Spieltheorie und ökonomisches Verhalten

Die mathematische Analyse von
Konkurrenz und Kooperation

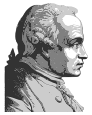
erkennen.
beweisen.
anwenden.

Prof. Dr. Michael Eisermann
zusammen mit Dr. Friederike Stoll
`eiserm.de/lehre/Spieltheorie`

Universität Stuttgart

Sommersemester 2025
Stand 4. Juli 2025

Für die Mitteilung von Unklarheiten und Fehlern aller Art
sowie für Verbesserungsvorschläge bin ich stets dankbar!



Habe Mut, dich deines eigenen
Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.
This is just the beginning.

Urheberrecht und Haftungsausschluss

Diese Unterlagen werden genutzt zur Veranstaltung *Spieltheorie und ökonomisches Verhalten.* Hierzu wesentlich beigetragen hat die langjährige Zusammenarbeit mit Dr. Friederike Stoll. Sie vermitteln einschlägiges Grundlagenwissen und zugehörige mathematische Werkzeuge und richten sich vornehmlich an Studierende der Mathematik und benachbarter Fächer.

Vorwort zu diesen Notizen

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie.
Immanuel Kant (1724–1804)

Dies sind Unterlagen zur Veranstaltung *Spieltheorie und ökonomisches Verhalten*, die wir im Sommer 2018 erstmalig abhalten durften und für 2019/20, 2022, 2025, ... kontinuierlich weiterentwickeln.

Vorlesung und Übungen richten sich an Studierende der Mathematik, oder allgemein an alle Interessierten, die vor mathemischen Methoden nicht zurückschrecken, sondern ihre ordnende Kraft zu schätzen wissen.

Spielerisch-experimentelle Aspekte kommen nicht zu kurz, so hoffen wir. Ebenso sind wir überzeugt, dass mathematische Modelle und Argumente, Sätze und Beweise, gerade hier Erklärung und Vervollständigung bieten. Der Dialog mit den Teilnehmer:innen bestimmt die jeweilige Dosierung.

Das Ziel dieser Veranstaltung ist hehr, aber unsere Möglichkeiten sind bescheiden. Wir möchten Ihr Interesse wecken, ja Ihre Begeisterung entfachen, damit Sie darüber hinaus gehen und selbstständig lernen. Literatur finden Sie am Ende dieser Einführung und in den Kapiteln.

Vorwort zu diesen Notizen

Es gibt nichts Gutes, außer man tut es.
Erich Kästner (1899–1974)

Spieltheorie bietet wunderbare Einsichten und ist oft erstaunlich direkt anwendbar in der Praxis. Hierzu sollen Sie zahlreiche Bei-Spiele selbst erfahren und dadurch verstehen. Um damit wirklich vertraut zu werden, sollen Sie regelmäßig spielen, sowohl empirisch als auch theoretisch, also spieltheoretische Fragen mathematisch formulieren und lösen.

Wir sind glücklich, und ein wenig stolz, Ihnen zu dieser Vorlesung auch gut betreute Übungen anbieten zu können. Das ist angesichts knapper Ressourcen leider keineswegs selbstverständlich, doch ganz wesentlich für Ihren Erfolg! Wenn Sie sich ernsthaft darauf einlassen, werden Sie viel Freude daran haben und manches Aha-Erlebnis. Möge es nützen!

Erkläre es mir, und ich werde es vergessen.
Zeige es mir, und ich werde mich erinnern.
Lass es mich tun, und ich werde es verstehen.
Konfuzius (551–497 v.u.Z.)

Sinn und Zweck Ihres Studiums: Schärfen Sie Ihr Werkzeug!

Alice trifft Bob, der sich mit stumpfer Axt abmüht, einen Baum zu fällen. „Schärf deine Axt! Dann gelingt dir deine Arbeit besser.“, rät Alice ihm. Das weist Bob zurück: „Dazu fehlt mir die Zeit, ich muss Bäume fällen!“ Genau das ist Ihre Entscheidung: Planen Sie kurzfristig oder langfristig?

Verdammte Axt: früh investieren, lange profitieren!

Genau dazu studieren Sie: Hier schärfen Sie Ihre Denk-Werkzeuge, um effizient arbeiten zu können. Alice hat das verstanden. „Das Studium ist abstrakter Quatsch und völlig nutzlos für die Praxis.“ Wenn Bob so kurzfristig denkt, dann sollte er konsequent sein und nicht studieren.

Sie haben die Wahl, beide Alternativen sind gangbar. Manche möchten sich rasch in der viel gelobten „Praxis“ austoben und keine Zeit in die oft geschmähte „Theorie“ investieren. Selbst mit stumpfer Axt kann man Bäume fällen, mühsam zwar, doch für wenige kleine wird es reichen.

Die Kunst des Lernens, ganz allgemein des vorausschauenden Planens, ist die Balance zwischen sofortigem Nutzen und langfristiger Investition. Wenn Sie richtig studieren, erreichen Sie beides, sowohl langfristigen Nutzen durch Wissen und Können als auch Freude schon beim Lernen.

Das ist eine grundlegende Einsicht und vielfach bewährte Weisheit, so in dem lateinischen Motto *Festina lente*, übersetzt „Eile langsam!“, sinngemäß „Eile mit Weile!“. Jedes ernsthafte Vorhaben gelingt Ihnen am besten im richtigen Gleichgewicht zwischen zügig und sorgsam.

Verdammte Axt: früh investieren, lange profitieren!

Als Mahnung im Handwerk: *Measure twice, cut once!*
Schlechte Vorbereitung verschwendet Zeit und Ressourcen.
Als Motto der Navy Seals: *Slow is smooth, and smooth is fast!*
Gute Vorbereitung sorgt für reibungslose, effiziente Abläufe.

In seiner Fabel vom Hasen und der Schildkröte schreibt Jean de La Fontaine (1621–1695): *Rien ne sert de courir; il faut partir à point.*
Es nützt nichts zu rennen; man muss rechtzeitig starten.
Besonnenheit und Zielstrebigkeit setzen sich durch.

Was bedeutet das für Ihr Studium, speziell in dieser Veranstaltung? Anfangs fällt Ihnen die Anwendung vermutlich schwer. Jetzt wissen Sie, warum: Schärfen Sie Ihre Werkzeuge, lernen Sie Definitionen und Sätze, üben Sie Mathematik, das wirkt, so gelingen Ihnen die Anwendungen!

Manche lebt achtsam, anderer schimpft achtlos auf die „lästige Theorie“ und scheitert alsbald an allzu naiver Anwendung, getreu dem Slogan „Plane nicht, irre lieber!“. Manchmal geht das gut, meist leider nicht.
Respice finem: Was immer du tust, handele klug und bedenke das Ende!

Verdammte Axt: früh investieren, lange profitieren!

Warum erzähle ich das? Die meisten Studierenden kommen an die Uni mit ihren eingefahrenen Gewohnheiten, manche gut und viele schlecht. Bitte studieren Sie selbstbewusst und selbstkritisch, legen Sie schlechte Gewohnheiten ab, erlernen Sie neue gute Gewohnheiten! Wir leiten Sie an und geben beste Praktiken weiter. Nehmen und wenden Sie dies an!

We must choose between what is easy and what is right.
Albus Dumbledore

Die Schule hat Ihnen herzlich wenig Mathematik zugetraut. Anfangs mag das gefallen, es ist ja so leicht! Doch dann wollten Sie sich entscheiden, ein anspruchsvolles Fach – mit Mathe! – zu studieren, und darauf hatte die Schule Sie in keinster Weise vorbereitet. Ihre Axt war leider stumpf!

Manch verlockende „Abkürzung“ ist letztlich Irrweg und Vergeudung. Manch vermeintlicher „Umweg“ erweist sich als zielführend und effizient. In dieser gut durchdachten Vorlesung und den zugehörigen Übungen machen wir Sie mit den nötigen, scharfen Werkzeugen vertraut und leiten Sie an zum fachgerechten Gebrauch. Diese Mühe lohnt sich!

Was ist und was soll die Spieltheorie?

Die Spieltheorie untersucht Konflikte, **Konkurrenz und Kooperation**: Diese entstehen regelmäßig zwischen strategisch handelnden Agenten, etwa Menschen, Unternehmen, Staaten oder künstlichen Intelligenzen. Hierzu entwickelt die Spieltheorie Modelle, **Begriffe und Methoden**; zu typischen Problemstellungen schlägt sie rationale Lösungen vor.

Sie beschreibt und erklärt **strategische Entscheidungssituationen**: Spieler antizipieren in ihrem Kalkül die Aktionen der Gegenspieler. Anders gesagt: Spieltheorie ist **interaktive Entscheidungstheorie**: Sobald mehrere Entscheider (Individuen, Akteure, Spieler) gemeinsam ein Ergebnis erzielen, ist dies ein Anwendungsgebiet der Spieltheorie.

Sie ist damit sehr **vielseitig anwendbar**, denn fast alles ist ein Spiel, oder genauer gesagt: Fast alles lässt sich als ein Spiel betrachten. Diese Sichtweise erweist sich häufig als erhellend und nützlich. Tatsächlich wird die Spieltheorie heute nahezu **überall angewendet**, neben ihrer Herkunft in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften zunehmend auch in der Informatik und der Evolutionsbiologie.

Was ist und was soll die Spieltheorie?

Jede **spieltheoretische Analyse** umfasst immer zwei Bestandteile:

- Das Spiel als formale Beschreibung der strategischen **Situation**: die Spieler, all ihre Handlungsoptionen und deren Konsequenzen. Die Spieltheorie hat hierfür eine reichhaltige Sprache entwickelt.
- Lösungen als Prognose oder Empfehlung für den **Spielverlauf**: idealerweise alle Lösungen des betrachteten Lösungskonzepts. Universelles Werkzeug ist der Begriff des (Nash–)Gleichgewichts.

Das Spiel definiert die **Regeln**, also die möglichen Aktionen und die zugehörigen Auszahlungen, aber noch nicht das Verhalten der Spieler. Das Lösungskonzept codiert Annahmen über das **Spielerverhalten**, insbesondere Nutzenmaximierung und un/beschränkte Rationalität.

Je nach Art des Spiels (statisch / dynamisch, deterministisch / zufällig, un/vollständig informiert, etc.) gibt es verschiedene **Lösungskonzepte**. In jedem Falle lohnt sich eine empirische Überprüfung bzw. Kalibrierung: Dies untersucht die **experimentelle Spieltheorie** / Verhaltensökonomik [*behavioural economics*] in Laborexperimenten und in Feldstudien.

Warum und wozu betreiben wir Spieltheorie?

Warum Spieltheorie? Zunächst einmal aus Neugier und aus Freude! Wie jede elegante, insbesondere mathematische Idee lässt sich auch die Spieltheorie um ihrer selbst willen erlernen, studieren, bewundern. Zudem ist Spieltheorie überaus vielseitig anwendbar…

Wozu Spieltheorie? Ihre Anwendungen sind überaus vielfältig in Politik (Wahlen, Gesetze, Anreize), Philosophie (Ir/Rationalität, Normen, Ethik), Biologie (Ko/Evolution von Genen und Memen), Ökonomie (Strategien, Optimierung, Gleichgewichte, Märkte, Mechanismen, Auktionen, …), Sozialpolitik (Sicherung, Wohlfahrt, Gemeinwohl, Ausgleich), usw.

Eugene Wigners berühmte Weisheit zur **wundersamen Wirksamkeit** der Mathematik gilt ebenso für die Spieltheorie und ihre Anwendungen:

> *The enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is […] bordering on the mysterious and there is no rational explanation for it. […] The miracle of the appropriateness of the language of mathematics […] is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research.*

Wie kommt die Mathematik zur Spieltheorie?

Mathematik ist Grundlage und Werkzeug aller modernen Technologie. Je nach Kenntnis und Nähe zum Thema mag dies überraschen.

Die Wechselwirkung zwischen Mathematik und Naturwissenschaften ist seit jeher extrem stark, gefolgt vom Ingenieurwesen, seit Ankunft der Computer auch zur Informatik, jüngst zur *künstlichen Intelligenz*.

Die Wechselwirkung mit den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften ist dagegen vergleichsweise schwach; prominente Ausnahmen hiervon sind statistische Methoden zur Erhebung und Auswertung von Daten, jüngst unter dem öffentlichkeitswirksamen Banner *Data Science* und *Big Data*.

Ebenso hat die mathematisch fundierte Spieltheorie seit etwa 1950 die Sicht- und Denkweisen in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften nachhaltig geprägt. Sie ist gereift und erprobt und anerkannt und gehört heute zum unverzichtbaren Standardwerkzeug der Mikroökonomik.

Die Spieltheorie kann (und wird) Ihnen viel Freude bereiten. Entgegen dem ersten Anschein ist sie aber nicht einfach, vor allem konzeptuell: Sie müssen grundlegende und raffinierte Ideen erst einmal verarbeiten.

Liturgie: Ablauf dieser Veranstaltung

Was erwarten / erwartet Sie in der Spieltheorie? schöne Mathematik? lehrreicher Spielspaß? perfekte Mischung? → `answergarden.ch/963641`

Spielpraxis — AngST *All fun and games*	Fr 14:00 – 15:30 *Optional, da zockst du!*	V57-7.530 „Spielhölle“
Vorlesung — KnaST *Blood, sweat, and tears*	Mi 11:30 – 13:00 Fr 9:45 – 11:15	V57.05 V57.04
Übung — ÜbST *Learning by doing (the math)*	Di 11:30 – 13:00 *Da guckst du nicht nur, da übst du!*	V57-7.530
Klausur — HaST *All is well that ends well.*	Sep / Okt 2025 Feb / Mrz 2026	C@mpus C@mpus

Come for the show, stay for the math!

Liturgie: Ablauf dieser Veranstaltung

Als wir die Veranstaltung zur Spieltheorie zum ersten Mal durchführten, stellte sich heraus, dass Teilnehmer unterschiedliche Ziele verfolgen:

- Einige kommen vor allem für den Spielspaß.
- Andere kommen für die schöne Mathematik.
- Manche kommen für die perfekte Mischung.

Die Teilnehmer hatten sehr verschiedene Präferenzen, aber wir nur ein gemeinsames Angebot: *One size fits all.* Diese Situation war nicht ideal.

Soweit unsere Marktforschung. Wir haben viel Zeit und Mühe investiert, wir haben nicht geruht und unser Premiumprodukt weiterentwickelt. Der Kampf um die beste Vorlesung ist hart. Die Konkurrenz schläft nicht.

Wäre es nicht wunderbar, wenn sich jede/r interessierte Studierende die Spieltheorie aussuchen könnte, die ihr/ihm am besten passt?

Für die einen purer Spielspaß, für die anderen schöne Mathematik, und für die Genießer die perfekte Mischung aus beidem.

Suchen Sie nicht länger, wir haben die Antwort!

Liturgie: Ablauf dieser Veranstaltung

Wir bieten Ihnen die Spieltheorie weiterhin in gewohnt bester Qualität auf dem Silbertablett, und jetzt sogar in zwei Geschmacksrichtungen:

- Als **knallharte, mathematische Spieltheorie** mit wöchentlich zwei Vorlesungen und einer Übung und der abschließenden Klausur: Die 9 Leistungspunkte für die Spieltheorie gibt es hier und nur hier.
- Als **spaßorientierte, angewandte Spieltheorie**: Auch hier können Sie viel gewinnen: Erfahrung und Erleuchtung, Süssigkeiten und echtes Geld. Aber erwarten sie nicht auch noch Leistungspunkte!

Die beiden Teile ergänzen sich, sind aber unabhängig. *Choose wisely!*

Die experimentelle Spieltheorie illustriert und motiviert durch zahlreiche konkrete Beispiele und manche überraschende empirische Erkenntnis. Idealerweise wollen Sie dann auch die Theorie dahinter verstehen.

Im mathematischen Teil erlernen Sie präzise Modelle und Methoden und nutzen diese dann selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ. Idealerweise wollen Sie diese Erkenntnisse dann testen und anwenden.

Liturgie: Ablauf dieser Veranstaltung

Die Klausur behandelt alle Themen und Techniken aus Vorlesung und Übung, der experimentelle Spielspaß wird dort natürlich nicht abgefragt.

Though this be madness, yet there is method in't.
[Ist dies schon Wahnsinn, so hat er doch Methode.]
William Shakespeare (1564–1616), *Hamlet*

Wir feiern diese bahnbrechende Innovation mit einem neuen Branding: Der experimentelle Teil ist die angewandte Spieltheorie, kurz AngST. Die Vorlesung ist knallhart mathematische Spieltheorie, kurz KnaST.

Besonders stolz sind wir auf unsere berühmten wöchentlichen Übungen zur Spieltheorie, kurz ÜbST. „Krass! Da guckst du nicht nur, da übst du!“ Die Klausur schließlich wird das Happy End zur Spieltheorie, kurz HaST.

Träumen Sie nicht schon lange von einer Veranstaltung namens AngST? Ist es nicht entwaffnend ehrlich, wenn Ihre Vorlesung KnaST heißt? Ist nicht Ihr ganzes Studium geprägt von ÜbST und HaST? Ihre Suche wird belohnt: Hier bekommen Sie alles!

Experimente in unserem Casino **Spieltheorie in unserer Vorlesung**

Wie gelingt Ihnen die Spieltheorie?

Falls Sie (auch) wegen der Leistungspunkte hier sind, erkläre ich Ihnen, wie Sie erfolgreich studieren. Selbstverständliche Voraussetzungen:

- **sichere Beherrschung** aller Grundlagen aus Ana 1-3 und Lina 1-2
- **wöchentlich ernsthafte Bearbeitung** von Vorlesung und Übungen

Die Spieltheorie entspricht 9 Leistungspunkten: insgesamt 270h

- **Präsenz:** 14 Wochen à 4h Vorlesung + 2h Übung $\lessapprox$ 80h
- **Individuelle Arbeit:** ein weiterer Tag (8h) pro Woche $\gtrapprox$ 110h
- **Wiederholung** zur Prüfungsvorbereitung: ca 2 Wochen $\approx$ 80h

Das ist keine Übertreibung sondern jahrzehntelange Erfahrung:
6 Präsenzstunden pro Woche erfordern 12 Stunden eigene Arbeit.

Sie können Ihre Zeit anders aufteilen, aber viel Spielraum bleibt nicht.
Es gilt die Erhaltung der Arbeit: Die 270 Stunden werden Sie brauchen!

Qui va lentement, va sûrement, et qui va sûrement, va loin.
[Wer langsam geht, geht sicher, und wer sicher geht, kommt weit.]

Liturgie: Ablauf der Vorlesung

Liturgie, gr. λειτουργία [leiturgía] 'öffentlicher Dienst', kommt von λειτός [leitós] 'Volk, Volksmenge' und ἔργον [érgon] 'Werk, Dienst'. Dies bezeichnet die Gesamtheit religiöser Zeremonien und Feiern. Auch universitäre Lehre sollten wir zelebrieren und feiern.

Je dois dire qu'il n'y avait pas un cours de Lebesgue
où l'on ne riait pas d'une manière infiniment agréable.
Je soupçonne même qu'au moins le tiers des gens
venait au cours de Lebesgue pour s'amuser.
C'était infiniment intéressant, infiniment profond. […]
Pour faire un cours, il faut réfléchir pendant
qu'on le fait, et non pas se rappeler.
Szolem Mandelbrojt (1899–1983), *Souvenirs à bâtons rompus*

Vor uns liegt eine Vielzahl interessanter, schöner und wichtiger Themen. Die gemeinsame Lernzeit ist kostbar. Nutzen Sie Ihre Vorlesung optimal! Nutzen Sie die Möglichkeiten dieser Veranstaltung und fragen Sie uns! Die Feinjustierung ist wichtiger als Sie vielleicht vermuten.

Liturgie: Ablauf der Übungen

Verpflichtend ist die wöchentliche, aktive Teilnahme in der Übung. Ebenso lohnend ist natürlich die aktive Teilnahme an der Vorlesung. Sie sind eng aufeinander abgestimmt, idealerweise nutzen Sie beide:

Die Vorlesung erklärt Ihnen die nötigen Begriffe und Methoden, anschließend können Sie diese Techniken anwenden und einüben und die behandelten Themen mit weiterem Übungsmaterial vertiefen. Die Übungsblätter werden wöchentlich online zur Verfügung gestellt.

Für die Zulassung zur Klausur (aka Übungsschein) erwarten wir Ihre regelmäßige aktive Teilnahme an der wöchentlichen Übungsgruppe. Alle Informationen finden Sie in unserem Ilias-Kurs.

Mathematik lernen Sie nicht allein durch Zuschauen,
sondern durch eigene Arbeit und regelmäßige Übung.
Klavierspielen lernen Sie ja auch nicht
allein durch den Besuch von Konzerten!
nach Carl Runge (1856–1927)

Themen für dieses Semester

Optimal entscheiden	= B = Rückwärts-induktion (Zermelo)	= C = Kombinatorische Spieltheorie (Sprague–Grundy)	= D = Markov–Spiele & Optimierung (Bellman)
Statische Spiele	= E = Normalform & Gleichgewichte (Nash)	= F = Lineare Optimierung (Dantzig)	= G = Dilemmata & Evolution (Smith)
Dynamische Spiele	= H = Generationen-vertrag (Schelling)	= I = Unvollständige Information (Harsanyi)	= J = Dynamische Spiele (Selten)
Kooperative Spiele	= K = wiederholte Spiele & Kooperation (Folk Theorem)	= L = Verhandlungen: Axiome & Spiele (Nash, Binmore)	= M = Koalitionen: Axiome & Spiele (Shapley, Hart–Mas-Collel)
Mechanismen-design	= N = Kollektive Entscheidungen (Arrow)	= O = Implementierung & Un/Redlichkeit (Gibbard–Satterthwaite)	= P = Auktionen & In/Effizienz (Vikrey)

Wie gelingt Ihnen das Studium?

Die Universität als Wissenstrichter?

Erwarten Sie nicht, dass irgendjemand Ihnen irgendetwas beibringen könnte — ohne Ihr Zutun. Ich kann Ihnen viel Spannendes erzählen, doch nur Sie selbst können sich Verständnis erarbeiten. Zwei Faktoren bestimmen Ihren Lernerfolg: extrinsische Anregung und intrisische Motivation!

Diese Vorlesung wird Ihnen viele interessante Dinge zeigen, Phänomene und Beispiele erläutern, Argumente und Sätze erklären. Wenn Sie möchten, kann das eine große Hilfe sein, doch letztlich müssen Sie selbst dieses Material eigenständig durcharbeiten, um es zu beherrschen.

Erstrebenswerte Lernziele

Die Studierenden beherrschen die grundlegenden Begriffe und Techniken der Spieltheorie. Sie verfügen über die mathematischen Grundlagen für das Verständnis spieltheoretischer Modelle in den angrenzenden Wissenschaften und können sich mit Spezialisten darüber verständigen. Sie sind in der Lage, die behandelten Methoden selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ anzuwenden, ähnlich strukturierte Probleme zu erkennen, mathematisch zu modellieren und rechnerisch zu lösen.

- **Selbstständig:** Es geht nicht nur um Auswendiglernen, sondern um Verstehen und unabhängige Urteilsfähigkeit.
- **Sicher:** Es geht nicht nur um Intuition oder Spekulieren, sondern um nachvollziehbare Argumente und Rechnungen.
- **Kritisch:** Es geht nicht nur um Glauben oder (Auto)Suggestion, sondern um (selbst)kritische Fragen und sorgfältige Antworten.
- **Korrekt:** Sie beherrschen Definitionen, Sätze, Methoden, Proben. Gegenbeispiele zeigen Fehlerquellen, die es zu vermeiden gilt.
- **Kreativ:** Es geht nicht nur um fertige Rezepte, sondern um eigenständige Anwendung.

Ehrlicher Arbeitsaufwand

Bei allem Spielspaß erfordert diese ambitionierte Zielsetzung Fleiß und Disziplin. Das spiegelt sich deutlich im Zeit- und Arbeitsaufwand wider. Die folgende einfache Rechnung löst immer wieder Erstaunen aus:

Dieser Kurs entspricht 9 Leistungspunkten, also 270 Arbeitsstunden:

- ca 84 Stunden Präsenz (6 Stunden wöchentlich, bestehend aus 4 Stunden Vorlesung und 2 Stunden Übung, für knapp 14 Wochen)
- ca 112 Stunden eigene Arbeit während der Vorlesungszeit (etwa 8 Stunden wöchentlich, Vor- und Nachbereitung und Hausaufgaben)
- ca 74 Stunden Prüfungsvorbereitung nach der Vorlesungszeit (etwa ein bis zwei Wochen, je nach Bedarf und Intensität)

Diese umfangreiche Bemessung der nötigen *eigenen* Arbeitszeit beruht auf jahrzehntelanger Erfahrung. Individuelle Werte können und werden davon abweichen, nichtsdestotrotz sollen beide Seiten, Lehrende und Lernende, sich ehrlicherweise an dieser Schätzung orientieren.

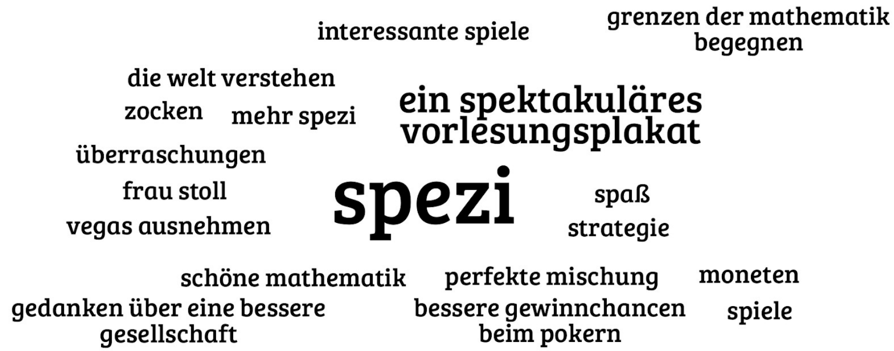
Gehen Sie den ganzen Weg und planen Sie fest die volle wöchentliche Arbeitszeit ein, bereits während des Semesters parallel zur Vorlesung!

Schnappschuss: Erwartungen der Studierenden

Erwartungen der Studierenden zu Beginn des Semesters (WiSe 2019):
„Was erhoffen Sie sich von dieser Veranstaltung zur Spieltheorie?“

Schnappschuss: Erwartungen der Studierenden

Erwartungen der Studierenden zu Beginn des Semesters (SoSe 2022):
„Was erhoffen Sie sich von dieser Veranstaltung zur Spieltheorie?“



Schnappschuss: Erwartungen der Studierenden

Erwartungen der Studierenden zu Beginn des Semesters (SoSe 2025):
„Was erhoffen Sie sich von dieser Veranstaltung zur Spieltheorie?“

Ist Spieltheorie die / eine Krönung Ihres Mathestudiums?

Spieltheorie fasziniert und begeistert, fördert und fordert das Verständnis, mobilisiert nahezu alle Techniken, sie zieht alle Register der Mathematik. Das ist die Gelegenheit, von Ihrer mathematischen Reife zu profitieren!

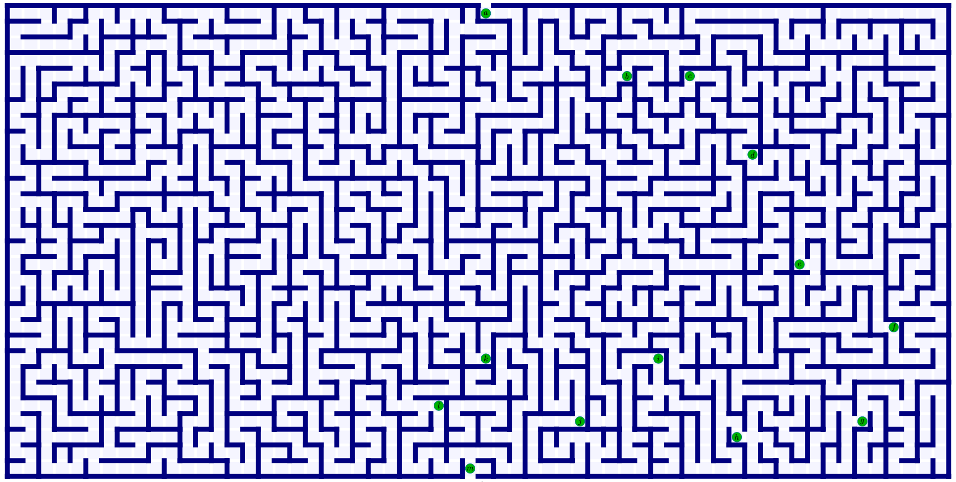
„Mathematik ist schön und nützlich.“ — „Ich beherrsche die Grundlagen.“ — „Bestens! Mit Spieltheorie können Sie diese wunderbar anwenden.“ — „Wenn mir Vorwissen fehlt?“ — „Dann holen Sie es jetzt nach!“

Diese Vorlesung ist problemorientiert [*problem driven*]. Das bedeutet ganz einfach: Die jeweilige Fragestellung der Anwendung bestimmt die mathematischen Werkzeuge. Wir benötigen selbstverständlich Analysis, Lineare Algebra und (elementare) Wahrscheinlichkeitsrechnung, gelegentlich auch Topologie, insbesondere Fixpunktsätze.

Auch hier gebe ich Ihnen konkrete Beispiele, damit Sie besser verstehen, was ich meine. Am Ende dieser Einführung zeige ich eine wunderschöne und echte Anwendung der Topologie in den Wirtschaftswissenschaften. Sie haben die Topologie noch nicht gehört? Ein beauderlicher Fehler! Können Sie diese Fehlentscheidung korrigieren? Ja, gerne, jederzeit!

Arbeitsteilung zwischen Lehren und Lernen

Ich führe Argumente sorgsam vor. — Sie arbeiten alles gründlich nach.



Ich zeige Ihnen den Weg vom Start zum Ziel. Wir teilen uns die Arbeit: Ich erkläre die wesentlichen Etappen. Sie ergänzen und klären Details. Wir gehen den Weg gemeinsam; kommen Sie startklar und vorbereitet!

Arbeitsteilung zwischen Lehren und Lernen

⚠ Ihr Uni-Studium fordert und fördert Ihr selbständiges Arbeiten! Ich vertraue, dass Sie lernen wollen und sich die nötige Zeit nehmen. Der Schlüssel zu Ihrem Erfolg sind Ihre Aktivierung, Ihre Investition, Ihr persönliches Engagement und Ihre kontinuierliche, ernsthafte Mitarbeit.

Ich präsentiere Ihnen schöne und nützliche Mathematik und leite Sie durch die Vorlesung. Kleinschrittig oder summarisch? Zu große Schritte frustrieren und entmutigen, zu kleine Schritten bremsen und langweilen. Das richtige Tempo ist eine Frage der Erfahrung und der Verhandlung.

⚠ In der Vorlesung n nutzen wir die Ergebnisse der Vorlesungen $< n$. In der Mathematik bauen Begriffe und Techniken stark aufeinander auf, mehr als in jeder anderen Wissenschaft. Das ist Fluch und Segen zugleich, sowohl effizienter Aufbau als auch Herausforderung beim Erlernen!

Shakespeares Werke können Sie in beliebiger Reihenfolge und Auswahl genießen. Achtung: Für mathematische Werke gilt dies definitiv nicht! Arbeiten Sie kontinuierlich mit, *vor* und *nach*, Vorlesungen und Übungen, bleiben Sie am Ball, nur so kann es gelingen, so macht es allen Freude.

Wie detailliert soll die Darstellung sein?

Beweise in einem Lehrbuch für Studienanfänger sind recht ausführlich, für ein Expertenpublikum werden Beweise deutlich knapper formuliert. Semester für Semester entwickeln Sie sich vom Anfänger zum Experten.

Was also ist ein Beweis genau? Wie detailliert ausgeführt muss er sein? Wie groß dürfen die logischen Schritte maximal sein? Hierzu sind zwei Antworten möglich: formal-dogmatisch oder sozial-pragmatisch.

Dogmatische Antwort: In einem vollständig formalisierten Beweis ist jeder Schritt die Anwendung einer Schlussregel. Wir beginnen mit einer Liste von wahren Aussagen (Axiome, Voraussetzungen) und erweitern diese schrittweise durch logisches Schließen, jeweils mit Angabe der verwendeten Schlussregel. Am Ende steht die ersehnte Behauptung.

Im obigen Bild ist das der vollständig ausgeführte Lösungsweg, etwa als eine lange Folge von kleinen Beweisschritten, jeder davon ist elementar. Die Richtigkeit kann ein Computer mechanisch prüfen (*proof checker*). Für menschliche Leser ist die mechanische Prüfung leider mühsam und wenig lehrreich, sie vermittelt meist keine Idee, Vision oder Inspiration.

Wie detailliert soll die Darstellung sein?

Pragmatische Antwort: Traditionell schreiben wir Beweise nicht für Maschinen, sondern für Menschen. Es gibt immer mehr Ausnahmen, etwa in der Programmierung, aber denken wir an diese Vorlesung.

Für ein menschliches Gegenüber ist es üblich, nicht alle elementaren Schritte auszuführen, sondern den Beweisgang allein durch geeignete Zwischenpunkte abzustecken. Das ist effizienter, sowohl für Sender:in als auch für Empfänger:in. Die Zwischenpunkte sollen eng genug sein, sodass die Empfänger:in den Weg dazwischen selbst rekonstruieren kann.

Das rechte Maß, ob detailliert ausgeführt oder nur grob skizziert, hängt somit vom Empfänger ab! Beweise in Lehrbüchern sind recht detailliert, Artikel in Fachzeitschriften sind knapper und Beweise oft nur skizziert. Die Komprimierung verschiebt die Beweislast von Sender zu Empfänger. Die Balance ist eine Kunst, sie beruht auf Konvention und Erfahrung.

Beispiel: Im Aufbau dieser Vorlesung versuche ich, die entscheidenden Zwischenschritte anzugeben. Routinierte Rechnungen hingegen führe ich meist nicht aus, sondern übertrage sie Ihnen. Das ist Ihre Aufgabe.

A: Einführung zur Spieltheorie

A1 Einführung: Was sind Spiele?
- A1.1 Erste Beispiele, erste Ideen
- A1.2 Wer interessiert sich für Spieltheorie?
- A1.3 Erstes Experiment: Hin-und-Rück

A2 Denken hilft: Stufen der Rationalität
- A2.1 Un/Gerecht teilen: Kuchen und Erbe
- A2.2 Un/Klug positionieren: Strandkiosk und Politik
- A2.3 Ir/Rational verhandeln: drohen oder nachgeben?

A3 Methoden und Anwendungen der Spieltheorie
- A3.1 Die Rolle der Mathematik
- A3.2 Anwendungen der Spieltheorie
- A3.3 Literatur zur Spieltheorie

A4 Was ist Gamification?
- A4.1 Konfidenz als Spiel
- A4.2 Logikrätsel als Spiel
- A4.3 Topologie von Wahlen

B: Rückwärtsinduktion nach Zermelo

B1 Dynamische Spiele: Zustände und Aktionen
- B1.1 Graphen als tragende Grundstruktur
- B1.2 Artinsche Graphen und noethersche Induktion
- B1.3 Markov–Graphen und erwartete Auszahlungen
- B1.4 Rückwärtsinduktion zur Bellman–Gleichung

B2 Nutzenmaximierung durch Rückwärtsinduktion
- B2.1 Optimal entscheiden: Work & Travel
- B2.2 Optimales Stoppen und Bruss–Algorithmus
- B2.3 Würfeln bis die Eins kommt
- B2.4 Bayes beim Tischkicker

B3 Gegenseitiges Wissen und Vorwärtsinduktion
- B3.1 Ich weiß etwas, was du nicht weißt.
- B3.2 Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?
- B3.3 Tanz der Vampire: gemeinsames Wissen
- B3.4 Stuttgarter Mathematiker und Abischerz

C: Kombinatorische Spieltheorie und der Satz von Sprague–Grundy

C1 Neutrale kombinatorische Spiele
- C1.1 Einzeiliges Nim und dynamische Programmierung
- C1.2 Neutrale Spiele und Rückwärtsinduktion
- C1.3 Das Spiel Nim und Boutons effiziente Lösung
- C1.4 Summen von Spielen und Sprague–Grundy–Satz

C2 Anwendungsbeispiele und weitere Aufgaben
- C2.1 Lasker–Nim, Grundys Spiel, Fliesentetris
- C2.2 Schleifenspiele: Poker-Nim und Northcotts Spiel
- C2.3 Das Spiel Chomp! nach David Gale
- C2.4 Wie viel Rationalität benötigen wir?

C3 Mengen und Logik als Spiele
- C3.1 Schach ist determiniert: Zermelo
- C3.2 Mengen als Spiele: von Neumann
- C3.3 Quantorenspiele: Eva vs Adam
- C3.4 Isomorphiespiele: Samson vs Delila

D: Markov–Spiele und Bellmans Optimalitätsprinzip

D1 Markov–Spiele: erste Beispiele
- D1.1 Erwartete Auszahlung in einem Markov–Belohnungsprozess
- D1.2 Irrfahrt, Gewinnerwartung und optimale Entscheidung
- D1.3 Google: Wo häuft sich die zufällige Irrfahrt im Internet?

D2 Bellmans Optimalitätsprinzip
- D2.1 Banachs Fixpunktsatz und Blackwells Kriterium
- D2.2 Markov–Graphen, Erwartung und Optimalität
- D2.3 Bellmans Optimalitätsprinzip

D3 Anwendung im maschinellen Lernen
- D3.1 Optimale Routenplanung eines Roboters
- D3.2 Gewinniteration vs Strategieiteration
- D3.3 Bestärkendes Lernen / *reinforcement learning*

D4 Ausblick: die wunderbare Welt der Wahrscheinlichkeit
- D4.1 Zufällige Irrfahrten und Markov–Prozesse
- D4.2 Entropie verstehen und anwenden

E: Strategische Spiele und Nash–Gleichgewichte

E1 Strategische Spiele und Nash–Gleichgewichte
- E1.1 Strategische Spiele in Normalform
- E1.2 Fortsetzung von reinen zu gemischten Strategien
- E1.3 Der Existenzsatz für Nash–Gleichgewichte
- E1.4 Spiele mit beliebig vielen Spielern

E2 Sicherheit, Dominanz, Symmetrie
- E2.1 Nullsummenspiele und ihr Hauptsatz: Minimax = Maximin
- E2.2 Dominierte Strategien und Rationalisierbarkeit
- E2.3 Symmetrien von Spielen und Gleichgewichten

E3 Nash–Gleichgewichte finden und zählen
- E3.1 Regularität und Lösung von Bimatrix-Spielen
- E3.2 Die lokale Struktur regulärer Nash–Gleichgewichte
- E3.3 Der globale Struktursatz von Kohlberg–Mertens

E4 Anwendungsbeispiele und weitere Aufgaben
- E4.1 Weitere Beispiele zu Gleichgewichten

F: Lineare Optimierung und Dantzigs Simplexverfahren

F1 Lineare Optimierung durch Basiswechsel und Simplexverfahren
- F1.1 Optimierung durch wiederholte Basiswechsel
- F1.2 Lineare Programme und Optimierung
- F1.3 Dualität und zertifizierte Lösungen

F2 Anwendungsbeispiele und weitere Aufgaben
- F2.1 Lösung von Zwei-Personen-Nullsummen-Spielen
- F2.2 Berechnung von korrelierten Gleichgewichten
- F2.3 Lineare Approximation mit kleinstem L^1–Fehler

F3 Vom heuristischen Verfahren zum Algorithmus
- F3.1 Der Hauptsatz des Simplexverfahrens
- F3.2 Phase 1 und 2 des Simplexverfahrens
- F3.3 Laufzeit von Simplexalgorithmen

G: Soziale Normen und Dilemmata, Koordination und Evolution

G1 Soziale Konventionen
- G1.1 Koordination: links oder rechts?
- G1.2 Soziokulturelle Kompetenz
- G1.3 Zielkonflikte: Nash oder Pareto?
- G1.4 Ratio vs Moral: einfache Modellbeispiele

G2 Soziale Dilemmata
- G2.1 Soziales Dilemma und die Tragik der Allmende
- G2.2 Paradoxer Verkehrsfluss nach Dietrich Braess
- G2.3 In/Effizienz: Wie hoch ist der Preis der Anarchie?
- G2.4 Potentialspiele: Alle ziehen am selben Strang?

G3 Evolutionäre Spiele
- G3.1 Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra
- G3.2 Die Replikatorgleichung zur Populationsdynamik
- G3.3 Evolutionär stabile Strategien nach Maynard Smith
- G3.4 Klein aber mein allein: Lernen aus sozialem Dilemma

H: Ponzi–Betrug vs Rentenmodell:
Wie gelingt ein Generationenvertrag?

H1 Fiat Money – Es werde Geld!
- H1.1 Kreative Summation und Umordnungsschwindel
- H1.2 Von Hilberts Hotel zu Ponzis Pyramidenbetrug
- H1.3 Wie funktioniert Geld, und wie nicht?

H2 Sustainability – Unsere Zukunft steht auf dem Spiel!
- H2.1 Überlappende Generationen und Gleichgewichte
- H2.2 Altersversorgung als spieltheoretisches Modell
- H2.3 Nachhaltigkeit als spieltheoretisches Modell

H3 Self-Management – Wer bin ich und wie viele?
- H3.1 Egonomics nach Thomas Schelling
- H3.2 Mischels Marshmallow-Experiment
- H3.3 Studium als Investition und als Konsum

I: Spiele mit unvollständiger Information und Bayes–Gleichgewichte nach John Harsanyi

J: Dynamische Spiele und teilspielperfekte Gleichgewichte nach Reinhard Selten

K: Wiederholte Spiele und Nashs Folk Theorem

L: Verhandlungen, Nash–Lösung und Rubinstein–Implementierung

M: Koalitionen, Kern und Shapley–Wert

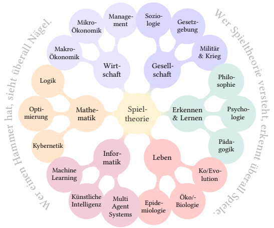
N: Kollektive Entscheidungen und Arrows Satz vom Diktator

O: Implementierungstheorie und der Satz von Gibbard–Satterthwaite

P: Auktionen und Äquivalenzsatz von Vickrey

Kapitel A

Einführung zur Spieltheorie



Das ganze Leben ist ein Spiel,
und wir sind nur die Kandidaten.
Hape Kerkeling (1964–)

Inhalt dieses Kapitels A

Worum geht es in der Spieltheorie?

Spieltheorie versucht, strategisches / ökonomisches / menschliches Verhalten zu beschreiben, zu erklären, vorherzusagen, zu optimieren.

To be literate in the modern age, you need to have
a general understanding of game theory.
Paul Samuelson (1915–2009, Nobelpreis 1970)

Spiele beschreiben Konflikte, Konkurrenz und Kooperation:
- Mehrere Akteure interagieren (Individuen, Firmen, Staaten, KI).
- Jeder Akteur hat gewisse Handlungsoptionen (Züge, Strategien).
- Aus diesen Möglichkeiten wählt jeder Akteur aus (frei, unabhängig).
- Daraus entsteht für jeden ein Ergebnis (Nutzen, Auszahlung, etc).
- Jeder Spieler versucht, sein eigenes Ergebnis zu maximieren.

If people do not believe that mathematics is simple,
it is only because they do not realize how complicated life is.
John von Neumann (1903–1957)

Worum geht es in der Spieltheorie?

Spieltheorie ist ein (inzwischen sehr) umfangreicher Werkzeugkasten. Das ist das Ziel dieser einführenden Vorlesung: Die Teilnehmer sollen sich befähigen, grundlegende Methoden der Spieltheorie anzuwenden, und zwar selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ.

Die Spieltheorie ist auf wunderbar konkrete Anwendungen ausgerichtet, gerade dazu nutzt sie abstrakte und raffinierte mathematische Modelle. Theorie und Anwendung sind keine Gegensätze, sie ergänzen sich! Diese extreme Spannweite ist faszinierend, für manche abschreckend.

Zahlreiche Beispiele und Anwendungen dienen als leuchtende Vorbilder. Mit Hilfe spieltheoretischer Modelle, Begriffe und Methoden können wir Konflikte besser verstehen, mathematisch beschreiben und analysieren, dazu systematisch mögliche Lösungen finden, konstruieren und prüfen.

Manche Konflikte haben eindeutige Lösungen, die meisten leider nicht. Im ersten Falle kann die Analyse prädiktiv oder normativ genutzt werden, im zweiten Falle ist sie immerhin noch deskriptiv oder explikativ nutzbar. Die Spieltheorie bietet magische Momente, aber keine Wunder.

Was ist ein Spiel allgemein gesehen?

Spiele im engeren Sinne sind Kinderspiele, Geschicklichkeitsspiele, Karten- / Brett- / Rollen- / Gesellschafts- / Rate- / Denkspiele, Computer- / Handyspiele, sportliche Wettkämpfe von Bundesjugendspielen bis zu Olympischen Spielen, darunter Test- / Freundschafts- / Endspiele, etc.

Wir fassen den Begriff des Spiels im Folgenden **im weiteren Sinne** als Interaktion mehrerer Akteure, wobei es zu Konflikten kommen kann. Hierzu betrachten wir konkrete Lehrbeispiele: extrem vereinfacht, doch repräsentativ. Ihre mathematische Untersuchung ist zunächst elementar.

“Elementary” does not mean easy to understand.
“Elementary” means that very little is required
to know ahead of time in order to understand it,
except to have an infinite amount of intelligence.
Richard P. Feynman (1918–1988, Physik-Nobelpreis 1965)

Ihre Investition in mathematische Grundlagen trägt hier reiche Früchte als „infinite amount of intelligence“, zumindest als ein erster Vorschuss. Fixpunktsätze, Integrale, Differentialgleichungen, etc. kommen später.

Warum spielt der Mensch?

Es ist eine bemerkenswerte Grunderfahrung: **Der Mensch spielt**, sogar häufig und gerne! Das unterscheidet ihn von vielen anderen Lebewesen.

Homo ludens, der spielende Mensch: Im Spiel entdeckt und übt der Mensch seine Fähigkeiten, macht Erfahrungen und entwickelt seine Persönlichkeit. Er erprobt Handlungsfreiheit und eigenes Denken. Er erkennt und antizipiert die Konsequenzen seines Handelns.

Warum ist das so? **Alles Leben ist Problemlösen**, schrieb Karl Popper. Und erfahrungsgemäß führt uns das Leben immer wieder in Konflikte. Daher ist es überaus sinnvoll, Probleme vorher „durchzuspielen“. Die Evolution hat uns hierzu Neugier und Spielfreude geschenkt.

Die genauere Untersuchung führt uns zur **Spieltheorie**. Dies können wir ebenso gut *Konflikttheorie* nennen, oder *Theorie der strategischen Interaktion* oder *Interaktive Entscheidungstheorie*. Das klingt seriös aber leider auch schwerfällig. Die Bezeichnung *Spieltheorie* hat viele Vorteile: Sie ist kurz und knapp, klingt lustig und positiv, beschreibt die Situation recht treffend und ist seit bald einhundert Jahren traditionell üblich.

Eigenschaften von Spielen

Anzahl der Akteure?

- Ein Spieler: … Geschicklichkeit, Steuerung, Optimierung
- Zwei Spieler: … Tischtennis, Schach, Handel, Vertrag
- Drei und mehr Spieler: … Wahlen, Koalitionen, Gesellschaft

Konkurrenz oder Kooperation?

- Nullsummen vs Win-Win: … Marktaufteilung, Absprachen
- kompetitiv vs kooperativ: … Verträge, Nebenzahlungen

Zufall und Information?

- deterministisch vs stochastisch: … Go, Backgammon, Monopoly
- un/vollständige Information: … Kniffel, Lotto, Poker, Battleship

Zeitlicher Verlauf?

- parallel vs sequentiell: … Schere-Stein-Papier, Quizz, Klausur
- diskret vs kontinuierlich: … Brettspiele, Onlinespiele, Börse

Weitere Beispiele: Straßenverkehr, Schwarzfahren, Fußball, Elfmeter, Auktion, Schule/Uni, Karriere, Kirche, Kochen, Kindererziehung, etc.

Eigenschaften von Spielen

Spiele mit nur **einem Akteur** können bereits sehr anspruchsvoll sein: Geschick, Steuerung, Kybernetik, Optimierung, Entscheidung, etc.

Sie wollen mit einem Fahrzeug von A nach B kommen (Auto, Fahrrad, Schiff, Flugzeug, Raumsonde etc.). Damit dies überhaupt möglich ist, müssen Sie Ihr Vehikel zunächst steuern können. Zudem wollen Sie den besten Weg finden, Zeit und Aufwand minimieren, Nutzen maximieren.

In der Ökonomie muss jeder Akteur ähnliche Probleme lösen: Was ist möglich? Was ist erstrebenswert? Wie finde ich die beste Möglichkeit? Das führt zu Fragen und Methoden der mathematischen Optimierung.

Bei zwei oder mehr Spielern kommt es zu **Interaktion:** Das Ergebnis jedes Akteurs hängt nicht nur von seinen eigenen Entscheidungen ab, sondern auch von den Aktionen der anderen Akteure. Dabei kann es zu Konflikten kommen, sowohl zu Konkurrenz als auch zu Kooperation.

Die Liste der Beispiele und möglicher Anwendungen ist schier endlos. Die folgende Auswahl gibt hierzu ein paar Denkanstöße, sie sollen Ihre Neugier wecken und einen Ausblick auf weitere Kapitel umreißen.

Erste Bei-Spiele

Beim **Tischtennis** ist eher die physische Geschicklichkeit gefragt, beim **Schach** und ähnlichen Strategiespielen hingegen die mentale. **Handel** zwischen zwei Akteuren oder ein **Vertrag** ist ebenso ein Spiel: Jeder möchte sein Ergebnis maximieren, genau darum wird gerungen.

Wahlen sind ein großes und recht komplexes Spiel. In Deutschland leben etwa 83 Mio Menschen, davon sind etwa 61 Mio wahlberechtigt. Idealerweise sollte jede:r nach eigener ehrlicher Überzeugung stimmen, doch die informierte Einschätzung ist schwierig, zumal bei mehreren Kriterien, die Entscheidung ist komplex, dies kann zu strategischer Wahl führen. Politische Akteure wissen das und handeln ihrerseits strategisch.

Wenn schon die Sachfragen kompliziert sind, dann sollten wenigstens die genutzten **Wahlverfahren** einfach und gerecht sein, nicht wahr? Bei der Wahl zwischen genau zwei Alternativen gelingt dies tatsächlich, doch ab drei Alternativen existiert leider kein perfektes Wahlverfahren. Dieses erstaunliche Ergebnis ist **Arrows Satz vom Diktator** und von Gibbard–Satterthwaite zur Manipulierbarkeit von Wahlverfahren.

Erste Bei-Spiele

Bei einem **Nullsummenspiel** muss der andere verlieren, was der eine gewinnt; wir denken an die Aufteilung eines Marktes konstanter Größe. Solche Spiele heißen etwas allgemeiner auch **strikt kompetitiv**.

Absprachen können zu einer **Win-Win-Situation** genutzt werden, also gegenseitigem Nutzen. Im Sinne eines **Kartells** ist dies illegal, da auf Kosten wehrloser Dritter. Betrachtet man diese als einen weiteren Spieler, so handelt es sich insgesamt wieder um ein Nullsummenspiel.

Fußball ist normalerweise ein Nullsummenspiel: Ein Team gewinnt, das andere verliert. Turniere zeigen oft Ausnahmen, etwa bei der WM 1982 die **Schande von Gijón**: Deutschland und Österreich trennten sich einvernehmlich 1:0 zu Lasten von Algerien. (`www.shz.de/183769`)

Bei **kooperativen** Spielen sind Absprachen und Verträge zwischen den Akteuren möglich, etwa im Rahmen fest vorgegebener Vertragsgesetze. Bei **nicht-kooperativen** Spielen ist dies nicht möglich oder nicht erlaubt. Vereinbarungen müssen innerhalb des Spiels selbst-stabilisierend sein, etwa durch glaubhafte Drohungen oder allgemein Nash–Gleichgewichte.

Erste Bei-Spiele

Zufall spielt oft eine wesentliche Rolle, allgemein im Leben wie auch in zahlreichen Spielen. Damit eng verknüpft ist die Frage der **Information**: Wer weiß wann was? Auch der **zeitliche Ablauf** des Spiels ist wichtig: Ziehen Spieler gleichzeitig oder immer streng nacheinander? in Runden nach einen vorgegebenen Takt oder jederzeit, kontinuierlich, asynchron?

Bei **Brettspielen** wie Monopoly wird gewürfelt, das Ergebnis ist danach allen Spielern bekannt. Bei **Kartenspielen** wie Poker hat jeder Spieler nur Teilinformation; er kennt seine Karten, aber nicht die der anderen.

Bei **Schere-Stein-Papier** wird gleichzeitig gezogen. Das Spiel ist sinnlos, wenn einer zuerst zieht, und der zweite diesen Zug kennt. Stehen beide Rücken an Rücken, so ist Gleichzeitigkeit entbehrlich.

Eine **Klausur** dient als Stichprobe im Rahmen der vereinbarten Themen: Allzu leichte Vorhersehbarkeit mindert die repräsentative Aussagekraft, daher werden die Aufgaben möglichst zufällig gewählt, meist gewichtet. Ebenso wichtig ist, dass alle Teilnehmer die Klausur parallel schreiben, andernfalls wäre die Informationslage extrem ungleich und ungerecht.

Erste Bei-Spiele

Praktisch alles im Leben ist ein Spiel oder kann so gesehen werden. Die großen Weltreligionen fassen das gesamte Leben in dieser Form: Der Mensch wählt selbst seine Handlungen und wird dafür belohnt oder bestraft: Paradies / Himmel vs Hölle, Nirwana vs Wiedergeburt, usw.

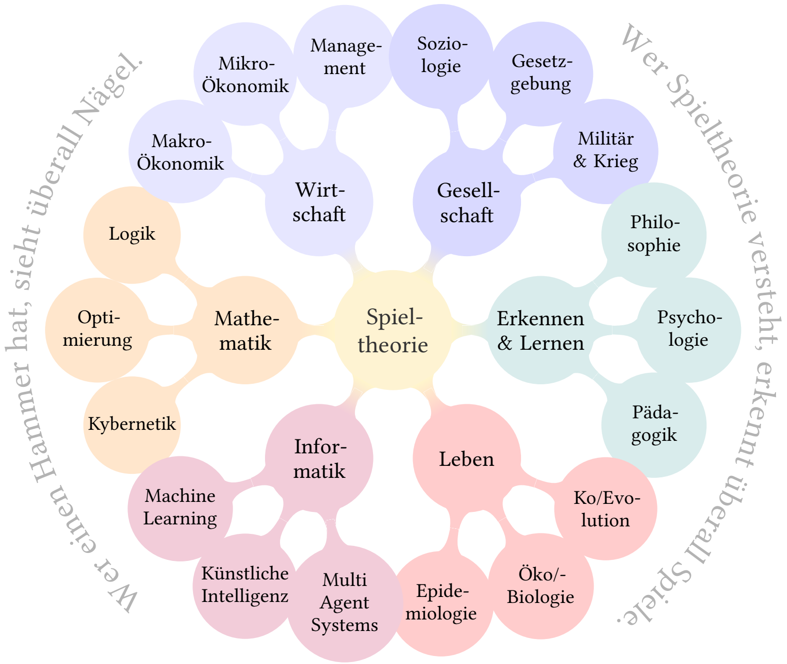
Ist dieser Vergleich provokativ? oder lächerlich? gar blasphemisch? Zu **Bibel und Moral** schrieb 2008 die Päpstliche Bibelkommission:

> *Die Sehnsucht nach Glück, das Verlangen nach einem erfüllten Leben, ist von jeher tief im menschlichen Herzen verwurzelt. Es hängt großenteils von unserem eigenen Handeln und von den Beziehungen zwischen uns Menschen ab, ob dieser Wunsch verwirklicht wird. Was ist aber dieses Handeln, das die einzelnen Personen, die Gemeinschaften und die Völker zu einem wahrhaft gelungenen Leben, zum Glück führt? Wie kann man es bestimmen?*

Ist das nicht eine spieltheoretische Problemstellung par excellence? Anschließend werden mögliche Lösungen theologisch ausgeführt:

> *Die Christen sind überzeugt, dass sie in der Bibel Hinweise und Normen finden für das rechte Handeln und so den Weg zur Fülle des Lebens.*

Wer interessiert sich für Spieltheorie?



Wer interessiert sich für Spiele?

- Kinder und Erwachsene (auch als Eltern: Erziehung ist ein Spiel.)
- Spieledesigner und Programmierer (bis zur künstlichen Intelligenz)
- Mathematiker und Sozialwissenschaftler (menschliches Verhalten)
- Wirtschaftswissenschaftler und Anwender (It's the economy, stupid)
- Politiker, Strategen, Militärs (die dunkle Seite der Spieltheorie)
- Biologen, Mediziner (Evolution, Ökosysteme, Epidemien)

Spiele und Konflikte sind eine uralte menschliche Grunderfahrung. Bemerkenswerterweise gab es hierzu lange keine geeignete Theorie, keine geeignete Sprache zur quantitativen Erfassung und Untersuchung.

Hierzu braucht es raffinierte Mathematik! Erste Untersuchungen unternahm in den 1920er Jahren der Mathematiker Émile Borel.

Der Durchbruch gelang jedoch erst 20 Jahre später. Der Mathematiker John von Neumann und der Ökonom Oskar Morgenstern legten hierzu 1944 die Grundlage mit ihrem bahnbrechenden Lehrbuch *Spieltheorie und ökonomisches Verhalten*. Es gilt als die Geburtsurkunde der Spieltheorie.

Spieltheorie: Gründungsväter

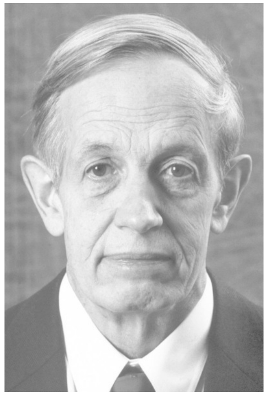

Émile Borel
(Saint-Affrique 1871 –
Paris 1956)

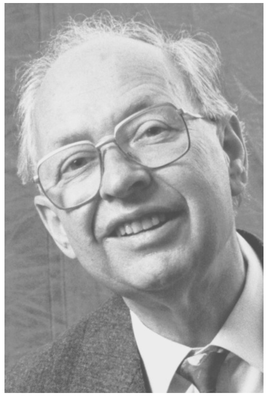

John von Neumann
(Budapest 1903 –
Washington 1957)

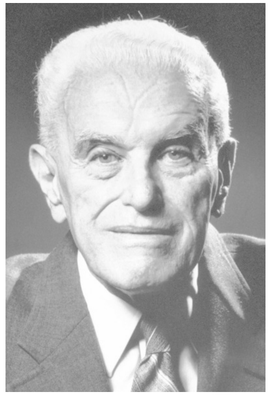

Oskar Morgenstern
(Görlitz 1902 –
Princeton 1977)

Borel: *La Theorie du jeux* (1921)
Neumann: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* (1928)
Neumann-Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior* (1944)

Spieltheorie: zweite Generation


John Nash
(Bluefield/WV 1928 –
Monroe Township/NJ 2015)


Reinhard Selten
(Breslau 1930 –
Posen 2016)


John C. Harsanyi
(Budapest 1920 –
Berkeley/CA 2000)

Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften 1994 für ihre Pionierarbeit zu Gleichgewichten in nicht-kooperativen Spielen. Mehr dazu unter `www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1994`.

Der Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften wird seit 1969 vergeben, darunter einige Auszeichnungen zur Spieltheorie. Ich nenne Preisträger, deren Themen uns im Folgenden begegnen, auch wenn wir jeweils nur die Oberfläche anreißen können.

1972: Kenneth Arrow, John Hicks „for pioneering contributions to general economic equilibrium theory and welfare theory“ [Kapitel N]

1975: Leonid Kantorovich, Tjalling Koopmans „for contributions to the theory of optimum allocation of resources“ [F, Lineare Programmierung]

1994: John Nash, John Harsanyi, Reinhard Selten „for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games“ [E, I, J]

1996: William Vickrey, James Mirrlees „for fundamental contributions to the economic theory of incentives under asymmetric information“ [P]

2002: Vernon Smith „for having established laboratory experiments as a tool in empirical economics“, Daniel Kahneman „for having integrated insights from psychological research into economic science“

2005: Robert Aumann, Thomas Schelling „for having enhanced our understanding of conflict and cooperation through game theory“ [H, I, K]

2007: Leonid Hurwicz, Eric Maskin, Roger Myerson „for having laid the foundations of mechanism design theory“ [O]

2009: Elinor Ostrom (zusammen mit Oliver Williamson) „for her analysis of economic governance, especially the commons“ [G, H]

2012: Alvin Roth, Lloyd Shapley „for the theory of stable allocations and the practice of market design“ [M]

2014: Jean Tirole „for his analysis of market power and regulation“

2017: Richard Thaler „for his contributions to behavioural economics“ [Unser wöchentliches Experimentallabor ist das Casino Royal.]

2020: Robert Wilson, Paul Milgrom „for improvements to auction theory and inventions of new auction formats“ [P]

Diese Liste wird in den nächsten Jahren voraussichtlich fortgesetzt. Oft genug ist Spieltheorie nicht das Ziel, sondern das Werkzeug.

Spieltheorie gehört zur **Mikroökonomik**, denn sie untersucht das Verhalten einzelner Akteure (Menschen, Haushalte, Unternehmen). Die **Makroökonomik** untersucht übergeordnete Größen (Kennzahlen): Investition & Konsum, Export & Import, staatliche Ausgaben & Steuern, Geldpolitik, etc. Beide Sichtweisen ergänzen sich: Die **Mikrofundierung** versucht, die Makroökonomik durch die Mikroökonomik zu erklären.

Physikalische Analogie sind Wärmelehre und kinetische Gastheorie: Die erste behandelt makroskopische Phänomene (zumeist Mittelwerte), die zweite untersucht mikroskopische Phänomene (einzelne Teilchen). Im thermischen Gleichgewicht entsprechen sich beide Sichtweisen: Das System wird durch einige wenige Zustandsgrößen beschrieben.

Ähnlich verhält es sich beim Übergang von der Mikroökonomie (weniger Akteure) zur Makroökonomie (als Grenzwert unendlich vieler Akteure). León Walras (1834–1910) suchte als erster mit Gleichgewichtsmodellen der Volkswirtschaft eine ökonomisch-mathematische Theorie, analog zu physikalisch-mathematischen Theorien wie Astronomie oder Mechanik.

Die Analogie zur Physik ist attraktiv, aber leider nicht sehr tragfähig: Bei rasanter Entwicklung ist die Gesellschaft nicht im **Gleichgewicht**. Zudem fehlt der Ökonomik zumeist eine sichere **experimentelle Basis.** Mit dieser Problematik ringen die Wirtschaftswissenschaften seit jeher. Eine empirische Grundlegung war schon immer ersehnt aber schwierig, manchen erschien dieser Zugang gar aussichtslos und unerreichbar.

Unlike the typical natural science the material to which it is applied
is, in too many respects, not homogeneous through time. […]
In the second place, […] economics is essentially
a moral science and not a natural science.
John Maynard Keynes (1883–1946)

Bevor ich Sie mit **Theorie** erleuchte oder verwirre, möchte ich gerne ein **Experiment** durchführen. Damit betone ich das empirische Gegenstück zur **mathematischen Theorie**, nämlich die **experimentelle Ökonomik**. Hier versucht man, konkrete Situationen zu verstehen, reale Daten zu erheben, um daran die Theorie zu testen, zu kalibrieren und zu schärfen.

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Zwei Spieler A und B interagieren anonym über eine Datenleitung.
Sie (er)kennen sich nicht und begegnen sich vermutlich nie wieder.

A: 10		B: 0
	$-x$ $\searrow$ $+2x$	
A: $10 - x$		B: $2x$
	$+y$ $\swarrow$ $-y$	
A: $10 - x + y$		B: $2x - y$

Zu Beginn erhält Spieler A ein Guthaben von 10€, Spieler B nur 0€.

Erster Zug: A schickt an B einen frei gewählten Betrag $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$. Dieser Betrag x wird bei A abgebucht und bei B doppelt gutgeschrieben.

Zweiter Zug: B schickt an A davon einen Betrag $y \in \{0, 1, \dots, 2x\}$. Dieser Betrag y wird bei B abgebucht und bei A gutgeschrieben.

Damit endet das Spiel und jedem wird sein Kontostand ausbezahlt.
Es gelten nur diese einfachen Regeln, und sonst keine weiteren.

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Beispiel 1: A schickt 4€, B schickt 3€ zurück. ☹ A macht Verlust.

A: 10		B: 0
	-4 $\searrow$ $+8$	
A: 6		B: 8
	$+3$ $\swarrow$ -3	
A: 9		B: 5

Beispiel 2: A schickt 7€, B schickt 9€ zurück. ☺ Beide profitieren.

A: 10		B: 0
	-7 $\searrow$ $+14$	
A: 3		B: 14
	$+9$ $\swarrow$ -9	
A: 12		B: 5

Beachte: Der zweite Zug ist ein Nullsummenspiel, der erste Zug nicht!

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Das ist ein einfaches, aber typisches Modell wirtschaftlichen Handelns. Wir können die Interaktion als **Kredit und Rückzahlung** interpretieren: Spieler A verleiht einen Teil seines Geldes, Spieler B erwirtschaftet damit eine Verdopplung und zahlt zurück: Tilgung plus Zinsen? Allerdings gibt es keinen Vertrag und auch keine Strafen!

Ebenso können wir es als **Online-Handel** interpretieren: Spieler A geht in Vorleistung und verschickt die Ware, für Spieler B ist diese doppelt so nützlich / wertvoll, schließlich bezahlt B nach seinem eigenen Ermessen. **Pay what you want** wird genutzt bei Spenden, Trinkgeld, Straßenkunst, manchen Restaurants, Veranstaltung / Theater, Hofverkauf / Blumenfeld.

Zugegeben, dieses Modell ist noch allzu simpel und eher unrealistisch, insbesondere fehlen hier alle üblichen sozialen Kontrollmechanismen. Der Vorteil ist jedoch: Alle Regeln sind besonders klar und einfach. Wir können dieses Spiel vollständig analysieren und verstehen.

Das ist ein stark vereinfachtes Modell, sozusagen ein Laborexperiment. Wir blenden alles andere aus und untersuchen es unter dem Mikroskop.

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

In der Literatur heißt dies **Vertrauensspiel**, engl. *trust game*. Es wirkt zunächst etwas ungewöhnlich, begegnet uns aber im Alltag recht häufig, hier zum Beispiel in Stuttgart-Sonnenberg auf meinem Weg zur Uni:

Stufen der Rationalität

Definition A2A: Stufen der Rationalität

Unter **(unbeschränkter) Rationalität** verstehen wir folgende Axiome:

$\mathscr{R}_0$: Jede Spieler:in will ihr Ergebnis (Nutzen, Gewinn, ...) maximieren.

$\mathscr{R}_1$: Jede Spieler:in versteht zudem alle Spielregeln und Konsequenzen.

$\mathscr{R}_2$: Es gilt die vorige Aussage $\mathscr{R}_1$, und jede Spieler:in weiß dies.

$\mathscr{R}_3$: Es gilt die vorige Aussage $\mathscr{R}_2$, und jede Spieler:in weiß dies.

etc... Genauer definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Aussage

$\mathscr{R}_n$: Es gilt die Aussage $\mathscr{R}_{n-1}$, und jede Spieler:in weiß dies.

$\mathscr{R}_\infty$: Es gilt die Aussage $\mathscr{R}_n$ für jede Stufe $n \in \mathbb{N}$.

Axiome $\mathscr{R}_0$ und $\mathscr{R}_1$ sind extrem wichtige Annahmen für die Spieltheorie: Erst damit können wir das Spielverhalten mathematisch analysieren. Je nach Spiel nutzen wir auch die Verschärfungen $\mathscr{R}_2, \mathscr{R}_3, \mathscr{R}_4, \dots$ usw.

In Spielanalysen bzw. Beweisen ist es zur Klärung nützlich anzugeben, welche Stufe $\mathscr{R}_n$ der Rationalität wir jeweils benutzen und voraussetzen. Implizite Annahmen formulieren wir damit explizit, präzise und bequem.

Stufen der Rationalität

Diese Axiome sind meist **Grundlage der Spieltheorie**. Wir müssen sie gründlich verstehen und an möglichst zahlreichen Beispielen erproben.

Als Warnung bzw. freundliche Enttäuschung schicke ich gleich vorweg: Diese Idealisierungen gelten in vielen realen Situationen leider nicht! Diese Eigenschaften sind zwar wünschenswert, doch oft nicht erfüllt. Alles hängt von den Akteuren ab: Menschen, Unternehmen, Staaten, KI.

Axiom $\mathscr{R}_0$ bedeutet: Die im Spiel formulierte Nutzenfunktion erfasst das Wesentliche. Wir verkneifen uns danach metaphysische Spekulationen über Moral, Ethik, Gerechtigkeit, Egoismus vs Altruismus, Erziehung, Tradition, Religion, Sünde, Fegefeuer, jüngstes Gericht, Karma, etc...

Damit will ich nicht behaupten, dass diese Fragen unwichtig wären, sie liegen nur außerhalb der Reichweite unseres mathematischen Modells. Sie sind nicht Teil des Spiels; wenn doch, dann in der Nutzenfunktion:

Wenn wir diese Begriffe in der Spieltheorie betrachten wollen, und das sollten wir, dann dürfen wir sie nicht implizit und vage dazufabulieren, sondern müssen sie explizit und präzise im Spiel codieren.

Stufen der Rationalität

Axiom $\mathscr{R}_1$ bedeutet: Jede Spieler:in kennt und versteht die Regeln des Spiels, sie kennt alle Handlungsoptionen und deren Konsequenzen.

Das ist eine zentrale, aber manchmal allzu starke Annahme: Für das Spiel Schach kenne ich zwar alle Regeln, aber nicht alle Konsequenzen; mir fehlt die Rechenkapazität, ausreichend viele Züge vorauszudenken.

Das gilt selbst für sehr einfache Spiele, wie unsere folgenden Beispiele. Sie erfahren damit ganz konkret, dass Sie zwar die Regeln verstehen, aber nicht sofort alle Konsequenzen durchschauen. Wir sehen das daran, dass Sie als Spieler:in nicht sofort die beste Strategie wählen, sondern noch Fehler machen. Sie beherrschen das Spiel erst nach etwas Übung!

Gerade hierzu ist es wichtig, diesen Vortrag mit konkreten Beispielen aufzubauen, die Sie dann auch ernsthaft bearbeiten und lösen sollen. Andernfalls hören Sie schöne Theorie und glauben, damit sei alles klar.

Die Wirklichkeit ist viel komplizierter... und auch viel interessanter! Neben der Spieltheorie lohnt sich immer auch das soziale Experiment. Die tatsächlich beobachtete Rationalität ist allzu oft doch beschränkt.

Stufen der Rationalität

Axiome $\mathscr{R}_2, \mathscr{R}_3$ usw. codieren die **gegenseitigen Einschätzungen**. „Als Spieler:in verhalte ich mich rational. Dazu muss ich das Verhalten der anderen vorhersehen, antizipieren, oder besser gesagt: berechnen. Am besten gelingt mir dies, wenn ich weiß, dass auch alle anderen sich rational verhalten. Davon will / muss / kann ich ausgehen.“

Wir nennen dies **gemeinsames Wissen**, engl. *common knowledge*. Es genügt nicht, dass etwas wahr ist, es muss auch jeder wissen. Und man muss sich darauf verlassen können, dass es jeder weiß. Und auch darauf, dass jeder weiß, dass jeder es weiß. Usw.

Das ist ein allgemeines und wichtiges Konzept: Das Wissen einer Spieler:in besteht neben ihrer reinen Sachkenntnis auch aus ihrem Metawissen über das Wissen der anderen Spieler:innen. „Ich weiß, dass du weißt, dass ich weiß, ...“. Das klingt vertrackt und ist es meist auch.

In strategischen Situationen sind Wissen und Nichtwissen entscheidend. Für die Analyse von Spielen (und überall sonst) ist daher die Verteilung von Wissen und der Zugang zu Information von zentraler Bedeutung.

In this ocean of madness, an island of reason?

Rationalität dient uns als Leuchtturm im Ozean der Unsicherheit.
Sie markiert ein behütetes Eiland sicheren, gefestigten Wissens.
Sie dient uns zur Navigation, selbst in unkartierten Gewässern.
Selbst fern der Rationalität hilft sie uns zur Orientierung.

Ist Rationalität ein geeignetes Fundament?

Manche Zuhörer wehren sich vehement dagegen, den Menschen auf den **Homo oeconomicus** zu reduzieren. Manche sträuben sich auch dagegen, dass ich dafür das hehre Wort „Rationalität“ missbrauche.

Als Mathematiker möchte ich die Gemüter beruhigen und die Wut mäßigen: Zunächst ist die Definition eine ehrliche Klarstellung!

Es ist sehr wichtig, keine unbewiesenen Annahmen zu treffen,
aber noch wichtiger ist es, keine Worte zu benutzen,
hinter denen sich kein klarer Sinn verbirgt.
William Kingdon Clifford (1845–1879)

Die obige Definition präzisiert explizit die zu diskutierenden Axiome: Dies sind unsere Annahmen, Voraussetzungen, Arbeitshypothesen. Es sind keineswegs pauschale Behauptungen über die Wirklichkeit.

Wir werden damit einfache Modelle untersuchen und daran viel lernen. Aussagen über das Modell, unsere Annahmen und ihre Folgerungen, lassen sich manchmal in der Wirklichkeit wiederfinden, andermal nicht.

Müssen wir alles so genau nehmen? Ja, sicher!

Auf den ersten Blick scheint es vielen von Ihnen vermutlich übertrieben, dass ich in guter mathematischer Tradition mit einer Definition beginne und den Begriff der „Rationalität“ definiere, zumindest etwas präzisiere. Dies dient als hilfreiche Abkürzung und bequeme Zusammenfassung.

Ist das nicht ohnehin alles klar? Sind Definitionen nicht übertrieben? Ich denke, nein! Gerade der Begriff „Rationalität“ kann sehr verschieden aufgefasst werden, daher möchte ich hier klar und deutlich aussprechen, was ich darunter verstehen will, und wie Sie mich bitte verstehen sollen.

Natürlich können Sie zur Rationalität eine andere Auffassung vertreten, doch wir müssen jeweils eindeutig darlegen, was wir darunter verstehen. Das ist eine Frage guter Kommunikation. Andernfalls provozieren wir unnötige Missverständnisse, und unsere Diskussion dreht sich im Kreis.

Die mathematische Vorgehensweise der Spieltheorie ist daher gar nicht überraschend, sondern entspricht dem Vorbild anderer Wissenschaften: Wir wollen ganz konkrete Probleme lösen und Anwendungen verstehen, dazu müssen wir Begriffe klären und tragfähige Argumente entwickeln.

Modell und Wirklichkeit

Zur Illustration gebe ich einfache, konkrete **Anwendungsbeispiele**. Sie sind zwar extrem vereinfacht und etwas fiktiv, aber doch lehrreich: Sie zeigen ganz handfeste Konsequenzen von Ir/Rationalität, und dass wir uns mit dieser Problematik genauer auseinandersetzen müssen.

Das ist die Stärke und zugleich die Begrenzung **abstrakter Modelle**: Sie treffen einen Kern des Problems, sie sind einfach und übersichtlich und leicht zu verstehen, sie taugen wunderbar als erste Näherung. Sie dienen als Ausgangspunkt und Orientierung für Anwendungen.

Wir werden dieses bemerkenswerte Phänomen noch oft beobachten: Selbst einfache Spiele können den wahren Kern eines Konflikts treffen. Physiker sprechen hier traditionell nüchtern von der **ersten Näherung**, die bei Bedarf durch die zweite, dritte, ... Näherung verfeinert wird.

Das **Modell**, das wir von der **Realität** entwerfen, hilft und leitet uns, doch niemals sollten wir naiv das Modell für die Wirklichkeit halten. Von dieser ersten Näherung ausgehend können wir unser Modell je nach Bedarf verfeinern und konkreten Gegebenheiten anpassen.

Beispiel: einen Kuchen teilen

Aufgabe: Zwei Kinder, Alice und Bob, teilen sich einen Schokokuchen. Damit es gerecht zugeht, gibt der Vater vor: Alice teilt, Bob wählt aus. Was wird passieren? rational? irrational? Ist das Ergebnis gerecht?

Lösung: $\mathscr{R}_0$: Jedes Kind will möglichst viel Schokokuchen.
Diese Annahme ist grundlegend für unsere Analyse!

$\mathscr{R}_1$: Bob wird das größere Stück erkennen und sich nehmen.
Er kann beide Stücke anschauen oder wiegen, um sicher zu gehen.

$\mathscr{R}_2$: Alice weiß, dass sie das kleinere Stück bekommen wird.
Daher schneidet Alice zwei möglichst gleich große Stücke.

☺ Dieses einfache Beispiel illustriert die Stufen der Rationalität.
Alle Voraussetzungen sind tatsächlich nötig für unsere Analyse!

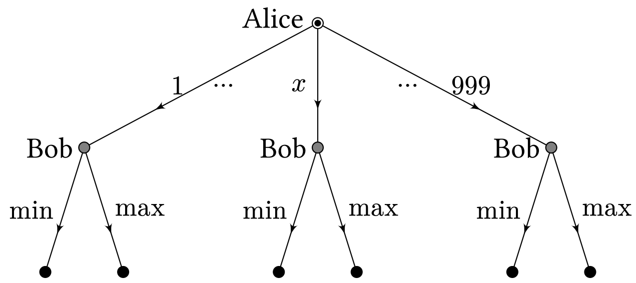
☺ Wir werden später strategische Spiele in Normalform erklären und diese Lösung als (das einzige) Nash–Gleichgewicht wiedererkennen.

Übung: Sobald Sie die Techniken kennen, führen Sie dies aus!

Beispiel: einen Kuchen teilen

Auszahlungsmatrix (statisch) und Spielbaum (dynamisch) in Gramm:

Alice \ Bob	wähle Min	wähle Max
$x < 500$	x / $1000-x$	$1000-x$ / x
$x = 500$	500 / 500	500 / 500
$x > 500$	$1000-x$ / x	x / $1000-x$



Beispiel: einen Kuchen teilen

⚠ Ohne Rationalität ist eine Analyse / Prognose nahezu unmöglich!
$\mathscr{R}_0$: Wenn Alice oder Bob gar keinen Schokokuchen mag, oder andere Ziele verfolgt, dann können wir kaum vernünftige Vorhersagen machen.

$\mathscr{R}_1$: Vielleicht ist Bob noch jung und unerfahren und kann die Größe von Kuchenstücken nicht treffsicher vergleichen. Die Masse könnte er leicht und zerstörungsfrei wiegen, zum Vergleich genügt eine Balkenwaage. Auch das Volumen könnte er leicht bestimmen, mit dem Archimedischen Prinzip durch Wasserverdrängung. (Das gibt erfahrungsgemäß Sauerei.) Andernfalls täuschen ihn vielleicht komplizierte Formen, etwa fraktale Kuchenstücke, nicht-messbare Mengen etc. Vielleicht möchte Alice genau dies provozieren, falls sie so etwas überhaupt herstellen kann.

$\mathscr{R}_2$: Ist Alice irrational so könnte sie ein großes Stück schneiden und naiv hoffen, Bob nimmt das kleinere. Ist Bob rational, so wird er das nicht tun. Wenn Bob sich leicht täuschen ließe, könnte Alice zwei ungleiche Stücke so schneiden, dass Bob das kleinere und das größere verwechselt. Wenn Bob das jedoch durchschaut, dann steht Alice schlechter da.

Beispiel: einen Kuchen teilen

Ist das Ergebnis „fair“ oder „gerecht“? Nun ja, das kommt darauf an… Dies sind zunächst keine klar festgelegten Begriffe. Dazu müssten wir die Ziele „Fairness“ oder „Gerechtigkeit“ erst genauer definieren und dann anhand objektiver und nachvollziehbarer Kriterien prüfen.

Wenn das erklärte Ziel ist, den Kuchen möglichst hälftig aufzuteilen, dann wird dies durch das Spiel „Die eine teilt, der andere wählt“ recht gut implementiert. Dazu müssen beide Spieler „nur“ rational handeln und zudem die Spielaktionen sicher und präzise ausführen können.

- Wenn Bob präzise schätzen kann, aber Alice nur grob schneiden, dann ist Bob im Vorteil, und das Spiel verläuft zu seinen Gunsten.
- Wenn Alice präzise schneiden kann, aber Bob nur grob schätzen, dann ist Alice im Vorteil, und das Spiel verläuft zu ihren Gunsten.

Wenn wir uns Alice und Bob wirklich als kleine Kinder vorstellen, dann hängt die Fairness von ihrem Alter und ihren Fähigkeiten ab. Die Asymmetrie des Spiels könnten wir per Münzwurf beheben, eine eventuelle Asymmetrie der Fähigkeiten hingegen nicht!

Beispiel: ein Erbe teilen

Aufgabe: Alice und Bob erben 1 000 000€. Das Testament verlangt: Alice nennt dem Notar eine Teilung, x für Bob, $1\,000\,000 - x$ für Alice. Zur Vereinfachung nehmen wir im Folgenden $x \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$ an. Dies kann Bob nun annehmen... oder ablehnen, dann verfällt das Erbe. Was wird passieren? rational? irrational? Ist das Ergebnis gerecht?

Lösung: $\mathscr{R}_0$: Jeder will seine Auszahlung maximieren. Diese Annahme ist grundlegend für unsere Analyse!

$\mathscr{R}_1$: Bob wird jeden Vorschlag $x > 0$ annehmen. Das ist vielleicht wenig, aber besser als nichts.

$\mathscr{R}_2$: Alice weiß dies und schlägt $x = 1$€ vor.

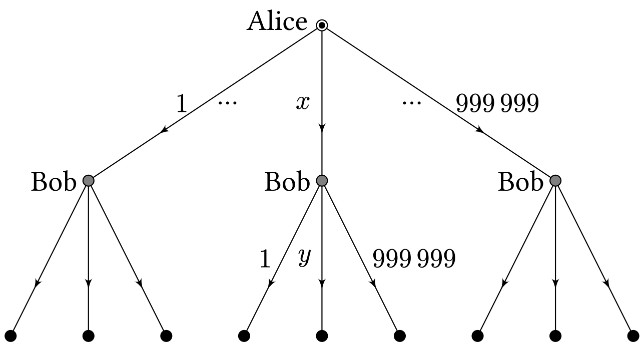
☺ Dieses einfache Beispiel illustriert die Stufen der Rationalität. Alle Voraussetzungen sind tatsächlich nötig für unsere Analyse!

☺ Wir werden später dynamische Spiele erklären und diese Lösung als (das einzige) teilspielperfekte Gleichgewicht wiedererkennen.

Übung: Sobald Sie die Techniken kennen, führen Sie dies aus!

Beispiel: ein Erbe teilen

Wir formalisieren folgende Variante: Alice fordert $x \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$. Anschließend fordert Bob $y \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$. Gilt $x + y \leq 1\,000\,000$, so tritt die Aufteilung (x, y) in Kraft, andernfalls verfällt das Erbe.



Hier ist die zeitliche Reihenfolge entscheidend: Alice macht ihr Angebot und kann nicht mehr zurück, Bob ist daher unter Zugzwang. Muss Bob zuerst fordern, so ist es umgekehrt. Als Variante ist auch gleichzeitige verdeckte Abgabe von Alice' Angebot und Bobs Forderung denkbar.

Beispiel: ein Erbe teilen

⚠ Ohne Rationalität ist eine Analyse / Prognose nahezu unmöglich: $\mathscr{R}_0$: Wenn Alice oder Bob gar kein Geld haben will, oder andere Ziele verfolgt, dann können wir kaum vernünftige Vorhersagen machen.

$\mathscr{R}_1$: Wir gehen hier davon aus, dass Bob streng rational ist. „Wer den Euro nicht ehrt, ist das Erbe nicht wert.“ Ist das zwingend? Vielleicht hat Bob ein extremes Gerechtigkeitsempfinden und wird nur den Vorschlag $x = 500\,000$€ akzeptieren, nicht weniger, aber auch nicht mehr. Das ist irrational, aber möglich. Vielleicht hat Bob 850 000€ Schulden und wird von Mafiakillern verfolgt, dann würde er nur $x \geq 850\,000$€ akzeptieren.

$\mathscr{R}_2$: Wenn Alice an Bobs Rationalität zweifelt, dann sollte sie ihre Strategie anpassen. Zum Beispiel könnte Bob drohen: „Alles unter 300 000€ werde ich ablehnen.“ Aber ist diese Drohung glaubwürdig? Wird er das wirklich tun, wenn er vor der endgültigen Entscheidung steht? Wenn er rational ist, sicher nicht! Andernfalls vielleicht doch...

Alice muss also die Rationalität von Bob einschätzen. Das ist schwierig. Der Idealfall ist perfekte Rationalität, aber das ist nicht immer realistisch.

Beispiel: ein Erbe teilen

Ist das Ergebnis „fair“ oder „gerecht“? Nun ja, das kommt darauf an... Dies sind zunächst keine klar festgelegten Begriffe. Dazu müssten wir die Ziele „Fairness“ oder „Gerechtigkeit“ erst genauer definieren und dann anhand objektiver und nachvollziehbarer Kriterien prüfen.

- Wenn das erklärte Ziel ist, das Erbe möglichst hälftig aufzuteilen, dann wird es durch das Testament denkbar schlecht implementiert.
- Wenn das Ziel nur ist, das Testament wortgetreu auszuführen, dann erfüllt das beschriebene rationale Verhalten genau dies.

Genauso gut hätte der Erblasser die Aufteilung 999 999€ für Alice und 1€ für Bob im Testament festlegen können. Ist diese Festlegung un/fair? Das Testament ist ungewöhnlich, aber nicht zwangsläufig un/gerecht; dazu müssten wir viel mehr Vorgeschichte und Kontext kennen.

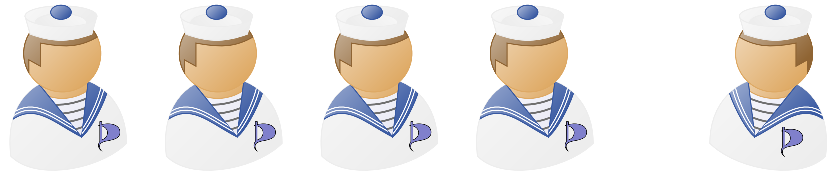
Ist das Erbe ausgleichende Un/Gerechtigkeit für früheres Verhalten? Und was ist mit Chuck, der nicht erwähnt wurde und nichts bekommt? Vielleicht wäre es besser, das Erbe verfällt an wohltätige Zwecke... Vielleicht will der Erblasser Alice und Bob eine Lehre erteilen?

Meuterei auf der Bounty (1935)

Mutiny on the Bounty mit Clark Gable und Charles Laughton unter der Regie von Frank Lloyd. Oscar 1936 als bester Film.

Fünf gierige Piraten / *the pirate game*

Fünf basisdemokratische Piraten $1, 2, 3, 4, 5$ teilen sich 100 Dukaten. (nach Ian Stewart: *A Puzzle for Pirates.* Scientific American 5/1999)



1 2 3 4 5

Der ranghöchste Pirat 5 schlägt eine Zuteilung zur Abstimmung vor. Stimmt mindestens die Hälfte dafür, so wird diese Zuteilung ausgeführt. Bei Ablehnung wird der Vorschlagende über Bord ins Meer geworfen, und die verbleibenden Piraten beginnen das Spiel von vorn.

Präzisierung: Ein Dukat ist unteilbar. Jeder Pirat will A: selbst überleben, B: möglichst viel Gold, C: bei Indifferenz lieber andere ins Meer werfen, D: lieber rangniedrige bestechen als ranghohe. Jeder Pirat ist rational. Absprachen sind unmöglich, denn jeder misstraut jedem anderen und würde Absprachen brechen. Diese Fakten sind gemeinsames Wissen.

Fünf gierige Piraten / *the pirate game*

Naiv könnte man vermuten, der ranghöchste Pirat muss um sein Leben fürchten und daher all sein Gold hergeben. Das Gegenteil ist der Fall!

Aufgabe: Lösen Sie das Piratenrätsel für $n = 5$, sowie für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Wir nutzen Induktion über $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ und finden:

	1	2	3	4	5	…	197	198	199	200	201	202
	100	☠	☠	☠	☠	…	☠	☠	☠	☠	☠	☠
$\mathscr{R}_1$	0	100	☠	☠	☠	…	☠	☠	☠	☠	☠	☠
$\mathscr{R}_2$	1	0	99	☠	☠	…	☠	☠	☠	☠	☠	☠
$\mathscr{R}_3$	0	1	0	99	☠	…	☠	☠	☠	☠	☠	☠
$\mathscr{R}_4$	1	0	1	0	98	…	☠	☠	☠	☠	☠	☠
⋮												
$\mathscr{R}_{197}$	0	1	0	1	0	…	0	2	☠	☠	☠	☠
$\mathscr{R}_{198}$	1	0	1	0	1	…	1	0	1	☠	☠	☠
$\mathscr{R}_{199}$	0	1	0	1	0	…	0	1	0	1	☠	☠
$\mathscr{R}_{200}$	1	0	1	0	1	…	1	0	1	0	0	☠
$\mathscr{R}_{201}$	0	1	0	1	0	…	0	1	0	1	0	0

Fünf gierige Piraten / *the pirate game*

🙂 Scharfsinn, Systematik & Induktion liefern die erstaunliche Antwort! Wir nutzen die Prioritäten A–C und strenge Rationalität, insb. Egoismus ohne Kooperation. Real beobachtetes Verhalten kann davon abweichen.

⚠ Im Spiel mit $n \ge 201$ Piraten geht es nur noch ums Überleben! Der Vorschlagende $n = 201, 202, 204, 208, \dots$ kann überleben, der Verschlagende $n = 203, 205, 206, 207, \dots$ leider nicht.

Zur Analyse zerlegen wir $n = 200 + 2^k + r$ mit $k, r \in \mathbb{N}$ und $0 \le r < 2^k$.

Im Falle $0 < r < 2^k$ geht Pirat n über die Planke, egal was er vorschlägt: Er kann nur 100 Piraten bestechen. Dazu bekommt er alle r Stimmen der Todgeweihten (inklusive seiner selbst). Das bleibt eine Minderheit.

Im Falle $r = 0$ überlebt Pirat $n = 200 + 2^k$ durch folgende Strategie:

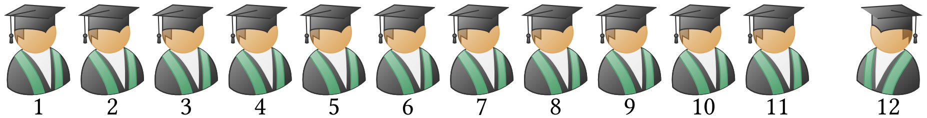
- Falls k gerade ist, gibt er allen Ungeraden $1, 3, \dots, 199$ je ein Dukat.
- Falls k ungerade ist, gibt er allen Geraden $2, 4, \dots, 200$ je ein Dukat.

So bekommt er alle 100 Stimmen der Bestochenen und zusätzlich noch alle $2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$ Stimmen der Geretteten (inklusive seiner selbst).

🙂 Prioritäten A–D lösen Indifferenzen und garantieren Eindeutigkeit.

Ein Komitee zur Verbesserung der Hochschullehre

Die chronisch unterfinanzierte Hochschullehre soll mit einer Förderung von 50 k€ exzellent werden. (Das ist aberwitzig, aber besser als nichts.) Ein Komitee von zwölf Professoren teilt die Fördersumme unter sich auf.



Der dienstälteste Professor 12 legt eine Zuteilung zur Abstimmung vor. Bei Ablehnung wird der Vorschlagende als befangen ausgeschlossen, und die verbleibenden Professoren beginnen das Komiteespiel von vorn. Präzisierung: Ein k€ ist unteilbar. Weiter gelten obige Piratenregeln.

Aufgabe: Welcher Professor erhält wie viel von der Fördersumme? Lösen Sie das Komiteespiel mit folgenden Abstimmungsregeln:
(1) Annahme erfordert mehr als die Hälfte der Stimmen.
(2) Annahme erfordert mindestens zwei Drittel der Stimmen.
(3) Annahme gilt erst bei höchstens einer Gegenstimme.

Das Komiteespiel: mehr als die Hälfte

Lösung: (1) Wir nutzen Induktion über $n = 1, 2, \ldots, 12$ und finden:

n	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	50	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
2	2	50	0	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
3	2	0	1	49	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
4	3	1	2	0	47	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
5	3	2	0	1	0	47	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
6	4	0	1	2	1	0	46	☠	☠	☠	☠	☠	☠
7	4	1	2	0	0	1	0	46	☠	☠	☠	☠	☠
8	5	2	0	1	1	0	1	0	45	☠	☠	☠	☠
9	5	0	1	2	0	1	0	1	0	45	☠	☠	☠
10	6	1	2	0	1	0	1	0	1	0	44	☠	☠
11	6	2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	44	☠
12	7	0	1	2	1	0	1	0	1	0	1	0	43

Jeder Vorsitzende n kann sich das Quorum $q = 1 + \lfloor n/2 \rfloor$ billig erkaufen und sich selbst den Löwenanteil des zu verteilenden Geldes sichern.

Das Komiteespiel: mindestens zwei Drittel

Lösung: (2) Wir nutzen Induktion über $n = 1, 2, \ldots, 12$ und finden:

n	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	50	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
2	2	50	0	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
3	2	0	1	49	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
4	3	1	2	0	47	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
5	4	2	3	1	0	44	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
6	4	3	0	2	1	0	44	☠	☠	☠	☠	☠	☠
7	5	0	1	3	2	1	0	43	☠	☠	☠	☠	☠
8	6	1	2	0	3	2	1	0	41	☠	☠	☠	☠
9	6	2	3	1	0	0	2	1	0	41	☠	☠	☠
10	7	3	0	2	1	1	0	2	1	0	40	☠	☠
11	8	0	1	3	2	2	1	0	2	1	0	38	☠
12	8	1	2	0	3	0	2	1	0	2	1	0	38

Jeder Vorsitzende n kann sich das Quorum $q = \lfloor 3n/2 \rfloor$ billig erkaufen und sich selbst den Löwenanteil des zu verteilenden Geldes sichern.

Das Komiteespiel: höchstens eine Gegenstimme

Lösung: (3) Wir nutzen Induktion über $n = 1, 2, \ldots, 12$ und finden:

n	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	50	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
2	1	0	50	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
3	2	1	0	49	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
4	3	2	1	0	47	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
5	4	3	2	1	0	44	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
6	5	4	3	2	1	0	40	☠	☠	☠	☠	☠	☠
7	6	5	4	3	2	1	0	35	☠	☠	☠	☠	☠
8	7	6	5	4	3	2	1	0	29	☠	☠	☠	☠
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	22	☠	☠	☠
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	14	☠	☠
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	5	☠
12	11	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	5	0

Professor 12 kann sich nicht genug Unterstützung erkaufen. Professor 11 hingegen bringt seinen Vorschlag mit überwältigender Mehrheit durch.

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Im **Casino Royal** (25.10.2019) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, unsere mathematische Lösung des Piratenspiels in der Praxis zu testen. Das kostet etwas Zeit, liefert aber eindrückliches Anschauungsmaterial. Genau zu diesem Zweck haben wir das Casino Royal eingerichtet.

Ich empfehle nachdrücklich praktische **Experimente zur Spieltheorie**, denn Theorie und Praxis können erstaunlich weit auseinanderklaffen. Wer das erlebt hat, sieht diesen Themenkomplex mit anderen Augen. Ich halte den konkreten Vergleich für lehrreich, ehrlich und heilsam.

Das gilt insbesondere in **Verhandlungen**, so wie hier: Es genügt nicht, rational zu (ver)handeln und einen möglichst guten Plan zu (er)finden, man muss zudem auch die anderen überzeugen! (hier: mehrheitlich) Dazu muss jeder Spieler genaustens die Ir/Rationalität seiner Mitspieler berücksichtigen, und das macht die Verhandlungen beliebig komplex.

Wir haben viel gelernt und zudem hat es großen Spaß gemacht: **Konkrete Experimente überraschen und begeistern immer wieder.** Vielen Dank an alle engagierten und spielfreudigen Teilnehmer:innen!

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Auf die Ankündigung, das Piratenspiel experimentell durchzuführen, meldeten sich spontan fünf freiwillig-furchtlose Freibeuter A,B,C,D,E; einige von ihnen kannten die zugehörige Theorie, andere noch nicht. Diesen fünf wurden die fünf Rollen zugelost: 5A, 4B, 3C, 2D, 1E.

Erste Verhandlungsrunde: Zunächst unterbreitet der Capitain 5 einen Vorschlag und untermauert ihn kurz mit seinen weisen Argumenten. Dazu beziehen 4, 3, 2, 1 Stellung. (Man könnte zuvor eine maximale Redezeit vereinbaren, etwa 30s, aber das war hier gar nicht nötig.)

Zur weiteren Aussprache ist eine zweite Verhandlungsrunde möglich. Dann erst unterbreitet der weise Capitain seinen endgültigen Vorschlag und alle stimmen gleichzeitig darüber ab (durch Kreidestück in Faust; optional wäre eine geheime Abstimmung, etwa durch Zungestrecken).

Dies ist kein Laborexperiment unter kontrollierten Bedingungen. Die Regeln waren zunächst lose gefasst. Die Verhandlung vor Publikum und die Interaktion aller Beteiligten waren an kein Protokoll gebunden. Insbesondere habe ich als Moderator oft dazwischengeplappert.

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Hier mein (stark vereinfachtes) Gedächtnisprotokoll der Ereignisse; sie sind jetzt bereits legendär, die Berichte entsprechend schillernd.

Der Capitain 5A kennt die Theorie und schlägt deshalb die Aufteilung $(1, 0, 1, 0, 98)$ vor. „Das ist die rationale Lösung. Liebe Piraten 3C und 1D, Ihr könnt ruhig zustimmen, von mir bekommt Ihr immerhin ein Dukat. Seid vorsichtig: Wenn Ihr mich über Bord werft, bekommt Ihr gar nichts.“

Darauf wendet sich Pirat 4B direkt an die Mannschaft und entgegnet: „Männer, merkt Ihr nicht, wie der Capitain uns gegeneinander ausspielen will? Das dürfen wir uns nicht gefallen lassen. Der Capitain muss weg!“

Pirat 3C: „Wo bleibt bei diesem Vorschlag denn die Gerechtigkeit? Wir müssen als Mannschaft zusammenhalten und gerecht teilen. Nur wer gut und gerecht handelt, kommt in den Piratenhimmel.“

Pirat 2D: „Wir haben alle gemeinsam gekämpft und jetzt sollen einige leer ausgehen? Wir sind ein Team, wir müssen zusammenhalten.“

Pirat 1E: „Ich finde den Vorschlag eigentlich ganz in Ordnung, aber ein Dukat ist viel zu wenig. Ich verlange 33 Dukaten!“

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Das Publikum entschied, dass eine weitere Aussprache sinnvoll wäre; nach dieser ersten Verhandlungsrunde folgte also noch eine zweite. Nach Austausch aller Argumente schlug der Capitain 5A die Verteilung $(26, 0, 26, 0, 48)$ vor. Dies wurde dann abgestimmt und... angenommen!

Meine erste Einschätzung und Einordnung dieser Geschehnisse:

Ein Einfluss der Theorie ist deutlich: Der Capitain 5A konzentrierte sich sofort auf die aus seiner Sicht allein entscheidenden Piraten 3C und 1E. Daran änderte auch die weitere Diskussion nichts. Teile und herrsche!

Diese Koalition $\{5, 3, 1\}$ machte alles weitere unter sich aus, und genau dieses Triumvirat stimmte schließlich für den Vorschlag des Capitains. Die Appelle der gezwungenen Opposition $\{2, 4\}$ verhallten ungehört.

Entgegen der Theorie kam es nicht zu der Aufteilung $(1, 0, 1, 0, 98)$, sondern $(26, 0, 26, 0, 48)$. Die Zahlen scheinen mir zwar willkürlich, doch die Tendenz ist klar: Der Capitain 5A wollte ein deutliches Entgegenkommen zeigen, um beide Stimmen sicher zu erhalten. Diese waren nun bitter nötig, und er wollte kein Risiko eingehen.

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Dieses erste Piratenspiel war bereits sehr lehrreich und unterhaltsam, doch dann kam alles noch besser, noch spannender, noch verrückter. Nach Beratung beschließen alle Anwesenden, dieselben fünf erneut spielen zu lassen, mit neu zugelosten Rollen: 5C, 4B, 3A, 2E, 1D.

Dies wirft die Frage auf, ob sich die Piraten an ihren vorigen Beutezug und an die Verhandlungen erinnern können, oder ob die rauschende Feier mit viel Rum ihr Gedächtnis gelöscht hat. Diese Frage bleibt offen. Nun nehmen die Geschehnisse ihren sensationellen Verlauf:

Capitain 5C: „In dieser harten Piratenrealität geht es nur ums Gold. Lasst Euch nichts einreden und glaubt nicht an Himmel oder Hölle! Ich schlage deshalb die einzig rationale Verteilung $(1, 0, 1, 0, 98)$ vor.“ Alle lachen verwundert über diese Bekehrung vom Paulus zum Saulus.

Das Sein bestimmt das Bewusstsein.
Karl Marx (1809–1865)

Nach einer Verhandlungsrunde bleibt der Capitain bei seinem Vorschlag. In der Abstimmung wird dieser abgelehnt, der Capitain geht über Bord.

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Pirat 4B: „Männer, wir müssen als Mannschaft zusammenhalten, wir brauchen eine möglichst große Crew, wir brauchen jeden Mann, um unsere Gegner besiegen zu können. Ich schlage die Aufteilung $(0, 1, 0, 99)$ vor.“ In der Abstimmung scheitert dieser Vorschlag jedoch. Unter anerkennendem Applaus geht auch der Vizecapitain über Bord.

Pirat 3A: „Lieber Pirat 1D, Du siehst ja, was passieren wird: Wenn ich über Bord gehe, wird Pirat 2E dich über den Tisch ziehen. Also gebe ich Dir ein Dukat, das ist für dich viel besser als nichts.“ Erstaunlicherweise wird auch dieser klare, einfache, wohlbegründete Vorschlag abgelehnt. Nach allzu kurzer Karriere geht Capitain 3A unter Applaus über Bord.

Pirat 2E schlägt 1D großzügig vor: „Machen wir Halbe-Halbe?“ – „Ja.“ Die glücklichen Überlebenden erhalten jeweils beachtliche 50 Dukaten. Die einst so stolze Piratenmannschaft, auf allen Weltmeeren gefürchtet, ist nach diesen harten Verhandlungen allerdings arg reduziert.

A house divided against itself, cannot stand.
Abraham Lincoln (1809–1865)

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Dieser Verlauf der Verhandlungen war unerwartet, turbulent, verblüffend und vollkommen entgegen unserer eigenen theoretischen Vorhersage.

Rational lässt sich das hier beobachtete Verhalten nicht erklären! Das ist eine schmetternde Niederlage für die Spieltheoretiker:in, aber zugleich auch ihre beste Verteidigung: Die Spieler waren eben nicht rational.

Damit kann sich die Spieltheoretiker:in elegant aus der Affäre ziehen, oder überhaupt jede Wissenschaftler:in im Zwiespalt zwischen Theorie und Empirie: Die nötigen Voraussetzungen waren eben nicht erfüllt.

Genauer: Nach einem ersten, seriösen Piratenspiel wurden die Spieler im zweiten Durchgang wagemutiger… und verspielter. Es ging ja nicht um viel, jedenfalls nicht um echtes Gold oder gar um Leben und Tod.

Die mögliche Interaktion der Spieler mit dem Publikum betonte zudem den Spaßfaktor, ermutigte das theatralische Schauspiel und schwächte die berechnende Profitmaximierung, also die Grundvoraussetzung $\mathcal{R}_0$: Der Profit bestand nun nicht nur aus den Dukaten, sondern auch und hauptsächlich aus der Interaktion selbst und dem (Schau-)Spielspaß.

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Die Rationalität $\mathcal{R}_1$ wächst mit zunehmender Spielerfahrung: Jeder Spieler versteht die Spielregeln und all ihre Konsequenzen.

Doch wenn bei einigen das Fundament $\mathcal{R}_0$ bröckelt, dann schwindet bei anderen das nötige Vertrauen $\mathcal{R}_2$ in die Rationalität der Gegenspieler. So lässt sich schließlich kaum noch rational planen und (ver)handeln.

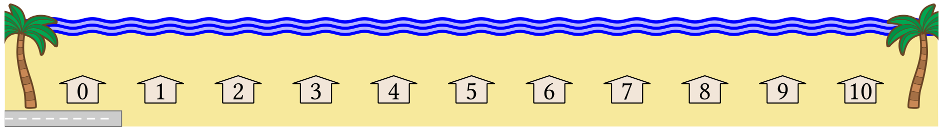
Für Abstimmungen ist das besonders dramatisch: Es genügt nicht, selbst rational zu (ver)handeln und einen möglichst guten Plan zu (er)finden, man muss zudem die (qualifizierte Mehrheit der) anderen überzeugen!

Zwei Dinge sind unendlich, das Universum und die menschliche Dummheit, aber beim Universum bin ich mir noch nicht ganz sicher.
Albert Einstein zugeschrieben, wohl fälschlicherweise

If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.
John von Neumann (1903–1957)

🙂 Später untersuchen wir Verhandlungen, Koalitionen, Wahlsysteme, Auktionen, etc. als wichtige Anwendungsgebiete der Spieltheorie.

Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand



Sie eröffnen einen Kiosk, mögliche Positionen sind $x \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$.
Die Badegäste sind gleichverteilt und gehen immer zum nächsten Kiosk.
Jeder Spieler (Kiosk) maximiert seine Kundenzahl (Umsatz, Marktanteil).
Bei sonst gleichem Anteil sucht jeder die Nähe zur Zufahrtstraße bei 0.

Aufgabe: (1) Sie haben die einzige Lizenz. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
(2) Sie haben die erste von zwei Lizenzen. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
(3) Sie haben die erste von drei Lizenzen. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
Finden Sie zu jedem Zug von A die beste Antwort von B und von C!

Antwort: Bei rationalem Verhalten finden wir folgende Anordnungen:

(1)	A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2)	0	1	2	3	B	A	6	7	8	9	10
(3)	0	1	B	C	4	5	6	7	A	9	10

Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand

Ausführlich: Frage (1) wird gelöst durch die offensichtliche Optimierung.
Bei Frage (2) suchen wir zu jedem Zug von A die beste Antwort von B:

A	B										1 : 10
	A	B									2 : 9
		A	B								3 : 8
			A	B							4 : 7
				A	B						5 : 6
				B	A						6 : 5
					B	A					5 : 6
						B	A				4 : 7
							B	A			3 : 8
								B	A		2 : 9
									B	A	1 : 10

Versuchen Sie, die Lösung sauber aufzuschreiben: Wie organisieren Sie Ihre Notation und Ihre Argumente möglichst klar und nachvollziehbar?

Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand

Antwort (3) ist länger, wir müssen systematisch und sorgfältig vorgehen.
Dies ist ein einfach-schönes Beispiel der kombinatorischen Spieltheorie:
Wir durchsuchen hier einen endlichen Entscheidungsbaum, zählen alle Möglichkeiten auf und sortieren sie nach den Kriterien der Rationalität.

⚠ Jeder Spieler muss bei seiner Analyse Annahmen machen über die Rationalität seiner Gegenspieler. Ich nenne dazu ein einfaches Beispiel:

Wäre B gierig und dumm, dann wäre Platz 4 für A ein guter Zug:
Spieler B wird kurzsichtig Platz 5 wählen, und Spieler C folgt auf Platz 6.

				A	B	C				

Sind B und C rational, dann wäre Platz 4 für A ein schlechter Zug:
Spieler B wird schlau Platz 6 wählen, und Spieler C folgt auf Platz 3.

			C	A		B				

Um unsere Analyse zu vereinfachen, nehmen wir hier vollständige Rationalität an, wie oben erklärt. Damit wird das Kioskproblem stark vereinfacht und lösbar durch eine kombinatorische Optimierung.

Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand

Aufgabe: Diskutieren und lösen Sie das Problem für drei Kiosklizenzen.
Versuchen Sie, Ihre Lösung sauber aufzuschreiben: Wie organisieren Sie Ihre Notation und Argumente möglichst klar und nachvollziehbar?

Wenn Sie Freude daran haben, diskutieren Sie Erweiterungen:
Was passiert, wenn Kiosk A und C demselben Spieler gehören?
Was passiert, wenn Kiosk B und C demselben Spieler gehören?
Was passiert, wenn Kiosk A und B demselben Spieler gehören?

Aufgabe: Wenn Sie programmieren, dann können Sie die einfachen, aber lästig-länglichen Aufzählungen einem Computer übertragen.

Tipp: Programmieren Sie so am besten gleich das allgemeinere Problem für einen Strand der Länge ℓ und k Kiosklizenzen, wobei $1 \le k \le \ell$ gelte, oder allgemein einen Graphen mit Kantenlängen und Eckengewichten.

Herausforderung: Erweitern Sie dies zu Koalitionen, wobei sich die Kioske in feste Gruppen einteilen, so wie die Filialen einer Kette.
Denkbar sind zwei Spieler, die abwechselnd ihre Kioske setzen.
Kniffliger: Ein Losverfahren entscheidet, wer als nächster setzt.

Ein Modell, viele Anwendungen

Ist das paradox? TED-Ed zu Hotellings Gesetz, `youtu.be/jILgxeNBK_8`
Die hier untersuchten Spiele sind stark vereinfacht, manchmal lächerlich, oft genug übertrieben simpel, doch sie treffen häufig einen wahren Kern. Solch konkrete Beispiele benennen und repräsentieren typische Muster.

Es geht in der Spieltheorie einerseits um konkrete Spiele und Strategien, um explizite Probleme und präzise Lösungen, um rationales Handeln, empirisch notgedrungen ebenso um begrenzt rationales Verhalten. Auf präzise Fragen erhoffen wir uns ebenso präzise Antworten.

Andererseits geht es auch um gemeinsame Muster und Mechanismen. Wenn Alice und Bob einen Kuchen oder ein Erbe teilen, dann beschreibt das im Prinzip auch allgemeine Teilungs- und Verhandlungsprobleme. Die Details sind verschieden, aber die Mechanismen sind ähnlich.

In konkreten Anwendungen müssen wir genaue Daten berücksichtigen, es gibt viel mehr Wenn-und-Aber, und all das ist auch gut und richtig so. Dennoch: Nach Sichtung und Abwägung aller Details, stellt sich in erster Näherung häufig genug ein lehrreiches Muster als wesentlich heraus.

Ein Modell, viele Anwendungen

Das Strandkiosk-Problem ist eine schöne kombinatorische Aufgabe. Sie steht hier stellvertretend für ähnliche Spiele, allgemein für Konflikte um eine räumliche Marktaufteilung, Konkurrenz um Marktanteile, etc. Der Kampf um den Strand kann auch noch anderes darstellen!

Denken Sie zum Beispiel an ein politisches Spektrum; die verbreitete Sprechweise von „links“ und „rechts“ ist eine hilfreiche Vereinfachung. Wir gehen davon aus, dass Wähler über das Spektrum verteilt sind und immer genau die Partei wählen, die ihrer Position am nächsten liegt.

Wenn es nur eine Partei A gibt, wie positioniert sie sich im Spektrum? Nun, das ist eigentlich egal, da sie ohnehin alle Wählerstimmen erhält. Genau dies ist in Ein-Parteien-Staaten tatsächlich meist zu beobachten. Wenn es aber zwei Parteien A und B gibt, wie positioniert sich die erste?

Genau dieses Problem haben wir oben gelöst! Tatsächlich beobachten wir in der politischen Debatte den Kampf um die „Mitte der Gesellschaft“. Gibt es weitere Parteien C,D,..., so entflammen zudem Flügelkämpfe. Jetzt wissen Sie genauer, warum das strategisch unvermeidlich ist.

Ein Modell, viele Anwendungen

Moment mal, können wir das banale Strandkiosk-Problem ernsthaft vergleichen mit hochkomplizierten parteipolitischen Strategien? Genau genommen natürlich nicht, aber grob gesagt schon.

Das ist die Stärke und zugleich die Begrenzung abstrakter Modelle: Sie treffen einen Kern des Problems, sie sind einfach und übersichtlich und leicht zu verstehen, sie taugen wunderbar als erste Näherung. Sie dienen als Ausgangspunkt und Orientierung für Anwendungen.

Für eine genauere Analyse im konkreten Einzelfall dürfen wir natürlich nicht stur bei dieser Grundidee verharren, sondern müssen wesentlich weiter gehen und genauer hinschauen. Im obigen Parteienbeispiel:

- Die politische Landschaft ist heute nicht (mehr) eindimensional.
- Das Wählerverhalten ist nicht (mehr) ganz so einfach vorhersehbar.
- Der Kampf um den linken / rechten Rand ist ein heikler Balanceakt.

Daher müssen wir unser Modell weiter verfeinern und kalibrieren durch genauere Daten. Auch begrenzt ir/rationales Verhalten ist zu erwarten, dies untersucht die empirische Spieltheorie und Verhaltensökonomik.

Ein Modell, viele Anwendungen

Ökonomische Modelle können uns gute grundlegende Einsichten über komplizierte Situationen vermitteln, Geschichten erzählen, dafür sind sie großartig. Aber wie benutzt man Modelle richtig?
John Kay (Interview in Die Zeit 25. Juli 2019)

Wir werden dieses bemerkenswerte Phänomen noch oft beobachten: Selbst einfache Spiele können den wahren Kern eines Konflikts treffen. Physiker:innen sprechen traditionell nüchtern von der **ersten Näherung**, die bei Bedarf durch die zweite, dritte, ... Näherung verfeinert wird.

Das **Modell**, das wir von der **Realität** entwerfen, hilft und leitet uns, doch niemals sollten wir naiv das Modell für die Wirklichkeit halten. Von dieser ersten Näherung ausgehend können wir unser Modell je nach Bedarf verfeinern und konkreten Gegebenheiten anpassen.

Die Wirklichkeit ist komplizierter als sie auf den ersten Blick scheint. Dies erfordert intellektuelle Redlichkeit und mathematische Sorgfalt. Das spieltheoretische Modell dient als Grundlage. Selbst wo es versagt, ist es der Maßstab für die Abweichung von Prognose und Beobachtung.

Ir/Rational verhandeln: drohen oder nachgeben?

	USA	EU
(0) Start		
(1a) USA drohen nicht.	5	9
(1b) USA drohen mit Zöllen.		
(2a) Europa gibt nach.	6	7
(2b) Europa droht ebenfalls.		
(3a) USA lenken ein.	4	8
(3b) Es kommt zum Handelskrieg.	3	6

Aufgabe: Was wird passieren? rational? irrational? Wie erklären und bewerten Sie Trumps explizite Doktrin: „We have to be unpredictable.“
Kann es helfen, irrational zu *sein*? oder dafür *gehalten* zu werden?

Lösung: $\mathscr{R}_0$: Jeder kennt und maximiert sein Ergebnis (wie gezeigt).
$\mathscr{R}_1$: Vor einem Handelskrieg lenken die USA im 3. Zug ein (vorteilhaft).
$\mathscr{R}_2$: Die EU weiß dies, daher wird sie im 2. Zug drohen (vorteilhaft).
$\mathscr{R}_3$: Die USA wissen dies, also werden sie im 1. Zug nicht drohen.

Ir/Rational verhandeln: drohen oder nachgeben?

Die Zahlen rechts bewerten jeden der möglichen Ausgänge für die USA und die EU auf einer (fiktiven) Werteskala. Wir denken an eine geeignete Gewichtung aus wirtschaftlichem Ertrag, politischem Ansehen, etc.

⚠ Solche Zahlen sind schwer zu ermitteln und sind oft umstritten. Wir nehmen sie für unser Modell als gegeben an und analysieren die Situation auf dieser Grundlage. Andere Kalibrierungen sind möglich.

⚠ Unsere Analyse benötigt alle Voraussetzungen zur Rationalität.

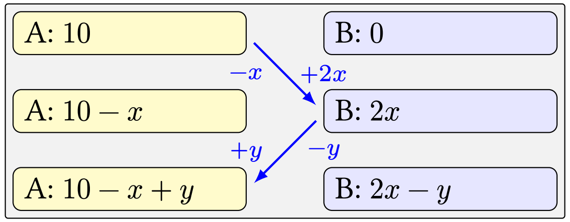
$\mathscr{R}_1$: Sind die USA irrational, so könnten sie sich im 3. Zug für einen Handelskrieg entscheiden, obwohl dies zu ihrem Nachteil wäre. Das kann an einer falschen Einschätzung der Situation liegen, anderen Bewertungen, oder allgemein an mangelnder Rationalität.

$\mathscr{R}_2$: Im 2. Zug muss die EU daher die Rationalität der USA einschätzen. Gegen einen Wahnsinnigen wäre es tatsächlich besser einzulenken!

$\mathscr{R}_3$: Im 1. Zug hätten die USA also Interesse daran, für wahnsinnig gehalten zu werden: Das entspricht einem Bluff. Nur dann wäre es rational, mit einer Drohung die Eskalation überhaupt erst einzuleiten.

Nochmal unser Experiment: „Hin-und-Rück“

Im Lichte dieser Erkenntnisse spielen wir erneut „Hin-und-Rück“.



Aufgabe: Maximieren Sie Ihre Erträge bei diesem Spiel!
Wie gelingt das rational? für Spieler B? für Spieler A?

Sie haben nun Präzisierungen zur Rationalität und **Spielerfahrung**, vor allem wissen Sie jetzt, wie die anderen sich verhalten (haben). Versuchen Sie im zweiten Durchgang, Ihre Erträge zu maximieren!

Verhaltensökonomik [*behavioral economics*] untersucht menschliches Verhalten, speziell die Abweichung zwischen Empirie / Experiment und Theorie / Prognose, siehe `en.wikipedia.org/wiki/Behavioral_economics`.

Nochmal unser Experiment: „Hin-und-Rück“

Dieses Experiment ist für alle Teilnehmer zunächst nur ein Spiel. Zugleich ist es auch ein **Messinstrument sozialer Interaktion**. Die empirischen Ergebnisse sind lehrreiche Messwerte: Manche Teilnehmer verhalten sich eher egoistisch, andere eher altruistisch.

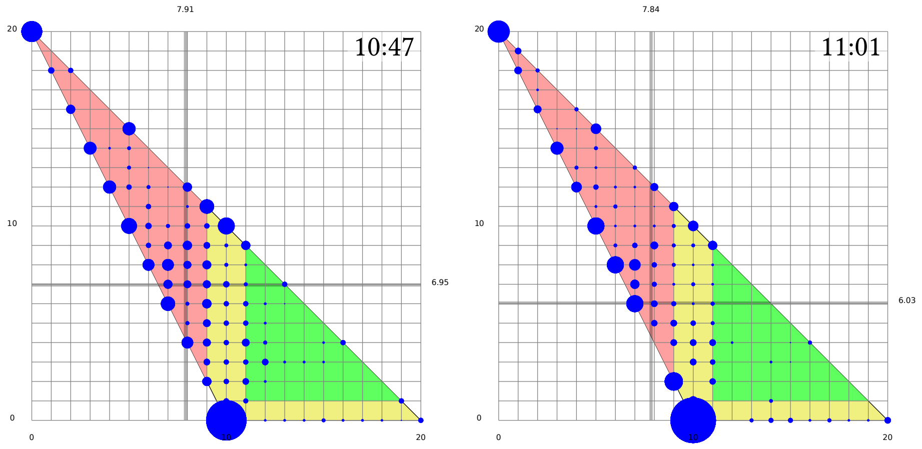
Was genau die Spielerpopulation tun wird, lässt sich kaum vorhersagen, sondern nur experimentell messen. Die Auswertung zeigt ein Abbild unserer (kleinen) Gesellschaft und misst das gegenseitige Vertrauen. Diese Information benötigen / schätzen rationale Spieler bei ihrer Wahl.

Kaum jemand spielt vollkommen rational, und das ist für alle vorteilhaft: Im Durchschnitt zahlt sich das Wagnis der Kooperation tatsächlich aus! Wir werden später für wiederholte Spiele erklären, wie sich kooperatives Verhalten langfristig begründen lässt, siehe Nash Folk Theorem K2E.

Hier jedoch wird das Spiel nur einmal gespielt, oder bei mehrfachem Spiel immer neue Spieler ausgelost. Die beobachtete Kooperation ist hier nicht rational. Sie beruht vermutlich auf begrenzter Rationalität sowie der Trägheit unserer Verhaltensmuster und sozialen Normen.

Unser Experiment „Hin-und-Rück“

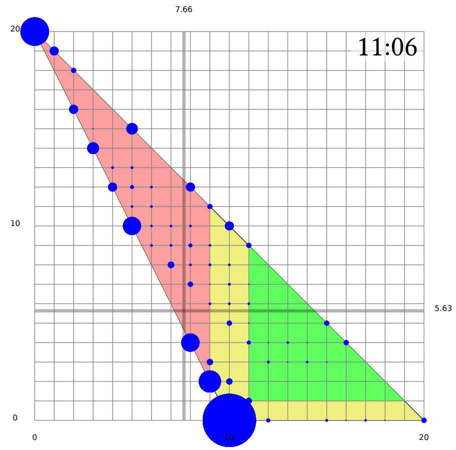
A245
Erläuterung



Momentaufnahmen der Studierendenpopulation vom 10. April 2018.
Die Graphiken zeigen alle Spielergebnisse für Spieler A und B.

Unser Experiment „Hin-und-Rück“

A246
Erläuterung

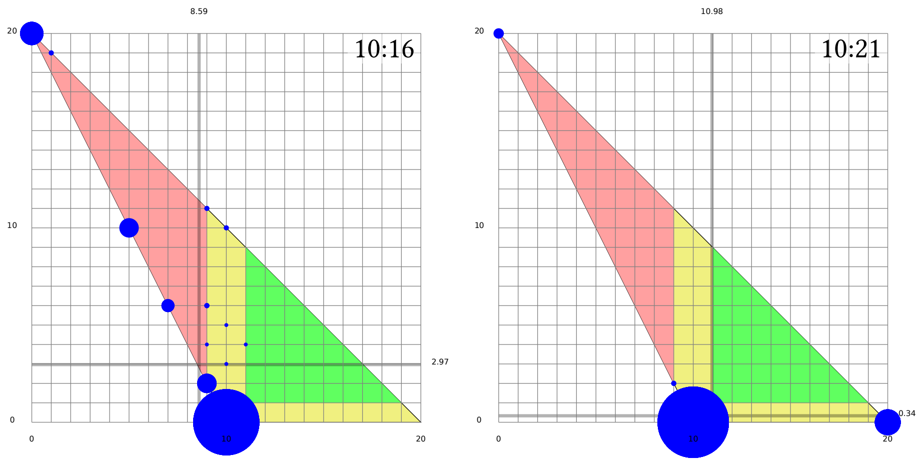


Die Graphiken zeigen deutlich eine Entwicklung, anfangs zaghaft, dann beschleunigt. Die Spieler erkennen schnell (durch empirische Erfahrung oder mathematische Analyse), dass sich Kooperation für B hier nicht lohnt. Im nächsten Schritt erkennen sie, dass sich Kooperation dann auch für A nicht lohnt. Das Spielverhalten durchläuft so eine Evolution und steuert auf ein Gleichgewicht zu.

Momentaufnahmen der Studierendenpopulation vom 10. April 2018.
Innerhalb kurzer Zeit sehen wir eine recht deutliche Entwicklung!

Unser Experiment „Hin-und-Rück“

A247
Erläuterung



Momentaufnahmen der Studierendenpopulation vom 24. April 2018.
Erfahrung, Erzählung und Nachdenken ändern das Spielverhalten.
Nach einer Woche und fünf Runden stabilisert sich das Ergebnis.
Schließlich obsiegt doch das rational-egoistische Spielverhalten.

Unser Experiment „Hin-und-Rück“

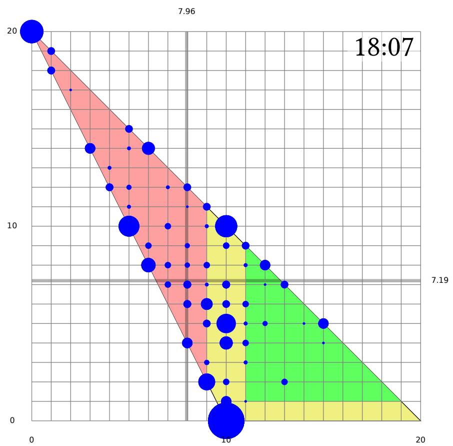
A248
Erläuterung

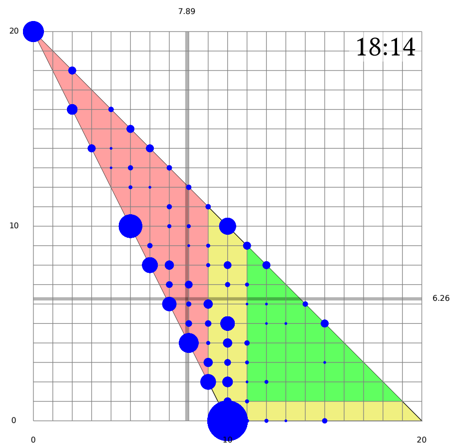
Die Daten wurden nicht unter kontrollierten Laborbedingungen erhoben, dennoch sind sie überaus interessant: Es ist unser eigenes Verhalten! Durch zunehmende praktische Erfahrung und theoretische Kenntnisse verbessert jede Spieler:in ihre individuelle Strategie. Insgesamt nehmen Egoist:innen zu und die Altruist:innen ab, und der Gesamtertrag sinkt!

Die trickreichen Regeln belohnen nicht Kooperation, sondern Egoismus. Dieses Spiel provoziert ein berühmtes Paradox: Jeder einzelne Spieler versucht rational, seinen Profit zu maximieren. Die Gesellschaft wird im Gesamtbild egoistischer, das gegenseitige Vertrauen sinkt, damit auch der Gesamtertrag. Lokale Maximierung führt in ein globales Minimum.

Dem einen oder der anderen wird dieses Ergebnis sehr missfallen, es mag sogar schockieren: Obwohl Kooperation möglich ist und zu beiderseitigem Nutzen wäre, werden die Spieler immer egoistischer. Das liegt daran, dass Egoismus belohnt und Altruismus bestraft wird. Wir werden später für wiederholte Spiele erklären, wie sich kooperatives Verhalten langfristig begründen lässt, siehe Nash Folk Theorem K2E.

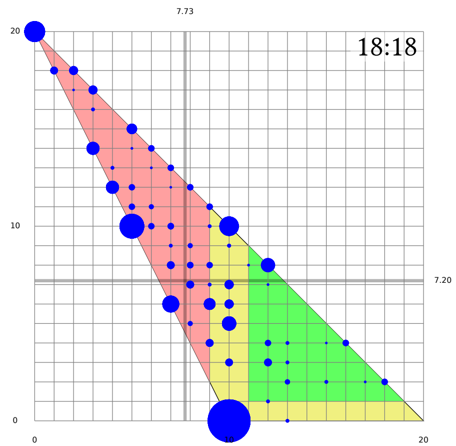
Unser Experiment „Hin-und-Rück“





Momentaufnahmen der Teilnehmerpopulation vom 08. Juli 2019.
Die Graphiken zeigen alle Spielergebnisse für Spieler A und B.

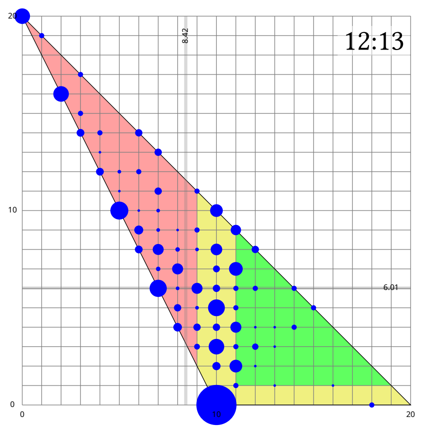
Unser Experiment „Hin-und-Rück“

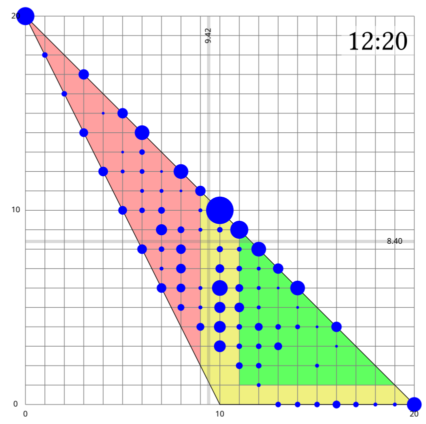


Der zweite Datensatz zeigt eine Abendveranstaltung mit Vortrag und Diskussion der Gruppe reason[Ing.] zum Thema Spieltheorie und Ethik (etwa 50 Anwesende, 40 Spieler). Nach zwei Testrunden wurde in der dritten um echtes Geld gespielt. Die so angekündigte Verschärfung hat das Spielverhalten kaum beeinflusst. Das Verhalten ist ähnlich wie oben, die Entwicklung deutlich langsamer.

Kooperation ist vielleicht wünschenswert, aber nicht immer möglich!
Rationalität ist vielleicht möglich, aber nicht immer wünschenswert?

Unser Experiment „Hin-und-Rück“





Momentaufnahmen der Studierendenpopulation vom 08. April 2025.
Im zweiten Durchgang, mit echtem Geld, waren *alle* mutig-optimistisch!
Diskussion der ersten Runde beeinflusst die Reaktion in der zweiten.
Wie schnell obsiegt hier das rational-egoistische Spielverhalten?

Schnelles Denken, langsames Denken

Ist moralisches Verhalten naiv? Ist Nutzenmaximierung unmoralisch?
Welche Sichtweise beschreibt das real beobachtete Verhalten besser?
Wer hat denn nun Recht: Instinkt oder Kalkül? Ratio oder Moral?

Beide! Am Anfang sehen wir das empfundene moralische Verhalten, auf lange Sicht setzt sich jedoch das rationale Verhalten durch.

Thinking, fast and slow von Daniel Kahneman, Wirtschafts-Nobelpreis 2002, unterscheidet zwei verschiedene Arbeitsweisen unseres Gehirns:

1. Schnell, automatisch, immer aktiv, emotional, stereotyp, unbewusst
2. Langsam, anstrengend, selten aktiv, logisch, berechnend, bewusst

Ihre genetischen Instinkte, soziale Erziehung und eigene Erfahrung sind Ihre ersten und oft einzigen Ratgeber: Sie folgen Ihrem Bauchgefühl, da Sie keine genaue Information haben oder keine Zeit, sie auszuwerten.

Ihr Verstand braucht wesentlich länger, um zu einem Urteil zu kommen. Das lohnt sich, wenn Sie die Muße haben und das Ziel wichtig genug ist. In unserem Experiment sehen wir vermutlich genau diesen Übergang!

Das Standardmodell der Spieltheorie geht davon aus, dass alle Spieler rational sind. Dies nennt man traditionell auch **Homo oeconomicus** und meint damit allgemein einen rationalen Akteur oder Nutzenmaximierer.

Die Vorhersagen der Theorie kann man in Experimenten überprüfen: In einigen Experimenten stellt sich recht genau das prognostizierte Gleichgewicht ein (eventuell erst nach mehreren Wiederholungen), in anderen hingegen nicht (oder noch nicht, allzu langsame Konvergenz).

Es gibt dabei wie in allen Wissenschaften grundsätzlich zwei Arten von Experimenten: passiv-beobachtend und aktiv-kontrollierend.

Feldstudien untersuchen echte Daten aus realen Situationen (etwa Auktionen, Märkte, Verhandlungen). **Vorteile:** Echte Daten aus realen Situationen. Die Erhebung der Daten kann schwierig sein, sie wird vereinfacht, falls die Interaktion ohnehin online stattfindet. **Nachteile:** Die reale Situation ist oft kompliziert und die Struktur des Spiels nicht klar definiert. Oft können viele Einflussgrößen nicht kontrolliert werden; sie beeinflussen die Ergebnisse, sind aber unbekannt oder unzugänglich.

Laborexperimente lassen Versuchspersonen im Labor gegeneinander spielen. **Vorteile:** Das Spiel ist genau definiert und kontrolliert (Regeln, Kommunikation, Auszahlungen, Vorwissen, Framing, Randomisierung). Durch geschickt konstruierte Spiele können Fragestellungen ganz gezielt untersucht und Hypothesen getestet werden. **Nachteile:** Die Situation ist künstlich, das beobachtete Verhalten oft nur eingeschränkt übertragbar. Meist wird nur um kleine Beträge gespielt, die Nutzenoptimierung ist dadurch weniger ausgeprägt, die Skalierung vermutlich problematisch.

Manchmal wollen Teilnehmer nur spielen (sic!), selbst experimentieren oder ihren Spaß haben, den Spielleiter beeindrucken oder vermuteten Erwartungen ent/widersprechen (wie Fairness, Rationalität, etc).

Trotz dieser Schwierigkeiten und methodischen Herausforderungen ist die experimentelle Spieltheorie überaus erfolgreich. Verhaltensökonomik [*behavioural economics*] ist für viele Unternehmen ein zentrales Thema: Wenn sich Kunden schon nicht rational verhalten, so will man dennoch vorhersagen können, wie sie sich verhalten: **predictable irrationality**.

„Dieser Zustand ist unbefriedigend.“, beklagte eine Studentin enttäuscht. Ja, sicher, wie immer ist die Wirklichkeit komplizierter als die Theorie. Ich sehe diese erste (schockierende) Einsicht als Erfolg: Wir haben den Begriff der Rationalität präzisiert und sogleich experimentell getestet. Wir haben in kurzer Zeit und mit wenig Aufwand bereits viel gelernt.

Rationale Spieler müssen die Irrationalität ihrer Mitspieler einschätzen. Selbst wenn sie selbst vollkommen rational sind, so wählen sie doch Ihre Strategie abhängig davon, ob sie gegen einen unfehlbaren Computer spielen oder eine bunt gemischte Gruppe Ihrer Mitmenschen, wie oben. Es geht hier also um Rationalität zweiter Stufe (im Sinne von A2A).

Ich bemühe mich in meinem Vortrag um eine ehrliche Darstellung, daher präsentiere ich zur Rationalität nicht nur Definition und Anwendungen, sondern skizziere zugleich ihre Grenzen. Diese sind oft eng gesteckt.

Diese Dialektik der Un/Vernunft ist erfahrungsgemäß ein starker Impuls für viele Zuhörer. Mein improvisiertes Experiment dürfen interessierte Teilnehmer gerne verbessern: Das ist ein ehrenwertes, lohnendes Ziel!

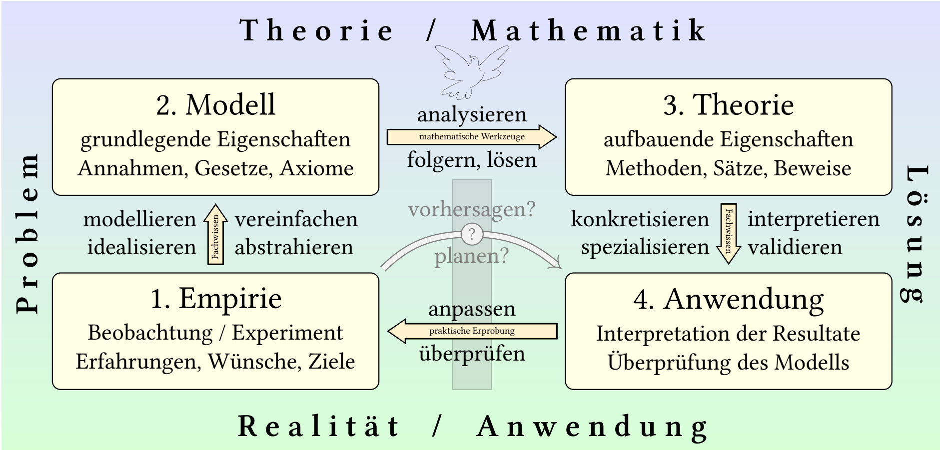
„Das ist unwissenschaftlich.“, kritisierte ein Student meinen Versuch. Ja, zugegeben, es ist eher lustiges Partyspiel als seriöses Experiment. Ich denke, es trifft einen wahren Kern; das ist zunächst nur eine These. Es dient als didaktische Illustration und eindrücklicher Anstoß, nicht als wissenschaftliche Dokumentation und Ergebnis. Sollen wir deshalb auf gemeinsames Spiel und persönliche Erfahrung verzichten? Keinesfalls!

„Der Begriff *Rationalität* wird hier zu eng und einseitig gefasst.“ Ja, auch das ist richtig. Viele Teilnehmer haben zur Rationalität unterschiedliches Vorwissen, Intuition oder Ansichten. Die Definition präzisiert den Begriff als bequeme Zusammenfassung. Das Wort selbst ist nur eine hilfreiche Abkürzung, es ist nur ein Platzhalter und ansonsten willkürlich ersetzbar.

Wichtig ist nicht das Wort, sondern seine Bedeutung: Die Definition präzisiert und fixiert den Sinn, den wir für das Folgende vereinbaren. Sie dürfen gerne anderer Meinung sein, doch zum Zwecke unserer Diskussion müssen wir den Dingen einen eindeutigen Namen geben, um darüber sprechen zu können und uns nicht ewig im Kreise zu drehen.

Wozu dient Mathematik?

Alles Leben ist Problemlösen. (Sir Karl Popper, 1902–1994)



Mathematik untersucht sowohl abstrakte Strukturen als auch konkrete Anwendungen. Dies sind keine Gegensätze, sondern sie ergänzen sich!

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant, 1724–1804)

Wozu dient Mathematik?

Wir beginnen mit der **Empirie**, also konkreten **Beobachtungen** und praktischen **Erfahrungen**. Hieran erkennen wir erste **Probleme** und formulieren unsere **Ziele**: Wir wollen die vorliegenden Probleme lösen!

Wenn wir bereits eine mögliche Lösung vorliegen haben oder zumindest vermuten, dann können wir sie **überprüfen** und soweit nötig **anpassen**. (Tradition, Erfahrung, Ausbildung, Anleitung, Nachahmung, Erklärvideo)

Meist kennen wir jedoch noch gar keine Lösung. Wir könnten uns durch Versuch-und-Irrtum vortasten, doch naives Herumprobieren kostet Zeit, oft dauert es zu lange, ist zu aufwändig, gefährlich oder gar unmöglich.

Besser wir gehen **planvoll** vor und suchen **systematisch** nach einer Lösung, oder gar nach allen Lösungen, um dann die beste auszuwählen.

Das ist der **Nutzen der Theorie**: Sie erweitert unseren Werkzeugkasten, wo bloßes Probieren nicht genügt. Theorie und Anwendung ergänzen sich: Proben sind weiterhin gut und richtig, doch erst die Theorie liefert neue Ansätze, die sich lohnen auszuprobieren. Die Trefferquote steigt.

Probieren geht über Studieren? **Studieren erweitert Probieren!**

Ist Spieltheorie deskriptiv oder normativ?

Modelle können **deskriptiv**, aber auch **normativ** eingesetzt werden. Deskriptiv: beschreibend (Kettenlinie), erklärend (Planetenbewegung), vorhersagend (Wetterprognose). Normativ: vorschreibend (Bauplan), planend (Raumsonde), gesetzgebend (Umwelt- und Klimaschutz).

Das Kiosk-Problem haben wir durch systematische Untersuchung aller Fälle gelöst. Bei drei Spielern erfordert dies $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ Fälle; hier sind Systematik und Sorgfalt unbedingt erforderlich, um keinen Fall zu vergessen oder falsch auszuwerten. Das ist mühsam, aber es lohnt sich!

Diese Genauigkeit ist typisch für wissenschaftliche Vorgehensweise. Logik und Systematik, Ehrlichkeit und Sorgfalt sind die grundlegenden Techniken der Mathematik — und jeder ernsthaften Untersuchung.

Dieses Anwendungsproblem ist vereinfacht, doch halbwegs realistisch. Die Analyse gibt einen klaren Ratschlag, gar eine Handlungsanweisung: Bei drei Lizenzen sollte der erste Platz 8 wählen. Das ist keineswegs offensichtlich, sogar eher überraschend. Hier ist die Theorie normativ. Entspricht dies den Beobachtungen? Hier kommt die Empirie ins Spiel!

Ist Spieltheorie deskriptiv oder normativ?

Spieltheorie kann nicht nur normativ, sondern auch deskriptiv genutzt werden, etwa um beobachtetes Verhalten zu beschreiben und zu erklären. Hier ist unser Experiment „Hin-und-Rück“ lehrreich und überraschend!

Die Theorie untersucht wie immer zunächst das rationale Verhalten. $\mathscr{R}_1$: Spieler B schickt nichts zurück. $\mathscr{R}_2$: Spieler A schickt nichts hin. Das beobachtete Verhalten sieht jedoch ganz anders aus! Hierzu ist entscheidend, ehrliche und ausgeklügelte Experimente durchzuführen.

Wie ist die Abweichung zu erklären? Einerseits gehen die Spieler nicht streng rational vor, etwa weil die Zeit oder der Wille für eine genauere Analyse fehlt, oder weil Überzeugungen von Moral und Gerechtigkeit mitschwingen. Eine verbesserte Theorie sollte dies berücksichtigen!

Andererseits können wir das Experiment verbessern und erweitern. Durch wiederholtes Spielen gewinnen die Teilnehmer an Erfahrung: Probieren ergänzt studieren! Das beobachtete Verhalten nähert sich dann tatsächlich der theoretischen Vorhersage. Unsere Theorie macht also doch zutreffende Vorhersagen, aber auf etwas subtilere Weise.

Wo wird die Spieltheorie genutzt und angewendet?

Die Spieltheorie ist kaum achtzig Jahre alt, sie wächst rasant weiter und entfaltet einen großen Einfluss. Sie wird nahezu überall angewendet, zumeist interdisziplinär, wie unsere ersten Beispiele erahnen lassen.

Besonders naheliegend sind ökonomische Anwendungen:

- Management (Unternehmensstrategien, Optimierung, Anreize)
- Märkte (Konkurrenz, Marktdesign, In/Effizienz, De/Regulierung)
- Auktionen (effiziente Zuteilung von Ressourcen, faire Teilung)
- Kontrollinstanzen (Wettbewerbsschutz, Verbraucherschutz)

Der Übergang zur Politik ist dabei fließend:

- Wirtschaftspolitik (Mechanismen, Kartellgesetze, Oligopoltheorie)
- Wettbewerbspolitik (internationale Handelsbeziehungen, Zölle)
- Geldpolitik (Inflation, Stabilität, Regulation, Finanzkrisen)
- Sozialpolitik (Steuern, Anreize, Ausgleich, Wohlfahrt)

Wo wird die Spieltheorie genutzt und angewendet?

Die Spieltheorie betrifft nahezu alle Bereiche der Politik...

- Kollektive Entscheidungen (Wahlsysteme, Abstimmungen)
- Gesetzgebung (kollektives Verhalten, Anreize und Verbote)
- Verhandlungen und Verträge, internationale Beziehungen
- Umweltschutz, ABC-Waffen-Verbot, Abrüstung, Kontrollen
- Internationale Konventionen, Menschenrechte, Kriege

...und des Zusammenlebens in unserer Gesellschaft:

- Experimentelle Wirtschaftsforschung (Verhaltensökonomik)
- Soziologie, Psychologie (Interaktion, Kommunikation, Social Media)
- Philosophie (Ir/Rationalität, Moral, Freiheit, Gesellschaftsvertrag)
- Pädagogik (Interaktion, Rahmen, Erziehung, Lerntheorie)
- Justiz (gesellschaftliche Normen, Zivilrecht, Strafgesetz)

Gesellschaftliche Interaktion ist angewandte Spieltheorie! Entweder direkt: Wie maximiere ich meinen Vorteil? (Optimierung) Oder indirekt: Welche Regeln führen zu welchem Verhalten? (Mechanismendesign)

Wo wird die Spieltheorie genutzt und angewendet?

Die Spieltheorie betrifft ebenso viele Grundlagenwissenschaften:

- Biologie und Medizin (Ko/Evolution von Genen, auch Memen)
- Systemtheorie (Interaktion, Selbstorganisation, Musterbildung)
- Quantenspiele (Spiele auf quantenmechanischen Trägern)
- Komplexitätstheorie (Lösung von Spielen, Gleichgewichte)
- Logik (Mengenlehre, Determiniertheit, Beweistheorie)

Besonders fruchtbar ist die Wechselwirkung mit der Informatik:

- Protokolle für strategische Agenten (Netzwerke, Sicherheit)
- Peer-to-Peer Systeme (Reputation, Feedback, Review)
- Kryptowährungen (gegenseitige Kontrolle, Incentives)
- Data Science, Künstliche Intelligenz, Machine Learning
- Distributed AI, Multiagent-Systems, Robotics, uvm.

Spieltheorie dient als theoretische Grundlage und praktisches Werkzeug, sowohl deskriptiv-erklärend als auch konstruktiv-angewandt.

Wo wird die Spieltheorie genutzt und angewendet?

Die Spieltheorie untersucht Konflikte, Konkurrenz und Kooperation. Sie hilft, strategische Entscheidungssituationen besser zu verstehen.

Sie ist damit extrem vielseitig anwendbar, denn fast alles ist ein Spiel, oder genauer gesagt: Fast alles lässt sich als ein Spiel betrachten.

Sobald mehrere Entscheider (Individuen, Akteure, Spieler) gemeinsam ein Ergebnis erzielen, ist dies ein Anwendungsgebiet der Spieltheorie.

Es ist bemerkenswert, dass sich bei dieser enormen Spannweite der Anwendungen dennoch eine gemeinsame Theorie entwickeln lässt.

Abstraktion ist die Kunst, Wesentliches von Unwesentlichem zu trennen. Denkökonomie: Daten ändern sich, doch Methoden bleiben bestehen.

Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung. Sie ist schön und gut: ästhetische Kunst und nützliches Handwerk.

Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen! Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

Literatur: Einführungen

Es gibt viele gute Lehrbücher zur Spieltheorie. Die ersten bieten eine Einführung und motivieren, illustrieren, erläutern ausführlich. Weitere vertiefen anspruchsvolle Begriffe und mathematische Techniken. Die richtige Balance ist schwer zu finden und hängt vor allem von der Leser:in ab! Zur Orientierung und als Anregung habe ich für Sie einige empfehlenswerte Bücher ausgewählt. Meine Auswahl versucht den überaus vielfältigen Aspekten der Spieltheorie gerecht zu werden und durch Kommentare einzuordnen. Vielleicht kann Sie dies zum Schmökern anregen.

Ken Binmore:
Fun and Games. Heath & Co 1992

Für Freude am Lesen, leicht, klar, mit schönen Illustrationen, dagegen kaum Beweise. Geduld und Beharrlichkeit werden belohnt durch packende Geschichten und reichen Beispielfundus.

Robert Gibbons:
A Primer in Game Theory. Prentice Hall 1992

Knappe und intuitive doch umfassende Einführung, wenig Formalismus und wenig Vertiefung.

Avinash Dixit, Susan Skeath, David Reiley:
Games of Strategy. Norton & Co 2014

Eine freundliche und ausführliche Einführung, wortreich und formelarm.

Literatur: Einführungen

Die folgenden Einführungen sind wesentlich umfangfreicher und ausführlicher. Die Darstellung führt von wortreich-formelarm (für ein allgemeines Publikum und WiWi-Einführungen) hin zur effizienten Nutzung des mathematischen Formalismus (wie im Mathe- und Informatikstudium). Beides hat seine Vorteile, je nach Publikum und Zielsetzung. Dosieren Sie selbst!

David M. Kreps:
A Course in Microeconomic Theory. Princeton University Press 1990

Eine gut motivierte Einführung, wenig Formalismus, dafür sehr ausführliche Erklärungen.

Martin J. Osborne:
An introduction to Game Theory. Oxford University Press 2009

Gut motivierte Einführung, diskutiert viele Beispiele, versucht Präzision mit wenig Mathematik.

Yoav Shoham, Kevin Leyton-Brown: *Multiagent systems: algorithmic, game-theoretic and logical foundation.* Cambridge University Press 2009

Eine Einführung zur Spieltheorie strategischer Agenten: Die Spieltheorie gehört nicht exklusiv den Wirtschaftswissenschaften, in den letzten Jahren boomt sie zunehmend in der Informatik. Die explosionsartige Entwicklung des Internets in den 1990ern erforderte spieltheoretische Methoden in der Informatik und startete eine anhaltende, höchst erfolgreiche Entwicklung.

Literatur: Grundlagen und Vertiefungen

Zielgruppe der folgenden Lehrwerke sind Studierende nach einer ersten Einführung, die ein solides mathematisches Verständnis mitbringen und dies in der Spieltheorie nutzen wollen. Die Darstellung wird dadurch effizienter und dichter: mehr Formeln, weniger Worte.

Steven Tadelis:
Game Theory, an Introduction. Princeton University Press 2013

Ein sehr gut strukturiertes Buch, sorgfältig geschrieben und schön zu lesen. Es eignet sich zum Einstieg und zum Selbststudium, liefert zugleich die mathematische Präzision zur Vertiefung.

Drew Fudenberg, Jean Tirole:
Game Theory. MIT Press 1991

Dieses Lehrbuch bietet eine gute Mischung aus motivierender Erläuterung und mathematischer Ausführung, Fallbeispielen und Übungsaufgaben. Es dient als Referenz und zur Vertiefung.

Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston, Jerry R. Green:
Microeconomic Theory. Oxford University Press 1995

Eine 1000seitige Bibel der Mikroökonomik. Die Theorie wird gründlich und formal dargestellt; dadurch eignet sich das Werk bestens für einen zweiten Durchgang und als Nachschlagewerk. Kapitel 7–9 und 21–23 behandeln Spieltheorie, nahtlos eingebettet in die Mikroökonomik.

Literatur: Grundlagen und Vertiefungen

Roger B. Myerson:
Game Theory, Analysis of Conflict. Harvard University Press 1997

Eine schön geschriebene Einführung, von den mathematischen Grundlagen der Nutzentheorie bis zu fortgeschrittenen Konzepten der Spielteorie. Verbindet Motivation mit Sätzen und Beweisen.

Martin J. Osborne, Ariel Rubinstein:
A Course in Game Theory. MIT Press 1994

Viele Beispiele, bemüht um Gleichgewicht zwischen Intuition und Formalismus. Das Buch fordert Selbständigkeit: Viele Anwendungen und Ausführungen sind als Übungen formuliert.

Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy:
Winning Ways for Your Mathematical Plays. A K Peters 2001–2004
Gewinnen: Strategien für mathematische Spiele. Vieweg 1985–1986

John H. Conway: *On Numbers and Games.* A K Peters 2000

Aaron N. Siegel: *Combinatorial Game Theory.* AMS 2013

Die kombinatorische Spieltheorie ist ein riesiges, faszinierendes Gebiet, das wir hier nur streifen. Wer in diese Richtung abbiegt, findet sein Glück in den epischen Klassikern WW und ONAG. Den aktuellen Stand der Forschung in rigoroser Darstellung bietet Siegels CGT.

Literatur: Klassiker, alt und neu

A313 Erläuterung

John von Neumann, Oskar Morgenstern:
Theory of Games and Economic Behavior. Princeton Univ. Press 1944

Dieses Buch begründete die moderne Spieltheorie und ihre mathematische Untersuchung. Es ist immer noch interessant, aber schwer zu lesen und daher nicht zum Einstieg empfohlen.

R. Duncan Luce, Howard Raiffa:
Games and Decisions. Wiley & Sons 1957, Dover Publications 2012

Eine sehr schöne und umsichtige Darstellung der Grundlagen aus den Anfängen der Spieltheorie, wunderbar geschrieben, wenig formal doch kristallklar. Auch heute noch hervorragend lesbar.

Thomas C. Schelling:
The Strategy of Conflict. Harvard University Press 1960

Der spätere Wirtschafts-Nobelpreisträger des Jahres 2005 erklärt hier die Grundlagen für (nuklear-)strategisches Verhalten. Sein Buch zählt zu den einflussreichsten des 20. Jahrhunderts.

Daniel Kahneman:
Thinking, Fast and Slow. Farrar, Straus and Giroux 2011

Der Wirtschafts-Nobelpreisträger des Jahres 2002 und Mitbegründer der Verhaltensökonomik erklärt seine psychologischen Arbeiten zu Heuristiken und Verzerrungen (*heuristics and biases*).

Literatur: Nachschlagewerke und AGT

A314 Erläuterung

Die Spieltheorie ist relativ jung, doch extrem vielseitig und interdisziplinär. Ihre Anwendungen und Vertiefungen entwickeln sich explosionsartig. Nachschlagewerke und Handbücher sind daher unverzichtbar für den Überblick. Wenn Sie sich schon etwas auskennen und nach neuen Ideen stöbern wollen, dann kann ich gut geschriebene Übersichtsartikel nur wärmstens empfehlen.

Robert J. Aumann, Sergiu Hart (eds):
Handbook of Game Theory 1–3. North Holland 1992–2002

Kenneth J. Arrow, Michael D. Intriligator (eds):
Handbook of Mathematical Economics 1–4. North Holland 1981–1991

Schließlich liegt der Schritt zur Informatik, Künstlichen Intelligenz und Maschinellem Lernen nahe: Jeder strategische Agent versucht sein Verhalten zu optimieren, also spielend zu lernen. Dieser Ansatz hat in den letzten Jahren zu spektakulären Erfolgen geführt und ist inzwischen in unserem Alltag angekommen. Dieser Trend wird sich in den nächsten Jahren weiter verstärken.

Noam Nisan, Tim Roughgarden, Éva Tardos, Vijay Vazirani (eds):
Algorithmic Game Theory. Cambridge University Press 2007

Stuart Russell, Peter Norvig: *Artificial Intelligence: A Modern Approach.* Addison Wesley (3rd ed.) 2016

Literatur: Evolutionäre Spieltheorie (EGT)

A315 Erläuterung

John Maynard Smith: *Evolution and the Theory of Games.* CUP 1982

Richard Dawkins: *The Selfish Gene.* OUP 1976, 40th anniv. ed. 2016

Herbert Gintis: *Game Theory Evolving.* PUP 2009

Josef Hofbauer, Karl Sigmund: *Evolutionary Games and Population Dynamics.* Cambridge University Press 1998

William H. Sandholm: *Population Games and Evolutionary Dynamics – Economic Learning and Social Evolution.* MIT Press 2010

Die Evolutionäre Spieltheorie erforscht evolutionäre Prozesse mit spieltheoretischen Methoden. Dieser Zugang ist in der Evolutionsbiologie höchst erfolgreich seit der Pionierarbeit *The Logic of Animal Conflict* von John Maynard Smith and George R. Price, online `doi.org/10.1038/246015a0`. Umgekehrt bereichert die evolutionäre Sichtweise auch die klassische Spieltheorie um Dynamik, Anpassung, Lernen, …. Auch hier ist die Literatur umfangreich, ich nenne eine kleine Auswahl.

Paul Raeburn, Kevin Zollman: *The Game Theorist's Guide to Parenting.* Scientific American / Farrar, Straus and Giroux 2017

Teilnehmer:innen berichten, dass ihnen die Sichtweise der Spieltheorie oft im Alltag begegnet, etwa als Eltern in Fragen der Erziehung. „The best gift for a game theorist. Kids not needed!"

Wie lernen Sie erfolgreich Spieltheorie?

A316 Erläuterung

Diese Vorlesung Spieltheorie fördert Ihr kontinuierliches Mitdenken: Viele der Bei-Spiele sind so aufeinander aufgebaut, dass sie uns in folgenden Kapiteln als hilfreiche Leitbilder und Prüfsteine dienen.

Die Phänomene sind zwar allesamt einfach, doch vielschichtig genug, um verschiedene Betrachtungen, Modellierungen und Verfeinerungen zuzulassen: Rationalität, dominante Strategien, Nash–Gleichgewichte, zeitlich-dynamische Struktur, teilspielperfekte Gleichgewichte, usw.

Die Wirklichkeit ist komplizierter als sie auf den ersten Blick scheint. Gerade deshalb lohnen sich mathematische Präzision und Sorgfalt. Das spieltheoretische Modell dient als Grundlage. Selbst wo es versagt, ist es der Maßstab für die Abweichung von Prognose und Beobachtung.

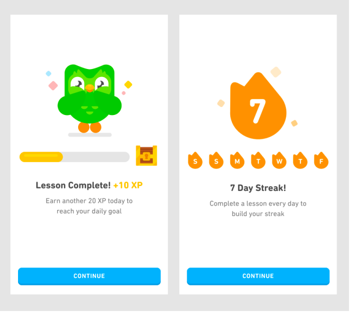
Erfahrungsgemäß provozieren schon erste einfache Versuche einer spieltheoretischen Modellierung lebhafte Diskussionen der Teilnehmer. Diese Auseinandersetzung führt häufig zu lehrreichem Widerspruch und im weiteren Verlauf dann zu einem besseren Verständnis.

Das ist gut und richtig so: Ihr Engagement ist wesentlich!

Was ist Gamification?

Gamifizierung (engl. *gamification*, dt. auch Spielifizierung) ist die „Anwendung spieltypischer Elemente in einem spielfremden Kontext“, in einem Arbeitsumfeld zum Beispiel Erfahrungspunkte, Highscores, Fortschrittsbalken, Ranglisten, virtuelle Güter oder Auszeichnungen.

Das kann die Motivation erhöhen und die soll die Leistung steigern: Benutzermotivation, Lernerfolg, Kundenbindung, Datenqualität, uvm. Ein allseits bekanntes Paradebeispiel ist Sprachlernapp *duolingo*.



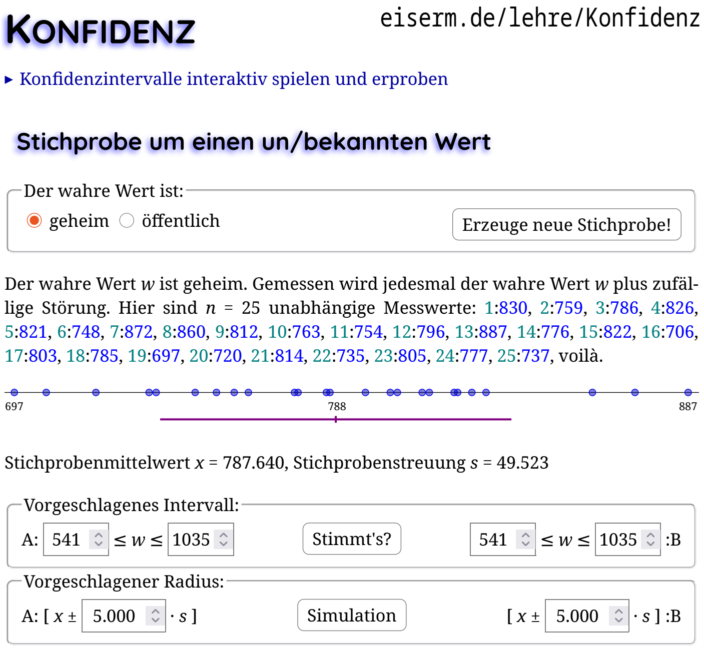
Was ist Gamification?

🙂 Weniger extrem, aber noch besser zugeschnitten und lerneffizienter sind unsere wöchentlichen Quizze auf der Lernplattform Ilias. Friederike Stoll hat sie zu einer hohen Kunst entwickelt, als effizientes Scharnier zwischen Vorlesung und Übung, zur Lernmotivation und Selbstkontrolle.

☹ Wie jedes Werkzeug hat auch Gamifizierung ihre dunklen Seiten. Problematisch ist die Selbstausbeutung bis zur Spielsucht. Gefährlich ist die mögliche Indoktrination, von Verharmlosung bis zur Verherrlichung von Gewalt. Für Drohnenpilot:innen gleicht jeder Kriegseinsatz einem Computerspiel. ▶ Omeleto: *Uncanny Valley.* `youtu.be/1AvyUWUKCw8`

Gamifizierung bezeichnet grundsätzlich die Verwendung typischer spielerischer Elemente in einem eigentlich spielfremden Kontext. Im Hinblick auf rechtsterroristische Anschläge zählen hierzu vor allem die Übertragung und Darstellung der Tat aus der sogenannten Ego-Shooter-Perspektive durch Onlinestreaming sowie die Führung von Opferranglisten und das Absolvieren von Herausforderungen (sogenannte Achievements).
`www.verfassungsschutz.de` (Glossar, aufgerufen am 17.02.2025)

Beispiel: Was sind und was bedeuten Konfidenzintervalle?



Beispiel: Was sind und was bedeuten Konfidenzintervalle?

Ein wesentliches Ziel der Mathematik sind rationale Entscheidungen. Wir wollen dazu präzise Aussagen mit nachvollziehbaren Begründungen. Die Stochastik untersucht rationale Entscheidungen unter Unsicherheit, etwa Experimente und Messungen unter dem Einfluss von Zufällen oder allgemein Prozesse mit unsicherem Ausgang.

Die Mathematik, hier speziell die Stochastik, bietet effiziente Werkzeuge und erfolgreiche Methoden für viele Probleme des Alltags und technisch-wissenschaftliche Anwendungen. Wie kann man diese gut lernen? Wie am besten lehren? Unsere Webseite `eiserm.de/lehre/Konfidenz` erklärt die berühmt-berüchtigten Konfidenzintervalle als Spiel.

🙂 Das Casino bietet die wunderbare Gelegenheit, Spiele zu erproben!

Unsere Leitidee ist einfach und lässt sich ganz allgemein anwenden: Wir erklären grundlegende mathematische Ideen und Methoden durch interaktive Spiele. Wir machen allgemein nützliche Techniken konkret spielbar; so kann man sie hoffentlich besser begreifen und schließlich verstehen. Die Regeln erklären wir vor dem Spiel. Viel Spaß!

Unendlich oft gleich?

Rufen Sie „Stopp!“, sobald Sie beweisen können, dass zwei der folgenden Zahlen an unendlich vielen Nachkommastellen übereinstimmen.

$$
\begin{aligned}
0 &= 0.\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\ldots\\
1/3 &= 0.\,33333\,33333\,33333\,33333\,33333\,33333\,33333\,33333\,33333\,33333\ldots\\
2/3 &= 0.\,66666\,66666\,66666\,66666\,66666\,66666\,66666\,66666\,66666\,66666\ldots\\
1/7 &= 0.\,14285\,71428\,57142\,85714\,28571\,42857\,14285\,71428\,57142\,85714\ldots\\
\sqrt{2} &= 1.\,41421\,35623\,73095\,04880\,16887\,24209\,69807\,85696\,71875\,37694\ldots\\
\sqrt{3} &= 1.\,73205\,08075\,68877\,29352\,74463\,41505\,87236\,69428\,05253\,81038\ldots\\
\sqrt{5} &= 2.\,23606\,79774\,99789\,69640\,91736\,68731\,27623\,54406\,18359\,61152\ldots\\
\ln 2 &= 0.\,69314\,71805\,59945\,30941\,72321\,21458\,17656\,80755\,00134\,36025\ldots\\
\mathrm{e} &= 2.\,71828\,18284\,59045\,23536\,02874\,71352\,66249\,77572\,47093\,69995\ldots\\
\pi &= 3.\,14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\,50288\,41971\,69399\,37510\ldots\\
\pi^2 &= 9.\,86960\,44010\,89358\,61883\,44909\,99876\,15113\,53136\,99407\,24079\ldots
\end{aligned}
$$

Stopp! **Beweis:** Wir haben $q = 10 < p = 11$ und $f_1, \dots, f_p : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_q$.
Schubfachprinzip 1: An jeder Stelle $k \in \mathbb{N}$ haben wir $\{1, \dots, p\} \to \mathbb{Z}_q$ mit $i \mapsto f_i(k)$. Wegen $p > q$ existiert ein Paar $i < j$ mit $f_i(k) = f_j(k)$.

Die Mengen $E_{i,j} := \{\, k \in \mathbb{N} \mid f_i(k) = f_j(k) \,\}$ überdecken $\mathbb{N} = \bigcup_{i<j} E_{i,j}$.
Es gibt nur endlich viele Indexpaare $i < j$, genauer $\binom{p}{2} = p(p-1)/2 = 55$.
Schubfachprinzip 2: Also muss eine der Mengen $E_{i,j}$ unendlich sein. QED

Konkret oder abstrakt? *Be wise, generalize!*

Wenn wir unsere Zahlen nacheinander vergleichen, so sind die ersten drei klar. Zuerst stutzt man vielleicht bei $1/7$. Dies ist noch kein Treffer.

Bei $\sqrt{2}$ beginnt der Wahnsinn: Die Dezimalentwicklung ist kompliziert und wirkt „zufällig“. Insbesondere möchte man vermuten, dass jede Ziffer unendlich oft vorkommt. Niemand bestreitet das ernsthaft, aber beweisen konnte es noch niemand. Mindestens *zwei* Ziffern müssen unendlich oft vorkommen. (Warum?) Schon *drei* Ziffern scheint eine offene Frage! Auch konnte niemand irgendeine konkrete Ziffer nachweisen!

Auch die folgenden sechs Zahlen sind vermutlich „normal“, das heißt: Alle Ziffern sind asymptotisch gleich häufig, allgemein sogar alle Blöcke von ℓ Ziffern. Fast alle reellen Zahlen sind normal, doch keinem unserer obigen Beispiele wurde bislang Normalität nachgewiesen. Was nun?

Die konkreten Daten inspirieren uns zu vielen spannenden Vermutung, doch diese erweisen sich für uns als allzu knifflig. Letztlich rettet uns das Schubfachprinzip: wunderbar einfach und elegant. Allerdings wissen wir am Ende immer noch nicht, *welche* Paare $i < j$ die Frage beantworten.

Konkret oder abstrakt? *Be wise, generalize!*

L Vergleichen und diskutieren Sie folgende Formulierungsvarianten:

(A) Sind zwei der obigen Dezimalentwicklungen unendlich oft gleich? Gamifizierung: Zum interaktiven Spektakel enthülle ich schrittweise....

(B) Gibt es unter elf reellen Zahlen in Dezimaldarstellung immer zwei, die an unendlich vielen Nachkommastellen übereinstimmen?

(C) Zeigen Sie: Unter je elf reellen Zahlen gibt es immer zwei, die an unendlich vielen Nachkommastellen übereinstimmen.

Formulierung (A) kann / soll dazu verleiten, über die gegebenen Zahlen nachzudenken. Das erweist sich zwar schnell als kompliziert, provoziert aber weitere interessante Fragen. Die Formulierung (B) leitet gleich auf die einfachere Frage, allerdings noch offen, daher zunächst schwieriger: Zuerst einmal muss man die richtige Antwort finden, dann beweisen! Implizit erwarten (A) und (B) natürlich, dass die Antwort bewiesen wird. Am freundlichsten ist wohl (C), siehe BWM 1994, Runde 1, Aufgabe 1.

📖 E. Specht, E. Quaisser, P. Bauermann: *50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik. Die schönsten Aufgaben.* Springer 2020, online verfügbar.

Konkret oder abstrakt? *Be wise, generalize!*

🙂 Wie lernt man, Aufgaben zu lösen? Nur indem man Aufgaben löst! Unser eleganter Beweis verwendet das Schubfachprinzip gleich zweimal. Wie kommt man darauf? Wer diesen Trick schon oft erlebt hat, wird ihn naheliegend finden, doch genau dafür muss man ihn ausreichend üben.

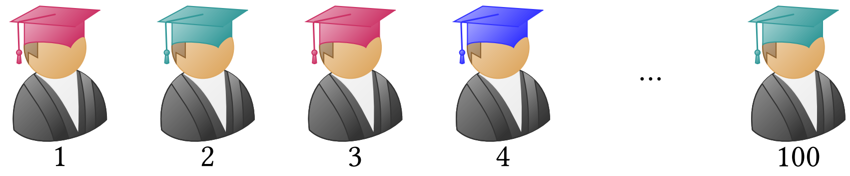
Was lernen wir an dieser Aufgabe? Erstens, die Formulierung ist wichtig. Zweitens, manchmal verwirren viele Details, und abstrakter ist leichter. Konkrete Beispiele sind schön und gut, doch detaillierte Information (A) eröffnet auch Abzweige, während weniger Information (B,C) fokussiert.

☹️ Der Beweis ist erfreulich kurz und leicht, doch nicht konstruktiv. Wir beweisen hier, wie so oft, die *Existenz* einer Lösung, jedoch ohne eine explizite *Konstruktion*. Mindestens ein Paar der obigen elf Zahlen hat die gewünschte Eigenschaft, doch leider können wir keines explizit angeben.

Starke Aussagen wie „$\sqrt{2}$ ist normal“ sind bequem *anzuwenden*, sie sind explizit und hilfreich, doch leider meistens viel schwieriger zu *beweisen*! In der Not nehmen wir, was wir bekommen können, wenn es sein muss auch eine nicht-konstruktive Existenzaussage. Immerhin ein Anfang.

Huträtsel: Immer der Reihe nach!

A409
Übung



Matherätsel haben eine lange Geschichte und diverse Erzähltraditionen: Philosophen, Gefangene, Zwerge, uvm. Hier ein Huträtsel für Studis:

Hundert Studis bekommen je einen Hut aufgesetzt in einer der drei Farben Rot, Grün, Blau. Alle stehen dabei so in einer Reihe, dass Studi n nur die Nachfolger:innen $n+1, \dots, 100$ sieht. Jede:r darf nun versuchen, die *eigene* Hutfarbe zu erraten und so 1€ für die Fachgruppe gewinnen.

Aufgabe: Welche Strategie ist optimal? Was ist der garantierte Gewinn? Wie / Hängt die Antwort von der Anzahl der möglichen Hutfarben ab?

Wichtig: *Vor* dem Spiel dürfen die Studis sich absprechen, doch *während* des Spiels erfährt jede:r nur, was die Vorgänger:innen raten. Jede weitere Kommunikation ist ausgeschlossen (verboten oder technisch unmöglich).

Huträtsel: Immer der Reihe nach!

A410
Übung

Bitte probieren Sie es unbedingt selbst: Eigenes Aha macht Freude! Aufgaben lösen, auch Huträtsel, lernt man nur durch eigene Übung.

Naiv: Jede:r rät irgendeine der drei Farben. Garantieren kann man so rein gar nichts, auch ein Gewinn von 0€ ist möglich. Wenn die Farben zufällig verteilt werden, dann ist der erwartete Gewinn immerhin $\frac{1}{3} \cdot 100€ \approx 33€$.

Paare: Jede:r ungerade Studi n nennt die Farbe des Vorderstudis $n+1$, und diese:r wiederholt das Gehörte. Garantiert wird damit ein Gewinn von $\ge 50€$. Der Gewinn kann zufällig auch höher liegen.

Optimal: Die Studis vereinbaren zuvor einen Zahlencode in $\mathbb{Z}_3$, etwa $0 = \text{Rot}$, $1 = \text{Grün}$, $2 = \text{Blau}$. Die Hutfarben sind also $x_1, \dots, x_{100} \in \mathbb{Z}_3$.
Studi 1 rät die Summe $r_1 = \sum_{i>1} x_i \in \mathbb{Z}_3$ als eigene Hutfarbe.
Studi 2 berechnet daraus die eigene Hutfarbe $x_2 = r_1 - \sum_{i>2} x_i$.
Studi 3 berechnet daraus die eigene Hutfarbe $x_2 = r_1 - x_2 - \sum_{i>3} x_i$.

So fortfahrend kann der Gewinn von 99€ garantiert werden. Wird die erste Hutfarbe x_1 zufällig verteilt, so ist der Erwartungswert $99€ + \frac{1}{3}€$.

Huträtsel: Auf zum Treffpunkt!

A411
Übung

Hundert Studis bekommen je einen Hut aufgesetzt: rot, grün oder blau. Jede:r sieht alle anderen Farben, aber nicht die eigene, und soll nun zu einem der Treffpunkte A,B,C gehen, sodass sich dort nur Gleiche treffen.

Aufgabe: Ist das überhaupt möglich? Mit welcher treffsicheren Strategie? Wie / Hängt die Antwort von der Anzahl der möglichen Hutfarben ab?

Wichtig: *Vor* dem Spiel dürfen die Studis sich absprechen, doch *während* des Spiels ist jede weitere Kommunikation ausgeschlossen, entweder verboten oder technisch unmöglich, zum Beispiel als Emailspiel.

Huträtsel: Auf zum Treffpunkt!

A412
Übung

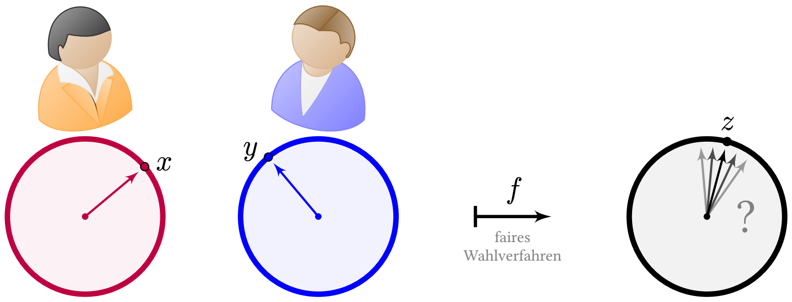
Lösung: Die Studis vereinbaren zuvor einen Zahlencode in $\mathbb{Z}_3$, etwa $0 = \text{Rot}$, $1 = \text{Grün}$, $2 = \text{Blau}$. Die Hutfarben sind also $x_1, \dots, x_{100} \in \mathbb{Z}_3$. Ebenso codieren Sie die Treffpunkte in $\mathbb{Z}_3$, etwa $0 = A$, $1 = B$, $2 = C$.

Die Gesamtsumme $s = \sum_{i=1}^{100} x_i \in \mathbb{Z}_3$ ist keinem Studi bekannt.
Doch jede:r Studi k kennt den Rest $r_k = \sum_{i \ne k} x_i = s - x_k \in \mathbb{Z}_3$ und begibt sich daraufhin zu dem zugehörigen Treffpunkt.

Mögliches Anwendungszenario: In der Mathe-Ersti-Woche wollen sich die Lehramtsstudierenden je nach ihrem Zweitfach zusammenfinden. Die Fachgruppe organisiert das gerne und verschickt als gutgemeinten Service an jede:n die Treffpunkte A,B,C,… sowie die Nebenfächer aller anderen, zwecks Datenschutz aber nicht im Klartext, sondern codiert durch $0, 1, 2, \dots$. In der Eile wird leider das eigene Nebenfach nicht als Code mitgeschickt. Natürlich könnte man in der Fachgruppe nachfragen, aber das wäre zu einfach. So entsteht die Challenge: Können sich trotz unvollständiger Information alle Gleichgesinnten datenschutzkonform absprechen und sicher treffen? Ja, bis auf Permutation der Treffpunkte!

Angewandte Topologie: stetige Richtungswahl

Szenario: Alice und Bob wählen frei und unabhängig voneinander jeweils eine Richtung in der Ebene; Alice wählt $x \in \mathbb{S}^1$, und Bob wählt $y \in \mathbb{S}^1$. Sie suchen nun einen Kompromiss $z = f(x,y)$, also ein Wahlverfahren, das aus ihren Stimmabgaben ein gemeinsames Endergebnis extrahiert.

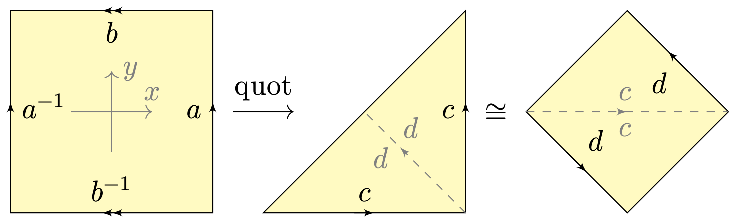


Als Wahlverfahren suchen wir eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Wir fordern Symmetrie, $f(x,y) = f(y,x)$, und Einhelligkeit, $f(x,x) = x$.

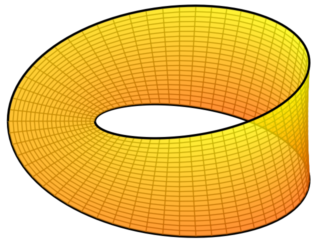
Aufgabe: Finden Sie alle in diesem Sinne fairen Wahlverfahren! Genügt $(x,y) \mapsto x$? nicht symmetrisch! xy? nicht einhellig! $\sqrt{xy}$? nicht stetig!

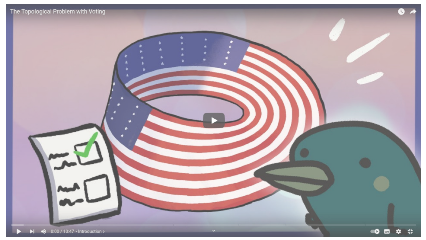
Angewandte Topologie: stetige Richtungswahl

Lösung: (1) Symmetrie bedeutet, f faktorisiert über den Quotienten $M = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/_{(x,y)\sim(y,x)}$ zu $r : M \to \mathbb{S}^1$ auf dem Möbius–Band!



(2) Einhelligkeit bedeutet Retraktion $(i,r) : \mathbb{S}^1 \rightleftarrows M$ auf den Rand.





youtu.be/v5ev-RAg7Xs

Angewandte Topologie: stetige Richtungswahl

Behauptung: Es existiert keine Retraktion $(i,r) : \mathbb{S}^1 \rightleftarrows M$ auf den Rand.
Gegeben ist $i : \mathbb{S}^1 \to M : x \mapsto [x,x]$, gesucht $r : M \to \mathbb{S}^1$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$.

Wir haben den Deformationsretrakt $(\iota, \rho) : \mathbb{S}^1 \simeq M$ auf die Mittelachse.
Explizit in Formeln? Gerne! $\iota : z \mapsto [+\sqrt{z}, -\sqrt{z}]$ und $\rho(x,y) = -xy$.

Wir hätten $(\varphi, \psi) : \mathbb{S}^1 \rightleftarrows \mathbb{S}^1$ mit $\varphi = \rho \circ i$ und $\psi = r \circ \iota$ und $\psi \circ \varphi \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$, somit $1 = \deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}) = \deg(\psi \circ \varphi) = \deg(\psi) \cdot \deg(\varphi)$, also $\deg(\varphi) = \pm 1$.

Es gilt jedoch $\deg(\varphi) = \pm 2$. Daran zerbricht unsere Annahme:
Es gibt keine Retraktion r, somit kein faires Wahlverfahren f. $\boxed{\text{QED}}$

🙂 Dieses Argument ist verblüffend raffiniert und doch einfach elegant. Unsere topologischen Werkzeuge glänzen durch effiziente Anwendung: (1) Flächenkalkül und (2) Umlaufzahl sowie Stetigkeit, Quotienten, etc. Dieses wunderschöne Anwendungsbeispiel topologischer Methoden geht zurück auf Graciela Chichilnisky (1980) und zuvor Beno Eckmann (1954). Historische Einordnung: 📖 Beno Eckmann: *Social choice and topology – a case of pure and applied mathematics.* Expo. Math. 22 (2004) 385–393. Zwei Wissenschaften tun dasselbe, merken es aber erst nach Jahrzehnten!

Angewandte Topologie: stetige Richtungswahl

Sie sehen hier ein erstes schönes und durchaus typisches Ergebnis der Sozialwahltheorie [*social choice theory*], auch Theorie kollektiver Entscheidungen [*theory of collective choice*]. Diese untersucht Wahlen und Abstimmungen, also ganz allgemein Gruppenentscheidungen durch Aggregation individueller Präferenzen zu einer kollektiven Präferenz.

Meist sucht man nach bestimmten „fairen" Wahlverfahren, so wie hier. Der erste Schritt ist die mathematische Präzisierung der Fragestellung! Oft erweisen sich jedoch die naiv-gutgemeinten Forderungen als in sich widersprüchlich und erlauben somit nachweislich keine Lösung, so wie oben gezeigt. Daher beschäftigt sich die Sozialwahltheorie nicht nur mit der Konstruktion von Lösungen, sondern auch mit Unmöglichkeitssätzen.

Mathematik hilft überall, sogar in weit entfernt geglaubten Gebieten... Die Sozialwahltheorie verbindet Mathematik mit Volkswirtschaftslehre, Politikwissenschaft, Psychologie, Philosophie, Rechtswissenschaft, uvm. Berühmt ist der „Satz vom Diktator" nach Kenneth Arrow (1921–2017); für diese und weitere Arbeiten erhielt er 1972 den Wirtschafts-Nobelpreis.

Räume mit Mittelbildung (nach Beno Eckmann)

Sie sind neugierig? Wir folgen hier dem wunderschönen Artikel von
📖 B. Eckmann: *Räume mit Mittelbildungen.* Commentarii Mathematici Helvetici 28 (1954) 329–340, online verfügbar unter `eudml.org/doc/139088`. *(Gewidmet Heinz Hopf in Verehrung und Freundschaft zum 60. Geburtstag)*

Sei $X = \mathbb{R}^k, \mathbb{D}^k, \mathbb{S}^k, \dots$ ein topologischer Raum und $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$. Ein **n–Mittel** auf X ist eine stetige Abbildung $f : X^n \to X$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Symmetrie: Es gilt die Invarianz $f(x_{\sigma 1}, \dots, x_{\sigma n}) = f(x_1, \dots, x_n)$ für jedes n–Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ und jede Permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$.
2. Einhelligkeit: Es gilt $f(x, \dots, x) = x$ für jeden Punkt $x \in X$, d.h. die Diagonale $d : X \to X^n : x \mapsto (x, \dots, x)$ erfüllt $f \circ d = \mathrm{id}_X$.

Beispiele: (1) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^k$. Darauf haben wir das arithmetische n–Mittel $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n)/n$, also den geometrischen Schwerpunkt.

(2) Ist $(X, +)$ ein abelsches topologisches Monoid und $X \to X : x \mapsto x \cdot n$ ein Automorphismus, so ist $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n)/n$ ein n–Mittel.

(3) Auf $\mathbb{R}_{\ge 0}$ haben wir das geometrische Mittel $g(y_1, \dots, y_n) = \sqrt[n]{y_1 \cdots y_n}$. Dank $(\log, \exp) : \mathbb{R}_{\ge 0} \cong \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ wird dies zum arithmetischen Mittel.

Räume mit Mittelbildung (nach Beno Eckmann)

Bemerkung: Für den leeren Raum $\emptyset$ ist alles klar. Im Folgenden sei $X \ne \emptyset$. Auf jedem Raum X ist $\mathrm{id}_X : X \to X$ ein 1–Mittel. Daher sei fortan $n \ge 2$.

(0) Wir untersuchen das algebraische Analogon für eine Gruppe $(G, +)$. Ein **homomorphes n–Mittel** auf G ist eine Abbildung $\mu : G^n \to G$, die symmetrisch und einhellig ist und zudem homomorph in allen Variablen:

$$\mu(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) = \mu(a_1, \dots, a_n) + \mu(b_1, \dots, b_n).$$

Wir definieren damit die Abbildung $\rho : G \to G$ durch

$$\rho(a) := \mu(a, 0, \dots, 0) = \mu(0, a, \dots, 0) = \mu(0, 0, \dots, a).$$

Dies ist ein Gruppenhomomorphismus, denn $\rho(a) + \rho(b) = \rho(a + b)$.

(1) Für alle Gruppenelemente $a, b \in G$ gilt dank Symmetrie und $n \ge 2$:

$$\left.\begin{aligned} \rho(a) + \rho(b) &= \mu(a, 0, 0, \dots, 0) + \mu(0, b, 0, \dots, 0) = \mu(a, b, 0, \dots, 0) \\ \rho(b) + \rho(a) &= \mu(0, b, 0, \dots, 0) + \mu(a, 0, 0, \dots, 0) = \mu(a, b, 0, \dots, 0) \end{aligned}\right\} =$$

Demnach ist in $(G, +)$ zumindest die Bilduntergruppe $\rho(G) \le G$ abelsch.

Räume mit Mittelbildung (nach Beno Eckmann)

(2) Dank Einhelligkeit folgt für jedes $a \in G$:

$$a = \mu(a, \dots, a) = \mu(a, 0, \dots, 0) + \dots + \mu(0, \dots, 0, a) = \rho(a) \cdot n = \rho(a \cdot n)$$

Somit ist $\rho : G \to G$ surjektiv. Dank (1) ist die Gruppe $G = \rho(G)$ abelsch. Demnach ist $a \mapsto a \cdot n$ ein Endomorphismus, dank $\rho(a) \cdot n = \rho(a \cdot n) = a$ sogar ein Automorphismus, mit dem expiziten Inversen $a \mapsto a/n := \rho(a)$. Damit wird $(G, +)$ zu einem linearen Raum über dem Ring $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$. Fazit:

Satz A4a: Beno Eckmann 1954

Eine Gruppe $(G, +)$ erlaubt genau dann ein homomorphes n–Mittel μ, wenn sie abelsch ist und zudem $G \to G : a \mapsto a \cdot n$ ein Automorphismus.

(3) In diesem Falle ist $\mu : G^n \to G$ das vertraute arithmetische n–Mittel:

$$\begin{aligned} \mu(a_1, \dots, a_n) &= \mu(a_1, \dots, 0) + \dots + \mu(0, \dots, a_n) \\ &= \rho(a_1) + \dots + \rho(a_n) = \rho(a_1 + \dots + a_n) = (a_1 + \dots + a_n)/n \end{aligned}$$

Damit ist für Gruppen die Mittelbildung vollständig geklärt.

Räume mit Mittelbildung (nach Beno Eckmann)

Beispiele: Die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ erlaubt ein n–Mittel für jedes $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$, doch $(\mathbb{Z}, +)$ hingegen nicht: $a \mapsto a \cdot n$ ist injektiv, aber nicht surjektiv. Die Gruppe $(\mathbb{Z}_m, +)$ erlaubt ein n–Mittel gdw $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Allgemein:

Aufgabe: Sei $(G, +)$ eine Torsionsgruppe, d.h. jedes Element hat endliche Ordnung. Genau dann erlaubt die Gruppe $(G, +)$ ein n–Mittel, wenn sie abelsch ist und n teilerfremd zur Ordnung $\mathrm{ord}(a)$ jedes Elements $a \in G$.

Lösung: „$\Leftarrow$“: Da $(G, +)$ abelsch ist, ist die Abbildung $a \mapsto a \cdot n$ ein Endomorphismus. Wir müssen nur noch zeigen, dass sie bijektiv ist. Hierzu sei $a \in G$ und $m = \mathrm{ord}(a)$. Dank $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ existieren zu m, n passende Bézout–Koeffizienten $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $mu + nv = 1$. Demnach gilt $a = a \cdot (mu + nv) = (a \cdot n) \cdot v = (a \cdot v) \cdot n$. Somit ist $a \mapsto a \cdot n$ surjektiv. Ebenso ist $a \mapsto a \cdot n$ injektiv, denn aus $an = 0$ folgt $a = (an)v = 0$.

„$\Rightarrow$“: Gilt $d = \mathrm{ggT}(m, n) > 1$, so erhalten wir $b = a \cdot (m/d) \ne 0$, es gilt jedoch $b \cdot n = (a \cdot m/d) \cdot n = (a \cdot m) \cdot (n/d) = 0$. QED

Übung: Genau dann erlaubt die Gruppe $(G, +)$ ein n–Mittel für jedes $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$, wenn sie ein $\mathbb{Q}$–Vektorraum ist. Es lebe die Lineare Algebra!

Wir kommen zurück zu unserer ursprünglichen Anwendungsfrage: Welche topologischen Räume X erlauben ein n–Mittel $f : X^n \to X$? Hier helfen uns die starken Werkzeuge der Algebraischen Topologie!

Satz A4B: Beno Eckmann 1954

Erlaubt ein topologischer Raum $X \neq \emptyset$ ein stetiges n–Mittel, so erlaubt jede seiner Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x_0)$ ein homomorphes n–Mittel.

Beispiel: Wegen $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ hat $\mathbb{S}^1$ kein stetiges n–Mittel für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Zur Erinnerung (eventuell an die Zukunft): Jedem topologischen Raum X mit Basispunkt $x_0 \in X$ können wir seine Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ zuordnen, ebenso jeder stetigen Abbildung $g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ihren zugehörigen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(g) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$. Dabei gilt stets $\pi_1(g \circ h) = \pi_1(g) \circ \pi_1(h)$ und $\pi_1(\mathrm{id}_{(X,x_0)}) = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

Kurzum: Die Fundamentalgruppe ist ein Funktor $\pi_1 : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Grp}$ von der Kategorie der topologischen Räume mit Basispunkt in die der Gruppen. So übersetzen wir (schwierige) Topologie in (leichtere) Algebra.

Beweis: Wir haben $f : X^n \to X$ stetig und symmetrisch mit $f \circ d = \mathrm{id}_X$. Auf diese Daten wollen wir nun den Funktor $\pi_1 : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Grp}$ anwenden.

Wir wählen einen Fußpunkt $x_0 \in X$. Nach Definition von $d : X \to X^n$ gilt $d(x_0) = (x_0, \dots, x_0) =: x_0^n$. Dank Einhelligkeit von f folgt $f(x_0^n) = x_0$. Somit erhalten wir $d : (X, x_0) \to (X^n, x_0^n)$ und $f : (X^n, x_0^n) \to (X, x_0)$. Diese beiden Abbildungen sind stetig und erfüllen $f \circ d = \mathrm{id}_{(X,x_0)}$.

Der Funktor π_1 macht daraus die Gruppenhomomorphismen

$$\begin{aligned} f_\sharp &:= \pi_1(f) : \pi_1(X^n, x_0^n) \to \pi_1(X, x_0), \\ d_\sharp &:= \pi_1(d) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X^n, x_0^n). \end{aligned}$$

Wir setzen $G := \pi_1(X, x_0)$. Für das Produkt gilt $\pi_1(X^n, x_0^n) \cong G^n$, kanonisch induziert durch die Projektionen $\mathrm{pr}_i : (X^n, x_0^n) \to (X, x_0)$. Für $d_\sharp := \pi_1(d) : G \to G^n$ finden wir demnach $d_\sharp(a) = (a, \dots, a)$. Die Symmetrie von $f : X^n \to X$ induziert die von $f_\sharp : G^n \to G$. Aus $f \circ d = \mathrm{id}_{(X,x_0)}$ folgt $f_\sharp \circ d_\sharp = \pi_1(f \circ d) = \pi_1(\mathrm{id}_{(X,x_0)}) = \mathrm{id}_G$.

Somit ist $f_\sharp : G^n \to G$ ein homomorphes n–Mittel auf der Gruppe G. QED

Ausblick: Eckmanns elegantes Argument gilt genauso für alle höheren Homotopiegruppen $\pi_k(X, x_0)$. Das ist sehr praktisch, denn für die Sphäre $\mathbb{S}^k$ der Dimension $d \geq 2$ bieten die Gruppen $\pi_1 = \dots = \pi_{k-1} = 0$ zunächst kein Hindernis, erst die Gruppe $\pi_k(\mathbb{S}^k, *) \cong \mathbb{Z}$ verbietet ein n–Mittel. Eckmann zeigt Satz A4B auch für Homologiegruppen H_k und schließt:

Dies sind, insbesondere für endliche Polyeder oder Räume von demselben Homologiecharakter, sehr starke Bedingungen, die die Existenz eines n–Mittels nur in seltenen Fällen zulassen.

Genauer zeigt er: Sei X ein zusammenhängendes, endliches Polyeder. Genau dann erlaubt X ein n–Mittel $f : X^n \to X$ für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, wenn der Raum X in sich auf einen Punkt zusammenziehbar ist. Das ist eine starke Bedingung und einfache Charakterisierung.

Übung: Wenn Sie die Algebraische Topologie bereits kennen und lieben, oder erlernen und einüben wollen, so ist dies eine schöne Anwendung: Führen Sie sorgsam alle Details aus und optimieren Sie obige Beweise! Was sind möglichst natürliche, elegante, gar minimale Voraussetzungen?

Was lernen wir an diesem phantastischen Anwendungsbeispiel? Wie stehen Sie zur Spaltung der Mathematik in „rein“ vs „angewandt“? Wir erleben eine atemberaubende Reise von der harmlos anmutenden Frage nach einem „fairen Wahlverfahren“ über das Möbius–Band zur Algebraischen Topologie. Erst mit diesen starken mathematischen Werkzeugen können wir die anfängliche Frage lösen. Raffiniert!

A true mathematician has respect for all parts of mathematics and does not believe in arbitrary divisions into ‘pure’ vs ‘applied’.
Doron Zeilberger, `sites.math.rutgers.edu/~zeilberg/Opinion2.html`

Wenn Sie sich mit Mathematik beschäftigen, sehen Sie überall schöne Anwendungen. Leider gilt auch umgekehrt: Wer Mühe und Sorgfalt scheut, wer die Wirksamkeit der Mathematik leugnet, sieht sie nicht. Dieses Muster gilt ganz allgemein: Man sieht nur, was man kennt.

Jede ernsthafte Beschäftigung mit Mathematik erfordert daher zunächst Neugier, Interesse und Offenheit für Probleme und sodann Kreativität, Sorgfalt und Hartnäckigkeit bei deren Lösung. So geht Wissenschaft!