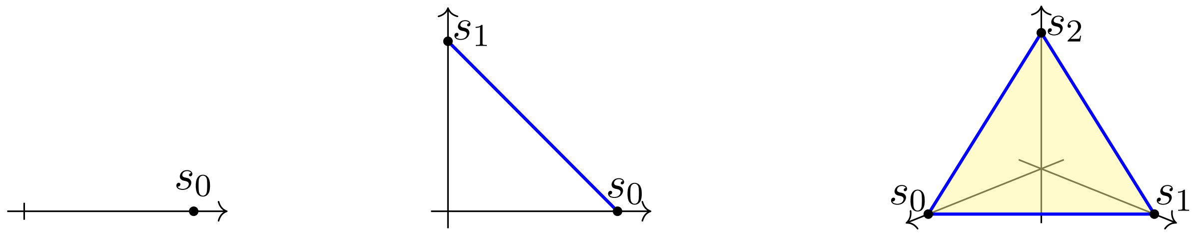


Fortsetzung von reinen auf gemischte Strategien

Beim Spiel *Schere-Stein-Papier* ist es nicht sinnvoll, sich auf eine der drei **reinen Strategien** festzulegen. Besser ist, eine zufällig zu wählen:

$$s = \frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Stein} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier}$$

Wir schreiben diese **gemischte Strategie** $s = \sum_k p_k s_k$ bequem und übersichtlich als Konvexkombination der reinen Strategien $s_1, \dots, s_\ell$. Interpretation: Die Strategie $s_k \in S_i$ wird mit Wkt $p_k \in [0,1]$ ausgewählt.



☺ Eine gute Notation ist zugleich präzise und bequem, notiert alle wesentlichen Daten, doch meidet übermäßige Redundanz, erleichtert das Lesen und das Rechnen und hilft, Missverständnisse zu vermeiden.

Fortsetzung von reinen auf gemischte Strategien

Definition E1D: gemischte Strategie, Borel 1921

Sei $S_i = \{s_0, s_1, \dots, s_\ell\}$ die (endliche) Strategiemenge des Spielers i. Eine **gemischte Strategie** ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf S_i:

$$s = p_0 \cdot s_0 + p_1 \cdot s_1 + \dots + p_\ell \cdot s_\ell$$

mit Wahrscheinlichkeiten $p_0, p_1, \dots, p_\ell \ge 0$ und $p_0 + p_1 + \dots + p_\ell = 1$. Aus der Menge S_i entsteht so die **Menge aller gemischten Strategien**

$$\bar{S}_i = [S_i] = [s_0, s_1, \dots, s_\ell] := \Big\{ \textstyle\sum_{k=0}^{\ell} p_k s_k \;\Big|\; p_k \ge 0,\ \sum_{k=0}^{\ell} p_k = 1 \Big\}.$$

Die Nutzenfunktion $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ setzen wir auf gemischte Strategien fort zu $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \mathbb{R}^n$ mit $\bar{u}|_S = u|_S$. Dies geschieht **linear in jeder Koordinate**, entsprechend dem **Erwartungswert**:

$$\bar{u}\big(\dots, \textstyle\sum_{k=0}^{\ell} p_k s_k, \dots\big) = \sum_{k=0}^{\ell} p_k \bar{u}(\dots, s_k, \dots)$$

Wir nennen $\bar{u}$ die affine **Fortsetzung** von u auf gemischte Strategien. Dies ist eine n–lineare Abbildung, eingeschränkt auf $\bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$.

Fortsetzung von reinen auf gemischte Strategien

Wir nennen S_i die Menge der **reinen Strategien** für Spieler i und entsprechend $[S_i] \supseteq S_i$ die Menge seiner **gemischten Strategien**.

Wir betrachten hier S_i als Basis des $\mathbb{R}$–Vektorraums $\mathbb{R}S_i$ und schreiben Wahrscheinlichkeitsverteilungen als Konvexkombination $s = \sum_k p_k s_k$.

Der **Träger** von $s \in [S_i]$ ist die Menge $\operatorname{supp}(s) := \{ s_k \mid p_k > 0 \} \subseteq S_i$ aller reinen Stratgien, die in s tatsächlich vorkommen (mit positiver Wkt).

Demnach ist die gemischte Strategie $s \in [S_i]$ genau dann rein, $s \in S_i$, wenn der Träger einpunktig ist, also $\operatorname{supp}(s) = \{s\} \subseteq S_i$. Andernfalls ist s **echt gemischt**, oder im Falle $\operatorname{supp}(s) = S_i$ sogar **voll gemischt**.

Geometrisch ist s eine Konvexkombination der Punkte $s_0, s_1, \dots, s_\ell$. Somit ist $[S_i]$ die konvexe Hülle der Eckpunkte $s_0, s_1, \dots, s_\ell$, also eine Strecke ($\ell = 1$) oder ein Dreieck ($\ell = 2$) oder ein Tetraeder ($\ell = 3$) oder allgemein ein ℓ–dimensionales **Simplex** mit $\ell + 1$ Eckpunkten.

🙂 Die genannte Schreibweise nutzt Analogien und hat sich bewährt. Das ist in erster Linie nicht nur eine mathematische Frage, sondern vor allem eine der Klarheit, der Bequemlichkeit und der jeweiligen Tradition.

Fortsetzung von reinen auf gemischte Strategien

Dual hierzu können wir s als Abbildung $p : S_i \to \mathbb{R} : s_k \mapsto p_k$ betrachten, mit Wahrscheinlichkeiten $p_0, p_1, \dots, p_\ell \ge 0$ und $p_0 + p_1 + \dots + p_\ell = 1$.

Interpretation: Die Strategie $s_k \in S_i$ wird mit Wkt $p_k \in [0, 1]$ ausgewählt. Das definiert das zugehörige WMaß $P : \mathfrak{P}(S_i) \to [0, 1] : A \mapsto \sum_{s_k \in A} p_k$.

Für endliche (oder allgemeiner: diskrete) Wahrscheinlichkeitsräume sind alle drei Beschreibungen äquivalent: Konvexkombination, Punktmassen, oder Maß. In jedem Falle genügt es, Punktmassen zu summieren.

Für allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume $(S, \mathscr{A}, P)$ nutzen wir später dankend die bewährten Werkzeuge der Maß- und Integrationstheorie. Diese technische Vervollkommnung ist hier zunächst noch nicht nötig.

Die Fortsetzung von den reinen auf die gemischten Strategien haben wir in den vorigen einfachen Spielen bereits durch Graphiken illustriert. Die folgenden Beispiele zeigen dies nochmal ausführlich.

Übung: Sei $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$ ein Nullsummenspiel, also $u_1 + u_2 = 0$. Ist dann die affine Fortsetzung $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \to \mathbb{R}^2$ ein Nullsummenspiel?

Bimatrix-Schreibweise für Zwei-Personen-Spiele

Wir betrachten ein Zwei-Personen-Spiel in strategischer Normalform

$$u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (s_1, s_2) \mapsto \big(\, u_1(s_1, s_2),\ u_2(s_1, s_2)\,\big)$$

mit Strategiemengen $S_1 = \{s_1^0, s_1^1, \dots, s_1^m\}$ und $S_2 = \{s_2^0, s_2^1, \dots, s_2^n\}$.
Die Auszahlungen (u_1, u_2) entsprechen zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{S_1 \times S_2}$.

$$s_1 = \sum_{i=0}^{m} x_i s_1^i \in \bar{S}_1, \quad x \in \Delta^m = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1} \,\middle|\, x_i \ge 0,\ \sum_{i=0}^{m} x_i = 1 \right\}$$

$$s_2 = \sum_{j=0}^{n} y_j s_2^j \in \bar{S}_2, \quad y \in \Delta^n = \left\{ \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, y_j \ge 0,\ \sum_{j=0}^{n} y_j = 1 \right\}$$

$$\bar{u}_1(s_1, s_2) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_i\, y_j\, \underbrace{u_1(s_1^i, s_2^j)}_{=:\, a_{ij}} = x^\intercal A\, y, \qquad A \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1)}$$

$$\bar{u}_2(s_1, s_2) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_i\, y_j\, \underbrace{u_2(s_1^i, s_2^j)}_{=:\, b_{ij}} = x^\intercal B\, y, \qquad B \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1)}$$

Kurzschreibweise $\tilde{u} : \Delta^m \times \Delta^n \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \big(\, x^\intercal A\, y,\ x^\intercal B\, y\,\big)$.

Bimatrix-Schreibweise für Zwei-Personen-Spiele

Die Grundideen der Spieltheorie sind bis hierher noch recht einfach, bedürfen aber bereits präziser Formulierungen und geeigneter Notation. Diese soll klar sein, zudem einfach und bequem, andernfalls verkommen unsere Definitionen und Rechnungen leicht zu Indexschlachten.

Für **endliche reelle Zwei-Personen-Spiele** kennen Sie Matrizen als besonders bequeme und effiziente Notation aus der Linearen Algebra.

Die Menge $\Delta^m = [e_0, e_1, \dots, e_m] \subset \mathbb{R}^{m+1}$ ist der **Standardsimplex**, also die konvexe Hülle der Standardbasis $e_0, e_1, \dots, e_m \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Diese **baryzentrischen Koordinaten** nutzen wir zur Parametrisierung für jeden Simplex mit beliebiger Eckenmenge $s_0, s_1, \dots, s_m$ vermöge $h : \Delta^m \to [s_0, s_1, \dots, s_m] : (x_0, x_1, \dots, x_m) \mapsto x_0 s_0 + x_1 s_1 + \dots + x_m s_m$.
Wir erhalten so $\tilde{u} = \bar{u} \circ (h_1 \times \dots \times h_n) : \Delta^{m_1} \times \dots \times \Delta^{m_n} \to \mathbb{R}^n$.

Simplizes sind geometrisch-topologisch besonders einfache Räume, daher auch der Name. Sie sind konvex und kompakt und homöomorph zum Ball $\mathbb{D}^m$ gleicher Dimension (E1G). Genau diese Eigenschaften werden wir im folgenden Existenzsatz von Nash (E1F) ausnutzen!

Kriterium für gemischte Nash–Gleichgewichte

Sei $u : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel, wie oben erklärt, und $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \cdots \times \bar{S}_n \to \mathbb{R}^n$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien. Der Strategievektor $s \in \bar{S}$ ist im Gleichgewicht für Spieler i, wenn gilt:

$$\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) = \max_{a \in \bar{S}_i} \bar{u}_i(a; s_{-i})$$

Lemma E1E: Kriterium für gemischte Nash–Gleichgewichte

Dank Linearität von $\bar{u}$ wird das Maximum in den Ecken angenommen:

$$\max_{a \in [S_i]} \bar{u}_i(a; s_{-i}) = \max_{e \in S_i} \bar{u}_i(e; s_{-i})$$

Genau dann ist s für Spieler i im Gleichgewicht, $s \in \mathrm{NE}_i(\bar{u})$, wenn gilt:

$$\operatorname{supp}(s_i) \subseteq \operatorname{Arg\,max}_{e \in S_i} \bar{u}_i(e; s_{-i})$$

Wir erhalten somit ein einfaches Kriterium:

$$\mathrm{NE}_i(\bar{u}) = \left\{ s \in \bar{S} \;\middle|\; \operatorname{supp}(s_i) \subseteq \operatorname{Arg\,max}_{e \in S_i} \bar{u}_i(e; s_{-i}) \right\}$$

Gilt dies für alle i, so ist s ein Nash–Gleichgewicht: $\mathrm{NE}(u) := \bigcap_i \mathrm{NE}_i(u)$.

Kriterium für gemischte Nash–Gleichgewichte

🙂 Dieses einfache Kriterium ist notwendig und hinreichend, also eine Charakterisierung aller Nash–Gleichgewichte. Es nutzt ganz wesentlich die Linearität von $\bar{u}$.

Gegeben sei $s \in \bar{S}$. Das Kriterium für $s \in \mathrm{NE}(\bar{u})$ ist einfach und direkt: Es genügt, s einzusetzen und endlich viele Ungleichungen zu prüfen!

Für jeden Spieler i prüfen wir folgende Bedingung: Jede reine Strategie im Träger von s_i ist eine beste Antwort auf die Gegenstrategie s_{-i}.

Ausführlich: Das Maximum $\max_{e \in S_i} \bar{u}_i(e; s_{-i})$ finden wir leicht, da die reine Strategiemenge S_i endlich ist. Im selben Durchgang konstruieren wir die Teilmenge $M_i = \operatorname{Arg\,max}_{e \in S_i} \bar{u}_i(e; s_{-i}) \subseteq S_i$ aller Maximierer. Es bleibt schließlich nur noch $\operatorname{supp}(s_i) \subseteq M_i$ zu prüfen.

Bitte beachten Sie: „supp“ steht hier für den **Träger** [engl./frz. *support*]. Dies ist nicht zu verwechseln mit dem **Supremum** „$\sup$“. Beides sind völlig verschiedene Dinge. Die sprachliche Nähe ist unglücklich.

⚠ Das sagt uns noch nicht, wie wir Nash–Gleichgewichte finden! Nash–Gleichgewichte zu prüfen ist leicht, eins/alle zu finden ist schwer.

Beispiel: Bach oder Strawinsky?

Ein Paar möchte ein Konzert besuchen: Alice mag lieber Strawinsky, Bob mag lieber Bach. Gar kein Konzert wäre für beide enttäuschend.

A \ B	Bach	Strawinsky
Bach	1 / 2	0 / 0
Strawinsky	0 / 0	2 / 1

In diesem Spiel gibt es genau zwei reine Nash–Gleichgewichte: Einerseits $(\text{Bach}, \text{Bach})$ und andererseits $(\text{Strawinsky}, \text{Strawinsky})$.

Die Ungleichgewichte $(\text{Bach}, \text{Strawinsky})$ und $(\text{Strawinsky}, \text{Bach})$ wären nicht rational, sie werden erwartungsgemäß nicht gespielt, oder nur selten, vorübergehend als Ausrutscher, und dann alsbald korrigiert.

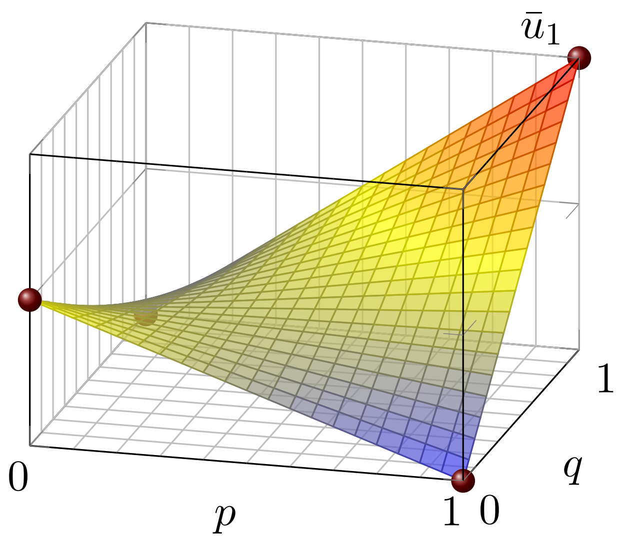
Hingegen können beide Nash–Gleichgewichte gleichermaßen gespielt werden, hier ist keines bevorzugt. Das Spiel ist hierin symmetrisch.

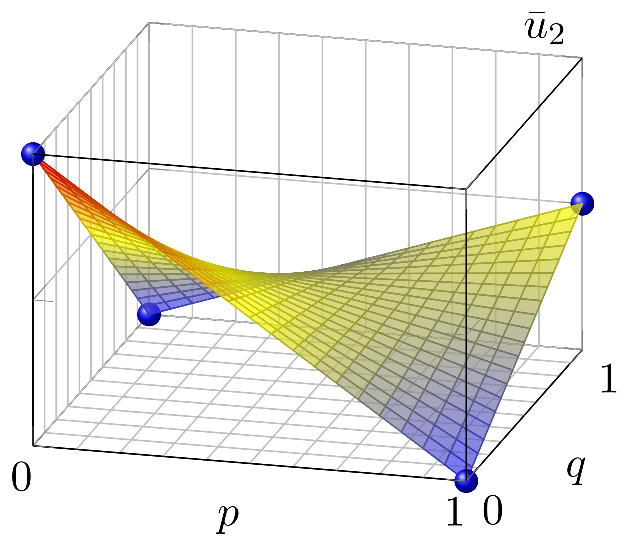
Beispiel: Bach oder Strawinsky?

Wir denken an folgendes Szenario: Alice und Bob haben sich vage für das Bach–Konzert verabredet. Sie können nun nicht mehr miteinander kommunizieren, doch jeder muss individuell seine Karte kaufen.

Bob will nicht wechseln, er ist wunschlos glücklich. Alice möchte zwar lieber in das Strawinsky–Konzert, aber alleine wird sie nicht wechseln. (Die umgekehrte Situation ist natürlich genauso gut vorstellbar.)

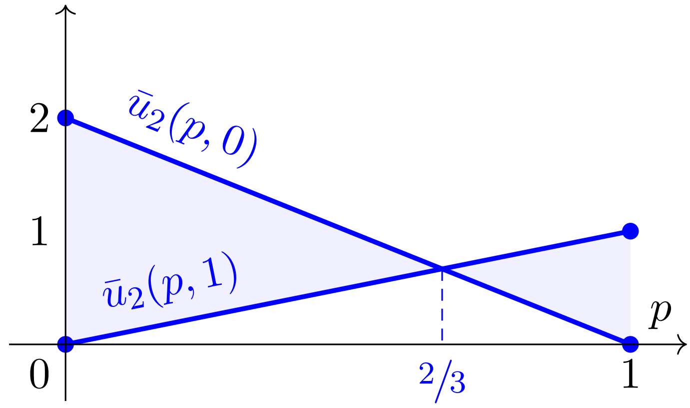
Sobald beide eine Einigung erzielt haben, sind sie daran gebunden!

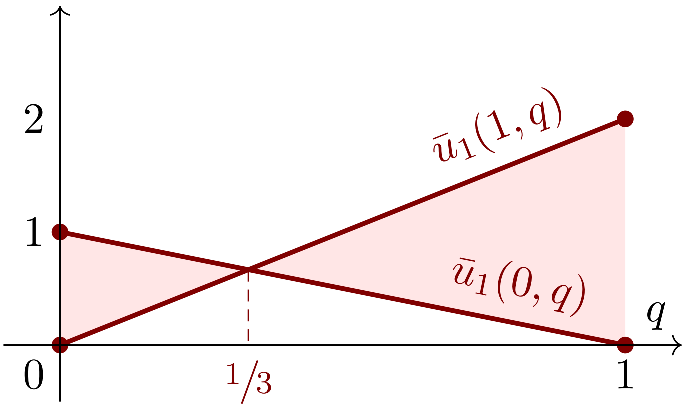


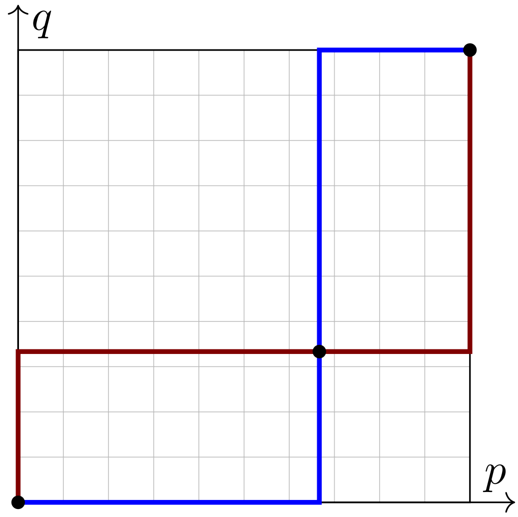


Beispiel: Bach oder Strawinsky?

A \ B	0	1
0	1, 2	0, 0
1	0, 0	2, 1







Beispiel: Bach oder Strawinsky?

Die beiden reinen Strategien bezeichnen wir hier mit $S_1 = S_2 = \{0, 1\}$. Als Erweiterung zu gemischten Strategien nutzen wir dann die beiden Einheitsintervalle $[S_1] = [S_2] = [0, 1]$ und erhalten das Bimatrixspiel

$$\bar{u} \;:\; [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2 \;:\; (p,q) \mapsto (\, \bar{u}_1(p,q),\, \bar{u}_2(p,q)\,).$$

Die Graphik für $\bar{u}_1(0,q)$ und $\bar{u}_1(1,q)$ zeigt die Fläche $\bar{u}_1$ von der Seite. Für jede von Bobs Strategien $q \in [0,1]$ liest Alice ihre beste Antwort ab: $p = 0$ für $q < 1/3$ und $p = 1$ für $q > 1/3$ sowie $p \in [0,1]$ für $q = 1/3$.

Die Graphik für $\bar{u}_2(p,0)$ und $\bar{u}_2(p,1)$ zeigt die Fläche $\bar{u}_2$ von der Seite. Für jede von Alice' Strategien $p \in [0,1]$ liest Bob seine beste Antwort ab: $q = 0$ für $p < 2/3$ und $q = 1$ für $p > 2/3$ sowie $q \in [0,1]$ für $p = 2/3$.

Im Diagramm unten rechts tragen wir beide Reaktions-„Funktionen" ein:

$$\begin{aligned} \mathrm{NE}_1(\bar{u}) &= \left\{\, (p,q) \in [0,1]^2 \;\middle|\; p \text{ ist eine beste Antwort auf } q \,\right\} \\ \mathrm{NE}_2(\bar{u}) &= \left\{\, (p,q) \in [0,1]^2 \;\middle|\; q \text{ ist eine beste Antwort auf } p \,\right\} \end{aligned}$$

Genauer gesagt sind dies eigentlich nur Relationen / Korrespondenzen. Ihre Schnittpunkte sind die Nash–Gleichgewichte: $\mathrm{NE} = \mathrm{NE}_1 \cap \mathrm{NE}_2$.

Beispiel: bleiben oder gehen?

E137

Sie hören einen schrecklich langweiligen Vortrag zur Spieltheorie und möchten lieber gehen, aber alleine aufzustehen wäre peinlich. Wenn Sie zu zweit aufstehen und gehen, dann wäre alles gut. Leider können Sie sich unter dem strengen Blick des Vortragenden nicht absprechen.

A \ B	bleiben	gehen
bleiben	-2 / -2	-2 / -5
gehen	-5 / -2	0 / 0

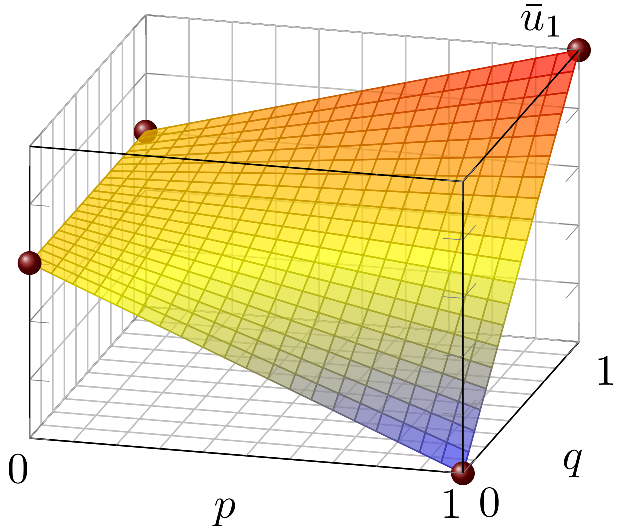
In diesem Spiel gibt es genau zwei reine Nash–Gleichgewichte: Einerseits (bleiben, bleiben) und andererseits (gehen, gehen).

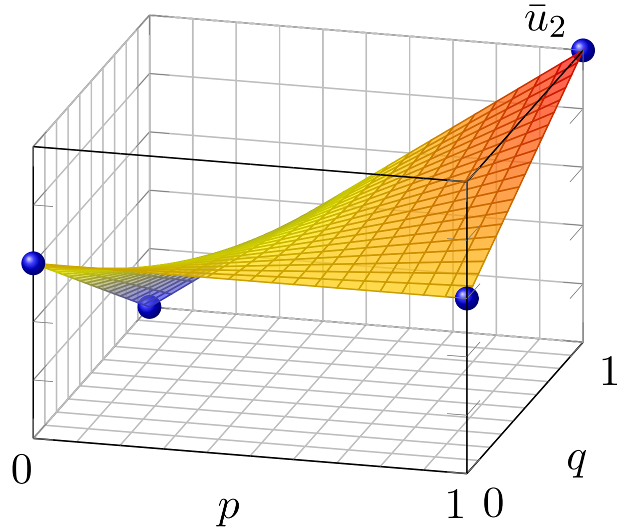
Ihre gute Erziehung versetzt beide Spieler zunächst in die Ausgangslage (bleiben, bleiben). Beide möchten eigentlich lieber gehen, aber ohne Absprache wird keiner den ersten Zug wagen. *Teile und herrsche!*

Beispiel: bleiben oder gehen?

E138

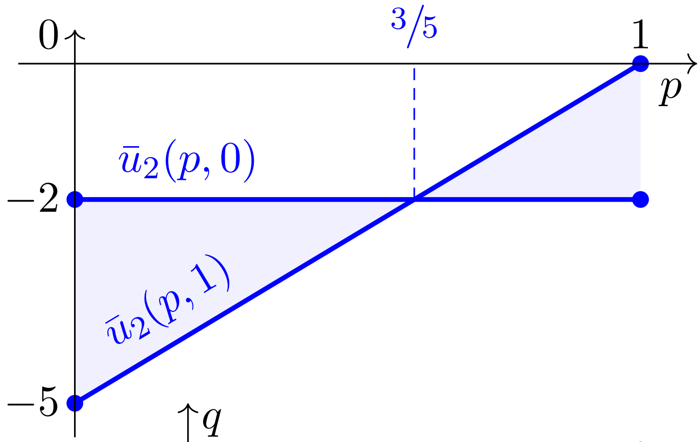
Alternatives Verhalten, je nach Tradition: Als erfahrene Studenten haben Sie zahllose schlechte Vorträge erlitten und gelernt, sich zu wehren. Sie wissen: Die Höflichkeit gebietet, zunächst zehn Minuten zu bleiben; wenn der Vortrag grottenschlecht ist, sollte man sofort danach gehen. Sie wissen das, und Sie wissen, dass alle anderen es auch wissen. In diesem Falle ersetzt das gemeinsame Wissen (*common knowledge*) die explizite Absprache: Nach genau zehn Minuten (gefühlte Ewigkeit) stehen alle gemeinsam auf und gehen. *Einigkeit macht stark!*

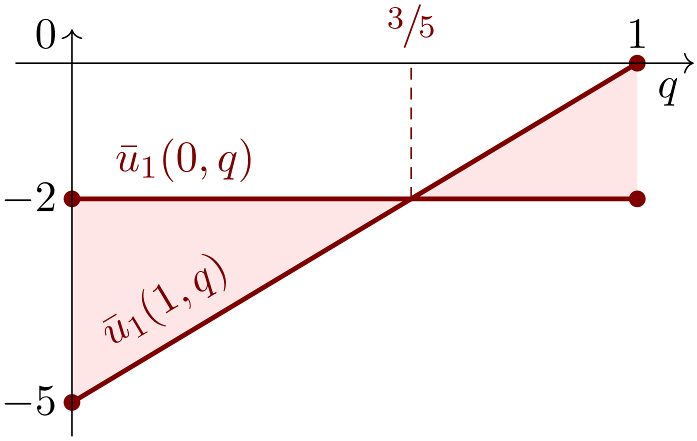


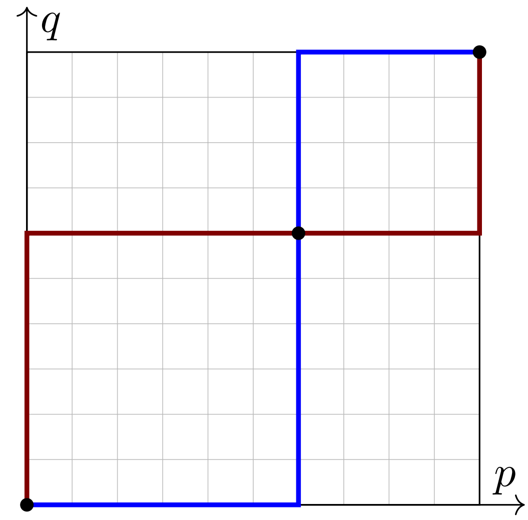


Beispiel: bleiben oder gehen?

A \ B	0	1
0	-2, -2	-2, -5
1	-5, -2	0, 0







Beispiel: bleiben oder gehen?

Die Graphik für $\bar{u}_1(0,q)$ und $\bar{u}_1(1,q)$ zeigt die Fläche $\bar{u}_1$ von der Seite. Für jede von Bobs Strategien $q \in [0,1]$ liest Alice ihre beste Antwort ab: $p = 0$ für $q < 3/5$ und $p = 1$ für $q > 3/5$ sowie $p \in [0,1]$ für $q = 3/5$.

Die Graphik für $\bar{u}_2(p,0)$ und $\bar{u}_2(p,1)$ zeigt die Fläche $\bar{u}_2$ von der Seite. Für jede von Alice' Strategien $p \in [0,1]$ liest Bob seine beste Antwort ab: $q = 0$ für $p < 3/5$ und $q = 1$ für $p > 3/5$ sowie $q \in [0,1]$ für $p = 3/5$.

Im Diagramm unten rechts tragen wir beide Reaktions-„Funktionen" ein:

$$\mathrm{NE}_1(\bar{u}) = \{\, (p,q) \in [0,1]^2 \mid p \text{ ist eine beste Antwort auf } q \,\}$$
$$\mathrm{NE}_2(\bar{u}) = \{\, (p,q) \in [0,1]^2 \mid q \text{ ist eine beste Antwort auf } p \,\}$$

Ihre Schnittpunkte sind die Nash–Gleichgewichte: $\mathrm{NE} = \mathrm{NE}_1 \cap \mathrm{NE}_2$.

☺ So können Sie graphisch jedes 2×2–Spiel lösen, ebenso $2 \times n$.

☺ Die reinen Nash–Gleichgewichte sind meist recht offensichtlich. Für die gemischten Gleichgewichte müssen Sie sorgfältig rechnen.

☺ Beachten Sie, wie die Symmetrie der Spiele in die Lösung eingeht. Diese Beobachtung illustriert ein allgemeines Prinzip, siehe Satz E2N.

Beispiel: Matching Pennies

Alice und Bob legen jeder verdeckt eine Münze auf den Tisch, dann wird aufgedeckt: Bei Gleichheit gewinnt Bob, bei Ungleichheit gewinnt Alice. (Das ähnelt dem Spiel *Schere-Stein-Papier*, ist aber noch simpler.)

A \ B	Kopf	Zahl
Kopf	-1 \ $+1$	$+1$ \ -1
Zahl	$+1$ \ -1	-1 \ $+1$

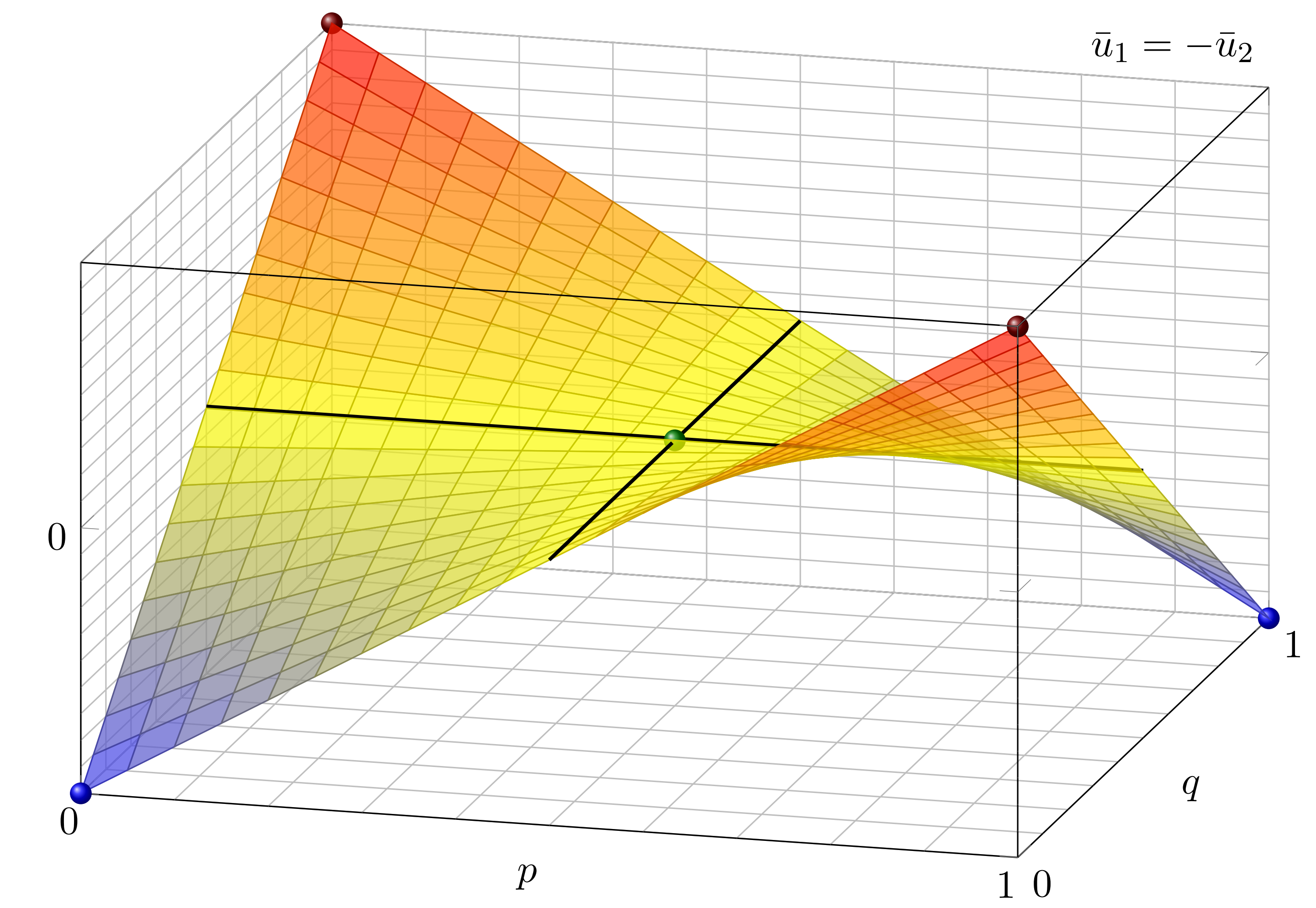
In diesem Spiel gibt es kein reines Nash–Gleichgewicht!
Erweiterung: Beide Spieler dürfen nun gemischte Strategien wählen!

Spieler A: $\quad [0,1] \ni p \quad \mapsto \quad s_p = (1-p)\cdot$ Kopf $+\, p \cdot$ Zahl

Spieler B: $\quad [0,1] \ni q \quad \mapsto \quad s_q = (1-q)\cdot$ Kopf $+\, q \cdot$ Zahl

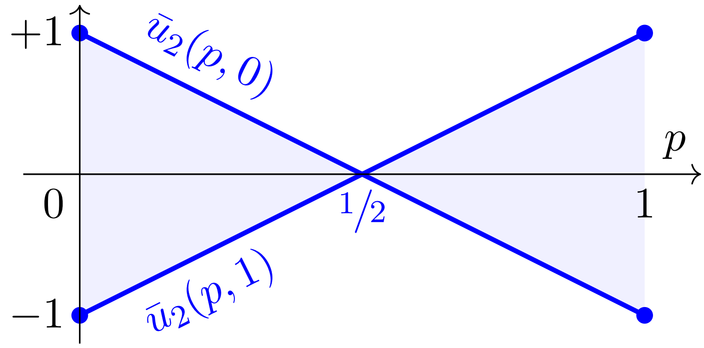
Die Nutzenfunktionen $u_1 = -u_2$ sind bilinear, ihr Graph ist eine Quadrik.

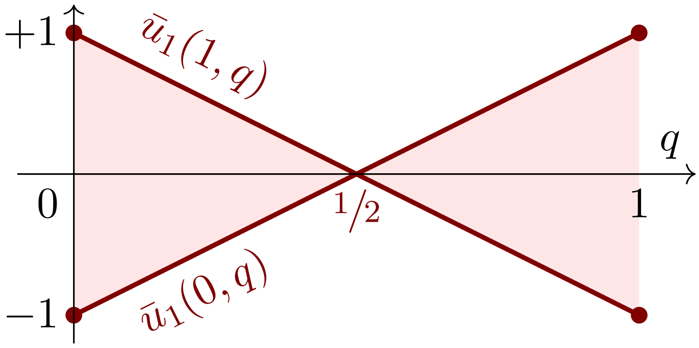
Beispiel: Matching Pennies

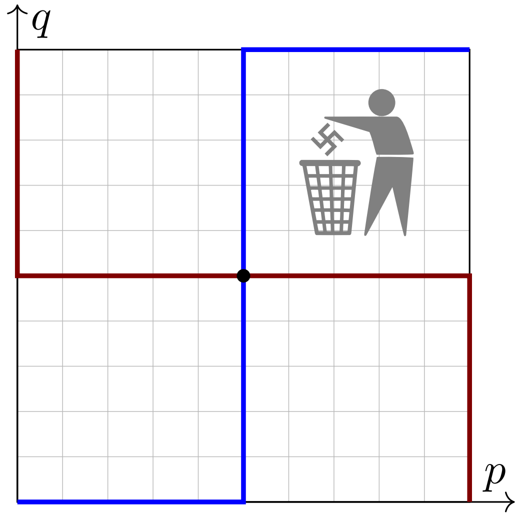


Beispiel: Matching Pennies

A \ B	0	1
0	$+1$ / -1	-1 / $+1$
1	-1 / $+1$	$+1$ / -1







Beispiel: Matching Pennies

Wir betrachten hier ein Nullsummenspiel, denn es gilt $u_1 + u_2 = 0$.

Für jede von Bobs Strategien $q \in [0,1]$ liest Alice ihre beste Antwort ab: $p = 1$ für $q < 1/2$ und $p = 0$ für $q > 1/2$ sowie $p \in [0,1]$ für $q = 1/2$.

Für jede von Alice' Strategien $p \in [0,1]$ liest Bob seine beste Antwort ab: $q = 0$ für $p < 1/2$ und $q = 1$ für $p > 1/2$ sowie $q \in [0,1]$ für $p = 1/2$.

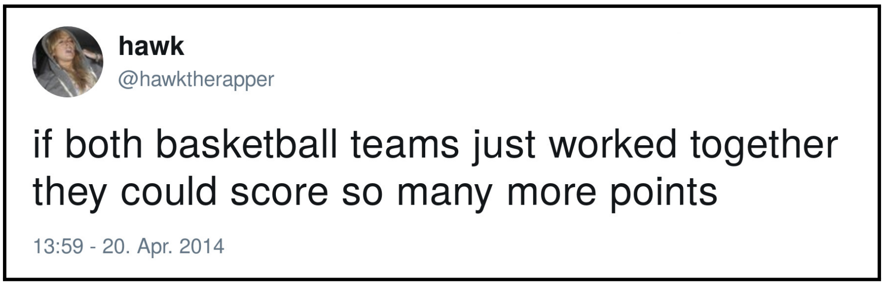
☺ Bob trachtet nach Gleichheit, Alice hingegen wünscht Ungleichheit. Das überträgt sich von reinen auf gemischte Strategien, wie gezeigt.

Im Diagramm unten rechts tragen wir beide Reaktions-„Funktionen" ein und lesen daran das einzige, hier gemischte Nash–Gleichgewicht ab.

Es ist unglücklich, dass in diesem Beispiel ein Hakenkreuz entsteht, aber diese geometrische Figur tritt hier nun einmal unvermeidlich auf. Nach der Vorlesung wird es ordnungsgemäß entsorgt. (siehe §86 StGB Verbreiten von Propagandamitteln verfassungswidriger Organisationen)

Das ist nur ein Miniatur(bei)spiel, aber durchaus häufig zu beobachten, etwa im Sport, wenn Angreifer und Verteidiger ihre Strategien wählen: Elfmeter im Fußball, koordinierte Spielzüge in allen Teamsportarten, etc.

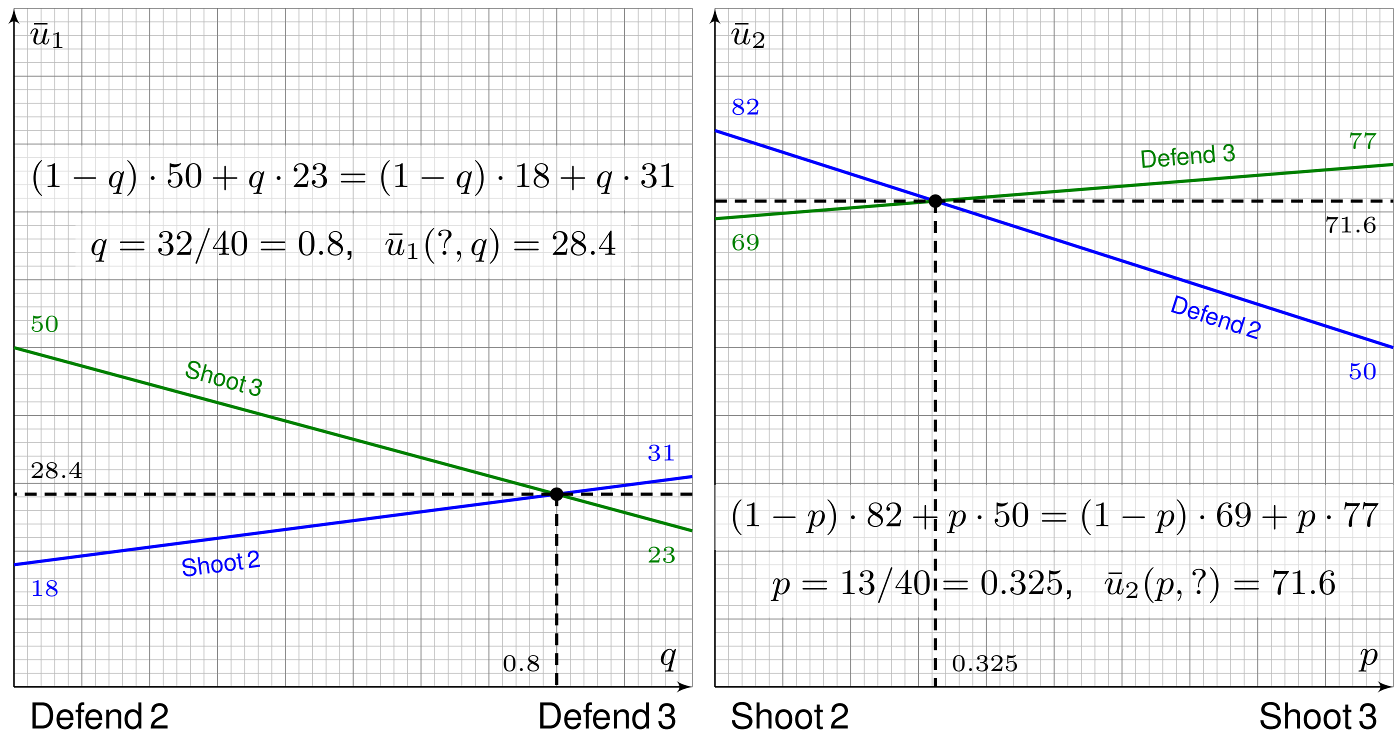
Anwendung: Basketball Endgame nach Ruminski


hawk
@hawktherapper
if both basketball teams just worked together they could score so many more points
13:59 - 20. Apr. 2014

In den letzten 20 Sekunden liegt das ballführende Team 2 Punkte hinten. Der Coach nimmt eine Auszeit und legt die Strategie für sein Team fest. Sie spielen ihre Zeit zu Ende und lancieren noch genau einen Versuch. Riskant: 3 Punkte werfen und damit sofort gewinnen. Sicher: 2 Punkte werfen und die Verlängerung erzwingen, mit 50-50-Gewinnchance.

Erfolgstatistik (gerundet):	A \ B	Defend 2	Defend 3
offen 62%, bedrängt 36%	Shoot 2	18 / 82	31 / 69
offen 50%, bedrängt 23%	Shoot 3	50 / 50	23 / 77

Anwendung: Basketball Endgame nach Ruminski



Verteidigt Team B mehr als 80% auf 3er, sollte Team A auf 2er spielen. Verteidigt B hingegen weniger als 80% auf 3er, sollte A auf 3er spielen.

Spielt Team A mehr als 32.5% auf 3er, sollte Team B auf 3er verteidigen. Spielt A hingegen weniger als 32.5% auf 3er, sollte B auf 2er verteidigen.

Anwendung: Basketball Endgame nach Ruminski

Diese Endspielanalyse ist stark vereinfacht, aber doch realistisch genug. Sie trifft den Kern des Problems und wird tatsächlich ernsthaft diskutiert, siehe etwa `mindyourdecisions.com/blog/2012/06/19/game-theory`.

Naiv scheint es für das angreifende Team A besser, auf 3er zu spielen, doch die Erfolgschancen hängen stark von Team Bs Verteidigung ab.

Spielte Team A allzu oft und damit vorhersehbar auf den 3er, so würde eine entsprechende 3er-Abwehr die Erfolgschancen stark reduzieren. Spielte Team A hingegen allzu oft und damit vorhersehbar auf den 2er, so würde eine entsprechende 2er-Abwehr die Chancen reduzieren.

Die Gleichgewichtsstrategie $p = 32.5\%$ für Team A lässt idealerweise das Team B im Ungewissen, ob sie 2er oder 3er verteidigen sollen.

Für das verteidigende Team B scheint vorrangig, den 3er zu verhindern, doch damit geben sie Team A mehr Raum unterm Korb für den 2er. Verteidigt Team B zu oft 2er, so geben sie A zu viel Raum für 3er. Die Gleichgewichtsstrategie $q = 80\%$ für Team B lässt idealerweise das Team A im Ungewissen, ob sie auf 2er oder 3er spielen sollen.

Anwendung: Basketball Endgame nach Ruminski

Die Beschreibung des Endspiels in Normalform scheint hier angebracht: Beide Coaches (bzw. Teams) entscheiden in der letzten Auszeit simultan und unabhängig über die zu spielende Strategie. Jedes Team wird sich an diese Absprache halten, kein Spieler sollte egoistisch improvisieren.

Spiele in Normalform, speziell der einfachste Fall einer 2×2–Bimatrix, sind zugegeben extrem vereinfachte Lehrbeispiele. Doch sie illustrieren bereits eine erstaunliche Vielfalt an Phänomenen und erklären typische Muster der Spieltheorie, manchmal auch in ihren realen Anwendungen.

Das Basketball-Endspiel kommt oft genug vor, um interessant zu sein. Die vereinfachte Situation reduziert die relevanten Strategien auf zwei. Hierzu liegen im Basketball umfangreiche Statistiken vor, sodass wir realistische Daten einsetzen können und nicht mutmaßen müssen.

Unser Ergebnis ist intuitiv plausibel. Die Rechnung gibt zudem eine recht präzise Handlungsanweisung an den Trainerstab um das Team. In den letzten Jahren hat die mathematische Analyse im Basketball stark an Akzeptanz gewonnen. Sie kann den Unterschied machen.

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

☹ *Schere-Stein-Papier* hat kein Gleichgewicht in reinen Strategien.

☺ Hingegen gibt es ein Gleichgewicht (s_1, s_2) in gemischten Strategien:

$$s_1 = s_2 = \frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Stein} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier}$$

Gleiches gilt für Matching Pennies und das Basketball Endgame!
In der Fortsetzung auf gemischte Strategien haben die Spieler mehr Möglichkeiten. Wir würden hoffen, so auch Gleichgewichte zu finden. Der Satz von Nash besagt genau das und garantiert Gleichgewichte:

Satz E1F: Existenzsatz für Gleichgewichte, John Nash 1950

Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel, wie oben erklärt, und $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \mathbb{R}^n$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.

Dann besitzt das Spiel $\bar{u}$ mindestens ein Nash–Gleichgewicht.

☺ Für jedes endliche Spiel ist vernünftiges Verhalten immer möglich.

☺ Allgemeine Strukturaussage, darauf können wir weiter aufbauen.

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

Der Existenzsatz von Nash erfüllt zwei wesentliche Aufgaben:

(1) Der Satz garantiert, dass jedes endliche Spiel vernünftiges Verhalten ermöglicht. In jedem konkreten Einzelfall kann man dies überprüfen und (mühsam) lösen. Die allgemeine Aussage ist bequem und beruhigend: Wir können durch den Satz Rechenzeit sparen, wo sie nicht nötig ist.

Die *Existenz* einer Lösung ist oft der entscheidende erste Schritt. Wir können sicher sein, dass unsere Suche erfolgreich sein wird. Unsere Mühe wird belohnt. Unsere Hoffnung wird erfüllt.

(2) Darauf aufbauend können wir allgemeine Aussagen ableiten. Das prominenteste Beispiel ist von Neumanns Minimax-Satz E2D, der Hauptsatz für Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele.

Manchmal genügt uns zu wissen, dass Gleichgewichte existieren. Dies gelingt *ohne* jedesmal mühsam explizit rechnen zu müssen. Wir müssen nicht befürchten, über die leere Menge zu sprechen: Wir haben eine gemeinsame *Strukturaussage* für all dieser Spiele!

Nashs Existenzsatz besticht durch Eleganz und Allgemeinheit.
Dieses Ergebnis ist ein grundlegender erster Schritt der Theorie,
er ist gewissermaßen der Ausgangspunkt der modernen Spieltheorie.
Für diese und weitere Arbeiten bekam Nash 1994 den Nobelpreis,
genauer: Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften.

Umgekehrt gibt es natürlich viele Situationen, in denen wir schließlich explizit rechnen wollen oder müssen. Nashs Satz ist zunächst eine reine Existenzaussage und für die konkrete Rechnung leider wenig hilfreich. Immerhin garantiert der Satz, dass sich unsere Mühe lohnen wird!

Wir wollen rechnen! Für $2 \times n$–Spiele gelingt dies wie in §E3 erklärt. Speziell für Nullsummenspiele werden wir weitere Techniken entwickeln: Von Neumanns Hauptsatz E2D charakterisiert Nash–Gleichgewichte als Min-Maximierer und Max-Minimierer. Wir haben nun Werkzeuge.

Die explizite Berechnung ist ebenfalls ein extrem spannendes Thema: Es mündet in die Lineare Optimierung, alias Lineare Programmierung, und wird uns viel Freude bereiten. Das alles ist schöne Mathematik!

Der Mathematiker John von Neumann und der Wirtschaftswissenschaftler Oskar Morgenstern veröffentlichten 1944 ihr Buch *Theory of Games and Economic Behavior*. Damit legten sie das Fundament der Spieltheorie, insbesondere für den Spezialfall der Nullsummenspiele aufbauend auf von Neumanns Minimax-Satz E2D.

> *I thought there was nothing worth publishing until the Minimax Theorem was proved. As far as I can see, there could be no theory of games without that theorem.* (John von Neumann, 1953)

Das ist ein wichtiger Spezialfall, aber bei weitem nicht ausreichend, denn die meisten realen Spiele haben nicht konstante Summe.
Für den allgemeinen Fall fehlten daher zunächst die Werkzeuge.

Definition und Existenz von Nash–Gleichgewichten stammen aus Nashs Dissertation *Non-cooperative Games* von 1950. Dieses Konzept geht weit über Nullsummenspiele hinaus und ist bis heute grundlegend für die erfolgreiche Weiterentwicklung der Spieltheorie.

Brouwers Fixpunktsatz

☺ Die Spieltheorie mobilisiert und nutzt nahezu alle mathematischen Teildisziplinen. Hier benötigen wir folgende Ergebnisse der Topologie:

Proposition E1G: Homöomorphie der konvexen Körper

Jede kompakte konvexe Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ mit nicht-leerem Inneren ist homöomorph zum Einheitsball $\mathbb{D}^n = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \le 1 \,\}$. Für $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex kompakt gilt $X = \emptyset$ oder $X \cong \mathbb{D}^m$ mit $0 \le m \le n$.

Satz E1H: Fixpunktsatz von Brouwer, 1909

Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ hat mindestens einen Fixpunkt, das heißt, es existiert ein Punkt $a \in \mathbb{D}^n$ mit der Eigenschaft $f(a) = a$.

Für $\mathbb{D}^1 = [-1, 1]$ genügt Zwischenwertsatz. (Übung! Erstes Semester)
Allgemein $n \in \mathbb{N}$: Sperners Lemma (Topologie, viertes Semester), Abbildungsgrad (Algebraische Topologie, fünftes Semester)

☺ Jedes konvexe Kompaktum $\emptyset \ne X \subset \mathbb{R}^n$ hat die Fixpunkteigenschaft! Nicht konvex: $X = \mathbb{S}^n$, $f(x) = -x$. Nicht kompakt: $X = \mathbb{R}^n$, $f(x) = x + v$.

Brouwers Fixpunktsatz

Homöomorphie $X \cong \mathbb{D}^n$ bedeutet, es gibt zueinander inverse stetige Abbildungen $g : X \to \mathbb{D}^n$ und $h : \mathbb{D}^n \to X$ mit $h \circ g = \mathrm{id}_X$ und $g \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{D}^n}$.

Können Sie eine Tasse Kaffee so gründlich umrühren, dass kein Punkt bleibt wo er war? Erstaunlich aber wahr: Das ist unmöglich!

Fixpunktsätze wie dieser sind wichtige Werkzeuge der Mathematik. Sie kennen Banachs Fixpunktsatz D2A für kontraktive Abbildungen. Er garantiert Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunkts, zudem bietet er eine effiziente Approximation mit expliziter Fehlerschranke.

Der Fixpunktsatz von Brouwer hingegen ist leider nicht konstruktiv: Er garantiert die Existenz eines Fixpunkts, verrät uns aber nicht wo. (Brouwer war ein vehementer Verfechter konstruktiver Prinzipien; sein berühmtestes Resultat ist tragischerweise nicht konstruktiv.)

Bitte beachten Sie, dass es durchaus mehrere Fixpunkte geben kann, extrem für $\mathrm{id} : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$. Der Ball $\mathbb{D}^n$ als Start und Ziel ist wesentlich: Nicht jeder Raum hat die Fixpunkteigenschaft. Hingegen ist der Satz bei der Funktion $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ sehr großzügig: sie muss nur stetig sein.

Definition E1I: konvex und sternförmig

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Die **Verbindungsstrecke** zwischen Punkten $a, b \in V$ ist die Teilmenge $[a, b] = \{\, (1-t)a + tb \mid t \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le 1 \,\} \subseteq V$.

Eine Teilmenge $X \subseteq V$ heißt **konvex**, falls gilt: $\forall a, b \in X : [a, b] \subseteq X$, und **sternförmig** zum Zentrum $a \in X$, falls gilt: $\forall b \in X : [a, b] \subseteq X$.

Satz E1J: Zentralprojektion

(0) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sternförmig zum Zentrum $a \in X^\circ$. Für jeden Randpunkt $b \in \partial X$ gelte Sichtbarkeit $[a, b] \cap \partial X = \{b\}$. Dann existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(X) = \mathbb{D}^n$.

(1) Verschärfung zu bilipschitz: Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sternförmig bezüglich jedes Punktes $a \in B(a_0, \varepsilon)$ für ein $a_0 \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so existiert $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ bilipschitz mit $h(X) = \mathbb{D}^n$.

(2) Jeder konvexe Körper $X \subset \mathbb{R}^n$, das heißt konvex, kompakt mit nicht-leerem Inneren $X^\circ \neq \emptyset$, ist bilipschitz-homöomorph zu $\mathbb{D}^n$.

Beweis: (0) Nach Translation können wir $a = 0$ annehmen. Wir haben $B(0, \varepsilon) \subset X \subseteq \bar{B}(0, R)$ für geeignete Konstanten $0 < \varepsilon \le R$ und somit $\rho : \mathbb{S}^{n-1} \to [\varepsilon, R] : s \mapsto \sup\{\, r \in \mathbb{R}_{\ge 0} \mid rs \in X \,\}$, $\delta X \cap \mathbb{R}_{\ge 0} \cdot s = \{\rho(s) \cdot s\}$.

Die Zentralprojektion $f : \partial X \to \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto x/|x|$ ist wohldefiniert dank $0 \notin \partial X$, zudem stetig, bijektiv dank $f^{-1}(s) = \rho(s) \cdot s$, dank Kompaktheit also ein Homöomorphismus. Insbesondere ist $\rho : s \mapsto |f^{-1}(s)|$ stetig.

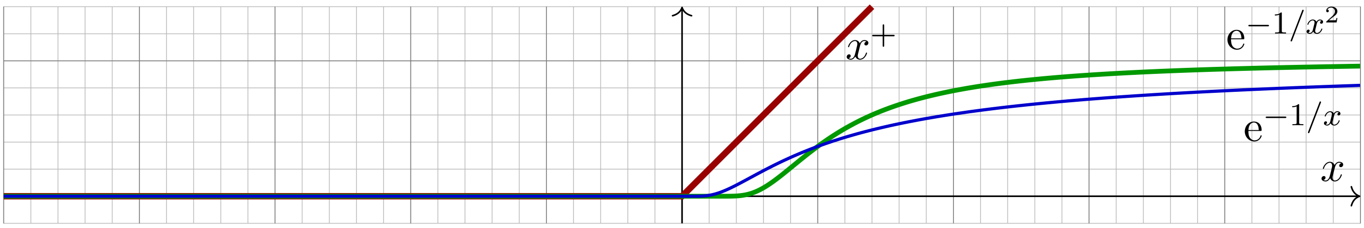
Wir erhalten daraus zueinander inverse Bijektionen

$$h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} x/\rho(x/|x|) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

$$k : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} x \cdot \rho(x/|x|) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Beide sind stetig in $x \neq 0$, als Komposition stetiger Abbildungen. Stetigkeit im Punkt 0 gilt dank $|h(x)| \le |x|/\varepsilon$ und $|k(x)| \le |x| \cdot R$. Demnach ist $(h, k) : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ ein (Auto-)Homöomorphismus. Zudem gilt $h(X) \subseteq \mathbb{D}^n$ und $k(\mathbb{D}^n) \subseteq X$, also $(h, k) : X \cong \mathbb{D}^n$. $\boxed{\text{QED}}$

Hilfsfunktion zum stetigen Abschneiden [*cutoff*]



Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $h(x) = 0$ für $x \le 0$ und $h(x) > 0$ für $x > 0$. Jede solche Funktion nennen wir **Abschneidung** [*cutoff function*].

Der **Positivteil** von $x \in \mathbb{R}$ ist $x^+ = x$ für $x \ge 0$ und $x^+ = 0$ für $x \le 0$. Mit dem **Negativteil** $x^- = (-x)^+$ gilt $|x| = x^+ + x^-$ und $x = x^+ - x^-$.

Die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^+$ ist stetig. Ebenso genügt die Funktion $h(x) = (x^+)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$; sie ist n-fach stetig differenzierbar für $\alpha > n$.

Zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ haben wir die bemerkenswerte **glatte Funktion**

$$h_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^\alpha} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \le 0. \end{cases}$$

☺ Diese ist nicht nur stetig oder $1, 2, 3, \dots$ mal stetig differenzierbar, sondern tatsächlich beliebig oft differenzierbar, also $\mathscr{C}^\infty$–glatt.

Hilfsfunktion zum glatten Abschneiden [*cutoff*]

Diese bemerkenswerte Funktion h_α hat erstaunliche Eigenschaften:

☺ Sie ist überall auf $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ analytisch, also lokal um jeden Punkt durch eine Potenzreihe darstellbar. Auf $\mathbb{R}_{<0}$ ist dies trivial, auf $\mathbb{R}_{>0}$ gilt es dank Komposition analytischer Funktionen. An der Klebestelle 0 ist die Funktion h_α immerhin noch $\mathscr{C}^\infty$–glatt, aber nicht mehr analytisch.

Diese berühmten Funktionen dienen oft als mahnendes Gegenbeispiel:

⚠ Nicht jede $\mathscr{C}^\infty$–Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lässt sich in eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ entwickeln: Die zu f gehörige Taylor–Reihe kann divergieren! Selbst wenn sie konvergiert, so nicht unbedingt gegen f!

☺ Die Analysis nutzt die Funktion h_α auch konstruktiv als Werkzeug, etwa zur Konstruktion exotischer Lösungen der Wärmeleitungsgleichung (Andrei Tychonov 1935). Aus h_α konstruieren wir $\mathscr{C}^\infty$–glatte Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto h_\alpha(x-a) \cdot h_\alpha(b-x)$ mit kompaktem Träger $[a, b]$. Diese Testfunktionen dienen als Grundlage für die Theorie der Distributionen. Hierfür erhielt Laurent Schwartz 1950 die Fields-Medaille.

Ist diese Funktion wirklich glatt?

🙂 Die Funktion h_α ist schön und wichtig und verdient eine Würdigung:

Aufgabe: Sei $g:\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) := c_1 x^{e_1} + c_1 x^{e_2} + \dots + c_n x^{e_n}$, mit Koeffizienten $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ und Exponenten $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{R}$, und

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \begin{cases} g(x)\,\mathrm{e}^{-1/x^\alpha} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \le 0. \end{cases}$$

(1) Ist f stetig? in $x \ne 0$? in $x = 0$? differenzierbar? in $x \ne 0$? in $x = 0$? Wie rechnet man die Ableitung aus? in $x \ne 0$? in $x = 0$? Zeigen Sie:

$$f'(x) = \begin{cases} \left[g'(x) + g(x) \cdot \alpha/x^{\alpha+1}\right] \mathrm{e}^{-1/x^\alpha} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \le 0. \end{cases}$$

(2) Ist f stetig diff'bar? zweimal? beliebig oft? also $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

(3) Berechnen Sie die Taylor–Reihe der Funktion f um $x = 0$. Konvergiert die Taylor–Reihe? Konvergiert sie gegen f? Ist die Funktion f analytisch? in $x \ne 0$? in $x = 0$?

Ist diese Funktion wirklich glatt?

Lösung: (1) In jedem Punkt $x \ne 0$ ist f stetig / glatt / analytisch, denn dort ist f eine Komposition stetiger / glatter / analytischer Funktionen. Die angegebene Ableitung $f'(x)$ folgt aus Produkt- und Kettenregel. Es bleibt nur noch das Verhalten in $x = 0$ zu klären. Für $x \searrow 0$ gilt:

$$f(x) = g(x) \Big/ \left(1 + \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{2!x^{2\alpha}} + \frac{1}{3!x^{3\alpha}} + \frac{1}{4!x^{4\alpha}} + \dots\right) \;\to\; 0$$

Für $x \nearrow 0$ gilt $f(x) = 0 \to 0$. Somit ist f stetig in 0. Für $x \searrow 0$ gilt:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{g(x)}{x} \Big/ \left(1 + \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{2!x^{2\alpha}} + \dots\right) \;\to\; 0$$

Rechtsseitig gilt $f'(0+) = 0$. Linksseitig gilt trivialerweise $f'(0-) = 0$. Also ist f tatsächlich differenzierbar in 0, und die Ableitung ist $f'(0) = 0$.

(2) Die Ableitung f' ist von derselben Form, dank (1) also differenzierbar. Per Induktion ist f somit beliebig oft differenzierbar, kurz $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(3) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(k)}(0) = 0$. Die Taylor–Reihe in 0 ist also $T(x) = 0$. Sie konvergiert, aber nicht gegen $f \ne 0$! Somit ist f in 0 nicht analytisch.

Konstruktion der Nash–Funktion

Zum Strategievektor $s = (s_1, \dots, s_n) \in \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ sei $\bar{u}_i^s : \bar{S}_i \to \mathbb{R} : x \mapsto \bar{u}_i(s_1, \dots, s_{i-1}, x, s_{i+1}, \dots, s_n)$ und weiter

$$S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell\}, \quad s_i = \sum\nolimits_k p_i^k s_i^k, \quad \delta_i^k := h\big[\bar{u}_i^s(s_i^k) - \bar{u}_i^s(s_i)\big] \geq 0,$$

$$\check{s}_i := \sum\nolimits_k \check{p}_i^k s_i^k \text{ mit } \check{p}_i^k := \frac{p_i^k + \delta_i^k}{1 + \sum_j \delta_i^j}, \quad \text{also } \check{p}_i^k \geq 0 \text{ und } \sum\nolimits_k \check{p}_i^k = 1.$$

Lemma E1K: Gleichgewichte als Fixpunkte

Zum Spiel u bzw. $\bar{u}$ konstruieren wir so die stetige **Nash–Funktion** $f : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n : s = (s_1, \dots, s_n) \mapsto \check{s} = (\check{s}_1, \dots, \check{s}_n)$.
Fixpunkte von f sind Nash–Gleichgewichte von $\bar{u}$, also $\operatorname{fix}(f) = \operatorname{NE}(\bar{u})$.

Beweis: „$\supseteq$“: Klar nach Konstruktion. „$\subseteq$“: Sei $s = f(s)$ ein Fixpunkt.
Für $s_i = \sum_k p_i^k s_i^k$ gilt $\bar{u}_i^s(s_i) = \sum_k p_i^k \bar{u}_i^s(s_i^k)$ nach Definition von $\bar{u}$.
Es gibt einen Index k mit $p_i^k > 0$ und $\bar{u}_i^s(s_i^k) \leq \bar{u}_i^s(s_i)$, somit $\delta_i^k = 0$.
Aus $\check{p}_i^k = p_i^k$ folgt $\delta_i^j = 0$ für alle $j = 0, 1, \dots, \ell$, also $\bar{u}_i^s(s_i^j) \leq \bar{u}_i^s(s_i)$.
Demnach gilt $\bar{u}_i^s(s_i) = \max \bar{u}_i^s$; jede Strategie s_i ist beste Antwort. QED

Konstruktion der Nash–Funktion

Dieses Lemma beweist Nashs Existenzsatz E1F für Gleichgewichte!

☺ Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel. Zur affinen Fortsetzung $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \mathbb{R}^n$ suchen wir Nash–Gleichgewichte. Die Nash–Funktion $f : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$ ist stetig und ihre Fixpunkte sind genau die ersehnten Nash–Gleichgewichte. Dank Brouwers Fixpunktsatz E1H existiert ein Fixpunkt.

☺ Warum können wir den Fixpunktsatz von Brouwer auf f anwenden? Wir setzen hier voraus, dass jede reine Strategiemenge S_i endlich ist, geschrieben $S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell\}$. Die Menge $\bar{S}_i = [s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell] \cong \mathbb{D}^\ell$ der gemischten Strategien ist ein Simplex, also konvex und kompakt, somit homöomorph zu einem Ball. Das Produkt $\bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$ ebenso.

☺ Dieser geniale Beweis ist in wenigen Zeilen hingeschrieben und so gesehen leicht, ich finde ihn dennoch extrem raffiniert. Wenn Sie länger darüber nachdenken, werden Sie ihn schließlich recht natürlich finden: Die Nash–Funktion f beschreibt eine Optimierung durch *Trial and Error*, die wir in unseren Experimenten beobachten bzw. intuitiv anwenden.

Konstruktion der Nash–Funktion

☺ Was bedeutet diese geschickt konstruierte Nash–Funktion f? Glücklicherweise können wir die Funktion verstehen und so merken:

Die Größe $\delta_i^k \ge 0$ gibt an, um wie viel sich Spieler i verbessern kann, wenn er seine gemischte Strategie s_i durch die reine Strategie s_i^k ersetzt. Dies entspricht einer der Ecken des Simplex $\bar{S}_i$; im Falle $\delta_i^k > 0$ ist die Ecke s_i^k attraktiv. Die verbesserte Strategie $s \mapsto \check{s}$ wird neu gemischt: attraktive Ecken werden stärker gewichtet, unattraktive schwächer.

☺ Falls gewünscht können wir die Nash–Funktionen f sogar glätten.

Statt $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^+$ ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x^+)^2$ stetig differenzierbar. Wir können sogar eine beliebig oft differenzierbare Funktion wählen, etwa $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \exp(-1/x^\alpha)$ für $x > 0$ und $x \mapsto 0$ für $x \le 0$. Damit wird unsere Nash–Funktion f sogar $\mathscr{C}^\infty$–glatt!

☺ Dieser schöne Beweis ist **instruktiv**, aber leider nicht **konstruktiv**. Er garantiert die Existenz von Lösungen, liefert uns aber keine Methode, diese zu finden oder zu approximieren (wie etwa Banachs Fixpunktsatz). Effiziente Algorithmen sind daher ein eigenes Thema für sich.

Illustration der Nash–Funktion

Wir illustrieren die Nash–Funktion f aus dem Beweis im kleinsten Fall: zwei Spieler mit je zwei reinen Strategien, $S_1 = \{s_1^0, s_1^1\}$, $S_2 = \{s_2^0, s_2^1\}$. Die gemischten Strategien $s_1 = (1-p)s_1^0 + ps_1^1$ und $s_2 = (1-q)s_2^0 + qs_2^1$ parametrisieren wir hierbei durch die beiden Parameter $(p,q) \in [0,1]^2$. Die Auszahlungsfunktion $\tilde{u} : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_1(p,q) &= a_{00}(1-p)(1-q) + a_{10}p(1-q) + a_{01}(1-p)q + a_{11}pq \\
\tilde{u}_2(p,q) &= b_{00}(1-p)(1-q) + b_{10}p(1-q) + b_{01}(1-p)q + b_{11}pq
\end{aligned}$$

Die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ aus dem Beweis ist dann:

$$\check{p} = f_1(p,q) = \frac{p + [\tilde{u}_1(1,q) - \tilde{u}_1(p,q)]^+}{1 + [\tilde{u}_1(0,q) - \tilde{u}_1(p,q)]^+ + [\tilde{u}_1(1,q) - \tilde{u}_1(p,q)]^+} \in [0,1]$$

$$\check{q} = f_2(p,q) = \frac{q + [\tilde{u}_2(p,1) - \tilde{u}_2(p,q)]^+}{1 + [\tilde{u}_2(p,0) - \tilde{u}_2(p,q)]^+ + [\tilde{u}_2(p,1) - \tilde{u}_2(p,q)]^+} \in [0,1]$$

Als Komposition stetiger Funktionen ist f offensichtlich stetig.

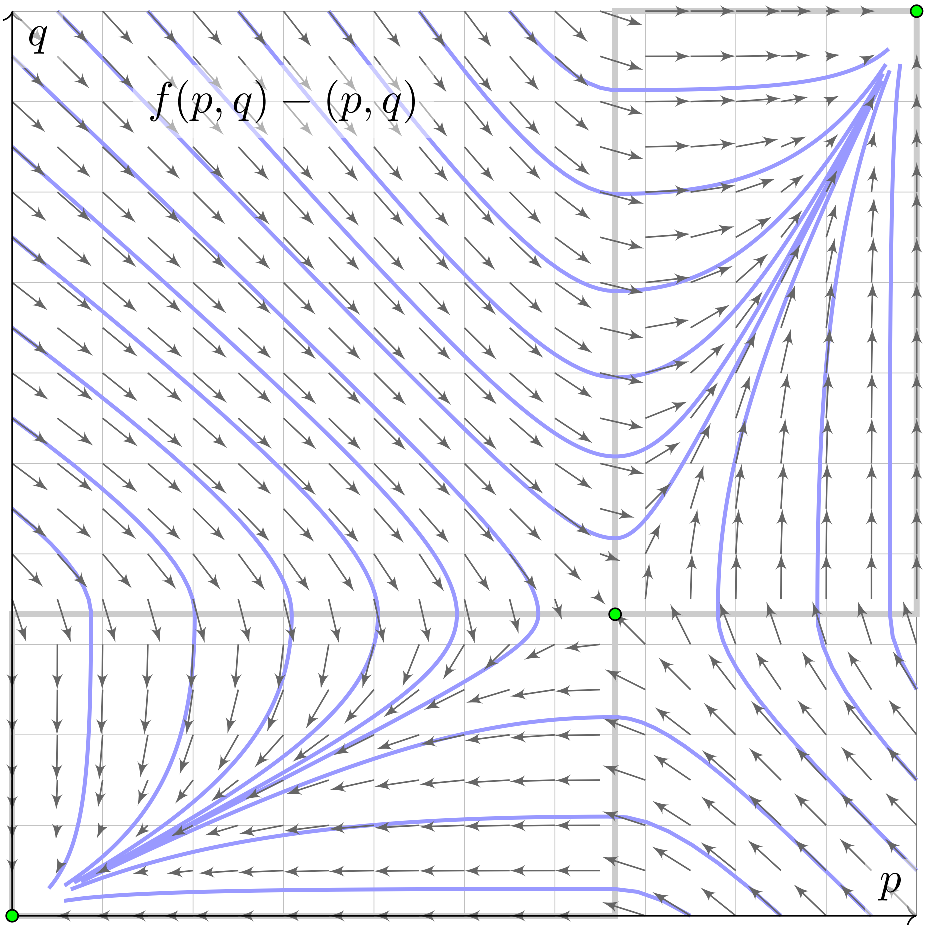
Nash–Funktion zu Bach oder Strawinsky

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Bach oder Strawinsky* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

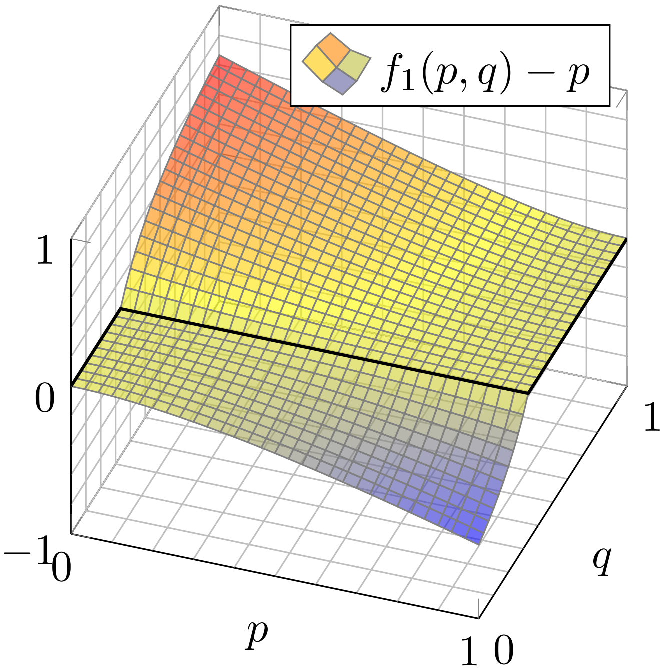
A \ B	Bach	Strawinsky
Bach	1 / 2	0 / 0
Strawinsky	0 / 0	2 / 1

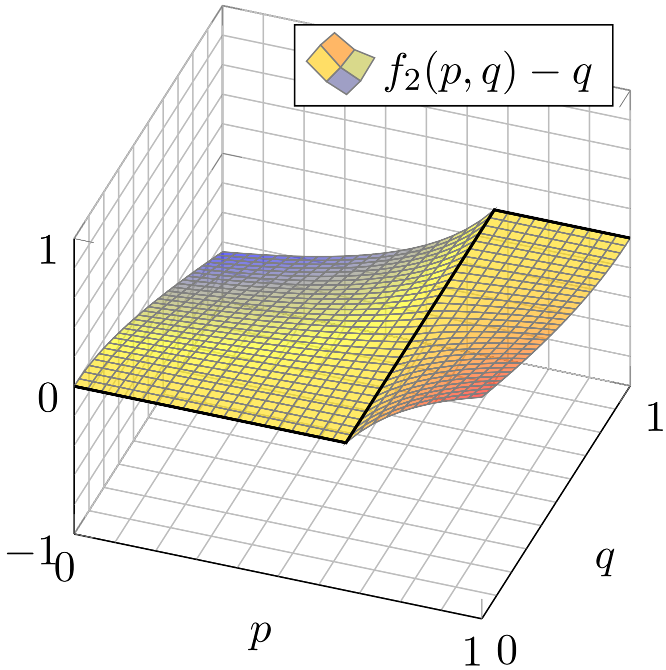
Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.

Wir sehen wunderbar die drei Fixpunkte des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ sind dies die drei Nash–Gleichgewichte. Zur Anregung Ihrer Phantasie zeige ich typische Flusslinien.



Nash–Funktion zu Bach oder Strawinsky





Wir zeigen das Vektorfeld $(u,v) = f(p,q) - (p,q)$ und die Komponenten. Die Nullstellenmengen von u und v sind jeweils die Reaktionsfunktionen. Jede Nullstelle $u(p,q) = 0$ bedeutet: p ist eine beste Antwort auf q. Jede Nullstelle $v(p,q) = 0$ bedeutet: q ist eine beste Antwort auf p. Die Gleichgewichte $(0,0)$ und $(1,1)$ sind stabil, aber $(2/3, 1/3)$ instabil.

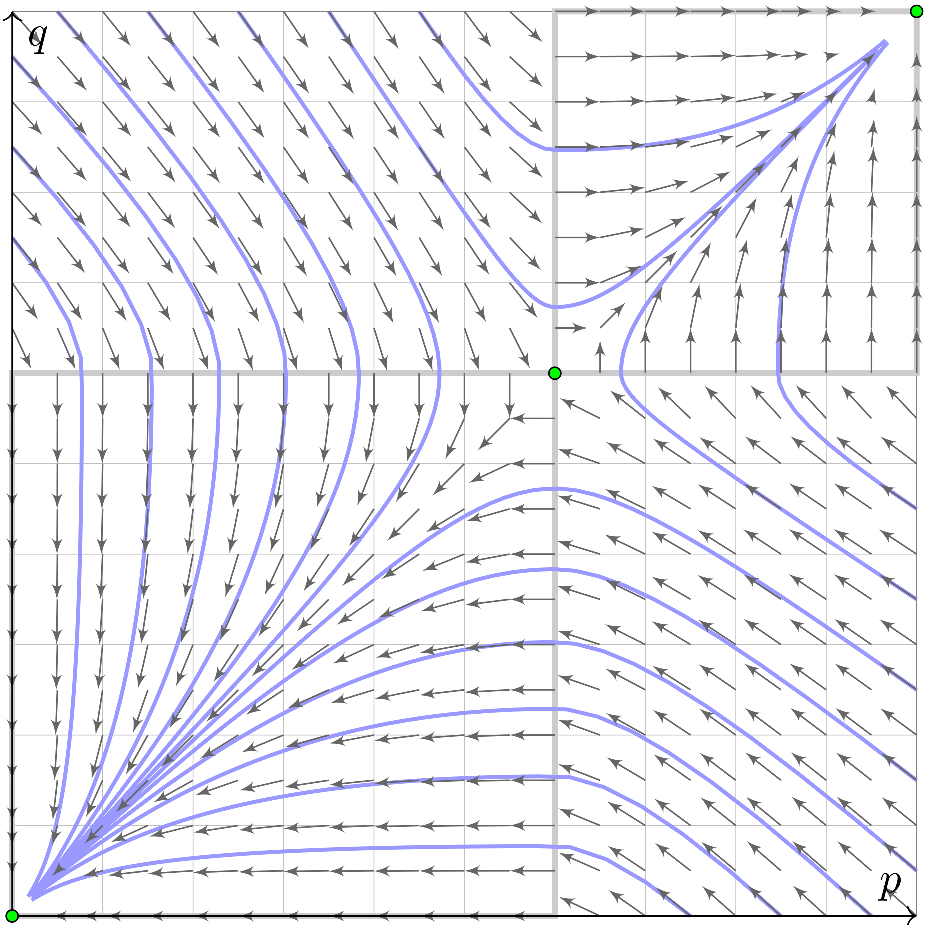
Nash–Funktion zu Bleiben-oder-Gehen

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Bleiben-oder-Gehen* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

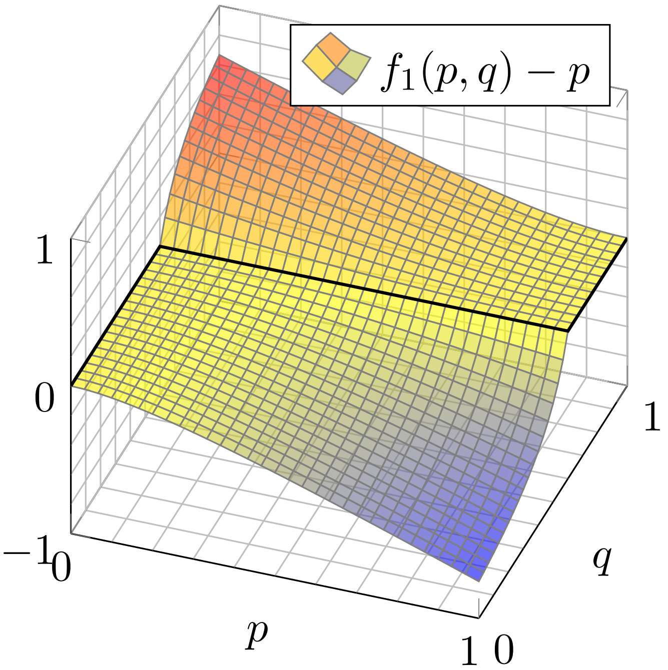
A \ B	bleiben	gehen
bleiben	A: -2, B: -2	A: -2, B: -5
gehen	A: -5, B: -2	A: 0, B: 0

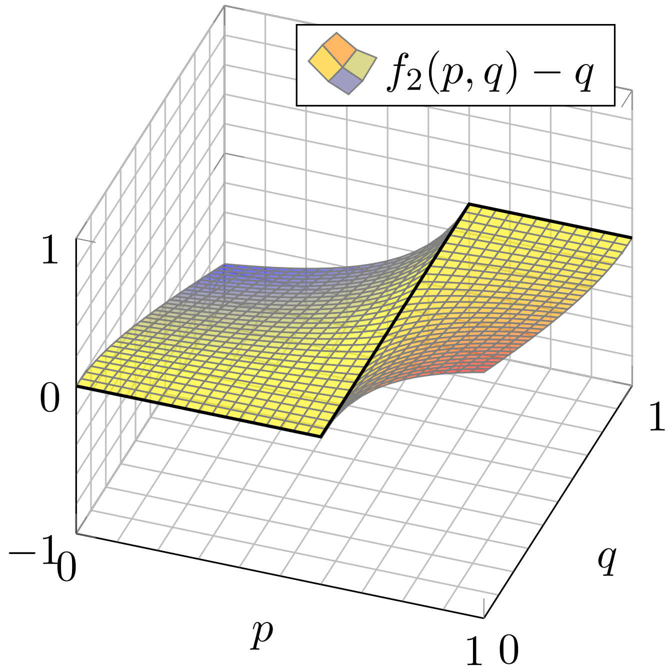
Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.

Wir sehen wunderbar die drei Fixpunkte des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ sind dies die drei Nash–Gleichgewichte.



Nash–Funktion zu Bleiben-oder-Gehen





Wir zeigen das Vektorfeld $(u,v) = f(p,q) - (p,q)$ und die Komponenten.
Die Nullstellenmengen von u und v sind jeweils die Reaktionsfunktionen.
Jede Nullstelle $u(p,q) = 0$ bedeutet: p ist eine beste Antwort auf q.
Jede Nullstelle $v(p,q) = 0$ bedeutet: q ist eine beste Antwort auf p.
Die Gleichgewichte $(0,0)$ und $(1,1)$ sind stabil, aber $(0.6, 0.6)$ instabil.

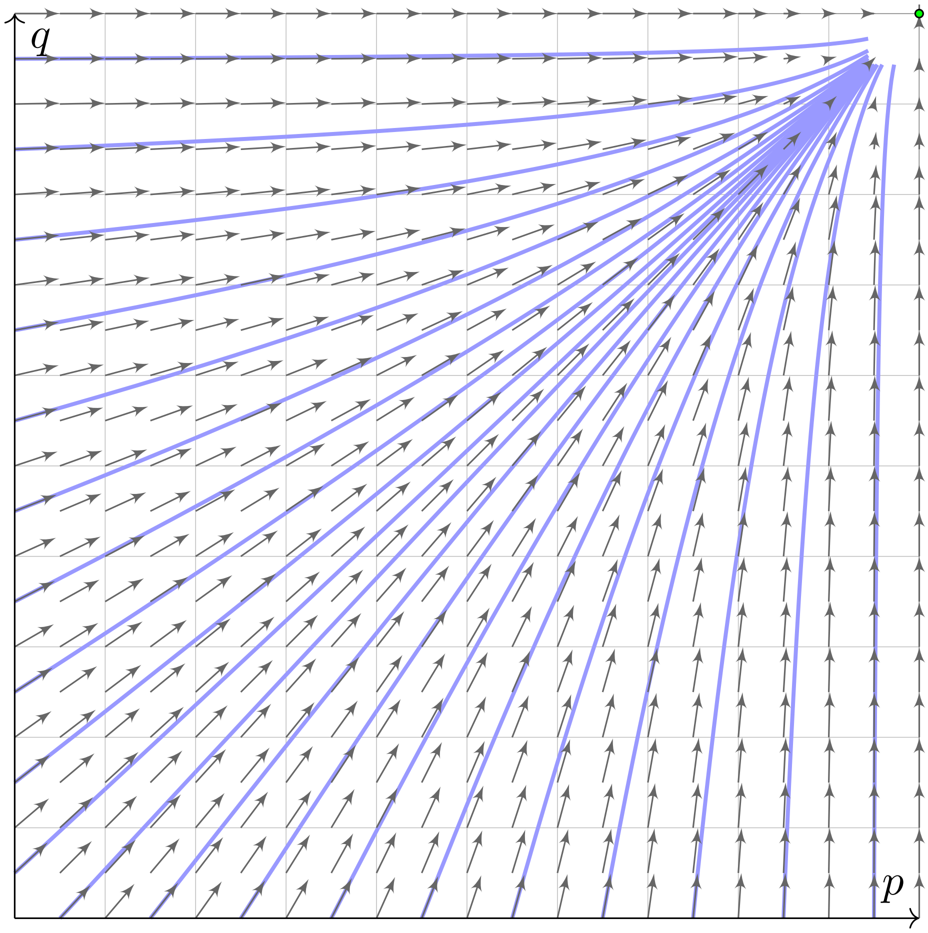
Nash–Funktion zum Gefangenendilemma

Zur Erinnerung die Daten des *Gefangenendilemmas* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

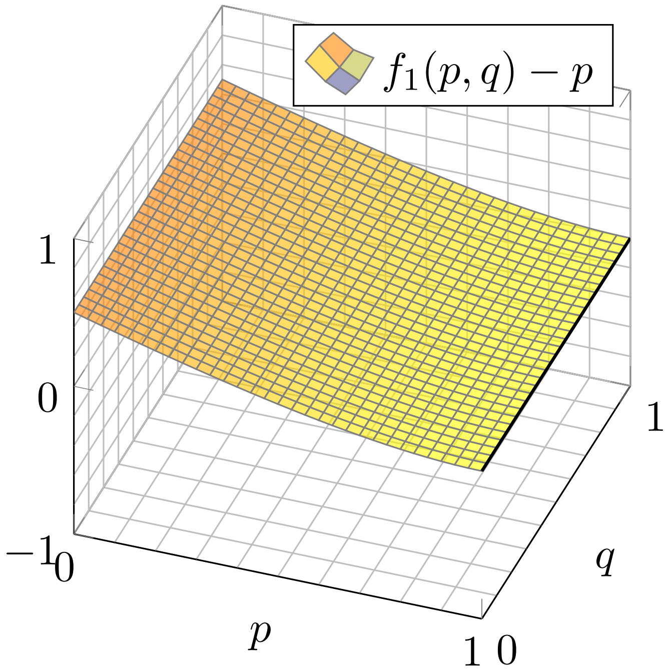
A \ B	schweigen	gestehen
schweigen	-1 / -1	0 / -5
gestehen	-5 / 0	-4 / -4

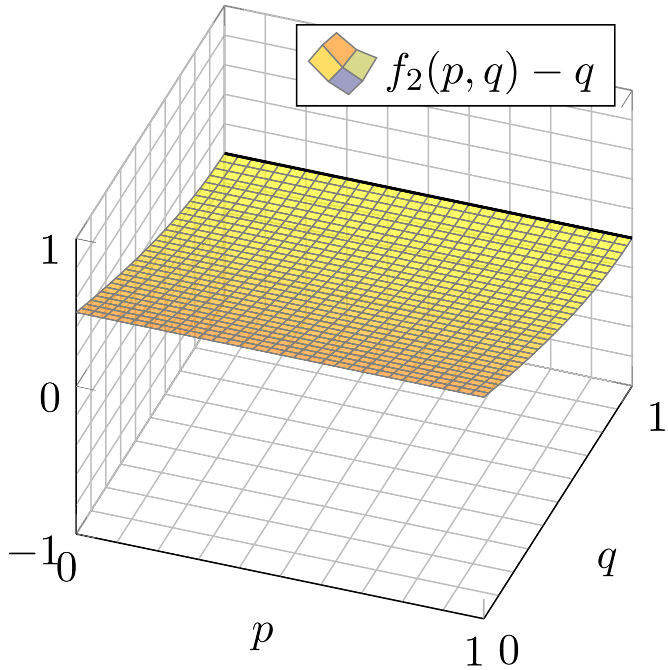
Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.

Wir sehen wunderbar den einzigen Fixpunkt des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ ist dies das einzige Nash–Gleichgewicht.



Nash–Funktion zum Gefangenendilemma





Wir zeigen das Vektorfeld $(u,v) = f(p,q) - (p,q)$ und die Komponenten.
Die Nullstellenmengen von u und v sind jeweils die Reaktionsfunktionen.
Jede Nullstelle $u(p,q) = 0$ bedeutet: p ist eine beste Antwort auf q.
Jede Nullstelle $v(p,q) = 0$ bedeutet: q ist eine beste Antwort auf p.
Das Gleichgewicht $(0,0)$ ist hier stabil.

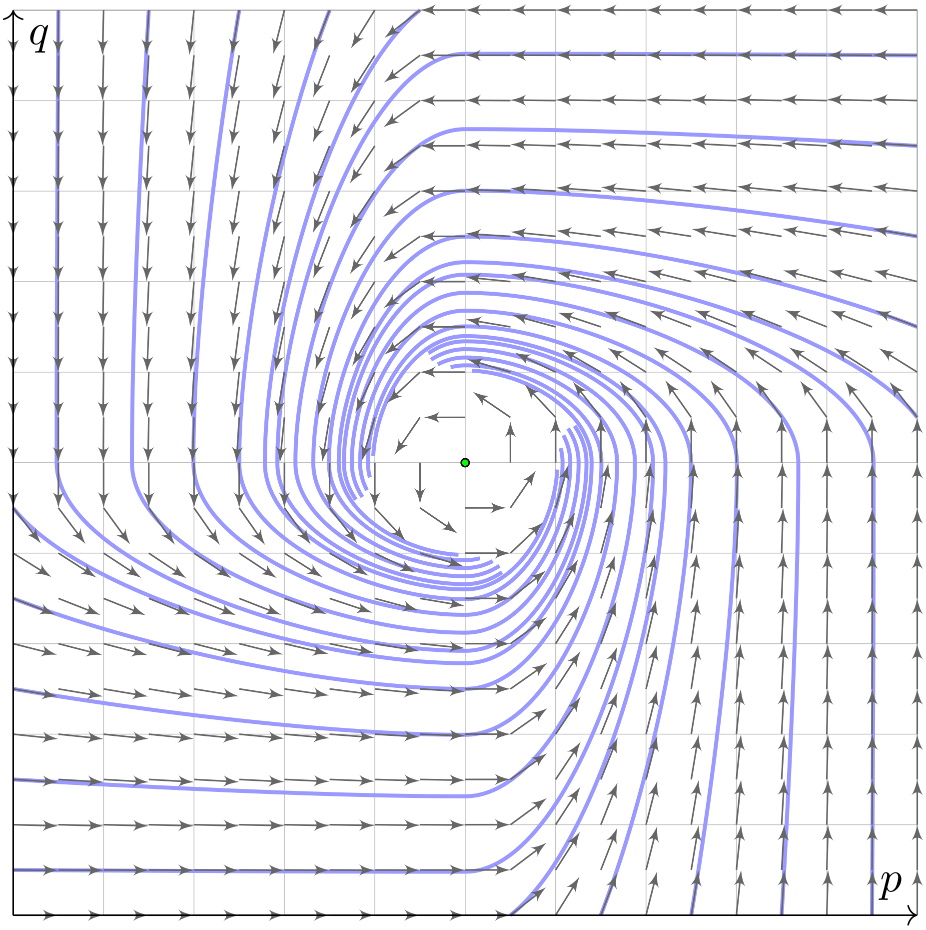
Nash–Funktion zu Matching Pennies

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Matching Pennies* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

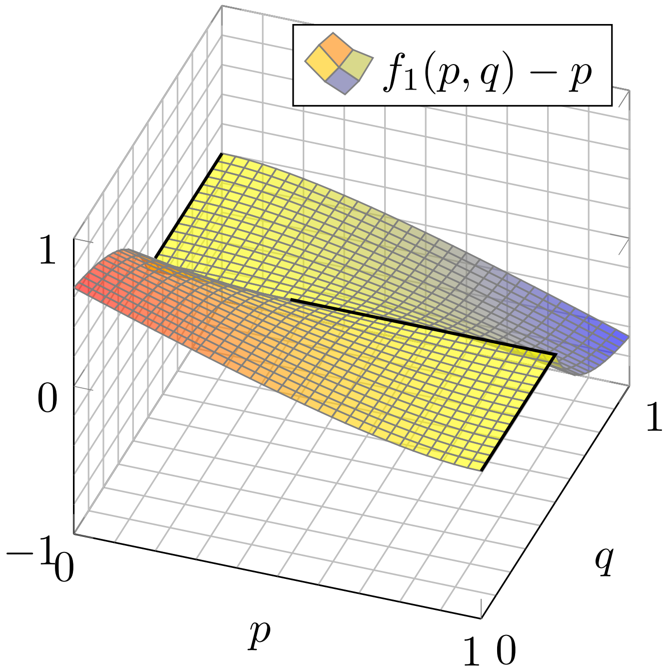
A \ B	Kopf	Zahl
Kopf	$+1$ / -1	-1 / $+1$
Zahl	-1 / $+1$	$+1$ / -1

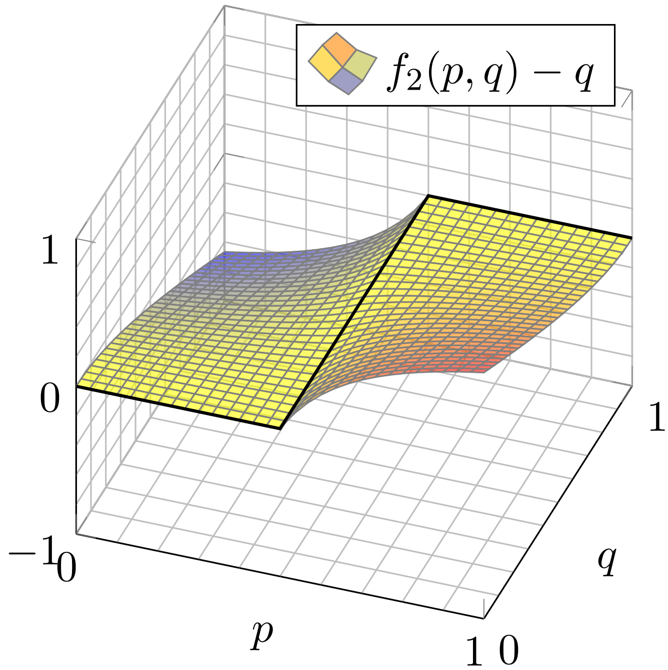
Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.

Wir sehen wunderbar den einzigen Fixpunkt des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ ist dies das einzige Nash–Gleichgewicht.



Nash–Funktion zu Matching Pennies





Wir zeigen das Vektorfeld $(u,v) = f(p,q) - (p,q)$ und die Komponenten. Die Nullstellenmengen von u und v sind jeweils die Reaktionsfunktionen. Jede Nullstelle $u(p,q) = 0$ bedeutet: p ist eine beste Antwort auf q. Jede Nullstelle $v(p,q) = 0$ bedeutet: q ist eine beste Antwort auf p. Das Gleichgewicht $(1/2, 1/2)$ ist ein stabiler Strudelpunkt.

Was lehren uns die Nash–Funktion und diese schönen Illustrationen? Eine interessante Interpretation der Gleichgewichte ist die folgende: Die Spieler **wiederholen** immer wieder dasselbe Spiel u und **lernen**.

Sie starten in einem Zustand $x(t_0) = (p, q) \in [0, 1]^2$, beobachten jeweils das Ergebnis und aktualisieren ihre Strategien in kleinen Schritten: Sie spielen erneut und beobachten und aktualisieren, usw.

☺ Das ist im Wesentlichen das hier naheliegende **Euler–Verfahren** zur Konstruktion eines Polygonzuges $x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots$ in $[0, 1]^2$. Die Zeitschritte $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ können wir dabei vorgeben.

☺ Im Grenzübergang zu beliebig kleinen Schritten erhalten wir die **Differentialgleichung** $\dot{x} = g(x)$ zum oben gezeigten Vektorfeld $g(x) = f(x) - x$. Hierzu habe ich die Flusslinien gezeichnet.

☺ Das bietet uns konkrete Anschauung und wunderbare Einsichten: Wir haben nicht nur die Gleichgewichte als Fixpunkte, sondern gewinnen zudem einen ersten qualitativen Eindruck außerhalb der Gleichgewichte!

Aufgabe: Wie glatt ist das Vektorfeld g in der Gleichung $\dot{x} = g(x)$? Garantiert das Existenz, Eindeutigkeit und Glattheit von Lösungen?

Lösung: Die Funktion $h(x) = x^+$ ist lipschitz-stetig, ebenso f.
Wir können also den Satz von Picard–Lindelöf anwenden!
Übung: Schreiben Sie die Dehnungsschranken sorgfältig aus.

☺ Bei der Definition der Nash–Funktion $f : \bar{S} \to \bar{S}$ haben wir mit der Hilfsfunktion h noch einige Freiheiten, wie oben erwähnt. Insbesondere können wir f nicht nur als stetig konstruieren, sondern auch stetig differenzierbar, sogar **beliebig glatt**.

☺ Wir nutzen dankend alle Werkzeuge der **autonomen dynamischen Systeme**, also der gewöhnlichen Differentialgleichungsysteme im $\mathbb{R}^n$. Insbesondere können wir Klassifikation der **lokalen Dynamik** um einen Fixpunkt nutzen, hier allerdings eher topologisch, da die Jacobi–Matrix mangels Differenzierbarkeit nicht definiert ist oder Null nach Glättung.

Hatte ich es schon erwähnt: Das alles ist wunderschöne Mathematik!

Nash–Funktion und Populationsdynamik

Wir sehen in den obigen Beispielen **stabile und instabile Fixpunkte**. Das hat unmittelbare Auswirkungen in der Populationsdynamik.

Statt zweier Spieler können wir uns auch zwei **Populationen** A und B vorstellen. In der ersten ist die Mischung der Strategien $1-p$ und p, in der zweiten $1-q$ und q. Jedes Individuum aus Population A spielt gegen zahlreiche Gegner aus Population B und aktualisiert aufgrund dieser Erfahrung seine Strategie, falls ihm das profitabel erscheint.

☺ Jedes Individuum spielt in diesem Modell seine fest gewählte **reine** Strategie, randomisiert also nicht! Doch als Mittelwert über die gesamte Population erhalten wir die lineare Fortsetzung $\bar{u}$ gemäß der Erwartung.

☺ Individuen beider Populationen optimieren ihr Verhalten nicht aktiv, diese Aufgabe übernimmt die **Selektion** von ganz allein: Erfolgreiche Strategien vermehren sich schneller, weniger erfolgreiche langsamer.

☺ Somit beobachten wir im Populationsmittel die obige Dynamik. Bei der Gestaltung der Funktion f haben wir noch einige Freiheiten, aber das qualitative Verhalten ist bereits sehr aufschlussreich!

Nash–Funktion und Populationsdynamik

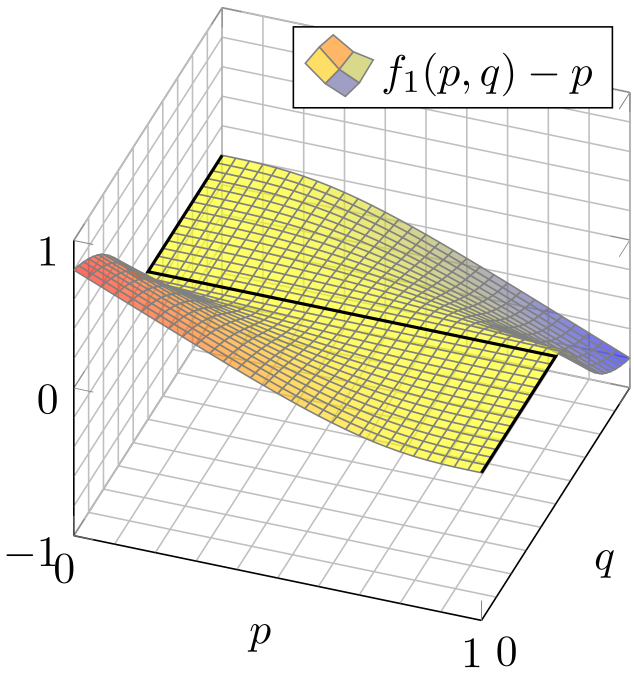
Der Vorteil dieser Sichtweise ist, dass die mentalen Anforderungen an die Individuen sehr gering sind. Dieses Modell lässt sich daher auch in der **Evolutionsbiologie** gut anwenden, sogar auf das Verhalten von einfachen Lebewesen, etwa Insekten, die nur geringe Rechenkapazität und keinerlei spieltheoretische Kenntnisse haben (soweit ich weiß).

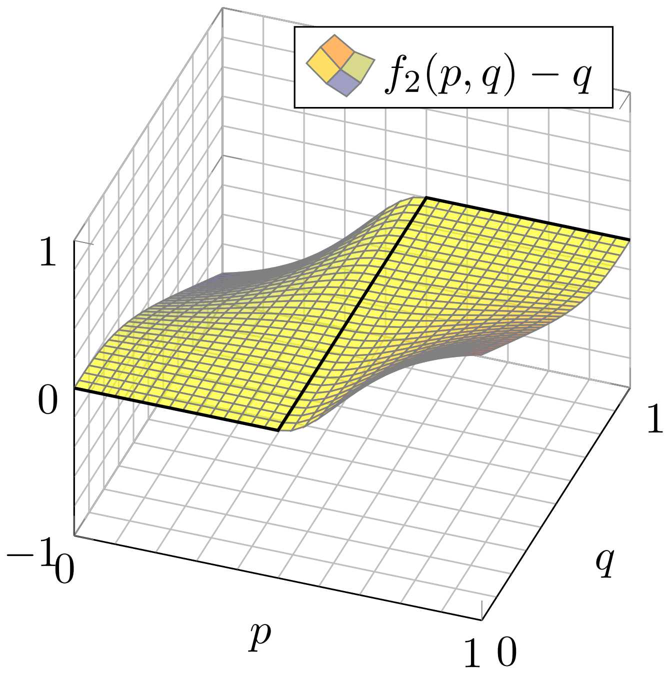
☺ Im Mittel beobachten wir die gerade erklärte **Populationsdynamik**. Sie wird angetrieben durch den Selektionsdruck. Die Dynamik unterliegt im Kleinen zwar erheblichen stochastischen Störungen, doch bei großen Populationen ist die Differentialgleichung eine recht gute Näherung.

☺ Anschaulich strebt sie einem stabilen Fixpunkt zu oder ruht in einem. Instabile Fixpunkte hingegen werden nicht dauerhaft beobachtet: Jede noch so kleine zufällige Abweichung führt uns fort.

☺ Genauer betrachtet sind die Nash–Gleichgewichte nicht alle gleich, sie haben eine Mikrostruktur (analytisch, geometrisch, topologisch), sie haben lokale Eigenschaften bezüglich der evolutionären Dynamik.

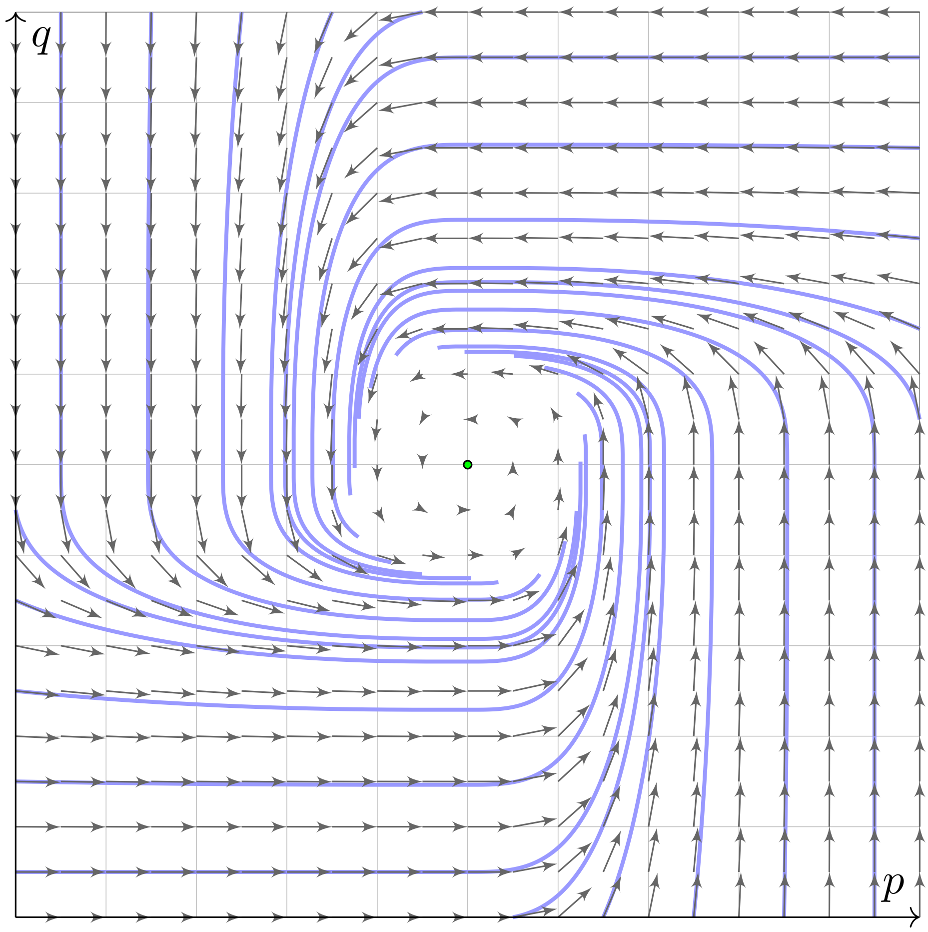
Variante: differenzierbare Nash–Funktion



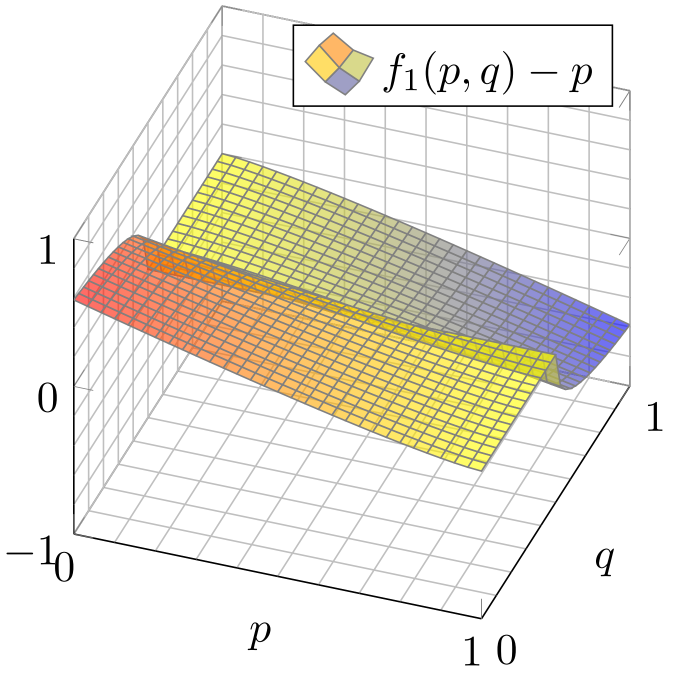


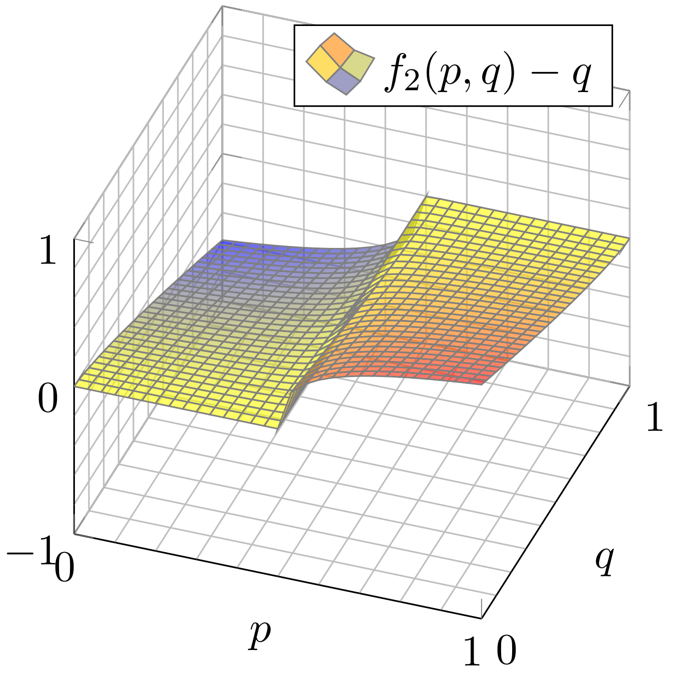
Die Funktion $x \mapsto x^+$ ist stetig, aber in $x = 0$ nicht differenzierbar, also $\mathscr{C}^0$, aber nicht $\mathscr{C}^1$. Ich ersetze sie hier durch die Funktion $x \mapsto (x^+)^2$, diese ist $\mathscr{C}^1$, aber nicht $\mathscr{C}^2$. Die Graphik ist erwartungsgemäß glatter, allerdings sehen wir die Nullstellen nicht mehr so markant als Knicke.

Variante: differenzierbare Nash–Funktion



Variante: hölder–stetige Nash–Funktion

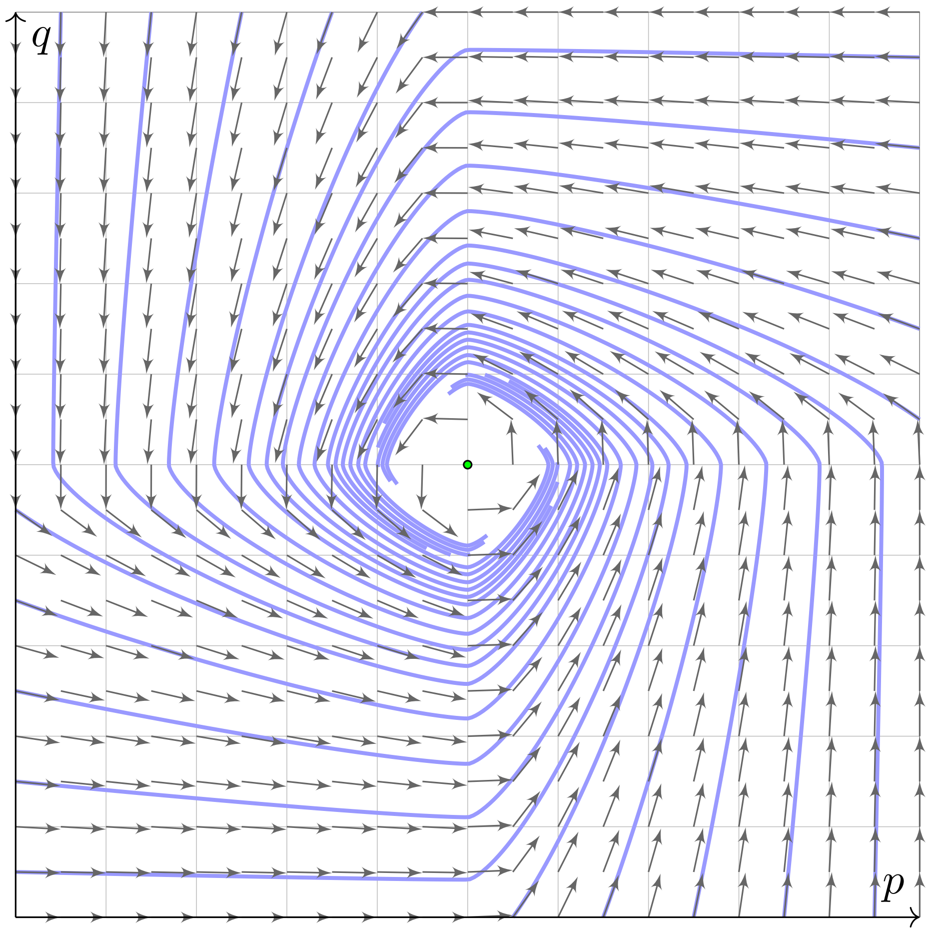




Die Funktion $x \mapsto x^+$ ist lipschitz-stetig mit Steigung ≤ 1. Ich ersetze sie hier durch die Funktion $x \mapsto \sqrt{x^+}$, diese ist immerhin noch hölder–stetig zum Exponenten $1/2$. Die Knicke sind erwartungsgemäß noch markanter.

Zur Modellierung der Populationsdynamik bestehen viele Möglichkeiten! Die numerischen Parameter passen wir den empirischen Daten an.

Variante: hölder-stetige Nash–Funktion



Rückblick und Zwischenbilanz

Was ist ein strategisches Spiel in Normalform? Eine Abbildung

$$u : S_1 \times \dots \times S_n \to R_1 \times \dots \times R_n.$$

Was ist hierzu ein Nash–Gleichgewicht $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$? Für jeden Spieler i ist die von ihm gewählte Strategie s_i eine beste Antwort auf die Gegenstrategien $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$. Kein Spieler i hat einen Anreiz, seine Strategie s_i zu ändern.

Hat jedes Spiel solche Gleichgewichte? Nein, es gibt Gegenbeispiele. Der Satz E1F von Nash garantiert für jedes endliche reelle Spiel u die Existenz gemischter Nash–Gleichgewichte, kurz $\mathrm{NE}(\bar{u}) \neq \emptyset$.

Interpretation und Anwendung: Wie und warum kommen Spieler dazu, tatsächlich ein solches Nash–Gleichgewicht zu spielen? Denkbar sind:

- Rationale Analyse des Spiels (*rational reasoning*)
- Kommunikation vor dem Spiel (*pre-play communication*)
- Evolution durch Versuch und Irrtum (*trial-and-error adjustment*)

Rückblick und Zwischenbilanz

Hier ist S_i die Menge der **Strategien**, die Spieler i wählen kann, und R_i ist die Menge seiner **Resultate**, linear geordnet durch $\le_i$. Wir nennen $u_i : S_1 \times \dots \times S_n \to R_i$ die **Nutzenfunktion** für Spieler i. Meist sind R_i die reellen Zahlen, wir nennen u dann ein **reelles Spiel**.

Jeder Spieler i versucht seinen Gewinn $u_i(s) \in R_i$ zu maximieren. Allerdings kontrolliert jeder Spieler i nur seine eigene Strategie $s_i \in S_i$, nicht jedoch die Strategien $s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n$ der anderen Spieler! So können wir alle Spiele darstellen: einheitlich, übersichtlich, präzise.

Zur Analyse solcher Konfliksituationen dienen **Nash–Gleichgewichte**. Dies ist ein zentral wichtiges, nützliches und bewährtes Werkzeug. Hierzu beginnen wir, die mathematischen Grundlagen zu legen, in Form von tragfähigen Definitionen, sodann Sätzen und Beweisen.

Dies sind zunächst mathematische Konzepte. Wir wollen sie schließlich auf Anwendungen übertragen. Dabei stellt sich die kritische Frage, ob Nash–Gleichgewichte tatsächlich gespielt werden: wann? wie? warum? Hierzu möchte ich drei mögliche Begründungen darlegen.

Rückblick und Zwischenbilanz

Rationale Analyse des Spiels. In manchen Anwendungen ist es plausibel anzunehmen, dass alle Spieler hinreichend rational sind.

Das gilt insbesondere, wenn das Spiel einfach zu analysieren ist und die Spieler ausreichend Zeit dazu haben. Oder wenn das Spiel so wichtig ist, dass alle Spieler die notwendigen Analysen durchführen (müssen).

Gibt es nur ein Nash–Gleichgewicht, so wird genau dieses gespielt. Dank hinreichender Rationalität kennt jeder Spieler das Gleichgewicht, und kein Spieler hat einen Anreiz, davon abzuweichen.

Dieses Argument gilt nur bei einem eindeutigen Gleichgewicht. Gibt es mehrere, wie bei Bach-oder-Strawinsky, so ist die Wahl offen.

Kommunikation vor dem Spiel. In manchen Anwendungen ist es möglich, dass alle Spieler vor dem Spiel kommunizieren. Sie können dies nutzen und einen Strategievektor $(s_1, \dots, s_n)$ verabreden.

Diese Verabredung ist allerdings nicht bindend oder einklagbar.

Ist $(s_1, \dots, s_n)$ ein Nash–Gleichgewicht, so ist diese Vereinbarung selbst-stabilisierend: Kein Spieler hat einen Anreiz, davon abzuweichen.

Rückblick und Zwischenbilanz

Evolution durch Versuch und Irrtum. Wir betrachten ein endliches reelles Spiel $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$. Dieses wird nun häufig wiederholt. Jeder Spieler i beginnt mit einer gemischten Strategie $s_i \in \bar{S}_i$ und passt sie nach jedem Spieldurchgang an, etwa vermöge der Nash–Funktion.

Günstigenfalls konvergiert dieser Prozess gegen ein Gleichgewicht: Die Gleichgewichte sind Fixpunkte der Nash–Funktion, und Konvergenz liegt vor, wenn wir im Attraktionsbecken eines Fixpunktes starten.

Der Vorteil dieser Sichtweise ist, dass die mentalen Anforderungen an die Individuen sehr gering sind. Dieses Modell lässt sich daher auch in der **Evolutionsbiologie** gut anwenden. Hier spielen **Populationen** gegeneinander. Die Individuen optimieren ihr Verhalten nicht aktiv, diese Aufgabe übernimmt die **Selektion** von ganz allein: Erfolgreiche Strategien vermehren sich schneller, weniger erfolgreiche langsamer. Im Mittel beobachten wir die oben erklärte **Populationsdynamik**.

Die **evolutionäre Spieltheorie** arbeitet diese Ideen aus und untersucht evolutionäre Phänomene mit spieltheoretischen Methoden.

Strategische Spiele in Normalform

Definition E1L: strategisches Spiel in Normalform

Ein **strategisches Spiel in Normalform** über I ist eine Abbildung

$$\boxed{u \;:\; S = \prod\nolimits_{i\in I} S_i \to R = \prod\nolimits_{i\in I} R_i \;:\; s = (s_i)_{i\in I} \mapsto r = (r_i)_{i\in I}.}$$

Formal ist dieses Spiel (I, S, R, u) durch folgende Daten definiert:

1. eine Menge I von **Spielern** sowie für jeden Spieler $i \in I$
2. eine Menge $S_i \neq \emptyset$, deren Elemente wir **Strategien** nennen,
3. eine linear geordnete Menge $(R_i, \le_i)$ der möglichen **Resultate**,
4. eine Abbildung $u_i : S \to R_i : s \mapsto r_i$, genannt **Nutzenfunktion**.

Wir zerlegen $S := \prod_{i\in I} S_i$ in die Faktoren S_i und $S_{-i} := \prod_{j\in I\smallsetminus\{i\}} S_j$:

$$S \xrightarrow{\sim} S_i \times S_{-i} \;:\; s \mapsto (s_i; s_{-i})$$

Die Nutzenfunktion $u_i : S \to R_i$ schreiben wir damit bequem:

$$u_i \;:\; S_i \times S_{-i} \xrightarrow{\sim} S \to R_i \;:\; (s_i; s_{-i}) \mapsto u_i(s_i; s_{-i})$$

Strategische Spiele in Normalform

Jeder Spieler $i \in I$ kann seine Strategie $s_i \in S_i$ frei wählen, unabhängig von allen anderen Spielern, und er hat auch nur auf s_i direkten Einfluss.

Jedes Element $s \in \prod_{i\in I} S_i$ heißt **Strategievektor**: $s = (i \mapsto s_i)_{i\in I}$.
Es ordnet jedem Spieler $i \in I$ eine seiner Strategien $s_i \in S_i$ zu.

Wir zerlegen $S := \prod_{i\in I} S_i$ in die Faktoren S_i und $S_{-i} := \prod_{j\in I\smallsetminus\{i\}} S_j$:

$$S \xrightarrow{\sim} S_i \times S_{-i} \;:\; s \mapsto (s_i; s_{-i})$$

Wir schreiben hier $s_{-i} = s|_{I\smallsetminus\{i\}}$ für die **Einschränkung** auf $I \smallsetminus \{i\}$
und $s = (s_i; s_{-i}) = \{i \mapsto s_i\} \cup s_{-i}$ für die **Ergänzung** um $i \mapsto s_i$.
Das entspricht der Umsortierung, die den Faktor S_i vorzieht.

Besser und konfliktfrei wäre statt s_{-i} die Notation $s_{\smallsetminus i} = s|_{I\smallsetminus\{i\}} \in S_{\smallsetminus i}$.
Ich folge hier der üblichen und verbreiteten Schreibweise $s_{-i} \in S_{-i}$.
Die Nutzenfunktion $u_i : S \to R_i$ schreiben wir damit bequem:

$$u_i \;:\; S_i \times S_{-i} \xrightarrow{\sim} S \to R_i \;:\; (s_i; s_{-i}) \mapsto u_i(s_i; s_{-i})$$

Die explizite Nennung der Bijektion $S \xrightarrow{\sim} S_i \times S_{-i} : s \mapsto (s_i; s_{-i})$ unterdrücken wir hierbei und benennen beide Funktionen mit u_i.

Strategische Spiele in Normalform

Für ein **endliches Spiel** fordern wir I und S_i endlich für jedes $i \in I$.
Im Falle eines **reellen Spiels** fordern wir zudem $R_i = \mathbb{R}$ für alle $i \in I$.
Das Spiel ist die **Auszahlungsfunktion** $u \colon \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i \in I} \mathbb{R} = \mathbb{R}^I$.
Die Funktion $u_i : \prod_{i\in I} S_i \to \mathbb{R}$ ist die **Auszahlung** für Spieler i.

Bislang genügte uns die Spielermenge $I = \{1, 2\}$ oder $I = \{1, 2, \dots, n\}$.
Wir definieren Spiele nun allgemein für eine beliebige Spielermenge I.
Auf den ersten Blick mag diese Allgemeinheit verwundern; wir können uns ein Spiel mit unendlich vielen Spielern nur schwer vorstellen.

Dies tritt jedoch tatsächlich natürlich auf, etwa wenn wir Modelle mit zeitlichem Verlauf und mehreren Spielergenerationen untersuchen.
Wir wollen daher die nötigen Begriffe und Definitionen vorbereiten, auch wenn unsere Sätze oft endliche Spiele voraussetzen.

Dasselbe gilt für allgemeine Definition der Ergebnismenge $(R_i, \le)$.
Wir nehmen im Folgenden meist $(R_i, \le)$ als Teilmenge von $(\mathbb{R}, \le)$ an.
Es schadet nicht, sich zunächst klar zu machen, was minimal benötigt wird. Wir nutzen dankbar weitere Struktur, wo immer sie verfügbar ist!

Strategische Spiele in Normalform

Formal könnten wir unser Spiel als Quadrupel (I, S, R, u) definieren.
Das ist wunderbar explizit und ausführlich, scheint mir aber für den praktischen Gebrauch unnötig länglich und übertrieben pedantisch.
Implizit enthält die Abbildung $u \colon \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R_i$ all diese Daten:

Bei Bedarf können wir von der Abbildung u alle Informationen erfragen bzw. rekonstruieren: Was ist deine Definitionsmenge? S! Was ist deine Zielmenge? R! Ebenso können wir S fragen: Bist du ein Produkt? Ja! Über welcher Menge? I! Was ist für $i \in I$ dein Faktor? S_i! Ebenso R: Bist du ein Produkt? Ja! Über welcher Menge? I! Was ist für $i \in I$ dein Faktor? R_i! Darunter verstehen wir hier die geordnete Menge $(R_i, \le)$.

🙂 Ich schreibe implizit u oder explizit $u \colon \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R_i$, je nach Bedarf. Das entspricht dem Quadrupel (I, S, R, u), ist aber flüssiger.

Die Indizes schreiben wir später auch oben: Die Strategiemenge S^i und die Ergebnismenge R^i für Spieler $i \in I$ führen zu den Produkten $S^I := \prod_{i\in I} S^i$ und $R^I := \prod_{i\in I} R^i$, hier besonders raffiniert abgekürzt.
Spiele sind dann Abbildungen $u \colon S^I \to R^I$, reelle Spiele $u \colon S^I \to \mathbb{R}^I$.

Definition E1M: Nash–Geichgewicht

Vorgelegt sei das Spiel $u : \prod_{i \in I} S_i \to \prod_{i \in I} R_i$ über der Spielermenge I.
Sei $s \in S = \prod_{i \in I} S_i$ ein Strategievektor. Bezüglich Spieler $i \in I$ heißt s

strikt stabil: $\forall a \in S_i \smallsetminus \{s_i\} : u_i(s_i; s_{-i}) > u_i(a; s_{-i}) \quad :\Leftrightarrow: s \in \mathrm{NE}^!_i(u)$

stabil: $\forall a \in S_i \smallsetminus \{s_i\} : u_i(s_i; s_{-i}) \ge u_i(a; s_{-i}) \quad :\Leftrightarrow: s \in \mathrm{NE}_i(u)$

Gilt dies für alle $i \in I$ so heißt s ein **(striktes) Nash–Gleichgewicht**, geschrieben $\mathrm{NE}^!(u) := \bigcap_{i \in I} \mathrm{NE}^!_i(u)$ und $\mathrm{NE}(u) := \bigcap_{i \in I} \mathrm{NE}_i(u)$.
Sei u reell und eine Toleranz $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ vorgegeben. Wir nennen s

ε–stabil: $\forall a \in S_i \smallsetminus \{s_i\} : u_i(s_i; s_{-i}) \ge u_i(a; s_{-i}) - \varepsilon \quad :\Leftrightarrow: s \in \mathrm{NE}^\varepsilon_i(u)$

Gilt Letzteres für alle $i \in I$ so heißt s ein **ε–Nash–Gleichgewicht**.
Allgemein setzen wir $\mathrm{NE}^\varepsilon(u) := \bigcap_{i \in I} \mathrm{NE}^{\varepsilon_i}_i(u)$ für $\varepsilon : I \to \mathbb{R}_{\ge 0} : i \mapsto \varepsilon_i$.

- 🙂 Zur Approximation gilt somit $\mathrm{NE}(u) = \mathrm{NE}^0(u) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathrm{NE}^\varepsilon(u)$.
- 🙂 Für endliche Spiele erhalten wir formal $\mathrm{NE}^!(u) = \bigcup_{\varepsilon < 0} \mathrm{NE}^\varepsilon(u)$.

Die **unmittelbare Bedeutung** dieser Definition ist folgende:

(1) Der Spieler i hat einen Nachteil davon, seine Strategie s_i zu ändern.

(2) Der Spieler i hat keinen Vorteil / Anreiz, einseitig von s_i abzuweichen.

(3) Der Spieler i hat bestenfalls einen ε–kleinen Vorteil. Dieser kann zum Beispiel unterhalb der Wahrnehmungsschwelle / vernachlässigbar sein.

Die Strategien s_{-i} aller anderen Spieler werden als konstant betrachtet. Ich erinnere an die Motivation hinter diesem Modell: Spieler i kontrolliert nur seine Strategie $s_i \in S_i$. Er hat auf s_{-i} keinen direkten Einfluss, etwa durch Absprachen, Verträge, Drohungen, o.ä. außerhalb des Spiels.

Gilt dies für jeden Spieler i, so nennen wir den Strategievektor s ein striktes Gleichgewicht / Gleichgewicht / ε–Gleichgewicht.

Solche Gleichgewichte beschreiben **mögliches rationales Verhalten**. Die Definition ist einfach, aber die Interpretation bedarf einiger Übung. Hierzu haben wir oben die ersten von zahlreichen Beispielen angeführt. Erweitern und pflegen Sie Ihren Beispielfundus!

Existenz von Nash–Gleichgewichten

Der Satz von Nash garantiert die Existenz von Gleichgewichten. Über strikte Gleichgewichte macht er wohlweislich keine Aussage. Sie sind vielleicht einfacher zu verstehen, aber leider oft zu streng. Insbesondere gibt es keine allgemeine Garantie für ihre Existenz.

Übung: Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel und $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \mathbb{R}^n$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.

(1) Gilt $\mathrm{NE}^!(u) \subseteq \mathrm{NE}^!(\bar{u})$? und umgekehrt $\mathrm{NE}^!(u) \supseteq \mathrm{NE}^!(\bar{u})$?

(2) Gilt $\mathrm{NE}(u) \subseteq \mathrm{NE}(\bar{u})$? und umgekehrt $\mathrm{NE}(u) \supseteq \mathrm{NE}(\bar{u})$?

Übung: Sei $u : S_1 \to S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein endliches Zwei–Personen–Spiel.

(1) Wenn ein striktes Gleichgewicht existiert, ist es dann eindeutig? Wie viele strikte Gleichgewichte kann u haben? und $\bar{u}$?

(2) Was gilt, wenn u zudem konstante Summe hat? Oder allgemeiner: wenn u strikt kompetitiv ist?

Existenz von Nash–Gleichgewichten

Im Satz von Nash (E1F) wurde das Spiel u als endlich vorausgesetzt: Die Spielermenge I und jede Strategiemenge S_i müssen endlich sein.

Übung: In den Übungen nutzen Sie den Fixpunktsatz von Kakutani, um den Satz von Nash erneut zu beweisen und zu verallgemeinern.

Übung: Sei $I = \{1, 2\}$ sowie $S_i = \{\, s_i^k \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ abzählbar unendlich. Gibt es zu jedem Spiel $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$ ein Nash–Gleichgewicht? Gilt dies für die Fortsetzung $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \to \mathbb{R}^2$ auf gemischte Strategien? Diskutieren Sie endliche Konvexkombinationen und dann auch Reihen.

Übung: Sei $I = \mathbb{N}$ sowie $S_i = \{0, 1\}$ für alle $i \in I$, also $\bar{S}_i \cong [0, 1]$. Gibt es zu jedem Spiel $u : \prod_{i \in I} S_i \to \mathbb{R}^I$ ein Nash–Gleichgewicht? Gilt dies für die Fortsetzung $\bar{u} : \prod_{i \in I} \bar{S}_i \to \mathbb{R}^I$ auf gemischte Strategien?

Hier ist Stetigkeit / Konvergenz zu klären. Fun fact: Der Hilbert–Würfel $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ ist kompakt nach dem Satz von Tychonov. Zudem ist er ein wichtiger Modellraum, etwa beim Metrisierungssatz von Urysohn.

Nashs Satz lässt sich in verschiedene Richtungen verallgemeinern, etwa auf spieltheoretische Modelle überlappender Generationen (Kapitel H). Hier sind tatsächlich unendlich viele Spieler realistisch. Vereinfachend interagiere dabei jeder Spieler $i \in I$ nur mit endlich vielen Nachbarn: $u_i : \prod_{j \in I} S_j \to \mathbb{R}$ hängt nur von endlich vielen Koordinaten $j \in I$ ab. Insbesondere ist u_i dann stetig bezüglich der Produkttopologie.

Allgemein formulieren wir hierzu folgendes Ergebnis:

Satz E1N: Satz von Nash für lokal-endliche Spiele

Sei $I = \mathbb{N}$. Für jeden Spieler $i \in I$ sei die Strategiemenge $S_i \neq \emptyset$ endlich und die Nutzenfunktion $u_i : \prod_{j \in I} S_j \to \mathbb{R}$ stetig in der Produkttopologie.

Dann lässt sich $u : \prod_{i \in I} S_i \to \mathbb{R}^I$ stetig fortsetzen zu $\bar{u} : \prod_{i \in I} \bar{S}_i \to \mathbb{R}^I$, und das Spiel $\bar{u}$ erlaubt mindestens ein Nash–Gleichgewicht.

Aufgabe: Versuchen Sie, diesen Verallgemeinerung zu beweisen (wenn Sie mutig sind für eine beliebige Spielermenge I).

Lösung: Wir setzen $u_i : \prod_{j \in I} S_j \to \mathbb{R}$ affin fort zu $\bar{u}_i : \bar{S} = \prod_{j \in I} \bar{S}_j \to \mathbb{R}$. Man rechnet sorgsam nach, dass mit u_i auch $\bar{u}_i$ stetig ist bezüglich der punktweisen Konvergenz, also der Produkttopologie. (Übung!)

Wir wählen $s^0 \in \bar{S} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \bar{S}_i$ willkürlich. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ variieren wir $(s_0, \dots, s_{k-1}) \in \prod_{i<k} \bar{S}_i$ und halten s_i für $i \geq k$ fest. Dank Nash E1F existiert ein Strategievektor $s^k \in \bar{S}$, der für alle Spieler $i < k$ stabil ist.

Dank Kompaktheit des Produktraums $\bar{S}$ existiert eine konvergente Teilfolge $(s^{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$. Nach Umnummerierung schreiben wir kurz $s^k \to s$. Weiterhin gilt Eigenschaft (a): $s^k \in \bar{S}$ ist stabil für alle Spieler $i < k$.

Mit diesem Grenzwert haben wir ein Strategiebündel $s \in \bar{S}$ konstruiert. Wir zeigen nun: s ist ein Nash–Gleichgewicht für das Spiel $\bar{u} : \bar{S} \to \mathbb{R}^I$.

Hierzu nutzen wir, dass die Abbildung $\bar{u} : \bar{S} \to \mathbb{R}^I$ stetig ist. Für jedes $i \in I$ gilt also (b) $\bar{u}_i(s^k) \to \bar{u}_i(s)$ für $k \to \infty$.

Sei $i \in I$ und $\tilde{s}_i \in \bar{S}_i$ eine alternative Strategie für Spieler i.
Sei $\varepsilon > 0$. Für jeden hinreichend großen Index $k > i$ gilt:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(s_i; s_{-i}) &\overset{\text{(b)}}{\geq} \bar{u}_i(s_i^k; s_{-i}^k) - \varepsilon \\ &\overset{\text{(a)}}{\geq} \bar{u}_i(\tilde{s}_i; s_{-i}^k) - \varepsilon \\ &\overset{\text{(b)}}{\geq} \bar{u}_i(\tilde{s}_i; s_{-i}) - 2\varepsilon \end{aligned}$$

Wir haben also $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) \geq \bar{u}_i(\tilde{s}_i; s_{-i}) - 2\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$.
Das bedeutet $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) \geq \bar{u}_i(\tilde{s}_i; s_{-i})$. Dies gilt für alle $\tilde{s}_i \in \bar{S}_i$.
Demnach ist s ein Nash–Gleichgewicht, wie behauptet,
kurz $s \in \mathrm{NE}(\bar{u})$ und somit insbesondere $\mathrm{NE}(\bar{u}) \neq \emptyset$.

Bemerkung: Ist I eine beliebige (überabzählbare) Menge, so gelingt der Beweis wörtlich genauso, allerdings müssen wir Folgen durch Filter ersetzen. Der Satz von Tychonov garantiert die Kompaktheit von $\bar{S}$. (Die Ausformulierung ist eine Fingerübung in technischer Virtuosität.)

Sicherheitsstrategie und Sicherweitswert

Definition E2A: Sicherheitswert und Sicherheitsstrategie

Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to R_1 \times \dots \times R_n$ ein endliches Spiel, oder allgemeiner ein reelles Spiel mit $S_1 \times \dots \times S_n$ kompakt und u stetig.

Spieler i kann mindestens folgende Auszahlung für sich garantieren:

$$\operatorname{val}_i(u) := \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i; s_{-i}) = \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i^*, s_{-i})$$

Wir nennen $\operatorname{val}_i(u)$ den **Sicherheitswert** des Spiels u für Spieler i. Hierzu wählt er als **Sicherheitsstrategie** $s_i^* \in S_i$ einen Min-Maximierer.

Mögliche Interpretation: Spieler i zieht zuerst, öffentlich und endgültig.

⚠ Spieler i maximiert hier seinen Mindestgewinn. Im Allgemeinen bilden Sicherheitsstrategien $(s_i^*)_{i \in I}$ kein Nash–Gleichgewicht!

☹ Das gilt selbst für Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele: Manchmal bleibt eine Lücke zwischen Maximin und Minimax.

☺ Diese verschwindet genau für Nash–Gleichgewichte: Das ist der Inhalt von Neumanns Minimax-Satz E2D.

Basketball Endgame als Spiel mit konstanter Summe

A \ B	Defend 2	Defend 3
Shoot 2	18 / 82	31 / 69
Shoot 3	50 / 50	23 / 77

Aufgabe: Bestimmen und interpretieren Sie die Sicherheitsstrategien:

$$\max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x,y) = 23 \qquad \text{vs} \qquad \max_{y \in S_2} \min_{x \in S_1} u_2(x,y) = 69$$

☹ Es gilt die Summe $u_1 + u_2 = 100$, aber nur $23 + 69 = 92 < 100$.
☹ Die Sicherheitsstrategien $(s_i^*)_{i \in I}$ bilden kein Nash–Gleichgewicht.

Was gilt für die Fortsetzung $\bar{u}$ auf gemischte Strategien?

$$\max_{x \in [S_1]} \min_{y \in [S_2]} \bar{u}_1(x,y) = 28.4 \qquad \text{vs} \qquad \max_{y \in [S_2]} \min_{x \in [S_1]} \bar{u}_2(x,y) = 71.6$$

☺ Dahinter stecken allgemeine Regeln und der Minimax-Satz.
☺ Die Lücke verschwindet genau für Nash–Gleichgewichte!

Matching Pennies ist ein Nullsummenspiel.

B / A	Kopf	Zahl
Kopf	$+1$ / -1	-1 / $+1$
Zahl	-1 / $+1$	$+1$ / -1

Aufgabe: Bestimmen und interpretieren Sie die Sicherheitsstrategien:

$$\max_{x\in S_1}\min_{y\in S_2} u_1(x,y) = -1 \qquad \text{vs} \qquad \max_{y\in S_2}\min_{x\in S_1} u_2(x,y) = -1$$

- Es gilt die Summe $u_1 + u_2 = 0$, doch nur $(-1)+(-1) = -2 < 0$.
- Die Sicherheitsstrategien $(s_i^*)_{i\in I}$ bilden kein Nash–Gleichgewicht.

Was gilt für die Fortsetzung $\bar u$ auf gemischte Strategien?

$$\max_{x\in[S_1]}\min_{y\in[S_2]} \bar u_1(x,y) = 0 \qquad \text{vs} \qquad \max_{y\in[S_2]}\min_{x\in[S_1]} \bar u_2(x,y) = 0$$

- Dahinter stecken allgemeine Regeln und der Minimax-Satz.
- Das Spiel $\bar u$ hat ein Nash–Gleichgewicht, u hingegen nicht.

Schere-Stein-Papier ist ein Nullsummenspiel.

B / A	Schere	Stein	Papier
Schere	0 / 0	$+1$ / -1	-1 / $+1$
Stein	-1 / $+1$	0 / 0	$+1$ / -1
Papier	$+1$ / -1	-1 / $+1$	0 / 0

Aufgabe: Bestimmen und interpretieren Sie die Sicherheitsstrategien:

$$\max_{x\in S_1}\min_{y\in S_2} u_1(x,y) = -1 \qquad \text{vs} \qquad \max_{y\in S_2}\min_{x\in S_1} u_2(x,y) = -1$$

- Es gilt die Summe $u_1 + u_2 = 0$, doch nur $(-1)+(-1) = -2 < 0$.

$$\max_{x\in[S_1]}\min_{y\in[S_2]} \bar u_1(x,y) = 0 \qquad \text{vs} \qquad \max_{y\in[S_2]}\min_{x\in[S_1]} \bar u_2(x,y) = 0$$

- Das Spiel $\bar u$ hat ein Nash–Gleichgewicht, u hingegen nicht.

Gleichgewichte und Minimax = Maximin

Lemma E2B: Gleichgewichte und Minimax = Maximin

Sei $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Nullsummenspiel, also $u_1 + u_2 = 0$. Zudem sei das Spiel endlich oder $S_1 \times S_2$ kompakt und u stetig.

(0) Allgemein gilt „Maximin $\le$ Minimax“, also ausgeschrieben:

$$\max_{x\in S_1} \min_{y\in S_2} u_1(x,y) \le \min_{y\in S_2} \max_{x\in S_1} u_1(x,y)$$

(1) Ist $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ein Nash–Gleichgewicht, so gilt Gleichheit:

$$u_1(s_1,s_2) = \max_{x\in S_1} \min_{y\in S_2} u_1(x,y) = \min_{y\in S_2} \max_{x\in S_1} u_1(x,y)$$

(2) Angenommen, es gilt die ersehnte Gleichheit „Maximin = Minimax“. Wir wählen einen Min-Maximierer $s_1 \in S_1$ und Max-Minimierer $s_2 \in S_2$:

$$\begin{aligned} v &= \max_{x\in S_1} \min_{y\in S_2} u_1(x,y) = \min_{y\in S_2} u_1(s_1,y), \\ v &= \min_{y\in S_2} \max_{x\in S_1} u_1(x,y) = \max_{x\in S_1} u_1(x,s_2). \end{aligned}$$

Dann ist das Paar $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ein Nash–Gleichgewicht.

Gleichgewichte und Minimax = Maximin

Beweis: (0) Für alle $x \in S_1$ und $y \in S_2$ gilt:

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &\overset{\text{(a)}}{\le} u_1(x,y) \\ u_1(x,y) &\overset{\text{(b)}}{\le} \max_{x\in S_1} u_1(x,y) \\ \min_{y\in S_2} u_1(x,y) &\overset{\text{(c)}}{\le} \max_{x\in S_1} u_1(x,y) \\ \min_{y\in S_2} u_1(x,y) &\overset{\text{(d)}}{\le} \min_{y\in S_2} \max_{x\in S_1} u_1(x,y) \\ \max_{x\in S_1} \min_{y\in S_2} u_1(x,y) &\overset{\text{(e)}}{\le} \min_{y\in S_2} \max_{x\in S_1} u_1(x,y) \end{aligned}$$

Die Ungleichung (a) ist trivial. Wir nehmen rechts das Maximum über x, damit wird die rechte Seite höchstens größer, also gilt (b). Wir nehmen links das Minimum über y, damit wird die linke Seite höchstens kleiner, also gilt (c). Die Ungleichung (c) gilt somit für alle $x \in S_1$ und $y \in S_2$; dabei hängt allerdings die linke Seite nur noch von x ab und die rechte Seite nur noch von y. Hieraus folgen sofort (d) und (e).

Gleichgewichte und Minimax $=$ Maximin

(1) Für jedes Nash–Gleichgewicht $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ gilt:

$$\left.\begin{cases} u_1(s_1,s_2) = \max\limits_{x\in S_1} u_1(x,s_2) & \ge \min\limits_{y\in S_2}\max\limits_{x\in S_1} u_1(x,y) \\ u_1(s_1,s_2) = \min\limits_{y\in S_2} u_1(s_1,y) & \le \max\limits_{x\in S_1}\min\limits_{y\in S_2} u_1(x,y) \end{cases}\right\} \Longrightarrow$$

$$\min_{y\in S_2}\max_{x\in S_1} u_1(x,y) \;\le\; u_1(s_1,s_2) \;\le\; \max_{x\in S_1}\min_{y\in S_2} u_1(x,y)$$

Dank (0) gilt auch die umgekehrte Ungleichung, hieraus folgt Gleichheit.

(2) Dank der genannten Voraussetzungen gilt:

$$\left.\begin{cases} u_1(s_1,s_2) \le \max\limits_{x\in S_1} u_1(x,s_2) = \min\limits_{y\in S_2}\max\limits_{x\in S_1} u_1(x,y) = v \\ u_1(s_1,s_2) \ge \min\limits_{y\in S_2} u_1(s_1,y) = \max\limits_{x\in S_1}\min\limits_{y\in S_2} u_1(x,y) = v \end{cases}\right\} \Longrightarrow$$

$$u_1(s_1,s_2) = \max_{x\in S_1} u_1(x,s_2) = \min_{y\in S_2} u_1(s_1,y)$$

Demnach ist $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ein Nash–Gleichgewicht. $\boxed{\text{QED}}$

Austauschregel für Nullsummenspiele

Hieraus folgen grundlegende Rechenregeln für Nullsummenspiele:

Satz E2C: Austauschregel für Nullsummenspiele

(1) Genau dann erfüllt unser Nullsummenspiel $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$ die Gleichung „Minimax $=$ Maximin“, wenn Nash–Gleichgewichte existieren.

(2) Alle Nash–Gleichgewichte führen zum selben Ergebnis: Sind (s_1, s_2) und (s_1^*, s_2^*) Nash–Gleichgewichte, dann gilt $u_1(s_1, s_2) = u_1(s_1^*, s_2^*)$.

(3) Alle Nash–Gleichgewichte sind austauschbar: Sind (s_1, s_2) und (s_1^*, s_2^*) Nash–Gleichgewichte, dann auch (s_1, s_2^*) und (s_1^*, s_2).

(4) Sind S_1, S_2 konvex und u affin-linear, so ist $\mathrm{NE}(u) = K_1 \times K_2$ das Produkt zweier konvexer Mengen $K_1 \subseteq S_1$ und $K_2 \subseteq S_2$.

🙂 Die Aussagen (2) und (3) gelten für *alle* Nash–Gleichgewichte. Das ist eine nützliche Besonderheit von Nullsummenspielen.

Es gibt Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele ohne Gleichgewichte, etwa Matching Pennies und Schere-Stein-Papier und viele weitere. Auch für diese sind die Aussagen (2) und (3) wahr, aber eben *leer*.

Die Sätze von Nash und von Neumann

Gleichgewichte sind grundlegend. Gibt es sie immer? Ja, oft genug: Dies verdanken wir dem Existenzsatz E1F für Nash–Gleichgewichte. Hieraus folgt der Hauptsatz für Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele:

Satz E2D: Minimax-Satz, John von Neumann 1928

Sei $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$ ein endliches Nullsummenspiel, also $u_1 + u_2 = 0$, und $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \to \mathbb{R}^2$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.

Dank E1F existiert ein Gleichgewicht $(s_1^*, s_2^*) \in \bar{S}_1 \times \bar{S}_2$, und somit gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{val}_1(\bar{u}) &:= \max_{x \in \bar{S}_1} \min_{y \in \bar{S}_2} \bar{u}_1(x,y) &= u_1(s_1^*, s_2^*) &= \min_{y \in \bar{S}_2} \max_{x \in \bar{S}_1} \bar{u}_1(x,y), \\
\operatorname{val}_2(\bar{u}) &:= \max_{y \in \bar{S}_2} \min_{x \in \bar{S}_1} \bar{u}_2(x,y) &= u_2(s_1^*, s_2^*) &= \min_{x \in \bar{S}_1} \max_{y \in \bar{S}_2} \bar{u}_2(x,y).
\end{aligned}$$

Das ist der **Wert** des Spiels $\bar{u}$ für Spieler i. Es gilt $\operatorname{val}_1(\bar{u}) + \operatorname{val}_2(\bar{u}) = 0$.

Die Sätze von Nash und von Neumann

☺ Diese Vereinfachung ist eine Besonderheit für Nullsummenspiele, oder allgemein Zwei-Personen-Spiele mit konstanter Summe:

Sicherheitsstrategien sind optimal, sobald sich die Lücke schließt, also Min-Maximierer und Max-Minimierer denselben Wert ergeben.

☺ Dieser Wert ist das erwartete Ergebnis bei rationaler Spielweise.

Mit diesem Satz begann die Theorie, als erstes substantielles Ergebnis: Jedem Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel wird so ein Wert zugeordnet. Von Neumann bewies diesen Satz 1928 zunächst auf andere Weise. Nashs allgemeiner Existenzsatz eröffnete 1951 einen kürzeren Weg.

☺ Von Neumanns Ideen beeinflussten maßgeblich die Entdeckung der ersten Dualitätsprinzipien in der Linearen Optimierung. Wir werden dies im nächsten Kapitel genauer untersuchen.

Definition E2E: konstante Summe und strikt kompetitiv

Ein Spiel $u : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ hat **konstante Summe (Null)**, wenn es die Bedingung $u_1 + \cdots + u_n = \mathrm{const}$ (bzw. $= 0$) erfüllt.

Ein Zwei-Personen-Spiel $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$ ist **strikt kompetitiv**, wenn für alle $s, s' \in S$ die Äquivalenz $u_1(s) < u_1(s') \iff u_2(s) > u_2(s')$ gilt.

Für **kompetitive Spiele** verlangen wir diese Äquivalenz nur für alle Strategievektoren $s, s' \in S$, die sich in einer Koordinate unterscheiden.

Übung: Konstante Summe $\overset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ strikt kompetitiv $\overset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ kompetitiv.
Gilt das Minimax-Lemma E2B für kompetitive Spiele $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$?
Wenn u kompetitiv ist, gilt dies dann auch für die Fortsetzung $\bar{u}$?
Hat u konstante Summe, dann auch $\bar{u}$. (Dies nutzen wir in E2D.)

Kompetitive Spiele sind ein sehr spezieller aber durchaus wichtiger Fall. Es lohnt sich daher, hierzu spezielle Sätze und Techniken zu entwickeln. In vielen realistischen Situationen haben Spiele nicht konstante Summe und sind auch nicht kompetitiv. Nash–Gleichgewichte helfen allgemein!

Beispiel: Das Spiel *Schere-Stein-Papier* hat kein Gleichgewicht in reinen Strategien. Auch der Minimax-Satz gilt nicht in reinen Strategien. In gemischten Strategien haben die Spieler viel mehr Möglichkeiten. Der Satz von Nash sagt die Existenz von Gleichgewichten voraus. Hier ist $\frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Stein} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier}$ das einzige Gleichgewicht.

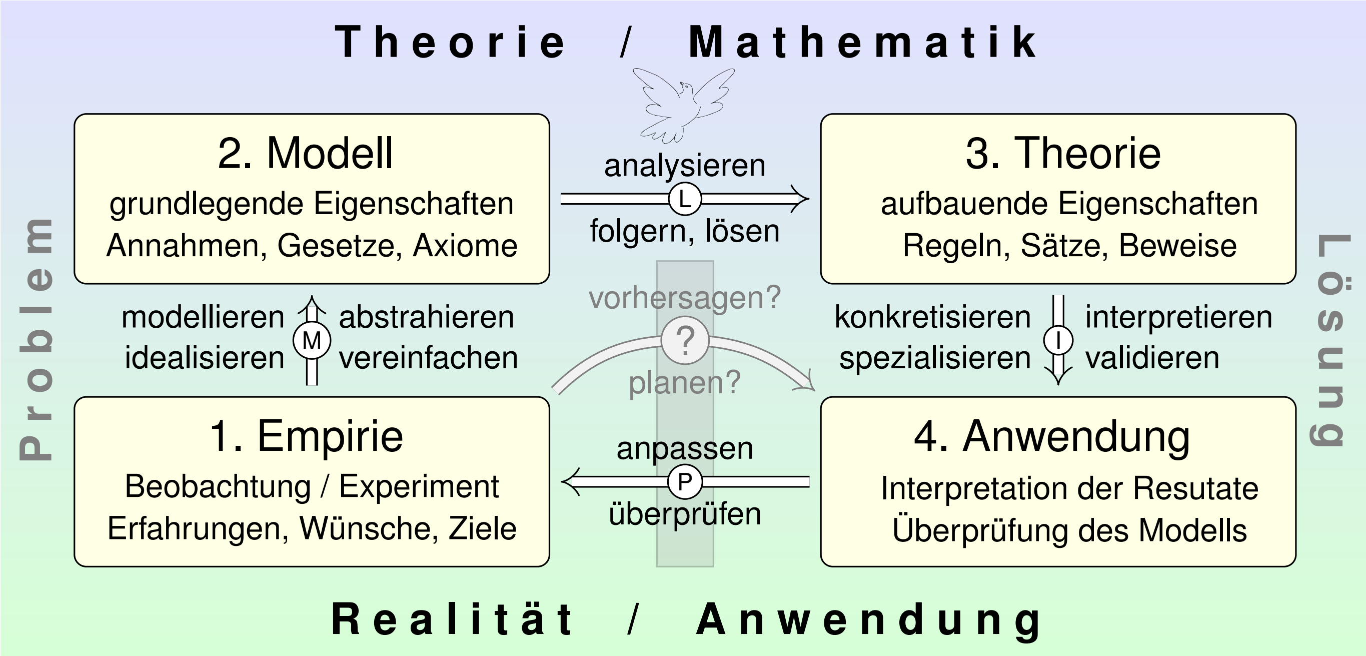
Aufgabe: Prüfen Sie sorgfältig nach, dass dies ein Gleichgewicht ist. Wie zeigen Sie geschickt, dass dies das einzige Gleichgewicht ist? Hierbei hilft Ihnen die Austauschregel E2C für Nullsummenspiele.

Aufgabe: Untersuchen Sie ebenso alle bisher vorgestellten Spiele. Welche haben konstante Summe, welche sind (strikt) kompetitiv?

Finden Sie alle Nash–Gleichgewichte und vergleichen Sie diese beiderseitig mit Sicherheitsstrategien (also Min-Maximierern).

Wozu dient Mathematik?

Alles Leben ist Problemlösen. (Karl Popper)



Mathematik untersucht sowohl abstrakte Strukturen als auch konkrete Anwendungen. Dies sind keine Gegensätze, sondern sie ergänzen sich!

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant)

Wozu dient Mathematik?

Beispiel: Schere-Stein-Papier mit Brunnen

Wir erweitern das Spiel Schere-Stein-Papier.
Beide Spieler haben zusätzlich die Strategie „Brunnen“:

A \ B	Schere	Stein	Papier	Brunnen
Schere	0 / 0	$+1$ / -1	-1 / $+1$	$+1$ / -1
Stein	-1 / $+1$	0 / 0	$+1$ / -1	$+1$ / -1
Papier	$+1$ / -1	-1 / $+1$	0 / 0	-1 / $+1$
Brunnen	-1 / $+1$	-1 / $+1$	$+1$ / -1	0 / 0

Aufgabe: Ist dies ein Nullsummenspiel? Was ist sein Wert?
Sehen Sie ein Nash–Gleichgewicht dieses Spiels? gar alle?

Beispiel: Schere-Stein-Papier mit Brunnen

Lösung: Die Strategie Brunnen dominiert schwach Stein. Wir streichen daher Stein und erhalten $u' : S' \times S' \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der reduzierten Strategiemenge $S' = \{\text{Schere}, \text{Papier}, \text{Brunnen}\}$. Dieses Spiel Schere-Papier-Brunnen ist **isomorph** zu Schere-Stein-Papier.

⚠ Isomorphie und Symmetrie vereinfachen unsere Analyse!

Wir kennen daher das Gleichgewicht $(s', s') \in \mathrm{NE}(\bar{u}')$ mit

$$s' = \frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier} + \frac{1}{3} \cdot \text{Brunnen}$$

Dank Satz E2H wissen wir $\mathrm{NE}(\bar{u}') \subseteq \mathrm{NE}(\bar{u})$, also ist (s', s') auch ein Nash–Gleichgewicht für Schere-Stein-Papier-Brunnen.

⚠ Das Spiel u könnte durchaus noch weitere Gleichgewichte haben. Das muss man jeweils genauer nachrechnen. Versuchen Sie es! Hierbei hilft Ihnen die Austauschregel E2C für Nullsummenspiele.

☺ Dies ist ein symmetrisches Nullsummenspiel, der Wert ist also 0. Zur Berechnung des Wertes genügt uns ein einziges Gleichgewicht, hier (s', s'). Alternativ impliziert bereits die Symmetrie den Wert 0.

Stark und schwach dominierte Strategien

Definition E2F: dominierte Strategien

Sei $u : \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R_i$ ein strategisches Spiel und $i \in I$ ein Spieler. Für je zwei seiner Strategien $x, y \in S_i$ vergleichen wir die Funktionen

$$u_i(x; -), u_i(y; -) : S_{-i} \to R_i.$$

Schwache Dominanz $x \le_i^u y$ bedeutet $u_i(x; s_{-i}) \le u_i(y; s_{-i})$,
starke Dominanz $x <_i^u y$ bedeutet $u_i(x; s_{-i}) < u_i(y; s_{-i})$
jeweils für alle möglichen Gegenstrategien $s_{-i} \in S_{-i}$.

Für Teilmengen $X, Y \subseteq S_i$ bedeutet Dominanz $X \le_i^u Y$ bzw. $X <_i^u Y$: Zu jedem $x \in X$ existiert ein $y \in Y$ mit $x \le_i^u y$ bzw. $x <_i^u y$.

Wir nennen $x \in S_i$ **dominiert in** u, falls $x \le_i^u y$ für ein $y \in S_i \smallsetminus \{x\}$ gilt.
Wir nennen $y \in S_i$ **dominant in** u, falls $x \le_i^u y$ für alle $x \in S_i \smallsetminus \{y\}$ gilt.

Wir schreiben $\mathrm{D}_i(u) := \{\, y \in S_i \mid S_i \le_i^u y \,\}$ und $\mathrm{DNE}(u) := \prod_{i\in I} \mathrm{D}_i(u)$.
Ebenso für starke Dominanz und $\mathrm{D}_i^!(u) := \{\, y \in S_i \mid S_i \smallsetminus \{y\} <_i^u y \,\}$

⚠ Es gilt $\mathrm{DNE}(u) \subseteq \mathrm{NE}(u)$, oft $\mathrm{DNE}(u) = \emptyset$, selten $\mathrm{DNE}(u) = \mathrm{NE}(u)$.

Stark und schwach dominierte Strategien

Schwache und starke Dominanz sind häufig nützlich; dazwischen liegt: **Halbstarke Dominanz** $x \lneq_i^u y$ bedeutet $u_i(x; s_{-i}) \le u_i(y; s_{-i})$ für alle und $u_i(x; s_{-i}) < u_i(y; s_{-i})$ für mindest eine Gegenstrategie $s_{-i} \in S_{-i}$.

Bei Mengen bedeutet Dominanz $X \le_i^u Y$ bzw. $X <_i^u Y$: Es existiert eine Abbildung $f : X \to Y$ mit $x \le_i^u f(x)$ bzw. $x <_i^u f(x)$ für alle $x \in X$.

Die (schwach) dominanten Strategien $s_i \in \mathrm{D}_i(u)$ bedeuten:
s_i ist immer eine beste Antwort, gegen alle $s_{-i} \in S_{-i}$.

Eine stark dominante Strategie $s_i \in \mathrm{D}_i^!(u)$ bedeutet:
s_i ist die eindeutige beste Antwort, gegen alle $s_{-i} \in S_{-i}$.

🙂 Schwache Dominanz $x \le_i^u y$ bedeutet: Ein rationaler Spieler **kann** seine Strategie x jederzeit ersetzen durch eine mindestens ebenso gute Alternative, etwa y. Er kann x spielen, er kann es aber auch vermeiden.

🙂 Starke Dominanz $x <_i^u y$ bedeutet: Ein rationaler Spieler **muss** seine Strategie x jederzeit ersetzen durch eine strikt bessere Alternative, etwa y. Er kann nicht x spielen, er wird dies in jedem Falle vermeiden.

Streichung dominierter Strategien

Satz E2G: Streichung dominierter Strategien: reiner Fall

Gegeben sei ein Spiel $u\colon \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R_i$ und $S_i = S_i' \sqcup D_i$ für $i \in I$. Löschung der D_i ergibt die Einschränkung $u'\colon \prod_{i\in I} S_i' \to \prod_{i\in I} R_i$:

(1) Aus starker Dominanz $S_i' >_i^u D_i$ folgt $\mathrm{NE}(u') = \mathrm{NE}(u)$.

(2) Aus schwacher Dominanz $S_i' \ge_i^u D_i$ folgt $\mathrm{NE}(u') \subseteq \mathrm{NE}(u)$.

Beweis: (2) Sei $s \in \mathrm{NE}(u')$, also $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x'\in S_i'} u_i(x'; s_{-i})$. Dies ist gleich $\max_{x\in S_i} u_i(x; s_{-i})$ dank $S_i' \ge_i^u D_i'$, also $s \in \mathrm{NE}(u)$.

(1) Sei $s \in \mathrm{NE}(u)$, also $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x\in S_i} u_i(x; s_{-i})$. Aus $S_i' >_i^u D_i'$ folgt $s_i \in S_i'$. Also $s \in S'$ und $s \in \mathrm{NE}(u')$. $\boxed{\text{QED}}$

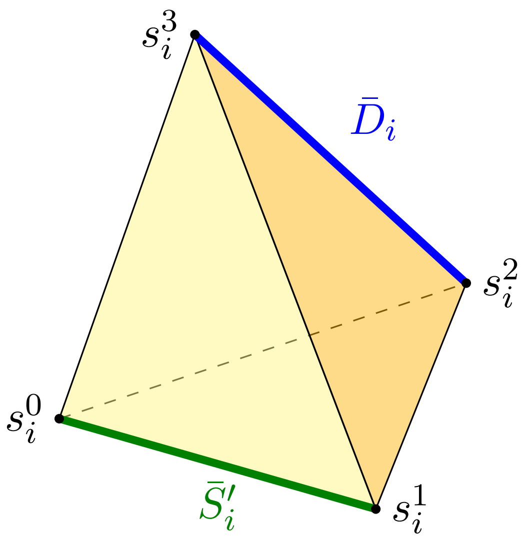
Zu jedem endlichen reellen Spiel $u\colon \prod_{i\in I} S_i \to \mathbb{R}^I$ betrachten wir auch seine Fortsetzung $\bar u\colon \prod_{i\in I} \bar S_i \to \mathbb{R}^I$ auf gemischte Strategien.

Gilt (starke bzw. schwache) Dominanz E2F bezüglich aller reinen Gegenstrategien $s_{-i} \in S_{-i}$, so auch für alle gemischten $\bar s_{-i} \in \bar S_{-i}$.

Aus $x_0 \le_i^u y_0, \dots, x_n \le_i^u y_n$ folgt $\sum_k p_k x_k \le_i^u \sum_k p_k y_k$ für alle $p \in \Delta^n$. Gilt für ein k zudem $x_k <_i^u y_k$ und $p_k > 0$, so folgt $\sum_k p_k x_k <_i^u \sum_k p_k y_k$.

Streichung dominierter Strategien

Geometrisch sieht die Löschung gemischter Strategien etwa so aus:



In diesem Beispiel sei $S_i' = \{s_i^0, s_i^1\}$ und $D_i = \{s_i^2, s_i^3\}$. Wir können nicht nur die Ecken s_i^2 und s_i^3 löschen, sondern müssen auch alle gemischten Strategien löschen, die diese Ecken in ihrem Träger nutzen, also $\bar S_i \smallsetminus \bar S_i'$.

Streichung dominierter Strategien

Satz E2H: Streichung dominierter Strategien: gemischter Fall

Sei $u : \prod_{i\in I} S_i \to \mathbb{R}^I$ und $u' : \prod_{i\in I} S'_i \to \mathbb{R}^I$ mit $S_i = S'_i \sqcup D_i$. Dann gilt

$$\bar{S}_i = \bar{S}'_i * \bar{D}_i = \left\{ (1-t)x + ty \;\middle|\; t \in [0,1],\ x \in \bar{S}'_i,\ y \in \bar{D}_i \right\}.$$

Die Differenz der gemischten Strategiemengen ist demnach

$$\bar{S}_i \smallsetminus \bar{S}'_i = \left\{ (1-t)x + ty \;\middle|\; t \in \,]0,1],\ x \in \bar{S}'_i,\ y \in \bar{D}_i \right\}.$$

(1) Aus $\bar{S}'_i >^u_i D_i$ folgt $\bar{S}'_i >^u_i \bar{S}_i \smallsetminus \bar{S}'_i$ wie zuvor erklärt.

Das bedeutet: Stark dominierte Strategien von u kommen in keinem Nash–Gleichgewicht von $\bar{u}$ vor. Bei ihrer Streichung gilt $\mathrm{NE}(\bar{u}') = \mathrm{NE}(\bar{u})$.

(2) Aus $\bar{S}'_i \geq^u_i D_i$ folgt $\bar{S}'_i \geq^u_i \bar{S}_i \smallsetminus \bar{S}'_i$ wie zuvor erklärt.

Bei Streichung schwach dominierter Strategien gilt $\mathrm{NE}(\bar{u}') \subseteq \mathrm{NE}(\bar{u})$. Im Allgemeinen können dabei Nash–Gleichgewichte verloren gehen.

Streichung dominierter Strategien

Aufgabe: Rechnen Sie diese Aussagen zur Übung sorgfältig nach!

Beweis: (2) Sei $s \in \mathrm{NE}(\bar{u}')$, also $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x' \in \bar{S}'_i} u_i(x'; s_{-i})$.
Für jedes $x \in \bar{S}_i$ gilt $x = (1-t)s'_i + ts$ mit $t \in [0,1]$, $s'_i \in \bar{S}'_i$ und $s \in \bar{D}_i$.
Es existiert $s' \in \bar{S}'_i$ mit $s' \geq^u_i s$, also $x \leq^u_i x' := (1-t)s'_i + ts' \in \bar{S}'_i$.
Hieraus folgt $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x \in \bar{S}_i} u_i(x; s_{-i})$, also $s \in \mathrm{NE}(\bar{u})$.

(1) Sei $s \in \mathrm{NE}(\bar{u})$, also $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x \in \bar{S}_i} u_i(x; s_{-i})$ für jedes $i \in I$.
Wir haben $s_i = (1-t)s'_i + ts$ mit $t \in [0,1]$, $s'_i \in \bar{S}'_i$ und $s \in \bar{D}_i$. Es existiert $s' \in \bar{S}'_i$ mit $s' >^u_i s$. Für $x' = (1-t)s'_i + ts'$ wäre $x' >^u_i s_i$ oder $t = 0$.
Also gilt $t = 0$ und somit $s_i = s'_i \in \bar{S}'_i$. Das zeigt $s \in \mathrm{NE}(\bar{u}')$.

☺ Die Sachlage ist einfach. Warum ist die Notation so detailverliebt? Damit alles klar und einfach wird, müssen wir sorgsam argumentieren!

☺ Das Erkennen und Streichen von (strikt) dominierten Strategien vereinfacht die Spielanalyse. Das ist überaus nützlich und meist leicht, doch die Feinheiten sind subtil und müssen sauber ausgeführt werden. Ich betone dies, weil es erfahrungsgemäß oft falsch angewendet wird.

Stark und schwach dominierte Strategien

☺ Anschaulich gesagt: (2) Beim Erweitern von u' zu u nehmen wir schwach dominierte Strategien hinzu. Diese erhöhen offensichtlich nicht das Maximum für den Spieler $i \in I$, also bleiben Gleichgewichte des kleinen Spiels u' auch Gleichgewichte des großen Spiels u.

(1) Stark dominierte Strategien kommen in keinem Gleichgewicht vor. Wir können sie getrost streichen oder hinzufügen, auch hinzumischen.

☺ Streichung dominierter Strategien vereinfacht das Spiel u zu u'. Das hilft bei der Suche nach einem bzw. allen Gleichgewichten:

(2) Die Streichung schwach dominierter Strategien löscht vielleicht Gleichgewichte. Die Inklusion $\mathrm{NE}(u') \subseteq \mathrm{NE}(u)$ hingegen gilt immer: Haben wir also ein Gleichgewicht für u' gefunden, so bleibt dies für u. Das genügt, wenn wir nur *irgendein* Gleichgewicht von u finden wollen.

(1) Die Streichung stark dominierter Strategien ändert nichts an den Gleichgewichten: Genau das garantiert unsere obige Rechnung.

☺ Dies können wir iterieren, bis keine Streichungen mehr möglich sind. Hierzu benötigen wir (wie immer) Rationalität entsprechend hoher Stufe!

Erinnerung: Stufen der Rationalität

$\mathscr{R}_1$: Wer von Ihnen weiß, was „Stufen der Rationalität“ bedeutet?
$\mathscr{R}_2$: Wer von Ihnen weiß, dass alle anderen das ebenfalls wissen?
$\mathscr{R}_3$: Wer von Ihnen weiß, dass alle wissen, dass alle das wissen? ...

♦ Definition A2A: Stufen der Rationalität

Unter **(unbeschränkter) Rationalität** verstehen wir folgende Axiome:

$\mathscr{R}_0$: Jeder Spieler will sein Ergebnis (Nutzen, Gewinn, ...) maximieren.

$\mathscr{R}_1$: Jeder Spieler versteht zudem alle Spielregeln und Konsequenzen.

$\mathscr{R}_2$: Es gilt die vorige Aussage $\mathscr{R}_1$, und jeder Spieler weiß dies.

$\mathscr{R}_3$: Es gilt die vorige Aussage $\mathscr{R}_2$, und jeder Spieler weiß dies.

etc... Genauer definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Aussage

$\mathscr{R}_n$: Es gilt die Aussage $\mathscr{R}_{n-1}$, und jeder Spieler weiß dies.

$\mathscr{R}_\infty$: Es gilt die Aussage $\mathscr{R}_n$ für jede Stufe $n \in \mathbb{N}$.

☺ Wir nennen dies *gemeinsames Wissen*, engl. *common knowledge*. Beantworten Sie erneut die obigen Fragen: haben wir $\mathscr{R}_\infty$ hergestellt?

Stark und schwach dominierte Strategien

Stark und schwach dominierte Strategien

Beispiel zu schwach dominierten Strategien

Aufgabe: Konstruieren Sie ein Spiel, bei dem die Streichung einer schwach dominierten Strategie *alle* Nash–Gleichgewichte vernichtet.

Lösung: Wir beginnen mit einem Spiel u', etwa *Matching Pennies*:

B / A	b_0	b_1	b_2
a_0	$+1$ / -1	-1 / $+1$	-2 / 0
a_1	-1 / $+1$	$+1$ / -1	$+1$ / $+2$

Die Strategie b_1 dominiert schwach die neue Strategie b_2 von Spieler B. Die Auszahlungen für Spieler A sind beliebig, wir wählen sie geschickt.

Die Strategie (a_1, b_2) ist ein Nash–Gleichgewicht des Spiels u. Beim Streichen der dominierten Strategie b_2 wird es vernichtet. Das Spiel u' hat gar keine Gleichgewichte mehr, $\bar{u}'$ hingegen schon.

Beispiel zu stark dominierten Strategien

Aufgabe: Finden Sie alle reinen Gleichgewichte, dann alle gemischten.

B / A	b_0	b_1	b_2
a_0	1 / 4	3 / 3	2 / 1
a_1	2 / 3	1 / 2	0 / 3

Lösung: Die reinen Gleichgewichte finden wir durch Hinsehen: Hier ist nur (a_0, b_1) ein Nash–Gleichgewicht, es ist sogar strikt.

Die Strategie b_1 dominiert stark b_2. Im Teilspiel u' dominiert a_0 stark a_1. Im Teilspiel u'' dominiert b_1 stark b_0. Schließlich bleibt nur das triviale Teilspiel u''' bestehend aus (a_0, b_1). Das ist das einzige Gleichgewicht!

⚠ Es ist eine recht seltene Ausnahme, dass sich Spiele so einfach lösen lassen durch iterierte Löschung (stark) dominierter Strategien. Meist lassen sich nur wenige oder gar keine Strategien ausschließen. Wenn es jedoch möglich ist, bietet dies eine nützliche Vereinfachung.

Dominierte Strategien in der affinen Fortsetzung

Aufgabe: Gibt es Spiele $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit einer Strategie $s_2 \in S_2$, die im Spiel u nicht dominiert wird, wohl aber in $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

Lösung: Ja, das ist möglich. Wir konstruieren ein einfaches Beispiel:

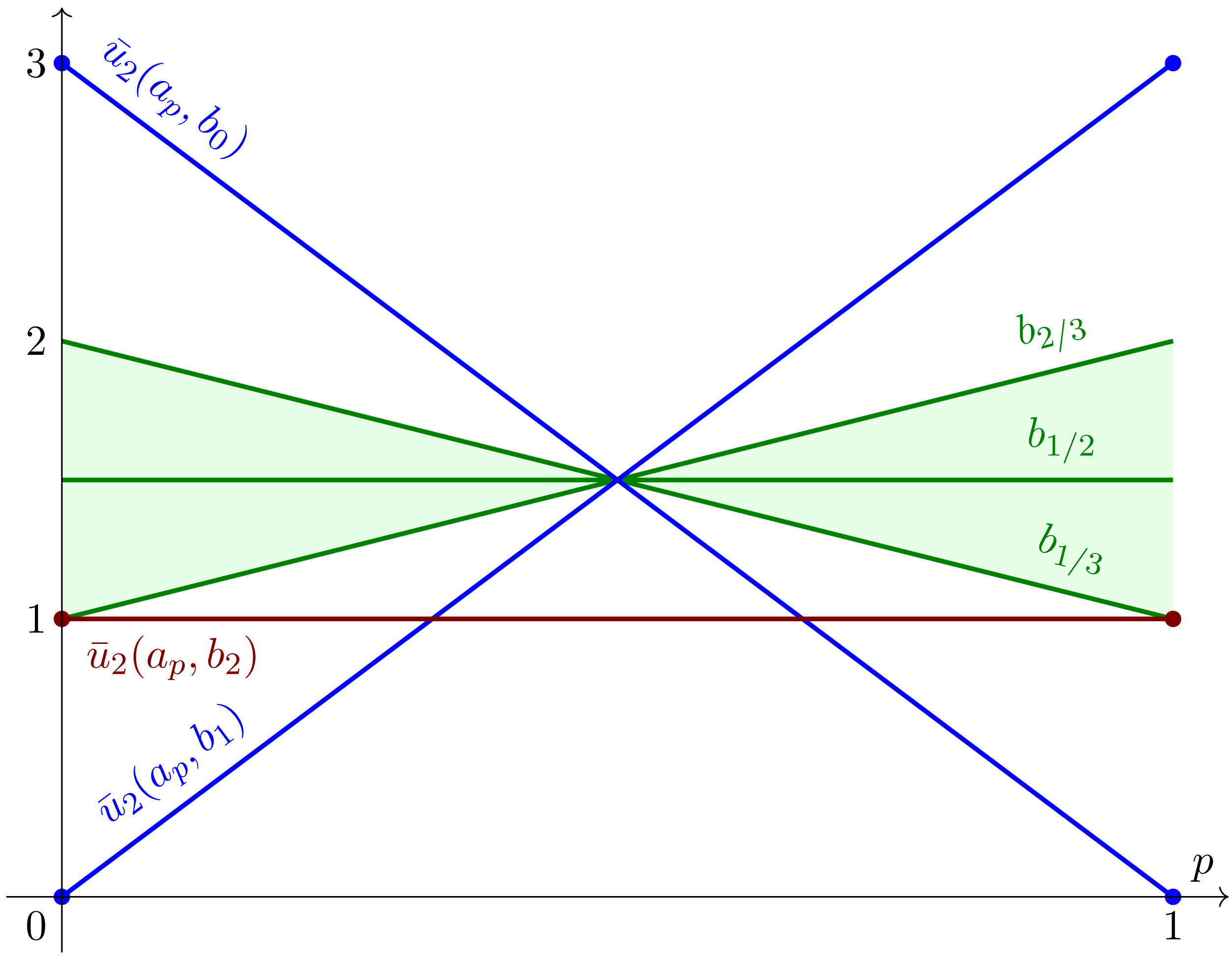
A \ B	b_0	b_1	b_2
a_0	$*$ \ 3	$*$ \ 0	$*$ \ 1
a_1	$*$ \ 0	$*$ \ 3	$*$ \ 1

Die Strategie b_2 wird von keiner reinen Strategie dominiert: weder b_0 noch b_1. Dies gelingt jedoch der gemischten Strategie $\frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{2}b_1 >_2^u b_2$. (Die Auszahlungen für Spieler 1 sind unerheblich und nicht gezeigt.)

Starke Dominanz $b_t := (1-t)b_0 + tb_1 >_2^u b_2$ gilt für alle $1/3 < t < 2/3$, und immerhin noch schwache Dominanz in den Fällen $t \in \{1/3, 2/3\}$.

🙂 Das Phänomen tritt im obigen Kartenduell auf, allerdings schwächer.

Dominierte Strategien in der affinen Fortsetzung



Rationalisierbare Strategien

Rationalität: Eine stark dominierte Strategie sollte nie gespielt werden. Ebensowenig eine Strategie, die nie beste Antwort ist. Wie ist hier der logische Zusammenhang? Es besteht eine bemerkenswerte Dualität!

Definition E2I: Rationalisierbarkeit

Die Strategie $s_i \in S_i$ heißt **rationalisierbar** oder **mindestens einmal beste Antwort**, wenn sie beste Antwort ist auf mind. eine (korrelierte) Gegenstrategie $s_{-i} \in [S_{-i}]$, also $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x \in \bar{S}_i} \bar{u}_i(x; s_{-i})$ erfüllt.

Jedes Nash–Gleichgewicht $s \in S$ besteht aus rationalisierbaren $s_i \in S_i$.

Satz E2J: Rationalisierbar ist das Gegenteil von stark dominiert.

Genau dann ist s_i^* stark dominiert, wenn s_i^* nie beste Antwort ist.

Beweis: Die Implikation „⇒“ ist klar: Dominiert $s_i \in \bar{S}_i$ stark $s_i^* \in S_i$, so gilt $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) > \bar{u}_i(s_i^*; s_{-i})$ für alle Gegenstrategien $s_{-i} \in [S_{-i}]$.
Die Implikation „⇐“ ist bemerkenswert: Zu jedem $s_{-i} \in [S_{-i}]$ existiert ein geeignetes $s_i \in \bar{S}_i$, das die Ungleichung $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) > \bar{u}_i(s_i^*; s_{-i})$ erfüllt.
Wir suchen stärker ein $s_i \in \bar{S}_i$ für alle $s_{-i} \in [S_{-i}]$. „Einer für alle!“

Rationalisierbare Strategien

Wir konstruieren hierzu aus u ein Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel $v : S_1^* \times S_2^* \to \mathbb{R}^2$ mit Strategiemengen $S_1^* = S_i \smallsetminus \{s_i^*\}$ und $S_2^* = S_{-i}$ und der Auszahlungsfunktion $v_1(s_i, s_{-i}) = u_i(s_i; s_{-i}) - u_i(s_i^*; s_{-i})$.
Sei $\bar{v} : \bar{S}_1^* \times \bar{S}_2^* \to \mathbb{R}^2$ die Fortsetzung auf gemischte Strategien.
Im Spiel u ist s_i^* keine beste Antwort auf s_{-i}, wenn

$$\max_{s_i \in \bar{S}_1^*} \bar{v}_1(s_i, s_{-i}) > 0.$$

Im Spiel u ist s_i^* demnach nie beste Antwort, wenn

$$\min_{s_{-i} \in \bar{S}_2^*} \max_{s_i \in \bar{S}_1^*} \bar{v}_1(s_i, s_{-i}) > 0.$$

Nach dem Hauptsatz E2D gilt Minimax = Maximin, also

$$\max_{s_i \in \bar{S}_1^*} \min_{s_{-i} \in \bar{S}_2^*} \bar{v}_1(s_i, s_{-i}) > 0.$$

Es existiert demnach ein $s_i \in \bar{S}_1^*$ mit $\min_{s_{-i} \in \bar{S}_2^*} \bar{v}_1(s_i, s_{-i}) > 0$.
Das bedeutet $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) > \bar{u}_i(s_i^*; s_{-i})$ für alle $s_{-i} \in \bar{S}_{-i}$. $\boxed{\text{QED}}$

Rationalisierbare Strategien

Für Spiele mit nur zwei Spielern ist die Konstruktion klar und natürlich. Ab drei Spielern müssen wir genauer hinsehen: Jeder Spieler kann (optimistisch-naiv) all seine Gegenspieler als unabhängig annehmen, oder aber (pessimistisch-paranoid) all seine Gegenspieler als „Achse des Bösen“ zusammenfassen. Für die Strategiemengen bedeutet das:

$$\begin{aligned} [S_{-i}] &= [S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n] \\ \supsetneq \bar{S}_{-i} &= [S_1] \times \dots \times [S_{i-1}] \times [S_{i+1}] \times \dots \times [S_n] \end{aligned}$$

Wir gehen in Definition E2I und Satz E2J vom *worst case* aus, dass sich alle Gegenspieler zu einer Koalition gegen Spieler i verbünden können.

Sind alle Gegenspieler unabhängig, so ersetzen wir die konvexe Menge $[S_{-i}]$ durch die nicht-konvexe Menge $\bar{S}_{-i} \subsetneq [S_{-i}]$; die oben bewiesene Implikation gilt dann im Allgemeinen nicht mehr (siehe Übungen).

🙂 Rekursiv können wir nun die iterierte Löschung (stark) dominierter Strategien erklären, und ebenso Rationalisierbarkeit der Stufe $1, 2, 3, \dots$. Das ist wie oben gesehen oft nützlich zur Vereinfachung / Reduktion.

Quantorentausch

Satz und Beweis erinnern uns an das Problem des Quantorentauschs:

$$\begin{array}{ccc} \exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} : x \le y & \Longrightarrow & \forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N} : x \le y \\ & \not\Longleftarrow & \\ \exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} : x \ge y & \Longrightarrow & \forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N} : x \ge y \end{array}$$

Sei $P : X \times Y \to \{0,1\} : (x,y) \mapsto P(x,y)$ eine Aussageform.
Die Quantoren $\forall$ und $\exists$ entsprechen $\min$ und $\max$:

$$\begin{array}{rcl} x \mapsto \forall y : P(x,y) & \text{entspricht} & x \mapsto \min\limits_{y\in Y} P(x,y) \\ \exists x\ \forall y : P(x,y) & \text{entspricht} & \max\limits_{x\in X} \min\limits_{y\in Y} P(x,y) \\ y \mapsto \exists x : P(x,y) & \text{entspricht} & y \mapsto \max\limits_{x\in X} P(x,y) \\ \forall y\ \exists x : P(x,y) & \text{entspricht} & \min\limits_{y\in Y} \max\limits_{x\in X} P(x,y) \end{array}$$

Je zwei Allquantoren vertauschen, ebenso je zwei Existenzquantoren. Wir dürfen Allquantoren vorziehen (E2B), aber nicht Existenzquantoren:

$$\begin{array}{ccc} \exists x\ \forall y : P(x,y) & \Longrightarrow & \forall y\ \exists x : P(x,y) \\ \max\limits_{x\in X} \min\limits_{y\in Y} P(x,y) & \le & \min\limits_{y\in Y} \max\limits_{x\in X} P(x,y) \end{array}$$

Symmetrien von Spielen

Aufgabe: Bestimmen Sie die Symmetriegruppen der folgenden Spiele!

A \ B (u^1)	bleiben	gehen
bleiben	-2 / -2	-5 / -2
gehen	-2 / -5	0 / 0

A \ B (u^2)	B	S
B	2 / 1	0 / 0
S	0 / 0	1 / 2

U \ G (u^3)	0	1
0	$+1$ / -1	-1 / $+1$
1	-1 / $+1$	$+1$ / -1

C \ D (u^4)	K	L
K	0 / 0	2 / 1
L	1 / 2	0 / 0

☺ Wir permutieren hier kohärent Spieler, Strategien und Ergebnisse. Welche dieser Spiele sind zueinander isomorph? Auf wie viele Weisen?

Symmetrien von Spielen

Wir notieren jede Symmetrie $(\tau, \sigma_1, \sigma_2)$ als Bijektion der Spielermenge $\tau : I \xrightarrow{\sim} I$ sowie der Strategiemengen $\sigma_1 : S_1 \xrightarrow{\sim} S_{\tau 1}$ und $\sigma_2 : S_2 \xrightarrow{\sim} S_{\tau 2}$.

☺ Das erste Spiel *Bleiben-oder-Gehen* hat genau zwei Symmetrien: Die Identität $g_0 = (\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ und den Spielertausch $g_1 = ((\mathsf{A}\,\mathsf{B}), \mathrm{id}, \mathrm{id})$.

☺ Das zweite Spiel *Bach oder Strawinsky* hat genau zwei Symmetrien: Die Identität $g_0 = (\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ und den Tausch $g_1 = ((\mathsf{A}\,\mathsf{B}), (B\,S), (B\,S))$. Wir tauschen nicht nur die Spieler, sondern zwingend auch Strategien.

☺ Das dritte Spiel *Matching Pennies* hat genau vier Symmetrien: Die Identität $g_0 = (\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ und die Drehung $g_1 = (\mathrm{id}, (0\,1), (0\,1))$, Spielerflip $g_2 = ((\mathsf{U}\,\mathsf{G}), \mathrm{id}, (0\,1))$ und Spielerflop $g_3 = ((\mathsf{U}\,\mathsf{G}), (0\,1), \mathrm{id})$. Die Gruppe $G = \{g_0, g_1, g_2, g_3\}$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, nicht $\mathbb{Z}/4$.

☺ Das vierte Spiel hat ebenfalls genau zwei Symmetrien: Die Identität $g_0 = (\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ und den Tausch $g_1 = ((\mathsf{C}\,\mathsf{D}), \mathrm{id}, \mathrm{id})$. Das zweite und vierte Spiel sind isomorph, sonst keine weiteren.
$\tau : \mathsf{C} \mapsto \mathsf{A}, \mathsf{D} \mapsto \mathsf{B}$ sowie $\sigma_1 : K \mapsto B, L \mapsto S$ und $\sigma_2 : K \mapsto S, L \mapsto B$.
$\tau' : \mathsf{C} \mapsto \mathsf{B}, \mathsf{D} \mapsto \mathsf{A}$ sowie $\sigma_1' : K \mapsto S, L \mapsto B$ und $\sigma_2' : K \mapsto B, L \mapsto S$.

Isomorphismen von Spielen

Aufgabe: In welchem Sinne sind die folgenden Spiele isomorph?

A \ B (u^1)	0	1
0	-1, -1	-5, 0
1	0, -5	-4, -4

A \ B (u^2)	0	1
0	4, 1	0, 3
1	5, -7	1, -5

A \ B (u^3)	0	1
0	2, 2	0, 3
1	3, 0	1, 1

A \ B (u^4)	0	1
0	0, 1	1, 2
1	3, 0	2, 3

Lösung: $u^1 \cong u^2$: Spieler und Strategien bleiben fix, die Ergebnisse werden affin-linear transformiert durch $r_1 \mapsto r_1 + 5$ bzw. $r_2 \mapsto 2r_2 + 3$. $u^1 \cong u^3$: nicht affin, nur monoton. $u^1 \cong u^4$: nur schwach monoton.

Isomorphismen von Spielen

Isomorphismen von Spielen sind mathematisch naheliegend. John Nash hat sie 1951 eingeführt und genutzt (auf Anregung von David Gale), später Harsanyi und Selten: *A general theory of equilibrium selection in games*, MIT 1988. In Kapitel 3 erklären sie affine Isomorphismen:

> *A reasonable solution concept should neither be influenced by positive linear payoff transformations nor by renamings of players, agents, and choices. The notion of an isomorphism combines both kinds of operations. We look at invariance with respect to isomorphisms as an indispensable requirement.*

In 2×2–Spielen hat jeder Spieler vier Auszahlungen. Bei Ausschluss von Gleichständen gibt es $4! = 24$ Anordnungen, dies führt zu $24^2 = 576$ Spielklassen. Permutation der Strategien reduziert dies auf $12^2 = 144$. Alle Spielklassen wurden geduldig aufgelistet von Goforth, Robinson: *The Topology of 2×2 Games. A new periodic table*, Routledge 2005.

Unter schwacher Monotonie bleiben sogar nur $2^4 = 16$ Klassen. Selbst wenn wir Gleichstände erlauben, sind es nur $3^4 = 81$ Klassen. Nash–Gleichgewichte bleiben unter all diesen Isomorphismen erhalten.

Symmetrien unter Spielern

Jede Permutation $\tau \in \mathrm{Sym}(I)$ operiert durch Umordnung $u \mapsto \tau \circ u \circ \tau^-$:

$$\begin{tikzcd}
S := S_1 \times \dots \times S_n \arrow[rrr, "u"] \arrow[ddd, "\sigma"', "\cong"] & & & R_1 \times \dots \times R_n =: R \arrow[ddd, "\rho"', "\cong"] \\
& (s_1, \dots, s_n) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "s'_{\tau i}=s_i"', "s'_j=s_{\tau^- j}"] & (r_1, \dots, r_n) \arrow[d, mapsto, "r'_{\tau i}=r_i"', "r'_j=r_{\tau^- j}"] & \\
& (s'_1, \dots, s'_n) \arrow[r, mapsto] & (r'_1, \dots, r'_n) & \\
S' := S'_1 \times \dots \times S'_n \arrow[rrr, "u'=\rho\circ u\circ\sigma^-"] & & & R'_1 \times \dots \times R'_n =: R'
\end{tikzcd}$$

Definition E2K: Spieler–Symmetrie

Ein Spiel u ist **spieler-symmetrisch** unter der Permutation $\tau : I \xrightarrow{\sim} I$, wenn $u = \tau \circ u \circ \tau^-$ gilt, also $S_i = S_{\tau i}$ und $R_i = R_{\tau i}$ für alle $i \in I$ sowie $u_i(s_1, \dots, s_n) = u_{\tau i}(s_{\tau^- 1}, \dots, s_{\tau^- n})$ für alle $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$.

Die Spieler-Symmetrien von u bilden die Gruppe $\mathrm{Sym}(u) \le \mathrm{Sym}(I)$. Das Spiel u heißt **spieler-symmetrisch**, falls $\mathrm{Sym}(u) = \mathrm{Sym}(I)$ gilt.

Symmetrien unter Spielern

Sei $I = \{1, 2, \dots, n\}$ die Spielermenge. Jede Permutation $\tau : I \xrightarrow{\sim} I$ definiert Permutationen $\sigma : S_1 \times \dots \times S_n \to S'_1 \times \dots \times S'_n$ mit $S'_{\tau i} = S_i$ und $\rho : R_1 \times \dots \times R_n \to R'_1 \times \dots \times R'_n$ mit $R'_{\tau i} = R_i$ wie üblich auf n–Tupeln.

Wir erhalten das Spiel $u' = \rho \circ u \circ \sigma^-$ durch **Umordnung der Spieler**. So operiert die symmetrische Gruppe $\mathrm{Sym}(I)$ auf den Spielern über I.

Allgemein seien I, J Spielermengen und $\tau : I \xrightarrow{\sim} J$ eine Bijektion.

Für jedes $i \in I$ sei $\sigma_i : S_i \xrightarrow{\sim} S'_{\tau i}$ eine Bijektion der Strategiemengen. Dies definiert $\sigma : \prod_{i \in I} S_i \to \prod_{j \in J} S'_j$ durch $(s_i)_{i \in I} \mapsto (\sigma_{\tau^- j} s_{\tau^- j})_{j \in J}$. Im einfachsten Falle denken wir an $S_i = S'_{\tau i}$ und $\sigma_i = \mathrm{id}_{S_i}$ für alle $i \in I$.

Für jedes $i \in I$ sei $\rho_i : (R_i, \le) \xrightarrow{\sim} (R'_{\tau i}, \le)$ eine monotone Bijektion. Dies definiert $\rho : \prod_{i \in I} R_i \to \prod_{j \in J} R'_j$ durch $(r_i)_{i \in I} \mapsto (\rho_{\tau^- j} r_{\tau^- j})_{j \in J}$. Im strikten Fall verlangen wir $R_i = R'_{\tau i}$ und $\rho_i = \mathrm{id}_{R_i}$ für alle $i \in I$.

Kurzum: Wir permutieren kohärent Spieler, Strategien und Ergebnisse. Das Spiel $u : S \to R$ permutieren wir zum Spiel $u' = \rho \circ u \circ \sigma^- : S' \to R'$.

Die folgende Definition präzisiert diese Idee für fünf Szenarien und erklärt strikte, (schwach) monotone, (schwach) affine Isomorphismen.

Isomorphismen von Spielen

Definition E2L: Isomorphismus von Spielen

Vorgelegt seien zwei strategische Spiele in Normalform

$$u : \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R_i \quad \text{und} \quad u' : \prod_{j\in J} S'_j \to \prod_{j\in J} R'_j$$

sowie hierzu Bijektionen $\tau : I \xrightarrow{\sim} J$ und $\sigma_i : S_i \xrightarrow{\sim} S'_{\tau i}$ für jedes $i \in I$.
Das definiert die **Produktbijektion** $\sigma : S \xrightarrow{\sim} S' : (s_i)_{i\in I} \mapsto (\sigma_{\tau^-j} s_{\tau^-j})_{j\in J}$.

Wir nennen (τ, σ) oder kurz $\sigma : u \to u'$ einen **Isomorphismus**, wenn gilt:

Strikt: Für alle $i \in I$ und $s \in S$ gilt $R_i = R_{\tau i}$ und $u'_{\tau i}(\sigma s) = u_i(s)$.

Monoton: Für alle Spieler $i \in I$ und alle Strategievektoren $s, s^* \in S$ gilt die Äquivalenz $\quad u_i(s) \le u_i(s^*) \iff u'_{\tau i}(\sigma s) \le u'_{\tau i}(\sigma s^*)$.

Schwach monoton: Wir verlangen Monotonie nur falls $s_{-i} = s^*_{-i}$.

Affin: Beide Spiele sind reell, also $R_i = R_j = \mathbb{R}$ für alle $i \in I$ und $j \in J$, und es gilt $u'_{\tau i}(\sigma s) = a_i u_i(s) + b_i$ mit Konstanten $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $a_i > 0$.

Schwach affin: Es gilt $u'_{\tau i}(\sigma s) = a_i u_i(s) + b_i(s_{-i})$ mit $b_i : S_{-i} \to \mathbb{R}$.

Isomorphismen von Spielen

Schwach fordern wir Monotonie / Affinität für jeden Spieler $i \in I$ und $s_i \in S_i$ jeweils separat bei festgehaltener Gegenstrategie $s_{-i} \in S_{-i}$.

Proposition E2M: Abstrakter Nonsense wirkt konkret.

Strategische Spiele und ihre Isomorphismen bilden eine **Kategorie**:

$$\mathbf{Game} = \mathbf{Game}_{\mathrm{s}}, \quad \mathbf{Game}_{\mathrm{m}}, \quad \mathbf{Game}_{\mathrm{wm}}, \quad \mathbf{Game}_{\mathrm{a}}, \quad \mathbf{Game}_{\mathrm{wa}}.$$

Diese ist jeweils ein **Gruppoid**, denn jeder Morphismus ist invertierbar, Isomorphie erklärt strikte, (schwach) monotone / affine **Äquivalenz**.

Jeder Isomorphismus $\sigma : u \xrightarrow{\sim} u'$ bewahrt **Gleichgewichte**: Wir erhalten Bijektionen $\mathrm{NE}(u) \xrightarrow{\sim} \mathrm{NE}(u')$ und $\mathrm{NE}^!(u) \xrightarrow{\sim} \mathrm{NE}^!(u')$ vermöge $s \mapsto \sigma(s)$.

Zum Spiel $u \in \mathbf{Game}_*$ bilden die Automorphismen die **Gruppe** $\mathrm{Aut}_*(u)$. Diese Gruppe **operiert** demnach auf den Mengen $\mathrm{NE}(u)$ und $\mathrm{NE}^!(u)$.

Aufgabe: Prüfen Sie die behaupteten Eigenschaften sorgfältig nach! Bestimmen Sie diese Gruppen für möglichst viele unserer Beispiele! Symmetrien sind nützlich und geben Auskunft über Gleichgewichte!

Existenz symmetrischer Gleichgewichte

Aufgabe: (0) Seien u, u' endliche reelle Spiele. Jede Produktbijektion $\sigma : u \xrightarrow{\sim} u'$ setzt sich eindeutig affin fort zur Produktbijektion $\bar\sigma : \bar u \xrightarrow{\sim} \bar u'$.

(1) Die Fortsetzung $\sigma \mapsto \bar\sigma$ erhält i.A. nicht (schwache) Monotonie!

(2) Ist $\sigma : u \xrightarrow{\sim} u'$ strikt oder (schwach) affin, so auch $\bar\sigma : \bar u \xrightarrow{\sim} \bar u'$. Wir erhalten also $\mathrm{Aut}_*(u) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_*(\bar u) : \sigma \mapsto \bar\sigma$ für $* \in \{\mathrm{s}, \mathrm{a}, \mathrm{wa}\}$.

(3) Sei $G \le \mathrm{Aut}_*(u)$. Ist $s \in \bar S$ ein Nash–Gleichgewicht, so auch $\bar\sigma(s)$ für alle $\sigma \in G$, aber i.A. nicht die Symmetrisierung $\bar s := \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \bar\sigma(s)$.

(4) Nash bewies 1951 folgende Verschärfung seines Existenzsatzes:

Satz E2N: Existenzsatz für symmetrische Gleichgewichte

Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel, wie oben erklärt, und $\bar u : \bar S_1 \times \dots \times \bar S_n \to \mathbb{R}^n$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.

Sei $G \le \mathrm{Aut}_*(u)$ eine Symmetriegruppe mit $* \in \{\mathrm{s}, \mathrm{a}, \mathrm{wa}\}$ wie oben. Dann besitzt $\bar u$ mindestens ein G–invariantes Nash–Gleichgewicht:

Die Menge $\mathrm{NE}(\bar u)^G := \{\, s \in \mathrm{NE}(\bar u) \mid \forall \sigma \in G : \bar\sigma(s) = s \,\}$ ist nicht leer.

Folgern Sie dies aus der natürlichen Äquivarianz der Nash–Funktion.

Existenz symmetrischer Gleichgewichte

☺ Dieses schöne Argument führen Sie in unserer Übung aus!

Anleitung: Wiederholen Sie den Beweis von Nashs Existenzsatz E1F, insbesondere die Konstruktion der Nash–Funktion für Lemma E1K.

Beweisen Sie genauso (!) den stärkeren Satz E2N, zunächst für strikte Symmetrien $G \le \mathrm{Aut}_\mathrm{s}(u)$, indem Sie folgende Fragen beantworten:

(4a) Ist die Teilmenge $\bar S^G = \{\, s \in \bar S \mid \forall \sigma \in G : \bar\sigma(s) = s \,\} \subseteq \bar S$ der G–invarianten Strategievektoren nicht leer? konvex? kompakt?

(4b) Ist die Nash–Funktion $f : \bar S \to \bar S$ äquivariant unter G, gilt also $f(\bar\sigma(s)) = \bar\sigma(f(s))$ für alle $\sigma \in G$ und $s \in \bar S$?

(4c) Wie folgt hieraus die ersehnte Existenzaussage?

☺ Für schwach affine Symmetrien behelfen wir uns mit einem Trick. Durch einen schwach affinen Isomorphismus normieren wir u so, dass für jeden Spieler $i \in I$ bei fester Gegenstrategie $s_{-i} \in S_{-i}$ gilt: $\min_{s_i \in S_i} u_i(s_i; s_{-i}) = 0$ und $\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i; s_{-i}) \in \{0, 1\}$. Das vereinfacht unsere Argumente erheblich, da für jedes normierte Spiel u schwach affine Symmetrien dasselbe sind wie strikte Symmetrien. Voilà!

Für die Untersuchung von Spielen sind die Nash–Gleichgewichte fundamental und haben sich als wesentliches Werkzeug bewährt. Es ist daher interessant, die Menge $\mathrm{NE}(u) \subseteq S$ bzw. $\mathrm{NE}(\bar{u}) \subseteq \bar{S}$ aller Nash–Gleichgewichte möglichst explizit zu bestimmen.

In realistischen Fällen ist dies aufwändig. Selbst wenn es theoretisch möglich ist, so ist es doch praktisch oft außerhalb unserer Reichweite. Wir wollen die Menge $\mathrm{NE}(\bar{u}) \subseteq \bar{S}$ der Gleichgewichte dann wenigstens qualitativ beschreiben (analytisch, geometrisch, topologisch). Sind hier beliebig komplizierte Räume möglich oder gibt es Einschränkungen?

Der Existenzsatz für Nash–Gleichgewichte ist ein erster wichtiger Schritt. Er garantiert allgemein: Für jedes endliche reelle Spiel u gilt $\mathrm{NE}(\bar{u}) \neq \emptyset$. Der obige Satz verallgemeinert dies schmerzfrei zu $\mathrm{NE}(\bar{u})^G \neq \emptyset$.

Solcherart Struktursätze sind durchaus auch praktisch relevant, da sie Rechnungen vereinfachen können oder überprüfen helfen. Weitere Fixpunktsätze, etwa von Kakutani oder Glicksberg, liefern Existenzaussagen für Gleichgewichte in allgemeineren Spielen u.

Hier ist Platz für Ihre Notizen, Beweise bzw. Gegenbeispiele.

Reguläre Bimatrixspiele

Wir betrachten ein Zwei-Personen-Spiel in strategischer Normalform

$$u\,:\,S_1\times S_2\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,:\,(s_1,s_2)\mapsto\big(u_1(s_1,s_2),\,u_2(s_1,s_2)\big).$$

Dabei seien $S_1=\{s_1^0<s_1^1<\ldots<s_1^m\}$ und $S_2=\{s_2^0<s_2^1<\ldots<s_2^n\}$.
Die Auszahlungen (u_1,u_2) entsprechen zwei Matrizen $A,B\in\mathbb{R}^{S_1\times S_2}$.
Wir betrachten Untermatrizen zu $I\subseteq S_1$ und $J\subseteq S_2$ mit $\sharp I=\sharp J+1$
und ergänzen zu einer quadratischen $(I\times J^*)$–Matrix mit $J^*=J\sqcup\{*\}$:

$$A^*_{I\times J}:=\begin{pmatrix} & 1\\ A_{I\times J} & \vdots\\ & 1\end{pmatrix}\;:\;(i,j)\mapsto\begin{cases}a_{i,j} & \text{für } i\in I \text{ und } j\in J,\\ 1 & \text{für } i\in I \text{ und } j=*.\end{cases}$$

Definition E2o: reguläre Spiele

Die Auszahlungsmatrix $A\in\mathbb{R}^{S_1\times S_2}$ nennen wir (affin) **regulär**,
falls $\det(A^*_{I\times J})\neq 0$ gilt für alle $I\subseteq S_1$ und $J\subseteq S_2$ mit $\sharp I=\sharp J+1$.
Das Spiel $u=(A,B)$ heißt **regulär**, wenn A und $B^\intercal$ regulär sind.

☺ Das ist generisch erfüllt: Fast alle Bimatrixspiele sind regulär!

Reguläre Bimatrixspiele

Kleinstes Beispiel: Sei $I=\{i<i'\}$ und $J=\{j\}$.

$$A^*_{I\times J}:=\begin{pmatrix}a_{i,j} & 1\\ a_{i',j} & 1\end{pmatrix}$$

Regularität bedeutet hier $\det A^*_{I\times J}=a_{i,j}-a_{i',j}\neq 0$.
In der $j$ten Spalte von A stehen lauter verschiedene Zahlen.

Die Ordnung auf I und J klärt die Reihenfolge der Zeilen und Spalten.
Alternativ können wir nur $|\det(A^*_{I\times J})|\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ betrachten und $\neq 0$ fordern.

☺ Entsprechendes gilt für alle höheren Regularitätsbedingungen:
Die Bedingung $\det A^*_{I\times J}\neq 0$ besagt, die Zeilen der Matrix $A^*_{I\times J}$ sind linear unabhängig, die Zeilen der Matrix $A_{I\times J}$ also affin unabhängig.
Das vereinfacht Rechnungen, da alle lästigen Ausnahmen wegfallen.

☺ Generisch bedeutet: Regularität gilt für fast alle Bimatrixspiele,
genauer gilt sie für eine offene dichte Teilmenge aller Bimatrixspiele.

Die Menge der singulären Matrizen ist abgeschlossen, nirgends dicht, und hat das Lebesgue–Maß Null. Wenn Sie also zufällig (stetig verteilt) ein Bimatrixspiel auswählen, so ist es fast sicher (mit Wkt 1) regulär.

Reguläre Bimatrixspiele

Satz E2R: reguläre $2 \times n$–Bimatrixspiele

Jedes reguläre $2 \times n$–Spiel hat höchstens $1 + n$ Nash–Gleichgewichte, und ihre ist Anzahl ungerade. Jede dieser Möglichkeiten wird realisiert.

Satz E2S: reguläre $m \times n$–Bimatrixspiele

Sei $2 \le m \le n$ und $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein reguläres $m \times n$–Spiel. Dann hat $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ weniger als $\binom{m+n}{m}$ Nash–Gleichgewichte:

(1) Jedes Nash–Gleichgewicht $(s_1, s_2) \in \bar{S}_1 \times \bar{S}_2$ hat quadratischen Träger, das heißt $\operatorname{supp}(s_1) = I \subseteq S_1$ und $\operatorname{supp}(s_2) = J \subseteq S_2$ mit $\sharp I = \sharp J$.

(2) Jedes solche Quadrat $I \times J$ trägt höchstens ein Nash–Gleichgewicht. Jedes ist lokal eine rationale Funktion der Koeffizienten.

Satz E2T: Wilson 1971

Fast alle endlichen reellen Spiele $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ haben endlich viele Nash–Gleichgewichte, und ist ihre Anzahl $\sharp \operatorname{NE}(\bar{u})$ ist ungerade.

Reguläre Bimatrixspiele

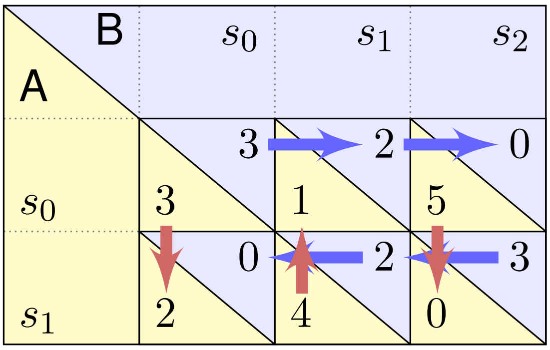
Satz E2R ist eine schöne Übung, die wir nachfolgend lösen. Damit lernen Sie insbesondere, alle kleinen Spiele zu lösen. Auch Satz E2S können Sie mit den elementaren Mitteln der Linearen Algebra direkt nachrechnen. Ich empfehle dies als ambitionierte Übung.

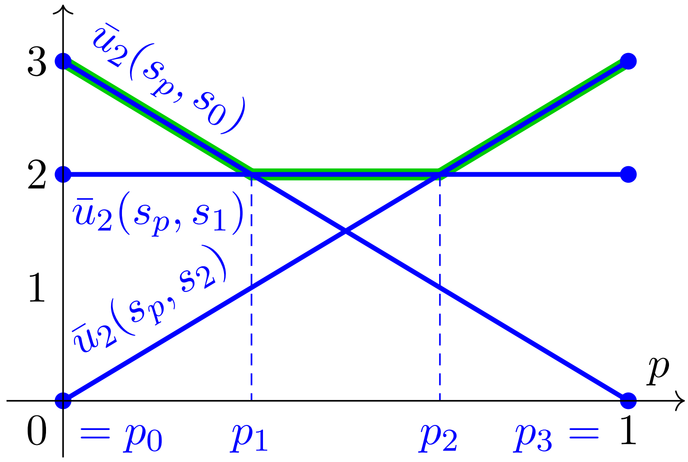
Der Satz E2T von Wilson gilt für jede beliebige Anzahl n von Spielern und jede beliebige Größe ihrer Strategiemengen $S_1, \dots, S_n$. Dieser Satz ist daher wesentlich allgemeiner und leider auch schwerer zu beweisen. Er ist eine idealtypische Anwendung der algebraischen Topologie.

📖 Robert Wilson: *Computing equilibria of n-person games.* Siam Journal on Applied Mathematics (1971) 80–87.

Eine elegante topologische Erklärung stammt von Elon Kohlberg und Jean-Francois Mertens: *On the strategic stability of equilibria.* Econometrica (1986) 1003–1037. (Satz und Beweis in §3.2 benötigen etwa eine Seite, müssen aber erst einmal sorgsam entpackt werden.)

Lösung regulärer $2 \times n$–Bimatrix-Spiele





Strategiemengen seien $S_1 = \{s_0, s_1\}$ für Alice und $S_2 = \{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ für Bob mit Auszahlungen $u(s_i, s_j) = (a_{ij}, b_{ij}) \in \mathbb{R}^2$ für $(s_i, s_j) \in S_1 \times S_2$.

Durch Umsortieren der Menge S_2 erreichen wir $b_{00} \ge b_{01} \ge \dots \ge b_{0n}$. Regulär sind Gleichheiten ausgeschlossen, also $b_{00} > b_{01} > \dots > b_{0n}$.

In der zweiten Zeile können wir zudem $b_{10} < b_{11} < \dots < b_{1n}$ annehmen: Gilt $b_{0i} > b_{0j}$ und $b_{1i} > b_{1j}$, so dominiert s_i strikt s_j, und wir löschen s_j.

Wir finden $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_n = 1$, sodass gilt: Auf Alice' Strategie $s_p = (1-p)s_0 + ps_1$ mit $p \in [p_j, p_{j+1}]$ ist Bobs Strategie s_j beste Antwort.

Lösung regulärer $2 \times n$–Bimatrix-Spiele

In der Übung gehen Sie folgenden Fragen auf den Grund:
Warum kann es hier keine Tripelpunkte geben? Regularität hilft!
Wie rechnen Sie alle Nash–Gleichgewichte explizit aus?
Warum ist ihre Anzahl bei Regularität immer ungerade?

Skizze zur ungeraden Anzahl: Wir können $b_{00} > b_{01} > \dots > b_{0n}$ und $b_{10} < b_{11} < \dots < b_{1n}$ annehmen, dank Umsortieren und Regularität. Der linke Rand $p = 0$ gibt ein (reines) NE genau dann, wenn $a_{01} > a_{11}$. Der rechte Rand $p = 1$ gibt ein (reines) NE genau dann, wenn $a_{0n} < a_{1n}$. Jede Ordnungsumkehr dazwischen liefert ein gemischtes NE $p \in \,]0, 1[$.

Nehmen wir beide reinen NE links und rechts an oder keines davon, dann gibt es dazwischen eine ungerade Anzahl von Umkehrungen. Nehmen wir hingegen entweder links oder rechts ein reines NE an, so gibt es dazwischen immer eine gerade Zahl von Umkehrungen. In jedem Falle ist die Anzahl der Nash-Gleichgewichte ungerade.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2020)

Aufgabe: Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S \times T \to \mathbb{R}^2$ und seine Fortsetzung $\bar{g} : [S] \times [T] \to \mathbb{R}^2$ auf gemischte Strategien.

Alice \ Bob	t_0	t_1	t_2	t_3
s_0	5, 3	1, 1	1, 3	2, 2
s_1	3, 3	3, 6	3, 0	5, 4

(1) Nennen Sie alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s, t) \in \mathrm{NE}(g)$.

(2) Angenommen Alice spielt die Strategie $s_p = (1 - p)s_0 + ps_1$ für ein $p \in [0, 1]$. Zeichnen Sie die Auszahlung $f_i(p) := \bar{g}_B(s_p, t_i)$ zu Bobs Strategie t_i für $i = 0, 1, 2, 3$.

Eine von Bobs reinen Strategien $x \in T$ ist nie beste Antwort; nennen Sie x und eine gemischte Strategie $y \in [T \smallsetminus \{x\}]$, die x strikt dominiert.

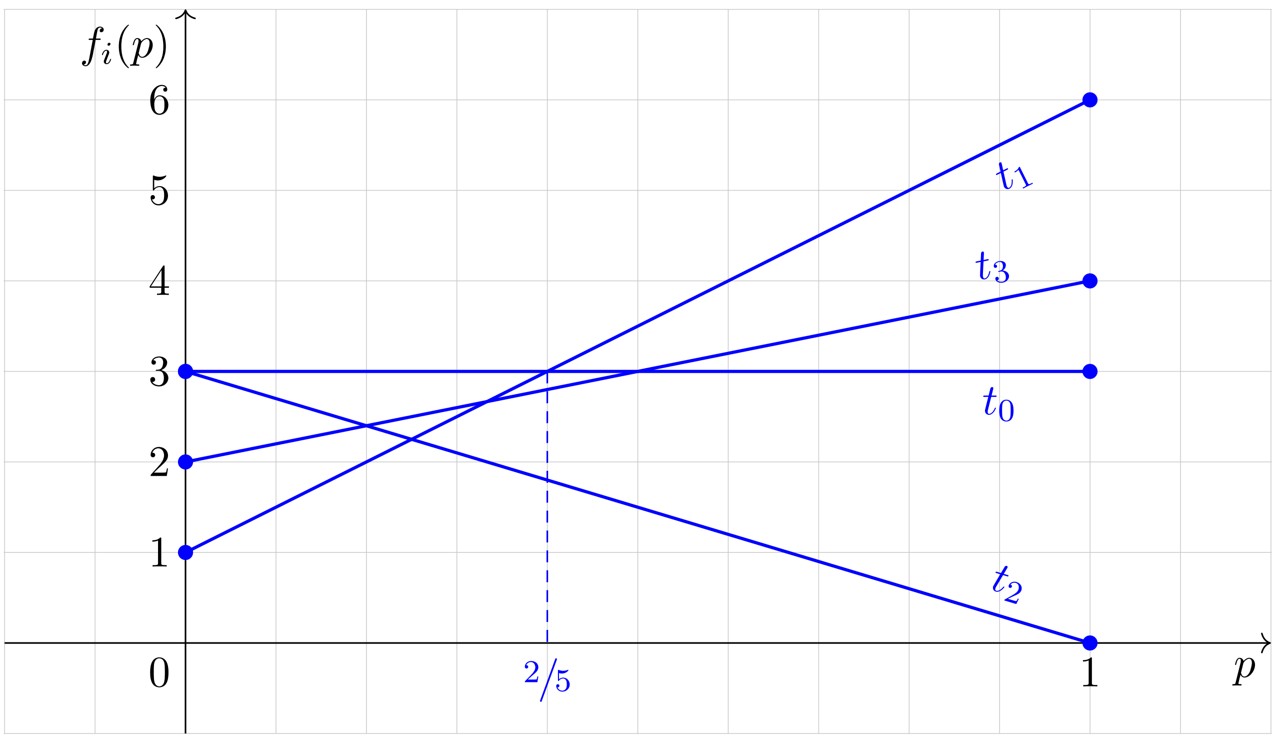
(3) Nennen Sie zu jeder Strategie s_p Bobs beste Antworten.

(4) Bestimmen Sie damit alle Nash–Gleichgewichte $(s, t) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2020)

Lösung: (1) Die reinen Gleichgewichte sind $\mathrm{NE}(g) = \{\, (s_0, t_0),\ (s_1, t_1) \,\}$.

(2) Wir skizzieren die Auszahlungen $f_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ für Bob:



Demnach ist t_3 nie beste Antwort. Sie wird dominiert von $y = \frac{3}{5}t_0 + \frac{2}{5}t_1$.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2020)

(3) Graphisch lesen wir zu s_p jeweils Bobs beste Antworten ab:

Intervall	$p = 0$	$0 < p < 2/5$	$p = 2/5$	$2/5 < p \le 1$
Antwort	$[t_0, t_2]$	$\{t_0\}$	$[t_0, t_1]$	$\{t_1\}$

(4) Alice spielt $s_p = (1-p)s_0 + ps_1$ mit $p \in [0,1]$. Fallunterscheidung:

1. Fall: Hier gilt $p = 0$. Bob spielt $t = (1-q)t_0 + qt_2$. Alice bekommt $g_A(s_0, t) = (1-q) \cdot 5 + q \cdot 1$, abweichend $g_A(s_1, t) = (1-q) \cdot 3 + q \cdot 3$. Es muss $g_A(s_0, t) \ge g_A(s_1, t)$ gelten, also $2(1-q) \ge 2q$, somit $q \ge 1/2$.

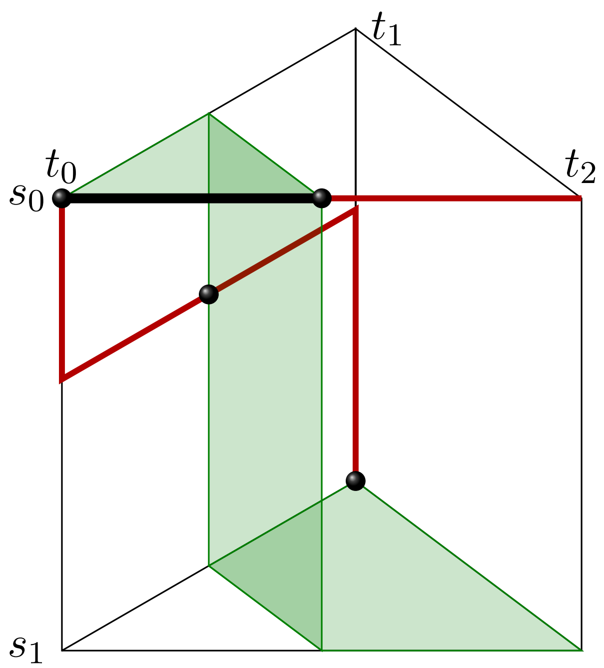
2. Fall: Hier gilt $0 < p < 2/5$. Bob spielt $t = t_0$.
Wegen $g_A(s_0, t_0) = 5 > 3 = g_A(s_1, t_0)$ entsteht hier kein Gleichgewicht.

3. Fall: Hier gilt $p = 2/5$. Bob spielt $t = (1-q)t_0 + qt_1$. Alice bekommt $g_A(s_0, t) = (1-q) \cdot 5 + q \cdot 1$ bzw. $g_A(s_1, t) = (1-q) \cdot 3 + q \cdot 3$. Es muss $g_A(s_0, t) = g_A(s_1, t)$ gelten, also $2(1-q) = 2q$, somit $q = 1/2$.

4. Fall: Hier gilt $2/5 < p \le 1$. Bob spielt $t = t_1$.
Wegen $g_A(s_0, t_0) = 1 < 3 = g_A(s_1, t_0)$ muss Alice s_1 spielen.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2020)

Zusammenfassung: Nash–Gleichgewichte sind die beiden isolierten Punkte (s_1, t_1) und (s, t) mit $s = 3/5\, s_0 + 2/5\, s_1$ und $t = 1/2\, t_0 + 1/2\, t_1$ sowie das Intervall aller Punkte (s_0, t) mit $t = (1-q)t_0 + qt_2$ und $q \in [0, 1/2]$.



Die rote Reaktionskurve für Bob erhalten wir aus (3). Spielt Bob die Strategie $t = q_0 t_0 + q_1 t_1 + q_2 t_2$, dann erhält Alice die Auszahlung $5q_0 + 1q_1 + 1q_2$, wenn sie s_0 spielt, und $3q_0+3q_1+3q_2$, wenn sie s_1 spielt. Demnach ist s_0 die beste Antwort, falls $q_0 > 1/2$, und s_1 ist die beste Antwort, falls $q_0 < 1/2$. Im Fall $q_0 = 1/2$ ist jede Konvexkombination von s_0 und s_1 eine beste Antwort; dies ist die grüne Reaktionsfläche.

Die Schnittmenge der beiden Reaktionsrelationen (Kurve / Fläche) ist die Menge der Nash–Gleichgewichte, hier schwarz eingezeichnet.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2019)

Aufgabe: Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S_A \times S_B \to \mathbb{R}^2$ und seine Fortsetzung $\bar{g} : [S_A] \times [S_B] \to \mathbb{R}^2$ auf gemischte Strategien.

Alice \ Bob	s_2	s_3	s_4	s_5
s_0	1, 3	3, 6	5, 5	4, 4
s_1	3, 5	3, 0	6, 1	2, 4

(1) Nennen Sie alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(g)$.

(2) Angenommen Alice spielt die gemischte Strategie $s_t = (1-t)s_0 + ts_1$ für ein $t \in [0,1]$. Zeichnen Sie die Auszahlung $f_a(t) := \bar{g}_B(s_t, a)$ zu Bobs reinen Antworten $a \in \{s_2, s_3, s_4, s_5\}$.

Eine von Bobs reinen Strategien $x \in S_B$ ist nie beste Antwort; nennen Sie x und eine gemischte Strategie $y \in [S_B \smallsetminus \{x\}]$, die x strikt dominiert.

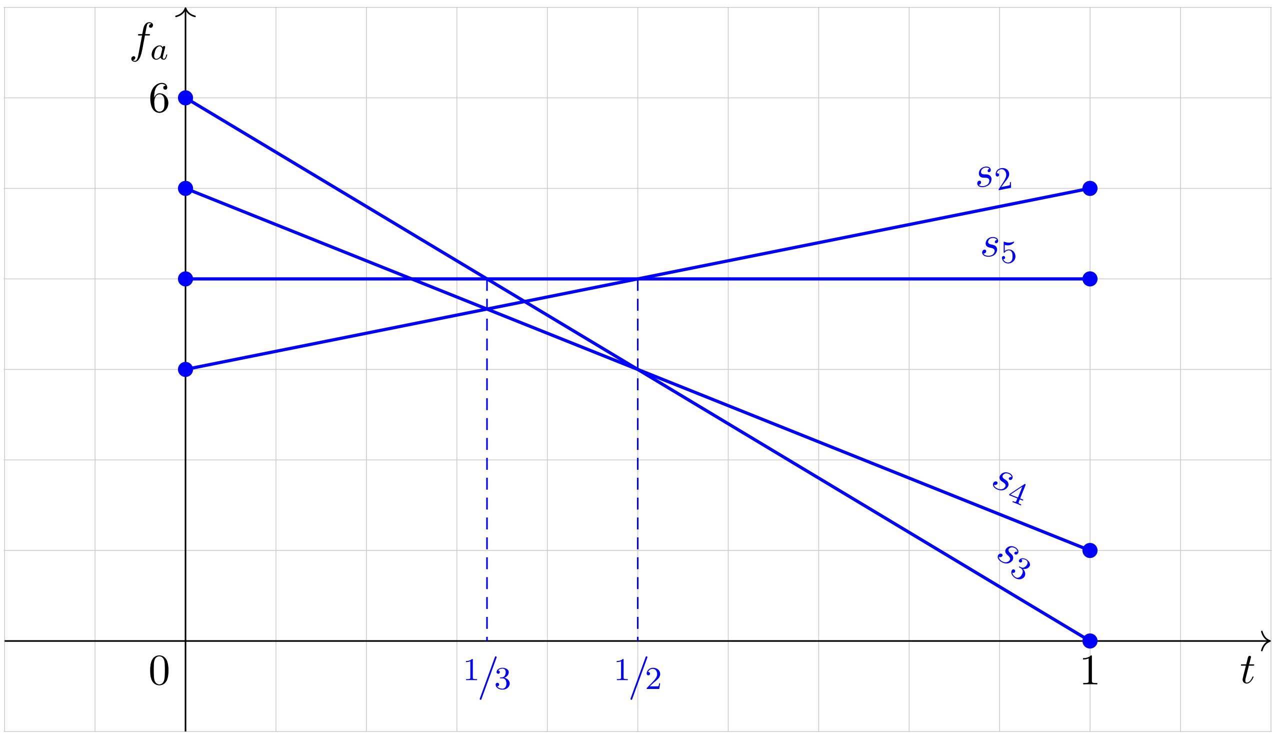
(3) Nennen Sie zu jeder Strategie s_t Bobs beste Antworten.

(4) Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2019)

(1) Die reinen Gleichgewichte sind $\mathrm{NE}(g) = \{\ (s_0, s_3),\ (s_1, s_2)\ \}$.

(2) Wir skizzieren die Auszahlungen $f_a : [0,1] \to \mathbb{R}$ für Bob:



Demnach ist s_4 nie beste Antwort. Sie wird dominiert von $y = \frac{2}{3}s_3 + \frac{1}{3}s_5$.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2019)

(3) Graphisch lesen wir zu s_t jeweils Bobs beste Antworten ab:

Intervall	$0 \le t <$	$1/3$	$< t <$	$1/2$	$< t \le 1$
Antwort	$\{s_3\}$	$[s_3, s_5]$	$\{s_5\}$	$[s_5, s_2]$	$\{s_2\}$

(4) Alice spielt $s_A = s_t = (1-t)s_0 + ts_1$ mit $t \in [0,1]$. Fallunterscheidung:

1. Fall: $0 \le t < \frac{1}{3}$. Bob spielt $s_B = s_3$. Darauf ist $s_A \in [s_0, s_1]$ Alice' beste Antwort. Wir finden so die Nash–Gleichgewichte (s_t, s_3) für $0 \le t < \frac{1}{3}$.

2. Fall: $t = \frac{1}{3}$. Bob spielt $s_B \in [s_3, s_5]$. Nur auf $s_B = s_3$ ist $s_A = s_t$ Alice' beste Antwort. Wir finden so das Nash–Gleichgewicht (s_t, s_3) für $t = \frac{1}{3}$.

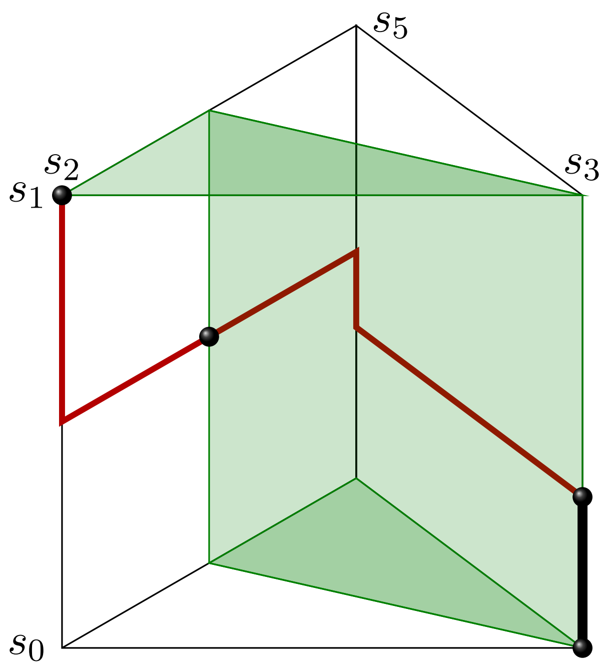
3. Fall: $\frac{1}{3} < t < \frac{1}{2}$. Bob spielt $s_B = s_5$. Darauf ist $s_A = s_0$ Alice' beste Antwort. Wir finden in diesem Intervall keine weiteren Gleichgewichte.

4. Fall: $t = \frac{1}{2}$. Bob spielt $s_B \in [s_2, s_5]$. Nur auf $s_B = \frac{1}{2}s_2 + \frac{1}{2}s_5$ ist $s_A = s_t$ Alice' beste Antwort. Wir finden so das Gleichgewicht (s_t, s_B) für $t = \frac{1}{2}$.

5. Fall: $\frac{1}{2} < t \le 1$: Bob spielt $s_B = s_2$. Darauf ist $s_A = s_1$ Alice' beste Antwort. Wir finden so das letzte Nash–Gleichgewicht (s_1, s_2).

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2019)

Zusammenfassung: Nash–Gleichgewichte sind die isolierten Punkte (s_1, s_2) und (s_A, s_B) mit $s_A = {}^1\!/\!_2\, s_0 + {}^1\!/\!_2\, s_1$ und $s_B = {}^1\!/\!_2\, s_2 + {}^1\!/\!_2\, s_5$ sowie das Intervall aller Punkte (s_t, s_3) mit $t \in [0, {}^1\!/\!_3]$.



Die rote Reaktionskurve für Bob erhalten wir aus (3). Spielt Bob die Strategie $s_B = p_2 s_2 + p_3 s_3 + p_5 s_5$, dann erhält Alice die Auszahlung $p_2 + 3p_3 + 4p_5$, wenn sie s_0 spielt, und $3p_2 + 3p_3 + 2p_5$, wenn sie s_1 spielt. Also ist s_0 die beste Antwort falls $p_2 < p_5$, und s_1 ist die beste Antwort falls $p_2 > p_5$. Im Fall $p_2 = p_5$ ist jede Konvexkombination von s_0 und s_1 beste Antwort. So erhalten wir die grüne Reaktionsfläche für Alice.

Die Schnittmenge der beiden Reaktionsrelationen (Kurve / Fläche) ist die Menge der Nash–Gleichgewichte, hier schwarz eingezeichnet.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2018)

Aufgabe: Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S_A \times S_B \to \mathbb{R}^2$ und seine Fortsetzung $\bar{g} : [S_A] \times [S_B] \to \mathbb{R}^2$ auf gemischte Strategien.

Bob / Alice	a	b	c
s_0	5 / 7	10 / 7	8 / 3
s_1	10 / 1	0 / 4	8 / 9

(1) Nennen Sie alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(g)$.

(2) Angenommen Alice spielt die gemischte Strategie $s_t = (1-t)s_0 + ts_1$ für ein $t \in [0,1]$. Zeichnen Sie die Auszahlung $f_a(t) := \bar{g}_B(s_t, a)$ zu Bobs Strategie a, ebenso f_b und f_c.

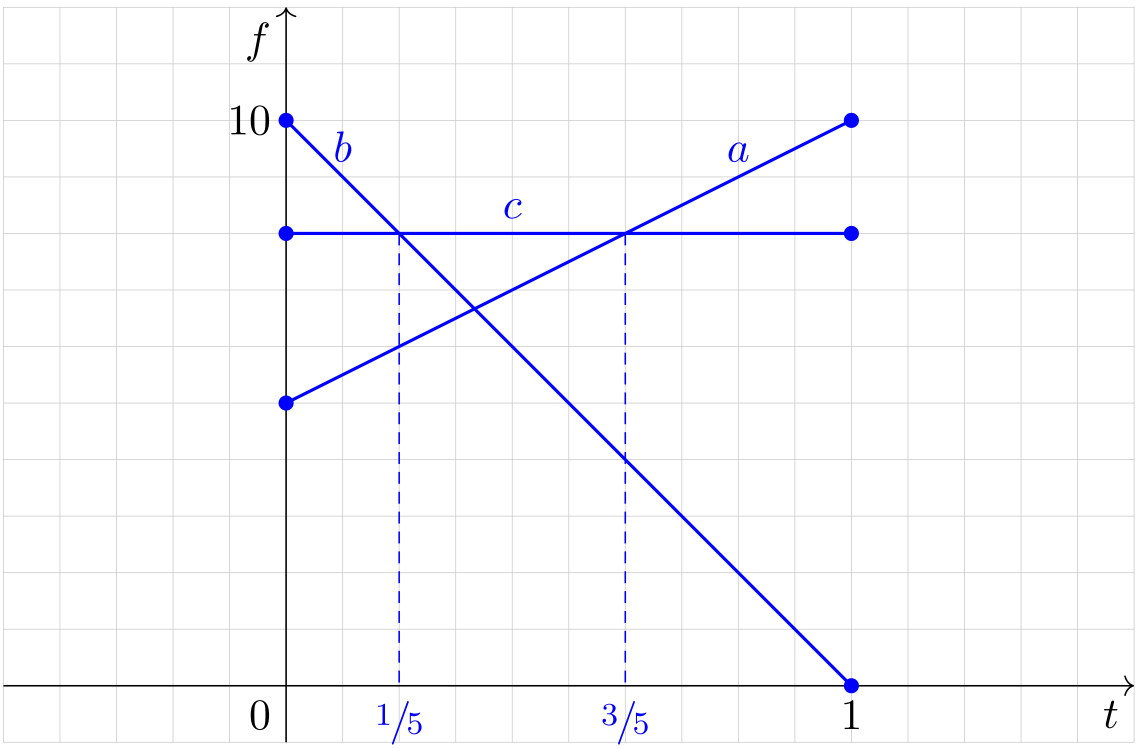
(3) Nennen Sie zu jeder Strategie s_t Bobs beste Antworten.

(4) Bestimmen Sie damit alle Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2018)

Lösung: (1) Das einzige reine Gleichgewicht ist $(s_A, s_B) = (s_0, b)$.

(2) Wir skizzieren die Auszahlungen $f_a, f_b, f_c : [0,1] \to \mathbb{R}$ für Bob:



Nash–Gleichgewichte (Klausur 2018)

(3) Graphisch lesen wir zu s_t jeweils Bobs beste Antworten ab:

Intervall	$0 \le t <$	$1/5$	$< t <$	$3/5$	$< t \le 1$
Antwort	$\{b\}$	$[b, c]$	$\{c\}$	$[a, c]$	$\{a\}$

(4) Neben dem reinen Gleichgewicht (s_0, b) finden wir die gemischten

$$\left(s_{\frac{1}{5}},\ \tfrac{2}{3}b + \tfrac{1}{3}c \right) \quad \text{und} \quad \left(s_{\frac{3}{5}},\ \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}c \right).$$

Dies sind *gegenseitig* beste Antworten, wie die Definition es verlangt. Hierzu ist eine kleine Rechnung notwendig: Versuchen Sie es als Übung! (Anleitung: Die beiden vorigen Aufgaben führen dies genauer aus.)

Mit dieser Methode können Sie alle $2 \times n$–Spiele lösen.

Wiederholen / entwickeln Sie den Algorithmus, der zu jedem Spiel $g : \{0, 1\} \times \{0, 1, \dots, n\} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ alle Nash–Gleichgewichte bestimmt.

Der generische Fall ist leichter. Wie lösen Sie den allgemeinen Fall? Wenn Sie möchten, können Sie Ihr Lösungsverfahren programmieren!

Verständnisfragen (Klausur 2018)

Aufgabe: Hat jedes endliche Spiel $g : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(1) mindestens ein *reines* Nash–Gleichgewicht? (2) ein gemischtes?

(3) Hat jedes unendliche Spiel, etwa von der Form $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mindestens ein *gemischtes* Nash–Gleichgewicht?

Lösung: (1) Nein! Ein minimales Gegenbeispiel ist *Matching Pennies*. Etwas größer, dafür aber bekannter ist natürlich *Schere-Stein-Papier*. Diese Spiele erlauben keine reinen Nash–Gleichgewichte.

(2) Ja! Genau das garantiert der Existenzsatz E1F von Nash.

(3) Nein! Ein mögliches Gegenbeispiel ist *Die höchste Zahl gewinnt*, wobei $g(s_1, s_2) = (+1, -1)$ falls $s_1 > s_2$ und $g(s_1, s_2) = (-1, +1)$ falls $s_1 < s_2$ sowie $g(s_1, s_2) = (0, 0)$ falls $s_1 = s_2$. Offensichtlich gibt es kein reines Nash–Gleichgewicht, denn jede Strategie kann vom Gegner übertrumpft werden. Ebensowenig gibt es gemischte Gleichgewichte. Das gilt selbst dann, wenn wir unendliche Konvexkombinationen / diskrete WMaße zulassen, also $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} s(n) = 1$.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2018)

Aufgabe: Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf der Strategiemenge $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ und seine affine Fortsetzung $\bar{g} : [S] \times [S] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf dem Simplex $[S] = [s_1, s_2, \dots, s_n]$.

Alice \ Bob	s_1	s_2	$\dots$	s_n
s_1	1 / 1	0 / 0		0 / 0
s_2	0 / 0	1 / 1		0 / 0
$\dots$				0 / 0
s_n	0 / 0	0 / 0	0 / 0	1 / 1

Formal haben wir also

$$g \,:\, S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, g(s_k, s_\ell) = \begin{cases} (1,1) & \text{falls } k = \ell, \\ (0,0) & \text{falls } k \neq \ell. \end{cases}$$

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2018)

(1) Nennen Sie alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(g)$.
(2) Alice spielt $s_A = \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2$. Nennen Sie Bobs beste Antworten.
(3) Bob spielt $s_B = \frac{2}{5}s_1 + \frac{2}{5}s_2 + \frac{1}{5}s_3$. Nennen Sie Alice' beste Antworten.
(4) Nennen Sie alle gemischten Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Lösung: (1) Wir sehen sofort $\mathrm{NE}(g) = \{\, (s_k, s_k) \mid k = 1, 2, \dots, n \,\}$, denn zu jedem s_k gibt es genau eine beste Antwort, nämlich s_k.

(2) Die besten Antworten auf s_A sind rein $\{s_1, s_2\}$ und gemischt $[s_1, s_2]$.

(3) Die besten Antworten auf s_B sind rein $\{s_1, s_2\}$ und gemischt $[s_1, s_2]$.

(4) Wir finden hier genau $2^n - 1$ Nash–Gleichgewichte:

$$\mathrm{NE}(\bar{g}) = \left\{ \left(s_A^X, s_B^X\right) \,\middle|\, \emptyset \neq X \subseteq \{1, 2, \dots, n\},\ s_A^X = s_B^X = \frac{1}{|X|} \sum_{k \in X} s_k \right\}.$$

Jedes dieser Strategiepaare (s_A^X, s_B^X) ist ein Gleichgewicht. Umgekehrt ist jedes Gleichgewicht (s_A, s_B) von dieser Form.

Der Beweis ist nicht schwer, aber etwas länglich, deshalb genügte in der Klausur die Nennung der Lösung. Versuchen Sie den Beweis als Übung!

Diagonalspiele und ihre Nash–Gleichgewichte

🙂 Generisch ist die Anzahl der Nash–Gleichgewichte endlich (für eine offene dichte Teilmenge solcher Spiele). Die Anzahl der Nash–Gleichgewichte kann exponentiell wachsen, wie wir hier sehen.

Aufgabe: Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

Bob / Alice	s_1	s_2	$\dots$	s_n
s_1	b_1 a_1	0 0		0 0
s_2	0 0	b_2 a_2		0 0
$\dots$				0 0
s_n	0 0	0 0	0 0	b_n a_n

Die Konstanten $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}_{>0}$ seien strikt positiv. Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte, rein und gemischt!

Diagonalspiele und ihre Nash–Gleichgewichte

Lösung: (1) Reine Gleichgewichte sind

$$\mathrm{NE}(g) = \left\{ (s_k, s_k) \;\middle|\; k = 1, 2, \dots, n \right\},$$

denn zu jedem s_k gibt es genau eine beste Antwort, nämlich s_k.

(2) Wie zuvor finden wir genau $2^n - 1$ gemischte Nash–Gleichgewichte,

$$\mathrm{NE}(\bar{g}) = \left\{ \left(s_A^X, s_B^X \right) \;\middle|\; \emptyset \neq X \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \right\}.$$

Konstruktion: Zu X sei $s_A^X = \sum_{k \in X} p_k s_k$ und $s_B^X = \sum_{k \in X} q_k s_k$ mit $p_k = c_B^X / b_k$ und $\sum_k p_k = 1$ sowie $q_k = c_A^X / a_k$ und $\sum_k q_k = 1$.

⚠ Alice' Wkten sind reziprok zu Bobs Gewinnen, und umgekehrt. Nur so ist Bobs Gewinnerwartung c_B^X konstant für alle s_k mit $k \in X$. Ebenso ist Alice' Gewinnerwartung c_A^X konstant für alle s_k mit $k \in X$.

🙂 Jedes dieser Strategiepaare (s_A^X, s_B^X) ist ein Gleichgewicht. Umgekehrt ist jedes Gleichgewicht (s_A, s_B) von dieser Form.

Der Beweis ist nicht schwer, erfordert aber etwas Geduld und Sorgfalt. Wenn Sie möchten, führen Sie als Übung den Beweis sorgsam aus!

Aufgabe: Die Universitäten $i \in I = \{1, 2, \dots, 9\}$ leiden unter Geldnot. Ein Wohltäter schreibt 100 Mio Euro aus nach folgendem Verfahren: Jede Universität $i \in I$ verpflichtet sich ihm gegenüber zu Leistungen im Wert von $b_i \in \{0, 1, \dots, 100\}$ Mio Euro. Diese Gebote sind gleichzeitig, verdeckt und unwiderruflich. Das höchste Gebot b_i gewinnt die 100 Mio Euro, genauer: Die Universitäten in der so definierten Gewinnermenge $M = \{\, i \in I \mid b_i = \max_{j \in I} b_j \,\}$ teilen sich die 100 Mio Euro gleich auf:

$$u_i \,:\, \{0, 1, \dots, 100\}^9 \to \mathbb{R} \,:\, b \mapsto u_i(b) = \begin{cases} -b_i & \text{falls } i \notin M, \\ \frac{100}{|M|} - b_i & \text{falls } i \in M. \end{cases}$$

Das entspricht einer perfiden Auktion, bei der jeder Bieter zahlt (P205). Das klingt zunächst verrückt, kommt aber in der Realität öfters vor.

(1) Sie spielen die Universität $i \in I$. Sei $c_i := \max_{j \neq i} b_j$ das höchste Konkurrenzgebot. Angenommen, es gilt (a) $c_i \in \{0, 1, \dots, 98\}$ oder (b) $c_i = 99$ oder (c) $c_i = 100$. Was wären dazu Ihre besten Antworten?

(2) Bestimmen Sie alle (reinen) Nash–Gleichgewichte dieses Spiels.

Lösung: (1) Wir gehen die drei Szenarien sorgfältig durch:

(1a) Die beste Antwort ist $b_i = c_i + 1$ mit Gewinn $100 - b_i = 99 - c_i > 0$.

Begründung durch sorgsame Fallunterscheidung aller Alternativen:
Für $b_i \ge c_i + 2$ ist der Gewinn $100 - b_i \le 98 - c_i \le 0$, also kleiner.
Für $b_i = c_i$ ist der Gewinn $100/|M| - b_i \le 50 - c_i$, also kleiner.
Für $b_i < c_i$ ist der Gewinn $-b_i \le 0$, also kleiner.

(1b) Die besten Antworten sind $b_i = 0$ oder $b_i = 100$ mit Gewinn 0.

Begründung durch sorgsame Fallunterscheidung aller Alternativen:
Für $b_i = 99$ ist der Gewinn $100/|M| - b_i \le 50 - 99 < 0$, also kleiner.
Für $1 \le b_i \le 98$ ist der Gewinn $-b_1 < 0$, also kleiner.

(1c) Die beste Antwort ist $b_i = 0$ mit Gewinn 0.

Begründung durch sorgsame Fallunterscheidung aller Alternativen:
Für $b_i = 100$ ist der Gewinn $100/|M| - b_i \le 50 - 100 < 0$, also kleiner.
Für $1 \le b_i \le 99$ ist der Gewinn $-b_i < 0$, also kleiner.

(2) Dieses Spiel hat keine (reinen) Nash–Gleichgewichte! Wir betrachten

$$u : \{0, 1, \dots, 100\}^9 \to \mathbb{R}^9.$$

Angenommen $b \in \{0, 1, \dots, 100\}^9$ wäre ein Nash–Gleichgewicht. Wir betrachten die erste Universität $i \in I$ mit dem maximalen Betrag $b_i = \max_j b_j$. Nach obigem Muster unterscheiden wir drei Fälle (1–3):

(2a) Gilt $b_i \le 98$, dann kann sich jede andere Universität $j \in I \smallsetminus \{i\}$ verbessern. Also ist b, entgegen unserer Annahme, kein Gleichgewicht.

(2b) Gilt $b_i = 99$, dann wählen alle anderen 0 oder 100, hier also 0. Somit kann i sich verbessern, und b ist keine Gleichgewicht.

(2c) Gilt $b_i = 100$, dann wählen alle anderen Universitäten 0. Somit kann i sich verbessern, und b ist keine Gleichgewicht.

☺ Dieses negative Ergebnis ist bemerkenswert, gar erschütternd. Dank guter Notation ist alles klar und präzise nachzurechnen.

Interpretation: Da es kein Gleichgewicht gibt, ist das Verhalten schwer vorhersehbar. Die Initiative des „Wohltäters“ zielt vielleicht sogar genau darauf ab, die Universitäten in verlustreiche Bietergefechte zu verwickeln, bei dem er mehr gewinnt als der ausgelobte Preis kostet. Umgekehrt ist nach dem Verfahren der Katzenjammer groß: „Hätte ich gewusst. . . , dann hätte ich. . . “. Bei Nash–Gleichgewichten passiert das nicht!

Auktionen: Unser Beispiel zeigt eine perfide Auktion, bei der jeder Bieter bezahlt, selbst wenn er dafür nichts bekommt, engl. *all pay auction*, siehe P205. Zu einer ersten Analyse genügen uns bereits der Begriff des Nash–Gleichgewichts und sorgsame Fallunterscheidungen.

Kapitel P behandelt Auktionen noch allgemeiner und ausführlicher. Der grundlegende Satz P2C der Auktionstheorie, Vickreys berühmte Erlösäquivalenz, hilft hier leider nicht, denn er setzt die Existenz eines Gleichgewichts voraus! Überhaupt helfen hier keine allgemeinen Sätze, sondern nur präzise Definitionen und sorgfältiges Ausarbeiten.