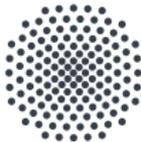


Spieltheorie und ökonomisches Verhalten

Die mathematische Analyse
von Konflikt und Kooperation

erkennen.
beweisen.
anwenden.

Prof. Dr. Michael Eisermann
zusammen mit Dr. Friederike Stoll
eiserm.de/lehre/Spieltheorie



Universität Stuttgart

Sommersemester 2022

Stand 17. August 2022

*Für die Mitteilung von Unklarheiten und Fehlern aller Art
sowie für Verbesserungsvorschläge bin ich stets dankbar!*



Habe Mut, dich deines eigenen
Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.
This is just the beginning.



Urheberrecht und Haftungsausschluss

Die hier angebotenen Inhalte sind urheberrechtlich geschützt. Sie dürfen zu nicht-kommerziellen Zwecken in der Lehre verwendet werden, sofern die Quelle wie folgt vollständig angegeben wird.

Prof. Dr. Michael Eisermann: Vorlesungsunterlagen zur Spieltheorie,
Institut für Geometrie und Topologie (IGT), Universität Stuttgart,
michael-eisermann.de/lehre/Spieltheorie

Diese Unterlagen werden genutzt zur Vorlesung *Spieltheorie und ökonomisches Verhalten* und richten sich vornehmlich an Studierende der Mathematik und benachbarter Fächer. Sie vermitteln einschlägiges Grundlagenwissen und mathematische Werkzeuge.

Die Inhalte wurden vom Autor mit größter Sorgfalt für die Präsentation in der Lehre erstellt. Sie werden allein zu Lehrzwecken zur Verfügung gestellt, in der Hoffnung, dass sie zum Lernen und Üben nützen mögen, ohne jeden Anspruch auf Eignung zu irgendeinem anderen Zweck. Sie sind keine Handlungsanweisung oder Empfehlung. Nur eigenständiges Denken hilft!

Kunst und Wissenschaft, Forschung und Lehre sind frei. (GG Art. 5.3.1) Der Autor übernimmt keinerlei Gewähr für die angebotenen Informationen und Daten, deren Aktualität, Korrektheit, Vollständigkeit, Qualität oder irgendeine Nutzbarkeit außerhalb der Lehre. Haftungsansprüche für mögliche Schäden, materieller oder immaterieller Art, sind grundsätzlich ausgeschlossen.

Für Inhalte externer Quellen, insb. verlinkter Webseiten, ist stets deren Anbieter verantwortlich.

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie.

(Immanuel Kant, 1724–1804)

Dies sind Unterlagen unserer Vorlesung *Spieltheorie und ökonomisches Verhalten*, die wir im Sommer 2018 und Winter 19/20 erstmalig abhielten. Vieles ist noch experimentell und wird weiter optimiert und ergänzt.

Vorlesung und Übungen richten sich an Studierende der Mathematik, oder allgemein an alle Interessierten, die vor mathematischen Methoden nicht zurückschrecken, sondern ihre ordnende Kraft zu schätzen wissen.

Spielerisch-experimentelle Aspekte kommen nicht zu kurz, so hoffen wir. Ebenso bin ich überzeugt, dass mathematische Modelle und Argumente, Sätze und Beweise, gerade hier Erklärung und Vervollständigung bieten. Der Dialog mit den Teilnehmer:innen bestimmt die jeweilige Dosierung.

Das Ziel dieser Veranstaltung ist hehr, aber unsere Möglichkeiten sind bescheiden. Wir möchten Ihr Interesse wecken, ja Ihre Begeisterung entfachen, damit Sie darüber hinaus gehen und selbstständig lernen. Literatur finden Sie am Ende dieser Einführung und auf der Webseite.

Es gibt nichts Gutes, außer man tut es.

(Erich Kästner, 1899–1974)

Spieltheorie bietet wunderbare Einsichten und ist oft erstaunlich direkt anwendbar in der Praxis. Hierzu sollen Sie zahlreiche Bei-Spiele selbst erfahren und dadurch verstehen. Um damit wirklich vertraut zu werden, sollen Sie regelmäßig spielen, sowohl empirisch als auch theoretisch, also spieltheoretische Fragen mathematisch formulieren und lösen.

Wir sind glücklich (und ein wenig stolz), Ihnen zu dieser Vorlesung auch gut betreute Übungen anbieten zu können. Das ist angesichts knapper Ressourcen leider keineswegs selbstverständlich, aber wesentlich für Ihren Erfolg! Wenn Sie sich ernsthaft darauf einlassen, werden Sie viel Freude daran haben und so manches Aha-Erlebnis. Möge es nützen!

Erkläre es mir, und ich werde es vergessen.

Zeige es mir, und ich werde mich erinnern.

Lass es mich tun, und ich werde es verstehen.

(Konfuzius, 551–497 v.Chr.)

Was ist und was soll die Spieltheorie?

Die Spieltheorie untersucht Situationen von **Konflikt und Kooperation**: Diese entstehen regelmäßig zwischen strategisch handelnden Agenten, etwa Menschen, Unternehmen, Staaten oder künstlichen Intelligenzen. Hierzu entwickelt die Spieltheorie Modelle, **Begriffe und Methoden**; zu typischen Problemstellungen schlägt sie rationale Lösungen vor.

Sie beschreibt und erklärt **strategische Entscheidungssituationen**: Spieler antizipieren in ihrem Kalkül die Aktionen der Gegenspieler. Anders gesagt: Spieltheorie ist **interaktive Entscheidungstheorie**: Sobald mehrere Entscheider (Individuen, Akteure, Spieler) gemeinsam ein Ergebnis erzielen, ist dies ein Anwendungsgebiet der Spieltheorie.

Sie ist damit sehr **vielseitig anwendbar**, denn fast alles ist ein Spiel, oder genauer gesagt: Fast alles lässt sich als ein Spiel betrachten. Diese Sichtweise erweist sich häufig als erhellend und nützlich. Tatsächlich wird die Spieltheorie heute nahezu **überall angewendet**, neben ihrer Herkunft in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften zunehmend auch in der Informatik und der Evolutionsbiologie.

Was ist und was soll die Spieltheorie?

Jede **spieltheoretische Analyse** umfasst immer zwei Bestandteile:

- Das Spiel als formale Beschreibung der strategischen **Situation**: die Spieler, all ihre Handlungsoptionen und deren Konsequenzen. Die Spieltheorie hat hierfür eine reichhaltige Sprache entwickelt.
- Lösungen als Prognose oder Empfehlung für den **Spielverlauf**: idealerweise alle Lösungen des betrachteten Lösungskonzepts. Universelles Werkzeug ist der Begriff des (Nash-)Gleichgewichts.

Das Spiel definiert die **Regeln**, also die möglichen Aktionen und die zugehörigen Auszahlungen, aber noch nicht das Verhalten der Spieler. Das Lösungskonzept codiert Annahmen über das **Spielerverhalten**, insbesondere Nutzenmaximierung und un/beschränkte Rationalität.

Je nach Art des Spiels (statisch / dynamisch, deterministisch / zufällig, un/vollständig informiert, etc.) gibt es verschiedene **Lösungskonzepte**. In jedem Falle lohnt sich eine empirische Überprüfung bzw. Kalibrierung: Dies untersucht die **experimentelle Spieltheorie** / Verhaltensökonomik [*behavioural economics*] in Laborexperimenten und in Feldstudien.

Warum und wozu betreiben wir Spieltheorie?

Warum Spieltheorie? Zunächst einmal aus Neugier und aus Freude! Wie jede elegante, insbesondere mathematische Idee lässt sich auch die Spieltheorie um ihrer selbst willen erlernen, studieren, bewundern. Zudem ist Spieltheorie überaus vielseitig anwendbar. . .

Wozu Spieltheorie? Ihre Anwendungen sind überaus vielfältig in Politik (Wahlen, Gesetze, Anreize), Philosophie (Ir/Rationalität, Normen, Ethik), Biologie (Ko/Evolution von Genen und Memen), Ökonomie (Strategien, Optimierung, Gleichgewichte, Märkte, Mechanismen, Auktionen, . . .), Sozialpolitik (Sicherheit, Wohlfahrt, Gemeinwohl, Ausgleich), usw.

Eugene Wigners berühmte Weisheit zur **unverschämten Wirksamkeit** der Mathematik gilt ebenso für die Spieltheorie und ihre Anwendungen:

The enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious and there is no rational explanation for it. [...]

*The miracle of the appropriateness of the language of mathematics [...]
is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research.*

Wie kommt die Mathematik zur Spieltheorie?

Mathematik ist Grundlage und Werkzeug aller modernen Technologie. In zunehmenden Maße gilt dies auch für weite Teile der Ökonomie. Je nach Kenntnis und Nähe zum Thema mag dies überraschen.

Die Wechselwirkung zwischen Mathematik und Naturwissenschaften ist seit jeher extrem stark, gefolgt von den Ingenieurwissenschaften.

Die Wechselwirkung mit den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften ist dagegen vergleichsweise schwach; prominente Ausnahmen hiervon sind statistische Methoden zur Erhebung und Auswertung von Daten, jüngst unter dem öffentlichkeitswirksamen Banner *Data Science* und *Big Data*.

Ebenso hat die mathematisch fundierte Spieltheorie seit etwa 1950 die Sicht- und Denkweisen in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften nachhaltig geprägt. Sie ist gereift und erprobt und anerkannt und gehört heute zum unverzichtbaren Standardwerkzeug der Mikroökonomik.

Die Spieltheorie kann (und wird) Ihnen viel Freude bereiten. Entgegen dem ersten Anschein ist sie aber nicht einfach, vor allem konzeptuell: Sie müssen grundlegende und raffinierte Ideen erst einmal verarbeiten.

Liturgie: Ablauf dieser Veranstaltung

Was erwarten / erwartet Sie in der Spieltheorie? schöne Mathematik?
lehrreicher Spielspaß? perfekte Mischung? → answergarden.ch/963641

Spielpraxis — AngST <i>All fun and games</i>	Fr 14:00 – 15:30 <i>Optional, da zockst du!</i>	V57.04 „Spielhölle“
Vorlesung — KnaST <i>Blood, sweat, and tears</i>	Mi 9:45 – 11:15 Fr 9:45 – 11:15	V57.04 V57.05
Übung — ÜbST <i>Learning by doing (the math)</i>	Di 14:00 – 15:30 <i>Da guckst du nicht nur, da übst du!</i>	V57.05
Klausur — HaST <i>All is well that ends well.</i>	Sep / Okt 2022 Feb / Mrz 2023	C@mpus C@mpus

Come for the show, stay for the math!

Liturgie: Ablauf dieser Veranstaltung

Als wir die Veranstaltung zur Spieltheorie zum ersten Mal durchführten, stellte sich heraus, dass Teilnehmer unterschiedliche Ziele verfolgen:

- Einige kommen vor allem für den Spielspaß.
- Manche kommen für die schöne Mathematik.
- Andere kommen für die perfekte Mischung.

Die Teilnehmer hatten sehr verschiedene Präferenzen, aber wir nur ein gemeinsames Angebot: *One size fits all*. Diese Situation war nicht ideal. Soweit unsere Marktforschung. Wir haben viel Zeit und Mühe investiert, wir haben nicht geruht und unser Premiumprodukt noch weiterentwickelt. Der Kampf um die beste Vorlesung ist hart. Die Konkurrenz schläft nicht.

Wäre es nicht wunderbar, wenn sich jede/r interessierte Studierende die Spieltheorie aussuchen könnte, die ihr/ihm am besten passt?

Für die einen purer Spielspaß, für die anderen schöne Mathematik, und für die Genießer die perfekte Mischung aus beidem.

Suchen Sie nicht länger, wir haben die Antwort!

Liturgie: Ablauf dieser Veranstaltung

Wir bieten Ihnen die Spieltheorie weiterhin in gewohnt bester Qualität auf dem Silbertablett, und jetzt sogar in zwei Geschmacksrichtungen:

- Als **knallharte, mathematische Spieltheorie** mit wöchentlich zwei Vorlesungen und einer Übung und der abschließenden Klausur: Die 9 Leistungspunkte für die Spieltheorie gibt es hier und nur hier.
- Als **spaßorientierte, angewandte Spieltheorie**: Auch hier können Sie viel gewinnen: Erfahrung und Erleuchtung, Süßigkeiten und echtes Geld. Aber erwarten sie nicht auch noch Leistungspunkte!

Die beiden Teile ergänzen sich, sind aber unabhängig. *Choose wisely!*

Die experimentelle Spieltheorie illustriert und motiviert durch zahlreiche konkrete Beispiele und manche überraschende empirische Erkenntnis. Idealerweise wollen Sie dann auch die Theorie dahinter verstehen.

Im mathematischen Teil erlernen Sie präzise Modelle und Methoden und nutzen diese dann selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ. Idealerweise wollen Sie diese Erkenntnisse dann testen und anwenden.

Liturgie: Ablauf dieser Veranstaltung

Die Klausur behandelt alle Themen und Techniken aus Vorlesung und Übung, der experimentelle Spielspaß wird dort natürlich nicht abgefragt.

Though this be madness, yet there is method in't.

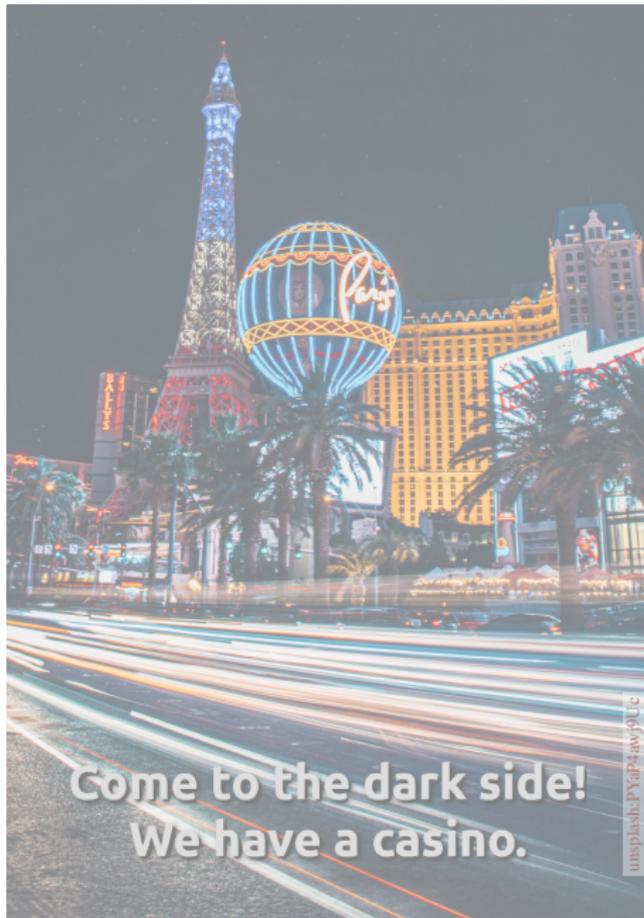
[Ist dies schon Wahnsinn, so hat er doch Methode.]

(William Shakespeare, 1564–1616, *Hamlet*)

Wir feiern diese bahnbrechende Innovation mit einem neuen Branding:
Der experimentelle Teil ist die angewandte Spieltheorie, kurz AngST.
Die Vorlesung ist knallhart mathematische Spieltheorie, kurz KnaST.

Besonders stolz sind wir auf unsere berühmten wöchentlichen Übungen zur Spieltheorie, kurz ÜbST. „Krass! Da guckst du nicht nur, da übst du!“
Die Klausur schließlich wird das Happy End zur Spieltheorie, kurz HaST.

Träumen Sie nicht schon lange von einer Veranstaltung namens AngST?
Ist es nicht entwaffnend ehrlich, wenn Ihre Vorlesung KnaST heißt?
Ist nicht Ihr ganzes Studium geprägt von ÜbST und HaST?
Ihre Suche wird belohnt: Hier bekommen Sie alles!



Wie gelingt Ihnen die Spieltheorie?

Falls Sie (auch) wegen der Leistungspunkte hier sind, erkläre ich Ihnen, wie Sie erfolgreich studieren. Selbstverständliche Voraussetzungen:

- **sichere Beherrschung** aller Grundlagen aus Ana 1-3 und Lina 1-2
- **wöchentliche Bearbeitung** von Vorlesung, Quiz und Übungen

Die Spieltheorie entspricht 9 Leistungspunkten: insgesamt 270h

- **Präsenz:** 14 Wochen à 4h Vorlesung + 2h Übung ≈ 80h
- **Individuelle Arbeit:** ein weiterer Tag (8h) pro Woche ≈ 110h
- **Wiederholung** zur Prüfungsvorbereitung: 2 bis 3 Wochen ≈ 80h

Das ist keine Übertreibung sondern jahrzehntelange Erfahrung:
6 Präsenzstunden pro Woche erfordern 12 Stunden eigene Arbeit.

Sie können Ihre Zeit anders aufteilen, aber viel Spielraum bleibt nicht.
Es gilt die Erhaltung der Arbeit: Die 270 Stunden werden Sie brauchen!

Qui va lentement, va sûrement, et qui va sûrement, va loin.

[Wer langsam geht, geht sicher, und wer sicher geht, kommt weit.]

Liturgie: Ablauf der Vorlesung

Liturgie, griech. λειτουργία [leitourgía] ‘öffentlicher Dienst’, kommt von λειτός [leitós] ‘Volk, Volksmenge’ und ἔργον [érgon] ‘Werk, Dienst’. Dies bezeichnet die Gesamtheit religiöser Zeremonien und Feiern. Ich glaube, auch universitäre Lehre sollten wir zelebrieren und feiern.

Je dois dire qu’il n’y avait pas un cours de Lebesgue où l’on ne riait pas d’une manière infiniment agréable.

Je soupçonne même qu’au moins le tiers des gens venait au cours de Lebesgue pour s’amuser.

C’était infiniment intéressant, infiniment profond. [...]

Il y en avait une dizaine, une quinzaine [d’auditeurs]. A la fin, beaucoup moins. Quel que soit le cours au Collège de France à la fin il y en a moins, n’est-ce pas?

(Szolem Mandelbrojt, 1899–1983, Souvenirs à bâtons rompus)

Vor uns liegt eine Vielzahl interessanter, schöner und wichtiger Themen. Die gemeinsame Lernzeit ist kostbar. Nutzen Sie Ihre Vorlesung optimal! Nutzen Sie die Möglichkeiten dieser Veranstaltung und fragen Sie uns! Die Feinjustierung ist wichtiger als Sie vielleicht vermuten.

Liturgie: Ablauf der Übungen

Verpflichtend ist die wöchentliche, aktive Teilnahme in der Übung. Ebenso lohnend ist natürlich die aktive Teilnahme an der Vorlesung. Sie sind eng aufeinander abgestimmt, idealerweise nutzen Sie beide:

Die Vorlesung erklärt Ihnen die nötigen Begriffe und Methoden, anschließend können Sie diese Techniken anwenden und einüben und die behandelten Themen mit weiterem Übungsmaterial vertiefen. Die Übungsblätter werden wöchentlich online zur Verfügung gestellt.

Für die Zulassung zur Klausur (aka Übungsschein) erwarten wir Ihre regelmäßige aktive Teilnahme an der wöchentlichen Übungsgruppe. Genaueres siehe Iliaskurs.

*Mathematik lernen Sie nicht allein durch Zuschauen,
sondern durch eigene Arbeit und regelmäßige Übung.*

*Klavierspielen lernen Sie ja auch nicht
allein durch den Besuch von Konzerten!*

(nach Carl Runge, 1856–1927)

Themen für dieses Semester

Optimale Entscheidungen	Rückwärtsinduktion	Kombinatorische Spieltheorie	Markov-Spiele
Statische Spiele	Strategische Spiele	Lineare Optimierung	Soziale Dilemmata
Dynamische Spiele	Generationenvertrag	Unvollständige Information	Dynamische Spiele
Kooperative Spiele	Wiederholte Spiele	Verhandlungen	Koalitionen
Mechanismen-Design	Kollektive Entscheidungen	Implementierung	Auktionen

Wie gelingt Ihnen das Studium?

Die Universität als
Wissenstrichter?



Erwarten Sie nicht, dass irgendjemand Ihnen irgendetwas beibringen könnte — ohne Ihr Zutun. Ich kann Ihnen viel Spannendes erzählen, doch nur Sie selbst können sich Verständnis erarbeiten. Zwei Faktoren bestimmen Ihren Lernerfolg: extrinsische Anregung und intrinsische Motivation!

Diese Vorlesung wird Ihnen viele interessante Dinge zeigen, Phänomene und Beispiele erläutern, Argumente und Sätze erklären. Wenn Sie möchten, kann das eine große Hilfe sein, doch letztlich müssen Sie selbst dieses Material eigenständig durcharbeiten, um es zu beherrschen.

Lernziele

Die Studierenden beherrschen die grundlegenden Begriffe und Techniken der Spieltheorie. Sie verfügen über die mathematischen Grundlagen für das Verständnis spieltheoretischer Modelle in den angrenzenden Wissenschaften und können sich mit Spezialisten darüber verständigen. Sie sind in der Lage, die behandelten Methoden selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ anzuwenden, ähnlich strukturierte Probleme zu erkennen, mathematisch zu modellieren und rechnerisch zu lösen.

- **Selbstständig:** Es geht nicht nur um Auswendiglernen, sondern um Verstehen und unabhängige Urteilsfähigkeit.
- **Sicher:** Es geht nicht nur um Intuition oder Spekulieren, sondern um nachvollziehbare Argumente und Rechnungen.
- **Kritisch:** Es geht nicht nur um Glauben oder (Auto)Suggestion, sondern um (selbst)kritische Fragen und sorgfältige Antworten.
- **Korrekt:** Sie beherrschen Definitionen, Sätze, Methoden, Proben. Gegenbeispiele zeigen Fehlerquellen, die es zu vermeiden gilt.
- **Kreativ:** Es geht nicht nur um fertige Rezepte, sondern um eigenständige Anwendung.

Arbeitsaufwand

Bei allem Spielspaß erfordert diese ambitionierte Zielsetzung Fleiß und Disziplin. Das spiegelt sich deutlich im Zeit- und Arbeitsaufwand wider. Die folgende einfache Rechnung löst immer wieder Erstaunen aus:

Dieser Kurs entspricht 9 Leistungspunkten, also 270 Arbeitsstunden:

- ca 90 Stunden Präsenz (6 Stunden wöchentlich, bestehend aus 4 Stunden Vorlesung und 2 Stunden Übung, für knapp 15 Wochen)
- ca 120 Stunden eigene Arbeit während der Vorlesungszeit (etwa 8 Stunden wöchentlich, Vor- und Nachbereitung und Hausaufgaben)
- ca 60 Stunden Prüfungsvorbereitung nach der Vorlesungszeit (etwa ein bis zwei Wochen, je nach Bedarf und Intensität)

Diese umfangreiche Bemessung der nötigen *eigenen* Arbeitszeit beruht auf jahrzehntelanger Erfahrung. Individuelle Werte können und werden davon abweichen, nichtsdestotrotz sollen beide Seiten, Lehrende und Lernende, sich ehrlicherweise an dieser Bemessung orientieren.

Gehen Sie den ganzen Weg und planen Sie fest die volle wöchentliche Arbeitszeit ein, bereits während des Semesters parallel zur Vorlesung!

Legende / Leseanleitung: Spieltheorie von A bis P

Die Vortragsfolien sind durch blaue Titelbalken leicht zu erkennen; dies kennzeichnet die Folien, die in der Vorlesung behandelt werden. Dieses Grundgerüst ist eingebettet in ein Lese- und Arbeitsbuch: Ich folge der bewährten Erfahrung, dass die Leserin und der Leser leichter eine vorhandene Übung, Erklärung oder Illustration übergehen kann, als eine fehlende selbst (er)finden. Möge es beiden nützen!

Ich präsentiere hier Ideen, Techniken und Anwendungen, Definitionen und Sätze, Aufgaben und Lösungen. Dabei versuche ich, jedes Thema so einfach wie möglich darzustellen, doch so präzise und ausführlich wie es für ein solides Verständnis nötig ist. Viele Erklärungen und Hinweise, die ich in der Vorlesung mündlich gebe, sind hier schriftlich ausgeführt; sie nützen mir als Erinnerung und den Leser:innen als Erläuterung.

Wir beginnen diese Vorlesung mit einem ersten Kapitel zur Vorschau; dies gibt zunächst eine Übersicht zentraler Themen der Spieltheorie und dient somit zu einer frühen Orientierung, als Ausblick und Motivation. Diese Versprechen werde ich in den nächsten Wochen einlösen.

Kapitel A: Einführung zur Spieltheorie

A1 Einführung: Was sind Spiele?

A1.1 Erste Beispiele, erste Ideen

A1.2 Wer interessiert sich für Spieltheorie?

A1.3 Erstes Experiment: Hin-und-Rück

A2 Denken hilft: Stufen der Rationalität

A2.1 Un/Gerecht teilen: Kuchen und Erbe

A2.2 Un/Klug positionieren: Strandkiosk und Politik

A2.3 Ir/Rational verhandeln: drohen oder nachgeben?

A3 Methoden und Anwendungen der Spieltheorie

A3.1 Die Rolle der Mathematik

A3.2 Anwendungen der Spieltheorie

A3.3 Literatur zur Spieltheorie

Kapitel B: Rückwärtsinduktion nach Zermelo

- B1 Dynamische Spiele: Zustände und Aktionen
 - B1.1 Steuerung und Interaktion in (Computer)Spielen
 - B1.2 Graphen als tragende Grundstruktur
 - B1.3 Auszahlungen und Bellman–Gleichung
- B2 Nutzenmaximierung durch Rückwärtsinduktion
 - B2.1 Optimal entscheiden: Work & Travel
 - B2.2 Sekretärinnen-Problem und Bruss–Algorithmus
 - B2.3 Würfeln bis die Eins kommt
- B3 Gegenseitiges Wissen und Vorwärtsinduktion
 - B3.1 Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?
 - B3.2 Tanz der Vampire: gemeinsames Wissen
 - B3.3 Stuttgarter Mathematiker und Abischerz

Kapitel C: Kombinatorische Spieltheorie und der Satz von Sprague–Grundy

C1 Neutrale kombinatorische Spiele

C1.1 Einzeiliges Nim und dynamische Programmierung

C1.2 Neutrale Spiele und Rückwärtsinduktion

C1.3 Das Spiel Nim und Boutons effiziente Lösung

C1.4 Summen von Spielen und Sprague–Grundy–Satz

C2 Anwendungsbeispiele und weitere Aufgaben

C2.1 Lasker–Nim, Grundys Spiel, Fliesentetris

C2.2 Schleifenspiele: Poker-Nim und Northcotts Spiel

C2.3 Das Spiel Chomp! nach David Gale

C2.4 Wie viel Rationalität benötigen wir?

C3 Mengen und Logik als Spiele

C3.1 Schach ist determiniert

C3.2 Mengen als Spiele

C3.3 Quantoren-Spiele

Kapitel D: Markov–Spiele und Bellmans Optimalitätsprinzip

D1 Markov–Spiele: erste Beispiele

D1.1 Irrfahrt, Gewinnerwartung und optimale Entscheidung

D1.2 Irrfahrten eindimensional und zweidimensional

D1.3 Google: Die zufällige Irrfahrt im Internet

D2 Bellmans Optimalitätsprinzip

D2.1 Banachs Fixpunktsatz und Blackwells Kriterium

D2.2 Markov–Graphen, Erwartung und Optimalität

D2.3 Bellmans Optimalitätsprinzip

D3 Anwendung im maschinellen Lernen

D3.1 Optimale Routenplanung eines Roboters

D3.2 Gewinniteration vs Strategieiteration

D3.3 Bestärkendes Lernen

Kapitel E: Strategische Spiele und Nash–Gleichgewichte

- E1 Strategische Spiele und Nash–Gleichgewichte
 - E1.1 Strategische Spiele in Normalform
 - E1.2 Fortsetzung von reinen zu gemischten Strategien
 - E1.3 Der Existenzsatz für Nash–Gleichgewichte
 - E1.4 Spiele mit beliebig vielen Spielern
- E2 Sicherheit, Dominanz, Symmetrie, Regularität
 - E2.1 Nullsummenspiele und ihr Hauptsatz: Minimax = Maximin
 - E2.2 Dominierte Strategien und Rationalisierbarkeit
 - E2.3 Symmetrien von Spielen und Gleichgewichten
 - E2.4 Regularität und Anzahl der Nash–Gleichgewichte
- E3 Anwendungsbeispiele und weitere Aufgaben
 - E3.1 Lösung von $2 \times n$ –Bimatrixspielen
 - E3.2 Weitere Beispiele zu Gleichgewichten

Kapitel F: Lineare Optimierung und Dantzig's Simplexverfahren

- F1 Lineare Optimierung durch Basiswechsel und Simplexverfahren
 - F1.1 Optimierung durch wiederholte Basiswechsel
 - F1.2 Lineare Programme und Optimierung
 - F1.3 Dualität und zertifizierte Lösungen
- F2 Anwendungsbeispiele und weitere Aufgaben
 - F2.1 Lösung von Zwei-Personen-Nullsummen-Spielen
 - F2.2 Berechnung von korrelierten Gleichgewichten
 - F2.3 Lineare Approximation mit kleinstem L^1 -Fehler
- F3 Vom heuristischen Verfahren zum Algorithmus
 - F3.1 Phase 2 des Simplexalgorithmus
 - F3.2 Phase 1 des Simplexalgorithmus
 - F3.3 Laufzeit des Simplexalgorithmus

Kapitel G: Soziale Normen und Dilemmata, Koordination und Evolution

G1 Soziale Konventionen

G1.1 Koordination: links oder rechts?

G1.2 Soziokulturelle Kompetenz

G1.3 Zielkonflikte: Nash oder Pareto?

G2 Soziale Dilemmata

G2.1 Ratio vs Moral: einfache Modellbeispiele

G2.2 Soziales Dilemma und die Tragik der Allmende

G2.3 Paradoxe Verkehrsfluss nach Dietrich Braess

G3 Evolutionäre Spiele

G3.1 Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra

G3.2 Die Replikatorgleichung zur Populationsdynamik

G3.3 Evolutionär stabile Strategien nach Maynard Smith

Kapitel H: Ponzi–Betrug vs Rentenmodell: Wie gelingt ein Generationenvertrag?

H1 Fiat Money – Es werde Geld!

H1.1 Kreative Summation und Umordnungsschwindel

H1.2 Hilberts Hotel und Ponzi–Betrug

H1.3 Wie funktioniert Geld / nicht?

H2 Sustainability – Unsere Zukunft steht auf dem Spiel!

H2.1 Überlappende Generationen und Gleichgewichte

H2.2 Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

H2.3 Nachhaltigkeit als spieltheoretisches Modell

H3 Self-Management – Wer bin ich und wie viele?

H3.1 Egonomics nach Thomas Schelling

H3.2 Mischels Marshmallow-Experiment

H3.3 Studium als Investition und als Konsum

Kapitel I: Spiele mit unvollständiger Information und Bayes–Gleichgewichte nach John Harsanyi

- I1 Zufall und unvollständige Information
 - I1.1 Vier Grundtypen von Spielen: Dynamik und Information
 - I1.2 Ist Un/Wissen schädlich oder hilfreich?
 - I1.3 Unwissen kann schaden. Wissen leider auch.
- I2 Bayesianische Spiele nach John Harsanyi
 - I2.1 Bayes–Spiele und Gleichgewichte
 - I2.2 Bedingte Wahrscheinlichkeitsräume
 - I2.3 Anwendungsbeispiel: Simultan-Poker
- I3 Korrelierte Gleichgewichte nach Robert Aumann
 - I3.1 Erste Beispiele zu korrelierten Strategien
 - I3.2 Spieler aller Länder, korreliert euch!
 - I3.3 Universeller Signalgeber

Kapitel J: Dynamische Spiele und teilspielperfekte Gleichgewichte nach Reinhard Selten

J1 Dynamische Spiele in kybernetischer Form

J1.1 Wie formalisieren wir dynamische Spiele?

J1.2 Rückwärtsinduktion und Satz von Zermelo

J1.3 Erste Anwendungsbeispiele

J2 Dynamische Spiele in extensiver Form

J2.1 Spielbäume und graphische Darstellung

J2.2 Dynamische Spiele in extensiver Form

J2.3 Das Prinzip der einmaligen Abweichung

J3 Unvollständige Information und perfekte Erinnerung

J3.1 Dynamische Spiele mit unvollständiger Information

J3.2 Perfekte Bayes-Gleichgewichte

J3.3 Im/perfekte Erinnerung

J4 Anwendungsbeispiele und weitere Aufgaben

J4.1 Schneeballduell und Hundertfüßlerspiel

Kapitel K: Wiederholte Spiele und Nashs Folk Theorem

K1 Un/endlich wiederholte Spiele

K1.1 Iteriertes Gefangenendilemma und *Grim Trigger*

K1.2 Un/endliche Hintereinanderausführung von Spielen

K1.3 Zuckerbrot und Peitsche / *carrot and stick*

K1.4 Eine Hand wäscht die andere. / *Manus manum lavat.*

K2 Glaubwürdige Absprachen / *self-enforcing agreements*

K2.1 Das Prinzip der Abschreckung / *deterrence*

K2.2 Schuld und Sühne / *crime and punishment*

K2.3 Nash Folk Theorem: quantitative Grundversion

K2.4 Rationale Approximation: wunderschön explizit

K3 Anwendungsbeispiele und weitere Aufgaben

K3.1 Un/endliche Hintereinanderausführung

Kapitel L: Verhandlungstheorie und Nashs Verhandlungslösung

L1 Nashs axiomatische Verhandlungslösung

L1.1 Verhandlungsprobleme und Verhandlungslösungen

L1.2 Nashs Axiome und Nashs Verhandlungslösung

L1.3 Unabhängigkeit und Variation der Axiome

L1.4 Die monotone Verhandlungslösung

L2 Rubinsteins Verhandlungsmodell durch alternierende Angebote

L2.1 Alternierende Angebote bei schrumpfendem Kuchen

L2.2 Verhandlungsgleichgewicht und die Nash-Lösung

L2.3 Rubinsteins Verhandlungsmodell und sein Ergebnis

L2.4 Eindeutigkeit der Gleichgewichtsauszahlung

L3 Anwendungsbeispiele und weitere Aufgaben

L3.1 Anwendungsbeispiele zu Verhandlungslösungen

Kapitel M: Koalitionen, Kern und Shapley–Wert

M1 Koalitionsspiele und ihr Kern

M1.1 Charakteristische Funktionen: Modularität und Synergie

M1.2 Koalitionsspiele: mathematische Grundbegriffe

M1.3 Allokationen und Kern eines Koalitionsspiels

M2 Shapley–Wert als axiomatische Lösung

M2.1 Was erwarten wir von einer gerechten Teilung?

M2.2 Satz von Shapley: Existenz und Eindeutigkeit

M2.3 Analogie zu Determinante und Integral

M3 Shapley–Wert als Verhandlungsgleichgewicht

M3.1 Koalitionsverhandlung nach Hart–Mas–Colell

M3.2 Koalitionsverhandlung: Formalisierung und Beweis

M3.3 Wie kann / soll / wird man gemeinsamen Gewinn teilen?

M4 Anwendungsbeispiele und weitere Aufgaben

Kapitel N: Kollektive Entscheidungen und Arrows Satz vom Diktator

N1 Einführung

N1.1 Problemstellung und Zielsetzung

N1.2 Präferenzen: transitive und lineare Relationen

N1.3 Wahlverfahren für 2 Individuen und 2 Alternativen

N2 Wahlverfahren für zwei Alternativen

N2.1 Mehrheitswahl für n Individuen und 2 Alternativen

N2.2 Gute Eigenschaften und sinnvolle Forderungen

N2.3 Weitere Wahlverfahren für 2 Alternativen

N3 Wahlverfahren für drei und mehr Alternativen

N3.1 Das Paradox von Condorcet

N3.2 Arrows Satz vom Diktator

N3.3 Fragen und Antworten

N4 Unendliche Gesellschaften und unsichtbare Diktatoren

N4.1 Korrespondenz zwischen Wahlverfahren und Ultrafiltern

Kapitel O: Implementierungstheorie und der Satz von Gibbard–Satterthwaite

- O1 Erste Beispiele und typische Schwierigkeiten
 - O1.1 Das Duellverfahren ist manipulierbar.
 - O1.2 Strategisches Wählen und Gerrymandering
 - O1.3 Experiment: Studieren geht vor Votieren!
- O2 Viele gute Absichten führen zur Diktatur.
 - O2.1 Auswahlverfahren und Manipulierbarkeit
 - O2.2 Satz von Gibbard–Satterthwaite
 - O2.3 Satz von Muller–Satterthwaite
- O3 Mechanismen und Implementierung
 - O3.1 Medianverfahren für gescheiterte Präferenzen

Kapitel P: Auktionen und Äquivalenzsatz von Vickrey

P1 Was ist Mechanismendesign?

P1.1 Erste Beispiele zum Mechanismendesign

P1.2 Auktionen und der Fluch des Gewinners

P1.3 Vereinfachende Idealisierungen

P2 Anfänge der Auktionstheorie

P2.1 Klassische und exotische Auktionsverfahren

P2.2 Zweitpreisauktion versus Erstpreisauktion

P2.3 Satz von Vickrey zur Erlösäquivalenz

P3 Un/gewöhnliche Auktionen und ir/rationale Bieter

P3.1 Die Versteigerung eines Euro nach Shubik

P3.2 Spieltheoretische Formalisierung und Analyse

P3.3 Weitere Beispiele und Aufgaben

Kapitel A

Einführung zur Spieltheorie

*Das ganze Leben ist ein Spiel,
und wir sind nur die Kandidaten.*

Hape Kerkeling (1964–)

Inhalt dieses Kapitels A

1 Einführung: Was sind Spiele?

- Erste Beispiele, erste Ideen
- Wer interessiert sich für Spieltheorie?
- Erstes Experiment: Hin-und-Rück

2 Denken hilft: Stufen der Rationalität

- Un/Gerecht teilen: Kuchen und Erbe
- Un/Klug positionieren: Strandkiosk und Politik
- Ir/Rational verhandeln: drohen oder nachgeben?

3 Methoden und Anwendungen der Spieltheorie

- Die Rolle der Mathematik
- Anwendungen der Spieltheorie
- Literatur zur Spieltheorie

Worum geht es in der Spieltheorie?

Spieltheorie versucht, strategisches / ökonomisches / menschliches Verhalten zu beschreiben, zu erklären, vorherzusagen, zu optimieren.

*To be literate in the modern age, you need to have
a general understanding of game theory.*

(Paul Samuelson, 1915–2009, Nobelpreis 1970)

Spiele beschreiben Konflikte, Konkurrenz und Kooperation:

- Mehrere Akteure interagieren (Individuen, Firmen, Staaten, KI).
- Jeder Akteur hat gewisse Handlungsoptionen (Züge, Strategien).
- Aus diesen Möglichkeiten wählt jeder Akteur aus (frei, unabhängig).
- Daraus entsteht für jeden ein Ergebnis (Nutzen, Auszahlung, etc).
- Jeder Spieler versucht, sein eigenes Ergebnis zu maximieren.

*If people do not believe that mathematics is simple,
it is only because they do not realize how complicated life is.*

(John von Neumann, 1903–1957)

Worum geht es in der Spieltheorie?

Spieltheorie ist ein (inzwischen sehr) umfangreicher Werkzeugkasten. Das ist das Ziel dieser einführenden Vorlesung: Die Teilnehmer sollen sich befähigen, grundlegende Methoden der Spieltheorie anzuwenden, und zwar selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ.

Die Spieltheorie ist auf wunderbar konkrete Anwendungen ausgerichtet, gerade dazu nutzt sie abstrakte und raffinierte mathematische Modelle. Theorie und Anwendung sind keine Gegensätze, sie ergänzen sich! Diese extreme Spannweite ist faszinierend, für manche abschreckend.

Zahlreiche Beispiele und Anwendungen dienen als leuchtende Vorbilder. Mit Hilfe spieltheoretischer Modelle, Begriffe und Methoden können wir Konflikte besser verstehen, mathematisch beschreiben und analysieren, dazu systematisch mögliche Lösungen finden, konstruieren und prüfen.

Manche Konflikte haben eindeutige Lösungen, die meisten leider nicht. Im ersten Falle kann die Analyse prädiktiv oder normativ genutzt werden, im zweiten Falle ist sie immerhin noch deskriptiv oder explikativ nutzbar. Die Spieltheorie bietet magische Momente, aber keine Wunder.

Was ist ein Spiel allgemein gesehen?

Spiele im engeren Sinne sind Kinderspiele, Geschicklichkeitsspiele, Karten- / Brett- / Rollen- / Gesellschafts- / Rate- / Denkspiele, Computer- / Handyspiele, sportliche Wettkämpfe von Bundesjugendspielen bis zu Olympischen Spielen, darunter Test- / Freundschafts- / Endspiele, etc.

Wir fassen den Begriff des Spiels im Folgenden **im weiteren Sinne** als Interaktion mehrerer Akteure, wobei es zu Konflikten kommen kann. Hierzu betrachten wir konkrete Lehrbeispiele: extrem vereinfacht, doch repräsentativ. Ihre mathematische Untersuchung ist zunächst elementar.

“Elementary” does not mean easy to understand.

“Elementary” means that very little is required to know ahead of time in order to understand it, except to have an infinite amount of intelligence.

(Richard P. Feynman, 1918–1988, Nobelpreis 1965)

Ihre Investition in mathematische Grundlagen trägt hier reiche Früchte als „infinite amount of intelligence“, zumindest als ein erster Vorschuss. Fixpunktsätze, Integrale, Differentialgleichungen, etc. kommen später.

Warum spielt der Mensch?

Es ist eine bemerkenswerte Grunderfahrung: **Der Mensch spielt**, sogar häufig und gerne! Das unterscheidet ihn von vielen anderen Lebewesen.

Homo ludens, der spielende Mensch: Im Spiel entdeckt und übt der Mensch seine Fähigkeiten, macht Erfahrungen und entwickelt seine Persönlichkeit. Er erprobt Handlungsfreiheit und eigenes Denken. Er erkennt und antizipiert die Konsequenzen seines Handelns.

Warum ist das so? **Alles Leben ist Problemlösen**, schrieb Karl Popper. Und erfahrungsgemäß führt uns das Leben immer wieder in Konflikte. Daher ist es überaus sinnvoll, Probleme vorher „durchzuspielen“. Die Evolution hat uns hierzu Neugier und Spielfreude geschenkt.

Die genauere Untersuchung führt uns zur **Spieltheorie**. Dies können wir ebenso gut *Konflikttheorie* nennen, oder *Theorie der strategischen Interaktion* oder *Interaktive Entscheidungstheorie*. Das klingt seriös aber leider auch schwerfällig. Die Bezeichnung *Spieltheorie* hat viele Vorteile: Sie ist kurz und knapp, klingt lustig und positiv, beschreibt die Situation recht treffend und ist seit bald einhundert Jahren traditionell üblich.

Eigenschaften von Spielen

Anzahl der Akteure

- Ein Spieler: ... Geschicklichkeit, Steuerung, Optimierung
- Zwei Spieler: ... Tischtennis, Schach, Handel, Vertrag
- Drei und mehr Spieler: ... Wahlen, Koalitionen, Gesellschaft

Konkurrenz und Kooperation

- Nullsummen vs Win-Win: ... Marktaufteilung, Absprachen
- kompetitiv vs kooperativ: ... Verträge, Nebenzahlungen

Zufall und Information

- deterministisch vs stochastisch: ... Go, Backgammon, Monopoly
- un/vollständige Information: ... Kniffel, Lotto, Poker, Battleship

Zeitlicher Verlauf

- parallel vs sequentiell: ... Schere-Stein-Papier, Quizz, Klausur
- diskret vs kontinuierlich: ... Brettspiele, Onlinespiele, Börse

Weitere Beispiele: Straßenverkehr, Schwarzfahren, Fußball, Elfmeter, Auktion, Schule/Uni, Karriere, Kirche, Kochen, Kindererziehung, etc.

Eigenschaften von Spielen

Spiele mit nur **einem Akteur** können bereits sehr anspruchsvoll sein: Geschick, Steuerung, Kybernetik, Optimierung, Entscheidung, etc.

Sie wollen mit einem Fahrzeug von A nach B kommen (Auto, Fahrrad, Schiff, Flugzeug, Raumsonde etc.). Damit dies überhaupt möglich ist, müssen Sie Ihr Vehikel zunächst steuern können. Zudem wollen Sie den besten Weg finden, Zeit und Aufwand minimieren, Nutzen maximieren.

In der Ökonomie muss jeder Akteur ähnliche Probleme lösen: Was ist möglich? Was ist erstrebenswert? Wie finde ich die beste Möglichkeit? Das führt zu Fragen und Methoden der mathematischen Optimierung.

Bei zwei oder mehr Spielern kommt es zu **Interaktion**: Das Ergebnis jedes Akteurs hängt nicht nur von seinen eigenen Entscheidungen ab, sondern auch von den Aktionen der anderen Akteure. Dabei kann es zu Konflikten kommen, sowohl zu Konkurrenz als auch zu Kooperation.

Die Liste der Beispiele und möglicher Anwendungen ist schier endlos. Die folgende Auswahl gibt hierzu ein paar Denkanstöße, sie sollen Ihre Neugier wecken und einen Ausblick auf weitere Kapitel umreißen.

Erste Bei-Spiele

Beim **Tischtennis** ist eher die physische Geschicklichkeit gefragt, beim **Schach** und ähnlichen Strategiespielen hingegen die mentale. **Handel** zwischen zwei Akteuren oder ein **Vertrag** ist ebenso ein Spiel: Jeder möchte sein Ergebnis maximieren, genau darum wird gerungen.

Wahlen sind ein großes und recht komplexes Spiel. In Deutschland leben etwa 83 Mio Menschen, davon sind etwa 61 Mio wahlberechtigt. Idealerweise sollte jede:r nach eigener ehrlicher Überzeugung stimmen, doch die informierte Einschätzung ist schwierig, zumal bei mehreren Kriterien, die Entscheidung ist komplex, dies kann zu strategischer Wahl führen. Politische Akteure wissen das und handeln ihrerseits strategisch.

Wenn schon die Sachfragen kompliziert sind, dann sollten wenigstens die genutzten **Wahlverfahren** einfach und gerecht sein, nicht wahr? Bei der Wahl zwischen genau zwei Alternativen gelingt dies tatsächlich, doch ab drei Alternativen existiert leider kein perfektes Wahlverfahren. Dieses erstaunliche Ergebnis ist **Arrows Satz vom Diktator** und von Gibbard–Satterthwaite zur Manipulierbarkeit von Wahlverfahren.

Erste Bei-Spiele

Bei einem **Nullsummenspiel** muss der andere verlieren, was der eine gewinnt; wir denken an die Aufteilung eines Marktes konstanter Größe. Solche Spiele heißen etwas allgemeiner auch **strikt kompetitiv**.

Absprachen können zu einer **Win-Win-Situation** genutzt werden, also gegenseitigem Nutzen. Im Sinne eines **Kartells** ist dies illegal, da auf Kosten wehrloser Dritter. Betrachtet man diese als einen weiteren Spieler, so handelt es sich insgesamt wieder um ein Nullsummenspiel.

Fußball ist normalerweise ein Nullsummenspiel: Ein Team gewinnt, das andere verliert. Turniere zeigen oft Ausnahmen, etwa bei der WM 1982 die **Schande von Gijón**: Deutschland und Österreich trennten sich einvernehmlich 1:0 zu Lasten von Algerien. (www.shz.de/183769)

Bei **kooperativen** Spielen sind Absprachen und Verträge zwischen den Akteuren möglich, etwa im Rahmen fest vorgegebener Vertragsgesetze. Bei **nicht-kooperativen** Spielen ist dies nicht möglich oder nicht erlaubt. Vereinbarungen müssen innerhalb des Spiels selbst-stabilisierend sein, etwa durch glaubhafte Drohungen oder allgemein Nash-Gleichgewichte.

Erste Bei-Spiele

Zufall spielt oft eine wesentliche Rolle, allgemein im Leben wie auch in zahlreichen Spielen. Damit eng verknüpft ist die Frage der **Information**: Wer weiß wann was? Auch der **zeitliche Ablauf** des Spiels ist wichtig: Ziehen Spieler gleichzeitig oder immer streng nacheinander? in Runden nach einen vorgegebenen Takt oder jederzeit, kontinuierlich, asynchron?

Bei **Brettspielen** wie Monopoly wird gewürfelt, das Ergebnis ist danach allen Spielern bekannt. Bei **Kartenspielen** wie Poker hat jeder Spieler nur Teilinformation; er kennt seine Karten, aber nicht die der anderen.

Bei **Schere-Stein-Papier** wird gleichzeitig gezogen. Das Spiel ist sinnlos, wenn einer zuerst zieht, und der zweite diesen Zug kennt. Stehen beide Rücken an Rücken, so ist Gleichzeitigkeit entbehrlich.

Eine **Klausur** dient als Stichprobe im Rahmen der vereinbarten Themen: Allzu leichte Vorhersehbarkeit mindert die repräsentative Aussagekraft, daher werden die Aufgaben möglichst zufällig gewählt, meist gewichtet. Ebenso wichtig ist, dass alle Teilnehmer die Klausur parallel schreiben, andernfalls wäre die Informationslage extrem ungleich und ungerecht.

Erste Bei-Spiele

Praktisch alles im Leben ist ein Spiel oder kann so gesehen werden. Die großen Weltreligionen fassen das gesamte Leben in dieser Form: Der Mensch wählt selbst seine Handlungen und wird dafür belohnt oder bestraft: Paradies / Himmel vs Hölle, Nirwana vs Wiedergeburt, usw.

Ist dieser Vergleich provokativ? oder lächerlich? gar blasphemisch?
Zu **Bibel und Moral** schrieb 2008 die Päpstliche Bibelkommission:

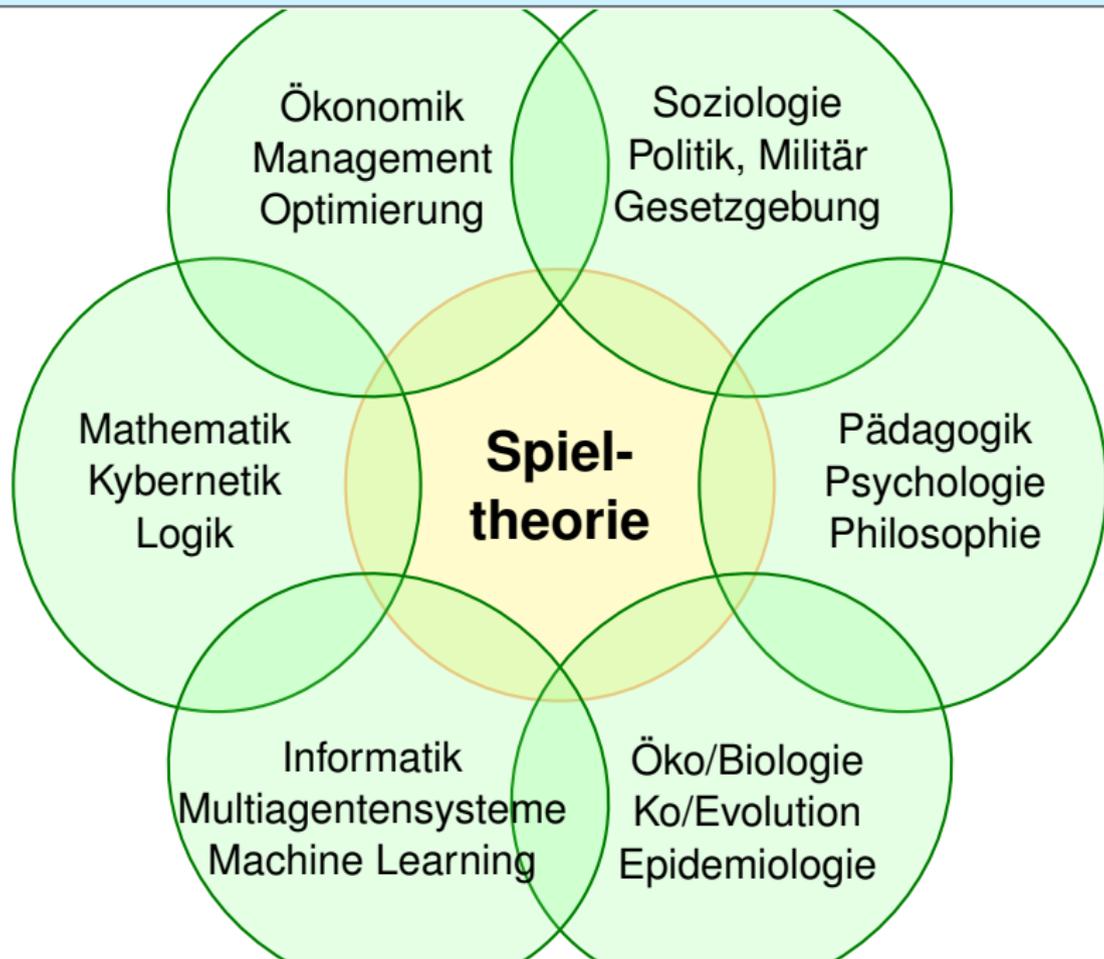
Die Sehnsucht nach Glück, das Verlangen nach einem erfüllten Leben, ist von jeher tief im menschlichen Herzen verwurzelt. Es hängt größtenteils von unserem eigenen Handeln und von den Beziehungen zwischen uns Menschen ab, ob dieser Wunsch verwirklicht wird. Was ist aber dieses Handeln, das die einzelnen Personen, die Gemeinschaften und die Völker zu einem wahrhaft gelungenen Leben, zum Glück führt? Wie kann man es bestimmen?

Ist das nicht eine spieltheoretische Problemstellung par excellence?
Anschließend werden mögliche Lösungen theologisch ausgeführt:

Die Christen sind überzeugt, dass sie in der Bibel Hinweise und Normen finden für das rechte Handeln und so den Weg zur Fülle des Lebens.

Wer interessiert sich für Spieltheorie?

Wer nur einen Hammer hat, sieht überall Nägel.



Wer Spieltheorie versteht, erkennt überall Spiele.

Wer interessiert sich für Spiele?

- Kinder und Erwachsene (auch als Eltern: Erziehung ist ein Spiel.)
- Spieledesigner und Programmierer (bis zur künstlichen Intelligenz)
- Mathematiker und Sozialwissenschaftler (menschliches Verhalten)
- Wirtschaftswissenschaftler und Anwender (It's the economy, stupid)
- Politiker, Strategen, Militärs (die dunkle Seite der Spieltheorie)
- Biologen, Mediziner (Evolution, Ökosysteme, Epidemien)

Spiele und Konflikte sind eine uralte menschliche Grunderfahrung. Bemerkenswerterweise gab es hierzu lange keine geeignete Theorie, keine geeignete Sprache zur quantitativen Erfassung und Untersuchung.

Hierzu braucht es raffinierte Mathematik! Erste Untersuchungen unternahm in den 1920er Jahren der Mathematiker Emile Borel.

Der Durchbruch gelang erst 20 Jahre später. Der Mathematiker John von Neumann und der Ökonom Oskar Morgenstern legten hierzu 1944 die Grundlage mit ihrem bahnbrechenden Lehrbuch *Spieltheorie und ökonomisches Verhalten*. Es gilt als Geburtsurkunde der Spieltheorie.

Spieltheorie: Gründungsväter



Émile Borel
(Saint-Affrique 1871 –
Paris 1956)



John von Neumann
(Budapest 1903 –
Washington 1957)

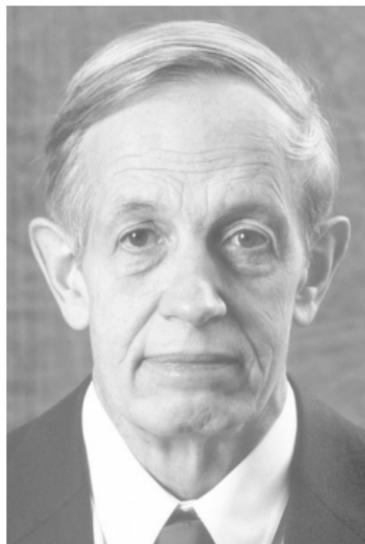


Oskar Morgenstern
(Görlitz 1902 –
Princeton 1977)

Borel 1921: *La Theorie du jeux*

Neumann 1928: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*

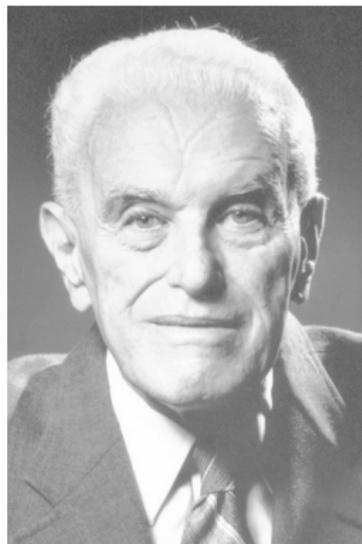
Neumann-Morgenstern 1944: *Theory of Games and Economic Behavior*



John Nash
(Bluefield/WV 1928 –
Monroe Township/NJ 2015)



Reinhard Selten
(Breslau 1930 –
Posen 2016)



John C. Harsanyi
(Budapest 1920 –
Berkeley/CA 2000)

Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften 1994
für ihre Pionierarbeit zu Gleichgewichten in nicht-kooperativen Spielen.
Mehr unter www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1994.

Der Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften wird seit 1969 vergeben, darunter einige Auszeichnungen zur Spieltheorie, siehe en.wikipedia.org/wiki/Nobel_Prize_in_Economic_Sciences.

Einige Nobelpreise, deren Themen uns im Folgenden begegnen werden, obgleich wir in jedem Falle nur die Oberfläche anreißen können:

1972: Kenneth Arrow, John Hicks „for pioneering contributions to general economic equilibrium theory and welfare theory“ [Kapitel N]

1975: Leonid Kantorovich, Tjalling Koopmans „for contributions to the theory of optimum allocation of resources“ [F]

1994: John Nash, John Harsanyi, Reinhard Selten „for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games“ [E, I, J]

1996: William Vickrey, James Mirrlees „for fundamental contributions to the economic theory of incentives under asymmetric information“ [P]

2002: Vernon Smith „for having established laboratory experiments as a tool in empirical economics“, Daniel Kahneman „for having integrated insights from psychological research into economic science“

2005: Robert Aumann, Thomas Schelling „for having enhanced our understanding of conflict and cooperation through game-theory“ [I]

2007: Leonid Hurwicz, Eric Maskin, Roger Myerson
„for having laid the foundations of mechanism design theory“ [O]

2012: Alvin Roth, Lloyd Shapley „for the theory of stable allocations and the practice of market design“ [M]

2014: Jean Tirole „for his analysis of market power and regulation“

2017: Richard Thaler „for his contributions to behavioural economics“
[Unser wöchentliches Experimentallabor ist das Casino Royal.]

Diese Liste wird in den nächsten Jahren voraussichtlich fortgesetzt.

Spieltheorie gehört zur **Mikroökonomik**, denn sie untersucht das Verhalten einzelner Akteure (Menschen, Haushalte, Unternehmen). Die **Makroökonomik** untersucht übergeordnete Größen (Kennzahlen): Investition & Konsum, Export & Import, staatliche Ausgaben & Steuern, Geldpolitik, etc. Beide Sichtweisen ergänzen sich: Die **Mikrofundierung** versucht, die Makroökonomik durch die Mikroökonomik zu erklären.

Physikalische Analogie sind Wärmelehre und kinetische Gastheorie: Die erste behandelt makroskopische Phänomene (zumeist Mittelwerte), die zweite untersucht mikroskopische Phänomene (einzelne Teilchen). Im thermischen Gleichgewicht entsprechen sich beide Sichtweisen: Das System wird durch einige wenige Zustandsgrößen beschrieben.

Ähnlich verhält es sich beim Übergang von der Mikroökonomie (weniger Akteure) zur Makroökonomie (als Grenzwert unendlich vieler Akteure). León Walras (1834–1910) suchte als erster mit Gleichgewichtsmodellen der Volkswirtschaft eine ökonomisch-mathematische Theorie, analog zu physikalisch-mathematischen Theorien wie Astronomie oder Mechanik.

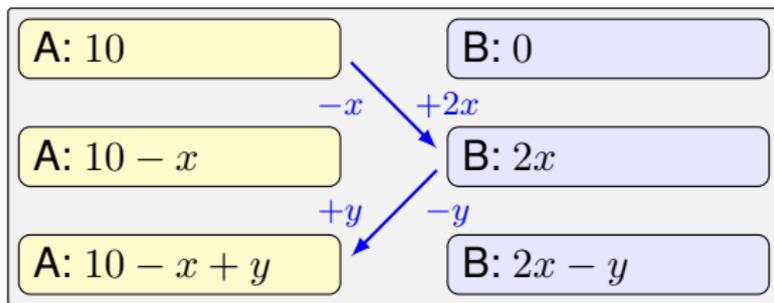
Die Analogie zur Physik ist attraktiv, aber leider nicht sehr tragfähig: Bei rasanter Entwicklung ist die Gesellschaft nicht im **Gleichgewicht**. Zudem fehlt der Ökonomik zumeist eine sichere **experimentelle Basis**. Mit dieser Problematik ringen die Wirtschaftswissenschaften seit jeher. Eine empirische Grundlegung war schon immer ersehnt aber schwierig, manchen erschien dieser Zugang gar aussichtslos und unerreichbar.

*Unlike the typical natural science the material to which it is applied is, in too many respects, not homogeneous through time. [...]
In the second place, [...] economics is essentially a moral science and not a natural science.
(John Maynard Keynes, 1883–1946)*

Bevor ich Sie mit **Theorie** erleuchte oder verwirre, möchte ich gerne ein **Experiment** durchführen. Damit betone ich das empirische Gegenstück zur **mathematischen Theorie**, nämlich die **experimentelle Ökonomik**. Hier versucht man, konkrete Situationen zu verstehen, reale Daten zu erheben, um daran die Theorie zu testen, zu kalibrieren und zu schärfen.

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Zwei Spieler A und B interagieren anonym über eine Datenleitung. Sie (er)kennen sich nicht und begegnen sich vermutlich nie wieder.



Zu Beginn erhält Spieler A ein Guthaben von 10€, Spieler B nur 0€.

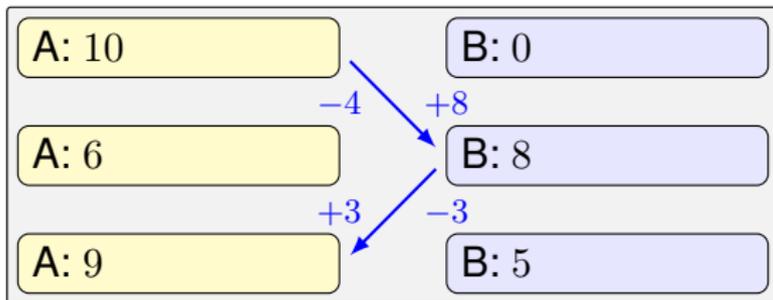
Erster Zug: A schickt an B einen frei gewählten Betrag $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$. Dieser Betrag x wird bei A abgebucht und bei B doppelt gutgeschrieben.

Zweiter Zug: B schickt an A davon einen Betrag $y \in \{0, 1, \dots, 2x\}$. Dieser Betrag y wird bei B abgebucht und bei A gutgeschrieben.

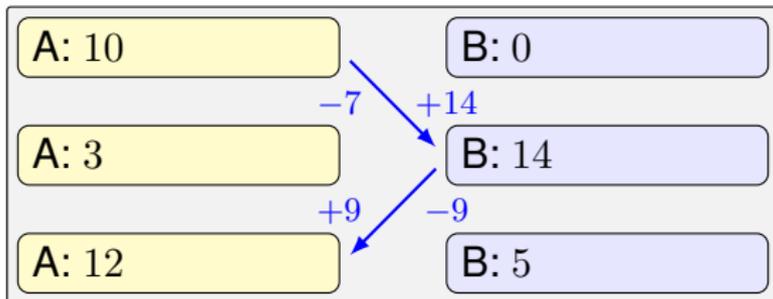
Damit endet das Spiel und jedem wird sein Kontostand ausbezahlt. Es gelten nur diese einfachen Regeln, und sonst keine weiteren.

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Beispiel 1: A schickt 4€, B schickt 3€ zurück. 😞 A macht Verlust.



Beispiel 2: A schickt 7€, B schickt 9€ zurück. 😊 Beide profitieren.



Beachte: Der zweite Zug ist ein Nullsummenspiel, der erste Zug nicht!

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Das ist ein einfaches, aber typisches Modell wirtschaftlichen Handelns. Wir können die Interaktion als **Kredit und Rückzahlung** interpretieren: Spieler A verleiht einen Teil seines Geldes, Spieler B erwirtschaftet damit eine Verdopplung und zahlt zurück: Tilgung plus Zinsen? Allerdings gibt es keinen Vertrag und auch keine Strafen!

Ebenso können wir es als **Online-Handel** interpretieren: Spieler A geht in Vorleistung und verschickt die Ware, für Spieler B ist diese doppelt so nützlich / wertvoll, schließlich bezahlt B nach seinem eigenen Ermessen. **Pay what you want** wird genutzt bei Spenden, Trinkgeld, Straßenkunst, manchen Restaurants, Veranstaltung / Theater, Hofverkauf / Blumenfeld.

Zugegeben, dieses Modell ist noch allzu simpel und eher unrealistisch, insbesondere fehlen hier alle üblichen sozialen Kontrollmechanismen. Der Vorteil ist jedoch: Alle Regeln sind besonders klar und einfach. Wir können dieses Spiel vollständig analysieren und verstehen.

Das ist ein stark vereinfachtes Modell, sozusagen ein Laborexperiment. Wir blenden alles andere aus und untersuchen es unter dem Mikroskop.

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

In der Literatur heißt dies **Vertrauensspiel**, engl. *trust game*. Es wirkt zunächst etwas ungewöhnlich, begegnet uns aber im Alltag recht häufig, hier zum Beispiel in Stuttgart-Sonnenberg auf meinem Weg zur Uni:



Definition A2A: Stufen der Rationalität

Unter **(unbeschränkter) Rationalität** verstehen wir folgende Axiome:

\mathcal{R}_0 : Jeder Spieler will sein Ergebnis (Nutzen, Gewinn, ...) maximieren.

\mathcal{R}_1 : Jeder Spieler versteht zudem alle Spielregeln und Konsequenzen.

\mathcal{R}_2 : Es gilt die vorige Aussage \mathcal{R}_1 , und jeder Spieler weiß dies.

\mathcal{R}_3 : Es gilt die vorige Aussage \mathcal{R}_2 , und jeder Spieler weiß dies.

etc. . . Genauer definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Aussage

\mathcal{R}_n : Es gilt die Aussage \mathcal{R}_{n-1} , und jeder Spieler weiß dies.

\mathcal{R}_∞ : Es gilt die Aussage \mathcal{R}_n für jede Stufe $n \in \mathbb{N}$.

Axiome \mathcal{R}_0 und \mathcal{R}_1 sind extrem wichtige Annahmen für die Spieltheorie:

Erst damit können wir das Spielerverhalten mathematisch analysieren.

Je nach Spiel nutzen wir auch die Verschärfungen $\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4, \dots$ usw.

In Spielanalysen bzw. Beweisen ist es zur Klärung nützlich anzugeben, welche Stufe \mathcal{R}_n der Rationalität wir jeweils benutzen und voraussetzen.

Implizite Annahmen formulieren wir damit explizit, präzise und bequem.

Stufen der Rationalität

Diese Axiome sind meist **Grundlage der Spieltheorie**. Wir müssen sie gründlich verstehen und an möglichst zahlreichen Beispielen erproben.

Als Warnung bzw. freundliche Enttäuschung schicke ich gleich vorweg: Diese Idealisierungen gelten in vielen realen Situationen leider nicht! Diese Eigenschaften sind zwar wünschenswert, doch oft nicht erfüllt. Alles hängt von den Akteuren ab: Menschen, Unternehmen, Staaten, KI.

Axiom \mathcal{R}_0 bedeutet: Die im Spiel formulierte Nutzenfunktion erfasst das Wesentliche. Wir verkneifen uns danach metaphysische Spekulationen über Moral, Ethik, Gerechtigkeit, Egoismus vs Altruismus, Erziehung, Tradition, Religion, Sünde, Fegefeuer, jüngstes Gericht, Karma, etc. . .

Damit will ich nicht behaupten, dass diese Fragen unwichtig wären, sie liegen nur außerhalb der Reichweite unseres mathematischen Modells. Sie sind nicht Teil des Spiels; wenn doch, dann in der Nutzenfunktion: Wenn wir diese Begriffe in der Spieltheorie betrachten wollen, und das sollten wir, dann dürfen wir sie nicht implizit und vage dazufabulieren, sondern müssen sie explizit und präzise im Spiel codieren.

Stufen der Rationalität

Axiom R_1 bedeutet: Jeder Spieler kennt und versteht die Regeln des Spiels, er kennt alle Handlungsoptionen und deren Konsequenzen.

Das ist eine zentrale, aber manchmal allzu starke Annahme: Für das Spiel Schach kenne ich zwar alle Regeln, aber nicht alle Konsequenzen; mir fehlt die Rechenkapazität, ausreichend viele Züge vorauszudenken.

Das gilt selbst für sehr einfache Spiele, wie unsere folgenden Beispiele. Sie erfahren damit ganz konkret, dass Sie zwar die Regeln verstehen, aber nicht sofort alle Konsequenzen erkennen. Wir sehen das daran, dass Sie als Spieler nicht sofort die beste Strategie wählen, sondern noch Fehler machen. Sie beherrschen das Spiel erst nach etwas Übung!

Gerade hierzu ist es wichtig, diesen Vortrag mit konkreten Beispielen aufzubauen, die Sie dann auch ernsthaft bearbeiten und lösen sollen. Andernfalls hören Sie schöne Theorie und glauben, damit sei alles klar. Die Wirklichkeit ist viel komplizierter. . . und auch viel interessanter! Neben der Spieltheorie lohnt sich immer auch das soziale Experiment. Die tatsächlich beobachtete Rationalität ist allzu oft doch beschränkt.

Stufen der Rationalität

Axiome \mathcal{R}_2 , \mathcal{R}_3 usw. codieren die **gegenseitigen Einschätzungen**.

„Als Spieler verhalte ich mich rational. Dazu muss ich das Verhalten der anderen Spieler vorhersehen, antizipieren, besser gesagt: berechnen. Am besten gelingt mir dies, wenn ich weiß, dass auch alle anderen Spieler sich rational verhalten. Davon will / muss / kann ich ausgehen.“

Wir nennen dies **gemeinsames Wissen**, engl. *common knowledge*.

Es genügt nicht, dass etwas wahr ist, es muss auch jeder wissen. Und man muss sich darauf verlassen können, dass es jeder weiß. Und auch darauf, dass jeder weiß, dass jeder es weiß. Usw.

Das ist ein allgemeines und wichtiges Konzept: Das Wissen eines Spielers besteht neben seiner reinen Sachkenntnis auch aus seinem Metawissen über das Wissen der anderen Spieler. „Ich weiß, dass du weißt, dass ich weiß, . . .“. Das klingt vertrackt und ist es meist auch.

In strategischen Situationen sind Wissen und Nichtwissen entscheidend. Für die Analyse von Spielen (und überall sonst) ist daher die Verteilung von Wissen und der Zugang zu Information von zentraler Bedeutung.

In this ocean of madness, an island of reason



Rationalität dient uns als Leuchtturm im Ozean der Unsicherheit. Sie markiert ein behütetes Eiland sicheren, gefestigten Wissens. Sie dient uns zur Navigation, selbst in unkartierten Gewässern. Selbst fern der Rationalität hilft sie uns zur Orientierung.

Ist Rationalität ein geeignetes Fundament?

Manche Zuhörer wehren sich vehement dagegen, den Menschen auf den **Homo oeconomicus** zu reduzieren. Manche sträuben sich auch dagegen, dass ich dafür das hehre Wort „Rationalität“ missbrauche.

Als Mathematiker möchte ich die Gemüter beruhigen und die Wut mäßigen: Zunächst ist die Definition eine ehrliche Klarstellung!

*Es ist sehr wichtig, keine unbewiesenen Annahmen zu treffen,
aber noch wichtiger ist es, keine Worte zu benutzen,
hinter denen sich kein klarer Sinn verbirgt.*

(William Kingdon Clifford, 1845–1879)

Die obige Definition präzisiert explizit die zu diskutierenden Axiome: Dies sind unsere Annahmen, Voraussetzungen, Arbeitshypothesen. Es sind keineswegs pauschale Behauptungen über die Wirklichkeit.

Wir werden damit einfache Modelle untersuchen und daran viel lernen. Aussagen über das Modell, unsere Annahmen und ihre Folgerungen, lassen sich manchmal in der Wirklichkeit wiederfinden, andermal nicht.

Müssen wir alles so genau nehmen? Ja, sicher!

Auf den ersten Blick scheint es vielen von Ihnen vermutlich übertrieben, dass ich in guter mathematischer Tradition mit einer Definition beginne und den Begriff der „Rationalität“ definiere, zumindest etwas präzisiere. Dies dient als hilfreiche Abkürzung und bequeme Zusammenfassung.

Ist das nicht ohnehin alles klar? Sind Definitionen nicht übertrieben? Ich denke, nein! Gerade der Begriff „Rationalität“ kann sehr verschieden aufgefasst werden, daher möchte ich hier klar und deutlich aussprechen, was ich darunter verstehen will, und wie Sie mich bitte verstehen sollen.

Natürlich können Sie zur Rationalität eine andere Auffassung vertreten, doch wir müssen jeweils eindeutig darlegen, was wir darunter verstehen. Das ist eine Frage guter Kommunikation. Andernfalls provozieren wir nur unnötige Missverständnisse, und unsere Diskussion dreht sich im Kreis.

Die mathematische Vorgehensweise der Spieltheorie ist daher gar nicht überraschend, sondern entspricht dem Vorbild anderer Wissenschaften: Wir wollen ganz konkrete Probleme lösen und Anwendungen verstehen, dazu müssen wir Begriffe klären und tragfähige Argumente entwickeln.

Modell und Wirklichkeit

Zur Illustration gebe ich einfache, konkrete **Anwendungsbeispiele**. Sie sind zwar extrem vereinfacht und etwas fiktiv, aber doch lehrreich: Sie zeigen ganz handfeste Konsequenzen von Irr/Rationalität, und dass wir uns mit dieser Problematik genauer auseinandersetzen müssen.

Das ist die Stärke und zugleich die Begrenzung **abstrakter Modelle**: Sie treffen einen Kern des Problems, sie sind einfach und übersichtlich und leicht zu verstehen, sie taugen wunderbar als erste Näherung. Sie dienen als Ausgangspunkt und Orientierung für Anwendungen.

Wir werden dieses bemerkenswerte Phänomen noch oft beobachten: Selbst einfache Spiele können den wahren Kern eines Konflikts treffen. Physiker sprechen hier traditionell nüchtern von der **ersten Näherung**, die bei Bedarf durch die zweite, dritte, ... Näherung verfeinert wird.

Das **Modell**, das wir von der **Realität** entwerfen, hilft und leitet uns, doch niemals sollten wir naiv das Modell für die Wirklichkeit halten. Von dieser ersten Näherung ausgehend können wir unser Modell je nach Bedarf verfeinern und konkreten Gegebenheiten anpassen.

Beispiel: einen Kuchen teilen

Aufgabe: Zwei Kinder, Alice und Bob, teilen sich einen Schokokuchen. Damit es gerecht zugeht, gibt der Vater vor: Alice teilt, Bob wählt aus. Was wird passieren? rational? irrational? Ist das Ergebnis gerecht?

Lösung: \mathcal{R}_0 : Jedes Kind will möglichst viel Schokokuchen. Diese Annahme ist grundlegend für unsere Analyse!

\mathcal{R}_1 : Bob wird das größere Stück erkennen und sich nehmen. Er kann beide Stücke anschauen oder wiegen, um sicher zu gehen.

\mathcal{R}_2 : Alice weiß, dass sie das kleinere Stück bekommen wird. Daher schneidet Alice zwei möglichst gleich große Stücke.

😊 Dieses einfache Beispiel illustriert die Stufen der Rationalität. Alle Voraussetzungen sind tatsächlich nötig für unsere Analyse!

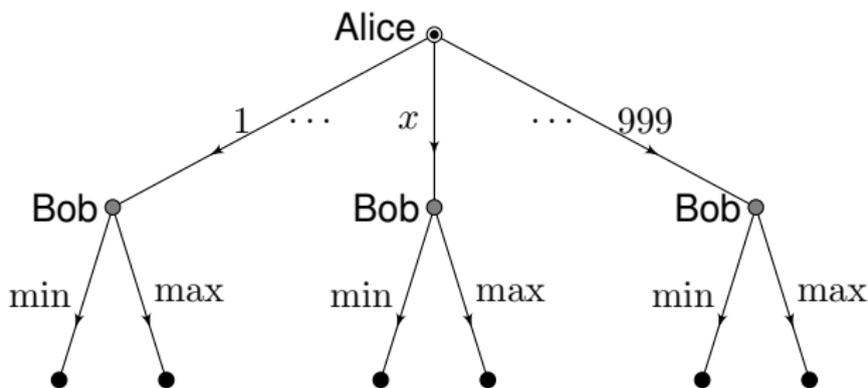
😊 Wir werden später strategische Spiele in Normalform erklären und diese Lösung als (das einzige) Nash-Gleichgewicht wiedererkennen.

Übung: Sobald Sie die Techniken kennen, führen Sie dies aus!

Beispiel: einen Kuchen teilen

Auszahlungsmatrix (statisch) und Spielbaum (dynamisch) in Gramm:

	Bob	wähle Min	wähle Max
Alice			
$x < 500$	$1000 - x$	x	$1000 - x$
$x = 500$	500	500	500
$x > 500$	x	$1000 - x$	$1000 - x$



Beispiel: einen Kuchen teilen

⚠ Ohne Rationalität ist eine Analyse / Prognose nahezu unmöglich!

\mathcal{R}_0 : Wenn Alice oder Bob gar keinen Schokokuchen mag, oder andere Ziele verfolgt, dann können wir kaum vernünftige Vorhersagen machen.

\mathcal{R}_1 : Vielleicht ist Bob noch jung und unerfahren und kann die Größe von Kuchenstücken nicht treffsicher vergleichen. Die Masse könnte er leicht und zerstörungsfrei wiegen, zum Vergleich genügt eine Balkenwaage. Auch das Volumen könnte er leicht bestimmen, mit dem Archimedischen Prinzip durch Wasserverdrängung. (Das gibt erfahrungsgemäß Sauerei.) Andernfalls täuschen ihn vielleicht komplizierte Formen, etwa fraktale Kuchenstücke, nicht-messbare Mengen etc. Vielleicht möchte Alice genau dies provozieren, falls sie so etwas überhaupt herstellen kann.

\mathcal{R}_2 : Ist Alice irrational so könnte sie ein großes Stück schneiden und naiv hoffen, Bob nimmt das kleinere. Ist Bob rational, so wird er das nicht tun. Wenn Bob sich leicht täuschen ließe, könnte Alice zwei ungleiche Stücke so schneiden, dass Bob das kleinere und das größere verwechselt. Wenn Bob das jedoch durchschaut, dann steht Alice schlechter da.

Beispiel: einen Kuchen teilen

Ist das Ergebnis „fair“ oder „gerecht“? Nun ja, das kommt darauf an. . . Dies sind zunächst keine klar festgelegten Begriffe. Dazu müssten wir die Ziele „Fairness“ oder „Gerechtigkeit“ erst genauer definieren und dann anhand objektiver und nachvollziehbarer Kriterien prüfen.

Wenn das erklärte Ziel ist, den Kuchen möglichst hälftig aufzuteilen, dann wird dies durch das Spiel „Die eine teilt, der andere wählt“ recht gut implementiert. Dazu müssen beide Spieler „nur“ rational handeln und zudem die Spielaktionen sicher und präzise ausführen können.

- Wenn Bob präzise schätzen kann, aber Alice nur grob schneiden, dann ist Bob im Vorteil, und das Spiel verläuft zu seinen Gunsten.
- Wenn Alice präzise schneiden kann, aber Bob nur grob schätzen, dann ist Alice im Vorteil, und das Spiel verläuft zu ihren Gunsten.

Wenn wir uns Alice und Bob wirklich als kleine Kinder vorstellen, dann hängt die Fairness von ihrem Alter und ihren Fähigkeiten ab. Die Asymmetrie des Spiels könnten wir per Münzwurf beheben, eine eventuelle Asymmetrie der Fähigkeiten hingegen nicht!

Beispiel: ein Erbe teilen

Aufgabe: Alice und Bob erben 1 000 000€. Das Testament verlangt: Alice nennt dem Notar eine Teilung, x für Bob und $1\,000\,000 - x$ für Alice. Zur Vereinfachung nehmen wir im Folgenden $x \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$ an. Dies kann Bob nun annehmen... oder ablehnen, dann verfällt das Erbe. Was wird passieren? rational? irrational? Ist das Ergebnis gerecht?

Lösung: \mathcal{R}_0 : Jeder will seine Auszahlung maximieren.

Diese Annahme ist grundlegend für unsere Analyse!

\mathcal{R}_1 : Bob wird jeden Vorschlag $x > 0$ annehmen.

Das ist vielleicht wenig, aber besser als nichts.

\mathcal{R}_2 : Alice weiß dies und schlägt $x = 1\text{€}$ vor.

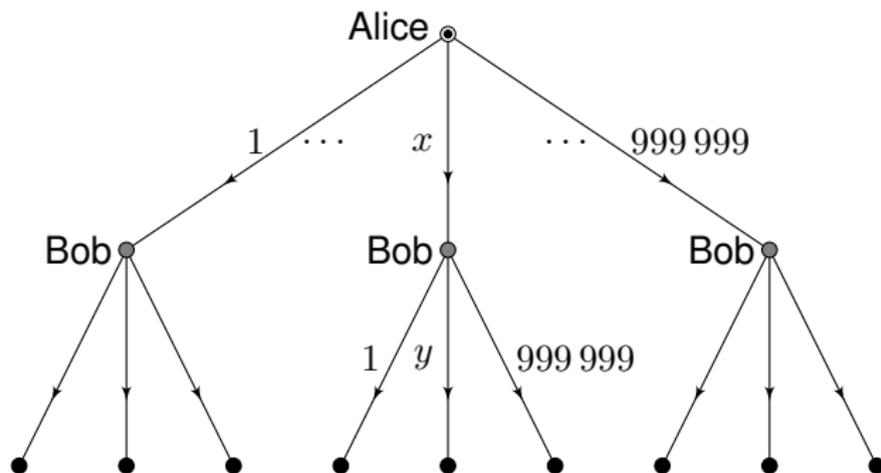
😊 Dieses einfache Beispiel illustriert die Stufen der Rationalität. Alle Voraussetzungen sind tatsächlich nötig für unsere Analyse!

😊 Wir werden später dynamische Spiele erklären und diese Lösung als (das einzige) teilspielperfekte Gleichgewicht wiedererkennen.

Übung: Sobald Sie die Techniken kennen, führen Sie dies aus!

Beispiel: ein Erbe teilen

Wir formalisieren folgende Variante: Alice fordert $x \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$. Anschließend fordert Bob $y \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$. Gilt $x + y \leq 1\,000\,000$, so tritt die Aufteilung (x, y) in Kraft, andernfalls verfällt das Erbe.



Hier ist die zeitliche Reihenfolge entscheidend: Alice macht ihr Angebot und kann nicht mehr zurück, Bob ist daher unter Zugzwang. Muss Bob zuerst fordern, so ist es umgekehrt. Als Variante ist auch gleichzeitige verdeckte Abgabe von Alice' Angebot und Bobs Forderung denkbar.

Beispiel: ein Erbe teilen

 Ohne Rationalität ist eine Analyse / Prognose nahezu unmöglich:
 \mathcal{R}_0 : Wenn Alice oder Bob gar kein Geld haben will, oder andere Ziele verfolgt, dann können wir kaum vernünftige Vorhersagen machen.

\mathcal{R}_1 : Wir gehen hier davon aus, dass Bob streng rational ist. „Wer den Euro nicht ehrt, ist das Erbe nicht wert.“ Ist das zwingend? Vielleicht hat Bob ein extremes Gerechtigkeitsempfinden und wird nur den Vorschlag $x = 500\,000\text{€}$ akzeptieren, nicht weniger, aber auch nicht mehr. Das ist irrational, aber möglich. Vielleicht hat Bob $850\,000\text{€}$ Schulden und wird von Mafiakillern verfolgt, dann würde er nur $x \geq 850\,000\text{€}$ akzeptieren.

\mathcal{R}_2 : Wenn Alice an Bobs Rationalität zweifelt, dann sollte sie ihre Strategie anpassen. Zum Beispiel könnte Bob drohen: „Alles unter $300\,000\text{€}$ werde ich ablehnen.“ Aber ist diese Drohung glaubwürdig? Wird er das wirklich tun, wenn er vor der endgültigen Entscheidung steht? Wenn er rational ist, sicher nicht! Andernfalls vielleicht doch. . .
Alice muss also die Rationalität von Bob einschätzen. Das ist schwierig. Der Idealfall ist perfekte Rationalität, aber das ist nicht immer realistisch.

Beispiel: ein Erbe teilen

Ist das Ergebnis „fair“ oder „gerecht“? Nun ja, das kommt darauf an. . . Dies sind zunächst keine klar festgelegten Begriffe. Dazu müssten wir die Ziele „Fairness“ oder „Gerechtigkeit“ erst genauer definieren und dann anhand objektiver und nachvollziehbarer Kriterien prüfen.

- Wenn das erklärte Ziel ist, das Erbe möglichst hälftig aufzuteilen, dann wird es durch das Testament denkbar schlecht implementiert.
- Wenn das Ziel nur ist, das Testament wortgetreu auszuführen, dann erfüllt das beschriebene rationale Verhalten genau dies.

Genauso gut hätte der Erblasser die Aufteilung 999 999€ für Alice und 1€ für Bob im Testament festlegen können. Ist diese Festlegung un/fair? Das Testament ist ungewöhnlich, aber nicht zwangsläufig un/gerecht; dazu müssten wir viel mehr Vorgeschichte und Kontext kennen.

Ist das Erbe ausgleichende Un/Gerechtigkeit für früheres Verhalten? Und was ist mit Chuck, der nicht erwähnt wurde und nichts bekommt? Vielleicht wäre es besser, das Erbe verfällt an wohltätige Zwecke. . . Vielleicht will der Erblasser Alice und Bob eine Lehre erteilen?

Meuterei auf der Bounty (1935)



Mutiny on the Bounty mit Clark Gable und Charles Laughton unter der Regie von Frank Lloyd. Oscar 1936 als bester Film.

Fünf gierige Piraten [*the pirate game*]

Fünf basisdemokratische Piraten 1, 2, 3, 4, 5 teilen sich 100 Dukaten.
(nach Ian Stewart: *A Puzzle for Pirates*. Scientific American 5/1999)



Der ranghöchste Pirat 5 schlägt eine Zuteilung zur Abstimmung vor. Stimmt mindestens die Hälfte dafür, so wird diese Zuteilung ausgeführt. Bei Ablehnung wird der Vorschlagende über Bord ins Meer geworfen, und die verbleibenden Piraten beginnen das Spiel von vorn.

Präzisierung: Ein Dukat ist unteilbar. Jeder Pirat will A: selbst überleben, B: möglichst viel Gold, C: bei Indifferenz lieber andere ins Meer werfen, D: lieber rangniedrige bestechen als ranghohe. Jeder Pirat ist rational. Absprachen sind unmöglich, denn jeder misstraut jedem anderen und würde Absprachen brechen. Diese Fakten sind gemeinsames Wissen.

Fünf gierige Piraten [*the pirate game*]

Naiv könnte man vermuten, der ranghöchste Pirat muss um sein Leben fürchten und daher all sein Gold hergeben. Das Gegenteil ist der Fall!

Aufgabe: Lösen Sie das Piratenrätsel für $n = 5$, sowie für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Wir nutzen Induktion über $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ und finden:

	1	2	3	4	5	...	197	198	199	200	201	202
	100	☠	☠	☠	☠	...	☠	☠	☠	☠	☠	☠
R_1	0	100	☠	☠	☠	...	☠	☠	☠	☠	☠	☠
R_2	1	0	99	☠	☠	...	☠	☠	☠	☠	☠	☠
R_3	0	1	0	99	☠	...	☠	☠	☠	☠	☠	☠
R_4	1	0	1	0	98	...	☠	☠	☠	☠	☠	☠
\vdots												
R_{197}	0	1	0	1	0	...	0	2	☠	☠	☠	☠
R_{198}	1	0	1	0	1	...	1	0	1	☠	☠	☠
R_{199}	0	1	0	1	0	...	0	1	0	1	☠	☠
R_{200}	1	0	1	0	1	...	1	0	1	0	0	☠
R_{201}	0	1	0	1	0	...	0	1	0	1	0	0

Fünf gierige Piraten [*the pirate game*]

😊 Scharfsinn, Systematik & Induktion liefern die erstaunliche Antwort! Wir nutzen die Prioritäten A–C und strenge Rationalität, insb. Egoismus ohne Kooperation. Real beobachtetes Verhalten kann davon abweichen.

⚠️ Im Spiel mit $n \geq 201$ Piraten geht es nur noch ums Überleben! Der Vorschlagende $n = 201, 202, 204, 208, \dots$ kann überleben, der Verschlagende $n = 203, 205, 206, 207, \dots$ leider nicht.

Zur Analyse zerlegen wir $n = 200 + 2^k + r$ mit $k, r \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r < 2^k$.

Im Falle $0 < r < 2^k$ geht Pirat n über die Planke, egal was er vorschlägt: Er kann nur 100 Piraten bestechen. Dazu bekommt er alle r Stimmen der Todgeweihten (inklusive seiner selbst). Das bleibt eine Minderheit.

Im Falle $r = 0$ überlebt Pirat $n = 200 + 2^k$ durch folgende Strategie:

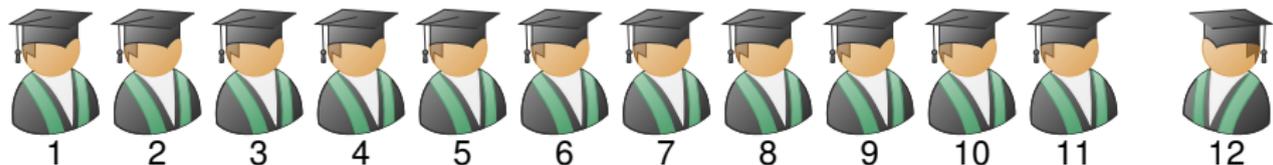
- Falls k gerade ist, gibt er allen Ungeraden $1, 3, \dots, 199$ je ein Dukat.
- Falls k ungerade ist, gibt er allen Geraden $2, 4, \dots, 200$ je ein Dukat.

So bekommt er alle 100 Stimmen der Bestochenen und zusätzlich noch alle $2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$ Stimmen der Geretteten (inklusive seiner selbst).

😊 Prioritäten A–D lösen Indifferenzen und garantieren Eindeutigkeit.

Ein Komitee zur Verbesserung der Hochschullehre

Die chronisch unterfinanzierte Hochschullehre soll mit einer Förderung von 50 k€ exzellent werden. (Das ist aberwitzig, aber besser als nichts.) Ein Komitee von zwölf Professoren teilt die Fördersumme unter sich auf.



Der dienstälteste Professor 12 legt eine Zuteilung zur Abstimmung vor. Bei Ablehnung wird der Vorschlagende als befangen ausgeschlossen, und die verbleibenden Professoren beginnen das Komiteespiel von vorn. Präzisierung: Ein k€ ist unteilbar. Weiter gelten obige Piratenregeln.

Aufgabe: Welcher Professor erhält wie viel von der Fördersumme?

Lösen Sie das Komiteespiel mit folgenden Abstimmungsregeln:

- (1) Annahme erfordert mehr als die Hälfte der Stimmen.
- (2) Annahme erfordert mindestens zwei Drittel der Stimmen.
- (3) Annahme gilt erst bei höchstens einer Gegenstimme.

Das Komiteespiel: mehr als die Hälfte

Lösung: (1) Wir nutzen Induktion über $n = 1, 2, \dots, 12$ und finden:

n	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	50	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
2	2	50	0	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
3	2	0	1	49	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
4	3	1	2	0	47	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
5	3	2	0	1	0	47	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
6	4	0	1	2	1	0	46	☠	☠	☠	☠	☠	☠
7	4	1	2	0	0	1	0	46	☠	☠	☠	☠	☠
8	5	2	0	1	1	0	1	0	45	☠	☠	☠	☠
9	5	0	1	2	0	1	0	1	0	45	☠	☠	☠
10	6	1	2	0	1	0	1	0	1	0	44	☠	☠
11	6	2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	44	☠
12	7	0	1	2	1	0	1	0	1	0	1	0	43

Jeder Vorsitzende n kann sich das Quorum $q = 1 + \lfloor n/2 \rfloor$ billig erkaufen und sich selbst den Löwenanteil des zu verteilenden Geldes sichern.

Das Komiteespiel: mindestens zwei Drittel

Lösung: (2) Wir nutzen Induktion über $n = 1, 2, \dots, 12$ und finden:

n	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	50	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
2	2	50	0	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
3	2	0	1	49	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
4	3	1	2	0	47	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
5	4	2	3	1	0	44	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
6	4	3	0	2	1	0	44	☠	☠	☠	☠	☠	☠
7	5	0	1	3	2	1	0	43	☠	☠	☠	☠	☠
8	6	1	2	0	3	2	1	0	41	☠	☠	☠	☠
9	6	2	3	1	0	0	2	1	0	41	☠	☠	☠
10	7	3	0	2	1	1	0	2	1	0	40	☠	☠
11	8	0	1	3	2	2	1	0	2	1	0	38	☠
12	8	1	2	0	3	0	2	1	0	2	1	0	38

Jeder Vorsitzende n kann sich das Quorum $q = \lfloor 3n/2 \rfloor$ billig erkaufen und sich selbst den Löwenanteil des zu verteilenden Geldes sichern.

Das Komiteespiel: höchstens eine Gegenstimme

Lösung: (3) Wir nutzen Induktion über $n = 1, 2, \dots, 12$ und finden:

n	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	50	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
2	1	0	50	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
3	2	1	0	49	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
4	3	2	1	0	47	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
5	4	3	2	1	0	44	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
6	5	4	3	2	1	0	40	☠	☠	☠	☠	☠	☠
7	6	5	4	3	2	1	0	35	☠	☠	☠	☠	☠
8	7	6	5	4	3	2	1	0	29	☠	☠	☠	☠
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	22	☠	☠	☠
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	14	☠	☠
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	5	☠
12	11	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	5	0

Professor 12 kann sich nicht genug Unterstützung erkaufen. Professor 11 hingegen bringt seinen Vorschlag mit überwältigender Mehrheit durch.

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Im **Casino Royal** (25.10.2019) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, unsere mathematische Lösung des Piratenspiels in der Praxis zu testen. Das kostet etwas Zeit, liefert aber eindruckliches Anschauungsmaterial. Genau zu diesem Zweck haben wir das Casino Royal eingerichtet.

Ich empfehle nachdrücklich praktische **Experimente zur Spieltheorie**, denn Theorie und Praxis können erstaunlich weit auseinanderklaffen. Wer das erlebt hat, sieht diesen Themenkomplex mit anderen Augen. Ich halte den konkreten Vergleich für lehrreich, ehrlich und heilsam.

Das gilt insbesondere in **Verhandlungen**, so wie hier: Es genügt nicht, rational zu (ver)handeln und einen möglichst guten Plan zu (er)finden, man muss zudem auch die anderen überzeugen! (hier: mehrheitlich) Dazu muss jeder Spieler genaustens die Ir/Rationalität seiner Mitspieler berücksichtigen, und das macht die Verhandlungen beliebig komplex.

😊 Wir haben viel gelernt und zudem hat es großen Spaß gemacht: **Konkrete Experimente überraschen und begeistern immer wieder.** Vielen Dank an alle engagierten und spielfreudigen Teilnehmer:innen!

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Auf die Ankündigung, das Piratenspiel experimentell durchzuführen, meldeten sich spontan fünf freiwillig-furchtlose Freibeuter A,B,C,D,E; einige von ihnen kannten die zugehörige Theorie, andere noch nicht. Diesen fünf wurden die fünf Rollen zugewiesen: 5A, 4B, 3C, 2D, 1E.

Erste Verhandlungsrunde: Zunächst unterbreitet der Capitain 5 einen Vorschlag und untermauert ihn kurz mit seinen weisen Argumenten. Dazu beziehen 4, 3, 2, 1 Stellung. (Man kann zuvor eine maximale Redezeit vereinbaren, etwa 30s, aber das war hier gar nicht nötig.)

Zur weiteren Aussprache ist eine zweite Verhandlungsrunde möglich. Dann erst unterbreitet der Capitain seinen endgültigen Vorschlag und alle stimmen gleichzeitig darüber ab (durch Kreidestück in Faust; optional wäre eine geheime Abstimmung, etwa durch Zungestrecken).

 Dies ist kein Laborexperiment unter kontrollierten Bedingungen. Die Regeln waren zunächst lose gefasst. Die Verhandlung vor Publikum und die Interaktion aller Beteiligten waren an kein Protokoll gebunden. Insbesondere habe ich als Moderator oft dazwischengeplappert.

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Hier mein (stark vereinfachtes) Gedächtnisprotokoll der Ereignisse; sie sind jetzt bereits legendär, die Berichte entsprechend schillernd.

Der Capitain 5A kennt die Theorie und schlägt deshalb die Aufteilung (1, 0, 1, 0, 98) vor. „Das ist die rationale Lösung. Liebe Piraten 3C und 1D, Ihr könnt mir ruhig zustimmen, von mir bekommt Ihr immerhin ein Dukat. Seid vorsichtig: Wenn Ihr mich über Bord werft, bekommt Ihr gar nichts.“

Darauf wendet sich Pirat 4B direkt an die Mannschaft und entgegnet: „Männer, merkt Ihr nicht, wie der Capitain uns gegeneinander ausspielen will? Das dürfen wir uns nicht gefallen lassen. Der Capitain muss weg!“

Pirat 3C: „Wo bleibt bei diesem Vorschlag denn die Gerechtigkeit? Wir müssen als Mannschaft zusammenhalten und gerecht teilen. Nur wer gut und gerecht handelt, kommt in den Piratenhimmel.“

Pirat 2D: „Wir haben alle gemeinsam gekämpft und jetzt sollen einige leer ausgehen? Wir sind ein Team, wir müssen zusammenhalten.“

Pirat 1E: „Ich finde den Vorschlag eigentlich ganz in Ordnung, aber ein Dukat ist viel zu wenig. Ich verlange 33 Dukaten!“

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Das Publikum entschied, dass eine weitere Aussprache sinnvoll wäre; nach dieser ersten Verhandlungsrunde folgte also noch eine zweite. Nach Austausch aller Argumente schlug der Capitain 5A endgültig die Verteilung $(26, 0, 26, 0, 48)$ vor. Dieser Vorschlag wurde angenommen.

Eine erste Einschätzung und Einordnung dieser Geschehnisse:

Ein Einfluss der Theorie ist deutlich: Der Capitain 5A konzentrierte sich sofort auf die aus seiner Sicht allein entscheidenden Piraten 3C und 1E. Daran änderte auch die weitere Diskussion nichts. Teile und herrsche!

Diese Koalition $\{5, 3, 1\}$ machte alles weitere unter sich aus, und genau dieses Triumvirat stimmte schließlich für den Vorschlag des Capitains. Die Appelle der gezwungenen Opposition $\{2, 4\}$ verhallten ungehört.

Entgegen der Theorie kam es nicht zu der Aufteilung $(1, 0, 1, 0, 98)$, sondern $(26, 0, 26, 0, 48)$. Die Zahlen scheinen mir zwar willkürlich, doch die Tendenz ist klar: Der Capitain 5A wollte ein deutliches Entgegenkommen zeigen, um beide Stimmen sicher zu erhalten. Diese waren nun bitter nötig, und er wollte kein Risiko eingehen.

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Dieses erste Piratenspiel war bereits sehr lehrreich und unterhaltsam, doch dann kam alles noch besser, noch spannender, noch verrückter.

Nach Beratung beschließen alle Anwesenden, dieselben fünf erneut spielen zu lassen, mit neu zugewählten Rollen: 5C, 4B, 3A, 2E, 1D.

Dies wirft sofort die Frage auf, ob sich die Piraten noch an ihren vorigen Beutezug und an die anschließenden Verhandlungen erinnern können, oder ob die rauschende Feier mit viel Rum ihr Gedächtnis gelöscht hat. Diese interessante spieltheoretische Frage bleibt hier zunächst offen.

Nun nehmen die Geschehnisse ihren sensationellen Verlauf:

Capitain 5C: „In dieser harten Piratenrealität geht es nur ums Gold.

Lasst Euch nichts einreden und glaubt nicht an Himmel oder Hölle!

Ich schlage deshalb die einzig rationale Verteilung $(1, 0, 1, 0, 98)$ vor.“

Alle lachen verwundert über diese Bekehrung vom Paulus zum Saulus.

Nach einer Verhandlungsrunde bleibt der Capitain bei seinem Vorschlag.

In der Abstimmung wird dieser abgelehnt, der Capitain geht über Bord;

ein würdevoller Abgang unter dem tosenden Ablas aller Anwesenden.

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Pirat 4B: „Männer, wir müssen als Mannschaft zusammenhalten, wir brauchen eine möglichst große Crew, wir brauchen jeden Mann, um unsere Gegner besiegen zu können. Ich schlage die Aufteilung (0, 1, 0, 99) vor.“ In der Abstimmung scheitert dieser Vorschlag jedoch. Unter anerkennendem Applaus geht auch der Vizecapitain über Bord.

Pirat 3A: „Lieber Pirat 1D, Du siehst ja, was passieren wird: Wenn ich über Bord gehe, wird Pirat 2E dich über den Tisch ziehen. Also gebe ich Dir ein Dukat, das ist für dich viel besser als nichts.“ Erstaunlicherweise wird auch dieser klare, einfache, wohlbegründete Vorschlag abgelehnt. Nach allzu kurzer Karriere geht Capitain 3A unter Applaus über Bord.

Pirat 2E schlägt 1D großzügig vor: „Machen wir Halbe-Halbe?“ – „Ja.“ Die glücklichen Überlebenden erhalten jeweils beachtliche 50 Dukaten. Die einst so stolze Piratenmannschaft, auf allen Weltmeeren gefürchtet, ist nach diesen harten Verhandlungen allerdings arg reduziert.

A house divided against itself, cannot stand.

(Abraham Lincoln, 1809–1865)



Vielleicht sollten sich die Piraten eine bessere Verfassung geben?

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Dieser Verlauf der Verhandlungen war unerwartet, turbulent, verblüffend und vollkommen entgegen unserer eigenen theoretischen Vorhersage.

Rational lässt sich das hier beobachtete Verhalten nicht erklären! Das ist eine schmetternde Niederlage für die Spieltheoretiker:in, aber zugleich auch ihre beste Verteidigung: Die Spieler waren eben nicht rational.

Damit kann sich die Spieltheoretiker:in elegant aus der Affäre ziehen, oder überhaupt jede Wissenschaftler:in im Zwiespalt zwischen Theorie und Empirie: Die nötigen Voraussetzungen waren eben nicht erfüllt.

Genauer: Nach einem ersten, seriösen Piratenspiel wurden die Spieler im zweiten Durchgang wagemutiger... und verspielter. Es ging ja nicht um viel, jedenfalls nicht um echtes Gold oder gar um Leben und Tod.

Die mögliche Interaktion der Spieler mit dem Publikum betonte zudem den Spaßfaktor, ermutigte das theatralische Schauspiel und schwächte die berechnende Profitmaximierung, also die Grundvoraussetzung \mathcal{R}_0 : Der Profit bestand nun nicht nur aus den Dukaten, sondern auch und hauptsächlich aus der Interaktion selbst und dem (Schau-)Spielspaß.

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Die Rationalität \mathcal{R}_1 wächst mit zunehmender Spielerfahrung:
Jeder Spieler versteht die Spielregeln und all ihre Konsequenzen.

Doch wenn bei einigen das Fundament \mathcal{R}_0 bröckelt, dann schwindet bei anderen das nötige Vertrauen \mathcal{R}_2 in die Rationalität der Gegenspieler.
So lässt sich schließlich kaum noch rational planen und (ver)handeln.

Für Abstimmungen ist das besonders dramatisch: Es genügt nicht, rational zu (ver)handeln und einen möglichst guten Plan zu (er)finden, man muss zudem die (qualifizierte Mehrheit der) anderen überzeugen!

Zwei Dinge sind unendlich, das Universum und die menschliche Dummheit, aber bei dem Universum bin ich mir noch nicht ganz sicher.

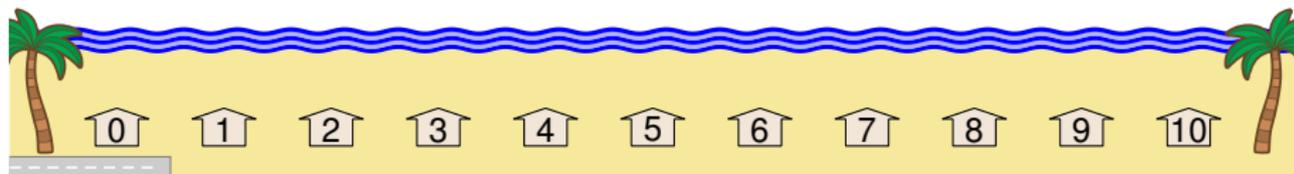
(Albert Einstein zugeschrieben, wohl fälschlicherweise)

If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.

(John von Neumann, 1903–1957)

😊 Später untersuchen wir Verhandlungen, Koalitionen, Wahlsysteme, Auktionen, etc. als wichtige Anwendungsgebiete der Spieltheorie.

Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand



Sie eröffnen einen Kiosk, mögliche Positionen sind $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$. Die Badegäste sind gleichverteilt und gehen immer zum nächsten Kiosk. Jeder Spieler (Kiosk) maximiert seine Kundenzahl (Umsatz, Marktanteil). Bei sonst gleichem Anteil sucht jeder die Nähe zur Zufahrtstraße bei 0.

Aufgabe: (1) Sie haben die einzige Lizenz. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
 (2) Sie haben die erste von zwei Lizenzen. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
 (3) Sie haben die erste von drei Lizenzen. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
 Finden Sie zu jedem Zug von A die beste Antwort von B und von C!

Lösung: Bei rationalem Verhalten finden wir folgende Anordnungen:

- (1)

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----
- (2)

0	1	2	3	B	A	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----
- (3)

0	1	B	C	4	5	6	7	A	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand

Aufwändig: Frage (1) wird gelöst durch die offensichtliche Optimierung.
Bei Frage (2) suchen wir zu jedem Zug von A die beste Antwort von B:

											1 : 10
											2 : 9
											3 : 8
											4 : 7
											5 : 6
											6 : 5
											5 : 6
											4 : 7
											3 : 8
											2 : 9
											1 : 10

Versuchen Sie, die Lösung sauber aufzuschreiben: Wie organisieren Sie Ihre Notation und Ihre Argumente möglichst klar und nachvollziehbar?

Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand

Antwort (3) ist länger, wir müssen systematisch und sorgfältig vorgehen. Dies ist ein einfach-schönes Beispiel der kombinatorischen Spieltheorie: Wir durchsuchen hier einen endlichen Entscheidungsbaum, zählen alle Möglichkeiten auf und sortieren sie nach den Kriterien der Rationalität.

⚠ Jeder Spieler muss bei seiner Analyse Annahmen machen über die Rationalität seiner Gegenspieler. Ich nenne dazu ein einfaches Beispiel: Wäre B gierig und dumm, dann wäre Platz 4 für A ein guter Zug: Spieler B wird kurzfristig Platz 5 wählen, und Spieler C folgt auf Platz 6.



Sind B und C rational, dann wäre Platz 4 für A ein schlechter Zug: Spieler B wird schlau Platz 6 wählen, und Spieler C folgt auf Platz 3.



Um unsere Analyse zu vereinfachen, nehmen wir hier vollständige Rationalität an, wie oben erklärt. Damit wird das Kioskproblem stark vereinfacht und lösbar durch eine kombinatorische Optimierung.

Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand

Aufgabe: Diskutieren und lösen Sie das Problem für drei Kiosklizenzen. Versuchen Sie, Ihre Lösung sauber aufzuschreiben: Wie organisieren Sie Ihre Notation und Argumente möglichst klar und nachvollziehbar?

Wenn Sie Freude daran haben, diskutieren Sie Erweiterungen:
Was passiert, wenn Kiosk A und C demselben Spieler gehören?
Was passiert, wenn Kiosk B und C demselben Spieler gehören?
Was passiert, wenn Kiosk A und B demselben Spieler gehören?

Aufgabe: Wenn Sie programmieren, dann können Sie die einfachen, aber lästig-länglichen Aufzählungen einem Computer übertragen.

Tipp: Programmieren Sie so am besten gleich das allgemeinere Problem für einen Strand der Länge ℓ und k Kiosklizenzen, wobei $1 \leq k \leq \ell$ gelte, oder allgemein einen Graphen mit Kantenlängen und Eckengewichten.

Herausforderung: Erweitern Sie dies zu Koalitionen, wobei sich die Kioske in feste Gruppen einteilen, so wie die Filialen einer Kette. Denkbar sind zwei Spieler, die abwechselnd ihre Kioske setzen.
Kniffliger: Ein Losverfahren entscheidet, wer als nächster setzt.

Ein Modell, viele Anwendungen

Es geht in der Spieltheorie einerseits um konkrete Spiele und Strategien, um explizite Probleme und präzise Lösungen, um rationales Handeln, empirisch notgedrungen ebenso um begrenzt rationales Verhalten. Auf präzise Fragen erhoffen wir uns ebenso präzise Antworten.

Andererseits geht es auch um gemeinsame Muster und Mechanismen. Wenn Alice und Bob einen Kuchen oder ein Erbe teilen, dann beschreibt das im Prinzip auch allgemeine Teilungs- und Verhandlungsprobleme. Die Details sind verschieden, aber die Mechanismen sind ähnlich.

Die hier untersuchten Spiele sind stark vereinfacht, manchmal lächerlich, oft genug übertrieben simpel, doch sie treffen häufig einen wahren Kern. Solch konkrete Beispiele benennen und repräsentieren typische Muster. Ihre Einfachheit zeigt den Problemkern besonders klar und deutlich.

In konkreten Anwendungen müssen wir genaue Daten berücksichtigen, es gibt viel mehr Wenn-und-Aber, und all das ist auch gut und richtig so. Dennoch: Nach Sichtung und Abwägung aller Details, stellt sich in erster Näherung häufig genug ein einfaches Muster als wesentlich heraus.

Ein Modell, viele Anwendungen

Das Strandkiosk-Problem ist eine schöne kombinatorische Aufgabe. Sie steht hier stellvertretend für ähnliche Spiele, allgemein für Konflikte um eine räumliche Marktaufteilung, Konkurrenz um Marktanteile, etc. Der Kampf um den Strand kann auch noch anderes darstellen!

Denken Sie zum Beispiel an ein politisches Spektrum; die verbreitete Sprechweise von „links“ und „rechts“ ist eine hilfreiche Vereinfachung. Wir gehen davon aus, dass Wähler über das Spektrum verteilt sind und immer genau die Partei wählen, die ihrer Position am nächsten liegt.

Wenn es nur eine Partei A gibt, wie positioniert sie sich im Spektrum? Nun, das ist eigentlich egal, da sie ohnehin alle Wählerstimmen erhält. Genau dies ist in Ein-Parteien-Staaten tatsächlich zu beobachten.

Wenn es aber zwei Parteien A und B gibt, wie positioniert sich die erste? Genau dieses Problem haben wir oben gelöst! Tatsächlich beobachten wir in der politischen Debatte den Kampf um die „Mitte der Gesellschaft“. Gibt es weitere Parteien C,D,..., so entflammen zudem Flügelkämpfe. Jetzt wissen Sie genauer, warum das strategisch unvermeidlich ist.

Ein Modell, viele Anwendungen

Moment mal, können wir das banale Strandkiosk-Problem ernsthaft vergleichen mit hochkomplizierten parteipolitischen Strategien? Genau genommen natürlich nicht, aber grob gesagt schon.

Das ist die Stärke und zugleich die Begrenzung abstrakter Modelle: Sie treffen einen Kern des Problems, sie sind einfach und übersichtlich und leicht zu verstehen, sie taugen wunderbar als erste Näherung. Sie dienen als Ausgangspunkt und Orientierung für Anwendungen.

Für eine genauere Analyse im konkreten Einzelfall dürfen wir natürlich nicht stur bei dieser Grundidee verharren, sondern müssen wesentlich weiter gehen und genauer hinschauen. Im obigen Parteienbeispiel:

- Die politische Landschaft ist heute nicht (mehr) eindimensional.
- Das Wählerverhalten ist nicht (mehr) ganz so einfach vorhersehbar.
- Der Kampf um den linken / rechten Rand ist ein heikler Balanceakt.

Daher müssen wir unser Modell weiter verfeinern und kalibrieren durch genauere Daten. Auch begrenzt rationales Verhalten ist zu erwarten, dies untersucht die empirische Spieltheorie und Verhaltensökonomik.

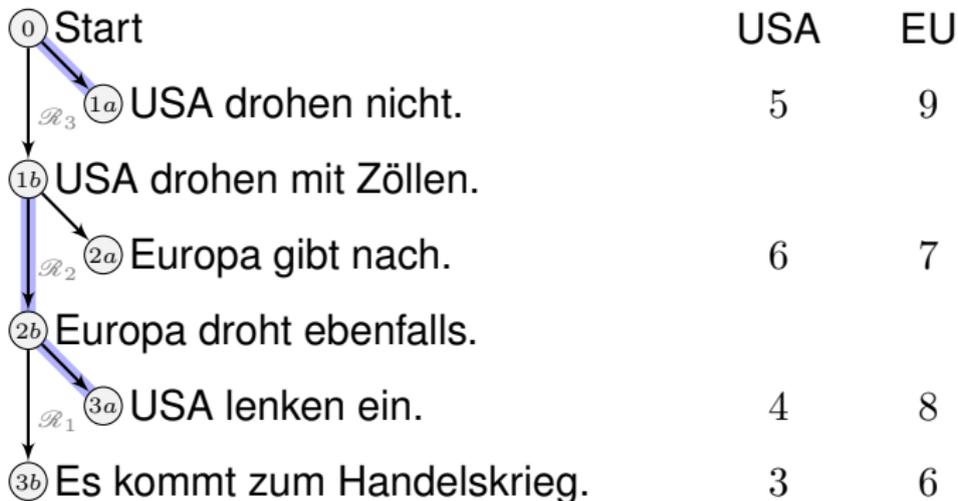
Ein Modell, viele Anwendungen

Ökonomische Modelle können uns gute grundlegende Einsichten über komplizierte Situationen vermitteln, Geschichten erzählen, dafür sind sie großartig. Aber wie benutzt man Modelle richtig?

(John Kay im Interview, Die Zeit 25. Juli 2019)

Wir werden dieses bemerkenswerte Phänomen noch oft beobachten: Selbst einfache Spiele können den wahren Kern eines Konflikts treffen. Physiker sprechen hier traditionell nüchtern von der **ersten Näherung**, die bei Bedarf durch die zweite, dritte, . . . Näherung verfeinert wird. Das **Modell**, das wir von der **Realität** entwerfen, hilft und leitet uns, doch niemals sollten wir naiv das Modell für die Wirklichkeit halten. Von dieser ersten Näherung ausgehend können wir unser Modell je nach Bedarf verfeinern und konkreten Gegebenheiten anpassen. Die Wirklichkeit ist komplizierter als sie auf den ersten Blick scheint. Dies erfordert intellektuelle Redlichkeit und mathematische Sorgfalt. Das spieltheoretische Modell dient als Grundlage. Selbst wo es versagt, ist es der Maßstab für die Abweichung von Prognose und Beobachtung.

Ir/Rational verhandeln: drohen oder nachgeben?



Aufgabe: Was wird passieren? rational? irrational? Wie erklären und bewerten Sie Trumps explizite Doktrin: „We have to be unpredictable.“ Kann es helfen, irrational zu *sein*? oder dafür *gehalten* zu werden?

Lösung: \mathcal{R}_0 : Jeder kennt und maximiert sein Ergebnis (wie gezeigt).
 \mathcal{R}_1 : Vor einem Handelskrieg lenken die USA im 3. Zug ein (vorteilhaft).
 \mathcal{R}_2 : Die EU weiß dies, daher wird sie im 2. Zug drohen (vorteilhaft).
 \mathcal{R}_3 : Die USA wissen dies, also werden sie im 1. Zug nicht drohen.

Ir/Rational verhandeln: drohen oder nachgeben?

Die Zahlen rechts bewerten jeden der möglichen Ausgänge für die USA und die EU auf einer (fiktiven) Werteskala. Wir denken an eine geeignete Gewichtung aus wirtschaftlichem Ertrag, politischem Ansehen, etc.

⚠ Solche Zahlen sind schwer zu ermitteln und sind oft umstritten. Wir nehmen sie für unser Modell als gegeben an und analysieren die Situation auf dieser Grundlage. Andere Kalibrierungen sind möglich.

⚠ Unsere Analyse benötigt alle Voraussetzungen zur Rationalität.

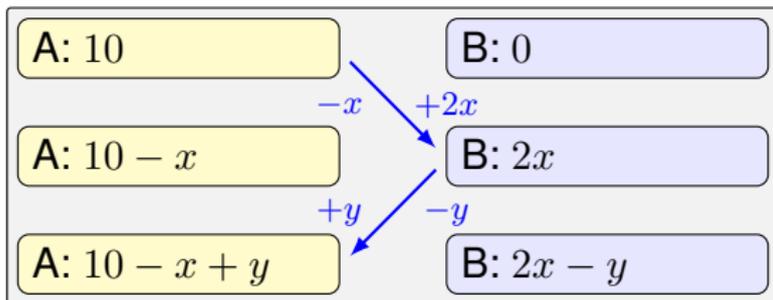
\mathcal{R}_1 : Sind die USA irrational, so könnten sie sich im 3. Zug für einen Handelskrieg entscheiden, obwohl dies zu ihrem Nachteil wäre. Das kann an einer falschen Einschätzung der Situation liegen, anderen Bewertungen, oder allgemein an mangelnder Rationalität.

\mathcal{R}_2 : Im 2. Zug muss die EU daher die Rationalität der USA einschätzen. Gegen einen Wahnsinnigen wäre es tatsächlich besser einzulenken!

\mathcal{R}_3 : Im 1. Zug hätten die USA also Interesse daran, für wahnsinnig gehalten zu werden: Das entspricht einem Bluff. Nur dann wäre es rational, mit einer Drohung die Eskalation überhaupt erst einzuleiten.

Nochmal unser Experiment: „Hin-und-Rück“

Im Lichte dieser Erkenntnisse spielen wir erneut „Hin-und-Rück“.



Aufgabe: Maximieren Sie Ihre Erträge bei diesem Spiel!
 Wie gelingt das rational? für Spieler B? für Spieler A?

Sie haben nun Präzisierungen zur Rationalität und **Spielerfahrung**, vor allem wissen Sie jetzt, wie die anderen sich verhalten (haben).
 Versuchen Sie im zweiten Durchgang, Ihre Erträge zu maximieren!

Verhaltensökonomik [*behavioral economics*] untersucht menschliches Verhalten, speziell die Abweichung zwischen Empirie / Experiment und Theorie / Prognose. (en.wikipedia.org/wiki/Behavioral_economics)

Nochmal unser Experiment: „Hin-und-Rück“

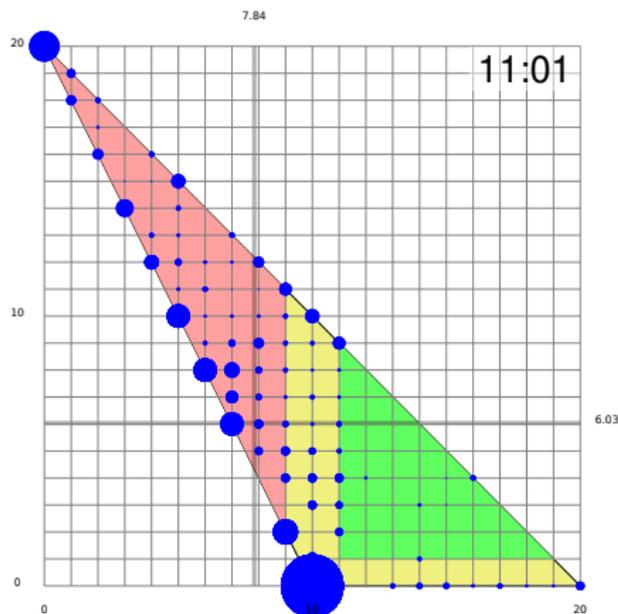
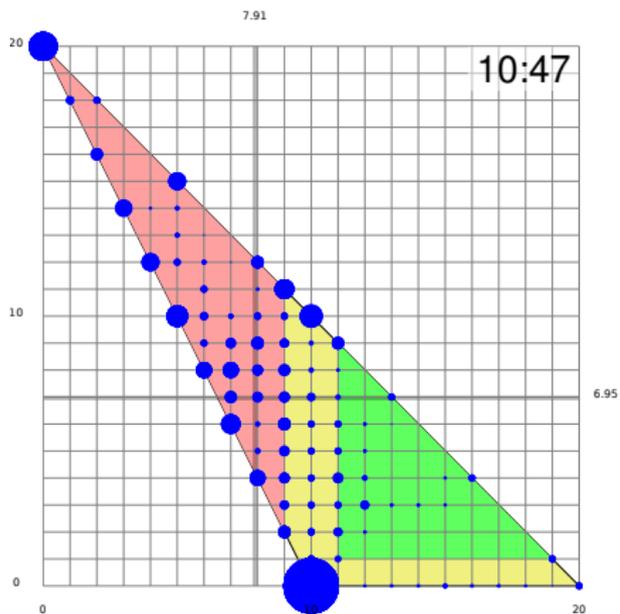
Dieses Experiment ist für alle Teilnehmer zunächst nur ein Spiel. Zugleich ist es auch ein **Messinstrument sozialer Interaktion**. Die empirischen Ergebnisse sind lehrreiche Messwerte: Manche Teilnehmer verhalten sich eher egoistisch, andere eher altruistisch.

Was genau die Spielerpopulation tun wird, lässt sich kaum vorhersagen, sondern nur experimentell messen. Die Auswertung zeigt ein Abbild unserer (kleinen) Gesellschaft und misst das gegenseitige Vertrauen. Diese Information benötigen / schätzen rationale Spieler bei ihrer Wahl.

Kaum jemand spielt vollkommen rational, und das ist für alle vorteilhaft: Im Durchschnitt zahlt sich das Wagnis der Kooperation tatsächlich aus! Wir werden später für wiederholte Spiele erklären, wie sich kooperatives Verhalten langfristig begründen lässt, siehe Nash Folk Theorem K2E.

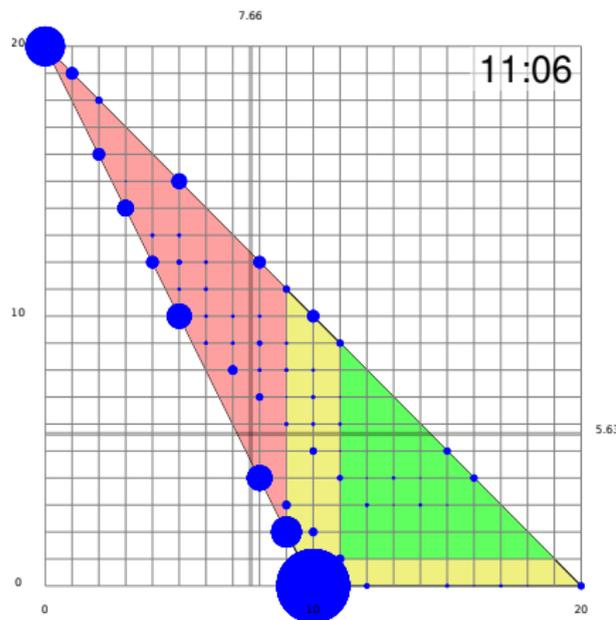
Hier jedoch wird das Spiel nur einmal gespielt, oder bei mehrfachem Spiel immer neue Spieler ausgelost. Die beobachtete Kooperation ist hier nicht rational. Sie beruht vermutlich auf begrenzter Rationalität sowie der Trägheit unserer Verhaltensmuster und sozialen Normen.

Unser Experiment „Hin-und-Rück“



Momentaufnahmen der Studentenpopulation vom 10. April 2018.
Die Graphiken zeigen alle Spielergebnisse für Spieler A und B.

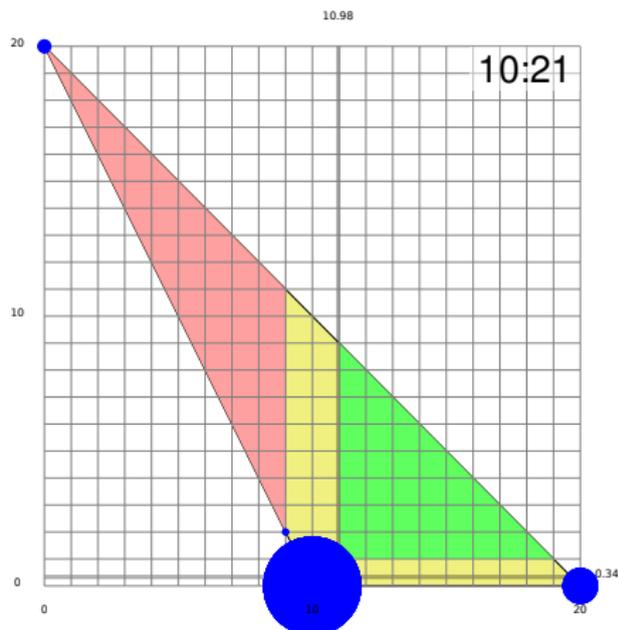
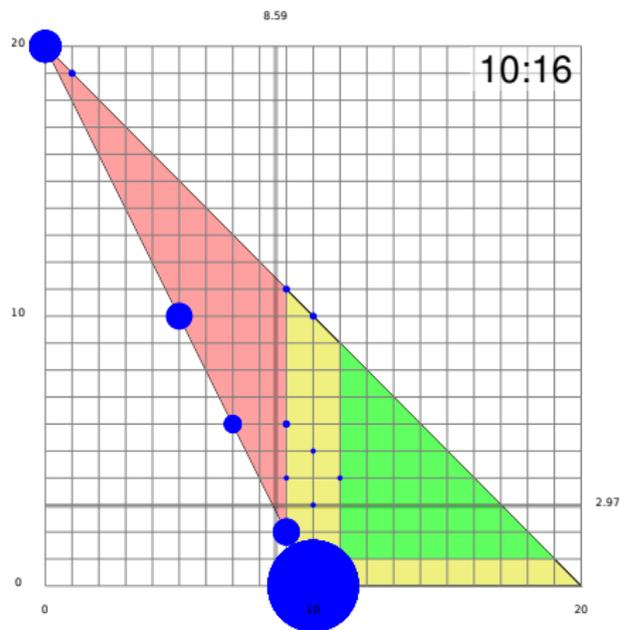
Unser Experiment „Hin-und-Rück“



Die Graphiken zeigen deutlich eine Entwicklung, anfangs zaghaft, dann beschleunigt. Die Spieler erkennen schnell (durch empirische Erfahrung oder mathematische Analyse), dass sich Kooperation für B hier nicht lohnt. Im nächsten Schritt erkennen sie, dass sich Kooperation dann auch für A nicht lohnt. Das Spielverhalten durchläuft so eine Evolution und steuert auf ein Gleichgewicht zu.

Momentaufnahmen der Studentenspopulation vom 10. April 2018.
Die Graphiken zeigen alle Spielergebnisse für Spieler A und B.

Unser Experiment „Hin-und-Rück“



Momentaufnahmen der Studentenpopulation vom 24. April 2018.
Durch Erfahrung (und Vorlesung?) ändert sich das Spielverhalten.

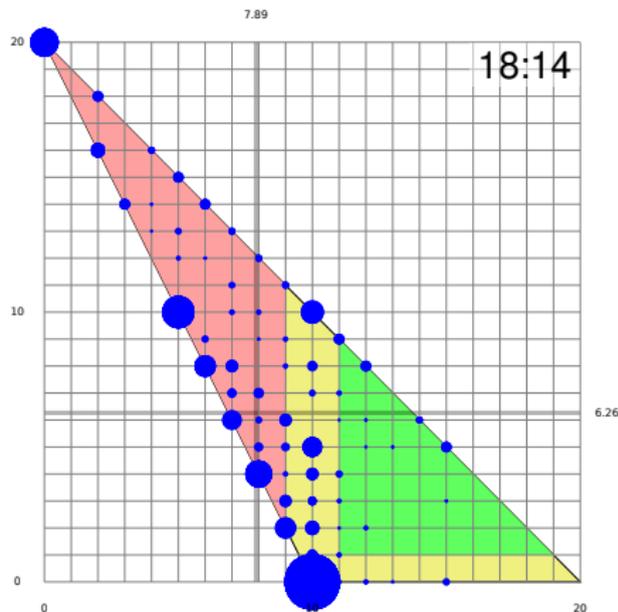
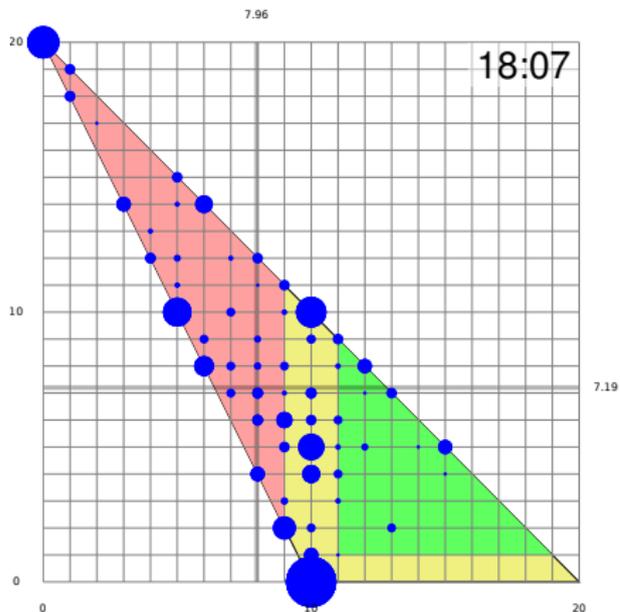
Unser Experiment „Hin-und-Rück“

Die Daten wurden nicht unter kontrollierten Laborbedingungen erhoben, dennoch sind sie überaus interessant: Es ist unser eigenes Verhalten! Durch zunehmende praktische Erfahrung und theoretische Kenntnisse verbessert jede Spieler:in ihre individuelle Strategie. Insgesamt nehmen Egoist:innen zu und die Altruist:innen ab, und der Gesamtertrag sinkt!

Die trickreichen Regeln belohnen nicht Kooperation, sondern Egoismus. Dieses Spiel provoziert ein berühmtes Paradox: Jeder einzelne Spieler versucht rational, seinen Profit zu maximieren. Die Gesellschaft wird im Gesamtbild egoistischer, das gegenseitige Vertrauen sinkt, damit auch der Gesamtertrag. Lokale Maximierung führt in ein globales Minimum.

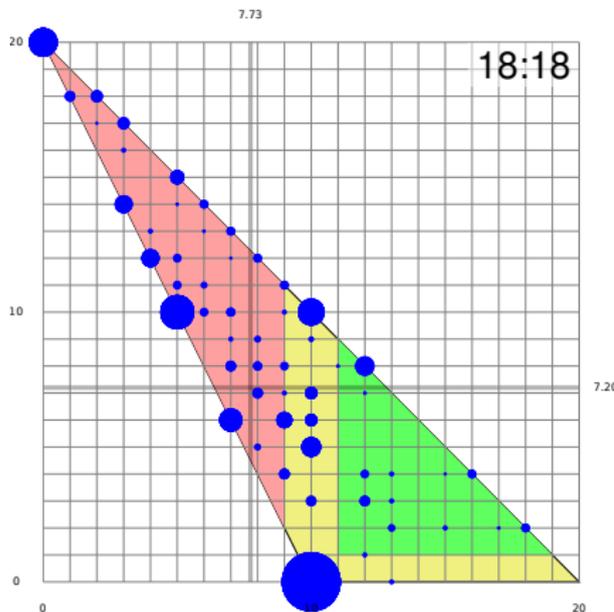
Dem einen oder der anderen wird dieses Ergebnis sehr missfallen, es mag sogar schockieren: Obwohl Kooperation möglich ist und zu beiderseitigem Nutzen wäre, werden die Spieler immer egoistischer. Das liegt daran, dass Egoismus belohnt und Altruismus bestraft wird. Wir werden später für wiederholte Spiele erklären, wie sich kooperatives Verhalten langfristig begründen lässt, siehe Nash Folk Theorem K2E.

Unser Experiment „Hin-und-Rück“



Momentaufnahmen der Teilnehmerpopulation vom 08. Juli 2019.
Die Graphiken zeigen alle Spielergebnisse für Spieler A und B.

Unser Experiment „Hin-und-Rück“

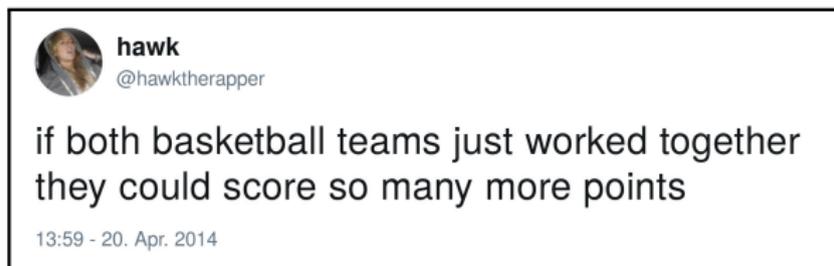


Der zweite Datensatz zeigt eine Abendveranstaltung mit Vortrag und Diskussion der Gruppe reason[Ing.] zum Thema Spieltheorie und Ethik (etwa 50 Anwesende, 40 Spieler). Nach zwei Testrunden wurde in der dritten um echtes Geld gespielt. Die so angekündigte Verschärfung hat das Spielverhalten kaum beeinflusst. Das Verhalten ist ähnlich wie oben, die Entwicklung deutlich langsamer.

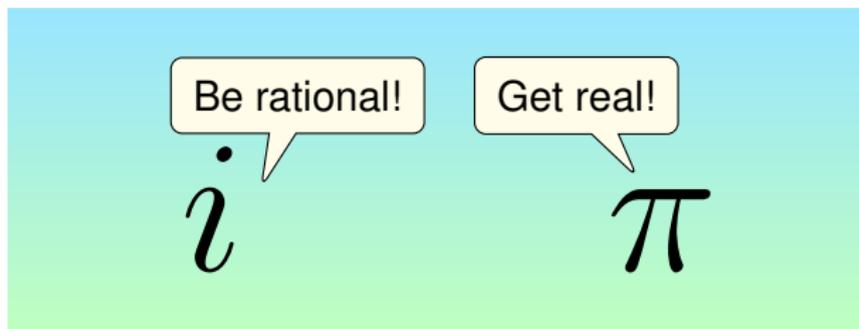
Momentaufnahmen der Teilnehmerpopulation vom 08. Juli 2019.
Die Graphiken zeigen alle Spielergebnisse für Spieler A und B.

Ratio vs Moral?

Kooperation ist vielleicht wünschenswert, aber nicht immer möglich.



Rationalität ist vielleicht wünschenswert, aber nicht immer möglich.



Schnelles Denken, langsames Denken

Ist moralisches Verhalten naiv? Ist Nutzenmaximierung unmoralisch?
Welche Sichtweise beschreibt das beobachtete Verhalten besser?
Wer hat denn nun Recht: Instinkt oder Kalkül? Ratio oder Moral?

Beide! Am Anfang sehen wir das empfundene moralische Verhalten, auf lange Sicht setzt sich jedoch das rationale Verhalten durch.

Thinking, fast and slow von Daniel Kahneman, Wirtschaftsnobelpreis 2002, unterscheidet zwei verschiedene Arbeitsweisen unseres Gehirns:

- 1 Schnell, automatisch, immer aktiv, emotional, stereotyp, unbewusst
- 2 Langsam, anstrengend, selten aktiv, logisch, berechnend, bewusst

Ihre genetischen Instinkte, soziale Erziehung und eigene Erfahrung sind Ihre ersten und oft einzigen Ratgeber: Sie folgen Ihrem Bauchgefühl, da Sie keine genaue Information haben oder keine Zeit, sie auszuwerten.

Ihr Verstand braucht wesentlich länger, um zu einem Urteil zu kommen. Das lohnt sich, wenn Sie die Muße haben und das Ziel wichtig genug ist. In unserem Experiment sehen wir vermutlich genau diesen Übergang!

Theorie und Experiment

Das Standardmodell der Spieltheorie geht davon aus, dass alle Spieler rational sind. Dies nennt man auch **Homo oeconomicus** und meint damit allgemein einen rationalen Akteur oder Nutzenmaximierer.

Die Vorhersagen der Theorie kann man in Experimenten überprüfen: In einigen Experimenten stellt sich recht genau das prognostizierte Gleichgewicht ein (eventuell erst nach mehreren Wiederholungen), in anderen hingegen nicht (oder noch nicht, allzu langsame Konvergenz).

Es gibt dabei wie in allen Wissenschaften grundsätzlich zwei Arten von Experimenten: passiv-beobachtend und aktiv-kontrollierend.

Feldstudien untersuchen echte Daten aus realen Situationen (etwa Auktionen, Märkte, Verhandlungen). **Vorteile:** Echte Daten aus realen Situationen. Die Erhebung der Daten kann schwierig sein, sie wird vereinfacht, falls die Interaktion ohnehin online stattfindet. **Nachteile:** Die reale Situation ist oft kompliziert und die Struktur des Spiels nicht klar definiert. Viele Einflussgrößen können nicht kontrolliert werden; sie beeinflussen die Ergebnisse, sind aber unbekannt oder unzugänglich.

Laborexperimente lassen Versuchspersonen im Labor gegeneinander spielen. **Vorteile:** Das Spiel ist genau definiert und kontrolliert (Regeln, Kommunikation, Auszahlungen, Vorwissen, Framing, Randomisierung). Durch geschickt konstruierte Spiele können Fragestellungen gezielt untersucht und Hypothesen getestet werden. **Nachteile:** Die Situation ist künstlich, das beobachtete Verhalten nur eingeschränkt übertragbar. Meist wird nur um kleine Beträge gespielt, die Nutzenoptimierung ist dadurch weniger ausgeprägt, die Skalierung vermutlich problematisch. Manchmal wollen Teilnehmer nur spielen (sic!), selbst experimentieren oder ihren Spaß haben, den Spielleiter beeindrucken oder vermuteten Erwartungen ent/widersprechen (wie Fairness, Rationalität, etc).

Trotz dieser Schwierigkeiten und methodischen Herausforderungen ist die experimentelle Spieltheorie überaus erfolgreich. Verhaltensökonomik [*behavioural economics*] ist für viele Unternehmen ein zentrales Thema: Wenn sich Kunden schon nicht rational verhalten, so will man dennoch vorhersagen können, wie sie sich verhalten: **predictable irrationality**.

„Dieser Zustand ist unbefriedigend.“, beklagte eine Studentin enttäuscht. Ja, sicher, wie immer ist die Wirklichkeit komplizierter als die Theorie. Ich sehe diese erste (schockierende) Einsicht als Erfolg: Wir haben den Begriff der Rationalität präzisiert und sogleich experimentell getestet. Wir haben in kurzer Zeit und mit wenig Aufwand bereits viel gelernt. Rationale Spieler müssen die Irrationalität ihrer Mitspieler einschätzen. Selbst wenn sie selbst vollkommen rational sind, so wählen sie doch Ihre Strategie abhängig davon, ob sie gegen einen unfehlbaren Computer spielen oder eine bunt gemischte Gruppe Ihrer Mitmenschen, wie oben. Es geht hier also um Rationalität zweiter Stufe (im Sinne von A2A).

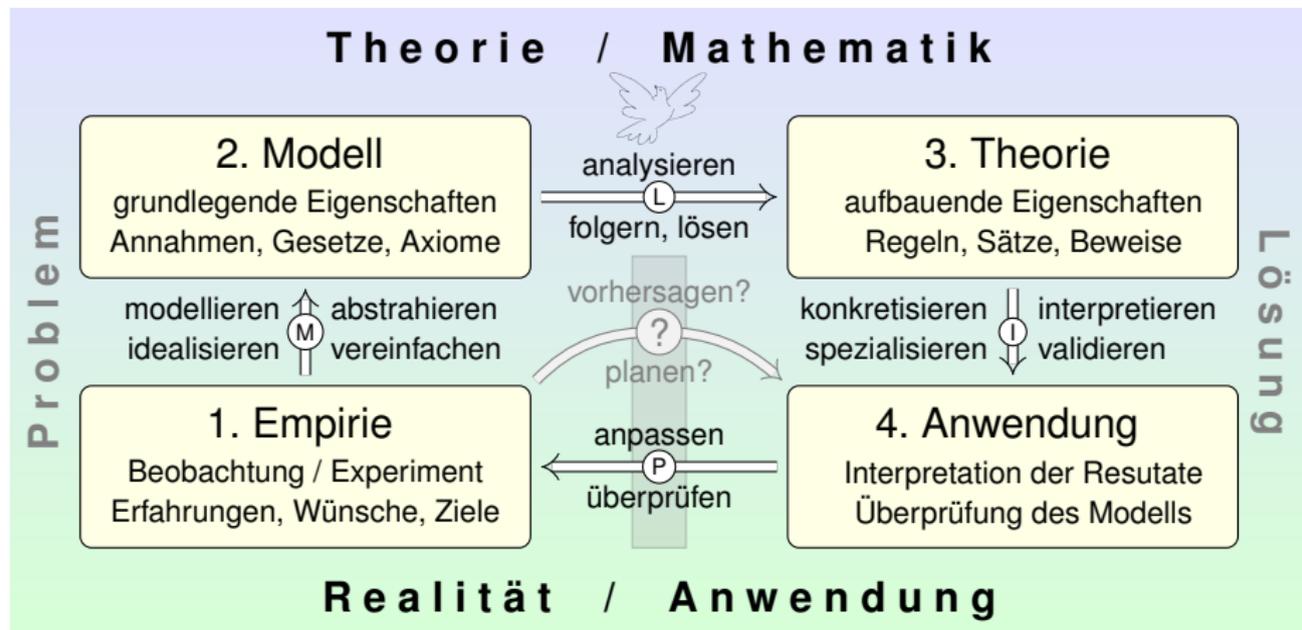
Ich bemühe mich in meinem Vortrag um eine ehrliche Darstellung, daher präsentiere ich zur Rationalität nicht nur Erklärungen und Anwendungen, sondern skizziere zugleich ihre Grenzen. Diese sind oft eng gesteckt. Diese Dialektik der Un/Vernunft ist erfahrungsgemäß ein starker Impuls für viele Zuhörer. Mein improvisiertes Experiment dürfen interessierte Teilnehmer gerne verbessern: Das ist ein ehrenwertes, lohnendes Ziel!

„Das ist unwissenschaftlich.“, kritisierte ein Student meinen Versuch. Ja, zugegeben, es ist eher lustiges Partyspiel als seriöses Experiment. Ich denke, es trifft einen wahren Kern; das ist zunächst nur eine These. Es dient als didaktische Illustration und eindrücklicher Anstoß, nicht als wissenschaftliche Dokumentation und Ergebnis. Sollen wir deshalb auf gemeinsames Spiel und persönliche Erfahrung verzichten? Keinesfalls!

„Der Begriff *Rationalität* wird hier zu eng und einseitig gefasst.“ Ja, auch das ist richtig. Viele Teilnehmer haben zur Rationalität unterschiedliches Vorwissen, Intuition oder Ansichten. Die Definition präzisiert den Begriff als bequeme Zusammenfassung. Das Wort selbst ist nur eine hilfreiche Abkürzung, es ist nur ein Platzhalter und ansonsten willkürlich ersetzbar. Wichtig ist nicht das Wort, sondern seine Bedeutung: Die Definition präzisiert und fixiert den Sinn, den wir für das Folgende vereinbaren. Sie dürfen gerne anderer Meinung sein, doch zum Zwecke unserer Diskussion müssen wir den Dingen einen eindeutigen Namen geben, um darüber sprechen zu können und uns nicht ewig im Kreise zu drehen.

Wozu dient Mathematik?

Alles Leben ist Problemlösen. (Karl Popper)



Mathematik untersucht sowohl abstrakte Strukturen als auch konkrete Anwendungen. Dies sind keine Gegensätze, sondern sie ergänzen sich!

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant)

Wozu dient Mathematik?

Wir beginnen mit der **Empirie**, also konkreten **Beobachtungen** und praktischen **Erfahrungen**. Hieran erkennen wir erste **Probleme** und formulieren unsere **Ziele**: Wir wollen die vorliegenden Probleme lösen!

Wenn wir bereits eine mögliche Lösung vorliegen haben oder zumindest vermuten, dann können wir sie **überprüfen** und soweit nötig **anpassen**. (Tradition, Erfahrung, Ausbildung, Anleitung, Nachahmung, Erklärvideo)

Meist kennen wir jedoch noch gar keine Lösung. Wir könnten uns durch Versuch-und-Irrtum vortasten, doch blindes Herumprobieren kostet Zeit, oft dauert es zu lange, ist zu aufwändig, gefährlich oder gar unmöglich.

Besser wir gehen **planvoll** vor und suchen **systematisch** nach einer Lösung, oder gar nach allen Lösungen, um dann die beste auszuwählen.

Das ist der **Nutzen der Theorie**: Sie erweitert unseren Werkzeugkasten, wo bloßes Probieren nicht genügt. Theorie und Anwendung ergänzen sich: Proben sind weiterhin gut und richtig, doch erst die Theorie liefert neue Ansätze, die sich lohnen auszuprobieren. Die Trefferquote steigt.

Probieren geht über studieren? **Studieren erweitert probieren!**

Ist Spieltheorie deskriptiv oder normativ?

Modelle können **deskriptiv**, aber auch **normativ** eingesetzt werden. Deskriptiv: beschreibend (Kettenlinie), erklärend (Planetenbewegung), vorhersagend (Wetterprognose). Normativ: vorschreibend (Bauplan), planend (Raumsonde), gesetzgebend (Umwelt- und Klimaschutz).

Das Kiosk-Problem haben wir durch systematische Untersuchung aller Fälle gelöst. Bei drei Spielern erfordert dies $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ Fälle; hier sind Systematik und Sorgfalt unbedingt erforderlich, um keinen Fall zu vergessen oder falsch auszuwerten. Das ist mühsam, aber es lohnt sich!

Diese Genauigkeit ist typisch für wissenschaftliche Vorgehensweise. Logik und Systematik, Ehrlichkeit und Sorgfalt sind die grundlegenden Techniken der Mathematik — und jeder ernsthaften Untersuchung.

Dieses Anwendungsproblem ist vereinfacht, doch halbwegs realistisch. Die Analyse gibt einen klaren Ratschlag, gar eine Handlungsanweisung: Bei drei Lizenzen sollte der erste Platz 8 wählen. Das ist keineswegs offensichtlich, sogar eher überraschend. Hier ist die Theorie normativ. Entspricht dies den Beobachtungen? Hier kommt die Empirie ins Spiel!

Ist Spieltheorie deskriptiv oder normativ?

Spieltheorie kann nicht nur normativ, sondern auch deskriptiv genutzt werden, um beobachtetes Verhalten zu beschreiben und zu erklären. Hier ist unser Experiment „Hin-und-Rück“ lehrreich und überraschend!

Die Theorie untersucht wie immer zunächst das rationale Verhalten.

R_1 : Spieler B schickt nichts zurück. R_2 : Spieler A schickt nichts hin.

Das beobachtete Verhalten sieht jedoch ganz anders aus! Hierzu ist entscheidend, ehrliche und ausgeklügelte Experimente durchzuführen.

Wie ist die Abweichung zu erklären? Einerseits gehen die Spieler nicht streng rational vor, etwa weil die Zeit oder der Wille für eine genauere Analyse fehlt, oder weil Überzeugungen von Moral und Gerechtigkeit mitschwingen. Eine verbesserte Theorie sollte dies berücksichtigen!

Andererseits können wir das Experiment verbessern und erweitern. Durch wiederholtes Spielen gewinnen die Teilnehmer an Erfahrung: Probieren ergänzt studieren! Das beobachtete Verhalten nähert sich dann tatsächlich der theoretischen Vorhersage. Unsere Theorie macht also doch zutreffende Vorhersagen, aber auf etwas subtilere Weise.

Wo wird die Spieltheorie genutzt und angewendet?

Die Spieltheorie ist kaum achtzig Jahre alt, sie wächst rasant weiter und entfaltet einen großen Einfluss. Sie wird nahezu überall angewendet, zumeist interdisziplinär, wie unsere ersten Beispiele erahnen lassen.

Besonders naheliegend sind ökonomische Anwendungen:

- Management (Unternehmensstrategien, Optimierung, Anreize)
- Märkte (Konkurrenz, Marktdesign, In/Effizienz, De/Regulierung)
- Auktionen (effiziente Zuteilung von Ressourcen, faire Teilung)
- Kontrollinstanzen (Wettbewerbsschutz, Verbraucherschutz)

Der Übergang zur Politik ist dabei fließend:

- Wirtschaftspolitik (Mechanismen, Kartellgesetze, Oligopoltheorie)
- Wettbewerbspolitik (internationale Handelsbeziehungen, Zölle)
- Geldpolitik (Inflation, Stabilität, Regulation, Finanzkrisen)
- Sozialpolitik (Steuern, Anreize, Ausgleich, Wohlfahrt)

Wo wird die Spieltheorie genutzt und angewendet?

Die Spieltheorie betrifft nahezu alle Bereiche der Politik. . .

- Kollektive Entscheidungen (Wahlsysteme, Abstimmungen)
- Gesetzgebung (kollektives Verhalten, Anreize und Verbote)
- Verhandlungen und Verträge, internationale Beziehungen
- Umweltschutz, ABC-Waffen-Verbot, Abrüstung, Kontrollen
- Internationale Konventionen, Menschenrechte, Kriege

. . . und des Zusammenlebens in unserer Gesellschaft:

- Experimentelle Wirtschaftsforschung (Verhaltensökonomik)
- Soziologie, Psychologie (Interaktion, Kommunikation, Social Media)
- Philosophie (Ir/Rationalität, Moral, Freiheit, Gesellschaftsvertrag)
- Pädagogik (Interaktion, Rahmen, Erziehung, Lerntheorie)
- Justiz (gesellschaftliche Normen, Strafgesetze)

Gesellschaftliche Interaktion ist angewandte Spieltheorie! Entweder direkt: Wie maximiere ich meinen Vorteil? (Optimierung) Oder indirekt: Welche Regeln führen zu welchem Verhalten? (Mechanismendesign)

Wo wird die Spieltheorie genutzt und angewendet?

Die Spieltheorie betrifft ebenso viele Grundlagenwissenschaften:

- Biologie und Medizin (Ko/Evolution von Genen, auch Memen)
- Systemtheorie (Interaktion, Selbstorganisation, Musterbildung)
- Quantenspiele (Spiele auf quantenmechanischen Trägern)
- Komplexitätstheorie (Lösung von Spielen, Gleichgewichte)
- Logik (Mengenlehre, Determiniertheit, Beweistheorie)

Besonders fruchtbar ist die Wechselwirkung mit der Informatik:

- Protokolle für strategische Agenten (Netzwerke, Sicherheit)
- Peer-to-Peer Systeme (Reputation, Feedback, Review)
- Kryptowährungen (gegenseitige Kontrolle, Incentives)
- Data Science, Künstliche Intelligenz, Machine Learning
- Distributed AI, Multiagent-Systems, Robotics, uvm.

Spieltheorie dient als theoretische Grundlage und praktisches Werkzeug, sowohl deskriptiv-erklärend als auch konstruktiv-angewandt.

Wo wird die Spieltheorie genutzt und angewendet?

Die Spieltheorie untersucht Situationen von Konflikt und Kooperation. Sie hilft, strategische Entscheidungssituationen besser zu verstehen. Sie ist damit extrem vielseitig anwendbar, denn fast alles ist ein Spiel, oder genauer gesagt: Fast alles lässt sich als ein Spiel betrachten. Sobald mehrere Entscheider (Individuen, Akteure, Spieler) gemeinsam ein Ergebnis erzielen, ist dies ein Anwendungsgebiet der Spieltheorie.

Es ist bemerkenswert, dass sich bei dieser enormen Spannweite der Anwendungen dennoch eine gemeinsame Theorie entwickeln lässt. Abstraktion ist die Kunst, Wesentliches von Unwesentlichem zu trennen. Denkökonomie: Daten ändern sich, doch Methoden bleiben bestehen.

Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung. Sie ist schön und gut: ästhetische Kunst und nützliches Handwerk. Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen! Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

Literatur: Einführungen

Es gibt viele gute Lehrbücher zur Spieltheorie. Die ersten bieten eine Einführung und motivieren, illustrieren, erläutern ausführlich. Weitere vertiefen anspruchsvolle Begriffe und mathematische Techniken. Die richtige Balance ist schwer zu finden und hängt vor allem von der Leserin ab!

Zur Orientierung und als Anregung habe ich für Sie einige empfehlenswerte Bücher ausgewählt. Meine Auswahl versucht den überaus vielfältigen Aspekten der Spieltheorie gerecht zu werden und durch Kommentare einzuordnen. Vielleicht kann Sie dies zum Schmökern anregen.

Ken Binmore:

Fun and Games. Heath & Co 1992

Für Freude am Lesen, leicht, klar, mit schönen Illustrationen, dagegen kaum Beweise. Geduld und Beharrlichkeit werden belohnt durch packende Geschichten und reichen Beispielfundus.

Robert Gibbons:

A Primer in Game Theory. Prentice Hall 1992

Knappe und intuitive doch umfassende Einführung, wenig Formalismus und wenig Vertiefung.

Avinash Dixit, Susan Skeath, David Reiley:

Games of Strategy. Norton & Co 2014

Eine freundliche und ausführliche Einführung, wortreich und formelarm.

Literatur: Einführungen

Die folgenden Einführungen sind wesentlich umfangreicher und ausführlicher. Die Darstellung führt von wortreich-formelarm (für ein allgemeines Publikum und WiWi-Einführungen) hin zur effizienten Nutzung des mathematischen Formalismus (wie im Mathe- und Informatikstudium). Beides hat seine Vorteile, je nach Publikum und Zielsetzung. Dosieren Sie selbst!

David M. Kreps:

A Course in Microeconomic Theory. Princeton University Press 1990

Eine gut motivierte Einführung, wenig Formalismus, dafür sehr ausführliche Erklärungen.

Martin J. Osborne:

An introduction to Game Theory. Oxford University Press 2009

Gut motivierte Einführung, diskutiert viele Beispiele, versucht Präzision mit wenig Mathematik.

Yoav Shoham, Kevin Leyton-Brown: *Multiagent systems: algorithmic, game-theoretic and logical foundation*. Cambridge University Press 2009

Eine Einführung zur Spieltheorie strategischer Agenten: Die Spieltheorie gehört nicht exklusiv den Wirtschaftswissenschaften, in den letzten Jahren boomt sie zunehmend in der Informatik. Die explosionsartige Entwicklung des Internets in den 1990ern erforderte spieltheoretische Methoden in der Informatik und startete eine anhaltende, höchst erfolgreiche Entwicklung.

Literatur: Grundlagen und Vertiefungen

Zielgruppe der folgenden Lehrwerke sind Studierende nach einer ersten Einführung, die ein solides mathematisches Verständnis mitbringen und dies in der Spieltheorie nutzen wollen. Die Darstellung wird dadurch effizienter und dichter: mehr Formeln, weniger Worte.

Steven Tadelis:

Game Theory, an Introduction. Princeton University Press 2013

Ein sehr gut strukturiertes Buch, sorgfältig geschrieben und schön zu lesen. Es eignet sich zum Einstieg und zum Selbststudium, liefert zugleich die mathematische Präzision zur Vertiefung.

Drew Fudenberg, Jean Tirole:

Game Theory. MIT Press 1991

Dieses Lehrbuch bietet eine gute Mischung aus motivierender Erläuterung und mathematischer Ausführung, Fallbeispielen und Übungsaufgaben. Es dient als Referenz und zur Vertiefung.

Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston, Jerry R. Green:

Microeconomic Theory. Oxford University Press 1995

Eine 1000seitige Bibel der Mikroökonomik. Die Theorie wird gründlich und formal dargestellt; dadurch eignet sich das Werk bestens für einen zweiten Durchgang und als Nachschlagewerk. Kapitel 7–9 und 21–23 behandeln Spieltheorie, nahtlos eingebettet in die Mikroökonomik.

Roger B. Myerson:

Game Theory, Analysis of Conflict. Harvard University Press 1997

Eine schön geschriebene Einführung, von den mathematischen Grundlagen der Nutzentheorie bis zu fortgeschrittenen Konzepten der Spieltheorie. Verbindet Motivation mit Sätzen und Beweisen.

Martin J. Osborne, Ariel Rubinstein:

A Course in Game Theory. MIT Press 1994

Viele Beispiele, bemüht um Gleichgewicht zwischen Intuition und Formalismus. Das Buch fordert Selbständigkeit: Viele Anwendungen und Ausführungen sind als Übungen formuliert.

Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy:

Winning Ways for Your Mathematical Plays. A K Peters 2001–2004

Gewinnen: Strategien für mathematische Spiele. Vieweg 1985–1986

John H. Conway: *On Numbers and Games.* A K Peters 2000

Aaron N. Siegel: *Combinatorial Game Theory.* AMS 2013

Die kombinatorische Spieltheorie ist ein riesiges, faszinierendes Gebiet, das wir hier nur streifen. Wer in diese Richtung abbiegt, findet sein Glück in den epischen Klassikern WW und ONAG. Den aktuellen Stand der Forschung in rigoroser Darstellung bietet Siegels CGT.

Literatur: Klassiker, alt und neu

John von Neumann, Oskar Morgenstern:

Theory of Games and Economic Behavior. Princeton Univ. Press 1944

Dieses Buch begründete die moderne Spieltheorie und ihre mathematische Untersuchung. Es ist immer noch interessant, aber nicht leicht zu lesen und daher nicht zum Einstieg empfohlen.

R. Duncan Luce, Howard Raiffa:

Games and Decisions. Wiley & Sons 1957, Dover Publications 2012

Eine sehr schöne und umsichtige Darstellung der Grundlagen aus den Anfängen der Spieltheorie, wunderbar geschrieben, wenig formal doch kristallklar. Auch heute noch hervorragend lesbar.

Thomas C. Schelling:

The Strategy of Conflict. Harvard University Press 1960

Der spätere Wirtschaftsnobelpreisträger des Jahres 2005 erklärt hier die Grundlagen für (nuklear-)strategisches Verhalten. Sein Buch zählt zu den einflussreichsten des 20. Jahrhunderts.

Daniel Kahneman:

Thinking, Fast and Slow. Farrar, Straus and Giroux 2011

Der Wirtschaftsnobelpreisträger des Jahres 2002 und Mitbegründer der Verhaltensökonomik erklärt seine psychologischen Arbeiten zu Heuristiken und Verzerrungen (*heuristics and biases*).

Literatur: Nachschlagewerke

Die Spieltheorie ist relativ jung, doch extrem vielseitig und interdisziplinär. Ihre Anwendungen und Vertiefungen entwickeln sich explosionsartig. Nachschlagewerke und Handbücher sind daher unverzichtbar für den Überblick. Wenn Sie sich schon etwas auskennen und nach neuen Ideen stöbern wollen, dann kann ich gut geschriebene Übersichtsartikel nur wärmstens empfehlen.

Robert J. Aumann, Sergiu Hart (eds):

Handbook of Game Theory 1–3. North Holland 1992–2002

Kenneth J. Arrow, Michael D. Intriligator (eds):

Handbook of Mathematical Economics 1–4. North Holland 1981–1991

Schließlich liegt der Schritt zur Informatik, Künstlichen Intelligenz und Maschinellen Lernen nahe: Jeder strategische Agent versucht sein Verhalten zu optimieren, also spielend zu lernen. Dieser Ansatz hat in den letzten Jahren zu spektakulären Erfolgen geführt und ist inzwischen in unserem Alltag angekommen. Dieser Trend wird sich in den nächsten Jahren weiter verstärken.

Noam Nisan, Tim Roughgarden, Éva Tardos, Vijay Vazirani (eds):

Algorithmic Game Theory. Cambridge University Press 2007

Stuart Russell, Peter Norvig: *Artificial Intelligence:*

A Modern Approach. Addison Wesley (3rd ed.) 2016

Wie lernen Sie erfolgreich Spieltheorie?

Jede ernsthafte Beschäftigung erfordert zunächst Interesse, Neugier, Offenheit für Probleme und sodann Kreativität, Sorgfalt, Hartnäckigkeit bei deren Lösung. Investieren Sie jede Woche die dafür nötige Zeit.

Arbeiten Sie jede Vorlesung nach. Lesen Sie dazu auch Bücher. Lernen und diskutieren Sie in Gruppen. Und wie immer gilt: Üben! Üben! Üben!

Von Anfang an präsentiere ich zahlreiche Bei-Spiele zur Anschauung; sie sollen zunächst motivieren, illustrieren und als Ausblick skizzieren, wie umfassend die Spieltheorie und ihre Anwendungen sein können.

Die mathematischen Begriffe und Methoden sind zunächst elementar, die ersten Schritte sind bereits mit guten Schulkenntnissen machbar. Wir bauen sie in den folgenden Kapitel schrittweise zu einer Theorie aus, und verwenden dabei zunehmend feinere Werkzeuge der Mathematik.

Wichtig und unverzichtbar ist daher, dass Sie das ganze Semester am Ball bleiben und wöchentlich die Vorlesung und die Übungen bearbeiten. Nur so können Sie Ihr Wissen erwerben und Ihr Können verfestigen, um in jeder Folgewoche darauf aufzubauen. Anders geht es nicht.

Wie lernen Sie erfolgreich Spieltheorie?

Diese Vorlesung Spieltheorie fördert Ihr kontinuierliches Mitdenken: Viele der Bei-Spiele sind so aufeinander aufgebaut, dass sie uns in den folgenden Kapiteln als hilfreiche Leitbilder und Prüfsteine dienen.

Die Phänomene sind zwar allesamt einfach, doch vielschichtig genug, um verschiedene Betrachtungen, Modellierungen und Verfeinerungen zuzulassen: Rationalität, dominante Strategien, Nash-Gleichgewichte, zeitlich-dynamische Struktur, teilspielperfekte Gleichgewichte, usw.

Die Wirklichkeit ist komplizierter als sie auf den ersten Blick scheint. Gerade deshalb lohnen sich mathematische Präzision und Sorgfalt. Das spieltheoretische Modell dient als Grundlage. Selbst wo es versagt, ist es der Maßstab für die Abweichung von Prognose und Beobachtung.

Erfahrungsgemäß provozieren schon erste einfache Versuche einer spieltheoretischen Modellierung lebhaft Diskussionen der Teilnehmer. Diese Auseinandersetzung führt häufig zu lehrreichem Widerspruch und im weiteren Verlauf dann zu einem besseren Verständnis.

Das ist gut und richtig so: Ihr Engagement ist wesentlich!