Kapitel B

Rückwärtsinduktion nach Zermelo

Verstehen kann man das Leben nur rückwärts;
leben muss man es aber vorwärts.
Søren Kierkegaard (1813–1855)

Gespielt wird vorwärts, optimiert wird rückwärts.
frei nach Ernst Zermelo (1871–1953)

Inhalt dieses Kapitels B

Ernst Zermelo (1871–1953)

Der Mathematiker Ernst Zermelo ist berühmt für seine Beiträge zur Mengenlehre, die Zermelo–Fraenkel–Axiome und insbesondere die Formulierung des Auswahlaxioms (1904).

Er studierte Mathematik, Physik und Philosophie in Berlin, Halle und Freiburg, promovierte 1894 in Berlin bei H.A. Schwarz zur Variationsrechnung und war Assistent von Max Planck.

Ab 1897 habilitierte Zermelo in Göttingen, wurde dort 1905 Professor, ab 1910 in Zürich. Aufgrund von Gesundheitsproblemen gab er schon 1916 seine Professur in Zürich auf.

Von 1926–1935 und 1946–1953 war Zermelo Honorarprofessor an der Universität Freiburg und beschäftigte sich mit angewandter Mathematik, Analysis und Mengenlehre. Er musste diese Stelle 1935 aufgeben, da er sich beharrlich weigerte, seine Vorlesungen mit Hitlergruß zu eröffnen, und von seinem Mathematikkollegen Gustav Doetsch denunziert wurde.

Ernst Zermelo (1871–1953)

Betrand Russel lud Zermelo ein, 1912 in Cambridge auf dem fünften Internationalen Mathematik-Kongress über Mengenlehre vorzutragen. Zermelo nahm die Einladung an mit einem Vortrag über die Theorie des Schachspiels, auf Drängen Russels einem zweiten über Mengenlehre.

📖 E. Zermelo: *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels.* Proceedings of the Fifth Congress of Mathematics, Vol. II, Cambridge 1913, 501–504. Gesammelte Werke I, 260–273.

📖 H.-D. Ebbinghaus: *Ernst Zermelo: An Approach to His Life and Work.* Springer 2015.

Zermelo bewies, dass jedes endliche Spiel (wie Schach) determiniert ist: Entweder besitzt Weiß eine Gewinnstrategie, oder Schwarz, oder jeder Spieler kann ein Unentschieden erzwingen. Dieses Ergebnis gilt als (ein) Startpunkt der mathematischen Spieltheorie. Zermelos genial-einfache **Rückwärtsinduktion** wurde auf zahlreiche Spiele übertragen und so zu einem Universalwerkzeug der Spieltheorie ausgebaut. Damit beginnen wir in diesem Kapitel; sie wird uns immer wieder gute Dienste leisten.

Historische Entwicklung

Ich folge hier der Tradition, Zermelo die Idee der Rückwärtsinduktion zuzuschreiben. Die historische Entwicklung dieser sehr allgemeinen Methode und auch der sonderbaren Bezeichnung ist kompliziert und verschlungen, daher erlaube ich mir diese Freiheit der Vereinfachung.

Eine detaillierte historische Untersuchung finden Sie in dem Artikel von U. Schwalbe, P. Walker: *Zermelo and the Early History of Game Theory*, Games and Economic Behavior 34 (2001) 123–137. Ich skizziere im Folgenden ganz grob nur einige Stichpunkte zur Orientierung.

Ernst Zermelo hat 1912 die Frage formuliert und die überraschend einfache Antwort gefunden, doch genau genommen hat er seinen Beweis nicht durch Rückwärtsinduktion geführt. Sein Artikel von 1913 enthält die entscheidende Idee, nicht jedoch die formale Ausführung.

Zermelos Arbeit hat weitere Untersuchungen stimuliert, darunter auch solche in der Mengenlehre, die Zermelo hier als Werkzeug nutzte. In diesem Sinne hat sich die Beziehung als sehr fruchtbar erwiesen, auch wenn dies ursprünglich nicht Zermelos Hauptaugenmerk war.

Historische Entwicklung

Dénes König beweist 1927 folgendes Lemma: Seien $E_0, E_1, E_2, \dots$ endliche, nicht-leere Mengen und darauf R eine Relation, sodass zu jedem $y \in E_{n+1}$ ein $x \in E_n$ mit $(x, y) \in R$ existiert. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $x_n \in E_n$ und $(x_n, x_{n+1}) \in R$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Königs Lemma findet sich in perfektionierter Form in seinem Buch *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (1936). Es lautet: Sei G ein zusammenhängender Graph, lokal-endlich doch unendlich. Darin existiert ein unendlicher Weg, der keine Ecke zweimal besucht.

Ausgehend von diesem Ergebnis greift König die Frage von Zermelo auf und führt den Beweis mit den Werkzeugen der Mengenlehre aus. Königs Lemma ist ein grundlegendes Werkzeug in der Graphentheorie und spielt eine wichtige Rolle in der Logik und Berechenbarkeitstheorie.

Der Begriff „Rückwärtsinduktion“ und die explizite Methode findet sich zuerst 1928 bei László Kalmár, *On the Theory of Abstract Games*. Wir werden diese Methode präzise formulieren, elegant beweisen und in zahlreichen Anwendungen erfolgreich nutzen.

Um den extrem weiten Rahmen dynamischer Spiele abzustecken, skizziere ich zunächst informell die Analogie zu (Computer)Spielen. Diese dynamischen Spiele sind bei genauem Hinsehen vollständig formalisiert, denn sie liegen schließlich als Computerprogramm vor.

Darauf aufbauend formalisieren wir dynamische Spiele durch Graphen aus Ecken / Positionen / Zuständen und Kanten / Zügen / Aktionen. Graphen sind ein allgegenwärtiges Konzept, sie begegnen uns überall im Alltag, der Mathematik, der Informatik und auch der Spieltheorie.

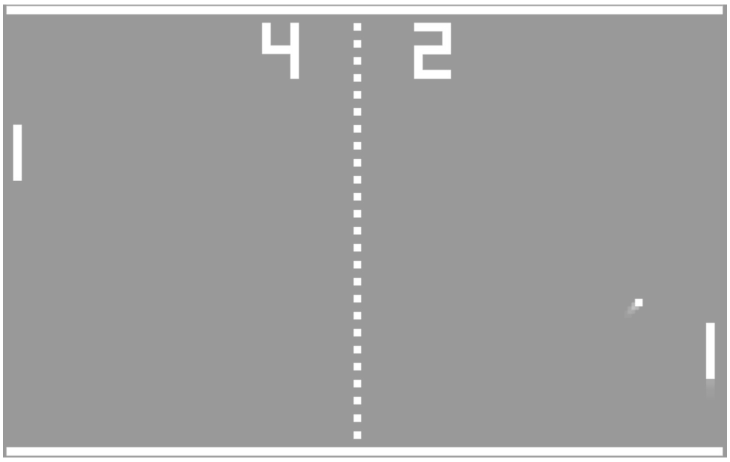
Es lohnt sich daher, diese Struktur breit und gründlich anzulegen. Damit können wir Spiele und Strategien präzise und einfach erklären. Zusammen mit Auszahlungen formulieren und lösen wir unsere ersten Probleme zur Optimierung als Markov–Entscheidungsprozess [MDP].

Für die Berechnung durch Rückwärtsinduktion setzen wir voraus, dass unser Spielgraph keinen unendlich langen Weg $x_0 \to x_1 \to \dots$ enthält. Damit können wir rekursiv vorgehen, von den terminalen Zuständen rückwärts zu jedem beliebigen aktiven Zustand.

Nach diesen Motivationen und Illustrationen und ersten Definitionen widmen wir uns im nächsten Kapitel den kombinatorischen Spielen. Zu ihrer Lösung entwickeln wir erste Algorithmen, möglichst effiziente. Hier ist der Sprague–Grundy–Satz ein wirksames Universalwerkzeug.

In den darauf folgenden Kapitel werden wir einzelne Aspekte genauer untersuchen und das Mosaik der Spieltheorie kunstvoll erweitern. Die dabei verwendeten Modelle werden schrittweise verallgemeinert und verfeinert, sodass wir reale Situationen besser modellieren können.

Dynamische Spiele und strategische Interaktion / Konkurrenz



Pong
(Atari 1972)

zwei Spieler
deterministisch

Breakout
(Atari 1976)

ein Spieler
probabilistisch

Dynamische Spiele und strategische Interaktion / Konkurrenz

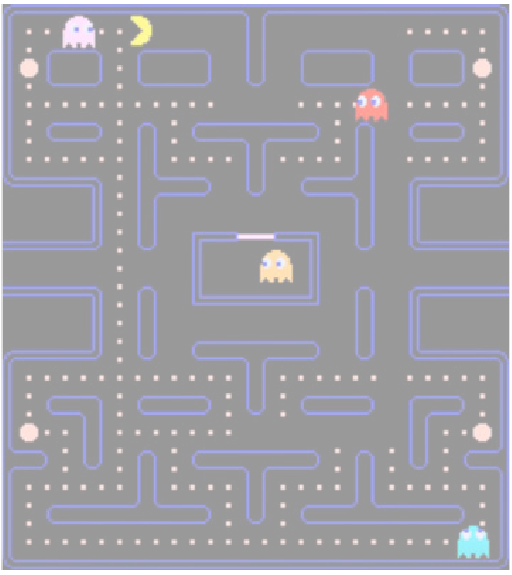
Das Spiel **Pong** hatte technisch bedingt ein minimalistisches Design. Selbst nach Jahrzehnten bereitet es Spielspaß. (Variante: Bier-Pong?)

Fun fact: Der Pong-Automat basierte nicht auf einem programmierten Prozessor, sondern auf einem festverdrahteten Schaltkreis, der teilweise analog arbeitete. Er war in diesem Sinne kein Computer. Pong genießt heute noch Kultstatus: Auf der Consumer Electronics Show (CES 2019) konnte man dank Kickstarter einen **analogen Pong-Tisch** bewundern.

Die **goldene Ära der Arcade-Spiele** von etwa 1978 bis 1983 begann mit Klassikern wie Space Invaders (1978) über Pac-Man (1980) bis zu Galaga (1981) und Donkey Kong (1981). Integrierte Schaltkreise und Mikroprozessoren eröffneten den Spielen weit größere Komplexität.

Die Produktionskosten sanken, die Technologie entwickelte sich rasant und erlaubte bald ansprechende Graphik und Sound. Dennoch waren die technischen Möglichkeiten jedes Spiels jeweils sehr eng gesteckt. Der Erfolg beruhte auf gutem Gameplay: simpel doch unterhaltsam. Dieser Fokus erklärt, warum viele Spiele heute noch Spaß machen.

Dynamische Systeme und optimale Steuerung / Kybernetik



Pac-Man
(Namco / Midway 1980)
ein Spieler
deterministisch

Supertux
(Bill Kendrick et al)
ein Spieler
deterministisch

Dynamische Systeme und optimale Steuerung / Kybernetik

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall eines einzigen Spielers. Die Spielerin, Alice, kennt die Regeln und den Aufbau des Spiels und wählt ihre Aktionen mit dem Ziel, die Gesamtauszahlung zu maximieren. Dies definiert ein Problem der Steuerung (Kybernetik, Kontrolltheorie).

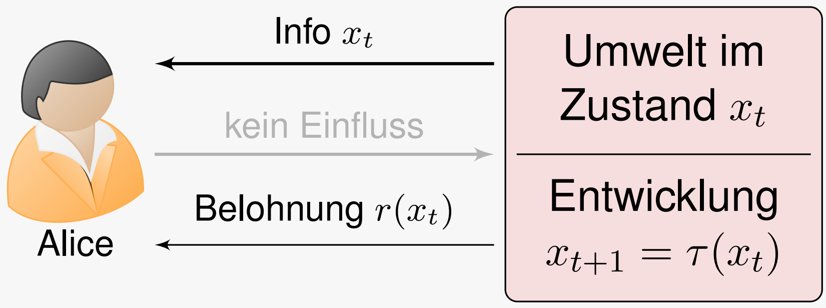
Während des Spiels hat Alice vollständige Information über den Zustand. Die Ausführung ihrer Strategie erfordert vor allem / nur Geschicklichkeit. Nutzt der Computergegner (AI) auch Zufallszüge, so muss Alice jeweils die aktuellen Informationen auswerten und geeignet darauf reagieren.

Je nach möglichen Aktionen, Zufall und Belohnungen ergibt sich ein dynamisches System [*dynamical system*], Markov–Prozess [*Markov process*], Markov–Belohnungsprozess [*Markov reward process*, MRP] oder Markov–Entscheidungsprozess [*Markov decision process*, MDP]: Dynamische Programmierung [DP] und Maschinelles Lernen [ML].

Zur Vereinfachung verlaufe das Spiel zeitdiskret, gemessen durch $t \in \mathbb{N}$. Der kontinuierliche Fall $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist ebenso interessant, aber technisch aufwändiger, und nutzt (stochastische) Differentialgleichungen.

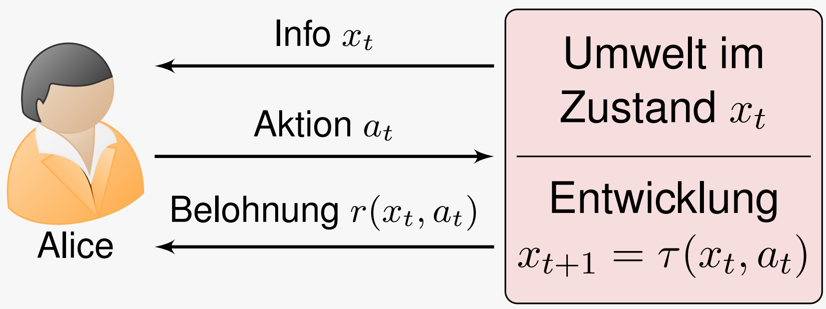
Dynamische Systeme und optimale Steuerung / Kybernetik

Dynamisches System ohne Steuerung: *Markov reward process* (MRP)



Ein dynamisches System ist eine Abbildung $\tau : X \to X$, allgemeiner $\tau : X \supset X^\circ \to X$ mit aktiven Zuständen X° und terminalen $\partial X = X \smallsetminus X^\circ$.

Dynamisches System mit Steuerung: *Markov decision process* (MDP)



Alice wählt zum Zustand $x_t \in X$ ihre Aktion $a_t \in A_{x_t}$, beeinflusst so die Entwicklung $x_{t+1} = \tau(x_t, a_t)$ des Systems und erhält dementsprechend ihre Belohnung $r(x_t, a_t)$.

Alice will ihren Gesamtnutzen $u = (1-\delta)\sum_t \delta^t r(x_t, a_t)$ maximieren!

Dynamische Systeme und optimale Steuerung / Kybernetik

Im ersten Szenario beobachtet / profitiert die Spielerin Alice nur passiv. Mögliche Beispiele: Glückspiel (mit Dauerlos, keine Entscheidung), Sportwette (auf Lieblingsverein), Aktienmarkt (mit festem Portfolio).

Trajektorie $w = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ mit $x_{t+1} = \tau(x_t)$, eventuell für $n \to \infty$. Auszahlung $u(w) = (1-\delta)\sum_{t=0}^{n-1} \delta^t r(x_t)$ mit Diskontfaktor $\delta \in [0, 1[$. Zu absoluter Konvergenz dieser Reihe genügt r beschränkt und $\delta < 1$. Für festes n und $\delta \nearrow 1$ wird dies zum arithmetischen Mittel. (Übung!)

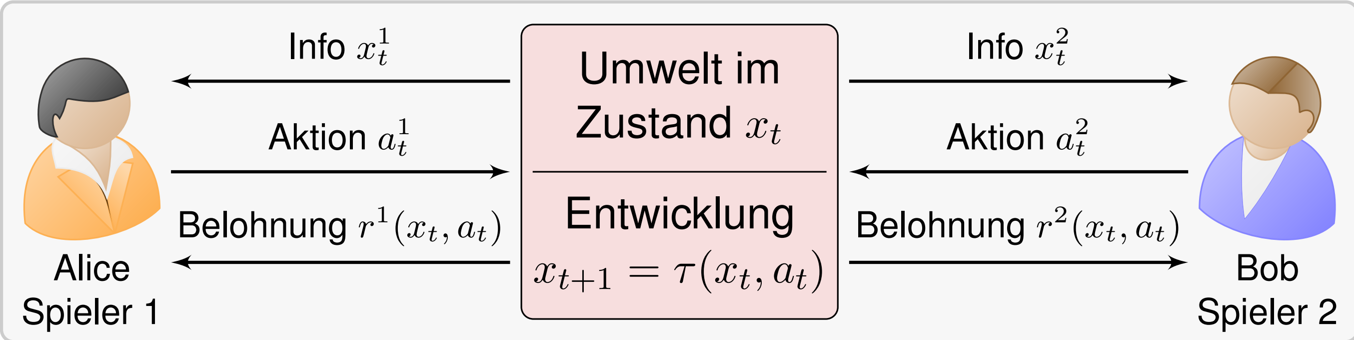
Im zweiten Szenario kann Alice Aktionen wählen und Einfluss nehmen. Dadurch wird die gesamte Situation viel komplizierter und interessanter. Die Optimierung ist Gegenstand der Kybernetik: die Kunst des Steuerns.

Zur Trajektorie $w = (x_0, a_0, x_1, a_1, \dots, a_{n-1}, x_n)$ mit $x_{t+1} = \tau(x_t, a_t)$ ist die kumulierte diskontierte Auszahlung $u(w) = (1-\delta)\sum_{t=0}^{n-1} \delta^t r(x_t, a_t)$. Die Spielerin möchte ihre Gesamtauszahlung $u(w)$ maximieren!

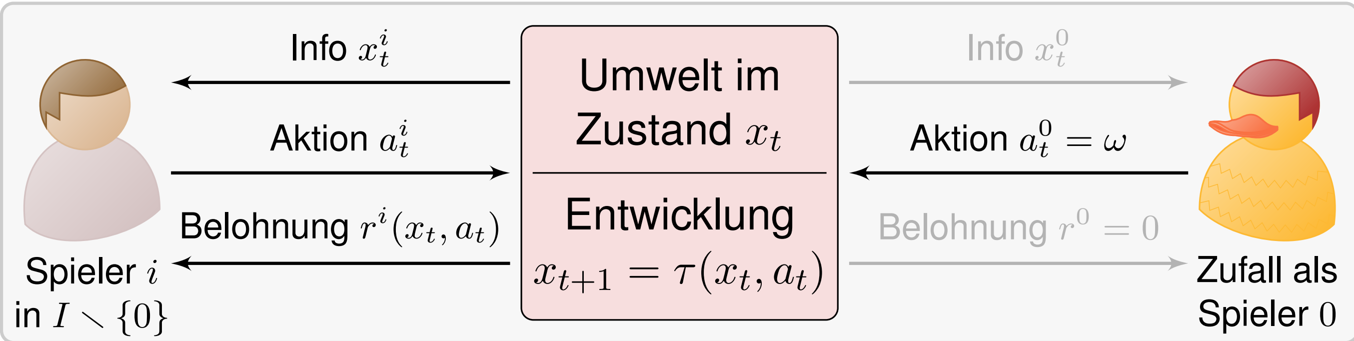
Um solche Aufgaben zu beschreiben und mögliche Lösungen zu finden, entwickeln wir in den folgenden Kapiteln ausreichend umfassende Modelle für Zustände, Aktionen, Transitionen und Belohnungen.

Dynamische Spiele und strategische Interaktion / Konkurrenz

Dynamisches System mit Steuerung durch zwei Spieler: Markov–Spiel



Steuerung durch mehrere Spieler und Zufall: Markov–Spiel (MMDP)



Jeder Spieler will seinen individuellen Gesamtnutzen maximieren.

Dynamische Spiele und strategische Interaktion / Konkurrenz

Die ersten beiden Szenarien zeigen bisher nur eine einzige Spielerin. Im dritten Szenario nehmen zwei Spieler Einfluss auf das Geschehen. Es entsteht Interaktion, eventuell Kooperationen oder auch Konflikte. Jeder möchte dabei seinen individuellen Gesamtnutzen maximieren.

Zum Zeitpunkt t befindet sich das Spiel / die Umwelt im Zustand x_t. Spieler i erhält hierzu die (eventuell nur partielle) Information x_t^i. Daraufhin wählt er seine Aktion a_t^i, zusammengefasst $a_t = (a_t^i)_{i \in I}$, und das Spiel geht über in den neuen Zustand $x_{t+1} = \tau(x_t, a_t)$.

Zur Trajektorie $w = (x_0, a_0, x_1, a_1, \dots, a_{n-1}, x_n)$ mit $x_{t+1} = \tau(x_t, a_t)$ ist die kumulierte diskontierte Auszahlung $u(w) = (1 - \delta) \sum_{t=0}^{n-1} \delta^t r(x_t, a_t)$. Jeder Spieler will seinen individuellen Gesamtnutzen $u^i(w)$ maximieren.

Im vierten Szenario berücksichtigen wir zudem den Zufall als Spieler 0, der seine Aktion a_t^0 aus einem Lostopf zieht, also einem WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$. Wie jeder Spieler i beeinflusst auch der Zufall 0 das Spielgeschehen, allerdings nicht umgekehrt: der Zufall lässt sich nicht beeinflussen und ist vollkommen unbestechlich. Das entspricht der Auszahlung $r^0 = 0$.

Spiele auf Graphen

Ein dynamisches Spiel können wir als einen Graphen darstellen:

	USA	EU
(0) Start		
(1a) USA drohen nicht.	5	9
(1b) USA drohen mit Zöllen.		
(2a) Europa gibt nach.	6	7
(2b) Europa droht ebenfalls.		
(3a) USA lenken ein.	4	8
(3b) Es kommt zum Handelskrieg.	3	6

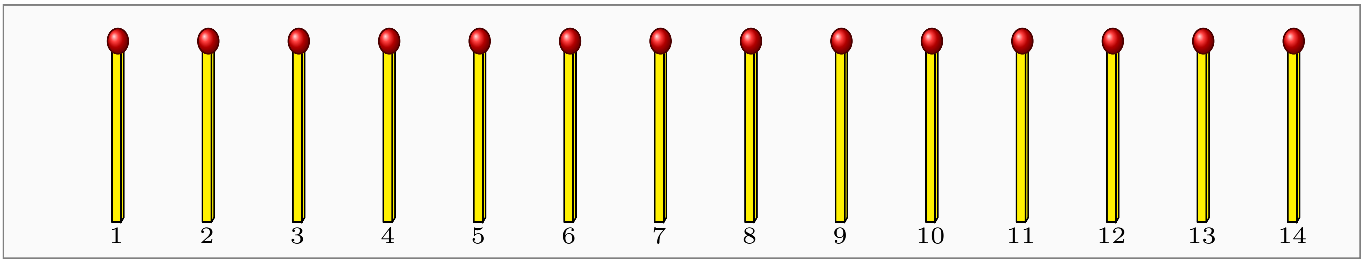
Dynamische Spiele können parallel oder sequentiell gespielt werden:

- Die Spieler ziehen gleichzeitig, parallel, asynchron wie bei Pong.
- Die Spieler ziehen abwechselnd, nacheinander, rundenbasiert.

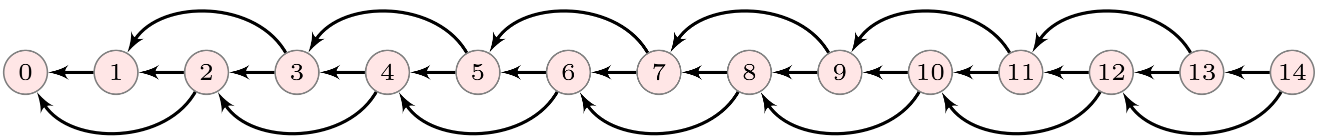
Die Zeit kann kontinuierlich sein oder diskret wie hier. Zur Vereinfachung betrachten wir in dieser Vorlesung meist nur den zeitdiskreten Fall.

Spiele auf Graphen

Oft ist der Spielgraph ein Baum, aber auch ganz allgemeine Graphen treten natürlich auf: Sie erlauben eine bequeme und konzise Darstellung.

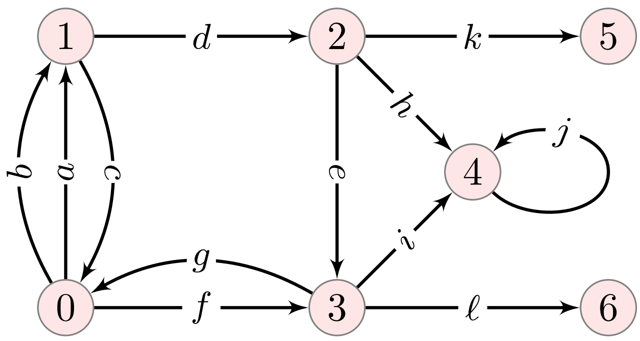


Auf dem Tisch liegen anfangs $x \in \mathbb{N}$ Streichhölzer / Münzen / Steine. Die Spieler ziehen abwechselnd, jeder entfernt ein oder zwei Hölzer. Diese Spielregeln übersetzen sich zu folgendem Spielgraphen:



So können wir jedes Spiel knapp und übersichtlich als Graph codieren! Er beantwortet die grundlegenden Fragen zum Spiel und seinen Regeln: Welche Spielstände x gibt es? Welche Aktionen a sind in x möglich? Zu welchem Spielstand $y = \tau(x, a)$ gelangen wir durch diese Aktion?

Was genau ist ein Graph?



$$X = \{0, 1, \dots, 6\}$$
$$A = \{a, b, \dots, \ell\}$$
$$\begin{aligned}(\sigma,\tau) : a &\mapsto (0,1)\\ b &\mapsto (0,1)\\ &\dots\\ \ell &\mapsto (3,6)\end{aligned}$$

Definition B1A: gerichteter Multigraph $\Gamma = \Gamma_1 \rightrightarrows \Gamma_0$, kurz Graph

Ein **Graph** $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ besteht aus einer Eckenmenge $\Gamma_0 = X$ [*vertices*], einer Kantenmenge $\Gamma_1 = A$ [*edges*], mit $X \cap A = \emptyset$, sowie Randabbildungen $\sigma, \tau : A \to X$ [*boundary maps*], die jeder Kante $a \in A$ ihren Start $\sigma(a) \in X$ [*source*] und ihr Ziel $\tau(a) \in X$ [*target*] zuordnen.

Eine Kante $a \in A$ von $\sigma a = x$ nach $\tau a = y$ schreiben wir kurz $a : x \to y$ oder $x \xrightarrow{a} y$ und ebenso Wege $w = (x_0 \xrightarrow{a_1} x_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} x_n) \in \Gamma_n \subseteq \Gamma_*$.

Der Graph Γ heißt **artinsch**, wenn er keine unendlichen Wege enthält, und **lokal-endlich** in $x \in X$, wenn die Menge $\{a : x \to y\}$ endlich ist.

Was genau ist ein Graph?

Als Spiel Γ interpretieren wir jede Ecke $x \in X$ als möglichen **Zustand** oder **Position** und jede Kante $a \in A$ als mögliche **Aktion** oder **Zug**.

Zur Betonung nennen wir (X, A, σ, τ) einen **orientierten Multigraph**:

- Jede Kante $a : x \to y$ ist orientiert von ihrem Start x zu ihrem Ziel y.
- Zwischen je zwei Ecken $x, y \in X$ kann es mehrere Kanten geben.
- Es kann Schleifen $a : x \to x$ geben, also Kanten mit Start gleich Ziel.

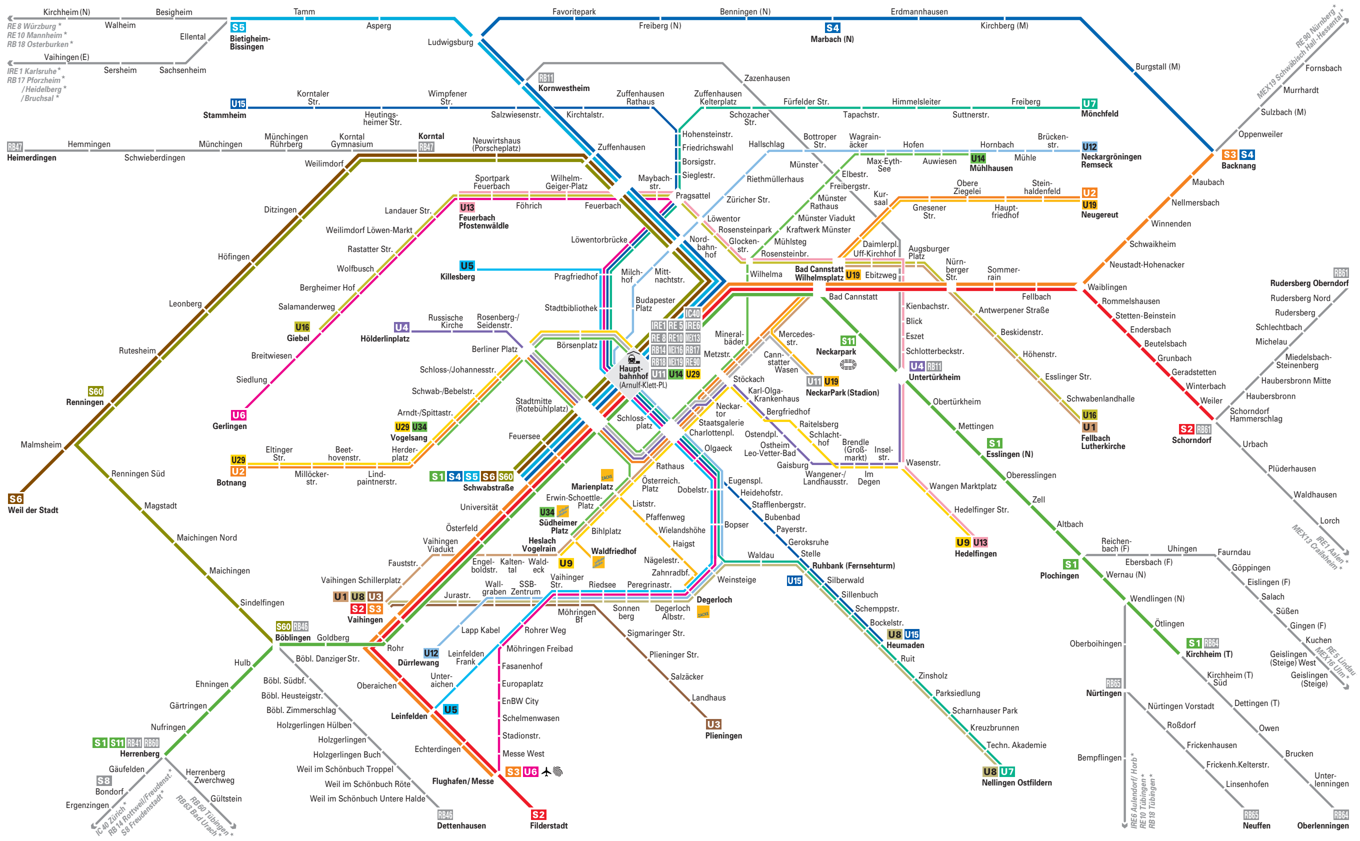
Ecken heißen manchmal auch **Knoten** [*nodes*] oder **Punkte** [*points*], die Randabbildung $\partial = (\sigma, \tau) : A \to X \times X$ auch **Inzidenz** [*incidence*].

Der Graph heißt **einfach** [*simple*], wenn ∂ injektiv ist. Das heißt, von jedem Start $x \in X$ zu jedem Ziel $y \in X$ existiert höchstens eine Kante.

Im einfachen Graphen (X, A, σ, τ) können wir die Kantenmenge A durch ihr Bild $A' = \partial(A) \subseteq X \times X$ ersetzen und erhalten so den isomorphen Graphen (X, A', σ', τ') mit $\sigma' = \mathrm{pr}_1 : (x, y) \mapsto x$ und $\tau' = \mathrm{pr}_2 : (x, y) \mapsto y$.

Wir gelangen zu folgender Vereinfachung: Ein **einfacher Graph** (X, A) besteht aus einer Eckenmenge X und einer Kantenmenge $A \subseteq X \times X$; implizit mitgegegeben sind die Projektionen $\sigma(x, y) = x$ und $\tau(x, y) = y$.

Alltägliche Beispiele für Graphen



Stuttgarter Verbundnetz, `www.vvs.de/karten-plaene/liniennetz`
Fahrgäste spielen „Wie komme ich am besten von A nach B?“

Beispiele für Graphen

Graphen haben zahlreiche Anwendungen in Mathematik und Informatik. Sie dienen häufig zur Modellierung, Abstraktion oder Vereinfachung, z.B. als Datenstruktur, Verkehrsliniennetz, Stammbaum, soziales Netz, etc.

Wir formulieren daher eine möglichst umfassende allgemeine Definition: Ein Graph Γ besteht aus **zwei parallelen Abbildungen** $\sigma, \tau : A \to X$. Alle vier dieser Daten (X, A, σ, τ) zu nennen ist zwar etwas redundant, dient aber zur bequemeren Notation und betont die Mengen X und A.

Alternative Notationen sind $\Gamma = (V, E, \sigma, \tau)$ oder $X = (X_0, X_1, \partial_0, \partial_1)$ oder $G = (S, A, \sigma, \tau)$; das ist eine Frage von Traditionen und Vorlieben. In der Informatik besteht ein **(endlicher) Automat** $(S, A, \tau, \dots)$ aus **Zuständen** S und **Aktionen** A mit Übergangsfunktion $\tau : S \times A \to S$. Dies ist ein Graph mit der Kantenmenge $E = S \times A$, wobei $\sigma(s, a) = s$.

In der Algebra, speziell Darstellungstheorie, besteht ein **Köcher** [*quiver*] $Q = (Q_0, Q_1, \sigma, \tau)$ aus **Ecken** [*vertices*] und **Pfeilen** [*arrows*], und eine Darstellung $V : Q \to \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ ordnet jeder Ecke x einen $\mathbb{K}$–Vektorraum V_x zu und jeder Kante $\alpha : x \to y$ eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung $V_\alpha : V_x \to V_y$.

Wege auf Graphen

Im Graphen $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ ist ein **Weg** eine Ecken-Kanten-Folge

$$w = (x_0, a_1, x_1, a_2, x_2, \dots, a_n, x_n)$$

mit $\sigma(a_k) = x_{k-1}$ und $\tau(a_k) = x_k$ für alle $k = 1, 2, \dots, n$, abgekürzt

$$w = (x_0 \xrightarrow{a_1} x_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} x_n),$$

mit Start $\sigma(w) = x_0$ und Ziel $\tau(w) = x_n$. Die Menge aller Wege w der Länge n vom Start $\sigma(w) = x$ zum Ziel $\tau(w) = y$ schreiben wir $\Gamma_n(x, y)$. Hierbei identifizieren wir $\Gamma_0 = X$ mit Ecken und $\Gamma_1 = A$ mit Kanten. Für beliebige Länge $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $\Gamma_*(x, y) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n(x, y)$.

Verknüpfbare Wege verknüpfen wir durch Aneinanderhängen gemäß

$$\circ \;:\; \Gamma_*(x, y) \times \Gamma_*(y, z) \to \Gamma_*(x, z) \;:\; (w, w') \mapsto w \circ w',$$

$$(x_0, a_1, x_1, \dots, a_m, x_m) \circ (y_0, b_1, y_1, \dots, b_n, y_n)$$
$$:= (x_0, a_1, x_1, \dots, a_m, x_m = y_0, b_1, y_1, \dots, b_n, y_n).$$

Dies definiert die **Wegekategorie** $\Gamma_* = (X, A^*, \sigma, \tau, \circ)$ des Graphen Γ: Die Verknüpfung ist assoziativ. Zu jedem Weg $w \in \Gamma_*(x, y)$ von x nach y ist der konstante Weg $\mathrm{id}_x = (x)$ linksneutral und $\mathrm{id}_y = (y)$ rechtsneutral.

Wege auf Graphen

Neben den endlichen Wegen $w \in \Gamma_*(x, y)$ von x nach y betrachten wir auch unendliche Wege $w = (x_0, a_0, x_1, a_1, x_2, \dots)$ wobei $\sigma(a_k) = x_k$ und $\tau(a_k) = x_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Der Startpunkt ist hierbei $\sigma(w) = x_0$.

Wir können endliche Wege von links anknüpfen und erhalten so

$$\circ \;:\; \Gamma_*(x, y) \times \Gamma_\infty(y) \to \Gamma_\infty(x) \;:\; (w, w') \mapsto w \circ w'.$$

Notation: Es genügt, jeden un/endlichen Weg $w = (x_0; a_0, a_1, a_2, \dots)$ durch seinen Startpunkt x_0 und die Kanten $a_0, a_1, a_2, \dots$ zu notieren.

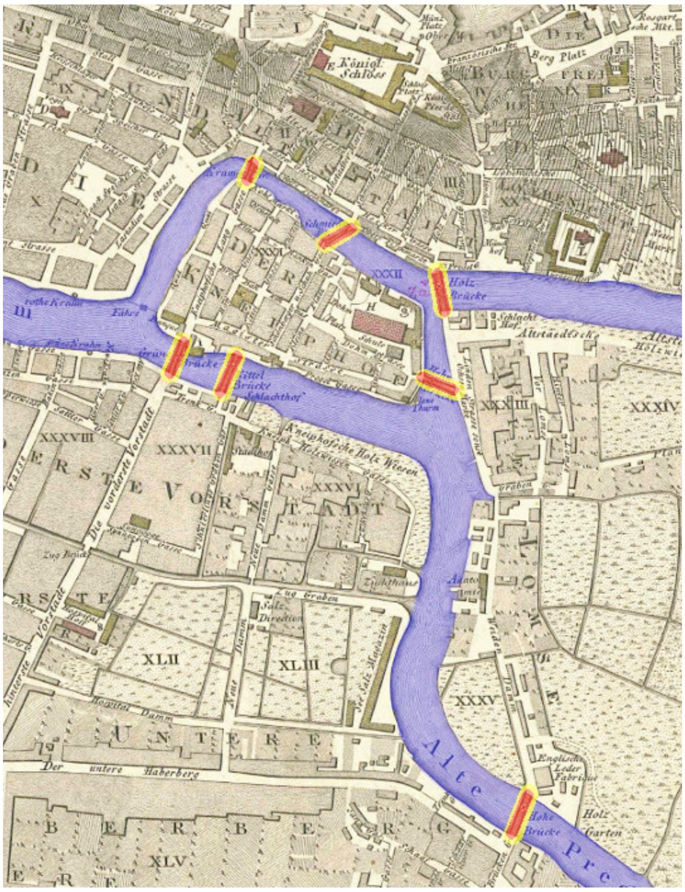
Bei positiver Länge genügen sogar allein die Kanten $(a_0, a_1, a_2, \dots)$, denn hieraus folgen die Ecken $x_0 = \sigma(a_0)$, $x_1 = \tau(a_0) = \sigma(a_1)$, etc.

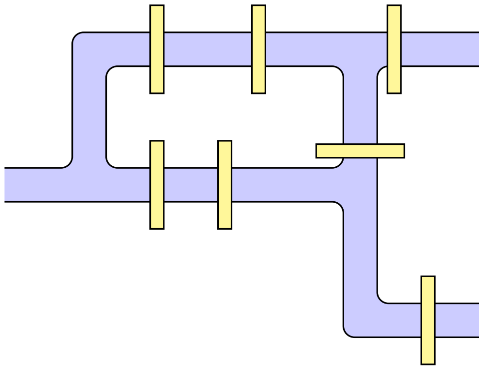
Für einen einfachen Graphen genügen die durchlaufenen Ecken, kurz $w = (x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots)$, denn daraus folgen eindeutig die Kanten.

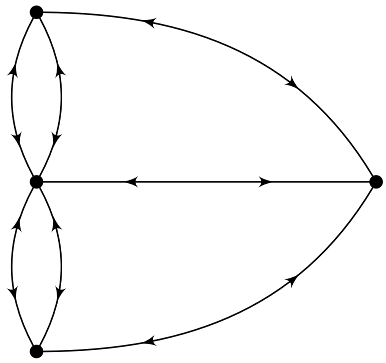
Beispiel: Besteht der Graph $\Gamma = (\{x\}, A, \sigma, \tau)$ nur aus der Ecke x und den Schleifen A, so besteht die Kategorie Γ_* nur aus dem Objekt x, und die Morphismen $(A^*, \circ)$ bilden das freie Monoid über dem Alphabet A, also $\Gamma_*(x, x) = A^* = A^{<\infty} := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$. Die Menge $\Gamma_\infty(x) = A^\infty = A^{\mathbb{N}}$ hingegen besteht aus allen unendlichen Folgen $w : \mathbb{N} \to A : k \mapsto a_k$.

Ursprünge der Graphentheorie

Graphentheorie entsteht 1736 aus dem Königsberger Brückenproblem:







Ursprünge der Graphentheorie

Durch Königsberg fließt der Fluss Pregel, darin zwei Inseln liegen, die durch sieben Brücken zu den Ufern und untereinander verbunden waren. Gibt es einen (Rund-)Weg, der alle sieben Brücken genau einmal quert? Dieses mathematische Rätsel wurde schnell populär und viel diskutiert.

Euler löste das Brückenproblem im Jahre 1736, indem er zunächst die geographischen Daten auf ihren topologischen Kern reduzierte: Nicht die genaue Form der Inseln und der Ufergebiete ist wichtig, ebensowenig der genaue Verlauf der Brücken und Spaziergänge.

Was bleibt als wesentliche Information? Es genügt, die beiden Ufer und die zwei Inseln als vier Ecken zu betrachten mit sieben verbindenden Kanten. Das ist eine naheliegende und doch sehr mutige Vereinfachung. Abstraktion bedeutet, das Wesentliche vom Unwesentlichen zu trennen.

Eulers effiziente Beschreibung algebraisiert und löst das Problem: Da zu jeder der vier Ecken eine ungerade Zahl von Kanten führt, so argumentierte Euler, kann es keinen Weg geben, der alle sieben Brücken genau einmal überquert. Genial einfach, einfach genial!

Definition B1B: unorientierter Multigraph

Ein **unorientierter Multigraph** $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau, -)$ besteht aus einem orientierten Multigraphen (X, A, σ, τ) mit einer fixpunktfreien Involution $- : A \to A$, also $a \ne -a$ und $-(-a) = a$ für alle Kanten $a \in A$, sodass $\sigma(a) = \tau(-a)$ gilt und folglich $\tau(a) = \sigma(-a)$. Die Kante $-a$ heißt die zu a **inverse Kante**, das Paar $\{a, -a\}$ nennen wir eine **unorientierte Kante**.

Wir können σ weglassen und jederzeit durch $\sigma = \tau \circ -$ rekonstruieren. Die Involution $-$ von Γ setzt sich fort auf die Wegekategorie Γ_* gemäß

$$-(x_0 \xrightarrow{a_1} x_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} x_n) = (x_n \xrightarrow{-a_n} \dots \xrightarrow{-a_2} x_1 \xrightarrow{-a_0} x_0)$$

Eine **Orientierung** von Γ ist eine Teilmenge $A^+ \subseteq A$ mit $A^+ \cap -A^+ = \emptyset$ und $A^+ \cup -A^+ = A$, also die Wahl einer Kante aus jedem Paar $\{e, -e\}$. Der zugehörige orientierte Graph ist dann $\Gamma^+ = (X, A^+, \sigma|_{A^+}, \tau|_{A^+})$.

Umgekehrt definiert jeder orientierte Graph $\Gamma = (X, A^+, \sigma, \tau)$ einen unorientierten Graphen $|\Gamma| = (X, A, \sigma, \tau, -)$ mit der Kantenmenge $A = \{\pm\} \times A^+$ sowie $\sigma(-, a) = \tau(+, a) = \tau(a)$ und $-(\pm, a) = (\mp, a)$.

Beispiele wie Netzpläne oder das Königsberger Brückenproblem nutzen statt orientierter Kanten $a : x \to y$ nun unorientierte Kanten $\{\pm a\} : x \leftrightarrow y$; sie dürfen in beide Richtungen genutzt werden, insgesamt nur einmal.

Zu diesem Zweck formalisieren wir auch **unorientierte Multigraphen**:

- Jede unorientierte Kante $\{\pm a\} : x \leftrightarrow y$ verbindet zwei Ecken x, y.
- Zwischen je zwei Ecken $x, y \in X$ kann es mehrere Kanten geben.
- Wir erlauben unorientierte Schleifen $\{\pm a\} : x \leftrightarrow x$ an einer Ecke x.

Wenn wir zudem noch mehrfache Kanten und Schleifen ausschließen, so gelangen wir zu folgender abschließenden Vereinfachung:

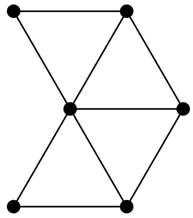
Ein **einfacher unorientierter Graph** (V, E) besteht aus einer Menge V von Ecken und einer Menge $E \subseteq \big\{\{x \ne y\} \subseteq V\big\}$ unorientierter Kanten.

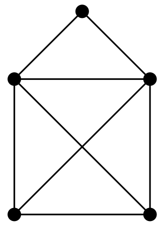
Im Sinne der obigen Definition B1B ist dies ein unorientierter Multigraph $(X, A, \sigma, \tau, -)$ wie folgt: Die Eckenmenge ist $X = V$ wie vorgegeben. Die Kantenmenge $A = \{\, (x, y) \mid \{x, y\} \in E \,\}$ besteht hier aus allen orientierten Kanten (x, y) mit Start $\sigma(x, y) = x$ und Ziel $\tau(x, y) = y$ sowie der orientierungsumkehrenden Involution $-(x, y) = (y, x)$.

Euler–Wege und Euler–Kreise auf Graphen

Das *Königsberger Brückenproblem* ist der Beginn der Graphentheorie und zugleich eine der frühesten topologischen Fragestellungen.

Übung: Erlauben die folgenden Graphen Euler–Wege? Euler–Kreise?





Sei $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ ein Graph. Ein Weg $w = (x_0 \xrightarrow{a_1} x_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} x_n)$ mit $x_n = x_0$ heißt **geschlossen**, manchmal auch **Zykel** oder **Kreis**.

Zum Brückenproblem: Wir nennen w einen **Euler–Weg** im Graphen Γ, wenn jede Kante von Γ entlang w genau einmal besucht wird, wenn also die Abbildung $\hat{w} : \{1, 2, \dots, n\} \to A : i \mapsto a_i$ bijektiv ist. Ein geschlossener Euler–Weg heißt auch kurz **Euler–Kreis**

In unorientierten Graphen $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau, -)$ verlagen wir, dass jede unorientierte Kante des Graphen Γ entlang w genau einmal besucht wird, also dass $\hat{w} : \{\pm\} \times \{1, 2, \dots, n\} \to A : (\pm, i) \mapsto \pm a_i$ bijektiv ist.

Euler–Wege und Euler–Kreise auf Graphen

Das Brückenproblem erlaubt eine einfache und effiziente Lösung!
In jedem orientierten Graphen $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ hat jede Ecke $x \in X$

- einen **Eingangsgrad** $\operatorname{ideg}(x) = \sharp\{\, a : y \to x \,\}$ und
- einen **Ausgangsgrad** $\operatorname{odeg}(x) = \sharp\{\, a : x \to y \,\}$.

In jedem unorientierten Graphen gilt $\operatorname{ideg}(x) = \operatorname{odeg}(x) =: \deg(x)$.
(Eine unorientierte Schleife zählt in dieser Konvention doppelt.)

Satz B1C: Euler 1736

Sei $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau, -)$ ein unorientierter Graph, zudem endlich und zusammenhängend (je zwei Ecken sind durch einen Weg verbindbar).

1. Genau dann existiert ein Euler–Kreis w in Γ, wenn jede Ecke $x \in X$ einen geraden Grad hat.
2. Genau dann existiert ein Euler–Weg w in Γ, wenn höchstens zwei Ecken ungeraden Grad haben.

Aufgabe: Beweisen Sie abschließend Eulers wunderschönen Satz. Besser noch: Entwickeln Sie einen Algorithmus zur Konstruktion!

Euler–Wege und Euler–Kreise auf Graphen

Lösung: (1) „$\Rightarrow$“ Die Ecke $x \in X$ wird von w genau k–mal durchlaufen. Sie wird k mal betreten und k mal verlassen, also gilt $\deg(x) = 2k$.

„$\Leftarrow$“ Wir konstrieren einen Euler–Kreis durch folgenden Algorithmus: Markiere anfangs alle Kanten als verfügbar, im Verlauf als verwendet.

Solange noch Kanten verfügbar sind, wähle eine davon als $a_1 : x_0 \to x_1$ und setze $\ell = 1$. Solange noch $x_\ell \neq x_1$ gilt, ist in der Ecke x_ℓ mindestens eine Kante verfügbar. Wähle eine davon als $a_{\ell+1}$ und erhöhe $\ell \leftarrow \ell + 1$. So fortfahrend entsteht ein Weg w_1, der jede Kante höchstens einmal besucht. Da Γ endlich ist, muss w_1 sich irgendwann schließen.

Solange noch Kanten verfügbar sind, wiederhole diese Konstruktion. So entstehen nach und nach geschlossene Wege $w_1, \dots, w_m$ in Γ. Jede Kante tritt in genau einem davon auf, und dort genau einmal.

Wenn sich zwei Kreise in einer Ecke x schneiden, so können sie in x aufgeschnitten und zu einem gemeinsamen Kreis verbunden werden. Da Γ zusammenhängend ist, bleibt schließlich ein einziger Euler–Kreis.

(2) „$\Leftarrow$“ Verbinde die zwei Ausnahmeecken und nutze (1). $\boxed{\text{QED}}$

Euler–Kreise sind leicht, Hamilton–Kreise sind schwer!

Sei $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ ein Graph. Ein Weg $w = (x_1 \to x_2 \to \dots \to x_n)$ heißt **Hamilton–Weg**, wenn jede Ecke genau einmal besucht wird, wenn also die Abbildung $\breve{w} : \{1, 2, \dots, n\} \to X : i \mapsto x_i$ bijektiv ist.

Der Weg $(x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots \to x_n)$ heißt **Hamilton–Kreis**, wenn $x_0 = x_n$ gilt, und die Abbildung $\breve{w} : \{1, 2, \dots, n\} \to X : i \mapsto x_i$ bijektiv ist. Jeder Hamilton–Kreis definiert offensichtlich auch einen Hamilton–Weg.

Bei $|X| = n$ Ecken gibt es insgesamt $n!$ Kandidaten für Hamilton–Wege. Die *Brute-Force-Methode* probiert sie alle durch, doch ihr Zeitaufwand ist exponentiell in n. Das ist nur für sehr kleine n realistisch durchführbar.

Dies führt auf ein wichtiges theoretisches und auch praktisches Problem: Vorgelegt sei ein Graph Γ. Bestimme, ob ein Hamilton–Weg existiert! Problem: Lässt sich die Antwort in polynomieller Zeit berechnen?

Wenn Sie dieses „NP-vollständige“ Problem lösen, werden Sie berühmt … und reich: Das Clay Mathematics Institute hat im Jahr 2000 die Frage „P = NP“ als eines der sieben Millenium-Probleme ausgelobt, mit einem Preisgeld von 1 Million Dollar. Der Erkenntniswert ist noch weit größer!

Morphismen zwischen Graphen

Ein **Morphismus** $(\varphi_0, \varphi_1) : (\Gamma_0, \Gamma_1, \sigma, \tau) \to (\Gamma'_0, \Gamma'_1, \sigma', \tau')$ von Graphen ist ein Paar bestehend aus einer Eckenabbildung $\varphi_0 : \Gamma_0 \to \Gamma'_0$ und einer Kantenabbildung $\varphi_1 : \Gamma_1 \to \Gamma'_1$ mit $\sigma' \circ \varphi_1 = \varphi_0 \circ \sigma$ und $\tau' \circ \varphi_1 = \varphi_0 \circ \tau$. Graphen und ihre Morphismen bilden zusammen die Kategorie $\mathbf{Graph}$.

Jeder Morphismus (φ_0, φ_1) setzt sich auf Wege fort zu $\varphi_n : \Gamma_n \to \Gamma'_n$ mit

$$\varphi_n\big(x_0 \xrightarrow{a_1} x_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} x_n\big) = \big(\varphi_0 x_0 \xrightarrow{\varphi_1 a_1} \varphi_0 x_1 \xrightarrow{\varphi_1 a_2} \dots \xrightarrow{\varphi_1 a_n} \varphi_0 x_n\big)$$

Dies definiert den **Funktor** $\varphi_* : \Gamma_* \to \Gamma'_*$ der beiden Wegekategorien: Er bildet jedet Ecke $x \in \Gamma_0$ auf eine Ecke $\varphi_0(x) \in \Gamma'_0$ ab, ebenso jeden Weg $w \in \Gamma_*$ auf einen Weg $\varphi_*(w) \in \Gamma'_*$, und respektiert dabei Start und Ziel und alle Kompositionen gemäß $\varphi_*(w_1 \circ w_2) = \varphi_*(w_1) \circ \varphi_*(w_2)$.

Für einen Morphismus $(\varphi_0, \varphi_1) : (\Gamma_0, \Gamma_1, \sigma, \tau, -) \to (\Gamma'_0, \Gamma'_1, \sigma', \tau', -)$ zwischen unorientierten Graphen verlangen wir zudem die Bedingung $\varphi_1(-a) = -\varphi_1(a)$ für jede Kante $a \in \Gamma_1$ (Verträglichkeit, Äquivarianz). Auch unorientierte Graphen bilden eine Kategorie, wie oben erklärt.

Teilgraphen und Isomorphismen

Damit steht uns unmittelbar und ohne weitere Kosten die kategorielle Struktur zur Verfügung, ihre ordnende Sprech- und Denkweise:

Ein **Teilgraph** $\Gamma' = (\Gamma'_0, \Gamma'_1, \sigma', \tau')$ in $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \sigma, \tau)$ besteht aus Teilmengen $\Gamma'_0 \subseteq \Gamma_0$ und $\Gamma'_1 \subseteq \Gamma'_1$ mit $\sigma(\Gamma'_1) \subseteq \Gamma'_0$ und $\tau(\Gamma'_1) \subseteq \Gamma'_0$, sowie den so definierten Einschränkungen $\sigma', \tau' : \Gamma'_1 \to \Gamma'_0$ von σ, τ.

Äquivalent hierzu: Die Inklusion $\Gamma' \hookrightarrow \Gamma$ ist ein Morphismus in $\mathbf{Graph}$.

Der **volle Teilgraph** auf der Eckenmenge $\Gamma'_0 \subseteq \Gamma_0$ entsteht durch die volle Kantenmenge $\Gamma'_1 = \{\, a \in \Gamma_1 \mid \sigma a, \tau a \in \Gamma_0 \,\}$ und $\sigma', \tau' : \Gamma'_1 \to \Gamma'_0$

Ein **Isomorphismus** $\varphi : \Gamma \to \Gamma'$ ist ein invertierbarer Morphismus, d.h. es existiert ein Morphismus $\psi : \Gamma' \to \Gamma$ mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_\Gamma$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\Gamma'}$.

Äquivalent hierzu: Sowohl die Eckenabbildung $\varphi_0 : \Gamma_0 \to \Gamma'_0$ als auch die Kantenabbildung $\varphi_1 : \Gamma_1 \to \Gamma'_1$ sind bijektiv. Dann ist automatisch auch $\psi = (\varphi_0^{-1}, \varphi_1^{-1}) : \Gamma' \to \Gamma$ ein Morphismus, denn aus $\sigma' \circ \varphi_1 = \varphi_0 \circ \sigma$ folgt $\varphi_0^{-1} \circ \sigma' = \sigma \circ \varphi_1^{-1}$, und aus $\tau' \circ \varphi_1 = \varphi_0 \circ \tau$ folgt $\varphi_0^{-1} \circ \tau' = \tau \circ \varphi_1^{-1}$.

🙂 Diese hilfreiche Äquivalenz zwischen „Isomorphismus“ und „bijektiver Morphismus“ gilt ebenso in der Algebra für Gruppen, Vektorräume, etc.

Wann ist ein Morphismus invertierbar?

Ein Graph heißt **einfach** [*simple*], wenn $(\sigma,\tau) : A \to X \times X$ injektiv ist. Damit gelangen wir zu folgender Vereinfachung, die häufig genutzt wird:

Jede Relation $A \subseteq X \times X$ auf einer Menge X ist ein einfacher Graph (X, A), ausführlich (X, A, σ, τ) mit den Projektionen $\sigma, \tau : A \to X$ (B112).

Ein Morphismus $\varphi : (X, A) \to (X', A')$ einfacher Graphen ist eine Abbildung $\varphi : X \to X$ der Eckenmengen mit $\varphi(A) \subseteq A'$.

In dieser allzu kurzen Vereinfachung gilt die ersehnte Äquivalenz zwischen „Isomorphismus“ und „bijektiver Morphismus“ nicht mehr!

Zwar existiert die Umkehrabbildung $\psi = \varphi^{-1} : X' \to X$ auf den Ecken, sie ist aber im Allgemeinen kein Morphismus $(X', A') \to (X, A)$.

Einfachste Beispiele ist der diskrete Teilgraph $(X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ oder allgemein $(X, A) \hookrightarrow (X, A')$ mit $A \subsetneq A' \subset X \times X$.

Diese Problematik ist analog zur Umkehrung stetiger Abbildungen $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ zwischen topologischen Räumen, selbst im $\mathbb{R}^n$: Zum Beispiel ist $f : [0, 2\pi[\; \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$ stetig und bijektiv, aber kein Homöomorphismus, denn f^{-1} ist nicht stetig!

Auch Wege sind Morphismen.

Als **Modellgraphen** betrachten wir für $n \in \mathbb{N}$ folgende Graphen:

der Pfad [*path*] $\quad P_n = (0 \to 1 \to 2 \to \dots \to n),\ n \ge 0,$ und

der Zykel [*cycle*] $\quad C_n = (0 \to 1 \to \dots \to (n{-}1) \to 0),\ n \ge 1.$

Kleinste Beispiele sind der Punkt $P_0 = (0)$ und der Pfeil $P_1 = (0 \to 1)$ sowie die Schleife $C_1 = (\circlearrowright)$ und das Zweieck $C_2 = (0 \rightleftarrows 1)$. Allgemein:

Der Graph $P_n = (X_n, A_n, \sigma_n, \tau_n)$ hat Ecken $X_n = \{\, x \in \mathbb{N} \mid 0 \le x \le n \,\}$ und Kanten $A_n = \{\, (x, x+1) \mid 0 \le x < n \,\}$ mit den kanonischen Projektionen $\sigma, \tau : A_n \to X_n$, $\sigma(x, y) = x$, $\tau(x, y) = y$. Für $n = \infty$ erhalten wir den unendlichen Pfad $P_\infty = (0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \dots)$.

Der Graph $C_n = (X'_n, A'_n, \sigma'_n, \tau'_n)$ hat Ecken und Kanten wie P_n mit der Identifizierung $n = 0$. Ausgeschrieben bedeutet das $X'_n = \mathbb{Z}/n$ und $A'_n = \{\, (x, x+1) \mid x \in \mathbb{Z}/n \,\}$ mit den Projektionen σ, τ. Speziell für $n = 0$ erhalten wir $\mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z}$ und $C_\infty = (\dots \to -2 \to -1 \to 0 \to 1 \to 2 \to \dots)$.

Somit ist jeder Weg $w = (x_0 \xrightarrow{a_1} x_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} x_n)$ in einem Graphen Γ ein Morphismus $\varphi : P_n \to \Gamma$. Entsprechend ist jeder geschlossene Weg $w = (x_0 \xrightarrow{a_1} x_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} x_n)$ mit $x_n = x_0$ ein Morphismus $\psi : C_n \to \Gamma$.

Forderungen zur Endlichkeit

Die Informatik verwendet üblicherweise die griffige Abkürzung DAG = *directed acyclic graph*, gerichteter azyklischer Graph. Das bedeutet, unser Graph Γ erlaubt keine Morphismen $C_n \to \Gamma$.

Für unsere Spiele ist es bequemer diesen Begriff zu verstärken zu DAG = *directed artinian graph*, gerichteter artinscher Graph. Das bedeutet unser Graph Γ erlaubt keine Morphismen $P_\infty \to \Gamma$.

Für viele unserer Induktionsargumente benötigen wir zudem: LEA = lokal-endlich und artinsch, ALF = *artinian and locally-finite*.

Aufgabe: Die Bedingung ALF / LEA ist äquivalent zur Aussage:

1. Der Graph Γ ist azyklisch, und für jeden Zustand x ist der erreichbare Teilgraph Γ_x endlich. (Für endliche Graphen ist azyklisch dasselbe wir artinsch. Für unendliche Graphen ist die artinsch strikt stärker.)

Finden Sie (einfache / kleine / schöne) Beispiele von Graphen,

2. die weder lokal-endlich noch artinsch sind;
3. die lokal-endlich, aber nicht artinsch sind;
4. die artinsch, aber nicht lokal-endlich sind.

Forderungen zur Endlichkeit

Lösung: Wir schreiben $x \to y$, wenn eine Kante $a \in \Gamma_1(x, y)$ existiert, und allgemeiner $x \xrightarrow{*} y$ falls ein beliebiger Weg $w \in \Gamma_*(x, y)$ existiert. Dies ist die reflexiv-transitive Fortsetzung der Kantenrelation $\to$ auf X und definiert somit eine partielle Ordnung auf der Eckenmenge X.

(1) „$\Leftarrow$“: Lokal-endlich ist klar, und artinsch folgt per Induktion über $\sharp\Gamma_x$. „$\Rightarrow$“: Azyklisch ist klar. Angenommen, der erreichbare Teilgraph Γ_x wäre unendlich, also mit unendlicher Eckenmenge $\{\, z \in X \mid x \xrightarrow{*} z \,\}$. Unter den endlich vielen Nachfolgern y mit $x \to y$ existiert mindestens einer, für den Γ_y unendlich ist. Dieses Argument können wir nun iterieren. So finden wir einen unendlichen Weg $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots$. Das widerspricht der Voraussetzung, dass Γ artinsch ist.

(2) Einfache Beispiele sind $X = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ mit $x \to y$ falls $x < y$.

(3) Das minimale Beispiel ist der Pfad $P_\infty = (0 \to 1 \to 2 \to \dots)$.

(4) Ein klassisches Beispiel ist der einfache Graph (X, A, σ, τ) mit der Eckenmenge $X = \mathbb{N}^2$ und als Kantenmenge die lexikographische Ordnung $A = \{\, (x, y) \in X \times X \mid x_1 > y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 > y_2) \,\}$.

Optimierung auf Graphen: allgemeine Fragestellung

Meist betrachtet man zu Graphen weitere Daten und Eigenschaften. Graphen sind daher häufig die gemeinsame, tragende Grundstruktur!

In der Optimierung betrachtet man Gewichte und minimiert die Kosten / maximiert den Gewinn der gestellten Aufgabe, z.B. beste Verbindung:

Eine **(reelle) Gewichtung** der Ecken $v : X \to \mathbb{R}$ bzw. Kanten $r : A \to \mathbb{R}$ interpretieren wir als Kosten / Nutzen für das Erreichen eines Zustands $x \in X$ bzw. das Ausführen einer Aktion $a \in A$. Daraus berechnen wir zu jedem Weg $w = (x_0 \xrightarrow{a_1} x_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} x_n)$ seine Gesamtbewertung

$$w \mapsto u(w) = \sum_{k=1}^{n} r(a_k) + v(x_k).$$

Bei festem Start x und (zumeist auch) Ziel y suchen wir Wege $w : x \to y$, die die Kosten $u(w)$ minimieren bzw. den Nutzen $u(w)$ maximieren.

Für $v = 0$ und $r = 1$ suchen wir den kürzesten Weg von x nach y. Solche Fragen treten in der Informatik und Anwendungen häufig auf: Für $r : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ löst dies der Dijkstra–Algorithmus (1956), für allgemeine Gewichte $r : A \to \mathbb{R}$ der Bellman–Ford–Moore–Algorithmus (1956).

Optimierung auf Graphen: kontinuierliche Analogie

Das ist ein diskretes Analogon zur **Variationsrechnung** der Analysis: Gegeben sei ein Wirkungsfunktional $S : \mathscr{C}^2 = \mathscr{C}^2([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch

$$w \mapsto S(w) := \int_{t=a}^{b} F\big(t, w(t), w'(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

als Integral einer $\mathscr{C}^2$–Funktion $F : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (t,q,p) \mapsto F(t,q,p)$. Wir fixieren Start $w(a) = x$ und Ziel $w(b) = y$. Ist $w \in \mathscr{C}^2$ extremal, also minimal $S(w) \leq S(z)$ für alle $z \in \mathscr{C}^2$ oder maximal $S(w) \geq S(z)$ für alle $z \in \mathscr{C}^2$, dann erfüllt w die **Euler–Lagrange–Differentialgleichung**:

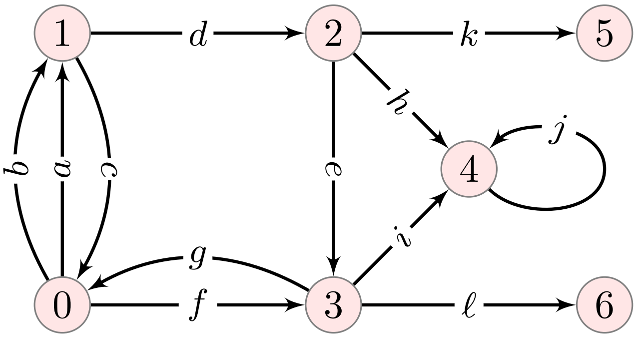
$$\left[\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial p}\right]\big(t, w(t), w'(t)\big) = 0.$$

Ausgeschrieben bedeutet das: Für alle $t \in [a,b]$ gilt die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial q}\big(t, w(t), w'(t)\big) = \frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial p}(\cdots) + \frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial p}(\cdots)\,w'(t) + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(\cdots)\,w''(t).$$

☺ Mit dieser Differentialgleichung können wir $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ berechnen!

Spiele auf Graphen



$$\tau : A \to X : \quad \begin{array}{ll} (0,a) \mapsto 1, & (2,h) \mapsto 4, \\ (0,b) \mapsto 1, & (2,k) \mapsto 5, \\ (0,f) \mapsto 3, & (3,g) \mapsto 0, \\ (1,c) \mapsto 0, & (3,i) \mapsto 4, \\ (1,d) \mapsto 2, & (3,\ell) \mapsto 6, \\ (2,e) \mapsto 3, & (4,j) \mapsto 4. \end{array}$$

Definition B1D: Graph als Spiel: Zustände, Aktionen, Strategien

Im Graphen $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ interpretieren wir die Ecken $x \in X$ als **Zustände** und die Kanten $a \in A$ als **Aktionen**. Zur Vereinfachung gelte $A = \coprod_{x \in X} A_x = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times A_x$ mit Start $\sigma = \mathrm{pr}_1 : A \to X : (x, a) \mapsto x$ und der **Transition** $\tau : A \to X : (x, a) \mapsto y$, lokal $\tau_x : A_x \to X : a \mapsto y$.

Für Zustände $x \in X$ schreiben wir auch $x \in \Gamma$. Wir zerlegen diese in **innere Ecken / aktive Zustände** $X^\circ = \mathrm{Bild}(\sigma) = \{\, x \in X \mid A_x \neq \emptyset \,\}$ und **Blätter / terminale Zustände** $\partial X = X \smallsetminus X^\circ = \{\, x \in X \mid A_x = \emptyset \,\}$.
Eine **Strategie** ist eine Abbildung $s : X^\circ \to A : x \mapsto a$ mit $\sigma \circ s = \mathrm{id}_{X^\circ}$.
Die Strategiemenge ist $S(\Gamma) = \{\, s : X \to A \mid \sigma \circ s = \mathrm{id}_{X^\circ} \,\} = \prod_{x \in X^\circ} A_x$.

Spiele auf Graphen

Wir sortieren alle **Aktionen** $a : x \to y$ nach ihrem Startzustand $x = \sigma(a)$: Dies erlaubt die bequem-konzise Codierung $A = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times A_x$ mit Projektion $\sigma : A \to X : (x, a) \mapsto x$ und Transition $\tau : A \to X : (x, a) \mapsto y$. Für jeden Zustand x benennt die Menge A_x die möglichen Aktionen.

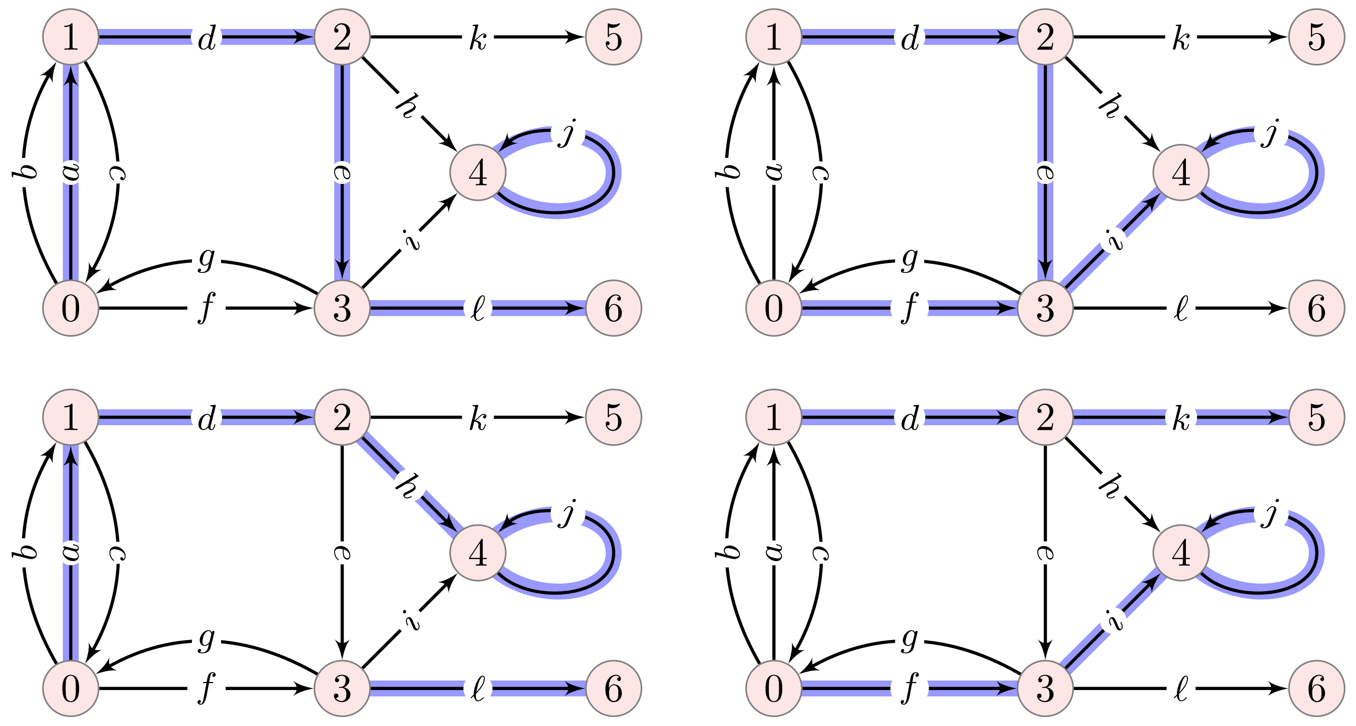
In der Graphentheorie und Informatik nennt man dies die **Adjazenzliste**: Für jeden Knoten $x \in X$ ist dies die Liste A_x aller ausgehenden Kanten $a : x \to y$ zusammen mit der Nachfolgerfunktion $\tau_x : A_x \to X : a \mapsto y$. Datenstrukturen und Algorithmen basieren meist auf Adjazenzlisten.

Als Analogie zur **Differentialtopologie**: Wir interpretieren $a : x \to y$ als einen Tangentialvektor, der im Fußpunkt x verankert ist und auf y zeigt. Die Projektion $\sigma : A \to X : (x, a) \mapsto x$ ist das Tangentialbündel über X, und jede Strategie $s : X^\circ \to A$ mit $\sigma \circ s = \mathrm{id}_{X^\circ}$ ist ein Vektorfeld auf X.

Zu jedem Startpunkt $x_0 \in X$ können wir s **integrieren** zur Trajektorie $w = (x_0, a_0, x_1, a_1, x_2, \dots)$ mit $a_k = s(x_k)$ und $x_{k+1} = \tau(x_k, a_k)$ für alle k. Diese endet entweder im Rand ∂X oder läuft unendlich in X° weiter. Das entspricht recht genau der Situation bei Differentialgleichungen!

Strategien auf Graphen

Vier Beispiele für Strategien auf diesem Graphen:



Aufgabe: Wie viele Strategien gibt es? **Lösung:** $|S| = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 54$.
Zum Vergleich: Insgesamt gibt es $|A| = 3 + 2 + 3 + 3 + 1 = 12$ Kanten.

Strategien auf Graphen

Nochmal zur Betonung: Eine Strategie s ordnet jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ eine Aktion $s(x) = a \in A_x$ zu. Dies schreiben wir als Abbildung $s : X^\circ \to A : x \mapsto a$ mit $\sigma \circ s = \mathrm{id}_{X^\circ}$. So weit, so gut, so klar, so einfach.

Erfahrungsgemäß keimen bald schon Zweifel an dieser Definition auf: Müssen wir wirklich für *jeden* aktiven Zustand eine Aktion vorsehen? Auch für Zustände, in die wir weder kommen wollen noch werden? Die kurze Antwort: Ja, wir müssen; diese Definition ist sinnvoll!

Wir können uns einen Startzustand vorgeben, im obigen Beispiel etwa 0. Wenn wir dann der gegebenen Strategie s folgen, werden wir manchen Zustand x nicht besuchen und seine Aktion $a = s(x)$ nicht ausführen. Dennoch müssen wir für *jeden* aktiven Zustand eine Aktion vorsehen. Der Grund ist einfach: Andere Startwerte benötigen diese Aktionen!

Die schöne Analogie zu Differentialgleichungen ist auch hier hilfreich: Sie geben das Vektorfeld auf dem gesamten Gebiet Ω vor, auch wenn zu einem vorgegebenen Startwert $x_0 \in \Omega$ die Trajektorie nicht alle Punkte $x \in \Omega$ durchläuft und daher nicht alle Vektoren $s(x)$ benutzt werden.

Belohnung: entlang des Wegs oder erst am Ende?

Graphen sind ideal für Spiele: Sie bieten eine universelle Beschreibung! Unser Spielgraph $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ codiert als Ecken alle Positionen / Zustände des Spiels und als Kanten die möglichen Züge / Aktionen.

Ein Spiel bietet zudem Nutzen, Gewinn, Auszahlung, Belohnung, etc. Diese entstehen auf zwei Arten (und Mischungen davon) :

1. Auszahlung $v(x)$ beim Erreichen eines Endzustandes $x \in \partial X$.
   „Entscheidend ist, was hinten rauskommt." / Ende gut, alles gut.
   Dies codieren wir als **terminale Auszahlung** $v : \partial X \to \mathbb{R}$.
2. Belohnung $r_x(a)$ beim Ausführen einer Aktion $a \in A_x$.
   „Der Weg ist das Ziel." / *instant gratification* / zeitnah, verteilt
   Dies codieren wir als **sofortige Belohnung** $r : A \to \mathbb{R}$.

Im zweiten Fall müssen wir die Gesamtauszahlung festlegen, etwa

(konvergent) summiert:	$u = \sum_t r(a_t)$,
mit $\delta \in [0, 1]$ diskontiert:	$u = \sum_t \delta^t r(a_t)$,
diskontiert und normiert:	$u = (1 - \delta) \sum_t \delta^t r(a_t)$.

Teilweise können diese Zahlungsarten ineinander umgewandelt werden.

Belohnung: entlang des Wegs oder erst am Ende?

Graphen sind hilfreich für uns, denn **Menschen sind Augenwesen**: Durch einem Spielgraphen können wir die Regeln visualisieren und graphisch darstellen. Das ist komplementär zu wortreichen Erklärungen und oft effizienter. Auch für die anschließende Analyse / Rechnung / Lösung mit Stift und Papier ist diese Darstellung überaus nützlich.

Graphen sind zudem **ideal für Computer** und dienen als universelle Datenstruktur: Um ein Spiel vom Computer berechnen / lösen zu lassen, müssen wir seine Struktur (Zustände, Aktionen, Auszahlungen, etc.) präzise erfassen, formulieren und für den Rechner streng formalisieren. Erst darauf können Algorithmen aufbauen und Lösungen berechnen.

Bei manchen Brettspielen wie **Schach** oder **Go** geht es vor allem darum, wer am Ende gewinnt ($v = 1$) und wer verliert ($v = 0$). Einzelne Züge mögen schön und gut sein, führen aber nicht (allein) zur Auszahlung.

Das trifft auf alle Spiele zu, deren Gewinn sich nicht additiv aus kleinen Beiträgen zusammensetzt, sondern wo erst das große Ganze zählt: Zur Entscheidung der Auszahlungen muss zu Ende gespielt werden!

Belohnung: entlang des Wegs oder erst am Ende?

Bei **Monopoly** und vielen **Computerspielen** entstehen Belohnungen / Gewinne durch einzelne Aktionen und werden sofort gutgeschrieben. Beim Design von Videospielen ist das Gameplay eine zentrale Frage: Zu simples Jump & Run langweilt, zu komplizierte Rätsel frustrieren.

Zum Fußball gibt es beide Meinungen: „Es zählt nur, wer als Sieger vom Platz geht.“ versus „Wir wollen schön spielen und die Fans belohnen / zeigen was wir können / den Zuschauern ein Spektakel bieten / etc.“ Sprichwörtlich: „Der Pokal hat seine eigenen Regeln.“

Aktien verbinden kurzfristige Dividende (z.B. als jährliche Ausschüttung) mit langfristiger Wertsteigerung (allerdings erst realisiert beim Verkauf).

Der (diskontierte) Gesamtnutzen u ist leicht zu verstehen als Summe aller Belohnungen $r(a_t)$. Jede einzelne davon ist unmittelbarer spürbar, das erfordert weniger mentale Leistung und strategische Vorausschau. Die willkürliche Funktion $v : \partial X \to \mathbb{R}$ hingegen kann die kompliziertesten Regeln und Ausnahmen verbergen... und fällt am Ende vom Himmel. Sprichwörtlich: „Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile.“

Belohnung: entlang des Wegs oder erst am Ende?

Weise Worte: *Quidquid agis, prudenter agas et respice finem!* (Was immer du tust, handele klug und bedenke das Ende!)

Im **alltäglichen Leben** verhalten sich Menschen sehr unterschiedlich: Manche suchen eher langfristige Strategien, andere kurzfristige Erfolge. In manchen Situationen kann beides zum selben Ergebnis führen, oft sind Ziele und Wege jedoch sehr verschieden. Das entspricht globalen vs lokalen Optimierungsmethoden (*greedy algorithm*, *steepest descent*).

Der **Balanceakt** zwischen kurz- und langfristigem Nutzen begegnet uns überall im Leben. Das gilt auch für **Schule und Studium**. Der Bachelor ist additiv aus Modulen aufgebaut, und Studierende summieren Credits. (Jump & Run?) Sicher, kurzfristige Rückmeldungen helfen und sofortige Belohnungen motivieren, doch wenn zum Schluss das eigentlich erhoffte Gesamtverständnis fehlt, so bleiben nur bedeutungslose Spielpunkte.

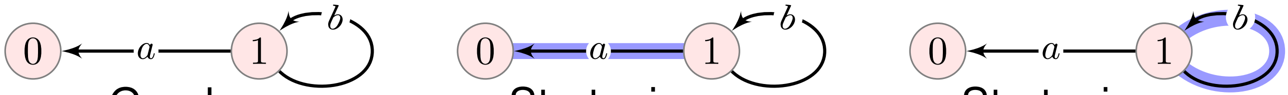
Gegenentwurf wären umfangreiche Abschlussprüfungen (Staatsexamen, Diplom, etc.), die auf das Verständnis größerer Zusammenhänge zielen. Vermutlich wäre eine ausgewogene Mischung das Richtige. ¿Qué sera?

Optimal entscheiden: Welche Strategie ist die beste?

Aufgabe: Sie können Ihre Kuh entweder schlachten zum Marktpreis $M \in [2800, 3200]$€ oder melken für 60€. Sie stirbt friedlich mit Wkt 2%.

Vegane Version: Sie können Ihre Aktien zum Marktpreis M verkaufen oder behalten mit Dividende 60€. Die Inflationsrate sei konstant 2%.

Formulieren Sie dies als Graph. Wo/wie entstehen die Auszahlungen? Welche Strategien gibt es? Welche davon sind optimal profitabel?

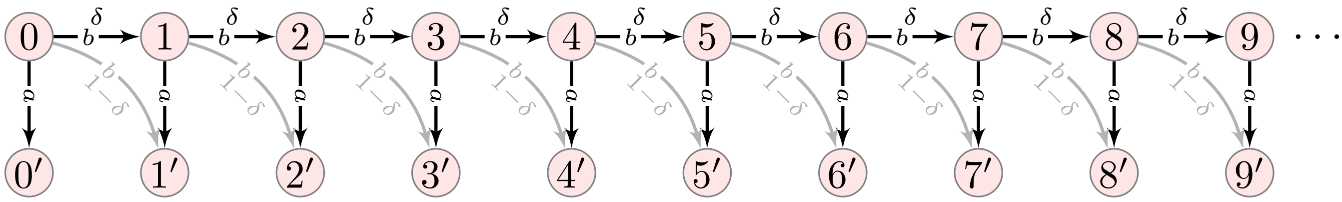


Graph — Strategie s_1 — Strategie s_2

Lösung: Der Gesamtnutzen ist $u(s_1|1) = r(a) = M$ gegenüber

$$u(s_2|1) = \sum\nolimits_{t=0}^{\infty} \delta^t r(b) = \frac{60}{1-\delta} = 3000.$$

Alternativen: Es gibt mehrere Modelle zur gegebenen Fragestellung!



Optimal entscheiden: Welche Strategie ist die beste?

☺ Diese Miniatur ist ein extrem vereinfachtes Beispiel zur Illustration. Die umgangssprachliche Fragestellung ist anschaulich und motivierend, leider auch in wichtigen Details noch allzu vage und nicht recht explizit. Die Ausführung und Präzisierung als Graph lässt keine Fragen offen.

Wir setzen hier 1 als Startzustand voraus, das heißt Sie haben anfangs eine Kuh bzw. das Aktienpaket, andernfalls ist ja nichts zu entscheiden. Bei Start in 1 ist die Trajektorie danach entweder (a) oder $(b, b, b, \dots)$. Hierzu können wir nun die Auszahlungen berechnen und vergleichen:

Im ersten Fall kommt es sofort zur terminalen Auszahlung M.
Im zweiten Fall kommt es zur Auszahlung von 60€, unendlich oft.
An dieser Stelle ist der Diskontfaktor $\delta = 0.98$ in $[0, 1[$ wichtig:
Er garantiert die Konvergenz dieser geometrischen Reihe!

Wir können beide Strategien vergleichen und die beste wählen:
Für $M > 3000$ ist die Strategie s_1 profitabler.
Für $M < 3000$ ist die Strategie s_2 profitabler.
Für $M = 3000$ ergeben beide dieselbe Auszahlung.

Optimal entscheiden: Welche Strategie ist die beste?

Wir vergleichen hier eine einmalige Auszahlung $M \in \mathbb{R}$ mit einem Zahlungsstrom $(r_0, r_1, r_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Zum Vergleich solcher Ströme gibt es verschiedene Möglichkeiten. Einfach und weit verbreitet ist die geometrische Reihe, genauer Potenzreihe $\sum_{t \in \mathbb{N}} \delta^t r_t$ mit $\delta \in [0, 1]$.

Ist die Folge $(r_0, r_1, r_2, \dots)$ beschränkt, so konvergiert diese Reihe für jeden Diskontfaktor $\delta \in [0, 1[$. Es bieten sich zwei Interpretationen:

1. **Inflation** und **Un/Geduld:** Geld morgen ist weniger wert als heute. Dies formalisieren wir als konstanten, vorhersehbaren Wertverlust. Dies führt direkt zu der obigen Formel, als Potentzreihe in δ.
2. **Abbruchwahrscheinlichkeit:** Das Spiel hat in jeder Runde eine gewisse Abbruchwkt $\varepsilon > 0$, also Fortsetzungswkt $\delta = 1 - \varepsilon$. Wir betrachten dann die Erwartung des Nutzens.

Wenn Sie viele Kühe haben, dann ist der Erwartungswert die sinnvolle Vergleichsgröße. Wenn Sie nur eine Kuh haben und risiko-avers sind, dann möchten Sie vielleicht eine Versicherung abschließen, und ihr Risiko (2) umwandeln in einen vorhersehbaren Wertverlust (1).

Optimal entscheiden: Welche Strategie ist die beste?

Übung: Formulierung und berechnen Sie etwas realistischere Graphen! Welche Aktionen und welche Zufallszüge gibt es? Wie bauen Sie daraus den Spielgraphen auf? Erst dadurch vollenden Sie Ihr explizites Modell. Automatisieren Sie dann Ihre Rechnungen mit einer Tabellenkalkulation!

Wir haben zunächst das stationäre Modell gewählt. Alternativ können wir die Zeit $t = 0, 1, 2, \dots$ explizit im Graphen (hier Spielbaum) codieren und jeweils neu entscheiden: Wir geben dem Spieler somit ein Gedächtnis. Die Menge möglicher Strategien ist größer, hier sogar unendlich!

Die unendliche Wiederholung ist am leichtesten zu beschreiben, doch etwas unrealistisch. Zudem wird die Analyse kompliziert, später mehr!

Ich schlage eine realistische Kuh mit endlicher Lebenserwartung vor: Für $t = 0, \dots, 250$ sinkt der Faktor $\delta_t = 1 - t/250$ von $\delta_0 = 1$ auf $\delta_{250} = 0$. Ebenso sollte der Marktpreis M_t fallen, zum Beispiel linear in der Zeit.

☺ Dies alles können Sie als Spielbaum beschreiben und die optimalen Strategien berechnen; wir führen dies in folgender Aufgabe aus.

Nutzenmaximierung und Bellman–Gleichung

Definition B1E: Spielgraph, Auszahlungen und Bellman–Gleichung

(1) Gegeben sei ein Graph $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ mit terminaler Auszahlung $v : \partial X \to \mathbb{R}$, sofortiger Belohnung $r : A \to \mathbb{R}$ und Diskontfaktor $\delta \in [0, 1]$. Für die Gewinnfunktion $u : X \to \mathbb{R}$ gilt die **Bellman–Gleichung**:

$$u(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } x \in \partial X, \\ \sup\limits_{a : x \to y} \big[r(a) + \delta u(y)\big] & \text{für } x \in X^\circ. \end{cases}$$

(2) Im stochastischen Falle führt die Aktion $a \in A_x$ nicht sicher, sondern mit gewisser Wkt $p(x, a, y)$ zum Zustand y und zur Belohnung $r(x, a, y)$. In der Bellman–Gleichung für $x \in X^\circ$ steht dann der **Erwartungswert**:

$$u(x) = \sup_{a \in A_x} \underbrace{\textstyle\sum_{y \in X} p(x, a, y)\big[r(x, a, y) + \delta u(y)\big]}_{\text{Hamilton–Funktion } H(x,a,u)}$$

☺ Zum Verständnis benötigen Sie die Definition (die Idee, das Ziel), gute Beispiele (konkrete Rechnungen, anschauliche Anwendungen) sowie starke Sätze (passende Werkzeuge, hilfreiche Rechenregeln).

Nutzenmaximierung und Bellman–Gleichung

☺ Oft ist unser Graph $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ **lokal-endlich**, das vereinfacht: Das Supremum über die (endliche!) Menge A_x wird also angenommen. Im allgemeinen Falle steht anstelle des Maximums das Supremum.

☺ Die **Bellman–Gleichung** scheint auf den ersten Blick kompliziert, ist aber recht einfach: In jedem aktiven Zustand $x \in X$ maximieren wir die Auszahlung $H(x, a, u)$ durch die Aktion a mit dem größtem Nutzen.

☺ **Optimale Züge** erkennen Sie an der Gewinnfunktion $u : X \to \mathbb{R}$: Sie liefert uns die optimale Auszahlung $u(x) = \max_{a \in A_x} H(x, a, u)$ und Aktionen $s(x) \in \operatorname{Arg\,max}_{a \in A_x} H(x, a, u)$, also eine optimale Strategie s!

☺ Gewinnoptimierung und Strategieoptimierung gehen Hand in Hand: Wir berechnen in jedem Zustand mit der optimalen Auszahlung zugleich alle optimalen Aktionen, und fassen zu optimalen Strategien zusammen.

☺ Diese allgemeine Methode ist ebenso einfach wie wirkungsvoll. Davon ausgehend können wir effiziente Algorithmen suchen oder geeignete Näherungen oder das Modell nach Bedarf erweitern.

🙂 Wir arbeiten hier mit Zufallszügen, also einem **Markov–Graphen**. Allgemein ersetzen wir die deterministische Transition $\tau : A \to X$ durch $\tau : A \to [X] : a \mapsto \sum_y p(a,y)\, y$ mit $p(a,y) \ge 0$ und $\sum_y p(a,y) = 1$ und die Belohnung $r : A \to \mathbb{R} : a \mapsto r(a)$ durch $r : A \times X \to \mathbb{R} : (a,y) \mapsto r(a,y)$.

🙂 Zur Vereinfachung gehen wir von einer endlichen Verteilung aus; die Erwartung ist dann eine endliche Summe (allgemein ein Integral). Zwecks Bequemlichkeit erstreckt sich die Summe über *alle* Zustände $y \in X$; wir setzen $p(a,y) = 0$, falls der Zustand y nicht erreicht wird.

Ausblick und Einordnung: Unser grundlegendes Modell nennt man auch ein **Markov–Entscheidungsproblem** [*markov decision problem*, MDP], seine rekursive Lösung illustriert die **Dynamische Programmierung**.

In der **Finanzmathematik** bewertet man so (amerikanische) Optionen. Ist der Graph zu groß, so nutzt man (Monte-Carlo-)**Simulationen**.

Im kontinuierlichen Falle spricht man auch von **optimaler Steuerung** [*optimal control*]. Die formale Behandlung ist technisch aufwändiger.

Zusammenfassung: Eingangsdatum ist ein (lokal-endlicher, Markov-) Graph $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ zusammen mit (beschränkten) Auszahlungen $v : \partial X \to \mathbb{R}$ und $r : A \to \mathbb{R}$ sowie einem festen Diskontfaktor $\delta \in [0,1]$. Das ist ein ausreichend flexibles Modell für viele Optimierungsaufgaben.

Die Bellman–Gleichung zu formulieren ist leicht, sie zu lösen aber nicht. Wir diskutieren im Folgenden zwei Ansätze zu ihrer praktischen Lösung:

1. Wir gehen in diesem Kapitel davon aus, dass wir die rechte Seite bereits kennen und so die linke Seite rekursiv berechnen können. Das ist eine typische Problemstellung zur Rückwärtsinduktion. Schon dieser einfachste Fall ist bereits sehr wirkungsvoll.
2. Allgemein steht u auf beiden Seiten der Gleichung und wir suchen Fixpunkte. Banachs Fixpunktsatz liefert Existenz und Eindeutigkeit und zudem ein iteratives Verfahren zur effizienten Berechnung. Wir führen dies in Kapitel D zu Markov–Spielen genauer aus.

Die Bellman–Gleichung ist theoretisch und praktisch relevant, etwa in der dynamischen Programmierung oder im bestärkenden Lernen.

Lösung der Bellman–Gleichung durch Rückwärtsinduktion

Satz B1F: Rückwärtsinduktion

(1) Gegeben sei ein Graph $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ mit terminaler Auszahlung $v : \partial X \to \mathbb{R}$, sofortiger Belohnung $r : A \to \mathbb{R}$ und Diskontfaktor $\delta \in [0, 1]$.

Ist Γ artinsch, so existiert zur Bellman–Gleichung genau eine Lösung $u : X \to \bar{\mathbb{R}}$, und diese können wir durch Rückwärtsinduktion berechnen.

(2) Dasselbe gilt für jeden artinschen Markov–Graphen, im Sinne von B1E, vorausgesetzt alle Erwartungswerte $H(x, a, u)$ sind wohldefiniert.

Hierzu setzen wir $x \to y$, falls $p(x, a, y) > 0$ für eine Aktion $a \in A_x$ gilt, und fordern, dass Γ keine unendlichen Wege $x_0 \to x_1 \to \dots$ enthält.

🙂 Die Beweisidee ist anschaulich klar und aus Beispielen vertraut: Wir beweisen Existenz durch Rekursion, Eindeutigkeit durch Induktion. Ist unser artinscher Graph Γ zudem lokal-endlich, so genügt hierzu eine **Höhenfunktion** $h : X \to \mathbb{N}$ mit $h|_{\partial X} = 0$ und $h(x) > h(y)$ für alle $x \to y$. Die kleinste erhalten wir durch $h(x) = \min\{\, \alpha \in \mathbb{N} \mid \forall x \to y : \alpha > h(y) \,\}$. Ist Γ lediglich artinsch, so kann h Werte in Ordinalzahlen annehmen.

Lösung der Bellman–Gleichung durch Rückwärtsinduktion

Beweis: Wir nennen $u : X_u \to \bar{\mathbb{R}}$ definiert auf X_u mit $\partial X \subseteq X_u \subseteq X$ eine **partielle Gewinnfunktion**, falls gilt: (a) Am Rand gilt $u|_{\partial X} = v$. (b) Für alle $x \in X_u^\circ$ gilt $\{\, y \mid x \to y \,\} \subseteq X_u$ und $u(x) = \sup_{a \in A_x} H(x, a, u)$.

(c) Je zwei partielle Gewinnfunktionen $\tilde{u} : X_{\tilde{u}} \to \bar{\mathbb{R}}$ und $\hat{u} : X_{\hat{u}} \to \bar{\mathbb{R}}$ stimmen auf $Y = X_{\tilde{u}} \cap X_{\hat{u}}$ überein: Gäbe es $x_0 \in Y$ mit $\tilde{u}(x_0) \neq \hat{u}(x_0)$, so gilt $x_0 \in Y^\circ$, und es gibt einen Nachfolger $x_0 \to x_1$ mit $\tilde{u}(x_1) \neq \hat{u}(x_1)$. So fortfahrend erhalten wir einen unendlichen Weg $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots$. Das widerspricht unserer Voraussetzung, dass der Graph Γ artinsch ist.

(d) Sei nun $u := \bigcup \tilde{u}$ die Vereinigung aller partiellen Gewinnfunktionen $\tilde{u}$. Dank (c) ist u eine partielle Gewinnfunktion, und zudem maximal.

Wir zeigen $X_u = X$. (e) Angenommen $x \in X$ und $\{\, y \mid x \to y \,\} \subseteq X_u$. Wir können dann $u(x) := \sup_{a \in A_x} H(x, a, u)$ berechnen und u somit fortsetzen falls $x \notin X_u$. Da u jedoch maximal ist, gilt bereits $x \in X_u$.

(f) Gäbe es $x_0 \in X \smallsetminus X_u$, so auch $x_0 \to x_1 \in X \smallsetminus X_u$ wegen (e). So fortfahrend erhalten wir einen unendlichen Weg $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots$. Das widerspricht unserer Voraussetzung, dass der Graph Γ artinsch ist.

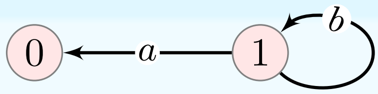
Lösung der Bellman–Gleichung durch Rückwärtsinduktion

Definition B1E erklärt zunächst nur die Gleichung, die wir lösen wollen. Über Existenz und Eindeutigkeit und Lösungsmethoden hingegen macht sie zunächst keine Aussagen. Dazu benötigen wir genauere Information.

Tatsächlich gilt im Allgemeinen weder Existenz noch Eindeutigkeit, und allgemeine Lösungsmethoden haben wir nur in günstigen Situationen. Zur Illustration nochmal unser einfaches, aber eindrückliches Beispiel:

Beispiel B1G: Existenz und Eindeutigkeit

Wir betrachten das obige nicht-artinsche Spiel:



(1) Für $r(b) > 0$ und $\delta = 1$ existiert überhaupt keine Lösung $u : X \to \mathbb{R}$! Für diese gälte nämlich $u(1) \ge r(a) + v(0)$, also $u(1) \ge r(b) + u(1)$, somit $0 \ge r(b)$. (Die Lösung $u(1) = \infty$ schließen wir hier aus.)

(2) Für $r(b) = 0$ und $\delta = 1$ existieren unendlich viele Lösungen! Jede Wahl $u(1) \ge r(a) + v(0)$ ist als Lösung möglich.

(3) Für $\delta \in [0, 1[$ existiert genau eine Lösung $u : X \to \mathbb{R}$, nämlich $u(1) = \max\{\, r(a) + \delta v(0),\ r(b)/(1 - \delta) \,\}$.

Lösung der Bellman–Gleichung durch Rückwärtsinduktion

Dieses Beispiel ist zwar noch lächerlich simpel, doch bereits erhellend: Es ist nicht artinsch, und prompt misslingen Existenz und Eindeutigkeit! Wir sehen hier bereits deutlich, dass der Fall $\delta = 1$ meist knifflig ist, während sich für $\delta \in [0, 1[$ alle Probleme in Wohlgefallen auflösen.

Das gilt allgemein: In Kapitel D nutzen wir Banachs Fixpunktsatz D2A. Satz D2K garantiert: Für $\delta \in [0, 1[$ hat die Bellman–Gleichung genau eine Lösung, und diese lässt sich durch die Fixpunktiteration konstruieren bzw. approximieren. Zudem gilt Bellmans Optimalitätsprinzip (D2N).

In diesem und dem nächsten Kapitel wollen wir zunächst möglichst elementar vorgehen. Wir betrachten daher zuerst Anwendungen, deren Graphen artinsch sind, meist zusätzlich sogar endlich. Damit lassen sich bereits erstaunlich viele Probleme lösen.

Hierzu bereitet die genial-einfache Rückwärtsinduktion die Grundlage: Satz B1F garantiert, dass für artinsche Graphen die Rechnung gelingt! Der folgende Satz erklärt, dass die Bellman–Gleichung tatsächlich tut, was sie soll: Lokale und globale Optimierung stimmen überein!

Bellmans Optimalitätsprinzip, hier rekursiv

Sei $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ ein artinscher (Markov–)Graph mit Auszahlungen $v : \partial X \to \mathbb{R}$ terminal und $r : A \to \mathbb{R}$ instantan und Diskontfaktor $\delta \in [0, 1]$.

Sei $u : X \to \mathbb{R}$ die (dank B1F) eindeutige Lösung der Bellman–Gleichung. Wie kann diese Auszahlung u realisiert werden, oder gar noch höhere?

Für jede Strategie $s \in S(\Gamma)$ berechnen wir dazu die Gewinnerwartung $u_s : X \to \mathbb{R}$ durch Rückwärtsinduktion. Sei $u_* := \sup\{ u_s \mid s \in S(\Gamma) \}$.

Das ist in jedem Zustand die höchste realisierbare Auszahlung.

Satz B1H: Bellmans Optimalitätsprinzip, hier rekursiv

(1) Es gilt $u_* \le u$: Lokale Optimierung ist mindestens so gut wie globale.

(2) Wird in der Bellman–Gleichung überall das Maximum angenommen, dann existieren optimale Strategien $s \in S(\Gamma)$ mit $u_s = u$: Wir wählen dazu $s(x) \in \operatorname{Arg\,max}_{a \in A_x} H(x, a, u)$ für jeden Zustand $x \in X^\circ$.

☺ Für jeden lokal-endlichen, artinschen (Markov-)Graphen gilt $u = u_*$: Kurz gesagt, lokale und globale Optimierung stimmen hier überein!

Bellmans Optimalitätsprinzip, hier rekursiv

Beweis: (1) Wir zeigen $u_* \le u$, also $u_s \le u$ für jede Strategie $s \in S(\Gamma)$. Dies gilt für jeden Endzustand $x \in \partial X$, denn $u_s(x) = u(x) = v(x)$.

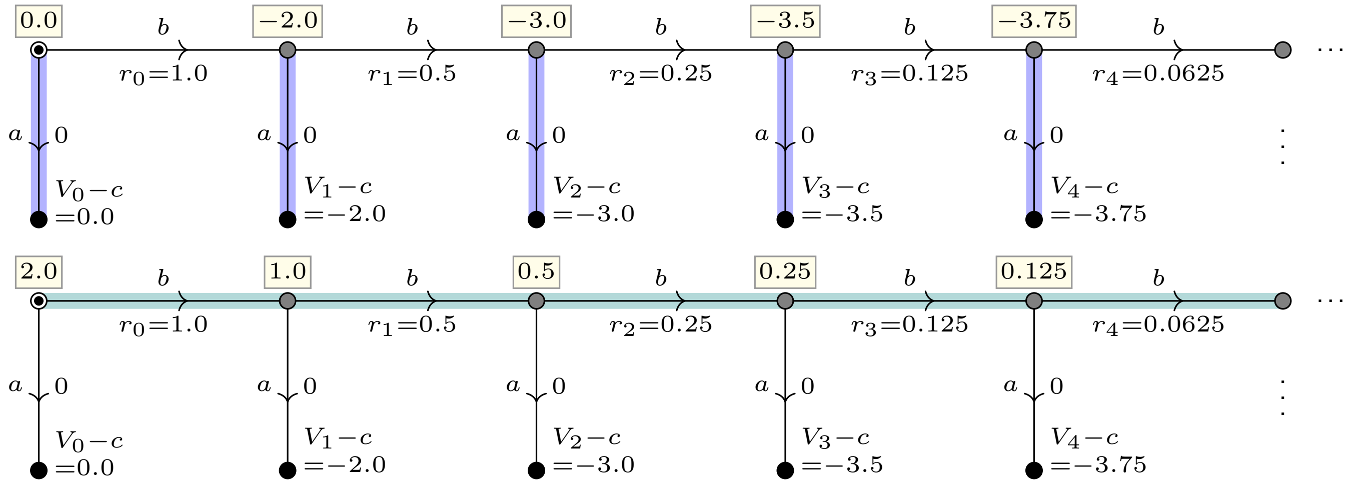
Sei $x \in X^\circ$. Aus $u_s(y) \le u(y)$ für alle $x \to y$ folgt $u_s(x) \le u(x)$, denn $u_s(x) = H(x, s(x), u_s) \le H(x, s(x), u) \le \sup_{a \in A_x} H(x, a, u) = u(x)$.

Existiert $x_0 \in X$ mit $u_s(x_0) > u(x_0)$, so auch $x_0 \to x_1$ mit $u_s(x_1) > u(x_1)$. So fortfahrend erhalten wir einen unendlichen Weg $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots$. Das widerspricht unserer Voraussetzung, dass der Graph Γ artinsch ist.

(2) In jedem terminalen Zustand $x \in \partial X$ gilt $u(x) = u_s(x) = v(x)$. In jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ gilt zudem $u(x) = H(x, s(x), u)$ und $u_s(x) = H(x, s(x), u_s)$. Per Rückwärtsinduktion B1F folgt $u_s = u$. $\boxed{\text{QED}}$

☺ Bellman–Gleichung, Lösungsmethoden und Optimalitätsprinzip sind faszinierende und wichtige Themen der Optimierung. Wir werden dies in Kapitel D fortführen und „analytische“ Werkzeuge zur Verfügung stellen, die die „kombinatorische“ Rückwärtsinduktion wunderbar ergänzen. Beide Sichtweisen und Techniken sind extrem nützlich.

Exotische Lösungen der Bellman–Gleichung



Beispiel B1I: exotische Lösungen der Bellman–Gleichung

Unser Graph Γ habe die aktiven Zustände $x \in X^\circ = \{\, b^k \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ mit Aktionen $A_x = \{a, b\}$ und Belohnungen $r(b^k, a) = 0$ und $r(b^k, b) = r_k$. Terminal sind $\partial X = \{\, b^k a \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ mit Auszahlungen $v(b^k a) = V_k - c$.

Gegeben seien hierzu $0 < r_k < v_k$ in $\mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=0}^\infty v_k < \infty$. Wir setzen $R_k = \sum_{i=k}^\infty r_i$ und $V_k = \sum_{i=k}^\infty v_i$ und wählen $c > V_0 - R_0 > 0$. Die Skizze zeigt $r_k = 2^{-k}$, $R_k = 2^{1-k}$, $v_k = 2^{1-k}$, $V_k = 2^{2-k}$ und $c = -4$.

Exotische Lösungen der Bellman–Gleichung

Übung: Zeigen Sie, dass die abgebildeten Funktionen $u_0, u_1 : X \to \mathbb{R}$ die Bellman–Gleichung lösen: Einerseits die pessimistische Lösung $u_0(b^k) = V_k - c$, andererseits die optimistische Lösung $u_1(b^k) = R_k$.

Hier gilt $u_0 < u_1$; bei **globaler Optimierung** würde man also u_1 wählen. Bei **lokaler Optimierung** erlaubt s_0 keine Möglicheit der Verbesserung.

⚠ In Fällen wie diesem gilt Bellmans Optimalitätsprinzip nicht! Unsere allgemeinen Werkzeuge versagen hier, wir müssen genauer hinschauen.

Bemerkung: Weitere Bellman–Lösungen sind $u(b^k) = R_k + v(b^\infty)$. Die Konstante $v(b^\infty) \in \mathbb{R}$ ist dabei die (fiktive) Auszahlung im „unendlich fernen“ Randpunkt b^∞. Wir vereinbaren hier kurzerhand $v(b^\infty) = 0$.

Das Beispiel B1I ist raffiniert gebaut und notgedrungen nicht-artinsch. Für jeden artinschen Graphen können wir dank Rückwärtsinduktion B1F die Bellman–Gleichung rekursiv lösen, und diese Lösung ist eindeutig!

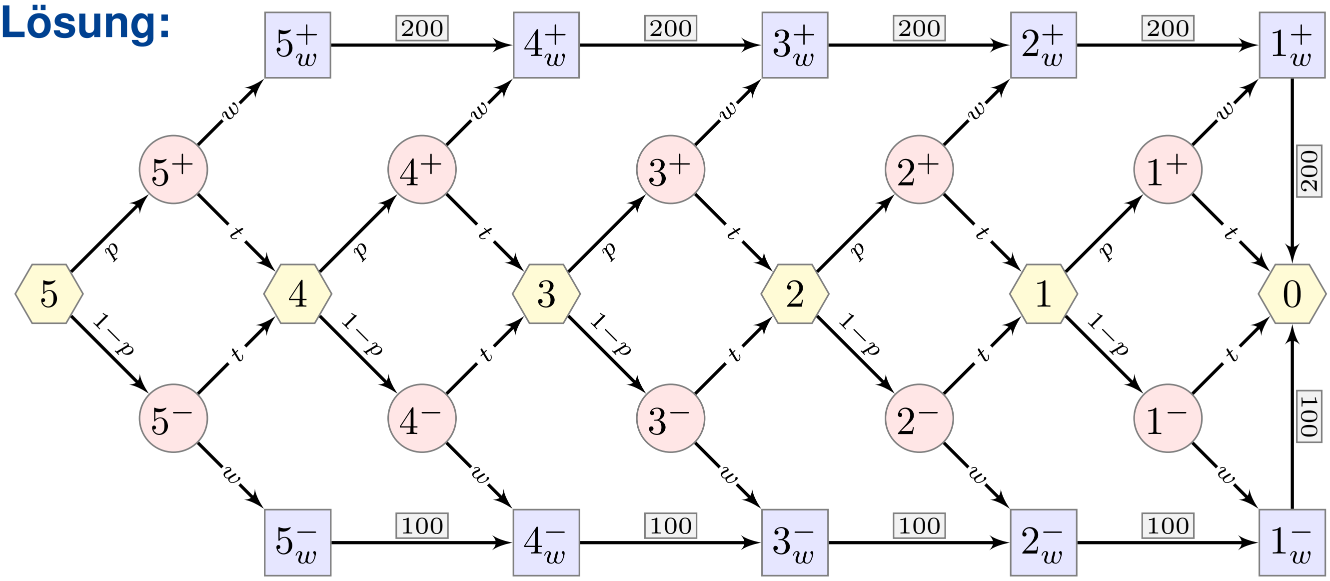
Ist unser artinscher Graph Γ zudem lokal-endlich, so ist diese Lösung tatsächlich optimal dank B1H. In diesen günstigen Fällen geht alles gut. Kapitel D zeigt einen zweiten Ausweg aus unserer Misslage: Diskont!

Optimal entscheiden: Work & Travel

Aufgabe: Ihr Work & Travel endet in 5 Wochen. Zu Beginn jeder Woche erhalten Sie ein Jobangebot: mit Wkt $p = 0.4$ ist es gut für 200€, mit Wkt $1 - p = 0.6$ schlecht für 100€. Wenn Sie es annehmen, bleiben Sie für die restliche Zeit dabei. Andernfalls reisen Sie eine Woche umher.

Formulieren Sie dies als Graph. Wie viele Strategien gibt es? Welche davon sind optimal profitabel? Welches Einkommen erwarten Sie?

Lösung:



Optimal entscheiden: Work & Travel

Sie sehen hier den sorgsamen Übergang von der realen Fragestellung zu einem **mathematischen Modell**. Dies nennen wir **Modellierung**.

Meist gibt es mehrere mögliche Modelle zur gegebenen Fragestellung: Der umgangssprachliche Text ist wunderbar anschaulich und hoffentlich motivierend. Leider ist er in manchen Details noch nicht explizit, sondern appelliert an Weltwissen und Konventionen. Die Übersetzung in einen Graphen ist kurz und zudem präzise: Hier bleiben keine Fragen offen. Zum Beispiel: Reisen und Arbeiten kostet gleich viel Lebensunterhalt. Andernfalls codieren wir Reisekosten und Lebensunterhalt im Graphen.

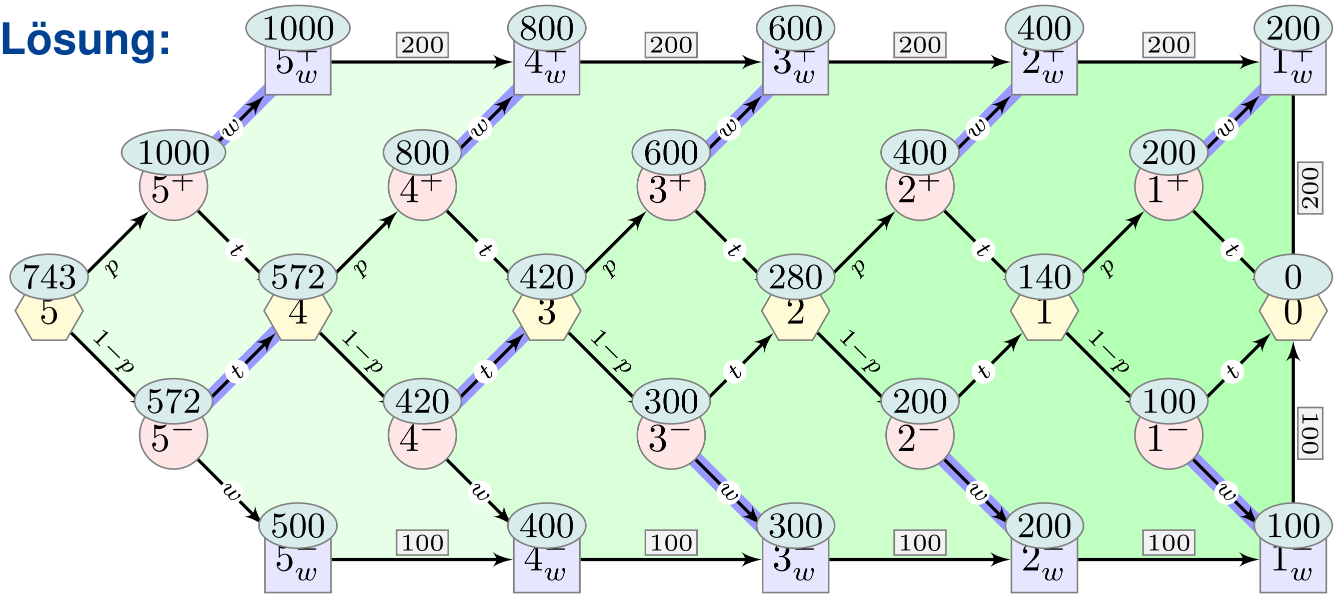
Der hier gezeigte Graph ist ein **Markov–Graph**, denn er enthält neben den Spielzügen als möglichen Aktionen des Spielers realistischerweise auch Zufallszüge, auf die der Spieler keinen Einfluss hat. *That's life.*

In jeder der zehn Entscheidungssituationen $5^\pm, 4^\pm, 3^\pm, 2^\pm, 1^\pm$ muss eine Entscheidung für $w =$ work oder $t =$ travel getroffen werden. Daher gibt es hier $2^{10} = 1024$ Strategien. Die optimale finden Sie durch Rekursion!

🙂 Der Graph ist erfreulich klein; als Baum entfaltet wäre alles breiter.

Optimal entscheiden: Work & Travel

Lösung:



In Worten: Einen guten Job nehmen Sie immer an, einen schlechten nur in den letzten 3 Wochen. Bei ≥ 4 Wochen lohnt sich noch abzuwarten.

Diese quantitative Analyse erfordert vor allem Sorgfalt und Geduld. Die entscheidende Idee ist, vom Ende aus rekursiv vorzugehen.

🙂 Gespielt wird vorwärts, optimiert wird rückwärts: per Induktion!

Optimal entscheiden: Work & Travel

⚠ Wenn Sie diese Art von Problemstellung zum ersten Mal erkunden, sind Sie vermutlich versucht, in der Zeit wie üblich *vorwärts* zu denken.

🙂 Wir lösen das Problem rekursiv, indem wir *rückwärts* argumentieren. Das führt zum Erfolg: Rekursives Denken ist zielgerichtetes Denken!

🙂 Zur Vereinfachung habe ich die Zustände rückwärts nummeriert. Die Rückwärtsinduktion ist somit eine ganz gewöhnliche Induktion.

Das Thema Rekursion ist ebenso wichtig wie sagenumwoben. Dazu gibt es zahlreiche Weisheiten, teils ernst, teils scherzhaft:

Um Rekursion zu verstehen, muss man klein anfangen
und zunächst einmal Rekursion verstehen.

Insbesondere in der Programmierung ist Rekursion allgegenwärtig. Sie ist ein Universalwerkzeug zum Lösen komplexer Probleme.

Recursion makes good programmers better
and bad programmers obvious.

Optimierung durch Rekursion / Induktion

Übung: Probieren Sie einige der anderen 1023 Strategien aus.
Gibt es bessere? gleich gute? Die Sachlage erweist sich als knifflig!
Ist wenigstens die optimale Gewinnerwartung eindeutig / wohldefiniert?
Warum spreche ich dennoch kurzerhand von *der* optimalen Strategie?
Ist diese zudem *teilspielperfekt*, also optimal zu jedem Startzustand?

Übung: Vorwärts gelesen scheinen nach den Entscheidungen $2^{\pm} \mapsto w$ alle folgenden Entscheidungen $\{3^{\pm}, 4^{\pm}\} \to \{w, t\}$ ganz überflüssig!
Warum müssen Sie sich dennoch ebenso genau damit befassen?
Sind diese Züge wichtig für das Spiel? oder für die Analyse?

🙂 Gespielt wird vorwärts, optimiert wird rückwärts: per Induktion!

Die entscheidende Lösungsidee ist hier die **graphische Darstellung**.
Unser kunstvoller Graph hilft uns zunächst einmal zur Anschauung, aber dann auch ganz praktisch zur Organisation unserer Rechnung.

Die Rechnung kann automatisiert werden! **Topologische Sortierung** heißt in der Informatik jede geschickte Reihenfolge der Positionen, so dass jedes Teilproblem nur kleinere nutzt, die bereits berechnet wurden.

Optimierung durch Rekursion / Induktion

Übung: Implementieren Sie die Rechnung in einer Tabellenkalkulation.
Sie finden eine einfache Lösung in der Datei `Work-and-Travel.ods`.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Work and Travel		Week -5		Week -4		Week -3		Week -2		Week -1
2			1000,00		800,00		600,00		400,00		200,00
3	0,400	1000,00	0,400	800,00	0,400	600,00	0,400	400,00	0,400	200,00	
4	743,20	maximize	572,00	maximize	420,00	maximize	280,00	maximize	140,00	maximize	0,00
5	0,600	572,00	0,600	420,00	0,600	300,00	0,600	200,00	0,600	100,00	
6			500,00		400,00		300,00		200,00		100,00

Wegen $\delta = 1$ gibt es im Beispiel keinen Diskont / Wertverlust / Inflation.
Wir haben hier die Auszahlungen auf einige Kanten verteilt; alternativ können wir $n_w^{\pm}$ zu terminalen Zuständen mit Auszahlungen machen.

Übung: Variieren Sie die Konstanten, berechnen Sie weitere Beispiele.
Durch solche *Erfahrung* entwickeln Sie ein *Gefühl* für das Problem.

Verfeinerungen: (a) Mit Wkt $q^{\pm}$ wird Ihnen zu Wochenbeginn gekündigt.
(b) Reisen / Arbeiten kostet Geld, zur Vereinfachung einen festen Betrag.
(c) Sie benötigen mindestens 400€, ansonsten maximieren Sie.
Das erweitert den Graphen, die Lösungsmethode bleibt gleich.

Optimierung durch Rekursion / Induktion

☺ Der Mensch ist fähig, meist jedoch widerwillig, komplexe logische Zusammenhänge zu durchdringen, insbesondere Rekursion / Induktion.

Thinking fast and slow von Daniel Kahneman, Wirtschaftsnobelpreis 2002, unterscheidet zwei verschiedene Arbeitsweisen unseres Gehirns:

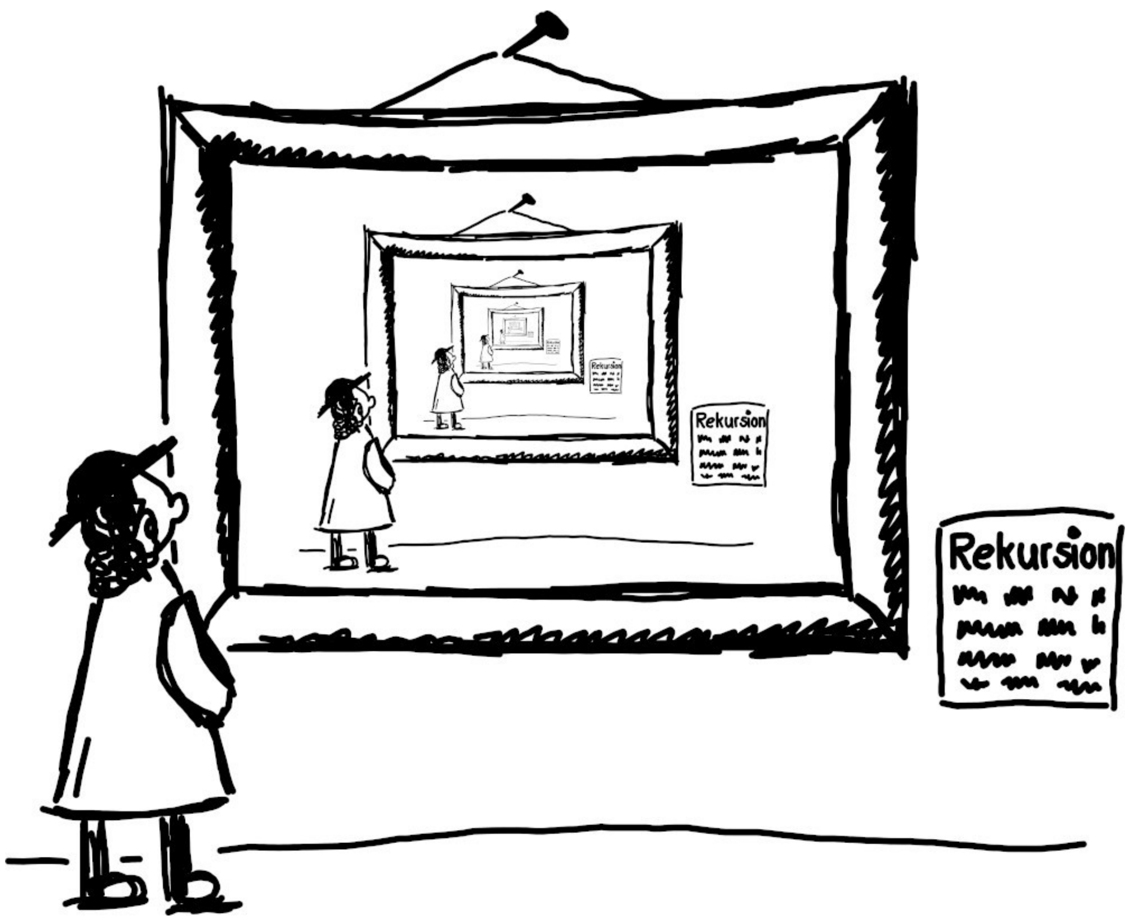
1. Schnell, automatisch, immer aktiv, emotional, stereotyp, unbewusst
2. Langsam, anstrengend, selten aktiv, logisch, berechnend, bewusst

Unsere mentalen Fähigkeiten sind Ergebnis einer langen Evolution, und unter diesen Bedingungen eine näherungsweise Optimierung: Viele Entscheidungen müssen schnell und energiesparend getroffen werden; nur wenige verlangen eine genauere, aufwändigere Analyse.

Sie vertrauen oft Ihrem Instinkt, Bauchgefühl oder Erfahrung, insb. wenn Sie keine genaue Information haben oder keine Zeit, sie auszuwerten. Ihr Verstand braucht wesentlich länger, um zu einem Urteil zu kommen. Das lohnt sich, wenn Sie die Muße haben und das Ziel wichtig genug ist.

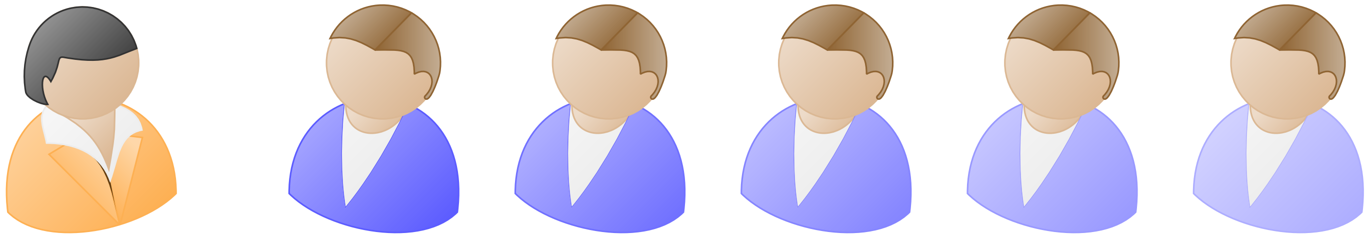
In Ihrem Mathematikstudium lernen Sie diese zweite Vorgehensweise. Dies hilft zu umsichtiger Analyse und vorausschauendem Handeln.

Optimierung durch Rekursion / Induktion



Optimale Partnerwahl: Looking for Mr. Right… or Mr. Almost

Marriage problem: When to stop dating and start getting married?



Alice $\quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n$

Alice begegnet im Laufe ihres Lebens n potentiellen Ehemännern. Bei Kandidat $k = 1, 2, 3, \dots, n$ stellt sie die Eignung $X_k \in [0, 1]$ fest.

Er verliebt sich in die bezaubernde Alice, sie kann ihn nun heiraten oder zurückweisen. Diese Entscheidung ist in jedem Falle endgültig.

Aufgabe: Wie anspruchsvoll soll Alice sein? Was ist optimal? Welche Eignung ihres Ehepartners kann Alice maximal erwarten?

Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig und gleichverteilt. (Übung für Hartgesottene: Andere Verteilungen sind ebenso möglich.)

⚠ Alice ist vollkommen rational und egoistisch. Warum auch nicht?

Optimale Partnerwahl: Looking for Mr. Right… or Mr. Almost

Lösung: Alice ermittelt die optimale Strategie durch Rekursion wie folgt: Sie heiratet den letzten Kandidaten n auf jeden Fall. Erwartete Eignung:

$$\mu_n = \mathbf{E}(X_n) = {}^1\!/_2$$

Sie heiratet Kandidat $n-1$, falls $X_{n-1} > \mu_n$. Erwartete Eignung:

$$\mu_{n-1} = \mathbf{E}(\max(X_{n-1}, \mu_n)) = {}^1\!/_2 \cdot {}^1\!/_2 + {}^1\!/_2 \cdot {}^3\!/_4 = {}^5\!/_8$$

Sie heiratet Kandidat $n-2$, falls $X_{n-2} > \mu_{n-1}$. Erwartete Eignung:

$$\mu_{n-2} = \mathbf{E}(\max(X_{n-2}, \mu_{n-1})) = {}^5\!/_8 \cdot {}^5\!/_8 + {}^3\!/_8 \cdot {}^{13}\!/_{16} = {}^{89}\!/_{128}$$

☺ Alice' Ansprüche steigen, je mehr Kandidaten noch warten. Ihre Ansprüche sinken, je weniger Kandidaten noch bleiben.

Das ist anschaulich klar und entspricht der Alltagserfahrung. Nun können wir es begründen und genauer quantifizieren.

Vielleicht klingt das alles recht herzlos und übertrieben formal, aber so ganz unrealistisch ist es dann auch wieder nicht!

Für den folgenden Satz kehren wir die einfach Nummerierung um:
Die „Rückwärtsinduktion“ ist dann eine ganz normale Induktion!

Satz B2A: optimale Partnerwahl: Looking for Mr. Right

Alice optimiert die Partnerwahl wie folgt. Sie setzt $a_0 = 0$ und rekursiv

$$a_{n+1} = (1 + a_n^2)/2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Warten noch genau $n + 1$ Kandidaten, so heiratet Alice den nächsten Kandidaten genau dann, wenn seine Eignung größer als a_n ist.

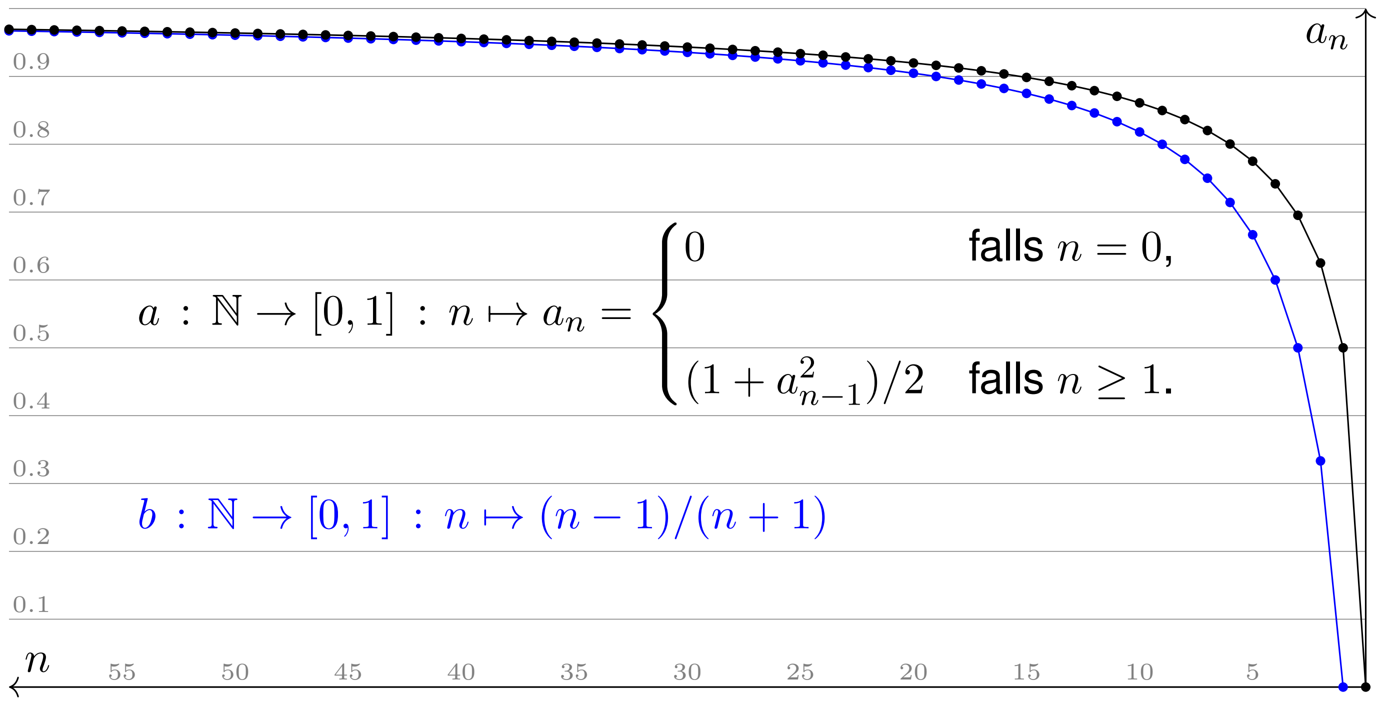
Mit dieser optimalen Strategie erwartet Alice die Eignung a_{n+1}.
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wächst streng monoton und konvergiert gegen 1.

Übung: Beweisen Sie diesen Satz per Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

🙂 Die ungefähre Form der Kurve $n \mapsto a_n$ ist anschaulich plausibel. Die genauen Werte können wir wie oben berechnen – und beweisen.

🙂 Steht diese Aussage einmal vor Ihnen, so ist der Nachweis leicht: Als bewährtes Standardverfahren greift hier die vollständige Induktion!

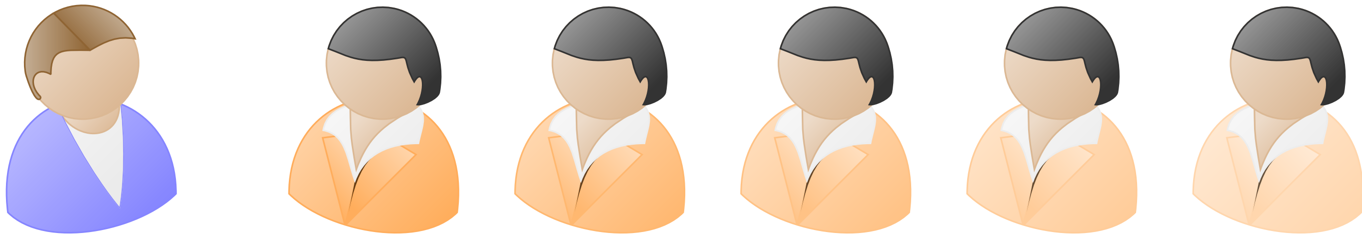
Alice' Erwartung bzw. Anspruch a_n als Funktion der Kandidatenzahl n:



Fun fact: b_n ist die Erwartung des *zweithöchsten* Wertes in $X_1, \ldots, X_n$.
Alice optimiert erfolgreich, doch es bleibt etwas Wehmut: Eines Tages begegnet ihr Mr. Right, doch sie ist schon mit Mr. Almost verheiratet.

Optimales Stoppen: das Sekretärinnen-Problem

Secretary problem: When to stop interviewing and start hiring?



Bob $\quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n$

Bob stellt eine Sekretärin (w/m/d) ein. Dazu sind n Bewerberinnen eingeladen, in zufälliger Reihenfolge. Bob sucht die *beste* Kandidatin. Im Interview mit Kandidatin k kann er feststellen, ob sie besser ist als alle vorigen. Er kann sie sofort einstellen oder ihr definitiv absagen.

Aufgabe: Wie soll Bob vorgehen? Wie maximiert er seine Trefferwkt?

Die 37%–Regel: Interviewe zunächst $\lceil n/\mathrm{e} \rceil$ Kandidatinnen mit Absage; dann wähle die nächste Kandidatin, die besser ist als alle vorigen. Das klingt verrückt? Es ist nachweislich die beste Strategie! Abwägung zwischen Exploration vs Exploitation.

Optimales Stoppen: das Sekretärinnen-Problem

Problemstellung: Sie bekommen n Angebote zu Zeiten $t = 1, 2, \dots, n$. Wir setzen $X_t{=}1$, falls Angebot t besser ist als alle vorigen, sonst $X_t{=}0$.

Sie können solch ein Angebot entweder annehmen ($s =$ select & stop) oder dieses Angebot ein für alle Mal ablehnen ($r =$ reject & resume).

Sie wollen unter allen Angeboten das *beste* auswählen, also das letzte Angebot t mit $X_t = 1$ annehmen.

Beispiele: Eine optimale Online-Auktion mit sofortiger Zu- oder Absage. Den besten Gebrauchtwagen kaufen. Die beste Tankstelle entlang einer langen Straße auswählen. Die beste Sekretärin einstellen. Heiraten?

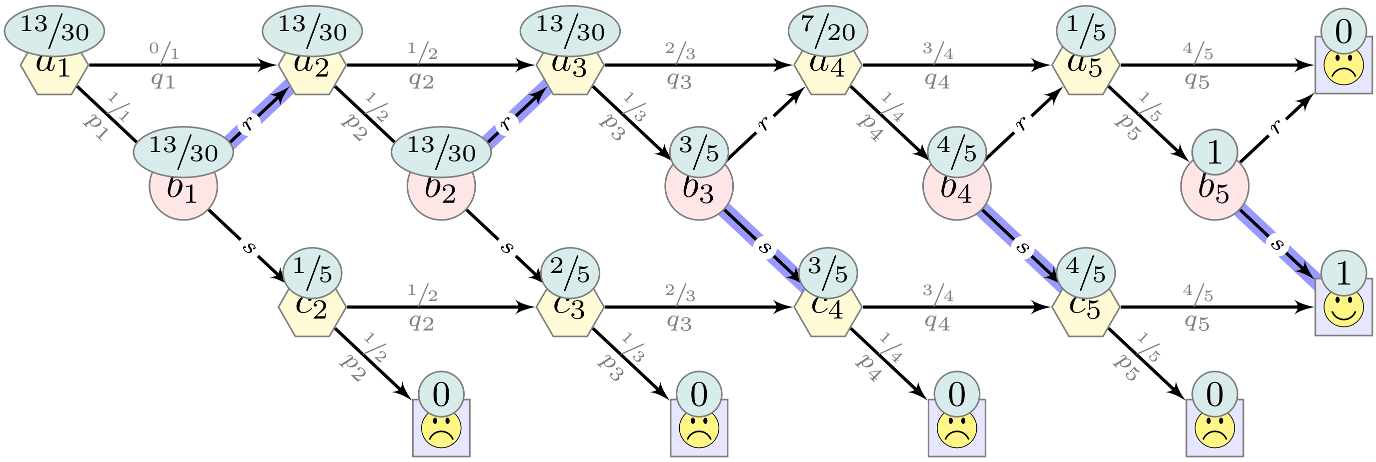
(a) Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots, X_n : \Omega \to \{0, 1\}$ seien unabhängig mit den Wkten $\mathbf{P}(X_t{=}1) = p_t$ und $\mathbf{P}(X_t{=}0) = q_t = 1 - p_t$.

(b) Speziell betrachten wir n unterschiedlich gute Angebote in zufälliger Reihenfolge, mit Gleichverteilung der $n!$ Anordnungen, also $p_t = 1/t$.

Aufgabe: (1) Formulieren Sie dieses Spiel als einen Markov–Graphen. (2) Was ist die beste Strategie? (3) Was ist die optimale Erfolgswkt?

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

Aufgabe: Untersuchen Sie den Fall $n = 5$ mit $p_k = 1/k$ und $q_k = 1 - p_k$.



Aufgabe: Wie gelingt dies allgemein? Beweisen Sie folgenden Satz:

Satz B2B: *Sum the odds to one and stop*, Bruss 2000

Sei $s \in \{1, \dots, n\}$ der größte Index mit $R_s := \sum_{k=s}^{n} p_k/q_k \ge 1$. Dann ist folgende Strategie optimal: Wähle das erste Angebot $k \ge s$ mit $X_k = 1$.

Die optimale Gewinnwkt ist dabei gleich $R_s Q_s$ mit $Q_s = q_s \cdots q_n$.

Die 37%–Regel: Für $p_k = 1/k$ gilt $s \gtrapprox n/\mathrm{e}$ und $R_s Q_s \gtrapprox 1/\mathrm{e} \gtrapprox 0.367$.

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

☺ Dieser Satz ist wunderbar effizient und sein Beweis ebenso elegant. Der Algorithmus stammt aus dem wunderschönen Artikel von F.T. Bruss: *Sum the odds to one and stop.* Ann. of Prob. 28 (2000) 1384–1391.

Beweis: Wir berechnen die Gewinnwkt w in jedem Zustand a_k, b_k, c_k bei optimaler Strategie. Wie immer gehen wir hierzu rekursiv vor:

Im Zustand c_k ist die Gewinnwkt offensichtlich $w(c_k) = Q_k := q_k \cdots q_n$.
Wir setzen $R_k := p_k/q_k + \dots + p_n/q_n$ und finden s mit $R_s \ge 1 > R_{s+1}$.
Terminal, für $k = n + 1$, gilt $w(c_k) = 1 = Q_k$ und $w(a_k) = 0 = R_k Q_k$.

(1) Im Falle $R_k < 1$ gilt $w(a_k) = R_k Q_k$ und $w(a_{k-1}) = R_{k-1} Q_{k-1}$:
Im Zustand b_{k-1} wählen wir zwischen $w(a_k) = R_k Q_k$ und $w(c_k) = Q_k$.
Da wir $R_k < 1$ voraussetzen, entscheiden wir uns optimal für c_k.
Daraufhin gilt $w(a_{k-1}) = p_{k-1} Q_k + q_{k-1} R_k Q_k = R_{k-1} Q_{k-1}$.

(2) Im Falle $R_k \ge 1$ hingegen entscheiden wir uns optimal für a_k.
(Für $R_k = 1$ herrscht Indifferenz, die Wahl c_k wäre genauso gut.)
Die Gewinnwkt ist dann $w(a_{k-1}) = w(a_k)$, wie oben gezeigt.
Für alle $k = 1, \dots, s$ gilt daher $w(a_k) = w(a_s) = R_s Q_s$. $\boxed{\text{QED}}$

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

Die optimale Stoppzeit s_n und die Gewinnwkt w_n für $n = 1, \dots, 40$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s_n	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
w_n	1	$1/2$	$1/2$	$11/24$	$13/30$	$77/180$	$29/70$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\approx$	1.000	0.500	0.500	0.458	0.433	0.428	0.414	0.410	0.406	0.399

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
s_n	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8
w_n	0.398	0.396	0.392	0.392	0.389	0.388	0.387	0.385	0.385	0.384

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
s_n	9	9	9	10	10	10	11	11	11	12
w_n	0.383	0.383	0.382	0.381	0.381	0.380	0.380	0.379	0.379	0.379

n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
s_n	12	13	13	13	14	14	14	15	15	16
w_n	0.378	0.378	0.378	0.377	0.377	0.377	0.376	0.376	0.376	0.376

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

Übung: Wählen Sie einen kleinen Wert n und berechnen Sie das Paar (s_n, w_n) von Hand. Vorbild: Der Fall $n = 5$ ist oben detailliert ausgeführt. Kontrolle: Für $n \le 7$ finden Sie den exakten Wert w_n in obiger Tabelle. Für Werte $n \le 40$ finden Sie zudem eine numerische Näherung.

Aufgabe: Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung von (s_n, w_n). Kontrolle: Vergleichen Sie Ihre Werte mit der obigen Tabelle.

Lösung: In Python sieht eine mögliche Lösung wie folgt aus:

```python
def bruss(n):
    k = n; r = 0
    while r < 1: k -= 1; r += 1/k
    return k+1, r*k/n
```

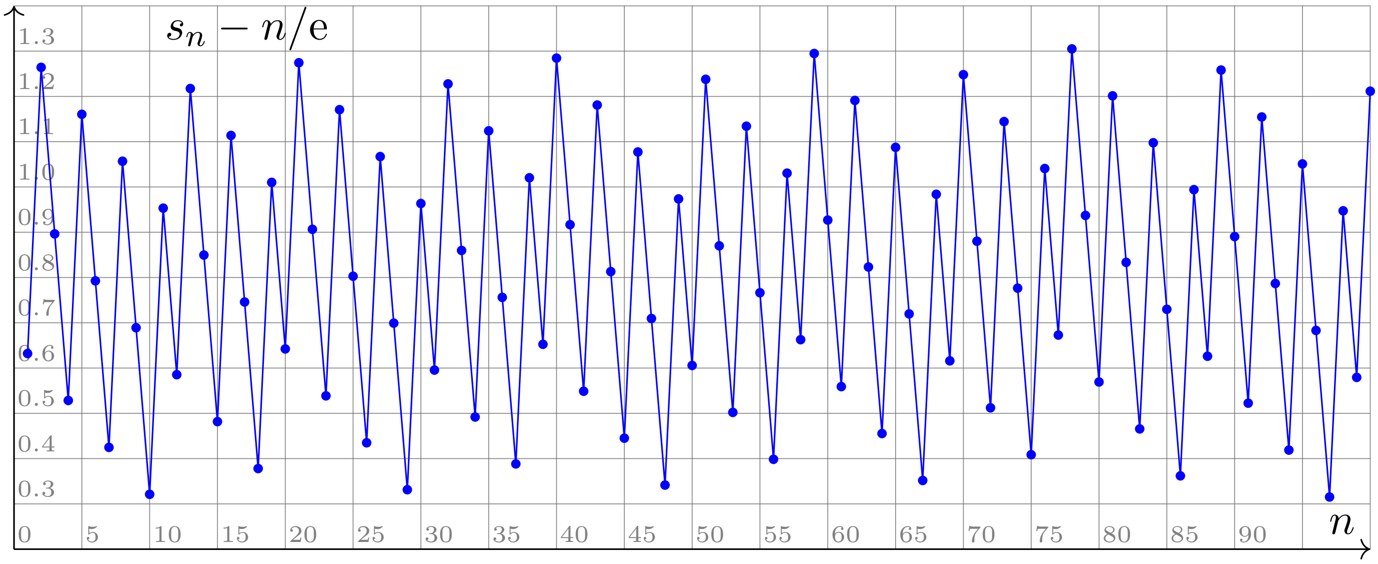
Der Aufruf `bruss(5)` liefert als Ergebnis das Wertepaar `3, 0.433`. Auf diese Weise wurden die Werte für die obige Tabelle berechnet.

Die Korrektheit dieser Rechnung verdanken wir dem obigen Satz: Grundlagen / Theorie und Programmierung / Anwendung ergänzen sich!

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

Aufgabe: Vergleichen Sie die Stoppzeit s_n mit der Faustformel n/e.

Lösung: Die Berechnung übernimmt bequem unser obiges Programm. Die folgende Graphik zeigt die Differenz $s_n - n/\mathrm{e}$ für $n = 1, \dots, 100$:



Somit gilt $s_n = \lceil n/\mathrm{e} \rceil$ oder $s_n = \lceil n/\mathrm{e} \rceil + 1$, zumindest für alle $n \le 100$. Das bietet eine einfache, doch recht genaue Näherungsformel für s_n.

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

☺ Wenn Sie die logische Entwicklung dieser Aufgabe nachvollziehen, werden Sie ein interessantes Wechselspiel erkennen und verstehen:

- Wir beginnen mit einem **konkreten Beispiel**, nämlich der Analyse des Spiels für den Fall $n = 5$.
- Dadurch erkennen wir das **allgemeine Muster** und können dies anschließend als Satz B2B beweisen.
- Mit dem so gewonnenen Algorithmus können wir **weitere Beispiele** lösen und mehr Daten erschließen.
- Daran beobachten wir ein **genaueres Muster**. Dies wollen wir nun als Satz B2C beweisen!

Dieses Wechselspiel von theoretischen Grundlagen und praktischen Anwendungen, von mathematischen Sätze und numerischen Experimenten, ist durchaus typisch und überaus erfolgreich.

☺ So können wir uns langsam auf unbekanntes Terrain vortasten, Muster erkennen, Vermutungen formulieren und Ergebnisse beweisen.

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

Zu $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ suchen wir die Stoppzeit s_n. Unsere numerischen Experimente lassen uns die folgende einfache Regel vermuten:

Satz B2C: die 37%–Regel

Das Sekretärinnen-Problem wird durch folgende Faustformel gelöst:

(1) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ gilt $s_n = \lceil n/\mathrm{e} \rceil$ oder $s_n = \lceil n/\mathrm{e} \rceil + 1$, kurzum:

$$\boxed{s_n \;\approx\; n/\mathrm{e}}$$

(2) Die Gewinnerwkt ist $w_n = R_s Q_s$ mit $R_s \gtrapprox 1$ und $Q_s = (s-1)/n$, also:

$$\boxed{w_n \;\approx\; 1/\mathrm{e}}$$

Für $n \to \infty$ gilt $s_n/n \to 1/\mathrm{e}$ und $w_n \to 1/\mathrm{e}$. Als numerische Werte haben wir $\mathrm{e} \approx 2.718$ und $1/\mathrm{e} \approx 0.368$, daher der Name „37%–Regel“.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Näherungen. *Tipp:* Approximieren Sie hierzu die Summe durch ein Integral, $\sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k} \gtrapprox \int_s^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(n/s)$.

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

Lösung: (1) Vorgegeben ist die natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$.
Wir suchen die Lösung $s \in \{1, \dots, n\}$ zu folgender Ungleichung:

$$(*) \qquad \sum_{k=s+1}^{n} \frac{1}{k-1} \;<\; 1 \;\le\; \sum_{k=s}^{n} \frac{1}{k-1}$$

Der Vergleich von Summe und Integral liefert hier:

$$\sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k} \;\ge\; \int_{x=s}^{n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; \ln\Big(\frac{n}{s}\Big)$$

$$\sum_{k=s-1}^{n-1} \frac{1}{k} \;\le\; \int_{x=s-2}^{n-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; \ln\Big(\frac{n-1}{s-2}\Big)$$

Wir setzen dazu stillschweigend $s \ge 3$ voraus, also $n \ge 5$.
Die kleinen Fälle $n \le 4$ lösen wir direkt, wie oben gezeigt.

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

Wir nutzen nun die Doppelungleichung (∗) und schließen:

$$\ln\Big(\frac{n}{s}\Big) < 1 \quad\Longrightarrow\quad s > n/\mathrm{e}$$

$$\ln\Big(\frac{n-1}{s-2}\Big) \ge 1 \quad\Longrightarrow\quad s \le n/\mathrm{e} + 2 - 1/\mathrm{e}$$

Da s eine ganze Zahl ist, folgt durch Auf/Abrunden:

$$\lceil n/\mathrm{e}\rceil \le s \le \lfloor n/\mathrm{e} + 2 - 1/\mathrm{e}\rfloor$$

Das bedeutet $s = \lceil n/\mathrm{e}\rceil$ oder $s = \lceil n/\mathrm{e}\rceil + 1$, oder zusammengefasst:

$$\boxed{s \in \lceil n/\mathrm{e}\rceil + \{0, 1\}}$$

Für große n ist die kleine verbleibende Unsicherheit $\{0, 1\}$ unerheblich. Für kleine n können wir mühelos eine Tabelle anlegen, wie oben erklärt. Allgemeiner Satz und numerische Rechnung ergänzen sich wunderbar!

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

Damit ist das Sekretärinnen-Problem gelöst, theoretisch und praktisch. Es ist ein Paradebeispiel für die rekursive Lösung komplexer Probleme. In der schön konkreten Geschichte steckt abstrakt allgemeine Wahrheit. Solche Modelle werden tatsächlich genutzt für Online-Auktionen u.ä.

Das ist nur die Spitze des Eisbergs, damit beginnt erst das Abenteuer! Fragen des **optimalen Stoppens** finden sich nahezu überall in der Stochastik, insbesondere der Ökonomik und der Finanzmathematik, zum Beispiel beim Börsenhandel mit Aktien oder Optionen.

Die Frage lautet allgemein: Wie wählen wir den optimalen Zeitpunkt für eine Aktion? Unser Ziel ist es, den erwarteten Gewinn zu maximieren oder die erwarteten Kosten zu minimieren. Viele solche Probleme können rekursiv gelöst werden, so wie in unserem Beispiel.

Diese Knobelaufgabe ist also nicht nur lehrreich für den Themenkreis Induktion / Rekursion / Rückwärtsinduktion, sondern zugleich ein erstes Anwendungsbeispiel, ein motivierender Startpunkt für die Optimierung, hier einer Stoppzeit, die weitreichende Anwendungen erschließt.

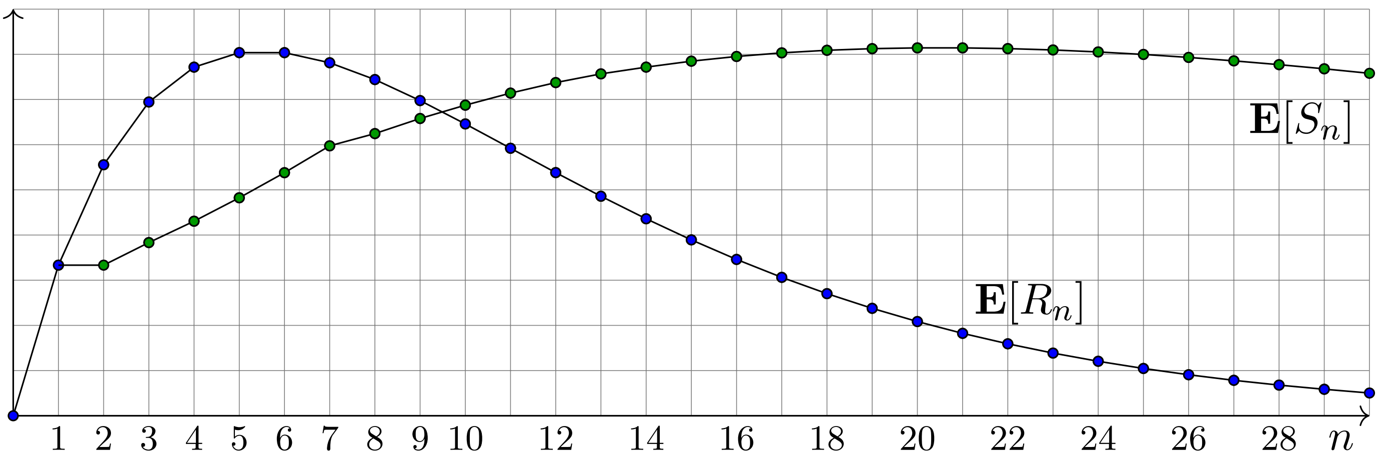
Stoppzeiten: Würfeln bis die Eins kommt

Beim Würfeln werden Augenzahlen addiert bis der Spieler aufhört; würfelt er jedoch eine Eins, so endet sein Spiel mit Totalverlust/Ruin.

Die Spielleiterin zahlt die erreichte Augensumme in Euro, verlangt aber $10€$ Einsatz. Wie spielen Sie optimal? Können Sie Profit generieren?

Aufgabe: Sie nutzen die Strategie R_n: „Spiele n Runden (oder Ruin)."
(1) Welchen Gewinn erwarten Sie? Welche n maximieren den Gewinn?

Lösung: (1) Bei n Würfen erwarten wir den Gewinn $\mathbf{E}[R_n] = 4n(\frac{5}{6})^n$.
Bei $n \in \{5, 6\}$ erreichen wir das Maximum $4 \cdot 5(\frac{5}{6})^5 = 4 \cdot 6(\frac{5}{6})^6 \approx 8.038$.



Stoppzeiten: Würfeln bis die Eins kommt

Die Erwartung $\mathbf{E}[R_5] \approx 8$ ist noch zu gering. Gibt es bessere Strategien? Angenommen, im laufenden Spiel beträgt Ihre aktuelle Augensumme s. Sollten Sie noch einen weiteren Zug wagen oder besser jetzt aufhören?

Aufgabe: (2) Bis zu welcher Augensumme s lohnt sich ein weiterer Zug?

Lösung: (2) Nach einem weiteren Zug ist die erwartete Augensumme

$$e(s) = \frac{0 + (s{+}2) + (s{+}3) + (s{+}4) + (s{+}5) + (s{+}6)}{6} = \frac{5s + 20}{6}$$

Der nächste Zug ist genau dann profitabel (im Mittel), wenn $e(s) > s$ gilt:

$$s \stackrel{!}{<} \frac{5s + 20}{6} \iff s < 20$$

Das legt folgende Strategie nahe: Sie würfeln bis Sie Augensumme ≥ 20 erreichen (oder aber eine Eins zuvor Ihr Spiel mit Totalverlust ruiniert.)

Ist diese flexible Strategie wirklich besser als R_n mit fest 5 Runden? Können Sie damit sogar die $10€$ Einsatz übertreffen und profitieren? Dazu müssen wir die Erwartungswerte berechnen und vergleichen!

Stoppzeiten: Würfeln bis die Eins kommt

Die Strategie S_n lautet: „Spiele bis mindestens n Punkte (oder Ruin).“ Anders als bei R_n nutzen Sie Informationen des bisherigen Verlaufs!

Aufgabe: (3) Welches Ergebnis liefert die Strategie S_n mit welcher Wkt? (4) Welche der Strategien in $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erwartet den höchsten Gewinn?

Lösung: (3) Sei $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$. Die Strategie S_n liefert die Ergebnisse $0, n, n{+}1, n{+}2, n{+}3, n{+}4, n{+}5$ mit Wkten $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n \in [0,1]$.

Für $n = 1$ sind diese Wkten offensichtlich $1/6, 0, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6$.

Rekursiv gilt dann $a_{n+1} = a_n + b_n/6$, $b_{n+1} = c_n$, $c_{n+1} = d_n + b_n/6$, $d_{n+1} = e_n + b_n/6$, $e_{n+1} = f_n + b_n/6$, $f_{n+1} = g_n + b_n/6$, $g_{n+1} = b_n/6$.

Mit einer Tabellenkalkulation erhalten wir mühelos die folgenden Werte; Sie finden dieses Beispiel unter `eiserm.de/lehre/HM3/Wuerfeln.ods`.

(4) Der erwartete Gewinn für die Strategie S_n ist gegeben durch $\mathbf{E}[S_n] = nb_n + (n{+}1)c_n + (n{+}2)d_n + (n{+}3)e_n + (n{+}4)f_n + (n{+}5)g_n$.

Das Maximum $\mathbf{E}[S_{20}] = \mathbf{E}[S_{21}] \approx 8.142$ liegt nur ein klein Wenig höher als zuvor $\mathbf{E}[R_5] = \mathbf{E}[R_6] \approx 8.038$ bei fester Rundenzahl. Immerhin! Für 10€ Einsatz genügt das nicht. Können Sie mehr rausholen?

Stoppzeiten: Würfeln bis die Eins kommt

S_n	0	n	$n{+}1$	$n{+}2$	$n{+}3$	$n{+}4$	$n{+}5$	$\mathbf{E}[S_n]$
1	.167	.000	.167	.167	.167	.167	.167	3.333
2	.167	.167	.167	.167	.167	.167	.000	3.333
3	.194	.167	.194	.194	.194	.028	.028	3.833
4	.222	.194	.222	.222	.056	.056	.028	4.306
5	.255	.222	.255	.088	.088	.060	.032	4.824
6	.292	.255	.125	.125	.097	.069	.037	5.380
7	.334	.125	.167	.140	.112	.079	.042	5.974
8	.355	.167	.160	.133	.100	.063	.021	6.245
9	.383	.160	.161	.128	.091	.049	.028	6.579
10	.410	.161	.155	.118	.075	.055	.027	6.874
11	.436	.155	.145	.102	.081	.054	.027	7.141
12	.462	.145	.128	.107	.079	.053	.026	7.374
13	.486	.128	.131	.103	.077	.050	.024	7.567
14	.508	.131	.125	.098	.071	.045	.021	7.716
15	.530	.125	.120	.093	.067	.043	.022	7.848
16	.550	.120	.114	.088	.064	.043	.021	7.952
17	.570	.114	.108	.084	.063	.041	.020	8.032
18	.589	.108	.103	.082	.060	.039	.019	8.089
19	.607	.103	.100	.078	.057	.037	.018	8.125
20	.625	.100	.095	.074	.054	.035	.017	8.142
21	.641	.095	.091	.071	.052	.034	.017	8.142
22	.657	.091	.087	.068	.050	.032	.016	8.126
23	.672	.087	.083	.065	.048	.031	.015	8.096
24	.687	.083	.079	.062	.045	.030	.014	8.052
25	.700	.079	.076	.059	.043	.028	.014	7.997

S_n	0	n	$n{+}1$	$n{+}2$	$n{+}3$	$n{+}4$	$n{+}5$	$\mathbf{E}[S_n]$
26	.714	.076	.072	.057	.041	.027	.013	7.931
27	.726	.072	.069	.054	.040	.026	.013	7.855
28	.738	.069	.066	.052	.038	.025	.012	7.771
29	.750	.066	.063	.049	.036	.024	.012	7.679
30	.761	.063	.060	.047	.035	.023	.011	7.579
31	.771	.060	.058	.045	.033	.022	.011	7.474
32	.781	.058	.055	.043	.032	.021	.010	7.363
33	.791	.055	.053	.041	.030	.020	.010	7.248
34	.800	.053	.050	.039	.029	.019	.009	7.128
35	.809	.050	.048	.038	.028	.018	.009	7.005
36	.818	.048	.046	.036	.026	.017	.008	6.878
37	.826	.046	.044	.034	.025	.016	.008	6.750
38	.833	.044	.042	.033	.024	.016	.008	6.619
39	.841	.042	.040	.031	.023	.015	.007	6.487
40	.848	.040	.039	.030	.022	.014	.007	6.353
41	.854	.039	.037	.029	.021	.014	.007	6.219
42	.861	.037	.035	.028	.020	.013	.006	6.084
43	.867	.035	.034	.026	.019	.013	.006	5.949
44	.873	.034	.032	.025	.018	.012	.006	5.814
45	.878	.032	.031	.024	.018	.011	.006	5.680
46	.884	.031	.029	.023	.017	.011	.005	5.546
47	.889	.029	.028	.022	.016	.010	.005	5.412
48	.894	.028	.027	.021	.015	.010	.005	5.280
49	.898	.027	.026	.020	.015	.010	.005	5.149
50	.903	.026	.025	.019	.014	.009	.004	5.019

Das Runde muss ins Eckige: Bayes beim Tischkicker

Angenommen beim Tischkicker bis 10 zwischen den gleich starken Alice und Bob fallen die Tore zufällig (50 : 50) und unabhängig voneinander.

Aufgabe: Wie stehen die Gewinnchancen bei 9 : 8? bei 4 : 7?

Lösung: Wahrscheinlichkeitstabelle für den Sieg von Alice beim Stand $a : b$.
Am oberen und linken Rand ist das Spiel beendet und die Wkt ist entweder 0 oder 1.
Im Inneren ist jeder Eintrag der Mittelwert aus dem linken und dem oberen Nachbarn.

$a : b$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
10		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
9	0.000	0.500	0.750	0.875	0.938	0.969	0.984	0.992	0.996	0.998	0.999
8	0.000	0.250	0.500	0.688	0.813	0.891	0.938	0.965	0.980	0.989	0.994
7	0.000	0.125	0.313	0.500	0.656	0.773	0.855	0.910	0.945	0.967	0.981
6	0.000	0.063	0.188	0.344	0.500	0.637	0.746	0.828	0.887	0.927	0.954
5	0.000	0.031	0.109	0.227	0.363	0.500	0.623	0.726	0.806	0.867	0.910
4	0.000	0.016	0.063	0.145	0.254	0.377	0.500	0.613	0.709	0.788	0.849
3	0.000	0.008	0.035	0.090	0.172	0.274	0.387	0.500	0.605	0.696	0.773
2	0.000	0.004	0.020	0.055	0.113	0.194	0.291	0.395	0.500	0.598	0.685
1	0.000	0.002	0.011	0.033	0.073	0.133	0.212	0.304	0.402	0.500	0.593
0	0.000	0.001	0.006	0.019	0.046	0.090	0.151	0.227	0.315	0.407	0.500

Das Runde muss ins Eckige: Bayes beim Tischkicker

Ausführung: Wie kommt diese Rechnung zustande? Ganz einfach durch Rückwärtsinduktion! Beim Stand von $a : b$ gibt es zwei mögliche Fortgänge: Entweder es trifft Alice oder es trifft Bob. Wir entwickeln unsere Rechnung übersichtlich in einer Tabelle. Sei $A[a{:}b]$ das Ereignis „Alice gewinnt nach Stand $a : b$“. Dank dem für die totale Wahrscheinlichkeit gilt:

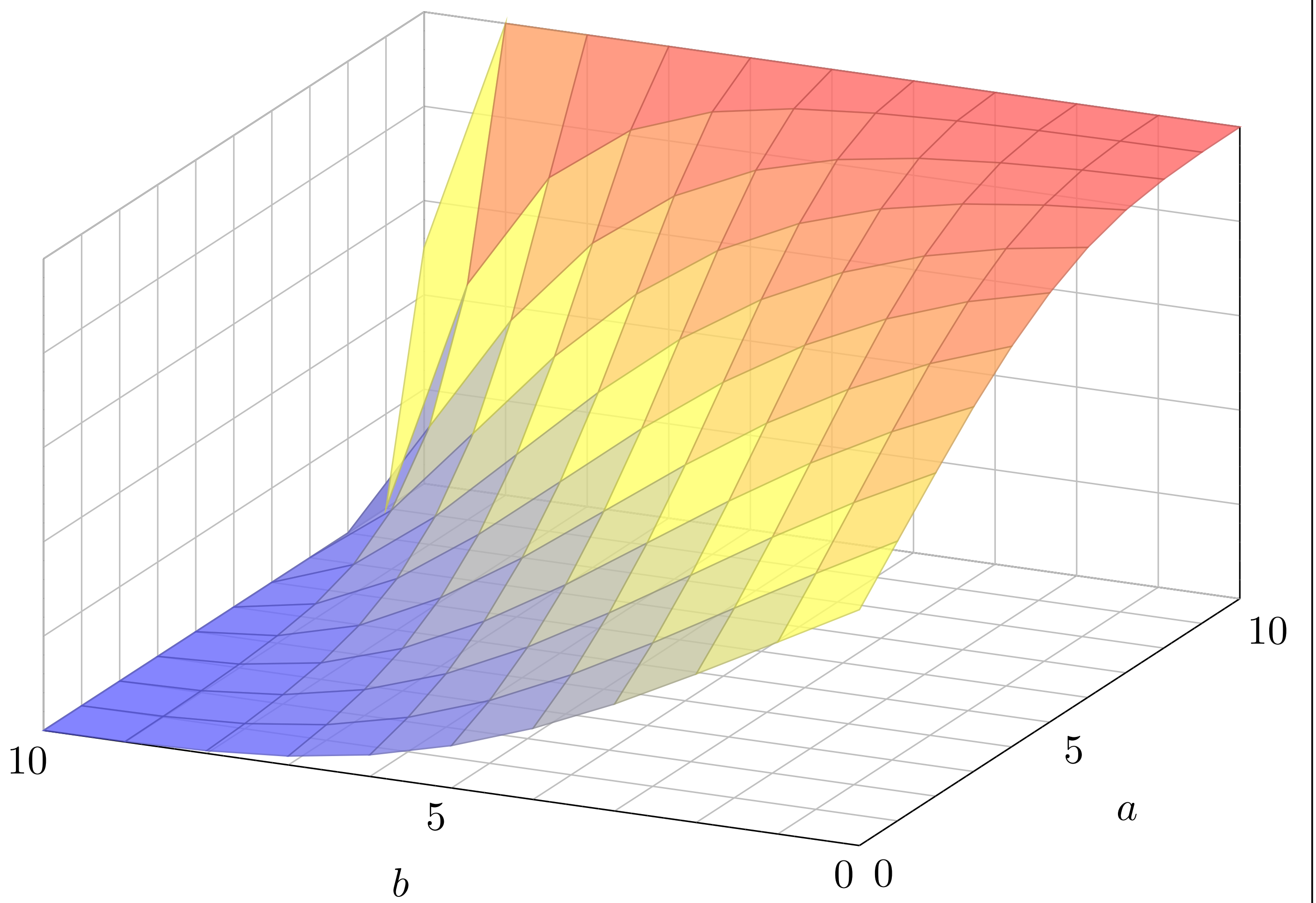
$$\begin{aligned} \mathbf{P}\big(A[a{:}b]\big) &= \mathbf{P}\big(A[a{:}b] \mid \text{Alice trifft}\big) \cdot \mathbf{P}\big(\text{Alice trifft}\big) + \mathbf{P}\big(A[a{:}b] \mid \text{Bob trifft}\big) \cdot \mathbf{P}\big(\text{Bob trifft}\big) \\ &= \mathbf{P}\big(A[a+1{:}b]\big) \cdot \mathbf{P}\big(\text{Alice trifft}\big) + \mathbf{P}\big(A[a{:}b+1]\big) \cdot \mathbf{P}\big(\text{Bob trifft}\big) \end{aligned}$$

☺ Mit dieser einfachen Rekursionsformel können Sie nun die gesamte Tabelle ausfüllen. Besonders bequem und automatisiert geht’s mit einer Tabellenkalkulation, z.B. *LibreOffice*.

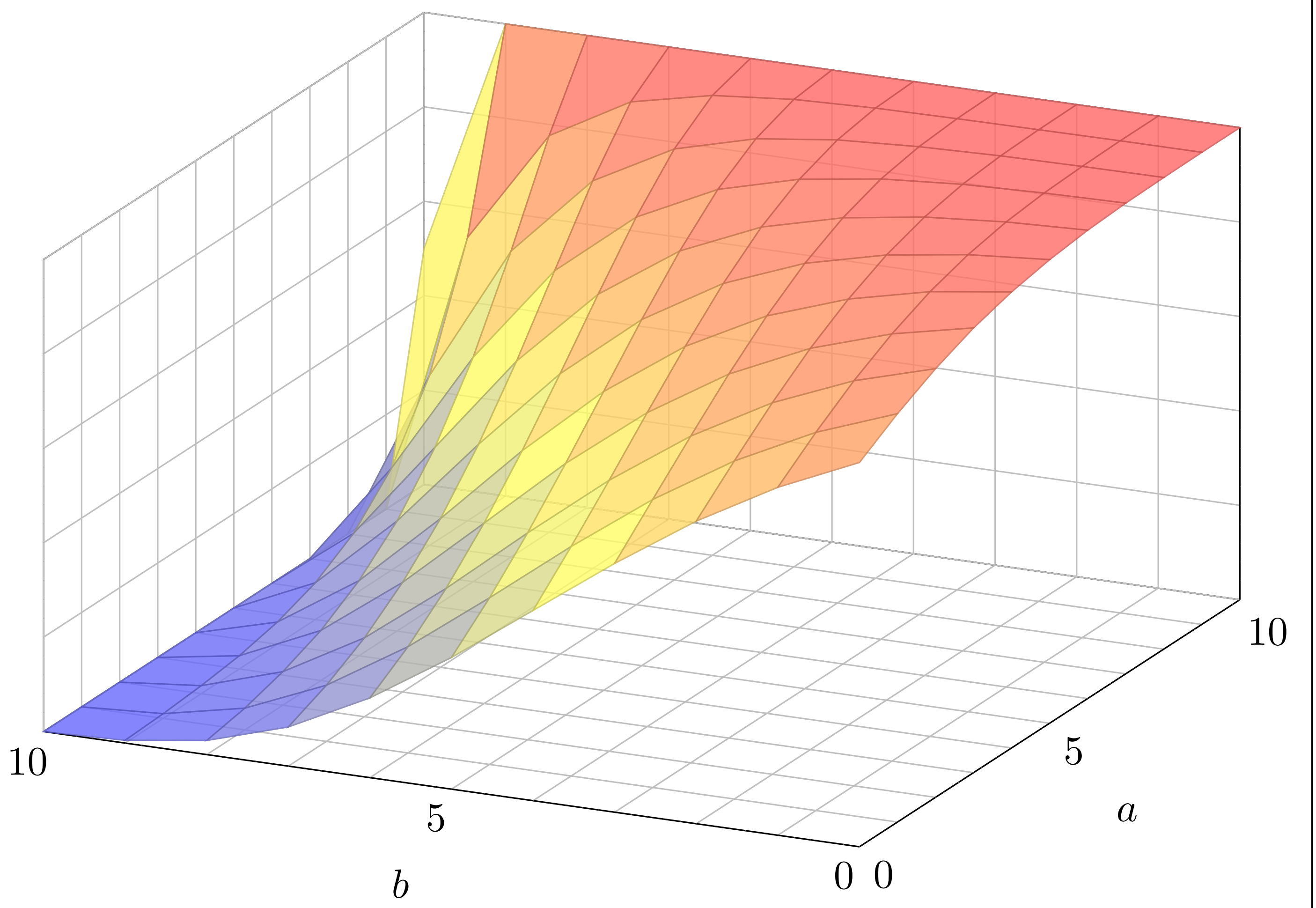
☺ Pascal lässt grüßen: Die $n$te Diagonale der Tabelle entspricht der $n$ten Zeile des Pascalschen Dreiecks (hier kumuliert und normiert). In unserer Tabelle versteckt sich die Binomialverteilung!

Geschichte: Mitte 1654 schrieb Blaise Pascal (1623–1662) an Pierre de Fermat (1607–1665) einen Brief, der berühmt wurde und als Geburtsurkunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt. Pascal löste darin zwei konkrete Probleme zu Glücksspielen, zu denen ein Freund ihn um Rat gebeten hatte, der berufsmäßige Spieler Antoine Gombaud, Chevalier de Méré (1607–1684). Erstens eine Berechnung von Würfelwahrscheinlichkeiten. Zweitens das Problem der gerechten Teilung bei vorzeitigem Spielabbruch. Was heißt hier „gerecht“? Pascal und Fermat wurden sich nach ausführlicher Diskussion einig, dass der Einsatz gemäß den Gewinnwkten aufgeteilt werden sollte. Das ist die unsere obige Tabelle. Pascal konnte diese kombinatorisch berechnen dank dem von ihm zuvor entwickelten Pascalschen Dreieck für die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$.

Das Runde muss ins Eckige: Bayes beim Tischkicker



Das Runde muss ins Eckige: Bayes beim Tischkicker



Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Das folgende Spiel „Kuhhandel" hat sehr einfache Spielregeln. Gute Strategien sind zunächst nicht offensichtlich, doch es gibt eine erfreulich einfache mathematische Lösung: wie so oft per Rückwärtsinduktion unter der Annahme ausreichender Rationalität. Ohne Rationalität hingegen ist die Realität viel komplizierter. . .

Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Alice und Bob ziehen verdeckt eine Karte aus einem zufällig gemischten Stapel mit den Werten $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$, etwa mit Höchstwert $n = 10$.

Alice kennt ihren Wert $a \in \Omega$, Bob kennt seinen Wert $b \in \Omega$, aber keiner weiß etwas über den Wert des anderen, außer der Tatsache $a \neq b$.

Alice darf einen Tausch vorschlagen, in diesem Falle entscheidet Bob. Falls Alice vorschlägt und Bob annimmt, tauschen beide ihre Karten.

Die höchste Karte gewinnt.

Beispiel: Bevor Sie das Spiel analysieren, antworten Sie intuitiv:
(a) Sie spielen Alice und haben die Karte $a = 4$. Sollten Sie tauschen?
(b) Sie spielen Bob und haben die Karte $b = 3$. Sollten Sie tauschen?

Wenn Sie mutig sind, formulieren Sie intuitiv eine Strategie:
Für welche $a \in \Omega$ soll Alice einen Tausch vorschlagen?
Für welche $b \in \Omega$ soll Bob einen Tausch annehmen?

Welches reale Verhalten vermuten Sie bei Ihren Mitspielern?
Welche Rolle spielen hierbei die Stufen der Rationalität? (A2A)

Aufgabe: Formulieren und beweisen Sie optimale Strategien:
Für welche $a \in \Omega$ soll Alice einen Tausch vorschlagen?
Für welche $b \in \Omega$ soll Bob einen Tausch annehmen?

(0) Nutzen Sie zunächst die Annahme ausreichender Rationalität.
Welche Voraussetzungen $\mathscr{R}_0, \mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \dots$ nutzen Sie jeweils?

Lösung: (0) Wir argumentieren rückwärts, das ist klar und leicht:

A_0: Im Falle $a = n$ wird Alice keinen Tausch vorschlagen.
und im Falle $b = n$ wird Bob keinen Tausch annehmen ($\mathscr{R}_1$).

A_1: Im Falle $a = n - 1$ wird Alice keinen Tausch vorschlagen,
und im Falle $b = n - 1$ wird Bob keinen Tausch annehmen:
Jeder kann bestenfalls auf die gegnerische Karte n hoffen, doch
dann würde Bob nicht annehmen bzw. Alice nicht vorschlagen (A_0).
Also wird Alice nicht vorschlagen und Bob nicht annehmen ($\mathscr{R}_2$).

⚠ Dieses Argument benötigt bereits Rationalität zweiter Stufe!
Beide Spieler müssen sich gegenseitig für rational halten.

Per Induktion über $k = 0, 1, \dots, n - 2$ beweisen wir ebenso:

A_k: Im Falle $a = n - k$ wird Alice keinen Tausch vorschlagen,
und im Falle $b = n - k$ wird Bob keinen Tausch annehmen:
Jeder kann bestenfalls auf die gegnerische Karte $> n - k$ hoffen, doch
dann würde Bob nicht annehmen bzw. Alice nicht vorschlagen (A_{k-1}).
Also wird Alice nicht vorschlagen und Bob nicht annehmen ($\mathscr{R}_{k+1}$).

Dies gilt für $k = 0, 1, \dots, n - 2$, also für alle $a \ge 2$ und für alle $b \ge 2$.

Folglich schlägt Alice höchstens im Falle $a = 1$ einen Tausch vor,
allerdings ohne jede Hoffnung auf eine Annahme ihres Angebots.
Sie kann daher ihr Tauschangebot auch genauso gut unterlassen.

Ebenso akzeptiert Bob höchstens im Falle $b = 1$ einen Tausch,
allerdings ohne jede Hoffnung, dann je ein Angebot zu erhalten.
Er kann daher seine Annahme auch genauso gut unterlassen.

⚠ Der letzte Punkt ist heikel. Beide Spieler haben nichts zu verlieren,
können also höchstens auf einen seltenen Fehler des Gegners hoffen.

Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Übung: (1) Spielen Sie dies als Experiment mit Ihren Freunden.
(2) Können Sie Theorie (0) und Experiment (1) in Einklang bringen?

Hier sind zwei Varianten denkbar: (a) Sie spielen im „Partymodus“ mit Kartenstapel, Ziehen, Vorschlagen und Annehmen am Spieltisch.

Vorteile: natürliche Spielsituation, Spaß beim Bluffen und Verhandeln.
Nachteile: schwer auszuwerten, zahlreiche Zufälle und Störfaktoren.

(b) Sie spielen im „Labormodus“, beispielsweise an einem Computer: Jeder Spieler wählt seine Strategie, etwa in Form von zwei Intervallen $T = \{1, \dots, t\}$ für „tauschen“ und $N = \{t+1, \dots, n\}$ für „nicht tauschen“. Jeder Spieler gibt seine Grenze t ein, dann spielt der Computer.

Vorteile: mehrfache Wiederholung, aussagekräftige Daten.
Nachteile: eher künstliche und sterile Spielsituation.

🙂 Gutes Design von Spielen und Experimenten ist eine hohe Kunst!

🙂 Statistische Daten über die Spielerpopulation sind Gold wert!

Verhaltensökonomik: Wenn Spieler irrational sind, dann kommen Sie mit Deduktion allein nicht weiter, sondern benötigen statistische Messwerte.

Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Wir formulieren den Kuhhandel noch etwas allgemeiner und bequemer.

Alice und Bob werden die Karten $(a, b) \in \Omega = \{1, 2, \dots, n\}^2$ zugelost mit Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}$, etwa $n = 10$ und gleichverteilt $\mathbf{P}(\{(a, b)\}) = 1/n^2$. Alice kennt nur ihren Wert $a \in \Omega$, Bob kennt nur seinen Wert $b \in \Omega$. Beide kennen die Wktverteilung $\mathbf{P}$ und somit die bedingten Wkten.

Alice und Bob legen gleichzeitig und verdeckt eine Münze auf den Tisch: $0 =$ Kopf bedeutet „Ich will nicht tauschen“ und $1 =$ Zahl bedeutet „Ich will tauschen“. Der Tausch findet statt, wenn beide tauschen wollen. Die höchste Karte gewinnt.

Hierzu formulieren beide vor dem Spiel ihre Strategie $s, t \in \{1, 2, \dots, n\}$: Alice will/wird tauschen falls $a \le s$, Bob will/wird tauschen falls $b \le t$.

Übung: (3) Berechnen Sie die Gewinnwkten für das Paar $(s, t) \in \Omega$. Nehmen Sie zur Vereinfachung Gleichverteilung an, $\mathbf{P}(\{(a, b)\}) = 1/n^2$.

(4) Angenommen, beide Spieler legen ihre Strategien s und t offen. Gibt es ein Strategiepaar (s, t), bei dem keiner mehr wechseln will? (Dies nennen wir ein Nash–Gleichgewicht, dazu später mehr.)

Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Das Gras ist immer grüner auf der anderen Seite.

Wir betrachten nun die Möglichkeit, dass beide Spieler über ihre Umwelt unterschiedliche Überzeugungen haben können, insbesondere über die Wahrscheinlichkeiten der Kartenverteilung zu Beginn dieses Spiels.

Alice glaubt an die Wktsverteilung $\mathbf{P}_1$, Bob glaubt an $\mathbf{P}_2$. Es herrscht Glaubensfreiheit, unabhängig von der tatsächlichen Verteilung $\mathbf{P}$.

Übung: (5) Erklären Sie zu jedem Strategiepaar $(s,t) \in \Omega$ falls möglich ein Glaubenspaar $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$, sodass jeder seine Strategie für optimal hält. Stärker: strikt optimal? Ist dies mit Übereinstimmung $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ möglich?

(6) Angenommen, das Spiel wird sehr oft wiederholt. Ist ein divergentes Glaubenspaar $\mathbf{P}_1 \neq \mathbf{P}_2$ auf Dauer stabil? Oder ergibt sich Konvergenz? Wird man aus Erfahrung klug? Gelingt dies schnell oder langsam?

In unserer Gesellschaft erleben wir alltäglich unterschiedliche Ansichten, auch zu vermeintlich objektiven Sachverhalten können Menschen unterschiedlicher Überzeugung sein.

Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Menschen sind verschieden: Jeder Jeck ist anders.

Wir betrachten nun die realistische Situation, dass Spieler sich in einer großen Population bewegen und darin Handelspaare zufällig entstehen.

Sei weiterhin $n = 10$ und $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. Der Anteil q_t der Bevölkerung tauscht für $a \le t$. Dabei gilt $q_t \ge 0$ und $q_1 + \dots + q_n = 1$.

Übung: (7) Angenommen, mindestens 30% der Bevölkerung glauben felsenfest, dass es sich für $a \le 5$ lohnt, zu tauschen. Diese Teilnehmer optimieren nicht ihr Verhalten, alle anderen hingegen schon. (Ebenso denkbar ist ein Fließgleichgewicht durch neue, unerfahrene Spieler.) Welches Gleichgewicht stellt sich ein?

Ich führe diese Fragen hier nicht weiter aus, ihre Lösung ist etwas knifflig, aber erhellend. Sie illustrieren eine allgemeine Weisheit:

If people do not believe that mathematics is simple,
it is only because they do not realize how complicated life is.
(John von Neumann, 1903–1957)

Tanz der Vampire: Wissen und gemeinsames Wissen

B309
Übung

In Transsylvanien treffen sich einmal jedes Jahr 300 Vampire zum Tanz. Anschließend verharren sie den Rest des Jahres schlafend in der Gruft. Vampire altern nicht, sind untrüglich intelligent und vollkommen rational. Jeder weiß dies. Auch dies weiß jeder. Selbst dies weiß jeder. Usw. usw.

Unter den Vampiren tragen 100 ein Schandmal sichtbar auf der Stirn. Dies weiß keiner von sich selbst, da Vampire kein Spiegelbild werfen. Erführe er es, so suchte er den Freitod im nächsten Sonnenaufgang. (Diese Vampire verbrennen im Sonnenlicht. *Wear sunscreen!*)

Hingegen sieht jeder Vampir das Schandmal bei jedem anderen. Jeder sieht es. Jeder weiß es. Auch dies weiß jeder. Usw. usw. usw. Höfliche Rücksicht gebietet jedoch strenges Stillschweigen darüber. (Tabuisierte Kommunikation der Vampire ist ihre große Schwäche.)

Im Jahr 2001 platzt der Vampirjäger Professor Abronsius in das Fest: „Mindestens einer von Euch trägt ein Schandmal!“ schreit er und flieht. Die Vampire sehen keinen Grund, seiner Aussage zu widersprechen: Er sagt ihnen nur, was ohnehin jeder heimlich weiß. Oder etwa nicht?

Tanz der Vampire: Wissen und gemeinsames Wissen

B310
Übung

Vampire werfen bekanntlich kein Spielbild.
Das führt zu komplizierten Verwicklungen.

Aufgabe: Was geschieht? Nichts? Plötzliche Erkenntnis? Wann?

Lösung: Nach dem Fest 2100 sterben 100 Vampire im Sonnenaufgang. Führen Sie sorgfältig einen Beweis per Induktion: Was ist die Aussage? Wie ist das möglich? Welche Neuigkeit hat der Professor verraten?

Tanz der Vampire: Wissen und gemeinsames Wissen

Hier geht es um gemeinsames Wissen / *common knowledge*.
Nur weil eine Aussage wahr ist, weiß dies noch längst nicht jeder!
Nur weil es jeder weiß, ist es noch kein gemeinsames Wissen!

Die untrügliche Intelligenz der Vampire ist gemeinsames Wissen:
$\mathscr{R}_1$: Jeder Vampir ist vollkommen rational und absolut ehrenhaft.
$\mathscr{R}_k$: Es gilt $\mathscr{R}_{k-1}$, und jeder Vampir weiß $\mathscr{R}_{k-1}$. (Stufe $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$)
$\mathscr{R}_\infty$: Es gilt $\mathscr{R}_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. (gemeinsames Wissen)

Die Anzahl der Schandmale hingegen ist kein gemeinsames Wissen:
$\mathscr{S}_1$: Jeder ehrbare Vampir sieht alle n Schandmale der anderen, jeder Schandmalträger jedoch sieht nur genau $n-1$ Schandmale.
$\mathscr{S}_k$: Es gilt $\mathscr{S}_{k-1}$, und jeder Vampir weiß $\mathscr{S}_{k-1}$. (Stufe $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$)
$\mathscr{S}_\infty$: Es gilt $\mathscr{S}_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. (gemeinsames Wissen)

Professor Abronsius' Aussage hingegen liefert stärkere Information:
$\mathscr{A}_1$: Jeder Vampir weiß, dass es mindestens ein Schandmal gibt.
$\mathscr{A}_k$: Es gilt $\mathscr{A}_{k-1}$, und jeder Vampir weiß $\mathscr{A}_{k-1}$. (Stufe $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$)
$\mathscr{A}_\infty$: Es gilt $\mathscr{A}_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. (gemeinsames Wissen)

Tanz der Vampire: Wissen und gemeinsames Wissen

Es lohnt sich, diese berüchtigte Rätsel sorgfältig zu durchleuchten!
Wir nehmen hierzu an, genau n Vampire tragen ein Schandmal, und behaupten: Diese sterben am Morgen nach Fest $2000 + n$.

Im Falle $n = 1$ ahnt der einzige Träger zunächst nichts vom Schandmal. Durch Abronsius' Aussage erkennt er sofort seine Schande und stirbt bei Sonnenaufgang. (Wir nutzen die Voraussetzungen $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{S}_1$ und $\mathscr{R}_1$.)

Im Falle $n = 2$ erwarten die beiden Träger den Freitod des anderen. Beim Fest 2002 treffen sie sich jedoch wieder, völlig unerwartet. Dadurch erkennt jeder der beiden sofort seine Schande und stirbt. (Wir nutzen hierzu die Voraussetzungen $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{S}_2$, $\mathscr{R}_2$ und den Fall 1.)

Per Induktion gilt dieses Argument für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$: Jeder der n Träger sieht genau $n-1$ Schandmale und geht davon aus, dass er keines trägt. Er erwartet daher den Freitod der $n-1$ anderen nach dem Fest $2000 + n{-}1$. Alle treffen sich jedoch beim Fest $2000 + n$ unerwartet wieder. Dadurch erkennt jeder zweifelsfrei seine Schande. (Wir nutzen hierzu die Voraussetzungen $\mathscr{A}_n$, $\mathscr{S}_n$, $\mathscr{R}_n$ und den Fall $n-1$.)

Schmutzige Gesichter: eigenes und gegenseitiges Wissen

Hier ein berühmtes Logikrätsel aus der Folklore der Talmudschulen als Zentren jüdischer Gelehrsamkeit (`de.wikipedia.org/wiki/Jeschiwa`). Es handelt von eigenem Wissen und von gegenseitigem Wissen...

(1) Rabbi: „Zwei Männer klettern durch einen Kamin. Der eine kommt mit sauberem Gesicht heraus, der andere mit schmutzigem. Wer von beiden geht sich nun waschen?“ — Schüler: „Na wohl der mit dem schmutzigen Gesicht!“ — „Falsch! Der Schmutzige sieht den Sauberen und denkt, sein Gesicht sei auch sauber. Der Saubere sieht den Schmutzigen und denkt, sein Gesicht sei auch schmutzig, also geht er sich waschen.“

(2) Rabbi: „Zwei Männer klettern durch einen Kamin. Der eine kommt mit sauberem Gesicht heraus, der andere mit schmutzigem. Wer von beiden geht sich nun waschen?“ — Schüler: „Aber wir haben doch eben schon festgestellt: der mit dem sauberen Gesicht!“ — „Falsch: Beide gehen sich waschen. Überlege logisch: Der Saubere sieht den Schmutzigen und geht sich waschen. Der Schmutzige sieht das und versteht, dass sein Gesicht schmutzig ist, also geht auch er sich waschen.“

Schmutzige Gesichter: eigenes und gegenseitiges Wissen

(3) Rabbi: „Zwei Männer klettern durch einen Kamin. Der eine kommt mit sauberem Gesicht heraus, der andere mit schmutzigem. Wer von beiden geht sich nun waschen?“ — Schüler: „Na, beide gehen sich waschen.“ — „Falsch: Keiner von beiden. Der Schmutzige sieht den Sauberen und geht sich nicht waschen. Der Saubere sieht das und versteht, dass sein Gesicht sauber ist, also geht auch er sich nicht waschen.“

(4) „Zwei Männer klettern durch einen Kamin... “ — „Ich weiß, keiner von beiden wird sich waschen.“ — „Falsch! Sage mir: Wie kann es sein, dass zwei Männer durch denselben Kamin klettern, und der eine macht sein Gesicht schmutzig, der andere aber nicht? Die ganze Frage ist unsinnig. Wenn du dein Leben dazu verwendest, sinnlose Fragen zu beantworten, werden auch alle deine Antworten sinnlos sein.“

Aufgabe: Wie lösen Sie den Widerspruch zwischen (2) und (3)?

Lösung: Zur Festlegung dieses Spiels fehlen uns noch Informationen: Wir benötigen die genaue Reihenfolge der Züge / Signale / Folgerungen! Erst zieht Spieler 1, dann Spieler 2 mit dem Wissen des vorigen Zuges.

Schmutzige Gesichter: eigenes und gegenseitiges Wissen

Schmutzige Gesichter gibt es in vielen Rätseln, hier etwa in der Bahn:

Das Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach liegt wunderbar idyllisch mitten im Schwarzwald, etwa zweidrittelwegs von Stuttgart nach Freiburg. Im Zug zu unserem fiktiven Workshop „Mathematical Logic“ sitzen 12 berühmte Logiker, manche davon mit schmutzigem Gesicht. Alle können sich gegenseitig sehen, es gibt jedoch keinen Spiegel, und diese überaus schüchternen Menschen reden nicht miteinander.

Der Schaffner erklärt der Gruppe höflich: „Mindestens zwei von Ihnen haben schmutzige Gesichter. Diese sollten schnellstmöglich aussteigen und sich waschen.“ An den nächsten Bahnhöfen $1, 2, 3, 4, 5$ passiert noch nichts. Erst am sechsten Bahnhof steigen einige der Passagiere aus, um sich das Gesicht zu waschen. Wie viele sind es?

Aufgabe: Lösen Sie dieses Logikrätsel. Präzisieren Sie alle hierzu nötigen Annahmen. Warum ist der Takt der Bahnhöfe wichtig?

Lösung: Genau sieben Personen haben ein schmutziges Gesicht. (Die Zahl 12 ist hier vollkommen beliebig und überflüssig.)

Schmutzige Gesichter: eigenes und gegenseitiges Wissen

Angenommen, es gibt genau $n \in \{2, 3, \dots, 12\}$ schmutzige Gesichter.

Im Falle $n = 2$ wissen die beiden Betroffenen sofort Bescheid: Jeder der beiden sieht nur ein schmutziges Gesicht. Nach Aussage des Schaffners gibt es jedoch mindestens zwei. Daraus schließt jeder Betroffene richtig, das sein Gesicht schmutzig ist, und steigt am 1. Bahnhof aus.

Im Falle $n = 3$ sieht jeder Betroffene genau zwei schmutzige Gesichter und erwartet daher, dass diese am 1. Bahnhof aussteigen werden, wie zuvor im Fall $n = 2$ erklärt. Da dies jedoch nicht geschieht, folgert er richtig, das sein Gesicht schmutzig ist, und steigt am 2. Bahnhof aus.

Das Argument setzt sich per Induktion für alle n fort. Dazu muss gelten:
$\mathscr{R}_2$: Jeder kann richtig sehen und logisch schließen, wie oben erklärt.
$\mathscr{R}_3$: Es gilt $\mathscr{R}_2$, und jeder weiß es. $\mathscr{R}_n$: Es gilt $\mathscr{R}_{n-1}$, und jeder weiß es.

Konkretes Beispiel: Alle Betroffenen steigen am sechsten Bahnhof aus. Demnach gibt es genau sieben Personen mit schmutzigem Gesicht.

Der vorgegebene Takt der Bahnhöfe ist wesentlich, damit allen klar ist, wann eine Aktion ausgeführt werden kann oder unterlassen wurde.

Das Problem der Stuttgarter Mathematiker

Das folgende Rätsel stammt aus *Forschung und Lehre* (5/2019, S.503):

An der Universität Stuttgart gibt es 17 Professoren (m/w) im Fachbereich Mathematik. Sie treffen sich einmal im Monat bei Sitzungen. Bei einer früheren Sitzung haben sie die Regel eingeführt, dass jeder Professor, der von einem Fehler in einer von ihm selbst publizierten Arbeit erfährt, sein Amt bei der nächsten Sitzung niederlegen muss. Noch nie ist ein Professor zurückgetreten. Das bedeutet aber nicht, dass keiner der Professoren je einen Fehler publiziert hat. Im Gegenteil, jeder Professor hat schon Fehler publiziert, und jeder andere hat das bemerkt. Man könnte auch so sagen: Jeder Professor weiß, dass jeder andere Professor schon Fehler gemacht hat, weiß aber nichts von eigenen Fehlern. Eines Tages besucht der Rektor der Universität den Fachbereich und hält eine kleine Ansprache, in der er einen denkwürdigen Satz spricht: „Ich muss Ihnen mitteilen, dass ein Professor unter Ihnen bemerkt hat, dass ein anderer Professor einen Fehler publiziert hat.“ Was passiert als Reaktion auf die Bekanntgabe des Rektors? […] Der Rektor sagt natürlich die Wahrheit. Und alle Professoren sind perfekte Logiker. Sowie absolut fehlerfrei bei der Beurteilung, ob ein anderer einen Fehler begangen hat. Zwei Alternativen möchte ich Ihnen anbieten: Antwort 1: […] Nichts passiert. Antwort 2: Recht lange passiert gar nichts. Aber dann, in der 17-ten Sitzung nach der Rede des Rektors treten alle 17 Professoren zurück.

Das Problem der Stuttgarter Mathematiker

Zur Antwort 2 wird folgende Erklärung geboten (F&L 5/2019, S.471):

Was passiert, wenn es unter den 17 Professoren nur einen gäbe, der einen Fehler publiziert hat? Nennen wir ihn schwarzes Schaf. Da er von keinem schwarzen Schaf weiß, muss er aufgrund der Rede des Rektors schließen, dass er selbst ein schwarzes Schaf ist. Also muss er in der 1. Sitzung nach der Rede zurücktreten.

Wie ist es bei zwei schwarzen Schafen A und B? Beide treten in der 1. Sitzung nicht zurück, da zwar jeder weiß, dass der andere ein schwarzes Schaf ist, aber nichts über sich selbst erschließen kann. Doch da B in der 1. Sitzung nicht zurücktritt, muss A schlussfolgern, dass er selbst ein schwarzes Schaf ist. Denn andernfalls hätte B nach der Rede gewusst, dass er ein schwarzes Schaf ist und wäre in der 1. Sitzung zurückgetreten. Also muss A in der 2. Sitzung zurücktreten. B führt denselben Gedankengang durch, und auch er tritt in der 2. Sitzung zurück. […]

So kann man sich bis zur Situation mit 17 schwarzen Schafen vorarbeiten. Alle werden auf der 17. Sitzung zurücktreten. […] Der Rektor hat den Professoren doch Information vermittelt. Offensichtlich gibt es in einer Gruppe verschiedene Formen des Wissens. Jeder kann eine Tatsache T wissen. Zusätzlich kann jeder wissen, dass jeder andere auch T weiß. Ferner kann jeder wissen, dass jeder weiß, dass jeder T weiß. Usw.

Das Problem der Stuttgarter Mathematiker

Aufgabe: Lesen Sie aufmerksam das obige Rätsel. Leider gingen bei der Übertragung dieses Rätselklassikers auf Stuttgarter Mathematiker wesentliche Voraussetzungen verloren. Ist Antwort 1 weiterhin möglich?

Lösung: Hier geht es um gemeinsames Wissen / *common knowledge*. Nur weil eine Aussage wahr ist, weiß dies noch längst nicht jeder! Nur weil es jeder weiß, ist es noch kein gemeinsames Wissen!

Die Antwort 2 nutzt Aussage P: *Alle Professoren sind perfekte Logiker und absolut fehlerfrei bei der Beurteilung, ob ein anderer einen Fehler publiziert hat.* Die Gültigkeit der Aussage P allein genügt jedoch nicht, es muss auch jeder wissen, dass P gilt, usw. Denkbar wäre folgendes:

1. Nehmen wir an, jeder Professor ist ein perfekter Logiker und absolut fehlerfrei bei der Beurteilung, ob ein anderer einen Fehler publiziert hat, doch mindestens ein Professor hält manch anderen für fehleranfällig. Die Aussage des Rektors, ein Professor habe eines anderen Fehler entdeckt, lässt ihn daher kalt, denn auf die Meinung dieses Kollegen gibt er nicht viel. Daher scheitert schon der Induktionsanfang.

Das Problem der Stuttgarter Mathematiker

Zahlreiche weitere Varianten sind denkbar und in der hier angegebenen Formulierung des Rätsels nicht geklärt, weder bejaht noch verneint.

2. Nehmen wir weiterhin P an: Jeder Professor ist ein perfekter Logiker und absolut fehlerfrei bei der Beurteilung, ob ein anderer einen Fehler publiziert hat. Zudem gelte P': Jeder Professor weiß die Tatsache P. Jeder Professor glaubt also an die perfekte Urteilskraft jedes Kollegen. Er weiß allerdings nicht, ob die anderen dies ebenfalls glauben.

Hier gelingt noch der Induktionsanfang: Gibt es nur ein schwarzes Schaf, so erkennt es durch die Aussage des Rektors seinen eigenen Fehler.

Der Schluss von einem auf zwei schwarze Schafe hingegen misslingt. Die beiden schwarzen Schafe A und B treten in der 1. Sitzung nicht zurück. Kann A nun schlussfolgern, dass er ein schwarzes Schaf ist? Leider nein: A kann / muss befürchten, dass B nicht an die perfekte Urteilskraft jedes Kollegen glaubt; die Aussage des Rektors ließe dann B völlig kalt, da B auf die Meinung seiner Kollegen nichts gibt. Daher scheitert hier der Induktionsschritt von 1 auf 2.

Der unerwartete Abischerz: Wie ist das möglich?

Das folgende Paradox existiert in vielen Varianten, etwa als unerwartete Hinrichtung, `en.wikipedia.org/wiki/Unexpected_hanging_paradox`, Feueralarmübung oder Klassenarbeit, hier umgedreht als Abischerz.

Darum wachet! Denn ihr wisst weder Tag noch Stunde.
(Matthäus 25,13, Lutherbibel 2017)

Nach einer wahren Begebenheit: Die Abiturienten eines Gymnasiums planen ihren Abischerz. Aus Termingründen kommen dafür genau fünf Tage, Montag bis Freitag, in Frage. Die ängstliche Schulleiterin möchte den Termin wissen. Die Schüler verweigern dies mit der Begründung, der Abischerz müsse für die Lehrer vollkommen überraschend sein.

Die Schulleiterin denkt sich daher folgendes: „Der Abischerz kann sicher nicht am Freitag stattfinden, denn das ist der letzte mögliche Termin. Wäre bis Freitag Morgen nichts geschehen, dann wüssten wir, dass der Abischerz an diesem Tag stattfindet. Das wäre nicht überraschend.“

Der unerwartete Abischerz: Wie ist das möglich?

Die Schulleiterin folgert sofort weiter: „Der Abischerz kann auch nicht am Donnerstag stattfinden. Freitag haben wir bereits ausgeschlossen. Wäre bis Donnerstag Morgen nichts geschehen, dann wüssten wir, dass der Abischerz an diesem Tag stattfindet. Das wäre nicht überraschend.“

Ebenso schließt die Schulleiterin Mittwoch, Dienstag und Montag aus und kommt zu dem Schluss: „Es wird gar kein Abischerz stattfinden.“ Alle Lehrer bewundern die logischen Ausführungen der Schulleiterin.

Die Abiturienten veranstalten ihren Abischerz am Mittwoch.
Wie vorhergesagt sind alle Lehrer vollkommen überrascht.

Aufgabe: Alle Argumente scheinen logisch. Was also geht schief?

Lösungsidee: Die Eigenschaft „vollkommen überraschend“ ist kritisch; sie ist nicht präzise definiert und wird daher unterschiedlich interpretiert. Weitere Probleme sind Selbstbezüglichkeit und evtl. Widersprüchlichkeit. Wie das Paradoxon aufzulösen ist, darüber wird anhaltend diskutiert; hierzu gibt es ungefähr so viele Lösungsvorschläge wie Autoren.

Der unerwartete Abischerz: Wie ist das möglich?

Es ist sehr wichtig, keine unbewiesenen Annahmen zu treffen,
aber noch wichtiger ist es, keine Worte zu benutzen,
hinter denen sich kein klarer Sinn verbirgt.
(William Kingdon Clifford, 1845–1879)

Lösung: Wir können das Paradoxon auflösen, indem wir der vagen Formulierung „vollkommen überraschend“ einen präzisen Sinn geben. Hierzu betrachten wir wie zuvor verschiedene Stufen des Wissens:

$\mathscr{R}_0$: Der Abischerz findet höchstens an einem der fünf Tage Mo, Di, Mi, Do, Fr statt. Im Falle vertrödelter Planung gibt es keinen Abischerz.

$\mathscr{R}_1$: Es gilt $\mathscr{R}_0$, die Schulleiterin weiß dies, kann aber am Morgen des Abischerzes nicht sicher vorhersagen, dass er an diesem Tag stattfindet.

$\mathscr{R}_2$: Es gilt $\mathscr{R}_1$, die Schulleiterin weiß dies, kann aber am Morgen des Abischerzes nicht sicher vorhersagen, dass er an diesem Tag stattfindet.

$\mathscr{R}_n$: Es gilt $\mathscr{R}_{n-1}$, die Schulleiterin weiß dies, kann aber am Morgen des Abischerzes nicht sicher vorhersagen, dass er an diesem Tag stattfindet.

Der unerwartete Abischerz: Wie ist das möglich?

Dank Aussage $\mathscr{R}_0$ kann die Schulleiterin den Termin des Abischerzes immerhin auf die fünf fraglichen Tage Mo, Di, Mi, Do, Fr eingrenzen.
Mit $\mathscr{R}_1$ kann sie Fr ausschließen, es bleiben nur Mo, Di, Mi, Do.
Mit $\mathscr{R}_2$ kann sie Fr, Do ausschließen, es bleiben nur Mo, Di, Mi.
Mit $\mathscr{R}_3$ kann sie Fr, Do, Mi ausschließen, es bleiben nur Mo, Di.
Mit $\mathscr{R}_4$ kann sie Fr, Do, Mi, Di ausschließen, es bleibt also nur Mo.
Mit $\mathscr{R}_5$ kann sie alle fünf Tage ausschließen: Es gibt keinen Abischerz.

Die Schulleiterin interpretiert die Aussage „vollkommen überraschend“ im stärksten Sinne als $\mathscr{R}_5$ oder noch höher. Aus dieser starken Annahme folgert sie zurecht, dass es dieses Jahr keinen Abischerz geben kann.

Die Abiturienten interpretieren „vollkommen überraschend“ nur als $\mathscr{R}_1$. Ihr Abischerz am Mittwoch ist so gesehen vollkommen überraschend.

⚠ Diese Beispiele zeigen eindringlich: In strategischen Situationen sind Wissen und Nichtwissen oft entscheidend, sowohl eigenes als auch gegenseitiges und gemeinsames. Eine sichere Analyse setzt präzise Formulierung voraus und erfordert mathematische Sorgfalt und Disziplin.