Spieltheorie und ökonomisches Verhalten

Die mathematische Analyse von
Konkurrenz und Kooperation

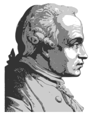
erkennen.
beweisen.
anwenden.

Prof. Dr. Michael Eisermann
zusammen mit Dr. Friederike Stoll
`eiserm.de/lehre/Spieltheorie`

Universität Stuttgart

Sommersemester 2025
Stand 16. Mai 2025

*Für die Mitteilung von Unklarheiten und Fehlern aller Art
sowie für Verbesserungsvorschläge bin ich stets dankbar!*



Habe Mut, dich deines eigenen
Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.
This is just the beginning.

Urheberrecht und Haftungsausschluss

Diese Unterlagen werden genutzt zur Veranstaltung *Spieltheorie und ökonomisches Verhalten.* Hierzu wesentlich beigetragen hat die langjährige Zusammenarbeit mit Dr. Friederike Stoll. Sie vermitteln einschlägiges Grundlagenwissen und zugehörige mathematische Werkzeuge und richten sich vornehmlich an Studierende der Mathematik und benachbarter Fächer.

Die Inhalte wurden vom Autor mit größter Sorgfalt für die Präsentation in der Lehre erstellt. Sie werden allein zu Lehrzwecken zur Verfügung gestellt, in der Hoffnung, dass sie zum Lernen und Üben nützen mögen, ohne jeden Anspruch auf Eignung zu irgendeinem anderen Zweck. Sie sind keine Handlungsanweisung oder Empfehlung. Nur eigenständiges Denken hilft!

Kunst und Wissenschaft, Forschung und Lehre sind frei. (GG Art. 5.3.1) Der Autor übernimmt keinerlei Gewähr für die angebotenen Informationen und Daten, deren Aktualität, Korrektheit, Vollständigkeit, Qualität oder irgendeine Nutzbarkeit außerhalb der Lehre. Haftungsansprüche für mögliche Schäden, materieller oder immaterieller Art, sind grundsätzlich ausgeschlossen.

Für Inhalte externer Quellen, insb. verlinkter Webseiten, ist stets deren Anbieter verantwortlich.

Vorwort zu diesen Notizen

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie.
Immanuel Kant (1724–1804)

Dies sind Unterlagen zur Veranstaltung *Spieltheorie und ökonomisches Verhalten*, die wir im Sommer 2018 erstmalig abhalten durften und für 2019/20, 2022, 2025, … kontinuierlich weiterentwickeln.

Vorlesung und Übungen richten sich an Studierende der Mathematik, oder allgemein an alle Interessierten, die vor mathemischen Methoden nicht zurückschrecken, sondern ihre ordnende Kraft zu schätzen wissen.

Spielerisch-experimentelle Aspekte kommen nicht zu kurz, so hoffen wir. Ebenso sind wir überzeugt, dass mathematische Modelle und Argumente, Sätze und Beweise, gerade hier Erklärung und Vervollständigung bieten. Der Dialog mit den Teilnehmer:innen bestimmt die jeweilige Dosierung.

Das Ziel dieser Veranstaltung ist hehr, aber unsere Möglichkeiten sind bescheiden. Wir möchten Ihr Interesse wecken, ja Ihre Begeisterung entfachen, damit Sie darüber hinaus gehen und selbstständig lernen. Literatur finden Sie am Ende dieser Einführung und in den Kapiteln.

Vorwort zu diesen Notizen

Es gibt nichts Gutes, außer man tut es.
Erich Kästner (1899–1974)

Spieltheorie bietet wunderbare Einsichten und ist oft erstaunlich direkt anwendbar in der Praxis. Hierzu sollen Sie zahlreiche Bei-Spiele selbst erfahren und dadurch verstehen. Um damit wirklich vertraut zu werden, sollen Sie regelmäßig spielen, sowohl empirisch als auch theoretisch, also spieltheoretische Fragen mathematisch formulieren und lösen.

Wir sind glücklich, und ein wenig stolz, Ihnen zu dieser Vorlesung auch gut betreute Übungen anbieten zu können. Das ist angesichts knapper Ressourcen leider keineswegs selbstverständlich, doch ganz wesentlich für Ihren Erfolg! Wenn Sie sich ernsthaft darauf einlassen, werden Sie viel Freude daran haben und manches Aha-Erlebnis. Möge es nützen!

Erkläre es mir, und ich werde es vergessen.
Zeige es mir, und ich werde mich erinnern.
Lass es mich tun, und ich werde es verstehen.
Konfuzius (551–497 v.u.Z.)

Sinn und Zweck Ihres Studiums: Schärfen Sie Ihr Werkzeug!

Alice trifft Bob, der sich mit stumpfer Axt abmüht, einen Baum zu fällen. „Schärf deine Axt! Dann gelingt dir deine Arbeit leichter.“, rät Alice ihm. Das weist Bob zurück: „Dazu fehlt mir die Zeit, ich muss Bäume fällen!“ Genau das ist Ihre Entscheidung: Planen Sie kurzfristig oder langfristig?

Verdammte Axt: früh investieren, lange profitieren!

Genau dazu studieren Sie: Hier schärfen Sie Ihre Denk-Werkzeuge, um effizient arbeiten zu können. Alice hat das verstanden. „Das Studium ist abstrakter Quatsch und völlig nutzlos für die Praxis.“ Wenn Bob so kurzfristig denkt, dann sollte er konsequent sein und nicht studieren.

Sie haben die Wahl, beide Alternativen sind gangbar. Manche möchten sich rasch in der viel gelobten „Praxis“ austoben und keine Zeit in die oft geschmähte „Theorie“ investieren. Selbst mit stumpfer Axt kann man Bäume fällen, mühsam zwar, doch für wenige kleine wird es reichen.

Die Kunst des Lernens, ganz allgemein des vorausschauenden Planens, ist die Balance zwischen sofortigem Nutzen und langfristiger Investition. Wenn Sie richtig studieren, erreichen Sie beides, sowohl langfristigen Nutzen durch Wissen und Können als auch Freude schon beim Lernen.

Das ist eine grundlegende Einsicht und vielfach bewährte Weisheit, so in dem lateinischen Motto *Festina lente*, übersetzt „Eile langsam!“, sinngemäß „Eile mit Weile!“. Jedes ernsthafte Vorhaben gelingt Ihnen am besten im richtigen Gleichgewicht zwischen zügig und sorgsam.

Verdammte Axt: früh investieren, lange profitieren!

Als Mahnung im Handwerk: *Measure twice, cut once!*
Schlechte Vorbereitung verschwendet Zeit und Ressourcen.
Als Motto der Navy Seals: *Slow is smooth, and smooth is fast!*
Gute Vorbereitung sorgt für reibungslose, effiziente Abläufe.

In seiner Fabel vom Hasen und der Schildkröte schreibt Jean de La Fontaine (1621–1695): *Rien ne sert de courir; il faut partir à point.*
Es nützt nichts zu rennen; man muss rechtzeitig starten.
Besonnenheit und Zielstrebigkeit setzen sich durch.

Was bedeutet das für Ihr Studium, speziell in dieser Veranstaltung? Anfangs fällt Ihnen die Anwendung vermutlich schwer. Jetzt wissen Sie, warum: Schärfen Sie Ihre Werkzeuge, lernen Sie Definitionen und Sätze, üben Sie Mathematik, das wirkt, so gelingen Ihnen die Anwendungen!

Manche lebt achtsam, anderer schimpft achtlos auf die „lästige Theorie“ und scheitert alsbald an allzu naiver Anwendung, getreu dem Slogan „Plane nicht, irre lieber!“. Manchmal geht das gut, meist leider nicht. *Respice finem: Was immer du tust, handele klug und bedenke das Ende!*

Verdammte Axt: früh investieren, lange profitieren!

Warum erzähle ich das? Die meisten Studierenden kommen an die Uni mit ihren eingefahrenen Gewohnheiten, manche gut und viele schlecht. Bitte studieren Sie selbstbewusst und selbstkritisch, legen Sie schlechte Gewohnheiten ab, erlernen Sie neue gute Gewohnheiten! Wir leiten Sie an und geben beste Praktiken weiter. Nehmen und wenden Sie dies an!

We must choose between what is easy and what is right.
Albus Dumbledore

Die Schule hat Ihnen herzlich wenig Mathematik zugetraut. Anfangs mag das gefallen, es ist ja so leicht! Doch dann wollten Sie sich entscheiden, ein anspruchsvolles Fach – mit Mathe! – zu studieren, und darauf hatte die Schule Sie in keinster Weise vorbereitet. Ihre Axt war leider stumpf!

Manch verlockende „Abkürzung“ ist letztlich Irrweg und Vergeudung. Manch vermeintlicher „Umweg“ erweist sich als zielführend und effizient. In dieser gut durchdachten Vorlesung und den zugehörigen Übungen machen wir Sie mit den nötigen, scharfen Werkzeugen vertraut und leiten Sie an zum fachgerechten Gebrauch. Diese Mühe lohnt sich!

Was ist und was soll die Spieltheorie?

Die Spieltheorie untersucht Konflikte, **Konkurrenz und Kooperation**: Diese entstehen regelmäßig zwischen strategisch handelnden Agenten, etwa Menschen, Unternehmen, Staaten oder künstlichen Intelligenzen. Hierzu entwickelt die Spieltheorie Modelle, **Begriffe und Methoden**; zu typischen Problemstellungen schlägt sie rationale Lösungen vor.

Sie beschreibt und erklärt **strategische Entscheidungssituationen**: Spieler antizipieren in ihrem Kalkül die Aktionen der Gegenspieler. Anders gesagt: Spieltheorie ist **interaktive Entscheidungstheorie**: Sobald mehrere Entscheider (Individuen, Akteure, Spieler) gemeinsam ein Ergebnis erzielen, ist dies ein Anwendungsgebiet der Spieltheorie.

Sie ist damit sehr **vielseitig anwendbar**, denn fast alles ist ein Spiel, oder genauer gesagt: Fast alles lässt sich als ein Spiel betrachten. Diese Sichtweise erweist sich häufig als erhellend und nützlich. Tatsächlich wird die Spieltheorie heute nahezu **überall angewendet**, neben ihrer Herkunft in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften zunehmend auch in der Informatik und der Evolutionsbiologie.

Was ist und was soll die Spieltheorie?

Jede **spieltheoretische Analyse** umfasst immer zwei Bestandteile:

- Das Spiel als formale Beschreibung der strategischen **Situation**: die Spieler, all ihre Handlungsoptionen und deren Konsequenzen. Die Spieltheorie hat hierfür eine reichhaltige Sprache entwickelt.
- Lösungen als Prognose oder Empfehlung für den **Spielverlauf**: idealerweise alle Lösungen des betrachteten Lösungskonzepts. Universelles Werkzeug ist der Begriff des (Nash–)Gleichgewichts.

Das Spiel definiert die **Regeln**, also die möglichen Aktionen und die zugehörigen Auszahlungen, aber noch nicht das Verhalten der Spieler. Das Lösungskonzept codiert Annahmen über das **Spielerverhalten**, insbesondere Nutzenmaximierung und un/beschränkte Rationalität.

Je nach Art des Spiels (statisch / dynamisch, deterministisch / zufällig, un/vollständig informiert, etc.) gibt es verschiedene **Lösungskonzepte**. In jedem Falle lohnt sich eine empirische Überprüfung bzw. Kalibrierung: Dies untersucht die **experimentelle Spieltheorie** / Verhaltensökonomik [*behavioural economics*] in Laborexperimenten und in Feldstudien.

Warum und wozu betreiben wir Spieltheorie?

Warum Spieltheorie? Zunächst einmal aus Neugier und aus Freude! Wie jede elegante, insbesondere mathematische Idee lässt sich auch die Spieltheorie um ihrer selbst willen erlernen, studieren, bewundern. Zudem ist Spieltheorie überaus vielseitig anwendbar...

Wozu Spieltheorie? Ihre Anwendungen sind überaus vielfältig in Politik (Wahlen, Gesetze, Anreize), Philosophie (Ir/Rationalität, Normen, Ethik), Biologie (Ko/Evolution von Genen und Memen), Ökonomie (Strategien, Optimierung, Gleichgewichte, Märkte, Mechanismen, Auktionen, ...), Sozialpolitik (Sicherung, Wohlfahrt, Gemeinwohl, Ausgleich), usw.

Eugene Wigners berühmte Weisheit zur **wundersamen Wirksamkeit** der Mathematik gilt ebenso für die Spieltheorie und ihre Anwendungen:

> *The enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is [...] bordering on the mysterious and there is no rational explanation for it. [...] The miracle of the appropriateness of the language of mathematics [...] is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research.*

Wie kommt die Mathematik zur Spieltheorie?

Mathematik ist Grundlage und Werkzeug aller modernen Technologie. Je nach Kenntnis und Nähe zum Thema mag dies überraschen.

Die Wechselwirkung zwischen Mathematik und Naturwissenschaften ist seit jeher extrem stark, gefolgt vom Ingenieurwesen, seit Ankunft der Computer auch zur Informatik, jüngst zur *künstlichen Intelligenz*.

Die Wechselwirkung mit den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften ist dagegen vergleichsweise schwach; prominente Ausnahmen hiervon sind statistische Methoden zur Erhebung und Auswertung von Daten, jüngst unter dem öffentlichkeitswirksamen Banner *Data Science* und *Big Data*.

Ebenso hat die mathematisch fundierte Spieltheorie seit etwa 1950 die Sicht- und Denkweisen in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften nachhaltig geprägt. Sie ist gereift und erprobt und anerkannt und gehört heute zum unverzichtbaren Standardwerkzeug der Mikroökonomik.

Die Spieltheorie kann (und wird) Ihnen viel Freude bereiten. Entgegen dem ersten Anschein ist sie aber nicht einfach, vor allem konzeptuell: Sie müssen grundlegende und raffinierte Ideen erst einmal verarbeiten.

Liturgie: Ablauf dieser Veranstaltung

Was erwarten / erwartet Sie in der Spieltheorie? schöne Mathematik? lehrreicher Spielspaß? perfekte Mischung? → `answergarden.ch/963641`

Spielpraxis — AngST *All fun and games*	Fr 14:00 – 15:30 *Optional, da zockst du!*	V57-7.530 „Spielhölle"
Vorlesung — KnaST *Blood, sweat, and tears*	Mi 11:30 – 13:00 Fr 9:45 – 11:15	V57.05 V57.04
Übung — ÜbST *Learning by doing (the math)*	Di 11:30 – 13:00 *Da guckst du nicht nur, da übst du!*	V57-7.530
Klausur — HaST *All is well that ends well.*	Sep / Okt 2025 Feb / Mrz 2026	C@mpus C@mpus

Come for the show, stay for the math!

Liturgie: Ablauf dieser Veranstaltung

Als wir die Veranstaltung zur Spieltheorie zum ersten Mal durchführten, stellte sich heraus, dass Teilnehmer unterschiedliche Ziele verfolgen:

- Einige kommen vor allem für den Spielspaß.
- Andere kommen für die schöne Mathematik.
- Manche kommen für die perfekte Mischung.

Die Teilnehmer hatten sehr verschiedene Präferenzen, aber wir nur ein gemeinsames Angebot: *One size fits all.* Diese Situation war nicht ideal.

Soweit unsere Marktforschung. Wir haben viel Zeit und Mühe investiert, wir haben nicht geruht und unser Premiumprodukt weiterentwickelt. Der Kampf um die beste Vorlesung ist hart. Die Konkurrenz schläft nicht.

Wäre es nicht wunderbar, wenn sich jede/r interessierte Studierende die Spieltheorie aussuchen könnte, die ihr/ihm am besten passt?

Für die einen purer Spielspaß, für die anderen schöne Mathematik, und für die Genießer die perfekte Mischung aus beidem.

Suchen Sie nicht länger, wir haben die Antwort!

Liturgie: Ablauf dieser Veranstaltung

Wir bieten Ihnen die Spieltheorie weiterhin in gewohnt bester Qualität auf dem Silbertablett, und jetzt sogar in zwei Geschmacksrichtungen:

- Als **knallharte, mathematische Spieltheorie** mit wöchentlich zwei Vorlesungen und einer Übung und der abschließenden Klausur: Die 9 Leistungspunkte für die Spieltheorie gibt es hier und nur hier.
- Als **spaßorientierte, angewandte Spieltheorie**: Auch hier können Sie viel gewinnen: Erfahrung und Erleuchtung, Süssigkeiten und echtes Geld. Aber erwarten sie nicht auch noch Leistungspunkte!

Die beiden Teile ergänzen sich, sind aber unabhängig. *Choose wisely!*

Die experimentelle Spieltheorie illustriert und motiviert durch zahlreiche konkrete Beispiele und manche überraschende empirische Erkenntnis. Idealerweise wollen Sie dann auch die Theorie dahinter verstehen.

Im mathematischen Teil erlernen Sie präzise Modelle und Methoden und nutzen diese dann selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ. Idealerweise wollen Sie diese Erkenntnisse dann testen und anwenden.

Liturgie: Ablauf dieser Veranstaltung

Die Klausur behandelt alle Themen und Techniken aus Vorlesung und Übung, der experimentelle Spielspaß wird dort natürlich nicht abgefragt.

> *Though this be madness, yet there is method in't.*
> [Ist dies schon Wahnsinn, so hat er doch Methode.]
> William Shakespeare (1564–1616), *Hamlet*

Wir feiern diese bahnbrechende Innovation mit einem neuen Branding: Der experimentelle Teil ist die angewandte Spieltheorie, kurz AngST. Die Vorlesung ist knallhart mathematische Spieltheorie, kurz KnaST.

Besonders stolz sind wir auf unsere berühmten wöchentlichen Übungen zur Spieltheorie, kurz ÜbST. „Krass! Da guckst du nicht nur, da übst du!" Die Klausur schließlich wird das Happy End zur Spieltheorie, kurz HaST.

Träumen Sie nicht schon lange von einer Veranstaltung namens AngST? Ist es nicht entwaffnend ehrlich, wenn Ihre Vorlesung KnaST heißt? Ist nicht Ihr ganzes Studium geprägt von ÜbST und HaST? Ihre Suche wird belohnt: Hier bekommen Sie alles!

Experimente in unserem Casino | **Spieltheorie in unserer Vorlesung**

Wie gelingt Ihnen die Spieltheorie?

Falls Sie (auch) wegen der Leistungspunkte hier sind, erkläre ich Ihnen, wie Sie erfolgreich studieren. Selbstverständliche Voraussetzungen:

- **sichere Beherrschung** aller Grundlagen aus Ana 1-3 und Lina 1-2
- **wöchentliche Bearbeitung** von Vorlesung, Quiz und Übungen

Die Spieltheorie entspricht 9 Leistungspunkten: insgesamt 270h

- **Präsenz:** 14 Wochen à 4h Vorlesung + 2h Übung $\lessapprox$ 80h
- **Individuelle Arbeit:** ein weiterer Tag (8h) pro Woche $\gtrapprox$ 110h
- **Wiederholung** zur Prüfungsvorbereitung: ca 2 Wochen $\approx$ 80h

Das ist keine Übertreibung sondern jahrzehntelange Erfahrung:
6 Präsenzstunden pro Woche erfordern 12 Stunden eigene Arbeit.

Sie können Ihre Zeit anders aufteilen, aber viel Spielraum bleibt nicht.
Es gilt die Erhaltung der Arbeit: Die 270 Stunden werden Sie brauchen!

Qui va lentement, va sûrement, et qui va sûrement, va loin.
[Wer langsam geht, geht sicher, und wer sicher geht, kommt weit.]

Liturgie: Ablauf der Vorlesung

Liturgie, griech. λειτουργία [leiturgía] ‘öffentlicher Dienst’, kommt von λειτός [leitós] ‘Volk, Volksmenge’ und ἔργον [érgon] ‘Werk, Dienst’. Dies bezeichnet die Gesamtheit religiöser Zeremonien und Feiern. Auch universitäre Lehre sollten wir zelebrieren und feiern.

Je dois dire qu’il n’y avait pas un cours de Lebesgue
où l’on ne riait pas d’une manière infiniment agréable.
Je soupçonne même qu’au moins le tiers des gens
venait au cours de Lebesgue pour s’amuser.
C’était infiniment intéressant, infiniment profond. […]
Pour faire un cours, il faut réfléchir pendant
qu’on le fait, et non pas se rappeler.
Szolem Mandelbrojt (1899–1983), *Souvenirs à bâtons rompus*

Vor uns liegt eine Vielzahl interessanter, schöner und wichtiger Themen. Die gemeinsame Lernzeit ist kostbar. Nutzen Sie Ihre Vorlesung optimal! Nutzen Sie die Möglichkeiten dieser Veranstaltung und fragen Sie uns! Die Feinjustierung ist wichtiger als Sie vielleicht vermuten.

Liturgie: Ablauf der Übungen

Verpflichtend ist die wöchentliche, aktive Teilnahme in der Übung. Ebenso lohnend ist natürlich die aktive Teilnahme an der Vorlesung. Sie sind eng aufeinander abgestimmt, idealerweise nutzen Sie beide:

Die Vorlesung erklärt Ihnen die nötigen Begriffe und Methoden, anschließend können Sie diese Techniken anwenden und einüben und die behandelten Themen mit weiterem Übungsmaterial vertiefen. Die Übungsblätter werden wöchentlich online zur Verfügung gestellt.

Für die Zulassung zur Klausur (aka Übungsschein) erwarten wir Ihre regelmäßige aktive Teilnahme an der wöchentlichen Übungsgruppe. Alle Informationen finden Sie in unserem Ilias-Kurs.

Mathematik lernen Sie nicht allein durch Zuschauen,
sondern durch eigene Arbeit und regelmäßige Übung.
Klavierspielen lernen Sie ja auch nicht
allein durch den Besuch von Konzerten!
nach Carl Runge (1856–1927)

Themen für dieses Semester

Optimal entscheiden	= B = Rückwärts-induktion (Zermelo)	= C = Kombinatorische Spieltheorie (Sprague–Grundy)	= D = Markov–Spiele & Optimierung (Bellman)
Statische Spiele	= E = Normalform & Gleichgewichte (Nash)	= F = Lineare Optimierung (Dantzig)	= G = Dilemmata & Evolution (Smith)
Dynamische Spiele	= H = Generationen-vertrag (Schelling)	= I = Unvollständige Information (Harsanyi)	= J = Dynamische Spiele (Selten)
Kooperative Spiele	= K = wiederholte Spiele & Kooperation (Folk Theorem)	= L = Verhandlungen: Axiome & Spiele (Nash, Binmore)	= M = Koalitionen: Axiome & Spiele (Shapley, Hart–Mas-Collel)
Mechanismen-design	= N = Kollektive Entscheidungen (Arrow)	= O = Implementierung & Un/Redlichkeit (Gibbard–Satterthwaite)	= P = Auktionen & In/Effizienz (Vikrey)

Wie gelingt Ihnen das Studium?

Die Universität als Wissenstrichter?

Erwarten Sie nicht, dass irgendjemand Ihnen irgendetwas beibringen könnte — ohne Ihr Zutun. Ich kann Ihnen viel Spannendes erzählen, doch nur Sie selbst können sich Verständnis erarbeiten. Zwei Faktoren bestimmen Ihren Lernerfolg: extrinsische Anregung und intrisische Motivation!

Diese Vorlesung wird Ihnen viele interessante Dinge zeigen, Phänomene und Beispiele erläutern, Argumente und Sätze erklären. Wenn Sie möchten, kann das eine große Hilfe sein, doch letztlich müssen Sie selbst dieses Material eigenständig durcharbeiten, um es zu beherrschen.

Erstrebenswerte Lernziele

Die Studierenden beherrschen die grundlegenden Begriffe und Techniken der Spieltheorie. Sie verfügen über die mathematischen Grundlagen für das Verständnis spieltheoretischer Modelle in den angrenzenden Wissenschaften und können sich mit Spezialisten darüber verständigen. Sie sind in der Lage, die behandelten Methoden selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ anzuwenden, ähnlich strukturierte Probleme zu erkennen, mathematisch zu modellieren und rechnerisch zu lösen.

- **Selbstständig:** Es geht nicht nur um Auswendiglernen, sondern um Verstehen und unabhängige Urteilsfähigkeit.
- **Sicher:** Es geht nicht nur um Intuition oder Spekulieren, sondern um nachvollziehbare Argumente und Rechnungen.
- **Kritisch:** Es geht nicht nur um Glauben oder (Auto)Suggestion, sondern um (selbst)kritische Fragen und sorgfältige Antworten.
- **Korrekt:** Sie beherrschen Definitionen, Sätze, Methoden, Proben. Gegenbeispiele zeigen Fehlerquellen, die es zu vermeiden gilt.
- **Kreativ:** Es geht nicht nur um fertige Rezepte, sondern um eigenständige Anwendung.

Ehrlicher Arbeitsaufwand

Bei allem Spielspaß erfordert diese ambitionierte Zielsetzung Fleiß und Disziplin. Das spiegelt sich deutlich im Zeit- und Arbeitsaufwand wider. Die folgende einfache Rechnung löst immer wieder Erstaunen aus:

Dieser Kurs entspricht 9 Leistungspunkten, also 270 Arbeitsstunden:

- ca 84 Stunden Präsenz (6 Stunden wöchentlich, bestehend aus 4 Stunden Vorlesung und 2 Stunden Übung, für knapp 14 Wochen)
- ca 112 Stunden eigene Arbeit während der Vorlesungszeit (etwa 8 Stunden wöchentlich, Vor- und Nachbereitung und Hausaufgaben)
- ca 74 Stunden Prüfungsvorbereitung nach der Vorlesungszeit (etwa ein bis zwei Wochen, je nach Bedarf und Intensität)

Diese umfangreiche Bemessung der nötigen *eigenen* Arbeitszeit beruht auf jahrzehntelanger Erfahrung. Individuelle Werte können und werden davon abweichen, nichtsdestotrotz sollen beide Seiten, Lehrende und Lernende, sich ehrlicherweise an dieser Schätzung orientieren.

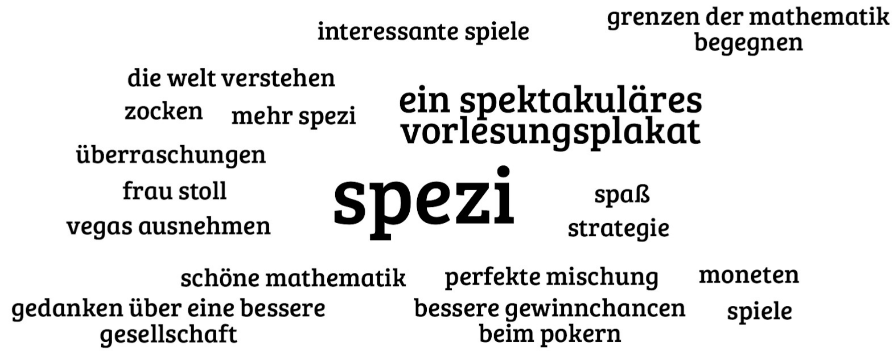
Gehen Sie den ganzen Weg und planen Sie fest die volle wöchentliche Arbeitszeit ein, bereits während des Semesters parallel zur Vorlesung!

Schnappschuss: Erwartungen der Studierenden

Erwartungen der Studierenden zu Beginn des Semesters (WiSe 2019):
„Was erhoffen Sie sich von dieser Veranstaltung zur Spieltheorie?“

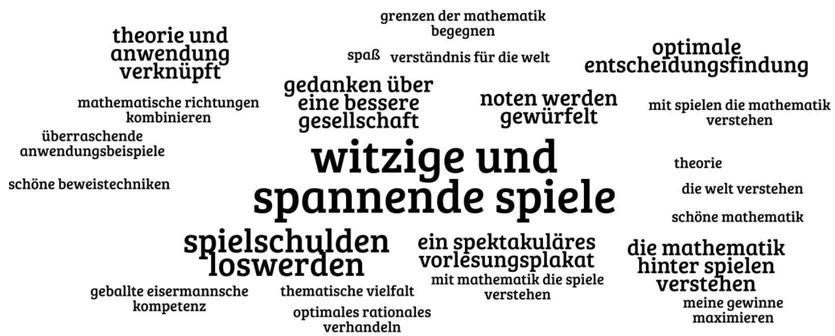
Schnappschuss: Erwartungen der Studierenden

Erwartungen der Studierenden zu Beginn des Semesters (SoSe 2022):
„Was erhoffen Sie sich von dieser Veranstaltung zur Spieltheorie?“



Schnappschuss: Erwartungen der Studierenden

Erwartungen der Studierenden zu Beginn des Semesters (SoSe 2025):
„Was erhoffen Sie sich von dieser Veranstaltung zur Spieltheorie?“



Ist Spieltheorie die / eine Krönung Ihres Mathestudiums?

Spieltheorie fasziniert und begeistert, fördert und fordert das Verständnis, mobilisiert nahezu alle Techniken, sie zieht alle Register der Mathematik. Das ist die Gelegenheit, von Ihrer mathematischen Reife zu profitieren!

„Mathematik ist schön und nützlich.“ — „Ich beherrsche die Grundlagen.“ — „Bestens! Mit Spieltheorie können Sie diese wunderbar anwenden.“ — „Wenn mir Vorwissen fehlt?“ — „Dann holen Sie es jetzt nach!“

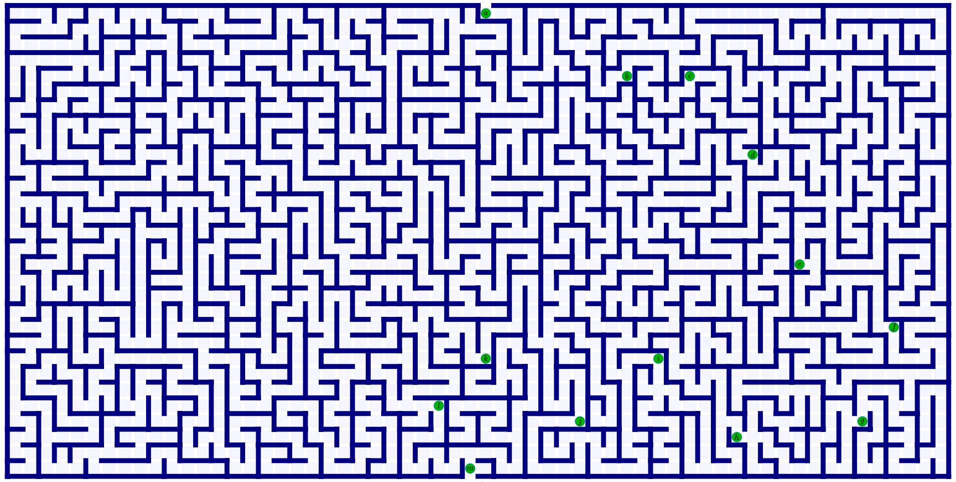
Diese Vorlesung ist problemorientiert [*problem driven*]. Das bedeutet ganz einfach: Die jeweilige Fragestellung der Anwendung bestimmt die mathematischen Werkzeuge. Wir benötigen selbstverständlich Analysis, Lineare Algebra und (elementare) Wahrscheinlichkeitsrechnung, gelegentlich auch Topologie, insbesondere Fixpunktsätze.

Auch hier gebe ich Ihnen konkrete Beispiele, damit Sie besser verstehen, was ich meine. Am Ende dieser Einführung zeige ich eine wunderschöne und echte Anwendung der Topologie in den Wirtschaftswissenschaften. Sie haben die Topologie noch nicht gehört? Ein beauderlicher Fehler! Können Sie diese Fehlentscheidung korrigieren? Ja, gerne, jederzeit!

Arbeitsteilung zwischen Lehren und Lernen

Ich führe Argumente sorgsam vor. — Sie arbeiten alles gründlich nach.

Start



Ziel

Ich zeige Ihnen den Weg vom Start zum Ziel. Wir teilen uns die Arbeit: Ich erkläre die wesentlichen Etappen. Sie ergänzen und klären Details. Wir gehen den Weg gemeinsam; kommen Sie startklar und vorbereitet!

Arbeitsteilung zwischen Lehren und Lernen

⚠ Ihr Uni-Studium fordert und fördert Ihr selbständiges Arbeiten! Ich vertraue, dass Sie lernen wollen und sich die nötige Zeit nehmen. Der Schlüssel zu Ihrem Erfolg sind Ihre Aktivierung, Ihre Investition, Ihr persönliches Engagement und Ihre kontinuierliche, ernsthafte Mitarbeit.

Ich präsentiere Ihnen schöne und nützliche Mathematik und leite Sie durch die Vorlesung. Kleinschrittig oder summarisch? Zu große Schritte frustrieren und entmutigen, zu kleine Schritten bremsen und langweilen. Das richtige Tempo ist eine Frage der Erfahrung und der Verhandlung.

⚠ In der Vorlesung n nutzen wir die Ergebnisse der Vorlesungen $< n$. In der Mathematik bauen Begriffe und Techniken stark aufeinander auf, mehr als in jeder anderen Wissenschaft. Das ist Fluch und Segen zugleich, sowohl effizienter Aufbau als auch Herausforderung beim Erlernen!

Shakespeares Werke können Sie in beliebiger Reihenfolge und Auswahl genießen. Achtung: Für mathematische Werke gilt dies definitiv nicht! Arbeiten Sie kontinuierlich mit, *vor* und *nach*, Vorlesungen und Übungen, bleiben Sie am Ball, nur so kann es gelingen, so macht es allen Freude.

Wie detailliert soll die Darstellung sein?

Beweise in einem Lehrbuch für Studienanfänger sind recht ausführlich, für ein Expertenpublikum werden Beweise deutlich knapper formuliert. Semester für Semester entwickeln Sie sich vom Anfänger zum Experten.

Was also ist ein Beweis genau? Wie detailliert ausgeführt muss er sein? Wie groß dürfen die logischen Schritte maximal sein? Hierzu sind zwei Antworten möglich: formal-dogmatisch oder sozial-pragmatisch.

Dogmatische Antwort: In einem vollständig formalisierten Beweis ist jeder Schritt die Anwendung einer Schlussregel. Wir beginnen mit einer Liste von wahren Aussagen (Axiome, Voraussetzungen) und erweitern diese schrittweise durch logisches Schließen, jeweils mit Angabe der verwendeten Schlussregel. Am Ende steht die ersehnte Behauptung.

Im obigen Bild ist das der vollständig ausgeführte Lösungsweg, etwa als eine lange Folge von kleinen Beweisschritten, jeder davon ist elementar. Die Richtigkeit kann ein Computer mechanisch prüfen (*proof checker*). Für menschliche Leser ist die mechanische Prüfung leider mühsam und wenig lehrreich, sie vermittelt meist keine Idee, Vision oder Inspiration.

Wie detailliert soll die Darstellung sein?

Pragmatische Antwort: Traditionell schreiben wir Beweise nicht für Maschinen, sondern für Menschen. Es gibt immer mehr Ausnahmen, etwa in der Programmierung, aber denken wir an diese Vorlesung.

Für ein menschliches Gegenüber ist es üblich, nicht alle elementaren Schritte auszuführen, sondern den Beweisgang allein durch geeignete Zwischenpunkte abzustecken. Das ist effizienter, sowohl für Sender:in als auch für Empfänger:in. Die Zwischenpunkte sollen eng genug sein, sodass die Empfänger:in den Weg dazwischen selbst rekonstruieren kann.

Das rechte Maß, ob detailliert ausgeführt oder nur grob skizziert, hängt somit vom Empfänger ab! Beweise in Lehrbüchern sind recht detailliert, Artikel in Fachzeitschriften sind knapper und Beweise oft nur skizziert. Die Komprimierung verschiebt die Beweislast von Sender zu Empfänger. Die Balance ist eine Kunst, sie beruht auf Konvention und Erfahrung.

Beispiel: Im Aufbau dieser Vorlesung versuche ich, die entscheidenden Zwischenschritte anzugeben. Routinierte Rechnungen hingegen führe ich meist nicht aus, sondern übertrage sie Ihnen. Das ist Ihre Aufgabe.

A: Einführung zur Spieltheorie

- A1 Einführung: Was sind Spiele?
  - A1.1 Erste Beispiele, erste Ideen
  - A1.2 Wer interessiert sich für Spieltheorie?
  - A1.3 Erstes Experiment: Hin-und-Rück
- A2 Denken hilft: Stufen der Rationalität
  - A2.1 Un/Gerecht teilen: Kuchen und Erbe
  - A2.2 Un/Klug positionieren: Strandkiosk und Politik
  - A2.3 Ir/Rational verhandeln: drohen oder nachgeben?
- A3 Methoden und Anwendungen der Spieltheorie
  - A3.1 Die Rolle der Mathematik
  - A3.2 Anwendungen der Spieltheorie
  - A3.3 Literatur zur Spieltheorie
- A4 Was ist Gamification?
  - A4.1 Konfidenz als Spiel
  - A4.2 Logikrätsel als Spiel
  - A4.3 Topologie von Wahlen

B: Rückwärtsinduktion nach Zermelo

- B1 Dynamische Spiele: Zustände und Aktionen
  - B1.1 Graphen als tragende Grundstruktur
  - B1.2 Artinsche Graphen und noethersche Induktion
  - B1.3 Markov–Graphen und erwartete Auszahlungen
  - B1.4 Rückwärtsinduktion zur Bellman–Gleichung
- B2 Nutzenmaximierung durch Rückwärtsinduktion
  - B2.1 Optimal entscheiden: Work & Travel
  - B2.2 Optimales Stoppen und Bruss–Algorithmus
  - B2.3 Würfeln bis die Eins kommt
  - B2.4 Bayes beim Tischkicker
- B3 Gegenseitiges Wissen und Vorwärtsinduktion
  - B3.1 Ich weiß etwas, was du nicht weißt.
  - B3.2 Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?
  - B3.3 Tanz der Vampire: gemeinsames Wissen
  - B3.4 Stuttgarter Mathematiker und Abischerz

C: Kombinatorische Spieltheorie und der Satz von Sprague–Grundy

- C1 Neutrale kombinatorische Spiele
  - C1.1 Einzeiliges Nim und dynamische Programmierung
  - C1.2 Neutrale Spiele und Rückwärtsinduktion
  - C1.3 Das Spiel Nim und Boutons effiziente Lösung
  - C1.4 Summen von Spielen und Sprague–Grundy–Satz
- C2 Anwendungsbeispiele und weitere Aufgaben
  - C2.1 Lasker–Nim, Grundys Spiel, Fliesentetris
  - C2.2 Schleifenspiele: Poker-Nim und Northcotts Spiel
  - C2.3 Das Spiel Chomp! nach David Gale
  - C2.4 Wie viel Rationalität benötigen wir?
- C3 Mengen und Logik als Spiele
  - C3.1 Schach ist determiniert: Zermelo
  - C3.2 Mengen als Spiele: von Neumann
  - C3.3 Quantorenspiele: Eva vs Adam
  - C3.4 Isomorphiespiele: Samson vs Delila

D: Markov–Spiele und Bellmans Optimalitätsprinzip

- D1 Markov–Spiele: erste Beispiele
  - D1.1 Erwartete Auszahlung in einem Markov–Belohnungsprozess
  - D1.2 Irrfahrt, Gewinnerwartung und optimale Entscheidung
  - D1.3 Google: Wo häuft sich die zufällige Irrfahrt im Internet?
- D2 Bellmans Optimalitätsprinzip
  - D2.1 Banachs Fixpunktsatz und Blackwells Kriterium
  - D2.2 Markov–Graphen, Erwartung und Optimalität
  - D2.3 Bellmans Optimalitätsprinzip
- D3 Anwendung im maschinellen Lernen
  - D3.1 Optimale Routenplanung eines Roboters
  - D3.2 Gewinniteration vs Strategieiteration
  - D3.3 Bestärkendes Lernen

E: Strategische Spiele und Nash–Gleichgewichte

F: Lineare Optimierung und Dantzigs Simplexverfahren

G: Soziale Normen und Dilemmata, Koordination und Evolution

H: Ponzi–Betrug vs Rentenmodell:
Wie gelingt ein Generationenvertrag?

I: Spiele mit unvollständiger Information und Bayes–Gleichgewichte nach John Harsanyi

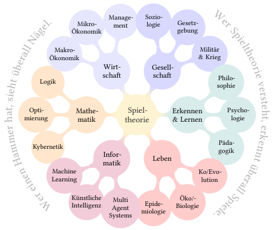
J: Dynamische Spiele und teilspielperfekte Gleichgewichte nach Reinhard Selten

K: Wiederholte Spiele und Nashs Folk Theorem

L: Verhandlungen, Nash–Lösung und Rubinstein–Implementierung

Kapitel A

Einführung zur Spieltheorie



Das ganze Leben ist ein Spiel,
und wir sind nur die Kandidaten.
Hape Kerkeling (1964–)

Inhalt dieses Kapitels A

Worum geht es in der Spieltheorie?

Spieltheorie versucht, strategisches / ökonomisches / menschliches Verhalten zu beschreiben, zu erklären, vorherzusagen, zu optimieren.

To be literate in the modern age, you need to have
a general understanding of game theory.
Paul Samuelson (1915–2009, Nobelpreis 1970)

Spiele beschreiben Konflikte, Konkurrenz und Kooperation:

- Mehrere Akteure interagieren (Individuen, Firmen, Staaten, KI).
- Jeder Akteur hat gewisse Handlungsoptionen (Züge, Strategien).
- Aus diesen Möglichkeiten wählt jeder Akteur aus (frei, unabhängig).
- Daraus entsteht für jeden ein Ergebnis (Nutzen, Auszahlung, etc).
- Jeder Spieler versucht, sein eigenes Ergebnis zu maximieren.

If people do not believe that mathematics is simple,
it is only because they do not realize how complicated life is.
John von Neumann (1903–1957)

Worum geht es in der Spieltheorie?

Spieltheorie ist ein (inzwischen sehr) umfangreicher Werkzeugkasten. Das ist das Ziel dieser einführenden Vorlesung: Die Teilnehmer sollen sich befähigen, grundlegende Methoden der Spieltheorie anzuwenden, und zwar selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ.

Die Spieltheorie ist auf wunderbar konkrete Anwendungen ausgerichtet, gerade dazu nutzt sie abstrakte und raffinierte mathematische Modelle. Theorie und Anwendung sind keine Gegensätze, sie ergänzen sich! Diese extreme Spannweite ist faszinierend, für manche abschreckend.

Zahlreiche Beispiele und Anwendungen dienen als leuchtende Vorbilder. Mit Hilfe spieltheoretischer Modelle, Begriffe und Methoden können wir Konflikte besser verstehen, mathematisch beschreiben und analysieren, dazu systematisch mögliche Lösungen finden, konstruieren und prüfen.

Manche Konflikte haben eindeutige Lösungen, die meisten leider nicht. Im ersten Falle kann die Analyse prädiktiv oder normativ genutzt werden, im zweiten Falle ist sie immerhin noch deskriptiv oder explikativ nutzbar. Die Spieltheorie bietet magische Momente, aber keine Wunder.

Was ist ein Spiel allgemein gesehen?

Spiele im engeren Sinne sind Kinderspiele, Geschicklichkeitsspiele, Karten- / Brett- / Rollen- / Gesellschafts- / Rate- / Denkspiele, Computer- / Handyspiele, sportliche Wettkämpfe von Bundesjugendspielen bis zu Olympischen Spielen, darunter Test- / Freundschafts- / Endspiele, etc.

Wir fassen den Begriff des Spiels im Folgenden **im weiteren Sinne** als Interaktion mehrerer Akteure, wobei es zu Konflikten kommen kann. Hierzu betrachten wir konkrete Lehrbeispiele: extrem vereinfacht, doch repräsentativ. Ihre mathematische Untersuchung ist zunächst elementar.

"Elementary" does not mean easy to understand.
"Elementary" means that very little is required
to know ahead of time in order to understand it,
except to have an infinite amount of intelligence.
Richard P. Feynman (1918–1988, Physik-Nobelpreis 1965)

Ihre Investition in mathematische Grundlagen trägt hier reiche Früchte als „infinite amount of intelligence", zumindest als ein erster Vorschuss. Fixpunktsätze, Integrale, Differentialgleichungen, etc. kommen später.

Warum spielt der Mensch?

Es ist eine bemerkenswerte Grunderfahrung: **Der Mensch spielt**, sogar häufig und gerne! Das unterscheidet ihn von vielen anderen Lebewesen.

Homo ludens, der spielende Mensch: Im Spiel entdeckt und übt der Mensch seine Fähigkeiten, macht Erfahrungen und entwickelt seine Persönlichkeit. Er erprobt Handlungsfreiheit und eigenes Denken. Er erkennt und antizipiert die Konsequenzen seines Handelns.

Warum ist das so? **Alles Leben ist Problemlösen**, schrieb Karl Popper. Und erfahrungsgemäß führt uns das Leben immer wieder in Konflikte. Daher ist es überaus sinnvoll, Probleme vorher „durchzuspielen". Die Evolution hat uns hierzu Neugier und Spielfreude geschenkt.

Die genauere Untersuchung führt uns zur **Spieltheorie**. Dies können wir ebenso gut *Konflikttheorie* nennen, oder *Theorie der strategischen Interaktion* oder *Interaktive Entscheidungstheorie*. Das klingt seriös aber leider auch schwerfällig. Die Bezeichnung *Spieltheorie* hat viele Vorteile: Sie ist kurz und knapp, klingt lustig und positiv, beschreibt die Situation recht treffend und ist seit bald einhundert Jahren traditionell üblich.

Eigenschaften von Spielen

Anzahl der Akteure?

- Ein Spieler: ... Geschicklichkeit, Steuerung, Optimierung
- Zwei Spieler: ... Tischtennis, Schach, Handel, Vertrag
- Drei und mehr Spieler: ... Wahlen, Koalitionen, Gesellschaft

Konkurrenz oder Kooperation?

- Nullsummen vs Win-Win: ... Marktaufteilung, Absprachen
- kompetitiv vs kooperativ: ... Verträge, Nebenzahlungen

Zufall und Information?

- deterministisch vs stochastisch: ... Go, Backgammon, Monopoly
- un/vollständige Information: ... Kniffel, Lotto, Poker, Battleship

Zeitlicher Verlauf?

- parallel vs sequentiell: ... Schere-Stein-Papier, Quizz, Klausur
- diskret vs kontinuierlich: ... Brettspiele, Onlinespiele, Börse

Weitere Beispiele: Straßenverkehr, Schwarzfahren, Fußball, Elfmeter, Auktion, Schule/Uni, Karriere, Kirche, Kochen, Kindererziehung, etc.

Eigenschaften von Spielen

Spiele mit nur **einem Akteur** können bereits sehr anspruchsvoll sein: Geschick, Steuerung, Kybernetik, Optimierung, Entscheidung, etc.

Sie wollen mit einem Fahrzeug von A nach B kommen (Auto, Fahrrad, Schiff, Flugzeug, Raumsonde etc.). Damit dies überhaupt möglich ist, müssen Sie Ihr Vehikel zunächst steuern können. Zudem wollen Sie den besten Weg finden, Zeit und Aufwand minimieren, Nutzen maximieren.

In der Ökonomie muss jeder Akteur ähnliche Probleme lösen: Was ist möglich? Was ist erstrebenswert? Wie finde ich die beste Möglichkeit? Das führt zu Fragen und Methoden der mathematischen Optimierung.

Bei zwei oder mehr Spielern kommt es zu **Interaktion:** Das Ergebnis jedes Akteurs hängt nicht nur von seinen eigenen Entscheidungen ab, sondern auch von den Aktionen der anderen Akteure. Dabei kann es zu Konflikten kommen, sowohl zu Konkurrenz als auch zu Kooperation.

Die Liste der Beispiele und möglicher Anwendungen ist schier endlos. Die folgende Auswahl gibt hierzu ein paar Denkanstöße, sie sollen Ihre Neugier wecken und einen Ausblick auf weitere Kapitel umreißen.

Beim **Tischtennis** ist eher die physische Geschicklichkeit gefragt, beim **Schach** und ähnlichen Strategiespielen hingegen die mentale. **Handel** zwischen zwei Akteuren oder ein **Vertrag** ist ebenso ein Spiel: Jeder möchte sein Ergebnis maximieren, genau darum wird gerungen.

Wahlen sind ein großes und recht komplexes Spiel. In Deutschland leben etwa 83 Mio Menschen, davon sind etwa 61 Mio wahlberechtigt. Idealerweise sollte jede:r nach eigener ehrlicher Überzeugung stimmen, doch die informierte Einschätzung ist schwierig, zumal bei mehreren Kriterien, die Entscheidung ist komplex, dies kann zu strategischer Wahl führen. Politische Akteure wissen das und handeln ihrerseits strategisch.

Wenn schon die Sachfragen kompliziert sind, dann sollten wenigstens die genutzten **Wahlverfahren** einfach und gerecht sein, nicht wahr? Bei der Wahl zwischen genau zwei Alternativen gelingt dies tatsächlich, doch ab drei Alternativen existiert leider kein perfektes Wahlverfahren. Dieses erstaunliche Ergebnis ist **Arrows Satz vom Diktator** und von Gibbard–Satterthwaite zur Manipulierbarkeit von Wahlverfahren.

Bei einem **Nullsummenspiel** muss der andere verlieren, was der eine gewinnt; wir denken an die Aufteilung eines Marktes konstanter Größe. Solche Spiele heißen etwas allgemeiner auch **strikt kompetitiv**.

Absprachen können zu einer **Win-Win-Situation** genutzt werden, also gegenseitigem Nutzen. Im Sinne eines **Kartells** ist dies illegal, da auf Kosten wehrloser Dritter. Betrachtet man diese als einen weiteren Spieler, so handelt es sich insgesamt wieder um ein Nullsummenspiel.

Fußball ist normalerweise ein Nullsummenspiel: Ein Team gewinnt, das andere verliert. Turniere zeigen oft Ausnahmen, etwa bei der WM 1982 die **Schande von Gijón**: Deutschland und Österreich trennten sich einvernehmlich 1:0 zu Lasten von Algerien. (`www.shz.de/183769`)

Bei **kooperativen** Spielen sind Absprachen und Verträge zwischen den Akteuren möglich, etwa im Rahmen fest vorgegebener Vertragsgesetze. Bei **nicht-kooperativen** Spielen ist dies nicht möglich oder nicht erlaubt. Vereinbarungen müssen innerhalb des Spiels selbst-stabilisierend sein, etwa durch glaubhafte Drohungen oder allgemein Nash–Gleichgewichte.

Zufall spielt oft eine wesentliche Rolle, allgemein im Leben wie auch in zahlreichen Spielen. Damit eng verknüpft ist die Frage der **Information**: Wer weiß wann was? Auch der **zeitliche Ablauf** des Spiels ist wichtig: Ziehen Spieler gleichzeitig oder immer streng nacheinander? in Runden nach einen vorgegebenen Takt oder jederzeit, kontinuierlich, asynchron?

Bei **Brettspielen** wie Monopoly wird gewürfelt, das Ergebnis ist danach allen Spielern bekannt. Bei **Kartenspielen** wie Poker hat jeder Spieler nur Teilinformation; er kennt seine Karten, aber nicht die der anderen.

Bei **Schere-Stein-Papier** wird gleichzeitig gezogen. Das Spiel ist sinnlos, wenn einer zuerst zieht, und der zweite diesen Zug kennt. Stehen beide Rücken an Rücken, so ist Gleichzeitigkeit entbehrlich.

Eine **Klausur** dient als Stichprobe im Rahmen der vereinbarten Themen: Allzu leichte Vorhersehbarkeit mindert die repräsentative Aussagekraft, daher werden die Aufgaben möglichst zufällig gewählt, meist gewichtet. Ebenso wichtig ist, dass alle Teilnehmer die Klausur parallel schreiben, andernfalls wäre die Informationslage extrem ungleich und ungerecht.

Praktisch alles im Leben ist ein Spiel oder kann so gesehen werden. Die großen Weltreligionen fassen das gesamte Leben in dieser Form: Der Mensch wählt selbst seine Handlungen und wird dafür belohnt oder bestraft: Paradies / Himmel vs Hölle, Nirwana vs Wiedergeburt, usw.

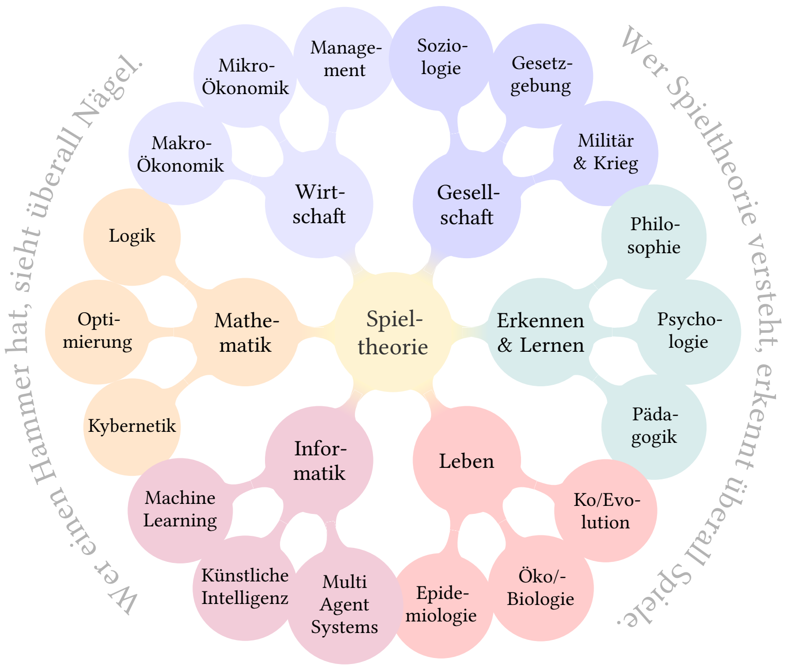
Ist dieser Vergleich provokativ? oder lächerlich? gar blasphemisch? Zu **Bibel und Moral** schrieb 2008 die Päpstliche Bibelkommission:

Die Sehnsucht nach Glück, das Verlangen nach einem erfüllten Leben, ist von jeher tief im menschlichen Herzen verwurzelt. Es hängt großenteils von unserem eigenen Handeln und von den Beziehungen zwischen uns Menschen ab, ob dieser Wunsch verwirklicht wird. Was ist aber dieses Handeln, das die einzelnen Personen, die Gemeinschaften und die Völker zu einem wahrhaft gelungenen Leben, zum Glück führt? Wie kann man es bestimmen?

Ist das nicht eine spieltheoretische Problemstellung par excellence? Anschließend werden mögliche Lösungen theologisch ausgeführt:

Die Christen sind überzeugt, dass sie in der Bibel Hinweise und Normen finden für das rechte Handeln und so den Weg zur Fülle des Lebens.

Wer interessiert sich für Spieltheorie?



Wer interessiert sich für Spiele?

- Kinder und Erwachsene (auch als Eltern: Erziehung ist ein Spiel.)
- Spieledesigner und Programmierer (bis zur künstlichen Intelligenz)
- Mathematiker und Sozialwissenschaftler (menschliches Verhalten)
- Wirtschaftswissenschaftler und Anwender (It’s the economy, stupid)
- Politiker, Strategen, Militärs (die dunkle Seite der Spieltheorie)
- Biologen, Mediziner (Evolution, Ökosysteme, Epidemien)

Spiele und Konflikte sind eine uralte menschliche Grunderfahrung. Bemerkenswerterweise gab es hierzu lange keine geeignete Theorie, keine geeignete Sprache zur quantitativen Erfassung und Untersuchung.

Hierzu braucht es raffinierte Mathematik! Erste Untersuchungen unternahm in den 1920er Jahren der Mathematiker Émile Borel.

Der Durchbruch gelang jedoch erst 20 Jahre später. Der Mathematiker John von Neumann und der Ökonom Oskar Morgenstern legten hierzu 1944 die Grundlage mit ihrem bahnbrechenden Lehrbuch *Spieltheorie und ökonomisches Verhalten*. Es gilt als die Geburtsurkunde der Spieltheorie.

Spieltheorie: Gründungsväter

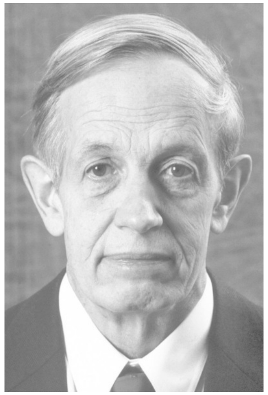
Émile Borel
(Saint-Affrique 1871 – Paris 1956)

John von Neumann
(Budapest 1903 – Washington 1957)

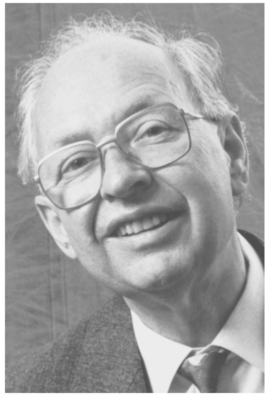
Oskar Morgenstern
(Görlitz 1902 – Princeton 1977)

Borel: *La Theorie du jeux* (1921)
Neumann: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* (1928)
Neumann-Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior* (1944)

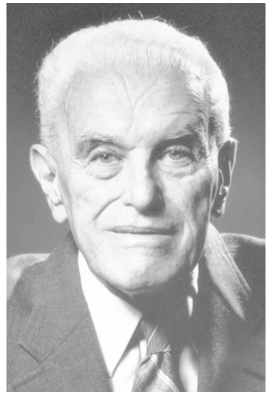
Spieltheorie: zweite Generation



John Nash
(Bluefield/WV 1928 – Monroe Township/NJ 2015)



Reinhard Selten
(Breslau 1930 – Posen 2016)



John C. Harsanyi
(Budapest 1920 – Berkeley/CA 2000)

Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften 1994 für ihre Pionierarbeit zu Gleichgewichten in nicht-kooperativen Spielen. Mehr dazu unter `www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1994`.

Der Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften wird seit 1969 vergeben, darunter einige Auszeichnungen zur Spieltheorie. Ich nenne Preisträger, deren Themen uns im Folgenden begegnen, auch wenn wir jeweils nur die Oberfläche anreißen können.

1972: Kenneth Arrow, John Hicks „for pioneering contributions to general economic equilibrium theory and welfare theory“ [Kapitel N]

1975: Leonid Kantorovich, Tjalling Koopmans „for contributions to the theory of optimum allocation of resources“ [F]

1994: John Nash, John Harsanyi, Reinhard Selten „for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games“ [E, I, J]

1996: William Vickrey, James Mirrlees „for fundamental contributions to the economic theory of incentives under asymmetric information“ [P]

2002: Vernon Smith „for having established laboratory experiments as a tool in empirical economics“, Daniel Kahneman „for having integrated insights from psychological research into economic science“

2005: Robert Aumann, Thomas Schelling „for having enhanced our understanding of conflict and cooperation through game-theory“ [I]

2007: Leonid Hurwicz, Eric Maskin, Roger Myerson „for having laid the foundations of mechanism design theory“ [O]

2012: Alvin Roth, Lloyd Shapley „for the theory of stable allocations and the practice of market design“ [M]

2014: Jean Tirole „for his analysis of market power and regulation“

2017: Richard Thaler „for his contributions to behavioural economics“ [Unser wöchentliches Experimentallabor ist das Casino Royal.]

2020: Robert Wilson, Paul Milgrom „for improvements to auction theory and inventions of new auction formats“ [P]

Diese Liste wird in den nächsten Jahren voraussichtlich fortgesetzt. Oft genug ist Spieltheorie nicht das Ziel, sondern das Werkzeug. Inzwischen durchdringt sie nahezu alle Bereiche der Ökonomik.

Spieltheorie gehört zur **Mikroökonomik**, denn sie untersucht das Verhalten einzelner Akteure (Menschen, Haushalte, Unternehmen). Die **Makroökonomik** untersucht übergeordnete Größen (Kennzahlen): Investition & Konsum, Export & Import, staatliche Ausgaben & Steuern, Geldpolitik, etc. Beide Sichtweisen ergänzen sich: Die **Mikrofundierung** versucht, die Makroökonomik durch die Mikroökonomik zu erklären.

Physikalische Analogie sind Wärmelehre und kinetische Gastheorie: Die erste behandelt makroskopische Phänomene (zumeist Mittelwerte), die zweite untersucht mikroskopische Phänomene (einzelne Teilchen). Im thermischen Gleichgewicht entsprechen sich beide Sichtweisen: Das System wird durch einige wenige Zustandsgrößen beschrieben.

Ähnlich verhält es sich beim Übergang von der Mikroökonomie (weniger Akteure) zur Makroökonomie (als Grenzwert unendlich vieler Akteure). León Walras (1834–1910) suchte als erster mit Gleichgewichtsmodellen der Volkswirtschaft eine ökonomisch-mathematische Theorie, analog zu physikalisch-mathematischen Theorien wie Astronomie oder Mechanik.

Die Analogie zur Physik ist attraktiv, aber leider nicht sehr tragfähig: Bei rasanter Entwicklung ist die Gesellschaft nicht im **Gleichgewicht**. Zudem fehlt der Ökonomik zumeist eine sichere **experimentelle Basis.** Mit dieser Problematik ringen die Wirtschaftswissenschaften seit jeher. Eine empirische Grundlegung war schon immer ersehnt aber schwierig, manchen erschien dieser Zugang gar aussichtslos und unerreichbar.

Unlike the typical natural science the material to which it is applied is, in too many respects, not homogeneous through time. […] In the second place, […] economics is essentially a moral science and not a natural science.

John Maynard Keynes (1883–1946)

Bevor ich Sie mit **Theorie** erleuchte oder verwirre, möchte ich gerne ein **Experiment** durchführen. Damit betone ich das empirische Gegenstück zur **mathematischen Theorie**, nämlich die **experimentelle Ökonomik**. Hier versucht man, konkrete Situationen zu verstehen, reale Daten zu erheben, um daran die Theorie zu testen, zu kalibrieren und zu schärfen.

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Zwei Spieler A und B interagieren anonym über eine Datenleitung.
Sie (er)kennen sich nicht und begegnen sich vermutlich nie wieder.

A: 10			B: 0
	$-x$	$+2x$	
A: $10 - x$			B: $2x$
	$+y$	$-y$	
A: $10 - x + y$			B: $2x - y$

Zu Beginn erhält Spieler A ein Guthaben von 10€, Spieler B nur 0€.

Erster Zug: A schickt an B einen frei gewählten Betrag $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$. Dieser Betrag x wird bei A abgebucht und bei B doppelt gutgeschrieben.

Zweiter Zug: B schickt an A davon einen Betrag $y \in \{0, 1, \dots, 2x\}$. Dieser Betrag y wird bei B abgebucht und bei A gutgeschrieben.

Damit endet das Spiel und jedem wird sein Kontostand ausbezahlt.
Es gelten nur diese einfachen Regeln, und sonst keine weiteren.

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Beispiel 1: A schickt 4€, B schickt 3€ zurück. ☹ A macht Verlust.

A: 10			B: 0
	-4	$+8$	
A: 6			B: 8
	$+3$	-3	
A: 9			B: 5

Beispiel 2: A schickt 7€, B schickt 9€ zurück. ☺ Beide profitieren.

A: 10			B: 0
	-7	$+14$	
A: 3			B: 14
	$+9$	-9	
A: 12			B: 5

Beachte: Der zweite Zug ist ein Nullsummenspiel, der erste Zug nicht!

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Das ist ein einfaches, aber typisches Modell wirtschaftlichen Handelns. Wir können die Interaktion als **Kredit und Rückzahlung** interpretieren: Spieler A verleiht einen Teil seines Geldes, Spieler B erwirtschaftet damit eine Verdopplung und zahlt zurück: Tilgung plus Zinsen? Allerdings gibt es keinen Vertrag und auch keine Strafen!

Ebenso können wir es als **Online-Handel** interpretieren: Spieler A geht in Vorleistung und verschickt die Ware, für Spieler B ist diese doppelt so nützlich / wertvoll, schließlich bezahlt B nach seinem eigenen Ermessen. **Pay what you want** wird genutzt bei Spenden, Trinkgeld, Straßenkunst, manchen Restaurants, Veranstaltung / Theater, Hofverkauf / Blumenfeld.

Zugegeben, dieses Modell ist noch allzu simpel und eher unrealistisch, insbesondere fehlen hier alle üblichen sozialen Kontrollmechanismen. Der Vorteil ist jedoch: Alle Regeln sind besonders klar und einfach. Wir können dieses Spiel vollständig analysieren und verstehen.

Das ist ein stark vereinfachtes Modell, sozusagen ein Laborexperiment. Wir blenden alles andere aus und untersuchen es unter dem Mikroskop.

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

In der Literatur heißt dies **Vertrauensspiel**, engl. *trust game*. Es wirkt zunächst etwas ungewöhnlich, begegnet uns aber im Alltag recht häufig, hier zum Beispiel in Stuttgart-Sonnenberg auf meinem Weg zur Uni:

Stufen der Rationalität

A201

Definition A2A: Stufen der Rationalität

Unter **(unbeschränkter) Rationalität** verstehen wir folgende Axiome:

$\mathcal{R}_0$: Jede Spieler:in will ihr Ergebnis (Nutzen, Gewinn, ...) maximieren.

$\mathcal{R}_1$: Jede Spieler:in versteht zudem alle Spielregeln und Konsequenzen.

$\mathcal{R}_2$: Es gilt die vorige Aussage $\mathcal{R}_1$, und jede Spieler:in weiß dies.

$\mathcal{R}_3$: Es gilt die vorige Aussage $\mathcal{R}_2$, und jede Spieler:in weiß dies.

etc... Genauer definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Aussage

$\mathcal{R}_n$: Es gilt die Aussage $\mathcal{R}_{n-1}$, und jede Spieler:in weiß dies.

$\mathcal{R}_\infty$: Es gilt die Aussage $\mathcal{R}_n$ für jede Stufe $n \in \mathbb{N}$.

Axiome $\mathcal{R}_0$ und $\mathcal{R}_1$ sind extrem wichtige Annahmen für die Spieltheorie: Erst damit können wir das Spielverhalten mathematisch analysieren. Je nach Spiel nutzen wir auch die Verschärfungen $\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4, \dots$ usw.

In Spielanalysen bzw. Beweisen ist es zur Klärung nützlich anzugeben, welche Stufe $\mathcal{R}_n$ der Rationalität wir jeweils benutzen und voraussetzen. Implizite Annahmen formulieren wir damit explizit, präzise und bequem.

Stufen der Rationalität

A202 Erläuterung

Diese Axiome sind meist **Grundlage der Spieltheorie**. Wir müssen sie gründlich verstehen und an möglichst zahlreichen Beispielen erproben.

Als Warnung bzw. freundliche Enttäuschung schicke ich gleich vorweg: Diese Idealisierungen gelten in vielen realen Situationen leider nicht! Diese Eigenschaften sind zwar wünschenswert, doch oft nicht erfüllt. Alles hängt von den Akteuren ab: Menschen, Unternehmen, Staaten, KI.

Axiom $\mathcal{R}_0$ bedeutet: Die im Spiel formulierte Nutzenfunktion erfasst das Wesentliche. Wir verkneifen uns danach metaphysische Spekulationen über Moral, Ethik, Gerechtigkeit, Egoismus vs Altruismus, Erziehung, Tradition, Religion, Sünde, Fegefeuer, jüngstes Gericht, Karma, etc...

Damit will ich nicht behaupten, dass diese Fragen unwichtig wären, sie liegen nur außerhalb der Reichweite unseres mathematischen Modells. Sie sind nicht Teil des Spiels; wenn doch, dann in der Nutzenfunktion:

Wenn wir diese Begriffe in der Spieltheorie betrachten wollen, und das sollten wir, dann dürfen wir sie nicht implizit und vage dazufabulieren, sondern müssen sie explizit und präzise im Spiel codieren.

Stufen der Rationalität

A203 Erläuterung

Axiom $\mathcal{R}_1$ bedeutet: Jede Spieler:in kennt und versteht die Regeln des Spiels, sie kennt alle Handlungsoptionen und deren Konsequenzen.

Das ist eine zentrale, aber manchmal allzu starke Annahme: Für das Spiel Schach kenne ich zwar alle Regeln, aber nicht alle Konsequenzen; mir fehlt die Rechenkapazität, ausreichend viele Züge vorauszudenken.

Das gilt selbst für sehr einfache Spiele, wie unsere folgenden Beispiele. Sie erfahren damit ganz konkret, dass Sie zwar die Regeln verstehen, aber nicht sofort alle Konsequenzen durchschauen. Wir sehen das daran, dass Sie als Spieler:in nicht sofort die beste Strategie wählen, sondern noch Fehler machen. Sie beherrschen das Spiel erst nach etwas Übung!

Gerade hierzu ist es wichtig, diesen Vortrag mit konkreten Beispielen aufzubauen, die Sie dann auch ernsthaft bearbeiten und lösen sollen. Andernfalls hören Sie schöne Theorie und glauben, damit sei alles klar.

Die Wirklichkeit ist viel komplizierter... und auch viel interessanter! Neben der Spieltheorie lohnt sich immer auch das soziale Experiment. Die tatsächlich beobachtete Rationalität ist allzu oft doch beschränkt.

Stufen der Rationalität

A204 Erläuterung

Axiome $\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ usw. codieren die **gegenseitigen Einschätzungen**. „Als Spieler:in verhalte ich mich rational. Dazu muss ich das Verhalten der anderen vorhersehen, antizipieren, oder besser gesagt: berechnen. Am besten gelingt mir dies, wenn ich weiß, dass auch alle anderen sich rational verhalten. Davon will / muss / kann ich ausgehen.“

Wir nennen dies **gemeinsames Wissen**, engl. *common knowledge*. Es genügt nicht, dass etwas wahr ist, es muss auch jeder wissen. Und man muss sich darauf verlassen können, dass es jeder weiß. Und auch darauf, dass jeder weiß, dass jeder es weiß. Usw.

Das ist ein allgemeines und wichtiges Konzept: Das Wissen einer Spieler:in besteht neben ihrer reinen Sachkenntnis auch aus ihrem Metawissen über das Wissen der anderen Spieler:innen. „Ich weiß, dass du weißt, dass ich weiß, ...“. Das klingt vertrackt und ist es meist auch.

In strategischen Situationen sind Wissen und Nichtwissen entscheidend. Für die Analyse von Spielen (und überall sonst) ist daher die Verteilung von Wissen und der Zugang zu Information von zentraler Bedeutung.

In this ocean of madness, an island of reason?

Rationalität dient uns als Leuchtturm im Ozean der Unsicherheit.
Sie markiert ein behütetes Eiland sicheren, gefestigten Wissens.
Sie dient uns zur Navigation, selbst in unkartierten Gewässern.
Selbst fern der Rationalität hilft sie uns zur Orientierung.

Ist Rationalität ein geeignetes Fundament?

Manche Zuhörer wehren sich vehement dagegen, den Menschen auf den **Homo oeconomicus** zu reduzieren. Manche sträuben sich auch dagegen, dass ich dafür das hehre Wort „Rationalität“ missbrauche.

Als Mathematiker möchte ich die Gemüter beruhigen und die Wut mäßigen: Zunächst ist die Definition eine ehrliche Klarstellung!

Es ist sehr wichtig, keine unbewiesenen Annahmen zu treffen,
aber noch wichtiger ist es, keine Worte zu benutzen,
hinter denen sich kein klarer Sinn verbirgt.
William Kingdon Clifford (1845–1879)

Die obige Definition präzisiert explizit die zu diskutierenden Axiome: Dies sind unsere Annahmen, Voraussetzungen, Arbeitshypothesen. Es sind keineswegs pauschale Behauptungen über die Wirklichkeit.

Wir werden damit einfache Modelle untersuchen und daran viel lernen. Aussagen über das Modell, unsere Annahmen und ihre Folgerungen, lassen sich manchmal in der Wirklichkeit wiederfinden, andermal nicht.

Müssen wir alles so genau nehmen? Ja, sicher!

Auf den ersten Blick scheint es vielen von Ihnen vermutlich übertrieben, dass ich in guter mathematischer Tradition mit einer Definition beginne und den Begriff der „Rationalität“ definiere, zumindest etwas präzisiere. Dies dient als hilfreiche Abkürzung und bequeme Zusammenfassung.

Ist das nicht ohnehin alles klar? Sind Definitionen nicht übertrieben? Ich denke, nein! Gerade der Begriff „Rationalität“ kann sehr verschieden aufgefasst werden, daher möchte ich hier klar und deutlich aussprechen, was ich darunter verstehen will, und wie Sie mich bitte verstehen sollen.

Natürlich können Sie zur Rationalität eine andere Auffassung vertreten, doch wir müssen jeweils eindeutig darlegen, was wir darunter verstehen. Das ist eine Frage guter Kommunikation. Andernfalls provozieren wir unnötige Missverständnisse, und unsere Diskussion dreht sich im Kreis.

Die mathematische Vorgehensweise der Spieltheorie ist daher gar nicht überraschend, sondern entspricht dem Vorbild anderer Wissenschaften: Wir wollen ganz konkrete Probleme lösen und Anwendungen verstehen, dazu müssen wir Begriffe klären und tragfähige Argumente entwickeln.

Modell und Wirklichkeit

Zur Illustration gebe ich einfache, konkrete **Anwendungsbeispiele**. Sie sind zwar extrem vereinfacht und etwas fiktiv, aber doch lehrreich: Sie zeigen ganz handfeste Konsequenzen von Ir/Rationalität, und dass wir uns mit dieser Problematik genauer auseinandersetzen müssen.

Das ist die Stärke und zugleich die Begrenzung **abstrakter Modelle**: Sie treffen einen Kern des Problems, sie sind einfach und übersichtlich und leicht zu verstehen, sie taugen wunderbar als erste Näherung. Sie dienen als Ausgangspunkt und Orientierung für Anwendungen.

Wir werden dieses bemerkenswerte Phänomen noch oft beobachten: Selbst einfache Spiele können den wahren Kern eines Konflikts treffen. Physiker sprechen hier traditionell nüchtern von der **ersten Näherung**, die bei Bedarf durch die zweite, dritte, … Näherung verfeinert wird.

Das **Modell**, das wir von der **Realität** entwerfen, hilft und leitet uns, doch niemals sollten wir naiv das Modell für die Wirklichkeit halten. Von dieser ersten Näherung ausgehend können wir unser Modell je nach Bedarf verfeinern und konkreten Gegebenheiten anpassen.

Beispiel: einen Kuchen teilen

Aufgabe: Zwei Kinder, Alice und Bob, teilen sich einen Schokokuchen. Damit es gerecht zugeht, gibt der Vater vor: Alice teilt, Bob wählt aus. Was wird passieren? rational? irrational? Ist das Ergebnis gerecht?

Lösung: $\mathcal{R}_0$: Jedes Kind will möglichst viel Schokokuchen.
Diese Annahme ist grundlegend für unsere Analyse!

$\mathcal{R}_1$: Bob wird das größere Stück erkennen und sich nehmen.
Er kann beide Stücke anschauen oder wiegen, um sicher zu gehen.

$\mathcal{R}_2$: Alice weiß, dass sie das kleinere Stück bekommen wird.
Daher schneidet Alice zwei möglichst gleich große Stücke.

☺ Dieses einfache Beispiel illustriert die Stufen der Rationalität.
Alle Voraussetzungen sind tatsächlich nötig für unsere Analyse!

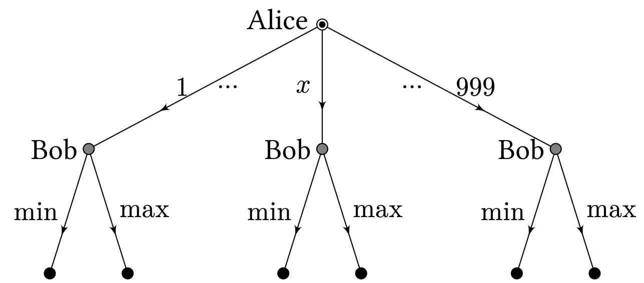
☺ Wir werden später strategische Spiele in Normalform erklären und diese Lösung als (das einzige) Nash–Gleichgewicht wiedererkennen.

Übung: Sobald Sie die Techniken kennen, führen Sie dies aus!

Beispiel: einen Kuchen teilen

Auszahlungsmatrix (statisch) und Spielbaum (dynamisch) in Gramm:

Alice \ Bob	wähle Min	wähle Max
$x < 500$	x / $1000-x$	$1000-x$ / x
$x = 500$	500 / 500	500 / 500
$x > 500$	$1000-x$ / x	x / $1000-x$



Beispiel: einen Kuchen teilen

⚠ Ohne Rationalität ist eine Analyse / Prognose nahezu unmöglich!
$\mathcal{R}_0$: Wenn Alice oder Bob gar keinen Schokokuchen mag, oder andere Ziele verfolgt, dann können wir kaum vernünftige Vorhersagen machen.

$\mathcal{R}_1$: Vielleicht ist Bob noch jung und unerfahren und kann die Größe von Kuchenstücken nicht treffsicher vergleichen. Die Masse könnte er leicht und zerstörungsfrei wiegen, zum Vergleich genügt eine Balkenwaage. Auch das Volumen könnte er leicht bestimmen, mit dem Archimedischen Prinzip durch Wasserverdrängung. (Das gibt erfahrungsgemäß Sauerei.) Andernfalls täuschen ihn vielleicht komplizierte Formen, etwa fraktale Kuchenstücke, nicht-messbare Mengen etc. Vielleicht möchte Alice genau dies provozieren, falls sie so etwas überhaupt herstellen kann.

$\mathcal{R}_2$: Ist Alice irrational so könnte sie ein großes Stück schneiden und naiv hoffen, Bob nimmt das kleinere. Ist Bob rational, so wird er das nicht tun. Wenn Bob sich leicht täuschen ließe, könnte Alice zwei ungleiche Stücke so schneiden, dass Bob das kleinere und das größere verwechselt. Wenn Bob das jedoch durchschaut, dann steht Alice schlechter da.

Beispiel: einen Kuchen teilen

Ist das Ergebnis „fair“ oder „gerecht“? Nun ja, das kommt darauf an… Dies sind zunächst keine klar festgelegten Begriffe. Dazu müssten wir die Ziele „Fairness“ oder „Gerechtigkeit“ erst genauer definieren und dann anhand objektiver und nachvollziehbarer Kriterien prüfen.

Wenn das erklärte Ziel ist, den Kuchen möglichst hälftig aufzuteilen, dann wird dies durch das Spiel „Die eine teilt, der andere wählt“ recht gut implementiert. Dazu müssen beide Spieler „nur“ rational handeln und zudem die Spielaktionen sicher und präzise ausführen können.

- Wenn Bob präzise schätzen kann, aber Alice nur grob schneiden, dann ist Bob im Vorteil, und das Spiel verläuft zu seinen Gunsten.
- Wenn Alice präzise schneiden kann, aber Bob nur grob schätzen, dann ist Alice im Vorteil, und das Spiel verläuft zu ihren Gunsten.

Wenn wir uns Alice und Bob wirklich als kleine Kinder vorstellen, dann hängt die Fairness von ihrem Alter und ihren Fähigkeiten ab. Die Asymmetrie des Spiels könnten wir per Münzwurf beheben, eine eventuelle Asymmetrie der Fähigkeiten hingegen nicht!

Beispiel: ein Erbe teilen

Aufgabe: Alice und Bob erben 1 000 000€. Das Testament verlangt: Alice nennt dem Notar eine Teilung, x für Bob und $1\,000\,000 - x$ für Alice. Zur Vereinfachung nehmen wir im Folgenden $x \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$ an. Dies kann Bob nun annehmen… oder ablehnen, dann verfällt das Erbe. Was wird passieren? rational? irrational? Ist das Ergebnis gerecht?

Lösung: $\mathscr{R}_0$: Jeder will seine Auszahlung maximieren. Diese Annahme ist grundlegend für unsere Analyse!

$\mathscr{R}_1$: Bob wird jeden Vorschlag $x > 0$ annehmen. Das ist vielleicht wenig, aber besser als nichts.

$\mathscr{R}_2$: Alice weiß dies und schlägt $x = 1$€ vor.

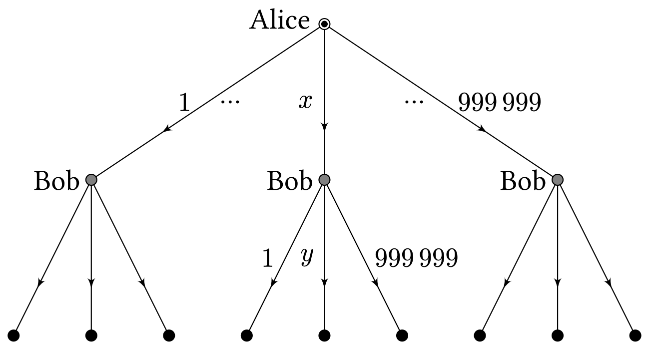
☺ Dieses einfache Beispiel illustriert die Stufen der Rationalität. Alle Voraussetzungen sind tatsächlich nötig für unsere Analyse!

☺ Wir werden später dynamische Spiele erklären und diese Lösung als (das einzige) teilspielperfekte Gleichgewicht wiedererkennen.

Übung: Sobald Sie die Techniken kennen, führen Sie dies aus!

Beispiel: ein Erbe teilen

Wir formalisieren folgende Variante: Alice fordert $x \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$. Anschließend fordert Bob $y \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$. Gilt $x + y \leq 1\,000\,000$, so tritt die Aufteilung (x, y) in Kraft, andernfalls verfällt das Erbe.



Hier ist die zeitliche Reihenfolge entscheidend: Alice macht ihr Angebot und kann nicht mehr zurück, Bob ist daher unter Zugzwang. Muss Bob zuerst fordern, so ist es umgekehrt. Als Variante ist auch gleichzeitige verdeckte Abgabe von Alice’ Angebot und Bobs Forderung denkbar.

Beispiel: ein Erbe teilen

⚠ Ohne Rationalität ist eine Analyse / Prognose nahezu unmöglich: $\mathscr{R}_0$: Wenn Alice oder Bob gar kein Geld haben will, oder andere Ziele verfolgt, dann können wir kaum vernünftige Vorhersagen machen.

$\mathscr{R}_1$: Wir gehen hier davon aus, dass Bob streng rational ist. „Wer den Euro nicht ehrt, ist das Erbe nicht wert.“ Ist das zwingend? Vielleicht hat Bob ein extremes Gerechtigkeitsempfinden und wird nur den Vorschlag $x = 500\,000$€ akzeptieren, nicht weniger, aber auch nicht mehr. Das ist irrational, aber möglich. Vielleicht hat Bob 850 000€ Schulden und wird von Mafiakillern verfolgt, dann würde er nur $x \geq 850\,000$€ akzeptieren.

$\mathscr{R}_2$: Wenn Alice an Bobs Rationalität zweifelt, dann sollte sie ihre Strategie anpassen. Zum Beispiel könnte Bob drohen: „Alles unter 300 000€ werde ich ablehnen.“ Aber ist diese Drohung glaubwürdig? Wird er das wirklich tun, wenn er vor der endgültigen Entscheidung steht? Wenn er rational ist, sicher nicht! Andernfalls vielleicht doch…

Alice muss also die Rationalität von Bob einschätzen. Das ist schwierig. Der Idealfall ist perfekte Rationalität, aber das ist nicht immer realistisch.

Beispiel: ein Erbe teilen

Ist das Ergebnis „fair“ oder „gerecht“? Nun ja, das kommt darauf an… Dies sind zunächst keine klar festgelegten Begriffe. Dazu müssten wir die Ziele „Fairness“ oder „Gerechtigkeit“ erst genauer definieren und dann anhand objektiver und nachvollziehbarer Kriterien prüfen.

- Wenn das erklärte Ziel ist, das Erbe möglichst hälftig aufzuteilen, dann wird es durch das Testament denkbar schlecht implementiert.
- Wenn das Ziel nur ist, das Testament wortgetreu auszuführen, dann erfüllt das beschriebene rationale Verhalten genau dies.

Genauso gut hätte der Erblasser die Aufteilung 999 999€ für Alice und 1€ für Bob im Testament festlegen können. Ist diese Festlegung un/fair? Das Testament ist ungewöhnlich, aber nicht zwangsläufig un/gerecht; dazu müssten wir viel mehr Vorgeschichte und Kontext kennen.

Ist das Erbe ausgleichende Un/Gerechtigkeit für früheres Verhalten? Und was ist mit Chuck, der nicht erwähnt wurde und nichts bekommt? Vielleicht wäre es besser, das Erbe verfällt an wohltätige Zwecke… Vielleicht will der Erblasser Alice und Bob eine Lehre erteilen?

Meuterei auf der Bounty (1935)

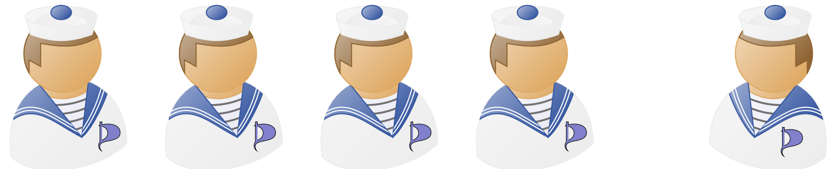
A217

Mutiny on the Bounty mit Clark Gable und Charles Laughton unter der Regie von Frank Lloyd. Oscar 1936 als bester Film.

Fünf gierige Piraten / *the pirate game*

A218

Fünf basisdemokratische Piraten $1, 2, 3, 4, 5$ teilen sich 100 Dukaten. (nach Ian Stewart: *A Puzzle for Pirates.* Scientific American 5/1999)



Der ranghöchste Pirat 5 schlägt eine Zuteilung zur Abstimmung vor. Stimmt mindestens die Hälfte dafür, so wird diese Zuteilung ausgeführt. Bei Ablehnung wird der Vorschlagende über Bord ins Meer geworfen, und die verbleibenden Piraten beginnen das Spiel von vorn.

Präzisierung: Ein Dukat ist unteilbar. Jeder Pirat will A: selbst überleben, B: möglichst viel Gold, C: bei Indifferenz lieber andere ins Meer werfen, D: lieber rangniedrige bestechen als ranghohe. Jeder Pirat ist rational. Absprachen sind unmöglich, denn jeder misstraut jedem anderen und würde Absprachen brechen. Diese Fakten sind gemeinsames Wissen.

Fünf gierige Piraten / *the pirate game*

A219

Naiv könnte man vermuten, der ranghöchste Pirat muss um sein Leben fürchten und daher all sein Gold hergeben. Das Gegenteil ist der Fall!

Aufgabe: Lösen Sie das Piratenrätsel für $n = 5$, sowie für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Wir nutzen Induktion über $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ und finden:

	1	2	3	4	5	…	197	198	199	200	201	202
	100	☠	☠	☠	☠	…	☠	☠	☠	☠	☠	☠
$\mathscr{R}_1$	0	100	☠	☠	☠	…	☠	☠	☠	☠	☠	☠
$\mathscr{R}_2$	1	0	99	☠	☠	…	☠	☠	☠	☠	☠	☠
$\mathscr{R}_3$	0	1	0	99	☠	…	☠	☠	☠	☠	☠	☠
$\mathscr{R}_4$	1	0	1	0	98	…	☠	☠	☠	☠	☠	☠
⋮												
$\mathscr{R}_{197}$	0	1	0	1	0	…	0	2	☠	☠	☠	☠
$\mathscr{R}_{198}$	1	0	1	0	1	…	1	0	1	☠	☠	☠
$\mathscr{R}_{199}$	0	1	0	1	0	…	0	1	0	1	☠	☠
$\mathscr{R}_{200}$	1	0	1	0	1	…	1	0	1	0	0	☠
$\mathscr{R}_{201}$	0	1	0	1	0	…	0	1	0	1	0	0

Fünf gierige Piraten / *the pirate game*

A220
Übung

🙂 Scharfsinn, Systematik & Induktion liefern die erstaunliche Antwort! Wir nutzen die Prioritäten A–C und strenge Rationalität, insb. Egoismus ohne Kooperation. Real beobachtetes Verhalten kann davon abweichen.

⚠ Im Spiel mit $n \ge 201$ Piraten geht es nur noch ums Überleben! Der Vorschlagende $n = 201, 202, 204, 208, \dots$ kann überleben, der Verschlagende $n = 203, 205, 206, 207, \dots$ leider nicht.

Zur Analyse zerlegen wir $n = 200 + 2^k + r$ mit $k, r \in \mathbb{N}$ und $0 \le r < 2^k$.

Im Falle $0 < r < 2^k$ geht Pirat n über die Planke, egal was er vorschlägt: Er kann nur 100 Piraten bestechen. Dazu bekommt er alle r Stimmen der Todgeweihten (inklusive seiner selbst). Das bleibt eine Minderheit.

Im Falle $r = 0$ überlebt Pirat $n = 200 + 2^k$ durch folgende Strategie:

- Falls k gerade ist, gibt er allen Ungeraden $1, 3, \dots, 199$ je ein Dukat.
- Falls k ungerade ist, gibt er allen Geraden $2, 4, \dots, 200$ je ein Dukat.

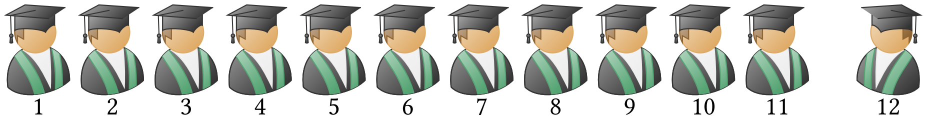
So bekommt er alle 100 Stimmen der Bestochenen und zusätzlich noch alle $2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$ Stimmen der Geretteten (inklusive seiner selbst).

🙂 Prioritäten A–D lösen Indifferenzen und garantieren Eindeutigkeit.

Ein Komitee zur Verbesserung der Hochschullehre

A221 Übung

Die chronisch unterfinanzierte Hochschullehre soll mit einer Förderung von 50 k€ exzellent werden. (Das ist aberwitzig, aber besser als nichts.) Ein Komitee von zwölf Professoren teilt die Fördersumme unter sich auf.



Der dienstälteste Professor 12 legt eine Zuteilung zur Abstimmung vor. Bei Ablehnung wird der Vorschlagende als befangen ausgeschlossen, und die verbleibenden Professoren beginnen das Komiteespiel von vorn. Präzisierung: Ein k€ ist unteilbar. Weiter gelten obige Piratenregeln.

Aufgabe: Welcher Professor erhält wie viel von der Fördersumme? Lösen Sie das Komiteespiel mit folgenden Abstimmungsregeln:
(1) Annahme erfordert mehr als die Hälfte der Stimmen.
(2) Annahme erfordert mindestens zwei Drittel der Stimmen.
(3) Annahme gilt erst bei höchstens einer Gegenstimme.

Das Komiteespiel: mehr als die Hälfte

A222 Übung

Lösung: (1) Wir nutzen Induktion über $n = 1, 2, \dots, 12$ und finden:

n	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	50	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
2	2	50	0	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
3	2	0	1	49	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
4	3	1	2	0	47	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
5	3	2	0	1	0	47	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
6	4	0	1	2	1	0	46	☠	☠	☠	☠	☠	☠
7	4	1	2	0	0	1	0	46	☠	☠	☠	☠	☠
8	5	2	0	1	1	0	1	0	45	☠	☠	☠	☠
9	5	0	1	2	0	1	0	1	0	45	☠	☠	☠
10	6	1	2	0	1	0	1	0	1	0	44	☠	☠
11	6	2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	44	☠
12	7	0	1	2	1	0	1	0	1	0	1	0	43

Jeder Vorsitzende n kann sich das Quorum $q = 1 + \lfloor n/2 \rfloor$ billig erkaufen und sich selbst den Löwenanteil des zu verteilenden Geldes sichern.

Das Komiteespiel: mindestens zwei Drittel

A223 Übung

Lösung: (2) Wir nutzen Induktion über $n = 1, 2, \dots, 12$ und finden:

n	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	50	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
2	2	50	0	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
3	2	0	1	49	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
4	3	1	2	0	47	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
5	4	2	3	1	0	44	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
6	4	3	0	2	1	0	44	☠	☠	☠	☠	☠	☠
7	5	0	1	3	2	1	0	43	☠	☠	☠	☠	☠
8	6	1	2	0	3	2	1	0	41	☠	☠	☠	☠
9	6	2	3	1	0	0	2	1	0	41	☠	☠	☠
10	7	3	0	2	1	1	0	2	1	0	40	☠	☠
11	8	0	1	3	2	2	1	0	2	1	0	38	☠
12	8	1	2	0	3	0	2	1	0	2	1	0	38

Jeder Vorsitzende n kann sich das Quorum $q = \lfloor 3n/2 \rfloor$ billig erkaufen und sich selbst den Löwenanteil des zu verteilenden Geldes sichern.

Das Komiteespiel: höchstens eine Gegenstimme

A224 Übung

Lösung: (3) Wir nutzen Induktion über $n = 1, 2, \dots, 12$ und finden:

n	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	50	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
2	1	0	50	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
3	2	1	0	49	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
4	3	2	1	0	47	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
5	4	3	2	1	0	44	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
6	5	4	3	2	1	0	40	☠	☠	☠	☠	☠	☠
7	6	5	4	3	2	1	0	35	☠	☠	☠	☠	☠
8	7	6	5	4	3	2	1	0	29	☠	☠	☠	☠
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	22	☠	☠	☠
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	14	☠	☠
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	5	☠
12	11	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	5	0

Professor 12 kann sich nicht genug Unterstützung erkaufen. Professor 11 hingegen bringt seinen Vorschlag mit überwältigender Mehrheit durch.

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Im **Casino Royal** (25.10.2019) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, unsere mathematische Lösung des Piratenspiels in der Praxis zu testen. Das kostet etwas Zeit, liefert aber eindrückliches Anschauungsmaterial. Genau zu diesem Zweck haben wir das Casino Royal eingerichtet.

Ich empfehle nachdrücklich praktische **Experimente zur Spieltheorie**, denn Theorie und Praxis können erstaunlich weit auseinanderklaffen. Wer das erlebt hat, sieht diesen Themenkomplex mit anderen Augen. Ich halte den konkreten Vergleich für lehrreich, ehrlich und heilsam.

Das gilt insbesondere in **Verhandlungen**, so wie hier: Es genügt nicht, rational zu (ver)handeln und einen möglichst guten Plan zu (er)finden, man muss zudem auch die anderen überzeugen! (hier: mehrheitlich) Dazu muss jeder Spieler genaustens die Ir/Rationalität seiner Mitspieler berücksichtigen, und das macht die Verhandlungen beliebig komplex.

🙂 Wir haben viel gelernt und zudem hat es großen Spaß gemacht: **Konkrete Experimente überraschen und begeistern immer wieder.** Vielen Dank an alle engagierten und spielfreudigen Teilnehmer:innen!

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Auf die Ankündigung, das Piratenspiel experimentell durchzuführen, meldeten sich spontan fünf freiwillig-furchtlose Freibeuter A,B,C,D,E; einige von ihnen kannten die zugehörige Theorie, andere noch nicht. Diesen fünf wurden die fünf Rollen zugelost: 5A, 4B, 3C, 2D, 1E.

Erste Verhandlungsrunde: Zunächst unterbreitet der Capitain 5 einen Vorschlag und untermauert ihn kurz mit seinen weisen Argumenten. Dazu beziehen 4, 3, 2, 1 Stellung. (Man könnte zuvor eine maximale Redezeit vereinbaren, etwa 30s, aber das war hier gar nicht nötig.)

Zur weiteren Aussprache ist eine zweite Verhandlungsrunde möglich. Dann erst unterbreitet der weise Capitain seinen endgültigen Vorschlag und alle stimmen gleichzeitig darüber ab (durch Kreidestück in Faust; optional wäre eine geheime Abstimmung, etwa durch Zungestrecken).

⚠ Dies ist kein Laborexperiment unter kontrollierten Bedingungen. Die Regeln waren zunächst lose gefasst. Die Verhandlung vor Publikum und die Interaktion aller Beteiligten waren an kein Protokoll gebunden. Insbesondere habe ich als Moderator oft dazwischengeplappert.

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Hier mein (stark vereinfachtes) Gedächtnisprotokoll der Ereignisse; sie sind jetzt bereits legendär, die Berichte entsprechend schillernd.

Der Capitain 5A kennt die Theorie und schlägt deshalb die Aufteilung $(1, 0, 1, 0, 98)$ vor. „Das ist die rationale Lösung. Liebe Piraten 3C und 1D, Ihr könnt ruhig zustimmen, von mir bekommt Ihr immerhin ein Dukat. Seid vorsichtig: Wenn Ihr mich über Bord werft, bekommt Ihr gar nichts."

Darauf wendet sich Pirat 4B direkt an die Mannschaft und entgegnet: „Männer, merkt Ihr nicht, wie der Capitain uns gegeneinander ausspielen will? Das dürfen wir uns nicht gefallen lassen. Der Capitain muss weg!"

Pirat 3C: „Wo bleibt bei diesem Vorschlag denn die Gerechtigkeit? Wir müssen als Mannschaft zusammenhalten und gerecht teilen. Nur wer gut und gerecht handelt, kommt in den Piratenhimmel."

Pirat 2D: „Wir haben alle gemeinsam gekämpft und jetzt sollen einige leer ausgehen? Wir sind ein Team, wir müssen zusammenhalten."

Pirat 1E: „Ich finde den Vorschlag eigentlich ganz in Ordnung, aber ein Dukat ist viel zu wenig. Ich verlange 33 Dukaten!"

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Das Publikum entschied, dass eine weitere Aussprache sinnvoll wäre; nach dieser ersten Verhandlungsrunde folgte also noch eine zweite. Nach Austausch aller Argumente schlug der Capitain 5A die Verteilung $(26, 0, 26, 0, 48)$ vor. Dies wurde dann abgestimmt und… angenommen!

🙂 Meine erste Einschätzung und Einordnung dieser Geschehnisse:

Ein Einfluss der Theorie ist deutlich: Der Capitain 5A konzentrierte sich sofort auf die aus seiner Sicht allein entscheidenden Piraten 3C und 1E. Daran änderte auch die weitere Diskussion nichts. Teile und herrsche!

Diese Koalition $\{5, 3, 1\}$ machte alles weitere unter sich aus, und genau dieses Triumvirat stimmte schließlich für den Vorschlag des Capitains. Die Appelle der gezwungenen Opposition $\{2, 4\}$ verhallten ungehört.

Entgegen der Theorie kam es nicht zu der Aufteilung $(1, 0, 1, 0, 98)$, sondern $(26, 0, 26, 0, 48)$. Die Zahlen scheinen mir zwar willkürlich, doch die Tendenz ist klar: Der Capitain 5A wollte ein deutliches Entgegenkommen zeigen, um beide Stimmen sicher zu erhalten. Diese waren nun bitter nötig, und er wollte kein Risiko eingehen.

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Dieses erste Piratenspiel war bereits sehr lehrreich und unterhaltsam, doch dann kam alles noch besser, noch spannender, noch verrückter. Nach Beratung beschließen alle Anwesenden, dieselben fünf erneut spielen zu lassen, mit neu zugelosten Rollen: 5C, 4B, 3A, 2E, 1D.

Dies wirft die Frage auf, ob sich die Piraten an ihren vorigen Beutezug und an die Verhandlungen erinnern können, oder ob die rauschende Feier mit viel Rum ihr Gedächtnis gelöscht hat. Diese Frage bleibt offen. Nun nehmen die Geschehnisse ihren sensationellen Verlauf:

Capitain 5C: „In dieser harten Piratenrealität geht es nur ums Gold. Lasst Euch nichts einreden und glaubt nicht an Himmel oder Hölle! Ich schlage deshalb die einzig rationale Verteilung $(1, 0, 1, 0, 98)$ vor.“ Alle lachen verwundert über diese Bekehrung vom Paulus zum Saulus.

Das Sein bestimmt das Bewusstsein.
Karl Marx (1809–1865)

Nach einer Verhandlungsrunde bleibt der Capitain bei seinem Vorschlag. In der Abstimmung wird dieser abgelehnt, der Capitain geht über Bord.

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Pirat 4B: „Männer, wir müssen als Mannschaft zusammenhalten, wir brauchen eine möglichst große Crew, wir brauchen jeden Mann, um unsere Gegner besiegen zu können. Ich schlage die Aufteilung $(0, 1, 0, 99)$ vor.“ In der Abstimmung scheitert dieser Vorschlag jedoch. Unter anerkennendem Applaus geht auch der Vizecapitain über Bord.

Pirat 3A: „Lieber Pirat 1D, Du siehst ja, was passieren wird: Wenn ich über Bord gehe, wird Pirat 2E dich über den Tisch ziehen. Also gebe ich Dir ein Dukat, das ist für dich viel besser als nichts.“ Erstaunlicherweise wird auch dieser klare, einfache, wohlbegründete Vorschlag abgelehnt. Nach allzu kurzer Karriere geht Capitain 3A unter Applaus über Bord.

Pirat 2E schlägt 1D großzügig vor: „Machen wir Halbe-Halbe?“ – „Ja.“ Die glücklichen Überlebenden erhalten jeweils beachtliche 50 Dukaten. Die einst so stolze Piratenmannschaft, auf allen Weltmeeren gefürchtet, ist nach diesen harten Verhandlungen allerdings arg reduziert.

A house divided against itself, cannot stand.
Abraham Lincoln (1809–1865)

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Dieser Verlauf der Verhandlungen war unerwartet, turbulent, verblüffend und vollkommen entgegen unserer eigenen theoretischen Vorhersage.

Rational lässt sich das hier beobachtete Verhalten nicht erklären! Das ist eine schmetternde Niederlage für die Spieltheoretiker:in, aber zugleich auch ihre beste Verteidigung: Die Spieler waren eben nicht rational.

Damit kann sich die Spieltheoretiker:in elegant aus der Affäre ziehen, oder überhaupt jede Wissenschaftler:in im Zwiespalt zwischen Theorie und Empirie: Die nötigen Voraussetzungen waren eben nicht erfüllt.

Genauer: Nach einem ersten, seriösen Piratenspiel wurden die Spieler im zweiten Durchgang wagemutiger… und verspielter. Es ging ja nicht um viel, jedenfalls nicht um echtes Gold oder gar um Leben und Tod.

Die mögliche Interaktion der Spieler mit dem Publikum betonte zudem den Spaßfaktor, ermutigte das theatralische Schauspiel und schwächte die berechnende Profitmaximierung, also die Grundvoraussetzung $\mathcal{R}_0$: Der Profit bestand nun nicht nur aus den Dukaten, sondern auch und hauptsächlich aus der Interaktion selbst und dem (Schau-)Spielspaß.

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Die Rationalität $\mathcal{R}_1$ wächst mit zunehmender Spielerfahrung: Jeder Spieler versteht die Spielregeln und all ihre Konsequenzen.

Doch wenn bei einigen das Fundament $\mathcal{R}_0$ bröckelt, dann schwindet bei anderen das nötige Vertrauen $\mathcal{R}_2$ in die Rationalität der Gegenspieler. So lässt sich schließlich kaum noch rational planen und (ver)handeln.

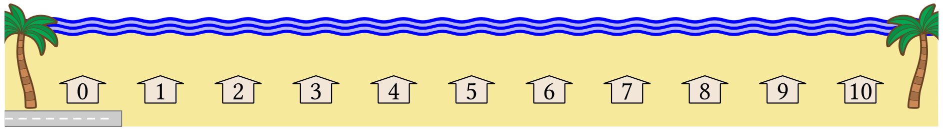
Für Abstimmungen ist das besonders dramatisch: Es genügt nicht, selbst rational zu (ver)handeln und einen möglichst guten Plan zu (er)finden, man muss zudem die (qualifizierte Mehrheit der) anderen überzeugen!

Zwei Dinge sind unendlich, das Universum und die menschliche Dummheit, aber beim Universum bin ich mir noch nicht ganz sicher.
Albert Einstein zugeschrieben, wohl fälschlicherweise

If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.
John von Neumann (1903–1957)

Später untersuchen wir Verhandlungen, Koalitionen, Wahlsysteme, Auktionen, etc. als wichtige Anwendungsgebiete der Spieltheorie.

Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand



Sie eröffnen einen Kiosk, mögliche Positionen sind $x \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Die Badegäste sind gleichverteilt und gehen immer zum nächsten Kiosk. Jeder Spieler (Kiosk) maximiert seine Kundenzahl (Umsatz, Marktanteil). Bei sonst gleichem Anteil sucht jeder die Nähe zur Zufahrtstraße bei 0.

Aufgabe: (1) Sie haben die einzige Lizenz. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
(2) Sie haben die erste von zwei Lizenzen. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
(3) Sie haben die erste von drei Lizenzen. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
Finden Sie zu jedem Zug von A die beste Antwort von B und von C!

Antwort: Bei rationalem Verhalten finden wir folgende Anordnungen:

(1)	A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2)	0	1	2	3	B	A	6	7	8	9	10
(3)	0	1	B	C	4	5	6	7	A	9	10

Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand

Ausführlich: Frage (1) wird gelöst durch die offensichtliche Optimierung.
Bei Frage (2) suchen wir zu jedem Zug von A die beste Antwort von B:

A	B										1 : 10
	A	B									2 : 9
		A	B								3 : 8
			A	B							4 : 7
				A	B						5 : 6
				B	A						6 : 5
					B	A					5 : 6
						B	A				4 : 7
							B	A			3 : 8
								B	A		2 : 9
									B	A	1 : 10

Versuchen Sie, die Lösung sauber aufzuschreiben: Wie organisieren Sie Ihre Notation und Ihre Argumente möglichst klar und nachvollziehbar?

Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand

Antwort (3) ist länger, wir müssen systematisch und sorgfältig vorgehen. Dies ist ein einfach-schönes Beispiel der kombinatorischen Spieltheorie: Wir durchsuchen hier einen endlichen Entscheidungsbaum, zählen alle Möglichkeiten auf und sortieren sie nach den Kriterien der Rationalität.

⚠ Jeder Spieler muss bei seiner Analyse Annahmen machen über die Rationalität seiner Gegenspieler. Ich nenne dazu ein einfaches Beispiel:

Wäre B gierig und dumm, dann wäre Platz 4 für A ein guter Zug: Spieler B wird kurzsichtig Platz 5 wählen, und Spieler C folgt auf Platz 6.

				A	B	C				

Sind B und C rational, dann wäre Platz 4 für A ein schlechter Zug: Spieler B wird schlau Platz 6 wählen, und Spieler C folgt auf Platz 3.

			C	A		B				

Um unsere Analyse zu vereinfachen, nehmen wir hier vollständige Rationalität an, wie oben erklärt. Damit wird das Kioskproblem stark vereinfacht und lösbar durch eine kombinatorische Optimierung.

Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand

Aufgabe: Diskutieren und lösen Sie das Problem für drei Kiosklizenzen. Versuchen Sie, Ihre Lösung sauber aufzuschreiben: Wie organisieren Sie Ihre Notation und Argumente möglichst klar und nachvollziehbar?

Wenn Sie Freude daran haben, diskutieren Sie Erweiterungen:
Was passiert, wenn Kiosk A und C demselben Spieler gehören?
Was passiert, wenn Kiosk B und C demselben Spieler gehören?
Was passiert, wenn Kiosk A und B demselben Spieler gehören?

Aufgabe: Wenn Sie programmieren, dann können Sie die einfachen, aber lästig-länglichen Aufzählungen einem Computer übertragen.

Tipp: Programmieren Sie so am besten gleich das allgemeinere Problem für einen Strand der Länge ℓ und k Kiosklizenzen, wobei $1 \le k \le \ell$ gelte, oder allgemein einen Graphen mit Kantenlängen und Eckengewichten.

Herausforderung: Erweitern Sie dies zu Koalitionen, wobei sich die Kioske in feste Gruppen einteilen, so wie die Filialen einer Kette. Denkbar sind zwei Spieler, die abwechselnd ihre Kioske setzen. Kniffliger: Ein Losverfahren entscheidet, wer als nächster setzt.

Ein Modell, viele Anwendungen

Ist das paradox? TED-Ed zu Hotellings Gesetz, `youtu.be/jILgxeNBK_8`
Die hier untersuchten Spiele sind stark vereinfacht, manchmal lächerlich, oft genug übertrieben simpel, doch sie treffen häufig einen wahren Kern. Solch konkrete Beispiele benennen und repräsentieren typische Muster.

Es geht in der Spieltheorie einerseits um konkrete Spiele und Strategien, um explizite Probleme und präzise Lösungen, um rationales Handeln, empirisch notgedrungen ebenso um begrenzt rationales Verhalten. Auf präzise Fragen erhoffen wir uns ebenso präzise Antworten.

Andererseits geht es auch um gemeinsame Muster und Mechanismen. Wenn Alice und Bob einen Kuchen oder ein Erbe teilen, dann beschreibt das im Prinzip auch allgemeine Teilungs- und Verhandlungsprobleme. Die Details sind verschieden, aber die Mechanismen sind ähnlich.

In konkreten Anwendungen müssen wir genaue Daten berücksichtigen, es gibt viel mehr Wenn-und-Aber, und all das ist auch gut und richtig so. Dennoch: Nach Sichtung und Abwägung aller Details, stellt sich in erster Näherung häufig genug ein lehrreiches Muster als wesentlich heraus.

Ein Modell, viele Anwendungen

Das Strandkiosk-Problem ist eine schöne kombinatorische Aufgabe. Sie steht hier stellvertretend für ähnliche Spiele, allgemein für Konflikte um eine räumliche Marktaufteilung, Konkurrenz um Marktanteile, etc. Der Kampf um den Strand kann auch noch anderes darstellen!

Denken Sie zum Beispiel an ein politisches Spektrum; die verbreitete Sprechweise von „links“ und „rechts“ ist eine hilfreiche Vereinfachung. Wir gehen davon aus, dass Wähler über das Spektrum verteilt sind und immer genau die Partei wählen, die ihrer Position am nächsten liegt.

Wenn es nur eine Partei A gibt, wie positioniert sie sich im Spektrum? Nun, das ist eigentlich egal, da sie ohnehin alle Wählerstimmen erhält. Genau dies ist in Ein-Parteien-Staaten tatsächlich meist zu beobachten. Wenn es aber zwei Parteien A und B gibt, wie positioniert sich die erste?

Genau dieses Problem haben wir oben gelöst! Tatsächlich beobachten wir in der politischen Debatte den Kampf um die „Mitte der Gesellschaft“. Gibt es weitere Parteien C,D,..., so entflammen zudem Flügelkämpfe. Jetzt wissen Sie genauer, warum das strategisch unvermeidlich ist.

Ein Modell, viele Anwendungen

Moment mal, können wir das banale Strandkiosk-Problem ernsthaft vergleichen mit hochkomplizierten parteipolitischen Strategien? Genau genommen natürlich nicht, aber grob gesagt schon.

Das ist die Stärke und zugleich die Begrenzung abstrakter Modelle: Sie treffen einen Kern des Problems, sie sind einfach und übersichtlich und leicht zu verstehen, sie taugen wunderbar als erste Näherung. Sie dienen als Ausgangspunkt und Orientierung für Anwendungen.

Für eine genauere Analyse im konkreten Einzelfall dürfen wir natürlich nicht stur bei dieser Grundidee verharren, sondern müssen wesentlich weiter gehen und genauer hinschauen. Im obigen Parteienbeispiel:

- Die politische Landschaft ist heute nicht (mehr) eindimensional.
- Das Wählerverhalten ist nicht (mehr) ganz so einfach vorhersehbar.
- Der Kampf um den linken / rechten Rand ist ein heikler Balanceakt.

Daher müssen wir unser Modell weiter verfeinern und kalibrieren durch genauere Daten. Auch begrenzt ir/rationales Verhalten ist zu erwarten, dies untersucht die empirische Spieltheorie und Verhaltensökonomik.

Ein Modell, viele Anwendungen

Ökonomische Modelle können uns gute grundlegende Einsichten über komplizierte Situationen vermitteln, Geschichten erzählen, dafür sind sie großartig. Aber wie benutzt man Modelle richtig?
John Kay (Interview in Die Zeit 25. Juli 2019)

Wir werden dieses bemerkenswerte Phänomen noch oft beobachten: Selbst einfache Spiele können den wahren Kern eines Konflikts treffen. Physiker:innen sprechen traditionell nüchtern von der **ersten Näherung**, die bei Bedarf durch die zweite, dritte, ... Näherung verfeinert wird.

Das **Modell**, das wir von der **Realität** entwerfen, hilft und leitet uns, doch niemals sollten wir naiv das Modell für die Wirklichkeit halten. Von dieser ersten Näherung ausgehend können wir unser Modell je nach Bedarf verfeinern und konkreten Gegebenheiten anpassen.

Die Wirklichkeit ist komplizierter als sie auf den ersten Blick scheint. Dies erfordert intellektuelle Redlichkeit und mathematische Sorgfalt. Das spieltheoretische Modell dient als Grundlage. Selbst wo es versagt, ist es der Maßstab für die Abweichung von Prognose und Beobachtung.

Ir/Rational verhandeln: drohen oder nachgeben?

A241

	USA	EU
⓪ Start		
$\mathscr{R}_3$ — (1a) USA drohen nicht.	5	9
(1b) USA drohen mit Zöllen.		
$\mathscr{R}_2$ — (2a) Europa gibt nach.	6	7
(2b) Europa droht ebenfalls.		
$\mathscr{R}_1$ — (3a) USA lenken ein.	4	8
(3b) Es kommt zum Handelskrieg.	3	6

Aufgabe: Was wird passieren? rational? irrational? Wie erklären und bewerten Sie Trumps explizite Doktrin: „We have to be unpredictable.“ Kann es helfen, irrational zu *sein*? oder dafür *gehalten* zu werden?

Lösung: $\mathscr{R}_0$: Jeder kennt und maximiert sein Ergebnis (wie gezeigt).
$\mathscr{R}_1$: Vor einem Handelskrieg lenken die USA im 3. Zug ein (vorteilhaft).
$\mathscr{R}_2$: Die EU weiß dies, daher wird sie im 2. Zug drohen (vorteilhaft).
$\mathscr{R}_3$: Die USA wissen dies, also werden sie im 1. Zug nicht drohen.

Ir/Rational verhandeln: drohen oder nachgeben?

A242 Erläuterung

Die Zahlen rechts bewerten jeden der möglichen Ausgänge für die USA und die EU auf einer (fiktiven) Werteskala. Wir denken an eine geeignete Gewichtung aus wirtschaftlichem Ertrag, politischem Ansehen, etc.

⚠ Solche Zahlen sind schwer zu ermitteln und sind oft umstritten. Wir nehmen sie für unser Modell als gegeben an und analysieren die Situation auf dieser Grundlage. Andere Kalibrierungen sind möglich.

⚠ Unsere Analyse benötigt alle Voraussetzungen zur Rationalität.

$\mathscr{R}_1$: Sind die USA irrational, so könnten sie sich im 3. Zug für einen Handelskrieg entscheiden, obwohl dies zu ihrem Nachteil wäre. Das kann an einer falschen Einschätzung der Situation liegen, anderen Bewertungen, oder allgemein an mangelnder Rationalität.

$\mathscr{R}_2$: Im 2. Zug muss die EU daher die Rationalität der USA einschätzen. Gegen einen Wahnsinnigen wäre es tatsächlich besser einzulenken!

$\mathscr{R}_3$: Im 1. Zug hätten die USA also Interesse daran, für wahnsinnig gehalten zu werden: Das entspricht einem Bluff. Nur dann wäre es rational, mit einer Drohung die Eskalation überhaupt erst einzuleiten.

Nochmal unser Experiment: „Hin-und-Rück“

A243 Erläuterung

Im Lichte dieser Erkenntnisse spielen wir erneut „Hin-und-Rück“.

A: 10		B: 0
	$-x$ / $+2x$	
A: $10-x$		B: $2x$
	$+y$ / $-y$	
A: $10-x+y$		B: $2x-y$

Aufgabe: Maximieren Sie Ihre Erträge bei diesem Spiel!
Wie gelingt das rational? für Spieler B? für Spieler A?

Sie haben nun Präzisierungen zur Rationalität und **Spielerfahrung**, vor allem wissen Sie jetzt, wie die anderen sich verhalten (haben). Versuchen Sie im zweiten Durchgang, Ihre Erträge zu maximieren!

Verhaltensökonomik [*behavioral economics*] untersucht menschliches Verhalten, speziell die Abweichung zwischen Empirie / Experiment und Theorie / Prognose. (`en.wikipedia.org/wiki/Behavioral_economics`)

Nochmal unser Experiment: „Hin-und-Rück“

A244 Erläuterung

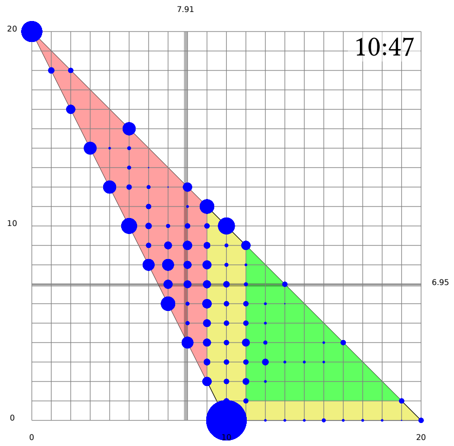
Dieses Experiment ist für alle Teilnehmer zunächst nur ein Spiel. Zugleich ist es auch ein **Messinstrument sozialer Interaktion**. Die empirischen Ergebnisse sind lehrreiche Messwerte: Manche Teilnehmer verhalten sich eher egoistisch, andere eher altruistisch.

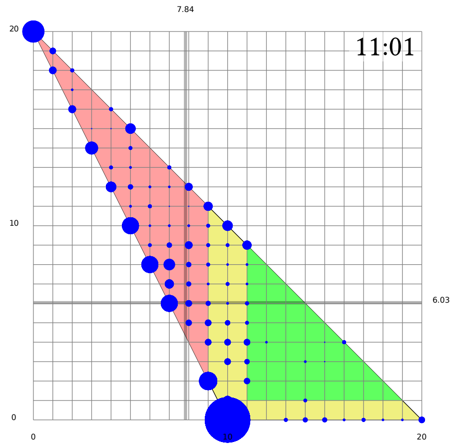
Was genau die Spielerpopulation tun wird, lässt sich kaum vorhersagen, sondern nur experimentell messen. Die Auswertung zeigt ein Abbild unserer (kleinen) Gesellschaft und misst das gegenseitige Vertrauen. Diese Information benötigen / schätzen rationale Spieler bei ihrer Wahl.

Kaum jemand spielt vollkommen rational, und das ist für alle vorteilhaft: Im Durchschnitt zahlt sich das Wagnis der Kooperation tatsächlich aus! Wir werden später für wiederholte Spiele erklären, wie sich kooperatives Verhalten langfristig begründen lässt, siehe Nash Folk Theorem K2E.

Hier jedoch wird das Spiel nur einmal gespielt, oder bei mehrfachem Spiel immer neue Spieler ausgelost. Die beobachtete Kooperation ist hier nicht rational. Sie beruht vermutlich auf begrenzter Rationalität sowie der Trägheit unserer Verhaltensmuster und sozialen Normen.

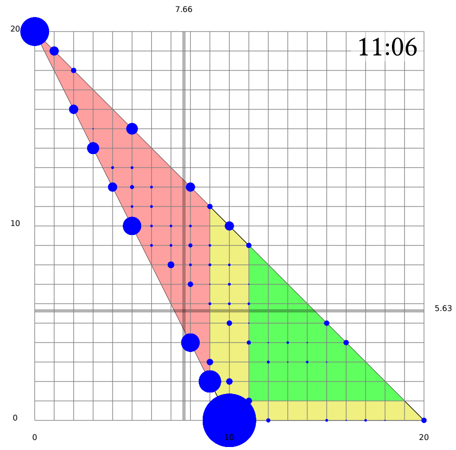
Unser Experiment „Hin-und-Rück“





Momentaufnahmen der Studierendenpopulation vom 10. April 2018.
Die Graphiken zeigen alle Spielergebnisse für Spieler A und B.

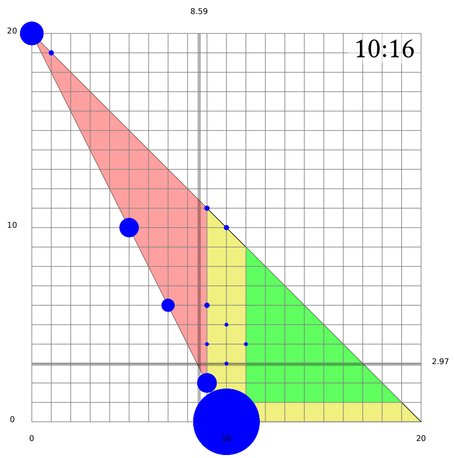
Unser Experiment „Hin-und-Rück“

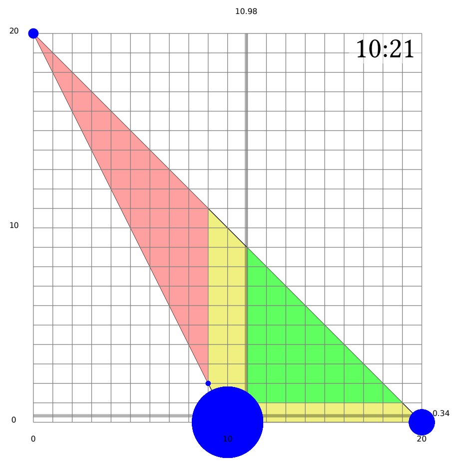


Die Graphiken zeigen deutlich eine Entwicklung, anfangs zaghaft, dann beschleunigt. Die Spieler erkennen schnell (durch empirische Erfahrung oder mathematische Analyse), dass sich Kooperation für B hier nicht lohnt. Im nächsten Schritt erkennen sie, dass sich Kooperation dann auch für A nicht lohnt. Das Spielverhalten durchläuft so eine Evolution und steuert auf ein Gleichgewicht zu.

Momentaufnahmen der Studierendenpopulation vom 10. April 2018.
Innerhalb kurzer Zeit sehen wir eine recht deutliche Entwicklung!

Unser Experiment „Hin-und-Rück“





Momentaufnahmen der Studierendenpopulation vom 24. April 2018.
Erfahrung, Erzählung und Nachdenken ändern das Spielverhalten.
Nach einer Woche und fünf Runden stabilisert sich das Ergebnis.
Schließlich obsiegt doch das rational-egoistische Spielverhalten.

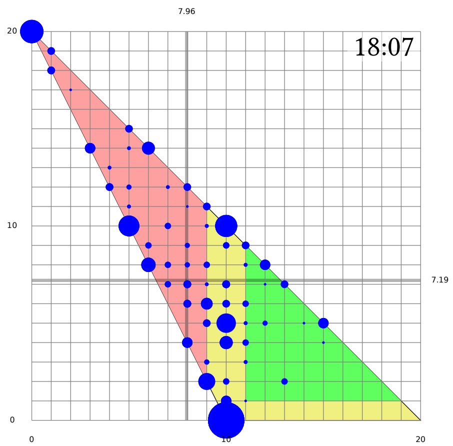
Unser Experiment „Hin-und-Rück“

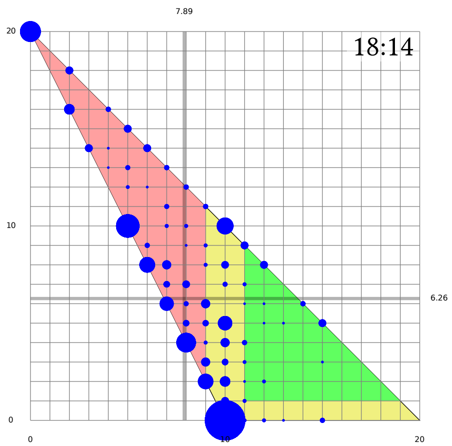
Die Daten wurden nicht unter kontrollierten Laborbedingungen erhoben, dennoch sind sie überaus interessant: Es ist unser eigenes Verhalten! Durch zunehmende praktische Erfahrung und theoretische Kenntnisse verbessert jede Spieler:in ihre individuelle Strategie. Insgesamt nehmen Egoist:innen zu und die Altruist:innen ab, und der Gesamtertrag sinkt!

Die trickreichen Regeln belohnen nicht Kooperation, sondern Egoismus. Dieses Spiel provoziert ein berühmtes Paradox: Jeder einzelne Spieler versucht rational, seinen Profit zu maximieren. Die Gesellschaft wird im Gesamtbild egoistischer, das gegenseitige Vertrauen sinkt, damit auch der Gesamtertrag. Lokale Maximierung führt in ein globales Minimum.

Dem einen oder der anderen wird dieses Ergebnis sehr missfallen, es mag sogar schockieren: Obwohl Kooperation möglich ist und zu beiderseitigem Nutzen wäre, werden die Spieler immer egoistischer. Das liegt daran, dass Egoismus belohnt und Altruismus bestraft wird. Wir werden später für wiederholte Spiele erklären, wie sich kooperatives Verhalten langfristig begründen lässt, siehe Nash Folk Theorem K2E.

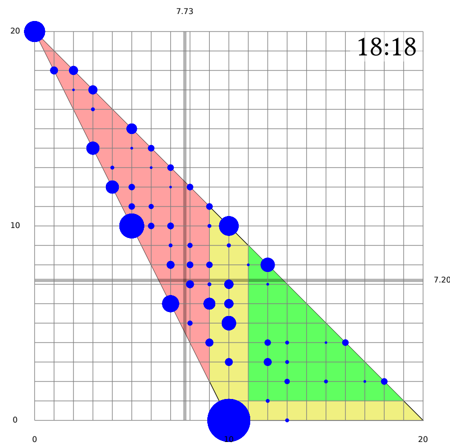
Unser Experiment „Hin-und-Rück“





Momentaufnahmen der Teilnehmerpopulation vom 08. Juli 2019.
Die Graphiken zeigen alle Spielergebnisse für Spieler A und B.

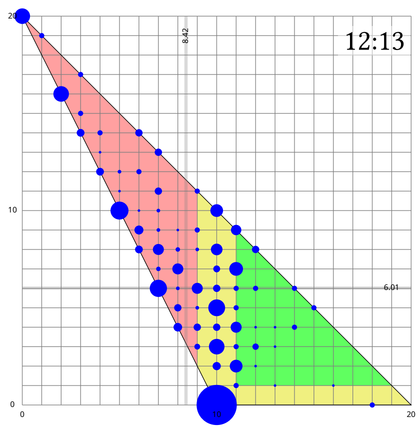
Unser Experiment „Hin-und-Rück“

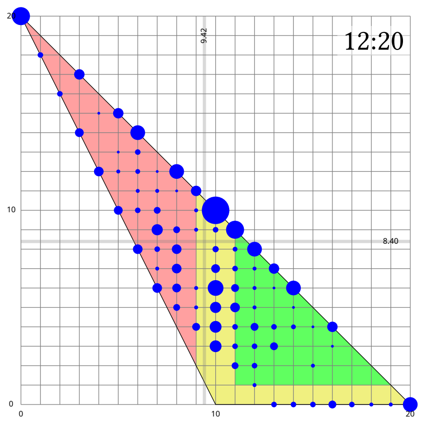


Der zweite Datensatz zeigt eine Abendveranstaltung mit Vortrag und Diskussion der Gruppe reason[Ing.] zum Thema Spieltheorie und Ethik (etwa 50 Anwesende, 40 Spieler). Nach zwei Testrunden wurde in der dritten um echtes Geld gespielt. Die so angekündigte Verschärfung hat das Spielverhalten kaum beeinflusst. Das Verhalten ist ähnlich wie oben, die Entwicklung deutlich langsamer.

Kooperation ist vielleicht wünschenswert, aber nicht immer möglich!
Rationalität ist vielleicht möglich, aber nicht immer wünschenswert?

Unser Experiment „Hin-und-Rück“





Momentaufnahmen der Studierendenpopulation vom 08. April 2025.
Im zweiten Durchgang, mit echtem Geld, waren *alle* mutig-optimistisch!
Diskussion der ersten Runde beeinflusst die Reaktion in der zweiten.
Wie schnell obsiegt hier das rational-egoistische Spielverhalten?

Schnelles Denken, langsames Denken

Ist moralisches Verhalten naiv? Ist Nutzenmaximierung unmoralisch?
Welche Sichtweise beschreibt das real beobachtete Verhalten besser?
Wer hat denn nun Recht: Instinkt oder Kalkül? Ratio oder Moral?

Beide! Am Anfang sehen wir das empfundene moralische Verhalten, auf lange Sicht setzt sich jedoch das rationale Verhalten durch.

Thinking, fast and slow von Daniel Kahneman, Wirtschafts-Nobelpreis 2002, unterscheidet zwei verschiedene Arbeitsweisen unseres Gehirns:

1. Schnell, automatisch, immer aktiv, emotional, stereotyp, unbewusst
2. Langsam, anstrengend, selten aktiv, logisch, berechnend, bewusst

Ihre genetischen Instinkte, soziale Erziehung und eigene Erfahrung sind Ihre ersten und oft einzigen Ratgeber: Sie folgen Ihrem Bauchgefühl, da Sie keine genaue Information haben oder keine Zeit, sie auszuwerten.

Ihr Verstand braucht wesentlich länger, um zu einem Urteil zu kommen. Das lohnt sich, wenn Sie die Muße haben und das Ziel wichtig genug ist. In unserem Experiment sehen wir vermutlich genau diesen Übergang!

Das Standardmodell der Spieltheorie geht davon aus, dass alle Spieler rational sind. Dies nennt man traditionell auch **Homo oeconomicus** und meint damit allgemein einen rationalen Akteur oder Nutzenmaximierer.

Die Vorhersagen der Theorie kann man in Experimenten überprüfen: In einigen Experimenten stellt sich recht genau das prognostizierte Gleichgewicht ein (eventuell erst nach mehreren Wiederholungen), in anderen hingegen nicht (oder noch nicht, allzu langsame Konvergenz).

Es gibt dabei wie in allen Wissenschaften grundsätzlich zwei Arten von Experimenten: passiv-beobachtend und aktiv-kontrollierend.

Feldstudien untersuchen echte Daten aus realen Situationen (etwa Auktionen, Märkte, Verhandlungen). **Vorteile:** Echte Daten aus realen Situationen. Die Erhebung der Daten kann schwierig sein, sie wird vereinfacht, falls die Interaktion ohnehin online stattfindet. **Nachteile:** Die reale Situation ist oft kompliziert und die Struktur des Spiels nicht klar definiert. Oft können viele Einflussgrößen nicht kontrolliert werden; sie beeinflussen die Ergebnisse, sind aber unbekannt oder unzugänglich.

Laborexperimente lassen Versuchspersonen im Labor gegeneinander spielen. **Vorteile:** Das Spiel ist genau definiert und kontrolliert (Regeln, Kommunikation, Auszahlungen, Vorwissen, Framing, Randomisierung). Durch geschickt konstruierte Spiele können Fragestellungen ganz gezielt untersucht und Hypothesen getestet werden. **Nachteile:** Die Situation ist künstlich, das beobachtete Verhalten oft nur eingeschränkt übertragbar. Meist wird nur um kleine Beträge gespielt, die Nutzenoptimierung ist dadurch weniger ausgeprägt, die Skalierung vermutlich problematisch.

Manchmal wollen Teilnehmer nur spielen (sic!), selbst experimentieren oder ihren Spaß haben, den Spielleiter beeindrucken oder vermuteten Erwartungen ent/widersprechen (wie Fairness, Rationalität, etc).

Trotz dieser Schwierigkeiten und methodischen Herausforderungen ist die experimentelle Spieltheorie überaus erfolgreich. Verhaltensökonomik [*behavioural economics*] ist für viele Unternehmen ein zentrales Thema: Wenn sich Kunden schon nicht rational verhalten, so will man dennoch vorhersagen können, wie sie sich verhalten: **predictable irrationality**.

„Dieser Zustand ist unbefriedigend.“, beklagte eine Studentin enttäuscht. Ja, sicher, wie immer ist die Wirklichkeit komplizierter als die Theorie. Ich sehe diese erste (schockierende) Einsicht als Erfolg: Wir haben den Begriff der Rationalität präzisiert und sogleich experimentell getestet. Wir haben in kurzer Zeit und mit wenig Aufwand bereits viel gelernt.

Rationale Spieler müssen die Irrationalität ihrer Mitspieler einschätzen. Selbst wenn sie selbst vollkommen rational sind, so wählen sie doch Ihre Strategie abhängig davon, ob sie gegen einen unfehlbaren Computer spielen oder eine bunt gemischte Gruppe Ihrer Mitmenschen, wie oben. Es geht hier also um Rationalität zweiter Stufe (im Sinne von A2A).

Ich bemühe mich in meinem Vortrag um eine ehrliche Darstellung, daher präsentiere ich zur Rationalität nicht nur Definition und Anwendungen, sondern skizziere zugleich ihre Grenzen. Diese sind oft eng gesteckt.

Diese Dialektik der Un/Vernunft ist erfahrungsgemäß ein starker Impuls für viele Zuhörer. Mein improvisiertes Experiment dürfen interessierte Teilnehmer gerne verbessern: Das ist ein ehrenwertes, lohnendes Ziel!

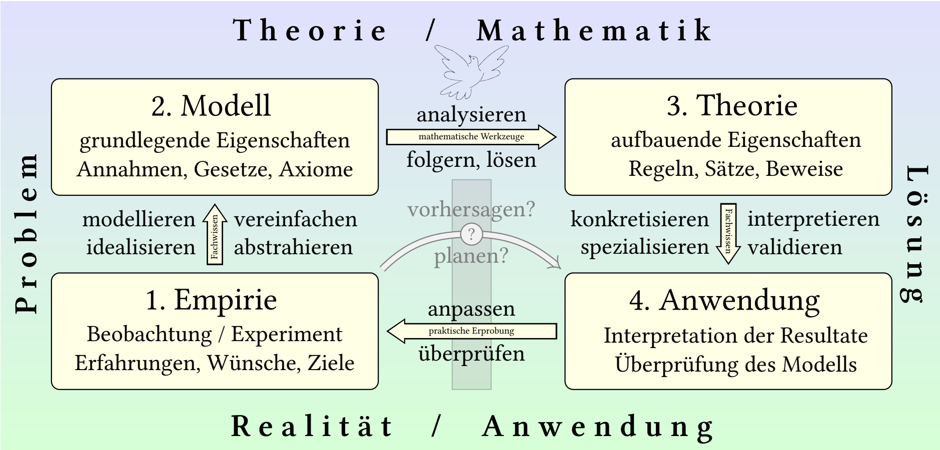
„Das ist unwissenschaftlich.“, kritisierte ein Student meinen Versuch. Ja, zugegeben, es ist eher lustiges Partyspiel als seriöses Experiment. Ich denke, es trifft einen wahren Kern; das ist zunächst nur eine These. Es dient als didaktische Illustration und eindrücklicher Anstoß, nicht als wissenschaftliche Dokumentation und Ergebnis. Sollen wir deshalb auf gemeinsames Spiel und persönliche Erfahrung verzichten? Keinesfalls!

„Der Begriff *Rationalität* wird hier zu eng und einseitig gefasst.“ Ja, auch das ist richtig. Viele Teilnehmer haben zur Rationalität unterschiedliches Vorwissen, Intuition oder Ansichten. Die Definition präzisiert den Begriff als bequeme Zusammenfassung. Das Wort selbst ist nur eine hilfreiche Abkürzung, es ist nur ein Platzhalter und ansonsten willkürlich ersetzbar.

Wichtig ist nicht das Wort, sondern seine Bedeutung: Die Definition präzisiert und fixiert den Sinn, den wir für das Folgende vereinbaren. Sie dürfen gerne anderer Meinung sein, doch zum Zwecke unserer Diskussion müssen wir den Dingen einen eindeutigen Namen geben, um darüber sprechen zu können und uns nicht ewig im Kreise zu drehen.

Wozu dient Mathematik?

Alles Leben ist Problemlösen. (Karl Popper, 1902–1994)



Mathematik untersucht sowohl abstrakte Strukturen als auch konkrete Anwendungen. Dies sind keine Gegensätze, sondern sie ergänzen sich!

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant, 1724–1804)

Wozu dient Mathematik?

Wir beginnen mit der **Empirie**, also konkreten **Beobachtungen** und praktischen **Erfahrungen**. Hieran erkennen wir erste **Probleme** und formulieren unsere **Ziele**: Wir wollen die vorliegenden Probleme lösen!

Wenn wir bereits eine mögliche Lösung vorliegen haben oder zumindest vermuten, dann können wir sie **überprüfen** und soweit nötig **anpassen**. (Tradition, Erfahrung, Ausbildung, Anleitung, Nachahmung, Erklärvideo)

Meist kennen wir jedoch noch gar keine Lösung. Wir könnten uns durch Versuch-und-Irrtum vortasten, doch blindes Herumprobieren kostet Zeit, oft dauert es zu lange, ist zu aufwändig, gefährlich oder gar unmöglich.

Besser wir gehen **planvoll** vor und suchen **systematisch** nach einer Lösung, oder gar nach allen Lösungen, um dann die beste auszuwählen.

Das ist der **Nutzen der Theorie**: Sie erweitert unseren Werkzeugkasten, wo bloßes Probieren nicht genügt. Theorie und Anwendung ergänzen sich: Proben sind weiterhin gut und richtig, doch erst die Theorie liefert neue Ansätze, die sich lohnen auszuprobieren. Die Trefferquote steigt.

Probieren geht über Studieren? **Studieren erweitert Probieren!**

Ist Spieltheorie deskriptiv oder normativ?

Modelle können **deskriptiv**, aber auch **normativ** eingesetzt werden. Deskriptiv: beschreibend (Kettenlinie), erklärend (Planetenbewegung), vorhersagend (Wetterprognose). Normativ: vorschreibend (Bauplan), planend (Raumsonde), gesetzgebend (Umwelt- und Klimaschutz).

Das Kiosk-Problem haben wir durch systematische Untersuchung aller Fälle gelöst. Bei drei Spielern erfordert dies $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ Fälle; hier sind Systematik und Sorgfalt unbedingt erforderlich, um keinen Fall zu vergessen oder falsch auszuwerten. Das ist mühsam, aber es lohnt sich!

Diese Genauigkeit ist typisch für wissenschaftliche Vorgehensweise. Logik und Systematik, Ehrlichkeit und Sorgfalt sind die grundlegenden Techniken der Mathematik — und jeder ernsthaften Untersuchung.

Dieses Anwendungsproblem ist vereinfacht, doch halbwegs realistisch. Die Analyse gibt einen klaren Ratschlag, gar eine Handlungsanweisung: Bei drei Lizenzen sollte der erste Platz 8 wählen. Das ist keineswegs offensichtlich, sogar eher überraschend. Hier ist die Theorie normativ. Entspricht dies den Beobachtungen? Hier kommt die Empirie ins Spiel!

Ist Spieltheorie deskriptiv oder normativ?

Spieltheorie kann nicht nur normativ, sondern auch deskriptiv genutzt werden, etwa um beobachtetes Verhalten zu beschreiben und zu erklären. Hier ist unser Experiment „Hin-und-Rück“ lehrreich und überraschend!

Die Theorie untersucht wie immer zunächst das rationale Verhalten. $\mathcal{R}_1$: Spieler B schickt nichts zurück. $\mathcal{R}_2$: Spieler A schickt nichts hin. Das beobachtete Verhalten sieht jedoch ganz anders aus! Hierzu ist entscheidend, ehrliche und ausgeklügelte Experimente durchzuführen.

Wie ist die Abweichung zu erklären? Einerseits gehen die Spieler nicht streng rational vor, etwa weil die Zeit oder der Wille für eine genauere Analyse fehlt, oder weil Überzeugungen von Moral und Gerechtigkeit mitschwingen. Eine verbesserte Theorie sollte dies berücksichtigen!

Andererseits können wir das Experiment verbessern und erweitern. Durch wiederholtes Spielen gewinnen die Teilnehmer an Erfahrung: Probieren ergänzt studieren! Das beobachtete Verhalten nähert sich dann tatsächlich der theoretischen Vorhersage. Unsere Theorie macht also doch zutreffende Vorhersagen, aber auf etwas subtilere Weise.

Wo wird die Spieltheorie genutzt und angewendet?

Die Spieltheorie ist kaum achtzig Jahre alt, sie wächst rasant weiter und entfaltet einen großen Einfluss. Sie wird nahezu überall angewendet, zumeist interdisziplinär, wie unsere ersten Beispiele erahnen lassen.

Besonders naheliegend sind ökonomische Anwendungen:
- Management (Unternehmensstrategien, Optimierung, Anreize)
- Märkte (Konkurrenz, Marktdesign, In/Effizienz, De/Regulierung)
- Auktionen (effiziente Zuteilung von Ressourcen, faire Teilung)
- Kontrollinstanzen (Wettbewerbsschutz, Verbraucherschutz)

Der Übergang zur Politik ist dabei fließend:
- Wirtschaftspolitik (Mechanismen, Kartellgesetze, Oligopoltheorie)
- Wettbewerbspolitik (internationale Handelsbeziehungen, Zölle)
- Geldpolitik (Inflation, Stabilität, Regulation, Finanzkrisen)
- Sozialpolitik (Steuern, Anreize, Ausgleich, Wohlfahrt)

Wo wird die Spieltheorie genutzt und angewendet?

Die Spieltheorie betrifft nahezu alle Bereiche der Politik...
- Kollektive Entscheidungen (Wahlsysteme, Abstimmungen)
- Gesetzgebung (kollektives Verhalten, Anreize und Verbote)
- Verhandlungen und Verträge, internationale Beziehungen
- Umweltschutz, ABC-Waffen-Verbot, Abrüstung, Kontrollen
- Internationale Konventionen, Menschenrechte, Kriege

...und des Zusammenlebens in unserer Gesellschaft:
- Experimentelle Wirtschaftsforschung (Verhaltensökonomik)
- Soziologie, Psychologie (Interaktion, Kommunikation, Social Media)
- Philosophie (Ir/Rationalität, Moral, Freiheit, Gesellschaftsvertrag)
- Pädagogik (Interaktion, Rahmen, Erziehung, Lerntheorie)
- Justiz (gesellschaftliche Normen, Zivilrecht, Strafgesetz)

Gesellschaftliche Interaktion ist angewandte Spieltheorie! Entweder direkt: Wie maximiere ich meinen Vorteil? (Optimierung) Oder indirekt: Welche Regeln führen zu welchem Verhalten? (Mechanismendesign)

Wo wird die Spieltheorie genutzt und angewendet?

Die Spieltheorie betrifft ebenso viele Grundlagenwissenschaften:
- Biologie und Medizin (Ko/Evolution von Genen, auch Memen)
- Systemtheorie (Interaktion, Selbstorganisation, Musterbildung)
- Quantenspiele (Spiele auf quantenmechanischen Trägern)
- Komplexitätstheorie (Lösung von Spielen, Gleichgewichte)
- Logik (Mengenlehre, Determiniertheit, Beweistheorie)

Besonders fruchtbar ist die Wechselwirkung mit der Informatik:
- Protokolle für strategische Agenten (Netzwerke, Sicherheit)
- Peer-to-Peer Systeme (Reputation, Feedback, Review)
- Kryptowährungen (gegenseitige Kontrolle, Incentives)
- Data Science, Künstliche Intelligenz, Machine Learning
- Distributed AI, Multiagent-Systems, Robotics, uvm.

Spieltheorie dient als theoretische Grundlage und praktisches Werkzeug, sowohl deskriptiv-erklärend als auch konstruktiv-angewandt.

Wo wird die Spieltheorie genutzt und angewendet?

Die Spieltheorie untersucht Konflikte, Konkurrenz und Kooperation. Sie hilft, strategische Entscheidungssituationen besser zu verstehen.

Sie ist damit extrem vielseitig anwendbar, denn fast alles ist ein Spiel, oder genauer gesagt: Fast alles lässt sich als ein Spiel betrachten.

Sobald mehrere Entscheider (Individuen, Akteure, Spieler) gemeinsam ein Ergebnis erzielen, ist dies ein Anwendungsgebiet der Spieltheorie.

Es ist bemerkenswert, dass sich bei dieser enormen Spannweite der Anwendungen dennoch eine gemeinsame Theorie entwickeln lässt.

Abstraktion ist die Kunst, Wesentliches von Unwesentlichem zu trennen. Denkökonomie: Daten ändern sich, doch Methoden bleiben bestehen.

Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung. Sie ist schön und gut: ästhetische Kunst und nützliches Handwerk.

Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen! Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

Literatur: Einführungen

Es gibt viele gute Lehrbücher zur Spieltheorie. Die ersten bieten eine Einführung und motivieren, illustrieren, erläutern ausführlich. Weitere vertiefen anspruchsvolle Begriffe und mathematische Techniken. Die richtige Balance ist schwer zu finden und hängt vor allem von der Leser:in ab! Zur Orientierung und als Anregung habe ich für Sie einige empfehlenswerte Bücher ausgewählt. Meine Auswahl versucht den überaus vielfältigen Aspekten der Spieltheorie gerecht zu werden und durch Kommentare einzuordnen. Vielleicht kann Sie dies zum Schmökern anregen.

Ken Binmore:
Fun and Games. Heath & Co 1992

Für Freude am Lesen, leicht, klar, mit schönen Illustrationen, dagegen kaum Beweise. Geduld und Beharrlichkeit werden belohnt durch packende Geschichten und reichen Beispielfundus.

Robert Gibbons:
A Primer in Game Theory. Prentice Hall 1992

Knappe und intuitive doch umfassende Einführung, wenig Formalismus und wenig Vertiefung.

Avinash Dixit, Susan Skeath, David Reiley:
Games of Strategy. Norton & Co 2014

Eine freundliche und ausführliche Einführung, wortreich und formelarm.

Literatur: Einführungen

Die folgenden Einführungen sind wesentlich umfangfreicher und ausführlicher. Die Darstellung führt von wortreich-formelarm (für ein allgemeines Publikum und WiWi-Einführungen) hin zur effizienten Nutzung des mathematischen Formalismus (wie im Mathe- und Informatikstudium). Beides hat seine Vorteile, je nach Publikum und Zielsetzung. Dosieren Sie selbst!

David M. Kreps:
A Course in Microeconomic Theory. Princeton University Press 1990

Eine gut motivierte Einführung, wenig Formalismus, dafür sehr ausführliche Erklärungen.

Martin J. Osborne:
An introduction to Game Theory. Oxford University Press 2009

Gut motivierte Einführung, diskutiert viele Beispiele, versucht Präzision mit wenig Mathematik.

Yoav Shoham, Kevin Leyton-Brown: *Multiagent systems: algorithmic, game-theoretic and logical foundation.* Cambridge University Press 2009

Eine Einführung zur Spieltheorie strategischer Agenten: Die Spieltheorie gehört nicht exklusiv den Wirtschaftswissenschaften, in den letzten Jahren boomt sie zunehmend in der Informatik. Die explosionsartige Entwicklung des Internets in den 1990ern erforderte spieltheoretische Methoden in der Informatik und startete eine anhaltende, höchst erfolgreiche Entwicklung.

Literatur: Grundlagen und Vertiefungen

Zielgruppe der folgenden Lehrwerke sind Studierende nach einer ersten Einführung, die ein solides mathematisches Verständnis mitbringen und dies in der Spieltheorie nutzen wollen. Die Darstellung wird dadurch effizienter und dichter: mehr Formeln, weniger Worte.

Steven Tadelis:
Game Theory, an Introduction. Princeton University Press 2013

Ein sehr gut strukturiertes Buch, sorgfältig geschrieben und schön zu lesen. Es eignet sich zum Einstieg und zum Selbststudium, liefert zugleich die mathematische Präzision zur Vertiefung.

Drew Fudenberg, Jean Tirole:
Game Theory. MIT Press 1991

Dieses Lehrbuch bietet eine gute Mischung aus motivierender Erläuterung und mathematischer Ausführung, Fallbeispielen und Übungsaufgaben. Es dient als Referenz und zur Vertiefung.

Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston, Jerry R. Green:
Microeconomic Theory. Oxford University Press 1995

Eine 1000seitige Bibel der Mikroökonomik. Die Theorie wird gründlich und formal dargestellt; dadurch eignet sich das Werk bestens für einen zweiten Durchgang und als Nachschlagewerk. Kapitel 7–9 und 21–23 behandeln Spieltheorie, nahtlos eingebettet in die Mikroökonomik.

Literatur: Grundlagen und Vertiefungen

Roger B. Myerson:
Game Theory, Analysis of Conflict. Harvard University Press 1997

Eine schön geschriebene Einführung, von den mathematischen Grundlagen der Nutzentheorie bis zu fortgeschrittenen Konzepten der Spielteorie. Verbindet Motivation mit Sätzen und Beweisen.

Martin J. Osborne, Ariel Rubinstein:
A Course in Game Theory. MIT Press 1994

Viele Beispiele, bemüht um Gleichgewicht zwischen Intuition und Formalismus. Das Buch fordert Selbständigkeit: Viele Anwendungen und Ausführungen sind als Übungen formuliert.

Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy:
Winning Ways for Your Mathematical Plays. A K Peters 2001–2004
Gewinnen: Strategien für mathematische Spiele. Vieweg 1985–1986

John H. Conway: *On Numbers and Games.* A K Peters 2000

Aaron N. Siegel: *Combinatorial Game Theory.* AMS 2013

Die kombinatorische Spieltheorie ist ein riesiges, faszinierendes Gebiet, das wir hier nur streifen. Wer in diese Richtung abbiegt, findet sein Glück in den epischen Klassikern WW und ONAG. Den aktuellen Stand der Forschung in rigoroser Darstellung bietet Siegels CGT.

Literatur: Klassiker, alt und neu

A313 Erläuterung

John von Neumann, Oskar Morgenstern:
Theory of Games and Economic Behavior. Princeton Univ. Press 1944

Dieses Buch begründete die moderne Spieltheorie und ihre mathematische Untersuchung. Es ist immer noch interessant, aber schwer zu lesen und daher nicht zum Einstieg empfohlen.

R. Duncan Luce, Howard Raiffa:
Games and Decisions. Wiley & Sons 1957, Dover Publications 2012

Eine sehr schöne und umsichtige Darstellung der Grundlagen aus den Anfängen der Spieltheorie, wunderbar geschrieben, wenig formal doch kristallklar. Auch heute noch hervorragend lesbar.

Thomas C. Schelling:
The Strategy of Conflict. Harvard University Press 1960

Der spätere Wirtschafts-Nobelpreisträger des Jahres 2005 erklärt hier die Grundlagen für (nuklear-)strategisches Verhalten. Sein Buch zählt zu den einflussreichsten des 20. Jahrhunderts.

Daniel Kahneman:
Thinking, Fast and Slow. Farrar, Straus and Giroux 2011

Der Wirtschafts-Nobelpreisträger des Jahres 2002 und Mitbegründer der Verhaltensökonomik erklärt seine psychologischen Arbeiten zu Heuristiken und Verzerrungen (*heuristics and biases*).

Literatur: Nachschlagewerke

A314 Erläuterung

Die Spieltheorie ist relativ jung, doch extrem vielseitig und interdisziplinär. Ihre Anwendungen und Vertiefungen entwickeln sich explosionsartig. Nachschlagewerke und Handbücher sind daher unverzichtbar für den Überblick. Wenn Sie sich schon etwas auskennen und nach neuen Ideen stöbern wollen, dann kann ich gut geschriebene Übersichtsartikel nur wärmstens empfehlen.

Robert J. Aumann, Sergiu Hart (eds):
Handbook of Game Theory 1–3. North Holland 1992–2002

Kenneth J. Arrow, Michael D. Intriligator (eds):
Handbook of Mathematical Economics 1–4. North Holland 1981–1991

Schließlich liegt der Schritt zur Informatik, Künstlichen Intelligenz und Maschinellem Lernen nahe: Jeder strategische Agent versucht sein Verhalten zu optimieren, also spielend zu lernen. Dieser Ansatz hat in den letzten Jahren zu spektakulären Erfolgen geführt und ist inzwischen in unserem Alltag angekommen. Dieser Trend wird sich in den nächsten Jahren weiter verstärken.

Noam Nisan, Tim Roughgarden, Éva Tardos, Vijay Vazirani (eds):
Algorithmic Game Theory. Cambridge University Press 2007

Stuart Russell, Peter Norvig: *Artificial Intelligence: A Modern Approach.* Addison Wesley (3rd ed.) 2016

Literatur: Evolutionäre Spieltheorie

A315 Erläuterung

John Maynard Smith: *Evolution and the Theory of Games.* CUP 1982

Richard Dawkins: *The Selfish Gene.* OUP 1976, 40th anniv. ed. 2016

Herbert Gintis: *Game Theory Evolving.* PUP 2009

Josef Hofbauer, Karl Sigmund: *Evolutionary Games and Population Dynamics.* Cambridge University Press 1998

William H. Sandholm: *Population Games and Evolutionary Dynamics – Economic Learning and Social Evolution.* MIT Press 2010

Die Evolutionäre Spieltheorie erforscht evolutionäre Prozesse mit spieltheoretischen Methoden. Dieser Zugang ist in der Evolutionsbiologie höchst erfolgreich seit der Pionierarbeit *The Logic of Animal Conflict* von John Maynard Smith and George R. Price, online `doi.org/10.1038/246015a0`. Umgekehrt bereichert die evolutionäre Sichtweise auch die klassische Spieltheorie um Dynamik, Anpassung, Lernen, ... Auch hier ist die Literatur umfangreich, ich nenne eine kleine Auswahl.

Paul Raeburn, Kevin Zollman: *The Game Theorist's Guide to Parenting.* Scientific American / Farrar, Straus and Giroux 2017

Teilnehmer:innen berichten, dass ihnen die Sichtweise der Spieltheorie oft im Alltag begegnet, etwa als Eltern in Fragen der Erziehung. „The best gift for a game theorist. Kids not needed!“

Wie lernen Sie erfolgreich Spieltheorie?

A316 Erläuterung

Diese Vorlesung Spieltheorie fördert Ihr kontinuierliches Mitdenken: Viele der Bei-Spiele sind so aufeinander aufgebaut, dass sie uns in folgenden Kapiteln als hilfreiche Leitbilder und Prüfsteine dienen.

Die Phänomene sind zwar allesamt einfach, doch vielschichtig genug, um verschiedene Betrachtungen, Modellierungen und Verfeinerungen zuzulassen: Rationalität, dominante Strategien, Nash–Gleichgewichte, zeitlich-dynamische Struktur, teilspielperfekte Gleichgewichte, usw.

Die Wirklichkeit ist komplizierter als sie auf den ersten Blick scheint. Gerade deshalb lohnen sich mathematische Präzision und Sorgfalt. Das spieltheoretische Modell dient als Grundlage. Selbst wo es versagt, ist es der Maßstab für die Abweichung von Prognose und Beobachtung.

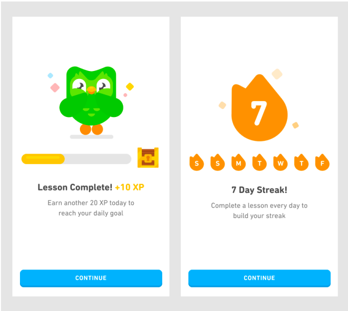
Erfahrungsgemäß provozieren schon erste einfache Versuche einer spieltheoretischen Modellierung lebhafte Diskussionen der Teilnehmer. Diese Auseinandersetzung führt häufig zu lehrreichem Widerspruch und im weiteren Verlauf dann zu einem besseren Verständnis.

Das ist gut und richtig so: Ihr Engagement ist wesentlich!

Was ist Gamification?

Gamifizierung (engl. *gamification*, dt. auch Spielifizierung) ist die „Anwendung spieltypischer Elemente in einem spielfremden Kontext“, in einem Arbeitsumfeld zum Beispiel Erfahrungspunkte, Highscores, Fortschrittsbalken, Ranglisten, virtuelle Güter oder Auszeichnungen.

Das kann die Motivation erhöhen und die soll die Leistung steigern: Benutzermotivation, Lernerfolg, Kundenbindung, Datenqualität, uvm. Ein allseits bekanntes Paradebeispiel ist Sprachlernapp *duolingo*.



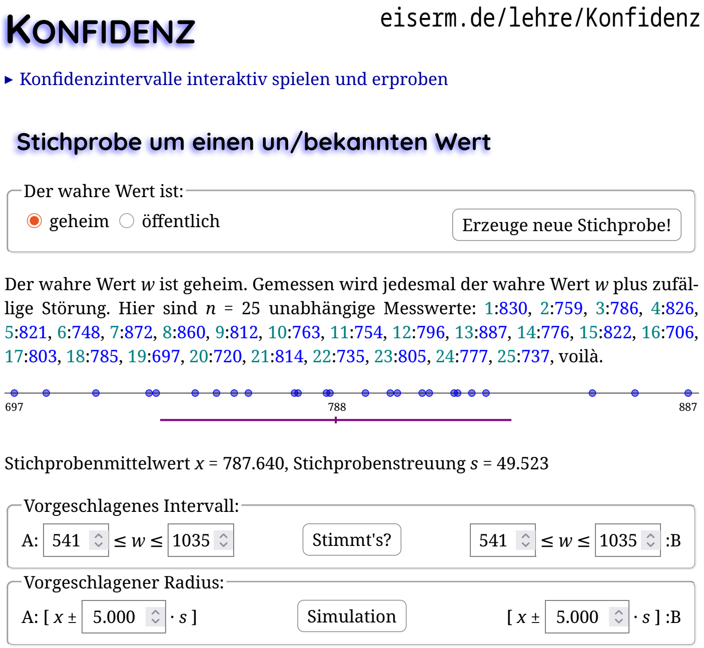
Was ist Gamification?

🙂 Weniger extrem, aber noch besser zugeschnitten und lerneffizienter sind unsere wöchentlichen Quizze auf der Lernplattform Ilias. Friederike Stoll hat sie zu einer hohen Kunst entwickelt, als effizientes Scharnier zwischen Vorlesung und Übung, zur Lernmotivation und Selbstkontrolle.

☹ Wie jedes Werkzeug hat auch Gamifizierung ihre dunklen Seiten. Problematisch ist die Selbstausbeutung bis zur Spielsucht. Gefährlich ist die mögliche Indoktrination, von Verharmlosung bis zur Verherrlichung von Gewalt. Für Drohnenpilot:innen gleicht jeder Kriegseinsatz einem Computerspiel. ▶ Omeleto: *Uncanny Valley.* `youtu.be/1AvyUWUKCw8`

> *Gamifizierung bezeichnet grundsätzlich die Verwendung typischer spielerischer Elemente in einem eigentlich spielfremden Kontext. Im Hinblick auf rechtsterroristische Anschläge zählen hierzu vor allem die Übertragung und Darstellung der Tat aus der sogenannten Ego-Shooter-Perspektive durch Onlinestreaming sowie die Führung von Opferranglisten und das Absolvieren von Herausforderungen (sogenannte Achievements).*
> `www.verfassungsschutz.de` (Glossar, aufgerufen am 17.02.2025)

Beispiel: Was sind und was bedeuten Konfidenzintervalle?



Beispiel: Was sind und was bedeuten Konfidenzintervalle?

Ein wesentliches Ziel der Mathematik sind rationale Entscheidungen. Wir wollen dazu präzise Aussagen mit nachvollziehbaren Begründungen. Die Stochastik untersucht rationale Entscheidungen unter Unsicherheit, etwa Experimente und Messungen unter dem Einfluss von Zufällen oder allgemein Prozesse mit unsicherem Ausgang.

Die Mathematik, hier speziell die Stochastik, bietet effiziente Werkzeuge und erfolgreiche Methoden für viele Probleme des Alltags und technisch-wissenschaftliche Anwendungen. Wie kann man diese gut lernen? Wie am besten lehren? Unsere Webseite `eiserm.de/lehre/Konfidenz` erklärt die berühmt-berüchtigten Konfidenzintervalle als Spiel.

🙂 Das Casino bietet die wunderbare Gelegenheit, Spiele zu erproben!

Unsere Leitidee ist einfach und lässt sich ganz allgemein anwenden: Wir erklären grundlegende mathematische Ideen und Methoden durch interaktive Spiele. Wir machen allgemein nützliche Techniken konkret spielbar; so kann man sie hoffentlich besser begreifen und schließlich verstehen. Die Regeln erklären wir vor dem Spiel. Viel Spaß!

Unendlich oft gleich?

A405 Übung

Rufen Sie „Stopp!“, sobald Sie beweisen können, dass zwei der folgenden Zahlen an unendlich vielen Nachkommastellen übereinstimmen.

$$\begin{aligned}
0 &= 0.\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\ldots\\
1/3 &= 0.\,33333\,33333\,33333\,33333\,33333\,33333\,33333\,33333\,33333\,33333\ldots\\
2/3 &= 0.\,66666\,66666\,66666\,66666\,66666\,66666\,66666\,66666\,66666\,66666\ldots\\
1/7 &= 0.\,14285\,71428\,57142\,85714\,28571\,42857\,14285\,71428\,57142\,85714\ldots\\
\sqrt{2} &= 1.\,41421\,35623\,73095\,04880\,16887\,24209\,69807\,85696\,71875\,37694\ldots\\
\sqrt{3} &= 1.\,73205\,08075\,68877\,29352\,74463\,41505\,87236\,69428\,05253\,81038\ldots\\
\sqrt{5} &= 2.\,23606\,79774\,99789\,69640\,91736\,68731\,27623\,54406\,18359\,61152\ldots\\
\ln 2 &= 0.\,69314\,71805\,59945\,30941\,72321\,21458\,17656\,80755\,00134\,36025\ldots\\
\mathrm{e} &= 2.\,71828\,18284\,59045\,23536\,02874\,71352\,66249\,77572\,47093\,69995\ldots\\
\pi &= 3.\,14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\,50288\,41971\,69399\,37510\ldots\\
\pi^2 &= 9.\,86960\,44010\,89358\,61883\,44909\,99876\,15113\,53136\,99407\,24079\ldots
\end{aligned}$$

Stopp! **Beweis:** Wir haben $q = 10 < p = 11$ und $f_1, \dots, f_p : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_q$.
Schubfachprinzip 1: An jeder Stelle $k \in \mathbb{N}$ haben wir $\{1, \dots, p\} \to \mathbb{Z}_q$ mit $i \mapsto f_i(k)$. Wegen $p > q$ existiert ein Paar $i < j$ mit $f_i(k) = f_j(k)$.

Die Mengen $E_{i,j} := \{\, k \in \mathbb{N} \mid f_i(k) = f_j(k) \,\}$ überdecken $\mathbb{N} = \bigcup_{i<j} E_{i,j}$.
Es gibt nur endlich viele Indexpaare $i < j$, genauer $\binom{p}{2} = p(p-1)/2 = 55$.
Schubfachprinzip 2: Also muss eine der Mengen $E_{i,j}$ unendlich sein. QED

Konkret oder abstrakt? *Be wise, generalize!*

A406 Übung

Wenn wir unsere Zahlen nacheinander vergleichen, so sind die ersten drei klar. Zuerst stutzt man vielleicht bei $1/7$. Dies ist noch kein Treffer.

Bei $\sqrt{2}$ beginnt der Wahnsinn: Die Dezimalentwicklung ist kompliziert und wirkt „zufällig“. Insbesondere möchte man vermuten, dass jede Ziffer unendlich oft vorkommt. Niemand bestreitet das ernsthaft, aber beweisen konnte es noch niemand. Mindestens *zwei* Ziffern müssen unendlich oft vorkommen. (Warum?) Schon *drei* Ziffern scheint eine offene Frage! Auch konnte niemand irgendeine konkrete Ziffer nachweisen!

Auch die folgenden sechs Zahlen sind vermutlich „normal“, das heißt: Alle Ziffern sind asymptotisch gleich häufig, allgemein sogar alle Blöcke von ℓ Ziffern. Fast alle reellen Zahlen sind normal, doch keinem unserer obigen Beispiele wurde bislang Normalität nachgewiesen. Was nun?

Die konkreten Daten inspirieren uns zu vielen spannenden Vermutung, doch diese erweisen sich für uns als allzu knifflig. Letztlich rettet uns das Schubfachprinzip: wunderbar einfach und elegant. Allerdings wissen wir am Ende immer noch nicht, *welche* Paare $i < j$ die Frage beantworten.

Konkret oder abstrakt? *Be wise, generalize!*

A407 Übung

L Vergleichen und diskutieren Sie folgende Formulierungsvarianten:

(A) Sind zwei der obigen Dezimalentwicklungen unendlich oft gleich? Gamifizierung: Zum interaktiven Spektakel enthülle ich schrittweise....

(B) Gibt es unter elf reellen Zahlen in Dezimaldarstellung immer zwei, die an unendlich vielen Nachkommastellen übereinstimmen?

(C) Zeigen Sie: Unter je elf reellen Zahlen gibt es immer zwei, die an unendlich vielen Nachkommastellen übereinstimmen.

Formulierung (A) kann / soll dazu verleiten, über die gegebenen Zahlen nachzudenken. Das erweist sich zwar schnell als kompliziert, provoziert aber weitere interessante Fragen. Die Formulierung (B) leitet gleich auf die einfachere Frage, allerdings noch offen, daher zunächst schwieriger: Zuerst einmal muss man die richtige Antwort finden, dann beweisen! Implizit erwarten (A) und (B) natürlich, dass die Antwort bewiesen wird. Am freundlichsten ist wohl (C), siehe BWM 1994, Runde 1, Aufgabe 1.

E. Specht, E. Quaisser, P. Bauermann: *50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik. Die schönsten Aufgaben.* Springer 2020, online verfügbar.

Konkret oder abstrakt? *Be wise, generalize!*

A408 Übung

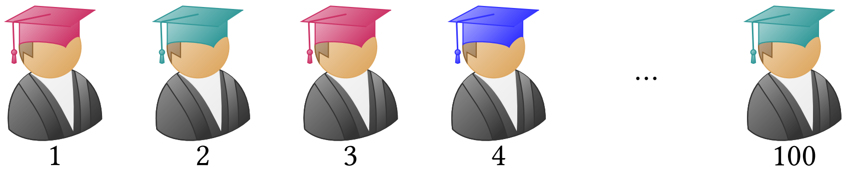
☺ Wie lernt man, Aufgaben zu lösen? Nur indem man Aufgaben löst! Unser eleganter Beweis verwendet das Schubfachprinzip gleich zweimal. Wie kommt man darauf? Wer diesen Trick schon oft erlebt hat, wird ihn naheliegend finden, doch genau dafür muss man ihn ausreichend üben.

Was lernen wir an dieser Aufgabe? Erstens, die Formulierung ist wichtig. Zweitens, manchmal verwirren viele Details, und abstrakter ist leichter. Konkrete Beispiele sind schön und gut, doch detaillierte Information (A) eröffnet auch Abzweige, während weniger Information (B,C) fokussiert.

☹ Der Beweis ist erfreulich kurz und leicht, doch nicht konstruktiv. Wir beweisen hier, wie so oft, die *Existenz* einer Lösung, jedoch ohne eine explizite *Konstruktion*. Mindestens ein Paar der obigen elf Zahlen hat die gewünschte Eigenschaft, doch leider können wir keines explizit angeben.

Starke Aussagen wie „$\sqrt{2}$ ist normal“ sind bequem *anzuwenden*, sie sind explizit und hilfreich, doch leider meistens viel schwieriger zu *beweisen*! In der Not nehmen wir, was wir bekommen können, wenn es sein muss auch eine nicht-konstruktive Existenzaussage. Immerhin ein Anfang.

Huträtsel: Immer der Reihe nach!



Matherätsel haben eine lange Geschichte und diverse Erzähltraditionen: Philosophen, Gefangene, Zwerge, uvm. Hier ein Huträtsel für Studis:

Hundert Studis bekommen je einen Hut aufgesetzt in einer der drei Farben Rot, Grün, Blau. Alle stehen dabei so in einer Reihe, dass Studi n nur die Nachfolger:innen $n+1,\dots,100$ sieht. Jede:r darf nun versuchen, die *eigene* Hutfarbe zu erraten und so 1€ für die Fachgruppe gewinnen.

Aufgabe: Welche Strategie ist optimal? Was ist der garantierte Gewinn? Wie / Hängt die Antwort von der Anzahl der möglichen Hutfarben ab?

Wichtig: *Vor* dem Spiel dürfen die Studis sich absprechen, doch *während* des Spiels erfährt jede:r nur, was die Vorgänger:innen raten. Jede weitere Kommunikation ist ausgeschlossen (verboten oder technisch unmöglich).

Huträtsel: Immer der Reihe nach!

Bitte probieren Sie es unbedingt selbst: Eigenes Aha macht Freude! Aufgaben lösen, auch Huträtsel, lernt man nur durch eigene Übung.

Naiv: Jede:r rät irgendeine der drei Farben. Garantieren kann man so rein gar nichts, auch ein Gewinn von 0€ ist möglich. Wenn die Farben zufällig verteilt werden, dann ist der erwartete Gewinn immerhin $\frac{1}{3}\cdot 100€ \approx 33€$.

Paare: Jede:r ungerade Studi n nennt die Farbe des Vorderstudis $n+1$, und diese:r wiederholt das Gehörte. Garantiert wird damit ein Gewinn von $\ge 50€$. Der Gewinn kann zufällig auch höher liegen.

Optimal: Die Studis vereinbaren zuvor einen Zahlencode in $\mathbb{Z}_3$, etwa $0 = \text{Rot}$, $1 = \text{Grün}$, $2 = \text{Blau}$. Die Hutfarben sind also $x_1,\dots,x_{100} \in \mathbb{Z}_3$.
Studi 1 rät die Summe $r_1 = \sum_{i>1} x_i \in \mathbb{Z}_3$ als eigene Hutfarbe.
Studi 2 berechnet daraus die eigene Hutfarbe $x_2 = r_1 - \sum_{i>2} x_i$.
Studi 3 berechnet daraus die eigene Hutfarbe $x_2 = r_1 - x_2 - \sum_{i>3} x_i$.

So fortfahrend kann der Gewinn von 99€ garantiert werden. Wird die erste Hutfarbe x_1 zufällig verteilt, so ist der Erwartungswert $99€ + \frac{1}{3}€$.

Huträtsel: Auf zum Treffpunkt!

Hundert Studis bekommen je einen Hut aufgesetzt: rot, grün oder blau. Jede:r sieht alle anderen Farben, aber nicht die eigene, und soll nun zu einem der Treffpunkte A,B,C gehen, sodass sich dort nur Gleiche treffen.

Aufgabe: Ist das überhaupt möglich? Mit welcher treffsicheren Strategie? Wie / Hängt die Antwort von der Anzahl der möglichen Hutfarben ab?

Wichtig: *Vor* dem Spiel dürfen die Studis sich absprechen, doch *während* des Spiels ist jede weitere Kommunikation ausgeschlossen, entweder verboten oder technisch unmöglich, zum Beispiel als Emailspiel.

Huträtsel: Auf zum Treffpunkt!

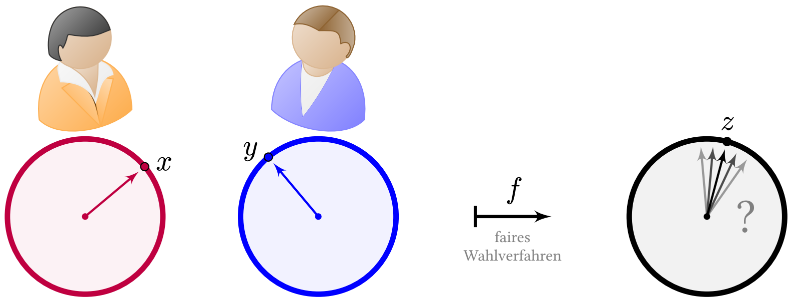
Lösung: Die Studis vereinbaren zuvor einen Zahlencode in $\mathbb{Z}_3$, etwa $0 = \text{Rot}$, $1 = \text{Grün}$, $2 = \text{Blau}$. Die Hutfarben sind also $x_1,\dots,x_{100} \in \mathbb{Z}_3$. Ebenso codieren Sie die Treffpunkte in $\mathbb{Z}_3$, etwa $0 = A$, $1 = B$, $2 = C$.

Die Gesamtsumme $s = \sum_{i=1}^{100} x_i \in \mathbb{Z}_3$ ist keinem Studi bekannt. Doch jede:r Studi k kennt den Rest $r_k = \sum_{i\ne k} x_i = s - x_k \in \mathbb{Z}_3$ und begibt sich daraufhin zu dem zugehörigen Treffpunkt.

Mögliches Anwendungszenario: In der Mathe-Ersti-Woche wollen sich die Lehramtsstudierenden je nach ihrem Zweitfach zusammenfinden. Die Fachgruppe organisiert das gerne und verschickt als gutgemeinten Service an jede:n die Treffpunkte A,B,C,… sowie die Nebenfächer aller anderen, zwecks Datenschutz aber nicht im Klartext, sondern codiert durch $0,1,2,\dots$. In der Eile wird leider das eigene Nebenfach nicht als Code mitgeschickt. Natürlich könnte man in der Fachgruppe nachfragen, aber das wäre zu einfach. So entsteht die Challenge: Können sich trotz unvollständiger Information alle Gleichgesinnten datenschutzkonform absprechen und sicher treffen? Ja, bis auf Permutation der Treffpunkte!

Angewandte Topologie: stetige Richtungswahl

Szenario: Alice und Bob wählen frei und unabhängig voneinander jeweils eine Richtung in der Ebene; Alice wählt $x \in \mathbb{S}^1$, und Bob wählt $y \in \mathbb{S}^1$. Sie suchen nun einen Kompromiss $z = f(x, y)$, also ein Wahlverfahren, das aus ihren Stimmabgaben ein gemeinsames Endergebnis extrahiert.

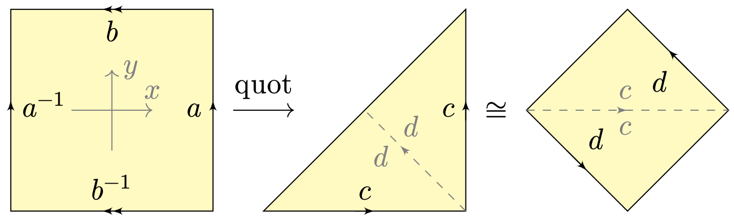


Als Wahlverfahren suchen wir eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Wir fordern Symmetrie, $f(x, y) = f(y, x)$, und Einhelligkeit, $f(x, x) = x$.

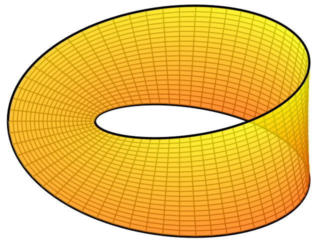
Aufgabe: Finden Sie alle in diesem Sinne fairen Wahlverfahren! Genügt $(x, y) \mapsto x$? nicht symmetrisch! xy? nicht einhellig! $\sqrt{xy}$? nicht stetig!

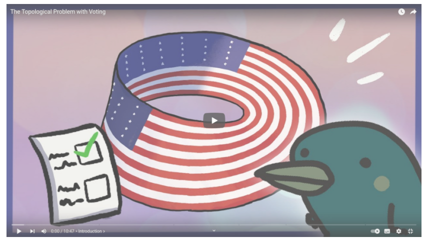
Angewandte Topologie: stetige Richtungswahl

Lösung: (1) Symmetrie bedeutet, f faktorisiert über den Quotienten $M = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/_{(x,y)\sim(y,x)}$ zu $r : M \to \mathbb{S}^1$ auf dem Möbius–Band!



(2) Einhelligkeit bedeutet Retraktion $(i, r) : \mathbb{S}^1 \leftrightarrows M$ auf den Rand.





youtu.be/v5ev-RAg7Xs

Angewandte Topologie: stetige Richtungswahl

Behauptung: Es existiert keine Retraktion $(i, r) : \mathbb{S}^1 \leftrightarrows M$ auf den Rand. Gegeben ist $i : \mathbb{S}^1 \to M : x \mapsto [x, x]$, gesucht $r : M \to \mathbb{S}^1$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$.

Wir haben den Deformationsretrakt $(\iota, \rho) : \mathbb{S}^1 \simeq M$ auf die Mittelachse. Explizit in Formeln? Gerne! $\iota : z \mapsto [+\sqrt{z}, -\sqrt{z}]$ und $\rho(x, y) = -xy$.

Wir hätten $(\varphi, \psi) : \mathbb{S}^1 \rightleftarrows \mathbb{S}^1$ mit $\varphi = \rho \circ i$ und $\psi = r \circ \iota$ und $\psi \circ \varphi \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$, somit $1 = \deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}) = \deg(\psi \circ \varphi) = \deg(\psi) \cdot \deg(\varphi)$, also $\deg(\varphi) = \pm 1$.

Es gilt jedoch $\deg(\varphi) = \pm 2$. Daran zerbricht unsere Annahme: Es gibt keine Retraktion r, somit kein faires Wahlverfahren f. $\boxed{\text{QED}}$

🙂 Dieses Argument ist verblüffend raffiniert und doch einfach elegant. Unsere topologischen Werkzeuge glänzen durch effiziente Anwendung: (1) Flächenkalkül und (2) Umlaufzahl sowie Stetigkeit, Quotienten, etc. Dieses wunderschöne Anwendungsbeispiel topologischer Methoden geht zurück auf Graciela Chichilnisky (1980) und zuvor Beno Eckmann (1954). Historische Einordnung: 📖 Beno Eckmann: *Social choice and topology – a case of pure and applied mathematics.* Expo. Math. 22 (2004) 385–393. Zwei Wissenschaften tun dasselbe, merken es aber erst nach Jahrzehnten!

Angewandte Topologie: stetige Richtungswahl

Sie sehen hier ein erstes schönes und durchaus typisches Ergebnis der Sozialwahltheorie [*social choice theory*], auch Theorie kollektiver Entscheidungen [*theory of collective choice*]. Diese untersucht Wahlen und Abstimmungen, also ganz allgemein Gruppenentscheidungen durch Aggregation individueller Präferenzen zu einer kollektiven Präferenz.

Meist sucht man nach bestimmten „fairen" Wahlverfahren, so wie hier. Der erste Schritt ist die mathematische Präzisierung der Fragestellung! Oft erweisen sich jedoch die naiv-gutgemeinten Forderungen als in sich widersprüchlich und erlauben somit nachweislich keine Lösung, so wie oben gezeigt. Daher beschäftigt sich die Sozialwahltheorie nicht nur mit der Konstruktion von Lösungen, sondern auch mit Unmöglichkeitssätzen.

Mathematik hilft überall, sogar in weit entfernt geglaubten Gebieten… Die Sozialwahltheorie verbindet Mathematik mit Volkswirtschaftslehre, Politikwissenschaft, Psychologie, Philosophie, Rechtswissenschaft, uvm. Berühmt ist der „Satz vom Diktator" nach Kenneth Arrow (1921–2017); für diese und weitere Arbeiten erhielt er 1972 den Wirtschafts-Nobelpreis.

Räume mit Mittelbildung (nach Beno Eckmann)

Sie sind neugierig? Wir folgen hier dem wunderschönen Artikel von 📖 B. Eckmann: *Räume mit Mittelbildungen.* Commentarii Mathematici Helvetici 28 (1954) 329–340, online verfügbar unter `eudml.org/doc/139088`. *(Gewidmet Heinz Hopf in Verehrung und Freundschaft zum 60. Geburtstag)*

Sei $X = \mathbb{R}^k, \mathbb{D}^k, \mathbb{S}^k, \dots$ ein topologischer Raum und $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$. Ein **n–Mittel** auf X ist eine stetige Abbildung $f : X^n \to X$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Symmetrie: Es gilt die Invarianz $f(x_{\sigma 1}, \dots, x_{\sigma n}) = f(x_1, \dots, x_n)$ für jedes n–Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ und jede Permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$.
2. Einhelligkeit: Es gilt $f(x, \dots, x) = x$ für jeden Punkt $x \in X$, d.h. die Diagonale $d : X \to X^n : x \mapsto (x, \dots, x)$ erfüllt $f \circ d = \mathrm{id}_X$.

Beispiele: (1) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^k$. Darauf haben wir das arithmetische n–Mittel $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n)/n$, also den geometrischen Schwerpunkt.

(2) Ist $(X, +)$ ein abelsches topologisches Monoid und $X \to X : x \mapsto x \cdot n$ ein Automorphismus, so ist $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n)/n$ ein n–Mittel.

(3) Auf $\mathbb{R}_{\ge 0}$ haben wir das geometrische Mittel $g(y_1, \dots, y_n) = \sqrt[n]{y_1 \cdots y_n}$. Dank $(\log, \exp) : \mathbb{R}_{\ge 0} \cong \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ wird dies zum arithmetischen Mittel.

Räume mit Mittelbildung (nach Beno Eckmann)

Bemerkung: Für den leeren Raum $\emptyset$ ist alles klar. Im Folgenden sei $X \ne \emptyset$. Auf jedem Raum X ist $\mathrm{id}_X : X \to X$ ein 1–Mittel. Daher sei fortan $n \ge 2$.

(0) Wir untersuchen das algebraische Analogon für eine Gruppe $(G, +)$. Ein **homomorphes n–Mittel** auf G ist eine Abbildung $\mu : G^n \to G$, die symmetrisch und einhellig ist und zudem homomorph in allen Variablen:

$$\mu(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) = \mu(a_1, \dots, a_n) + \mu(b_1, \dots, b_n).$$

Wir definieren damit die Abbildung $\rho : G \to G$ durch

$$\rho(a) := \mu(a, 0, \dots, 0) = \mu(0, a, \dots, 0) = \mu(0, 0, \dots, a).$$

Dies ist ein Gruppenhomomorphismus, denn $\rho(a) + \rho(b) = \rho(a + b)$.

(1) Für alle Gruppenelemente $a, b \in G$ gilt dank Symmetrie und $n \ge 2$:

$$\begin{aligned} \rho(a) + \rho(b) &= \mu(a, 0, 0, \dots, 0) + \mu(0, b, 0, \dots, 0) = \mu(a, b, 0, \dots, 0) \\ \rho(b) + \rho(a) &= \mu(0, b, 0, \dots, 0) + \mu(a, 0, 0, \dots, 0) = \mu(a, b, 0, \dots, 0) \end{aligned} \quad =$$

Demnach ist in $(G, +)$ zumindest die Bilduntergruppe $\rho(G) \le G$ abelsch.

Räume mit Mittelbildung (nach Beno Eckmann)

(2) Dank Einhelligkeit folgt für jedes $a \in G$:

$$a = \mu(a, \dots, a) = \mu(a, 0, \dots, 0) + \dots + \mu(0, \dots, 0, a) = \rho(a) \cdot n = \rho(a \cdot n)$$

Somit ist $\rho : G \to G$ surjektiv. Dank (1) ist die Gruppe $G = \rho(G)$ abelsch. Demnach ist $a \mapsto a \cdot n$ ein Endomorphismus, dank $\rho(a) \cdot n = \rho(a \cdot n) = a$ sogar ein Automorphismus, mit dem expiziten Inversen $a \mapsto a/n := \rho(a)$. Damit wird $(G, +)$ zu einem linearen Raum über dem Ring $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$. Fazit:

Satz A4A: Beno Eckmann 1954

Eine Gruppe $(G, +)$ erlaubt genau dann ein homomorphes n–Mittel μ, wenn sie abelsch ist und zudem $G \to G : a \mapsto a \cdot n$ ein Automorphismus.

(3) In diesem Falle ist $\mu : G^n \to G$ das vertraute arithmetische n–Mittel:

$$\begin{aligned} \mu(a_1, \dots, a_n) &= \mu(a_1, \dots, 0) + \dots + \mu(0, \dots, a_n) \\ &= \rho(a_1) + \dots + \rho(a_n) = \rho(a_1 + \dots + a_n) = (a_1 + \dots + a_n)/n \end{aligned}$$

Damit ist für Gruppen die Mittelbildung vollständig geklärt.

Räume mit Mittelbildung (nach Beno Eckmann)

Beispiele: Die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ erlaubt ein n–Mittel für jedes $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$, doch $(\mathbb{Z}, +)$ hingegen nicht: $a \mapsto a \cdot n$ ist injektiv, aber nicht surjektiv. Die Gruppe $(\mathbb{Z}_m, +)$ erlaubt ein n–Mittel gdw $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Allgemein:

Aufgabe: Sei $(G, +)$ eine Torsionsgruppe, d.h. jedes Element hat endliche Ordnung. Genau dann erlaubt die Gruppe $(G, +)$ ein n–Mittel, wenn sie abelsch ist und n teilerfremd zur Ordnung $\mathrm{ord}(a)$ jedes Elements $a \in G$.

Lösung: „$\Leftarrow$“: Da $(G, +)$ abelsch ist, ist die Abbildung $a \mapsto a \cdot n$ ein Endomorphismus. Wir müssen nur noch zeigen, dass sie bijektiv ist. Hierzu sei $a \in G$ und $m = \mathrm{ord}(a)$. Dank $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ existieren zu m, n passende Bézout–Koeffizienten $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $mu + nv = 1$. Demnach gilt $a = a \cdot (mu + nv) = (a \cdot n) \cdot v = (a \cdot v) \cdot n$. Somit ist $a \mapsto a \cdot n$ surjektiv. Ebenso ist $a \mapsto a \cdot n$ injektiv, denn aus $an = 0$ folgt $a = (an)v = 0$.

„$\Rightarrow$“: Gilt $d = \mathrm{ggT}(m, n) > 1$, so erhalten wir $b = a \cdot (m/d) \ne 0$, es gilt jedoch $b \cdot n = (a \cdot m/d) \cdot n = (a \cdot m) \cdot (n/d) = 0$. $\boxed{\text{QED}}$

Übung: Genau dann erlaubt die Gruppe $(G, +)$ ein n–Mittel für jedes $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$, wenn sie ein $\mathbb{Q}$–Vektorraum ist. Es lebe die Lineare Algebra!

Wir kommen zurück zu unserer ursprünglichen Anwendungsfrage: Welche topologischen Räume X erlauben ein n–Mittel $f : X^n \to X$? Hier helfen uns die starken Werkzeuge der Algebraischen Topologie!

Satz A4B: Beno Eckmann 1954

Erlaubt ein topologischer Raum $X \ne \emptyset$ ein stetiges n–Mittel, so erlaubt jede seiner Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x_0)$ ein homomorphes n–Mittel.

Beispiel: Wegen $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ hat $\mathbb{S}^1$ kein stetiges n–Mittel für $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$.

Zur Erinnerung (eventuell an die Zukunft): Jedem topologischen Raum X mit Basispunkt $x_0 \in X$ können wir seine Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ zuordnen, ebenso jeder stetigen Abbildung $g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ihren zugehörigen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(g) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$. Dabei gilt stets $\pi_1(g \circ h) = \pi_1(g) \circ \pi_1(h)$ und $\pi_1(\mathrm{id}_{(X,x_0)}) = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

Kurzum: Die Fundamentalgruppe ist ein Funktor $\pi_1 : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Grp}$ von der Kategorie der topologischen Räume mit Basispunkt in die der Gruppen. 🙂 So übersetzen wir (schwierige) Topologie in (leichtere) Algebra.

Beweis: Wir haben $f : X^n \to X$ stetig und symmetrisch mit $f \circ d = \mathrm{id}_X$. Auf diese Daten wollen wir nun den Funktor $\pi_1 : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Grp}$ anwenden.

Wir wählen einen Fußpunkt $x_0 \in X$. Nach Definition von $d : X \to X^n$ gilt $d(x_0) = (x_0, \dots, x_0) =: x_0^n$. Dank Einhelligkeit von f folgt $f(x_0^n) = x_0$. Somit erhalten wir $d : (X, x_0) \to (X^n, x_0^n)$ und $f : (X^n, x_0^n) \to (X, x_0)$. Diese beiden Abbildungen sind stetig und erfüllen $f \circ d = \mathrm{id}_{(X,x_0)}$.

Der Funktor π_1 macht daraus die Gruppenhomomorphismen

$$f_\sharp := \pi_1(f) : \pi_1(X^n, x_0^n) \to \pi_1(X, x_0),$$
$$d_\sharp := \pi_1(d) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X^n, x_0^n).$$

Wir setzen $G := \pi_1(X, x_0)$. Für das Produkt gilt $\pi_1(X^n, x_0^n) \cong G^n$, kanonisch induziert durch die Projektionen $\mathrm{pr}_i : (X^n, x_0^n) \to (X, x_0)$. Für $d_\sharp := \pi_1(d) : G \to G^n$ finden wir demnach $d_\sharp(a) = (a, \dots, a)$. Die Symmetrie von $f : X^n \to X$ induziert die von $f_\sharp : G^n \to G$. Aus $f \circ d = \mathrm{id}_{(X,x_0)}$ folgt $f_\sharp \circ d_\sharp = \pi_1(f \circ d) = \pi_1(\mathrm{id}_{(X,x_0)}) = \mathrm{id}_G$.

Somit ist $f_\sharp : G^n \to G$ ein homomorphes n–Mittel auf der Gruppe G. QED

Ausblick: Eckmanns elegantes Argument gilt genauso für alle höheren Homotopiegruppen $\pi_k(X, x_0)$. Das ist sehr praktisch, denn für die Sphäre $\mathbb{S}^k$ der Dimension $d \ge 2$ bieten die Gruppen $\pi_1 = \dots = \pi_{k-1} = 0$ zunächst kein Hindernis, erst die Gruppe $\pi_k(\mathbb{S}^k, *) \cong \mathbb{Z}$ verbietet ein n–Mittel. Eckmann zeigt Satz A4B auch für Homologiegruppen H_k und schließt:

Dies sind, insbesondere für endliche Polyeder oder Räume von demselben Homologiecharakter, sehr starke Bedingungen, die die Existenz eines n–Mittels nur in seltenen Fällen zulassen.

Genauer zeigt er: Sei X ein zusammenhängendes, endliches Polyeder. Genau dann erlaubt X ein n–Mittel $f : X^n \to X$ für jedes $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$, wenn der Raum X in sich auf einen Punkt zusammenziehbar ist. 🙂 Das ist eine starke Bedingung und einfache Charakterisierung.

Übung: Wenn Sie die Algebraische Topologie bereits kennen und lieben, oder erlernen und einüben wollen, so ist dies eine schöne Anwendung: Führen Sie sorgsam alle Details aus und optimieren Sie obige Beweise! Was sind möglichst natürliche, elegante, gar minimale Voraussetzungen?

❓ Was lernen wir an diesem phantastischen Anwendungsbeispiel? Wie stehen Sie zur Spaltung der Mathematik in „rein“ vs „angewandt“? Wir erleben eine atemberaubende Reise von der harmlos anmutenden Frage nach einem „fairen Wahlverfahren“ über das Möbius–Band zur Algebraischen Topologie. Erst mit diesen starken mathematischen Werkzeugen können wir die anfängliche Frage lösen. Raffiniert!

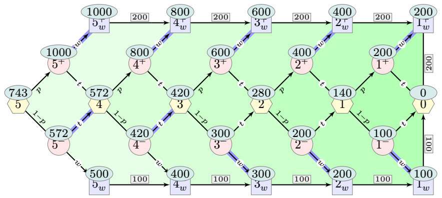
A true mathematician has respect for all parts of mathematics and does not believe in arbitrary divisions into ‘pure’ vs ‘applied’.
Doron Zeilberger, `sites.math.rutgers.edu/~zeilberg/Opinion2.html`

Wenn Sie sich mit Mathematik beschäftigen, sehen Sie überall schöne Anwendungen. Leider gilt auch umgekehrt: Wer Mühe und Sorgfalt scheut, wer die Wirksamkeit der Mathematik leugnet, sieht sie nicht. Dieses Muster gilt ganz allgemein: Man sieht nur, was man kennt.

Jede ernsthafte Beschäftigung mit Mathematik erfordert daher zunächst Neugier, Interesse und Offenheit für Probleme und sodann Kreativität, Sorgfalt und Hartnäckigkeit bei deren Lösung. So geht Wissenschaft!

Kapitel B

Rückwärtsinduktion nach Zermelo



Verstehen kann man das Leben nur rückwärts;
leben muss man es aber vorwärts.

Søren Kierkegaard (1813–1855)

Inhalt dieses Kapitels B

Ernst Zermelo (1871–1953)

Der Mathematiker Ernst Zermelo ist weltberühmt für seine Beiträge zur Mengenlehre, die Zermelo–Fraenkel–Axiome und insbesondere die Formulierung des Auswahlaxioms (1904).

Er studierte Mathematik, Physik und Philosophie in Berlin, Halle und Freiburg, promovierte 1894 in Berlin bei H.A. Schwarz zur Variationsrechnung und war Assistent von Max Planck.

Ab 1897 habilitierte Zermelo in Göttingen, wurde dort 1905 Professor, ab 1910 in Zürich. Aufgrund von Gesundheitsproblemen gab er schon 1916 seine Professur in Zürich auf.

Von 1926–1935 und 1946–1953 war Zermelo Honorarprofessor an der Universität Freiburg und beschäftigte sich mit angewandter Mathematik, Analysis und Mengenlehre. Er musste diese Stelle 1935 aufgeben, da er sich beharrlich weigerte, seine Vorlesungen mit Hitlergruß zu eröffnen, und von seinem Mathematikkollegen Gustav Doetsch denunziert wurde.

Ernst Zermelo (1871–1953)

Bertrand Russel lud Zermelo ein, 1912 in Cambridge auf dem fünften Internationalen Mathematik-Kongress über Mengenlehre vorzutragen. Zermelo nahm die Einladung an mit einem Vortrag über die Theorie des Schachspiels und, auf Drängen Russels, einem zweiten über Mengenlehre.

E. Zermelo: *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels.* Proceedings of the Fifth Congress of Mathematics, Vol. II, Cambridge 1913, 501–504. Gesammelte Werke I, 260–273.

H.-D. Ebbinghaus: *Ernst Zermelo: An Approach to His Life and Work.* Springer 2015. (Eine höchst sachkundige und faszinierende Biographie)

Zermelo bewies, dass Schach, wie jedes endliche Spiel, determiniert ist: Entweder besitzt Weiß eine Gewinnstrategie, oder Schwarz, oder jeder Spieler kann ein Unentschieden erzwingen. Dieses Ergebnis markiert den Startpunkt der kombinatorischen Spieltheorie. Zermelos genial-einfache Rekursionsmethode wurde auf zahlreiche Spiele übertragen und so zu einem Universalwerkzeug der Spieltheorie ausgebaut. Damit beginnen wir in diesem Kapitel; sie wird uns immer wieder gute Dienste leisten.

Historische Entwicklung

B005
Erläuterung

Ich folge hier der Tradition, Zermelo die Idee der Rückwärtsinduktion zuzuschreiben. Die historische Entwicklung dieser sehr allgemeinen Methode, und auch ihrer sonderbaren Bezeichnung, ist kompliziert und verschlungen, daher erlaube ich mir diese Freiheit der Vereinfachung.

Eine detaillierte historische Untersuchung finden Sie in dem Artikel von U. Schwalbe, P. Walker: *Zermelo and the Early History of Game Theory*, Games and Economic Behavior 34 (2001) 123–137. Ich skizziere im Folgenden ganz grob nur einige Stichpunkte zur Orientierung.

Zermelo hat 1912 die Frage zu Schach formuliert und die überraschend einfache Antwort gefunden, doch genau genommen hat er seinen Beweis nicht durch Rückwärtsinduktion geführt. Sein Artikel von 1913 enthält die entscheidende Idee, nicht jedoch die formale Ausführung.

Zermelos Arbeit hat weitere Untersuchungen stimuliert, darunter auch solche in der Mengenlehre, die Zermelo als neuartiges Werkzeug nutzte. In diesem Sinne hat sich die Beziehung als sehr fruchtbar erwiesen, auch wenn dies ursprünglich wohl nicht Zermelos Hauptaugenmerk war.

Historische Entwicklung

B006
Erläuterung

Dénes Kőnig beweist 1927 folgendes „Unendlichkeitslemma“: Seien $E_0, E_1, E_2, \dots$ endliche, nicht-leere Mengen und darauf R eine Relation, sodass zu jedem $y \in E_{n+1}$ ein $x \in E_n$ mit $(x, y) \in R$ existiert. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $x_n \in E_n$ und $(x_n, x_{n+1}) \in R$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Kőnigs Lemma findet sich in perfektionierter Form in seinem Buch *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (1936). Es lautet:
Sei G ein zusammenhängender Graph, lokal-endlich doch unendlich. Darin existiert ein unendlicher Weg, der keine Ecke zweimal besucht.

Ausgehend von diesem Ergebnis greift Kőnig die Frage von Zermelo auf und führt den Beweis mit den Werkzeugen der Mengenlehre aus. Kőnigs Lemma ist eine grundlegende Technik in der Graphentheorie und spielt eine wichtige Rolle in der Logik und Berechenbarkeitstheorie.

Die Bezeichnung „Rückwärtsinduktion“ und die explizite Methode findet sich zuerst bei László Kalmár, *On the Theory of Abstract Games* (1928). Wir werden diese Methode präzise formulieren, elegant beweisen und in zahlreichen Anwendungen erfolgreich nutzen.

Vorgehensweise

B007
Erläuterung

Um den extrem weiten Rahmen dynamischer Spiele abzustecken, skizziere ich zunächst informell die Analogie zu (Computer)Spielen. Diese dynamischen Spiele sind bei genauem Hinsehen vollständig formalisiert, denn sie liegen schließlich als Computerprogramm vor.

Sie sind realistisch komplex, zugleich künstlich formal: „*Code is law.*“ Gilt das für den Cyberspace? das Leben? Wer schreibt dort die Regeln? Das Verhältnis von Programm / *computer code* und Gesetz / *legal code* ist faszinierend, siehe Lawrence Lessig, *Code*, `lessig.org/product/codev2`.

Darauf aufbauend formalisieren wir dynamische Spiele durch Graphen aus Ecken / Positionen / Zuständen und Kanten / Zügen / Aktionen. Graphen sind ein allgegenwärtiges Konzept, sie begegnen uns überall im Alltag, der Mathematik, der Informatik und auch der Spieltheorie.

Es lohnt sich daher, diese Grundstruktur breit und gründlich anzulegen. Damit können wir Spiele und Strategien präzise und einfach erklären. Zusammen mit Auszahlungen formulieren und lösen wir unsere ersten Probleme zur Optimierung als Markov–Entscheidungsprozess [MDP].

Vorgehensweise

B008
Erläuterung

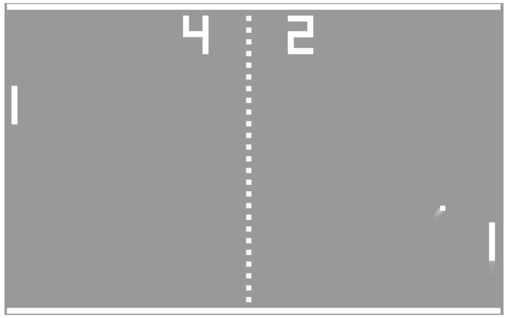
Für die Berechnung durch Rückwärtsinduktion setzen wir voraus, dass unser Spielgraph keinen unendlich langen Weg $x_0 \to x_1 \to \dots$ enthält. Damit können wir uns rekursiv empor arbeiten, von den terminalen Zuständen rückwärts zu jedem beliebigen aktiven Zustand.

So lösen Sie kombinatorische Spiele, indem Sie sie vom Ende her denken. So lösen Sie viele Optimierungsfragen, indem Sie schrittweise vorgehen. So lösen Sie komplizierte Aufgaben, indem Sie sie in einfache zerlegen. Kurzum: Rekursion und Induktion bilden ein universelles Werkzeug.

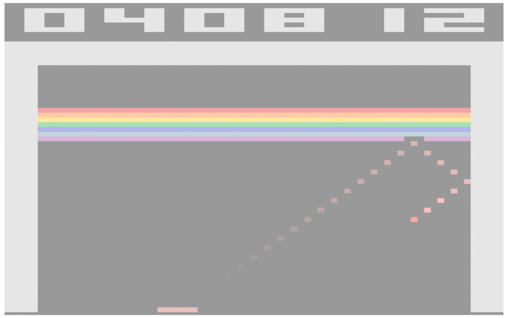
Nach diesen Motivationen und Illustrationen und ersten Definitionen widmen wir uns im nächsten Kapitel den kombinatorischen Spielen. Zu ihrer Lösung entwickeln wir erste Algorithmen, möglichst effiziente. Hier ist der Sprague–Grundy–Satz ein wirksames Universalwerkzeug.

In den darauf folgenden Kapitel werden wir einzelne Aspekte genauer untersuchen und das Mosaik der Spieltheorie recht kunstvoll erweitern. Die dabei verwendeten Modelle verfeinern und verallgemeinern wir schrittweise, sodass wir reale Situationen immer besser modellieren.

Dynamische Spiele und strategische Interaktion / Konkurrenz



Pong
(Atari 1972)
zwei Spieler,
deterministisch



Breakout
(Atari 1976)
ein Spieler,
probabilistisch

Dynamische Spiele und strategische Interaktion / Konkurrenz

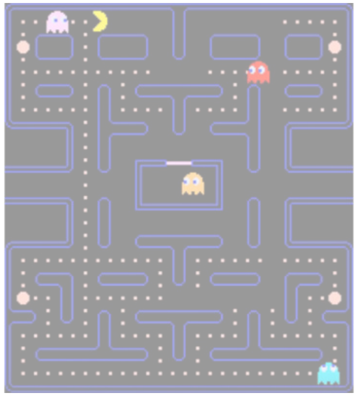
Das Spiel **Pong** hatte technisch bedingt ein minimalistisches Design. Selbst nach Jahrzehnten bereitet es Spielspaß. (Variante: Bier-Pong?)

Fun fact: Der Pong-Automat basierte nicht auf einem programmierten Prozessor, sondern auf einem festverdrahteten Schaltkreis, der teilweise analog arbeitete. Er war in diesem Sinne kein Computer. Pong genießt heute noch Kultstatus: Auf der Consumer Electronics Show (CES 2019) konnte man dank Kickstarter einen **analogen Pong-Tisch** bewundern.

Die **goldene Ära der Arcade-Spiele** von etwa 1978 bis 1983 begann mit Klassikern wie Space Invaders (1978) über Pac-Man (1980) zu Galaga (1981) und Donkey Kong (1981). Der Einsatz integrierter Schaltkreise und Mikroprozessoren eröffneten den Spielen weit größere Komplexität.

Die Produktionskosten sanken, die Technologie entwickelte sich rasant und erlaubte bald ansprechende Graphik und Sound. Dennoch waren die technischen Möglichkeiten jedes Spiels jeweils noch recht eng gesteckt. Der Erfolg beruhte auf gutem Gameplay: simpel doch unterhaltsam. Dieser Fokus erklärt, warum viele Spiele heute noch Spaß machen.

Dynamische Systeme und optimale Steuerung / Kybernetik



Pac-Man
(Namco / Midway 1980)
ein Spieler,
deterministisch

Supertux
(Bill Kendrick et al,
2000 bis heute)
ein Spieler,
deterministisch

Dynamische Systeme und optimale Steuerung / Kybernetik

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall eines einzigen Spielers. Die Spielerin, Alice, kennt die Regeln und den Aufbau des Spiels und wählt ihre Aktionen mit dem Ziel, die Gesamtauszahlung zu maximieren. Dies definiert ein Problem der Steuerung (Kybernetik, Kontrolltheorie).

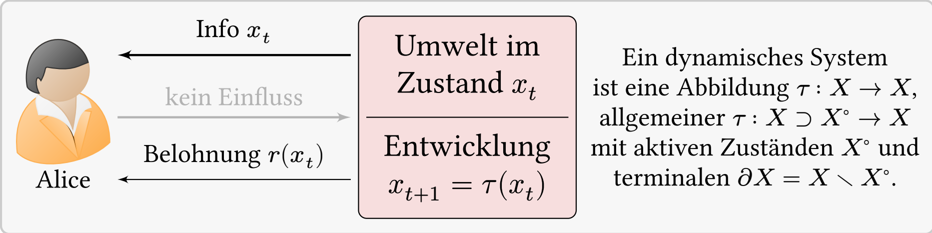
Während des Spiels hat Alice vollständige Information über den Zustand. Die Ausführung ihrer Strategie erfordert vor allem / nur Geschicklichkeit. Nutzt der Computergegner (AI) auch Zufallszüge, so muss Alice jeweils die aktuellen Informationen auswerten und geeignet darauf reagieren.

Je nach möglichen Aktionen, Zufall und Belohnungen ergibt sich ein dynamisches System [*dynamical system*], Markov–Prozess [*Markov process*], Markov–Belohnungsprozess [*Markov reward process*, MRP] oder allgemein Markov–Entscheidungsprozess [*Markov decision process*, MDP]: Dynamische Programmierung [DP] und Maschinelles Lernen [ML].

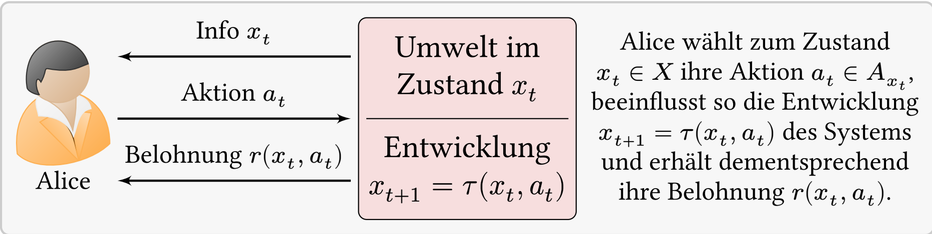
Zur Vereinfachung verlaufe das Spiel zeitdiskret, gemessen durch $t \in \mathbb{N}$. Der kontinuierliche Fall $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist ebenso interessant, aber technisch aufwändiger, und nutzt (stochastische) Differentialgleichungen.

Dynamische Systeme und optimale Steuerung / Kybernetik

Dynamisches System ohne Steuerung: *Markov reward process* (MRP)



Dynamisches System mit Steuerung: *Markov decision process* (MDP)



Alice will ihren Gesamtnutzen $u = (1-\delta) \sum_t \delta^t r(x_t, a_t)$ maximieren!

Dynamische Systeme und optimale Steuerung / Kybernetik

Im ersten Szenario beobachtet / profitiert die Spielerin Alice nur passiv. Mögliche Beispiele: Glücksspiel (mit Dauerlos, also ohne Entscheidung), Sportwette (auf Lieblingsverein), Aktienmarkt (mit festem Portfolio).

Trajektorie $w = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ mit $x_{t+1} = \tau(x_t)$, eventuell für $n \to \infty$. Auszahlung $u(w) = (1-\delta) \sum_{t=0}^{n-1} \delta^t r(x_t)$ mit Diskontfaktor $\delta \in [0, 1[$. Zu absoluter Konvergenz dieser Reihe genügt r beschränkt und $\delta < 1$. Für festes n und $\delta \nearrow 1$ wird dies zum arithmetischen Mittel. (Übung!)

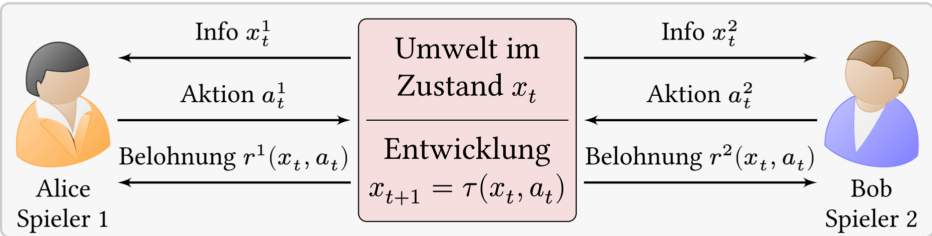
Im zweiten Szenario kann Alice Aktionen wählen und Einfluss nehmen. Dadurch wird die gesamte Situation viel komplizierter und interessanter. Die Optimierung ist Gegenstand der Kybernetik: die Kunst des Steuerns.

Zur Trajektorie $w = (x_0, a_0, x_1, a_1, \dots, a_{n-1}, x_n)$ mit $x_{t+1} = \tau(x_t, a_t)$ ist die kumulierte diskontierte Auszahlung $u(w) = (1-\delta) \sum_{t=0}^{n-1} \delta^t r(x_t, a_t)$. Die Spielerin möchte ihre Gesamtauszahlung $u(w)$ maximieren!

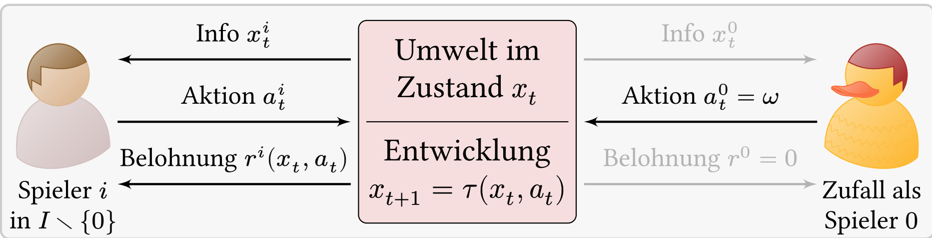
Um solche Aufgaben zu beschreiben und mögliche Lösungen zu finden, entwickeln wir in den folgenden Kapiteln ausreichend umfassende Modelle für Zustände, Aktionen, Transitionen und Belohnungen.

Dynamische Spiele und strategische Interaktion / Konkurrenz

Dynamisches System mit Steuerung durch zwei Spieler: Markov–Spiel



Steuerung durch mehrere Spieler und Zufall: Markov–Spiel (MMDP)



Jeder Spieler will seinen individuellen Gesamtnutzen maximieren.

Dynamische Spiele und strategische Interaktion / Konkurrenz

Die ersten beiden Szenarien zeigen bisher nur eine einzige Spielerin. Im dritten Szenario nehmen zwei Spieler Einfluss auf das Geschehen. Es entsteht Interaktion, eventuell Kooperationen oder auch Konflikte. Jeder möchte dabei seinen individuellen Gesamtnutzen maximieren.

Zum Zeitpunkt t befindet sich das Spiel / die Umwelt im Zustand x_t. Spieler i erhält hierzu die (eventuell nur partielle) Information x_t^i. Daraufhin wählt er seine Aktion a_t^i, zusammengefasst $a_t = (a_t^i)_{i \in I}$, und das Spiel geht über in den neuen Zustand $x_{t+1} = \tau(x_t, a_t)$.

Zur Trajektorie $w = (x_0, a_0, x_1, a_1, \dots, a_{n-1}, x_n)$ mit $x_{t+1} = \tau(x_t, a_t)$ ist die kumulierte diskontierte Auszahlung $u(w) = (1-\delta) \sum_{t=0}^{n-1} \delta^t r(x_t, a_t)$. Jeder Spieler will seinen individuellen Gesamtnutzen $u^i(w)$ maximieren.

Im vierten Szenario berücksichtigen wir zudem den Zufall als Spieler 0, der seine Aktion a_t^0 aus einem Lostopf zieht, also einem WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$. Wie jeder Spieler i beeinflusst auch der Zufall 0 das Spielgeschehen, allerdings nicht umgekehrt: der Zufall lässt sich nicht beeinflussen und ist vollkommen unbestechlich. Das entspricht der Auszahlung $r^0 = 0$.

Spiele auf Graphen

B109

Ein dynamisches Spiel können wir als einen Graphen darstellen:

	USA	EU
0 Start		
1a USA drohen nicht.	5	9
1b USA drohen mit Zöllen.		
2a Europa gibt nach.	6	7
2b Europa droht ebenfalls.		
3a USA lenken ein.	4	8
3b Es kommt zum Handelskrieg.	3	6

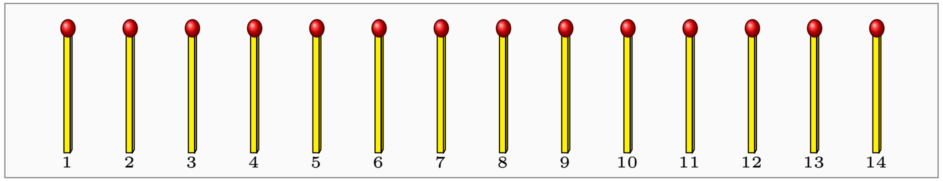
Dynamische Spiele können parallel oder sequentiell gespielt werden:
(P) Die Spieler ziehen gleichzeitig, parallel, asynchron wie bei Pong.
(S) Die Spieler ziehen abwechselnd, nacheinander, rundenbasiert.

Zeit kann kontinuierlich sein oder diskret wie hier. Zur Vereinfachung betrachten wir in dieser Vorlesung meist nur den zeitdiskreten Fall.

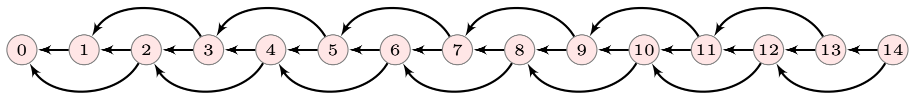
Spiele auf Graphen

B110

Oft ist der Spielgraph ein Baum, aber auch ganz allgemeine Graphen treten natürlich auf: Sie erlauben eine bequeme und konzise Darstellung.



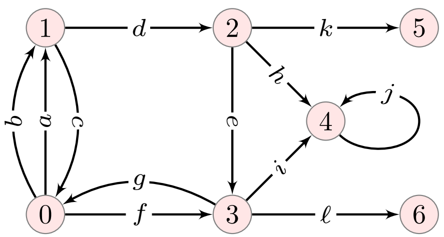
Auf dem Tisch liegen anfangs $x \in \mathbb{N}$ Streichhölzer / Münzen / Steine.
Beide Spieler ziehen abwechselnd, jeder entfernt ein oder zwei Hölzer.
Diese Spielregeln übersetzen sich zu folgendem Spielgraphen:



So können wir jedes Spiel knapp und übersichtlich als Graph codieren!
Er beantwortet die grundlegenden Fragen zum Spiel und seinen Regeln:
Welche Spielstände x gibt es? Welche Aktionen a sind in x möglich?
Zu welchem Spielstand $y = \tau(x, a)$ gelangen wir durch diese Aktion?

Was genau ist ein Graph?

B111



$$X = \{0, 1, \dots, 6\}$$
$$A = \{a, b, \dots, \ell\}$$
$$(\sigma, \tau) : a \mapsto (0, 1)$$
$$b \mapsto (0, 1)$$
$$\dots$$
$$\ell \mapsto (3, 6)$$

Definition B1A: gerichteter Multigraph $\Gamma = (\Gamma_0 \leftleftarrows \Gamma_1)$, kurz Graph

Ein **Graph** $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ besteht aus einer Eckenmenge $\Gamma_0 = X$ [*vertices*], einer Kantenmenge $\Gamma_1 = A$ [*edges*], mit $X \cap A = \emptyset$, sowie Randabbildungen $\sigma, \tau : A \to X$ [*boundary maps*], die jeder Kante $a \in A$ ihren Start $\sigma(a) \in X$ [*source*] und ihr Ziel $\tau(a) \in X$ [*target*] zuordnen.

Eine Kante $a \in A$ von $\sigma a = x$ nach $\tau a = y$ schreiben wir kurz $a : x \to y$ oder $x \xrightarrow{a} y$ und ebenso Wege $w = (x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{a_1} \dots \longrightarrow x_n) \in \Gamma_n \subseteq \Gamma_*$.
Der Graph Γ heißt **artinsch**, wenn er keine unendlichen Wege enthält, und **lokal-endlich** in $x \in X$, wenn die Menge $\{a : x \to y\}$ endlich ist.

Was genau ist ein Graph?

B112
Erläuterung

Als Spiel Γ interpretieren wir jede Ecke $x \in X$ als möglichen **Zustand** oder **Position** und jede Kante $a \in A$ als mögliche **Aktion** oder **Zug**.

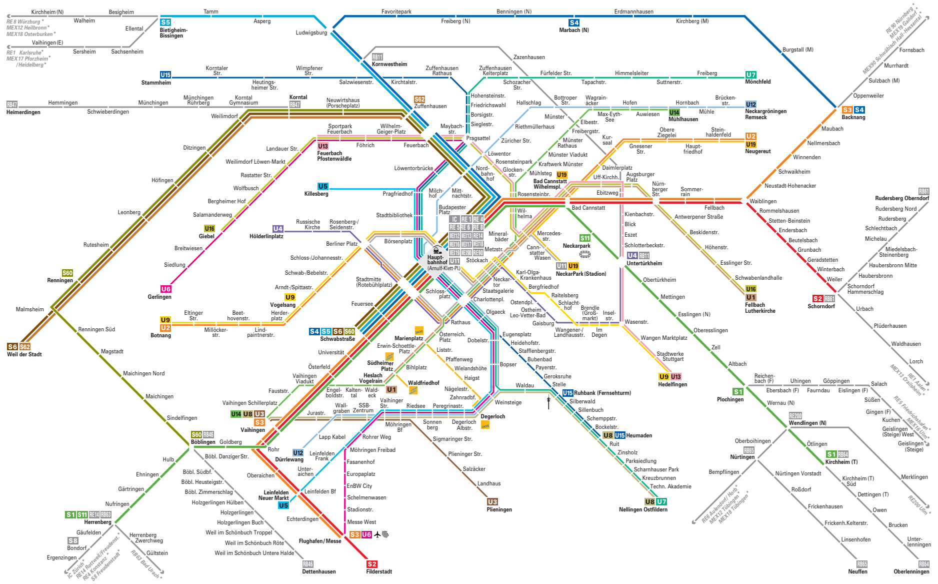
Zur Betonung nennen wir (X, A, σ, τ) auch **orientierten Multigraph**:
Jede Kante $a : x \to y$ ist orientiert von ihrem Start x zu ihrem Ziel y.
Zwischen je zwei Ecken $x, y \in X$ kann es mehrere Kanten geben.
Wir erlauben Schleifen $a : x \to x$, also Kanten mit Start gleich Ziel.

Ecken heißen manchmal auch **Knoten** [*nodes*] oder **Punkte** [*points*], die Randabbildung $\partial = (\sigma, \tau) : A \to X \times X$ auch **Inzidenz** [*incidence*].
Der Graph heißt **einfach** [*simple*], wenn ∂ injektiv ist. Das heißt, von jedem Start $x \in X$ zu jedem Ziel $y \in X$ existiert höchstens eine Kante.

Im einfachen Graphen (X, A, σ, τ) können wir die Kantenmenge A durch ihr Bild $A' = \partial(A) \subseteq X \times X$ ersetzen und erhalten so den isomorphen Graphen (X, A', σ', τ') mit $\sigma' = \mathrm{pr}_1 : (x, y) \mapsto x$ und $\tau' = \mathrm{pr}_2 : (x, y) \mapsto y$.

Wir gelangen zu folgender Vereinfachung: Ein **einfacher Graph** (X, A) besteht aus einer Eckenmenge X und einer Kantenmenge $A \subseteq X \times X$; implizit mitgegeben sind die Projektionen $\sigma(x, y) = x$ und $\tau(x, y) = y$.

Alltägliche Beispiele für Graphen



Stuttgarter Verbundnetz, `www.vvs.de/karten-plaene/liniennetz`
Fahrgäste spielen „Wie komme ich am besten von A nach B?“

Einige Anwendungen für Graphen

Graphen haben zahlreiche Anwendungen in Mathematik und Informatik. Sie dienen häufig zur Modellierung, Abstraktion oder Vereinfachung, z.B. als Datenstruktur, Verkehrsliniennetz, Stammbaum, soziales Netz, etc.

Wir formulieren daher eine möglichst umfassende allgemeine Definition. **Alternative Notationen** sind $G = (S, A, \sigma, \tau)$ oder $X = (X_0, X_1, \partial_0, \partial_1)$ oder $\Gamma = (V, E, s, t)$; das ist eine Frage von Traditionen und Vorlieben.

Google revolutionierte 1998 den Markt für Suchmaschinen, indem es das Internet ganz abstrakt als Graph aus Webseiten und Links analysierte: Der PageRank berechnet die Aufenthaltswkt $\sim$ Popularität $\sim$ Relevanz.

In der theoretischen Informatik besteht ein **Automat** $(S, A, \tau, \dots)$ aus **Zuständen** S und **Aktionen** A mit Übergangsfunktion $\tau : S \times A \to S$. Dies ist ein Graph mit der Kantenmenge $E = S \times A$, wobei $\sigma(s, a) = s$.

In der Algebra, speziell Darstellungstheorie, besteht ein **Köcher** [*quiver*] $Q = (Q_0, Q_1, \sigma, \tau)$ aus **Ecken** [*vertices*] und **Pfeilen** [*arrows*], und eine Darstellung $V : Q \to \mathtt{Vec}_{\mathbb{K}}$ ordnet jeder Ecke x einen $\mathbb{K}$–Vektorraum V_x zu und jeder Kante $a : x \to y$ eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung $V_a : V_x \to V_y$.

Wege auf Graphen

Im Graphen $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ ist ein **Weg** eine Ecken-Kanten-Folge

$$w = (x_0, a_0, x_1, a_1, \dots, x_n)$$

mit $\sigma(a_k) = x_k$ und $\tau(a_k) = x_{k+1}$ für alle $k = 0, \dots, n-1$, abgekürzt

$$w = (x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{a_1} \dots \longrightarrow x_n),$$

mit Start $\sigma(w) = x_0$ und Ziel $\tau(w) = x_n$. Die Menge aller Wege w der Länge n vom Start $\sigma(w) = x$ zum Ziel $\tau(w) = y$ schreiben wir $\Gamma_n(x, y)$. Hierbei identifizieren wir $\Gamma_0 = X$ mit Ecken und $\Gamma_1 = A$ mit Kanten. Für beliebige Länge $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $\Gamma_*(x, y) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n(x, y)$.

Verknüpfbare Wege verknüpfen wir durch Aneinanderhängen gemäß

$$\circ : \Gamma_*(x, y) \times \Gamma_*(y, z) \to \Gamma_*(x, z) \;:\; (w, w') \mapsto w \circ w',$$
$$(x_0 \xrightarrow{a_0} \dots x_m) \circ (y_0 \xrightarrow{b_0} \dots y_n) := (x_0 \xrightarrow{a_0} \dots x_m = y_0 \xrightarrow{b_0} \dots y_n).$$

Dies definiert die **Wegekategorie** $\Gamma_* = (X, A^*, \sigma, \tau, \circ)$ des Graphen Γ: Die Verknüpfung ist assoziativ. Zu jedem Weg $w \in \Gamma_*(x, y)$ von x nach y ist der konstante Weg $\mathrm{id}_x = (x)$ linksneutral und $\mathrm{id}_y = (y)$ rechtsneutral.

Wege auf Graphen

Neben den endlichen Wegen $w \in \Gamma_*(x, y)$ von x nach y betrachten wir auch unendliche Wege $w = (x_0, a_0, x_1, a_1, x_2, \dots)$ wobei $\sigma(a_k) = x_k$ und $\tau(a_k) = x_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Der Startpunkt ist hierbei $\sigma(w) = x_0$.

Wir können endliche Wege von links anknüpfen und erhalten so

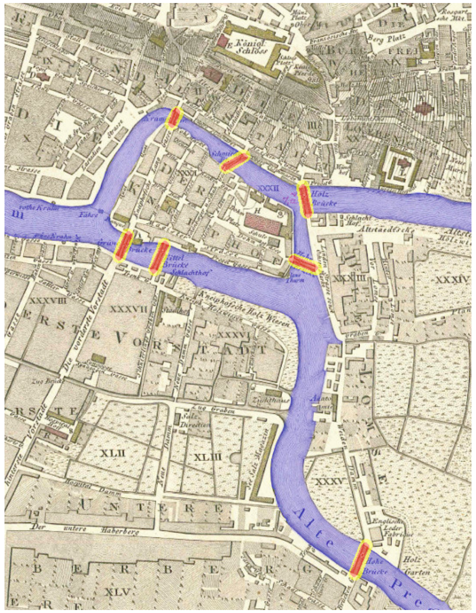
$$\circ : \Gamma_*(x, y) \times \Gamma_\infty(y) \to \Gamma_\infty(x) \;:\; (w, w') \mapsto w \circ w'.$$

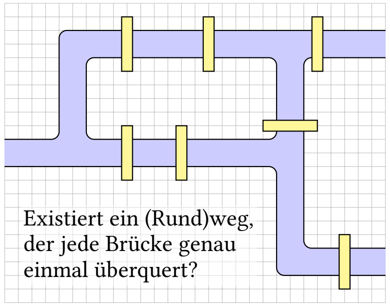
Notation: Es genügt, jeden un/endlichen Weg $w = (x_0; a_0, a_1, a_2, \dots)$ durch seinen Startpunkt x_0 und die Kanten $a_0, a_1, a_2, \dots$ zu notieren. Bei positiver Länge genügen sogar allein die Kanten $(a_0, a_1, a_2, \dots)$, denn hieraus folgen die Ecken $x_0 = \sigma(a_0)$, $x_1 = \tau(a_0) = \sigma(a_1)$, etc. Für einen einfachen Graphen genügen die durchlaufenen Ecken, kurz $w = (x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots)$, denn daraus folgen eindeutig die Kanten.

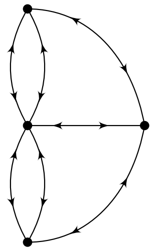
Beispiel: Besteht der Graph $\Gamma = (\{x\}, A, \sigma, \tau)$ nur aus der Ecke x und den Schleifen A, so besteht die Kategorie Γ_* nur aus dem Objekt x, und die Morphismen $(A^*, \circ)$ bilden das freie Monoid über dem Alphabet A, also $\Gamma_*(x, x) = A^* = A^{<\infty} := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$. Die Menge $\Gamma_\infty(x) = A^\infty = A^{\mathbb{N}}$ hingegen besteht aus allen unendlichen Folgen $w : \mathbb{N} \to A : k \mapsto a_k$.

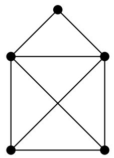
Historischer Ursprung der Graphentheorie

Graphentheorie entsteht 1736 aus dem Königsberger Brückenproblem:









Das ist das Haus vom Nikolaus.

Historischer Ursprung der Graphentheorie

Durch Königsberg fließt der Fluss Pregel, darin zwei Inseln liegen, die durch sieben Brücken zu den Ufern und untereinander verbunden waren. Gibt es einen (Rund-)Weg, der alle sieben Brücken genau einmal quert? Dieses mathematische Rätsel wurde schnell populär und viel diskutiert.

Euler löste das Brückenproblem im Jahre 1736, indem er zunächst die geographischen Daten auf ihren topologischen Kern reduzierte: Nicht die genaue Form der Inseln und der Ufergebiete ist wichtig, ebensowenig der genaue Verlauf der Brücken und Spaziergänge.

Was bleibt als wesentliche Information? Es genügt, die beiden Ufer und die zwei Inseln als vier Ecken zu betrachten mit sieben verbindenden Kanten. Das ist eine naheliegende und doch sehr mutige Vereinfachung. Abstraktion bedeutet, das Wesentliche vom Unwesentlichen zu trennen.

Eulers effiziente Beschreibung algebraisiert und löst das Problem: Da zu jeder der vier Ecken eine ungerade Zahl von Kanten führt, so argumentierte Euler, kann es keinen Weg geben, der alle sieben Brücken genau einmal überquert. Genial einfach, einfach genial!

Unorientierte Graphen

Definition B1B: unorientierter Multigraph

Ein **unorientierter Multigraph** $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau, -)$ besteht aus einem orientierten Multigraphen (X, A, σ, τ) mit fixpunktfreier Involution $- : A \to A$, also $a \ne -a$ und $-(-a) = a$ für alle Kanten $a \in A$, sodass $\sigma(a) = \tau(-a)$ gilt und folglich $\tau(a) = \sigma(-a)$. Die Kante $-a$ heißt die zu a **inverse Kante**, das Paar $\{a, -a\}$ nennen wir eine **unorientierte Kante**.

Wir können σ weglassen und jederzeit durch $\sigma = \tau \circ -$ rekonstruieren. Die Involution $-$ von Γ setzt sich auf die Wegekategorie Γ_* fort zur Involution $-(x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{a_1} \dots \longrightarrow x_n) = (x_n \longrightarrow \dots \xrightarrow{-a_1} x_1 \xrightarrow{-a_0} x_0)$.

Eine **Orientierung** von Γ ist eine Teilmenge $A^+ \subseteq A$ mit $A^+ \cap -A^+ = \emptyset$ und $A^+ \cup -A^+ = A$, also die Wahl einer Kante aus jedem Paar $\{a, -a\}$. Der zugehörige orientierte Graph ist dann $\Gamma^+ = (X, A^+, \sigma|_{A^+}, \tau|_{A^+})$.

Umgekehrt definiert jeder orientierte Graph $\Gamma = (X, A^+, \sigma, \tau)$ einen unorientierten Graphen $|\Gamma| = (X, A, \sigma, \tau, -)$ mit der Kantenmenge $A = \{\pm\} \times A^+$ sowie $\sigma(-, a) = \tau(+, a) = \tau(a)$ und $-(\pm, a) = (\mp, a)$.

Unorientierte Graphen

Beispiele wie Netzpläne oder das Königsberger Brückenproblem nutzen statt orientierter Kanten $a : x \to y$ unorientierte Kanten $\{\pm a\} : x \leftrightarrow y$.

Zu diesem Zweck formalisieren wir auch **unorientierte Multigraphen**:

- Jede unorientierte Kante $\{\pm a\} : x \leftrightarrow y$ verbindet zwei Ecken x, y.
- Zwischen je zwei Ecken $x, y \in X$ kann es mehrere Kanten geben.
- Wir erlauben unorientierte Schleifen $\{\pm a\} : x \leftrightarrow x$ an einer Ecke x.

Wenn wir zudem noch mehrfache Kanten und Schleifen ausschließen, so gelangen wir zur folgenden abschließenden Vereinfachung:

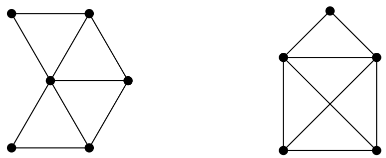
Ein **einfacher unorientierter Graph** (V, E) besteht aus einer Menge V von Ecken und einer Menge $E \subseteq \{\{x \ne y\} \subseteq V\}$ unorientierter Kanten.

Im Sinne der obigen Definition B1B ist dies ein unorientierter Multigraph $(X, A, \sigma, \tau, -)$ wie folgt: Die Eckenmenge ist $X = V$ wie vorgegeben. Die Kantenmenge $A = \{(x, y) \mid \{x, y\} \in E\}$ besteht hier aus allen orientierten Kanten (x, y) mit Start $\sigma(x, y) = x$ und Ziel $\tau(x, y) = y$ sowie der orientierungsumkehrenden Involution $-(x, y) = (y, x)$.

Euler–Wege und Euler–Kreise auf Graphen

Das *Königsberger Brückenproblem* ist der Beginn der Graphentheorie und zugleich eine der frühesten topologischen Fragestellungen.

Übung: Erlauben die folgenden Graphen Euler–Wege? gar Euler–Kreise?



Sei $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ ein Graph. Ein Weg $w = (x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{a_1} \dots \longrightarrow x_n)$ mit $x_n = x_0$ heißt **geschlossen**, manchmal auch **Zykel** oder **Kreis**.

Zum Brückenproblem: Ein **Euler–Weg** w in Γ besucht jede Kante genau einmal, die Abbildung $\hat{w} : \{0, \dots, n-1\} \to A : i \mapsto a_i$ ist also bijektiv. Ein geschlossener Euler–Weg in Γ heißt auch kurz **Euler–Kreis**

In unorientierten Graphen $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau, -)$ verlangen wir, dass jede unorientierte Kante des Graphen Γ entlang w genau einmal besucht wird, also dass $\hat{w} : \{\pm\} \times \{0, \dots, n-1\} \to A : (\pm, i) \mapsto \pm a_i$ bijektiv ist.

Euler–Wege und Euler–Kreise auf Graphen

Das Brückenproblem erlaubt eine einfache und effiziente Lösung!
In jedem orientierten Graphen $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ hat jede Ecke $x \in X$

- einen **Eingangsgrad** $\operatorname{ideg}(x) = \sharp\{\, a : y \to x \,\}$ und
- einen **Ausgangsgrad** $\operatorname{odeg}(x) = \sharp\{\, a : x \to y \,\}$.

In jedem unorientierten Graphen gilt $\operatorname{ideg}(x) = \operatorname{odeg}(x) =: \deg(x)$.
Eine unorientierte Schleife zählt in dieser Konvention doppelt.

Satz B1c: Euler 1736

Sei $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau, -)$ ein un/orientierter Graph, zudem endlich und zusammenhängend: Je zwei Ecken sind durch einen Weg verbindbar.

1. Genau dann existiert ein Euler–Kreis w in Γ, wenn für alle $x \in X$ gilt: orientiert $\operatorname{ideg}(x) = \operatorname{odeg}(x)$ bzw. unorientiert $\deg(x) \in 2\mathbb{N}$, allgemein
2. ein Euler–Weg, wenn (1) gilt oder genau zwei Ausnahmen $x_\pm \in X$ existieren, mit $\operatorname{ideg}(x_\pm) = \operatorname{odeg}(x_\pm) \pm 1$ bzw. $\deg(x_\pm) \in 2\mathbb{N} + 1$.

Aufgabe: Beweisen Sie abschließend Eulers wunderschönen Satz.
Besser noch: Entwickeln Sie einen Algorithmus zur Konstruktion!

Euler–Wege und Euler–Kreise auf Graphen

Lösung: (1) „$\Rightarrow$“ Jede Ecke $x \in X$ wird vom Euler–Kreis k_x mal betreten und k_x mal verlassen, also $\operatorname{ideg}(x) = \operatorname{odeg}(x) = k_x$ bzw. $\deg(x) = 2k_x$.

„$\Leftarrow$“ Wir konstrieren einen Euler–Kreis durch folgenden Algorithmus: Markiere anfangs alle Kanten als verfügbar, im Verlauf als verwendet.

Solange noch Kanten verfügbar sind, wähle eine davon als $a_0 : x_0 \leftrightarrow x_1$ und setze $\ell = 1$. Solange noch $x_\ell \neq x_0$ gilt, ist in der Ecke x_ℓ mindestens eine Kante verfügbar. Wähle eine davon als a_ℓ und erhöhe ℓ um eins. So fortfahrend entsteht ein Weg w_1, der jede Kante höchstens einmal besucht. Da Γ endlich ist, muss w_1 sich irgendwann schließen.

Solange noch Kanten verfügbar sind, wiederhole diese Konstruktion. So entstehen nach und nach geschlossene Wege $w_1, \dots, w_m$ in Γ. Jede Kante tritt in genau einem davon auf, und dort genau einmal. Wenn sich zwei Kreise in einer Ecke x schneiden, so können sie in x aufgeschnitten und zu einem gemeinsamen Kreis verbunden werden. Da Γ zusammenhängend ist, bleibt schließlich ein einziger Euler–Kreis.

(2) Verbinde die zwei Enden / Ausnahmeecken $x_\pm$ und nutze (1). QED

Euler–Kreise sind leicht, Hamilton–Kreise sind schwer!

Sei $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ ein Graph. Ein Weg $w = (x_1 \to x_2 \to \dots \to x_n)$ heißt **Hamilton–Weg**, wenn jede Ecke genau einmal besucht wird, wenn also die Abbildung $\check{w} : \{1, 2, \dots, n\} \to X : i \mapsto x_i$ bijektiv ist.

Der Weg $(x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots \to x_n)$ heißt **Hamilton–Kreis**, wenn $x_0 = x_n$ gilt, und die Abbildung $\check{w} : \{1, 2, \dots, n\} \to X : i \mapsto x_i$ bijektiv ist. Jeder Hamilton–Kreis definiert offensichtlich auch einen Hamilton–Weg.

Bei $|X| = n$ Ecken gibt es insgesamt $n!$ Kandidaten für Hamilton–Wege. Die *Brute-Force-Methode* probiert sie alle durch, doch ihr Zeitaufwand ist exponentiell in n. Das ist nur für sehr kleine n realistisch durchführbar.

Dies führt auf ein wichtiges theoretisches und auch praktisches Problem: Vorgelegt sei ein Graph Γ. Bestimme, ob ein Hamilton–Weg existiert! Problem: Lässt sich die Antwort in polynomieller Zeit berechnen?

Wenn Sie dieses NP-vollständige Problem lösen, werden Sie berühmt… und reich: Das Clay Mathematics Institute hat im Jahr 2000 die Frage „P = NP“ als eines der sieben Millenium-Probleme ausgelobt, mit einem Preisgeld von 1 Million Dollar. Der Erkenntniswert ist noch weit größer!

Morphismen zwischen Graphen

Ein **Morphismus** $(\varphi_0, \varphi_1) : (\Gamma_0, \Gamma_1, \sigma, \tau) \to (\Gamma'_0, \Gamma'_1, \sigma', \tau')$ von Graphen ist ein Paar bestehend aus einer Eckenabbildung $\varphi_0 : \Gamma_0 \to \Gamma'_0$ und einer Kantenabbildung $\varphi_1 : \Gamma_1 \to \Gamma'_1$ mit $\sigma' \circ \varphi_1 = \varphi_0 \circ \sigma$ und $\tau' \circ \varphi_1 = \varphi_0 \circ \tau$. Graphen und ihre Morphismen bilden zusammen die Kategorie $\mathtt{Graph}$.

Jeder Morphismus (φ_0, φ_1) setzt sich auf Wege fort zu $\varphi_n : \Gamma_n \to \Gamma'_n$ mit

$$\varphi_n(x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{a_1} \dots \longrightarrow x_n) = (\varphi_0 x_0 \xrightarrow{\varphi_1 a_0} \varphi_0 x_1 \xrightarrow{\varphi_1 a_1} \dots \longrightarrow \varphi_0 x_n)$$

Dies definiert den **Funktor** $\varphi_* : \Gamma_* \to \Gamma'_*$ der beiden Wegekategorien: Er bildet jede Ecke $x \in \Gamma_0$ auf eine Ecke $\varphi_0(x) \in \Gamma'_0$ ab, ebenso jeden Weg $w \in \Gamma_*$ auf einen Weg $\varphi_*(w) \in \Gamma'_*$, und respektiert dabei Start und Ziel und alle Kompositionen gemäß $\varphi_*(w_1 \circ w_2) = \varphi_*(w_1) \circ \varphi_*(w_2)$.

Für einen Morphismus $(\varphi_0, \varphi_1) : (\Gamma_0, \Gamma_1, \sigma, \tau, -) \to (\Gamma'_0, \Gamma'_1, \sigma', \tau', -)$ zwischen unorientierten Graphen verlangen wir zudem die Bedingung $\varphi_1(-a) = -\varphi_1(a)$ für jede Kante $a \in \Gamma_1$ (Verträglichkeit, Äquivarianz). Auch unorientierte Graphen bilden eine Kategorie, wie oben erklärt.

Teilgraphen und Isomorphismen

Ein **Teilgraph** $\Gamma' = (\Gamma'_0, \Gamma'_1, \sigma', \tau')$ in $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \sigma, \tau)$ besteht aus Teilmengen $\Gamma'_0 \subseteq \Gamma_0$ und $\Gamma'_1 \subseteq \Gamma'_1$ mit $\sigma(\Gamma'_1) \subseteq \Gamma'_0$ und $\tau(\Gamma'_1) \subseteq \Gamma'_0$, sowie den so definierten Einschränkungen $\sigma', \tau' : \Gamma'_1 \to \Gamma'_0$ von σ, τ.

Äquivalent hierzu: Die Inklusion $\Gamma' \hookrightarrow \Gamma$ ist ein Morphismus in $\mathtt{Graph}$.

Der **volle Teilgraph** auf der Eckenmenge $\Gamma'_0 \subseteq \Gamma_0$ entsteht durch die volle Kantenmenge $\Gamma'_1 = \{\, a \in \Gamma_1 \mid \sigma a, \tau a \in \Gamma_0 \,\}$ und $\sigma', \tau' : \Gamma'_1 \to \Gamma'_0$

Ein **Isomorphismus** $\varphi : \Gamma \to \Gamma'$ ist ein invertierbarer Morphismus, d.h. es existiert ein Morphismus $\psi : \Gamma' \to \Gamma$ mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_\Gamma$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\Gamma'}$.

Äquivalent hierzu: Sowohl die Eckenabbildung $\varphi_0 : \Gamma_0 \to \Gamma'_0$ als auch die Kantenabbildung $\varphi_1 : \Gamma_1 \to \Gamma'_1$ sind bijektiv. Dann ist automatisch auch $\psi = (\varphi_0^{-1}, \varphi_1^{-1}) : \Gamma' \to \Gamma$ ein Morphismus, denn aus $\sigma' \circ \varphi_1 = \varphi_0 \circ \sigma$ folgt $\varphi_0^{-1} \circ \sigma' = \sigma \circ \varphi_1^{-1}$, und aus $\tau' \circ \varphi_1 = \varphi_0 \circ \tau$ folgt $\varphi_0^{-1} \circ \tau' = \tau \circ \varphi_1^{-1}$.

Diese hilfreiche Äquivalenz zwischen „Isomorphismus“ und „bijektiver Morphismus“ gilt ebenso in der Algebra für Gruppen, Vektorräume, etc.

Wann ist ein Morphismus invertierbar?

Ein Graph heißt **einfach** [*simple*], wenn $(\sigma, \tau) : A \to X \times X$ injektiv ist.

Jede Relation $A \subseteq X \times X$ auf einer Menge X ist ein einfacher Graph (X, A), ausführlich (X, A, σ, τ) mit $\sigma = \mathrm{pr}_1$ und $\tau = \mathrm{pr}_2$. (B112)

Ein Morphismus $\varphi : (X, A) \to (X', A')$ einfacher Graphen ist eine Abbildung $\varphi : X \to X$ der Eckenmengen mit $\varphi(A) \subseteq A'$.

⚠ In dieser allzu kurzen Vereinfachung gilt die ersehnte Äquivalenz zwischen „Isomorphismus“ und „bijektiver Morphismus“ nicht mehr!

Zwar existiert die Umkehrabbildung $\psi = \varphi^{-1} : X' \to X$ auf den Ecken, sie ist aber im Allgemeinen kein Morphismus $(X', A') \to (X, A)$.

Einfachste Beispiele ist der diskrete Teilgraph $(X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ oder allgemein $(X, A) \hookrightarrow (X, A')$ mit $A \subsetneq A' \subset X \times X$.

🙂 Diese Problematik ist analog zur Umkehrung stetiger Abbildungen $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ zwischen topologischen Räumen, selbst im $\mathbb{R}^n$: Zum Beispiel ist $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$ stetig und bijektiv, aber kein Homöomorphismus, denn f^{-1} ist nicht stetig!

Auch Wege sind Morphismen.

Als **Modellgraphen** betrachten wir für $n \in \mathbb{N}$ folgende Graphen:

der Pfad [*path*] $\quad P_n = (0 \to 1 \to 2 \to \dots \to n),\ n \ge 0,$ und

der Zykel [*cycle*] $\quad C_n = (0 \to 1 \to \dots \to (n{-}1) \to 0),\ n \ge 1.$

Kleinste Beispiele sind der Punkt $P_0 = (0)$ und der Pfeil $P_1 = (0 \to 1)$ sowie die Schleife $C_1 = (\circlearrowright)$ und das Zweieck $C_2 = (0 \rightleftarrows 1)$. Allgemein:

Der Graph $P_n = (X_n, A_n, \sigma_n, \tau_n)$ hat Ecken $X_n = \{\, x \in \mathbb{N} \mid 0 \le x \le n \,\}$ und Kanten $A_n = \{\, (x, x+1) \mid 0 \le x < n \,\}$ mit $\sigma = \mathrm{pr}_1$ und $\tau = \mathrm{pr}_2$. Für $n = \infty$ erhalten wir den unendlichen Pfad $P_\infty = (0 \to 1 \to 2 \to \dots)$.

Der Graph $C_n = (X'_n, A'_n, \sigma'_n, \tau'_n)$ mit $n \ge 1$ hat Ecken und Kanten wie P_n mit der Identifizierung $n \equiv 0$. Ausgeschrieben bedeutet das $X'_n = \mathbb{Z}/n$ und $A'_n = \{\, (x, x+1) \mid x \in \mathbb{Z}/n \,\}$ mit den Projektionen σ, τ. Für $n = 0$ erhalten wir $\mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z}$ und $C_\infty = (\dots \to -2 \to -1 \to 0 \to 1 \to 2 \to \dots)$.

Somit ist jeder Weg $w = (x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{a_1} \dots \longrightarrow x_n)$ in einem Graphen Γ ein Morphismus $\varphi : P_n \to \Gamma$. Entsprechend ist jeder geschlossene Weg $w = (x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{a_1} \dots \longrightarrow x_n)$ mit $x_n = x_0$ ein Morphismus $\psi : C_n \to \Gamma$.

Forderungen zur Endlichkeit

Die Informatik verwendet üblicherweise die griffige Abkürzung DAG = *directed acyclic graph*, gerichteter azyklischer Graph, kurz $C_n \not\to \Gamma$.

Für unsere Spiele ist es bequemer diesen Begriff zu verstärken zu DAG = *directed artinian graph*, gerichteter artinscher Graph, kurz $P_\infty \not\to \Gamma$.

Für viele unserer Induktionsargumente benötigen wir zudem: LEA = lokal-endlich und artinsch, ALF = *artinian and locally-finite*.

Aufgabe: Die Bedingung ALF / LEA ist äquivalent zur Aussage:

1. Der Graph Γ ist azyklisch, und für jeden Zustand x ist der erreichbare Teilgraph Γ_x endlich. (Für endliche Graphen ist azyklisch dasselbe wie artinsch. Für unendliche Graphen ist artinsch strikt stärker.)

Finden Sie (einfache / kleine / schöne) Beispiele von Graphen,

2. die weder lokal-endlich noch artinsch sind;
3. die lokal-endlich, aber nicht artinsch sind;
4. die artinsch, aber nicht lokal-endlich sind.

Forderungen zur Endlichkeit

Lösung: Wir schreiben $x \to y$, wenn eine Kante $a \in \Gamma_1(x,y)$ existiert, und allgemeiner $x \xrightarrow{*} y$ falls ein beliebiger Weg $w \in \Gamma_*(x,y)$ existiert. Dies ist die reflexiv-transitive Fortsetzung der Kantenrelation $\to$ auf X und definiert somit eine partielle Ordnung auf der Eckenmenge X.

(1) „$\Leftarrow$“: Lokal-endlich ist klar, und artinsch folgt per Induktion über $\sharp\Gamma_x$. „$\Rightarrow$“: Azyklisch ist klar. Angenommen, der erreichbare Teilgraph Γ_x wäre unendlich, also mit unendlicher Eckenmenge $\{\, z \in X \mid x \xrightarrow{*} z \,\}$. Unter den endlich vielen Nachfolgern y mit $x \to y$ existiert mindestens einer, für den Γ_y unendlich ist. So fortfahrend finden wir einen unendlichen Weg $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots$, Widerspruch! (Kőnigs Lemma B1H)

(2) Einfache Beispiele sind $X = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ mit $x \to y$ falls $x < y$.

(3) Das minimale Beispiel ist der Pfad $P_\infty = (0 \to 1 \to 2 \to \dots)$.

(4) Ein klassisches Beispiel ist der einfache Graph (X, A, σ, τ) mit der Eckenmenge $X = \mathbb{N}^2$ und als Kantenmenge die lexikographische Ordnung $A = \{\, (x,y) \in X \times X \mid x_1 > y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 > y_2) \,\}$.

Optimierung auf Graphen: allgemeine Fragestellung

Meist betrachtet man zu Graphen weitere Daten und Eigenschaften. Graphen sind daher häufig die gemeinsame, tragende Grundstruktur. In der Optimierung betrachtet man Gewichte und minimiert die Kosten / maximiert den Gewinn der gestellten Aufgabe, z.B. beste Verbindung:

Eine **(reelle) Gewichtung** der Ecken $v : X \to \mathbb{R}$ bzw. Kanten $r : A \to \mathbb{R}$ interpretieren wir als Kosten / Nutzen für das Erreichen eines Zustands $x \in X$ bzw. das Ausführen einer Aktion $a \in A$. Daraus berechnen wir zu jedem Weg $w = (x_0 \xrightarrow{a_1} x_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} x_n)$ seine Gesamtbewertung

$$w \mapsto u(w) = \textstyle\sum_{t=1}^n r(a_t) + v(x_t).$$

Bei festem Start x und (zumeist auch) Ziel y suchen wir Wege $w : x \to y$, die die Kosten $u(w)$ minimieren bzw. den Nutzen $u(w)$ maximieren.

Für $v = 0$ und $r = 1$ suchen wir den kürzesten Weg von x nach y. Solche Fragen treten in der Informatik und Anwendungen häufig auf: Für $r : A \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ löst dies der Dijkstra–Algorithmus (1956), für allgemeine Gewichte $r : A \to \mathbb{R}$ der Bellman–Ford–Moore–Algorithmus (1956).

Optimierung auf Graphen: kontinuierliche Analogie

Das ist ein diskretes Analogon zur **Variationsrechnung** der Analysis: Gegeben sei ein Wirkungsfunktional $S : \mathscr{C}^2 = \mathscr{C}^2([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch

$$w \mapsto S(w) := \int_{t=a}^b F(t, w(t), w'(t))\,\mathrm{d}t$$

als Integral einer $\mathscr{C}^2$–Funktion $F : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (t,q,p) \mapsto F(t,q,p)$. Wir fixieren Start $w(a) = x$ und Ziel $w(b) = y$. Ist $w \in \mathscr{C}^2$ extremal, also minimal $S(w) \le S(z)$ für alle $z \in \mathscr{C}^2$ oder maximal $S(w) \ge S(z)$ für alle $z \in \mathscr{C}^2$, dann erfüllt w die **Euler–Lagrange–Differentialgleichung**:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial p}\right](t, w(t), w'(t)) = 0.$$

Ausgeschrieben bedeutet das: Für alle $t \in [a,b]$ gilt die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial q}(t, w(t), w'(t)) = \frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial p}(\cdots) + \frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial p}(\cdots)\, w'(t) + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(\cdots)\, w''(t).$$

🙂 Mit dieser Differentialgleichung können wir $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ berechnen!

Hat Schach eine Gewinnstrategie? (Zermelo 1912)

Ist Schach determiniert? Ein Spielstand s heißt **determiniert**, falls gilt: Entweder Weiß kann einen Gewinn erzwingen (egal wie Schwarz spielt), oder aber Schwarz kann einen Gewinn erzwingen (egal wie Weiß spielt), oder jeder von beiden kann (mindestens) ein Unentschieden erzwingen.

Sei X die Menge aller möglichen Spielstände s. (Beim Schach ist das nicht nur die Stellung auf dem Brett, sondern die Liste aller bisherigen Züge.) Die Relation $\to$ auf der Zustandsmenge X bezeichne legale Züge $s \to t$. Sie erlaubt keine unendlichen Zugfolgen $s_0 \to s_1 \to \ldots$, ist also artinsch.

Jeder *Endzustand* t ist determiniert: Der Ziehende gewinnt, $u(t) := +1$, oder verliert, $u(t) := -1$, oder es endet unentschieden, $u(t) := 0$.

Jeder *aktive Zustand* ist determiniert durch $u(s) := -\min\{\, u(t) \mid s \to t \,\}$. Dazu benötigen wir, dass der Spielgraph $(X, \to)$ artinsch ist, und nur das!

Insbesondere ist der Startzustand determiniert! Entweder existiert eine Gewinnstrategie für Weiß oder eine für Schwarz, oder beide können ein Unentschieden sichern. Einer dieser drei Fälle gilt, doch welcher? Unsere Rekursion berechnet $u(s)$; sie ist effektiv, aber nicht effizient.

Hat Schach eine Gewinnstrategie? (Zermelo 1912)

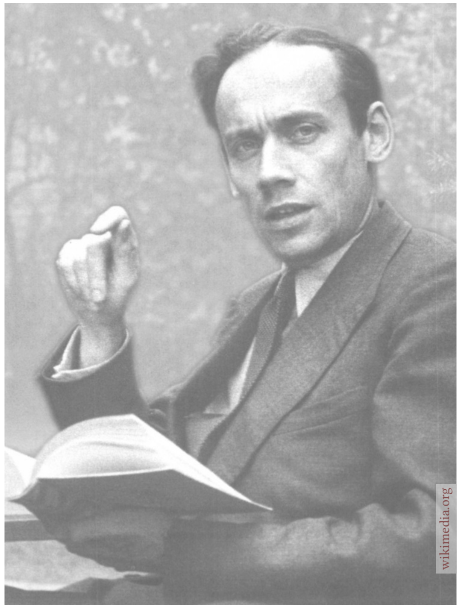
Ernst Zermelo ist heutigen Studierenden der Mathematik bekannt durch seine Arbeiten zur Mengenlehre, speziell die Zermelo–Fraenkel–Axiome. Er war zudem ein begeisterter Schachspieler, und dies führte zu zwei mathematischen Arbeiten. Die erste davon *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels* (1913) war sein Vortrag auf dem 5. Internationalen Mathematikerkongress 1912 in Cambridge.

Die Mengenlehre war und ist hierzu ein bequemer formaler Rahmen! Diese Rekursionsmethode tritt bei zahlreichen Optimierungsproblemen natürlich auf und wird gerne und erfolgreich angewendet. Rekursion ist daher ein beliebtes Universalwerkzeug der Wirtschaftswissenschaften. So lassen sich viele praktische Fragen formalisieren und explizit lösen.

Idealerweise entspringt die Rekursion unmittelbar der ökonomischen Fragestellung. In vereinfachter Form findet sie sich daher bereits bei Ernst Zermelo 1913 sowie allgemein bei John von Neumann und Oskar Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior* (1944), und später bei Harold Kuhn, *Extensive Games and the Problem of Information* (1953).

Induktive Beweise und rekursive Konstrukionen

Emmy Noether (1882–1935)



Emil Artin (1898–1962)

Induktive Beweise und rekursive Konstrukionen

Induktion und Rekursion, o welch wunderbare Werkzeuge! Sie kennen und lieben diese Techniken: schwach, stark, transfinit, ... Wäre es nicht schön, alle Varianten einheitlich zu behandeln? Das geht, und der allgemeine Fall ist zudem der leichteste.

Emmy Noether und Emil Artin haben die mathematischen Werkzeuge der Induktion und Rekursion vervollkommnet. Sie hatten den Blick für das Wesentliche: Worauf genau kommt es an, wenn wir induktiv beweisen oder rekursiv konstruieren? Das schauen wir uns gleich genauer an.

Erste große Erfolge feierten diese allgemeinen Techniken in der Algebra. Ihnen zu Ehren wird die aufsteigende Kettenbedingung (*ascending chain condition*, ACC) auch *noethersch* und die absteigende Kettenbedingung (*descending chain condition*, DCC) auch *artinsch* genannt.

Diese Begriffe und Techniken sind bemerkenswert universell nützlich. Dies unterstreicht erneut die wichtige Einsicht: Abstrakt bedeutet nicht etwa fern der Anwendung, sondern im Gegenteil vielseitig anwendbar. Die allgemeinste Formulierung ist zugleich die einfachste und schönste!

Artinsche Graphen und noethersche Induktion

Wie funktionieren induktive Beweise und rekursive Konstrukionen?
Sei (X, R) ein einfacher Graph, also eine Menge X mit Relation $R \subseteq X^2$.
Statt $(s,t) \in R$ oder $s\ R\ t$ schreiben wir suggestiv $s \to t$ für „s über t“
oder $t \leftarrow s$ für „t unter s“, alternativ $s \succ t$ „größer“ oder $t \prec s$ „kleiner“.

Definition B1D: artinsch aka wohlfundiert

Ein **unendlicher Abstieg** ist eine Kette $s_0 \to s_1 \to s_2 \to s_3 \to \dots$.
Wir nennen $(X, \to)$ **artinsch**, falls es keinen unendlichen Abstieg gibt.

Beispiel: $(\mathbb{N}, >)$ ist artinsch, nicht jedoch $(\mathbb{Z}, >)$, ebensowenig $([0,1], >)$.

Satz B1E: noethersche Induktion

Sei $(X, \to)$ artinsch. Um für jedes $s \in X$ die Aussage $A(s)$ zu beweisen, genügt der Induktionschritt: Gilt $A(t)$ für alle $t \leftarrow s$, so folgt $A(s)$.

Beweis: Angenommen, es existiert ein Gegenbeispiel $s_0 \in X$ mit $\neg A(s_0)$.
Per Induktionschritt, contraponiert, existiert ein $s_1 \leftarrow s_0$ und $\neg A(s_1)$.
So fortfahrend erhalten wir $s_0 \to s_1 \to s_2 \to \dots$. Widerspruch! $\boxed{\text{QED}}$

Wohlfundierte / noethersche Induktion

In der Mathematik und ihren Anwendungen beweisen wir Aussagen oft per Induktion. In der Informatik etwa will man Programme verifizieren und zeigt dazu Terminierung und Korrektheit geeigneter Algorithmen. Optimale Entscheidungen in der Ökonomik / Spieltheorie / Optimierung findet man oft per Rückwärtsinduktion, durch Rekursion und Induktion.

Per **Induktion** beweisen Sie eine Aussage $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$A(0)$	Induktionsanfang: Sie beweisen die Aussage $A(0)$.
$A(n) \Rightarrow A(n+1)$	Induktionsschritt: Sie beweisen $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.
$\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$	Induktionsschluss: die Allaussage $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$.

Hierzu gibt es viele Varianten, zum Beispiel die **starke Induktion**:

$[\forall k < n : A(k)] \Rightarrow A(n)$	Gilt $A(k)$ für alle $k < n$, so folgt $A(n)$.
$\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$	Die Aussage $A(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Voraussetzung ist hier stärker, daher ist der Beweis oft leichter.
Der Anfang $\top \Rightarrow A(0)$ ist gleich eingebaut; das ist insbesondere dann eine willkommene Vereinfachung, wenn er genauso verläuft wie der Schritt.

Wohlfundierte / noethersche Induktion

Wir wollen das Induktionsprinzip möglichst allgemein formulieren, alle Varianten bequem zusammenfassen und dann universell anwenden.

Sei (X, R) eine wohlfundierte Menge (B1E). Statt $(x,y) \in R$ schreiben wir suggestiv $x \to y$ oder $y \leftarrow x$, etwa als Zug in einem Spiel, alternativ $x \succ y$ oder $y \prec x$, etwa im Kontext einer Ordnungsrelation (Wohlordnung).

Wir wollen die Aussage $A(x)$ für alle $x \in X$ beweisen. Als **wohlfundierte** oder **noethersche Induktion** bezeichnen wir die folgende Schlussregel:

$\forall x \in X : [\forall y \prec x : A(y)] \Rightarrow A(x)$	Induktionsschritt
$\forall x \in X : A(x)$	Induktionsschluss

In Worten: Wir zeigen für jedes Element $x \in X$ den **Induktionsschritt**:
Gilt die **Voraussetzung** $A(y)$ für alle $y \prec x$, so auch die **Folgerung** $A(x)$.
Der **Induktionsschluss** besagt: Die Aussage $A(x)$ gilt für alle $x \in X$.

Für die Erfüllungsmenge $E = \{\, x \in X \mid A(x) \,\}$, allgemein $E \subseteq X$, gilt:

$E \subseteq X \wedge \forall x \in X : X_{\prec x} \subseteq E \Rightarrow x \in E$	Induktionsschritt
$E = X$	Induktionsschluss

Artins Prinzip des kleinsten Verbrechers

Dramatisch: Wir fürchten ein Gegenbeispiel $s_0 \in X$ mit $\neg A(s_0)$.
Gibt es ein kleineres $s_1 \leftarrow s_0$ mit $\neg A(s_1)$, so wählen wir dies.
So fortfahrend erreichen wir, da $(X, \to)$ artinsch ist, schließlich einen „kleinsten Verbrecher“ $s \in X$.
Für alle $t \leftarrow s$ gilt $A(t)$. Der Induktionsschritt garantiert $A(s)$. Es gibt gar keinen Verbrecher!

Wir arbeiten weiterhin mit einer wohlfundierten Menge $(X, \to)$.
(I) Per *Induktion* B1E beweisen wir Aussagen $A(s)$ für alle $s \in X$.
(R) Per *Rekursion* B1F konstruieren wir Abbildungen $f : X \to Z$.

Beispiel: Es gibt $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(0) = 1$ und $f(n) = n \cdot f(n-1)$ für $n \ge 1$,
$F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $F(0) = F(1) = 1$ und $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n \ge 2$.

Wir wollen eine Funktion $f : X \to Z$ konstruieren, indem wir jeden Wert $f(x)$ rekursiv berechnen aus den vorigen Werten $f(y)$ mit $x \to y$. Existiert eine solche Funktion f? Ist f dadurch eindeutig bestimmt? Welche Vorkehrungen, Daten und Eigenschaften, benötigen wir hierzu?

Noethersche Rekursion konstruiert Funktionen.

Satz B1F: noethersche Rekursion

Sei $(X, \to)$ artinsch. Zu jedem Element $s \in X$ sei $\downarrow s := \{ t \in X \mid s \to t \}$ und die Rekursionsvorschrift $g_s : Z^{\downarrow s} \to Z$ gegeben. Dann existiert genau eine Abbildung $f : X \to Z$ mit $f(s) = g_s(f|{\downarrow s})$ für alle $s \in X$.

Beweis: Eine **partielle Lösung** $u : X \supseteq D_u \to Z$ erfüllt für jedes Element $s \in D_u$ die Inklusion $\downarrow s \subseteq D_u$ und die Rekursion $u(s) = g_s(u|{\downarrow s})$.

(1) Eindeutigkeit: Je zwei partielle Lösungen $u : D_u \to Z$ und $v : D_v \to Z$ stimmen auf der Schnittmenge $D = D_u \cap D_v$ überein. Induktionsschritt: Für $s \in D$ gilt $\downarrow s \subseteq D$ und somit $u(s) = g_s(u|{\downarrow s}) = g_s(v|{\downarrow s}) = v(s)$.

(2) Existenz: Sei $f := \bigcup_u u$ die Vereinigung aller partiellen Lösungen u. Wir definieren also die Abbildung $f : D_f \to Z$ auf $D_f = \bigcup_u D_u$ durch $f(s) = u(s)$ falls $s \in D_u$. Dies ist wohldefiniert dank Eindeutigkeit (1). Somit ist auch $f : X \supseteq D_f \to Z$ eine partielle Lösung. Wäre $D_f \subsetneq X$, so existierte $s \in X \smallsetminus D_f$ minimal, also $\downarrow s \subseteq D_f$, und wir könnten f zu u fortsetzen durch $u(s) := g_s(f|{\downarrow s})$, Widerspruch! Also gilt $D_f = X$. $\boxed{\text{QED}}$

Noethersche Rekursion konstruiert Funktionen.

Fazit: Eine Lösung $f : X \to Z$, die die Rekursion $f(s) = g_s(f|{\downarrow s})$ für alle $s \in X$ erfüllt, existiert dank (2) und ist eindeutig dank (1). Dieser Beweis konstruiert die Lösung f durch „Ausschöpfung von innen“. Alternativ gelingt dies auch wie folgt durch „Eingrenzung von außen“:

Eindeutigkeit: Erfüllen $f, f' : X \to Z$ die Rekursion, so folgt $f = f'$. Induktionsschritt: Gilt $f(t) = f'(t)$ für alle $t \leftarrow s$, so folgt rekursiv

$$f(s) = g_s(f|{\downarrow s}) = g_s(f'|{\downarrow s}) = f'(s).$$

Konstruktion: Eine Teilmenge $R \subseteq X \times Z$ nennen wir *induktiv*, falls gilt: Enthält R einen Funktionsgraphen $F_s : \downarrow s \to Z$, so folgt $(s, g_s(F_s)) \in R$. Die größte induktive Menge ist $X \times Z$, die kleinste ist der Durchschnitt

$$F := \bigcap \{ R \subseteq X \times Z \mid R \text{ ist induktiv} \}.$$

Für alle $s \in X$ zeigen wir $A(s)$: Es existiert genau ein $a \in Z$ mit $(s, a) \in F$. Induktionsschritt: Es gelte $A(t)$ für alle $t \leftarrow s$. Wir folgern daraus $A(s)$. Da F induktiv ist, folgt $(s, a) \in F$ mit $a = g_s(F|{\downarrow s})$. Sei $(s, b) \in F$. Im Falle $b \neq a$ wäre auch $F \smallsetminus \{(s, b)\}$ induktiv. Da F minimal ist, folgt $b = a$. $\boxed{\text{QED}}$

Wohlfundierte / noethersche Induktion

Wann und wie können wir die wohlfundierte Induktion B1E anwenden?

Satz B1G: wohlfundierte / noethersche Induktion

Für $(X, \succ)$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

1. Jede nichtleere Teilmenge $M \subseteq X$ hat ein $\succ$–minimales Element: Es existiert $x \in M$, sodass für kein $y \in M$ die Relation $x \succ y$ gilt.
2. Über $(X, \succ)$ gilt die wohlfundierte Induktion: Sei $E \subseteq X$. Für jedes $x \in X$ gelte (2a) $[\forall y \prec x : y \in E] \Rightarrow x \in E$. Dann folgt (2b) $E = X$.
3. Die Relation $\succ$ ist wohlfundiert, aka artinsch, das heißt, in $(X, \succ)$ gibt es keine unendlich lange absteigende Kette $x_0 \succ x_1 \succ x_2 \succ \dots$.

Beweise nach dem Prinzip (1) suchen ein **kleinstes Gegenbeispiel**, engl. scherzhaft *minimal criminal*, und zeigen, dass keines existiert. Die wohlfundierte Induktion (2) heißt auch **noethersche Induktion** zu Ehren von Emmy Noether (1882–1935). Die Eigenschaft (3) heißt auch **absteigende Kettenbedingung** (engl. *descending chain condition*, DCC), oder $(X, \succ)$ kurz **artinsch**, zu Ehren von Emil Artin (1898–1962).

Wohlfundierte / noethersche Induktion

Beweis: „(1) $\Rightarrow$ (2)“: Gegeben sei $E \subseteq X$. Für jedes $x \in X$ gelte (2a). Sei $M = X \smallsetminus E$. Gilt $M \neq \emptyset$, so garantiert (1) ein minimales Element $x \in M$: Für alle $y \in X$ mit $y \prec x$ gilt $y \in E$. Dank (2a) folgt $x \in E$, Widerspruch! Also gilt $M = \emptyset$, und somit der Schluss (2b) $E = X$.

„(2) $\Rightarrow$ (3)“: Sei E die Menge aller $x_0 \in X$, für die jede Kette $x_0 \succ x_1 \succ \dots$ endlich ist. Offensichtlich gilt (2a): Ist für $x \succ y$ jede Kette $y \succ \dots$ endlich, so ist jede Kette $x \succ y \succ \dots$ endlich. Daraus folgt (2b) $E = X$, somit (3).

„(3) $\Rightarrow$ (1)“: Sei $\emptyset \neq M \subseteq X$. Wir wählen $x_0 \in M$. Ist x_0 nicht minimal, so wählen wir $x_1 \in M$ mit $x_0 \succ x_1$. So fortfahrend erhalten wir eine Kette $x_0 \succ x_1 \succ \dots$. Dank (3) endet diese in einem minimalen Element. $\boxed{\text{QED}}$

Beispiele: (A) Für jede wohlgeordnete Menge $(X, \leq)$ erfüllt die strikte Ordnung $(X, >)$ die Eigenschaft (1), also auch das Induktionsprinzip (2). (B) Für $(\mathbb{N}, S)$ mit $x\, S\, y \Leftrightarrow x = y + 1$ erhalten wir die übliche (schwache) Induktion, (C) für $(\mathbb{N}, >)$ erhalten wir die starke Induktion (siehe B145). (D) Jeder Graph $(X, \to)$ ist ein Spiel mit Zuständen $x, y \in X$ und Zügen $x \to y$; (3) bedeutet: Jeder Spielverlauf endet nach endlich vielen Zügen.

🙂 Die noethersche Induktion enthält als Spezialfälle die gewöhnliche (schwache) Induktion über $(\mathbb{N}, S)$ sowie die starke Induktion über $(\mathbb{N}, >)$.

Aufgabe: Erklären Sie jeweils den Induktionsschritt, mit Voraussetzung und Folgerung, und visualisieren sie dies, etwa am Beispiel $n = 7$.

Lösung: Eine der vielen möglichen Visualisierungen gelingt wie folgt.

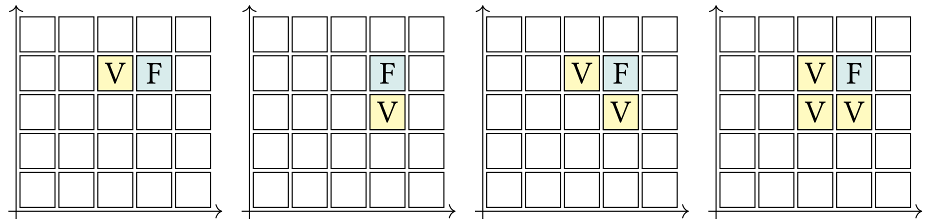
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
(schwache) Induktion:							V	F			…
starke Induktion:	V	V	V	V	V	V	V	F			…

Für die (schwache) Induktion beweisen wir den Induktionsanfang $A(0)$ und für jedes $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ den Induktionsschritt $A(n-1) \Rightarrow A(n)$. Im obigen Beispiel $n = 7$ haben wir die Voraussetzung $A(6)$ gelb und die Folgerung $A(7)$ grün markiert. (Wir denken an Dominosteine, Stein 6 kippt Stein 7.)

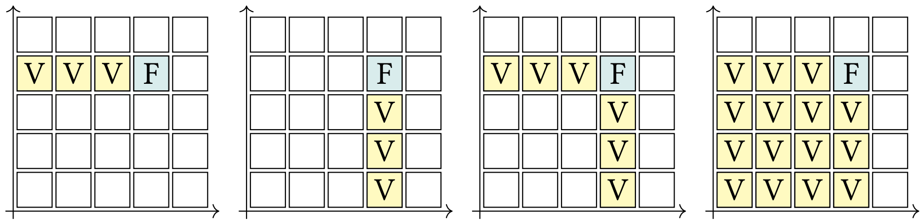
Für die starke Induktion beweisen wir für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ den Induktionsschritt: Gilt $A(k)$ für alle $k < n$, so folgt $A(n)$. Auch dies haben wir oben entsprechend visualisiert. (Dominosteine passen hier weniger.)

Aufgabe: Manchmal hängt die zu beweisende Aussage $A(x, y)$ von zwei Parametern $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ ab. Erklären und visualisieren Sie mindestens zehn wohlfundierte Relationen zur noetherschen Induktion über $\mathbb{N}^2$.

Lösung: Wir beginnen mit vier besonders einfachen Induktionsformen:



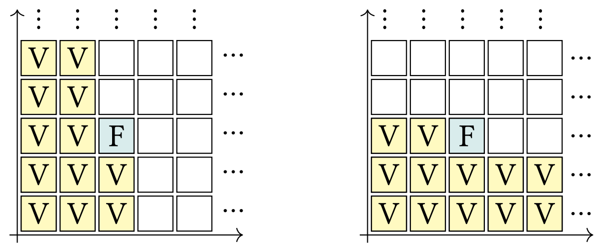
(1) Die wohlfundierte Relation $(\prec) = \{\, (\,(x, y),\ (x+1, y)\,) \mid x, y \in \mathbb{N} \,\}$ führt uns zur gewöhnlichen Induktion über $x \in \mathbb{N}$ bei festgehaltenem $y \in \mathbb{N}$.
(2) Entsprechend für die Relation $(\prec) = \{\, (\,(x, y),\ (x, y+1)\,) \mid x, y \in \mathbb{N} \,\}$.
Manchmal ist allerdings auch eine raffiniertere Induktionsform nötig, etwa (3) $(\prec) = \{\, ((x, y), (x+1, y)),\ ((x, y), (x, y+1)) \mid x, y \in \mathbb{N} \,\}$ oder
(4) $(\prec) = \{\, ((x, y), (x+1, y)),\ ((x, y), (x, y+1)),\ ((x, y), (x+1, y+1)) \,\}$.



(5) Die wohlfundierte Relation $(x, y) \prec (x', y') \Leftrightarrow x < x' \wedge y = y'$ entspricht der starken Induktion über $x \in \mathbb{N}$ bei festgehaltenem $y \in \mathbb{N}$.
(6) Entsprechend für die Relation $(x, y) \prec (x', y') \Leftrightarrow x = x' \wedge y < y'$.
(7) Die Vereinigung der Relationen (5) und (6) ergibt die wohlfundierte Relation $(x, y) \prec (x', y') \Leftrightarrow (x < x' \wedge y = y') \vee (x = x' \wedge y < y')$.
(8) Oft hilft die Produktordnung $(x, y) \le (x', y') \Leftrightarrow (x \le x' \wedge y \le y')$.

Aufgabe: Sei I eine endliche Menge und $(X_i, \succ_i)$ wohlfundiert für $i \in I$. Dann ist $X = \prod_{i \in I} X_i$ wohlfundiert bezüglich $x \succeq y \Leftrightarrow \forall i \in I : x_i \succeq_i y_i$.

Lösung: Gilt $x^0 \succ x^1 \succ \dots$ in $(X, \succ)$, so existiert ein Index $i \in I$ mit $x_i^{n_0} \succ_i x_i^{n_1} \succ_i \dots$. Das widerspricht der Wohlfundierung von $(X_i, \succ_i)$.



(9) Manchmal hilft **doppelte Induktion**. Als Schritt folgern wir $A(x, y)$ aus $A(x', y')$ für alle $x' \prec x$ und alle y' sowie $A(x, y')$ für alle $y' \prec y$.

Aufgabe: Sei $I = \{1 < 2 < \dots < n\}$ und $(X_i, \succ_i)$ wohlfundiert für $i \in I$. Auf $X = \prod_{i \in I} X_i$ definieren wir lexikographisch $x \succ y$ durch $x \ne y$ und $x_k \succ y_k$ für $k = \min\{\, i \in I \mid x_i \ne y_i \,\}$. Dann ist auch $(X, \succ)$ wohlfundiert.

Lösung: Zu $\emptyset \ne M \subseteq X$ konstruieren wir ein minimales Element $x \in M$. Für $i = 1, \dots, n$ setzen wir $M_i := \mathrm{pr}_i\{\, (x_1, \dots, x_{i-1}, ?, \dots, ?) \in M \,\} \subseteq X_i$ und wählen $x_i \in M$ minimal. Kein Element $y \in M$ erfüllt $x \succ y$, denn $x_1 = y_1$, …, $x_{k-1} = y_{k-1}$, $x_k \succ y_k$ widerspricht der Minimalität von x_k.

Als anschauliche Anwendung diskutieren wir das **Lemma von Kőnig**. Dramatisiert besagt es: Entweder die Menschheit stirbt aus oder es gibt heute eine Person, die eine unendliche Kette von Nachfahren haben wird.

Kontext: Ernst Zemelo bewies 1912, dass Schach determiniert ist. Allerdings war seine Methode noch *ad hoc* und nicht vollständig.

Der ungarische Mathematiker Dénes Kőnig untersuchte 1927 Zermelos Arbeit und schloss logische Lücken in der Argumentation. László Kalmár verallgemeinerte diese Arbeiten 1928 und formulierte als erster präzise die Methode der Rückwärtsinduktion, so wie sie heute noch genutzt wird.

📖 Ulrich Schwalbe, Paul Walker: *Zermelo and the Early History of Game Theory.* Games and Economic Behavior 34 (2001) 123–137.

Sei $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ ein Graph mit Eckenmenge X und Kantenmenge A sowie Randabbildungen $\sigma, \tau : A \to X$, die jeder Kante $a \in A$ ihren Start $x = \sigma(a)$ und ihr Ziel $y = \tau(a)$ zuordnen. Wir schreiben kurz $a : x \to y$ oder $x \xrightarrow{a} y$ und ebenso Wege $w = (x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{a_1} \dots \longrightarrow x_n) \in \Gamma_n \subseteq \Gamma_*$ von $\sigma(w) = x_0$ nach $\tau(w) = x_n$, kurz $\Gamma_n(x,y) = \{\, w \in \Gamma_n \mid w : x \to y \,\}$.

Verknüpfbare Wege verknüpfen wir durch Aneinanderhängen gemäß

$$\circ : \Gamma_m(x,y) \times \Gamma_n(y,z) \to \Gamma_{m+n}(x,z) : (w, w') \mapsto w \circ w',$$
$$(x_0 \xrightarrow{a_0} \dots x_m) \circ (y_0 \xrightarrow{b_0} \dots y_n) := (x_0 \xrightarrow{a_0} \dots x_m = y_0 \xrightarrow{b_0} \dots y_n).$$

Sei $\Gamma_n(x)$ die Menge aller Wege mit Start in x und Länge $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(a) Für die Menge $\Gamma_* = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_\infty$ aller Wege gilt demnach

$$\Gamma_*(x) = \{x\} \sqcup \bigsqcup\nolimits_{a:x\to y} \{\, (x \xrightarrow{a} y) \circ w' \,\big|\, w' \in \Gamma_*(y) \,\}.$$

Sprichwörtlich: Selbst die längste Reise beginnt mit dem ersten Schritt. Jeder Weg hat entweder Länge 0 oder startet mit einer ersten Kante $x \to y$ gefolgt vom Rest des Weges. Das ermöglicht uns Induktion / Rekursion.

(b) Allgemein gilt für jede Länge $n \in \mathbb{N}$ die Zerlegung $\Gamma_* = \Gamma_{<n} \sqcup \Gamma_{\ge n}$ mit

$$\Gamma_{\ge n}(x) = \{\, w \circ w' \,\big|\, w \in \Gamma_n(x,y),\ w' \in \Gamma_*(y) \,\}.$$

Für $\ell \in \{n, \dots, \infty\}$ zeigt dies insbesondere: Aus $\Gamma_\ell \ne \emptyset$ folgt $\Gamma_n(x) \ne \emptyset$.

(c) Alle Wege mit endlicher Länge $n \in \mathbb{N}$ können wir rekursiv aufbauen durch Ecken $\Gamma_0(x) = \{x\}$ und Kanten $\Gamma_1(x) = \{\, x \xrightarrow{a} y \mid a \in A \,\}$ sowie

$$\Gamma_{n+1}(x) = \{\, w \circ w' \mid w \in \Gamma_1(x,y),\ w' \in \Gamma_n(y) \,\}.$$

Der Graph Γ ist artinsch gdw jeder Weg in Γ endlich ist. In diesem Falle gilt $\Gamma_*(x) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n(x)$: Wir können jeden Weg rekursiv konstruieren.

(d) Die Höhe $h : X \to \mathbb{N} \cup \{\infty\} : h(x) = \sup\{\, n \in \mathbb{N} \mid \Gamma_n(x) \ne \emptyset \,\}$ erfüllt

$$h(x) = \sup\{\, 0,\ 1 + h(y) \mid x \to y \,\}.$$

Ist unser Graph Γ artinsch und lokal-endlich, so ist die Höhe $h(x)$ demnach endlich in jeder Ecke $x \in X$, dank noetherscher Induktion.

(e) Die Wegezahl $w : X \to \mathbb{N} \cup \{\infty\} : w(x) = \sharp\Gamma_*(x)$ erfüllt die Gleichung

$$w(x) = 1 + \sum\nolimits_{a:x\to y} w(y).$$

Dies folgt unmittelbar aus (a). Die Summe ist eventuell unendlich.

Die Un/Endlichkeit von $w(x)$ können wir in beide Richtungen betrachten:

Satz B1H: Lemma von Kőnig, 1927

Vorgelegt sei ein lokal-endlicher Graph $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$.

(1) Ist Γ artinsch, so ist $w(x) = \sharp\Gamma_*(x)$ endlich in jeder Ecke $x \in X$, dank noetherscher Induktion für $w : X \to \mathbb{N} : w(x) = 1 + \sum_{a:x\to y} w(y)$.

(2) Ist ausgehend von $x_0 \in X$ die Wegezahl $w(x_0) = \sharp\Gamma_*(x_0)$ unendlich, so existiert ein unendlich langer Weg $x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{a_1} x_2 \xrightarrow{a_2} x_3 \to \dots$.

Beweis: (1) Das folgt aus (e) durch wohlfundierte Induktion B1F.

(2) Dank (e) gilt $w(x_1) = \infty$ für mindestens eine Kante $a_0 : x_0 \to x_1$. Wir wählen eine solche Kante a_0; ist $(A, \le)$ wohlgeordnet, so setzen wir $a_0 := \min\{\, a : x_0 \to x \mid w(x) = \infty \,\}$. Dank $w(x_1) = \infty$ können wir dieses Argument wiederholen. Dies liefert einen unendlich langen Weg. $\boxed{\text{QED}}$

Aufgabe: (1) Ist die folgende Rekursion wohlfundiert?

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : g(n) = \begin{cases} 6 & \text{falls } n+1 \in 7\mathbb{N}, \\ g(n+1) - 1 & \text{falls } n+1 \notin 7\mathbb{N}. \end{cases}$$

(2) Finden Sie eine explizite Formel, beweisen Sie diese per Induktion.

Lösung: (1) Erstaunlich, aber wahr: Diese Rekursion ist wohlfundiert. Genauer ist die Relation $x \succ y \Leftrightarrow x + 1 = y \notin 7\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$ wohlfundiert: Jede Kette $x_0 \succ x_1 \succ \dots$ landet nach spätestens sechs Schritten in $7\mathbb{N}$.

(2) Wir finden $g(7k+6) = 6$, dann $g(7k+5) = 5$, usw. bis $g(7k) = 0$. Demnach gilt die explizite Formel $g(n) = n \operatorname{rem} 7$. Diese Gleichung beweist man für alle $n = 7k + r$ per Induktion über $r = 6, 5, \dots, 0$.

⚠ Zur Illustration und Übung ist die Rekursion (1) absichtlich verwickelt aufgeschrieben. Manchmal kommen ähnlich komplizierte Rekursionen auch natürlich in Anwendungen vor. In jedem Falle ist es guter Stil, dies in eine einfacher lesbare Form zu bringen, idealerweise explizit wie in (2).

Übung: (1) Ist die folgende Rekursion für $H : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ wohlfundiert?

$$H(a,b,n) = \begin{cases} b+1 & \text{für } n = 0, \\ a & \text{für } n = 1 \wedge b = 0, \\ 0 & \text{für } n = 2 \wedge b = 0, \\ 1 & \text{für } n \ge 3 \wedge b = 0, \\ H(a, H(a, b-1, n), n-1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

(2) Wir erhalten die vertraute Addition $H(a,b,1) = a + b$, Mutiplikation $H(a,b,2) = a \cdot b$, Exponentiation $H(a,b,3) = a^b =: a \uparrow b$ und **Tetration**

$$H(a,b,4) = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}} =: a \uparrow\uparrow b.$$

Dies ist ein Potenzturm mit Basis a und Höhe b, also $a \uparrow\uparrow 1 = a$ und $a \uparrow\uparrow 2 = a^a$ und $a \uparrow\uparrow 3 = a^{(a^a)}$ usw. Zum Beispiel gilt $2 \uparrow\uparrow 2 = 2^2 = 4$ und $2 \uparrow\uparrow 3 = 2^4 = 16$ und $2 \uparrow\uparrow 4 = 2^{16} = 65536$ und $2 \uparrow\uparrow 5 = 2^{65536}$.

Für $p \in \mathbb{N}$ definieren wir die **Hyperoperation** $a \uparrow^p b := H(a, b, p+2)$.

Übung: (3) Ist die folgende Rekursion für $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ wohlfundiert?

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{falls } m = 0, \\ A(m-1, 1) & \text{falls } m > 0 \wedge n = 0, \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{falls } m > 0 \wedge n > 0. \end{cases}$$

(4) Berechnen Sie eine Tabelle für kleine Werte; so finden Sie selbst die folgenden expliziten Formeln. Zeigen Sie per Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A(1,n) &= 2 + n &&= 2 + (n+3) - 3, \\ A(2,n) &= 2 \cdot n + 3 &&= 2 \cdot (n+3) - 3, \\ A(3,n) &= 2^{n+3} - 3 &&= 2 \uparrow (n+3) - 3, \\ A(4,n) &= 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} - 3 &&= 2 \uparrow\uparrow (n+3) - 3, \\ A(m,n) &= &&= 2 \uparrow^{m-2} (n+3) - 3. \end{aligned}$$

Beweisidee: Dies gelingt mit doppelter Induktion über $\mathbb{N}^2$, siehe B148, lexikographisch (1,2) erst über n, dann b, bzw. (3,4) erst über m, dann n.

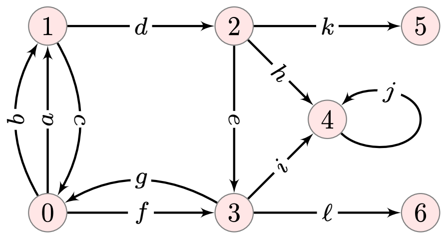
Bemerkung: Die Funktion $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ heißt **Ackerman–Péter–Funktion**. Dank (3) ist A rekursiv berechenbar, denn die Rekursion ist wohlfundiert. Diese Konstruktion nutzt nur die Nachfolgefunktion $S : n \mapsto n + 1$ und Rekursion, dennoch wächst A sagenhaft schnell gemäß (4). Sie ist ein berühmt-berüchtigtes Beispiel zu Berechenbarkeit und Komplexität.

David Hilbert (1862–1943) vermutete, dass jede berechenbare Funktion primitiv-rekursiv ist (`en.wikipedia.org/wiki/Primitive_recursive_function`). Sein Schüler Wilhelm Ackermann (1896–1962) widerlegte dies 1926 anhand eines Gegenbeispiels analog zu der Hyperoperation aus (1). Rózsa Péter (1905–1977) vereinfachte dies 1935 zur Funktion (3).

🙂 Die Funktion A wächst schneller als jede primitiv-rekursive Funktion.

Zum Beweis dieses berühmten Satzes zeigt man mit geduldiger Mühe: Zu jeder primitiv-rekursiven Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ existiert $m \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $x_1, \dots, x_k \le n$ die Ungleichung $f(x_1, \dots, x_k) < A(m, n)$ gilt. Wäre $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ primitiv-rekursiv, so gäbe es hierzu eine geeignete Konstante $m \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $A(m,m) < A(m,m)$, ein Widerspruch.

Spiele auf Graphen



$$\tau : A \to X :$$
$$\begin{array}{ll} (0,a) \mapsto 1, & (2,h) \mapsto 4, \\ (0,b) \mapsto 1, & (2,k) \mapsto 5, \\ (0,f) \mapsto 3, & (3,g) \mapsto 0, \\ (1,c) \mapsto 0, & (3,i) \mapsto 4, \\ (1,d) \mapsto 2, & (3,\ell) \mapsto 6, \\ (2,e) \mapsto 3, & (4,j) \mapsto 4. \end{array}$$

Definition B1I: Graph als Spiel: Zustände, Aktionen, Strategien

Im Graphen $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ interpretieren wir die Ecken $x \in X$ als **Zustände** und die Kanten $a \in A$ als **Aktionen**. Zur Vereinfachung gelte $A = \coprod_{x\in X} A_x = \bigcup_{x\in X} \{x\} \times A_x$ mit Start $\sigma = \mathrm{pr}_1 : A \to X : (x,a) \mapsto x$ und der **Transition** $\tau : A \to X : (x,a) \mapsto y$, lokal $\tau_x : A_x \to X : a \mapsto y$.

Für Zustände $x \in X$ schreiben wir auch $x \in \Gamma$. Wir zerlegen diese in
innere Ecken / aktive Zustände $\quad X^\circ = \mathrm{Im}(\sigma) = \{\, x \in X \mid A_x \neq \emptyset \,\}$
und **Blätter / terminale Zustände** $\quad \partial X = X \smallsetminus X^\circ = \{\, x \in X \mid A_x = \emptyset \,\}$.
Eine **Strategie** ist eine Abbildung $s : X^\circ \to A : x \mapsto a$ mit $\sigma \circ s = \mathrm{id}_{X^\circ}$.
Die Strategiemenge ist $S(\Gamma) = \{\, s : X^\circ \to A \mid \sigma \circ s = \mathrm{id}_{X^\circ} \,\} = \prod_{x \in X^\circ} A_x$.

Spiele auf Graphen

Wir sortieren alle **Aktionen** $a : x \to y$ nach ihrem Startzustand $x = \sigma(a)$: Dies erlaubt die bequem-konzise Codierung $A = \bigcup_{x\in X} \{x\} \times A_x$ mit Projektion $\sigma : A \to X : (x,a) \mapsto x$ und Transition $\tau : A \to X : (x,a) \mapsto y$. Für jeden Zustand x benennt die Menge A_x die möglichen Aktionen.

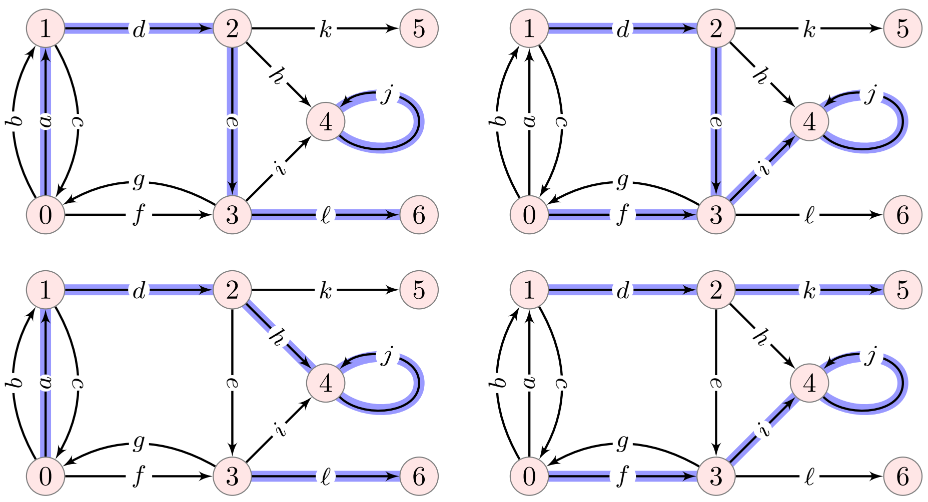
In der Graphentheorie und Informatik nennt man dies die **Adjazenzliste**: Für jeden Knoten $x \in X$ ist dies die Liste A_x aller ausgehenden Kanten $a : x \to y$ zusammen mit der Nachfolgerfunktion $\tau_x : A_x \to X : a \mapsto y$. Datenstrukturen und Algorithmen basieren meist auf Adjazenzlisten.

Als Analogie zur **Differentialtopologie**: Wir interpretieren $a : x \to y$ als einen Tangentialvektor, der im Fußpunkt x verankert ist und auf y zeigt. Die Projektion $\sigma : A \to X : (x,a) \mapsto x$ ist das Tangentialbündel über X, und jede Strategie $s : X^\circ \to A$ mit $\sigma \circ s = \mathrm{id}_{X^\circ}$ ist ein Vektorfeld auf X.

Zu jedem Startpunkt $x_0 \in X$ können wir s **integrieren** zur Trajektorie $w = (x_0, a_0, x_1, a_1, x_2, \dots)$ mit $a_t = s(x_t)$ und $x_{t+1} = \tau(x_t, a_t)$ für alle t. Diese endet entweder im Rand ∂X oder läuft unendlich in X° weiter. Das entspricht recht genau der Situation bei Differentialgleichungen!

Strategien auf Graphen

Vier Beispiele für Strategien auf diesem Graphen:



Aufgabe: Wie viele Strategien gibt es? **Lösung:** $|S| = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 54$.
Zum Vergleich: Insgesamt gibt es $|A| = 3 + 2 + 3 + 3 + 1 = 12$ Kanten.

Strategien auf Graphen

Nochmal zur Betonung: Eine Strategie s ordnet jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ eine Aktion $s(x) = a \in A_x$ zu. Dies schreiben wir als Abbildung $s : X^\circ \to A : x \mapsto a$ mit $\sigma \circ s = \mathrm{id}_{X^\circ}$. So weit, so gut, so klar, so einfach.

Erfahrungsgemäß keimen bald schon Zweifel an dieser Definition auf: Müssen wir wirklich für *jeden* aktiven Zustand eine Aktion vorsehen? Auch für Zustände, in die wir weder kommen wollen noch werden? Die kurze Antwort: Ja, wir müssen; diese Definition ist sinnvoll!

Wir können uns einen Startzustand vorgeben, im obigen Beispiel etwa 0. Wenn wir dann der gegebenen Strategie s folgen, werden wir manchen Zustand x nicht besuchen und seine Aktion $a = s(x)$ nicht ausführen. Dennoch müssen wir für *jeden* aktiven Zustand eine Aktion vorsehen. Der Grund ist einfach: Andere Startwerte benötigen diese Aktionen!

Die schöne Analogie zu Differentialgleichungen ist auch hier hilfreich: Sie geben das Vektorfeld auf dem gesamten Gebiet Ω vor, auch wenn zu einem vorgegebenen Startwert $x_0 \in \Omega$ die Trajektorie nicht alle Punkte $x \in \Omega$ durchläuft und daher nicht alle Vektoren $s(x)$ benutzt werden.

Belohnung: entlang des Wegs oder erst am Ende?

Graphen sind ideal für Spiele: Sie bieten eine universelle Beschreibung! Unser Spielgraph $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ codiert als Ecken alle Positionen / Zustände des Spiels und als Kanten die möglichen Züge / Aktionen.
Ein Spiel bietet zudem Nutzen, Gewinn, Auszahlung, Belohnung, etc.

1. Auszahlung $v(x)$ beim Erreichen eines Endzustandes $x \in \partial X$.
   „Entscheidend ist, was hinten rauskommt.“ / Ende gut, alles gut.
   Dies codieren wir als **terminale Auszahlung** $v : \partial X \to \mathbb{R}$.
2. Belohnung $r_x(a)$ beim Ausführen einer Aktion $a \in A_x$.
   „Der Weg ist das Ziel.“ / *instant gratification* / zeitnah, verteilt
   Dies codieren wir als **sofortige Belohnung** $r : A \to \mathbb{R}$.

Im zweiten Fall müssen wir die Gesamtauszahlung festlegen, etwa

(konvergent) summiert:	$u = \sum_t r(a_t)$,
mit $\delta \in [0,1]$ diskontiert:	$u = \sum_t \delta^t r(a_t)$,
diskontiert und normiert:	$u = (1-\delta) \sum_t \delta^t r(a_t)$.

Wir können diese Zahlungsarten mischen und ineinander umwandeln.

Belohnung: entlang des Wegs oder erst am Ende?

Graphen sind hilfreich für uns, denn **Menschen sind Augenwesen**: Durch einem Spielgraphen können wir die Regeln visualisieren und graphisch darstellen. Das ist komplementär zu wortreichen Erklärungen und oft effizienter. Auch für die anschließende Analyse / Rechnung / Lösung mit Stift und Papier ist diese Darstellung überaus nützlich.

Graphen sind zudem **ideal für Computer** und dienen als universelle Datenstruktur: Um ein Spiel vom Computer berechnen / lösen zu lassen, müssen wir seine Struktur (Zustände, Aktionen, Auszahlungen, etc.) präzise erfassen, formulieren und für den Rechner streng formalisieren. Erst darauf können Algorithmen aufbauen und Lösungen berechnen.

Bei manchen Brettspielen wie **Schach** oder **Go** geht es vor allem darum, wer am Ende gewinnt ($v = 1$) und wer verliert ($v = 0$). Einzelne Züge mögen schön und gut sein, führen aber nicht (allein) zur Auszahlung.

Das trifft auf alle Spiele zu, deren Gewinn sich nicht additiv aus kleinen Beiträgen zusammensetzt, sondern wo erst das große Ganze zählt: Zur Entscheidung der Auszahlungen muss zu Ende gespielt werden!

Alltagsbeispiele zu Belohnung und Auszahlung

Bei **Monopoly** und vielen **Computerspielen** entstehen Belohnungen / Gewinne durch einzelne Aktionen und werden sofort gutgeschrieben. Beim Design von Videospielen ist das Gameplay eine zentrale Frage: Zu simples Jump & Run langweilt, zu komplizierte Rätsel frustrieren.

Zum **Fußball** gibt es beide Meinungen: „Es zählt nur, wer als Sieger vom Platz geht.“ versus „Wir wollen schön spielen und die Fans belohnen / zeigen was wir können / den Zuschauern ein Spektakel bieten / etc.“ Sprichwörtlich: „Der Pokal hat seine eigenen Regeln.“

Aktien verbinden kurzfristige Dividende (z.B. als jährliche Ausschüttung) mit langfristiger Wertsteigerung (allerdings erst realisiert beim Verkauf).

Der (diskontierte) Gesamtnutzen u ist leicht zu verstehen als Summe aller Belohnungen $r(a_t)$. Jede einzelne davon ist unmittelbarer spürbar, das erfordert weniger mentale Leistung und strategische Vorausschau.

Die willkürliche Funktion $v : \partial X \to \mathbb{R}$ hingegen kann komplizierteste Regeln und Ausnahmen verbergen… und fällt am Ende vom Himmel. Sprichwörtlich: „Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile.“

Alltagsbeispiele zu Belohnung und Auszahlung

Weise Worte: *Quidquid agis, prudenter agas et respice finem!* [Was immer du tust, handele klug und bedenke das Ende!]

Im **alltäglichen Leben** verhalten sich Menschen sehr unterschiedlich: Manche suchen eher langfristige Strategien, andere kurzfristige Erfolge. In manchen Situationen kann beides zum selben Ergebnis führen, oft sind Ziele und Wege jedoch sehr verschieden. Das entspricht globalen vs lokalen Optimierungsmethoden (*greedy algorithm*, *steepest descent*).

Der **Balanceakt** zwischen kurz- und langfristigem Nutzen begegnet uns überall im Leben. Das gilt auch für **Schule und Studium**. Der Bachelor ist additiv aus Modulen aufgebaut, und Studierende summieren Credits. (Jump & Run?) Sicher, kurzfristige Rückmeldungen helfen und sofortige Belohnungen motivieren, doch wenn zum Schluss das eigentlich erhoffte Gesamtverständnis fehlt, so bleiben nur bedeutungslose Spielpunkte.

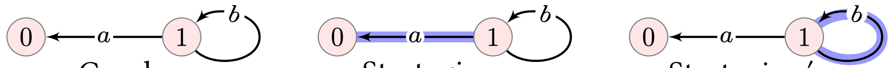
Gegenentwurf wären umfangreiche Abschlussprüfungen (Staatsexamen, Diplom, etc.), die auf das Verständnis größerer Zusammenhänge zielen. Vermutlich wäre eine ausgewogene Mischung das Richtige. ¿Qué sera?

Optimal entscheiden: Welche Strategie ist die beste?

Aufgabe: Sie können Ihre Kuh entweder schlachten zum Marktpreis $M \in [2800, 3200]$€ oder melken für 60€. Sie stirbt friedlich mit Wkt 2%.

Vegane Version: Sie können Ihre Aktien zum Marktpreis M verkaufen oder behalten mit Dividende 60€. Die Inflationsrate sei konstant 2%.

Formulieren Sie dies als Graph. Wo/wie entstehen die Auszahlungen? Welche Strategien gibt es? Welche davon sind optimal profitabel?

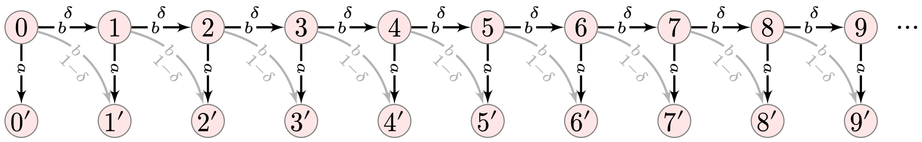


Graph — Strategie s — Strategie s'

Lösung: (a) Der Gesamtnutzen ist $u_s(1) = r(a) = M$ gegenüber

$$u_{s'}(1) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t r(b) = 60€ \cdot (1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots) = \frac{60€}{1-\delta} = 3000€.$$

(b) Es gibt mehrere Modelle zur gegebenen Fragestellung! Als Baum:



Optimal entscheiden: Welche Strategie ist die beste?

🙂 Diese Miniatur ist ein extrem vereinfachtes Beispiel zur Illustration. Die umgangssprachliche Fragestellung ist anschaulich und motivierend, leider auch in wichtigen Details noch allzu vage und nicht recht explizit. Die Ausführung und Präzisierung als Graph lässt keine Fragen offen.

Wir setzen hier 1 als Startzustand voraus, das heißt Sie haben anfangs eine Kuh bzw. das Aktienpaket, andernfalls ist ja nichts zu entscheiden. Bei Start in 1 ist die Trajektorie danach entweder (a) oder $(b, b, b, \dots)$. Hierzu können wir nun die Auszahlungen berechnen und vergleichen:

Im ersten Fall erhalten Sie sofort die terminale Auszahlung $v(0) = M$. Im zweiten Fall kommt es zur Auszahlung von $r(b) = 60€$, unendlich oft. An dieser Stelle ist unser Diskontfaktor $\delta = 0.98$ in $[0, 1[$ wesentlich: Er garantiert die Konvergenz dieser geometrischen Reihe!

Wir können beide Strategien vergleichen und die beste wählen:
Im Falle $M > 3000€$ ist Schlachten s profitabler als Melken s'.
Im Falle $M < 3000€$ ist Melken s' profitabler als Schlachten s.
Für $M = 3000€$ ergeben beide dieselbe Auszahlung.

Optimal entscheiden: Welche Strategie ist die beste?

Wir vergleichen hier eine einmalige Auszahlung $M \in \mathbb{R}$ mit einem Zahlungsstrom $(r_0, r_1, r_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Zum Vergleich solcher Ströme gibt es verschiedene Möglichkeiten. Einfach und weit verbreitet ist die geometrische Reihe, genauer Potenzreihe $\sum_{t\in\mathbb{N}} \delta^t r_t$ mit $\delta \in [0, 1]$.

Ist die Folge $(r_0, r_1, r_2, \dots)$ beschränkt, so konvergiert diese Reihe für jeden Diskontfaktor $\delta \in [0, 1[$. Es bieten sich zwei Interpretationen:

1. **Inflation** und **Un/Geduld:** Geld morgen ist weniger wert als heute. Dies formalisieren wir als konstanten, vorhersehbaren Wertverlust. Dies führt direkt zu der obigen Formel, als Potenzreihe in δ.
2. **Abbruchwahrscheinlichkeit:** Das Spiel hat in jeder Runde eine gewisse Abbruchwkt $\varepsilon > 0$, also Fortsetzungswkt $\delta = 1 - \varepsilon$. Wir betrachten dann die Erwartung des Nutzens.

Wenn Sie viele Kühe haben, dann ist der Erwartungswert die sinnvolle Vergleichsgröße. Wenn Sie nur eine Kuh haben und risiko-avers sind, dann möchten Sie vielleicht eine Versicherung abschließen, und ihr Risiko (2) umwandeln in einen vorhersehbaren Wertverlust (1).

Optimal entscheiden: Welche Strategie ist die beste?

Übung: Formulieren und berechnen Sie etwas realistischere Graphen! Welche Aktionen und welche Zufallszüge gibt es? Wie bauen Sie daraus den Spielgraphen auf? Erst dadurch vollenden Sie Ihr explizites Modell. Automatisieren Sie dann Ihre Rechnungen mit einer Tabellenkalkulation!

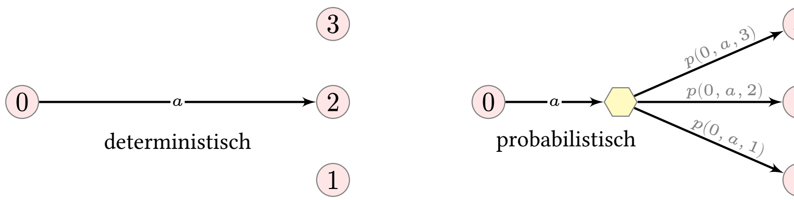
Wir haben zunächst das stationäre Modell gewählt. Alternativ können wir die Zeit $t = 0, 1, 2, \dots$ explizit im Graphen (hier Spielbaum) codieren und jeweils neu entscheiden: Wir geben dem Spieler ein Gedächtnis. Die Menge möglicher Strategien ist größer, hier sogar unendlich!

Die unendliche Wiederholung ist am leichtesten zu beschreiben, doch etwas unrealistisch. Zudem wird die Analyse kompliziert, später mehr!

Ich schlage eine realistische Kuh mit endlicher Lebenserwartung vor: Für $t = 0, \dots, 250$ sinkt der Faktor $\delta_t = 1 - t/250$ von $\delta_0 = 1$ auf $\delta_{250} = 0$. Ebenso sollte der Marktpreis M_t fallen, zum Beispiel linear in der Zeit.

🙂 Dies alles können Sie als Spielbaum beschreiben und die optimalen Strategien berechnen; wir führen dies in folgender Aufgabe aus.

Von deterministischen zu probabilistischen Graphen



Definition B1J: Markov–Graph $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$

Ein **Markov–Graph** $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ besteht aus Zuständen $x \in X$ und Aktionen $a \in A$. Die Abbildung $\sigma : A \to X$ ordnet jeder Aktion a ihren Startzustand $x = \sigma(a)$ zu. Wir nutzen die bequeme Adjazenzdarstellung $A = \coprod_{x \in X} A_x = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times A_x$ mit Start $\sigma = \mathrm{pr}_1 : A \to X : (x, a) \mapsto x$.

Die Abbildung $\tau : A \to [X]$ ordnet jeder Aktion $a \in A_x$ eine WVerteilung der möglichen Zielzustände $y \in Y$ zu, also $\tau(x, a) = \sum_{y \in X} p(x, a, y) \cdot y$.

Die Übergangswkten sind hier $p(x, a, y) \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit $\sum_{y \in X} p(x, a, y) = 1$. Der deterministische Fall $\tau(x, a) = y$ entspricht speziell $p(x, a, y) = 1$.

Von deterministischen zu probabilistischen Graphen

Die obige Skizze schlägt eine graphische Darstellung des Zufalls vor: Die Kante a bekommt einen Hilfsknoten, der einem Zufallszug entspricht, also einem Lostopf mit den verschiedenen Kanten gemäß ihren Wkten. Von diesem ausgehend führt dann jeweils die möglichen Kanten weiter.

🙂 Zur Vereinfachung gehen wir von einer *endlichen* Verteilung aus. Diese Einschränkung ist harmlos für viele praktische Anwendungen. Die Erwartung ist dann eine endliche Summe (allgemein ein Integral).

⚠ Bei einer *diskreten*, abzählbar-unendlichen Verteilung müssen wir zudem sicherstellen, dass die von uns betrachteten Reihen konvergieren. Im allgemeinen Fall benötigen wir die Maß- und Integrationstheorie.

Definition B1J: Markov–Spiel (Γ, r, v)

Ein **Markov–Spiel** (Γ, r, v) besteht aus einem Markov–Graphen $\Gamma = (X, A, \tau)$, wie oben erklärt, zusammen mit Auszahlungen, instantan $r : A \times X \to \mathbb{R} : (x, a, y) \mapsto r(x, a, y)$ und terminal $v : \partial X \to \mathbb{R} : x \mapsto v(x)$.

Implizit nehmen wir zudem einen Diskontfaktor $\delta \in [0, 1]$ an.

Rückwärtsinduktion zur erwarteten Auszahlung

Wir schreiben $x \to y$ falls $p(x, a, y) > 0$ für eine Aktion $a \in A_x$ gilt.

Wir nennen den Graphen Γ **artinsch**, falls dies für $(X, \to)$ gilt. Das heißt, egal wie der Zufall spielt, jede Trajektorie ist endlich.

Weiterhin heißt Γ **lokal-endlich**, falls A_x endlich ist für jedes $x \in X$. Die Aktion $a \in A_x$ ist **endlich getragen**, wenn $\operatorname{supp} \tau(x, a)$ endlich ist.

Satz B1K: rekursive Berechnung der erwarteten Auszahlung

(A) Das Markov–Spiel (Γ, r, v) sei artinsch und $\delta \in [0, 1]$ beliebig.
(B) Jeder Träger $\operatorname{supp} \tau(x, a) = \{\, y \in X \mid p(x, a, y) > 0 \,\}$ sei endlich.

Zu jeder Strategie $s \in S(\Gamma)$ ist die **erwartete Auszahlung** $u_s(x)$ endlich. Wir erhalten $u = u_s : X \to \mathbb{R}$ rekursiv durch die **Erwartungsgleichung**

$$u(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für jeden Endzustand } x \in \partial X, \text{ sonst} \\ \underbrace{\sum_{y \in X} p(x, s(x), y) \big[r(x, s(x), y) + \delta u(y) \big]}_{\text{Hamilton–Funktion } H(x,\, s(x),\, u)} . \end{cases}$$

🙂 Hier helfen uns noethersche Rekursion B1F und Induktion B1E!

Rückwärtsinduktion zur erwarteten Auszahlung

Beweis: (B) Die Summe über $y \in \operatorname{supp} \tau(x, s(x))$ ist endlich.
(A) Noethersche Rekursion B1F über $(X, \to)$ konstruiert $u : X \to \mathbb{R}$.

Dies ist tatsächlich die zu s erwartete Auszahlung, $u = u_s$: Noethersche Induktion B1E über $(X, \to)$ zeigt die Gleichung $u(x) = u_s(x)$ zunächst in jedem Endzustand $x \in \partial X$, dann induktiv in jedem Zustand $x \in X$. $\boxed{\text{QED}}$

Aufgabe: Wir definieren die Relation $x \to_s y$ durch $p(x, s(x), y) > 0$. Können wir die Voraussetzung (a) noch weiter abschwächen, indem wir nur verlangen, dass $(X, \to_s)$ artinsch ist für jede Strategie $s \in S(\Gamma)$?

Lösung: Nein, denn diese vermeintlich schwächere Bedingung erweist sich als äquivalent zur Zusammenfassung, dass $(X, \to)$ artinsch ist.

Die Implikation „$\Leftarrow$“ ist klar. Wir beweisen „$\Rightarrow$“ per Kontraposition. Ist $(X, \to)$ nicht artinsch, so existiert eine Einbettung $(C_n, \to) \hookrightarrow (X, \to)$ oder $(P_\infty, \to) \hookrightarrow (X, \to)$ mit $i \mapsto x_i$. Wir können jeweils $s(x_i) \in A_{x_i}$ so wählen, dass $x_i \to_s x_{i+1}$ gilt. Demnach gilt auch $(C_n, \to) \hookrightarrow (X, \to_s)$ bzw. $(P_\infty, \to) \hookrightarrow (X, \to_s)$, und somit ist $(X, \to_s)$ nicht artinsch.

Satz B1L: Bellman–Gleichung und optimale Strategien

(A) Das Markov–Spiel (Γ, r, v) sei artinsch und zudem lokal-endlich.
(B) Jeder Träger $\operatorname{supp}\tau(x,a) = \{\, y \in X \mid p(x,a,y) > 0 \,\}$ sei endlich.

(1) Die **optimale Auszahlung** $u_*(x) = \sup_{s\in S(\Gamma)} u_s(x)$ ist endlich.
Wir erhalten $u = u_* : X \to \mathbb{R}$ rekursiv durch die **Bellman–Gleichung**

$$u(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für jeden Endzustand } x \in \partial X, \text{ sonst} \\ \max\limits_{a\in A_x} \underbrace{\textstyle\sum_{y\in X} p(x,a,y)\,[r(x,a,y) + \delta u(y)]}_{\text{Hamilton–Funktion } H(x,a,u)}. \end{cases}$$

(2) Genau dann ist $s \in S(\Gamma)$ eine optimale Strategie, mit $u_s = u_*$,
wenn $s(x) \in \operatorname{Arg\,max}_{a\in A_x} H(x,a,u)$ für jeden Zustand $x \in X^\circ$ gilt.

☺ In Worten: Wir wollen global optimieren und $u_* = \sup_s u_s$ berechnen.
Es genügt, lokal zu optimieren und jeweils $s(x) \in A_x$ optimal zu wählen.

Zusammengefasst als griffiger Slogan: *Global denken, lokal handeln!*

Beweis: Das Maximum über $a \in A_x$ ist endlich dank (A).
Die Summe über $y \in \operatorname{supp}\tau(x, s(x))$ ist endlich dank (B).

(1) Noethersche Rekursion B1F über $(X, \to)$ konstruiert $u : X \to \mathbb{R}$.
Wir behaupten $u = u_*$ und zeigen dies durch $u_* \le u$ und $u \le u_*$.

(1a) Wir zeigen $u_* \le u$, also $u_s \le u$ für jede Strategie $s \in S(\Gamma)$.
Dies gilt in jedem Endzustand $x \in \partial X$, denn $u_s(x) = v(x) = u(x)$.
Sei also $x \in X^\circ$. Aus $u_s(y) \le u(y)$ für alle $x \to y$ folgt $u_s(x) \le u(x)$,
denn wir haben $u_s(x) = H(x, s(x), u_s) \le H(x, s(x), u) \le u(x)$.
Dank noetherscher Induktion B1E folgt $u_s(x) \le u(x)$ für alle $x \in X$.

(1b) Wir wählen $s \in S(\Gamma)$ wie in (2) und erhalten somit $u = u_s \le u_*$.

(2) Beide Implikationen folgen dank (1) induktiv aus $u = u_*$. $\boxed{\text{QED}}$

☺ Für artinsche Graphen ist die Bellman–Gleichung besonders einfach:
Herleitung und Berechnung gelingen elegant und leicht per Rekursion.
So können wir effizient die optimale Auszahlung $u = u_*$ bestimmen.

Angenommen, unser Spielgraph $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ ist deterministisch,
also mit deterministischer Transition $\tau : A \to X \subseteq [X] : (x,a) \mapsto y$.

Wie zuvor sei Γ artinsch und lokal-endlich, mit terminaler Auszahlung
$v : \partial X \to \mathbb{R}$, sofortiger Belohnung $r : A \to \mathbb{R}$ und Diskont $\delta \in [0,1]$.

(1') Für die Gewinnfunktion $u = u_* : X \to \mathbb{R}$ gilt dann vereinfacht
die deterministische Formulierung der obigen Bellman–Gleichung:

$$u(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } x \in \partial X, \\ \max\limits_{a:x\to y} [r(a) + \delta u(y)] & \text{für } x \in X^\circ. \end{cases}$$

Im stochastischen Falle führt die Aktion $a \in A_x$ nicht sicher, sondern nur
mit gewisser Wkt $p(x,a,y)$ zum Zustand y und zur Belohnung $r(x,a,y)$.

Die stochastische Sichtweise enthält die deterministische als Spezialfall,
daher haben wir oben gleich den allgemeinen Fall ausgeführt.

Maximiert wird dann der Erwartungswert $H(x,a,u)$.

☺ Die **Bellman–Gleichung** erfordert etwas formalen Aufwand, die Idee
ist jedoch recht einfach: In jedem aktiven Zustand $x \in X$ maximieren wir
die Auszahlung $H(x,a,u)$ durch die Aktion a mit dem größtem Nutzen.

Zum Verständnis benötigen Sie präzise Definitionen (die Idee, das Ziel),
gute Beispiele (konkrete Rechnungen, anschauliche Anwendungen)
sowie starke Sätze (passende Werkzeuge, hilfreiche Rechenregeln).

☺ **Optimale Züge** erkennen Sie an der Gewinnfunktion $u : X \to \mathbb{R}$:
Sie liefert uns die optimale Auszahlung $u(x) = \max_{a\in A_x} H(x,a,u)$ und
Aktionen $s(x) \in \operatorname{Arg\,max}_{a\in A_x} H(x,a,u)$, also eine optimale Strategie s!

Gewinnoptimierung und Strategieoptimierung gehen Hand in Hand:
Wir berechnen in jedem Zustand mit der optimalen Auszahlung zugleich
alle optimalen Aktionen, und fassen zu optimalen Strategien zusammen.

☺ Diese **allgemeine Methode** ist ebenso einfach wie wirkungsvoll.
Davon ausgehend können wir effiziente Algorithmen suchen oder
geeignete Näherungen oder das Modell nach Bedarf erweitern.

Die Bellman–Gleichung gilt für jedes artinsche Markov–Spiel (Γ, r, v), auch ohne die für (1) und (2) vorausgesetzte lokale Endlichkeit $\sharp A_x < \infty$. Allgemeine Aussage und Beweis sind lediglich etwas technischer:

Satz B1L: Bellman–Gleichung und optimale Strategien

(3) Ohne lokale Endlichkeit ist $u_*(x) = \infty$ möglich. Weiterhin erhalten wir $u = u_* : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ rekursiv durch die **Bellman–Gleichung**

$$u(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für jeden Endzustand } x \in \partial X, \text{ sonst} \\ \sup\limits_{a \in A_x} & \underbrace{\textstyle\sum_{y \in X} p(x,a,y)\,[r(x,a,y) + \delta u(y)]}_{\text{Hamilton–Funktion } H(x,a,u)}. \end{cases}$$

Aussage (2) gilt weiterhin, allerdings ist die Existenz optimaler Strategien nun nicht mehr garantiert. Allgemein gilt folgende Approximation:

(4) Zu jedem Zustand $x \in X$ und jeder Schranke $\alpha < u(x)$ existiert eine Strategie $s \in S(\Gamma)$ mit $\alpha \le u_s(x) \le u(x)$.

Beweis: (3) In $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist das Supremum über $a \in A_x$ wohldefiniert. Noethersche Rekursion B1F über $(X, \to)$ konstruiert $u : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Wie in (1a) folgt $u_* \le u$, denn es gilt $u_s \le u$ für jede Strategie $s \in S(\Gamma)$. Die Gleichheit $u_*(x) = u(x)$ für alle Zustände $x \in X$ folgt aus (4).

(4) Die Approximation ist trivial für $x \in \partial X$. Im Folgenden sei $x \in X^\circ$.

(4a) Sei $u(x) < \infty$ und $\varepsilon = u(x) - \alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Dank Bellman–Gleichung existiert eine Aktion $a \in A_x$ mit $H(x,a,u) \ge u(x) - \varepsilon/2$.

Sei $\{\, y \in X \mid p(x,a,y) > 0 \,\} = \{y_1, \dots, y_n\}$. Demnach gilt $u(y_i) < \infty$, und nach Voraussetzung existiert $s_i \in S(\Gamma)$ mit $u_{s_i}(y_i) \ge u(y_i) - \varepsilon/2$. Sei $A'_x = \{a, s_1(x), \dots, s_n(x)\}$ und $A'_y = \{s_1(y), \dots, s_n(y)\}$ für $y \ne x$. Wir konstruieren $s \in S(\Gamma)$ und $u_s : X \to \mathbb{R}$ rekursiv für $z \in X$ durch $u_s(z) = \max_{a' \in A'_z} H(z, a', u_s)$ und $s(z) \in \operatorname{Arg\,max}_{a' \in A'_z} H(z, a', u_s)$.

Wir erhalten so $u_s \ge u_{s_1}, \dots, u_{s_n}$, insbesondere $u_s(y_i) \ge u(y_i) - \varepsilon/2$, und schließlich $u_s(x) \ge H(x,a,u_s) \ge H(x,a,u) - \varepsilon/2 \ge u(x) - \varepsilon$.

☺ Der Sonderfall $u(x) = \infty$ kann auftreten und ist etwas kniffliger. Übung: Versuchen Sie es zunächst selbst! Wir nutzen einen eleganten Trick und beschränken die Bellman–Lösung $u : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zur Hilfsfunktion $\bar{u} = u \wedge n - 1 : X \to \mathbb{R}$ mit geeignet gewähltem $n \in \mathbb{N}$. Damit gelingt der unendliche Fall (4b) genauso wie der endliche Fall (4a).

(4b) Sei $u(x) = \infty$. Dank Bellman–Gleichung $u(x) = \sup_{a \in A_x} H(x,a,u)$ gilt $\sup_{a \in A_x} H(x,a,u \wedge n) > \alpha + 1$ für ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$. Zu $\bar{u} := u \wedge n - 1$ existiert eine Aktion $a \in A_x$ mit $H(x,a,\bar{u}) \ge \alpha$.

Sei $\{\, y \in X \mid p(x,a,y) > 0 \,\} = \{y_1, \dots, y_n\}$. Es gilt $\bar{u}(y_i) < u(y_i)$, nach Voraussetzung existiert also eine Strategie $s_i \in S(\Gamma)$ mit $u_{s_i}(y_i) \ge \bar{u}(y_i)$. Sei $A'_x = \{a, s_1(x), \dots, s_n(x)\}$ und $A'_y = \{s_1(y), \dots, s_n(y)\}$ für $y \ne x$. Wir konstruieren $s \in S(\Gamma)$ und $u_s : X \to \mathbb{R}$ rekursiv für $z \in X$ durch $u_s(z) = \max_{a' \in A'_z} H(z, a', u_s)$ und $s(z) \in \operatorname{Arg\,max}_{a' \in A'_z} H(z, a', u_s)$.

Wir erhalten so $u_s \ge u_{s_1}, \dots, u_{s_n}$, insbesondere $u_s(y_i) \ge \bar{u}(y_i)$, und schließlich $u_s(x) \ge H(x,a,u_s) \ge H(x,a,\bar{u}) \ge \alpha$. $\boxed{\text{QED}}$

☺ Wird in jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ das Supremum durch eine Aktion $a = s(x)$ angenommen, etwa weil der Graph Γ lokal-endlich ist, so erhalten wir eine optimale Strategie $s \in S(\Gamma)$ mit $u_* = u_s : X \to \mathbb{R}$.

Lokal-endliche Graphen treten in Anwendungen häufig auf. Dazu sind Satz und Beweis besonders einfach, daher habe ich die beiden zentralen Aussagen (1) und (2) in den ersten Teil des Satzes vorgezogen.

☺ Artinsche Graphen ohne lokale Endlichkeit diskutieren wir hier aus mathematischer Neugier und als solide Grundlage für Anwendungen: Die Bellman–Gleichung gilt allgemein, für jeden artinschen Graphen!

Der Beweis erfordert technische Virtuosität: Zur noetherschen Induktion benötigen wir den üblichen Werkzeugkasten zum Rechnen mit Suprema. Das ist, wie Sie aus der Analysis wissen, eine gute Fingerübung.

☺ In Kapitel C untersuchen wir kombinatorische Spiele. Auch ohne lokale Endlichkeit ist die Wertemenge $\{\, u(y) \mid x \to y \,\} \subseteq \{0, 1\}$ endlich, daher wird das Supremum angenommen. (Allgemein genügt kompakt.)

Exotische Lösungen der Bellman–Gleichung

Satz B1L erklärt die Bellman–Gleichung für *artinsche* Spielgraphen. Tatsächlich gilt im Allgemeinen weder Existenz noch Eindeutigkeit einer Bellman–Lösung $u : X \to \mathbb{R}$, selbst für lokal-endliche Graphen. Zur Illustration nochmal unser einfaches, aber eindrückliches Beispiel:

Beispiel B1M: Existenz und Eindeutigkeit

Wir betrachten das obige nicht-artinsche Spiel:

(1) Für $r(b) > 0$ und $\delta = 1$ existiert überhaupt keine Lösung $u : X \to \mathbb{R}$! Für diese gälte nämlich $u(1) \ge r(a) + v(0)$ und $u(1) \ge r(b) + u(1)$, somit $0 \ge r(b)$. (Die Lösung $u(1) = \infty$ schließen wir hier aus.)

(2) Für $r(b) = 0$ und $\delta = 1$ existieren unendlich viele Lösungen! Jede Wahl $u(1) \ge r(a) + v(0)$ ist als Lösung möglich.

(3) Für $\delta \in [0, 1[$ existiert genau eine Lösung $u : X \to \mathbb{R}$, nämlich $u(1) = \max\{\, r(a) + \delta v(0),\ r(b)/(1-\delta)\,\}$.

Exotische Lösungen der Bellman–Gleichung

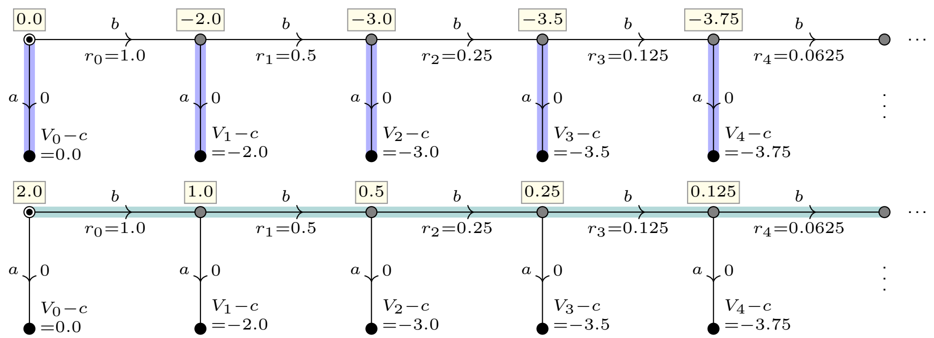
Dieses Beispiel ist zwar noch lächerlich simpel, doch bereits erhellend: Es ist nicht artinsch, und prompt misslingen Existenz und Eindeutigkeit! Wir sehen hier bereits deutlich, dass der Fall $\delta = 1$ meist knifflig ist, während sich für $\delta \in [0, 1[$ alle Probleme in Wohlgefallen auflösen.

Das gilt allgemein: In Kapitel D nutzen wir dazu Banachs Fixpunktsatz. Satz D2K garantiert: Für $\delta \in [0, 1[$ hat die Bellman–Gleichung genau eine Lösung, und diese lässt sich durch die Fixpunktiteration konstruieren bzw. approximieren. Zudem gilt Bellmans Optimalitätsprinzip D2N.

In diesem und dem nächsten Kapitel wollen wir zunächst möglichst elementar vorgehen. Wir betrachten daher zuerst Anwendungen, deren Graphen artinsch sind, meist zusätzlich sogar lokal-endlich. Damit lassen sich bereits erstaunlich viele Probleme lösen.

Hierzu bereitet die genial-einfache Rückwärtsinduktion die Grundlage: Satz B1L garantiert, dass für artinsche Graphen die Rechnung gelingt!

Infinipede und frustrierte Bellman–Lösung



Beispiel B1N: exotische Lösungen der Bellman–Gleichung

Unser Graph Γ habe die aktiven Zustände $x \in X^\circ = \{\, b^k \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ mit Aktionen $A_x = \{a, b\}$ und Belohnungen $r(b^k, a) = 0$ und $r(b^k, b) = r_k$. Terminal sind $\partial X = \{\, b^k a \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ mit Auszahlungen $v(b^k a) = V_k - c$.

Gegeben seien hierzu $0 < r_k < v_k$ in $\mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} v_k < \infty$. Wir setzen $R_k = \sum_{i=k}^{\infty} r_i$ und $V_k = \sum_{i=k}^{\infty} v_i$ und wählen $c > V_0 - R_0 > 0$. Die Skizze zeigt $r_k = 2^{-k}$, $R_k = 2^{1-k}$, $v_k = 2^{1-k}$, $V_k = 2^{2-k}$ und $c = -4$.

Infinipede und frustrierte Bellman–Lösung

Übung: Zeigen Sie, dass die abgebildeten Funktionen $u_0, u_1 : X \to \mathbb{R}$ die Bellman–Gleichung lösen: Einerseits die pessimistische Lösung $u_0(b^k) = V_k - c$, andererseits die optimistische Lösung $u_1(b^k) = R_k$. Hier gilt $u_0 < u_1$; bei **globaler Optimierung** würde man also u_1 wählen. Bei **lokaler Optimierung** erlaubt s_0 keine Möglicheit der Verbesserung.

⚠ In Fällen wie diesem gilt Bellmans Optimalitätsprinzip nicht! Zwar ist $u_* = \sup_s u_s$ weiterhin definiert, doch u nicht mehr eindeutig durch die Rekursion bestimmt. Unsere allgemeinen Werkzeuge versagen hier.

Bemerkung: Weitere Bellman–Lösungen sind $u(b^k) = R_k + v(b^\infty)$. Die Konstante $v(b^\infty) \in \mathbb{R}$ ist dabei die (fiktive) Auszahlung im „unendlich fernen“ Randpunkt b^∞. Wir vereinbaren hier kurzerhand $v(b^\infty) = 0$.

Das Beispiel B1N ist raffiniert gebaut und notgedrungen nicht-artinsch. Für jeden artinschen Graphen können wir dank Rückwärtsinduktion B1L die Bellman–Gleichung rekursiv lösen, und diese Lösung ist eindeutig! Zudem ist diese Lösung nicht nur lokal optimal, sondern global dank B1L.

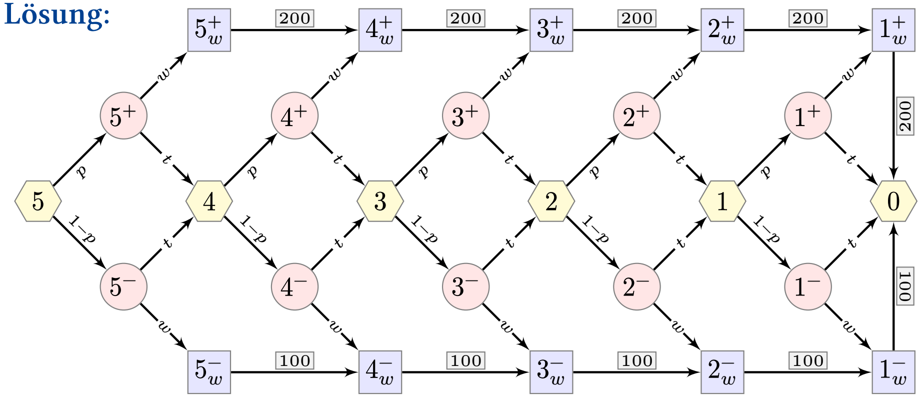
Kapitel D zeigt einen zweiten Ausweg aus unserer Misslage: Diskont!

Optimal entscheiden: work or travel?

Aufgabe: Ihr Work & Travel endet in 5 Wochen. Zu Beginn jeder Woche erhalten Sie ein Jobangebot: mit Wkt $p = 0.4$ ist es gut, für 200€, mit Wkt $1 - p = 0.6$ schlecht, für 100€. Wenn Sie es annehmen, bleiben Sie für die restliche Zeit dabei. Andernfalls reisen Sie eine Woche umher.

Formulieren Sie dies als Graph. Wie viele Strategien gibt es? Welche davon sind optimal profitabel? Welches Einkommen erwarten Sie?

Lösung:



Optimal entscheiden: work or travel?

Sie sehen hier den sorgsamen Übergang von der realen Fragestellung zu einem **mathematischen Modell**. Dies nennen wir **Modellierung**.

Meist gibt es mehrere mögliche Modelle zur gegebenen Fragestellung: Der umgangssprachliche Text ist wunderbar anschaulich und hoffentlich motivierend. Leider ist er in manchen Details noch nicht explizit, sondern appelliert an Weltwissen und Konventionen. Die Übersetzung in einen Graphen ist kurz und zudem präzise: Hier bleiben keine Fragen offen. Zum Beispiel: Reisen und Arbeiten kostet gleich viel Lebensunterhalt. Andernfalls codieren wir Reisekosten und Lebensunterhalt im Graphen.

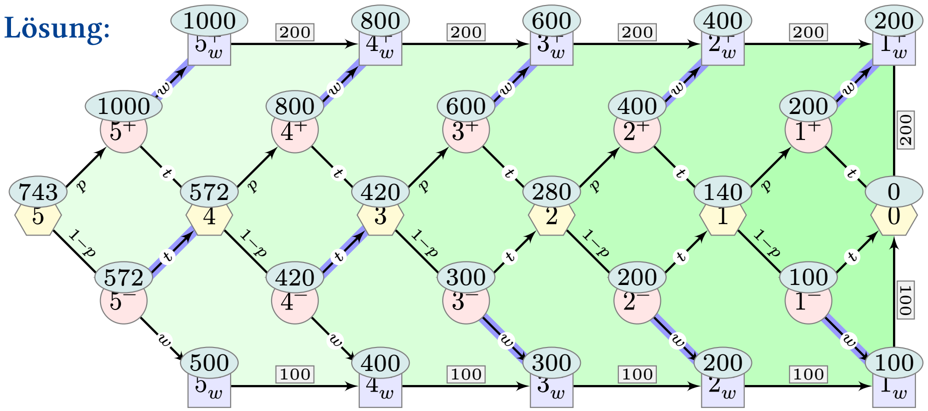
Der hier gezeigte Graph ist ein **Markov–Graph**, denn er enthält neben den Spielzügen als möglichen Aktionen des Spielers realistischerweise auch Zufallszüge, auf die der Spieler keinen Einfluss hat. *That's life.*

In jeder der zehn Entscheidungssituationen $5^\pm, 4^\pm, 3^\pm, 2^\pm, 1^\pm$ muss eine Entscheidung für w = work oder t = travel getroffen werden. Daher gibt es hier $2^{10} = 1024$ Strategien. Die optimale finden Sie durch Rekursion!

🙂 Der Graph ist erfreulich klein; als Baum entfaltet wäre alles breiter.

Optimal entscheiden: work or travel?

Lösung:



In Worten: Einen guten Job nehmen Sie immer an, einen schlechten nur in den letzten 3 Wochen. Bei ≥ 4 Wochen lohnt sich noch abzuwarten.

Diese quantitative Analyse erfordert vor allem Sorgfalt und Geduld. Die entscheidende Idee ist, vom Ende aus rekursiv vorzugehen.

🙂 Gespielt wird vorwärts, optimiert wird rückwärts: per Induktion!

Optimal entscheiden: work or travel?

⚠ Wenn Sie diese Art von Problemstellung zum ersten Mal erkunden, sind Sie vermutlich versucht, in der Zeit wie üblich *vorwärts* zu denken.

🙂 Wir lösen das Problem rekursiv, indem wir *rückwärts* argumentieren. Das führt zum Erfolg: Rekursives Denken ist zielgerichtetes Denken!

🙂 Zur Vereinfachung habe ich die Zustände rückwärts nummeriert. Die Rückwärtsinduktion ist somit eine ganz gewöhnliche Induktion.

Das Thema Rekursion ist ebenso wichtig wie sagenumwoben. Dazu gibt es zahlreiche Weisheiten, teils ernst, teils scherzhaft:

Um Rekursion zu verstehen, muss man klein anfangen
und zunächst einmal Rekursion verstehen.

Insbesondere in der Programmierung ist Rekursion allgegenwärtig. Sie ist ein Universalwerkzeug zum Lösen komplexer Probleme.

Recursion makes good programmers better
and bad programmers obvious.

Optimierung durch Rekursion / Induktion

Übung: Probieren Sie einige der anderen 1023 Strategien aus.
Gibt es bessere? gleich gute? Die Sachlage erweist sich als knifflig!
Ist wenigstens die optimale Gewinnerwartung eindeutig / wohldefiniert?
Warum spreche ich dennoch kurzerhand von *der* optimalen Strategie?
Ist diese zudem *teilspielperfekt*, also optimal zu jedem Startzustand?

Übung: Vorwärts gelesen scheinen nach den Entscheidungen $2^\pm \mapsto w$ alle folgenden Entscheidungen $\{3^\pm, 4^\pm\} \to \{w, t\}$ ganz überflüssig!
Warum müssen Sie sich dennoch ebenso genau damit befassen?
Sind diese Züge wichtig für das Spiel? oder für die Analyse?

🙂 Gespielt wird vorwärts, optimiert wird rückwärts: per Induktion!

Die entscheidende Lösungsidee ist hier die **graphische Darstellung**.
Unser kunstvoller Graph hilft uns zunächst einmal zur Anschauung, aber dann auch ganz praktisch zur Organisation unserer Rechnung.

Die Rechnung kann automatisiert werden! **Topologische Sortierung** heißt in der Informatik jede geschickte Reihenfolge der Positionen, so dass jedes Teilproblem nur kleinere nutzt, die bereits berechnet wurden.

Optimierung durch Rekursion / Induktion

Übung: Implementieren Sie die Rechnung in einer Tabellenkalkulation.
Sie finden eine einfache Lösung in der Datei `Work-and-Travel.ods`.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Work and Travel**		Week -5		Week -4		Week -3		Week -2		Week -1
2			1000,00		800,00		600,00		400,00		200,00
3	0,400	1000,00	0,400	800,00	0,400	600,00	0,400	400,00	0,400	200,00	
4	743,20	maximize	572,00	maximize	420,00	maximize	280,00	maximize	140,00	maximize	0,00
5	0,600	572,00	0,600	420,00	0,600	300,00	0,600	200,00	0,600	100,00	
6			500,00		400,00		300,00		200,00		100,00

Wegen $\delta = 1$ gibt es im Beispiel keinen Diskont / Wertverlust / Inflation.
Wir haben hier die Auszahlungen auf einige Kanten verteilt; alternativ können wir $n_w^\pm$ zu terminalen Zuständen mit Auszahlungen machen.

Übung: Variieren Sie die Konstanten, berechnen Sie weitere Beispiele.
Durch solche *Erfahrung* entwickeln Sie ein *Gefühl* für das Problem.

Verfeinerungen: (a) Mit Wkt $q^\pm$ wird Ihnen zu Wochenbeginn gekündigt.
(b) Reisen / Arbeiten kostet Geld, zur Vereinfachung einen festen Betrag.
(c) Sie benötigen mindestens 400€, darüber hinaus maximieren Sie.
Das erweitert den Graphen, die Lösungsmethode bleibt gleich.

Optimierung durch Rekursion / Induktion

🙂 Der Mensch ist fähig, meist jedoch widerwillig, komplexe logische Zusammenhänge zu durchdringen, insbesondere Rekursion / Induktion.

Thinking fast and slow von Daniel Kahneman, Wirtschafts-Nobelpreis 2002, unterscheidet zwei verschiedene Arbeitsweisen unseres Gehirns:

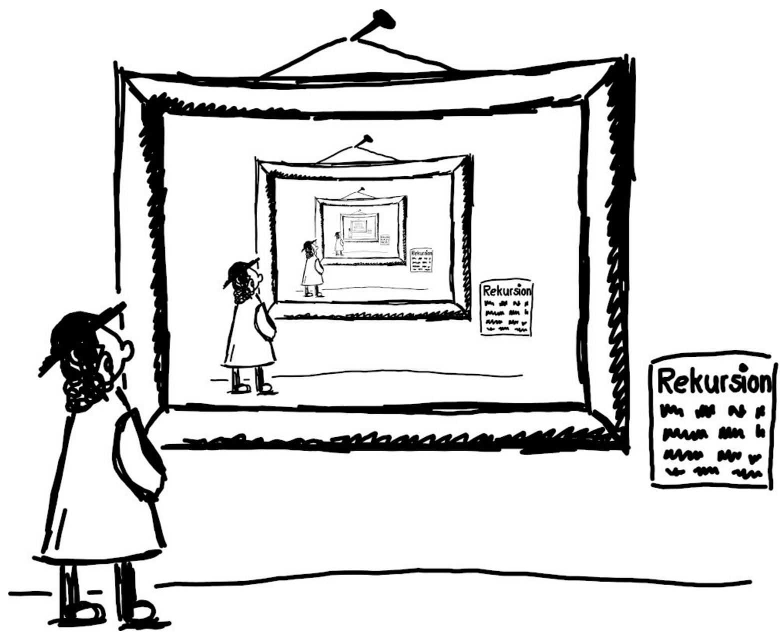
1. Schnell, automatisch, immer aktiv, emotional, stereotyp, unbewusst
2. Langsam, anstrengend, selten aktiv, logisch, berechnend, bewusst

Unsere mentalen Fähigkeiten sind Ergebnis einer langen Evolution, und unter diesen Bedingungen eine näherungsweise Optimierung:
Viele Entscheidungen müssen schnell und energiesparend getroffen werden; nur wenige verlangen eine genauere, aufwändigere Analyse.

Sie vertrauen oft Ihrem Instinkt, Bauchgefühl oder Erfahrung, insb. wenn Sie keine genaue Information haben oder keine Zeit, sie auszuwerten.
Ihr Verstand braucht wesentlich länger, um zu einem Urteil zu kommen.
Das lohnt sich, wenn Sie die Muße haben und das Ziel wichtig genug ist.

In Ihrem Mathematikstudium lernen Sie diese zweite Vorgehensweise.
Dies hilft zu umsichtiger Analyse und vorausschauendem Handeln.

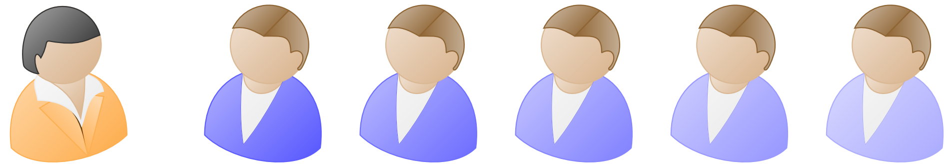
Optimierung durch Rekursion / Induktion



Optimale Partnerwahl: Looking for Mr. Right... or Mr. Almost

B209

Marriage problem: When to stop dating and start getting married?



Alice begegnet im Laufe ihres Lebens n potentiellen Ehemännern. Bei Kandidat $k = 1, 2, 3, \dots, n$ stellt sie die Eignung $X_k \in [0, 1]$ fest.

Er verliebt sich in die bezaubernde Alice, sie kann ihn nun heiraten oder zurückweisen. Diese Entscheidung ist in jedem Falle endgültig.

Aufgabe: Wie anspruchsvoll soll Alice sein? Was ist optimal? Welche Eignung ihres Ehepartners kann Alice maximal erwarten?

⚠ Alice ist vollkommen rational und egoistisch. Warum auch nicht? Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig und gleichverteilt. Übung für Hartgesottene: Andere Verteilungen sind ebenso möglich.

Optimale Partnerwahl: Looking for Mr. Right... or Mr. Almost

B210 Erläuterung

Lösung: Alice ermittelt die optimale Strategie durch Rekursion wie folgt: Sie heiratet den letzten Kandidaten n auf jeden Fall. Erwartete Eignung:

$$\mu_n = \mathbf{E}[X_n] = 1/2$$

Sie heiratet Kandidat $n-1$, falls $X_{n-1} > \mu_n$. Erwartete Eignung:

$$\mu_{n-1} = \mathbf{E}[\max(X_{n-1}, \mu_n)] = 1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 3/4 = 5/8$$

Sie heiratet Kandidat $n-2$, falls $X_{n-2} > \mu_{n-1}$. Erwartete Eignung:

$$\mu_{n-2} = \mathbf{E}[\max(X_{n-2}, \mu_{n-1})] = 5/8 \cdot 5/8 + 3/8 \cdot 13/16 = 89/128$$

☺ Alice' Ansprüche steigen, je mehr Kandidaten noch warten. Ihre Ansprüche sinken, je weniger Kandidaten noch bleiben.

Das ist anschaulich klar und entspricht der Alltagserfahrung. Nun können wir es begründen und genauer quantifizieren.

Vielleicht klingt das alles recht herzlos und übertrieben formal, aber so ganz unrealistisch ist es dann auch wieder nicht!

Optimale Partnerwahl: Looking for Mr. Right... or Mr. Almost

B211 Erläuterung

Für den folgenden Satz kehren wir die einfach Nummerierung um: Die „Rückwärtsinduktion" ist dann eine ganz normale Induktion!

Satz B2A: optimale Partnerwahl: Looking for Mr. Right

Alice optimiert die Partnerwahl wie folgt. Sie setzt $a_0 = 0$ und rekursiv

$$a_{n+1} = (1 + a_n^2)/2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Warten noch genau $n+1$ Kandidaten, so heiratet Alice den nächsten Kandidaten genau dann, wenn seine Eignung größer als a_n ist.

Mit dieser optimalen Strategie erwartet Alice die Eignung a_{n+1}. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wächst streng monoton und konvergiert gegen 1.

Übung: Beweisen Sie diesen Satz per Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

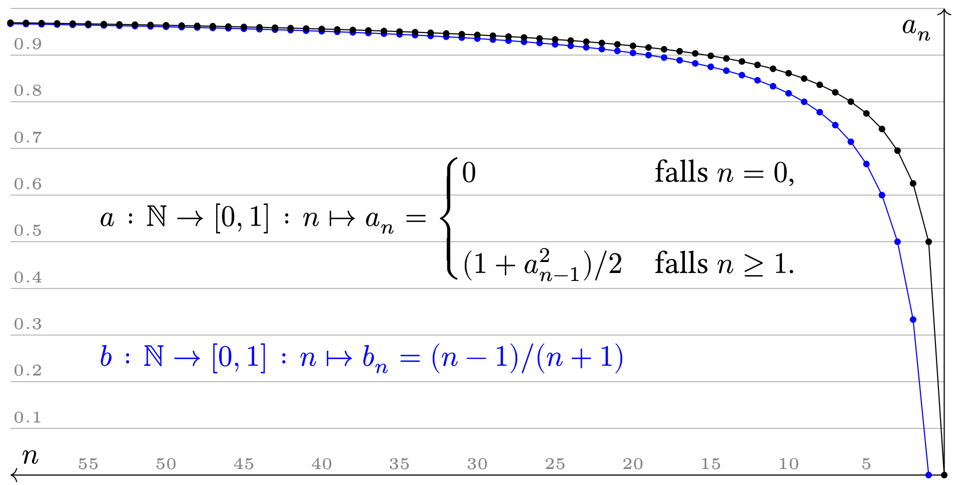
☺ Die ungefähre Form der Kurve $n \mapsto a_n$ ist anschaulich plausibel. Die genauen Werte können wir wie oben berechnen – und beweisen.

☺ Steht diese Aussage einmal vor Ihnen, so ist der Nachweis leicht: Als bewährtes Standardverfahren greift hier die vollständige Induktion!

Optimale Partnerwahl: Looking for Mr. Right... or Mr. Almost

B212 Erläuterung

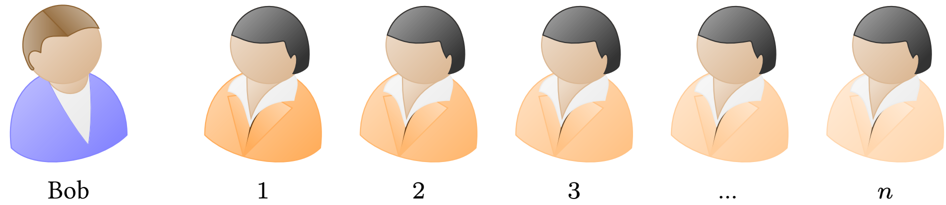
Alice' Erwartung bzw. Anspruch a_n als Funktion der Kandidatenzahl n:



Fun fact: b_n ist die Erwartung des *zweithöchsten* Wertes in $X_1, \dots, X_n$. Alice optimiert erfolgreich, doch es bleibt etwas Wehmut: Eines Tages begegnet ihr Mr. Right, doch sie hat zuvor schon Mr. Almost geheiratet.

Optimales Stoppen: das Sekretärinnen-Problem

Secretary problem: When to stop interviewing and start hiring?



Bob stellt eine Sekretärin (w/m/d) ein. Dazu sind n Bewerber:innen eingeladen, in zufälliger Reihenfolge. Bob sucht die *beste* Kandidatin. Im Interview mit Kandidatin k kann er nur feststellen, ob sie besser ist als alle vorigen. Er kann sie sofort einstellen oder ihr definitiv absagen.

Aufgabe: Wie soll Bob vorgehen? Wie maximiert er seine Trefferwkt?

Die 37%–Regel: Interviewe zunächst $\lceil n/\mathrm{e}\rceil$ Kandidatinnen mit Absage; dann wähle die nächste Kandidatin, die besser ist als alle vorigen.
Das klingt verrückt? Es ist nachweislich die beste Strategie!
Slogan: Gleichgewicht zwischen Exploration vs Exploitation.

Optimales Stoppen: das Sekretärinnen-Problem

Problemstellung: Sie bekommen n Angebote zu Zeiten $t = 1, 2, \dots, n$. Setze $X_t = 1$, falls Angebot t besser ist als alle vorigen, sonst $X_t = 0$.
Sie können solch ein Angebot entweder annehmen (s = select & stop) oder dieses Angebot ein für alle Mal ablehnen (r = reject & resume).
Sie wollen unter allen Angeboten das *beste* auswählen, also das letzte Angebot t mit $X_t = 1$ annehmen.

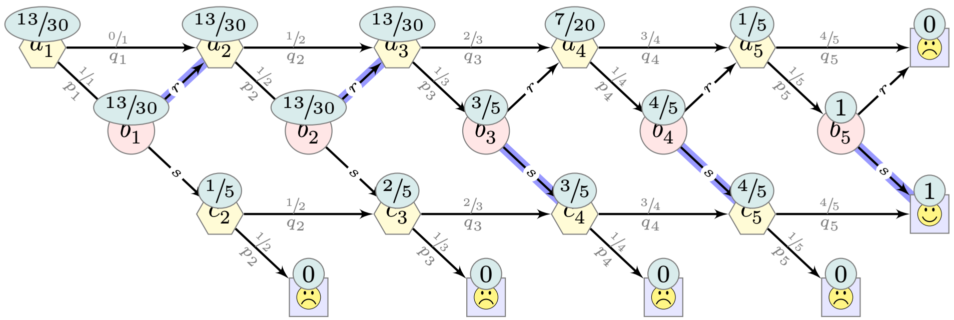
Beispiele: Eine optimale Online-Auktion mit sofortiger Zu- oder Absage. Den besten Gebrauchtwagen kaufen. Die beste Tankstelle entlang einer langen Straße auswählen. Die beste Sekretärin einstellen. Heiraten?

(a) Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots, X_n : \Omega \to \{0, 1\}$ seien unabhängig mit den Wkten $\mathbf{P}(X_t{=}1) = p_t \in [0, 1]$ und $\mathbf{P}(X_t{=}0) = q_t = 1 - p_t$.
(b) Speziell betrachten wir n unterschiedlich gute Angebote in zufälliger Reihenfolge, mit Gleichverteilung der $n!$ Anordnungen, also $p_t = 1/t$.

Aufgabe: (1) Formulieren Sie dieses Spiel als einen Markov–Graphen.
(2) Was ist die beste Strategie? (3) Was ist die optimale Erfolgswkt?

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

Aufgabe: Untersuchen Sie den Fall $n = 5$ mit $p_k = 1/k$ und $q_k = 1 - p_k$.



Aufgabe: Wie gelingt dies allgemein? Beweisen Sie folgenden Satz:

Satz B2B: *Sum the odds to one and stop*, Bruss 2000

Sei $s \in \{1, \dots, n\}$ der größte Index mit $R_s := \sum_{k=s}^{n} p_k/q_k \ge 1$. Dann ist folgende Strategie optimal: Wähle das erste Angebot $k \ge s$ mit $X_k = 1$. Die optimale Gewinnwkt ist dabei gleich $R_s Q_s$ mit $Q_s = q_s \cdots q_n$.

Die 37%–Regel: Für $p_k = 1/k$ gilt $s \gtrapprox n/\mathrm{e}$ und $R_s Q_s \gtrapprox 1/\mathrm{e} \gtrapprox 0.367$.

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

☺ Dieser Satz ist wunderbar effizient und sein Beweis ebenso elegant. Der Algorithmus stammt aus dem wunderschönen Artikel von F.T. Bruss: *Sum the odds to one and stop.* Ann. of Prob. 28 (2000) 1384–1391.

Beweis: Wir berechnen die Gewinnwkt w in jedem Zustand a_k, b_k, c_k bei optimaler Strategie. Wie immer gehen wir hierzu rekursiv vor:

Im Zustand c_k ist die Gewinnwkt offensichtlich $w(c_k) = Q_k := q_k \cdots q_n$. Wir setzen $R_k := p_k/q_k + \dots + p_n/q_n$ und finden s mit $R_s \ge 1 > R_{s+1}$. Terminal, für $k = n + 1$, gilt $w(c_k) = 1 = Q_k$ und $w(a_k) = 0 = R_k Q_k$.

(1) Im Falle $R_k < 1$ gilt $w(a_k) = R_k Q_k$ und $w(a_{k-1}) = R_{k-1} Q_{k-1}$:
Im Zustand b_{k-1} wählen wir zwischen $w(a_k) = R_k Q_k$ und $w(c_k) = Q_k$.
Da wir $R_k < 1$ voraussetzen, entscheiden wir uns optimal für c_k.
Daraufhin gilt $w(a_{k-1}) = p_{k-1} Q_k + q_{k-1} R_k Q_k = R_{k-1} Q_{k-1}$.

(2) Im Falle $R_k \ge 1$ hingegen entscheiden wir uns optimal für a_k.
(Für $R_k = 1$ herrscht Indifferenz, die Wahl c_k wäre genauso gut.)
Die Gewinnwkt ist dann $w(a_{k-1}) = w(a_k)$, wie oben gezeigt.
Für alle $k = 1, \dots, s$ gilt daher $w(a_k) = w(a_s) = R_s Q_s$. $\boxed{\text{QED}}$

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

Die optimale Stoppzeit s_n und die Gewinnwkt w_n für $n = 1, \dots, 40$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s_n	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
w_n	1	$1/2$	$1/2$	$11/24$	$13/30$	$77/180$	$29/70$	…	…	…
$\approx$	1.000	0.500	0.500	0.458	0.433	0.428	0.414	0.410	0.406	0.399

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
s_n	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8
w_n	0.398	0.396	0.392	0.392	0.389	0.388	0.387	0.385	0.385	0.384

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
s_n	9	9	9	10	10	10	11	11	11	12
w_n	0.383	0.383	0.382	0.381	0.381	0.380	0.380	0.379	0.379	0.379

n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
s_n	12	13	13	13	14	14	14	15	15	16
w_n	0.378	0.378	0.378	0.377	0.377	0.377	0.376	0.376	0.376	0.376

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

Übung: Wählen Sie einen kleinen Wert n und berechnen Sie das Paar (s_n, w_n) von Hand. Vorbild: Der Fall $n = 5$ ist oben detailliert ausgeführt. Kontrolle: Für $n \le 7$ finden Sie den exakten Wert w_n in obiger Tabelle. Für Werte $n \le 40$ finden Sie zudem eine numerische Näherung.

Aufgabe: Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung von (s_n, w_n). Kontrolle: Vergleichen Sie Ihre Werte mit der obigen Tabelle.

Lösung: In Python sieht eine mögliche Lösung wie folgt aus:

```
def bruss(n):
    k = n; r = 0
    while r < 1: k -= 1; r += 1/k
    return k+1, r*k/n
```

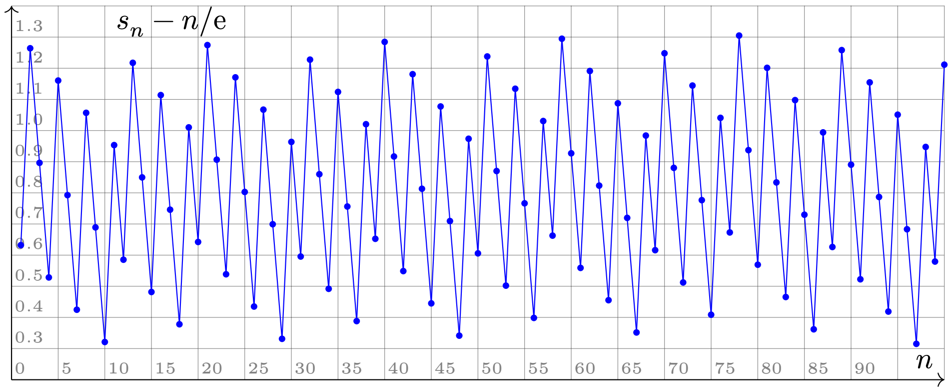
Der Aufruf `bruss(5)` liefert als Ergebnis das Wertepaar `3, 0.433`. Auf diese Weise wurden die Werte für die obige Tabelle berechnet.

☺ Die Korrektheit dieser Rechnung verdanken wir dem obigen Satz: Grundlagen / Theorie und Programmierung / Anwendung ergänzen sich!

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

Aufgabe: Vergleichen Sie die Stoppzeit s_n mit der Faustformel n/e.

Lösung: Die Berechnung übernimmt bequem unser obiges Programm. Die folgende Graphik zeigt die Differenz $s_n - n/\mathrm{e}$ für $n = 1, \dots, 100$:



Somit gilt $s_n = \lceil n/\mathrm{e} \rceil$ oder $s_n = \lceil n/\mathrm{e} \rceil + 1$, zumindest für alle $n \le 100$. Das bietet eine einfache, doch recht genaue Näherungsformel für s_n.

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

☺ Wenn Sie die logische Entwicklung dieser Aufgabe nachvollziehen, werden Sie ein interessantes Wechselspiel erkennen und verstehen:

- Wir beginnen mit einem **konkreten Beispiel**, nämlich der Analyse des Spiels für den Fall $n = 5$.
- Dadurch erkennen wir das **allgemeine Muster** und können dies anschließend als Satz B2B beweisen.
- Mit dem so gewonnenen Algorithmus können wir **weitere Beispiele** lösen und mehr Daten erschließen.
- Daran beobachten wir ein **genaueres Muster**. Dies wollen wir nun als Satz B2C beweisen!

Dieses Wechselspiel von theoretischen Grundlagen und praktischen Anwendungen, von mathematischen Sätze und numerischen Experimenten, ist durchaus typisch und überaus erfolgreich.

☺ So können wir uns langsam auf unbekanntes Terrain vortasten, Muster erkennen, Vermutungen formulieren und Ergebnisse beweisen.

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

Zu $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ suchen wir die Stoppzeit s_n. Unsere numerischen Experimente lassen uns die folgende einfache Regel vermuten:

Satz B2c: die 37%–Regel

Das Sekretärinnen-Problem wird durch folgende Faustformel gelöst:

(1) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ gilt $s_n = \lceil n/\mathrm{e} \rceil$ oder $s_n = \lceil n/\mathrm{e} \rceil + 1$, kurzum:

$$\boxed{s_n \approx n/\mathrm{e}}$$

(2) Die Gewinnerwkt ist $w_n = R_s Q_s$ mit $R_s \gtrapprox 1$ und $Q_s = (s-1)/n$, also:

$$\boxed{w_n \approx 1/\mathrm{e}}$$

Für $n \to \infty$ gilt $s_n/n \to 1/\mathrm{e}$ und $w_n \to 1/\mathrm{e}$. Als numerische Werte haben wir $\mathrm{e} \approx 2.718$ und $1/\mathrm{e} \approx 0.368$, daher der Name „37%–Regel“.

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

Aufgabe: Beweisen Sie diese Näherungen. *Tipp:* Approximieren Sie hierzu die Summe durch ein Integral, $\sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k} \gtrapprox \int_s^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(n/s)$.

Lösung: (1) Vorgegeben ist die natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$.
Wir suchen die Lösung $s \in \{1, \dots, n\}$ zu folgender Ungleichung:

$$(*) \qquad \sum_{k=s+1}^{n} \frac{1}{k-1} \;<\; 1 \;\le\; \sum_{k=s}^{n} \frac{1}{k-1}$$

Der Vergleich von Summe und Integral liefert hier:

$$\begin{aligned} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k} &\ge \int_{x=s}^{n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &&= \ln\Big(\frac{n}{s}\Big) \\ \sum_{k=s-1}^{n-1} \frac{1}{k} &\le \int_{x=s-2}^{n-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &&= \ln\Big(\frac{n-1}{s-2}\Big) \end{aligned}$$

Wir setzen dazu stillschweigend $s \ge 3$ voraus, also $n \ge 5$.
Die kleinen Fälle $n \le 4$ lösen wir direkt, wie oben gezeigt.

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

Wir nutzen nun die Doppelungleichung $(*)$ und schließen:

$$\ln\Big(\frac{n}{s}\Big) < 1 \quad\Longrightarrow\quad s > n/\mathrm{e}$$

$$\ln\Big(\frac{n-1}{s-2}\Big) \ge 1 \quad\Longrightarrow\quad s \le n/\mathrm{e} + 2 - 1/\mathrm{e}$$

Da s eine ganze Zahl ist, folgt durch Auf/Abrunden:

$$\lceil n/\mathrm{e} \rceil \le s \le \lfloor n/\mathrm{e} + 2 - 1/\mathrm{e} \rfloor$$

Das bedeutet $s = \lceil n/\mathrm{e} \rceil$ oder $s = \lceil n/\mathrm{e} \rceil + 1$, oder zusammengefasst:

$$\boxed{s \in \lceil n/\mathrm{e} \rceil + \{0, 1\}}$$

Für große n ist die kleine verbleibende Unsicherheit $\{0, 1\}$ unerheblich. Für kleine n können wir mühelos eine Tabelle anlegen, wie oben erklärt. Allgemeiner Satz und numerische Rechnung ergänzen sich wunderbar!

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

Damit ist das Sekretärinnen-Problem gelöst, theoretisch und praktisch. Es ist ein Paradebeispiel für die rekursive Lösung komplexer Probleme. In der schön konkreten Geschichte steckt abstrakt allgemeine Wahrheit. Solche Modelle werden tatsächlich genutzt für Online-Auktionen u.ä.

Das ist nur die Spitze des Eisbergs, damit beginnt erst das Abenteuer! Fragen des **optimalen Stoppens** finden sich nahezu überall in der Stochastik, insbesondere der Ökonomik und der Finanzmathematik, zum Beispiel beim Börsenhandel mit Aktien oder Optionen.

Die Frage lautet allgemein: Wie wählen wir den optimalen Zeitpunkt für eine Aktion? Unser Ziel ist es, den erwarteten Gewinn zu maximieren oder die erwarteten Kosten zu minimieren. Viele solche Probleme können rekursiv gelöst werden, so wie in unserem Beispiel.

Diese Knobelaufgabe ist also nicht nur lehrreich für den Themenkreis Induktion / Rekursion / Rückwärtsinduktion, sondern zugleich ein erstes Anwendungsbeispiel, ein motivierender Startpunkt für die Optimierung, hier einer Stoppzeit, die weitreichende Anwendungen erschließt.

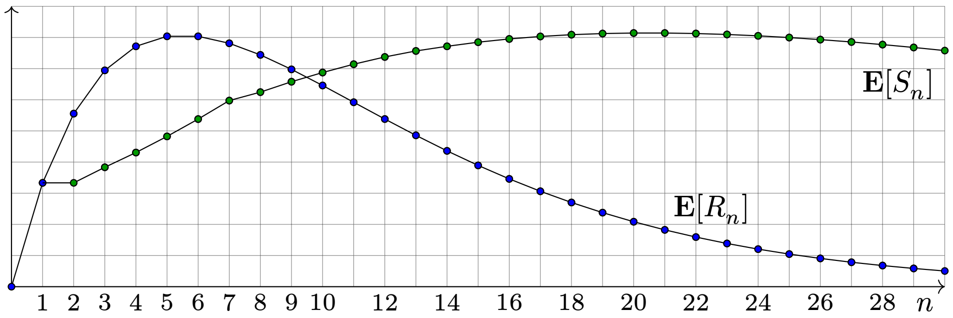
Stoppzeiten: Würfeln bis die Eins kommt

Beim Würfeln werden Augenzahlen addiert bis der Spieler aufhört; würfelt er jedoch eine Eins, so endet sein Spiel mit Totalverlust/Ruin.

Die Spielleiterin zahlt die erreichte Augensumme in Euro, verlangt aber 10€ Einsatz. Wie spielen Sie optimal? Können Sie Profit generieren?

Aufgabe: Sie nutzen die Strategie R_n: „Spiele n Runden (oder Ruin).“
(1) Welchen Gewinn erwarten Sie? Welche n maximieren den Gewinn?

Lösung: (1) Bei n Würfen erwarten wir den Gewinn $\mathbf{E}[R_n] = 4n(\frac{5}{6})^n$.
Bei $n \in \{5, 6\}$ erreichen wir das Maximum $4 \cdot 5(\frac{5}{6})^5 = 4 \cdot 6(\frac{5}{6})^6 \approx 8.038$.



Stoppzeiten: Würfeln bis die Eins kommt

Die Erwartung $\mathbf{E}[R_5] \approx 8$ ist noch zu gering. Gibt es bessere Strategien? Angenommen, im laufenden Spiel beträgt Ihre aktuelle Augensumme s. Sollten Sie noch einen weiteren Zug wagen oder besser jetzt aufhören?

Aufgabe: (2) Bis zu welcher Augensumme s lohnt sich ein weiterer Zug?

Lösung: (2) Nach einem weiteren Zug ist die erwartete Augensumme

$$e(s) = \frac{0 + (s+2) + (s+3) + (s+4) + (s+5) + (s+6)}{6} = \frac{5s + 20}{6}$$

Der nächste Zug ist genau dann profitabel (im Mittel), wenn $e(s) > s$ gilt:

$$s \overset{!}{<} \frac{5s + 20}{6} \quad \Longleftrightarrow \quad s < 20$$

Das legt folgende Strategie nahe: Sie würfeln bis Sie Augensumme ≥ 20 erreichen (oder aber eine Eins zuvor Ihr Spiel mit Totalverlust ruiniert.)

Ist diese flexible Strategie wirklich besser als R_n mit fest 5 Runden? Können Sie damit sogar die 10€ Einsatz übertreffen und profitieren? Dazu müssen wir die Erwartungswerte berechnen und vergleichen!

Stoppzeiten: Würfeln bis die Eins kommt

Die Strategie S_n lautet: „Spiele bis mindestens n Punkte (oder Ruin).“ Anders als bei R_n nutzen Sie Informationen des bisherigen Verlaufs!

Aufgabe: (3) Welches Ergebnis liefert die Strategie S_n mit welcher Wkt?
(4) Welche der Strategien in $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erwartet den höchsten Gewinn?

Lösung: (3) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Die Strategie S_n liefert die Ergebnisse $0, n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ mit Wkten $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n \in [0, 1]$. Für $n = 1$ sind diese Wkten offensichtlich $1/6, 0, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6$.

Rekursiv gilt dann $a_{n+1} = a_n + b_n/6$, $b_{n+1} = c_n$, $c_{n+1} = d_n + b_n/6$, $d_{n+1} = e_n + b_n/6$, $e_{n+1} = f_n + b_n/6$, $f_{n+1} = g_n + b_n/6$, $g_{n+1} = b_n/6$.
Mit einer Tabellenkalkulation erhalten wir mühelos die folgenden Werte.

(4) Der erwartete Gewinn für die Strategie S_n ist gegeben durch
$\mathbf{E}[S_n] = nb_n + (n+1)c_n + (n+2)d_n + (n+3)e_n + (n+4)f_n + (n+5)g_n$.

Das Maximum $\mathbf{E}[S_{20}] = \mathbf{E}[S_{21}] \approx 8.142$ liegt nur ein klein Wenig höher als zuvor $\mathbf{E}[R_5] = \mathbf{E}[R_6] \approx 8.038$ bei fester Rundenzahl. Immerhin!
Für 10€ Einsatz genügt das nicht. Können Sie mehr rausholen?

Stoppzeiten: Würfeln bis die Eins kommt

S_n	0	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	$n+5$	$\mathbf{E}[S_n]$
1	.167	.000	.167	.167	.167	.167	.167	3.333
2	.167	.167	.167	.167	.167	.167	.000	3.333
3	.194	.167	.194	.194	.194	.028	.028	3.833
4	.222	.194	.222	.222	.056	.056	.028	4.306
5	.255	.222	.255	.088	.088	.060	.032	4.824
6	.292	.255	.125	.125	.097	.069	.037	5.380
7	.334	.125	.167	.140	.112	.079	.042	5.974
8	.355	.167	.160	.133	.100	.063	.021	6.245
9	.383	.160	.161	.128	.091	.049	.028	6.579
10	.410	.161	.155	.118	.075	.055	.027	6.874
11	.436	.155	.145	.102	.081	.054	.027	7.141
12	.462	.145	.128	.107	.079	.053	.026	7.374
13	.486	.128	.131	.103	.077	.050	.024	7.567
14	.508	.131	.125	.098	.071	.045	.021	7.716
15	.530	.125	.120	.093	.067	.043	.022	7.848
16	.550	.120	.114	.088	.064	.043	.021	7.952
17	.570	.114	.108	.084	.063	.041	.020	8.032
18	.589	.108	.103	.082	.060	.039	.019	8.089
19	.607	.103	.100	.078	.057	.037	.018	8.125
20	.625	.100	.095	.074	.054	.035	.017	8.142
21	.641	.095	.091	.071	.052	.034	.017	8.142
22	.657	.091	.087	.068	.050	.032	.016	8.126
23	.672	.087	.083	.065	.048	.031	.015	8.096
24	.687	.083	.079	.062	.045	.030	.014	8.052
25	.700	.079	.076	.059	.043	.028	.014	7.997

S_n	0	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	$n+5$	$\mathbf{E}[S_n]$
26	.714	.076	.072	.057	.041	.027	.013	7.931
27	.726	.072	.069	.054	.040	.026	.013	7.855
28	.738	.069	.066	.052	.038	.025	.012	7.771
29	.750	.066	.063	.049	.036	.024	.012	7.679
30	.761	.063	.060	.047	.035	.023	.011	7.579
31	.771	.060	.058	.045	.033	.022	.011	7.474
32	.781	.058	.055	.043	.032	.021	.010	7.363
33	.791	.055	.053	.041	.030	.020	.010	7.248
34	.800	.053	.050	.039	.029	.019	.009	7.128
35	.809	.050	.048	.038	.028	.018	.009	7.005
36	.818	.048	.046	.036	.026	.017	.008	6.878
37	.826	.046	.044	.034	.025	.016	.008	6.750
38	.833	.044	.042	.033	.024	.016	.008	6.619
39	.841	.042	.040	.031	.023	.015	.007	6.487
40	.848	.040	.039	.030	.022	.014	.007	6.353
41	.854	.039	.037	.029	.021	.014	.007	6.219
42	.861	.037	.035	.028	.020	.013	.006	6.084
43	.867	.035	.034	.026	.019	.013	.006	5.949
44	.873	.034	.032	.025	.018	.012	.006	5.814
45	.878	.032	.031	.024	.018	.011	.006	5.680
46	.884	.031	.029	.023	.017	.011	.005	5.546
47	.889	.029	.028	.022	.016	.010	.005	5.412
48	.894	.028	.027	.021	.015	.010	.005	5.280
49	.898	.027	.026	.020	.015	.010	.005	5.149
50	.903	.026	.025	.019	.014	.009	.004	5.019

Das Runde muss ins Eckige: Bayes beim Tischkicker

Angenommen beim Tischkicker bis 10 zwischen den gleich starken Alice und Bob fallen die Tore zufällig (50 : 50) und unabhängig voneinander.

Aufgabe: Wie stehen die Gewinnchancen bei 9 : 8? bei 4 : 7?

Lösung: Wahrscheinlichkeit für den Sieg von Alice beim Stand $a : b$.

$a : b$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
10		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
9	0.000	0.500	0.750	0.875	0.938	0.969	0.984	0.992	0.996	0.998	0.999
8	0.000	0.250	0.500	0.688	0.813	0.891	0.938	0.965	0.980	0.989	0.994
7	0.000	0.125	0.313	0.500	0.656	0.773	0.855	0.910	0.945	0.967	0.981
6	0.000	0.063	0.188	0.344	0.500	0.637	0.746	0.828	0.887	0.927	0.954
5	0.000	0.031	0.109	0.227	0.363	0.500	0.623	0.726	0.806	0.867	0.910
4	0.000	0.016	0.063	0.145	0.254	0.377	0.500	0.613	0.709	0.788	0.849
3	0.000	0.008	0.035	0.090	0.172	0.274	0.387	0.500	0.605	0.696	0.773
2	0.000	0.004	0.020	0.055	0.113	0.194	0.291	0.395	0.500	0.598	0.685
1	0.000	0.002	0.011	0.033	0.073	0.133	0.212	0.304	0.402	0.500	0.593
0	0.000	0.001	0.006	0.019	0.046	0.090	0.151	0.227	0.315	0.407	0.500

Das Runde muss ins Eckige: Bayes beim Tischkicker

Ausführung: Wie kommt diese Rechnung zustande? Ganz einfach durch Rückwärtsinduktion! Beim Stand von $a : b$ gibt es zwei mögliche Fortgänge: Entweder es trifft Alice oder es trifft Bob. Wir entwickeln unsere Rechnung übersichtlich in einer Tabelle. Sei $A[a{:}b]$ das Ereignis „Alice gewinnt nach Stand $a : b$“. Dank dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit gilt:

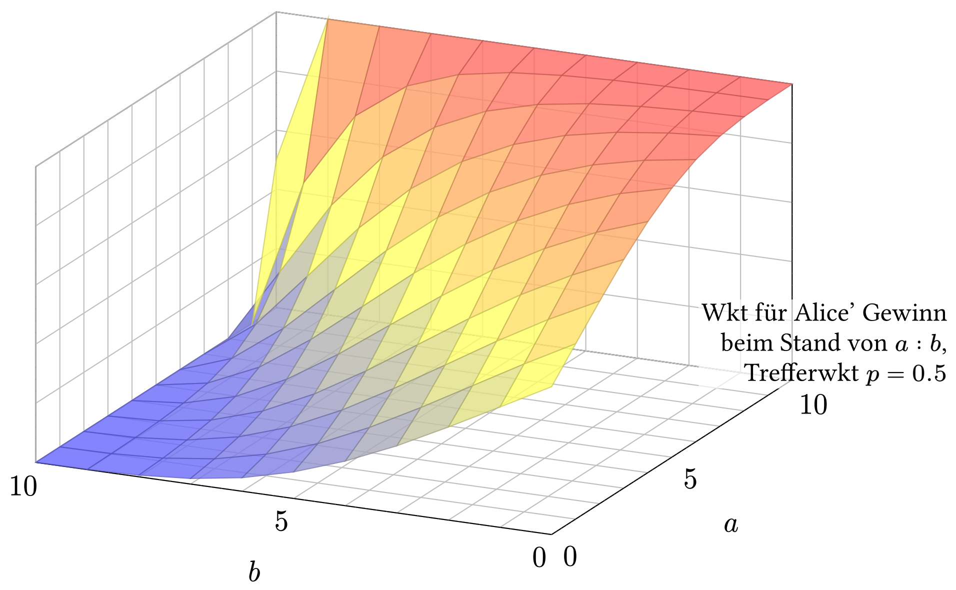
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A[a{:}b]) &= \mathbf{P}(A[a{:}b] \mid \text{Alice trifft}) \cdot \mathbf{P}(\text{Alice trifft}) + \mathbf{P}(A[a{:}b] \mid \text{Bob trifft}) \cdot \mathbf{P}(\text{Bob trifft}) \\ &= \mathbf{P}(A[a+1{:}b]) \cdot \mathbf{P}(\text{Alice trifft}) + \mathbf{P}(A[a{:}b+1]) \cdot \mathbf{P}(\text{Bob trifft})\end{aligned}$$

🙂 Mit dieser einfachen Rekursionsformel können Sie nun die gesamte Tabelle ausfüllen. Besonders bequem und automatisiert geht's mit einer Tabellenkalkulation, z.B. *LibreOffice*.

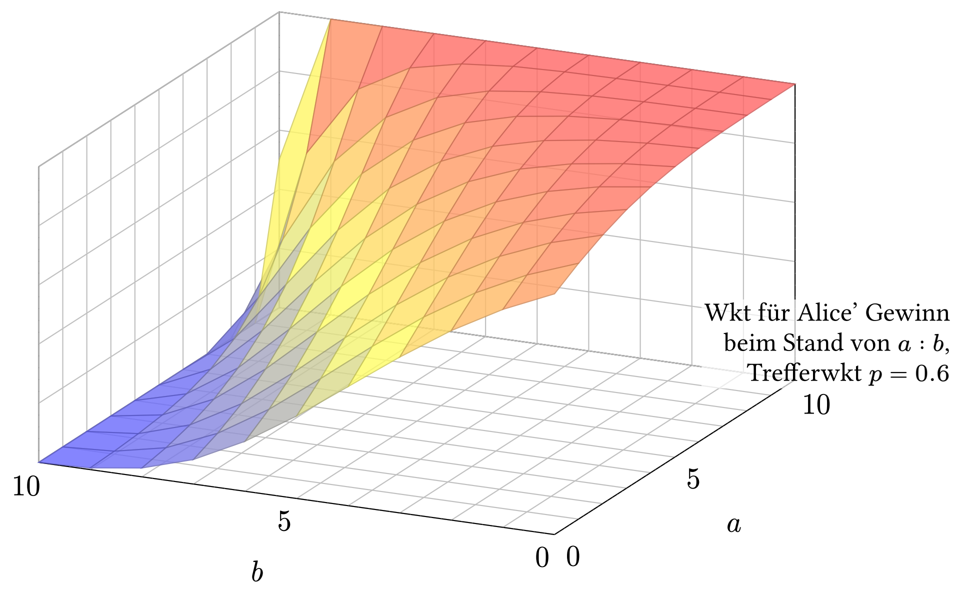
🙂 Pascal lässt grüßen: Die $n$te Diagonale der Tabelle entspricht der $n$ten Zeile des Pascalschen Dreiecks (hier kumuliert und normiert). In unserer Tabelle versteckt sich die Binomialverteilung!

Geschichte: Mitte 1654 schrieb Blaise Pascal (1623–1662) an Pierre de Fermat (1607–1665) einen Brief, der berühmt wurde und als Geburtsurkunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt. Pascal löste darin zwei konkrete Probleme zu Glücksspielen, zu denen ein Freund ihn um Rat gebeten hatte, der berufsmäßige Spieler Antoine Gombaud, Chevalier de Méré (1607–1684). Erstens eine Berechnung von Würfelwahrscheinlichkeiten. Zweitens das Problem der gerechten Teilung bei vorzeitigem Spielabbruch. Doch was heißt hier „gerecht“? Pascal und Fermat wurden sich nach ausführlicher Diskussion einig, dass der Einsatz gemäß den Gewinnwkten aufgeteilt werden sollte. Das ist unsere obige Tabelle. Pascal konnte diese kombinatorisch berechnen dank dem von ihm zuvor entwickelten Pascalschen Dreieck für die Binomialkoeffizienten.

Das Runde muss ins Eckige: Bayes beim Tischkicker



Das Runde muss ins Eckige: Bayes beim Tischkicker



Individuelles vs geteiltes Wissen

B301 Übung

Beim Brettspiel *Cluedo* lösen zwei bis sechs Spieler:innen einen Mordfall, indem sie Täter:in, Waffe und Ort finden. Jede Spieler:in erhält anfangs ihren Teil der Information und erweitert im Spielverlauf ihr Wissen durch geschickt kombinierte Fragen. Erfunden wurde das Spiel 1944 von Elva und Anthony Pratt, die dazu ein Patent einreichten und 1947 auch erhielten. *Fun fact:* Mathematik wird im Allgemeinen nicht patentiert, doch Spielen kann Patentschutz gewährt werden. Das ist erstaunlich!

Individuelles vs geteiltes Wissen

B302 Übung

Alice gibt verdeckt ihre Zahl $a \in \mathbb{N}$ an die Spielleitung, ebenso Bob seine Zahl $b \in \mathbb{N}$. Die Spielleitung verkündet p und q mit $a + b \in \{p < q\} \subseteq \mathbb{N}$, das heißt eine der beiden Zahlen ist die Summe, die andere ist beliebig.

Die Spielleitung fragt Alice, ob sie den Wert b zweifelsfrei herleiten kann. Falls ja, so gewinnt Alice. Falls nicht, so fragt die Spielleitung Bob, ob er den Wert a zweifelsfrei herleiten kann. Falls ja, so gewinnt Bob. So geht es abwechselnd weiter. Wir nehmen an, Alice und Bob spielen rational: Beide spielen fehlerfrei. Beide wissen es. Beide wissen, dass der andere es weiß. Beide wissen, dass der andere weiß, dass der andere es weiß. Usw.

Aufgabe: Zeigen Sie, dass das Spiel nach endlich vielen Runden endet.

Was macht diese Aufgabe so spannend? Sie ist überraschend, scheint zunächst paradox. Sie ist anfangs widerspenstig, ohne einfachen Ansatz. Sie lässt sich wunderbar spielen und provoziert lebhafte Diskussionen.

E. Specht, E. Quaisser, P. Bauermann: *50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik. Die schönsten Aufgaben.* Springer 2020. (BWM 1994-1-2)

Individuelles vs geteiltes Wissen

B303 Übung

Alice kennt ihre eigene Zahl $a \in \mathbb{N}$. Bob kennt seine eigene Zahl $b \in \mathbb{N}$. Gemeinsames Wissen ist zunächst $0 \le a \le q$ und $0 \le b \le q$. Das heißt: Diese Aussagen sind wahr. Beide wissen es. Beide wissen, dass beide es wissen. Beide wissen, dass beide wissen, dass beide es wissen. Usw.

Achtsamkeit: Alice kennt a, weiß also $b \in \{p - a, q - a\}$ sowie $u \le b \le v$.
(1a) Gilt $p - a < u$, so kann Alice $b = q - a$ herleiten und antwortet „Ja“.
(1b) Gilt $q - a > v$, so kann Alice $b = p - a$ herleiten und antwortet „Ja“.
Bei „Nein“ gilt somit $p - a \ge u$ und $q - a \le v$, also $q - v \le a \le p - u$.
Alice’ „Nein“ macht also $q - v \le a \le p - u$ zu gemeinsamem Wissen.
Entsprechendes gilt für Bob, von $u \le a \le v$ zu $q - v \le b \le p - u$.

Zahlenbeispiel: Wir betrachten $a = 5$ und $b = 8$ sowie $p = 13$ und $q = 17$.
1. Alice weiß $a = 5$, also $b \in \{8, 12\}$, sowie $0 \le b \le 17$, antwortet „Nein“.
2. Bob weiß $b = 8$, also $a \in \{5, 9\}$, sowie $0 \le a \le 13$, antwortet „Nein“.
3. Alice weiß $a = 5$, also $b \in \{8, 12\}$, sowie $4 \le b \le 13$, antwortet „Nein“.
4. Bob weiß $b = 8$, also $a \in \{5, 9\}$, sowie $4 \le a \le 9$, antwortet „Nein“.
5. Alice weiß $a = 5$, also $b \in \{8, 12\}$, sowie $8 \le b \le 9$, antwortet „Ja“.

Individuelles vs geteiltes Wissen

B304 Übung

Aufgabe: Das Spiel endet nach höchstens $n = 1 + \lfloor \frac{q}{q-p} \rfloor$ Fragen.
(Auch hier ist die stärkere Aussage schließlich leichter zu beweisen.)

Lösung: Bei der ersten Frage weiß Alice $b \in \{0, \dots, q\}$. Jede Verneinung kürzt das Intervall um $q - p$, abwechselnd am oberen und unteren Ende. Nach $\lfloor \frac{q}{q-p} \rfloor$ Verneinungen ist das verbleibende Intervall kürzer als $q - p$. Spätestens dann können die beiden Alternativen unterschieden werden.

Im Rückblick betrachtet ist diese knifflige Aufgabe erfreulich leicht! Der Schlüssel ist eine präzise Beschreibung und ihr induktiver Beweis. Der genaue Verlauf und die Länge des Spiels hängen von den Daten ab. Zur Illustration variieren wir das vorige Zahlenbeispiel noch etwas:

Zahlenbeispiel: Wir betrachten $a = 6$ und $b = 7$ sowie $p = 13$ und $q = 17$.
1. Alice weiß $a = 6$, also $b \in \{7, 11\}$, sowie $0 \le b \le 17$, antwortet „Nein“.
2. Bob weiß $b = 7$, also $a \in \{6, 10\}$, sowie $0 \le a \le 13$, antwortet „Nein“.
3. Alice weiß $a = 6$, also $b \in \{7, 11\}$, sowie $4 \le b \le 13$, antwortet „Nein“.
4. Bob weiß $b = 7$, also $a \in \{6, 10\}$, sowie $4 \le a \le 9$, antwortet „Ja“.

Individuelles vs geteiltes Wissen

B305
Übung

Wie lässt sich diese schöne Spielidee verallgemeinern, möglichst spannend und erkenntnisreich? Mehr Zahlen? Mehr Spieler:innen? Befragung nacheinander, so wie oben, oder besser gleichzeitig? Lässt sich auch Schummeln oder Betrügen in das Spiel einbauen?

Wenn wir dies wirklich spielen wollen, dann müssen alle Spielregeln im Detail erklärt und auch die (Beweis)Lasten sinnvoll verteilt werden.

Übung: Erklären und erproben Sie hierfür präzise Spielregeln! Wie lässt sich der Spielablauf damit möglichst reibungslos gestalten? Wie lässt sich der gemeinsame Spiel- und Knobelspaß maximieren?

Das Brettspiel *Cluedo* hat eine ähnliche Grundidee und generiert durch geschickt ausgewogene Regeln viel Spielspaß. Das ist eine Kunst! **Bushnells Gesetz** formuliert diese allgemeine Weisheit zum Spieldesign:

All the best games are easy to learn and difficult to master.
They should reward the first quarter and the hundredth.
Nolan Bushnell (1943–, Gründer von Atari)

Individuelles vs geteiltes Wissen

B306
Übung

Wie lässt sich obige Aufgabe tatsächlich spielen, mit Spaß und Aha? Insbesondere fragt die Spielleitung nicht nur vage-subjektiv „Kennst du die andere Zahl?“, sondern nun streng-objektiv „Leite zweifelsfrei her!“ Welche genaue Form müssen solche Nachweise hier annehmen? (Bei Cluedo entfällt der Nachweis; wer falsch auflöst, verliert.)

Wenn Alice das rekursive Schließen beherrscht, aber Bob noch nicht, dann kann Alice sich nicht auf seine vorigen Antworten verlassen. Im Extremfall lernt Bob nie dazu und antwortet daher immer „Nein“. Dann kann auch Alice nichts dazulernen und das Spiel endet nie. Eine mögliche Lösung wäre, den aktuellen Stand des gemeinsamen Wissens explizit zu nennen und gegenseitig zu bestätigen.

Übung: Wissen propagiert vorwärts, optimiert wird jedoch rückwärts. Die ersten Bei-Spiele dieses Kapitels illustrieren dies eindrücklich. Suchen Sie (Karten-, Brett-, Computer-) Spiele in Ihrem Repertoire, die beide Aspekte illustrieren und experimentell erfahrbar machen. Entwickeln Sie eigene Spiele, möglichst einfach doch gut spielbar.

Theorie des Mentalen

B307
Übung

Als **Theory of Mind**, kurz *ToM*, dt. *Theorie des Mentalen*, bezeichnet man die Fähigkeit, sich in andere *kognitiv* hineinzuversetzen. Analog erlaubt *Empathie*, die *emotionale* Perspektive einzunehmen. Menschen erlernen dies früh als Kleinkinder und nutzen es ständig zur sozialen Interaktion.

Ihr wesentliches Merkmal ist, äußeres Verhalten durch innere Zustände wie Denken und Fühlen zu erklären oder vorherzusagen. Diese Fähigkeit ist grundlegend für das Zusammenleben in einer Gruppe, daher meist tief verwurzelt und unbewusst. Viele (Kinder-)Spiele üben diese Fähigkeiten.

Kinder verstehen etwa zwischen drei und fünf Jahren, dass subjektives Denken und Fühlen, Wissen und Wollen, Überzeugungen und Wünsche von der selbst wahrgenommenen Realität abweichen können, und lernen dann, dies in ihrer Vorhersage fremden Verhaltens zu berücksichtigen.

Das obige Spiel wendet dies auf Wissen an, rekursiv in höherer Stufe. Die nötige iterative Denkweise üben wir jedoch als Kinder recht selten, daher ist sie uns intuitiv nicht so vertraut, sondern eine Denkleistung. So entwickeln wir *Metakognition*, als Nachdenken über das Denken.

Gemeinsames Lernen und Lachen

B308
Übung

Wenn ich in der Vorlesung die Spieltheorie erkläre, dann lauschen Sie aufmerksam, verstehen die Mathematik und vergessen dies nie wieder. Können Videos das auch? Die Vorlesung schafft sicherlich viel mehr: Alle erleben Mathematik *zusammen* und erwerben Wissen *interaktiv*.

Sie profitieren davon: Ihr universitäres Studium und Ihr gemeinsames Lernen gelingen, indem Sie regelmäßig, ernsthaft und aktiv mitarbeiten. Wir investieren in die Betreuung größte Mühe und freuen uns über Ihr verlässliches Engagement: Sie lernen *individuell* und *gemeinsam*.

Manche reduzieren das Studium auf einen Parcours einzelner Prüfungen, als schikanöse Fron, die es zu erfüllen oder noch besser zu umgehen gilt. So verdreht verheißen Video-Glotzen und Fress-Kotz-Lernen eine rasche Flucht. Wer gründlich verstehen will, lernt *individuell* und *gemeinsam*.

Auch Humor beruht auf gemeinsamem Wissen, der Witz entsteht durch eine überraschende Pointe, eine unerwartete Wendung der Handlung. Insbesondere Ironie funktioniert nur, wenn sich alle Seiten einig sind, sonst entstehen heillose Missverständnisse. `youtu.be/Jc0fFeKXcd4`

Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Das folgende Spiel „Kuhhandel“ hat sehr einfache Spielregeln. Gute Strategien sind zunächst nicht offensichtlich, doch es gibt eine erfreulich einfache mathematische Lösung: wie so oft per Rückwärtsinduktion unter Annahme ausreichender Rationalität. Ohne Rationalität hingegen ist die Realität viel komplizierter...

Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Alice und Bob ziehen verdeckt eine Karte aus einem zufällig gemischten Stapel mit den Werten $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$, etwa mit Höchstwert $n = 10$.

Alice kennt ihren Wert $a \in \Omega$, Bob kennt seinen Wert $b \in \Omega$, aber keiner weiß etwas über den Wert des anderen, außer der Tatsache $a \neq b$.

Alice darf einen Tausch vorschlagen, in diesem Falle entscheidet Bob. Falls Alice vorschlägt und Bob annimmt, tauschen beide ihre Karten.

Die höchste Karte gewinnt.

Beispiel: Bevor Sie das Spiel analysieren, antworten Sie intuitiv:
(a) Sie spielen Alice und haben die Karte $a = 4$. Sollten Sie tauschen?
(b) Sie spielen Bob und haben die Karte $b = 3$. Sollten Sie tauschen?

Wenn Sie mutig sind, formulieren Sie intuitiv eine Strategie:
Für welche $a \in \Omega$ soll Alice einen Tausch vorschlagen?
Für welche $b \in \Omega$ soll Bob einen Tausch annehmen?

Welches reale Verhalten vermuten Sie bei Ihren Mitspielern?
Welche Rolle spielen hierbei die Stufen der Rationalität? (A2A)

Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Aufgabe: Formulieren und beweisen Sie optimale Strategien:
Für welche $a \in \Omega$ soll Alice einen Tausch vorschlagen?
Für welche $b \in \Omega$ soll Bob einen Tausch annehmen?

(0) Nutzen Sie zunächst die Annahme ausreichender Rationalität.
Welche Voraussetzungen $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ nutzen Sie jeweils?

Lösung: (0) Wir argumentieren rückwärts, das ist klar und leicht:

A_0: Im Falle $a = n$ wird Alice keinen Tausch vorschlagen.
und im Falle $b = n$ wird Bob keinen Tausch annehmen ($\mathcal{R}_1$).

A_1: Im Falle $a = n - 1$ wird Alice keinen Tausch vorschlagen,
und im Falle $b = n - 1$ wird Bob keinen Tausch annehmen:
Jeder kann bestenfalls auf die gegnerische Karte n hoffen, doch dann würde Bob nicht annehmen bzw. Alice nicht vorschlagen (A_0).
Also wird Alice nicht vorschlagen und Bob nicht annehmen ($\mathcal{R}_2$).

⚠ Dieses Argument benötigt bereits Rationalität zweiter Stufe!
Beide Spieler müssen sich gegenseitig für rational halten.

Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Per Induktion über $k = 0, 1, \dots, n - 2$ beweisen wir ebenso:

A_k: Im Falle $a = n - k$ wird Alice keinen Tausch vorschlagen,
und im Falle $b = n - k$ wird Bob keinen Tausch annehmen:
Jeder kann bestenfalls auf die gegnerische Karte $> n - k$ hoffen, doch dann würde Bob nicht annehmen bzw. Alice nicht vorschlagen (A_{k-1}).
Also wird Alice nicht vorschlagen und Bob nicht annehmen ($\mathcal{R}_{k+1}$).

Dies gilt für $k = 0, 1, \dots, n - 2$, also für alle $a \geq 2$ und für alle $b \geq 2$.

Folglich schlägt Alice höchstens im Falle $a = 1$ einen Tausch vor,
allerdings ohne jede Hoffnung auf eine Annahme ihres Angebots.
Sie kann daher ihr Tauschangebot auch genauso gut unterlassen.

Ebenso akzeptiert Bob höchstens im Falle $b = 1$ einen Tausch,
allerdings ohne jede Hoffnung, dann je ein Angebot zu erhalten.
Er kann daher seine Annahme auch genauso gut unterlassen.

⚠ Der letzte Punkt ist heikel. Beide Spieler haben nichts zu verlieren, können also höchstens auf einen seltenen Fehler des Gegners hoffen.

Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Übung: (1) Spielen Sie dies als Experiment mit Ihren Freunden.
(2) Können Sie Theorie (0) und Experiment (1) in Einklang bringen?

Hier sind zwei Varianten denkbar: (a) Sie spielen im „Partymodus“ mit Kartenstapel, Ziehen, Vorschlagen und Annehmen am Spieltisch.
Vorteile: natürliche Spielsituation, Spaß beim Bluffen und Verhandeln.
Nachteile: schwer auszuwerten, zahlreiche Zufälle und Störfaktoren.

(b) Sie spielen im „Labormodus“, beispielsweise an einem Computer: Jeder Spieler wählt seine Strategie, etwa in Form von zwei Intervallen $T = \{1, \dots, t\}$ für „tauschen“ und $N = \{t+1, \dots, n\}$ für „nicht tauschen“. Jeder Spieler gibt seine Grenze t ein, dann spielt der Computer.
Vorteile: mehrfache Wiederholung, aussagekräftige Daten.
Nachteile: eher künstliche und sterile Spielsituation.

🙂 Gutes Design von Spielen und Experimenten ist eine hohe Kunst! Statistische Daten über das reale Spielerverhalten sind oft sehr wertvoll. Verhaltensökonomik: Wenn Spieler irrational sind, dann kommen Sie mit Deduktion allein nicht weiter, sondern benötigen statistische Messwerte.

Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Wir formulieren den Kuhhandel noch etwas allgemeiner und bequemer.

Alice und Bob werden die Karten $(a, b) \in \Omega = \{1, 2, \dots, n\}^2$ zugelost mit Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}$, etwa $n = 10$ und gleichverteilt $\mathbf{P}(\{(a, b)\}) = 1/n^2$. Alice kennt nur ihren Wert $a \in \Omega$, und Bob kennt nur seinen Wert $b \in \Omega$. Beide kennen die Wktverteilung $\mathbf{P}$ und somit die bedingten Wkten.

Alice und Bob legen gleichzeitig und verdeckt eine Münze auf den Tisch: $0 =$ Kopf bedeutet „Ich will nicht tauschen“ und $1 =$ Zahl entsprechend „Ich will tauschen“. Der Tausch findet statt, wenn beide tauschen wollen. Die höchste Karte gewinnt.

Hierzu formulieren beide vor dem Spiel ihre Strategie $s, t \in \{1, 2, \dots, n\}$: Alice will/wird tauschen falls $a \le s$, Bob will/wird tauschen falls $b \le t$.

Übung: (3) Berechnen Sie die Gewinnwkten für das Paar $(s, t) \in \Omega$. Nehmen Sie zur Vereinfachung Gleichverteilung an, $\mathbf{P}(\{(a, b)\}) = 1/n^2$.

(4) Angenommen, beide Spieler legen ihre Strategien s und t offen. Gibt es ein Strategiepaar (s, t), bei dem keiner mehr wechseln will? (Dies nennen wir ein Nash–Gleichgewicht, dazu später mehr.)

Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Das Gras ist immer grüner auf der anderen Seite.

Wir betrachten nun die Möglichkeit, dass beide Spieler über ihre Umwelt unterschiedliche Überzeugungen haben können, insbesondere über die Wahrscheinlichkeiten der Kartenverteilung zu Beginn dieses Spiels.

Alice glaubt an die Wktsverteilung $\mathbf{P}_1$, Bob glaubt an $\mathbf{P}_2$. Es herrscht Glaubensfreiheit, unabhängig von der tatsächlichen Verteilung $\mathbf{P}$.

Übung: (5) Erklären Sie zu jedem Strategiepaar $(s, t) \in \Omega$ falls möglich Überzeugungen $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$, sodass jeder seine Strategie für optimal hält. Stärker: strikt optimal? Ist dies mit Übereinstimmung $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ möglich?

(6) Angenommen, das Spiel wird sehr oft wiederholt. Sind divergente Überzeugungen $\mathbf{P}_1 \ne \mathbf{P}_2$ auf Dauer stabil? Oder ergibt sich Konvergenz? Wird man aus Erfahrung klug? Gelingt dies schnell oder langsam?

In unserer Gesellschaft erleben wir alltäglich unterschiedliche Ansichten, auch zu vermeintlich objektiven Sachverhalten können Menschen sehr unterschiedlicher Überzeugung sein.

Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Menschen sind verschieden: Jeder Jeck ist anders.

Wir betrachten nun die realistische Situation, dass Spieler sich in einer großen Population bewegen und darin Handelspaare zufällig entstehen.

Sei weiterhin $n = 10$ und $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. Der Anteil q_t der Bevölkerung tauscht für $a \le t$. Dabei gilt $q_t \ge 0$ und $q_1 + \dots + q_n = 1$.

Übung: (7) Angenommen, mindestens 30% der Bevölkerung glauben felsenfest, dass es sich für $a \le 5$ lohnt, zu tauschen. Diese Teilnehmer optimieren nicht ihr Verhalten, alle anderen hingegen schon. (Ebenso denkbar ist ein Fließgleichgewicht durch neue, unerfahrene Spieler.) Welches Gleichgewicht stellt sich ein? Ich führe diese Fragen hier nicht weiter aus, ihre Lösung ist etwas knifflig, aber erhellend.

Die ursprüngliche Frage zum Kuhhandel erinnert an das Diktum:

I don’t want to belong to any club that
would accept me as one of its members.
Groucho Marx (1890–1977)

Tanz der Vampire: Wissen und gemeinsames Wissen

In Transsylvanien treffen sich einmal jedes Jahr 300 Vampire zum Tanz. Anschließend verharren sie den Rest des Jahres schlafend in der Gruft. Sie altern nicht, sind untrüglich intelligent und vollkommen rational. Jeder weiß dies. Auch dies weiß jeder. Selbst dies weiß jeder. Usw. usw.

Unter den Vampiren tragen 100 ein Schandmal sichtbar auf der Stirn. Dies weiß keiner von sich selbst, da Vampire kein Spiegelbild werfen. Erführe er es, so suchte er den Freitod im nächsten Sonnenaufgang. (Vampire verbrennen im Sonnenlicht. *Wear sunscreen!* Mondcreme?)

Hingegen sieht jeder Vampir das Schandmal bei jedem anderen. Jeder sieht es. Jeder weiß es. Auch dies weiß jeder. Usw. usw. usw. Höfliche Rücksicht gebietet jedoch strenges Stillschweigen darüber. (Tabuisierte Kommunikation der Vampire ist ihre große Schwäche.)

Im Jahr 2001 platzt der Vampirjäger Professor Abronsius in das Fest: „Mindestens einer von Euch trägt ein Schandmal!“ schreit er und flieht. Die Vampire sehen keinen Grund, seiner Aussage zu widersprechen: Er sagt ihnen nur, was ohnehin jeder heimlich weiß. Oder etwa nicht?

Tanz der Vampire: Wissen und gemeinsames Wissen

Vampire werfen bekanntlich kein Spielbild.
Das führt zu komplizierten Verwicklungen.

Aufgabe: Was geschieht? Nichts? Plötzliche Erkenntnis? Wann?

Lösung: Nach dem Fest 2100 sterben 100 Vampire im Sonnenaufgang. Führen Sie sorgfältig einen Beweis per Induktion: Was ist die Aussage? Wie ist das möglich? Welche Neuigkeit hat der Professor verraten?

Tanz der Vampire: Wissen und gemeinsames Wissen

Hier geht es um gemeinsames Wissen / *common knowledge.*
Nur weil eine Aussage wahr ist, weiß dies noch längst nicht jeder!
Nur weil es jeder weiß, ist es noch kein gemeinsames Wissen!

Die untrügliche Intelligenz der Vampire ist gemeinsames Wissen:
$\mathcal{R}_1$: Jeder Vampir ist vollkommen rational und absolut ehrenhaft.
$\mathcal{R}_k$: Es gilt $\mathcal{R}_{k-1}$, und jeder Vampir weiß $\mathcal{R}_{k-1}$. (Stufe $k \in \mathbb{N}_{\ge 2}$)
$\mathcal{R}_\infty$: Es gilt $\mathcal{R}_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\ge 1}$. (Gemeinsames Wissen)

Die Anzahl der Schandmale hingegen ist kein gemeinsames Wissen:
$\mathcal{S}_1$: Jeder ehrbare Vampir sieht alle n Schandmale der anderen, jeder Schandmalträger jedoch sieht nur genau $n-1$ Schandmale.
$\mathcal{S}_k$: Es gilt $\mathcal{S}_{k-1}$, und jeder Vampir weiß $\mathcal{S}_{k-1}$. (Stufe $k \in \mathbb{N}_{\ge 2}$)
$\mathcal{S}_\infty$: Es gilt $\mathcal{S}_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\ge 1}$. (Gemeinsames Wissen)

Professor Abronsius' Aussage hingegen liefert stärkere Information:
$\mathcal{A}_1$: Jeder Vampir weiß, dass es mindestens ein Schandmal gibt.
$\mathcal{A}_k$: Es gilt $\mathcal{A}_{k-1}$, und jeder Vampir weiß $\mathcal{A}_{k-1}$. (Stufe $k \in \mathbb{N}_{\ge 2}$)
$\mathcal{A}_\infty$: Es gilt $\mathcal{A}_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\ge 1}$. (Gemeinsames Wissen)

Tanz der Vampire: Wissen und gemeinsames Wissen

Es lohnt sich, diese berüchtigte Rätsel sorgfältig zu durchleuchten! Wir nehmen hierzu an, genau n Vampire tragen ein Schandmal, und behaupten: Diese sterben am Morgen nach Fest $2000+n$.

Im Falle $n=1$ ahnt der einzige Träger zunächst nichts vom Schandmal. Durch Abronsius' Aussage erkennt er sofort seine Schande und stirbt bei Sonnenaufgang. (Wir nutzen die Voraussetzungen $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{R}_1$.)

Im Falle $n=2$ erwarten die beiden Träger den Freitod des anderen. Beim Fest 2002 treffen sie sich jedoch wieder, völlig unerwartet. Dadurch erkennt jeder der beiden sofort seine Schande und stirbt. (Wir nutzen hierzu die Voraussetzungen $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{R}_2$ und den Fall 1.)

Per Induktion gilt dieses Argument für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$: Jeder der n Träger sieht genau $n-1$ Schandmale und geht davon aus, dass er keines trägt. Er erwartet daher den Freitod der $n-1$ anderen nach dem Fest $2000+n{-}1$. Alle treffen sich jedoch beim Fest $2000+n$ unerwartet wieder. Dadurch erkennt jeder zweifelsfrei seine Schande. (Wir nutzen hierzu die Voraussetzungen $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{R}_n$ und den Fall $n-1$.)

Schmutzige Gesichter: eigenes und gegenseitiges Wissen

Hier ein berühmtes Logikrätsel aus der Folklore der Talmudschulen als Zentren jüdischer Gelehrsamkeit (`de.wikipedia.org/wiki/Jeschiwa`). Es handelt von eigenem Wissen und von gegenseitigem Wissen…

(1) Rabbi: „Zwei Männer klettern durch einen Kamin. Der eine kommt mit sauberem Gesicht heraus, der andere mit schmutzigem. Wer von beiden geht sich nun waschen?“ — Schüler: „Na wohl der mit dem schmutzigen Gesicht!“ — „Falsch! Der Schmutzige sieht den Sauberen und denkt, sein Gesicht sei auch sauber. Der Saubere sieht den Schmutzigen und denkt, sein Gesicht sei auch schmutzig, also geht der Saubere sich waschen.“

(2) Rabbi: „Zwei Männer klettern durch einen Kamin. Der eine kommt mit sauberem Gesicht heraus, der andere mit schmutzigem. Wer von beiden geht sich nun waschen?“ — Schüler: „Aber wir haben doch eben schon festgestellt: der mit dem sauberen Gesicht!“ — „Falsch: Beide gehen sich waschen. Überlege logisch: Der Saubere sieht den Schmutzigen und geht sich waschen. Der Schmutzige sieht das und versteht, dass sein Gesicht schmutzig ist, also geht auch der Schmutzige sich waschen.“

Schmutzige Gesichter: eigenes und gegenseitiges Wissen

(3) Rabbi: „Zwei Männer klettern durch einen Kamin. Der eine kommt mit sauberem Gesicht heraus, der andere mit schmutzigem. Wer von beiden geht sich nun waschen?“ — Schüler: „Na, beide gehen sich waschen.“ — „Falsch: Keiner von beiden. Der Schmutzige sieht den Sauberen und geht sich nicht waschen. Der Saubere sieht das und versteht, dass sein Gesicht sauber ist, also geht auch er sich nicht waschen.“

(4) „Zwei Männer klettern durch einen Kamin…“ — „Ich weiß, keiner von beiden wird sich waschen.“ — „Falsch! Sage mir: Wie kann es sein, dass zwei Männer durch denselben Kamin klettern, und der eine macht sein Gesicht schmutzig, der andere aber nicht? Die ganze Frage ist unsinnig. Wenn du dein Leben dazu verwendest, sinnlose Fragen zu beantworten, werden auch alle deine Antworten sinnlos sein.“

Aufgabe: Wie lösen Sie den Widerspruch zwischen (2) und (3)?

Lösung: Zur Festlegung dieses Spiels fehlen uns noch Informationen: Wir benötigen die genaue Reihenfolge der Züge / Signale / Folgerungen! Erst zieht Spieler 1, dann Spieler 2 mit dem Wissen des vorigen Zuges.

Schmutzige Gesichter: eigenes und gegenseitiges Wissen

Schmutzige Gesichter gibt es in vielen Rätseln, hier etwa in der Bahn:

Das Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach liegt wunderbar idyllisch mitten im Schwarzwald, etwa drittelwegs von Freiburg nach Stuttgart. Im Zug zu unserem fiktiven Workshop „Mathematical Logic“ sitzen 12 berühmte Logiker, manche davon mit schmutzigem Gesicht. Alle können sich gegenseitig sehen, es gibt jedoch keinen Spiegel, und diese überaus schüchternen Menschen reden nicht miteinander.

Die Schaffnerin erklärt der Gruppe höflich: „Mindestens zwei von Ihnen haben schmutzige Gesichter. Diese sollten schnellstmöglich aussteigen und sich waschen.“ An den nächsten Bahnhöfen $1, 2, 3, 4, 5$ passiert noch nichts. Erst am sechsten Bahnhof steigen einige der Passagiere aus, um sich das Gesicht zu waschen. Wie viele sind es?

Aufgabe: Lösen Sie dieses Logikrätsel. Präzisieren Sie alle hierzu nötigen Annahmen. Warum ist der Takt der Bahnhöfe wichtig?

Lösung: Genau sieben Personen haben ein schmutziges Gesicht. (Die Zahl 12 ist hier vollkommen beliebig und überflüssig.)

Schmutzige Gesichter: eigenes und gegenseitiges Wissen

Angenommen, es gibt genau $n \in \{2, 3, \dots, 12\}$ schmutzige Gesichter.

Im Falle $n = 2$ wissen die beiden Betroffenen sofort Bescheid: Jeder der beiden sieht nur ein schmutziges Gesicht. Nach Aussage der Schaffnerin gibt es jedoch mindestens zwei. Daraus schließt jeder Betroffene richtig, das sein Gesicht schmutzig ist, und steigt am 1. Bahnhof aus.

Im Falle $n = 3$ sieht jeder Betroffene genau zwei schmutzige Gesichter und erwartet daher, dass diese am 1. Bahnhof aussteigen werden, wie zuvor im Fall $n = 2$ erklärt. Da dies jedoch nicht geschieht, folgert er richtig, das sein Gesicht schmutzig ist, und steigt am 2. Bahnhof aus.

Das Argument setzt sich per Induktion für alle n fort. Dazu muss gelten:
$\mathscr{R}_2$: Jeder kann richtig sehen und logisch schließen, wie oben erklärt.
$\mathscr{R}_3$: Es gilt $\mathscr{R}_2$, und jeder weiß es. $\mathscr{R}_n$: Es gilt $\mathscr{R}_{n-1}$, und jeder weiß es.

Konkretes Beispiel: Alle Betroffenen steigen am sechsten Bahnhof aus. Demnach gibt es genau sieben Personen mit schmutzigem Gesicht.

Der vorgegebene Takt der Bahnhöfe ist wesentlich, damit allen klar ist, wann eine Aktion ausgeführt werden kann oder unterlassen wurde.

Das folgende Rätsel stammt aus *Forschung und Lehre* (5/2019, S. 503):

An der Universität Stuttgart gibt es 17 Professoren (m/w) im Fachbereich Mathematik. Sie treffen sich einmal im Monat bei Sitzungen. Bei einer früheren Sitzung haben sie die Regel eingeführt, dass jeder Professor, der von einem Fehler in einer von ihm selbst publizierten Arbeit erfährt, sein Amt bei der nächsten Sitzung niederlegen muss. Noch nie ist ein Professor zurückgetreten. Das bedeutet aber nicht, dass keiner der Professoren je einen Fehler publiziert hat. Im Gegenteil, […]

Jeder Professor weiß, dass jeder andere Professor schon Fehler gemacht hat, weiß aber nichts von eigenen Fehlern. Eines Tages besucht der Rektor der Universität den Fachbereich und hält eine kleine Ansprache, in der er einen denkwürdigen Satz spricht: „Ich muss Ihnen mitteilen, dass ein Professor unter Ihnen bemerkt hat, dass ein anderer Professor einen Fehler publiziert hat.“ Was passiert als Reaktion auf die Bekanntgabe des Rektors? […] Der Rektor sagt natürlich die Wahrheit. Und alle Professoren sind perfekte Logiker, sowie absolut fehlerfrei bei der Beurteilung, ob ein anderer einen Fehler begangen hat. Zwei Alternativen möchte ich Ihnen anbieten: Antwort 1: […] Nichts passiert. Antwort 2: Recht lange passiert gar nichts. Aber dann, in der 17. Sitzung nach der Rede des Rektors treten alle 17 Professoren zurück.

Zur Antwort 2 wird folgende Erklärung geboten (F&L 5/2019, S. 471):

Was passiert, wenn es unter den 17 Professoren nur einen gäbe, der einen Fehler publiziert hat? Nennen wir ihn schwarzes Schaf. Da er von keinem schwarzen Schaf weiß, muss er aufgrund der Rede des Rektors schließen, dass er selbst ein schwarzes Schaf ist. Also muss er in der 1. Sitzung nach der Rede zurücktreten.

Wie ist es bei zwei schwarzen Schafen A und B? Beide treten in der 1. Sitzung nicht zurück, da zwar jeder weiß, dass der andere ein schwarzes Schaf ist, aber nichts über sich selbst erschließen kann. Doch da B in der 1. Sitzung nicht zurücktritt, muss A schlussfolgern, dass er selbst ein schwarzes Schaf ist. Denn andernfalls hätte B nach der Rede gewusst, dass er ein schwarzes Schaf ist und wäre in der 1. Sitzung zurückgetreten. Also muss A in der 2. Sitzung zurücktreten. B führt denselben Gedankengang durch, und auch er tritt in der 2. Sitzung zurück. […]

So kann man sich bis zur Situation mit 17 schwarzen Schafen vorarbeiten. Alle werden auf der 17. Sitzung zurücktreten. […] Der Rektor hat den Professoren doch Information vermittelt. Offensichtlich gibt es in einer Gruppe verschiedene Formen des Wissens. Jeder kann eine Tatsache T wissen. Zusätzlich kann jeder wissen, dass jeder T weiß. Ferner kann jeder wissen, dass jeder weiß, dass jeder T weiß. Usw.

Aufgabe: Lesen Sie aufmerksam das obige Rätsel. Leider gingen bei der Übertragung dieses Klassikers auf Stuttgarter Mathematiker wesentliche Voraussetzungen verloren. Ist Antwort 1 weiterhin möglich?

Lösung: Hier geht es um gemeinsames Wissen / *common knowledge*.
Nur weil eine Aussage wahr ist, weiß dies noch längst nicht jeder!
Nur weil es jeder weiß, ist es noch kein gemeinsames Wissen!

Die Antwort 2 nutzt Aussage P: *Alle Professoren sind perfekte Logiker und absolut fehlerfrei bei der Beurteilung, ob ein anderer einen Fehler publiziert hat.* Die Gültigkeit der Aussage P allein genügt jedoch nicht, es muss auch jeder wissen, dass P gilt, usw. Denkbar wäre folgendes:

1. Nehmen wir an, jeder Professor ist ein perfekter Logiker und absolut fehlerfrei bei der Beurteilung, ob ein anderer einen Fehler publiziert hat, doch mindestens ein Professor hält manch anderen für fehleranfällig. Die Aussage des Rektors, ein Professor habe eines anderen Fehler entdeckt, lässt ihn daher kalt, denn auf die Meinung dieses Kollegen gibt er nicht viel. Daher scheitert schon der Induktionsanfang.

Zahlreiche weitere Varianten sind denkbar und in der hier angegebenen Formulierung des Rätsels nicht geklärt, weder bejaht noch verneint.

2. Nehmen wir weiterhin P an: Jeder Professor ist ein perfekter Logiker und absolut fehlerfrei bei der Beurteilung, ob ein anderer einen Fehler publiziert hat. Zudem gelte P': Jeder Professor weiß die Tatsache P. Jeder Professor glaubt also an die perfekte Urteilskraft jedes Kollegen. Er weiß allerdings nicht, ob die anderen dies ebenfalls glauben.

Hier gelingt noch der Induktionsanfang: Gibt es nur ein schwarzes Schaf, so erkennt es durch die Aussage des Rektors seinen eigenen Fehler.

Der Schluss von einem auf zwei schwarze Schafe hingegen misslingt. Die beiden schwarzen Schafe A und B treten in der 1. Sitzung nicht zurück. Kann A nun schlussfolgern, dass er ein schwarzes Schaf ist? Leider nein: A kann / muss befürchten, dass B nicht an die perfekte Urteilskraft jedes Kollegen glaubt; die Aussage des Rektors ließe dann B völlig kalt, da B auf die Meinung seiner Kollegen nichts gibt.
Daher scheitert hier der Induktionsschritt von 1 auf 2.

Der unerwartete Abischerz: Wie ist das möglich?

Das folgende Paradox existiert in vielen Varianten, etwa als unerwartete Hinrichtung, `en.wikipedia.org/wiki/Unexpected_hanging_paradox`, oder auch Feueralarmübung oder Klassenarbeit, hier umgedreht als Abischerz.

Darum wachet! Denn ihr wisst weder Tag noch Stunde.
Matthäus 25,13 (Lutherbibel 2017)

Nach einer wahren Begebenheit: Die Abiturient:innen eines Gymnasiums planen ihren Abischerz. Aus Termingründen kommen dafür genau fünf Tage, Montag bis Freitag, in Frage. Die ängstliche Schulleiterin möchte den Termin wissen. Die Schüler:innen verweigern dies mit dem Grund, der Abischerz müsse für die Lehrer:innen vollkommen überraschend sein.

Die Schulleiterin denkt sich daher folgendes: „Der Abischerz kann sicher nicht am Freitag stattfinden, denn das ist der letzte mögliche Termin. Wäre bis Freitag Morgen nichts geschehen, dann wüssten wir, dass der Abischerz an diesem Tag stattfindet. Das wäre nicht überraschend.“

Der unerwartete Abischerz: Wie ist das möglich?

Die Schulleiterin folgert sofort weiter: „Der Abischerz kann auch nicht am Donnerstag stattfinden. Freitag haben wir bereits ausgeschlossen. Wäre bis Donnerstag Morgen nichts geschehen, dann wüssten wir, dass der Abischerz an diesem Tag stattfindet. Das wäre nicht überraschend.“

Ebenso schließt die Schulleiterin Mittwoch, Dienstag und Montag aus und kommt zu dem Schluss: „Es wird gar kein Abischerz stattfinden.“ Alle Lehrer:innen bewundern den logischen Scharfsinn ihrer Rektorin.

Die Abiturient:innen veranstalten ihren Abischerz am Mittwoch. Wie vorhergesagt sind alle Lehrer:innen vollkommen überrascht.

Aufgabe: Alle Argumente scheinen logisch. Was also geht schief?

Lösungsidee: Die Eigenschaft „vollkommen überraschend“ ist kritisch; sie ist nicht präzise definiert und wird daher unterschiedlich interpretiert. Weitere Probleme sind Selbstbezüglichkeit und evtl. Widersprüchlichkeit. Wie das Paradoxon aufzulösen ist, darüber wird anhaltend diskutiert; hierzu gibt es ungefähr so viele Lösungsvorschläge wie Autor:innen.

Der unerwartete Abischerz: Wie ist das möglich?

Es ist sehr wichtig, keine unbewiesenen Annahmen zu treffen,
aber noch wichtiger ist es, keine Worte zu benutzen,
hinter denen sich kein klarer Sinn verbirgt.
William Kingdon Clifford (1845–1879)

Lösung: Wir können das Paradoxon auflösen, indem wir der vagen Formulierung „vollkommen überraschend“ einen präzisen Sinn geben. Hierzu betrachten wir wie zuvor verschiedene Stufen des Wissens:

$\mathscr{R}_0$: Der Abischerz findet höchstens an einem der fünf Tage Mo, Di, Mi, Do, Fr statt. Im Falle vertrödelter Planung gibt es keinen Abischerz.

$\mathscr{R}_1$: Es gilt $\mathscr{R}_0$, die Schulleiterin weiß dies, kann aber am Morgen des Abischerzes nicht sicher vorhersagen, dass er an diesem Tag stattfindet.

$\mathscr{R}_2$: Es gilt $\mathscr{R}_1$, die Schulleiterin weiß dies, kann aber am Morgen des Abischerzes nicht sicher vorhersagen, dass er an diesem Tag stattfindet.

$\mathscr{R}_n$: Es gilt $\mathscr{R}_{n-1}$, die Schulleiterin weiß dies, kann aber am Morgen des Abischerzes nicht sicher vorhersagen, dass er an diesem Tag stattfindet.

Der unerwartete Abischerz: Wie ist das möglich?

Dank Aussage $\mathscr{R}_0$ kann die Schulleiterin den Termin des Abischerzes immerhin auf die fünf fraglichen Tage Mo, Di, Mi, Do, Fr eingrenzen.
Mit $\mathscr{R}_1$ kann sie Fr ausschließen, es bleiben nur Mo, Di, Mi, Do.
Mit $\mathscr{R}_2$ kann sie Fr, Do ausschließen, es bleiben nur Mo, Di, Mi.
Mit $\mathscr{R}_3$ kann sie Fr, Do, Mi ausschließen, es bleiben nur Mo, Di.
Mit $\mathscr{R}_4$ kann sie Fr, Do, Mi, Di ausschließen, es bleibt also nur Mo.
Mit $\mathscr{R}_5$ kann sie alle fünf Tage ausschließen: Es gibt keinen Abischerz.

Die Schulleiterin interpretiert die Aussage „vollkommen überraschend“ im stärksten Sinne als $\mathscr{R}_5$ oder noch höher. Aus dieser starken Annahme folgert sie zurecht, dass es dieses Jahr keinen Abischerz geben kann.

Die Abiturient:innen interpretieren „vollkommen überraschend“ als $\mathscr{R}_1$. Ihr Abischerz am Mittwoch ist so gesehen vollkommen überraschend.

⚠ Unsere Beispiele zeigen eindringlich: In strategischen Situationen sind Wissen und Nichtwissen oft entscheidend, sowohl eigenes als auch gegenseitiges und gemeinsames. Eine sichere Analyse setzt sehr präzise Formulierung voraus und erfordert höchste mathematische Sorgfalt.

Kapitel C

Kombinatorische Spieltheorie und der Satz von Sprague–Grundy

Teach me how to lose a winning match.
Shakespeare, *Romeo and Juliet* 3.2.12

You got to lose to know how to win.
Aerosmith, *Dream On* (1973)

Playing with Chevalley one never won a game. If one had a winning position, Chevalley would sweep the pieces off and start a new game. If one had a losing position, Chevalley insisted that the game be played out.
Richard Bellman (1920–1984), *Eye of the Hurricane* (1984)

Inhalt dieses Kapitels C

Motivation und Überblick

Dynamische Spiele nutzen Positionen / Zustände und Züge / Aktionen:

- Es gibt verschiedene (meist nur endlich viele) Positionen, oft auch eine bestimmte Startposition zu Beginn des Spiels.
- Die Regeln des Spiels legen für jede Position eindeutig fest, welche Züge möglich sind; diese führen zu neuen Positionen.
- Der Zustandsübergang kann deterministisch sein oder randomisiert; der „blinde Zufall“ agiert dann formal als spezieller weiterer Spieler.
- Jede Spieler:in entscheidet sich frei unter den ihr möglichen Zügen und erhält Auszahlungen, sofort während des Spiels oder am Ende.

Ausgehend von dieser allgemeinen Beschreibung haben wir im vorigen Kapitel B Graphen als tragende Grundstruktur erklärt. Zusammen mit weiteren Daten zur Auszahlung konnten wir die Gewinnfunktion über die Bellman–Gleichung definieren und bestimmen. Dies ist zunächst nur für einen Spieler formuliert, doch erlaubt schon eine erstaunliche Vielfalt an Optimierungsfragen. Wir wollen dies auf mehrere Spieler ausdehnen.

Motivation und Überblick

Viele Spiele erfreuen sich zudem **vollständiger Information**:

- Jede Spieler:in kennt das gesamte Spiel: alle möglichen Zustände, Aktionen und Auszahlungen. Diese sind *common knowledge*.
- In jedem aktiven Zustand zieht genau eine der Spieler:innen. Es gibt keine Zufallszüge und keine gleichzeitigen Züge.
- Der ziehende Spieler kennt den Startzustand und alle bisherigen Züge und somit den aktuellen Zustand des Spiels (*total recall*). Insbesondere:
- Es gibt keine verdeckten Züge oder Vergesslichkeit der Spieler; diese raffinierten Erweiterungen diskutieren wir erst später.

Wir wollen vorerst diese einschränkenden Annahmen machen, denn sie erleichtern sowohl die Beschreibung des Spiels als auch seine Analyse. Später werden wir auch diese Beschränkungen nach und nach aufheben.

Viele Spiele werden erst reizvoll durch unvollständige Information und ein gerüttelt Maß Zufall. Sie kennen Beispiele aus den vorigen Kapiteln. Es scheint ratsam, zunächst mit einfachen Bei-Spielen zu beginnen.

Motivation und Überblick

Für **kombinatorische Spiele** vereinfachen wir noch weiter:

1. Es gibt genau zwei Spieler (Links / Rechts, Alice / Bob, etc).
2. Sie spielen um Gewinn 1 oder Verlust 0, keine weiteren Werte.
3. Jede:r der beiden kann beginnen. Gezogen wird abwechselnd.
4. Das Spiel endet, wenn der Ziehende keine Zugmöglichkeit hat.
5. Normale Konvention: Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.
6. Die Spielregeln garantieren, dass jeder Spielverlauf endet.
7. Beide Spieler haben vollständige Information, wie oben erklärt.
8. Insbesondere gibt es hier keine Zufallszüge.

Wir betrachten speziell **neutrale Spiele** [*impartial games*]:

9. In jeder Position x haben beide Spieler dieselben Zugoptionen.

Das Teilspiel ab x ist daher vollkommen symmetrisch in beiden Spielern. Allein die Unterscheidung in ziehend und wartend bricht die Symmetrie. Diese noch vagen Ideen formalisieren wir durch einen Spielgraphen!

Motivation und Überblick

Modellierung: Prüfen Sie diese Eigenschaften für Ihre Lieblingsspiele!

Spiel / Eigenschaft	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nim und Varianten	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Tic-Tac-Toe	✓	✗	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✗
Schach	✓	✗	✓	✗	✗	✓	✓	✓	✗
Backgammon	✓	✗	✓	✗	✗	✓	✓	✗	✗
Schiffe versenken	✓	✓	✓	✗	✗	✓	✗	✓	✗
Poker	?✓	✗	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✗
Monopoly	?✓	?✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Schere-Stein-Papier	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✗	✓	✓

Auch Fußball, Handball, Basketball, etc. sind Spiele. Vereinfacht sind die Mannschaften hier die beiden Spieler. Man spricht zwar von Positionen und Spielzügen, doch ist es schwierig, sie mathematisch zu präzisieren. Dennoch lohnt es; diese Bemühungen sind in letzter Zeit sehr erfogreich.

Motivation und Überblick

Die wichtigste Frage zu einem kombinatorischen Spiel lautet: Welcher der beiden Spieler hat eine **Gewinnstrategie**?

Das heißt ausführlich: Welcher Spieler kann gewinnen, wenn er nur optimal spielt, *egal* wie der Gegner vorgeht?

Dabei darf er sich nicht auf Fehler des Gegners verlassen, sondern muss auf *alle* Gegenstrategien vorbereitet sein.

Eine Position heißt **Gewinnposition**, wenn der ziehende Spieler gewinnt (bei optimalem Spiel). Andernfalls heißt sie **Verlustposition**.

Ein Zug heißt **Gewinnzug**, wenn der ziehende Spieler durch ihn gewinnt (bei weiterhin optimalem Spiel). Andernfalls heißt er **Verlustzug**.

Die **kombinatorische Spieltheorie** [*combinatorial game theory*, CGT] ist ein umfangreiches und aktives Gebiet der Mathematik und Informatik. Ihre Geschichte beginnt 1901 mit der Lösung des Spiels Nim (Satz C1E):

📖 Charles L. Bouton: *Nim, a game with a complete mathematical theory.* Annals of Mathematics 3 (1901) 35–39. `doi.org/10.2307/1967631`

Motivation und Überblick

Nim ist der Prototyp für alle Spiele, die in eine Summe unabhängiger Teilspiele zerfallen. Der Satz C1K von Sprague–Grundy überführt dazu jedes neutrale kombinatorische Spiel in ein äquivalentes Nim-Spiel! Damit lassen sich viele Spiele analysieren und effizient lösen.

📖 Roland P. Sprague: *Über mathematische Kampfspiele.* Tôhoku Math. 41 (1935) 438–444. `www.jstage.jst.go.jp/article/tmj1911/41/0/41_0_438/_pdf`

Roland P. Sprague: *Über zwei Abarten von Nim.* Tôhoku Math. 43 (1937) 451–454. `www.jstage.jst.go.jp/article/tmj1911/43/0/43_0_351/_pdf`

Patrick M. Grundy: *Mathematics and Games.* Eureka 2 (1939) 6–8

Die monumentalen Klassiker WW und ONAG und das Lehrbuch CGT:

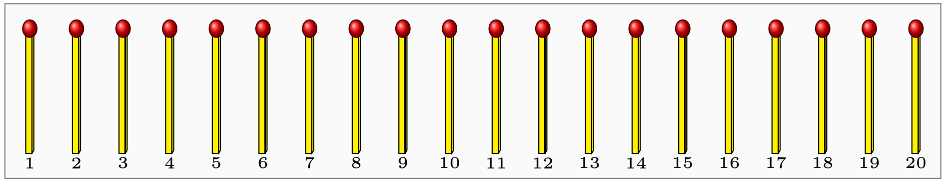
📖 Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy: *Winning Ways for Your Mathematical Plays.* A K Peters 2001-2004 *Gewinnen: Strategien für mathematische Spiele.* Vieweg 1985–1986

John H. Conway: *On Numbers and Games.* A K Peters 2000

Aaron N. Siegel: *Combinatorial Game Theory.* AMS 2013

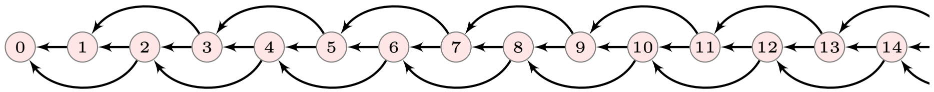
Nimm eins oder zwei!

Auf dem Tisch liegen anfangs $x \in \mathbb{N}$ Streichhölzer, Münzen, Steine, o.ä.



Beide Spieler ziehen abwechselnd, jeder entfernt ein oder zwei Hölzer. Normalspiel / Misèrespiel: Wer nicht mehr ziehen kann, verliert / gewinnt.

Aufgabe: Übersetzen Sie die Spielregeln in einen Spielgraphen. **Lösung:**



☺ Abstraktion ist die Kunst, Wichtiges von Unwichtigem zu trennen. So können wir jedes Spiel knapp und übersichtlich als Graph codieren! Er beantwortet die grundlegenden Fragen zum Spiel und seinen Regeln: Welche Spielstände x gibt es? Welche Aktionen a sind in x möglich?

Nimm eins oder zwei!

Bevor Sie weiterlesen sollten Sie dieses Spiel einige Male durchspielen, am besten realistisch: gegeneinander! In der Vorlesung spielen Sie gegen mich an der Tafel… und langsam entwickeln Sie Ihre eigene Vermutung. Folgen Sie Ihrer natürlichen Neugier: Es macht Freude! So geht Lernen.

Beobachten Sie Ihren Lernprozess von *Whaaa?* über *Aha!* zu *Alles klar!* Anfangs werden Sie vermutlich wenig Struktur erkennen. Mit Erfahrung ahnen Sie gewisse Regelmäßigkeiten. Diese können Sie in den folgenden Aufgaben ausarbeiten und schließlich die allgemeine Regel formulieren.

Am Ende steht ein mathematischer Satz als Extrakt Ihrer Erfahrungen. Diesen können Sie induktiv beweisen und zukünftig getrost anwenden! Diesen mathematischen Reifeprozess *erkennen – beweisen – anwenden* möchte ich mit Ihnen hier zelebrieren, an mehreren Bei-Spielen.

Abstraktion vereinfacht: Der Spielgraph fasst alles wunderbar zusammen. Jede Ecke (Position) ist eine natürliche Zahl $x \in X := \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Jede Kante (Zug) $a = (x, s) : x \to y$ erfüllt $y = x - s$ mit $s \in S = \{1, 2\}$. Dies ist ein einzeiliges Subtraktionsspiel mit Zugoptionen $S = \{1, 2\}$.

Nimm eins oder zwei! – Wer gewinnt und wie?

Aufgabe: Berechnen Sie für jede Position $x \in X$ Gewinn 1 oder Verlust 0.
Misèrespiel, $\mu : X \to \{0, 1\}$: Wer nicht mehr ziehen kann, gewinnt.
Normalspiel, $\nu : X \to \{0, 1\}$: Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

$$\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \partial X \text{, sonst} \\ 1 - \min\{\, \nu(y) \mid x \to y \,\}. \end{cases}$$

☺ Wohldefiniert dank noetherscher Rekursion auf artinschen Graphen!
Noch informativer als ν erweist sich die **Sprague–Grundy–Funktion**:

$$\begin{aligned} \gamma &: X \to \mathbb{N} : \gamma(x) = \operatorname{mex}\{\, \gamma(y) \mid x \to y \,\}, \\ \operatorname{mex} &: \{\, S \subsetneq \mathbb{N} \,\} \to \mathbb{N} : S \mapsto \min(\mathbb{N} \smallsetminus S). \end{aligned}$$

☺ Zu jeder echten Teilmenge $S \subsetneq \mathbb{N}$ definieren wir $\operatorname{mex} S := \min(\mathbb{N} \smallsetminus S)$ als das Minimum des Komplements [engl. *minimal excludant*, kurz *mex*], also die kleinste natürliche Zahl, die nicht in der Menge S enthalten ist.
Beispiele: $\operatorname{mex}\{0, 1, 3, 5\} = 2$, $\operatorname{mex}\{0\} = 1$, $\operatorname{mex}\{1, 2, 3\} = 0$, $\operatorname{mex}\{\,\} = 0$.

Nimm eins oder zwei! – Wer gewinnt und wie?

Die Sprague–Grundy–Funktion γ erweist sich als Hauptakteurin dieser Theorie, ihre Bedeutung erschließt sich allerdings erst nach Satz C1K.

Vorrangig interessiert uns zunächst die Gewinnfunktion $\nu : X \to \{0, 1\}$. Sie sagt zu jeder Spielposition $x \in X$, ob wir in einer Verlustposition mit $\nu(x) = 0$ sind oder aber in einer Gewinnposition mit $\nu(x) = 1$. Genauer:
(0) Aus $x \in X$ mit $\nu(x) = 0$ führt jeder Zug $x \to y$ zu $\nu(y) = 1$.
(1) Aus $x \in X$ mit $\nu(x) = 1$ führt ein Zug $x \to y$ zu $\nu(y) = 0$.

Wir werden bald sehen, dass die Sprague–Grundy–Funktion $\gamma : X \to \mathbb{N}$ noch nützlicher ist als ν. Satz C1D erklärt den genauen Zusammenhang:

$$\nu(x) = \gamma(x) \wedge 1 = \begin{cases} 0 & \text{falls } \gamma(x) = 0 \text{ (Verlust),} \\ 1 & \text{falls } \gamma(x) \geq 1 \text{ (Gewinn).} \end{cases}$$

Anschaulich zeigt $\gamma(x) \geq 1$ verschiedene Stufen von Gewinnpositionen.

Das Misèrespiel nenne ich hier zum Kontrast und als Variante zum Üben. Seine Theorie ist ganz anders, wesentlich mühsamer und weniger schön. In der Vorlesung gehe ich daher nicht genauer auf $\mu : X \to \{0, 1\}$ ein, doch hier in den Erläuterungen biete ich es Ihnen zur Ergänzung.

Nimm eins oder zwei! – naiv implementiert

Lösung: (0) Wir berechnen $\mu, \nu : X \to \{0,1\}$ rekursiv gemäß Definition:

```
def mu(x):
    if x == 0: return 1   # Wer nicht mehr ziehen kann, gewinnt.
    return 1 - min( mu(y) for y in range(x-2, x) if y >= 0 )
```

```
def nu(x):
    if x == 0: return 0   # Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.
    return 1 - min( nu(y) for y in range(x-2, x) if y >= 0 )
```

Analyse: (a) Was ist gut / schlecht an dieser Implementierung?
(b) Bestimmen Sie die Anzahl $f(x)$ der Funktionsaufrufe!

Antwort: (b) Wir finden $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ sowie für alle $x \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ rekursiv $f(x) = f(x-1) + f(x-2)$. Dies ist die Fibonacci–Folge!

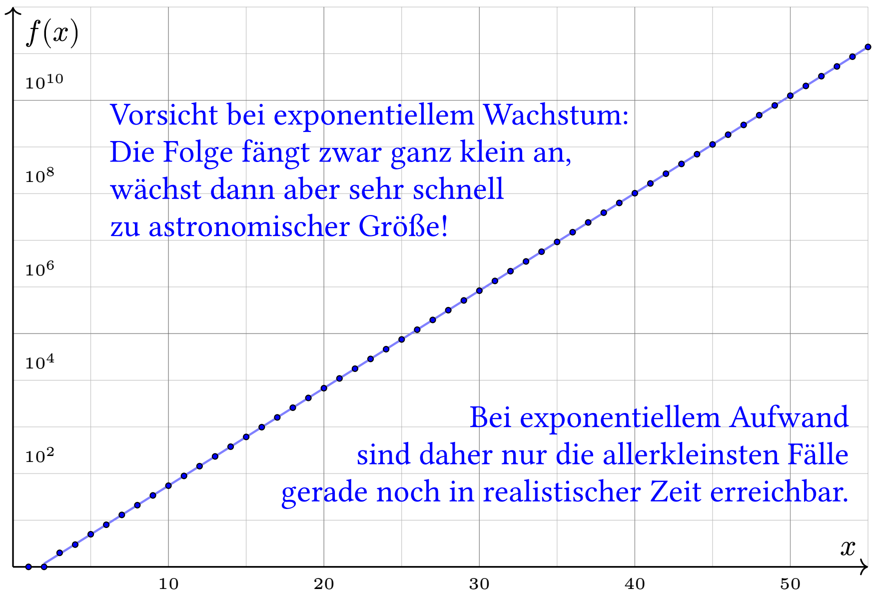
(a) Der Aufwand wächst exponentiell! Explizit gilt die Binet–Formel:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right] \gtrapprox 0.447 \cdot 1.618^x$$

Übung: Beweisen Sie die Binet–Formel durch Induktion über $x \in \mathbb{N}$.

Nimm eins oder zwei! – naiv implementiert

Die Fibonacci–Folge in logarithmischer Darstellung:



Nimm eins oder zwei! – naiv implementiert

(0) Die Funktionen `min` und `max` bietet Python bereits standardmäßig, im Gegensatz dazu müssen wir die Funktion `mex` selbst programmieren:

```
def mex(theSet):          # mex = minimal excludant
    m = 0
    while m in theSet: m += 1
    return m
```

Damit implementieren wir die Sprague–Grundy–Funktion $\gamma : X \to \mathbb{N}$ ebenso leicht (und naiv) wie zuvor die Gewinnfunktion $\nu : X \to \{0,1\}$:

```
def gamma(x):             # Die Sprague-Grundy-Funktion
    return mex({ gamma(y) for y in range(x-2, x) if y >= 0 })
for x in range(0, 101):   # Probieren ergänzt Studieren!
    print( x, gamma(x) )  # Es gibt eine Überraschung...
```

Probe: Ist die Berechnung korrekt? Berechnen Sie kleine Beispiele, von Hand und mit Python, und vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.

Aufwand: Ist die Berechnung schnell genug? Probieren Sie es selbst aus! Bis $x \approx 30$ geht es noch recht flott, dann nur noch quälend langsam.

Nimm eins oder zwei! – clever memoisiert

Wir merken uns, was wir berechnet haben, und recyclen es! Diese genial-einfache Idee heißt **Memoisation**, abgeleitet von lat. **Memorandum**, kurz **Memo**, *das zu Erinnernde.*

(1) In Python können wir Memoisation elegant wie folgt implementieren:

```
def memoize(f):             # Memoisation einer Funktion f
    memo = {}               # Liste aller vorigen Berechnungen
    def wrapper(x):         # Wir verpacken f in eine Hilfsfunktion.
        if x not in memo: memo[x] = f(x) # Berechnen und speichern
        return memo[x]      # Jeder Wert wird nur einmal berechnet.
    return wrapper          # Nur wrapper ist von außen sichtbar.
@memoize
def gamma(x):               # Die Sprague-Grundy-Funktion
    return mex({ gamma(y) for y in range(x-2, x) if y >= 0 })
```

☺ Naive Rekursion ist zwar korrekt, aber allzu verschwenderisch. Nachhaltige Buchführung reduziert den Rechenaufwand erheblich!

☺ In diesem Beispiel ist die Rechenzeit für γ nur noch linear in x. Probieren Sie es aus: vorher noch quälend langsam, nun blitzschnell!

Nimm eins oder zwei! – mathematisch optimiert

Lösung: (1) Wir rechnen rekursiv, geschickt sortiert *bottom-up*:

$x=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\mu=$	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1
$\nu=$	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
$\gamma=$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Ebenso gut gelingt der rekursive Ansatz *top-down* mit Memoisation.
(2) Wie lautet die allgemeine Regel? Wir krönen unsere Bemühungen:

Satz C1A: einzeiliges Nim mit Zugoptionen $S = \{1, 2, \dots, n-1\}$, $n \geq 2$

Misèrespiel: Genau dann ist x eine Verlustposition, wenn $x \operatorname{rem} n = 1$.
Normalspiel: Genau dann ist x eine Verlustposition, wenn $x \operatorname{rem} n = 0$.
Die Sprague–Grundy–Funktion des Spiels ist $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto x \operatorname{rem} n$.

☺ So erkennen und nutzen Sie Gewinnpositionen, wunderbar effizient. Genial! Das ist Mathematik: (1) erkennen, (2) beweisen, (3) anwenden.

▶ Als mechanischer Computer erklärt von Matt Parker aka Stand-up Maths: *The Unbeatable Game from the 60s: Dr NIM.* `youtu.be/9KABcmczPdg`

Nimm eins oder zwei! – mathematisch optimiert

Aufgabe: (2) Beweisen Sie diesen Satz per Induktion über $x \in \mathbb{N}$.

Lösung: (2a) Induktionsanfang: Zunächst gilt $\mu(0) = 1$ nach Misèreregel. Es folgt $\mu(1) = 0$, da nur der Zug $1 \to 0$ möglich ist; der Gegner gewinnt. Induktionsschritt: Sei $x \geq 2$ und die Aussage zu $\mu(y)$ gelte für alle $y < x$. Zu $x \operatorname{rem} n \neq 1$ existiert ein Zug $x \to y$ mit $x - y \in S$ und $y \operatorname{rem} n = 1$, also $\mu(y) = 0$; dieser Gewinnzug garantiert $\mu(x) = 1$. Von $x \operatorname{rem} n = 1$ führen alle Züge $x \to y$ mit $x - y \in S$ zu $y \operatorname{rem} n \neq 1$, also $\mu(y) = 1$.

(2b) Induktionsanfang: Zunächst gilt $\nu(0) = 0$ nach Normalspielregel. Induktionsschritt: Sei $x \geq 1$ und die Aussage zu $\nu(y)$ gelte für alle $y < x$. Zu $x \operatorname{rem} n \neq 0$ existiert ein Zug $x \to y$ mit $x - y \in S$ und $y \operatorname{rem} n = 0$, also $\nu(y) = 0$; dieser Gewinnzug garantiert $\nu(x) = 1$. Von $x \operatorname{rem} n = 0$ führen alle Züge $x \to y$ mit $x - y \in S$ zu $y \operatorname{rem} n \neq 0$, also $\nu(y) = 1$.

(2c) Sei $x \in \mathbb{N}$ und $r = x \operatorname{rem} n$. Wir zeigen $\gamma(x) = r$.
Induktionsvoraussetzung: Für alle $y < x$ gelte $\gamma(y) = y \operatorname{rem} n$.
Für $x < n$ gilt $r = x$ und wir finden $\gamma(x) = \operatorname{mex}\{0, \dots, r-1\} = r$.
Für $x \geq n$ gilt ebenso $\gamma(x) = \operatorname{mex}\{0, \dots, r-1, r+1, \dots, n-1\} = r$. $\boxed{\text{QED}}$

Nimm eins oder zwei! – mathematisch optimiert

☺ Die **Dynamische Programmierung** [*Dynamic Programming*, DP] ist ein Werkzeugkasten zur Optimierung rekursiver Berechnungen. Eine systematische Darstellung finden Sie in dem populären Lehrbuch 📖 Cormen, Stein, Leiserson, Rivest: *Introduction to Algorithms*, §15. Oben haben wir zwei komplementäre Implementierungen gesehen:

Top-down mit Memoisation: Wir formulieren unsere Funktion rekursiv und speichern das Ergebnis jedes gelösten Teilproblems, etwa in einem assoziativen Array [*map*, *dictionary*] oder einer Tabelle [*hash table*].

Bottom-up topologisch sortiert: Jedes Teilproblem nutzt jeweils nur kleinere, bereits gelöste. Beide Formulierungen leisten meist dasselbe; Einsparungen entstehen, wenn top-down große Lücken überspringt.

☺ Idealerweise können Algorithmen mit exponentiellem Aufwand so auf polynomiellen Aufwand reduziert werden, wie in unserem Beispiel: Unsere Lösung ist zunächst exponentiell in x, dann polynomiell in x, hier sogar linear in x, dank Satz C1A schließlich sogar nur logarithmisch in x. Das natürliche **Komplexitätsmaß** ist hier die Bitlänge $\operatorname{len}(x) \sim \log_2(x)$.

Nimm eins oder zwei! – mathematisch optimiert

☹ **Rekursion** hat unter Anfänger:innen meist einen schlechten Ruf: Zuerst sind Denkweise und Progammiertechnik recht anspruchsvoll. Ist diese Hürde genommen, so folgt gleich die größe Ernüchterung: Naive Implementierung führt meist zu exponentiellem Aufwand. Im Jobinterview machen Sie damit allein keinen guten Eindruck. „Never hire a developer who computes the factorial using recursion."

☺ Rekursion entfaltet ihre wahre Kraft erst durch raffiniert-effiziente Implementierung: Die genial-einfache Idee hierzu heißt **Memoisation**, das geschickte Speichern der zuvor berechneten Zwischenergebnisse. Im vorliegenden Falle vollendet Satz C1A unsere Lösung durch eine weitere dramatische Optimierung: Die Berechnung von $x \operatorname{rem} n$ benötigt nur noch logarithmischen Aufwand, gemäß Bitlänge $\operatorname{len}(x) \sim \log_2(x)$.

☺ Sie ist zudem so einfach, dass wir sie im Kopf ausführen können! Das spüren Sie deutlich, wenn Sie dieses Spiel gegeneinander spielen. Diesen Vorteil nutze ich natürlich, wenn ich erstmals gegen Sie spiele. Beobachten Sie Ihren Lernprozess von *Whaaa?* über *Aha!* zu *Alles klar!*

Rekursion und dynamische Programmierung

Aufgabe: Untersuchen Sie ebenso einzeiliges Nim mit den Zugoptionen (3) $S = \{1, 2, 4\}$ und (4) $S = \{1, 3, 4\}$ und (5) $S = \{1, 3, 6\}$. **Lösung:**

$x=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\mu=$	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1
$\nu=$	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
$\gamma=$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

$x=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\mu=$	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
$\nu=$	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
$\gamma=$	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0	1	2	3	2

$x=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\mu=$	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
$\nu=$	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
$\gamma=$	0	1	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0

Rekursion und dynamische Programmierung

Aufgabe: Wir betrachten weiterhin einzeiliges Nim, nun jedoch mit den Zugoptionen $S = \{1, 4, 5, 7\}$. Schreiben Sie ein Python-Skript zur Berechnung von $\mu(x), \nu(x), \gamma(x)$ für $x = 0, \dots, 100$. Gelingt Ihnen diese Berechnung schnell genug? mit nur linearem Zeitaufwand?

Lösung: Für den Bereich $x = 0, \dots, 100$ genügt die naiv-rekursive Implementierung nicht. Wir nutzen daher unsere Kenntnisse zur Memoisierung, hier *bottom-up* durch den Aufbau einer Wertetabelle:

```
S = { 1, 4, 5, 7 }        # die vorgegebenen Zugoptionen
Mu = { 0: 1 }             # Startwert für das Misèrespiel
Nu = { 0: 0 }             # Startwert für das Normalspiel
Gamma = { 0: 0 }          # Startwert für Sprague-Grundy
for n in range(1, 101):
    Mu[n] =    1 - min( Mu[n-s] for s in S if s <= n )
    Nu[n] =    1 - min( Nu[n-s] for s in S if s <= n )
    Gamma[n] = mex({ Gamma[n-s] for s in S if s <= n })
```

Übung: Sie können nun nach Mustern suchen, speziell nach periodischer Wiederholung, dies als Vermutung formulieren und dann beweisen.

Rekursion und dynamische Programmierung

Richard Bellman (1920–1984) war ein US-amerikanischer Mathematiker. Er entwickelte 1953 die Kernidee der **Dynamischen Programmierung** zur algorithmischen Lösung von Optimierungsproblemen durch Zerlegung in Teilprobleme und systematische Speicherung von Zwischenergebnissen.

Ökonomen bezeichnen die Dynamische Programmierung schlicht als **Rekursionsmethode**. Sie tritt bei zahlreichen Optimierungsproblemen natürlich auf und wird gerne und erfolgreich angewendet. Sie ist daher ein beliebtes Universalwerkzeug der Wirtschaftswissenschaften.

Idealerweise entspringt die Rekursion unmittelbar der ökonomischen Fragestellung. In vereinfachter Form findet sie sich daher bereits bei Ernst Zermelo 1913 zu Schach sowie allgemein bei John von Neumann und Oskar Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, 1944.

Die Dynamische Programmierung ist in der Informatik eine universelle Strategie, um Probleme rekursiv zu lösen. Zur gewünschten Funktion muss eine geeignete Rekursionsstruktur aber erst gefunden werden. Diese Kunst erfordert sowohl Erfahrung als auch Kreativität.

Rekursion und dynamische Programmierung

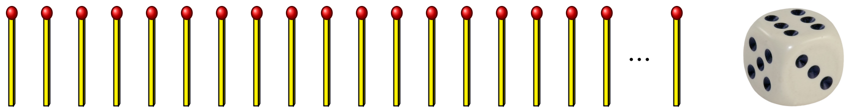
Rekursion und Dynamische Programmierung sind universell anwendbar und in zahlreichen Anwendungen nützlich. Deshalb lernen Sie diese wunderbaren Techniken, sobald Sie sich mit Programmierung im Allgemeinen oder mit Optimierung im Speziellen beschäftigen.

Darüber hinaus zeigt das obige Beispiel eine weitere wichtige Technik: Wenn wir ein Muster erkennen, können wir es als eine Vermutung formulieren und womöglich als einen allgemeinen Satz beweisen. Wenn dies gelingt, so ist es meist noch wesentlich effizienter.

Idealerweise wünschen wir uns die Lösung des gestellten Problems nicht als Programm (für Computer), sondern als eine geschlossene Formel (für Menschen). Dieser Unterschied in der Form ist jedoch nur oberflächlich, eigentlich gemeint ist: eine möglichst einfache und effiziente Lösung.

Wenn Sie eine geschlossene Formel *vermuten*, wie im obigen Beispiel $\gamma(x) = x \operatorname{rem} n$, dann wollen Sie diese für alle Fälle $x \in X$ *beweisen*. Deshalb lernen Sie die wunderbare Technik der vollständigen Induktion Beide Techniken ergänzen sich und arbeiten wunderbar zusammen!

Streichhölzer und Würfel



Aufgabe: Auf dem Tisch liegen $n = 5000$ Streichhölzer und ein Würfel mit der Augenzahl $a \in \{1, \dots, 6\}$; gegenüberliegende addieren sich zu 7. Alice und Bob ziehen abwechselnd, Alice beginnt: Wer am Zug ist, kippt den Würfel über eine Kante seiner Wahl zu einer neuen Augenzahl b und entfernt b Streichhölzer. Wer keinen solchen Zug mehr ausführen kann, hat verloren. Bei welcher Augenzahl kann Alice ihren Sieg erzwingen?

Anleitung: Zu $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \{1, \dots, 6\}$ setzen wir $u(n, a) = 1$, falls die ziehende Spieler:in ihren Sieg erzwingen kann, andernfalls $u(n, a) = 0$.
(1) Berechnen Sie $u(n, a)$ für $n = 0, 1, \dots, 16$.
(2) Setzen Sie das Muster fort bis $n = 5000$.
(3) Alternativ: Schreiben Sie ein Programm.

BWM 2022, Runde 2, Aufgabe 2, `www.mathe-wettbewerbe.de/aufgaben`
DorFuchs `youtu.be/nG1NlEjXeKA`: schön und enthusiastisch erklärt.

Streichhölzer und Würfel

Lösung: Wir berechnen die Gewinnfunktion $u(n, a)$ rekursiv:

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	…	5000
$a = 1$	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1		1
2	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1		0
3	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1		1
4	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1		1
5	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1		0
6	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1		1

Dies wiederholt sich ab Spalte 2 alle 9 Schritte, also $u(5000, a) = u(5, a)$.
Bei $a \in \{1, 3, 4, 6\}$ kann Alice ihren Sieg erzwingen, bei $a \in \{2, 5\}$ Bob.
Die Tabelle können Sie selbst erstellen und prüfen. Alternativ in Python:

```python
u = [ [1,1,1,1,1,1] for i in range(23) ];
for i in range(6,23):  # Index i = n+6 mit n = Anzahl der Streichhölzer
    for j in range(6): # Index j = a-1 mit a = Augenzahl des Würfels
        u[i][j] = 1 - min(u[i-1-k][k] for k in range(6) if k != j and k != 5-j)
```

Streichhölzer und Tetraeder

Bei kombinatorischen Spielen drängt sich die rekursive Lösung auf. Das illustriert wunderbar die Technik der Rekursion bzw. Induktion: Sie ist elegant und effizient darzustellen und leicht nachzuvollziehen.

Aufgabe: Ebenso für einen Tetraeder mit Augenzahlen $a \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Lösung: Wir berechnen die Gewinnfunktion $u(n, a)$ rekursiv:

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…	5000
$a = 1$	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1		0
2	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1		0
3	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0		0
4	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1		0

Dies wiederholt sich ab Spalte 0 alle 10 Schritte, also $u(5000, a) = u(0, a)$.
Das bedeutet: Wenn Bob fehlerfrei spielt, kann er seinen Sieg erzwingen.

```python
u = [ [1,1,1,1] for i in range(18) ];
for i in range(4,18):  # Index i = n+4 mit n = Anzahl der Streichhölzer
    for j in range(4): # Index j = a-1 mit a = Augenzahl des Tetraeders
        u[i][j] = 1 - min(u[i-1-k][k] for k in range(4) if k != j)
```

Streichhölzer und Tetraeder

Ist es klar, dass die Tabelle schließlich periodisch werden muss? Ja! Wir schauen immer nur endlich viele Schritte zurück (hier 6 bzw. 4), und dabei sind jeweils nur endlich viele Konfigurationen möglich. Irgendwann muss sich die Konfiguration also wiederholen… und fortan die gesamte weitere Tabelle. Das verhilft uns zur effizienten Rechnung.

Wie lang jedoch die Vor/Periode ist, lässt sich nicht leicht vorhersagen, sondern am besten durch explizite Rechnung bestimmen, so wie oben. Die Periode erweist sich hierbei als erfreulich kurz, dadurch bleibt der Rechenaufwand gering. Das spüren Sie, wenn Sie per Hand rechnen!

In der obigen Lösung habe ich die Tabelle jeweils so weit angegeben, bis die Periode sichtbar wird. Bei der Handrechnung würden Sie das Muster erkennen und die (etwas mühsame) Rechnung sofort einstellen. Der Computer verleitet hingegen dazu, einfach blind weiter zu rechnen.

Am besten kombinieren Sie beide Ansätze, Stift&Papier vs Computer: Sie ergänzen sich bestens und dienen zur gegenseitigen Überprüfung. So verbinden Sie die routinierte Methode mit kreativen Lösungen.

Wie teilen Bonnie und Clyde ihre Beute?

Auf dem Tisch liegt die Beute von $n \in \mathbb{N}$ Münzen, davon nimmt Bonnie $b \in \{1, 2, 4\}$ Münzen weg, dann nimmt Clyde $c \in \{1, 3, 4\}$ Münzen weg, und dann abwechselnd immer so weiter. Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

Bonnie and Clyde (1967), Warner Bros

Aufgabe: Wer von den beiden kann durch fehlerfreies Spiel gewinnen?

Lösung: Wir berechnen den Gewinn rekursiv:

Ab $n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	2025
B beginnt	C	B	B	B	B	C	B	B	B	B	…	C
C beginnt	B	C	B	C	C	B	C	B	C	C	…	B

Zunächst berechnen wir die Tabelle für $n = 0, \dots, 9$ nach obigen Regeln. Daran erkennen wir das Muster: Alle weiteren Werte haben Periode 5. Die so gefundene Aussage können wir per Induktion leicht beweisen. 🙂 Damit können wir das Ergebnis für jedes $n \in \mathbb{N}$ effizient berechnen!

Wie teilen Bonnie und Clyde ihre Beute?

So berechnen wir die obige Tabelle in Python:

```python
Bop = { 1, 2, 4}; Bnu = { 0: 0 } # Bonnies Zugoptionen und Gewinn im Normalspiel
Cop = { 1, 3, 4}; Cnu = { 0: 0 } # Clydes  Zugoptionen und Gewinn im Normalspiel
for n in range(1, 20):
    Bnu[n] = 1 - min( Cnu[n-b] for b in Bop if b <= n ) # kreuzweise Minimierung
    Cnu[n] = 1 - min( Bnu[n-c] for c in Cop if c <= n ) # kreuzweise Minimierung
print( *['B' if Bnu[n] == 1 else 'C' for n in range(0, 20)], sep=' ', end='\n' )
print( *['C' if Cnu[n] == 1 else 'B' for n in range(0, 20)], sep=' ', end='\n' )
```

Die vorigen kombinatorischen Spiele waren **symmetrisch** aka **neutral** [*impartial games*]: Die Regeln sind für beide Spieler:innen dieselben. Die Symmetrie wird lediglich dadurch gebrochen, dass die eine zieht und der andere wartet; anschließend wechselt nur dieser temporäre Status.

Für Bonnie und Clyde sind die Spielregeln nun nicht mehr symmetrisch, das Spiel ist also nicht mehr neutral, sondern **parteiisch** [*partizan game*]: Bonnie mit $b \in \{1, 2, 4\}$ und Clyde mit $c \in \{1, 3, 4\}$ haben *verschiedene* Zugmöglichkeiten, jeweils spezifisch für diese eine Spieler:in.

Rekursion vs Induktion

Dynamische Programmierung
= Rekursion + Memoisation

Allgemeines Muster + Induktion
= effiziente Lösungsformel

Die vorigen Beispiele zeigen eindrücklich den erfolgreichen Dreischritt:
1. Die geschickte Rekursion löst das gestellte Problem *effektiv*.
2. Die Memoisation macht die rekursive Rechnung *effizient*.
3. Induktiv bewiesene Muster *trivialisieren* das Problem.

Rekursion 1 und Memoisation 2 lassen sich meist wunderbar mit einem Computer ausführen, für kleine Probleme auch noch mit Stift und Papier. Aus diesen Daten lässt sich in günstigen Fällen ein allgemeines Muster 3 destillieren; diese Aussage können wir dann induktiv beweisen. Ideal!

Rekursion vs Induktion

🙂 Sie sehen hier wunderbar das Zusammenspiel beider Techniken, vermutlich klarer und realistischer als je zuvor im Mathestudium: Per Rekursion konstruieren / berechnen wir noch unbekannte Werte. Per Induktion beweisen / überprüfen wir eine vorgelegte Aussage.

Die Induktion sagt uns, wie wir eine Vermutung *beweisen* können, jedoch nicht, wie wir mögliche Vermutungen überhaupt erst *finden*. In den obigen Anwendungen hilft uns die Rekursion: So berechnen wir die ersten Beispiele und suchen / finden / vermuten damit ein Muster.

Induktion ist im Wesentlichen nicht stumpfsinniges, formales Rechnen, sondern eine filigrane Kunst. Probieren Sie selbst, Sie werden es erleben! Die Formulierung der induktiv zu zeigenden Behauptung ist wesentlicher Teil der Aufgabe. Das erfordert Geschick, Kreativität und Erfahrung!

Lassen Sie sich nicht davon einlullen, dass viele Lehrbücher die ersten Induktionsaufgaben meist stereotyp als langweiligen Drill formulieren. Das ist selbstverständlich sinnvoll und hilfreich für die ersten Schritte, aber kein realistisches Vorbild für selbständige mathematische Arbeit.

Definition C1B: neutrales Spiel

Ein **neutrales Spiel** (G, v) mit konstanter Summe $c \in \mathbb{R}$ besteht aus einem artinschen Graphen $G = (X, A, \sigma, \tau)$ mit Auszahlung $v : \partial X \to \bar{\mathbb{R}}$.

Beide Spieler ziehen abwechselnd gemäß den Kanten A des Graphen. Allein die Unterscheidung in ziehend und wartend bricht die Symmetrie. In jedem terminalen Zustand $x \in \partial X$ erhält der Ziehende schließlich die Auszahlung $v(x)$ und der Wartende das Komplement $c - v(x)$. Was ist die Auszahlung des Ziehenden bei optimalem Spiel?

Satz C1B: Gewinnfunktion durch Rückwärtsinduktion

Dazu existiert genau eine **Gewinnfunktion** $u : X \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $u|_{\partial X} = v$ und

$$\boxed{u(x) \overset{!}{=} \sup_{x \to y}[c - u(y)] = c - \inf_{x \to y} u(y)}$$

Eine **Lösung** oder **optimale Strategie** s ordnet jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ eine optimale Aktion $s(x) = a : x \to y$ mit $u(x) = c - u(y)$ zu.

Übung: Beweisen Sie Existenz und Eindeutigkeit der Gewinnfunktion u.

🙂 Die Beweisidee ist anschaulich klar und aus Beispielen vertraut: Wir beweisen Existenz durch Rekursion, Eindeutigkeit durch Induktion. Allerdings ist nicht offensichtlich, worüber hier induziert werden soll… Versuchen Sie es zunächst selbst als Fingerübung, dann hilft Satz B1L.

Bemerkung: Formal ist die Max-Min-Bedingung die Bellman–Gleichung mit konstanter sofortiger Belohnung $r(a) = c$ und Diskontfaktor $\delta = -1$. Diese Parameterwahl codiert unser Modell der konstanten Summe c.

Der Diskontfaktor $\delta \in [0, 1]$ beschreibt den schrittweisen **Wertverlust**, zum Beispiel durch Inflation, Abbruchrisiko oder allgemein Ungeduld.

Der Faktor $\delta = -1$ codiert die schrittweise **Wertumkehr** wie in C1B: Beide Spieler verfolgen dasselbe Ziel, mit umgekehrten Vorzeichen.

🙂 Diese simple Beobachtung ist zunächst nur eine formale Analogie, doch sie dient zur Wiederverwendung der Techniken aus Kapitel B. Damit folgt der obige Satz C1B aus dem bereits bewiesenen Satz B1L.

Ein **Nullsummenspiel** ist ein Spiel (G, v) mit konstanter Summe $c = 0$. Jede Spieler:in trachtet, wie immer, ihren eigenen Gewinn zu maximieren; hier ist dies äquivalent dazu, den Gewinn ihres Gegners zu minimieren. Solche Spiele sind strikt kompetitiv, sie erlauben keine Kooperation.

Spiele mit konstanter Summe $c \in \mathbb{R}$ sind flexibler in der Formulierung. Allgemein: Was die eine Spieler:in gewinnt, geht dem anderen verloren. Sie sind äquivalent zu Nullsummenspielen durch Translation:

Übung: Sei (G, v) ein neutrales Spiel mit konstanter Summe $c \in \mathbb{R}$ und Gewinnfunktion u. Sei $\tilde{v} = \lambda v + \kappa$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\kappa \in \mathbb{R}$. Dann ist $(G, \tilde{v})$ ebenfalls ein neutrales Spiel mit konstanter Summe $\tilde{c} = \lambda c + 2\kappa$ und Gewinnfunktionen $\tilde{u} = \lambda u + \kappa$. Speziell für $(\lambda, \kappa) = (2, -c)$ folgt $\tilde{c} = 0$.

Beispiele: Bei kombinatorischen Spielen nutzen wir im Folgenden die Auszahlungen $0 =$ *Verlust* und $1 =$ *Gewinn* mit konstanter Summe $c = 1$. Ebenso möglich wäre $-1 =$ *Verlust* und $+1 =$ *Gewinn* mit Summe $c = 0$. In manchen Spielen, wie Schach, ist auch ein $0 =$ *Unentschieden* möglich.

Bemerkung: Wir können alle Aktionen mit gemeinsamem Start und Ziel zusammenfassen, da es keine sofortigen Belohnungen gibt, sondern nur die terminale Auszahlung $v : \partial X \to \bar{\mathbb{R}}$, auf die wir alles ausrichten.

Für jedes neutrale Spiel (G, v) genügt also ein **einfacher Graph** G: Von jedem Start $x \in X$ zu jedem Ziel $y \in X$ existiert höchstens eine Kante, die Randabbildung $\partial = (\sigma, \tau) : A \to X \times X$ ist somit injektiv.

Satz C1B garantiert Eindeutigkeit und Existenz der Gewinnfunktion $u : X \to \bar{\mathbb{R}}$. In vielen Anwendungen ist der Graph zudem lokal-endlich, das heißt: Jeder Zustand $x \in X$ erlaubt nur endlich viele Aktionen.

Für jeden lokal-endlichen Graphen wird das Maximum/Minimum jeweils angenommen: Es existiert also (mindestens) eine optimale Strategie. Diese explizit zu berechnen, kann jedoch beliebig komplex sein.

Genau darum geht es uns im Folgenden: Wenn wir das Spiel gewinnen wollen, dann müssen wir eine Gewinnstrategie nicht nur prinzipiell berechnen können, sondern möglichst effizient!

Was ist eine effiziente Lösung?

Definition C1c: Lösung, allgemein und polynomiell

Sei (G, v) ein neutrales Spiel mit Summe $c \in \mathbb{R}$ und der Gewinnfunktion $u : X \to \bar{\mathbb{R}}$, also $u|_{\partial X} = v$ und $u(x) = \sup_{x \to y}[c - u(y)]$ für alle $x \in X^\circ$.

Eine **Lösung** oder **optimale Strategie** s ordnet jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ eine optimale Aktion $s(x) = a : x \to y$ mit $u(x) = c - u(y)$ zu.

Unter einer **polynomiellen Lösung** verstehen wir einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit, der eine optimale Aktion $x \mapsto a$ berechnet.

Beispiel: Die Eingabe einer natürlichen Zahl messen wir in Bitlänge:

$$\operatorname{len} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto \min\{\ell \in \mathbb{N} \mid a < 2^\ell\}$$

Wir betrachten einzeiliges Nim mit Aktionen $a \in S = \{1, 2, \dots, n-1\}$: Zu jedem Zustand $x \in \mathbb{N}$ erfordert die memoisierte Rekursion x Schritte, ist also *exponentiell* in $\operatorname{len}(x)$. Satz C1A bietet eine *polynomielle* Lösung: Es genügt $a = x \operatorname{rem} n$ zu berechnen. **Übung:** Führen Sie dies sorgsam aus! Warum ist der Zeitaufwand bei festem n höchstens linear in $\operatorname{len}(x)$?

Was ist eine effiziente Lösung?

Ist der Graph G **lokal-endlich und artinsch**, so existiert eine Lösung: Die Rückwärtsinduktion C1B konstruiert eine optimale Strategie $x \mapsto a$. Oft erfordert das exponentiellen Aufwand. *Ain't nobody got time for that!*

Was bedeutet das genau? Wie messen wir Komplexität und Aufwand? Zustände und Aktionen seien codiert durch $X, A \hookrightarrow \{0, 1, |, (,), \dots\}^{(\mathbb{N})}$. Wir messen die Komplexität $\operatorname{len}(x)$ als Länge über diesem Alphabet. Im binären Falle, wie oben erklärt, messen wir die Länge in Bits.

Ein vorgelegter **Algorithmus** zur Berechnung einer Strategie $s : x \mapsto a$ hat zur Eingabe x eine gewisse Laufzeit $T(x) \in \mathbb{R}_{\ge 0}$, etwa gemessen in Sekunden oder Taktzyklen. Gilt $T(x) \le c_0 + c_1 \operatorname{len}(x)^\alpha$ mit Konstanten $c_0, c_1, \alpha \in \mathbb{R}_{\ge 0}$, so ist die Laufzeit (höchstens) polynomiell vom Grad α. Gilt hingegen $T(x) \ge c_0 \exp(c_1 \operatorname{len}(x))$ mit Konstanten $c_0, c_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, so ist die Laufzeit (mindestens) exponentiell, und somit nicht polynomiell.

Unter einer **polynomiellen Lösung** verstehen wir einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit, der jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ eine optimale Aktion $a : x \to y$ zuordnet, sodass $u(x) = c - u(y)$ gilt.

Normalspiel und Sprague–Grundy–Funktion

Wir vereinfachen weiter und erlauben nur zwei mögliche Auszahlungen: entweder 0 für null / falsch / Niederlage oder 1 für eins / wahr / Gewinn. Die konstante Summe sei $c = 1$, also $u \mapsto 1 - u$ die logische Negation. Wir nennen dann (G, v) ein **neutrales kombinatorisches Spiel**.

Satz C1D: Normalspiel und Sprague–Grundy–Funktion

Auf dem artinschen Graphen $G = (X, A, \sigma, \tau)$ betrachten wir:

- Das **Misèrespiel** $(G, 1)$: Wer nicht mehr ziehen kann, gewinnt.
- Das **Normalspiel** $(G, 0)$: Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

Hierzu existieren die eindeutigen Gewinnfunktionen $\mu, \nu : X \to \{0, 1\}$ mit den vorgegebenen Randwerten $\mu|_{\partial X} = 1$ und $\nu|_{\partial X} = 0$.

Ist G zudem lokal-endlich, so existiert die **Sprague–Grundy–Funktion**

$$\begin{aligned} \gamma &: X \to \mathbb{N} : \gamma(x) = \operatorname{mex}\{\gamma(y) \mid x \to y\}, \\ \operatorname{mex} &: \{\, S \subsetneq \mathbb{N} \,\} \to \mathbb{N} : S \mapsto \min(\mathbb{N} \setminus S). \end{aligned}$$

Es gilt $\nu = \gamma \wedge 1$, also $\nu(x) = 0$ gdw $\gamma(x) = 0$ und $\nu(x) = 1$ gdw $\gamma(x) \ge 1$.

Normalspiel und Sprague–Grundy–Funktion

Beweis: Rückwärtsinduktion C1B garantiert Existenz und Eindeutigkeit von $\mu, \nu : X \to \{0, 1\}$, ebenso für $\gamma : X \to \mathbb{N}$ dank lokaler Endlichkeit. (Andernfalls formulieren wir mex und γ allgemein für Ordinalzahlen.)

Wir nutzen hier die übliche und bequeme Notation $a \wedge b := \min\{a, b\}$. Wir vergleichen $\nu : X \to \{0, 1\}$ und $\gamma : X \to \mathbb{N}$ und zeigen $\nu = \gamma \wedge 1$:

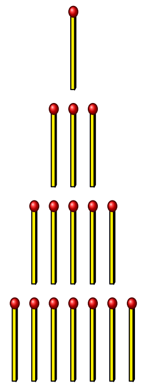
Wir betrachten eine Ecke $x \in X$. Gilt $\nu(y) = \gamma(y) \wedge 1$ für alle $x \to y$, dann folgt $\nu(x) = \gamma(x) \wedge 1$. Hierzu unterscheiden wir die beiden Fälle:

Gewinnposition: Führt ein Zug $x \to y$ zu $\nu(y) = 0$, so gilt $\nu(x) = 1$. In diesem Falle gilt $\gamma(y) = 0$, also $\gamma(x) \ge 1$, und somit $\nu(x) = \gamma(x) \wedge 1$.

Verlustposition: Führen alle Züge $x \to y$ zu $\nu(y) = 1$, so gilt $\nu(x) = 0$. In diesem Falle gilt $\gamma(y) \ge 1$, also $\gamma(x) = 0$, und somit $\nu(x) = \gamma(x) \wedge 1$.

Daraus folgt $\nu = \gamma \wedge 1$: Gäbe es $x_0 \in X$ mit $\nu(x_0) \ne \gamma(x_0) \wedge 1$, so gilt $x_0 \in X^\circ$, und es gibt einen Nachfolger $x_0 \to x_1$ mit $\nu(x_1) \ne \gamma(x_1) \wedge 1$. So fortfahrend erhalten wir einen unendlichen Weg $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots$. Das widerspricht unserer Voraussetzung, dass der Graph G artinsch ist.

Das Spiel Nim: Formalisierung als Graph



$x_4 = 1$

$x_3 = 3$

$x_2 = 5$

$x_1 = 7$

Zustand $x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$

Aktion $a = (x, r, s, y)$ $\begin{cases} (r,s) \in \mathbb{N}^2 \\ 1 \le s \le x_r \\ y = x - s\, e_r \end{cases}$

Zustand $y = (y_0, y_1, y_2, \dots) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$

Aufgabe: Formulieren Sie dieses Spiel in Worten und als Graph.

Lösung: Nim ist ein Spiel für zwei Spieler; beide ziehen abwechselnd. Die Zustandsmenge ist $X = \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$. Aktionen $x \to y$ sind Paare $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ mit $1 \le s \le x_r$ und $y = x - s\, e_r$. Terminal ist $x = 0$, aktiv sind alle $x \ne 0$. Wir betrachten das Normalspiel: Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

Das Spiel Nim: Formalisierung als Graph

Dieses Spiel ist sehr einfach, doch wenn Sie es zum ersten Mal sehen, werden Sie anfangs vermutlich wenig oder keine Struktur erkennen. Erinnern Sie sich an Ihre Erfahrung mit einzeiligem Nim! (Satz C1A)

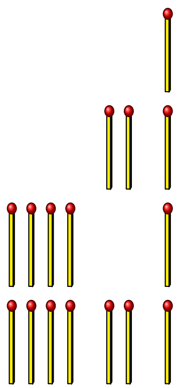
Zur Illustration spielen wir dies ausgiebig in Vorlesung oder Casino, damit Sie das Problem und seine elegante Lösung wirklich spüren. In hoffe diese experimentelle Spielphase ist gut investierte Zeit.

Manche Spezialfälle entdecken und verstehen Sie leicht im Spiel: Zum Beispiel ist $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$ mit $x_1 = x_2$ eine Verlustposition, denn der zweite Spieler kann jeden Zug des ersten spiegeln.

Eine allgemeine Position $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ hingegen ist nicht so einfach zu durchschauen. Das müssen Sie selbst ausprobieren und persönlich erfahren! Dann können Sie die geniale Lösung würdigen.

Das Spiel Nim wurde gelöst von Charles L. Bouton: *Nim, a game with a complete mathematical theory*, Annals of Mathematics 3 (1901) 35–39. Das erklären wir in Satz C1E. Der Satz C1K von Sprague–Grundy überführt jedes neutrale kombinatorische Spiel in ein Nim-Spiel.

Das Spiel Nim: effiziente Lösung nach Charles Bouton 1901



$x_4 = 001_{\text{bin}}$

$x_3 = 011_{\text{bin}}$

$x_2 = 101_{\text{bin}}$

$x_1 = 111_{\text{bin}}$

Wir entwickeln x_i im Binärsystem

$$x_i = \textstyle\sum_{j=0}^m \langle x_i \rangle_j\, 2^j \quad \text{mit} \quad \langle x_i \rangle_j \in \{0, 1\}$$

und bilden die Spaltensumme

$$\langle s \rangle_j = \textstyle\sum_{i=0}^n \langle x_i \rangle_j \text{ rem } 2.$$

Binäre Summe ohne Übertrag (XOR):

$$s = \textstyle\sum_{j=0}^m \langle s \rangle_j\, 2^j =: x_0 \oplus x_1 \oplus \dots \oplus x_n$$

Satz C1E: effiziente Lösung des Nim-Spiels, Bouton 1901

Im Normalspiel sind die Verlustpositionen x genau die Null-Positionen:

(0) Ist $x \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ eine Null-Position, also $x_0 \oplus x_1 \oplus \dots \oplus x_n = 0$, so führt jeder Zug $x \to y$ in eine Nicht-Null-Position, $y_0 \oplus y_1 \oplus \dots \oplus y_n \ne 0$.

(1) Ist x eine Nicht-Null-Position, $x_0 \oplus x_1 \oplus \dots \oplus \dots x_n \ne 0$, so existiert ein Zug $x \to y$ in eine Null-Position, also $y_0 \oplus y_1 \oplus \dots \oplus y_n = 0$.

Das Spiel Nim: effiziente Lösung nach Charles Bouton 1901

🙂 Den Beweis führen wir allgemein für Satz C1F, noch besser Satz C1K. Die **binäre Summe ohne Übertrag** heißt auch **XOR** oder **Nim-Summe**. Dieser Algorithmus ist ebenso trickreich wie simpel: Er berechnet die Gewinnfunktion $\nu : X \to \{0, 1\}$ des Normalspiels, schnell und einfach.

🙂 Der Zeitaufwand ist nur linear in der Bitlänge der Eingabe $x \in \mathbb{N}^n$:

$$\begin{aligned} \text{len} &: \mathbb{N} \to \mathbb{N} &&: x \mapsto \min\{\, \ell \in \mathbb{N} \mid a < 2^\ell \,\} \\ \text{len} &: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} &&: x \mapsto \text{len}(x_1) + \dots + \text{len}(x_n) \end{aligned}$$

Linearer Aufwand ist das Beste, was wir hierzu je erhoffen können: Das Problem zu *lösen* ist kaum aufwändiger, als das Problem zu *lesen*!

🙂 Boutons Lösung C1E enthüllt Gewinn- und Verlustpositionen. Der folgende Satz C1F zeigt zudem die Sprague–Grundy–Funktion und konstruiert explizit alle Gewinnzüge, also optimale Strategien!

Für das tatsächliche *Spielen* ist dies der entscheidende Schritt. Daher führe ich dies im folgenden Satz gebrauchsfertig aus.

Nim: starke Lösung nach Sprague 1935, Grundy 1939

Satz C1F: die Sprague–Grundy–Funktion des Nim-Spiels

Für Nim ist die Sprague–Grundy–Funktion $\gamma : X \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$$\boxed{\gamma(x) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} x_i = x_0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \dots}$$

(0) Für jede Aktion $(r,s) : x \to y$ gilt $x_r \ne y_r$ und somit $\gamma(x) \ne \gamma(y)$.
(1) Zu $0 \le n < \gamma(x)$ existiert eine Aktion $(r,s) : x \to y$ mit $\gamma(y) = n$.

$1 = 001_{\text{bin}}$	$1 = 001_{\text{bin}}$	$\to$	$\cancel{2 = 010_{\text{bin}}}$	$\to$	$\cancel{3 = 011_{\text{bin}}}$	$\to$	$0 = 000_{\text{bin}}$
$3 = 011_{\text{bin}}$	$3 = 011_{\text{bin}}$	$\to$	$0 = 000_{\text{bin}}$	$\to$	$1 = 001_{\text{bin}}$	$\to$	$2 = 010_{\text{bin}}$
$5 = 101_{\text{bin}}$	$6 = 110_{\text{bin}}$	$\to$	$5 = 101_{\text{bin}}$	$\to$	$4 = 100_{\text{bin}}$	$\to$	$\cancel{7 = 111_{\text{bin}}}$
$7 = 111_{\text{bin}}$	$7 = 111_{\text{bin}}$	$\to$	$4 = 100_{\text{bin}}$	$\to$	$5 = 101_{\text{bin}}$	$\to$	$6 = 110_{\text{bin}}$
$0 = 000_{\text{bin}}$	$3 = 011_{\text{bin}}$	$\to$	$0 = 000_{\text{bin}}$	$\to$	$1 = 001_{\text{bin}}$	$\to$	$2 = 010_{\text{bin}}$

Satz C1F: formale Konstruktion

Sei $z := \gamma(x) \oplus n = 2^\ell + \sum_{k=0}^{\ell-1} z_k 2^k$. Wir wählen $r \in \mathbb{N}$ mit $\langle x_r \rangle_\ell = 1$.
Das garantiert $y_r := x_r \oplus z < x_r$ und ergibt $\gamma(y) = \gamma(x) \oplus z = n$.

Nim: starke Lösung nach Sprague 1935, Grundy 1939

Übung: Experimentieren Sie mit dem genialen Algorithmus des Satzes! Wenden Sie das Verfahren mehrfach an, dann beweisen sie den Satz.

🙂 Sprague–Grundy C1F beinhaltet Boutons Lösung C1E dank Satz C1D: Jede Position $x \in X$ mit $\gamma(x) = 0$ ist eine Verlustposition, also $\nu(x) = 0$. Jede Position $x \in X$ mit $\gamma(x) \ge 1$ ist eine Gewinnposition, also $\nu(x) = 1$.

🙂 Wir werden diese geniale Methode in Satz C1K perfektionieren. Der Beweis ist jeweils leicht und ich formuliere ihn detailliert aus.

☹ Wenn Sie zuerst den Beweis lesen, sagt er Ihnen noch allzu wenig. Der Beweis ist einfach genial und genial einfach: Sie können ihn Schritt für Schritt leicht durcharbeiten, doch dabei besteht die Gefahr, dass der zündende Funke nicht überspringt. Das wäre hier besonders schade!

🙂 Zunächst empfehle ich, den Algorithmus in zahlreichen Bei-Spielen zu erproben. Durch eigenständiges Probieren wird Ihnen schnell klar, wie das Verfahren funktioniert und wie ein Beweis aussehen könnte. So können Sie selbst den Beweis entdecken, entwickeln und verstehen.

Nim: starke Lösung nach Sprague 1935, Grundy 1939

Beweis: Aussage (0) ist klar, da $(\mathbb{N}, \oplus)$ eine Gruppe ist, sogar abelsch. Abstrakt gesehen nutzen wir nur die Kürzbarkeit der Verknüpfung $\oplus$.

Anschaulich: Jeder Zug $(r,s) : x \to y$ ändert nur die Koordinate x_r zu y_r. Im Nim-Spiel gilt $y_r < x_r$, wir benötigen nur $y_r \ne x_r$. In der Nim-Summe $\gamma(x) = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$ ändert sich mindestens ein Bit, also $\gamma(y) \ne \gamma(x)$.

(1) Vom Start $m = \gamma(x)$ zum gewünschten Ziel $n < m$ steht das höchste zu ändernde Bit an der Stelle ℓ. Dank $m > n$ gilt $\langle m \rangle_\ell = 1$ und $\langle n \rangle_\ell = 0$. Demnach existiert mindestens eine Koordinate $r \in \mathbb{N}$ mit $\langle x_r \rangle_\ell = 1$. Genauer existiert eine ungerade Anzahl dieser Wahlmöglichkeiten.

Diese Wahl r mit $\langle x_r \rangle_\ell = 1$ stellt sicher, dass $y_r := x_r \oplus z < x_r$ gilt. (Im Falle $\langle x_r \rangle_\ell = 0$ wäre $x_r \oplus z > x_r$ im Nim-Spiel kein erlaubter Zug.) Diese Wahl r und $s = x_r - y_r \ge 1$ definieren die Aktion $(r,s) : x \to y$ mit $\gamma(y) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} y_i = (\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} x_i) \oplus z = \gamma(x) \oplus z = n$, wie gewünscht.

Die beiden Eigenschaften (0–1) garantieren, dass die Funktion $\gamma : X \to \mathbb{N}$ tatsächlich die Sprague–Grundy–Funktion des Nim-Spiels G ist. $\boxed{\text{QED}}$

Nim: starke Lösung nach Sprague 1935, Grundy 1939

Aufgabe: Vorgelegt sei eine Position $x \in X = \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ im Nim-Spiel.
(1) Wie finden Sie von x aus *alle* möglichen Gewinnzüge $(r,s) : x \to y$?
(2) Wie finden Sie zu $0 \le n < \gamma(x)$ *alle* Züge $(r,s) : x \to y$ mit $\gamma(y) = n$?
Gehen Sie den Beweis sorgsam durch und zeigen Sie folgenden Zusatz:

Satz C1F: Vollständigkeit

Die genannte Konstruktion liefert *alle* Züge $x \to y$ mit $\gamma(y) < \gamma(x)$.

Lösung: Die Wahl einer Zeile $r \in \mathbb{N}$ mit $\langle x_r \rangle_\ell = 1$ ist nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für $y_r := x_r \oplus z < x_r$.

Satz C1F und sein Beweis beruhen auf der folgenden Beobachtung:

Lemma C1G: Umformulierung der mex–Eigenschaft

Vorgelegt sei ein Graph $G = (X, A, \sigma, \tau)$ mit einer Funktion $\gamma : X \to \mathbb{N}$. Dann sind (0,1) äquivalent zu $\gamma(x) = \operatorname{mex}\{\, \gamma(y) \mid x \to y \,\}$ für alle $x \in X$.

Übung: Erklären Sie sorgfältig „⇒“ und „⇐“ zur Wiederholung.

Nim: algebraischer Hintergrund

Wir nutzen die **Binärentwicklung**: Jede natürliche Zahl $z \in \mathbb{N}$ schreibt sich eindeutig als Summe $z = \sum_{k\in\mathbb{N}} z_k 2^k$ mit Ziffern $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{(\mathbb{N})}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, shift left, "\langle - \rangle"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \{0,1\}^{(\mathbb{N})} \arrow[l, shift left, "|-|"] \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathbb{F}_2[T] \arrow[l, shift left] \\
\sum_{k\in\mathbb{N}} z_k 2^k \arrow[r, shift left, mapsto] & (z_k)_{k\in\mathbb{N}} \arrow[l, shift left, mapsto] \arrow[r, shift left, mapsto] & \sum_{k\in\mathbb{N}} z_k T^k \arrow[l, shift left, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Diese Bijektion $\mathbb{N} \cong \mathbb{F}_2[T]$ ist kein Isomorphismus: $(\mathbb{N},+) \not\cong (\mathbb{F}_2[T],+)$. Algebraisch: $(\mathbb{F}_2[T],+)$ ist eine Gruppe, hingegen $(\mathbb{N},+)$ nur ein Monoid. Arithmetisch: In $(\mathbb{N},+)$ wird mit Übertrag addiert, in $(\mathbb{F}_2[T],+)$ ohne. Ich stelle dies hier nebeneinander, um den Kontrast zu betonen.

Wir definieren auf $\mathbb{N}$ die **binäre Addition ohne Übertrag** durch

$$\boxed{\oplus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (x,y) \mapsto |\langle x \rangle + \langle y \rangle|.}$$

Wir definieren $\bigoplus_{i=0}^n x_i = x_0 \oplus x_1 \oplus \dots \oplus x_n$ wie üblich und allgemein für $x \in \mathbb{N}^{(I)}$ mit endlichem Träger $J \subseteq I$ ebenso $\bigoplus x := \bigoplus_{i\in I} x_i := \bigoplus_{i\in J} x_i$.

Nim: algebraischer Hintergrund

In der Informatik ist dies eine sehr vertraute Operation: bitweises XOR! Sie ist schnell und einfach zu berechnen, für Mensch wie für Computer.

Auch in der Mathematik ist $(\mathbb{N},\oplus) \cong (\mathbb{F}_2[T],+)$ eine vertraute Struktur, nämlich eine abelsche Gruppe, genauer sogar ein $\mathbb{F}_2$–Vektorraum.

Aufgrund von Satz C1E nennen manche Autor:innen (im Rahmen der Spieltheorie) diese Verknüpfung $\oplus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ auch **Nim-Summe**.

Fun fact: Die Summanden $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ sind natürliche Zahlen, engl. *natural numbers*. Im Kontext des Nim-Spiels nennen manche Autor:innen dies auch *nimbers*, als Wortspiel und als Erinnerung.

Auch die Polynommultiplikation überträgt sich zu $x \odot y = |\langle x \rangle \cdot \langle y \rangle|$. So wird $(\mathbb{N},\oplus,\odot)$ eine isomorphe Kopie des Polynomrings $(\mathbb{F}_2[T],+,\cdot)$.

Auf den ersten Blick scheinen Polynomringe vielleicht kompliziert, selbst der einfachste Vertreter $\mathbb{F}_2[T]$, doch das ist keine objektive Schwierigkeit: Neutral betrachtet ist die Arithmetik in $\mathbb{F}_2[T]$ viel einfacher als in $\mathbb{N}$, denn in $\mathbb{F}_2[T]$ wird **ohne Übertrag** addiert und multipliziert.

Nim: algebraischer Ausblick

Aus mathematischer Sicht ist die Definition von $(\mathbb{N},\oplus)$ nicht tiefsinnig. Überaus bemerkenswert ist hingegen, dass die binäre Addition $(\mathbb{N},\oplus)$ und die Anordnung $(\mathbb{N},<)$ für Spiele so trickreich zusammenarbeiten.

L'algèbre est généreuse, elle donne souvent plus qu'on lui demande.
[Die Algebra ist großzügig, sie gibt oft mehr, als wir von ihr verlangen.]
Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783)

Getreu diesem Leitspruch gibt es neben der Nim-Addition auch eine Nim-Multiplikation! J.H. Conway entdeckte sie 1976 als Spezialfall seiner surrealen Zahlen. Mehr hierzu finden Sie im Buch von A.N. Siegel, *Combinatorial Game Theory*, VI.5 (endlich) und VII.4 (transfinit).

Definition C1H: Nim-Arithmetik nach Conway, 1976

Für alle natürlichen Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ definieren wir rekursiv

$$\begin{aligned}
\alpha \oplus \beta &:= \operatorname{mex}(\{\alpha' \oplus \beta \mid \alpha' < \alpha\} \cup \{\alpha \oplus \beta' \mid \beta' < \beta\}),\\
\alpha \otimes \beta &:= \operatorname{mex}\{(\alpha' \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \beta') \oplus (\alpha' \otimes \beta') \mid \alpha' < \alpha,\ \beta' < \beta\}).
\end{aligned}$$

Diese Konstruktion setzt sich ebenso auf alle Ordinalzahl fort.

Nim: algebraischer Ausblick

Übung: (1) Damit ist $(\mathbb{N},\oplus,0,\otimes,1)$ ein kommutativer Ring.
(2) $(\mathbb{N}_{<2},\oplus,0,\otimes,1)$ ist ein Körper, isomorph zu $(\mathbb{F}_2,+,0,\cdot,1)$.
(3) $(\mathbb{N}_{<4},\oplus,0,\otimes,1)$ ist ein Körper, isomorph zu $(\mathbb{F}_4,+,0,\cdot,1)$.

Scheiben Sie die Additions- und Multiplikationstabellen aus; eine Lösung finden Sie bei Siegel auf S.217 und unter `en.wikipedia.org/wiki/Nimber`. Die nächste abgeschlossene Teilmenge ist $\mathbb{N}_{<16}$. Allgemein gilt:

Satz C1I: Nim-Arithmetik nach Conway, 1976

Nim-Arithmetik $(\mathbb{N},\oplus,0,\otimes,1)$ ist ein Körper. Für jede Fermat–Potenz $K = 2^{2^n}$ ist $(\mathbb{N}_{<K},\oplus,0,\otimes,1)$ ein Teilkörper isomorph zu $(\mathbb{F}_{2^{2^n}},+,0,\cdot,1)$.

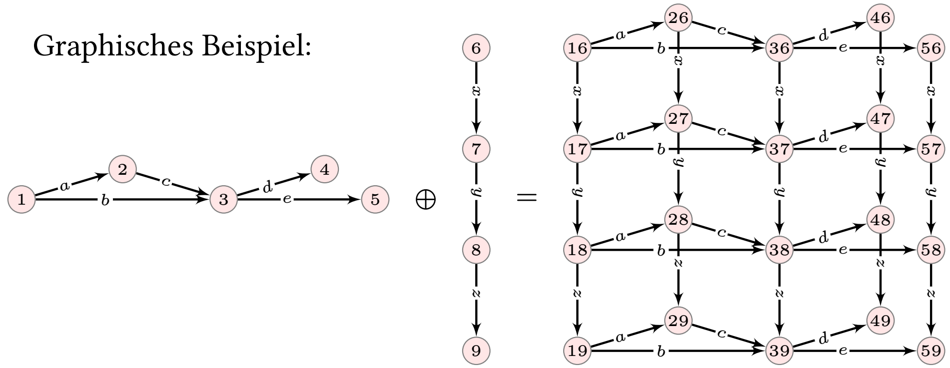
Die Klasse **Ord** aller Ordinalzahlen bildet einen Körper $(\mathbf{Ord},\oplus,0,\otimes,1)$. Dieser ist zudem algebraisch abgeschlossen. Der kleinste algebraisch abgeschlossene Teilkörper ist darin die Menge ω^{ω^ω}.

Wir werden diese faszinierende Struktur hier nicht weiter verfolgen, doch als Hinweis und Ausblick kann ich sie mir auch nicht verkneifen: Seit Conways Entdeckung offenbart die kombinatorische Spieltheorie erstaunliche Verbindungen zur Logik, Mengenlehre, Algebra, Analysis!

Summe von Spielen

Wir spielen mehrere Spiele G_i parallel, also gleichzeitig nebeneinander. Der ziehende Spieler darf sich aussuchen, in welchem Spiel G_i er zieht. Dies fassen wir zusammen zu einem gemeinsamen Spiel $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$.

Graphisches Beispiel:



Graphische Illustration der Summe $G = G_1 \oplus G_2$: Ein Zug in G ist entweder ein Zug in G_1 (horizontal) oder ein Zug in G_2 (vertikal).
Aufgabe: Formulieren Sie explizit die Definition von $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$.

Summe von Spielen

⚠ Es gibt mehrere Möglichkeiten, Produkte von Graphen zu definieren. Gegen mögliche Verwirrung hilft wie immer nur eine präzise Definition:

Definition C1J: Produkt und Summe von Spielen

Gegeben sei eine Familie $(G_i)_{i \in I}$ von Graphen $G_i = (X_i, A_i, \sigma_i, \tau_i)$. Ihr **Produkt** ist der Graph $P = \prod_{i \in I} G_i = (X, A, \sigma, \tau)$ mit

$$X = \prod_{i \in I} X_i = \{\, x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i : i \mapsto x_i \,|\, x_i \in X_i \,\},$$
$$A = \{\, (x, i, a_i, y) \,|\, x, y \in X,\ i \in I,\ a_i : x_i \to y_i,\ \forall j \neq i : x_j = y_j \,\}$$

sowie den Projektionen $\sigma(x, i, a_i, y) = x$ und $\tau(x, i, a_i, y) = y$.
Die **Summe** $S = \bigoplus_{i \in I} G_i = (X', A', \sigma', \tau')$ ist der volle Teilgraph $S \le P$ der Zustände $x \in X$ mit endlichem Träger $\operatorname{supp}(x) := \{\, i \in I \,|\, x_i \in X_i^\circ \,\}$.

Der Träger $\operatorname{supp}(x) \subseteq I$ indiziert aktive Koordinaten $i \in I$ mit $x_i \in X_i^\circ$. Ist I endlich, so ist das Produkt gleich der Summe, doch in unendlichen Summen verlangen wir, dass nur endlich viele Koordinaten aktiv sind.

Erinnerung: Produkt und Summe von Gruppen

Zu jedem Index $i \in I$ sei $G_i = (X_i, +_i, 0_i, -_i)$ eine abelsche Gruppe mit Grundmenge X_i und darauf der Addition $+_i : X_i \times X_i \to X_i$ mit neutralem Element $0_i \in X_i$ und Negation $-_i : X_i \to X_i$.

Das **Produkt** $P = \prod_{i \in I} G_i := (X, +, 0, -)$ hat als Grundmenge

$$X = \prod_{i \in I} X_i = \{\, x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i : i \mapsto x_i \,|\, x_i \in X_i \,\}.$$

Wir definieren koordinatenweise die Addition $x + y = (x_i +_i y_i)_{i \in I}$, das neutrale Element $0 = (0_i)_{i \in I}$ und die Negation $-x = (-_i\, x_i)_{i \in I}$.

Wir definieren den **Träger** $\operatorname{supp} : P \to \mathfrak{P}I : x \mapsto \{\, i \in I \,|\, x_i \neq 0_i \,\}$. Einschränkung definiert die **Summe** der Gruppen $(G_i)_{i \in I}$ vermöge

$$S = \bigoplus_{i \in I} G_i := \{\, x \in P \,|\, \operatorname{supp}(x) \text{ endlich} \,\}.$$

Übung: Mit dieser Konstruktion ist $(P, +, 0, -)$ eine abelsche Gruppe und $S \le P$ eine Untergruppe. Dasselbe gilt für Ringe; für $\sharp I = \infty$ hat das Einselement $1 = (1_i)_{i \in I}$ keinen endlichen Träger, also $1 \in P$, aber $1 \notin S$.

Erinnerung: Produkt und Summe von Monoiden

Allgemeiner gelingt diese Konstruktion für abelsche Monoide $(X_i, +_i, 0_i)$, noch allgemeiner Tripel aus einer Menge X_i mit innerer Verknüpfung $+_i : X_i \times X_i \to X_i$ und idempotenten Element $0_i \in X_i$, also $0_i +_i 0_i = 0_i$.

Im Falle $G_i = G$ für alle $i \in I$ erhalten wir die (eingeschränkte) Potenz:

$$P = G^I \ := \{\, x : I \to G \,\}$$
$$S = G^{(I)} := \{\, x : I \to G \,|\, \operatorname{supp}(x) \text{ endlich} \,\}$$

Nur auf letzterem haben wir die Summenabbildung

$$\sum \,:\, G^{(I)} \to G \,:\, (g_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} g_i.$$

Aus dem abelschen Monoid $(\mathbb{N}, +, 0)$ erhalten wir das Monoid $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ mit koordinatenweiser Addition $+$ und hierauf $\sum : \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{N}$.

Beispiel: Für den Sprague–Grundy–Satz nutzen wir insbesondere: Aus der abelschen Gruppe $(\mathbb{N}, \oplus, 0)$ erhalten wir die Gruppe $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ mit koordinatenweiser Addition $\oplus$ und hierauf $\oplus : \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{N}$.

Der Sprague–Grundy–Satz

Satz C1K: Sprague 1935, Grundy 1939

Gegeben seien lokal-endliche artinsche Graphen $G_i = (X_i, A_i, \sigma_i, \tau_i)$. Dann ist auch ihre Summe $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ lokal-endlich und artinsch, und für ihre Sprague–Grundy–Funktion gilt $\gamma(x) = \bigoplus_{i \in I} \gamma_i(x_i)$.

Genauer: (0) Für jede Aktion $(i, a_i) : x \to y$ in G gilt $a_i : x_i \to y_i$ in G_i. Für die Grundy–Zahlen folgt $\gamma_i(x_i) \ne \gamma_i(y_i)$ und somit $\gamma(x) \ne \gamma(y)$.

(1) Zu $0 \le n < \gamma(x)$ existiert eine Aktion $(i, a_i) : x \to y$ mit $\gamma(y) = n$. Insbesondere finden wir so Gewinnzüge $x \to y$ mit $\gamma(y) = 0$.

Den Satz beweisen wir durch die Konstruktion solcher Züge:

Satz C1K: formale Konstruktion

(1) Wir lösen $\gamma(x) \oplus z = n$ durch $z = \gamma(x) \oplus n = 2^\ell + \sum_{k=0}^{\ell-1} z_k 2^k$ und wählen $i \in I$ mit $\langle \gamma_i(x_i) \rangle_\ell = 1$. Somit gilt $\gamma_i(x_i) \oplus z < \gamma_i(x_i)$.

In G_i existiert eine Aktion $a_i : x_i \to y_i$ mit $\gamma_i(y_i) = \gamma_i(x_i) \oplus z$. In G erhalten wir $(i, a_i) : x \to y$ mit $\gamma(y) = \gamma(x) \oplus z = n$.

Der Sprague–Grundy–Satz

Erst dieser abschließende Satz motiviert und rechtfertigt die anfangs eingeführte Sprague–Grundy–Funktion: Genau hier liegt ihr Nutzen!

☺ Als prototypisches Beispiel haben wir oben in Satz C1F das Nim-Spiel eingehend diskutiert; dort ist alles besonders einfach dank $\gamma_i(x_i) = x_i$.

☺ Der Satz ist konstruktiv als gebrauchsfertiger Algorithmus formuliert. Sie können dieses Verfahren also direkt gewinnbringend anwenden… und sich dann nachfolgend den allgemeinen Beweis erarbeiten.

☹ Wenn Sie zuerst den Beweis lesen, sagt er Ihnen noch allzu wenig. Der Beweis ist einfach genial und genial einfach: Sie können ihn Schritt für Schritt leicht durcharbeiten, doch dabei besteht die Gefahr, dass der zündende Funke nicht überspringt. Das wäre hier besonders schade!

☺ Zunächst empfehle ich, den Algorithmus in zahlreichen Bei-Spielen zu erproben. Durch eigenständiges Probieren wird Ihnen schnell klar, wie das Verfahren funktioniert und wie ein Beweis aussehen könnte. So können Sie selbst den Beweis entdecken, entwickeln und verstehen.

Der Sprague–Grundy–Satz

Beweis: Zunächst ist G lokal-endlich und artinsch: Gäbe es in G einen unendlichen Weg $x^0 \to x^1 \to x^2 \to \dots$, so ist $J = \operatorname{supp}(x^0)$ endlich, und in mindestens einer Koordinate $i \in J$ finden wir einen unendlichen Weg $x_i^{n_0} \to x_i^{n_1} \to x_i^{n_2} \to \dots$, und somit wäre G_i nicht artinsch. Widerspruch!

Für jeden Zustand $x \in X$ ist $\operatorname{supp}(x)$ endlich, also $\gamma(x) := \bigoplus_{i \in I} \gamma_i(x_i)$ wohldefiniert, denn für fast alle $i \in I$ gilt $x_i \in \partial X_i$ und somit $\gamma_i(x_i) = 0$.

Die Aussage (0) ist klar. (Führen Sie dies zur Übung sorgfältig aus!)

(1) Die Frage lautet: Warum können wir $i \in I$ wie angegeben wählen? Vom Start $m = \gamma(x)$ zum Ziel $n < m$ steht das höchste zu ändernde Bit an der angegebenen Stelle ℓ. Dank $m > n$ gilt $\langle m \rangle_\ell = 1$ und $\langle n \rangle_\ell = 0$. Demnach existiert mindestens eine Koordinate $i \in \mathbb{N}$ mit $\langle \gamma_i(x_i) \rangle_\ell = 1$.

Dies garantiert $\gamma_i(x_i) \oplus z < \gamma_i(x_i)$. In G_i existiert demnach eine Aktion $a_i : x_i \to y_i$ mit $\gamma_i(y_i) = \gamma_i(x_i) \oplus z$. In G erhalten wir $(i, a_i) : x \to y$ mit $\gamma(y) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i(y_i) = \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i(x_i)\right) \oplus z = \gamma(x) \oplus z = n$, wie gewünscht.

Die beiden Eigenschaften (0,1) garantieren, dass $\gamma : X \to \mathbb{N}$ tatsächlich die Sprague–Grundy–Funktion des Spiels G ist (siehe Lemma C1G). $\boxed{\text{QED}}$

Der Sprague–Grundy–Satz

Aufgabe: Vorgelegt sei eine Position $x \in X$ im Spiel $G = (X, A, \sigma, \tau)$.
(1) Wie finden Sie von x aus *alle* möglichen Gewinnzüge (x, i, a_i, y)?
(2) Wie finden Sie zu $0 \le n < \gamma(x)$ *alle* Züge (x, i, a_i, y) mit $\gamma(y) = n$?

Lösung: Frage (1) ist ein Spezialfall von (2), nämlich für $n = 0$.

Der Zug (x, i, a_i, y) im Spiel G bedeutet $a_i : x_i \to y_i$ im Spiel G_i. Somit gilt $\gamma(y) = \gamma(x) \oplus z$ mit $z = \gamma_i(x_i) \oplus \gamma_i(y_i)$. Wir wollen $\gamma(y) = n$.

Wir berechnen also zunächst $z := \gamma(x) \oplus n = 2^\ell + \sum_{k=0}^{\ell-1} z_k 2^k$ und suchen nun alle Züge $a_i : x_i \to y_i$ mit $\gamma_i(y_i) = \gamma_i(x_i) \oplus z$.

Im Falle $\langle \gamma_i(x_i) \rangle_\ell = 0$ gilt $\gamma_i(x_i) \oplus z > \gamma_i(x_i)$: Geeignete Züge $a_i : x_i \to y_i$ können im Spiel G_i existieren, sie sind möglich, aber nicht zwingend.

Im Falle $\langle \gamma_i(x_i) \rangle_\ell = 1$ gilt $\gamma_i(x_i) \oplus z < \gamma_i(x_i)$: Nach Definition der Grundy–Zahl γ_i existiert im Spiel G_i mindestens ein Zug $a_i : x_i \to y_i$.

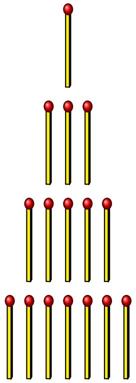
(Der Beweis zeigt, dass es mindestens eine solche Koordinate $i \in I$ gibt, genauer existiert immer eine ungerade Anzahl solcher Koordinaten.)

Wir finden so alle Züge (x, i, a_i, y) mit $\gamma_i(y_i) = \gamma_i(x_i) \oplus z$, also $\gamma(y) = n$.

Nimm eins oder zwei, nun mit mehreren Zeilen

Wir spielen „Nimm eins oder zwei“, nun parallel mit mehreren Zeilen. Hier können wir den Sprague–Grundy–Satz C1K anwenden und testen.

Aufgabe: Nennen Sie für die gezeigte Position *alle* Gewinnzüge!



$x_4 = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma_4(x_4) = 01_{\text{bin}} \xrightarrow{?} 11_{\text{bin}} = \gamma_4(y_4)$ unmöglich

$x_3 = 3 \quad \Rightarrow \quad \gamma_3(x_3) = 00_{\text{bin}} \xrightarrow{?} 10_{\text{bin}} = \gamma_3(y_3) \quad \Leftarrow \quad y_3 = 2$

zusätzlicher, erhöhender Gewinnzug!

$x_2 = 5 \quad \Rightarrow \quad \gamma_2(x_2) = 10_{\text{bin}} \xrightarrow{?} 00_{\text{bin}} = \gamma_2(y_2) \quad \Leftarrow \quad y_2 = 3$

garantierter, reduzierender Gewinnzug

$x_1 = 7 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1(x_1) = 01_{\text{bin}} \xrightarrow{?} 11_{\text{bin}} = \gamma_1(y_1)$ unmöglich

Gewinnposition? $\quad \gamma(x) = 10_{\text{bin}} \xrightarrow{!} 00_{\text{bin}} = \gamma(y)$ Züge?

Nimm eins oder zwei, nun mit mehreren Zeilen

Wie spielen wir optimal? Wir nutzen den Sprague–Grundy–Satz C1K! Damit finden wir *einen* Gewinnzug, bei genauem Hinsehen sogar *alle*.

Lösung: Wir untersuchen den gezeigten Spielzustand $x = (7, 5, 3, 1)$.
Dank Satz C1A kennen wir die Grundy–Zahlen $\gamma_i(x_i) = x_i \operatorname{rem} 3$.
Dank Satz C1K berechnen wir damit $\gamma(x) = 1 \oplus 2 \oplus 0 \oplus 1 = 2$.
Der vorgegebene Zustand x ist also ein Gewinnzustand.

Der Sprague–Grundy–Satz C1K konstruiert dazu einen Gewinnzug:
Wir wollen $\gamma(x) = 2$ reduzieren auf $0 = \gamma(y) = \gamma(x) \oplus z$, hier also $z = 2$.
Dazu reduzieren wir $\gamma_2(x_2) = 2$ auf $\gamma_2(y_2) = 0$ vermöge $x_2 = 5 \to y_2 = 3$.
Satz C1K liefert so *einen* Gewinnzug, wie versprochen, ganz explizit.

⚠ Satz C1K behauptet jedoch nicht, *alle* Gewinnzüge zu konstruieren.
In unserem Beispiel gibt es einen weiteren, versteckten Gewinnzug:
Wir erhöhen $\gamma_3(x_3) = 0$ auf $\gamma_3(y_3) = 2$ vermöge $x_3 = 3 \to y_3 = 2$.
(In Nim ist die Erhöhung $0 \to 2$ kein legaler Zug, hier ist es möglich.)

🙂 Erst damit sind wirklich alle Gewinnzüge gefunden.
Damit ist die Aufgabe gelöst, elegant und effizient.

Vergleich von Nim-Spiel und Sprague–Grundy–Satz

Der Sprague–Grundy–Satz C1K berechnet effizient die Gewinn- und Verlustpositionen. Zudem liefert er eine konkrete Konstruktion von Gewinnzügen, allgemein von Zügen $(i, a_i) : x \to y$ mit $\gamma(y) < \gamma(x)$. Die Konstruktion liefert alle Züge, die zudem $\gamma_i(y_i) < \gamma_i(x_i)$ erfüllen.

Für Nim liefert der Sprague–Grundy–Satz C1F eine stärkere Aussage: Die genannte Konstruktion liefert *alle* Züge $x \to y$ mit $\gamma(y) < \gamma(x)$, denn hier gilt $\gamma_i(x_i) = x_i$, und jeder Zug $x_i \to y_i$ ist reduzierend. Insbesondere ist die Anzahl solcher Züge in Nim immer ungerade.

In einer allgemeinen Summe $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ sind neben den reduzierenden Zügen $(i, a_i) : x \to y$ mit $\gamma_i(x_i) > \gamma_i(y_i)$ manchmal auch erhöhende Züge mit $\gamma_i(x_i) < \gamma_i(y_i)$ möglich. Hierüber macht Satz C1K keine Aussagen, daher auch nicht über Anzahl oder Parität der gesuchten Züge.

Wenn es nur darum geht, *irgendeinen* Gewinnzug zu finden, dann genügt die allgemeine Konstruktion des Satzes C1K. Die ambitioniertere Frage nach *allen* Gewinnzügen erfordert eine etwas präzisese Untersuchung. Genau dies illustriert dieses schöne und gut gewählte Beispiel.

Vergleich von Nim-Spiel und Sprague–Grundy–Satz

Slogan: *Der Sprague–Grundy–Satz überführt jedes Spiel in ein Nim-Spiel.* Manche sagen sogar: *in ein äquivalentes Nim-Spiel.* Was heißt das genau?

Der Sprague–Grundy–Satz konstruiert und nutzt den „Morphismus“

$$\tilde{\gamma} : G = \bigoplus_{i \in I} G_i \to \mathbb{N}^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{N} : (x_i)_{i \in I} \mapsto (\gamma_i(x_i))_{i \in I}.$$

von einer beliebigen Summe von Spielen zum entsprechenden Nim-Spiel.

0. Verlustpositionen in G werden zu Verlustpositionen in Nim.
1. Gewinnpositionen in G werden zu Gewinnpositionen in Nim.
2. Gewinnzüge in Nim übersetzen sich zurück zu Gewinnzügen in G.

Allgemeiner: Die Sprague–Grundy–Zahl wird erhalten, und reduzierende Züge in Nim übersetzen sich zurück zu reduzierenden Zügen in G.

Das genügt meist. Die Rückübersetzung ist allerdings nicht surjektiv: Es kann Gewinnzüge in G geben, die nicht von Nim-Zügen herkommen.

Der Sprague–Grundy–Morphismus ist so gesehen kein Isomorphismus; er vereinfacht etwas und lässt dazu einige unwesentliche Details weg.

Charles Bouton 1901: Wie alles begann…

NIM, A GAME WITH A COMPLETE MATHEMATICAL THEORY.

BY CHARLES L. BOUTON.

THE game here discussed has interested the writer on account of its seeming complexity, and its extremely simple and complete mathematical theory.* The writer has not been able to discover much concerning its history, although certain forms of it seem to be played at a number of American colleges, and at some of the American fairs. It has been called Fan-Tan, but as it is not the Chinese game of that name, the name in the title is proposed for it.

1. Description of the Game. The game is played by two players, A and B. Upon a table are placed three piles of objects of any kind, let us say counters. The number in each pile is quite arbitrary, except that it is well to agree that no two piles shall be equal at the beginning. A play is made as follows:—The player selects one of the piles, and from it takes as many counters as he chooses; one, two, . . ., or the whole pile. The only essential things about a play are that the counters shall be taken from a single pile, and that at least one shall be taken. The players play alternately, and the player who takes up the last counter or counters from the table wins.

It is the writer's purpose to prove that if one of the players, say A, can leave one of a certain set of numbers upon the table, and after that plays without mistake, the other player, B, *cannot* win. Such a set of numbers will be called a *safe combination*. In outline the proof consists in showing that if A leaves a safe combination on the table, B at his next move cannot leave a safe combination, and whatever B may draw, A at his next move can again leave a safe combination. The piles are then reduced, A always leaving a safe combination, and B never doing so, and A must eventually take the last counter (or counters).

2. Its Theory. A *safe combination* is determined as follows: Write the number of the counters in each pile in the binary scale of notation,† and place these numbers in three horizontal lines so that the units are in the same vertical column. If then the sum of *each* column is 2 or 0 (*i. e.* congruent to 0, mod. 2), the set of numbers forms a safe combination.

Literatur zur kombinatorischen Spieltheorie

Die Originalartikel sind online erhältlich und noch immer schön zu lesen:

📖 Charles L. Bouton: *Nim, a game with a complete mathematical theory.* Annals of Mathematics 3 (1901) 35–39. doi.org/10.2307/1967631

Roland P. Sprague: *Über mathematische Kampfspiele.* Tôhoku Math. 41 (1935) 438–444. www.jstage.jst.go.jp/article/tmj1911/41/0/41_0_438/_pdf

Roland P. Sprague: *Über zwei Abarten von Nim.* Tôhoku Math. 43 (1937) 451–454. www.jstage.jst.go.jp/article/tmj1911/43/0/43_0_351/_pdf

Patrick M. Grundy: *Mathematics and Games.* Eureka 2 (1939) 6–8

Kombinatorische Spieltheorie ist heute ein riesiges Forschungsgebiet. Die monumentalen Klassiker WW und ONAG und das Lehrbuch CGT:

📖 Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy: *Winning Ways for Your Mathematical Plays.* A K Peters 2001-2004
Gewinnen: Strategien für mathematische Spiele. Vieweg 1985–1986

John H. Conway: *On Numbers and Games.* A K Peters 2000

Aaron N. Siegel: *Combinatorial Game Theory.* AMS 2013

Roland Sprague 1935: Einleitung

Über mathematische Kampfspiele,

von

R. SPRAGUE in Berlin-Charlottenburg.

1. Gegenstand dieser Arbeit sind Spiele mit folgendem Partieverlauf: eine Anfangsstellung wird nach einer beschränkten Anzahl von abwechselnden Zügen zweier Personen in eine Endstellung übergeführt, die keinen Zug mehr zulässt und den Sieg einer der beiden Personen ergibt.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, dass der Sieg dem Partner zufällt, der die Partie beendet. Man braucht nur alle Endstellungen zu verbieten, in denen der zuletzt Ziehende verliert.

Diese Spiele mögen kurz als "Kampfspiele" bezeichnet werden.

2. E. Lasker(¹), von dem der Name "mathematische Kampfspiele" herrührt, hat diese Spiele methodisch untersucht und bemerkt, dass ihre Stellungen in zwei Klassen zerfallen, nämlich "Gewinnstellungen" und "Verluststellungen". In Gewinnstellungen, kurz: "G", kann *der* Spieler den Sieg erzwingen, der am Zuge ist, in Verluststellungen, "V", der andere. Das Gewinnproblem eines Kampfspiels ist mit der Kenntnis seiner V erledigt: wer eine V herbeiführt, gewinnt, indem er seinem Gegner stets wieder eine V hinterlässt.

3. Zur Erläuterung diene der Hinweis auf ein altbekanntes Kampfspiel. Von einem Haufen von Dingen werden in jedem Zuge eine beschränkte Anzahl fortgenommen, nämlich mindestens 1, höchstens m. Jede Stellung ist dann durch die Anzahl der vorhandenen Dinge gekennzeichnet. Als V erweisen sich die ganzzahligen Vielfachen von $m+1$; denn wer eine Stellung $k(m+1)$ erreicht, gelangt bei beliebigen Zügen des Gegners schrittweise zu $(k-1)\cdot(m+1)$, $(k-2)\cdot(m+1)$ und so weiter bis zur Endstellung 0 und gewinnt. Jede andere Stellung ist G, weil sie in einem Zuge zu einer V gemacht werden kann.

Roland Sprague 1935: Hauptsatz

Satz III: Schreibt man die Zahlen $a, b, c, \ldots$ dyadisch untereinander, in einem Schema wie zur Addition dekadischer Zahlen, so lässt sich eine dyadische Zahl R bilden, deren Ziffern 0 oder 1 heissen, je nachdem die entsprechende Kolonne des Schemas eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Einsen aufweist. Der Wert von R ist der Rang der Stellung $a, b, c, \ldots$ im Nim.

Beweis: Wegen der Eindeutigkeit der Zuordnung in Satz I genügt es zu zeigen, dass die Zahlen R die Bedingungen A) und B) erfüllen.

Zu A). Jeder Zug verändert eine der Zahlen $a, b, c, \ldots$, also eine Zeile des Schemas, und damit eine oder mehrere Kolonnen in je einer Ziffer. Demnach ändert sich auch R.

Zu B). Ist $R>0$ und P eine dyadische Zahl, für die $0 \leqq P < R$ gilt, so unterscheiden sich R und P, von links her verglichen, zum ersten Mal an einer Stelle, wo P eine 0, R eine 1 aufweist. In der entsprechenden Kolonne des Schemas steht dann eine ungerade Anzahl von Einsen, also mindestens eine. Irgendeine dieser Einsen, oder die einzige, befinde sich in der Zeile, die zum Haufen x gehört. Durch Verkleinerung von x lässt sich erreichen, dass diese 1 zu 0 wird und überdies die weiter nach rechts liegenden Ziffern der Zeile sich ändern oder nicht, je nachdem P in den entsprechenden Stellen von R abweicht oder nicht. Nach dieser Verkleinerung von x ist P die dem Schema zugeordnete dyadische Zahl.

Hiermit ist Satz III bewiesen.

Die Sprague–Grundy–Theorie untersucht das Normalspiel: Wer nicht mehr ziehen kann, verliert. Beim Misèrespiel gilt umgekehrt: Wer nicht mehr ziehen kann, gewinnt. Das klingt zunächst symmetrisch, manches lässt sich übertragen, doch die Rechnungen verändern sich erheblich.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, dass der Sieg dem Partner zufällt, der die Partie beendet. Man braucht nur alle Endstellungen zu verbieten, in denen der zuletzt Ziehende verliert.
Roland Sprague (1935)

Aufgabe: Wir betrachten Nim $G = (X, A, \sigma, \tau)$, doch nun als Misèrespiel. Beschreiben Sie dies als Normalspiel auf einem geeigneten Teilgraphen.

Lösung: Für Nim haben wir die Zustandsmenge $X = \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$. Aktionen $(r, s) : x \to y$ sind Paare $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ mit $1 \le s \le x_r$ und $y = x - s\, e_r$.
Der einzige terminale Zustand ist demnach $x = 0$, aktiv ist $x \ne 0$.
Wir betrachten demnach den vollen Teilgraph $G' = (X', A', \sigma', \tau')$ auf $X' = X \smallsetminus \{0\}$. Das Misèrespiel auf G ist dann das Normalspiel auf G'.

The game [of Nim in normal play] may be modified by agreeing that the player who takes the last counter from the table loses. [...] The safe combinations are the same as before, except that an odd number of piles, each containing one, is now safe, while an even number of ones is not safe.
Charles Bouton (1901)

Aufgabe: Explizieren und beweisen Sie diese Formel der Gewinnfunktion.

Satz C1L: Boutons Lösung des Nim-Spiels, normal vs misère

Für das Normalspiel von Nim haben wir die vertraute Gewinnfunktion

$$\nu : X \to \{0, 1\} : \nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} x_i = 0, \\ 1 & \text{falls } \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} x_i \ge 1. \end{cases}$$

Im Misèrespiel von Nim hingegen gilt die abgewandelte Formel

$$\mu : X \to \{0, 1\} : \mu(x) = \begin{cases} 1 - \nu(x) & \text{falls } \max(x) \le 1, \\ \nu(x) & \text{falls } \max(x) \ge 2. \end{cases}$$

Als unterhaltsames *pub game* von Scam School, `youtu.be/mR6mVm4SuRw`, schön einfach, aber auch etwas unpräzise. Klarheit schafft der Beweis!

Beweis: (1) Für den Endzustand $x = 0$ gilt $\mu(x) = 1 = 1 - \nu(x)$.
Für $\max(x) \le 1$ besteht x aus n Haufen der Größe 1. Jeder Zug $x \to y$ führt zu $n - 1$ Haufen der Größe 1, also $\mu(x) = 1 - (n \operatorname{rem} 2) = 1 - \nu(x)$.
Kurzum: Im Misèrespiel ist also eine un/gerade Anzahl von Einserhaufen eine Verlust/Gewinnposition, im Normalspiel jedoch genau umgekehrt.

Sei nun $\max(x) \ge 2$. Wir unterscheiden dabei zwei Fälle:

(2) Existiert nur noch ein Haufen $i \in \mathbb{N}$ mit $x_i \ge 2$, so gilt $\nu(x) = 1$ und ebenso $\mu(x) = 1$: Der ziehende Spieler kann eine gerade Anzahl von Einserhaufen übergeben, also eine Misère-Verlustposition gemäß (1).

(3) Angenommen, es existieren mehrere Haufen $i \in \mathbb{N}$ mit $x_i \ge 2$. Jeder Zug $x \to y$ übergibt dann mindestens einen Haufen mit $y_i \ge 2$, wir gelangen also immer wieder zum Fall (3) und schließlich zu (2).

Somit gilt für $\max(x) \ge 2$ immer $\mu(x) = \nu(x)$. QED

Im Nim-Spiel können wir die Gewinnfunktion $\nu : X \to \{0, 1\}$ leicht berechnen dank Boutons Lösung C1E. Die Sprague–Grundy–Funktion $\gamma : X \to \mathbb{N} : \gamma(x) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} x_i$ ist ebenso leicht dank C1F. Allgemein für Summen von Spielen haben wir den Satz C1K von Sprague–Grundy.

Das Misèrespiel auf G entspricht dem Normalspiel auf G', in dem alle terminalen Zustände von G gelöscht wurden. Für die Theorie ist das eine elegante Formulierung, doch die konkreten Rechnungen verändern sich dramatisch. Oft erweist sich das Misèrespiel als wesentlich schwieriger.

In Misère-Nim können wir die Gewinnfunktion $\mu : X \to \{0, 1\}$ und entsprechend die normale Gewinnfunktion $\nu' : X' \to \{0, 1\}$ erfreulich leicht berechnen durch den Kniff C1L. Das ist ein glücklicher Zufall.

Für die Sprague–Grundy–Funktion $\gamma' : X' \to \mathbb{N}$ von Misère-Nim ist jedoch keine geschlossene Formel oder effiziente Berechnung bekannt: Der Sprague–Grundy–Satz funktioniert wunderbar für Normalspiele, doch für Misèrespiele scheint er keine Entsprechung zu erlauben.

Der Mathematiker Eliakim Hastings Moore (1862–1932) war ab 1892 Professor an der University of Chicago und baute dort das bald schon legendäre Mathematik-Department auf. Von ihm stammt das folgende Spiel $\mathrm{Nim}_{<k}$ als eine Verallgemeinerung des Nim-Spiels:

Der ziehende Spieler entfernt Steine aus mindestens einem, aber weniger als k Haufen: Zustandsmenge ist $X = \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ und ein Zug $x \to y$ bedeutet $x \geq y$ mit $0 < \sharp\operatorname{supp}(x-y) < k$. (Moores $\mathrm{Nim}_{<2}$ ist also Boutons Nim.)

Wir entwickeln binär $x_i = \sum_j 2^j x_{ij}$ mit $x_{ij} \in \{0,1\}$ und definieren die **Moore–Funktion** $M(x) = \sum_j k^j (\sum_i x_{ij} \operatorname{rem} k)$. Wir bilden hier also die Spaltensumme modulo k. (Im Falle $k = 2$ ist das Boutons Nim-Summe.)

Damit konnte Moore 1910 sein Spiel $\mathrm{Nim}_{<k}$ elegant und effizient lösen:

Satz C1M: Moores Lösung seines Spiels $\mathrm{Nim}_{<k}$

Genau dann ist x eine Verlustposition in $\mathrm{Nim}_{<k}$, wenn $M(x) = 0$ gilt.

📖 E.H. Moore: *A generalization of the game called Nim.* Annals of Math. 11 (1910) 93–94. Moore publizierte seine Lösung ohne Beweis, vermutlich hielt er diesen für allzu leichtgewichtig für die Annals of Mathematics.

Das können Sie nun nachholen und Moores Lösung ausarbeiten:

Übung: Beweisen Sie Satz C1M zu $\mathrm{Nim}_{<k}$ nach Vorbild von C1E zu Nim:
(0) Aus $x \in X$ mit $M(x) = 0$ führt jeder Zug $x \to y$ zu $M(y) \geq 1$.
(1) Aus $x \in X$ mit $M(x) \geq 1$ führt ein Zug $x \to y$ zu $M(y) = 0$.

Man könnte für alle $k \geq 2$ vermuten, dass die Sprague–Grundy–Zahl durch M gegeben ist. Im klassischen Falle $k = 2$ gilt dies nach Satz C1F.
(2) Diese Vermutung ist falsch! Finden Sie ein Gegenbeispiel für $k \geq 3$.
Damit erreichen wir unversehens schon offene Forschungsfragen:

Offene Frage: Was ist die Sprague–Grundy–Funktion des Spiels $\mathrm{Nim}_{<k}$? Können wir sie ähnlich effizient berechnen wie im klassischen Fall $k = 2$?

Wir betrachten weiterhin Moores $\mathrm{Nim}_{<k}$. Soweit ich weiß, ist für seine Sprague–Grundy–Funktion $\gamma : X \to \mathbb{N}$ keine einfache Lösung bekannt.

Wenn mit genau $n = k$ Stapeln gespielt wird, so gibt es eine Lösung von T.A. Jenkyns, J.P. Mayberry: *The skeletion of an impartial game and the Nim-Function of Moore's Nim_k*. Int. J. of Game Theory 9 (1980) 51–63.

Wenn genau k Stapel reduziert werden müssen, so finden Sie eine Lösung in E. Boros *et al.*: *On the Sprague–Grundy function of Exact-Nim_k*. Discrete Applied Mathematics 239 (2018) 1–14. `doi.org/10.1016/j.dam.2017.08.007`

Lasker–Nim: Berechnung dank Sprague–Grundy

Eine interessante Variation entsteht, wenn man die Spielregel wie folgt festsetzt: Der am Zuge Befindliche darf irgendeinen der Haufen in zwei Haufen zerteilen oder aber, nach seinem freien Ermessen, verkleinern.
Emanuel Lasker: *Brettspiele der Völker.* Scherl Verlag, Berlin 1931.

Aufgabe: Lösen Sie dieses Spiel, **Lasker–Nim**, möglichst effizient. Berechnen Sie zu jeder Position $x = (x_1, \dots, x_n)$ die Grundy–Zahl $\gamma(x)$.

Lösung: Das Spiel ist eine Summe, dank Sprague–Grundy gilt also

$$\gamma : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \gamma(x_1) \oplus \dots \oplus \gamma(x_n).$$

Wir benötigen demnach nur noch $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Laut Spielregel gilt:

$$\gamma(x) = \operatorname{mex}\big[\, \{\, \gamma(y) \mid 0 \le y < x \,\} \cup \{\, \gamma(y) \oplus \gamma(z) \mid x = y + z,\ 1 \le y \le z \,\} \,\big]$$

Wir berechnen folgende Tabelle (memoisierte Rekursion, bottom-up):

$x =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\gamma =$	0	1	2	4	3	5	6	8	7	9	10	12	11

Lasker–Nim: Berechnung dank Sprague–Grundy

Übung: Rechnen Sie die obigen Fälle $x = 0, 1, 2, \dots, 12$ sorgfältig nach. Formulieren Sie die allgemeine Regel. Beweisen Sie diese per Induktion.

Übung: Welchen Zeitaufwand $T(x)$ haben beide Methoden für $\gamma(x)$?
(0) Die naive Rekursion, ohne Speicherung von Zwischenergebnissen.
(1) Die memoisierte Rekursion, wie in obiger Tabelle illustriert.
(2) Die allgemeine Regel, die Sie soeben bewiesen haben.
Vergleichen Sie dies mit unserer Diskussion zu einzeiligem Nim.

Übung: Denken Sie sich „zufällig“ einige Spielpositionen $x \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ aus. Ist dies eine Gewinn- oder Verlustposition in Lasker–Nim? Wie nutzen Sie Ihre Vorarbeit? Nennen Sie jeweils alle Gewinnzüge in dieser Position.

Ähnliche Formeln gelten für alle **Take-and-Break-Spiele**: Der ziehende Spieler darf Objekte entfernen und/oder einen Haufen teilen, wozu viele verschiedene Regeln denkbar sind. In *Winning Ways*, Kapitel 4 „Taking and Breaking“ wird für die Familie der sogenannten **Octalen Spiele** eine konzise Notation eingeführt, siehe `en.wikipedia.org/wiki/Octal_game`.

Grundys Spiel: eine ungelöste Vermutung

Das Spiel beginnt mit einem Haufen von $x \in \mathbb{N}$ Objekten. Der ziehende Spieler teilt einen Haufen seiner Wahl in zwei Haufen ungleicher Größe. Wir vereinbaren Normalspiel: Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

Aufgabe: Dieses Spiel heißt **Grundys Spiel**. Lösen Sie es für kleine x: Berechnen Sie zur Position x die Grundy–Zahl $\gamma(x)$, soweit möglich.

Lösung: Die Sprague–Grundy–Funktion $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist gegeben durch:

$$\gamma(x) = \operatorname{mex}\big[\, \{\, \gamma(y) \oplus \gamma(z) \mid x = y + z,\ 1 \le y < z \,\} \,\big]$$

Wir berechnen folgende Tabelle (memoisierte Rekursion, bottom-up):

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
γ	0	0	0	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	3	2	1	3	2	4	3	0

Anders als bei Lasker–Nim erkennen wir hier kein einfaches Muster, das unsere Rekursion zu einer effizienten Lösung abkürzen könnte.

Offene Frage: Ist diese Sprague–Grundy–Funktion $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ periodisch?

Grundys Spiel: eine ungelöste Vermutung

Elwyn Berlekamp, John Horton Conway und Richard Guy vermuten in ihrem Buch *Winning Ways* (1982), dass γ tatsächlich periodisch ist.
Richard Guy: *Unsolved Problems in Combinatorial Games* (1996), online verfügbar unter `library.msri.org/books/Book29/files/unsolved.pdf`

Sie können selbst weitere Werte berechnen, leichter mit Computerhilfe. So hat Achim Flammenkamp die ersten $2^{38} \approx 2.74 \cdot 10^{11}$ Werte berechnet, zusammengefasst unter `wwwhomes.uni-bielefeld.de/achim/grundy.html`. Ein periodisches Verhalten konnte allerdings noch niemand entdecken. Die zunächst simple Rekursion erzeugt eine erstaunlich komplexe Folge.

Übung: Denken Sie sich „zufällig“ einige Spielpositionen $x \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ aus. Ist dies eine Gewinn- oder Verlustposition in Grundys Spiel? Wie nutzen Sie hier Ihre Vorarbeit? Nennen Sie alle Gewinnzüge in dieser Position.

Übung: Spielpositionen $x \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ beschreiben wir am besten sortiert, etwa $(x_1 \ge x_2 \ge \dots \ge x_n)$ wie für Partitionen üblich. Schreiben Sie den Spielgraphen für einige kleine Startwerte (x_1) möglichst explizit aus.

Eindimensionales Fliesentetris (Klausur 2022)

Alice und Bob spielen auf einem horizontalen Spielbrett von n Feldern. Sie legen abwechselnd je einen Dominostein, jeder Stein bedeckt zwei benachbarte, noch freie Felder. Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

Für $n = 19$ oder $n = 26$ könnte der Zustand nach drei Zügen so aussehen:

0			3	4	5	6			9	10	11	12	13	14			17	18

0	1	2	3			6	7	8	9	10	11	12	13	14	15			18	19	20	21	22	23		

Aufgabe: (1) Berechnen Sie die Grundy–Zahl $\gamma(n)$ für $n \le 10$.
(2) Berechnen Sie $\gamma(n)$ für $n \le 100$ mit einem Python–Skript.
(3) Welche der obigen Zustände sind Gewinnpositionen?
(4) Nennen Sie hierzu alle Gewinnzüge.

In der Klausur haben wir Hilfestellungen gegeben, um die Rechnungen etwas abzukürzen und die knappe Bearbeitungszeit effizient zu nutzen. Sie haben es jetzt viel besser und können den Knobelspaß genießen! Mit Frage (2) erproben Sie Ihre Python–Skills und die Memoisation.

Eindimensionales Fliesentetris (Klausur 2022)

Lösung: (1) Es gilt $\gamma(n) = \operatorname{mex}\{\,\gamma(k) \oplus \gamma(n-2-k) \mid 0 \le k \le n-2\,\}$. Anfangs finden wir $\gamma(0) = \gamma(1) = \operatorname{mex}\{\,\} = 0$, und dann rekursiv

$$\begin{aligned}
\gamma(2) &= \operatorname{mex}\{\,0\,\} &&= 1,\\
\gamma(3) &= \operatorname{mex}\{\,0,0\,\} &&= 1,\\
\gamma(4) &= \operatorname{mex}\{\,1,0,1\,\} &&= 2,\\
\gamma(5) &= \operatorname{mex}\{\,1,1,1,1\,\} &&= 0,\\
\gamma(6) &= \operatorname{mex}\{\,2,1,0,1,2\,\} &&= 3,\\
\gamma(7) &= \operatorname{mex}\{\,0,2,0,0,2,0\,\} &&= 1,\\
\gamma(8) &= \operatorname{mex}\{\,3,0,3,0,3,0,3\,\} &&= 1,\\
\gamma(9) &= \operatorname{mex}\{\,1,3,1,3,3,1,3,1\,\} &&= 0,\\
\gamma(10) &= \operatorname{mex}\{\,1,1,2,1,0,1,2,1,1\,\} &&= 3.
\end{aligned}$$

$n=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\gamma=$	0	0	1	1	2	0	3	1	1	0	3

Eindimensionales Fliesentetris (Klausur 2022)

(2) Wir implementieren zunächst die Funktion `mex` wie auf Seite C107. Eine erste Berechnung mit Python, hastig und naiv, sieht dann so aus:

```python
def gamma(n):
    if n <= 1: return 0;
    return mex({ gamma(k)^gamma(n-2-k) for k in range(0,n-1) })
```

☹ Diese naive Implementierung hat exponentiellen Aufwand. (Warum?) Ab 20 wird es langsam, schon 30 oder 40 dauert eine gefühlte Ewigkeit.

☺ Memoisation reduziert dies auf quadratischen Aufwand. (Warum?) Damit ist selbst die Rechnung bis 1000 blitzschnell. Probieren Sie es!

```python
Gamma = { 0: 0, 1: 0 }
for n in range(2, 1001):
    Gamma[n] = mex({ Gamma[k]^Gamma[n-2-k] for k in range(0,n-1) })
```

☺ Die Funktion $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist periodisch ab $x = 53$ mit Periode 34. Man muss also schon eine Weile rechnen um ein Muster zu erkennen. Dieses Spiel heißt auch *Dawson Kayles*, siehe Siegel: CGT, Seite 185f. Periodizität folgt dort aus dem allgemeinen Satz 2.7 für oktale Spiele.

Eindimensionales Fliesentetris (Klausur 2022)

Nun konkret zu den gezeigten Spielständen:

(3a) Dieser Zustand ist die Summe der Spiele mit 1, 4, 6, 2 freien Feldern. Die Grundy–Zahl ist $0 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 1 = 0$. Dies ist eine Verlustposition.

(3b) Dieser Zustand ist die Summe der Spiele mit 4, 10, 6 freien Feldern. Die Grundy–Zahl ist $2 \oplus 3 \oplus 3 = 2 \ne 0$. Dies ist eine Gewinnposition.

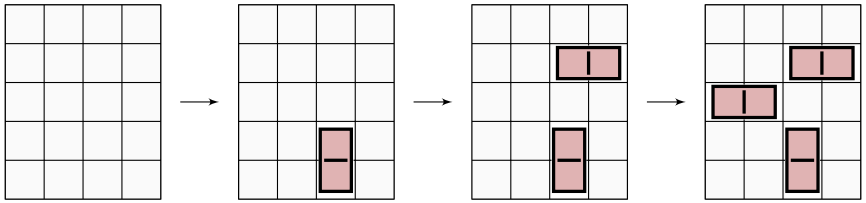
(4) Für den Zustand in (3b) gibt es genau die folgenden neun Gewinnzüge:

$$\{1,2\}, \{6,7\}, \{7,8\}, \{9,10\}, \{11,12\}, \{13,14\}, \{14,15\}, \{19,20\}, \{21,22\}$$

Ausführlich: Wir reduzieren die Grundy–Zahl von $2 \oplus 3 \oplus 3 = 2$ auf 0. Erster Summand von 2 auf 0: nur ein möglicher Zug. Zweiter Summand von 3 auf 1: weitere 6 Züge. Dritter Summand von 3 auf 1: weitere 2 Züge.

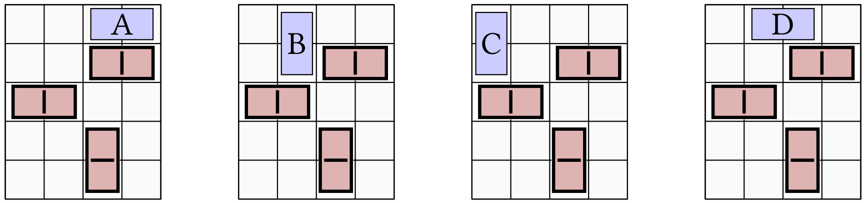
☺ Hier zahlt sich aus, dass wir in (1) die Rechnung dokumentiert haben. Die Grundy–Zahl $\gamma(n) = \operatorname{mex}\{\,\gamma(m) \mid n \to m\,\}$ entscheidet über Gewinn und Verlust. Für die systematische Konstruktion aller Gewinnzüge jedoch benötigen wir darüber hinaus alle Folgezustände $n \to m$ mit einem vorgegebenen Grundy–Wert $\gamma(m)$. Damit gelingt es leicht.

Fliesentetris: Endspiel-Analyse dank Sprague–Grundy



Das Spielfeld besteht aus Quadraten, zum Beispiel rechteckig 4×5.
Beide Spieler ziehen abwechselnd, der Ziehende legt ein Domino auf zwei benachbarte freie Quadrate. Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

Aufgabe: Wie lässt sich hier der Sprague–Grundy–Satz anwenden? Im oben skizzierten konkreten Beispiel? Allgemein als Algorithmus? Welcher der folgenden vier Züge A–D führt zum Gewinn?



Fliesentetris: Endspiel-Analyse dank Sprague–Grundy

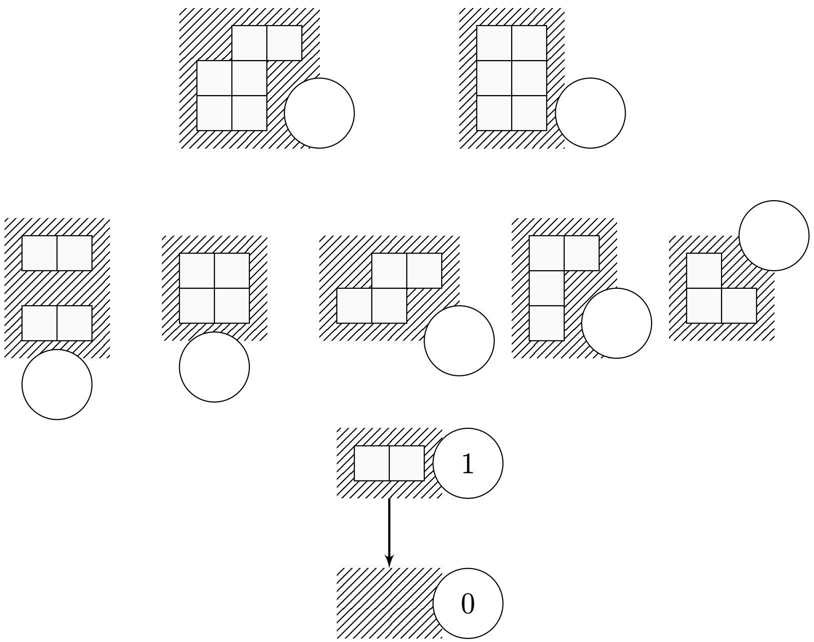
Wir parkettieren hier mit Dominos: Das ist Tetris für Fliesenleger!
Der hier entdeckte Trick gilt ganz allgemein für **Positionsspiele**:
Die Spieler erobern Positionen mit Spielsteinen und behalten diese.
Im Verlauf entstehen Inseln, also Zusammenhangskomponenten,
die sich nicht mehr gegenseitig beeinflussen. Das nutzen wir gerne:
Das Spiel zerfällt nachfolgend in die Summe seiner Komponenten!

Es genügt daher, jede **Komponente** zu analysieren, den Graphen G_i zu erstellen und seine Sprague–Grundy–Funktion γ_i zu berechnen.
Für das gesamte (End-)Spiel gilt dann $G = \bigoplus_{i\in I} G_i$ und $\gamma = \bigoplus_{i\in I} \gamma_i$.
Die Berechnung von γ gelingt auf diesem Wege wesentlich effizienter.
Anschließend lesen wir aus $x \mapsto \gamma(x)$ alle Gewinnzüge ab. Voilà!

🙂 Der Sprague–Grundy–Satz lässt sich überall bei Summen einsetzen.
Diese bilden wir willkürlich, indem wir beliebige Spiele parallel spielen.
Manchmal entstehen Summen auch von ganz alleine, ohne unser Zutun.

🙂 Das entspricht übrigens der **externen** und der **internen** Summe, wie Sie dies von Vektorräumen und ähnlichen Strukturen kennen.

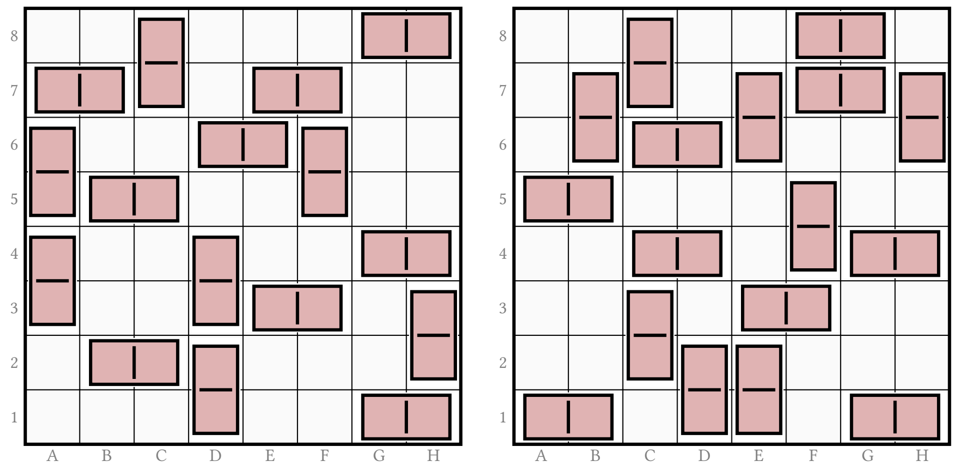
Fliesentetris: Endspiel-Analyse dank Sprague–Grundy



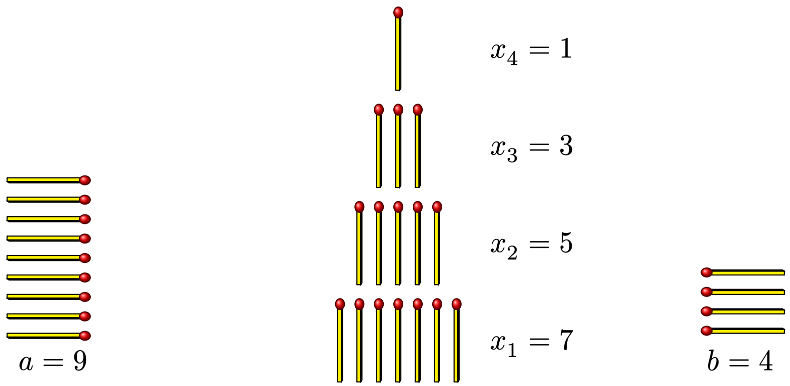
Fliesentetris: Endspiel-Analyse dank Sprague–Grundy

Aufgabe: (1) Bestimmen Sie den Spielgraphen und die Grundy–Zahlen.
Als Hilfestellung zeigt die vorige Folie die kleinsten möglichen Inseln.

(2) Sind die folgenden Spielstände Gewinn- oder Verlustpositionen?
Nennen Sie alle Gewinnzüge! Wie viele gibt es jeweils?



Poker-Nim: Geben ist seliger als Nehmen?



Das Spiel **Poker-Nim** wird gespielt wie Nim mit Spielständen $x \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$: Der ziehende Spieler A nimmt $s \geq 1$ Streichhölzer eines Haufens x_r zu seinem Haufen a, oder legt umgekehrt $s \geq 1$ Streichhölzer von a zu x_r. Entsprechend für Spieler B und seinen Haufen b.

Aufgabe: (1) Formalisieren Sie Poker-Nim als ein neutrales Spiel (G, v). (2) Ist die oben gezeigte Position eine Gewinn- oder Verlustposition? Allgemein: Wie erkennen Sie Gewinnpositionen und Gewinnzüge?

Poker-Nim: Geben ist seliger als Nehmen?

Bislang betrachteten wir nur Spiele (G, v) auf artinschen Graphen G, also ohne unendliche Wege $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots$, somit ohne Schleifen. Egal wie gespielt wird, das Spiel endet nach endlich vielen Zügen.

Ausgehend von der terminalen Auszahlung $v : \partial G \to \{0, 1\}$ konstruieren wir per Rückwärtsinduktion C1B die **Gewinnfunktion** $u : X \to \{0, 1\}$:
(T) Für jeden terminalen Zustand $x \in \partial X$ gilt $u(x) = v(x)$.
(A) Für jeden aktiven Zustand $x \in X^\circ$ gilt $u(x) = \sup_{x \to y}[1 - u(y)]$.

Das bedeutet ausführlich als Fallunterscheidung:
(A0) Falls $u(x) = 0$: Für jeden Zug $x \to y$ gilt $u(y) = 1$.
(A1) Falls $u(x) = 1$: Es existiert ein Zug $x \to y$ mit $u(y) = 0$.

Poker-Nim und Northcotts Spiel (siehe C217) sind erste Illustrationen zu **Schleifenspielen** (engl. *loopy games* nach John H. Conway 1978).

A priori ist es hier möglich, unendlich lange zu spielen. Bei optimalem Spiel kann jedoch einer der beiden Spieler seinen Gewinn erzwingen!

🙂 Zur Lösung beschränken wir explizit die Zeit bis zum Spielende.

Poker-Nim: Geben ist seliger als Nehmen?

Definition C2A: erweiterte Gewinnfunktion mit Zeitschranke

Sei $G = (X, A, \sigma, \tau)$ ein Graph mit Auszahlung $v : \partial G \to \{0, 1\}$.

Eine **erweiterte Gewinnfunktion** $\tilde{u} = (u, w) : X \to \{0, 1\} \times \mathbb{N}$ besteht aus einer Gewinnfunktion $u : X \to \{0, 1\}$ mit Zeitschranke $w : X \to \mathbb{N}$.
(T) Für jeden terminalen Zustand $x \in \partial X$ gilt $w(x) = 0$ und $u(x) = v(x)$.
(A) Für jeden aktiven Zustand $x \in X^\circ$ gilt $w(x) \geq 1$ und zudem:
(A0) Falls $u(x) = 0$: Für jeden Zug $x \to y$ gilt $u(y) = 1$ und $w(y) \leq w(x)$.
(A1) Falls $u(x) = 1$: Es gibt $x \to y$ mit $u(y) = 0$ und $w(y) < w(x)$.

Beispiel: Mit dieser genial-einfachen Technik lösen wir Poker-Nim: Zustand $(x, a, b) \in X := \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \times \mathbb{N}^2$, Zug $(r, s) : (x, a, b) \to (x', a', b')$ mit $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}$, $1 \leq s \leq x_r$ oder $1 \leq -s \leq a$, $x' = x - s\, e_r$, $a' = b$, $b' = a + s$.

Die Gewinnfunktion ist $u : X \to \{0, 1\} : (x, a, b) \mapsto 1 \wedge \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} x_i$, genau wie beim klassischen Nim-Spiel, nun erweitert durch die explizite Zeitschranke $w : X \to \mathbb{N} : (x, a, b) \mapsto [1 - u(x)]a + u(x)b + \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i$.

Übung: Dieses Paar (u, w) erfüllt alle Forderungen aus Definition C2A.

Poker-Nim: Geben ist seliger als Nehmen?

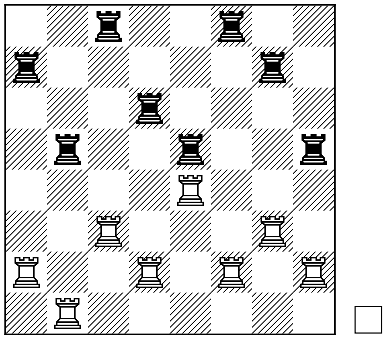
Interpretation: Beim Spielstand $x \in X$ mit $u(x) = 1$ kann der ziehende Spieler seinen Gewinn erzwingen, indem er stets reduzierend zieht (A1); er benötigt dann höchstens $w(x)$ Züge bis zu seinem sicheren Gewinn. (Wir setzen wie immer optimale Spielweise voraus.)

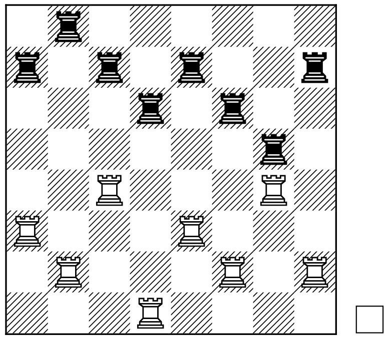
Im Falle $u(x) = 0$ wird der ziehende Spieler verlieren – wie immer bei optimalem Spiel seines Gegners. Der ziehende Spieler kann dies selbst nicht verhindern, sondern höchstens auf $w(x)$ Züge hinauszögern. (Verzögern lohnt sich, wenn der Gegner gelegentlich Fehler macht.)

🙂 Erlaubt unser Spiel (G, v) eine erweiterte Gewinnfunktion (u, w), so ist damit das Spiel gelöst: Jeder optimale Spielverlauf ist endlich, wir erkennen die Gewinnpositionen an der Eigenschaft $u(x) = 1$ und die (reduzierenden) Gewinnzüge $x \to y$ an $u(y) = 0$ und $w(y) < w(x)$.

Übung: Wir spielen um Gewinn $+1$ oder Verlust -1, diesmal zusätzlich mit Diskont $\delta \in \,]0, 1[$, etwa $\delta = 1/2$. Existiert zu jedem Graphen (G, v) eine Gewinnfunktion $\bar{u}$? Wie interpretieren Sie $\bar{u}$? Welche Beziehung besteht zur obigen Gewinnfunktion u mit Zeitschranke w?

Northcotts Spiel: Türme ziehen ohne Ende?





Gezogen wird abwechselnd weiß und schwarz (Markierung am Rand).
Der Ziehende bewegt einen Turm nur vertikal und soweit Platz ist.
Wir vereinbaren Normalspiel: Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

Aufgabe: (1) Formalisieren Sie dies als ein neutrales Spiel (G, v).
Ist der Spielgraph G hier endlich? Wie viele Zustände hat er?
Ist der Spielgraph artinsch? Endet jeder (optimale) Spielverlauf?
(2) Sind die beiden obigen Positionen Gewinn- oder Verlustposition?
Allgemein: Wie erkennen Sie Gewinnpositionen und Gewinnzüge?

Northcotts Spiel: Türme ziehen ohne Ende?

Dieses bekannte Beispiel heißt auch **Northcotts Spiel**.
Es ist insofern ungewöhnlich (und interessant!), als die Regeln allein nicht garantieren, dass jeder Spielverlauf wirklich endet.
Es ist hier durchaus möglich, unendlich lange zu spielen!

Überraschend zeigt sich jedoch, dass bei optimalem Spiel einer der beiden Spieler seinen Gewinn erzwingen kann. Sehen Sie wer und wie?
Dahinter versteckt sich eine weitere Variante des obigen Poker-Nim.
Das ist genau das Ziel der obigen Aufgabe. Probieren Sie es!

Übung: Ist dieses Spiel die Summe seiner Spalten? Falls ja, so lässt sich der Sprague–Grundy–Satz C1K direkt anwenden. Falls nein, so lässt sich das Spiel vielleicht geschickt umformulieren in eine äquivalente Summe.
Das vereinfacht die Analyse und ermöglicht eine effiziente Lösung!

Übung: Untersuchen Sie folgende Variante: Über bzw. unter jeder Zeile markiert eine Münze, welcher der beiden Türme als nächstes gezogen wird. Nach jedem Zug in dieser Spalte wird die Münze nach unten bzw. oben umgelegt. Ist dieses variierte Spiel die Summe seiner Spalten?

Northcotts Spiel: Türme ziehen ohne Ende?

Wir lösen Northcotts Spiel durch eine geeignete Zeitschranke:

Definition C2B: erweiterte Grundy–Funktion mit Zeitschranke

Sei $G = (X, A, \sigma, \tau)$ ein Graph. Eine **erweiterte Grundy–Funktion** $\tilde{\gamma} = (\gamma, w) : X \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ besteht aus einer Grundy–Funktion $\gamma : X \to \mathbb{N}$ und einer Zeitschranke $w : X \to \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

(T) Für jeden terminalen Zustand $x \in \partial X$ gilt $w(x) = 0$ und $\gamma(x) = 0$.
(A) Für jeden aktiven Zustand $x \in X^\circ$ gilt $w(x) \ge 1$ und zudem:
(A0) Für jeden Zug $x \to y$ gilt $\gamma(y) \ne \gamma(x)$ und $w(y) \le w(x)$.
(A1) Zu $0 \le n < \gamma(x)$ existiert $x \to y$ mit $\gamma(y) = n$ und $w(y) < w(x)$.

Interpretation: Bei $\gamma(x) > 0$ gewinnt der ziehende Spieler das Spiel in $\le w(x)$ Zügen, wenn er immer reduzierend zieht wie in (A1) erklärt.

☺ Erlaubt unser Spiel $(G, 0)$ eine erweiterte Grundy–Funktion (γ, w), so ist damit das Spiel gelöst: Jeder optimale Spielverlauf ist endlich, wir erkennen die Gewinnpositionen an der Eigenschaft $\gamma(x) \ge 1$ und die (reduzierenden) Gewinnzüge $x \to y$ an $\gamma(y) = 0$ und $w(y) < w(x)$.

Northcotts Spiel: Türme ziehen ohne Ende?

Lemma C2C: Eindeutigkeit und Existenz

Sind (u, w) und (u', w') erw. Gewinnfunktionen zu (G, v), so gilt $u = u'$.
Sind (γ, w) und (γ', w') erw. Grundy–Funktionen zu $(G, 0)$, so gilt $\gamma = \gamma'$.

Ist G artinsch, so existiert zu (G, v) eine erw. Gewinnfunktion (u, w).
Ist G artinsch und lokal-endlich, so existiert zum Normalspiel $(G, 0)$ eine erw. Grundy–Funktion (γ, w). Wie zuvor gilt dann $\nu = \gamma \wedge 1$.

☺ Für lösbare Schleifenspiele gilt der Satz von Sprague–Grundy C1K:

Satz C2D: Sprague–Grundy für Schleifenspiele

Gegeben sei eine Familie von Graphen G_i indiziert durch $i \in I$, jeder mit einer erweiterten Grundy–Funktion $(\gamma_i, w_i) : X_i \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Dann erlaubt ihre Summe $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ die erweiterte Grundy–Funktion $(\gamma, w) : X \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $\gamma(x) = \bigoplus_{i \in I} \gamma_i(x_i)$ und $w(x) = \sum_{i \in I} w_i(x_i)$.

Übung: Rechnen Sie Satz und Lemma sorgfältig nach! Damit lösen Sie Summen von Schleifenspielen. Wie lösen Sie damit Northcotts Spiel?

Das Spiel Chomp! nach David Gale

Beim Spiel $\mathrm{Chomp}(m \times n)$ geht es um eine $m \times n$–Tafel Schokolade. Alice und Bob ziehen abwechselnd; die ziehende Spieler:in isst ein Feld $(i, j) \in \{0, \dots, m-1\} \times \{0, \dots, n-1\}$ und alle rechts-oben davon. Das Feld $(0, 0)$ links unten ist jedoch bitter; wer es isst, verliert.

Aufgabe: (1) Welcher der beiden Spieler kann den Gewinn erzwingen? (2) Welche Startzüge sind gewinnend? Finden Sie Gewinnstrategien! Inwiefern können Sie hier die Sprague–Grundy–Theorie anwenden?

Das Spiel Chomp! nach David Gale

Fun fact: „Chomp!“ heißt soviel wie „Mampf!“ oder „Schmatz!“. *Consommer avec modération!* (Mit Mäßigung zu genießen!)

Das Spiel Chomp ähnelt Nim, mit einem entscheidenden Unterschied: Beim Nim-Spiel sind die Zeilen unabhängig und werden parallel gespielt. Bei Chomp hingegen sind Zeilen und Spalten miteinander verbunden, das Spiel ist daher keine Summe von Zeilen / Spalten-Teilspielen!

Eine Anwendung von Summen ist, wie wir wissen, die Endspiel-Analyse: Im Spiel Chomp tritt sie nur auf, wenn zwei getrennte Arme übrig sind.

Die geschickte Zerlegung und überaus effiziente Berechnung des Sprague–Grundy–Satzes steht uns hier sonst nicht zur Verfügung. Ohne dieses Werkzeug müssen wir meist mühsam rekursiv rechnen. Das erklärt die erhöhte Komplexität, die wir im Folgenden spüren.

Natürlich können wir dennoch die Sprague–Grundy–Funktion dieses Spiels berechnen: Wir nutzen sie wie nach wie vor zur externen Summe, etwa wenn wir mehrere Chomp-Spiele (oder andere) parallel spielen. Aber sie nützt uns eben leider nicht für eine interne Summenzerlegung.

Das Spiel Chomp: Gewinnen ist möglich, aber wie?

Satz C2E: Symmetrie und Strategieklau

(0) Das Spiel $\mathrm{Chomp}(1 \times n)$ entspricht einzeiligem Nim, kurz $\mathrm{Nim}(n-1)$.

(1) Beim quadratischen Spiel $\mathrm{Chomp}(n \times n)$ beliebiger Größe $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ hat Alice eine Gewinnstrategie: Sie zieht $(1, 1)$ und erhält das Nim-Spiel $\mathrm{Nim}(n-1) \oplus \mathrm{Nim}(n-1)$. Anschließend spiegelt sie jeden Zug von Bob.

(2) Bei jedem rechteckigen Spiel $\mathrm{Chomp}(m \times n)$ mit $m, n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ hat Alice eine Gewinnstrategie, jedoch nur implizit, im Allgemeinen unbekannt.

Beweis: Aussagen (0) und (1) sind klar.

(2) Angenommen, Bob hätte eine Gewinnstrategie $s_B : X^\circ \to A$. Das gilt insbesondere nach Alice’ erstem Zug $(m-1, n-1) : x_0 \to x_1$, das heißt, Bob hat einen Gewinnzug $s_B(x_1) = (i, j) : x_1 \to x_2$. Dann hat auch Alice den Gewinnzug $(i, j) : x_0 \to x_2$. $\boxed{\text{QED}}$

Das Spiel Chomp: Gewinnen ist möglich, aber wie?

⚠ Quadratisches Chomp ist gemäß dieser Lösung trivial, als Spiel somit langweilig. Schon rechteckiges Chomp jedoch ist notorisch schwierig!

☺ Wir stehen vor einer erstaunlichen Situation: Alice hat nachweislich eine Gewinnstratgie, diese ist im Allgemeinen jedoch (noch) unbekannt!

Der obige Beweis wird *Strategieklau* genannt, siehe Satz C2F. Es ist ein indirekter Beweis, durch Widerspruch, und demnach nicht konstruktiv. Das ist trickreich und elegant, wundersam und lehrreich, aber nicht konstruktiv: Der Beweis sagt uns nur, dass für Alice eine Gewinnstrategie existiert, aber unser Beweis verrät uns nicht, wie diese Strategie aussieht.

☺ *Fun fact:* Strategieklau lässt sich in manchen Brettspielen anwenden, so etwa im Spiel *Hex*. Daraus folgt ein wichtiges Resultat der Topologie: Brouwers Fixpunktsatz! Lesen Sie hierzu den preisgekrönten Artikel

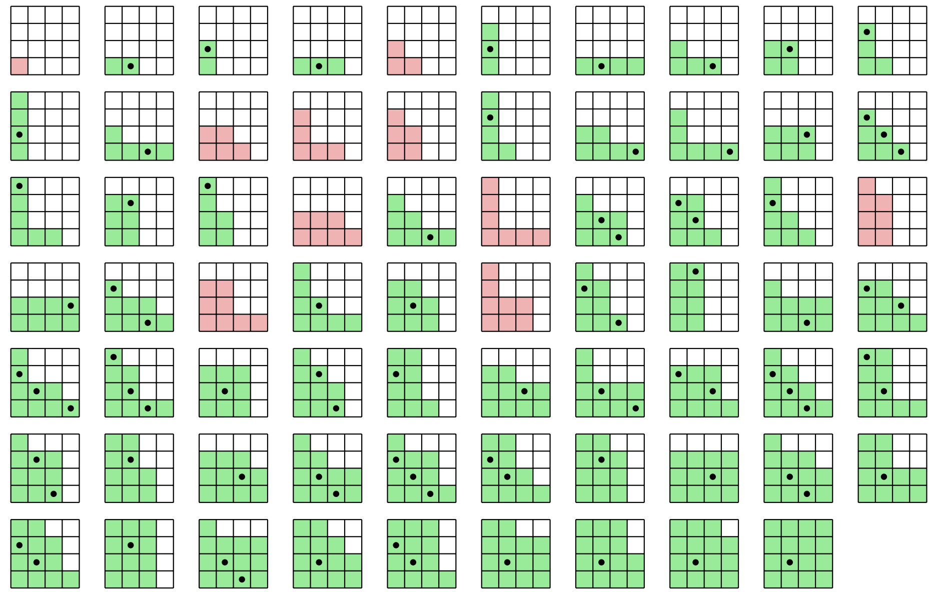
📖 David Gale: *The Game of Hex and the Brouwer Fixed-Point Theorem.* Amer. Math. Monthly 86 (1979) 818–827.

Das Spiel Chomp! nach David Gale

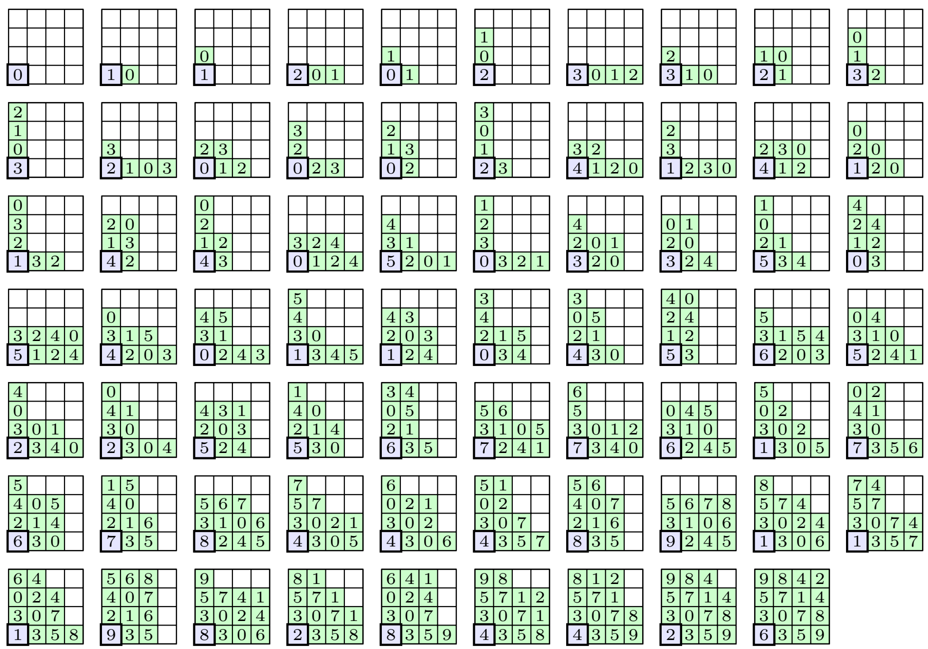
Lösung des Spiels $\mathrm{Chomp}(4 \times 3)$; markiert sind alle Gewinnzüge.

Das Spiel Chomp! nach David Gale

Lösung des Spiels $\mathrm{Chomp}(4 \times 4)$; markiert sind alle Gewinnzüge.



Sprague–Grundy–Zahlen des Spiels $\mathrm{Chomp}(4 \times 4)$



Sprague–Grundy–Zahlen des Spiels $\mathrm{Chomp}(4 \times 4)$

Welche Information beinhalten diese Zahlen? Wozu sind sie gut?

Für jede Position x steht links unten ihre Sprague–Grundy–Zahl $\gamma(x)$. Sie berechnet sich rekursiv wie gewohnt: Für jeden Zug $x \to y$ schauen wir bei der Position y ihren zuvor bereits berechneten Wert $\gamma(y)$ nach. Nach Definition (Satz C1D) finden wir damit $\gamma(x) = \operatorname{mex}\{\, \gamma(y) \mid x \to y \,\}$. Dank $\nu = \gamma \wedge 1$ berechnen wir so zugleich auch alle Gewinnpositionen x mit $\gamma(x) \geq 1$, und auch alle möglichen Gewinnzüge $x \to y$ mit $\gamma(y) = 0$.

Mit Geduld und Sorgfalt können wir also alle Werte $\gamma(x)$ berechnen, wie in obiger Tabelle. Leider erkennen wir hier kein einfaches Muster, das mühsame Rekursion zu einer effizienten Lösung abkürzen könnte.

Nach unserem derzeitigen Erkenntnisstand ist demnach Chomp spürbar komplexer als Nim: Für Nim haben wir eine effiziente Lösung, denn die Rechnung lässt sich in polynomieller Zeit durchführen, sogar linear!

Für Chomp hingegen kommen wir um die rekursive Rechnung nicht herum (soweit wir wissen), daher ist Zeitaufwand zur Berechnung von $x \mapsto \gamma(x)$ exponentiell, und so nur für kleine x realistisch durchführbar.

Das allgemeine Spiel Chomp!

Das Spiel $\mathrm{Chomp}(P, \leq)$ wird gespielt auf einer (partiell) geordneten Menge $(P, \leq)$. Gezogen wird abwechselnd. Die ziehende Spieler:in wählt $a \in P$, neues Teilspiel ist $\mathrm{Chomp}(Q, \leq)$ auf der Restmenge

$$Q = P \setminus P_{\geq a} = \{\, b \in P \mid b \ngeq a \,\}.$$

Misèrespiel: Wir fordern ein kleinstes Element $0 \in P$, also $0 \leq P$. Wer dieses Element 0 zieht (als somit letzten Zug), verliert. Das entspricht dem **Normalspiel** auf $P' = P \setminus \{0\}$.

Beispiel: Das Spiel $\mathrm{Chomp}(n)$ mit $n = \{\, 0 \leq 1 \leq 2 \leq \dots \leq n-1 \,\}$ ist einzeiliges $\mathrm{Nim}(n-1)$. Ebenso für die unendliche Menge $(\mathbb{N}, \leq)$.

Bemerkung: Sei $(P, \leq)$ total geordnet. Dann ist das Spiel $\mathrm{Chomp}(P, \leq)$ genau dann artinsch, wenn die Ordnung artinsch ist, das heißt: In $(P, \leq)$ existiert keine unendliche absteigende Kette $a_0 > a_1 > a_2 > \dots$.

Beispiel: Das Spiel $\mathrm{Chomp}(m \times n)$ mit der Produktordnung entspricht der Schokoladentafel. Ebenso Quader $p \times q \times r$ oder allgemein $(\mathbb{N}, \leq)^n$. Im Produkt $(P, \leq) = \prod_{i \in I} (P_i, \leq_i)$ ist die Ordnung $a \leq b$ erklärt durch $a_i \leq b_i$ für jede Koordinate $i \in I$: punktweiser Vergleich von Funktionen.

Wer gewinnt bei Chomp! und wie?

Für jedes rechteckige Spiel $\mathrm{Chomp}(p \times q)$ existiert eine Gewinnstrategie, doch im Allgemeinen ist sie nicht explizit bekannt! Allgemein gilt hierzu:

Satz C2F: Strategieklau im Spiel Chomp

(1) Existiert in $P' = P \setminus \{0\}$ ein Element $m \in P'$, das mit allen $x \in P'$ vergleichbar ist, so hat Bob keine Gewinnstrategie. (2) Ist das Spiel $\mathrm{Chomp}(P, \leq)$ zudem artinsch, so hat Alice eine Gewinnstrategie.

Beweis: (1) Angenommen, Bob hätte eine Gewinnstrategie. Das gilt insbesondere nach Alice' erstem Zug $m : P \to P_1 = P \setminus P_{\geq m}$, das heißt, Bob hat einen Gewinnzug $a : P_1 \to P_2 = P_1 \setminus P_{\geq a}$. Dann hat auch Alice den Gewinnzug $a : P \to P_2$. Das ist ein Widerspruch. QED

Offene Probleme: Für $\mathrm{Chomp}(n \times n \times n)$ ist die Lösung unbekannt.

David Gale bot \$100 für eine vollständige Lösung von 3D-Chomp, also allen Spielen $\mathrm{Chomp}(p \times q \times r)$; das beinhaltet 2D-Chomp.

David Gale bot zudem \$200 für die Antwort zu folgender Frage: Hat der erste Spieler in $\mathrm{Chomp}(\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ eine Gewinnstrategie?

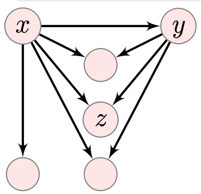
Strategieklau als allgemeine Methode

Diese Beweismethode durch Strategieklau gilt recht allgemein:

Satz C2G: Strategieklau in neutralen Spielen

Sei (G, v) ein neutrales kombinatorisches Spiel auf dem artinschen Graphen $G = (X, A, \sigma, \tau)$ mit terminaler Auszahlung $v : \partial X \to \{0, 1\}$.

Vorgelegt sei $x \in X$. Angenommen, es gibt einen Zug $x \to y$ mit $y \in X^\circ$, sodass für jeden Folgezug $y \to z$ auch $x \to z$ gilt. Dann folgt $u(x) = 1$.



Beweis: Zu (G, v) sei $u : X \to \{0, 1\}$ die Gewinnfunktion. Angenommen, es gälte $u(x) = 0$. Daraus folgt $u(y) = 1$. Somit existiert mindestens ein Zug $y \to z$ mit $u(z) = 0$. Dank $x \to z$ gilt dann $u(x) = 1$. Widerspruch! QED

Für jeden solchen (in y vollen) Teilgraphen ist x eine Gewinnposition.
Übung: Welche weiteren Teilgraphen mit dieser Eigenschaft finden Sie?
🙂 Der Beweis zeigt $u(x) = 1$, denn ein Gewinnzug $x \to ?$ existiert.
☹ Der indirekte Beweis gibt keinen Gewinnzug $x \to ?$ explizit an.

Strategieklau als allgemeine Methode

Übung: (1) Vergleichen Sie die abstrakten Existenzaussagen der beiden Sätze mit explizit-konstruktiven Lösungen. Was nützt wozu?

(2) Warum ist das unendliche Spiel Chomp auf $(\mathbb{N}, \leq)^d$ artinsch? Wir versehen $\mathbb{N}^d$ mit der Produktordnung $x \leq y$ gdw $\forall i : x_i \leq y_i$.

(3) Hat in $\mathrm{Chomp}(\mathbb{N}^2)$ der erste Spieler eine Gewinnstrategie? Beweisen Sie dies konstruktiv-explizit oder abstrakt-existentiell?

Hermann Weyl (1885–1955) formulierte die Problematik sehr treffend: Ein Existenzsatz verkündet „das Vorhandensein eines Schatzes, ohne jedoch zu verraten, an welchem Ort. […] Nicht das Existenztheorem ist das Wertvolle, sondern die im Beweise geführte Konstruktion.“ (*Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik*, 1921)

Die Existenz einer Lösung ist wichtig, doch meist nur ein erster Schritt. Die explizite Lösung ist eine ungleich schwierigere Frage, doch gerade für Anwendungen unabdingbar. Das gilt insbesondere für Spiele!

Wie viel Rationalität benötigen wir?

Wir erinnern an unsere Annahme unbeschränkter Rationalität (A2A):

$\mathscr{R}_0$: Jeder Spieler will sein Ergebnis (Nutzen, Gewinn, ...) maximieren.

$\mathscr{R}_1$: Jeder Spieler versteht zudem alle Spielregeln und Konsequenzen.

$\mathscr{R}_2$: Es gilt die vorige Aussage $\mathscr{R}_1$, und jeder Spieler weiß dies.

Wie viel Rationalität benötigen wir speziell für kombinatorische Spiele?

Angenommen die ziehende Spielerin ist in einer Gewinnposition. Dann genügt ihr eine optimale Strategie, also eigene Rationalität ($\mathscr{R}_1$): Damit kann sie gewinnen, unabhängig davon wie ihr Gegner sich verhält.

Angenommen jedoch der ziehende Spieler ist in einer Verlustposition. Wenn er rational ist ($\mathscr{R}_1$) und dies auch von seiner Gegnerin weiß ($\mathscr{R}_2$), dann kann er das aussichtslose Spiel aufgeben, denn er wird verlieren.

Wenn er hingegen hofft, dass seine Gegnerin Fehler machen könnte, dann lohnt sich erwartungsgemäß weiterhin, geschickt zu spielen ($\mathscr{R}_1$).
Sprichwörtlich: *„It ain't over till it's over." / „... till the fat lady sings."*
Optimist: „Wunder geschehen." Pessimist: „Die Hoffnung stirbt zuletzt."

Wie viel Rationalität benötigen wir?

Rationalität ist eine zentrale, aber manchmal allzu starke Annahme: Im Schach kenne ich zwar alle Regeln, aber nicht alle Konsequenzen; mir fehlt die Rechenkapazität, ausreichend viele Züge vorauszudenken. Für Menschen wie für Computer ist die Komplexität entscheidend!

Unsere Vorlesungsexperimente zeigen: Fehler treten tatsächlich auf, selbst in einfachen Spielen wie einzeiligem Nim (vor dessen Lösung). Teilnehmer verstehen vollständig die Regeln und wollen gewinnen ($\mathscr{R}_0$), sie wissen auch, wie die Berechnung prinzipiell durchzuführen wäre...

Doch ohne genügend Rechenzeit, ohne Hilfsmittel wie Stift und Papier, überschreitet der exponentielle Aufwand die verfügbare Kapazität: Schon bei Spielbeginn in Position $x = 20$ scheint der Weg meist lang und schwierig genug, um den einen oder anderen Fehler zu provozieren.

Befindet man sich in einer Verlustposition, so sind zwar in der *Theorie* alle Züge gleich schlecht, aber in der *Praxis* eben nicht! Zum Beispiel lohnen sich Züge, die dem Gegner die Analyse *erschweren*, damit kann man ihn vielleicht *überraschen* und *verwirren* und so Fehler *provozieren*.

Wie viel Rationalität benötigen wir?

Nach der Lösung C1A sollte einzeiliges Nim fehlerfrei gespielt werden. Vernichtet die mathematische Lösung jeglichen Spielspaß? Vielleicht. Sie gewinnen dafür das intellektuelle Vergnügen, ein Problem zu lösen. Zudem gibt es noch viele weitere Spiele, der Spielspaß dauert also an!

Dieselben Beobachtungen wiederholen sich noch dramatischer bei Nim. Anfangs erkennen Sie wenig Struktur. Selbst wenn Sie sehen, dass Ihr Gegenüber über eine Gewinnstrategie verfügt, so können Sie diese schwerlich erraten. Alles ändert sich nach Boutons genialem Satz C1E.

Beobachten Sie dabei ihren Lernprozess vom *Whaaa?* bis zum *Aha!* Diese Interaktion in der Vorlesung kostet enorm viel Zeit und Aufwand. Viel schneller wäre, die Antworten nacheinander paradieren zu lassen, selbst wenn Sie sich zu diesem Zeitpunkt noch gar keine Fragen stellen.

Es fordert eine große Investition für alle Beteiligten, aber es lohnt sich: Sie spüren die Probleme, Sie stellen Fragen, Sie äußern erste Ideen, dafür will ich Ihnen Zeit lassen und genügend Raum für Diskussion. Im Nachgang sollen Sie alles gründlich nacharbeiten und festigen.

Wie viel Rationalität benötigen wir?

Sie verstehen jetzt auch praktisch und anschaulich, warum ich Spiele in der Vorlesung (bzw. begleitend im Casino) tatsächlich spielen will: Sie sammeln dort Erfahrungen, die die rationale Theorie illustrieren, oft genug bestätigen, aber manchmal auch darüber hinausgehen!

Alle Informationen liegen offen, Spielregeln und Zielsetzung sind klar. Um das Verhalten vorherzusagen, benötigen wir weitere Annahmen, vereinfachend setzen wir hierzu unbegrenzte Rationalität voraus. Doch Menschen verhalten sich nicht immer rational, aus diversen Gründen.

Das gilt selbst für sehr einfache Spiele, wie unsere ersten Beispiele: Denken Sie an Ihre eigene Erfahrung und an ihre ersten Versuche! Die Spannung zwischen (rationaler) Theorie und (oft sehr begrenzt rationaler) Praxis ist immer wieder überraschend und faszinierend.

Die große Herausforderung der Spieltheorie ist es, diese Kluft zu verringern, und in günstigen Fällen die Lücke gänzlich zu schließen. Sie sollten beide Sichtweisen verstehen, beurteilen und nutzen lernen. Es gelingt sicher nicht immer, aber es lohnt sich danach zu streben.

Zermelos Satz: Schach ist determiniert.

Satz C3A: Zermelo 1913
Schach ist determiniert: Entweder besitzt Weiß eine Gewinnstrategie, oder Schwarz, oder jeder Spieler kann ein Unentschieden erzwingen.

Aufgabe: (0) Formalisieren Sie das Spiel Schach als einen Graphen. (1) Ist dieser Graph artinsch? (2) Beweisen Sie damit Zermelos Satz!

Lösung: Es gibt mehrere (äquivalente) Möglichkeiten, ein gegebenes Spiel wie Schach durch einen Graphen $G = (X, A, \sigma, \tau)$ zu codieren. In weiser Voraussicht notieren wir den gesamten Verlauf der Partie:

Wir konstruieren einen **Spielbaum** ausgehend vom Startzustand 0 durch Aufzeichnen aller bisher gespielten Halb/Züge $x = z_1 z_2 \dots z_n$. Jeder nun legale Halb/Zug z ergibt eine Fortsetzung $y = z_1 z_2 \dots z_n z$. (Was wir einen Zug nennen, heißt beim Schach traditionell Halbzug.)

(0) Die Zustandsmenge X besteht aus allen legalen Halb/Zugfolgen. Jeder Halb/Zug ist eine legale Fortsetzung, formal ausgeschrieben $A = X \smallsetminus \{0\}$ mit $\sigma(z_1 \dots z_n) = z_1 \dots z_{n-1}$ und $\tau(z_1 \dots z_n) = z_1 \dots z_n$.

Zermelos Satz: Schach ist determiniert.

(1) Schach hat die **50-Züge-Regel** (`de.wikipedia.org/wiki/50-Züge-Regel`): Die Partie endet remis, wenn in den letzten 100 Halb/Zügen weder ein Stein geschlagen noch ein Bauer gezogen wurde.

Genauer: Die Partie endet nach 50 Zügen noch nicht automatisch, sondern das Remis muss von einem der Spieler reklamiert werden. Erst nach 75 Zügen wie in (1) beendet der Schiedsrichter die Partie.

Daraus folgt sofort: Der oben konstruierte Spielgraph G ist artinsch! (Die Stellung allein genügt dazu nicht, die Regeln benötigen den Verlauf. Daher herrscht Notationspflicht bei Turnierpartien.)

(2) Wir codieren Schach als den Spielgraphen $G = (X, A, \sigma, \tau)$. Die terminalen Zustände bewerten wir mit $v : \partial X \to \{-1, 0, +1\}$ als *Verlust, Remis, Gewinn* für den gerade ziehenden Spieler, und $-v$ für den Gegner. Dies ist demnach ein Nullsummenspiel.

Dank C1B existiert hierzu genau eine Gewinnfunktion $u : X \to \{\pm 1, 0\}$. Im Falle $u(0) = \pm 1$ besitzt Weiß / Schwarz eine Gewinnstrategie. Im Falle $u(0) = 0$ kann jeder Spieler ein Unentschieden erzwingen.

Algorithmische Komplexität: Wie schwierig ist Schach?

Zermelos grundlegendes Ergebnis zeigt, dass Schach determiniert ist; es definiert die Funktion u, sagt jedoch nichts über den Wert $u(0)$ aus. Viele haben versucht, diesen Wert zu bestimmen, und erhebliche Mühe investiert. Bis heute ist unbekannt, welcher der drei Fälle tatsächlich gilt.

Im Prinzip können wir die Gewinnfunktion u durch Rückwärtsinduktion berechnen. Der obige Beweis ist *konstruktiv*, das Vorgehen ist *effektiv*, doch die Berechnung nicht ausreichend *effizient*. Dieser Erfolg und die gleichzeitige Enttäuschung hat seit Zermelo viele Menschen fasziniert:

With chess it is possible, in principle, to play a perfect game or construct a machine to do so as follows: One considers in a given position all possible moves, then all moves for the opponent, etc., to the end of the game (in each variation). The end must occur, by the rules of the games after a finite number of moves (remembering the 50 move drawing rule). Each of these variations ends in win, loss or draw. By working backward from the end one can determine whether there is a forced win, the position is a draw or is lost.
Claude Shannon (1916–2001), *Programming a Computer for Playing Chess* (1950)

Algorithmische Komplexität: Wie schwierig ist Schach?

Shannon schätzte die Größe des Spielbaums G grob ab: Ein typisches Schachspiel dauert etwa 80 Halb/Züge, der ziehende Spieler hat etwa 30 mögliche Halb/Züge zur Auswahl, das ergibt grob $\sharp X \approx 30^{80} \approx 10^{120}$. Genaueres finden Sie unter `en.wikipedia.org/wiki/Shannon_number`.

Das ist eine astronomisch große Zahl, im wahrsten Sinne des Wortes: Die Anzahl aller Atome im beobachtbaren Universum wird auf etwa 10^{80} geschätzt. Shannons Zahl 10^{120} ist noch um 40 Zehnerpotenzen größer. Bei solch großen Zahlen versagt schnell unsere menschliche Intuition.

Die Berechnung von u mit brutaler Gewalt [*brute force*] ist demnach ganz offensichtlich ausgeschlossen. Nichtsdestotrotz ist es denkbar, durch geschickte, tiefsinnige Optimierung eine schnelle Berechnung zu finden und Zermelos Ergebnis C3A schließlich explizit zu berechnen.

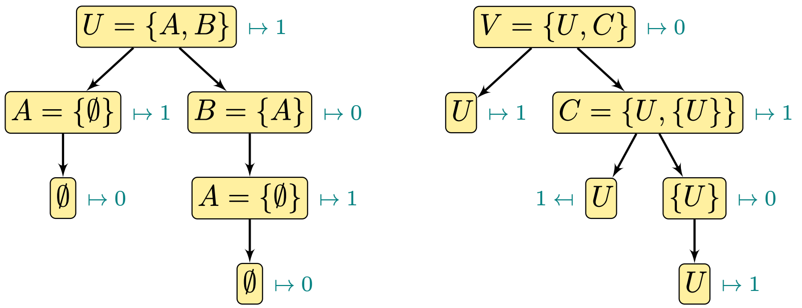
Dazu betone ich einen naiv-optimistischen Vergleich: Auch Nim mit 60 Zeilen zu 100 Objekten hat etwa $100^{60} \approx 10^{120}$ Spielzustände. Dennoch können wir Nim effizient lösen, denn es hat Struktur (als Summe), und wir haben Werkzeuge (dank Sprague und Grundy). Mathematik hilft!

Jede Menge X_0 ist ein kombinatorisches Spiel!

Aufgabe: Alice wählt ein Element $X_1 \in X_0$, dann wählt Bob $X_2 \in X_1$, usw. immer abwechselnd. Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

Bei der Startmenge $U = \{\{\{\}\}, \{\{\{\}\}\}\}$ und fehlerfreiem Spiel gewinnt...?
Bei der Startmenge $V = \{U, \{U, \{U\}\}\}$ und fehlerfreiem Spiel gewinnt...?

Lösung:



☺ Diese verblüffende Interpretation der Mengenlehre und elegante Knobelaufgabe kennen Sie aus dem Mock Exam, hier nun die Lösung.

Lösung: Zunächst in Worten, durch Scharfsinn ohne weitere Technik:

(U) Alice hat genau zwei mögliche Züge. Wenn Alice die Menge $\{\{\}\}$ spielt, dann gibt Bob ihr $\{\}$ zurück, und Alice verliert. Spielt Alice jedoch $\{\{\{\}\}\}$, so muss Bob $\{\{\}\}$ ziehen, Alice spielt dann $\{\}$ und gewinnt.

(V) Auch hier hat Alice zwei mögliche Züge. Wenn Alice die Menge U spielt, so gewinnt Bob, wie eben gesehen. Wenn Alice $\{U, \{U\}\}$ spielt, so wählt Bob geschickt $\{U\}$, Alice muss U ziehen, und Bob gewinnt.

☺ Alternativ mit den Werkzeugen dieses Kapitels (Graphen, Rekursion):

Wir stellen die Menge U bzw. V als Spielgraphen $G = (X, A, \sigma, \tau)$ dar. Damit berechnen wir rekursiv die Gewinnfunktion $u : X \to \{0, 1\}$ durch $u(x) = \sup_{x \to y}[1 - u(y)] = 1 - \inf_{x \to y}[u(y)]$, routiniert und übersichtlich.

Bei der Analyse von V können wir U gewinnbringend wiederverwenden, das ist sowohl graphisch übersichtlicher als auch rechnerisch effizienter.

☺ Jede Zermelo–Fraenkel–Menge M ist ein kombinatorisches Spiel!

Beispiele: Die leere Menge $\emptyset$ ist terminal, also eine Verlustposition. Somit ist $\{\emptyset\}$ eine Gewinnposition, ebenso jede Menge M mit $\emptyset \in M$.

Nach John von Neumann definieren wir die natürlichen Zahlen durch $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, allgemein $n + 1 = \{0, 1, \dots, n\}$. Das ist Nim!

Satz C3B: Jede Menge definiert einen Graphen.

Jede Menge M definiert einen artinschen Graphen $G = (X, A, \sigma, \tau)$ mit Wurzel M und den Kanten $x \to y$ genau dann wenn $x \ni y$.

Beweis: Offenkundig ist G demnach ein Graph. Warum ist G artinsch? Hier retten uns die Zermelo–Fraenkel–Axiome der Mengenlehre: Sie verbieten unendlich lange Elementketten $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$. QED

☺ Dies ist das *Fundierungsaxiom*, das John von Neumann 1925 in die Mengenlehre einführte. Zeitgleich begründete er die Spieltheorie. Ist die Geschichte der Mathematik nicht wunderbar?

Satz C3c: Jeder Graph definiert eine Menge.

Sei $G = (X, A, \sigma, \tau)$ ein artinscher Graph. Dank noetherscher Rekursion ordnen wir jedem Zustand $x \in X$ seine Menge $\zeta(x) := \{\zeta(y) \mid x \to y\}$ zu.

Das Graphenspiel G im Zustand x ist äquivalent zum Mengenspiel $\zeta(x)$:
(0) In beiden sind terminale Zustände Verlustpositionen. Dann induktiv:
(1) Jeder Zug $x \to y$ entspricht dem zugehörigen Zug $\zeta(x) \ni \zeta(y)$.
(2) Umgekehrt, zu jedem $z \in \zeta(x)$ existiert $y \leftarrow x$ mit $\zeta(y) = z$.

Übung: Übersetzen Sie die obigen Spiele U und V hin und zurück!

Übung: Betrachten Sie einzeiliges Nim mit einem (kleinen) Startzustand $x \in \mathbb{N}$ (wie auf Seite C101) oder Nim mit $x \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ (wie auf Seite C133) und codieren Sie dies durch die zugehörige Menge $\zeta(x)$.

Übung: Sind die oben erklärten Zuordnungen $\xi : M \mapsto (G, M)$ und $\zeta : (G, x) \mapsto \zeta(x)$ zwischen Mengen und Graphen zueinander invers? Falls keine Bijektionen, in welchem Sinne sind es Äquivalenzen?

Von Mengen und Spielen...

Mit **Mengen** können wir alle mathematischen Objekte formulieren, von den Zahlbereichen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ über Funktionen $f : X \to Y$ hin zu weiteren Strukturen wie zum Beispiel Skalarprodukte, Normen, Metriken, Topologien, σ–Algebren, Wahrscheinlichkeits/Maße, usw.

Der Phantasie sind dabei keine Grenzen gesetzt. Erstaunlicherweise lässt sich all dies dank Mengen präzise formulieren und bequem nutzen. Die Mengenlehre dient so der gesamten Mathematik als Fundament, auch nach über einhundert Jahren erfüllt sie treu ihren Zweck.

Es ist daher zunächst überhaupt nicht verwunderlich, dass wir auch Spiele im bewährten Rahmen der Mengenlehre formulieren können. Genau das haben wir mit Graphen und ggf. weiteren Daten erreicht. Die Sprache der Mengen bewährt sich auch hier wieder wunderbar.

Durchaus überraschend ist jedoch, wie nahe sich die Grundstrukturen stehen: Mengen auf der einen Seite, artinsche Graphen auf der anderen. Hier haben wir eine direkte, einfache Übersetzung in beide Richtungen, die alle wesentlichen Aspekte bewahrt, wie oben skizziert.

... zur mathematischen Grundlagenforschung

John H. Conway perfektionierte die enge Verbindung von Spielen und Mengen in seinem berühmten Buch *On Numbers and Games* (1976).

Als sympathisch-spielerische Einführung schrieb Donald E. Knuth 1974 *Surreal Numbers*, ein Dialog zwischen Alice und Bob über die ersten 20 Seiten von *ONAG*. Er richtet sich an Studienanfänger:innen, mit dem Wunsch, ihnen spielerisch mathematische Forschung nahezubringen.

Of course, I wrote this mostly for fun, […] but I must admit that I also had a serious purpose in the back of my mind. Namely, I wanted to provide some material that would help to overcome one of the most serious shortcomings in our present educational system, the lack of training for research work. […] Conway's recent approach to numbers struck me as the perfect vehicle for illustrating the important aspects of mathematical explorations, because it is a rich theory that is almost self-contained, yet with close ties to both algebra and analysis, and because it is still largely unexplored.

Donald E. Knuth, *Surreal Numbers* (1974)

Numberphile, `youtu.be/mPn2AdMH7UQ`

Conways surreale Zahlen

Conways surreale Zahlen ähneln Dedekind–Schnitten: Wir erzeugen jede Zahl $\langle L : R \rangle$ durch zwei Mengen L und R von Zahlen mit $L \ngeq R$, d.h. kein Element $a \in L$ darf größer oder gleich einem Element $b \in R$ sein.

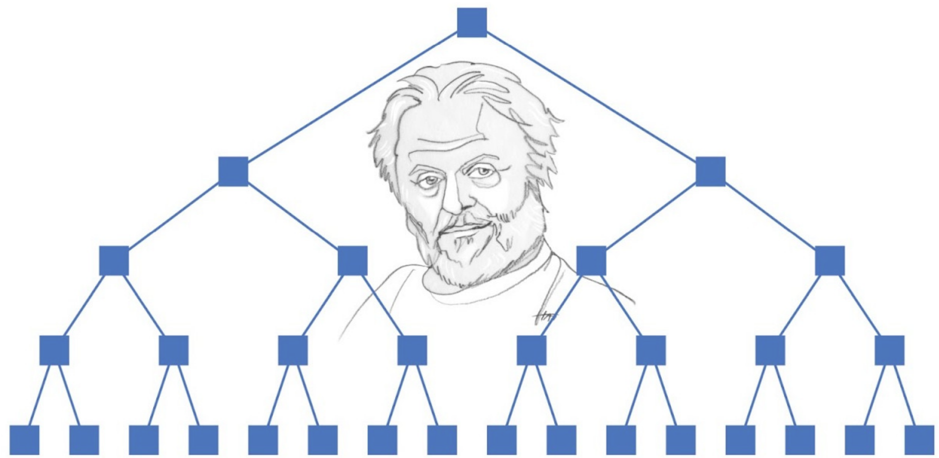
Konstruktion: Seien $L = \{a, a', \dots\}$ und $R = \{b, b', \dots\}$ zwei Mengen surrealer Zahlen mit $L \ngeq R$, das heißt für alle $(a, b) \in L \times R$ gelte $a \ngeq b$. Dann ist das Paar $x = \langle L : R \rangle \overset{\text{kurz}}{=} \langle a, a', \dots : b, b', \dots \rangle$ eine surreale Zahl. Jede surreale Zahl lässt sich auf diese rekursive Weise beschreiben.

Vergleichsregel: Für surreale Zahlen $x = \langle L_x \mid R_x \rangle$ und $y = \langle L_y \mid R_y \rangle$ definieren wir $x \le y$ durch die Bedingungen $L_x \ngeq \{y\}$ und $\{x\} \ngeq R_y$. Diese Relation ist total, reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch. Wir definieren daher die Äquivalenz $x \equiv y$ durch $x \le y \wedge y \le x$.

Aufgabe: Konstruieren Sie rekursiv die einfachsten surrealen Zahlen!

Lösung: Die leere Menge $\emptyset$ führt zur surrealen Zahl $0 := \langle : \rangle$ mit $0 \le 0$. Sodann entstehen $-1 := \langle 0 : \rangle$ und $+1 := \langle : 0 \rangle$ mit $-1 < 0 < +1$. Hingegen ist $\langle 0 : 0 \rangle$ keine surreale Zahl, denn hier gilt $0 \le 0$.

Conways surreale Zahlen



Prof. Edmund Weitz: *Surreale Zahlen.* `youtu.be/Q9gGVUiMo04`

Knuth schrieb sein Buch als Inspiration zur mathematischen Forschung. Machen Sie sich die Freude und entdecken Sie! Lauschen Sie dem obigen Interview mit Knuth oder dem schönen Video von Prof. Weitz. *Enjoy!*

Die Frucht der Erkenntnis... von wahr und falsch

∀  ∃

Die Frucht der Erkenntnis... von wahr und falsch

Dieses Gemälde von Tizian (Tiziano Vecellio, 1488–1576) zeigt den Sündenfall des Menschen. Die Paradieserzählung im Buch Genesis der Bibel spricht vom **Baum der Erkenntnis von Gut und Böse** (Gen 2,9). Ich interpretiere dies freizügig als Erkenntnis von **wahr und falsch**.

Im Folgenden spielen ausnahmsweise mal nicht Alice und Bob, sondern zwecks Diversität und Abwechslung nun Eva und Adam, genauer ∃va und ∀dam, denn uns geht es speziell um die Quantoren. Diese beiden hauchen bewährter mathematischer Logik ihre Seele ein.

Erste Quantorenspiele erlernt jede:r Studierende im ersten Semester der Mathematik. Wir gehen einen mutigen Schritt weiter und wollen diese Quantorenspiele wirklich *spielen*, live und interaktiv im Hörsaal/Casino. Wie immer machen wir uns auf einige Überraschungen gefasst!

Was winkt als Bonus? Das Spiel spornt an. Konkrete Zahlen üben das Rechnen. Der Wunsch nach Systematisierung vertieft das Verständnis. Die Schwierigkeiten werden greifbar: schrittweise Lernen und Üben, formales Protokol, rechnerisch-algorithmische Komplexität, usw.

Quantorenspiele: ∃va gegen ∀dam

Jede Aussage mit Existenz- und Allquantoren ist ein Spiel!

Jede Aussage bekommt ein faires Verfahren, Anklage und Verteidigung: ∃va spielt die Existenzquantoren und möchte die Behauptung **er**füllen. ∀dam spielt die Allquantoren und möchte die Behauptung **an**fechten.

Nulltes Beispiel: Zum Aufwärmen betrachten wir

$$(1)\quad \forall q \in \mathbb{Q}_{>0} \;\; \exists z \in \mathbb{Z} \;:\; 2^z \ge q$$

$$(2)\quad \forall q \in \mathbb{Q}_{>0} \;\; \exists z \in \mathbb{Z} \;:\; 2^{z-1} < q \le 2^z$$

Sei $\mathbb{P} = \{p_0 < p_1 < p_2 < \dots\}$ die Menge der Primzahlen und $p_{-1} = 0$.

$$(3)\quad \forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists p \in \mathbb{P} \;:\; p > n$$

$$(4)\quad \forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists k \in \mathbb{N} \;:\; p_{k-1} \le n < p_k$$

Jede (vollständig ausformulierte) Gewinnstrategie für ∃va ist ein *Beweis*. Jede Gewinnstrategie für ∀dam hingegen *widerlegt* die Behauptung.

Quantorenspiele: ∃va gegen ∀dam

Je nach Formulierung des Spiels ist die Rechenlast / Beweislast spürbar unterschiedlich für ∀dam und ∃va... und evtl. sogar für die Spielleitung! Für (1,2) genügt $z = \lceil \log_2(q) \rceil$. Für (3) genügt $p = \operatorname{lpf}(n!) + 1$, den Wert k für (4) hingegen berechnen wir nur mühsam, selbst mit einem Computer. Zum Spielspaß müssen daher die Regeln präzisiert werden: Wie dürfen / müssen die Daten codiert werden? Dezimal? Als Formel? Als Programm? Wer muss den Wahrheitswert von Aussagen überprüfen / nachweisen ?

Sei $h_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ die harmonische Reihe, mit $h_0 = 0$ und $h_{-1} = -\infty$.

$$(5)\quad \forall q \in \mathbb{Q} \;\; \exists n \in \mathbb{N} \;:\; h_n \ge q$$

$$(6)\quad \forall q \in \mathbb{Q} \;\; \exists n \in \mathbb{N} \;:\; h_{n-1} < q \le h_n$$

Wir spielen die Summe $x_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k^2$ der reziproken Quadratzahlen.

$$(7)\quad \exists q \in \mathbb{Q} \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\ge m} \;:\; q - \varepsilon < x_n \le q$$

$$(8)\quad \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \;\; \exists q \in \mathbb{Q} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\ge m} \;:\; q - \varepsilon < x_n \le q$$

Wer gewinnt, ∀dam oder ∃va? Wie genau, mit welcher Strategie?

Quantorenspiele: ∃va gegen ∀dam

Jede Aussage mit Existenz- und Allquantoren ist ein Spiel!

Jede Aussage bekommt ein faires Verfahren, Anklage und Verteidigung:
∃va spielt die **E**xistenzquantoren und möchte die Behauptung **e**rfüllen.
∀dam spielt die **A**llquantoren und möchte die Behauptung **a**nfechten.

Erstes Beispiel: Als Spieldaten betrachten wir die Folge

$$(1) \quad x_n := \textstyle\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}.$$

Zwei mögliche Spielregeln sind:

$$(\mathrm{K}) \quad \exists a \in \mathbb{Q} \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \; : \; |x_n - a| < \varepsilon$$

$$(\mathrm{C}) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \;\; \exists a \in \mathbb{Q} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \; : \; |x_n - a| < \varepsilon$$

Weitere Spieldaten, für noch mehr Spielspaß:

$$(2) \quad x_n := \textstyle\sum_{k=0}^{n} (-2)^k$$

$$(3) \quad x_n := \textstyle\sum_{k=0}^{n} 1/k!$$

Quantorenspiele: ∃va gegen ∀dam

Die „Epsilontik“ ist eine geniale Errungenschaft der Analysis. Sie hat im 19. Jh. der intuitiven Vorstellung des infinitesimal Kleinen eine tragfähige Grundlage geschaffen und ist seither überall phantastisch erfolgreich. Es lohnt, dieses Juwel menschlicher Erkenntnis zu verstehen.

Manchmal kann es helfen, Quantorenfolgen als Spiele zu begreifen. (K) ist Konvergenz, (C) ist Cauchy, es gilt (K) ⇒ (C). In (1) hat Eva für beides eine Gewinnstrategie, in (2) Adam. In (3) gewinnt Eva (C), doch Adam gwinnt (K), denn in $\mathbb{Q}$ ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy, aber nicht konvergent!

Eine bewährte mathematische Weisheit besagt: Wenn wir eine Aussage beweisen wollen, sollten wir zugleich versuchen, unsere Argumente zu widerlegen. Das erzieht uns, ja zwingt uns, zu (selbst)kritischer Prüfung. Wir verteilen nun die Rollen explizit und erleben manche Überraschung!

Meist spielt leider nur eine Person, in der Vorlesung, beim Rechnen, als Hausaufgabe, in der Klausur, etc. Wir spielen dies im Casino Royal als „Team ∃va“ gegen „Team ∀dam“. Selbst wer theoretisch alles versteht, erlebt interaktiv erfahrungsgemäß neue Aspekte und Aha-Momente.

Quantorenspiele: ∃va gegen ∀dam

Jede Aussage mit Existenz- und Allquantoren ist ein Spiel!

Jede Aussage bekommt ein faires Verfahren, Anklage und Verteidigung:
∃va spielt die **E**xistenzquantoren und möchte die Behauptung **e**rfüllen.
∀dam spielt die **A**llquantoren und möchte die Behauptung **a**nfechten.

Zweites Beispiel: Als Spieldaten betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : x \mapsto \operatorname{sign}(x^2 - 2) \qquad \text{auf } X = \mathbb{Q}.$$

Zwei mögliche Spielregeln sind:

$$\forall a \in X \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \;\; \exists \delta \in \mathbb{Q}_{>0} \;\; \forall x \in X \; : \; |a - x| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \;\; \exists \delta \in \mathbb{Q}_{>0} \;\; \forall a \in X \;\; \forall x \in X \; : \; |a - x| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon$$

Weitere Spieldaten, für noch mehr Spielspaß:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{sign}(x^2 - 2) \qquad \text{auf } X = \mathbb{R},$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{dist}(x, \frac{1}{k!}\mathbb{Z}) \qquad \text{auf } X = \mathbb{R}.$$

Quantorenspiele: ∃va gegen ∀dam

Was ist nach einer Episode bewiesen? Vermutlich noch nahezu nichts. Nach vielen Episoden wächst die Überzeugung. Gewinnt immer ∃va? Gewinnt immer ∀dam? Können wir eine Gewinnstrategie formulieren? Jede vollständig ausgearbeitete Gewinnstrategie ist ein formaler Beweis!

Durchführung des Spiels ist näherungsweise ein **Null-Wissen-Beweis** [*zero knowledge proof*]: ∃va überzeugt ∀dam, dass sie einen Beweis hat, ohne ihren Beweis selbst preiszugeben; der Nachweis geschieht durch wiederholtes Spiel, bis ∀dam überzeugt ist (oder ∃va aufgibt).

Ich habe im Spiel bewusst auf Stichworte wie „konvergente Folge“ oder „Cauchy–Folge“, „stetige Funktion“ oder „gleichmäßig stetig“ verzichtet. Das ist Teil des Entdeckens, Ausprobierens, Spielens, … Wer sie kennt, genießt gewisse Vorteile, und verspürt doch erneut Anfängerfreuden.

Das obige Spielprinzip interpretiert die Logik als „dialogisches Spiel“. Dazu existiert inzwischen eine umfangreiche mathematische Literatur, speziell in der (infinitären) Logik und der (deskriptiven) Mengenlehre.
`en.wikipedia.org/wiki/Axiom_of_determinacy` `youtu.be/Kj5RCs1FHcc`

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila

C325

Samson und Dalila, Gemälde von Peter Paul Rubens um 1610, National Gallery London

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila

C326

Wir spielen auf zwei totalen Ordnungen, hier ein konkretes Beispiel:

$$X = \{0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7\}$$
$$Y = \{0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9\}$$

In Runde $n = 1, 2, 3, \dots$ ziehen die Spieler Elemente $(a_n, b_n) \in X \times Y$:
(0) Verfügbar sind $X_n = X \smallsetminus \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ und $Y_n = Y \smallsetminus \{b_1, \dots, b_{n-1}\}$.
(1) Samson (*spoiler*) wählt ein Element, entweder $a_n \in X_n$ oder $b_n \in Y_n$.
(2) Delila (*duplicator*) wählt komplementär dazu $b_n \in Y_n$ oder $a_n \in X_n$.

Dabei muss stets Monotonie gelten, also $a_i < a_j \Leftrightarrow b_i < b_j$ für alle i, j.
Anschaulich verbinden wir alle Paare (a_i, b_i) ohne Überkreuzungen.

Samson bekommt anfangs 5€ und zahlt 1€ an Delila für jede Antwort.
Samson will einen Unterschied zwischen $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$ aufdecken.
Delila will dies verhindern oder zumindest möglichst lange verzögern.

Im Casino spielen zwei Teams, Links und Rechts. Um die unglückliche Asymmetrie aufzuheben, spielt Team Links auf der linken Tafel Samson und auf der rechten Tafel Delila, Team Rechts entsprechend umgekehrt.

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila

C327 Erläuterung

Erfolgreiche Strategien ähneln einer binären Suche: Teile und herrsche! Sie wollen eine nachweislich optimale Strategie? Hier ist die Challenge:

Satz C3D: Isomorphiespiel zwischen endlichen Totalordnungen

Zu $k := |X| < |Y| < \infty$ sei $\nu(k)$ die kleinste Zahl n, für die Samson eine Strategie hat, mit der er spätestens in Runde $n+1$ gewinnt. Dann gilt

$$\nu(k) = \lfloor \log_2(k+1) \rfloor.$$

Aufgabe: Wie findet man dieses schöne Ergebnis? Bestimmen Sie $\nu(k)$ für kleine Werte $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$. Daraus entsteht eine Vermutung!

Lösung: Kleine Werte können Sie leicht austüfteln. Dabei entsteht die folgende Tabelle, dazu eine allgemeine Vermutung und Beweisidee.

$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7	…	14	15	…	30	31	…
$\nu(k) =$	0	1	1	2	2	2	2	3	…	3	4	…	4	5	…

Die Werte entstehen aus $\lambda(0) = 0$ rekursiv durch $\lambda(k+1) = \lambda(\lfloor k/2 \rfloor) + 1$.
Inkremente entstehen nur bei $1, 3, 7, 15, \dots$, also gilt $\lambda(k) = \lfloor \log_2(k+1) \rfloor$.

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila

C328 Erläuterung

Beweis: Wir beweisen (1) $\nu(k) \leq \lambda(k)$ und (2) $\nu(k) \geq \lambda(k)$ per Induktion über $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ gilt $\nu(0) = 0 = \lambda(0)$. Im Folgenden sei also $k \geq 1$.

(1) Samson halbiert $Y = Y_{<b} \sqcup \{b\} \sqcup Y_{>b}$ mit $|Y_{>b}| - |Y_{<b}| \in \{0, 1\}$. Nach Delilas Zug $X = X_{<a} \sqcup \{a\} \sqcup X_{>a}$ gilt $|X_{<a}| \neq |Y_{<b}|$ oder $|X_{>a}| \neq |Y_{>b}|$. Daraus wählt Samson (X', Y') mit $|X'|$ minimal. Damit erreicht Samson $|X'| \leq \lfloor (k-1)/2 \rfloor$ und spielt weiter auf (X', Y'). Per Induktion folgt:

$$\nu(k) \;\leq\; 1 + \nu(\lfloor (k-1)/2 \rfloor) \;\leq\; 1 + \lambda(\lfloor (k-1)/2 \rfloor) \;=\; \lambda(k)$$

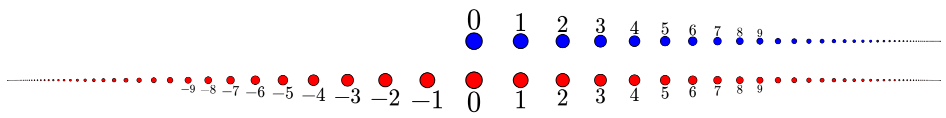
(2) Egal wie Samson zieht, entweder $a \in X$ oder $b \in Y$, Delila kann stets so parieren, dass jedes der beiden Intervallpaare (X', Y') links und rechts $\lfloor (k-1)/2 \rfloor \leq |X'| < |Y'|$ oder $|X'| = |Y'|$ erfüllt. Per Induktion folgt:

$$\nu(k) \;\geq\; 1 + \nu(\lfloor (k-1)/2 \rfloor) \;\geq\; 1 + \lambda(\lfloor (k-1)/2 \rfloor) \;=\; \lambda(k)$$

Das beweist den Satz durch Konstruktion optimaler Strategien. $\boxed{\text{QED}}$

Ganz praktisch können Sie diese Strategien direkt erproben: Spielen! Sowohl (1) als auch (2) erfordern einige Fallunterscheidungen: Übung!

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila



Wir spielen $(\mathbb{N},\leq)$ gegen $(\mathbb{Z},\leq)$. Samsons Gewinnstrategie als Formel:

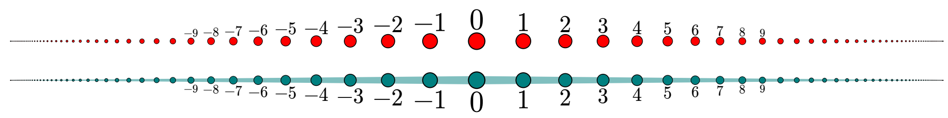
$$\exists a_1 \in \mathbb{N}\ \ \forall a_2 \in \mathbb{N} : a_1 \leq a_2$$
$$\forall b_1 \in \mathbb{Z}\ \ \exists b_2 \in \mathbb{Z}\ : b_1 > b_2$$

Die erste Aussage ist wahr für $(\mathbb{N},\leq)$. Die zweite Aussage negiert die erste und ist wahr für $(\mathbb{Z},\leq)$; wir ersetzen $\mathbb{N}$ durch $\mathbb{Z}$ und a_n durch b_n. Diese Formel unterscheidet also beide Strukturen! Das übersetzt Samson in seine Gewinnstrategie, indem er jeweils die Existenzquantoren spielt.

Ausführlich: Samson wählt das kleinste Element $a_1 = 0$ in $(\mathbb{N},\leq)$. Delila antwortet mit irgendeinem Element b_1 in $(\mathbb{Z},\leq)$. Samson wählt dazu nun b_2 in $(\mathbb{Z},\leq)$ mit $b_2 < b_1$. Daraufhin muss Delila aufgeben.

☺ Die Anzahl der Runden entspricht der Anzahl der Variablen.

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila



Wir spielen $(\mathbb{Z},\leq)$ gegen $(\mathbb{Q},\leq)$. Samsons Gewinnstrategie als Formel:

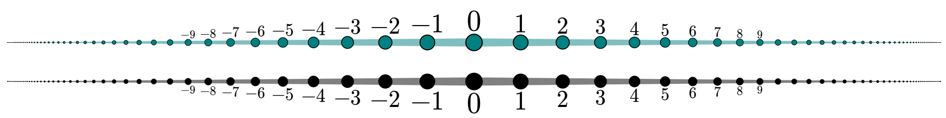
$$\exists a_1 \in \mathbb{Z}\ \ \exists a_2 \in \mathbb{Z}\ \ \forall a_3 \in \mathbb{Z} : \big[a_1 < a_2 \wedge (a_1 \geq a_3 \vee a_3 \geq a_2)\big]$$
$$\forall b_1 \in \mathbb{Q}\ \ \forall b_2 \in \mathbb{Q}\ \ \exists b_3 \in \mathbb{Q} : \big[b_1 \geq b_2 \vee (b_1 < b_3 \wedge b_3 < b_2)\big]$$

Die zweite Aussage ist wahr für $(\mathbb{Q},\leq)$; sie besagt, die Ordnung ist dicht. Die erste Aussage negiert die zweite und ist wahr für $(\mathbb{Z},\leq)$, da nicht dicht. Diese Formel unterscheidet also beide Strukturen! Das übersetzt Samson in seine Gewinnstrategie, indem er die Existenzquantoren spielt.

Ausführlich: Samson wählt zwei Elemente a_1 und $a_2 = a_1 + 1$ in $(\mathbb{Z},\leq)$. Delila antwortet mit Elementen b_1 und b_2 in $(\mathbb{Q},\leq)$ mit $b_1 < b_2$. Samson wählt b_3 in $(\mathbb{Q},\leq)$ mit $b_1 < b_3 < b_3$. Daraufhin muss Delila aufgeben.

☺ Die Anzahl der Runden entspricht der Anzahl der Variablen.

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila



Wir spielen $(\mathbb{Q},\leq)$ gegen $(\mathbb{R},\leq)$. Hier kommt das Spiel nie zum Ende!

Die geordneten Mengen $(\mathbb{Q},\leq)$ und $(\mathbb{R},\leq)$ sind nicht isomorph, schon die zugrundeliegenden Mengen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ erlauben keine Bijektion: Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind abzählbar, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ überabzählbar.

Dennoch führt das Isomorphiespiel (in nur endlicher Zeit) zu keiner Entscheidung: Weder Samson noch Delila kann einen Gewinn erzwingen, da dem jeweils anderen immer noch weitere Zugmöglichkeiten bleiben.

Gleichbedeutend: Diese beiden Ordnungen sind **elementar äquivalent**, jede Aussage der Logik erster Stufe (endlich viele Quantoren je über eine Elementvariable) hat für $(\mathbb{Q},\leq)$ und $(\mathbb{R},\leq)$ denselben Wahrheitswert.

☺ Es gibt nicht-isomorphe Modelle, die elementar äquivalent sind!

Isomorphiespiele: Samson gegen Delila

Wir erklären die **n–Äquivalenz** $(X,\leq) \equiv_n (Y,\leq)$ zweier Ordnungen dadurch, dass Delila immer mindestens n Runden überstehen kann.

Dem gegenüber steht der **Quantorenrang** $\mathrm{qr}(\varphi)$ einer Formel $\varphi \in \mathrm{FO}(\leq)$ als die Schachtelungstiefe der Quantoren: Ist φ atomar, also von der Form $(x \leq y)$, so gilt $\mathrm{qr}(\varphi) := 0$. Rekursiv definieren wir $\mathrm{qr}(\neg\varphi) := \mathrm{qr}(\varphi)$ und $\mathrm{qr}(\varphi \vee \psi) = \mathrm{qr}(\varphi \wedge \psi) := \max\{\mathrm{qr}(\varphi), \mathrm{qr}(\psi)\}$ für alle Junktoren sowie $\mathrm{qr}(\forall x : \varphi) = \mathrm{qr}(\exists x : \varphi) := \mathrm{qr}(\varphi) + 1$ für die Quantoren. Wir schreiben $\mathrm{FO}_n(\leq)$ für die Menge aller Formeln von Quantorenrang höchstens n.

Satz C3E: Korrespondenzsatz von Ehrenfeucht–Fraïssé

Genau dann gilt n–Äquivalenz $(X,\leq) \equiv_n (Y,\leq)$, wenn jede Formel $\varphi \in \mathrm{FO}_n(\leq)$, vom Quantorenrang $\leq n$, auf beiden Modellen denselben Wahrheitswert ergibt, formal geschrieben $\big((X,\leq) \vDash \varphi\big) \Leftrightarrow \big((Y,\leq) \vDash \varphi\big)$.

Der Beweis gelingt per Induktion über n. Dies wird hier nicht ausgeführt.
📖 N. Immermann: *Descriptive Complexity.* Springer 1999, Thm. 6.10.
L. Libkin: *Elements of Finite Model Theory.* Springer 2012, Thm. 3.9.

Kapitel D

Markov–Spiele und Bellmans Optimalitätsprinzip

My first task in dynamic programming was to put it on a rigorous basis. I found that I was using the same technique over and over again to derive a functional equation. I decided to call it "The principle of optimality." Oliver Gross said one day, 'The principle is not rigorous.' I replied, 'Of course not. It's not even precise.' A good principle should guide the intuition.
Richard Bellman (1920–1984), *Eye of the Hurricane* (1984)

Inhalt dieses Kapitels D

Motivation und Überblick

When working in the field of analysis it is exceedingly helpful to have some underlying physical processes clearly in mind.
Richard Bellman (1920–1984), *Eye of the Hurricane* (1984)

In diesem Kapitel betrachten wir Markov–Spiele, in denen ein Akteur gegen den „blinden Zufall" spielt und eine **optimale Strategie** sucht. Ich beginne simpel und möglichst **problemorientiert** [*problem driven*]: Wie können wir uns in sehr einfachen Bei-Spielen optimal verhalten? Daraus ergeben sich die richtigen Fragen, oft direkt von Studierenden, die wir dann durch Aufbau einer **passenden Theorie** zu lösen suchen [*method driven*]. Beide Arbeitsweisen ergänzen sich bestens.

Je considère comme complètement inutile la lecture de gros traités d'analyse pure: un trop grand nombre de méthodes passent en même temps devant les yeux. C'est dans les travaux d'application qu'on doit les étudier; c'est là qu'on juge leurs capacités et qu'on apprend la manière de les utiliser.
Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

Motivation und Überblick

In den vorigen Kapiteln haben wir die **Rekursion** / Rückwärtsinduktion kennen und nutzen und schätzen gelernt. In Anwendungen sind die zu lösenden Gleichungen oft nicht rekursiv aufgebaut, also nicht von klein nach groß „topologisch" sortierbar, sondern selbstbezüglich / zyklisch. Dies sind allgemeine **Fixpunktgleichungen**. Ihre wunderschöne Theorie und praktische Anwendung sind überall von enormer Bedeutung.

📖 Nancy L. Stokey, Robert E. Lucas: *Recursive Methods in Economic Dynamics.* Harvard Univ. Press 1989

Lars Ljungqvist, Thomas J. Sargent: *Recursive Macroeconomic Theory.* The MIT Press (3rd ed.) 2012

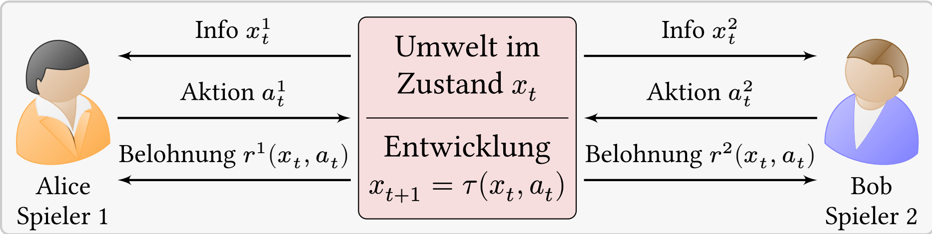
Die hier gesuchte Optimierung des strategischen Handelns führt aus algorithmischer Sicht zum **maschinellen Lernen** [*machine learning*].

📖 Stuart Russell, Peter Norvig: *Artificial Intelligence: A Modern Approach.* Addison Wesley (3rd ed.) 2016 (Kapitel 17: Making complex decisions)

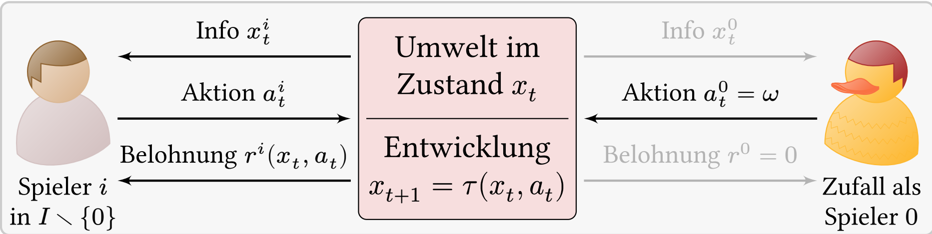
Richard S. Sutton, Andrew G. Barto: *Reinforcement Learning.* The MIT Press (2nd ed.) 2018 (hier speziell §6.5: Q–learning).

Dynamische Spiele und strategische Interaktion

Dynamisches System mit Steuerung durch zwei Spieler: Markov–Spiel



Steuerung durch mehrere Spieler und Zufall: Markov–Spiel (MMDP)



Jeder Spieler will seinen individuellen Gesamtnutzen maximieren.

Dynamische Spiele und strategische Interaktion

In Kapitel C haben wir **neutrale kombinatorische Spiele** betrachtet: Spieler ziehen abwechselnd und haben dieselben Zugmöglichkeiten. Das vereinfacht die Analyse und enthüllt besonders klare Strukturen: Der Satz von Sprague–Grundy überführt jedes neutrale Spiel in ein äquivalentes Nim-Spiel und erlaubt (oft genug) eine effiziente Lösung.

Unser Ziel sind nun **allgemeine Spiele** für zwei oder mehr Personen, bei denen die Spieler:innen abwechselnd oder auch gleichzeitig ziehen. Bevor wir solche Spiele erklären und lösen, möchte ich noch etwas genauer einige spezielle und besonders einfache Fälle beleuchten.

In diesem Kapitel untersuchen wir Markov–Spiele, mit nur einem Spieler, aber Zufallszügen. Es handelt sich also um **Spiele gegen den Zufall**. Das Verhalten des Zufalls ist (in unseren Modellen) fest vorgegeben, daher handelt es sich um ein (stochastisches) **Optimierungsproblem**.

Der übliche Name hierfür ist **Markov–Entscheidungsprozess** [*Markov decision process*, MDP], doch auch das ist nichts anderes als ein Spiel. Hierzu erkläre ich erste schöne Beispiele und Lösungsmethoden.

Markov–Spiele und Entscheidungstheorie

Menschen stehen fortwährend vor Entscheidungen, kleinen wie großen. Dabei sind kurzfristige Vorteile gegen langfristige Ergebnisse abzuwägen. Für manche Probleme genügt es, den kurzfristigen Gewinn zu optimieren; dieses Verhalten heißt daher **gieriger Algorithmus** [*greedy algorithm*].

In vielen interessanten und relevanten Anwendungen führt jedoch eine kurzfristige Gewinnmaximierung langfristig zu schlechten Ergebnissen. Jetzige Entscheidungen beeinflussen spätere, daher können solche Fragen beliebig kompliziert werden und wir benötigen scharfe Denkwerkzeuge.

Im Laufe unserer Evolution hat sich dazu ein **leistungsfähiges Gehirn** als vorteilhaft erwiesen: Damit können wir planen, mögliche Handlungen im Geiste vollziehen sowie ihre Konsequenzen abschätzen und vergleichen. Wir können **fiktiv spielen** bevor wir **real handeln**. Denken hilft!

Markov–Entscheidungsprozesse behandeln solche Problemstellungen: Sie liefern einen gemeinsamen Rahmen zur Modellierung dieser Fragen sowie Werkzeuge zur optimalen Lösung sequentieller Entscheidungen. Die Mathematik hilft uns beim Planen und vorausschauenden Handeln.

Markov–Spiele und Entscheidungstheorie

Entscheidungen unter Unsicherheit sind ein allgegenwärtiges Problem. Markov–Entscheidungsprozesse sind darunter ein wichtiger Spezialfall. Wir gehen im Weiteren von folgenden starken Vereinfachungen aus, ihre klaren Vorteile und Einschränkungen sind uns wohl bewusst:

1. Wir betrachten nur einen Spieler und den „blinden Zufall“ als Gegner. (In vielen Anwendungen interagieren mehrere Spieler, dazu später. Wir lösen zunächst das Optimierungsproblem für einen Spieler, Nash–Gleichgewichte übertragen alles auf mehrere Spieler.)
2. Die Zeit ist diskret, also endlich $t \in \{0, \dots, N\}$ oder unendlich $t \in \mathbb{N}$. (Viele Anwendungen möchten wir mit kontinuierlicher Zeit $t \in [a, b]$ oder $t \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ beschreiben, doch das zeitdiskrete Modell ist meist wesentlich einfacher und eine hinreichend gute Näherung.)
3. Die zukünftige Entwicklung ist zwar notorisch ungewiss, doch alle Wahrscheinlichkeiten sind uns exakt bekannt. (In den meisten realen Anwendungen müssen diese Wkten zuerst geschätzt oder mühsam gemessen werden und sind daher nahezu immer fehlerbehaftet.)

Satz D1A: erwartete Auszahlung

Sei $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ ein Markov–Graph mit terminaler Auszahlung $v : \partial X \to \mathbb{R}$, sofortiger Belohnung $r : A \times X \to \mathbb{R}$ und Diskont $\delta \in [0,1]$.
Die Auszahlung entlang der Trajektorie $w = (x_0, a_0, x_1, a_1, x_2, \dots)$ ist

$$u(w) := \begin{cases} \sum_{t=0}^{n-1} \delta^t r(x_t, a_t, x_{t+1}) + \delta^n v(x_n) & \text{falls } x_n \in \partial X, \\ \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t r(x_t, a_t, x_{t+1}) & \text{falls } w \in \Gamma_\infty. \end{cases}$$

Zur Vereinfachung sei hierzu $\delta \in [0,1[$ sowie r und v beschränkt.
(1) Deterministisch: Zu jeder Strategie $s \in S(\Gamma)$ und jedem Startpunkt $x \in X$ ist die Trajektorie w rekursiv gegeben durch $x_0 = x$, $a_t = s(x_t)$, $x_{t+1} = \tau(x_t, a_t)$ für alle t. Die Auszahlung ist dann $u_s(x) = u(w)$.
(2) Stochastisch: Es existiert die erwartete Auszahlung

$$u_s : X \to \mathbb{R} : u_s(x) = \mathbf{E}_s^x[w \mapsto u(w)].$$

Diese ist beschränkt durch $|u_s|_X \le |v|_{\partial X} + |r|_A/(1-\delta) \in \mathbb{R}$.

Aufgabe: Führen Sie diese Konstruktion detailliert aus, als Übung und zur Wiederholung der Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Lösung: (1) Gegeben sei $s \in S(\Gamma)$, also $s : X^\circ \to A$ mit $\sigma \circ s = \mathrm{id}_{X^\circ}$.
Zu jedem Startpunkt $x_0 \in X$ können wir s integrieren zur Trajektorie $w = (x_0, a_0, x_1, a_1, x_2, \dots)$ mit $a_t = s(x_t)$ und $x_{t+1} = \tau(x_t, a_t)$ für alle t.
Ist $w = (x_0, a_0, x_1, a_1, \dots, x_n) \in \Gamma_n$ endlich, mit $x_n \in \partial X$, so haben wir

$$u(w) := \sum_{t=0}^{n-1} \delta^t r(x_t, a_t, x_{t+1}) + \delta^n v(x_n).$$

Statt $r : A \times X \to \mathbb{R}$ genügt hier $\bar{r} : A \to \mathbb{R}$ mit $\bar{r}(x, a) = r(x, a, \tau(x, a))$.
Ist die Trajektorie $w = (x_0, a_0, x_1, a_1, \dots) \in \Gamma_\infty$ unendlich, so haben wir

$$u(w) := \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t r(x_t, a_t, x_{t+1}).$$

Hier müssen wir die Konvergenz der Reihe sicherstellen. Am einfachsten gelingt dies, indem wir $\delta \in [0,1[$ voraussetzen und $\bar{r}$ beschränken, also $|\bar{r}|_A \le M < \infty$; dann konvergiert die Reihe absolut.
Sind $\bar{r}$ und v beschränkt, so auch u_s dank $|u_s|_X \le |v|_{\partial X} + |\bar{r}|_A/(1-\delta)$.

(2) Im stochastischen Falle führt die Aktion $a \in A_x$ nicht sicher, sondern mit gewisser Wkt $p(x, a, y)$ zum Zustand y und zur Belohnung $r(x, a, y)$.

Entlang jeder un/endlichen Trajektorie w berechnen wir die Auszahlung

$$u(w) := \begin{cases} \sum_{t=0}^{n-1} \delta^t r(x_t, a_t, x_{t+1}) + \delta^n v(x_n) & \text{falls } x_n \in \partial X, \\ \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t r(x_t, a_t, x_{t+1}) & \text{falls } w \in \Gamma_\infty. \end{cases}$$

Bei Start im Zustand $x \in X$ betrachten wir nun die erwartete Auszahlung

$$u_s(x) := \mathbf{E}_s^x[w \mapsto u(w)].$$

Ausführlich: Bei Start im Zustand $x \in X$ mit Strategie $s \in S(\Gamma)$ erhalten wir einen Markov–Prozess auf dem WRaum $(\Gamma_*, \mathscr{A}, \mathbf{P}_s^x)$ der Trajektorien, in unserem Modell möglicherweise mit terminalen Zuständen $x_n \in \partial X$.

Die sofortige Belohnung r und die terminale Auszahlung v erklären die Auszahlung $w \mapsto u(w)$ für jede Trajektorie $w \in \Gamma_*$. So erweitern wir den Markov–Prozess zu einen Markov–Belohnungsprozess, kurz MRP.

Sei $\Gamma_*(x_0)$ die Menge aller Trajektorien mit Start im Zustand $x_0 \in X$.
Zu $w = (x_0, a_0, \dots, x_n)$ enthält $w \circ \Gamma_*(x_n)$ alle Trajektorien mit Anfang w.
Bei Start in x mit Strategie s hat diese Menge die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}_s^x(w \circ \Gamma_*(x_n)) = p(x_0, a_0, x_1) \cdot p(x_1, a_1, x_2) \cdots p(x_{n-1}, a_{n-1}, x_n)$$

falls $x_0 = x$ gilt sowie $a_t = s(x_t)$ für alle $t < n$, sonst $\mathbf{P}_s^x(w \circ \Gamma_*(x_n)) = 0$.
Die Mengen $w \circ \Gamma_*(x_n)$ erzeugen die σ–Algebra $\mathscr{A}$ auf Γ_*. Darauf existiert genau ein WMaß $\mathbf{P}_s^x : \mathscr{A} \to [0,1]$, das die obige Produktformel erfüllt.
📖 H. Bauer: WTheorie, §35 Konstruktion stochastischer Prozesse.

So erhalten wir den WRaum $(\Gamma_*, \mathscr{A}, \mathbf{P}_s^x)$. Zu jeder messbaren Funktion $u : (\Gamma_*, \mathscr{A}) \to ([0,\infty], \mathscr{B}) : w \mapsto u(w)$ erhalten wir den Erwartungswert

$$\mathbf{E}_s^x[u : w \mapsto u(w)] \in [0, \infty].$$

Eine messbare Funktion $u : (\Gamma_*, \mathscr{A}) \to ([0,\infty], \mathscr{B})$ ist integrierbar, wenn $\mathbf{E}_s^x[u^\pm] < \infty$ gilt. In diesem Falle definieren wir $\mathbf{E}_s^x[u] = \mathbf{E}_s^x[u^+] - \mathbf{E}_s^x[u^-]$.
Das gilt insbesondere, falls u messbar und zudem beschränkt ist.

Rekursive Berechnung der erwarteten Auszahlung

Satz D1B: rekursive Berechnung der erwarteten Auszahlung

Gegeben sei ein Markov–Graph $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ mit der Transition $\tau : A \to [X] : \tau(x, a) = \sum_{y \in X} p(x, a, y) \cdot y$, die terminale Auszahlung $v : \partial X \to \mathbb{R}$ und die sofortige Belohnung $r : A \times X \to \mathbb{R}$ mit $\delta \in [0, 1]$.

Zur Vereinfachung seien weiterhin r und v beschränkt sowie $\delta \in [0, 1[$.

(1) Für jede Strategie $s \in S(\Gamma)$ erfüllt die erwartete Auszahlung $u := u_s : X \to \mathbb{R}$ die rekursive **Erwartungsgleichung**:

$$u(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für terminale Zustände } x \in \partial X, \text{ sonst} \\ \sum_{y \in X} p(x, s(x), y)\, \big[r(x, s(x), y) + \delta u(y)\big]. \end{cases}$$

(2) Diese Gleichung kann mehrere Lösungen $u : X \to \mathbb{R}$ haben.
Die erwartete Auszahlung u_s ist die einzige beschränkte Lösung (D2K).

Aufgabe: Führen Sie diese Rechnung detailliert aus, als Übung und zur Wiederholung der Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Rekursive Berechnung der erwarteten Auszahlung

Zu Satz D1B betrachten wir zunächst Summen von begrenzter Länge $\le n$:

$$u^n(w) := \begin{cases} \sum_{t=0}^{n-1} \delta^t r(x_t, a_t, x_{t+1}) & \text{falls } x_t \in X^\circ \text{ für alle } t \le n, \\ \sum_{t=0}^{\ell-1} \delta^t r(x_t, a_t, x_{t+1}) + \delta^\ell v(x_\ell) & \text{falls } x_\ell \in \partial X \text{ für ein } \ell \le n. \end{cases}$$

Diese Auszahlung $u^n : \Gamma_* \to \mathbb{R}$ können wir rekursiv berechnen:

$$u^0(w) = \begin{cases} v(x_0) & \text{falls } x_0 \in \partial X, \\ 0 & \text{falls } x_0 \in X^\circ. \end{cases}$$

$$u^{n+1}(w) = \begin{cases} v(x_0) & \text{falls } x_0 \in \partial X, \\ r(x_0, a_0, x_1) + \delta u^n(w') & \text{falls } w = (x_0 \xrightarrow{a_0} x_1) \circ w'. \end{cases}$$

Nach Konstruktion konvergiert u^n gegen u, gleichmäßig auf Γ_*, denn

$$|u^n - u|_{\Gamma_*} \le \delta^n \big[\, |v|_{\partial X} + |r|_{A \times X} / (1 - \delta) \,\big] \searrow 0.$$

Sind alle Trajektorien / Spielverläufe einheitlich in der Länge $\le n$ beschränkt, so gilt $u^n = u$. Allgemein nutzen wir $u^n \to u$ für $n \to \infty$.

Rekursive Berechnung der erwarteten Auszahlung

Entsprechend haben wir zu $u^n : \Gamma_* \to \mathbb{R}$ die erwartete Auszahlung

$$u_s^n : X \to \mathbb{R} : u_s^n(x) = \mathbf{E}_s^x[w \mapsto u^n(w)].$$

Der durch n begrenzte Zeithorizont hat den technischen Vorteil, dass wir die erwartete Auszahlung leicht rekursiv berechnen können:

$$u_s^0(x) := \begin{cases} v(x_n) & \text{falls } x \in \partial X, \\ 0 & \text{falls } x \in X^\circ. \end{cases}$$

$$u_s^{n+1}(x) := \begin{cases} v(x) & \text{für terminale Zustände } x \in \partial X, \text{ sonst} \\ \sum_{y \in X} p(x, s(x), y)\, \big[r(x, s(x), y) + \delta u_s^n(y)\big]. \end{cases}$$

Nach Konstruktion konvergiert u_s^n gegen u_s, gleichmäßig auf X, denn

$$|u_s^n - u_s|_X \le \delta^n \big[\, |v|_{\partial X} + |r|_{A \times X} / (1 - \delta) \,\big] \searrow 0.$$

In unserer Rekursionsgleichung können wir auf beiden Seiten den Limes $n \to \infty$ bilden. So erhalten wir die rekursive Gleichung von Satz D1B.

Rekursive Berechnung der erwarteten Auszahlung

$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 9 \;\cdots$$

Beispiel: Wir betrachten den Graphen $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ mit $X = \mathbb{N}$ und $A = \{\, (x, x+1) \mid x \in \mathbb{N} \,\}$ mit $\sigma = \mathrm{pr}_1$ und $\tau = \mathrm{pr}_2$ sowie $r = 0$.
Die einzige Strategie in $S(\Gamma)$ ist demnach $s : X^\circ \to A : x \mapsto (x, x+1)$.

Genau dann löst eine Funktion $u : X \to \mathbb{R}$ die Erwartungsgleichung D1B, wenn $u(x) = c \cdot \delta^{-x}$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und alle $x \in X$ gilt.
Die einzige beschränkte Lösung ist also tatsächlich $u_s = 0$.

⚠ Die Erwartung u_s erfüllt Gleichung D1B. Zur Bestimmung von u ist diese Gleichung also *notwendig*, aber im Allgemeinen nicht *hinreichend*.

☺ Die Konstruktion D1A des WRaums $(\Gamma_*, \mathscr{A}, \mathbf{P}_s^x)$ definiert die erwartete Auszahlung $u_s : X \to \mathbb{R} : u_s(x) := \mathbf{E}_s^x[w \mapsto u(w)]$. Zur Gleichung D1B gilt demnach die *Existenz* einer Lösung, aber nicht immer die *Eindeutigkeit*.

☺ Für $\delta < 1$ und r, v beschränkt ist u_s die einzige beschränkte Lösung. Dies zeigen wir in Abschnitt D2 mit dem Fixpunktsatz von Banach. Zuerst will ich das Vorgehen mit eindrücklichen Beispielen illustrieren.

Zufällige Irrfahrt und harmonische Gewinnerwartung

0	1	2	3	4	5	6	7	8
7€								23€

Aufgabe: Ihre Spielfigur startet auf einem Spielfeld $x \in X^\circ = \{1, \dots, 7\}$. In jedem Zug rückt sie auf ein Nachbarfeld, gleichverteilt, unabhängig. Das Spiel endet am Rand $\partial X = \{0, 8\}$ mit der gezeigten Auszahlung.

(0) Welche Gewinnerwartung $u(x)$ hat jedes Feld $x \in X = \{0, \dots, 8\}$?
(1) Variante: Jeder Zug kostet $c(x) = -1€$. Ab wo würden Sie spielen?

Bitte schätzen Sie zunächst! Wie treffsicher ist Ihre intuitive Erwartung? Formulieren Sie dann nützliche Gleichungen und Lösungsmethoden…

Lösung: Für jedes innere Feld $x \in X^\circ = \{1, \dots, 7\}$ gilt

$$u(x) = \tfrac{1}{2} u(x-1) + \tfrac{1}{2} u(x+1) + c(x).$$

Damit können Sie mögliche Lösungen prüfen. Auch berechnen? Wie?

7	9	11	13	15	17	19	21	23
7	2	−1	−2	−1	2	7	14	23

Zufällige Irrfahrt und harmonische Gewinnerwartung

Hier ist (0) ein extrem einfaches Spiel, schon (1) dürfte Sie überraschen: Ungeschult haben wir herzlich wenig Erfahrung mit zufälligen Irrfahrten. Erfahrungsgemäß fällt uns Menschen das rekursive Denken recht schwer, doch gerade dies ist sehr oft wesentlich für rationale Entscheidungen!

Bevor wir die Lösung diskutieren, schätzen Sie bitte Ihre Erwartung: Ist Ihre Intuition recht präzise und treffsicher, oder allzu vage und irrig? Diese quantitativen Schätzfragen sind auch ein aufschlussreicher Test der vielzitierten Schwarmintelligenz und mahnen eindringlich zur Vorsicht: Betrügerische Geschäftspraktiken beruhen darauf, dass das Gegenüber die Situation schlecht einschätzen kann und Fehlentscheidungen trifft.

Bilden die oben angegebenen Zahlen eine Lösung? sogar die einzige? Mehrdeutigkeiten müssen wir erkennen und nötigenfalls auch beheben. Es ist schön und gut, die eigene Intuition zu nutzen und zu entwickeln. Leider hilft es wenig, irgendeine Antwort ohne Begründung zu orakeln. Wir wollen tragfähige Argumente, begründet und nachvollziehbar! Auch das ist ein Qualitätsmerkmal rationalen Handelns.

Zufällige Irrfahrt und harmonische Gewinnerwartung

0	1	2	3	4	5	6	7	8
7	9	11	13	15	17	19	21	23

Lösung: (0) Für $x \in X = \{0, \dots, 8\}$ suchen wir $u_x = u(x)$. Wir haben:

$$\begin{aligned}
u_0 &= 7\\
-\tfrac12 u_0 + u_1 - \tfrac12 u_2 &= 0\\
-\tfrac12 u_1 + u_2 - \tfrac12 u_3 &= 0\\
-\tfrac12 u_2 + u_3 - \tfrac12 u_4 &= 0\\
-\tfrac12 u_3 + u_4 - \tfrac12 u_5 &= 0\\
-\tfrac12 u_4 + u_5 - \tfrac12 u_6 &= 0\\
-\tfrac12 u_5 + u_6 - \tfrac12 u_7 &= 0\\
-\tfrac12 u_6 + u_7 - \tfrac12 u_8 &= 0\\
u_8 &= 23
\end{aligned}$$

Bandmatrix, dünn besetzt

$-\Delta u = 0$

Lineare Gleichungssysteme können Sie lösen: Gauß gelingt immer! Geschickte Substitution: Für $d_x := u_x - u_{x-1}$ gilt $d_1 = d_2 = \dots = d_8 = d$ und $8d = 23 - 7 = 16$, also $d = 2$ und somit $u_x = 7 + d \cdot x$ für alle $x \in X$.

Zufällige Irrfahrt und harmonische Gewinnerwartung

0	1	2	3	4	5	6	7	8
7	2	−1	−2	−1	2	7	14	23

Lösung: (1) Für $x \in X = \{0, \dots, 8\}$ suchen wir $u_x = u(x)$. Wir haben:

$$\begin{aligned}
u_0 &= 7\\
-\tfrac12 u_0 + u_1 - \tfrac12 u_2 &= c_1\\
-\tfrac12 u_1 + u_2 - \tfrac12 u_3 &= c_2\\
-\tfrac12 u_2 + u_3 - \tfrac12 u_4 &= c_3\\
-\tfrac12 u_3 + u_4 - \tfrac12 u_5 &= c_4\\
-\tfrac12 u_4 + u_5 - \tfrac12 u_6 &= c_5\\
-\tfrac12 u_5 + u_6 - \tfrac12 u_7 &= c_6\\
-\tfrac12 u_6 + u_7 - \tfrac12 u_8 &= c_7\\
u_8 &= 23
\end{aligned}$$

Bandmatrix, dünn besetzt

$-\Delta u = 0$

Allgemeine Faustregel: Ausrechnen ist mühsam. Prüfen ist leicht! Wir vermuten, dass die Lösung eindeutig ist. Gilt das? Satz D1c hilft! Negative Gewinnerwartung bedeutet: Ab hier besser nicht spielen!

Zufällige Irrfahrt und optimale Entscheidung

D113 Erläuterung

☺ Ist das Angebot lukrativ bei Start in $x = 4$? Nein! Bei Start in $x = 5$? Ja! Mathematik hilft Ihnen, die richtige Entscheidung zu treffen. Dieses Gleichungssystem ist **linear** und daher leicht zu lösen. Das System ist klein genug, um noch von Hand gelöst zu werden.

Die Matrix ist zudem dünn besetzt und hat hohe Symmetrie. Das nutzen wir gerne, hier etwa durch wiederholte Halbierung. Für (0) gelingt eine geschickte Substitution, auch ganz allgemein: Die Lösung ist die eindeutige Gerade durch die beiden Randwerte.

Die Gleichung $u_x = \frac{1}{2}u_{x-1} + \frac{1}{2}u_{x+1}$ nennen wir **Mittelwerteigenschaft**. Eine solche Funktion $u : X \to \mathbb{R}$ heißt **harmonisch**, als diskrete Analogie zur Laplace–Gleichung $\Delta u = 0$ mit $\Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$ auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, die in der Analysis und der Physik eine wichtige Rolle spielt.

Die Differenz $-\frac{1}{2}u_{x-1} + u_x - \frac{1}{2}u_{x+1}$ entspricht der (negativen) **zweiten Ableitung** an der Stelle x. Ist sie gleich Null, so handelt es sich um eine Gerade. Ist sie konstant ungleich 0, so handelt es sich um eine Parabel. Die Zugkosten c_x im Punkt x entsprechen der Krümmung im Punkt x!

Zufällige Irrfahrt und optimale Entscheidung

D114

0	1	2	3	4	5	6	7	8
7.00	2.67	0.33	0.00	0.60	3.20	7.80	14.40	23.00

Aufgabe: (2) Zusätzlich zu (1) dürfen Sie nun jederzeit aufgeben.

Lösung: Wir suchen $u : X \to \mathbb{R}$. Am Rand gilt $u(0) = 7$ und $u(8) = 23$. In jedem aktiven Zustand $x \in \{1, \dots, 7\}$ sind zwei Aktionen möglich:

$$\begin{array}{ll} \text{Weiterspielen:} & u(x) = c(x) + \frac{1}{2}u(x-1) + \frac{1}{2}u(x+1) \\ \text{Aufgeben:} & u(x) = 0 \end{array}$$

Ein rationaler Spieler wählt jeweils den besten Zug, also das Maximum:

$$\boxed{u(x) = \max\{\, 0,\ c(x) + \tfrac{1}{2}u(x-1) + \tfrac{1}{2}u(x+1) \,\}}$$

⚠ Dieses Gleichungssystem ist **nicht-linear** und daher etwas kniffliger. Wie immer gilt auch hier: Ausrechnen ist mühsam. Prüfen ist leicht! Existiert immer eine Lösung u? Gibt es mehrere oder genau eine? Wie können Sie die / eine berechnen? Zudem möglichst effizient?

☺ Hier hilft Ihnen ein Python-Skript oder eine Tabellenkalkulation!

Zufällige Irrfahrt und optimale Entscheidung

D115

Eine numerische Näherung gelingt einfach und effizient durch Iteration:

$$\boxed{u_{t+1}(x) = \max\{\, 0,\ c(x) + \tfrac{1}{2}u_t(x-1) + \tfrac{1}{2}u_t(x+1) \,\}}$$

t	$u_t(0)$	$u_t(1)$	$u_t(2)$	$u_t(3)$	$u_t(4)$	$u_t(5)$	$u_t(6)$	$u_t(7)$	$u_t(8)$
0	7.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	23.00
1	7.00	2.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	10.50	23.00
2	7.00	2.50	0.25	0.00	0.00	0.00	4.25	10.50	23.00
3	7.00	2.63	0.25	0.00	0.00	1.13	4.25	12.63	23.00
4	7.00	2.63	0.31	0.00	0.00	1.13	5.88	12.63	23.00
5	7.00	2.66	0.31	0.00	0.00	1.94	5.88	13.44	23.00
6	7.00	2.66	0.33	0.00	0.00	1.94	6.69	13.44	23.00
7	7.00	2.66	0.33	0.00	0.00	2.34	6.69	13.84	23.00
8	7.00	2.66	0.33	0.00	0.17	2.34	7.09	13.84	23.00
9	7.00	2.67	0.33	0.00	0.17	2.63	7.09	14.05	23.00
…									
39	7.00	2.67	0.33	0.00	0.60	3.20	7.80	14.40	23.00
40	7.00	2.67	0.33	0.00	0.60	3.20	7.80	14.40	23.00

Zufällige Irrfahrt und optimale Entscheidung

D116 Erläuterung

☺ Vergleichen Sie die hier berechneten Werte mit Ihren intuitiven Schätzungen bei der ersten, informellen Annäherung an diese Frage. Unser kleines Markov–Spiel ist eine sehr einfache, aber durchaus realistische Illustration für einen Markov–Entscheidungsprozess.

☺ Die Lösung u_0 im linearen Fall, ohne Entscheidung, ist leicht zu berechnen durch das lineare Gleichungssystem, also als Fixpunkt: Wir nutzen auf $E = \{\, u : X \to \mathbb{R} \mid u(0) = 7,\ u(8) = 23 \,\}$ den linearen Operator $\Phi_0 : E \to E : u \mapsto \bar{u}$ mit $\bar{u}(x) = c(x) + \frac{1}{2}u(x-1) + \frac{1}{2}u(x+1)$.

⚠ Die Lösung mit Entscheidungsmöglichkeit ist nicht $\max\{0, u_0\}$! Diese naive Fehlannahme führt tatsächlich zu Fehlentscheidungen.

☺ Wir erhalten sie vielmehr als Fixpunkt von $\Phi(u) = \max\{0, \Phi_0(u)\}$. Diesen nicht-linearen Operator können wir zur Iteration nutzen, wie oben gezeigt. Ist die beobachtete Konvergenz nicht wunderbar?

☺ In der Übung zeigen Sie allgemein, dass $\Phi : E \to E$ kontraktiv ist, so dass Sie Banachs Fixpunktsatz anwenden können. Alles wird gut. Damit können Sie u berechnen und Ihre optimale Strategie ablesen!

Vorsicht bei unendlichen Spielfeldern

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
100€											…

Aufgabe: Das Spielbrett ist nun nach rechts unbegrenzt. Wie viel würden Sie als Teilnehmer zahlen / als Anbieter verlangen? Neutral gefragt:

(0) Was ist die Gewinnerwartung $u(x)$ für jedes Startfeld $x \in \mathbb{N}$?
(1) Jeder Zug kostet, $c = -1€$, und Sie müssen zu Ende spielen.
(2) Jeder Zug kostet, $c = -1€$, und Sie dürfen jederzeit aufgeben.

Bitte schätzen Sie zunächst! Wie treffsicher ist Ihre intuitive Erwartung? Formulieren Sie dann nützliche Gleichungen und Lösungsmethoden: Existiert eine Lösung $u : X \to \mathbb{R}$? Gibt es mehrere oder genau eine? Wie können Sie die / eine berechnen? Zudem möglichst effizient?

100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	…
100	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	…
100	81	64	49	36	25	16	9	4	1	0	…

Vorsicht bei unendlichen Spielfeldern

Lösung: (0) Die Mittelwerteigenschaft $u(x) = \frac{1}{2}u(x-1) + \frac{1}{2}u(x+1)$ hat als mögliche Lösungen $u_m(x) = 100 + mx$ mit $m \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
⚠ Allein der eine Punkt $u(0) = 100$ legt die Gerade noch nicht fest! Die simple Bilanzgleichung allein genügt hier also nicht zur Lösung.

Wir müssen etwas tiefer graben und das zu Grunde liegende **Modell** genauer präzisieren und auswerten: die Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ [*random walk*]. Der Übergang zu einem feineren Modell ähnelt der **Mikrofundierung**, um globale Bilanzgleichungen zu erklären oder notfalls zu ergänzen

☺ Wir vollenden die Rechnung, indem wir noch **weitere Bedingungen** einführen und nutzen: Der Erwartungswert $u(x) \in \mathbb{R}$ existiert, erfüllt die Bilanzgleichung $u(x) = \frac{1}{2}u(x-1) + \frac{1}{2}u(x+1)$ und ist **beschränkt** durch $u(x) \in [0, 100]$ für alle $x \in \mathbb{N}$. Dann bleibt nur $u(x) = 100$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

⚠ Wir sehen hier im Miniaturbeispiel den entscheidenden Unterschied zwischen einem endlichem und einem unendlichem Spielgraphen, zwischen einem kompakten und einem nicht-kompakten Gebiet. Im Allgemeinen ist nur der endliche / kompakte Fall gutartig.

Vorsicht bei unendlichen Spielfeldern

(1) Die Lösungen sind $u_m(x) = 100 + mx + x^2$ mit $m \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Jede erfüllt $u_m(x) = \frac{1}{2}u_m(x-1) + \frac{1}{2}u_m(x+1) - 1$ für alle $x \in \mathbb{N}_{>0}$.
⚠ Die Lösung $u_{-\infty}$ ist auch auf $X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ mit $n \geq 3$ möglich. Die Frage ist also: Warum ist dies auf $\mathbb{N}$ die einzig richtige Antwort?
☺ Wir vollenden die Rechnung, indem wir **weitere Bedingungen** einführen und nutzen: Nur $u_{-\infty}$ erfüllt die Beschränkung $u \leq 100$.

Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen (in gut gemeinten Anwendungen) bzw. ausbeuten (in betrügerischer Absicht). Letzteres gilt besonders für wenig bekannte Regelmäßigkeiten (Sätze), noch besser eignen sich Unverständnis und weit verbreitete Fehler. Ausgenutzt wird hierbei nicht direkt der mathematische Sachverhalt, sondern vor allem die ungleich verteilte Kenntnis darüber.

⚠ Ein Spiel oder Geschäft wie in (1) ist ein **Knebelvertrag** und zielt darauf, eine Vertragspartei möglichst langfristig zu binden und finanziell auszubeuten, meist wie hier durch Kündigungsfristen und -bedingungen. In klaren Fällen sind solche Verträge sittenwidrig und somit ungültig.

Vorsicht bei unendlichen Spielfeldern

(2) Ein rationaler Spieler wählt jeweils den besten Zug:

$$\boxed{u(x) = \max\{\ 0,\ \tfrac{1}{2}u(x-1) + \tfrac{1}{2}u(x+1) - 1\ \}}$$

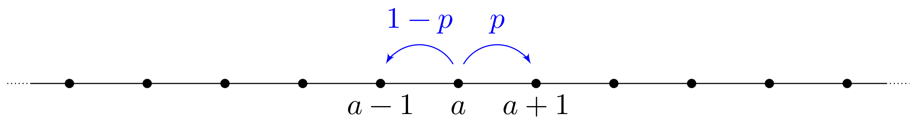
Als erstes führen wir dieses Problem zurück auf $X = \{0, \dots, n\}$: Wir wählen den rechten Rand n hinreichend groß und setzen $u(n) = 0$. Aufgrund der Beschränkung $u(x) \in [0, 100]$ für $x \geq 0$ und der Zugkosten $c = -1$ finden wir $u(x) \in [0, 99]$ für $x \geq 1$, sodann $u(x) \in [0, 98]$ für $x \geq 2$ und so weiter, bis schließlich $u(x) = 0$ für $x \geq 100$. Also genügt $n = 100$.

Das lineare Gleichungssystem ergibt unsere obigen Quadratzahlen! Wenn wir erst einmal $u(10) = 0$ wissen, dann ist dies leicht zu sehen: Von der Position $x \in \{0, \dots, 10\}$ bis zum Rand $\{0, 10\}$ ist die lineare Erwartung $100 - 10x$ und zudem die erwartete Reisezeit $x(10 - x)$. Die Gewinnerwartung ist demnach $u(x) = 100 - 20x + x^2 = (10 - x)^2$.

☺ Wie immer gilt auch hier: Ausrechnen ist mühsam. Prüfen ist leicht!

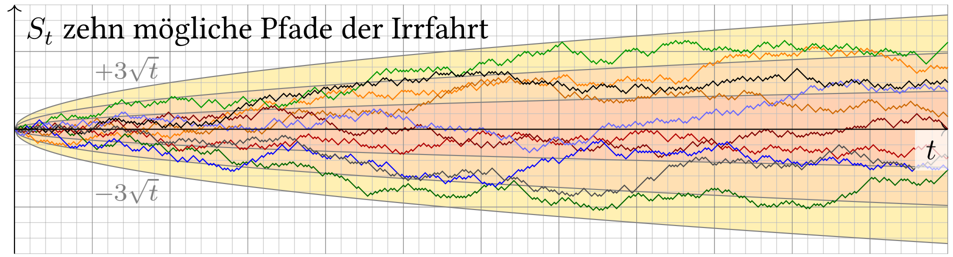
☺ Im Gegensatz zum Knebelvertrag (1) scheint mir dieses Spiel (2) überschaubar und sowohl moralisch wie juristisch akzeptabel.

Zufällige Irrfahrt / *random walk*



Zufällige Irrfahrt in $X = \mathbb{Z}$: Zur Zeit $t = 0$ starten Sie im Punkt $S_0 = a$. Im Schritt von S_t nach S_{t+1} gehen Sie mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ nach rechts und entsprechend mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ nach links.

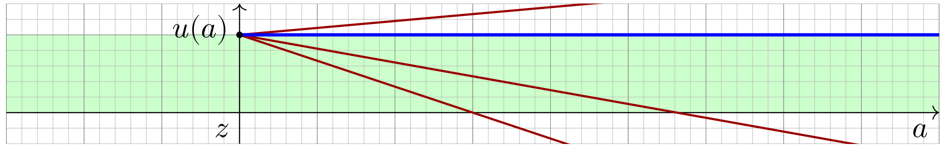
Das heißt, $S_t : \Omega \to \mathbb{Z}$ ist gegeben durch $S_t = a + X_1 + \dots + X_t$ mit unabhängigen Zuwächsen, $\mathbf{P}_a(X_t{=}{+1}) = p$ und $\mathbf{P}_a(X_t{=}{-1}) = 1-p$.



Zufällige Irrfahrt / *random walk*

Aufgabe: (0) Bestimmen Sie zu S_t die Verteilung, Erwartung, Streuung. Wir untersuchen speziell den symmetrischen Fall $p = 1/2$, ohne Drift. Sie beginnen im Startpunkt $a \in \mathbb{Z}$ und fixieren einen Zielpunkt $z \in \mathbb{Z}$. (1) Wie groß ist die Wkt $u(a) \in [0,1]$, das Ziel zu erreichen? (2) Reisezeit?

Lösung: (1) Wir erhalten eine Binomialverteilung, affin transformiert: $\mathbf{P}_a(S_t = a + 2k - t) = \binom{t}{k} p^k (1-p)^{t-k} = \binom{t}{k} 2^{-t}$ für $t, k \in \mathbb{N}$ und $p = \frac{1}{2}$. Somit gilt $\mathbf{E}(S_t) = a$ und $\mathbf{V}(S_t) = t$, also $\sigma(S_t) = \sqrt{t}$ und $S_t \approx N(a,t)$.



(1) Offensichtlich gilt $u(z) = 1$, denn hier ist der Start auch das Ziel. Für $a > z$ gilt die Mittelwerteigenschaft $u(a) = \frac{1}{2}u(a+1) + \frac{1}{2}u(a-1)$. Somit ist $u : \mathbb{Z}_{\ge z} \to [0,1]$ eine Gerade, $u(a) = 1 + m(a-z)$. (Warum?) Zudem ist u beschränkt, $0 \le u \le 1$, daher folgt $m = 0$. Ebenso auf $\mathbb{Z}_{\le z}$.

Zufällige Irrfahrt / *random walk*

(2) Sei $T_z \in \mathbb{N}$ die Zeit des ersten Besuchs im Zielpunkt z und $\mathbf{E}_a(T_z)$ die erwartete Reisezeit vom Startpunkt a zum Zielpunkt z. Dies ist invariant unter Verschiebungen, also $\mathbf{E}_{a+k}(T_{z+k}) = \mathbf{E}_a(T_z)$. Zunächst gilt $\mathbf{E}_a(T_a) = 0$. Für $a \ne z$ zeigen wir nun $\mathbf{E}_a(T_z) = \infty$:

$$w := \mathbf{E}_0(T_1) = 1 + \tfrac{1}{2}\big[\underbrace{\mathbf{E}_1(T_1)}_{=0} + \mathbf{E}_{-1}(T_1)\big]$$

$$\mathbf{E}_{-1}(T_1) = \underbrace{\mathbf{E}_{-1}(T_0)}_{=w} + \underbrace{\mathbf{E}_0(T_1)}_{=w} = 2w$$

Hieraus folgt $w = 1 + w$. Das ist für $w \in \mathbb{R}$ unmöglich. Es bleibt nur $\mathbf{E}_0(T_1) = w = \infty$, also $\mathbf{E}_0(T_z) = \infty$ für alle $z \ne 0$.

☺ Bei einer symmetrischen Irrfahrt ($p = 1/2$, ohne Drift) erreichen wir jeden Punkt mit Wkt 100%, aber die erwartete Reisezeit ist unendlich!

Die Rechnung ist einfach, dank unserer geschickten Formalisierung. Die Interpretation hingegen muss man erst einmal verarbeiten. Die naive Anschauung kann einen hier leicht narren.

Zufällige Irrfahrt / *random walk*

Die Irrfahrt ist ein einfaches, aber wichtiges Modell. Mögliche Anwendung: Kontostand bei zufälligen Gewinnen und Verlusten. Daher werden solche Modelle für Aktienkurse genutzt.

Ähnlich entsteht die Brownsche Bewegung durch Wärmebewegung. Der schottische Botaniker Robert Brown (1773–1858) entdeckte 1827 unter dem Mikroskop das unregelmäßige Zittern von Pollen in Wasser. Anfangs hielt er Pollen für belebt, doch er fand dasselbe bei Staubteilchen.

Albert Einstein erklärte die Zitterbewegung 1905 durch die ungeordnete Wärmebewegung der Wassermoleküle, die aus allen Richtungen in großer Zahl gegen die Pollen stoßen. Quantitativ konnte er so die Größe von Atomen bestimmen und die Anzahl pro Mol, die Avogadro–Zahl. Die präzisen quantitativen Vorhersagen wurden in den Folgejahren experimentell bestätigt.

Die Gerade finden wir durch vollständige Induktion: Aus $u(z) = 1$ und $u(z+1) = 1 + m$ folgt $u(a+1) = 2u(a) - u(a-1) = [2 + 2m(a-z)] - [1 + m(a-1-z)] = 1 + m(a+1-z)$.

☺ Bei einer symmetrischen Irrfahrt ($p = 1/2$, ohne Drift) erreichen wir jeden Punkt mit Wkt 1! George Pólya (1887–1985) zeigte 1921: Jeden Punkt in $\mathbb{Z}$ besuchen wir mit Wkt 1 unendlich oft. Dies gilt ebenso in Dimension 2 bei Irrfahrt auf dem ebenen Gitter $\mathbb{Z}^2$. Erstaunlicherweise gilt es nicht mehr in Dimension $n \ge 3$ bei Irrfahrt auf dem Gitter $\mathbb{Z}^n$. Anschaulich: Ein betrunkener Mensch findet sicher irgendwann nach Hause, ein betrunkener Fisch oder Vogel hingegen nicht!

📖 Ausführung bei Feller, *Introduction to Probability*, vol. 1 (1968), §XIV.7: Das Sprichwort „Alle Wege führen nach Rom.“ stimmt zumindest zweidimensional. Dreidimensional ist die Rückkehrwahrscheinlichkeit nur etwa 34%, siehe `en.wikipedia.org/wiki/Random_walk`.

Erwartete Reisezeit bis zum Rand

Aufgabe: Wie lange ist die erwartete Reisezeit $u(x)$ bis zum Rand?
Erste Beispielrechnungen für $n = 2, \dots, 10$ ergeben folgende Daten:

0	1	0								
0	2	2	0							
0	3	4	3	0						
0	4	6	6	4	0					
0	5	8	9	8	5	0				
0	6	10	12	12	10	6	0			
0	7	12	15	16	15	12	7	0		
0	8	14	18	20	20	18	14	8	0	
0	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0

Übung: Auf $X = \{0, \dots, n\}$ gilt $u(x) = x(n - x)$. Dann $n \to \infty$.

Erwartete Reisezeit bis zum Rand

Wir betrachten das Spielbrett $X = \{0, \dots, n\}$ mit Rand $\partial X = \{0, n\}$ und lösen $u(x) = 1 + \frac{1}{2}u(x-1) + \frac{1}{2}u(x+1)$ mit $u(0) = u(n) = 0$. Wir vermuten, dass die Lösung eindeutig ist. Gilt das? Satz D1c!

☺ Im endlichen Fall genügt unsere einfache Bilanzgleichung.

Wie immer ist es hilfreich, zunächst kleine Beispiele zu betrachten. Die kleinen Fälle für $n = 2, \dots, 10$ lösen Sie leicht per Hand, als lineares Gleichungssystem oder Probieren & Prüfen.

☺ Steht das Ergebnis erst einmal da, so ist es leicht zu prüfen!

Für jedes n beschreiben die Werte $x \mapsto u(x)$ eine Parabel: Dies sehen Sie am leichtesten, wenn sie die Differenzen betrachten (diskrete erste Ableitung) und diese als lineare Funktionen erkennen.

☺ Damit haben Sie die Formel gefunden, die Sie nun beweisen wollen.

Damit lösen Sie die obigen Spiele auf dem Spielbrett $X = \{0, \dots, n\} \subset \mathbb{Z}$ durch (0) lineare Gewinnerwartung plus (1) quadratische Reisezeit.

☺ Wir bestaunen das Zusammenspiel von Rekursion und Induktion!

Erwartete Reisezeit bis zum Rand

Beweis: Auf $X = \{0, \dots, n\}$ betrachten wir die Funktion

$$\boxed{u : X \to \mathbb{R} : x \mapsto x(n - x).}$$

Wir finden:

$$u(x-1) = xn - n - x^2 + 2x - 1$$
$$u(x+1) = xn + n - x^2 - 2x - 1$$

Also erfüllt u die geforderte Differenzengleichung:

$$\boxed{u(x) = 1 + \tfrac{1}{2}u(x-1) + \tfrac{1}{2}u(x+1)}$$

Dies ist also *eine* Lösung, und dank Satz D1c zudem die einzige.

Beispiele: Für $r, s \in \mathbb{N}$ und $n = r + s$ gelten folgende schöne Formeln:

☺ Die erwartete Reisezeit von x bis $\{x - r, x + s\}$ beträgt rs.

☺ Diese Formel besteht weiter sogar für $r = \infty$ oder $s = \infty$.

☺ Die erwartete Reisezeit von x bis $\{x - r, x + r\}$ beträgt r^2.

Erwartete Reisezeit bis zum Rand

Diese Rechnung bietet uns einen zweiten und unabhängigen Beweis für die erwartete Reisezeit $u(x)$ in $X = \mathbb{N}$ bis zum Rand $\partial X = \{0\}$: Wir haben $u(x) \ge x(n - x)$ für jedes $n \ge x$, also

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ \infty & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Es ist hilfreich, neben Funktionen $u : X \to \mathbb{R}$ auch $u : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ oder $u : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ zuzulassen. Diese treten natürlich auf, wie hier. Mittelwertgleichungen wir $u(x) = 1 + \frac{1}{2}u(x-1) + \frac{1}{2}u(x+1)$ bleiben sinnvoll, solange niemals $+\infty$ und $-\infty$ addiert werden müssen.

☺ Die Erweiterung zu $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ bzw. $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ nützt für monotone Grenzwerte wie $u_0 \le u_1 \le u_2 \le \dots \nearrow u$ oder $u_0 \ge u_1 \ge u_2 \ge \dots \searrow u$, und sei es nur als technisches Hilfsmittel für Zwischenrechnungen.

☺ Bilanzgleichungen funktionieren wunderbar auf *endlichen* Graphen. Auf unendlichen Graphen benötigen wir zusätzliche Bedingungen. Manchmal können wir durch endliche Teilgraphen ausschöpfen.

Zufällige Irrfahrt und optimale Entscheidung

0	1	2	3	4	5	6	7	8
7€								23€
			9					
			10					
			11	5€				

Aufgabe: Selbes Spiel wie zuvor, aber auf einem neuem Spielbrett. Wie viel würden Sie als Teilnehmer zahlen / als Anbieter verlangen?

(0) Was ist die Gewinnerwartung $u(x)$ für jedes Startfeld $x \in X$?
(1) Jeder Zug kostet, $c = -1$€, und Sie müssen zu Ende spielen.
(2) Jeder Zug kostet, $c = -1$€, und Sie dürfen jederzeit aufgeben.

Bitte schätzen Sie zunächst! Wie treffsicher ist Ihre intuitive Erwartung? Formulieren Sie dann nützliche Gleichungen und Lösungsmethoden! Die oben entwickelten Werkzeuge wirken auch in diesem Beispiel.

L Wir haben diese Aufgabe für Schüler:innen und Studieninteressierte sorgsam ausgearbeitet, siehe `eiserm.de/lehre/stukus/Gewinnerwartung.pdf`

Zufällige Irrfahrt und optimale Entscheidung

Lösung: (0) Gewinnerwartung ohne Zugkosten:

7	8	9	10	11	14	17	20	23
				9				
				7				
				5				

☺ Dies lösen Sie linear, mit neun Gleichungen für neun Unbekannte. Wir setzen hierzu $E = \{\, u : X \to \mathbb{R} \mid u(0) = 7,\ u(8) = 23,\ u(11) = 5 \,\}$ und $\Phi_0 : E \to E : u \mapsto \bar{u}$ mit $\bar{u}(x) = \sum_y p(x,y) u(y)$ und Übergangswkt $p(x,y) \in [0,1]$ von Feld x auf das Nachbarfeld y, wobei $\sum_y p(x,y) = 1$.

Die obigen Werte sind der eindeutige Fixpunkt von Φ_0, also die Lösung der Gleichung $\Phi_0(u) = u$. Dieses lineare Gleichungssystem können Sie exakt lösen, mit den Mitteln der Linearen Algebra, oder auch iterativ annähern durch Banachs Fixpunktsatz, mit den Mitteln der Analysis.

Eine Tabellenkalkulation löst dies für Sie iterativ. Wenn Sie handrechnen, zerlegen Sie das Problem geschickt in drei bereits gelöste Teilprobleme.

Zufällige Irrfahrt und optimale Entscheidung

Lösung: (1) Interessant ist die erwartete Reisezeit bis zum Rand:

0.00	6.30	10.60	12.90	13.20	12.90	10.60	6.30	0.00
				10.80				
				6.40				
				0.00				

Daraus erhalten wir folgende Gewinnerwartung mit Zugkosten:

7.00	1.70	−1.60	−2.90	−2.20	1.10	6.40	13.70	23.00
				−1.80				
				0.60				
				5.00				

☺ Beides ist leicht zu prüfen. Finden gelingt dank linearer Gleichungen. Wir setzen hierzu $E = \{\, u : X \to \mathbb{R} \mid u(0) = 7,\ u(8) = 23,\ u(11) = 5 \,\}$ und $\Phi_0 : E \to E : u \mapsto \bar{u}$ mit den Daten $\bar{u}(x) = c(x) + \sum_y p(x,y) u(y)$. Wir lösen die lineare Fixpunktgleichung $\Phi_0(u) = u$ wie im Fall (0).

Zufällige Irrfahrt und optimale Entscheidung

Lösung: (2) Gewinnerwartung mit Zugkosten und Abbruchmöglichkeit:

7.00	2.67	0.33	0.00	0.00	2.20	6.40	13.70	23.00
				0.00				
				1.50				
				5.00				

☺ Die Lösung u_0 im linearen Fall, ohne Entscheidung, ist leicht. Wir lösen hierzu die lineare Fixpunktgleichung $\Phi_0(u_0) = u_0$ wie in (1).

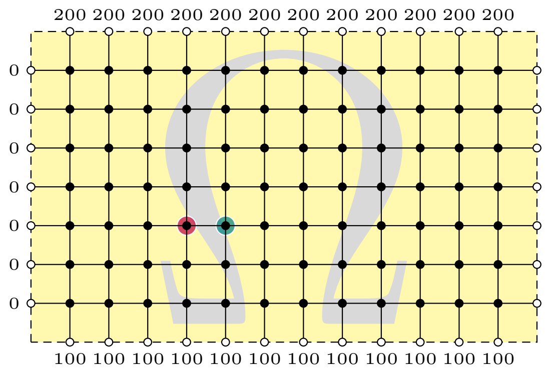
⚠ Die Lösung mit Entscheidungsmöglichkeit ist nicht $\max\{0, u_0\}$! Diese naive Fehlannahme führt tatsächlich zu Fehlentscheidungen.

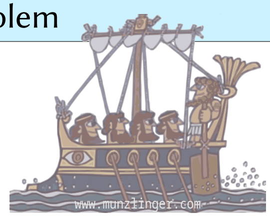
☺ Wir erhalten sie vielmehr als Fixpunkt von $\Phi(u) = \max\{0, \Phi_0(u)\}$. Diesen Operator können wir zur Iteration nutzen, wie oben gezeigt.

Es ist bemerkenswert, dass die iterative Methode so oft funktioniert! Hierzu beweist man möglichst allgemein, dass $\Phi : E \to E$ kontraktiv ist, so dass Sie Banachs Fixpunktsatz anwenden können. Analysis sei Dank! Damit können Sie getrost u berechnen und die optimale Strategie ablesen.

Irrfahrten und Potentiale: das Dirichlet–Problem

Zufällige Irrfahrt auf einem Spielfeld $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$:





Sie ziehen mit Wkt $\frac{1}{4}$ nach links / rechts / oben / unten.

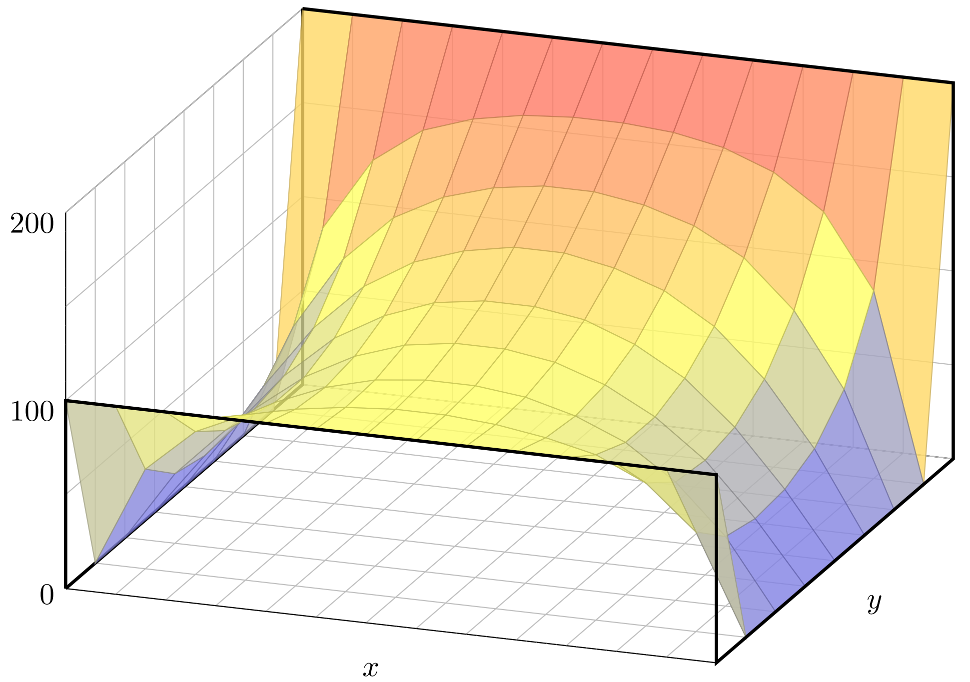
Das Spiel endet am Rand mit dem gezeigten Gewinn.

Für welche Startpunkte würden Sie 100 zahlen?

Aufgabe: (1) Wie groß ist die Gewinnerwartung $u(x, y)$ auf jedem Feld? Existiert eine Lösung $u : \Omega \to \mathbb{R}$? Ist die gesuchte Lösung eindeutig? Wie berechnet man sie? möglichst effizient? näherungsweise?

☺ Kontext und Anwendung ändern sich, die Rechnung bleibt dieselbe! (2) Hooke: Netz aus Massen und Federn. (3) Kirchhoff: Spannung einer elektrischen Schaltung. (4) Fourier: diskrete Wärmeleitung / Diffusion.

Irrfahrten und Potentiale: das Dirichlet–Problem



Irrfahrten und Potentiale: das Dirichlet–Problem

Lösung: (1) Sei $u(x, y)$ die Gewinnerwartung auf dem Feld $(x, y) \in \Omega$. In jedem Randpunkt $(x, y) \in \partial\Omega$ ist der Gewinn $u(x, y)$ fest vorgegeben. In jedem inneren Punkt $(x, y) \in \Omega^\circ$ gilt die **Mittelwerteigenschaft**:

$$\boxed{u(x,y) = \tfrac{1}{4}u(x-1,y) + \tfrac{1}{4}u(x+1,y) + \tfrac{1}{4}u(x,y-1) + \tfrac{1}{4}u(x,y+1)}$$

Eine solche diskrete Funktion $u : \mathbb{Z}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}$ nennen wir **harmonisch**.
Übung: Lösen Sie diese Gleichungen, etwa mit einer Tabellenkalkulation!

	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	
000	100	139	158	167	172	174	174	172	167	157	139	100	000
000	061	100	125	139	147	151	151	147	139	125	100	061	000
000	043	077	102	118	127	132	132	127	118	102	077	043	000
000	035	065	088	103	113	117	117	113	103	088	065	035	000
000	033	061	081	095	104	108	108	104	095	081	061	033	000
000	037	063	081	092	099	102	102	099	092	081	063	037	000
000	053	076	088	094	098	100	100	098	094	088	076	053	000
	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	

Irrfahrten und Potentiale: das Dirichlet–Problem

Allgemein sind harmonische Funktionen ein wunderschönes Thema in Analysis, Numerik, WTheorie, Physik, ..., hier der diskrete Spezialfall: Wir betrachten eine endliche Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{Z}^2$. Innere Punkte $z \in \Omega^\circ$ sind solche, deren vier Nachbarn in Ω liegen. Der Rand ist $\partial\Omega = \Omega \smallsetminus \Omega^\circ$.

Dirichlet–Problem: In jedem Randpunkt $z \in \partial\Omega$ ist der Wert $u(z)$ festgelegt durch die vorgegebene Randfunktion $v = u|_{\partial\Omega} : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. Gesucht sind dazu alle harmonischen Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $u|_{\partial\Omega} = v$. Existiert eine Lösung? Ist sie eindeutig? Wie können wir sie berechnen?

☺ Die Aufgabe führt uns direkt zu einem **linearen Gleichungssystem**: Wir haben $n = 7 \times 12 = 84$ Unbekannte und ebensoviele Gleichungen. Das sieht vernünftig aus, bedeutet aber noch nicht, dass es genau eine Lösung gibt. Hierzu müssen wir genauer hinschauen und begründen!

Diese Anwendung ist faszinierend, sie fördert sowohl die physikalische Anschauung als auch die mathematisch-methodische Vorgehensweise. Hier gilt das wunderbare Minimum-Maximum-Prinzip, siehe Satz D1c. Daraus folgt die Eindeutigkeit und damit sogar die Existenz einer Lösung!

Harmonische Funktionen: Minimum-Maximum-Prinzip

Satz D1c: Minimum-Maximum-Prinzip, Eindeutigkeit und Existenz

(1) Jede harmonische Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Minimum und ihr Maximum am Rand $\partial\Omega$ an: $\min_\Omega u = \min_{\partial\Omega} u$ und $\max_\Omega u = \max_{\partial\Omega} u$.

(2) Für je zwei harmonische Funktionen $u, \tilde{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ folgt:
Monotonie: Aus $u \ge \tilde{u}$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u \ge \tilde{u}$ auf ganz Ω.
Eindeutigkeit: Aus $u = \tilde{u}$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u = \tilde{u}$ auf ganz Ω.

(3) Existenz: Zu jeder beliebig vorgegebenen Randfunktion $v : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ existiert genau eine harmonische Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $u|_{\partial\Omega} = v$.

Skizze: (1) Sei $z \in \Omega$ eine Minimalstelle. Im Fall $z \in \partial\Omega$ sind wir fertig. Für $z \in \Omega^\circ$ gilt die Mittelwerteigenschaft, also sind alle Nachbarn von z ebenfalls Minimalstellen. Es gibt einen Weg von z zu einem Randpunkt $z' \in \partial\Omega$. Also ist auch z' eine Minimalstelle. (Ebenso für das Maximum.)

(2) Auch $v = u - \tilde{u}$ ist harmonisch. Aus $v \ge 0$ auf $\partial\Omega$ folgt $v \ge 0$ auf Ω.
(3) Wir haben so viele Unbekannte wie Gleichungen. Für jede rechte Seite existiert nach (2) höchstens eine Lösung, also genau eine. QED

Harmonische Funktionen: Eindeutigkeit und Existenz

Aufgabe: Führen Sie diese Beweisskizze sorgfältig aus!

Harmonische Funktionen sind wichtig in der Mathematik, der Physik und den Ingenieurwissenschaften. Die Analysis erklärt Ihnen hierzu das kontinuierliche Modell und zugehörige partielle Differentialgleichungen. Unsere kleine Illustration ist Teil eines größeren Gesamtkunstwerks.

Wir betrachten hier ganz bescheiden ein endlich-diskretes Modell und erhalten ein beliebig großes, doch einfaches lineares Gleichungssystem. Wir haben geeignete Werkzeuge! Dies schult, wie gesagt, wunderbar unsere physikalische Anschauung und unsere mathematische Methodik.

Wir sehen zudem, dass unsere Koeffizientenmatrix hier dünn besetzt ist; das ist typisch für Anwendungen, in denen jeder Punkt nur mit wenigen Nachbarn interagiert. Für so strukturierte Probleme bietet die Numerik spezialisierte und besonders effiziente Näherungsverfahren.

Wenn Ihnen partout nichts Besseres einfällt: Gauß geht immer…
und für Matrizen moderater Größe auch ausreichend schnell.

Harmonische Funktionen: Eindeutigkeit und Existenz

Lösung: Sei $\Omega \subset \mathbb{Z}^n$ endlich. Wir zerlegen Ω in Inneres Ω° und Rand $\partial\Omega$: Jeder innere Punkt $z \in \Omega^\circ$ hat alle seine $2n$ Nachbarn $z \pm e_k$ in Ω; jeder Randpunkt $z \in \partial\Omega$ hat mindestens einen Nachbarn außerhalb von Ω.

Zu $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definieren wir den **Mittelwert** $\bar{u} : \Omega^\circ \to \mathbb{R}$ durch

$$\bar{u}(z) := \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n u(z + e_k) + u(z - e_k).$$

Wir nennen u **harmonisch**, wenn $u(z) = \bar{u}(z)$ für alle $z \in \Omega^\circ$ gilt.

(1a) Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Da die Menge Ω endlich ist, existiert eine Minimalstelle $z_0 \in \Omega$. Es gilt also $u(z_0) \le u(z)$ für alle $z \in \Omega$. Liegt z_0 im Inneren, so ist jeder Nachbar $z_1 = z_0 \pm e_k$ ebenfalls eine Minimalstelle: Wir haben $u(z_1) \ge u(z_0)$. Gäbe es einen Nachbarn z_1 mit $u(z_1) > u(z_0)$, so wäre $\bar{u}(z_0) > u(z_0)$, Widerspruch! Also folgt $u(z_1) = u(z_0)$.

(1b) Es gibt einen Weg $z_0, \dots, z_\ell \in \Omega$ zu einem Randpunkt $z_\ell \in \partial\Omega$, wobei $z_i \in \Omega^\circ$ gilt für alle $0 \le i < \ell$ sowie $z_{i+1} - z_i \in \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$. Nach (1a) gilt $u(z_0) = u(z_1) = \dots = u(z_\ell)$, also ist auch z_ℓ eine Minimalstelle von u.

Harmonische Funktionen: Eindeutigkeit und Existenz

(2) Die Differenz $v = u - \tilde{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ ist harmonisch.

(2a) Gilt $u \ge \tilde{u}$ auf dem Rand $\partial\Omega$, so dort auch $v \ge 0$.
Nach (1) folgt $v \ge 0$ auf ganz Ω, also dort auch $u \ge \tilde{u}$.

(2b) Hier gilt $v = 0$ auf $\partial\Omega$, nach (1) also $v = 0$ auf ganz Ω.

(3) Wir definieren $L : \mathbb{R}^\Omega \to \mathbb{R}^\Omega : u \mapsto \hat{u}$ durch $\hat{u}(z) = u(z)$ für $z \in \partial\Omega$ und $\hat{u}(z) = u(z) - \bar{u}(z)$ für $z \in \Omega^\circ$; das misst den Fehler zur Harmonizität.

(3a) Die Abbildung $L : \mathbb{R}^\Omega \to \mathbb{R}^\Omega$ ist $\mathbb{R}$–linear, wird also dargestellt als $L(u) = Au$ durch eine quadratische (!) Matrix $A \in \mathbb{R}^{\Omega \times \Omega}$. Nun der Clou:

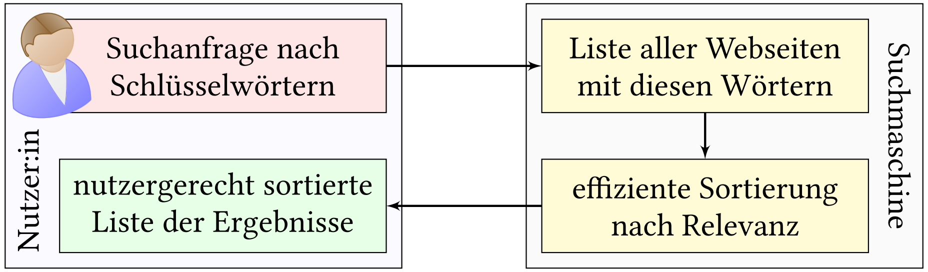
(3b) Gilt $L(u) = 0$, so ist u harmonisch mit $u|_{\partial\Omega} = 0$; dank (2) folgt $u = 0$. Demnach ist L injektiv, und somit ist die Matrix A in $\mathbb{R}^{\Omega \times \Omega}$ invertierbar!

🙂 Das ist ein höchst eleganter Beweis und scharfsinniges Vorgehen: Wir zeigen zunächst das allgemeine Minimum-Maximum Prinzip (1), daraus folgt die Eindeutigkeit (2) und damit schließlich die Existenz (3).

Die Argumente gelten für jeden Markov–Graphen, mit Übergangswkten auf den Kanten, und seinen diskreten Laplace–Operator $L : \mathbb{R}^\Omega \to \mathbb{R}^\Omega$.

Die Mathematik hinter Google

*„Wo simmer denn dran? Aha, heute krieje mer de Suchmaschin.
Wat is en Suchmaschin? Da stelle mer uns janz dumm. …“*



Mathematik: Wie misst man Relevanz von Informationen?
Artificial Intelligence (AI), Machine Learning (ML), …

Informatik: Wie verarbeitet man enorm große Datenmengen?
Big Data, Data Mining, Data Science, … „Data is the new oil.“

Finanzstrategie: Wie verdient man Geld mit einem Gratisprodukt?
„If you're not paying for it, you're not the customer, you are the product.“

Die Mathematik hinter Google

Als das World Wide Web Mitte der 1990er noch klein war, da genügte es, zu einer Suchanfrage einfach *alle* Treffer aufzulisten. Die Liste war noch kurz, jede:r Nutzer:in konnte sie leicht selbst überblicken. Das Internet blieb jedoch nicht lange so überschaubar.… Das Volumen explodierte!

Als Versuch einer Lösung ging 1998 die Suchmaschine Google in Betrieb und dominiert seither den Markt. Sie wird ständig weiterentwickelt. Die meisten Optimierungen hütet Google streng als Firmengeheimnis, doch das ursprüngliche Grundprinzip ist veröffentlicht und genial einfach:

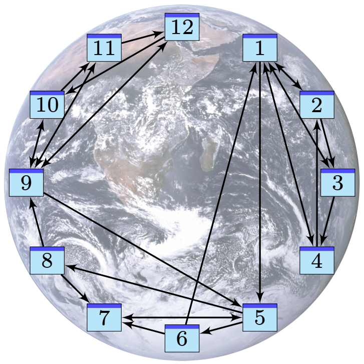
📖 Sergey Brin, Larry Page: *The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine.* Stanford University 1998, online verfügbar unter `infolab.stanford.edu/pub/papers/google.pdf`

Bei vorherigen Suchmaschinen musste man endlose Trefferlisten durchforsten, bis man auf die ersten interessanten Ergebnisse stieß. Bei Google stehen sie auf wundersame Weise ganz oben. Wie ist das möglich? Die Antwort liegt (zu einem großen Teil) in folgender genial-einfachen Idee. Google misst die Popularität p_i (*PageRank*) jeder Seite i durch folgendes Gleichungssystem:

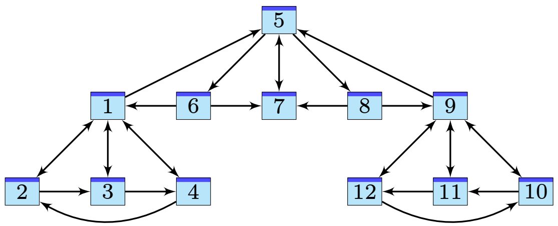
$$\boxed{\text{PageRank} \quad p_i = \frac{q}{N} + \sum_{j \to i} \frac{1-q}{\ell_j}\, p_j}$$

Keine Angst, die Formel sieht nur auf den ersten Blick kompliziert aus. Ich werde sie anhand von Beispielen Schritt für Schritt erläutern. Wer sowas schon gesehen hat, weiß, dass es sich um eine besonders einfache Formel handelt, nämlich ein *lineares Gleichungssystem*, das keine Quadrate oder komplizierteres enthält. Schon die Formel von Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ ist komplizierter.

Chaos und Struktur im Web



Miniaturbeispiel des Web als ein Graph aus Seiten $i = 1, \dots, N$ und Links $i \to j$.
Versuch einer hierarchischen Anordnung:



Eine Seite ist populär, wenn viele Seiten auf sie verweisen? Zu naiv! ☹
Eine Seite ist populär, wenn viele populäre Seiten auf sie verweisen. ☺

Ein zufälliger Surfer folgt von der aktuellen Seite irgendeinem der Links.

Aufgabe: Berechnen Sie die Aufenthaltswkten. Konvergieren sie gegen ein Gleichgewicht? Wie schnell? Immer dasselbe, d.h. ist es eindeutig?

☺ Im Rückblick ist die abstrakt-mathematische Idee genial einfach.
Wer diese Aufgabe bis 1998 professionell löste, ist heute Milliardär.

Chaos und Struktur im Web

Klassische Texte sind von einer Person geschrieben und linear: Ein Buch hat einen Anfang und ein Ende, typischerweise liest man es von vorne nach hinten in der Reihenfolge der Seiten. Meist gibt es zudem ein Inhaltsverzeichnis oder einen Index zum leichteren Nachschlagen. (Ja, liebe Kinder, unsere Vorfahren konnten Texte mit hunderttausend Buchstaben am Stück lesen, ohne Clicks und ohne Werbung. Man nannte das „Buch“ und speicherte es auf „Papier“. Damals!)

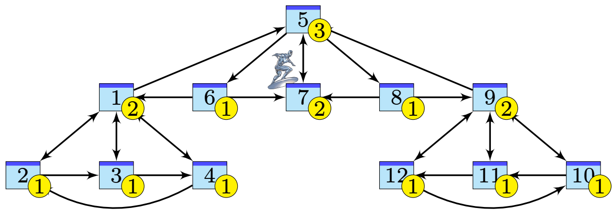
Webseiten dagegen bilden eine gänzlich andere Struktur. Niemand käme auf die Idee, das Internet von Anfang bis Ende anzuordnen, durchzulesen oder auszudrucken: Es hat keine lineare Struktur, keine erste und keine letzte Seite, es ist zudem viel zu groß, und das meiste ist uninteressant.

Die Webseiten verweisen gegenseitig aufeinander und bilden einen *Hypertext*. Zur Illustration betrachten wir ein Miniaturbeispiel bestehend aus 12 Webseiten. Unter den Seiten $1, 2, 3, 4$ wird 1 am häufigsten zitiert. Die Seite 1 scheint daher besonders relevant oder populär. Gleiches gilt für $9, 10, 11, 12$ mit 9 an der Spitze. Die Struktur von $5, 6, 7, 8$ ist ähnlich mit 7 an der Spitze. Aber die Seiten $1, 7, 9$, die wir schon als relevant erkannt haben, verweisen alle auf die Seite 5. Diese scheint daher populär / wichtig / zentral und für eine spätere Suche besonders relevant.

Diese Anordnung war Handarbeit. Lässt sie sich automatisieren? Nach welchem Algorithmus? Erster Versuch einer Bewertung: Eine Seite ist populär, wenn viele Seiten auf sie verweisen. Nachteil: Die naive Linkzählung ist leichte Beute für Manipulationen, z.B. Linkfarmen.

Zweiter Versuch: Eine Seite ist populär, wenn viele populäre Seiten auf sie verweisen. Das klingt zunächst zirkulär, lässt sich aber als lineare Gleichung auffassen und lösen. Ich erläutere dazu die besonders anschauliche Betrachtungsweise des zufälligen Surfers.

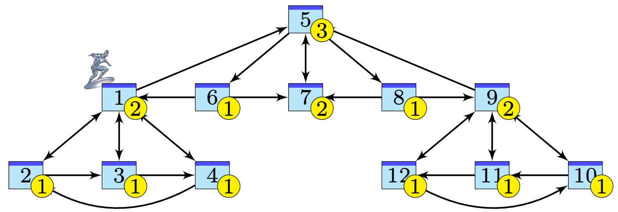
Irrfahrt eines zufälligen Surfers



Googles Heuristik: Aufenthaltswkt ∼ Popularität ∼ Relevanz
Aufgabe: Berechnen Sie die Aufenthaltswkten bei Start auf Seite 7.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t=0$	.000	.000	.000	.000	.000	.000	1.00	.000	.000	.000	.000	.000
$t=1$	.000	.000	.000	.000	1.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t=2$	.000	.000	.000	.000	.000	.333	.333	.333	.000	.000	.000	.000
$t=3$	.167	.000	.000	.000	.333	.000	.333	.000	.167	.000	.000	.000
$t=4$	.000	.042	.042	.042	.417	.111	.111	.111	.000	.042	.042	.042
$t=5$	.118	.021	.021	.021	.111	.139	.250	.139	.118	.021	.021	.021
…												
$t=29$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059
$t=30$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059

Irrfahrt eines zufälligen Surfers



Googles Heuristik: Aufenthaltswkt ∼ Popularität ∼ Relevanz
Aufgabe: Berechnen Sie die Aufenthaltswkten bei Start auf Seite 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t=0$	1.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t=1$	.000	.250	.250	.250	.250	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t=2$	.375	.125	.125	.125	.000	.083	.083	.083	.000	.000	.000	.000
$t=3$	.229	.156	.156	.156	.177	.000	.083	.000	.042	.000	.000	.000
$t=4$	.234	.135	.135	.135	.151	.059	.059	.059	.000	.010	.010	.010
$t=5$	.233	.126	.126	.126	.118	.050	.109	.050	.045	.005	.005	.005
…												
$t=69$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059
$t=70$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059

Irrfahrt eines zufälligen Surfers

Jeder kleine Rechenschritt ist einfach, doch davon sind sehr viele nötig.
Das möchten Sie nicht selbst rechnen, es ist ideal für einen Computer!
Dazu ist es hilfreich, zunächst das Modell präzise zu formulieren:

Aufgabe: Sei $p_j(t)$ die Aufenthaltswkt auf Seite j zur Zeit t.
Von Seite j gibt es genau $\ell_j \ge 1$ weiterführende Links $j \to i$.
Bestimmen Sie daraus die Aufenthaltswkten zur Zeit $t+1$.

Lösung: Die Wkt, auf Seite i zu landen, ist die Summe aller Links $j \to i$:

Diffusion $$p_i(t+1) = \sum_{j \to i} \frac{1}{\ell_j} p_j(t) \quad \text{kurz} \quad p(t+1) = L\,p(t)$$

Gleichgewicht $$p_i = \sum_{j \to i} \frac{1}{\ell_j} p_j \quad \text{kurz} \quad p = L\,p$$

☺ Die Matrix $L \in \mathbb{R}^{N \times N}$ codiert die Linkstruktur des Internets:
Wie hier gezeigt, setzen wir $L_{ij} = 1/\ell_j$ falls $j \to i$ und $L_{ij} = 0$ sonst.
Sie mag groß sein, doch alles ist linear, also sehr einfach strukturiert.

Irrfahrt eines zufälligen Surfers

Dieses einfache Modell hat einige beachtliche Vorteile:

☺ Eine Seite ist populär, wenn viele populäre Seiten auf sie verweisen.
Das klingt zirkulär, doch als lineare Gleichung ist es einfach und klar.

☺ Die Matrix L ist sehr dünn besetzt; sie hat extrem viele Nullen.
Wir können sie effizient speichern und $p(t+1) = L\,p(t)$ berechnen.

☺ Wir beobachten Konvergenz, zumindest in unseren obigen Beispielen:
Die Wkten diffundieren für großte t gegen eine stationäre Verteilung!

Dank dieser Betrachtungsweise löst sich unser LGS sozusagen von allein!
Das ist gerade für große Matrizen viel effizienter als andere Verfahren.
(Der sonst so erfolgreiche Gauß–Algorithmus ist hier weniger ratsam.)

Leider hat dieses einfache Modell auch noch erhebliche Nachteile:

☹ Für manche Graphen konvergieren die Wkten nicht.
Wir wünschen uns Konvergenz, immer, zudem unabhängig vom Start!

☹ Schwarze Löcher: Was tun bei Seiten oder Cliquen ohne Ausgang?
Unser Surfer bleibt irgendwo gefangen, das scheint wenig plausibel!

Zufall und Notwendigkeit: Googles PageRank

Um diese Nachteile zu beheben, nutzt Google ein verfeinertes Modell:
Unser Surfer befindet sich auf Seite j und hat zwei Möglichkeiten.
Sprung: Mit Wkt $q = 0.15$ startet er neu (irgendwo, zufällig)
Fluss: Mit Wkt $(1-q)$ folgt er zufällig einem Link $j \to i$.

Aufgabe: Wie lauten die Formeln im verfeinerten Modell? **Lösung:**

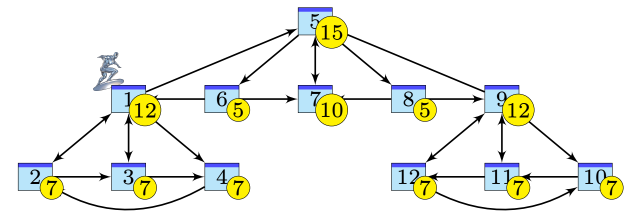
Diffusion $$p_i(t+1) = \frac{q}{N} + \sum_{j \to i} \frac{1-q}{\ell_j} p_j(t)$$

Gleichgewicht $$p_i = \frac{q}{N} + \sum_{j \to i} \frac{1-q}{\ell_j} p_j$$

☺ Voilà, schon haben wir es: Das ist Googles berühmter *PageRank*!

Dieses verfeinerte Modell mit Sprung / Teleportation / Neuanfang lässt sich ebenso leicht berechnen wie das einfache Modell. Zudem entkommt es schwarzen Löchern und garantiert Konvergenz, immer, sicher, sogar schnell. Der etwas wilkürliche Wert $q = 0.15$ entspricht dem typischen Verhalten, sechs bis sieben Links zu folgen, bevor man neu anfängt.

Zufall und Notwendigkeit: Googles PageRank



Googles Heuristik: Aufenthaltswkt $\sim$ Popularität $\sim$ Relevanz
Aufgabe: Wie verläuft die Diffusion bei Sprunghaftigkeit $q = 0.15$?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t=0$	1.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t=1$	.013	.225	.225	.225	.225	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013
$t=2$	.305	.111	.111	.111	.028	.076	.087	.076	.034	.020	.020	.020
$t=3$	.186	.124	.124	.124	.158	.021	.085	.021	.071	.028	.028	.028
$t=4$	.180	.105	.105	.105	.140	.057	.075	.057	.057	.040	.040	.040
$t=5$	.171	.095	.095	.095	.126	.052	.101	.052	.087	.042	.042	.042
…												
$t=29$	.120	.066	.066	.066	.150	.055	.102	.055	.120	.066	.066	.066
$t=30$	.120	.066	.066	.066	.150	.055	.102	.055	.120	.066	.066	.066

Zufall und Notwendigkeit: Googles PageRank

Dieses Modell hat solide theoretische Grundlagen! Bei positiver Sprunghaftigkeit $0 < q \le 1$ garantiert **Banachs Fixpunktsatz**:

1. Es gibt genau ein Gleichgewicht $p : \{1, \dots, N\} \to \mathbb{R}$.
   Dieses erfüllt $p_1, \dots, p_N > 0$ und $p_1 + \dots + p_N = 1$.
2. Für jede Anfangsverteilung $p(0)$ konvergiert die Diffusion gegen diese Gleichgewichtsverteilung, $p(t) \to p$ für $t \to \infty$.
3. Die Konvergenz ist mindestens so schnell wie die der geometrischen Folge $(1-q)^n \searrow 0$, in unserem Beispiel $q = 0.15$ also wie $0.85^n \searrow 0$.

Mit diesen Aufenthaltswkten p_i misst Google die Popularität / Relevanz! Der Satz sichert die mathematischen Grundlagen und beschert uns einen effizienten Algorithmus. Das ist der erste Schritt zur Implementierung. (Alternativ rechtfertigt der Satz nachträglich die Implementierung.)

Übung: Sobald Sie Banachs wunderbaren Fixpunktsatz kennen, können Sie diese schöne Anwendung selbst nachrechnen!

Zufall und Notwendigkeit: Googles PageRank

Dieses Modell bewährt sich in der Praxis!

1. Die berechnete Popularität p_i kommt der Nutzererwartung recht nahe: Die so berechnete Reihenfolge entspricht der „gefühlten Relevanz“.
2. Die Ergebnisse sind robust gegen Manipulationen wie Linkfarmen. Der PageRank ist nicht perfekt, aber gut genug als Ausgangspunkt.
3. *Search Engine Optimization* (SEO) ist ein großes Geschäft, alle Seiten haben über die Jahre aufgerüstet, Google behält bisher die Oberhand.

Hier arbeiten Theorie und Praxis wunderbar zusammen. Unsere obigen Beobachtungen zur schnellen Konvergenz und guten Eigenschaften sind nicht zufällig, sondern beruhen auf mathematischen Gesetzmäßigkeiten. Diese kann man beweisen und darf sich anschließend darauf verlassen. Das ist der Garant für jede stabil funktionierende Implementierung.

Mehr zur Geschichte siehe `en.wikipedia.org/wiki/History_of_Google`.
▶ Nostalgia Nerd: *Before Google.* `youtu.be/812YkCrmksk`

Google wurde 1998 eingeführt und hat den Markt für Suchmaschinen über ein Vierteljahrhundert dominiert – eine Ewigkeit in Anbetracht schnelllebiger Trends. Seit Kurzem destillieren Modelle der generativen künstlichen Intelligenz (genAI) recht brauchbare Zusammenfassungen des gesammelten Internetkorpus. Wir werden sehen, wie die Nutzung sich weiter entwickelt. Im Rückblick zitiere ich Brin ud Page von 1998:

PageRank: bringing order to the Web. The citation (link) graph of the Web is an important resource that has largely gone unused in existing Web search engines. We have created maps containing as many as 518 million of these hyperlinks, a significant sample of the total. These maps allow rapid calculation of a Web page's "PageRank", an objective measure of its citation importance that corresponds well with people's subjective idea of importance. Because of this correspondence, PageRank is an excellent way to prioritize the results of Web key-word searches. For most popular subjects, a simple text matching search that is restricted to Web page titles performs admirably when PageRank prioritizes the results.

The most important measure of a search engine is the quality of its search results. [...] our own experience with Google has shown it to produce better results than the major commercial search engines for most searches.

Diese Einschätzung hat sich anschließend als zutreffend erwiesen und war die Grundlage des Erfolges. Der PageRank misst die Aufenthaltswkt, und diese entspricht erstaunlich gut der „Popularität“ oder „Relevanz“:

Intuitive justification: PageRank can be thought of as a model of user behavior. We assume there is a "random surfer" who is given a Web page at random and keeps clicking on links, never hitting "back", but eventually gets bored and starts on another random page. The probability that the random surfer visits a page is its PageRank. [...]

Another intuitive justification is that a page can have a high PageRank if there are many pages that point to it, or if there are some pages that point to it and have a high PageRank. Intuitively, pages that are well cited from many places around the Web are worth looking at.

Auch zur Finanzierung durch Werbung schreiben Brin und Page schon 1998 erstaunlich weitsichtig, was sich später bewahrheiten sollte:

Currently, the predominant business model for commercial search engines is advertising. The goals of the advertising business model do not always correspond to providing quality search to users. For example, in our prototype search engine one of the top results for cellular phone is "The Effect of Cellular Phone Use Upon Driver Attention", a study which explains in great detail the distractions and risk associated with conversing on a cell phone while driving. This search result came up first because of its high importance as judged by the PageRank algorithm, an approximation of citation importance on the web. It is clear that a search engine which was taking money for showing cellular phone ads would have difficulty justifying the page that our system returned to its paying advertisers. For this type of reason and historical experience with other media, we expect that advertising funded search engines will be inherently biased towards the advertisers and away from the needs of the consumers.

Für den Erfolg von Google war das Timing entscheidend. Zunächst die Entwicklung der Technologie und des Internets: Die Suchmaschine löste ein dringendes Problem, das erst kurz zuvor Mitte der 1990er entstand. Für den Start von Google war 1998 genau der richtige Zeitpunkt.

Sodann die Finanzierung. Google benötigt riesige Serverfarmen, diese kosten enorme Geldsummen, in Anschaffung und Unterhaltung, auch in Programmierung und fortlaufender Optimierung. Daher machte Google anfangs hohe Verluste, seither generiert Werbung gigantische Einkünfte.

In ihrem Artikel gehen Brin und Page erfreulich offen und detailliert auf die Architektur von Hardware und Software ein. Für die Nutzererfahrung ist nach der Qualität der Ergebnisse vor allem rasche Antwort wichtig. Wenige Sekunden sind tolerierbar, wünschenswert ist nahezu instantan.

Die Katalogisierung des Web und der PageRank-Algorithmus hingegen laufen auf längerer Zeitskala über Tage und Wochen im Hintergrund. Die schnelle Konvergenz verdanken sie Banachs Fixpunktsatz!

Illustration zu Banachs Fixpunktsatz

Beispiel: Legen Sie im Hörsaal eine Karte des Campus auf den Tisch.

Immer fällt genau ein Punkt der Karte auf den geographischen Punkt, den er bezeichnet.

Hat jede Kontraktion $f:(X,d)\to(X,d)$ einen Fixpunkt?

Nein, etwa $f(x)=x/2$ auf $X=\mathbb{R}^n\smallsetminus\{0\}$.

Der Raum (X,d) muss dazu vollständig sein!

Banachs Fixpunktsatz ist ein universelles Werkzeug.

Aufgabe: (1) Illustrieren Sie Iterationen und Banachs Fixpunktsatz.
(2) Sie kennen bereits spektakuläre Anwendungen: Nennen Sie einige!
(3) Wiederholung: Formulieren und beweisen Sie Banachs Fixpunktsatz.

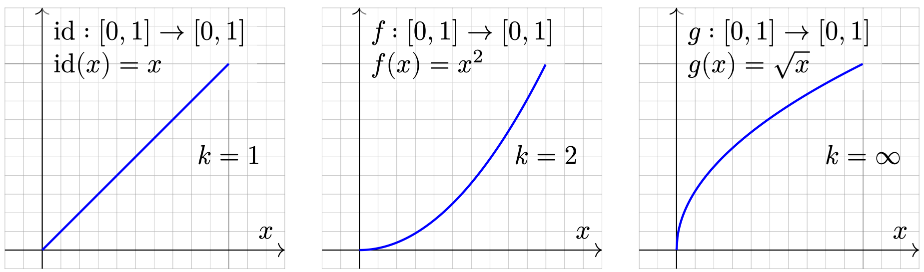
Lösung: (1) Bildhaftes Beispiel: Wenn Sie von Ihrer geographischen Umgebung X eine Landkarte im Maßstab $k=1:n$ (mit $n>1$) vor sich auf den Tisch legen, dann definiert die Zuordnung jedes realen Punktes zu seinem Bildpunkt eine k–kontraktive Abbildung $f:X\to X$. Genau ein Punkt der Karte liegt auf dem geographischen Punkt, den er bezeichnet.

(2) Mit dem Iterationsverfahren können Sie viele Gleichungen numerisch lösen wie $x=\cos(x)$ für $x\in[0,1]$. Das **Newton–Verfahren** baut darauf auf und verbessert ganz wesentlich die Konvergenzgeschwindigkeit.

Weitere Anwendungen sind der **Satz von Picard–Lindelöf** zur Lösung von Differentialgleichungen $y'=f(x,y)$ und der **lokale Umkehrsatz** zur Konstruktion lokaler Diffeomorphismen $(f,g):\mathbb{R}^n\supseteq U\cong V\subseteq\mathbb{R}^n$.

Diese Sätze sind schon spektakulär, doch nur die ersten Anwendungen im Grundstudium, als Spitze des Eisbergs! Viele weitere kommen hinzu.

Dehnungsschranken und Kontraktionen



Seien (X,d_X) und (Y,d_Y) Räume mit endlichen Metriken und $k\in\mathbb{R}_{\ge0}$. Eine Abbildung $f:(X,d_Y)\to(Y,d_Y)$ heißt **k–lipschitz–stetig**, falls gilt:

$$d_Y(f(a),f(b))\le k\,d_X(a,b)\qquad\text{für alle } a,b\in X$$

Im Falle $0\le k<1$ nennen wir f **kontraktiv** oder eine **k–Kontraktion**.

Beispiel: Für $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m:x\mapsto Ax+b$ mit $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ und $b\in\mathbb{R}^n$ gilt $|f(x)-f(y)|=|A(x-y)|\le\|A\|\cdot|x-y|$ bezüglich der Operatornorm.

Beispiel: Sei $X\subseteq\mathbb{R}^n$ konvex und $f:X\to\mathbb{R}^m$ diff'bar mit $\|f'\|\le k$. Für alle $x,y\in X$ existiert $z\in[x,y]$, sodass $f(x)-f(y)=f'(z)(x-y)$. Demnach gilt $|f(x)-f(y)|\le\|f'(z)\|\cdot|x-y|\le k\,|x-y|$.

Dehnungsschranken und Kontraktionen

Wir nennen eine solche Funktion f auch **dehnungsbeschränkt**.
Der **metrische Differenzenquotient** ist hier beschränkt gemäß

$$\frac{d_Y(f(a),f(b))}{d_X(a,b)}\le k\qquad\text{für alle } a\ne b \text{ in } X.$$

Für $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ definieren wir daher die **Lipschitz–Norm**

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}}=\mathrm{Lip}(f):=\sup\left\{\frac{d_Y(f(a),f(b))}{d_X(a,b)}\;\middle|\;a\ne b\text{ in }X\right\}.$$

Die folgende Formulierung vereinheitlicht Ausnahmen und Sonderfälle:

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}}:=\inf\bigl\{k\in\mathbb{R}_{\ge0}\bigm|\forall a,b\in X: d_Y(f(a),f(b))\le k\,d_X(a,b)\bigr\}$$

Dies entspricht der **Operatornorm** von linearen Abbildungen normierter Vektorräume. Genau dann gilt $\|f\|<\infty$, wenn f lipschitz–stetig ist.

Genau dann gilt $\|f\|=0$, wenn f konstant ist. Speziell für die Identität $\mathrm{id}_X:X\to X$ gilt $\|\mathrm{id}_X\|=1$, im Sonderfall $X=\{x\}$ jedoch nur $\|f\|=0$.

Für die Komposition von Abbildungen gilt $\|g\circ f\|\le\|g\|\cdot\|f\|$.

Banachs Fixpunktsatz

Satz D2A: Fixpunktsatz von Banach, 1922

Sei (X,d) ein metrischer Raum, nicht-leer und vollständig. Hierauf sei $f : X \to X$ eine k–Kontraktion: Wir haben eine Kontraktionskonstante $k \in [0,1[$, und für alle $x, y \in X$ gilt $d(f(x), f(y)) \le k\, d(x,y)$. Dann folgt:

(1) Zur Abbildung f existiert genau ein Fixpunkt $a \in X$, mit $f(a) = a$.
(2) Dieser ist Grenzwert jeder Iteration mit $x_0 \in X$ und $x_{n+1} = f(x_n)$.
(3) Diese Approximation $x_n \to a$ erfüllt die beiden Fehlerschranken

$$d(a, x_n) \;\le\; \underbrace{\frac{k}{1-k}\, d(x_n, x_{n-1})}_{\text{a posteriori, nach letztem Schritt}} \;\le\; \underbrace{\frac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0)}_{\text{a priori, nach erstem Schritt}} \;\searrow\; 0.$$

(4) Allgemeiner genügt $d(f^n(x), f^n(y)) \le k_n\, d(x,y)$ für alle $x, y \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\sum_{n=0}^{\infty} k_n < \infty$. Damit gilt die feinere Fehlerschranke

$$d(a, x_n) \;\le\; d(x_1, x_0) \sum_{j=n}^{\infty} k_j \;\searrow\; 0.$$

Das garantiert Eindeutigkeit, Existenz, Konstruktion und Effizienz.

Banachs Fixpunktsatz: Erläuterung

S. Banach: *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales.* Fund. Math. 3 (1922) 133–181.

Die Aussage (1) garantiert Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunktes. Die Konstruktion (2) liefert eine extrem praktische Approximation.

Gemäß (3) ist die Konvergenz $x_n \to a$ hierbei mindestens so schnell wie die Konvergenz der geometrischen Folge $k^n \searrow 0$: Dies nutzen wir bei iterativen Berechnungen als *a priori* Abschätzung des Zeitaufwandes, nach der Rechnung haben wir die (bessere) *a posteriori* Abschätzung.

Dieser wunderbare Satz geht auf Stefan Banach (1892–1945) zurück, der nützliche Zusatz (4) stammt von Johannes Weissinger (1913–1995). Zum Beispiel genügt es, dass eine gewisse Iteration f^m kontraktiv ist, also $d(f^m(x), f^m(y)) \le k\, d(x,y)$ für eine Konstante $k \in [0,1[$ erfüllt.

Ebenso kommt es vor, dass höhere Iterationen f^n stärker kontrahieren, und die Reihe $\sum k_n$ somit viel kleiner ausfällt als die geometrische $\sum k^n$. Für die *qualitative* Konvergenzaussage (2) ist dies zunächst unwesentlich, doch ungemein hilfreich für die *quantitative* Fehlerabschätzung (3-4).

Banachs Fixpunktsatz: Beweis der Konvergenz

Beweis: *Eindeutigkeit:* Für je zwei Fixpunkte $a = f(a)$ und $b = f(b)$ gilt $d(a,b) = d(f(a), f(b)) \le k\, d(a,b)$ mit $k < 1$, also $d(a,b) = 0$, somit $a = b$.

Existenz: Wir wählen $x_0 \in X \ne \emptyset$ und setzen $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Per Induktion gilt $d(x_{n+1}, x_n) \le k^n d(x_1, x_0)$: Für $n = 0$ ist dies trivial, für $n \ge 1$ gilt $d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \le k\, d(x_n, x_{n-1}) \le k^n d(x_1, x_0)$.

Dank Dreiecksungleichung erhalten wir für alle $n \le p < q$:

$$\begin{aligned} d(x_q, x_p) &\le d(x_q, x_{q-1}) + \dots + d(x_{p+2}, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_p) \\ &\le (k^{q-p-1} + \dots + k + 1)\, d(x_{p+1}, x_p) \;=\; \frac{1-k^{q-p}}{1-k}\, d(x_{p+1}, x_p) \\ &\le \frac{k^p - k^q}{1-k}\, d(x_1, x_0) \;\le\; \frac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0) \;\searrow\; 0 \quad \text{für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Demnach ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge im metrischen Raum (X,d). Da (X,d) vollständig ist, existiert ein Grenzwert $a \in X$ mit $x_n \to a$.

Da f kontraktiv und somit stetig ist, folgt aus $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ per Grenzübergang $a = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(a)$.

Banachs Fixpunktsatz: Beweis der Fehlerschranke

Die Ungleichung für $n = p$ und $q \to \infty$ ergibt die Fehlerabschätzung (3):

$$d(a, x_n) \;\le\; \underbrace{\frac{k}{1-k}\, d(x_n, x_{n-1})}_{\text{a posteriori, nach letztem Schritt}} \;\le\; \underbrace{\frac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0)}_{\text{a priori, nach erstem Schritt}} \;\searrow\; 0$$

Aussage (4) beweisen wir genauso: Wegen $\sum_{n=0}^{\infty} k_n < \infty$ gilt $k_n \to 0$ für $n \to \infty$. Insbesondere existiert $m \in \mathbb{N}$ sodass $k_n \le 1/2$ für alle $n \ge m$, das heißt f^n ist kontraktiv für alle $n \ge m$. Sind $a = f(a)$ und $b = f(b)$ Fixpunkte von f, so auch von f^n, also folgt $a = b$ wie oben.

Für jede iterative Folge mit $x_0 \in X$ und $x_{n+1} = f(x_n)$ erhalten wir für $n \le p < q$ wie oben $d(x_q, x_p) \le d(x_1, x_0) \sum_{j=n}^{\infty} k_j$. Somit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in (X,d), also existiert ein Grenzwert $a \in X$ mit $x_n \to a$.

Für $n = p$ und $q \to \infty$ erhalten wir die feinere Fehlerabschätzung

$$d(a, x_n) \le d(x_1, x_0) \sum_{j=n}^{\infty} k_j \;\searrow\; 0.$$

Das beinhaltet, für $k_j = k^j$, die beiden Abschätzungen aus (3).
Wie immer bei Konvergenz gilt auch hier: Ende gut, alles gut. $\boxed{\text{QED}}$

Erinnerung: normierte Vektorräume

Zur Erinnerung: Auf dem Raum $X = \mathbb{R}^n$ definieren wir für jedes $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} &\text{die euklidische Norm} && |x|_2 := \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \dots + {x_n}^2}, \\ &\text{die Maximumsnorm} && |x|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}, \\ &\text{die Taxinorm} && |x|_1 := |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|. \end{aligned}$$

Übung: Jede dieser Normen $x \mapsto |x|$ erfreuen sich folgender Eigenschaften für alle Vektoren $x, y \in X$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$:

N0: $|x| \ge 0 = |0|$ (Positivität)

N1: $|x| > 0$ für $x \ne 0$ (Definitheit)

N2: $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$ (Homogenität)

N3: $|x + y| \le |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

Definition D2B: Norm auf einem Vektorram

Eine **Norm** auf einem Vektorraum X ist eine Abbildung $|-| : X \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, die (N0–3) erfüllt. Das Paar $(V, |-|)$ heißt dann **normierter Raum** oder **Prä–Banach–Raum**, und bei Vollständigkeit **Banach–Raum** (D2D).

Erinnerung: metrische Räume

Sei $(X, |-|)$ ein **normierter $\mathbb{R}$–Vektorraum**, etwa $X = \mathbb{R}^n$ mit einer der obigen Normen. Allgemeiner genügt eine **Pseudonorm** $|-| : X \to [0, \infty]$ mit Eigenschaften (N0–3). Die zugehörige **Metrik** misst den Abstand:

$$d : X \times X \to [0, \infty] : (x, y) \mapsto |x - y|$$

Übung: Für alle Punkte $x, y, z \in X$ gilt dann:

M0: $d(x, y) \ge 0 = d(x, x)$ (Positivität)

M1: $d(x, y) > 0$ für $x \ne y$ (Definitheit)

M2: $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)

M3: $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Definition D2C: Metrik und metrischer Raum

Eine **Metrik** auf einer Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty]$, die (M0–3) erfüllt. Das Paar (X, d) heißt dann ein **metrischer Raum**.

Für Metriken ist es bequem, die Möglichkeit $d(x, y) = \infty$ zuzulassen. Für Normen hingegen verlangen wir stets Endlichkeit, wie oben erklärt.

Vollständige metrische Räume

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X, d) **konvergiert** gegen einen Punkt $a \in X$, wenn der Abstand $d(x_n, a)$ schließlich beliebig klein wird. Ausführlich:

$$\begin{aligned} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a \text{ in } (X, d) \quad &:\Leftrightarrow \quad d(x_n, a) \to 0 \text{ für } n \to \infty \\ &:\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}_{\ge m} : d(x_n, a) < \varepsilon \end{aligned}$$

Wir nennen dann die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergent** und a ihren **Grenzwert**. Konvergenz in (X, d) ist eine **zweistellige Relation** zwischen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Punkten a in X. Wir schreiben hierfür kurz $x_n \to a$.

Wir nennen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **Cauchy–Folge** in (X, d), wenn der Durchmesser $\delta_n := \sup_{p,q\ge n} d(x_p, x_q)$ eine Nullfolge ist. In Quantorenschreibweise:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall p, q \ge n : d(x_p, x_q) \le \varepsilon$$

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy–Folge, aber nicht umgekehrt.

Definition D2D: vollständiger metrischer Raum

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy–Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X, d) konvergiert, also ein Grenzwert $x_n \to a \in X$ existiert.

Vollständige metrische Räume

Beispiel: Im Raum $X =]0, 1]$ mit euklidischer Metrik ist $x_n = 2^{-n}$ eine Cauchy–Folge, aber nicht konvergent. (Im Raum $[0, 1]$ gilt $x_n \to 0$.)

Beispiel: Im Raum $\mathbb{Q}$ mit euklidischer Metrik ist $x_n = \sum_{k=0}^n 1/k!$ eine Cauchy–Folge, hat aber in $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert. (In $\mathbb{R}$ hingegen gilt $x_n \to \mathrm{e} = 2.71828\dots$, aber dieser Grenzwert liegt nicht in $\mathbb{Q}$.)

Beispiel: Das Newton–Verfahren liefert eine effiziente Approximation von $\sqrt{5}$ durch eine rasch konvergente Folge $x_n \to \sqrt{5}$ *rationaler Zahlen*: Wir definieren $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $x_0 = 3$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 5/x_n)$. Diese Folge ist eine Cauchy–Folge in $\mathbb{Q}$, sie konvergiert aber nicht in $\mathbb{Q}$. (In $\mathbb{R}$ gilt wie gewünscht $x_n \to \sqrt{5}$, aber dieser Wert liegt nicht in $\mathbb{Q}$.)

Der Raum $\mathbb{Q}$ ist unvollständig, hat also ganz anschaulich noch Lücken. Jede Cauchy–Folge möchte konvergieren, doch oft fehlt der Grenzwert. In einem vollständigen Raum kann dieses Problem niemals auftreten!

Beispiel: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind vollständig bezüglich der Metrik $d(x, y) = |x - y|$, ebenso $\mathbb{R}^n$ bezüglich jeder beliebigen Norm und jede abgeschlossene Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ bezüglich der eingeschränkten Metrik.

Vollständigkeit des Raumes $B(X,\mathbb{R})$

Sei X eine Menge. Für $u : X \to \mathbb{R}$ definieren wir die Supremumsnorm:

$$\|u\| = |u|_X := \sup\{\, |u(x)| \mid x \in X \,\}$$

Dies ist eine Norm auf dem Vektorraum der beschränkten Funktionen:

$$B(X,\mathbb{R}) := \{\, u : X \to \mathbb{R} \mid \|u\| < \infty \,\}$$

Hier steht „B“ für beschränkt [engl. *bounded*, frz. *borné*].

Satz D2E: Vollständigkeit von $B(X,\mathbb{R})$

Der $\mathbb{R}$–Vektorraum $B(X,\mathbb{R})$ ist vollständig, also ein Banach–Raum.

Beweis: Gegeben sei eine Cauchy–Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $B(X,\mathbb{R})$:
Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert $m \in \mathbb{N}$ sodass für alle $p,q \ge m$ gilt $\|u_p - u_q\| \le \varepsilon$.
Zu jedem Punkt $x \in X$ ist dann $u_n(x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $\mathbb{R}$.
Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert $u(x) \in \mathbb{R}$ als Grenzwert $u_n(x) \to u(x)$.
Für $p = m$ und $q \to \infty$ folgt $|u_m(x) - u(x)| \le \varepsilon$, somit $\|u_m - u\| \le \varepsilon$.
Also ist u beschränkt, und es gilt $u_n \to u$ in $B(X,\mathbb{R})$. QED

☺ Somit ist jede abgeschlossene Teilmenge $E \subseteq B(X,\mathbb{R})$ vollständig.

Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^n$

Im Spezialfall einer endlichen Menge X, etwa $X = n = \{0,1,\dots,n-1\}$, ist $B(X,\mathbb{R})$ unser Modellraum $\mathbb{R}^n$ mit der Maximumsnorm $\|-\| = |-|_\infty$. Zudem haben wir die Norm $|x|_p = \big(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p\big)^{1/p}$ für $1 \le p < \infty$. Diese Normen sind äquivalent gemäß $|x|_\infty \le |x|_p \le |x|_1 \le n|x|_\infty$, daher definieren sie dieselbe Topologie, Konvergenz, Cauchy–Folgen, etc.

Satz D2F: Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^n$

Auf jedem $\mathbb{R}$–Vektorraum X endlicher Dimension sind je zwei Normen $|-|$ und $\|-\|$ äquivalent. Ausführlich bedeutet das: Es gibt positive Konstanten $\ell, L \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $\ell\,|x| \le \|x\| \le L\,|x|$ für alle $x \in X$ gilt.

Speziell für unseren Modellraum $X = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Norm $|-|$ ist die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1 \,\}$ kompakt, und es genügen

$$\ell = \min\{\, \|x\| \mid x \in \mathbb{S}^{n-1} \,\} \quad \text{und} \quad L = \max\{\, \|x\| \mid x \in \mathbb{S}^{n-1} \,\}.$$

Übung: Beweisen Sie diese Schranken zur Wiederholung. Mahnendes Gegenbeispiel: Für die ℓ^p–Normen auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subset \ell^p(\mathbb{N},\mathbb{R})$ gilt dies nicht!

☺ Je nach Anwendung wählen wir eine bequem passende Norm.

Blackwells hinreichendes Kriterium

Sei X eine Menge und sowie $E \subseteq B(X,\mathbb{R})$ mit Supremumsnorm $\|-\|$.
Für $u, \tilde u \in E$ schreiben wir $u \le \tilde u$, falls $u(x) \le \tilde u(x)$ für alle $x \in X$ gilt.
Ein Operator $\Phi : E \to E$ ist **isoton**, falls gilt: Aus $u \le \tilde u$ folgt $\Phi(u) \le \Phi(\tilde u)$.

Sei $\delta \in [0,1]$. Wir nennen $\Phi : E \to E$ **isoton δ–diskontiert**, falls für alle $u, \tilde u \in E$ und $c \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ gilt: Aus $u \le \tilde u + c$ folgt $\Phi(u) \le \Phi(\tilde u) + \delta c$.

Satz D2G: Blackwells hinreichendes Kriterium

Ist $\Phi : E \to E$ isoton δ–diskontiert, so auch δ–lipschitz–stetig.

Beweis: Für alle $u, \tilde u \in E$ gilt $u - \tilde u \le \|u - \tilde u\|$, also $u \le \tilde u + \|u - \tilde u\|$.
Dank isotoner δ–Diskontierung folgt daraus $\Phi(u) \le \Phi(\tilde u) + \delta\|u - \tilde u\|$.
Wir erhalten $\Phi(u) - \Phi(\tilde u) \le \delta\|u - \tilde u\|$, ebenso $\Phi(\tilde u) - \Phi(u) \le \delta\|u - \tilde u\|$.
Das bedeutet $\|\Phi(u) - \Phi(\tilde u)\| \le \delta\|u - \tilde u\|$, wie behauptet. QED

☺ Dieses Kontraktionskriterium ist nicht *notwendig*, aber *hinreichend*: Wir nutzen die partielle Ordnung auf E. Mehr Struktur vereinfacht.

☺ Ist der betrachtete Teilraum E zudem abgeschlossen in $B(X,\mathbb{R})$, so ist E vollständig, und wir können Banachs Fixpunktsatz anwenden.

Blackwells hinreichendes Kriterium

Jede Grundvorlesung zur Analysis behandelt Banachs Fixpunktsatz im Laufe des ersten Jahres. Dazu notwendig sind Konvergenz von Folgen, Cauchy–Kriterium und Vollständigkeit. Zum den Grundlagen gehören ebenso Skalarprodukte und Normen sowie Metriken und Topologien.

Das Kriterium von Blackwell wird in der Analysis meist nicht erwähnt, da es für die dortigen Anwendungen nicht unmittelbar benötigt wird. Im Kontext der Ökonomie und Optimierung hilft es jedoch ungemein, und somit rückt es nun in den Mittelpunkt unseres Interesses.

☺ Für Blackwell genügt eine beliebige Teilmenge $E \subseteq B(X,\mathbb{R})$.
Für Banach sollte E zudem abgeschlossen in $B(X,\mathbb{R})$ sein.

Gegeben sei eine Zerlegung $X = X^\circ \sqcup \partial X$ sowie $v \in B(\partial X,\mathbb{R})$ als Randbedingung. Dies definiert in $B(X,\mathbb{R})$ den affinen Teilraum

$$E_v := \{\, u \in B(X,\mathbb{R}) \mid u|_{\partial X} = v \,\}.$$

☺ Der $\mathbb{R}$–Vektorraum $B(X,\mathbb{R})$ ist vollständig, also ein Banach–Raum.
Hierin ist $E_v \subseteq B(X,\mathbb{R})$ abgeschlossen, also ebenfalls vollständig.

Von Graphen und Markov–Ketten zu Markov–Graphen

Wir betrachten einen **Graphen** $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ wie in B1I erklärt. Vereinfachend gelte $A = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times A_x$ mit $\sigma = \mathrm{pr}_1 : A \to X : (x, a) \mapsto x$ und der **Transition** $\tau : A \to X : (x, a) \mapsto y$ bzw. lokal $\tau_x : A_x \to X : a \mapsto y$.

Diese determinische Sichtweise als Graph verallgemeinern wir nun zu einem stochastischen Modell mit Zufall / Unsicherheit. Zur Erinnerung:

Definition D2H: (diskrete) Markov–Kette

Eine (diskrete) **Markov–Kette** (X, τ) besteht aus einer (abzählbaren) Zustandsmenge X und Transition $\tau : X \to [X] : x \mapsto \sum_{y \in X} p(x, y)\, y$ mit Wkten $p(x, y) \ge 0$ und $\sum_{y \in X} p(x, y) = 1$ für alle $x \in X$.

Dies entspricht einer **stochastischen Matrix** $P = (p(x, y))_{(x,y) \in X \times X}$. Aus dem Zustand x entsteht mit Übergangswkt $p(x, y)$ der Zustand y. Die Verteilung $\mu \in [X]$ geht über in die Verteilung $\bar\mu = \mu\, P \in [X]$ mit

$$\bar\mu(y) = \textstyle\sum_{x \in X} \mu(x)\, p(x, y).$$

Dies entspricht dem **Matrixprodukt**: Zeilenvektor μ mal Matrix P.

Von Graphen und Markov–Ketten zu Markov–Graphen

Angenommen, auf X sind nach dem nächsten Schritt $x \to y$ die **Gewinnerwartungen** gegeben durch $u : X \to \mathbb{R} : y \mapsto u(y)$. Dann ist die Gewinnerwartung vor dem Schritt gegeben durch

$$\bar u(x) = \textstyle\sum_{y \in X} p(x, y) u(y).$$

Dies entspricht dem **Matrixprodukt**: Matrix P mal Spaltenvektor u. Die Wkten μ werden nach vorne geschoben gemäß $\mu \mapsto \bar\mu = \mu P$. Die Erwartungen u werden zurück gezogen gemäß $u \mapsto \bar u = P u$.

Das erinnert uns an das Prinzip der Rekursion / Rückwärtsinduktion: Gespielt wird immer vorwärts, aber optimiert wird leichter rückwärts.

Wir verbinden nun deterministische Spiele (Zustände und Aktionen) mit stochastischen Prozessen (aus Zuständen und Übergangswkten): Der Spieler wählt in jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ eine Aktion $a \in A_x$. Das System geht dann vom Zustand x über nach y mit Wkt $p(x, a, y)$.

Damit gelangen wir also zu den extrem vielseitigen **Markov–Graphen**, die wir schon aus unseren bisherigen Beispielen kennen und schätzen.

Markov–Belohnungsprozess / MRP

Bevor wir Markov–Spiele [*Markov decision processes* / MDP] erklären, ist es als Zwischenschritt vielleicht hilfreich, zunächst vereinfachend Belohugsprozesse [*Markov reward processes* / MRP] zu betrachten: Wir verfeinern Markov–Ketten durch die Zerlegung in aktive Zustände X° und terminale Zustände ∂X und erklären zudem Belohnungen.

Definition D2I: Markov–Belohnungsprozess / MRP

Ein **Markov–Belohnungsprozess** (X, τ, r, v) besteht aus einer Menge $X = X^\circ \sqcup \partial X$ mit einer Transition $\tau : X^\circ \to [X] : x \mapsto \sum_{y \in X} p(x, y)\, y$ sowie einer sofortigen Belohnung $r : X^\circ \times X \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto r(x, y)$ und einer terminalen Auszahlung $v : \partial X \to \mathbb{R} : x \mapsto v(x)$. Zum Diskontfaktor $\delta \in [0, 1]$ erklären wir die **Erwartungsgleichung** für $u : X \to \mathbb{R}$ durch

$$u(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } x \in \partial X, \\ \sum_{y \in X} p(x, y)\big[r(x, y) + \delta u(y)\big] & \text{für } x \in X^\circ. \end{cases}$$

Wir nennen den Prozess **lösbar**, falls diese Gleichung eine eindeutige Lösung u besitzt. (Insbesondere muss jede Reihe absolut konvergieren.)

Markov–Belohnungsprozess / MRP

Bei einem Belohnungsprozess gibt es noch nichts zu entscheiden: Er beschreibt eine Markov–Kette, eventuell mit terminalen Zuständen, und einen Strom von Zahlungen, die wir diskontiert aufsummieren.

Ist jede Trajektorie endlich, $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$, so führt sie zur endlichen Summe $r(x_0, x_1) + \delta r(x_1, x_2) + \dots + \delta^{n-1} r(x_{n-1}, x_n) + \delta^n v(x_n) \in \mathbb{R}$. Die Berechnung der erwarteten Auszahlung $u : X \to \mathbb{R}$ gelingt dann per Rückwärtsinduktion, wie in B1L erklärt. Wir müssen lediglich absolute Konvergenz sicherstellen, so dass die Erwartung wohldefiniert ist. Dies gilt zum Beispiel, falls $y \mapsto r(x, y) + \delta u(y)$ beschränkt ist.

Im Allgemeinen gibt es unendliche Trajektorien, insbesondere Zykel. Wir interpretieren die Erwartungsgleichung D2I als Fixpunktgleichung und nutzen den Banachschen Fixpunktsatz D2A: Sind $r : X^\circ \times X \to \mathbb{R}$ und $v : \partial X \to \mathbb{R}$ beschränkt und $\delta \in [0, 1[$, so existiert genau eine Lösung $u : X \to \mathbb{R}$, und diese lässt sich iterativ berechnen.

Übung: Formulieren Sie dies als Satz und beweisen Sie ihn. (Wir führen die Rechnungen in Satz D2K allgemein aus.)

Markov–Spiel / MDP und Bellman–Gleichung

Definition D2J: Markov–Spiel und Bellman–Gleichung

Ein **Markov–Graph** $\Gamma = (X, A, \tau)$ besteht aus einer Zustandsmenge X und einer Aktionsmenge $A = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times A_x$ zusammen mit Projektion $\sigma : (x, a) \mapsto x$ und Transition $\tau : A \to [X] : (x, a) \mapsto \sum_{y \in X} p(x, a, y)\, y$.

Für alle $(x, a) \in A$ und $y \in X$ gelte $p(x, a, y) \ge 0$ und $\sum_y p(x, a, y) = 1$. Wie üblich zerlegen wir die Zustandsmenge $X = X^\circ \sqcup \partial X$ in aktive Zustände $X^\circ = \operatorname{Im}(\sigma)$ und terminale Zustände $\partial X = X \smallsetminus X^\circ$.

Die **Strategiemenge** ist $S(\Gamma) := \{\, s : X^\circ \to A \mid \sigma \circ s = \mathrm{id}_{X^\circ} \,\} = \prod_{x \in X^\circ} A_x$. Auszahlungen seien terminal $v : \partial X \to \mathbb{R} : x \mapsto v(x)$ oder instantan $r : A \times X \to \mathbb{R} : (x, a, y) \mapsto r(x, a, y)$ mit Diskontfaktor $\delta \in [0, 1]$.

(0) Dieses **Markov–Spiel** (Γ, r, v) definiert die **Bellman–Gleichung**

$$u(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } x \in \partial X, \\ \sup\limits_{a \in A_x} \underbrace{\textstyle\sum_{y \in X} p(x, a, y)\, [r(x, a, y) + \delta u(y)]}_{\text{Hamilton–Funktion } H(x,a,u)} & \text{für } x \in X^\circ. \end{cases}$$

Markov–Spiel / MDP und Bellman–Gleichung

⚠ Für die Reihe über $y \in X$ verlangen wir absolute Konvergenz, etwa $y \mapsto p(x, a, y)$ endlich getragen oder $y \mapsto r(x, a, y) + \delta u(y)$ beschränkt.

☺ Im Folgenden verlangen wir, dass r und v sowie u beschränkt sind. Damit lösen sich alle Fragen zur Konvergenz in Wohlgefallen auf.

☺ Der deterministische Spezialfall entspricht $\tau : (x, a) \mapsto y$ wie zuvor, also $p(x, a, y) = 1$ für das Ziel $y \in X$ und $p(x, a, y') = 0$ für alle $y' \ne y$.

☺ Ist der (deterministische) Graph $\Gamma = (X, A, \tau)$ zudem artinsch, so löst Rekursion / Rückwärtsinduktion B1L die Bellman–Gleichung.

☺ Jede Aktion $a : x \to y$ hat zwei Auswirkungen, die wir ausbalancieren: die sofortige Belohnung $r(x, a, y)$ und der langfristige Nutzen $u(y)$.

☺ Ist Γ lokal-endlich, so wird das Supremum jeweils angenommen. Im lösbaren Falle gilt also $u(x) = \max_{a \in A_x} H(x, a, u)$ für alle $x \in X^\circ$.

☺ Die Funktion u liefert uns die optimale Auszahlung $x \mapsto u(x)$ sowie Aktionen $s(x) \in \operatorname{Arg\,max}_{a \in A_x} H(x, a, u)$, also eine optimale Strategie s!

☺ Optimale Züge erkennen Sie leicht sobald Sie das Optimum kennen.

Bellman–Operator und Erwartungsoperator

Definition D2J: Gewinnerwartung und Optimalität

(1) Sei $E = \{\, u \in B(X, \mathbb{R}) \mid u|_{\partial X} = v \,\}$. Auf diesem affinen Teilraum definieren wir den **Bellman–Operator** $\Phi : E \to E : u \mapsto \bar u$ durch

$$\bar u(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } x \in \partial X, \\ \sup\limits_{a \in A_x} \underbrace{\textstyle\sum_{y \in X} p(x, a, y)\, [r(x, a, y) + \delta u(y)]}_{\text{Hamilton–Funktion } H(x,a,u)} & \text{für } x \in X^\circ. \end{cases}$$

Die Fixpunkte von Φ sind genau die Lösungen der **Bellman–Gleichung**. Wir nennen Φ **eindeutig lösbar**, falls genau ein Fixpunkt $u \in E$ existiert, und **konvergent**, falls zudem $\Phi^n(\tilde u) \to u$ für $n \to \infty$ gilt für alle $\tilde u \in E$.

(2) Zu $s \in S(\Gamma)$ definieren wir den **Erwartungsoperator** $\Phi_s : u \mapsto \bar u$ durch

$$\bar u(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } x \in \partial X, \\ \underbrace{\textstyle\sum_{y \in X} p(x, s(x), y)\, [r(x, s(x), y) + \delta u(y)]}_{\text{Hamilton–Funktion } H(x,s(x),u)} & \text{für } x \in X^\circ. \end{cases}$$

Fixpunkte $u_s \in E$ von Φ_s sind Lösungen der **Erwartungsgleichung**.

Bellman–Operator und Erwartungsoperator

Aus unserem Markov–Spiel (Γ, r, v), also den Entscheidungsprozess (X, A, τ, r, v) gemäß D2J, wird durch die Festlegung einer Strategie $s \in S(\Gamma)$ ein Belohnungprozess $(X, \tilde\tau, \tilde r, v)$ gemäß D2I. Ausführlich:

$$\tilde\tau : X \to [X] : x \mapsto \textstyle\sum_{y \in X} p(x, s(x), y)\, y$$
$$\tilde r : X \times X \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto r(x, s(a), y)$$

Die zugehörige Erwartungsgleichung haben wir in (2) wiederholt, als Fixpunktgleichung für den Erwartungsoperator Φ_s. Umgekehrt ist jeder Belohnungsprozess $(X, \tilde\tau, \tilde r, v)$ ein Entscheidungsprozess (X, A, τ, r, v) mit $A_x = \{a_x\}$, $p(x, a_x, y) = \tilde p(x, y)$, $r(x, a_x, y) = \tilde r(x, y)$ für alle $x \in X^\circ$

Um einen direkten, raschen Zugang anzubieten, habe ich hier beide Aspekte in einer gemeinsamen Definition D2J zusammengefasst.

Alternativ kann man die Theorie kleinschrittiger aufbauen und zunächst Markov–Ketten D2H und Belohnugsprozesse D2I als Zwischenetappen untersuchen und ihre Konvergenzfragen klären. Ich formuliere dies hier als Übung und konzentriere mich auf allgemeine Markov–Spiele (D2K).

Bellman–Operator und Erwartungsoperator

Aufgabe: Formalisieren Sie das Spiel vom Kapitelanfang explizit als ein Markov–Spiel und lösen Sie es mit Hilfe der Bellman–Gleichung.

7€								23€

Lösung: Die Zustandsmenge ist $X = \{*, 0, 1, \dots, 8\}$ mit $\partial X = \{*, 0, 8\}$ und den Auszahlungen $v(*) = 0$ sowie $v(0) = 7$ und $v(8) = 23$. Jeder aktive Zustand $x \in X^\circ = \{1, 2, \dots, 7\}$ bietet zwei Züge, $A_x = \{\text{go}, \text{stop}\}$, mit Wkten $p(x, \text{go}, x \pm 1) = 1/2$ und Belohnung $r(x, \text{go}, x \pm 1) = c := -1$ sowie den Spielabbruch mit $p(x, \text{stop}, *) = 1$ und $r(x, \text{stop}, *) = 0$.

(1) Die Strategie $s' : x \mapsto \text{go}$ für $x \in X^\circ$ ergibt $u_{s'} = \Phi_{s'}(u_{s'})$ wie folgt:

7	2	−1	−2	−1	2	7	14	23

(2) Wechsel zur Strategie s mit $s(3) = \text{stop}$ ergibt $u = \Phi_s(u)$ wie folgt:

7	8/3	1/3	0	3/5	16/5	39/5	72/5	23

☺ Diese Funktion u erfüllt zugleich die Bellman–Gleichung $u = \Phi(u)$. Dank Bellmans Optimalitätsprinzip D2M ist dies die optimale Strategie!

Bellman–Operator und Erwartungsoperator

☺ Markov–Spiele und Bellman–Gleichung sind natürlich und einfach. Das erste Anwendungsbeispiel zeigt: Unser Modell passt wunderbar!

☺ Die gezeigten Funktionen sind jeweils die einzigen Lösungen. Jede Strategie $s \in S$ ist randverbunden und somit Φ_s kontraktiv. (D2L)

Insgesamt gibt es $|S| = 2^7 = 128$ Strategien, also exponentiell in $|X^\circ|$. Wir können jede dieser 128 Strategien $s \in S$ untersuchen und jeweils die Gewinnerwarung $u_s : X \to \mathbb{R}$ berechnen. Dann können wir daraus die optimale Strategie auswählen, genauer die optimale Gewinnerwartung $u_* = \max u_s$ und dazu eine optimale Strategie $s \in S$, sodass $u_* = u_s$.

☹ Diese *globale* Optimierung durch *brute force* ist jedoch aufwändig, da die Strategiemenge $S = S(\Gamma)$ sehr groß und unübersichtlich ist.

☺ Die Bellman–Gleichung bietet dagegen eine *lokale* Optimierung, und diese gelingt wesentlich effizienter: Das ist ihr großer Nutzen! Dass beide Rechenwege zum selben Ergebnis führen, ist die Aussage von Bellmans Optimalitätsprinzip D2M, das wir als nächstes beweisen.

Gewinnerwartung und Optimalität

Definition D2J erklärt das grundlegende Modell und alle relevanten Daten: der Markov–Graph $\Gamma = (X, A, \tau)$, das Markov–Spiel (Γ, r, v), die Strategiemenge $S(\Gamma)$ und die Bellman–Gleichung für $u : X \to \mathbb{R}$.

Darauf bauend erklären wir in Definition D2J die Operatoren Φ und Φ_s. Wir wünschen uns, dass sie kontrahieren, oder wenigstens konvergieren, oder jeder einen eindeutigen Fixpunkt hat: $u = \Phi(u)$ bzw. $u_s = \Phi_s(u_s)$.

Das sind zunächst einmal Hoffnungen / Wünsche / Annahmen / Axiome. Für praktische Anwendungen benötigen wir jeweils handfeste Kriterien. Immerhin können wir mit den Begriffen Phänomene präzise benennen.

☺ Der Operator Φ_s beschreibt die **Erwartung** der Strategie $s \in S(\Gamma)$, die zugehörige Fixpunktgleichung $u_s = \Phi_s(u_s)$ heißt dementsprechend **Erwartungsgleichung**. Ihre (hoffentlich eindeutige) Lösung $u_s : X \to \mathbb{R}$ heißt **Erwartungsfunktion** der hier vorgegebenen Strategie $s \in S(\Gamma)$: Vom Zustand $x \in X$ erwarten wir mit Strategie s den Gewinn $u_s(x)$.

☺ Die **Erwartungsoperatoren** Φ_s sind affin-linear, haben bessere Eigenschaften, die stärkere Theorie und sind leichter zu behandeln.

Gewinnerwartung und Optimalität

Die Abbildung $\Phi : E \to E$ heißt **Bellman–(Optimalitäts–)Operator**, die Fixpunktgleichung $u = \Phi(u)$ heißt **Bellman–(Optimalitäts–)Gleichung**. Ihre (hoffentlich eindeutige) Lösung $u : X \to \mathbb{R}$ heißt **Gewinnfunktion**: Vom Zustand $x \in X$ erwarten wir bei optimalem Spiel den Gewinn $u(x)$.

Die Bellman–Gleichung ist vielseitig einsetzbar und daher berühmt. Sie ist eine Funktionalgleichung, denn die hierbei gesuchte Größe ist eine Funktion $u : X \to \mathbb{R}$. (Nun ja, eigentlich ist u auch nur ein Vektor, doch wir erlauben vorsorglich auch unendliche Zustandsmengen X.)

⚠ Hierzu ist noch keine Strategie vorgegeben. Im Gegenteil nutzen wir die Funktion u, um daraus schließlich eine optimale Strategie abzulesen!

Zur Berechnung bzw. Approximation der Funktion u wurden Dutzende Verfahren vorschlagen; uns geht es hier zunächst um ihre Definition, dann um grundlegende Eigenschaften und schließlich die Berechnung.

⚠ Anders als Φ_s ist der Operator Φ nicht-linear und daher schwieriger. Zur Definition der Funktion u nutzen wir zunächst die Fixpunktgleichung $u = \Phi(u)$; anschließend zeigen wir das Optimalitätsprinzip $u = \sup_s u_s$.

Iteration für Gewinnerwartung und Optimalität

D229

Sei (Γ, r, v) ein Markov–Spiel mit beschränkten Belohnungen r und v. Letzteres gilt automatisch auf jedem endlichen Markov–Graphen Γ.

Auf $E = E_v = \{u \in B(X, \mathbb{R}) \mid u|_{\partial X} = v\}$ nutzen wir die Operatoren

$$\Phi : u \mapsto \bar{u} : \bar{u}(x) = \sup_{a \in A_x} \underbrace{\textstyle\sum_{y \in X} p(x,a,y)\,[r(x,a,y) + \delta u(y)]}_{\text{Hamilton–Funktion } H(x,a,u)} \quad \text{und}$$

$$\Phi_s : u \mapsto \bar{u} : \bar{u}(x) = H(x, s(x), u) \quad \text{für jede Strategie } s \in S(\Gamma).$$

Satz D2K: Kontraktion, somit Existenz und Eindeutigkeit

Für jeden Diskontfaktor $\delta \in [0,1]$ sind alle Erwartungsoperatoren Φ_s und der Bellman–Operator Φ isoton δ–diskontiert, somit δ–lipschitz.

Speziell für $\delta \in [0,1[$ können wir Banachs Fixpunktsatz D2A anwenden, wie in unseren Beispielen motiviert: Es gibt genau einen Fixpunkt und diesen können wir durch das Iterationsverfahren effizient annähern.

Beweis: Dies folgt aus den Definitionen durch geduldiges Nachrechnen. Führen Sie dies sorgsam aus, es ist eine gute Übung zur Wiederholung!

Iteration für Gewinnerwartung und Optimalität

D230 Erläuterung

Ausführlich: Sei $u \le \tilde{u} + c$. Für alle $x \in X^\circ$, $a \in A_x$ und $y \in X$ gilt:

$$\begin{aligned}
u(y) &\le \tilde{u}(y) + c \\
r(x,a,y) + \delta u(y) &\le r(x,a,y) + \delta\tilde{u}(y) + \delta c \\
p(x,a,y)[r(x,a,y) + \delta u(y)] &\le p(x,a,y)[r(x,a,y) + \delta\tilde{u}(y) + \delta c] \\
\textstyle\sum_y p(x,a,y)[r(x,a,y) + \delta u(y)] &\le \textstyle\sum_y p(x,a,y)[r(x,a,y) + \delta\tilde{u}(y)] + \delta c \\
H(x,a,u) &\le H(x,a,\tilde{u}) + \delta c
\end{aligned}$$

Zur Definition dieser Erwartung fordern wir absolute Konvergenz. Das ist garantiert, falls neben u und $\tilde{u}$ auch $y \mapsto r(x,a,y)$ beschränkt ist.

Ist die Strategie $s \in S(\Gamma)$ vorgegeben, so wählen wir im Zustand $x \in X^\circ$ die Aktion $a = s(x)$. Obige Rechnung garantiert $\Phi_s(u) \le \Phi_s(\tilde{u}) + \delta c$.

Für den Operator Φ wird optimiert: Wir bilden das Supremum über alle Aktionen $a \in A_x$, erst rechts dann links, und erhalten $\Phi(u) \le \Phi(\tilde{u}) + \delta c$.

Endlichkeit ist garantiert, falls neben u und $\tilde{u}$ auch für jeden Zustand x die Funktion $a \mapsto \sum_{y \in X} p(x,a,y) r(x,a,y)$ beschränkt ist. Ist zudem A_x endlich, so wird das Supremum angenommen, ist also ein Maximum.

Iteration für Gewinnerwartung und Optimalität

D231 Erläuterung

Sei (Γ, r, v) ein Markov–Spiel mit r, v beschränkt und $\delta = 1$. Wir fixieren $s \in S(\Gamma)$ mit Übergangswkten $p : X^\circ \times X \to [0,1] : (x,y) \mapsto p(x, s(x), y)$. Wir schreiben $x \to y$ falls $p(x,y) > 0$. Für $x \in \partial X$ setzen wir $p(x,x) = 1$. Somit ist (X, p) eine Markov–Kette mit endlichem Zustandsraum X.

Wir nennen s **randverbunden**, wenn es zu jedem $x_0 \in X$ einen Weg $x_0 \to x_1 \to \dots \to x_\ell$ mit $x_\ell \in \partial X$ gibt. Falls X endlich ist, so ist s sogar **stark (ℓ, ε)–randverbunden** für ein geeignetes Paar $(\ell, \varepsilon) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_{>0}$: Jeder Startzustand führt nach ℓ Schritten mit Wkt $\ge \varepsilon$ in den Rand ∂X.

☺ Anschaulich: Die Wkt diffundiert in den Rand, langsam aber sicher. Nach ℓ Schritten ist die Gesamtwkt aller aktiven Zustände $\le k = 1 - \varepsilon$. Auch für $\delta = 1$ kann also Kontraktion vorliegen; wir müssen hinschauen:

Satz D2L: randverbunden impliziert konvergent

Sei (Γ, r, v) ein Markov–Spiel und $\delta = 1$. Die Strategie $s \in S(\Gamma)$ sei stark (ℓ, ε)–randverbunden. Dann ist Φ_s^ℓ kontraktiv mit Konstante $k = 1 - \varepsilon$.

Insbesondere ist $\Phi_s : E \to E$ konvergent: Es existiert genau ein Fixpunkt $u_s \in E$ und zudem konvergiert $\Phi_s^n(\tilde{u}) \to u$ für jeden Startwert $\tilde{u} \in E$.

Iteration für Gewinnerwartung und Optimalität

D232 Erläuterung

Beweis: Wir untersuchen $\Phi_s(u)(x) = \sum_{y \in X} p(x,y)[r(x,y) + u(y)]$.

Wir betrachten $P = (p(x,y))_{(x,y) \in X \times X}$ als zeilen-stochastische Matrix und $u = (u(y))_{y \in X}$ als Spaltenvektor. Damit gilt $\Phi_s(u) = c + Pu$ mit additiver Belohnung $c = (c(x))_{x \in X}$ und $c(x) = \sum_{y \in X} p(x,y) r(x,y)$.

Per Induktion erhalten wir $\Phi_s^n(u) = c + Pc + P^2 c + \dots P^{n-1} c + P^n u$. Die Potenz $P^n = (p_n(x,y))_{(x,y) \in X \times X}$ berechnet die Wkt $p_n(x,y)$, in n Schritten von x nach y zu gehen, als Summe aller Wege der Länge n.

Für alle $u, \tilde{u} \in E$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt somit $\Phi_s^n(u) - \Phi_s^n(\tilde{u}) = P^n(u - \tilde{u})$. Wir zeigen nun $|P^\ell(u - \tilde{u})| \le k|u - \tilde{u}|$. Wir untersuchen $\hat{u} = P^\ell(u - \tilde{u})$: Für $x \in \partial X$ gilt $p_\ell(x,x) = 1$, also $\hat{u}(x) = u(x) - \tilde{u}(x) = v(x) - v(x) = 0$. Für jeden aktiven Zustand $x \in X^\circ$ hingegen finden wir:

$$\begin{aligned}
\hat{u}(x) &= \sum_{y \in X} p_\ell(x,y)[u(y) - \tilde{u}(y)] = \sum_{y \in X^\circ} p_\ell(x,y)[u(y) - \tilde{u}(y)] \\
|\hat{u}(x)| &\le \sum_{y \in X^\circ} p_\ell(x,y)\,|u(y) - \tilde{u}(y)| \le \sum_{y \in X^\circ} p_\ell(x,y)\,|u - \tilde{u}| \le k|u - \tilde{u}|
\end{aligned}$$

Somit ist Φ_s^ℓ kontraktiv und Banachs Fixpunktsatz D2A anwendbar. $\boxed{\text{QED}}$

Gewinnerwartung auf $\mathbb{N}$ als unendlicher Graph

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
100€											…

Aufgabe: Wir untersuchen die Irrfahrt auf $X = \mathbb{N}$ mit Rand $\partial X = \{0\}$; mit Wkt $p \in]0,1[$ geht es nach rechts, mit Wkt $q = 1 - p$ nach links. Die Belohnung sei $r \in \mathbb{R}$ in jedem Schritt mit Diskontfaktor $\delta \in]0,1[$.
(1) Finden Sie alle $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $\Phi(u) = u$. Welche sind beschränkt?
(2) Wie verhalten sich beschränkte Lösungen für $r = 0$ und $\delta \nearrow 1$?
(3) Lösen Sie den Fall $\delta = 1$. (4) Ist Φ kontraktiv? (5) konvergent?

Lösung: (1) Für $x \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ lösen wir die Fixpunktgleichung $u = \Phi(u)$:

$$\boxed{u(x) = r + \delta\big[p u(x+1) + q u(x-1)\big]}$$

Durch $u(0)$ und $u(1)$ sind alle Werte $u(2), u(3), \dots$ rekursiv festgelegt. Der Ansatz $u(x) = ab^x + r/(1-\delta)$ führt zu $b^x = \delta[pb^{x+1} + qb^{x-1}]$, also

$$b \in \{b_1, b_2\} \quad \text{mit} \quad b_{1/2} = \frac{1 \mp \sqrt{1 - 4pq\delta^2}}{2p\delta} \quad \text{und} \quad 0 < b_1 < 1 < b_2.$$

Gewinnerwartung auf $\mathbb{N}$ als unendlicher Graph

Damit erhalten wir alle Lösungen der Erwartungsgleichung $u = \Phi(u)$:

$$u(x) = a_1 b_1^x + a_2 b_2^x + \frac{r}{1-\delta} \qquad \text{mit} \qquad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

Die beschränkten Lösungen sind demnach $u(x) = a_1 b_1^x + r/(1-\delta)$. Der Startwert $u(0) = v(0)$ bestimmt die Konstante $a_1 = u(0) - r/(1-\delta)$.

$$\boxed{u(x) = \left[u(0) - \frac{r}{1-\delta}\right]\left[\frac{1 - \sqrt{1 - 4pq\delta^2}}{2p\delta}\right]^x + \frac{r}{1-\delta}}$$

☺ Dank Diskont $\delta < 1$ erhalten wir in jedem Falle genau eine Lösung! Das entspricht dem Kontraktionssatz D2ᴋ, hier nun wunderbar konkret. Obwohl der Graph unendlich ist, greifen unsere Werkzeuge bestens.

☺ Der gegebene Anfangswert klingt exponentiell ab gegen $r/(1-\delta)$. Konkretes Beispiel: Für $p = q = 1/2$ und $\delta = 0.8$ finden wir $b_1 = 1/2$, und somit die Gewinnfunktion $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \mapsto [u(0) - 5r]2^{-x} + 5r$.

Gewinnerwartung auf $\mathbb{N}$ als unendlicher Graph

(2) Für $r = 0$ finden wir den Grenzwert $\lim_{\delta \nearrow 1} u(x) = u(0)\, b^x$ mit

$$\begin{aligned} b &= \frac{1 \mp \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 \mp \sqrt{(1-2p)^2}}{2p} \\ &= \frac{1 - |1-2p|}{2p} = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < p \leq 1/2, \\ (1-p)/p & \text{für } 1/2 < p < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

☺ Das ist tatsächlich eine beschränkte Lösung des Falls $\delta = 1$. Für $1/2 < p < 1$ gilt $b < 1$ und somit $u(x) \to 0$ für $x \to \infty$. Unten in (3) finden wir weitere beschränkte Lösungen, die diese beiden Eigenschaften nicht haben.

Nochmal anders gesagt: Für $\delta = 1$ sind selbst beschränkte Lösungen nicht eindeutig. Unter den vielen „mathematischen“ Lösungen finden wir genau eine „natürliche“ oder „physikalisch-plausible“ Lösung wie oben. Allein die Erwartungsgleichung / Bilanzgleichung genügt hier also noch nicht zur Charakterisierung der „richtigen“ Lösung.

Gewinnerwartung auf $\mathbb{N}$ als unendlicher Graph

Die hier gefundene Diskrepanz ist erhellend für unsere Modellbildung und unsere Lösungsmethoden: Bilanzgleichung vs Mikrofundierung, mathematische Fixpunktgleichung vs physikalische Betrachtung.

Dahinter steckt folgendes Argument: Die zufällige Irrfahrt auf $\mathbb{N}$ mit Wkten (q,p) ist ein wohldefinierter stochastischer Prozess. Der erwartete Gewinn $u(x) \in \bar{\mathbb{R}}$ bei Start in $x \in \mathbb{N}$ ist eine wohldefinierte Erwartung:

$$\begin{aligned} r = 0 &\implies u : \mathbb{N} \to [0, 100] \\ r > 0 &\implies u : \mathbb{N} \to [0, +\infty] \\ r < 0 &\implies u : \mathbb{N} \to [-\infty, 100] \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, die Lösung u existiert und ist eindeutig, wir wollen sie effizient berechnen. Wenn hierzu die Bilanzgleichung alleine nicht genügt, so extrahieren wir weitere Einschränkungen / Rechenregeln. Notfalls müssen wir auf das Mikroniveau der Trajektorien absteigen, also den stochastischen Prozess untersuchen und Erwartungen ausrechnen.

(3) Wir setzen $\delta = 1$ und lösen die Fixpunktgleichung $u = \Phi(u)$:

$$\boxed{u(x) = r + pu(x+1) + qu(x-1).}$$

Für $p = q = 1/2$ haben wir bereits zuvor alle Lösungen bestimmt: Diese sind Parabeln der Form $u(x) = u(0) + ax - rx^2$ mit $a \in \mathbb{R}$. Im Folgenden sei daher $p \neq 1/2$ und weiterhin $0 < p < 1$.

Der Ansatz $u(x) = ab^x + rx/(1-2p)$ führt zu $b^x = pb^{x+1} + qb^{x-1}$, also

$$b \in \left\{\frac{1 \mp \sqrt{1-4pq}}{2p}\right\} = \left\{\frac{1 \mp |1-2p|}{2p}\right\} = \left\{1, \frac{1-p}{p}\right\}.$$

Für $b = (1-p)/p$ und $a \in \mathbb{R}$ erhalten wir also die allgemeine Lösung

$$\boxed{u(x) = u(0) - a + ab^x + \frac{rx}{1-2p}}$$

Für $0 < p < 1/2$ gilt $b > 1$: Beschränkte Lösungen existieren nur für $a = r = 0$, also nur die konstante Lösung $u(x) = u(0)$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

Für $1/2 < p < 1$ gilt $0 < b < 1$: Beschränkte Lösungen existieren nur für $r = 0$; dann gilt $u(x) = u(0) - a + ab^x$, wobei $a \in \mathbb{R}$ beliebig wählbar ist.

Für $x \to \infty$ erfüllt diese Lösung $u(x) \to u(0) - a$. Nur für $a = u(0)$ erfüllt unsere Lösung $u(x) = u(0)\, b^x$ zudem $u(x) \to 0$ für $x \to \infty$.

🙂 Das ist die „natürliche“ oder „physikalisch-plausible“ Lösung, die wir oben in (2) als den Grenzwert für $\delta \nearrow 1$ gefunden haben. Alle anderen Lösungen erfüllen ebenfalls die Erwartungsgleichung, doch diese alleine genügt hier noch nicht zur Eindeutigkeit.

🙂 Diese schöne Illustration ist ein heilsames Gegenbeispiel: Für $\delta = 1$ ist Eindeutigkeit keinesfalls selbstverständlich!

(4) Weiter sei $\delta = 1$ und $r = 0$. Für $0 < p \le 1/2$ hat $\Phi(u) = u$ genau eine beschränkte Lösung $u \in E$, nämlich $u(x) = u(0)$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

Dennoch ist $\Phi : E \to E$ **nicht kontraktiv**, auch keine Potenz Φ^n: Wir vergleichen $u, \tilde{u} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $u(0) = \tilde{u}(0) = 0$ sowie $u(x) = 0$ und $\tilde{u}(x) = 1$ für $x \in \mathbb{N}_{\ge 1}$. Dann gilt $\Phi^n(u) = u$ und $\Phi^n(\tilde{u})(x) = 1$ für $x > n$.

Dies zeigt, dass $\Phi : E \to E$ **nicht gleichmäßig konvergent** ist, denn es gilt nicht $\Phi^n(\tilde{u}) \to u$ bezüglich der Supremumsnorm auf E.

🙂 Das ist ein weiteres schönes Beispiel für unser Repertoire: Der Bellman–Operator $\Phi : E \to E$ ist hier nicht kontraktiv, dennoch existiert genau eine Lösung $u = \Phi(u)$.
Die vorsichtige Begriffsbildung in Definition D2J nimmt so langsam konkrete Gestalt an und füllt sich nachträglich mit Leben.

(5) Für $0 < p \le 1/2$ ist Φ immerhin noch **punktweise konvergent**: Es existiert genau ein Fixpunkt $u \in E$ und für jeden Startwert $\tilde{u} \in E$ gilt Konvergenz $\Phi^n(\tilde{u})(x) \to u(x)$ für $n \to \infty$ in jedem Punkt $x \in X$.

Wir zeigen dies für $v(0) = 0$. Sei $u_0 \in E$ gegeben durch $u_0(0) = 0$ und $u_0(x) = 1$ für $x \in \mathbb{N}$. Für $u_n = \Phi^n(u_0)$ gilt $u_0 \ge u_1 \ge u_2 \ge \dots \searrow u \ge 0$. Aus $u_{n+1}(x) = pu_n(x+1) + qu_n(x-1)$ wird $u(x) = pu(x+1) + qu(x-1)$ für $n \to \infty$, also $u = \Phi(u)$. Somit gilt $u = 0$ dank Eindeutigkeit.

Für jeden Startwert $\tilde{u} \in E$ gilt $-cu_0 \le \tilde{u} \le cu_0$ mit $c = |\tilde{u}|$. Daraus folgt $-cu_n \le \Phi^n(\tilde{u}) \le cu_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also punktweise $\Phi^n(\tilde{u})(x) \to 0$.

🙂 Auch dies ist ein weiteres schönes Beispiel für unser Repertoire. Satz D2O erklärt ein allgemeines Kriterium für punktweise Konvergenz.

Bellmans Optimalitätsprinzip $u_* = u$

Gegeben sei ein Markov–Spiel (Γ, r, v) und $u : X \to \mathbb{R}$ mit $u = \Phi(u)$.
Wie kann die Auszahlung u realisiert werden? Gar noch höhere?
Wir vergleichen mit $u_* := \sup\{ u_s \in E \mid s \in S(\Gamma),\ \Phi_s(u_s) = u_s \}$.
Zur Optimierung gilt dann folgendes Lokal-Global-Prinzip:

Satz D2M: Bellmans Optimalitätsprinzip $u_* = u$

(1) Wenn Φ für jeden Startwert gegen u konvergiert, so gilt $u_* \le u$.
Das bedeutet, lokale Optimierung ist mindestens so gut wie globale.
Das gilt insbesondere, wenn Φ isoton δ–diskontiert ist, also δ–kontraktiv.

(2) Wird in der Bellman–Gleichung überall das Supremum angenommen, etwa weil Γ lokal-endlich ist, so existieren optimale Strategien $s \in S(\Gamma)$ mit $s(x) \in \operatorname{Arg\,max}_{a \in A_x} H(x, a, u)$, also $\Phi_s(u) = u$, und es folgt $u_* \ge u$.

Beweis: (1) Für jede Strategie $s \in S$ und jeden Fixpunkt $u_s = \Phi_s(u_s)$ gilt in $x \in X^\circ$ stets $\Phi(u_s)(x) = \sup_{a \in A_x} H(x, a, u_s) \ge H(x, s(x), u_s) = u_s(x)$.
Zudem ist Φ isoton: $u_s \le \Phi(u_s) \le \Phi^2(u_s) \le \dots \nearrow u$. Somit gilt $u_* \le u$.

(2) Für s gilt $u(x) = H(x, s(x), u)$, also $u = \Phi_s(u)$, somit $u_* \ge u$. $\boxed{\text{QED}}$

Bellmans Optimalitätsprinzip $u_* = u$

Bellmans Optimalitätsprinzip $u_* = u$ kommt recht unscheinbar daher, daher möchte ich seine anschaulich-praktische Bedeutung erläutern.

Lokale Endlichkeit des Markov–Graphen Γ vereinfacht alle Argumente. Den allgemeinen Fall behandeln wir gleich anschließend in Satz D2N.

Rückwärts / lokale Optimierung: Ein rationaler Spieler wählt in jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ eine optimale Aktion $a \in A_x$, die seine erwartete Auszahlung $H(x, a, u)$ maximiert. Dies führt zur Bellman–Gleichung:

$$u(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } x \in \partial X, \\ \max\limits_{a \in A_x} \underbrace{\textstyle\sum_{y \in X} p(x,a,y)\,[r(x,a,y) + \delta u(y)]}_{\text{Hamilton–Funktion } H(x,a,u)} & \text{für } x \in X^\circ. \end{cases}$$

In jedem Zustand $x \in X^\circ$ stellen wir uns einen **lokalen Optimierer** vor. Dieser handelt lokal, kurzsichtig, egoistisch: Jeder optimiert für sich!

Das erinnert uns an das Prinzip der Rekursion / Rückwärtsinduktion: Optimiert wird rückwärts, aber gespielt wird immer vorwärts.

Bellmans Optimalitätsprinzip $u_* = u$

Vorwärts / globale Optimierung: Jede Strategie $s \in S = S(\Gamma)$ definiert eine Gewinnerwartung $u_s : X \to \mathbb{R}$ durch die Gleichung $u_s = \Phi_s(u_s)$:

$$u_s(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } x \in \partial X, \\ H(x, s(x), u_s) & \text{für } x \in X^\circ. \end{cases}$$

Eine **globale Optimiererin** kann somit zu jeder Strategie $s \in S(\Gamma)$ ihre Auszahlung u_s berechnen und das Supremum $u_* = \sup u_s$ bilden. Dies geschieht global, weitblickend, kooperativ: alle $x \in X^\circ$ gemeinsam!

In jedem Zustand $x \in X$ können wir demnach bestenfalls den Gewinn $u_*(x) = \sup_{s \in S} u_s(x)$ erwarten bzw. als Auszahlung realisieren.

Das Optimalitätsprinzip $u_* = u$ besagt, dass die Bellman–Gleichung tatsächlich tut, was sie soll: Die globale Optimierung u_* und die lokale Optimierung u stimmen überein! Beide Sichtweisen werden versöhnt.

⚠ Das Optimalitätsprinzip $u_* = u$ erfordert gewisse Voraussetzungen; diese versuche ich hier möglichst schwach und allgemein zu halten.

Bellmans Optimalitätsprinzip $u_* = u$

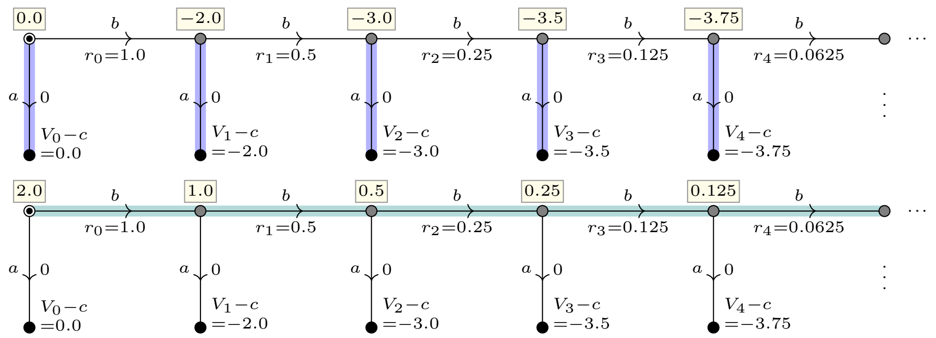
Vielleicht scheint Ihnen auf den ersten Blick das Optimalitätsprinzip $u_* = u$ intuitiv-selbstverständlich und daher kaum der Rede wert. Das wäre ein Jammer und ein Irrtum! Ist hier etwas zu beweisen? Ja, sicher, und zur Illustration helfen Gegenbeispiele wie B1N.

Drastische Gegenbeispiele wie das folgende sind überaus lehrreich, und ein großes Beispielrepertoire bewahrt Sie vor voreiligen Trugschlüssen. Die gute mathematische Vorgehensweise ist wie immer komplementär: Sätze und Gegen/Beispiele ergänzen und erklären sich gegenseitig.

In D3 skizzieren wir eine wunderschöne Anwendung aus dem Bereich des Maschinellen Lernens: Robi, der Saugroboter, versucht seine Route optimal zu planen. Meist wählt man dort einen Diskontfaktor $\delta \in [0, 1[$, da die theoretische Grundlage dann besonders einfach und solide ist.

Die Robustheit der Rechnungen ist für die Anwendung extrem wichtig, gerade deshalb diskutieren wir auch den kritischen Randfall $\delta = 1$. Gute Beispiele bewahren Sie vor naivem Irrglauben und illustrieren eindrücklich den Nutzen möglichst starker theoretischer Werkzeuge.

Infinipede und frustrierte Bellman–Lösung



♦ **Beispiel B1N:** exotische Lösungen der Bellman–Gleichung

Unser Graph Γ habe die aktiven Zustände $x \in X^\circ = \{ b^k \mid k \in \mathbb{N} \}$ mit Aktionen $A_x = \{a, b\}$ und Belohnungen $r(b^k, a) = 0$ und $r(b^k, b) = r_k$. Terminal sind $\partial X = \{ b^k a \mid k \in \mathbb{N} \}$ mit Auszahlungen $v(b^k a) = V_k - c$.

Gegeben seien hierzu $0 < r_k < v_k$ in $\mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=0}^\infty v_k < \infty$. Wir setzen $R_k = \sum_{i=k}^\infty r_i$ und $V_k = \sum_{i=k}^\infty v_i$ und wählen $c > V_0 - R_0 > 0$. Die Skizze zeigt $r_k = 2^{-k}$, $R_k = 2^{1-k}$, $v_k = 2^{1-k}$, $V_k = 2^{2-k}$ und $c = -4$.

Infinipede und frustrierte Bellman–Lösung

Aufgabe: Zeigen Sie, dass die abgebildeten Funktionen $u_0, u_1 : X \to \mathbb{R}$ die Bellman–Gleichung lösen: Einerseits die pessimistische Lösung $u_0(b^k) = V_k - c$, andererseits die optimistische Lösung $u_1(b^k) = R_k$.

Lösung: Jede der beiden gezeigten Strategien ist lokal optimal:
(1) Für u_0 wird immer $s_0(x) = a$ gespielt, und dies ist lokal optimal.
(2) Für u_1 wird immer $s_1(x) = b$ gespielt, und dies ist lokal optimal.

Sie kennen das Problem *lokale vs globale Optimierung* aus der Analysis: Hier gilt $u_0 < u_1$; bei **globaler Optimierung** würde man also u_1 wählen. Bei **lokaler Optimierung** erlaubt s_0 keine Möglicheit der Verbesserung: Dies geschieht lokal, kurzsichtig, egoistisch: Jeder optimiert für sich! Das globale Optimum erreichen wir hier nur weitblickend, kooperativ.

⚠ In Fällen wie diesem gilt Bellmans Optimalitätsprinzip nicht! Unsere allgemeinen Werkzeuge versagen hier, wir müssen genauer hinschauen.

Frustration: Das obige Beispiel kennen Sie aus dem Alltag: „Ich würde gerne etwas verbessern, doch alleine kann ich gar nichts ausrichten.” So auch hier, wenn jeder lokale Optimierer in $x \in X^\circ$ allein handelt.

Infinipede und frustrierte Bellman–Lösung

Bemerkung: Weitere Bellman–Lösungen sind $u(b^k) = R_k + v(b^\infty)$. Die Konstante $v(b^\infty) \in \mathbb{R}$ ist dabei die (fiktive) Auszahlung im „unendlich fernen“ Randpunkt b^∞. Wir vereinbaren hier kurzerhand $v(b^\infty) = 0$.

Aufgabe: Gibt es weitere Lösungen neben (u_0, s_0) und (u_1, s_1)?

Lösung: Nein. Sei $u : X \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Bellman–Gleichung und $s : X^\circ \to \{a, b\}$ eine (lokal-optimale) Strategie mit $u(x) = H(x, s(x), u)$. Gilt $s(b^j) = a$, so folgt $s(b^i) = a$ für alle $i \le j$. Somit wird entweder $s = s_0$ gespielt oder es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $s(b^i) = a$ für $i < k$ und $s(b^i) = b$ für alle $i \ge k$. Der Fall $k > 0$ ist nicht lokal-optimal, da die Alternative $s(b^{k-1}) = b$ lukrativer ist. Also muss $k = 0$ gelten und somit $s = s_1$.

Das Beispiel B1N ist raffiniert gebaut und notgedrungen nicht-artinsch. Für jeden artinschen Graphen können wir dank Rückwärtsinduktion B1L die Bellman–Gleichung rekursiv lösen, und diese Lösung ist eindeutig! Ist unser artinscher Graph Γ zudem lokal-endlich, so ist diese Lösung tatsächlich optimal dank B1L. In diesen günstigen Fällen geht alles gut. Es gibt einen zweiten Ausweg aus unserer Misslage: Diskontierung!

Infinipede und frustrierte Bellman–Lösung

Aufgabe: Analysieren Sie das obige Beispiel B1N mit Diskont $\delta \in [0, 1[$. Bestimmen Sie die (dank Satz D2K) eindeutige beschränkte Lösung $u_\delta : X \to \mathbb{R}$ der Bellman–Gleichung $u_\delta = \Phi_\delta(u_\delta)$. Was gilt für $\delta \nearrow 1$?

Lösung: (1) Ist die Strategie $s_0(b^k) = a$ weiterhin lokal optimal? Nein! Wir vergleichen die Auszahlung $\alpha_k := r(b^k, a) + \delta v(b^k a) = \delta(V_k - c)$ mit $\beta_k := r(b^k, b) + \delta[r(b^{k+1}, a) + \delta v(b^{k+1} a)] = r_k + \delta^2(V_{k+1} - c)$. Die Differenz $\beta_k - \alpha_k = r_k + \delta(1 - \delta)c - \delta(V_k - \delta V_{k+1})$ ist positiv für hinreichend große $k \in \mathbb{N}$, denn $r_k, c > 0$ und $V_k - \delta V_{k+1} \searrow 0$. Es lohnt sich also (lokal!), von $s_0(b^k) = a$ auf b zu wechseln.

Im Extremfall $\delta = 1$ gilt $\beta_k - \alpha_k = r_k - v_k < 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, daher ist ausgehend von der Strategie s_0 keine lokale Verbesserung möglich.

(2) Ist die Strategie $s_1(b^k) = b$ weiterhin lokal optimal? Ja! Das Argument ist für alle Diskontfaktoren $\delta \in [0, 1]$ gleich: Jede lokale Abweichung verschlechtert die Auszahlung. Für alle $\delta \in [0, 1[$ erhalten wir also dieselbe Strategie $s_\delta = s_1$ mit der optimistischen Gewinnfunktion $u_\delta \nearrow u_1$ für $\delta \nearrow 1$.

Bellmans Optimalitätsprinzip $u_* = u$

🙂 Bei Diskontierung $\delta < 1$ gilt das Optimalitätsprinzip ganz allgemein für alle beschränkten Markov–Spiele auf beliebigen Markov–Graphen:

Satz D2n: Optimalitätsprinzip, allgemeiner diskontierter Fall

Sei (Γ, r, v) ein Markov–Spiel mit r, v beschränkt und $0 \le \delta < 1$.

Auf $E = E_v = \{\, u \in B(X,\mathbb{R}) \mid u|_{\partial X} = v \,\}$ nutzen wir die Operatoren $\Phi(u)(x) = \sup_{a \in A_x} H(x,a,u)$ und $\Phi_s(u)(x) = H(x,s(x),u)$ für $x \in X^\circ$.

Diese konvergieren gegen $u = \Phi(u)$ bzw. $u_s = \Phi_s(u_s)$ für $s \in S(\Gamma)$.
Wir setzen punktweise $u_*(x) = \sup_{s\in S} u_s(x)$. Dann gilt $u_* = u$.

Beweis: (1) Wie in Satz D2m gilt $u_* \le u$. (2) Wir zeigen noch $u \le u_*$:

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ vorgegeben. Zu jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ wählen wir eine ε–optimale Aktion $s(x) \in A_x$, sodass $H(x,s(x),u) \ge u(x) - \varepsilon$ gilt.

Das bedeutet $u \le \Phi_s(u) + \varepsilon$, dank Diskontierung $\Phi_s(u) \le \Phi_s^2(u) + \delta\varepsilon$, per Induktion $u \le \Phi_s^n(u) + \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \delta^k = \Phi_s^n(u) + \varepsilon(1-\delta^n)/(1-\delta)$.

Für $n \to \infty$ erhalten wir $u \le u_s + \varepsilon/(1-\delta) \le u_* + \varepsilon/(1-\delta)$.
Letzteres gilt für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Daraus folgt $u \le u_*$ $\boxed{\text{QED}}$

Bellmans Optimalitätsprinzip $u_* = u$

Im diskontierten Fall $0 \le \delta < 1$ sind alle Operatoren Φ_s und Φ kontraktiv.
Für jede Strategie $s \in S = S(\Gamma)$ können wir Φ_s iterieren und erhalten:

$$\Phi_s^n(\tilde u) \to u_s$$

Dies können wir anschließend global optimieren und gewinnen so:

$$u_* = \sup_{s\in S} u_s$$

Umgekehrt können wir auch erst lokal optimieren und dann iterieren.
Nach Definition gilt $\Phi = \sup_{s\in S} \Phi_s$, das heißt punktweise für alle $x \in X$:

$$\Phi(\tilde u)(x) = \sup_{s\in S} \Phi_s(\tilde u)(x) \stackrel{x\in X^\circ}{=} \sup_{a\in A_x} H(x,a,\tilde u)$$

Wenn wir nun diesen Bellman–Operator Φ iterieren, so erhalten wir:

$$\Phi^n(\tilde u) \to u$$

Bellmans Optimalitätsprinzip besagt, unter der Voraussetzung $0 \le \delta < 1$, dass wir auf beiden Wegen dasselbe Ergebnis erhalten, kurz $u_* = u$.

Zusammenfassung zum Optimalitätsprinzip

Bellmans Optimalitätsprinzip betrachten wir rückblickend als
0 Vertauschung von Iteration/Kontraktion und Maximum/Supremum.

Aus der Analysis kennen Sie viele wichtige Sätze zur Vertauschung:
1 Folgengrenzwerte $\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{k,n} \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} a_{k,n}$
2 Vertauschung von Ableitungen $\partial_x \partial_y f(x,y) \stackrel{?}{=} \partial_y \partial_x f(x,y)$
3 Ableitung und Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \partial_x f_n(x) \stackrel{?}{=} \partial_x \lim_{n\to\infty} f_n(x)$
4 Vertauschung von Reihen $\sum_{k=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty a_{k,n} \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^\infty a_{k,n}$
5 Reihen und Grenzwert $\lim_k \sum_{n=0}^\infty a_{k,n} \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^\infty \lim_k a_{k,n}$
6 Reihen und Ableitung $\partial_x \sum_{n=0}^\infty f_n(x) \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^\infty \partial_x f_n(x)$
7 Integrale $\int_{x\in X} \int_{y\in Y} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \stackrel{?}{=} \int_{y\in Y} \int_{x\in X} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
8 Integral und Ableitung $\partial_x \int_{y\in Y} f(x,y)\,\mathrm{d}y \stackrel{?}{=} \int_{y\in Y} \partial_x f(x,y)\,\mathrm{d}y$
9 Integral und Grenzwert $\lim_n \int_{x\in X} f_n(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{?}{=} \int_{x\in X} \lim_n f_n(x)\,\mathrm{d}x$

Übung: Geben Sie jeweils zwei interessante Gegenbeispiele.
Anschließend wiederholen Sie Voraussetzungen, Satz und Beweis.

Konvergenz des Bellman–Operators

Wir nutzen hier möglichst einfache, zumeist hinreichende Bedingungen: r, v beschränkt und $\delta \in [0,1[$. Für $\delta = 1$ müssen wir genauer hinschauen!

Die Übungen geben konkretes und motivierendes Anschauungsmaterial.
Dort können Sie in konkreten Beispielen auch $\delta = 1$ durchrechnen.
Auch der folgende Satz D2o kann im Falle $\delta = 1$ genutzt werden.

Die Konvergenzfrage ist ähnlich zur Theorie komplexer **Potenzreihen**:
Für jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ definieren wir den **Konvergenzradius**

$$\rho := 1 / \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Für $|z| < \rho$ konvergiert die Reihe absolut, für $|z| > \rho$ divergiert sie.
Auf dem Rand $|z| = \rho$ ist alles möglich; dazu gibt es keine allgemeine Aussage. Antworten über das subtile Verhalten auf dem Kreisrand gibt die Theorie der Fourier–Reihen. Allgemein gehört die Konvergenz solcher Reihen zu den schwierigsten Fragen der Analysis.

Auf hoher See und am Konvergenzkreisrand sind wir alle in Gottes Hand.

Punktweise Konvergenz des Bellman–Operators

Satz D2o: punktweise Konvergenz des Bellman–Operators

Sei (Γ, r, v) ein Markov–Spiel, Γ lokal-endlich, r, v beschränkt und $r \le 0$.

(1) Sei $F = \{ u_s \in E \mid s \in S,\ \Phi_s(u_s) = u_s \}$. Ist $u_* = \sup F$ beschränkt, dann ist u_* der größte Fixpunkt des Bellman–Operators $\Phi : E \to E$.

(2) Sei $s \in S(\Gamma)$ eine Strategie mit $\Phi_s(u_*) = u_*$. Konvergiert $\Phi_s^n(u) \to u_*$ für jeden Startwert $u \in E$, dann konvergiert auch Φ gegen u_*.

☺ Anders als im vorigen Satz D2n verlangen wir keine Diskontierung mit $\delta \in [0, 1[$. Der Satz D2o behandelt vielmehr den Randfall $\delta = 1$.

☺ Aussage (1) ist eine schwache Fassung des Optimalitätsprinzips. Hat der Operator $\Phi : E \to E$ zudem nur einen Fixpunkt u, so gilt $u = u_*$.

☺ Aussage (2) ist eine starke Fassung analog zum obigen Satz D2m: Φ konvergiert für jeden Startwert gegen den einzigen Fixpunkt u_*.

☺ Die Einschränkung $r \le 0$ scheint zunächst nicht besonders elegant, doch in manchen Anwendungen wie D3 ist sie recht natürlich.

Punktweise Konvergenz des Bellman–Operators

Beweis: (0) Zu jedem Fixpunkt $u = \Phi(u)$ in E existiert eine Strategie $s \in S = S(\Gamma)$ mit $\Phi_s(u) = u$. Demnach gilt $u \in F$ und somit $u \le u_*$

(1) Für jedes $u_s \in F$ gilt $u_* \ge u_s$, also $\Phi(u_*) \ge \Phi(u_s) \ge \Phi_s(u_s) = u_s$. Daraus folgt $\Phi(u_*) \ge u_*$, also $u_* \le \Phi(u_*) \le \Phi^2(u_*) \le \dots \nearrow u : X \to \bar{\mathbb{R}}$. Wir zeigen nun, dass $u : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ beschränkt ist, also $u \in E$ gilt.

Für $c \ge \max u_*$ und $\hat{u} = v\,\mathbf{1}_{\partial X} + c\,\mathbf{1}_{X^\circ}$ gilt $u_* \le \hat{u}$, also $\Phi(u_*) \le \Phi(\hat{u}) \le \hat{u}$, letzteres dank $r \le 0$. Per Induktion erhalten wir $\Phi^n(u_*) \le \hat{u}$, also $u \le \hat{u}$. Dank Stetigkeit folgt $\Phi(u) = u$. Dank (0) gilt $u \le u_*$, also $u = u_* = \Phi(u_*)$.

(2a) Aus $\hat{u} \ge \Phi(\hat{u}) \ge \Phi(u_*) = u_*$ folgt $\hat{u} \ge \Phi(\hat{u}) \ge \Phi^2(\hat{u}) \ge \dots \searrow \bar{u} \ge u_*$. Dank Stetigkeit folgt $\Phi(\bar{u}) = \bar{u}$. Dank (1) folgt $\bar{u} = u_*$.

(2b) Gegeben sei $u \in E$. Wir wählen $\hat{u} = v\,\mathbf{1}_{\partial X} + c\,\mathbf{1}_{X^\circ} \ge u, u_*$ wie oben. Dann gilt $\Phi_s(u) \le \Phi(u) \le \Phi(\hat{u})$, per Induktion $\Phi_s^n(u) \le \Phi^n(u) \le \Phi^n(\hat{u})$. Nach Voraussetzung gilt $\Phi_s^n(u) \to u_*$. Dank (2a) gilt auch $\Phi^n(\hat{u}) \to u_*$. Daraus folgt die behauptete Konvergenz $\Phi^n(u) \to u_*$. QED

Punktweise Konvergenz des Bellman–Operators

☺ Der Fixpunktsatz von Banach fordert eine δ–Kontraktion, also eine starke Voraussetzung, garantiert dafür aber gleichmäßige Konvergenz mit expliziter Fehlerschranke als extrem nützliche Schlussfolgerung. Das ist der Idealfall, an dem wir uns orientieren möchten.

Bellmans Optimalitätsprinzip formulieren wir entsprechend, je nach Anwendung, unter stärkeren oder schwächeren Voraussetzungen. Der bequemste Fall ist die Diskontierung mit $\delta \in [0, 1[$ (Satz D2n). Diese strenge Voraussetzung ist leider nicht immer gegeben.

Für Bellmans Optimalitätsprinzip D2m, genauer für die Ungleichung $u_* \le u$, genügt uns bescheidener bereits die punktweise Konvergenz $\Phi^n(\tilde{u}) \to u$. Genau hierfür bietet Satz D2o ein hinreichendes Kriterium. Das kann in Anwendungen mit $\delta = 1$ ein praktisches Hilfsmittel sein.

Aus Erfahrung empfehle ich, diese schönen Sätze zunächst einmal zur Kenntnis zu nehmen und dann konkrete Anwendungen zu untersuchen. In einem zweiten Durchgang möchten Sie dann stärkere Werkzeuge und werden gerne auf hilfreiche Sätze und Beweise zurückkommen.

Ausblick auf erfolgreiche Anwendungen

☺ In Markov–Spielen steckt viel schöne Mathematik!
Sie sind sehr einfach gebaut und doch vielseitig einsetzbar.
Zur Programmierung nutzen wir vor allem endliche Markov–Graphen, doch auch der unendliche Fall ist mathematisch reizvoll und nützlich.

Markov–Spiele (aka Markov–Entscheidungsprozesse) finden Sie daher in zahlreichen Anwendungen der Ökonomik und Finanzmathematik:

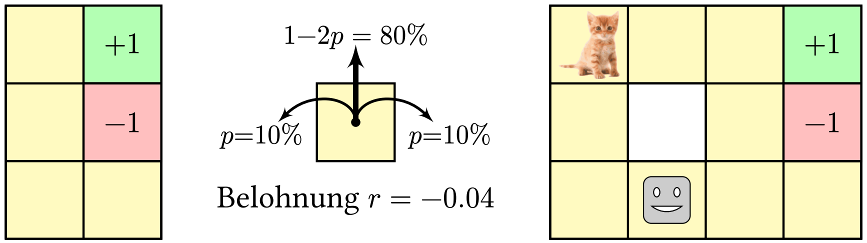
Investition vs Konsum optimieren: Geld sparen oder ausgeben?
Anbau vs Abbau optimieren: Bäume pflanzen oder fällen?
Anlage optimieren: Aktienportfolio optimal steuern?
Allgemein: kurzfristiger oder langfristiger Nutzen?

Markov–Spiele finden Sie ebenso in der künstlichen Intelligenz, insbesondere maschinellem Lernen, etwa bestärkendem Lernen:

Logistik / Routenplanung: Wege minimieren, Nutzen maximieren.
Strategischer Akteur / autonomes Fahrzeug in stochastischer Umwelt:
Aus Erfahrung lernen, Strategie optimieren, Exploration vs Exploitation.
Aufzugsteuerung: Ja, es soll auch intelligente Aufzüge geben!

Robi the Robot und Machine Learning

Robi, der Saugroboter, lebt in einer 2×3–Wohnung (links), später in einer 4×3–Wohnung mit einem Rundgang (rechts).



Nutzen $\sum_{t=0}^{T-1} \delta^t r_t + \delta^T v(x_T)$ mit $x_T \in \partial X$ und Diskont $\delta \in [0,1]$.

In jedem Zeitschritt wählt Robi eine Richtung; diese fährt er mit Wkt 80%, mit Wkt $p = 10\%$ links oder rechts dazu, weil z.B. die Katze ihn schubst. Falls sich in Fahrtrichtung eine Wand befindet, bleibt er einfach stehen.

Jeder Zeitschritt bringt eine Belohnung $r \in \mathbb{R}$, etwa $r < 0$ für Verbrauch, egal ob oder wohin er fährt. Wenn er die Ladestation oder die Treppe erreicht, endet seine Fahrt mit der Auszahlung $+1$ bzw. -1.

Robi the Robot und Machine Learning

Dieses beliebte Lehrbeispiel des maschinellen Lernens stammt aus
📖 S. Russell, P. Norvig: *Artificial Intelligence: A Modern Approach.* Addison Wesley (3rd ed.) 2016 (Kapitel 17: Making complex decisions)

In den letzten Jahren hat dieser Ansatz großen Zulauf erhalten: Es gibt einen Massenmarkt, denn Geräte sind preiswert und alltagstauglich. Zudem genügen in vielen einfachen Projekten bereits die Grundlagen der Theorie für beachtliche Anwendungserfolge. Dank Softwarepaketen ist auch die Hürde in der Programmierung inzwischen recht gering.

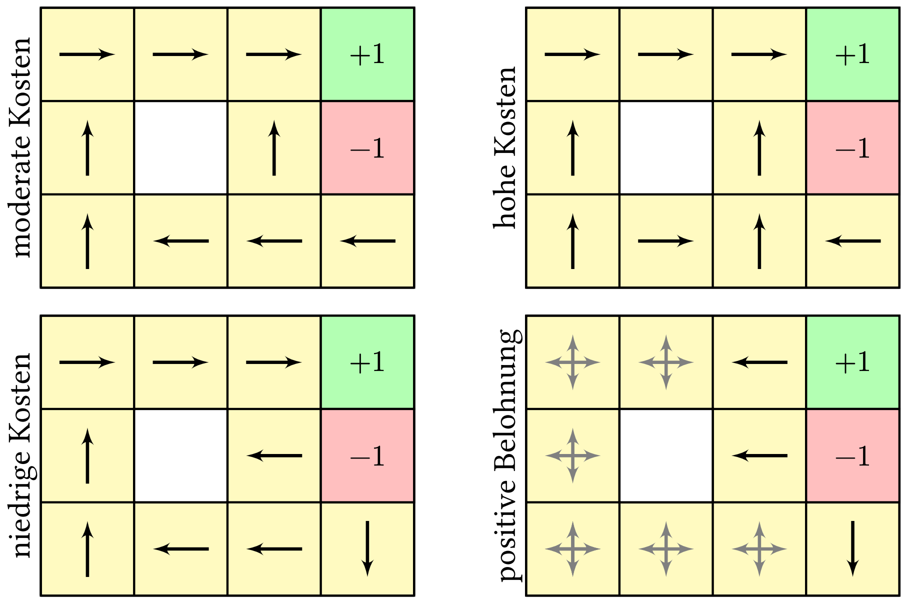
☺ Sie können und sollen mit diesem Übungsbeispiel konkret rechnen und numerische Erfahrungen sammeln: Sie finden eine Umsetzung als Tabellenkalkulation unter `eiserm.de/lehre/Spieltheorie/Robi.ods`.

Selbst in diesem einfachen Beispiel sind die Strategien überraschend. Spielen Sie etwas mit den Parametern, Belohnung und Auszahlungen! Wie ändert das Robis Verhalten? Begründung? Interpretation? Wann und warum konvergiert der Bellman–Operator?

Übung: Berechnen / implementieren Sie ebenso die 4×3–Wohnung.

Robi the Robot und Machine Learning

Robis Verhalten ist erstaunlich komplex, abhängig von den Kosten r:



Robi the Robot und Machine Learning

☺ Robi handelt strategisch, er sucht die Balance zwischen Belohnung und Risiko. Das ist durchaus typisch für viele realistische Anwendungen.

Bei moderaten Kosten lohnt sich für Robi der Umweg des Rundgangs. Bei hohen Kosten ist der direkte Weg besser. Probieren Sie es aus!

Bei geringen Kosten, r knapp unter Null, kann Robi sogar garantieren, nie die Treppe hinunterzufallen: Er kann ihr ganz vorsichtig ausweichen, auch wenn er sich öfter die Nase an der Wand stößt und länger fährt.

Der Fall $r = 0$ bietet die ersten Überraschungen: Probieren Sie es!

Bei positiver Belohnung $r > 0$ will Robi nie aufhören, auch nie aufladen, da er beliebig Nutzen generieren kann, indem er fröhlich umherfährt. Er ist wie auf Drogen, *high on reward*, als gäbe es kein morgen mehr.

Bei zu hohen Kosten jedoch ist Robis Leben so miserabel, dass er stets den nächsten Ausgang wählt, notfalls stürzt er sich die Treppe hinunter. Das ist zwar traurig, aber unter diesen Bedingungen das beste für ihn.

⚠ Die Wahl des Belohnugssystems entscheidet über das Verhalten. Alle Trainer / Lehrer / Eltern wissen das: *Choose rewards wisely!*

Gewinniteration / *value iteration*

Zu (Γ, r, v) betrachten wir $\Phi : E \to E$ sowie $\Phi_s : E \to E$ für $s \in S(\Gamma)$.
Wir nehmen an, dass wir zu Φ eine Kontraktionskonstante k kennen.

Algo D3A: Gewinniteration / *value iteration*

Global: Markov–Spiel (Γ, r, v), Kontraktionskonstante $k \in [0, 1[$
Eingabe: eine initiale Erwartung $u \in E$ und eine Toleranz $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$
Ausgabe: eine ε–optimale Erwartung $u \in E$ und Strategie $s \in S(\Gamma)$

```
repeat
    kopiere u′ ← u und aktualisiere u ← Φ(u)
until |u − u′| ≤ ((1−k)/k) ε
for x ∈ X° do wähle s(x) ∈ Arg max_{a∈A_x} H(x, a, u)
return (u, s)
```

Aufgabe: Warum endet dieser Algorithmus und ist korrekt?

Lösung: Beides verdanken wir Banachs Fixpunktsatz D2A!

⚠ Die abgelesene Strategie s ist im Allgemeinen noch nicht optimal!
Um dies zu garantieren, muss die Näherung hinreichend gut sein.

Strategie vs Gewinniteration

Aufgabe: Wie klein sollten wir $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ wählen, damit wir aus jeder ε–Näherung $\tilde{u}$ alle optimalen Strategien $s \in S(\Gamma)$ ablesen können?

Lösung: Sei $u = \Phi(u)$ die exakte Lösung. Gegeben ist $|\tilde{u} - u| \le \varepsilon$.
Zu $x \in X^\circ$ sei $\{\, u(x) - H(x, a, u) \mid a \in A_x \,\} = \{0 = \lambda_x^0 < \lambda_x^1 < \dots\}$.
Wir nennen $\lambda := \min\{\, \lambda_x^1 \mid x \in X^\circ \,\}$ die **Spektrallücke** von (Γ, r, v).
Für jede Aktion $a \in A_x$ ist $\tilde{u}(x) - H(x, a, \tilde{u})$ gegeben durch

$$[\tilde{u}(x) - u(x)] + [u(x) - H(x, a, u)] + [H(x, a, u) - H(x, a, \tilde{u})]$$

Für $a \in A_x$ sub/optimal gilt $\tilde{u}(x) - H(x, a, \tilde{u}) \ge \lambda - 2\varepsilon$ bzw. $\le 2\varepsilon$.
Für $4\varepsilon < \lambda$ können wir so aus $\tilde{u}$ alle optimalen Strategien s ablesen.

Aufgabe: Die Schranke λ nutzt die exakte, unbekannte Lösung u.
Können Sie eine Schranke finden, die nur die Näherung $\tilde{u}$ nutzt?

Lösung: Zu $x \in X^\circ$ und $A_x = \{a_0, \dots, a_\ell\}$ sei $\mu_x^i = \tilde{u}(x) - H(x, a_i, \tilde{u})$ sortiert gemäß $\mu_x^0 \le \mu_x^1 \le \dots \le \mu_x^\ell$. Wir setzen $\mu := \min\{\, \mu_x^1 \mid x \in X^\circ \,\}$.
Gilt $2\varepsilon < \mu$, so können wir die optimale Strategie s aus $\tilde{u}$ ablesen:
Für $a \in A_x$ sub/optimal gilt $\tilde{u}(x) - H(x, a, \tilde{u}) \ge \mu > 2\varepsilon$ bzw. $\le 2\varepsilon$.

Strategieiteration / *policy iteration*

Algo D3B: Strategieiteration / *policy iteration*

Global: das endliche Markov–Spiel (Γ, r, v)
Eingabe: eine initiale Strategie $s \in S(\Gamma)$
Ausgabe: eine optimale Strategie $s \in S(\Gamma)$ und ihre Erwartung $u \in E$

```
repeat
    löse u = Φ_s(u) und setze done ← true
    for x ∈ X° do
        if max_{a∈A_x} H(x, a, u) > H(x, s(x), u) then
            wähle s(x) ∈ Arg max_{a∈A_x} H(x, a, u) und setze done ← false
until done
return (s, u)
```

Aufgabe: Warum endet dieser Algorithmus und ist korrekt?

Lösung: Die Strategiemenge $S = S(\Gamma)$ ist endlich, und es gilt
$u_0 \lneqq u_1 \lneqq u_2 \lneqq u_3 \lneqq \dots$ bis schließlich $u = \Phi_s(u) = \Phi(u)$.
Ist Φ zudem kontraktiv, so ist u die eindeutige Lösung.

kombinierte Strategie-und-Gewinniteration

Oft kombiniert man die Gewinniteration mit der Strategieiteration:

Algo D3C: kombinierte Strategie-und-Gewinniteration

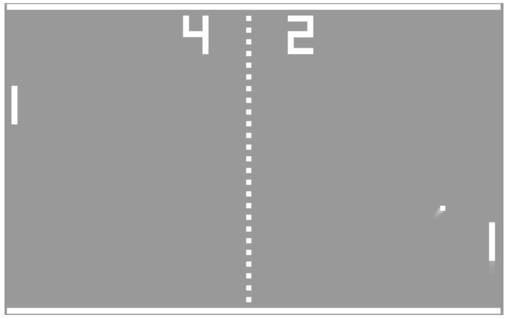
Global: das Markov–Spiel (Γ, r, v), Kontraktionskonstante $k \in [0, 1[$
Eingabe: eine initiale Erwartung $u \in E$ und eine Toleranz $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$
Ausgabe: eine optimale Strategie $s \in S(\Gamma)$ und ihre Erwartung $u \in E$

```
Gewinniteration D3A: berechne ein ε–optimales Paar (u, s)
Strategieiteration D3B: prüfe und nötigenfalls optimiere (s, u)
return (s, u)
```

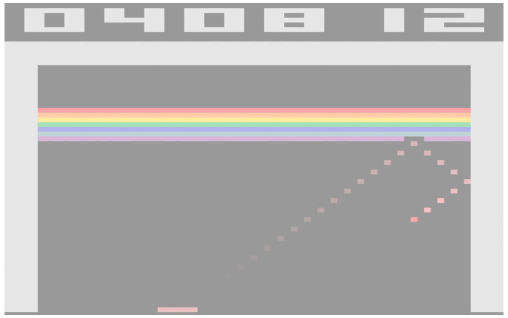
Übung: Wenn Sie möchten, können Sie diese Methode (und Varianten) mathematisch untersuchen, implementieren und experimentell erproben. Wird die Theorie schwächer, so muss praktische Erfahrung ausgleichen.

☺ Sie bearbeiten das schöne Beispiel *Robi the Robot* in unserer Übung. Solch handfeste Erfahrungen müssen Sie unbedingt selbst erleben; dann stellen Sie die richtigen Fragen und sind bereit für Antworten.

Pinball Wizard (frei nach *The Who*, 1969)



Pong
(Atari 1972)
zwei Spieler
deterministisch



Breakout
(Atari 1976)
ein Spieler
probabilistisch

Pinball Wizard (frei nach *The Who*, 1969)

Die **Künstliche Intelligenz** feiert inzwischen beachtliche Erfolge in Alltagsprodukten, von Spracherkennung bis autonomen Fahrzeugen. Furore machten zuletzt generative Sprachmodelle, kurz *LLM*s.

Durch **bestärkendes Lernen** [*reinforcement learning*] und ähnlichen Algorithmen kann ein strategischer Akteur (Agent, Computer, Roboter) *selbständig* aus Erfahrung lernen und immer bessere Strategien finden. Diese Eigenständigkeit ist eine ganz wesentliche, innovative Technik.

Ein amüsant-spektakuläres Beispiel sind Arcade-Spiele: Das Startup **DeepMind** (`en.wikipedia.org/wiki/DeepMind`) gehört inzwischen zu Google und hat diese grundlegende Idee seit 2013 sehr erfolgreich umgesetzt.

📖 Mnih et al: *Human-level control through deep reinforcement learning.* Nature 518 (2015) 529–533, `www.nature.com/articles/nature14236`

▶ `youtu.be/V1eYniJ0Rnk` als zweiminütiges Video oder ausführlicher als schön geschriebener Artikel `doi.org/10.1126/science.aaa7903`.

Arcade-Spiele sind ein gutes Testfeld: weder zu einfach noch zu schwer. Die Belohnungen sind zumeist dicht genug, um das Lernen zu fördern.

Pinball Wizard (frei nach *The Who*, 1969)

Einige Besonderheiten des **bestärkenden Lernens**:

- **Unsupervised:** Es gibt keine Anleitung und keinen Trainer
  Der Spieler lernt nur aus den Signalen seiner Belohnungen.
- **Exploration:** Aktionen beeinflussen zukünftige Informationen.
  Der Spieler muss daher aktiv interagieren und erforschen.
- **Delayed Feedback:** Aktionen bewirken spätere Belohnungen.
  Der Zeitablauf des Spiels ist ein wesentlicher Faktor.

Der Spieler muss seine Aktionen wählen und hierzu einen Kompromiss finden zwischen der **Erkundung** [*exploration*] neuer Möglichkeiten und der **Nutzung** [*exploitation*] bewährter Wege. Wie im richtigen Leben!

Die **sofortigen Belohnungen** leiten den Spieler in seinem Lernprozess: Er sucht die Balance zwischen kurzfristigem und langfristigem Nutzen. Nur mit gutem **Belohnungssignal** macht das Lernen gute Fortschritte.

Bei **allzu seltenen Belohnungen** r oder endlastigen Auszahlungen v sind die Fortschritte recht langsam. In großen Umgebungen (Spielgraphen) müssen die Zustände geeignet zusammengefasst / abstrahiert werden.

Pinball Wizard (frei nach *The Who*, 1969)

Das grundlegende Lehrbuch zum bestärkenden Lernen:
📖 Richard S. Sutton, Andrew G. Barto: *Reinforcement Learning.* The MIT Press (2nd ed.) 2018 (hier speziell §6.5: Q–learning), online verfügbar unter `incompleteideas.net/book/RLbook2020.pdf`

Das folgende Vorlesungsskript ist deutlich kürzer und knapper:
📖 Csaba Szepesvári: *Algorithms for Reinforcement Learning*, online `sites.ualberta.ca/~szepesva/papers/RLAlgsInMDPs-lecture.pdf`

Es gibt exzellente Online-Kurse zu diesem Thema, zum Beispiel von
▶ David Silver: *Intro to Reinforcement Learning.* `youtu.be/2pWv7GOvuf0`
Silver hat 2008 bei Sutton promoviert und ist seither extrem erfolgreich. Hierzu ein Interview mit Hannah Fry zu Geschichte und Zukunft:
▶ Google DeepMind: *Is Human Data Enough?* `youtu.be/zzXyPGEtseI`

Ich kann der Versuchung nicht widerstehen und will Ihnen einen ganz kurzen Ausblick dieses aktuellen und faszinierenden Gebiets skizzieren: Es verbindet Informatik und Mathematik, Lerntheorie und Spieltheorie, und ist im Ingenieurwesen und seinen Anwendungen angekommen.

☺ Angenommen, wir kennen zu (Γ, r, v) die Gewinnfunktion $u = \Phi(u)$. Im Zustand $x \in X^\circ$ bewerten wir die Qualität jeder Aktion $a \in A_x$ durch

$$q(x,a) = H(x,a,u) := \sum_{y \in X} p(x,a,y)\,[r(x,a,y) + \delta u(y)].$$

Optimalitätsprinzip: Jede optimale Aktion $a \in A_x$ maximiert $q(x,a)$.

Angenommen, der Spieler kennt anfangs nur den Markov–Graphen Γ. Wie kann er die Bewertungen q und u spielend-explorativ erlernen?

☺ Als Näherung für q nutzt er sein bisheriges **Erfahrungswissen**:

$$Q \,:\, A \to \mathbb{R} \,:\, (x,a) \mapsto Q(x,a)$$

Jeden aktiven Zustand $x \in X^\circ$ bewertet er näherungsweise durch

$$U \,:\, X^\circ \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto U(x) = \max_{a \in A_x} Q(x,a).$$

Im aktiven Zustand $x \in X^\circ$ wählt der Spieler eine Aktion $a \in A_x$ und gelangt zum Zustand y mit Belohnung $R = r(x,a,y)$. Er aktualisiert

$$Q(x,a) \leftarrow (1-\alpha)\underbrace{Q(x,a)}_{\text{alte und...}} + \alpha\,\underbrace{[R + \delta U(y)]}_{\text{neue Erfahrung}} \quad \text{und} \quad U(x) \leftarrow \max_{a \in A_x} Q(x,a).$$

Der Spieler lernt durch seine Erfahrung mit der **Lernrate** $\alpha \in \,]0,1[$. Sein **Erfahrungswissen** Q und U wird dabei wie folgt aktualisiert:

Algo D3D: Aktualisierung von Q und U

Global: die Bewertungen $Q : A \to \mathbb{R}$ und $U : X \to \mathbb{R}$
Eingabe: die Aktion $a : x \to y$ mit Belohnung $R \in \mathbb{R}$.

1: aktualisiere $Q(x,a) \leftarrow (1-\alpha)Q(x,a) + \alpha[R + \delta U(y)]$
2: aktualisiere $U(x) \leftarrow \max\{U(x), Q(x,a)\}$

Ist y terminal, so erhält er zudem $V = v(y)$ und aktualisiert $U(y) \leftarrow V$. Damit endet diese **Episode**, die Trajektorie dieses Spieldurchgangs. Zur weiteren Verbesserung werden noch weitere Episoden gespielt.

Der hier beschriebene Algorithmus heißt **Q–Lernen** [*Q–learning*]. Der Buchstabe „Q“ steht für die Funktion $Q : A \to \mathbb{R}$, die die Qualität der Aktionen bewertet und in diesem Algorithmus die Hauptrolle spielt.

☺ Erhofft ist die rasche **Konvergenz** $Q_t \to q$ und $U_t \to u$ für $t \to \infty$. Dazu gibt es mathematische Sätze und eindrückliche praktische Erfolge.

Maschinelles Lernen nutzt Algorithmen, die aus Erfahrungen lernen, mit Hilfe statistischer Methoden auf Trainingsdaten, hier Spieldaten.

Zwei grundlegende Algorithmen sind **Gewinniteration** [*value iteration*] und **Strategieiteration** [*policy iteration*], wie oben zusammengefasst. Sie setzen allerdings voraus, dass das ganze Spiel (Γ, r, v) bekannt ist; dann stehen alle genannten mathematischen Werkzeuge zur Verfügung.

Beim **bestärkenden Lernen** [*reinforcement learning*] erlernt der Agent selbständig eine Strategie. Ihm wird anfangs nur der Graph Γ gegeben, aber keine Hinweise, welche Aktion in welcher Situation die beste wäre. Noch realistischer: Er muss auch den Graphen Γ erst selbst erkunden!

Reines Beobachten genügt in diesem Lernprozess nicht, Informationen gewinnt der Spieler nur durch **Interaktion**. Alle seine Aktionen $a : x \to y$ führen zu Belohnungen, aus diesen approximiert er die Qualität $Q(x,a)$ der Aktion und den Nutzen $U(x) = \max_{a \in A_x} Q(x,a)$ des Zustands x.

Der **Algorithmus** stammt von Watkins (1989) und Bozinovski (1981). Seine **Konvergenz** wurde bewiesen von Watkins und Dayan (1992).

Die Grundidee stammt aus der **Psychologie** und wurde bereits seit den Anfängen der Kybernetik verwendet, so etwa von Marvin Minsky in seiner Dissertation: *Neural Nets and the Brain Model Problem.* (1954)

Bestärkendes Lernen ist inzwischen ein großes interdisziplinäres Gebiet und verbindet Informatik, Optimierung und Ökonomik mit Psychologie und Neurowissenschaften. Verfolgt werden dabei zwei Ziele:

(1) Bei realen Lebewesen soll das beobachtete (Lern)Verhalten durch geeignete Modelle möglichst gut erklärt werden (deskriptiv, explikativ).

(2) Künstliche Agenten sollen mit ihrer Umwelt strategisch interagieren und daraus möglichst effizient lernen (normativ, konstruktiv).

Übung: Wenn Sie gerne programmieren, dann können Sie unsere Miniaturbeispiele implementieren und durch bestärkendes Lernen lösen.

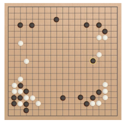
Allgemein lohnt sich hierbei eine möglichst generische Problemlösung, die allgemein Markov–Spiele behandelt. Sie können dabei viel lernen!

Wenn Sie mit den Grundideen (und auch Problemen) vertraut sind, dann lohnt sich ein Blick auf die umfangreichen Softwarepakete.

Anwendungen im maschinellen Lernen

Google DeepMind ist spezialisiert auf maschinelles Lernen:

2013: Deep Q-Learning meistert Arcade-Spiele wie Pong, Breakout, etc.



2015: AlphaGo schlägt den mehrfachen Europameister Fan Hui.
2016: AlphaGo schlägt den südkoreanischen Profi Lee Sedol.
2017: AlphaGo schlägt den Weltranglistenersten Ke Jie.

2017: AlphaGo Zero verbessert AlphaGo. Es lernt selbständig anhand der Spielregeln und benötigt sonst keinerlei Vorwissen über das Spiel. *Self-Play* ist eine entscheidende Erweiterung zum *Human Feedback*.

2018: AlphaFold sagt Proteinstrukturen vorher. Chemie-Nobelpreis 2024. Es ist wichtig, und notorisch schwierig, anhand der Aminosäuresequenz die dreidimensionale Faltung eines Proteins vorherzusagen.

2022: AlphaTensor optimiert schnelle Matrixmultiplikation.

2024: AlphaProof erreicht Silbermedaille in der IMO. Auch Mathematik, insbesondere das Entwickeln mathematischer Beweise, ist ein Spiel: Hier dient LEAN als Beweisassistent und prüft die vorgeschlagenen Beweisen. Dieses objektive Kriterium schützt insbesondere vor Halluzinationen.

Anwendungen im maschinellen Lernen

Anfangs trainierte man Modelle mit menschlicher Supervision / *Human Feedback*, doch nun zeigt selbständiges Spielen / *Self-Play* sein Potential.

In theory, computers could learn new skills at incredible speed if they didn't have to wait for human teachers to give feedback on whether they are on the right track. But this approach – known as unsupervised learning – has rarely worked […]. The video playing behind Hassabis showed what seemed impossible: A computer learning on its own to play complicated video games like Breakout […]. After exploring the game by playing it, the computer discovered advanced strategies that few humans know about, such as digging a hole to bounce the ball along the back side of the wall.

Science (2015), `doi.org/10.1126/science.aaa7903`

Diese Idee ist revolutionär, universell einsetzbar und höchst erfolgreich. Demis Hassabis und John Jumper erhielten 2024 den Chemie-Nobelpreis für ihre Forschung zur Proteinvorhersage. Ihr erstaunlicher Weg führte von Biologie über das Computerspiel *Foldit* zu maschinellem Lernen.

The Most Useful Thing AI Has Ever Done. `youtu.be/P_fHJIYENdI`

Anwendungen im maschinellen Lernen

Inzwischen ist die Technik des bestärkenden Lernens längst zu einem bewährten Universalwerkzeug avanciert, sowohl in der Forschung als auch in Alltagsprodukten. In vielen Haushalten verrichten Saugroboter erfolgreich ihren Dienst, in vielen Gärten arbeiten Mähroboter, uvm.

Bislang haben wir nur einen einzelnen Akteur betrachtet. Der nächste Schritt ist die Interaktion mehrerer Akteure, etwa die Kooperation einer Rudels von Mährobotern oder eines Schwarms fliegender Drohnen. Bei divergierenden Zielen wird Optimierung zur Spieltheorie!

Im Februar 2022 befahl der russische Präsident Wladimir Putin seinen schändlichen Angriffskrieg gegen die Ukraine. In den Kriegshandlungen spielen erstmals Flugdrohnen aller Größen eine überaus wichtige Rolle. Noch werden sie meist von menschlichen Pilot:innen gesteuert.

Maschinelles Lernen wird selbstverständlich auch hier eingesetzt werden. In Anbetracht des allseits großen Drucks wird es in den kommenden Jahren autonome Flugdrohnen mit künstlicher Intelligenz versehen. Wo immer Anwendungen locken, da zum Guten wie zum Bösen.

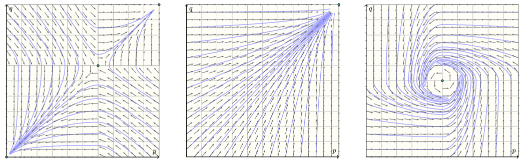
Anwendungen im maschinellen Lernen

„Sentre's Neurocaster: Winning Design Awards. And Wars.“

The Electric State ist ein illustrierter Roman des schwedischen Autors Simon Stålenhag aus dem Jahr 2018. Er spielt in den 1990er Jahren einer alternativen Realität, nachdem ein Drohnenkrieg die USA verwüstet hat.

Kapitel E

Strategische Spiele und Nash–Gleichgewichte



L'enfer, c'est les autres.
[Die Hölle, das sind die anderen.]
Jean-Paul Sartre (1905–1980), *Huis Clos*

Inhalt dieses Kapitels E

Motivation und Überblick

Im letzten Kapitel D über Markov–Spiele ging es nur um einen Akteur, der sein strategisches Handeln optimiert. In diesem Kapitel beginnen wir die Modellierung und systematische Untersuchung von Spielen mit zwei oder mehr Spieler:innen. Das offenbart völlig neue Phänomene.

Wir definieren hierzu zunächst **strategische Spiele in Normalform** und erklären den Begriff des **Nash–Gleichgewichts**. Solche Gleichgewichte beschreiben **mögliches rationales Verhalten**. Die Definition ist einfach, aber die Interpretation bedarf einiger Übung und zahlreicher Beispiele.

Im Allgemeinen hat ein gegebenes Spiel keine Nash–Gleichgewichte. Dies ändert sich durch seine Fortsetzung zu **gemischten Strategien**. **Nashs Existenzsatz** E1E garantiert: Jedes endliche reelle Spiel hat mindestens ein Nash–Gleichgewicht in gemischten Strategien.

Daraus erhalten wir direkt John von Neumanns berühmten **Hauptsatz für Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele**: Die Nash–Gleichgewichte entsprechen hier den Min-Maximierern und den Max-Minimierern. Die **eindeutige Gleichgewichtsauszahlung** definiert den Wert des Spiels.

Motivation und Überblick

Die **Berechnung** gelingt ad hoc in einigen Spezialfällen und allgemein dank Linearer Programmierung, die wir im nächsten Kapitel erklären.

Eine weitere nützliche Berechnungsmethode ist das Erkennen und Eliminieren von (strikt) **dominierten Strategien**. Die Idee ist leicht, doch die Feinheiten sind subtil und müssen sauber ausgeführt werden. Ich betone dies, weil es erfahrungsgemäß oft falsch angewendet wird.

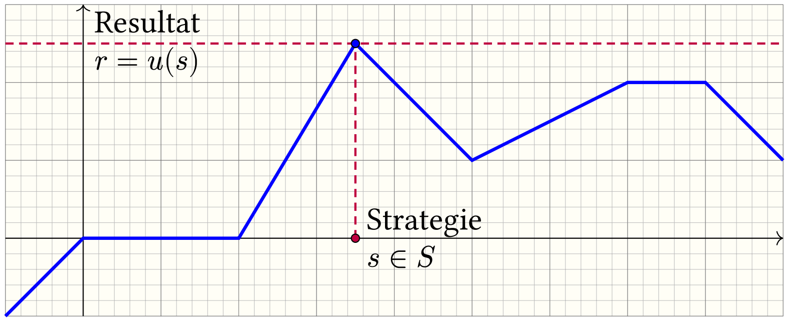
Ein vorrangiges Ziel dieses Kapitels ist daher, eine saubere und tragfähige **Notation** einzuführen. Über viele der beobachteten Phänomene können wir nur damit überhaupt erst sprechen.

Anschließend wollen wir die grundlegenden **Sätze** präzise formulieren und beweisen und als **Rechenregeln** gebrauchsfertig bereitstellen. Das ist manchmal mühsam, aber immer lohnend. In der Literatur wird dies unterschiedlich streng gehandhabt. Wir versuchen unser bestes.

Mit dieser Grundausstattung unserer **Werkzeuge** gerüstet untersuchen wir zahlreiche Anwendungen in diesem und allen folgenden Kapiteln und vor allem in den Gruppenübungen. Üben Sie sich daran!

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

Abstraktion fragt nach einer *allgemeinen* und *einfachen* Beschreibung. Ein **Spiel** mit nur einer Spieler:in ist eine Funktion $u : S \to R : s \mapsto u(s)$.



Hierbei ist S die Menge der **Strategien**, die die Spieler:in wählen kann, und R ist die Menge möglicher **Resultate**, linear geordnet durch $\le$. Wir nennen u die **Nutzenfunktion**. Meist sind R die reellen Zahlen. Ebenso nutzbar ist allgemein jede total prägeordnete Menge $(R, \preceq)$. Jede Spieler:in sucht ihre Strategie $s \in S$ so, dass ihr Resultat $r = u(s)$ maximal ist, also $u(a) \le u(s)$ für alle alternativen Strategien $a \in S$ gilt.

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall einer einzigen Spieler:in. Gegeben ist die Menge S der möglichen Strategien und hierauf die Nutzenfunktion $u : S \to R$. Die Spieler:in will nun $s \mapsto u(s)$ maximieren. Wenn die Menge S klein ist, dann genügt ausprobieren. Ist die Menge S hingegen groß und unübersichtlich, dann kann die Optimierung beliebig schwierig werden, siehe das Problem des Handlungsreisenden (TSP) oder ähnliche.

Sie kennen einfache Beispiele aus der Schule und lernen Optimierung durch Kurvendiskussion. Als Kontrast: Unser Kiosk-Beispiel (A233) ist ein kombinatorisches Optimierungsproblem; bei einer Lizenz ist es klar und langweilig, bei zweien leicht, bei dreien knifflig und überraschend. Optimiert wurde dort übrigens keine reelle Zahl, sondern das Ergebnis (Marktanteil, Nähe zur Straße) in lexikographischer Ordnung.

Allgemein kann u alles mögliche messen: Geld, Gewinn maximieren, Kosten minimieren, aber auch Einfluss, Ansehen, soziale Stellung, Gerechtigkeit, Umweltschutz, Tierschutz, Glück, Zufriedenheit, etc. Nahezu jede menschliche Aktivität lässt sich so betrachten!

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

$s_2 \in S_2 =$

$s_1 \in S_1 =$

A \ B	Schere	Stein	Papier
Schere	0, 0	−1, +1	+1, −1
Stein	+1, −1	0, 0	−1, +1
Papier	−1, +1	+1, −1	0, 0

$u_2(s_1, s_2)$
$u_1(s_1, s_2)$

Definition E1A: strategisches Spiel (statisch, in Normalform)

Ein **strategisches Spiel** mit n Spieler:innen ist eine Funktion

$$u : S_1 \times \dots \times S_n \to R_1 \times \dots \times R_n$$
$$s = (s_1, \dots, s_n) \mapsto (u_1(s), \dots, u_n(s)) = u(s).$$

Hierbei ist S_i die Menge der **Strategien**, die Spieler:in i wählen kann, und R_i die Menge ihrer möglichen **Resultate**, linear geordnet durch $\le_i$.

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

Wir wollen Spiele darstellen: einheitlich, übersichtlich, knapp, präzise. Jede Spieler:in wählt ihre Strategie $s_i \in S_i$ unabhängig von den anderen. Ihr Gewinn ist $u_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$, diesen versucht sie zu maximieren. Meist sind R_i die reellen Zahlen, und wir nennen u_i die **Nutzenfunktion** für Spieler:in i. Allerdings kontrolliert Spieler:in i nur ihre Strategie s_i, nicht die Strategien $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) =: s_{-i}$ ihrer Gegenspieler!

Als konkretes, einfaches Beispiel betrachten wir *Schere-Stein-Papier*. Dies ist ein **Nullsummenspiel**, d.h. stets gilt $u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0$. Es ist zudem **symmetrisch**, d.h. $S_1 = S_2$ und $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$.

Vorteile dieses Modells: Unsere Definition fasst alle zuvor betrachteten Spiele zusammen. Wir schaffen damit einen gemeinsamen Rahmen, um allgemeine Begriffe und Werkzeuge zu entwickeln! Gewisse Argumente, Rechnungen und Tricks treten immer wieder auf. Wir können sie nun allgemein erklären, präzise formulieren, und ihre Gültigkeit beweisen.

Einschränkungen: Unsere Definition berücksichtigt noch nicht den zeitlichen Verlauf, zufällige Einflüsse oder unvollständige Information.

Was ist ein Nash–Gleichgewicht?

E105

Das Spiel „Straßenverkehr“

A \ B	links	rechts
links	$+1$ / $+1$	-8 / -8
rechts	-8 / -8	$+1$ / $+1$

Feiglingspiel / *chicken game*

A \ B	einlenken	gradaus
einlenken	2 / 2	5 / 1
gradaus	1 / 5	-9 / -9

Ein Strategiepaar (s_1, s_2) ist **instabil** für Spieler i, falls er sein Ergebnis $u_i(s_1, s_2)$ verbessern kann, indem er einseitig seine Strategie s_i ändert.

Definition E1b: Nash–Gleichgewichte (vorläufige Formulierung)

Wir nennen (s_1, s_2) **Nash–Gleichgewicht**, falls kein Spieler aus eigener Kraft sein Ergebnis verbessern kann, indem er seine Strategie ändert.

Nash–Gleichgewichte erklären zunächst nur, was **rational möglich** ist. Manch Spiel hat mehrere Gleichgewichte, erfordert also Koordinierung. Tradition / Konvention / Erziehung / Moral können eine Auswahl treffen.

Was ist ein Nash–Gleichgewicht?

E106 Erläuterung

Spiele sind im Allgemeinen sehr komplex. Zum Einsteig betrachten wir zunächst die allereinfachsten: **strategische Spiele in Normalform**. Wir können jedes Spiel in diese Grundform bringen; dabei geht meist Information verloren. Wir betrachten anschließend Verfeinerungen.

Grundlegend für Spiele ist der Begriff des **Nash–Gleichgewichts**. Für seine bahnbrechenden Arbeiten hierzu aus den 1950er Jahren bekam John Nash 1994 den Wirtschafts-Nobelpreis zusammen mit John Harsanyi (1920–2000) und Reinhard Selten (1930–2016).

Anschauliche Beschreibung: Bob fixiert seine Spalte s_2, Alice wählt ihre Zeile s_1 mit maximalem Ergebnis $s_1 \mapsto u_1(s_1, s_2)$. Alice fixiert ihre Zeile s_1, Bob wählt seine Spalte s_2 mit maximalem Ergebnis $s_2 \mapsto u_2(s_1, s_2)$. Gelingt beides zugleich, so haben wir ein Nash–Gleichgewicht.

Das erklärt auch einen einfachen **Algorithmus**, wie wir in einem endlichen Bimatrix-Spiel alle (reinen) Nash–Gleichgewichte finden: Finde die Maxima in jeder Zeile. Finde die Maxima in jeder Spalte. Wo beides zugleich zusammentrifft, liegt ein Nash–Gleichgewicht.

Was ist ein Nash–Gleichgewicht?

E107

Vorgelegt sei ein Spiel $u : S_1 \times \dots \times S_n \to R_1 \times \dots \times R_n$ in Normalform. Wir nennen $s = (s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n := S$ einen **Strategievektor**. Spieler i kann sich aus eigener Kraft verbessern, falls für ein $a \in S_i$ gilt:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{a}, s_{i+1}, \dots, s_n) \;>\; u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i}, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Andernfalls ist $u_i(s)$ ein **Maximum** bezüglich aller Alternativen $a \in S_i$:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{a}, s_{i+1}, \dots, s_n) \;\le\; u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i}, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Somit ist s_i eine **beste Antwort** auf $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) =: s_{-i}$.

Definition E1b: Nash–Gleichgewichte eines Spiels

Der Strategievektor $s \in S$ ist im **Gleichgewicht für Spieler i**, wenn gilt:

$$u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{a \in S_i} u_i(a; s_{-i}), \qquad \text{das heißt} \qquad s_i \in \operatorname*{Arg\,max}_{a \in S_i} u_i(a; s_{-i}).$$

Hierfür schreiben wir $\mathrm{NE}_i(u) := \{\, s \in S \mid s_i \text{ ist beste Antwort auf } s_{-i} \,\}$.

Gilt dies für jeden Spieler i, so nennen wir s ein **Nash–Gleichgewicht**, kurz $\mathrm{NE}(u) := \bigcap_i \mathrm{NE}_i(u) = \{\, s \in S \mid s \text{ ist Nash–Gleichgewicht von } u \,\}$.

Was ist ein Nash–Gleichgewicht?

E108 Erläuterung

Zunächst ist ein Nash–Gleichgewicht genau das, was die Definition sagt: Für jeden Spieler $i = 1, \dots, n$ ist seine Strategie s_i eine beste Antwort auf die gegnerischen Strategien, geschrieben $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$. Anders gesagt: Kein Spieler hat Anreiz, seine Strategie s_i zu ändern.

Umgekehrt erwarten wir, rational gesehen, dass ein Ungleichgewicht nicht gespielt wird, zumindest nicht auf Dauer, denn mindestens ein Spieler wird wechseln. Dies interpretieren wir normativ oder deskriptiv:

(1) Gibt es nur genau ein Nash–Gleichgewicht, so wird dieses gespielt. Rationale Interpretation: Sind alle Spieler rational, so werden sie ihr Verhalten auf dieses einzige Nash–Gleichgewicht koordinieren.

(2) Die Nash–Gleichgewichte erklären das beobachtete Spielerverhalten. Evolutionäre Sichtweise bei wiederholten Spielen, Schwarmintelligenz bei großen Populationen: Ungleichgewichte bleiben nicht bestehen.

In allen Fällen sind die Nash–Gleichgewichte eines Spiels besondere Strategievektoren, die zur weiteren Analyse dienen: Mögliche rationale Lösungen, beobachtetes Spielverhalten, evolutionäre Entwicklung, etc.

Beispiel: ein Erbe teilen (soft)

Aufgabe: Alice und Bob erben 10 Dukaten. Das Testament verlangt: Alice wünscht sich $x \in \{1,\dots,9\}$, und Bob wünscht sich $y \in \{1,\dots,9\}$, gleichzeitig per Brief an den Notar. Gilt $x+y>10$, so verfällt das Erbe. Gilt $x+y\le 10$, so werden beide Wünsche erfüllt, etwaiger Rest verfällt.

Aufgabe: (1) Formalisieren Sie dies als ein strategisches Spiel u.
(2) Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte dieses Spiels u.

Lösung: (1) Die Regeln definieren ein Spiel in Normalform:

$$u : \{1,\dots,9\}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto \begin{cases} (x,y) & \text{falls } x+y \le 10, \\ (0,0) & \text{falls } x+y > 10. \end{cases}$$

(2a) Kein Gleichgewicht ist (x,y) mit $x+y<10$, ebensowenig (x,y) mit $x+y>10$. Somit bleiben nur noch neun mögliche Kandidaten:

$$\mathrm{NE}(u) \subseteq \{\,(1,9),\ (2,8),\ (3,7),\ (4,6),\ (5,5),\ (6,4),\ (7,3),\ (8,2),\ (9,1)\,\}$$

(2b) Jedes dieser Paare ist ein Nash–Gleichgewicht, also gilt auch „$\supseteq$“.

$$\mathrm{NE}(u) = \{\,(1,9),\ (2,8),\ (3,7),\ (4,6),\ (5,5),\ (6,4),\ (7,3),\ (8,2),\ (9,1)\,\}$$

Beispiel: ein Erbe teilen (soft)

Wenn der Notar das Paar (x,y) verkündet, könnte er Alice dann Bob separat fragen, ob sie ihren Wunsch ändern möchten. Falls (x,y) kein Gleichgewicht ist, so will mindestens eine:r wechseln. Ist (x,y) hingegen ein Gleichgewicht, so besteht für keine:n irgendein Anlass zu wechseln.

Wenn sich Alice und Bob absprechen können, so können sie jedes der neun Gleichgewichte $(x,y) \in \mathrm{NE}(u)$ auswählen und als gemeinsames Vorgehen vereinbaren. Keine:r hätte anschließend Anlass, abzuweichen. Welches Paar (x,y) sie auswählen ist frei verhandelbar, siehe Kapitel L.

Aufgabe: Diskutieren Sie die folgende, recht naheliegende Variante: Alice wünscht sich $x \in \{0,\dots,9\}$ und Bob wünscht sich $y \in \{0,\dots,9\}$.

Lösung: Die Menge der Nash–Gleichgewichte ändert sich nicht! Alice’ Strategie 0 ist strikt dominiert durch 1: Egal, welche Strategie $y \in \{0,\dots,9\}$ Bob wählt, für Alice ist 1 immer strikt besser als 0.

Ebenso wird Bobs Strategie 0 strikt dominiert durch die Strategie 1. Die beiden zusätzlichen Optionen werden also rational nie genutzt. Das ändert sich in der folgenden Aufgabe mit $x,y \in \{0,\dots,10\}$.

Beispiel: ein Erbe teilen (hart)

Aufgabe: Alice und Bob erben 10 Dukaten. Das Testament verlangt: Alice wünscht sich $x \in \{0,\dots,10\}$, Bob wünscht sich $y \in \{0,\dots,10\}$, gleichzeitig per Brief an den Notar. Gilt $x+y>10$, so verfällt das Erbe. Gilt $x+y\le 10$, so werden beide Wünsche erfüllt, etwaiger Rest verfällt.

Aufgabe: (1) Formalisieren Sie dies als ein strategisches Spiel u.
(2) Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte dieses Spiels u.

Lösung: (1) Die Regeln definieren ein Spiel in Normalform:

$$u : \{0,\dots,10\}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto \begin{cases} (x,y) & \text{falls } x+y \le 10, \\ (0,0) & \text{falls } x+y > 10. \end{cases}$$

(2) Eine sorgfältige Analyse, wie in der vorigen Aufgabe, ergibt:

$$\mathrm{NE}^!(u) = \{\,(1,9),\ (2,8),\ (3,7),\ (4,6),\ (5,5),\ (6,4),\ (7,3),\ (8,2),\ (9,1)\,\}$$
$$\mathrm{NE}(u) = \mathrm{NE}^!(u) \cup \{\,(0,10),\ (10,0),\ (10,10)\,\}$$ Überraschung!

Nash–Gleichgewichte erklären zunächst nur, was **rational möglich** ist. Manch Spiel hat mehrere Gleichgewichte, erfordert also Koordinierung!

Beispiel: ein Erbe teilen (hart)

In diesem Spiel kann man das letzte Gleichgewicht $(10,10)$ leicht übersehen; es ist nicht intuitiv, aber dennoch ein Nash–Gleichgewicht! Nash–Gleichgewichte zu prüfen ist leicht, eins/alle zu finden ist schwer. Da hilft nur genau lesen, scharf nachdenken, sorgsam ausführen.

Angenommen, Alice und Bob können sich absprechen, vor Einreichung ihrer Wünsche. Jedes Nicht-Gleichgewicht $(x,y) \in S \smallsetminus \mathrm{NE}(u)$ ist eine unsinnige Vereinbarung, denn mindestens eine:r hat Anlass, die gerade getroffene Absprache sofort zu brechen. Jede Absprache $(x,y) \in \mathrm{NE}(u)$ hingegen ist rational möglich, denn sie ist selbststabilisierend!

Übung: Diskutieren Sie das entsprechende Spiel mit drei Erben Alice, Bob und Chuck, ebenso mit vier Erben, fünf Erben, sechs Erben, etc.

Wenn Sie genauer hinschauen, dann entdecken Sie einige interessante Phänomene. Zum Beispiel sind bei drei Erben manche Gleichgewichte wie $(5,5,5)$ nur stabil unter individueller Maximierung, doch eine/jede Zweier-Koalition könnte und würde koordiniert davon abweichen. Was sind hier die koalitions-stabilen Gleichgewichte?

Empirie: Piraten teilen im Praxistest

Im **Casino Royal** (22.04.2022) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, unsere ersten Überlegungen zu Gleichgewichten in der Praxis zu testen. Ich empfehle nachdrücklich praktische **Experimente zur Spieltheorie**, denn Theorie und Praxis ergänzen und inspirieren sich gegenseitig! Hier mein (stark vereinfachtes) Gedächtnisprotokoll der Ereignisse.

Wir haben zunächst das Piratenspiel mit fünf Piraten gespielt, viermal in jeweils wechselnden Rollen. Vorschläge und Argumente gingen bunt durcheinander, und die Ergebnisse waren wieder erstaunlich (A225). Die Capitaine verteilten großzügig, doch zwei gingen über die Planke.

Erstes Spiel: Auf Vorschlag aus dem Publikum haben wir folgende Spielregeln vereinbart: Vier Piraten A, B, C, D teilen sich 100 Dukaten. Jeder schreibt seinen Wunsch $a, b, c, d \in \{0, \dots, 100\}$ auf einen Zettel. Im Falle $a + b + c + d \leq 100$ wird der Wunsch ausgezahlt, sonst nichts.

Gespielt wurde zunächst *ohne* vorige Absprache. Die Wünsche waren dann $(25, 20, 20, 25)$. Zwei waren vorsichtig! Es wurden daher nur 90 Dukaten ausgezahlt und 10 Dukaten als Opfergabe ins Meer geworfen.

Empirie: Piraten teilen im Praxistest

Zweites Spiel: Selbe Spielregeln, doch nun durfte zuvor verhandelt werden. Spieler A nutzte die Gelegenheit, um seinen Zettel sofort und endgültig und für alle sichtbar mit 80 zu beschriften (*burning bridges*).

Seine dreiste Strategie schlug jedoch fehl: Die anderen wollten dies nicht hinnehmen und schrieben eiskalt ebenso überzogene Forderungen auf. So wurden alle 100 Dukaten ins Meer geworfen! Tja, dumm gelaufen.

Rational war das sicher nicht. Der fiese Trick, sich früh festzulegen und damit die anderen zu erpressen, hätte (rational) funktionieren müssen, misslang aber dennoch. Vielleicht wäre die Forderung nach 30 Dukaten noch durchgegangen, oder 40, aber eben nicht 80. Versuch macht kluch.

Drittes Spiel: Selbe Spielregeln, mit Verhandlung. Alle trauerten den vergeudeten 100 Dukaten nach. Sie einigten sich auf $(25, 25, 25, 25)$, so hat es dann jeder aufgeschrieben, und so wurde es ausgezahlt. „Nach den Erfahrungen von eben, macht alles andere keinen Sinn.“

☺ Das ist ein striktes Nash–Gleichgewicht, Abweichen schadet! Nach leidvollen Fehlschlägen hat sich dieses Ergebnis eingependelt.

Empirie: Piraten teilen im Praxistest

Viertes Spiel: Um die Symmetrie zu brechen werden die 100 Dukaten vorneweg in vier Haufen zu $10, 20, 30, 40$ Dukaten aufgeteilt. Jeder Pirat darf sich einen Haufen aussuchen, gleichzeitig per Zettel. Beanspruchen dabei zwei Piraten denselben Haufen, so wird *alles* ins Meer geworfen.

Unsere vier leidgeprüften Piraten wollten rasch zu einem Ergebnis kommen, doch keinerlei Risiko eingehen und haben daher… gelost! Per Schnick-Schnack-Schnuck haben Sie die vier Haufen zugeteilt. Beim Ausfüllen der Zettel ist anschließend keiner (!) abgewichen.

☺ Nicht das Ergebnis ist symmetrisch-gerecht, sondern das Verfahren. Es gibt $4! = 24$ solcher Nash–Gleichgewichte. Jedes ist auf seine Weise ungerecht, genau dies haben unsere Piraten durch das Losverfahren „symmetrisiert“ und anschließend das Ergebnis klaglos akzeptiert.

☺ Jede Zuteilung ist ein striktes Gleichgewicht, Abweichen schadet! Wurde erst einmal eines der 24 Gleichgewichte willkürlich ausgewäht, so ist diese Vereinbarung selbst-stabilisierend. Damit haben unsere Piraten nebenbei **korrelierte Gleichgewichte** entdeckt (siehe I3).

Empirie: Piraten teilen im Praxistest

Zwei Varianten kamen uns noch in den Sinn, die wir aber nicht spielten:

Fünftes Spiel: Selbe Spielregeln, aber ohne die Möglichkeit der vorigen Absprache. Wie sollte jeder Pirat nun vorgehen? Jeder möchte einen großen Haufen, aber gleichzeitig Kollisionen verhindern. Knifflig! Übung: Wie wahrscheinlich sind Kollisionen bei zufälliger Wahl?

Wie gelingt eine möglichst kollisionsfreie Zuteilung, ein gemeinsamer Symmetriebruch, ohne Gedächtnis, Tradition, vorige Absprache, etc.? Willkürlich, z.B. nach Alter? Nähe zur Tür? Oder eine andere Größe, die allen zugänglich ist und allgemein als Arbiter anerkannt wird.

Sechstes Spiel: Fünf Piraten verteilen die Geldhaufen $0, 10, 20, 30, 40$. Wie kann oder soll zugeteilt werden? Willkürlich nach Losverfahren? Wie können unsere besorgten Piraten sicherstellen, dass die getroffene Vereinbarung auch wirklich eingehalten wird? „Wer nichts mehr zu verlieren hat, fühlt sich an Abmachungen vielleicht nicht gebunden.“

☹ Jede Zuteilung ist ein Gleichgewicht, aber nicht strikt: Abweichung lohnt nicht, doch einer könnte Amok laufen. Fortsetzung auf Seite E260!

Das Gefangenendilemma / *prisoner's dilemma*

Dieses Spiel ist berühmt für seinen vermeintlich paradoxen Ausgang. Es wurde 1950 von Albert Tucker (1905–1995) vorgestellt und popularisiert.

Bonnie \ Clyde	schweigen	gestehen
schweigen	-1 / -1	-5 / 0
gestehen	0 / -5	-4 / -4

Als Funktion $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bedeutet das ausgeschrieben:

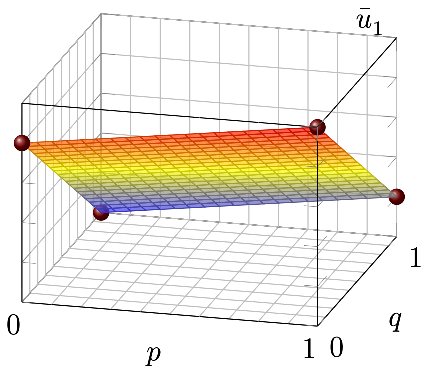
$$\begin{aligned} (\text{schweigen}, \text{schweigen}) &\mapsto (-1, -1) \\ (\text{schweigen}, \text{gestehen}) &\mapsto (-5, \ \ 0) \\ (\text{gestehen}, \text{schweigen}) &\mapsto (\ \ 0, -5) \\ (\text{gestehen}, \text{gestehen}) &\mapsto (-4, -4) \end{aligned}$$

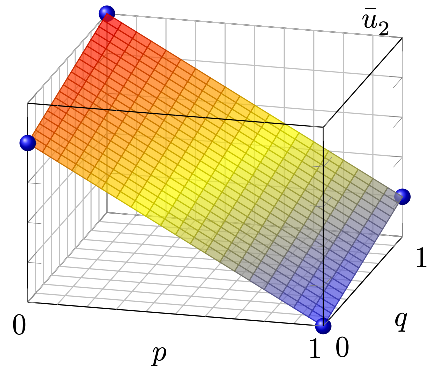
Nash–Gleichgewicht ist einzig das Strategiepaar (gestehen, gestehen).

Das Gefangenendilemma / *prisoner's dilemma*

Zwei Komplizen werden geschnappt und in getrennten Zellen verhört. Wenn beide schweigen, dann genügen die wenigen Beweise vor Gericht vermutlich zur Verurteilung für ein Jahr Gefängnis. Wenn einer gesteht, so wird ihm die Strafe erlassen, aber der andere wird zu fünf Jahren verurteilt. Gestehen beide, so drohen jedem vier Jahre Gefängnis.

Zur Illustration eine graphische Darstellung der beiden Auszahlungen: Bonnie wählt $p \in \{0, 1\}$ und Clyde wählt $q \in \{0, 1\}$.





Das Feiglingspiel / *chicken game*

Auch dieses berühmte Spiel wird oft in Konfliktsituationen beobachtet:

A \ B	einlenken	gradaus
einlenken	2 / 2	1 / 5
gradaus	5 / 1	-9 / -9

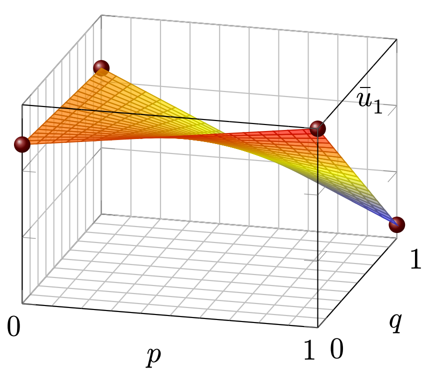
Hier gibt es zwei Nash–Gleichgewichte, aber diese sind asymmetrisch. Beide wollen geradaus. Wer gibt zuerst nach? Bricht die Symmetrie?

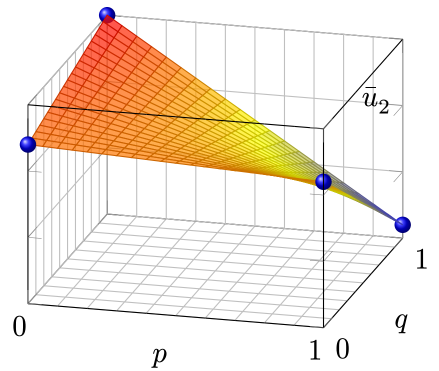
Natürlich ist (gradaus, gradaus) kein Gleichgewicht: Ein Spieler muss ausweichen, beide wissen es, doch keiner will sich als erster bewegen. Auch (einlenken, einlenken) ist hier kein Gleichgewicht: Jeder einzelne könnte dies ausnutzen und gradaus fahren. Die beiden Gleichgewichte sind asymmetrisch. Das macht die Koordinierung schwierig. „Soll doch der andere einlenken!", sagt jeder. Manchmal kommt es zum Crash.

Das Feiglingspiel / *chicken game*

Das Feiglingspiel beschreibt eine Mutprobe oder gegenseitige Drohung: Zwei Autos rasen aufeinander zu. Wer einlenkt, zeigt Angst und verliert. Weicht keiner aus, beweisen beide Spieler zwar Mut und Durchsetzung, aber durch den Zusammenprall entsteht allseits ein großer Schaden. Dieses Drohszenario findet sich häufig bei Verhandlungen.

Zur Illustration eine graphische Darstellung der beiden Auszahlungen: Spielerin A wählt $p \in \{0, 1\}$ und Spieler B wählt $q \in \{0, 1\}$.





Be wise, randomize!

The Simpsons, Season 4, Episode 19. `youtu.be/b0SoKWLkmLU`

Die mathematische Theorie hinter *Schere-Stein-Papier* ist recht leicht.
Die Psychologie von *Schere-Stein-Papier* ist eine eigene Wissenschaft!

Be wise, randomize!

Jedes Kind hat vermutlich das Spiel *Schere-Stein-Papier* gespielt, (engl. *Rock-Paper-Scissors*, kurz RPS, `en.wikipedia.org/wiki/Rock_paper_scissors`) und gelernt, möglichst unvorhersehbar eine der Aktionen zu wählen.

Lisa: *Look, there is only one reasonable way to settle this – Rock, Paper, Scissors!*
(Lisa: *Poor predictable Bart. Always takes Rock.*)
(Bart: *Good old Rock. Nothing beats that!*)
Bart: *Rock!* — Lisa: *Paper!* — Bart: *Dupe!*

Das erinnert uns an verschiedene Stufen der Rationalität, siehe A2A. Wie funktionieren Witz, Ironie, Humor? Durch gemeinsames Wissen.

In der Spieltheorie wollen wir den Spieler:innen manchmal ganz offiziell die Möglichkeit einräumen, zwischen ihren Aktionen zufällig zu wählen. In vielen Situationen können die Spieler:innen dies *außerhalb* des Spiels ohnehin selbst bewerkstelligen, etwa indem sie *heimlich* randomisieren. Wir integrieren diese Möglichkeit nun *offiziell* und *formal* in das Spiel und erweitern daher $u : \prod_i S_i \to \prod_i \mathbb{R}$ zum Spiel $\bar{u} : \prod_i \overline{S_i} \to \prod_i \mathbb{R}$.

Be wise, randomize!

Randomization as a service: Als zusätzliche Ressource stellen wir jeder Spieler:in kostenlos einen individuellen Zufallsgenerator zur Verfügung. Diesen interpretieren wir als Lostopf mit Losen der gewünschten Wkten. Jede Spieler:in kann einfach und verlässlich darauf zugreifen.

Garantierte Qualität: Jede Ziehung ist nicht nur völlig zufällig gemäß der geforderten Wkten, sondern auch unabhängig von allen anderen. Diese stillschweigende Annahme wird oft nicht explizit ausgesprochen, ist aber die wesentliche Grundlage aller Anwendungen und Rechnungen.

Typisches Beispiel: Viele Computerspiele stellen einen Zufallsgenerator zur Verfügung [*random number generator*, kurz RNG], etwa als fairen Münzwurf „D2“ oder allgemein als fairen $n$seitigen Würfel „Dn“. Siehe `en.wikipedia.org/wiki/Random_number_generation`.

Für nahezu jede Anwendung sind Zufallszahlen grundlegend, daher ist kostengünstige und hochwertige Randomisierung ein zentrales Thema. Donald Knuth widmet diesem wichtigen Problem daher ein halbes Buch: *Chapter 3 – Random Numbers* in *The Art of Computer Programming* (1997).

Be wise, randomize!

Beim Ausdenken von Zufallszahlen sind Menschen erstaunlich schlecht. Die meisten folgen einem bewussten oder unbewussten Muster, wohl kaum so extrem wie „predictable“ Bart, doch nicht wirklich zufällig. Das kann in Spielen ausgenutzt werden, genau wie Lisa dies tut.

Spielt Bart bei *Schere-Stein-Papier* zufällig, das heißt gleichverteilt und unabhängig, so kann Lisa nachweislich keinen Vorteil daraus ziehen. Viele menschliche Spieler:innen können jedoch überlistet werden, durch psychologische Effekte oder statistische Muster.

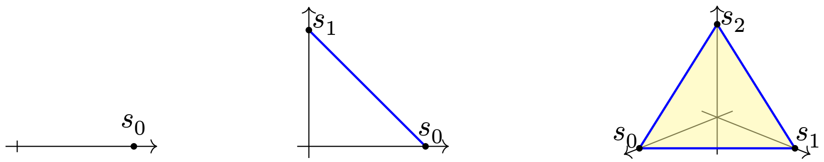
> *Contrary to what you might think, RPS is not simply a game of luck or chance. [...] Humans, try as they might, are terrible at trying to be random, in fact often humans in trying to approximate randomness become quite predictable. So knowing that there is always something motivating your opponent's actions, there are a couple of tricks and techniques that you can use to tip the balance in your favour.*
> Graham Walker, `www.worldrps.com/?id=256&Itemid=37`
> *The Official Rock Paper Scissors Strategy Guide*

Fortsetzung von reinen auf gemischte Strategien

Bei *Schere-Stein-Papier* ist es nachteilig, sich auf eine der drei **reinen Strategien** festzulegen. Optimal ist eine zufällige, gleichverteilte Wahl:

$$s = \frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Stein} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier}$$

Wir schreiben diese **gemischte Strategie** $s = \sum_{k=0}^{\ell} p_k s_k$ bequem und übersichtlich als Konvexkombination der reinen Strategien $s_0, \dots, s_\ell$. Mit Wkt $p_k \in [0,1]$ wird Strategie $s_k \in S_i$ ausgewählt. Geometrisch:



🙂 Eine gute Notation ist zugleich präzise und bequem, notiert alle wesentlichen Daten, doch meidet übermäßige Redundanz, erleichtert das Lesen und das Rechnen und hilft, Missverständnisse zu vermeiden.

Fortsetzung von reinen auf gemischte Strategien

Definition E1c: gemischte Strategie, Borel 1921

Sei $S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell\}$ die (endliche) Strategiemenge der Spieler:in i. Eine **gemischte Strategie** ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf S_i.

$$s_i = p_0 \cdot s_i^0 + p_1 \cdot s_i^1 + \dots + p_\ell \cdot s_i^\ell$$

mit Wahrscheinlichkeiten $p_0, p_1, \dots, p_\ell \ge 0$ und $p_0 + p_1 + \dots + p_\ell = 1$. Konvexkombination erzeugt die **Menge aller gemischten Strategien**

$$\left\{ s_i = \sum_{k=0}^{\ell} p_k s_i^k \,\middle|\, p_k \ge 0,\ \sum_{k=0}^{\ell} p_k = 1 \right\} =: [s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell] = [S_i] = \bar{S}_i$$

Die Nutzenfunktion $u : S = S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ setzen wir fort, von reinen auf gemischte Strategien, zu $\bar{u} : \bar{S} = \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \mathbb{R}^n$ mit $\bar{u}|_S = u|_S$, **linear in jeder Koordinate**, entsprechend dem **Erwartungswert**:

$$\bar{u}\left(\dots, \sum_{k=0}^{\ell} p_k s_i^k, \dots\right) = \sum_{k=0}^{\ell} p_k \bar{u}(\dots, s_i^k, \dots)$$

Wir nennen $\bar{u}$ die affine **Fortsetzung** von u auf gemischte Strategien. Dies ist eine n–lineare Abbildung, eingeschränkt auf $\bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$.

Fortsetzung von reinen auf gemischte Strategien

Wir nennen S_i die Menge der **reinen Strategien** für Spieler i und entsprechend $[S_i] \supseteq S_i$ die Menge seiner **gemischten Strategien**. Wir betrachten hier S_i als Basis des $\mathbb{R}$–Vektorraums $\mathbb{R}S_i$ und schreiben Wahrscheinlichkeitsverteilungen als Konvexkombination $s_i = \sum_k p_k s_i^k$.

Der **Träger** von $s_i \in [S_i]$ ist die Menge $\operatorname{supp}(s) := \{ s_i^k \mid p_k > 0 \} \subseteq S_i$. Demnach ist die gemischte Strategie $s_i \in [S_i]$ genau dann rein, $s_i \in S_i$, wenn der Träger einpunktig ist, also $\operatorname{supp}(s_i) = \{s_i\} \subseteq S_i$. Andernfalls ist s_i **echt gemischt**, oder im Falle $\operatorname{supp}(s_i) = S_i$ sogar **voll gemischt**.

Geometrisch ist s_i eine Konvexkombination der Punkte $s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell$. Somit ist $[S_i]$ die konvexe Hülle der Eckpunkte $s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell$, also eine Strecke ($\ell = 1$) oder ein Dreieck ($\ell = 2$) oder ein Tetraeder ($\ell = 3$) oder allgemein ein ℓ–dimensionales **Simplex** mit $\ell + 1$ Eckpunkten.

🙂 Wir benötigen eine gute Notation, möglichst knapp und doch präzise. Unsere geometrische Sichtweise nutzt Analogien und hat sich bewährt. Das ist in erster Linie nicht nur eine mathematische Frage, sondern vor allem eine der Klarheit, der Bequemlichkeit und der jeweiligen Tradition.

Fortsetzung von reinen auf gemischte Strategien

Dual hierzu können wir s_i als Abbildung $p : S_i \to \mathbb{R} : s_i^k \mapsto p_k$ betrachten, mit Wahrscheinlichkeiten $p_0, p_1, \dots, p_\ell \ge 0$ und $p_0 + p_1 + \dots + p_\ell = 1$. Interpretation: Die Strategie $s_i^k \in S_i$ wird mit Wkt $p_k \in [0,1]$ ausgewählt. Das definiert das zugehörige WMaß $P : \mathfrak{P}(S_i) \to [0,1] : A \mapsto \sum_{s_i^k \in A} p_k$.

Für endliche (oder allgemeiner: diskrete) Wahrscheinlichkeitsräume sind alle drei Beschreibungen äquivalent: Konvexkombination, Punktmassen, oder WMaß. In jedem Falle genügt es, Punktmassen zu summieren.

Für allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume $(S, \mathscr{A}, P)$ nutzen wir später dankend die bewährten Werkzeuge der Maß- und Integrationstheorie. Diese technische Vervollkommnung ist hier zunächst noch nicht nötig.

Die Fortsetzung von den reinen auf die gemischten Strategien haben wir in den vorigen einfachen Spielen bereits durch Graphiken illustriert. Die folgenden Beispiele zeigen dies nochmal ausführlich.

Übung: Sei $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$ ein Nullsummenspiel, also $u_1 + u_2 = 0$. Ist dann die affine Fortsetzung $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \to \mathbb{R}^2$ ein Nullsummenspiel?

Bimatrix-Schreibweise für Zwei-Personen-Spiele

Wir betrachten ein Zwei-Personen-Spiel in strategischer Normalform

$$u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (s_1, s_2) \mapsto \big(u_1(s_1, s_2),\ u_2(s_1, s_2) \big)$$

mit Strategiemengen $S_1 = \{s_1^0, s_1^1, \dots, s_1^m\}$ und $S_2 = \{s_2^0, s_2^1, \dots, s_2^n\}$.
Die Auszahlungen (u_1, u_2) entsprechen zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{S_1 \times S_2}$.

$$s_1 = \sum_{i=0}^{m} x_i s_1^i \in \bar{S}_1, \quad x \in \Delta^m = \left\{ \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1} \,\middle|\, x_i \ge 0,\ \sum_{i=0}^{m} x_i = 1 \right\}$$

$$s_2 = \sum_{j=0}^{n} y_j s_2^j \in \bar{S}_2, \quad y \in \Delta^n = \left\{ \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, y_j \ge 0,\ \sum_{j=0}^{n} y_j = 1 \right\}$$

$$\bar{u}_1(s_1, s_2) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_i\, y_j\, \underbrace{u_1(s_1^i, s_2^j)}_{=:\, a_{ij}} = x^\top A\, y, \qquad A \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1)}$$

$$\bar{u}_2(s_1, s_2) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_i\, y_j\, \underbrace{u_2(s_1^i, s_2^j)}_{=:\, b_{ij}} = x^\top B\, y, \qquad B \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1)}$$

Kurzschreibweise $\tilde{u} : \Delta^m \times \Delta^n \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \big(x^\top A\, y,\ x^\top B\, y \big)$.
Das erklärt, warum wir im Folgenden mit Quadriken zu tun haben!

Bimatrix-Schreibweise für Zwei-Personen-Spiele

Die Grundideen der Spieltheorie sind bis hierher noch recht einfach, bedürfen aber bereits präziser Formulierungen und geeigneter Notation. Diese soll klar sein, zudem einfach und bequem, andernfalls verkommen unsere Definitionen und Rechnungen leicht zu heillosen Indexschlachten.

Für **endliche reelle Zwei-Personen-Spiele** kennen Sie Matrizen als besonders bequeme und effiziente Notation aus der Linearen Algebra.
Die Menge $\Delta^m = [e_0, e_1, \dots, e_m] \subset \mathbb{R}^{m+1}$ ist der **Standardsimplex**, also die konvexe Hülle der Standardbasis $e_0, e_1, \dots, e_m \in \mathbb{R}^{m+1}$.
Diese **baryzentrischen Koordinaten** nutzen wir zur Parametrisierung für jeden Simplex mit beliebiger Eckenmenge $S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^m\}$ vermöge $h : \Delta^m \to [S_i] : (x_0, x_1, \dots, x_m) \mapsto x_0 s_i^0 + x_1 s_i^1 + \dots + x_m s_i^m$.
Wir erhalten so $\tilde{u} = \bar{u} \circ (h_1 \times \dots \times h_n) : \Delta^{m_1} \times \dots \times \Delta^{m_n} \to \mathbb{R}^n$.

Simplizes sind geometrisch-topologisch besonders einfache Räume, daher auch der Name. Sie sind konvex und kompakt und homöomorph zum Ball $\mathbb{D}^m$ gleicher Dimension (E1F). Genau diese Eigenschaften werden wir im folgenden Existenzsatz von Nash (E1E) ausnutzen!

Kriterium für gemischte Nash–Gleichgewichte

Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel, wie oben erklärt, und $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \mathbb{R}^n$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien. Der Strategievektor $s \in \bar{S}$ ist im Gleichgewicht für Spieler i, wenn gilt:

$$\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) = \max\nolimits_{a \in \bar{S}_i} \ \bar{u}_i(a; s_{-i})$$

Lemma E1D: Kriterium für gemischte Nash–Gleichgewichte

Dank Linearität von $\bar{u}$ wird das Maximum in den Ecken angenommen:

$$\max\nolimits_{a \in \bar{S}_i} \ \bar{u}_i(a; s_{-i}) = \max\nolimits_{e \in S_i} \ \bar{u}_i(e; s_{-i})$$

Genau dann ist s für Spieler i im Gleichgewicht, $s \in \mathrm{NE}_i(\bar{u})$, wenn gilt:

$$\operatorname{supp}(s_i) \subseteq \operatorname{Arg\,max}\nolimits_{e \in S_i} \ \bar{u}_i(e; s_{-i})$$

Wir erhalten somit ein einfaches Kriterium:

$$\mathrm{NE}_i(\bar{u}) = \big\{ s \in \bar{S} \,\big|\, \operatorname{supp}(s_i) \subseteq \operatorname{Arg\,max}\nolimits_{e \in S_i} \ \bar{u}_i(e; s_{-i}) \big\}$$

Gilt dies für alle i, so ist s ein Nash–Gleichgewicht: $\mathrm{NE}(\bar{u}) := \bigcap_i \mathrm{NE}_i(\bar{u})$.

Kriterium für gemischte Nash–Gleichgewichte

☺ Dieses einfache Kriterium ist notwendig und hinreichend, also eine Charakterisierung aller Nash–Gleichgewichte, dank Linearität von $\bar{u}$.

Gegeben sei $s \in \bar{S}$. Das Kriterium für $s \in \mathrm{NE}(\bar{u})$ ist einfach und direkt: Es genügt, s einzusetzen und endlich viele Ungleichungen zu prüfen! Für jeden Spieler i prüfen wir folgende Bedingung: Jede reine Strategie im Träger von s_i ist eine beste Antwort auf die Gegenstrategie s_{-i}.

Ausführlich: Das Maximum $\max_{e \in S_i} \ \bar{u}_i(e; s_{-i})$ finden wir leicht, da die reine Strategiemenge S_i endlich ist. Im selben Durchgang konstruieren wir die Teilmenge $M_i = \operatorname{Arg\,max}_{e \in S_i} \ \bar{u}_i(e; s_{-i}) \subseteq S_i$ aller Maximierer. Es bleibt schließlich nur noch $\operatorname{supp}(s_i) \subseteq M_i$ zu prüfen.

⚠ Das sagt uns noch nicht, wie wir Nash–Gleichgewichte finden! Nash–Gleichgewichte zu prüfen ist leicht, eins/alle zu finden ist schwer.

⚠ Achtung: „supp“ steht hier für den **Träger** [engl./frz. *support*], nicht zu verwechseln mit dem **Supremum** „sup“, beide sind völlig verschieden! Auch aus dem Kontext ist es klar, aber man muss genau hinschauen.

Beispiel: Bach oder Strawinsky?

Ein Paar möchte ein Konzert besuchen: Alice mag lieber Strawinsky, Bob mag lieber Bach. Gar kein Konzert wäre für beide enttäuschend.

A \ B	Bach	Strawinsky
Bach	1 / 2	0 / 0
Strawinsky	0 / 0	2 / 1

In diesem Spiel gibt es genau zwei reine Nash–Gleichgewichte: Einerseits (Bach, Bach) und andererseits (Strawinsky, Strawinsky).

Die Ungleichgewichte (Bach, Strawinsky) und (Strawinsky, Bach) wären nicht rational, sie werden erwartungsgemäß nicht gespielt, oder nur selten, vorübergehend als Ausrutscher, und dann alsbald korrigiert.

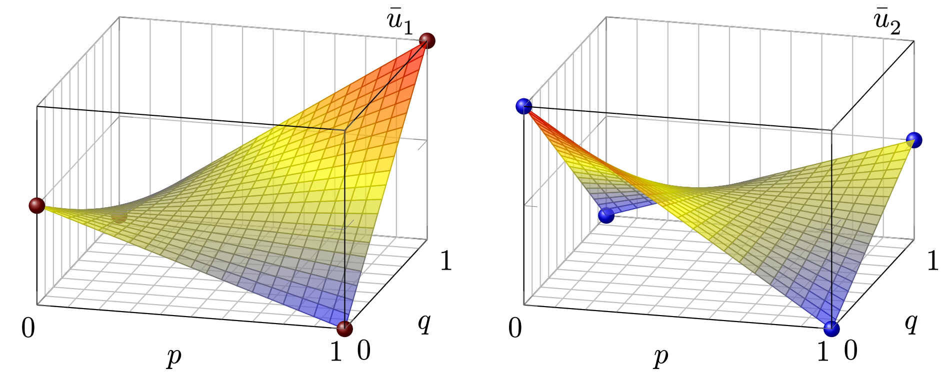
Hingegen können beide Nash–Gleichgewichte gleichermaßen gespielt werden, hier ist keines bevorzugt. Das Spiel ist hierin symmetrisch.

Beispiel: Bach oder Strawinsky?

Wir denken an folgendes Szenario: Alice und Bob haben sich vage für das Bach–Konzert verabredet. Sie können nun nicht mehr miteinander kommunizieren, doch jeder muss individuell seine Karte kaufen.

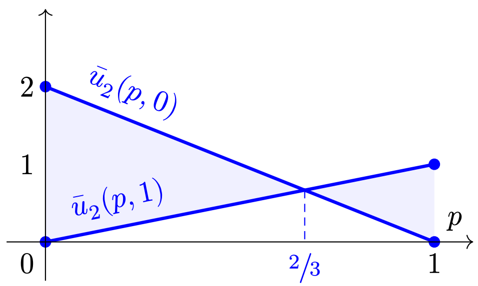
Bob will nicht wechseln, er ist wunschlos glücklich. Alice möchte zwar lieber in das Strawinsky–Konzert, aber alleine wird sie nicht wechseln. (Die umgekehrte Situation ist natürlich genauso gut vorstellbar.)

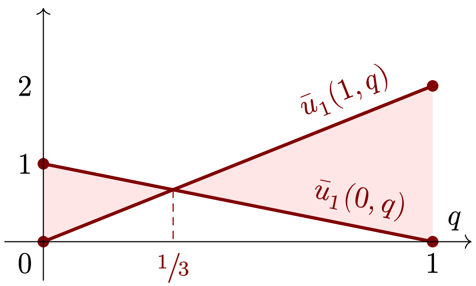
Sobald beide eine Einigung erzielt haben, sind sie daran gebunden!

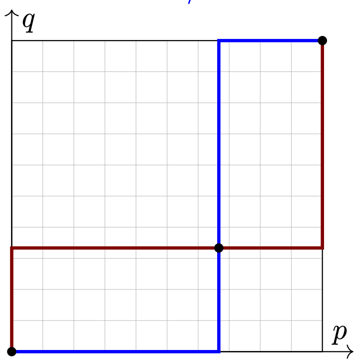


Beispiel: Bach oder Strawinsky?

A \ B	0	1
0	1 / 2	0 / 0
1	0 / 0	2 / 1







Beispiel: Bach oder Strawinsky?

Die beiden reinen Strategien bezeichnen wir hier mit $S_1 = S_2 = \{0,1\}$. Als Erweiterung zu gemischten Strategien nutzen wir dann die beiden Einheitsintervalle $[S_1] = [S_2] = [0,1]$ und erhalten das Bimatrix-Spiel

$$\bar u : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2 : (p,q) \mapsto \big(\, \bar u_1(p,q),\ \bar u_2(p,q) \,\big).$$

Die Graphik für $\bar u_1(0,q)$ und $\bar u_1(1,q)$ zeigt die Fläche $\bar u_1$ von der Seite. Für jede von Bobs Strategien $q \in [0,1]$ liest Alice ihre beste Antwort ab: $p = 0$ für $q < 1/3$ und $p = 1$ für $q > 1/3$ sowie $p \in [0,1]$ für $q = 1/3$.

Die Graphik für $\bar u_2(p,0)$ und $\bar u_2(p,1)$ zeigt die Fläche $\bar u_2$ von der Seite. Für jede von Alice' Strategien $p \in [0,1]$ liest Bob seine beste Antwort ab: $q = 0$ für $p < 2/3$ und $q = 1$ für $p > 2/3$ sowie $q \in [0,1]$ für $p = 2/3$.

Im Diagramm unten rechts tragen wir beide Reaktions-„Funktionen“ ein:

$$\mathrm{NE}_1(\bar u) = \big\{\, (p,q) \in [0,1]^2 \,\big|\, p \text{ ist eine beste Antwort auf } q \,\big\}$$
$$\mathrm{NE}_2(\bar u) = \big\{\, (p,q) \in [0,1]^2 \,\big|\, q \text{ ist eine beste Antwort auf } p \,\big\}$$

Genauer gesagt sind dies eigentlich nur Relationen / Korrespondenzen. Ihre Schnittpunkte sind die Nash–Gleichgewichte: $\mathrm{NE} = \mathrm{NE}_1 \cap \mathrm{NE}_2$.

Beispiel: bleiben oder gehen?

Sie hören einen schrecklich langweiligen Vortrag zur Spieltheorie und möchten lieber gehen, aber alleine aufzustehen wäre peinlich. Wenn Sie zu zweit aufstehen und gehen, dann wäre alles gut. Leider können Sie sich unter dem strengen Blick des Vortragenden nicht absprechen.

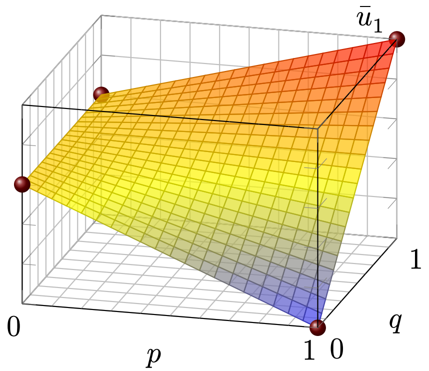
A \ B	bleiben	gehen
bleiben	-2, -2	-2, -5
gehen	-5, -2	0, 0

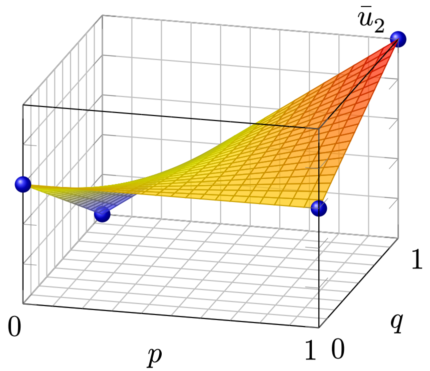
In diesem Spiel gibt es genau zwei reine Nash–Gleichgewichte: Einerseits (bleiben, bleiben) und andererseits (gehen, gehen).

Ihre gute Erziehung versetzt beide Spieler zunächst in die Ausgangslage (bleiben, bleiben). Beide möchten eigentlich lieber gehen, aber ohne Absprache wird keiner den ersten Zug wagen. *Teile und herrsche!*

Beispiel: bleiben oder gehen?

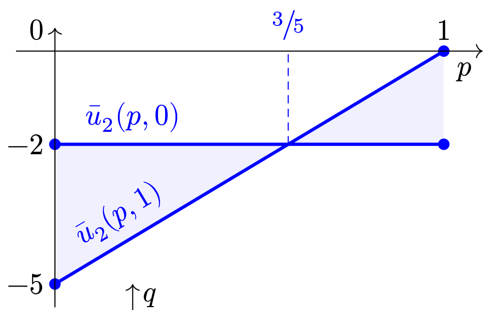
Alternatives Verhalten, je nach Tradition: Als erfahrene Studierende haben Sie zahllose schlechte Vorträge erlitten und sich zu wehren gelernt. Sie wissen: Die Höflichkeit gebietet, zunächst zehn Minuten zu bleiben; wenn der Vortrag grottenschlecht ist, sollte man sofort danach gehen. Sie wissen das, und Sie wissen, dass alle anderen es auch wissen. In diesem Falle ersetzt das gemeinsame Wissen (*common knowledge*) die explizite Absprache: Nach genau zehn Minuten (gefühlte Ewigkeit) stehen alle gemeinsam auf und gehen. *Einigkeit macht stark!*

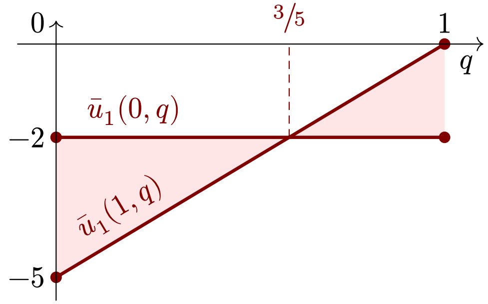


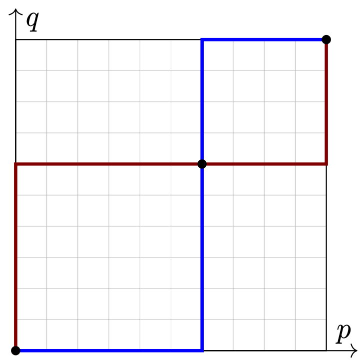


Beispiel: bleiben oder gehen?

A \ B	0	1
0	-2, -2	-2, -5
1	-5, -2	0, 0







Beispiel: bleiben oder gehen?

Die Graphik für $\bar u_1(0,q)$ und $\bar u_1(1,q)$ zeigt die Fläche $\bar u_1$ von der Seite. Für jede von Bobs Strategien $q \in [0,1]$ liest Alice ihre beste Antwort ab: $p = 0$ für $q < 3/5$ und $p = 1$ für $q > 3/5$ sowie $p \in [0,1]$ für $q = 3/5$.

Die Graphik für $\bar u_2(p,0)$ und $\bar u_2(p,1)$ zeigt die Fläche $\bar u_2$ von der Seite. Für jede von Alice' Strategien $p \in [0,1]$ liest Bob seine beste Antwort ab: $q = 0$ für $p < 3/5$ und $q = 1$ für $p > 3/5$ sowie $q \in [0,1]$ für $p = 3/5$.

Im Diagramm unten rechts tragen wir beide Reaktions-„Funktionen" ein:

$$\mathrm{NE}_1(\bar u) = \{\,(p,q) \in [0,1]^2 \mid p \text{ ist eine beste Antwort auf } q\,\}$$
$$\mathrm{NE}_2(\bar u) = \{\,(p,q) \in [0,1]^2 \mid q \text{ ist eine beste Antwort auf } p\,\}$$

Ihre Schnittpunkte sind die Nash–Gleichgewichte: $\mathrm{NE} = \mathrm{NE}_1 \cap \mathrm{NE}_2$.

🙂 So können Sie graphisch jedes 2×2–Spiel lösen, ebenso $2 \times n$.

🙂 Die reinen Nash–Gleichgewichte sind meist recht offensichtlich. Für die gemischten Gleichgewichte müssen Sie sorgfältig rechnen.

🙂 Beachten Sie, wie die Symmetrie der Spiele in die Lösung eingeht. Diese Beobachtung illustriert ein allgemeines Prinzip, siehe Satz E2o.

Beispiel: Matching Pennies

Alice und Bob legen jeder verdeckt eine Münze auf den Tisch, dann wird aufgedeckt: Bei Gleichheit gewinnt Bob, bei Ungleichheit gewinnt Alice. (Das ähnelt dem Spiel *Schere-Stein-Papier*, ist aber noch simpler.)

A \ B	Kopf	Zahl
Kopf	$+1$ / -1	-1 / $+1$
Zahl	-1 / $+1$	$+1$ / -1

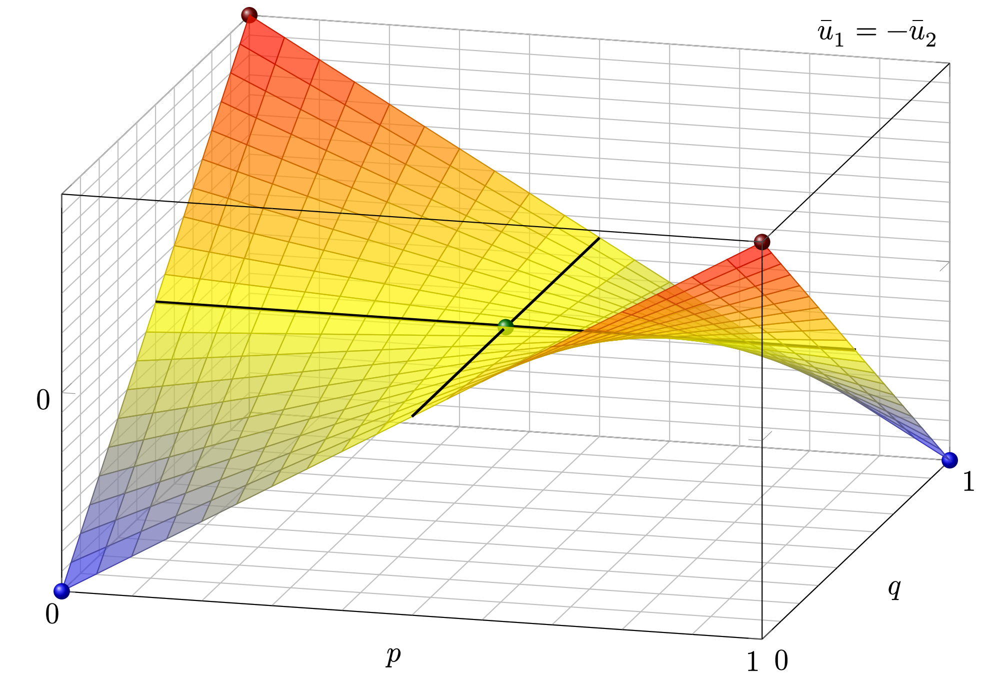
In diesem Spiel gibt es kein reines Nash–Gleichgewicht!
Erweiterung: Beide Spieler dürfen nun gemischte Strategien wählen!

Spieler A: $[0,1] \ni p \quad \mapsto \quad s_p = (1-p)\cdot \text{Kopf} + p \cdot \text{Zahl}$

Spieler B: $[0,1] \ni q \quad \mapsto \quad s_q = (1-q)\cdot \text{Kopf} + q \cdot \text{Zahl}$

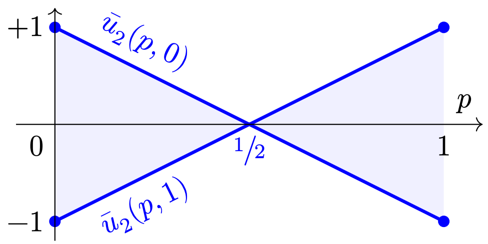
Die Nutzenfunktionen $u_1 = -u_2$ sind bilinear, ihr Graph ist eine Quadrik.

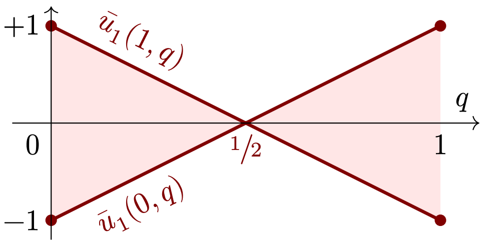
Beispiel: Matching Pennies

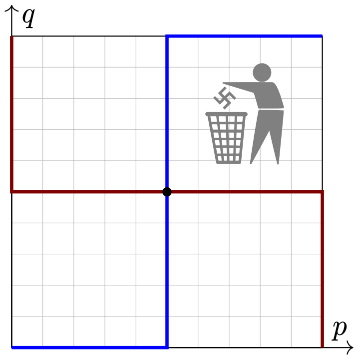


Beispiel: Matching Pennies

A \ B	0	1
0	$+1$ / -1	-1 / $+1$
1	-1 / $+1$	$+1$ / -1







Beispiel: Matching Pennies

Wir betrachten hier ein Nullsummenspiel, denn es gilt $u_1 + u_2 = 0$.

Für jede von Bobs Strategien $q \in [0,1]$ liest Alice ihre beste Antwort ab: $p = 1$ für $q < 1/2$ und $p = 0$ für $q > 1/2$ sowie $p \in [0,1]$ für $q = 1/2$.

Für jede von Alice’ Strategien $p \in [0,1]$ liest Bob seine beste Antwort ab: $q = 0$ für $p < 1/2$ und $q = 1$ für $p > 1/2$ sowie $q \in [0,1]$ für $p = 1/2$.

🙂 Bob trachtet nach Gleichheit, Alice hingegen wünscht Ungleichheit. Das überträgt sich von reinen auf gemischte Strategien, wie gezeigt.

Im Diagramm unten rechts tragen wir beide Reaktions-„Funktionen“ ein und lesen daran das einzige, hier gemischte Nash–Gleichgewicht ab.

Es ist unglücklich, dass in diesem Beispiel ein Hakenkreuz entsteht, aber diese geometrische Figur tritt hier nun einmal unvermeidlich auf. Nach der Vorlesung wird es ordnungsgemäß entsorgt. (siehe §86 StGB Verbreiten von Propagandamitteln verfassungswidriger Organisationen)

Das ist nur ein Miniatur(bei)spiel, aber durchaus häufig zu beobachten, etwa im Sport, wenn Angreifer und Verteidiger ihre Strategien wählen: Elfmeter im Fußball, koordinierte Spielzüge in allen Teamsportarten, etc.

Anwendung: Basketball Endgame nach Ruminski

hawk
@hawktherapper

if both basketball teams just worked together they could score so many more points

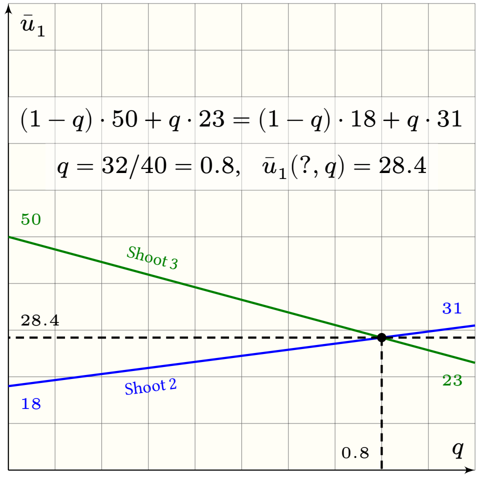
13:59 - 20. Apr. 2014

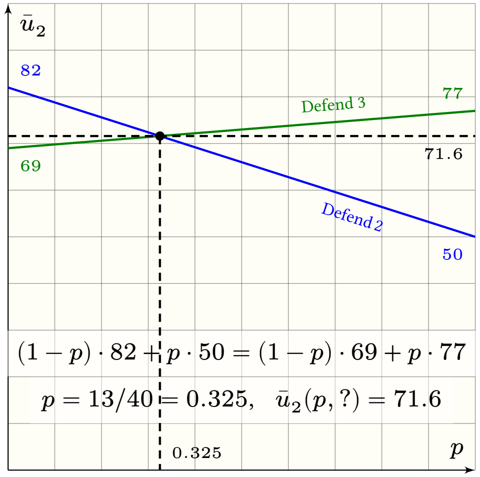
Ist das absurd? Oh, keineswegs! Auch Absprachen sind möglich, siehe Schande von Gijón A106.

In den letzten 20 Sekunden liegt das ballführende Team 2 Punkte hinten. Der Coach nimmt eine Auszeit und legt die Strategie für sein Team fest. Sie spielen ihre Zeit zu Ende und lancieren noch genau einen Versuch. Riskant: 3 Punkte werfen und damit sofort gewinnen. Sicher: 2 Punkte werfen und die Verlängerung erzwingen, mit 50-50-Gewinnchance.

Erfolgstatistik (gerundet):	A \ B	Defend 2	Defend 3
bedrängt 36%, offen 62%	Shoot 2	18 / 82	31 / 69
offen 50%, bedrängt 23%	Shoot 3	50 / 50	23 / 77

Anwendung: Basketball Endgame nach Ruminski





Defend 2 Defend 3 Shoot 2 Shoot 3

Verteidigt Team B mehr als 80% auf 3er, sollte Team A auf 2er spielen. Verteidigt B hingegen weniger als 80% auf 3er, sollte A auf 3er spielen.

Spielt Team A mehr als 32.5% auf 3er, sollte Team B auf 3er verteidigen. Spielt A hingegen weniger als 32.5% auf 3er, sollte B auf 2er verteidigen.

Anwendung: Basketball Endgame nach Ruminski

Diese Endspielanalyse ist stark vereinfacht, aber doch realistisch genug. Sie trifft den Kern des Problems und wird tatsächlich ernsthaft diskutiert, siehe `mindyourdecisions.com/blog/2012/06/19`, sowie `youtu.be/yoLgSWA7n6g`.

Naiv scheint es für das angreifende Team A besser, auf 3er zu spielen, doch die Erfolgschancen hängen stark von Team Bs Verteidigung ab.

Spielte Team A allzu oft und damit vorhersehbar auf den 3er, so würde eine entsprechende 3er-Abwehr die Erfolgschancen stark reduzieren. Spielte Team A hingegen allzu oft und damit vorhersehbar auf den 2er, so würde eine entsprechende 2er-Abwehr die Chancen reduzieren. Die Gleichgewichtsstrategie $p = 32.5\%$ für Team A lässt idealerweise das Team B im Ungewissen, ob sie 2er oder 3er verteidigen sollen.

Für das verteidigende Team B scheint vorrangig, den 3er zu verhindern, doch damit geben sie Team A mehr Raum unterm Korb für den 2er. Verteidigt Team B zu oft 2er, so geben sie A zu viel Raum für 3er. Die Gleichgewichtsstrategie $q = 80\%$ für Team B lässt idealerweise das Team A im Ungewissen, ob sie auf 2er oder 3er spielen sollen.

Anwendung: Basketball Endgame nach Ruminski

Die Beschreibung des Endspiels in Normalform scheint hier angebracht: Beide Coaches (bzw. Teams) entscheiden in der letzten Auszeit simultan und unabhängig über die zu spielende Strategie. Jedes Team wird sich an diese Absprache halten, kein Spieler sollte egoistisch improvisieren.

Spiele in Normalform, speziell der einfachste Fall einer 2×2–Bimatrix, sind zugegeben extrem vereinfachte Lehrbeispiele. Doch sie illustrieren bereits eine erstaunliche Vielfalt an Phänomenen und erklären typische Muster der Spieltheorie, manchmal auch in ihren realen Anwendungen.

Das Basketball-Endspiel kommt oft genug vor, um interessant zu sein. Die vereinfachte Situation reduziert die relevanten Strategien auf zwei. Hierzu liegen im Basketball umfangreiche Statistiken vor, sodass wir realistische Daten einsetzen können und nicht mutmaßen müssen.

Unser Ergebnis ist intuitiv plausibel. Die Rechnung gibt zudem eine recht präzise Handlungsanweisung an den Trainerstab und dann an das Team. In den letzten Jahren hat die mathematische Analyse im Basketball stark an Akzeptanz gewonnen. Sie kann den Unterschied machen.

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

☹ *Schere-Stein-Papier* hat kein Gleichgewicht in reinen Strategien.
☺ Hingegen gibt es ein Gleichgewicht (s_1, s_2) in gemischten Strategien:

$$s_1 = s_2 = \frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Stein} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier}$$

Gleiches gilt für Matching Pennies und das Basketball Endgame!
In der Fortsetzung auf gemischte Strategien haben die Spieler mehr Möglichkeiten. Wir würden hoffen, so auch Gleichgewichte zu finden.
Der Satz von Nash besagt genau das und garantiert Gleichgewichte:

Satz E1E: Existenzsatz für Gleichgewichte, John Nash 1950

Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel, wie oben erklärt, und $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \mathbb{R}^n$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien. Dann besitzt das Spiel $\bar{u}$ mindestens ein Nash–Gleichgewicht: $\mathrm{NE}(\bar{u}) \neq \emptyset$.

☺ Nashs Einsicht und Satz waren ein Wendepunkt in der Spieltheorie.
☺ Für jedes endliche Spiel ist vernünftiges Verhalten immer möglich.
☺ Allgemeine Strukturaussage, darauf können wir weiter aufbauen.

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

Der Existenzsatz von Nash erfüllt zwei wesentliche Aufgaben:

(1) Der Satz garantiert, dass jedes endliche Spiel vernünftiges Verhalten ermöglicht. In jedem Einzelfall kann man dies (leicht) überprüfen und (mühsam) lösen. Die allgemeine Aussage ist bequem und beruhigend: Wir können durch den Satz Rechenzeit sparen, wo sie nicht nötig ist.

Die *Existenz* einer Lösung ist oft der entscheidende erste Schritt. Wir können sicher sein, dass unsere Suche erfolgreich sein wird. Unsere Mühe wird belohnt. Unsere Hoffnung wird erfüllt.

(2) Darauf aufbauend können wir allgemeine Aussagen ableiten. Ein sehr prominentes Beispiel ist von Neumanns *Minimax-Satz* E2D. Dieser heißt auch der *Hauptsatz* für Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele, und von Neumann bewies ihn zuvor (mühsam) auf anderen Wegen.

Manchmal genügt uns zu wissen, dass Gleichgewichte existieren. Dies gelingt *ohne* jedesmal mühsam explizit rechnen zu müssen. Wir müssen nicht befürchten, über die leere Menge zu sprechen: Wir haben eine gemeinsame *Strukturaussage* für all diese Spiele!

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

Nashs Existenzsatz besticht durch Eleganz und Allgemeinheit. Dieses Ergebnis ist ein grundlegender erster Schritt der Theorie, er ist gewissermaßen der Ausgangspunkt der modernen Spieltheorie. Für diese und weitere Arbeiten bekam Nash 1994 den Nobelpreis, genauer: Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften.

Umgekehrt gibt es natürlich viele Situationen, in denen wir schließlich explizit rechnen wollen oder müssen. Nashs Satz ist zunächst eine reine Existenzaussage und für die konkrete Rechnung leider wenig hilfreich. Immerhin garantiert der Satz, dass sich unsere Mühe lohnen wird!

Wir wollen rechnen! Für $2 \times n$–Spiele gelingt dies wie in E4 erklärt. Speziell für Nullsummenspiele werden wir weitere Techniken entwickeln: Von Neumanns Hauptsatz E2D charakterisiert Nash–Gleichgewichte als Min-Maximierer und Max-Minimierer. Wir haben nun Werkzeuge.

Die explizite Berechnung ist ebenfalls ein extrem spannendes Thema: Es mündet in die Lineare Optimierung, alias Lineare Programmierung, und wird uns viel Freude bereiten. Das alles ist schöne Mathematik!

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

Mathematiker John von Neumann und Wirtschaftswissenschaftler Oskar Morgenstern veröffentlichten 1944 ihr bahnbrechendes Buch *Theory of Games and Economic Behavior.* Damit legten sie ein solides Fundament der Spieltheorie, die in den Folgejahren erblühte. Speziell die Analyse von Nullsummenspielen baut auf von Neumanns Minimax-Satz E2D.

> *I thought there was nothing worth publishing until the Minimax Theorem was proved. As far as I can see, there could be no theory of games without that theorem.* (John von Neumann, 1953)

Das ist ein wichtiger Spezialfall, aber bei weitem noch nicht ausreichend, denn die meisten realen Spiele haben nun mal nicht konstante Summe. Für den allgemeinen Fall fehlten daher zunächst Begriffe und Werkzeuge. Das änderte sich mit Nashs allgemeiner Theorie der Gleichgewichte.

Definition und Existenz von Nash–Gleichgewichten stammen aus Nashs Dissertation *Non-cooperative Games* von 1950. Dieses Konzept geht weit über Nullsummenspiele hinaus und ist bis heute grundlegend für die erfolgreiche, geradezu universelle Weiterentwicklung der Spieltheorie.

Nash went to see von Neumann a few days after he passed his generals. He wanted, he had told the secretary cockily, to discuss an idea that might be of interest to Professor von Neumann. It was a rather audacious thing for a graduate student to do. […] But it was typical of Nash, who had gone to see Einstein the year before with the germ of an idea. […]

[Neumann] listened carefully, with his head cocked slightly to one side and his fingers tapping. Nash started to describe the proof he had in mind for an equilibrium in games of more than two players. But before he had gotten out more than a few disjointed sentences, von Neumann interrupted, jumped ahead to the yet unstated conclusion of Nash's argument, and said abruptly, "That's trivial, you know. That's just a fixed point theorem."

It is not altogether surprising that the two geniuses should clash. They came at game theory from two opposing views of the way people interact. […] Von Neumann's rejection of Nash's bid for attention and approval must have hurt, however, and one guesses that it was even more painful than Einstein's erlier but kindlier dismissal. [Nash] never approached von Neumann again.

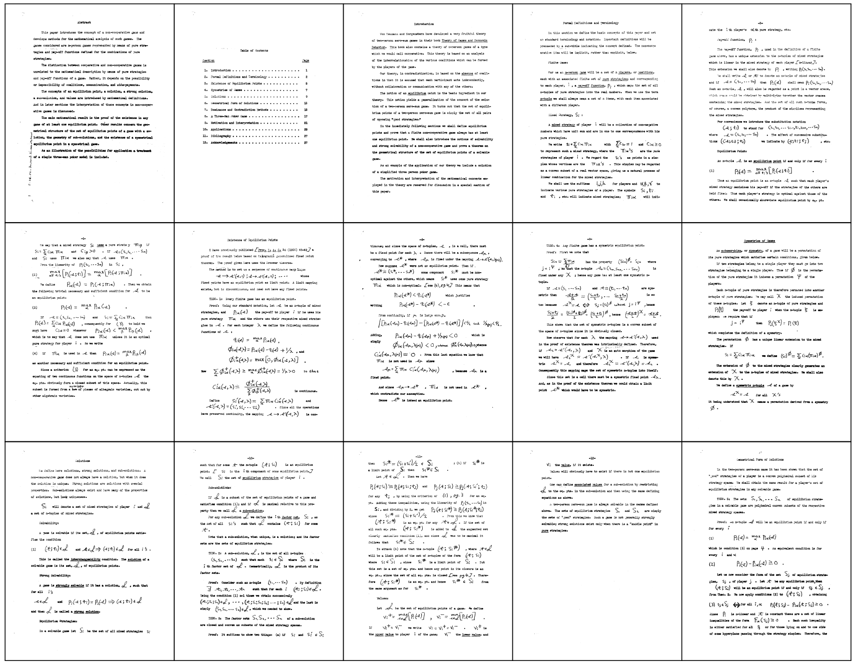
Sylvia Nasar: *A Beautiful Mind* (1998) p. 93

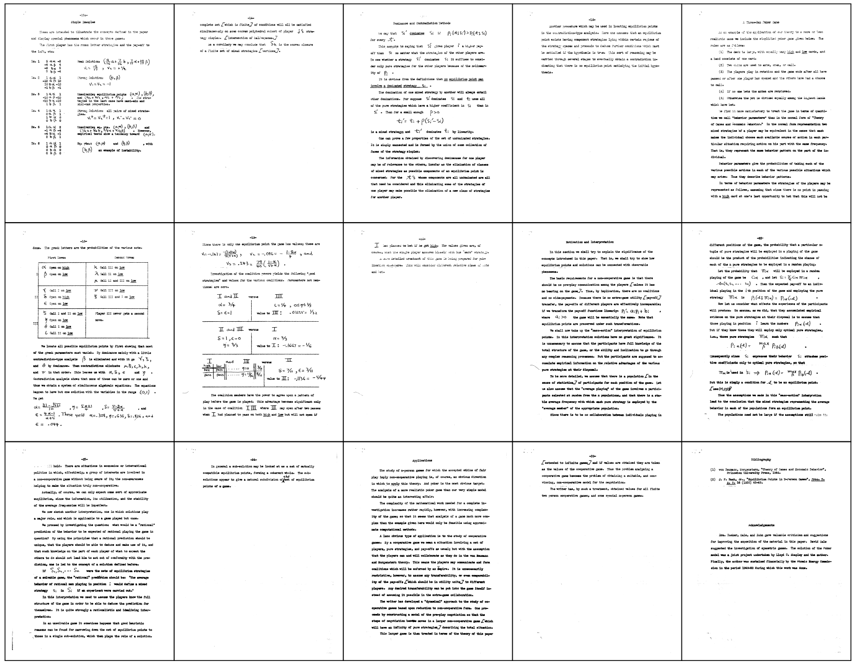
A few days after the disastrous meeting with von Neumann, Nash accosted David Gale. "I think I've found a way to generalize von Neumann's min-max theorem," he blurted out. […] "The whole theory is built on it. And it works with any number of people and doesn't have to be a zero-sum game! […] I'd call this an equilibrium point." […] Unlike von Neumann, Gale saw Nash's point. "Hmm," he said, "that's quite a thesis." […] Gale added later, "I certainly knew right away that it was a thesis. I didn't know it was a Nobel."

Sylvia Nasar: *A Beautiful Mind* (1998) p. 95

Nashs Dissertation *Non-cooperative Games* von 1950 ist ungewöhnlich kurz: 26 Seiten und 2 Referenzen. Sie passt auf die nachfolgende Folie, zwar verkleinert, aber vollständig. (`gametheory.online/project_show/23`) Die Arbeit hätte sogar noch kürzer werden können, doch Nash behandelt neben seinem Existenzsatz zudem Symmetrien und einfache Beispiele.

Trotz ihrer Kürze war Nashs Arbeit extrem einflussreich, manche halten sie gar für die Arbeit mit dem größten Einfluss pro Seite. Zum Vergleich: Tibees: *8 science theses that shook the world.* `youtu.be/SMirrL_-PNU`





Brouwers Fixpunktsatz

Proposition E1F: Homöomorphie der konvexen Körper

Jede kompakte konvexe Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ mit nicht-leerem Inneren ist homöomorph zum Einheitsball $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \le 1\}$. Für $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex kompakt gilt $X = \emptyset$ oder $X \cong \mathbb{D}^m$ mit $0 \le m \le n$.

Homöomorphie $(g, h) : X \cong \mathbb{D}^n$ ist eine „stetige Umformung“ durch $g : X \to \mathbb{D}^n$ und $h : \mathbb{D}^n \to X$ stetig mit $h \circ g = \mathrm{id}_X$ und $g \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{D}^n}$.

Satz E1G: Fixpunktsatz von Brouwer, 1909

Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ hat mindestens einen Fixpunkt, das heißt, es existiert ein Punkt $a \in \mathbb{D}^n$ mit der Eigenschaft $f(a) = a$.

Für $\mathbb{D}^1 = [-1, 1]$ genügt der Zwischenwertsatz. (Übung! Erstes Semester) Allgemein $n \in \mathbb{N}$: Sperners Lemma (Kompaktheit, ab drittem Semester) Abbildungsgrad (Algebraische Topologie, ab fünftem Semester)

Jedes konvexe Kompaktum $\emptyset \ne X \subset \mathbb{R}^n$ hat die Fixpunkteigenschaft! Nicht konvex: $X = \mathbb{S}^n$, $x \mapsto -x$. Nicht kompakt: $X = \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x + v$.

Brouwers Fixpunktsatz

Können Sie eine Tasse Kaffee so umrühren, dass sie bleibt, wo sie ist, aber kein Punkt, wo er war? Erstaunlich, aber wahr: Das ist unmöglich!

Fixpunktsätze wie dieser sind wichtige Werkzeuge der Mathematik. Sie fallen, vereinfacht gesagt, in zwei Klassen: Die einen erheben strenge Forderungen an die Abbildung $f : X \to X$, die anderen an den Raum X.

Sie kennen Banachs Fixpunktsatz D2A für kontraktive (!) Abbildungen. Er garantiert Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunkts, zudem bietet er eine effiziente Approximation mit expliziter Fehlerschranke.

Der Fixpunktsatz von Brouwer hingegen ist leider nicht konstruktiv: Er garantiert die Existenz eines Fixpunkts, verrät uns aber nicht wo. (Brouwer wurde ein vehementer Verfechter konstruktiver Prinzipien; sein berühmtestes Resultat ist tragischerweise nicht konstruktiv.)

Bitte beachten Sie, dass es durchaus mehrere Fixpunkte geben kann, extrem für $\mathrm{id} : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$. Der Ball $\mathbb{D}^n$ als Start und Ziel ist wesentlich: Nicht jeder Raum hat die Fixpunkteigenschaft. Hingegen ist der Satz bei der Funktion $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ sehr großzügig: sie muss nur stetig sein.

Zentralprojektion

Definition E1H: konvex und sternförmig

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Die **Verbindungsstrecke** zwischen Punkten $a, b \in V$ ist die Teilmenge $[a, b] = \{ (1 - t)a + tb \mid t \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le 1 \} \subseteq V$.

Eine Teilmenge $X \subseteq V$ heißt **konvex**, falls gilt: $\forall a, b \in X : [a, b] \subseteq X$, und **sternförmig** zum Zentrum $a \in X$, falls gilt: $\forall b \in X : [a, b] \subseteq X$.

Satz E1I: Zentralprojektion

(0) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sternförmig zum Zentrum $a \in X^\circ$. Für jeden Randpunkt $b \in \partial X$ gelte Sichtbarkeit $[a, b] \cap \partial X = \{b\}$. Dann existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(X) = \mathbb{D}^n$.

(1) Verschärfung zu bilipschitz: Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sternförmig bezüglich jedes Punktes $a \in B(a_0, \varepsilon)$ für ein $a_0 \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so existiert $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ bilipschitz mit $h(X) = \mathbb{D}^n$.

(2) Jeder konvexe Körper $X \subset \mathbb{R}^n$, das heißt konvex, kompakt mit nicht-leerem Inneren $X^\circ \ne \emptyset$, ist bilipschitz-homöomorph zu $\mathbb{D}^n$.

Zentralprojektion

Beweis: (0) Nach Translation können wir $a = 0$ annehmen. Wir haben $B(0, \varepsilon) \subset X \subseteq \bar{B}(0, R)$ für geeignete Konstanten $0 < \varepsilon \le R$ und somit $\rho : \mathbb{S}^{n-1} \to [\varepsilon, R] : s \mapsto \sup\{ r \in \mathbb{R}_{\ge 0} \mid rs \in X \}$, $\delta X \cap \mathbb{R}_{\ge 0} \cdot s = \{\rho(s) \cdot s\}$.
Die Zentralprojektion $f : \partial X \to \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto x/|x|$ ist wohldefiniert dank $0 \notin \partial X$, zudem stetig, bijektiv dank $f^{-1}(s) = \rho(s) \cdot s$, dank Kompaktheit also ein Homöomorphismus. Insbesondere ist $\rho : s \mapsto |f^{-1}(s)|$ stetig.

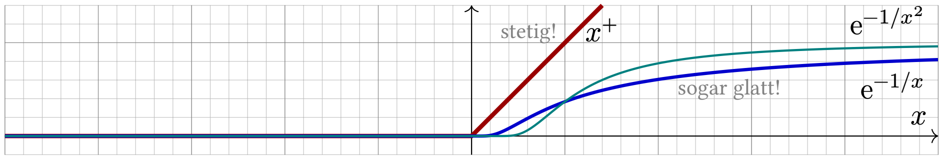
Wir erhalten daraus zueinander inverse Bijektionen

$$h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} x/\rho(x/|x|) & \text{für } x \ne 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

$$k : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} x \cdot \rho(x/|x|) & \text{für } x \ne 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Beide sind stetig in $x \ne 0$, als Komposition stetiger Abbildungen. Stetigkeit im Punkt 0 gilt dank $|h(x)| \le |x|/\varepsilon$ und $|k(x)| \le |x| \cdot R$. Demnach gilt $(h, k) : (\mathbb{R}^n, X) \cong (\mathbb{R}^n, \mathbb{D}^n)$. $\boxed{\text{QED}}$

Hilfsfunktion zum stetigen Abschneiden / *cutoff*



Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $h(x) = 0$ für $x \le 0$ und $h(x) > 0$ für $x > 0$. Wie gelingt dies möglichst oft differenzierbar, vielleicht sogar glatt?

Die Funktion $h(x) = x^\varepsilon$ mit Exponent $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ist stetig für $\varepsilon > 0$, stetig diff'bar für $\varepsilon > 1$, gar n-mal für $\varepsilon > n$, aber nicht beliebig oft diff'bar.

Zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ haben wir die bemerkenswerte **glatte Funktion**

$$h_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^\alpha} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \le 0. \end{cases}$$

Aufgabe: Diese ist überall beliebig oft differenzierbar, also $\mathscr{C}^\infty$–glatt. Beweisen Sie diese Aussage per Induktion! Wenn Sie die Ableitungen ausrechnen, entstehen kompliziertere Funktionen. Es lohnt sich daher, eine allgemeinere Aussage zu formulieren und zu beweisen. Welche?

Hilfsfunktion zum stetigen Abschneiden / *cutoff*

Diese bemerkenswerte Funktion h_α hat erstaunliche Eigenschaften:

🙂 Sie ist überall auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ analytisch, also lokal um jeden Punkt durch eine Potenzreihe darstellbar. Auf $\mathbb{R}_{<0}$ ist dies trivial, da konstant Null, und auf $\mathbb{R}_{>0}$ gilt es dank Komposition analytischer Funktionen. An der Klebestelle 0 ist sie immerhin noch $\mathscr{C}^\infty$–glatt, aber nicht mehr analytisch.

Diese berühmten Funktionen dienen oft als mahnendes Gegenbeispiel:

⚠ Nicht jede $\mathscr{C}^\infty$–Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lässt sich in eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ entwickeln: Die zu f gehörige Taylor–Reihe kann divergieren! Selbst wenn sie konvergiert, so nicht unbedingt gegen f! Genau dieses Problem erleben wir für h_α im Entwicklungspunkt 0.

🙂 Die Analysis nutzt die Funktion h_α auch konstruktiv als Werkzeug, etwa zur Konstruktion exotischer Lösungen der Wärmeleitungsgleichung (Andrei Tychonov 1935). Aus h_α konstruieren wir $\mathscr{C}^\infty$–glatte Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto h_\alpha(x-a) \cdot h_\alpha(b-x)$ mit kompaktem Träger $[a, b]$. Diese Testfunktionen dienen als Grundlage für die Theorie der Distributionen. Hierfür erhielt Laurent Schwartz 1950 die Fields–Medaille.

Ist diese Funktion wirklich glatt?

🙂 Die Funktion h_α ist schön und wichtig und verdient eine Würdigung. Wir gönnen uns diesen Exkurs für die mathematische Allgemeinbildung.

Aufgabe: Sei $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) := c_1 x^{e_1} + \dots + c_n x^{e_n}$ ein „Signom“ mit Koeffizienten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ und Exponenten $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}$ sowie

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \begin{cases} g(x)\, e^{-1/x^\alpha} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \le 0. \end{cases}$$

(1) Ist f stetig? in $x \ne 0$? in $x = 0$? differenzierbar? in $x \ne 0$? in $x = 0$? Wie rechnet man die Ableitung aus? in $x \ne 0$? in $x = 0$? Zeigen Sie:

$$f'(x) = \begin{cases} \left[g'(x) + g(x) \cdot \alpha / x^{\alpha+1}\right] e^{-1/x^\alpha} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \le 0. \end{cases}$$

(2) Ist f stetig diff'bar? zweimal? beliebig oft? also $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

(3) Berechnen Sie die Taylor–Reihe der Funktion f um $x = 0$. Konvergiert die Taylor–Reihe? Konvergiert sie gegen f? Ist die Funktion f analytisch? in $x \ne 0$? in $x = 0$?

Ist diese Funktion wirklich glatt?

Lösung: (1) In jedem Punkt $x \ne 0$ ist f stetig / glatt / analytisch, denn dort ist f eine Komposition stetiger / glatter / analytischer Funktionen. Die angegebene Ableitung $f'(x)$ folgt aus Produkt- und Kettenregel. Es bleibt nur noch das Verhalten in $x = 0$ zu klären. Für $x \searrow 0$ gilt:

$$f(x) = g(x) \Big/ \left(1 + \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{2! x^{2\alpha}} + \frac{1}{3! x^{3\alpha}} + \frac{1}{4! x^{4\alpha}} + \dots\right) \;\to\; 0$$

Für $x \nearrow 0$ gilt $f(x) = 0 \to 0$. Somit ist f stetig in 0. Für $x \searrow 0$ gilt:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{g(x)}{x} \Big/ \left(1 + \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{2! x^{2\alpha}} + \dots\right) \;\to\; 0$$

Rechtsseitig gilt $f'(0+) = 0$. Linksseitig gilt trivialerweise $f'(0-) = 0$. Also ist f tatsächlich differenzierbar in 0, und die Ableitung ist $f'(0) = 0$.

(2) Die Ableitung f' ist von derselben Form, dank (1) also differenzierbar. Per Induktion ist f somit beliebig oft differenzierbar, kurz $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(3) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(k)}(0) = 0$. Die Taylor–Reihe in 0 ist also $T(x) = 0$. Sie konvergiert, aber nicht gegen $f \ne 0$! Somit ist f in 0 nicht analytisch.

Konstruktion der Nash–Funktion

Zum Strategievektor $s = (s_1, \dots, s_n) \in \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ sei

$$\bar{u}_i^s : \bar{S}_i \to \mathbb{R} : x \mapsto \bar{u}_i(s_1, \dots, s_{i-1}, x, s_{i+1}, \dots, s_n) \quad \text{und weiter}$$

$$S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell\}, \quad s_i = \textstyle\sum_k p_i^k s_i^k, \quad \delta_i^k := h[\bar{u}_i^s(s_i^k) - \bar{u}_i^s(s_i)] \ge 0,$$

$$\check{s}_i := \textstyle\sum_k \check{p}_i^k s_i^k, \quad \check{p}_i^k := (p_i^k + \delta_i^k)/(1 + \sum_j \delta_i^j) \ge 0, \quad \sum_k \check{p}_i^k = 1.$$

Lemma E1J: Gleichgewichte als Fixpunkte

Zum Spiel u bzw. $\bar{u}$ konstruieren wir so die stetige **Nash–Funktion**
$f : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n : s = (s_1, \dots, s_n) \mapsto \check{s} = (\check{s}_1, \dots, \check{s}_n)$.
Die Fixpunkte von f sind genau die Nash–Gleichgewichte von $\bar{u}$:

$$\boxed{\operatorname{fix}(f) = \operatorname{NE}(\bar{u})}$$

Beweis: „$\supseteq$": Klar nach Konstruktion. „$\subseteq$": Sei $s = f(s)$ ein Fixpunkt.
Für $s_i = \sum_k p_i^k s_i^k$ gilt $\bar{u}_i^s(s_i) = \sum_k p_i^k \bar{u}_i^s(s_i^k)$ nach Definition von $\bar{u}$.
Es gibt einen Index k mit $p_i^k > 0$ und $\bar{u}_i^s(s_i^k) \le \bar{u}_i^s(s_i)$, somit $\delta_i^k = 0$.
Aus $\check{p}_i^k = p_i^k$ folgt $\delta_i^j = 0$ für alle $j = 0, 1, \dots, \ell$, also $\bar{u}_i^s(s_i^j) \le \bar{u}_i^s(s_i)$.
Demnach gilt $\bar{u}_i^s(s_i) = \max \bar{u}_i^s$; jede Strategie s_i ist beste Antwort. QED

Konstruktion der Nash–Funktion

Dieses Lemma beweist Nashs Existenzsatz E1E für Gleichgewichte!

☺ Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel. Zur affinen Fortsetzung $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \mathbb{R}^n$ suchen wir Nash–Gleichgewichte. Die Nash–Funktion $f : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$ ist stetig und ihre Fixpunkte sind genau die ersehnten Nash–Gleichgewichte. Dank Brouwers Fixpunktsatz E1G existieren solche Fixpunkte.

☺ Warum können wir den Fixpunktsatz von Brouwer auf f anwenden? Wir setzen hier voraus, dass jede reine Strategiemenge S_i endlich ist, geschrieben $S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell\}$. Die Menge $\bar{S}_i = [s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell] \cong \mathbb{D}^\ell$ der gemischten Strategien ist ein Simplex, also konvex und kompakt, somit homöomorph zu einem Ball. Das Produkt $\bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$ ebenso.

☺ Dieser geniale Beweis ist in wenigen Zeilen hingeschrieben und so gesehen leicht, ich finde ihn dennoch extrem raffiniert. Wenn Sie länger darüber nachdenken, werden Sie ihn schließlich recht natürlich finden: Die Nash–Funktion f beschreibt eine Optimierung durch *Trial and Error*, die wir in unseren Experimenten beobachten bzw. intuitiv anwenden.

Konstruktion der Nash–Funktion

☺ Was bedeutet diese geschickt konstruierte Nash–Funktion f? Glücklicherweise können wir die Funktion verstehen und so merken:

Die Größe $\delta_i^k \ge 0$ gibt an, um wie viel sich Spieler i verbessern kann, wenn er seine gemischte Strategie s_i durch die reine Strategie s_i^k ersetzt. Dies entspricht einer der Ecken des Simplex $\bar{S}_i$; im Falle $\delta_i^k > 0$ ist die Ecke s_i^k attraktiv. Die verbesserte Strategie $s \mapsto \check{s}$ wird neu gemischt: attraktive Ecken werden stärker gewichtet, unattraktive schwächer.

☺ Falls gewünscht können wir die Nash–Funktionen f sogar glätten.

Statt $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^+$ ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x^+)^2$ stetig differenzierbar. Wir können sogar eine beliebig oft differenzierbare Funktion wählen, etwa $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \exp(-1/x^\alpha)$ für $x > 0$ und $x \mapsto 0$ für $x \le 0$. Damit wird unsere Nash–Funktion f sogar $\mathscr{C}^\infty$–glatt!

☺ Dieser schöne Beweis ist **instruktiv**, aber leider nicht **konstruktiv**. Er garantiert die Existenz von Lösungen, liefert uns aber keine Methode, diese zu finden oder zu approximieren (wie etwa Banachs Fixpunktsatz). Effiziente Algorithmen sind daher ein eigenes Thema für sich.

Illustration der Nash–Funktion

Aufgabe: Illustrieren Sie die Nash–Funktion f im kleinsten Fall, für zwei Spieler mit je zwei reinen Strategien, also $S_1 = \{s_1^0, s_1^1\}$ und $S_2 = \{s_2^0, s_2^1\}$.
Die gemischten Strategien $s_1 = (1-p)s_1^0 + ps_1^1$ und $s_2 = (1-q)s_2^0 + qs_2^1$ parametrisieren wir hierbei durch die beiden Parameter $(p, q) \in [0, 1]^2$.

Lösung: Die Auszahlungsfunktion $\tilde{u} : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_1(p, q) &= a_{00}(1-p)(1-q) + a_{10}p(1-q) + a_{01}(1-p)q + a_{11}pq \\
\tilde{u}_2(p, q) &= b_{00}(1-p)(1-q) + b_{10}p(1-q) + b_{01}(1-p)q + b_{11}pq
\end{aligned}$$

Die Nash–Funktion $f : [0, 1]^2 \to [0, 1]^2$ aus dem Beweis ist dann:

$$\check{p} = f_1(p, q) = \frac{p + [\tilde{u}_1(1, q) - \tilde{u}_1(p, q)]^+}{1 + [\tilde{u}_1(0, q) - \tilde{u}_1(p, q)]^+ + [\tilde{u}_1(1, q) - \tilde{u}_1(p, q)]^+} \in [0, 1]$$

$$\check{q} = f_2(p, q) = \frac{q + [\tilde{u}_2(p, 1) - \tilde{u}_2(p, q)]^+}{1 + [\tilde{u}_2(p, 0) - \tilde{u}_2(p, q)]^+ + [\tilde{u}_2(p, 1) - \tilde{u}_2(p, q)]^+} \in [0, 1]$$

Als Komposition stetiger Funktionen ist f offensichtlich stetig.
Die Fixpunkte von f sind genau die Nash–Gleichgewichte von $\tilde{u}$.

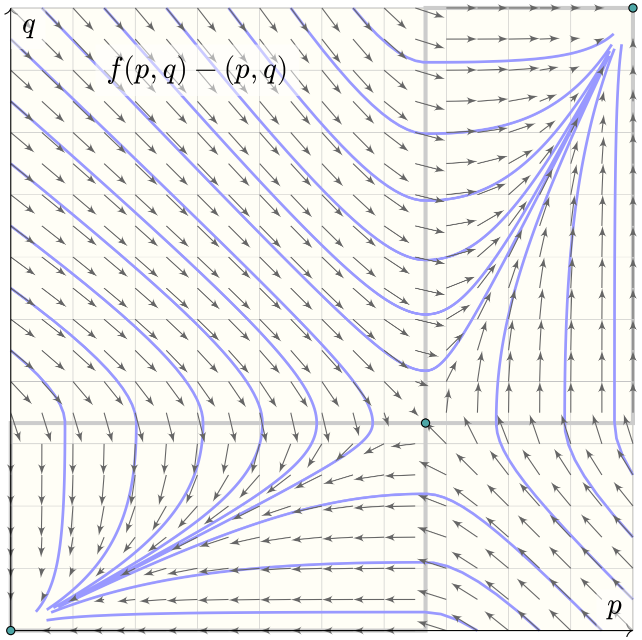
Nash–Funktion zu Bach oder Strawinsky

E169

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Bach oder Strawinsky* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

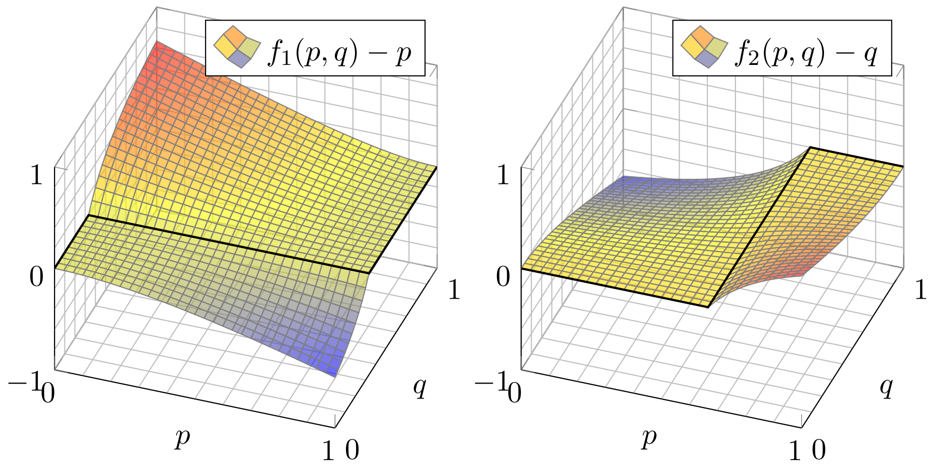
A \ B	Bach	Strawinsky
Bach	1, 2	0, 0
Strawinsky	0, 0	2, 1

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.
Wir sehen wunderbar die drei Fixpunkte des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ sind dies die drei Nash–Gleichgewichte.
Zur Anregung Ihrer Phantasie zeige ich typische Flusslinien.



Nash–Funktion zu Bach oder Strawinsky

E170



Wir zeigen das Vektorfeld $(u,v) = f(p,q) - (p,q)$ und die Komponenten.
Die Nullstellenmengen von u und v sind jeweils die Reaktionsfunktionen.
Jede Nullstelle $u(p,q) = 0$ bedeutet: p ist eine beste Antwort auf q.
Jede Nullstelle $v(p,q) = 0$ bedeutet: q ist eine beste Antwort auf p.
Die Gleichgewichte $(0,0)$ und $(1,1)$ sind stabil, aber $(2/3, 1/3)$ instabil.

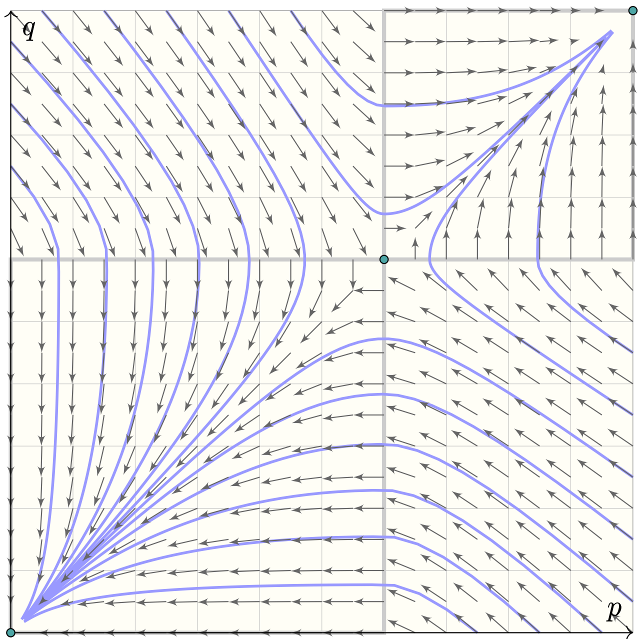
Nash–Funktion zu Bleiben-oder-Gehen

E171

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Bleiben-oder-Gehen* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

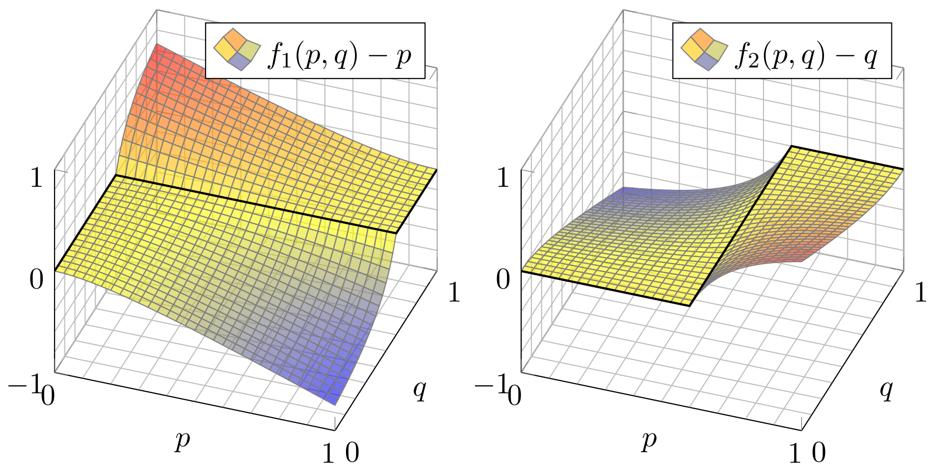
A \ B	bleiben	gehen
bleiben	−2, −2	−2, −5
gehen	−5, −2	0, 0

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.
Wir sehen wunderbar die drei Fixpunkte des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ sind dies die drei Nash–Gleichgewichte.



Nash–Funktion zu Bleiben-oder-Gehen

E172



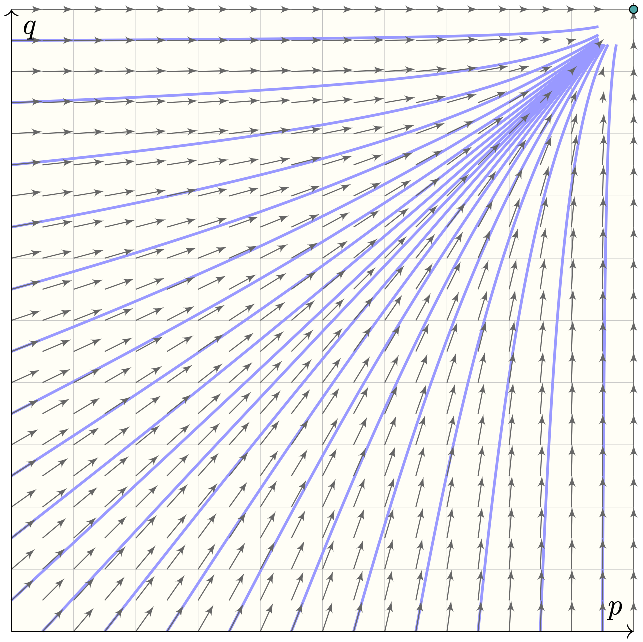
Wir zeigen das Vektorfeld $(u,v) = f(p,q) - (p,q)$ und die Komponenten.
Die Nullstellenmengen von u und v sind jeweils die Reaktionsfunktionen.
Jede Nullstelle $u(p,q) = 0$ bedeutet: p ist eine beste Antwort auf q.
Jede Nullstelle $v(p,q) = 0$ bedeutet: q ist eine beste Antwort auf p.
Die Gleichgewichte $(0,0)$ und $(1,1)$ sind stabil, aber $(0.6, 0.6)$ instabil.

Nash–Funktion zum Gefangenendilemma

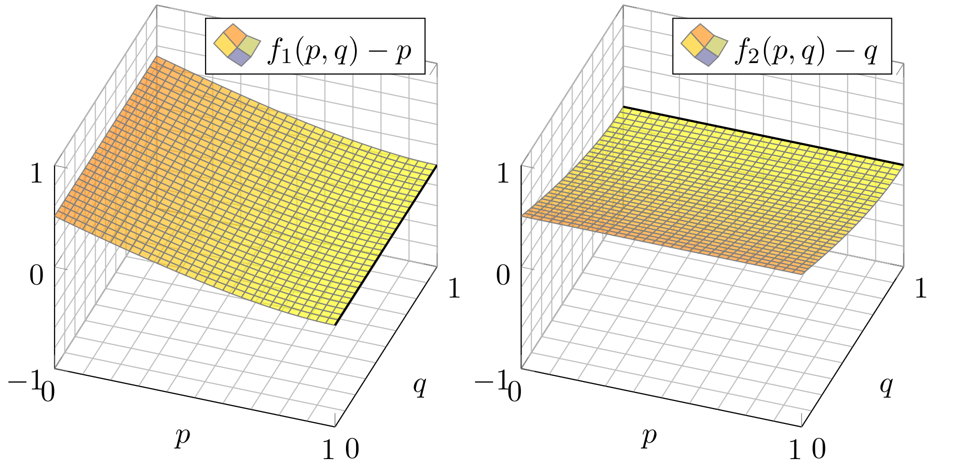
Zur Erinnerung die Daten des *Gefangenendilemmas* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

A \ B	schweigen	gestehen
schweigen	-1 / -1	0 / -5
gestehen	-5 / 0	-4 / -4

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt. Wir sehen wunderbar den einzigen Fixpunkt des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ ist dies das einzige Nash–Gleichgewicht.



Nash–Funktion zum Gefangenendilemma



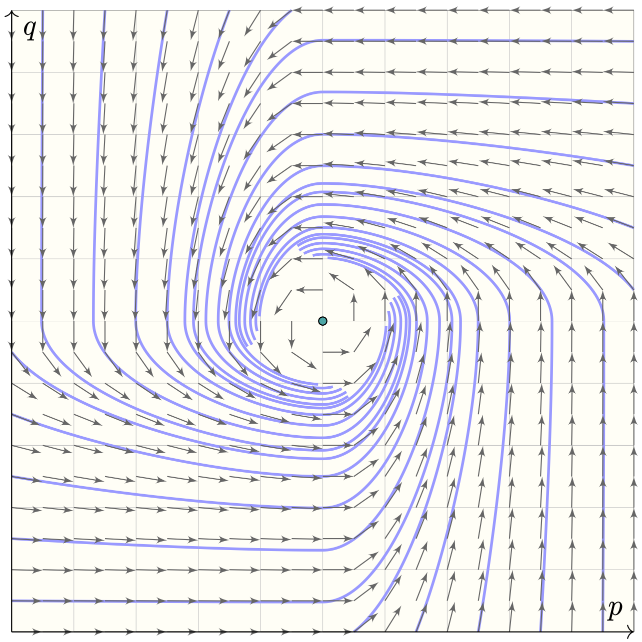
Wir zeigen das Vektorfeld $(u,v) = f(p,q) - (p,q)$ und die Komponenten. Die Nullstellenmengen von u und v sind jeweils die Reaktionsfunktionen. Jede Nullstelle $u(p,q) = 0$ bedeutet: p ist eine beste Antwort auf q. Jede Nullstelle $v(p,q) = 0$ bedeutet: q ist eine beste Antwort auf p. Das Gleichgewicht $(0,0)$ ist hier stabil.

Nash–Funktion zu Matching Pennies

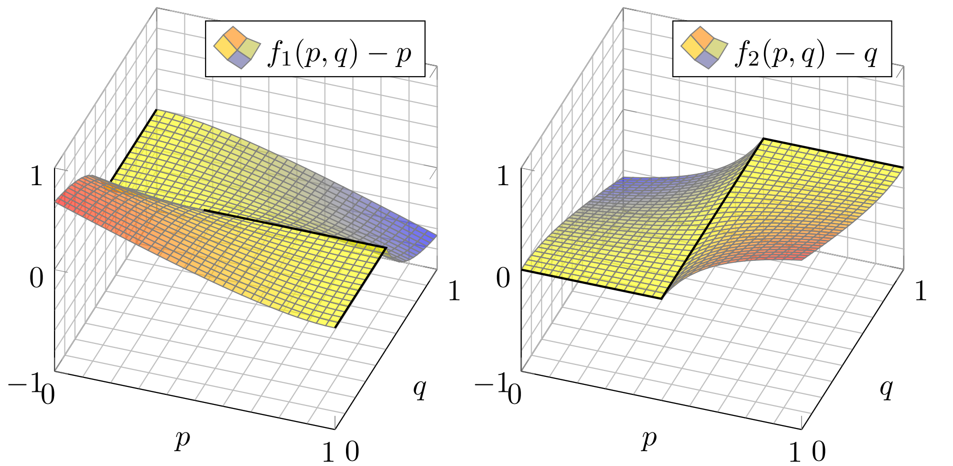
Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Matching Pennies* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

A \ B	Kopf	Zahl
Kopf	$+1$ / -1	-1 / $+1$
Zahl	-1 / $+1$	$+1$ / -1

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt. Wir sehen wunderbar den einzigen Fixpunkt des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ ist dies das einzige Nash–Gleichgewicht.



Nash–Funktion zu Matching Pennies



Wir zeigen das Vektorfeld $(u,v) = f(p,q) - (p,q)$ und die Komponenten. Die Nullstellenmengen von u und v sind jeweils die Reaktionsfunktionen. Jede Nullstelle $u(p,q) = 0$ bedeutet: p ist eine beste Antwort auf q. Jede Nullstelle $v(p,q) = 0$ bedeutet: q ist eine beste Antwort auf p. Das Gleichgewicht $(1/2, 1/2)$ ist ein stabiler Strudelpunkt.

Nash–Funktion und spielendes Lernen

Was lehren uns die Nash–Funktion und diese schönen Illustrationen? Eine interessante Interpretation der Gleichgewichte ist die folgende: Die Spieler **wiederholen** immer wieder dasselbe Spiel u und **lernen**.

Sie starten in einem Zustand $x(t_0) = (p, q) \in [0, 1]^2$, beobachten jeweils das Ergebnis und aktualisieren ihre Strategien in kleinen Schritten: Sie spielen erneut und beobachten und aktualisieren, usw.

☺ Das ist im Wesentlichen das hier naheliegende **Euler–Verfahren** zur Konstruktion eines Polygonzuges $x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots$ in $[0, 1]^2$. Die Zeitschritte $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ können wir dabei vorgeben.

☺ Im Grenzübergang zu beliebig kleinen Schritten erhalten wir die **Differentialgleichung** $\dot{x} = g(x)$ zum oben gezeigten Vektorfeld $g(x) = f(x) - x$. Hierzu habe ich die Flusslinien gezeichnet.

☺ Das bietet uns konkrete Anschauung und wunderbare Einsichten: Wir haben nicht nur die Gleichgewichte als Fixpunkte, sondern gewinnen zudem einen ersten qualitativen Eindruck außerhalb der Gleichgewichte!

Nash–Funktion und spielendes Lernen

Aufgabe: Wie glatt ist das Vektorfeld g in der Gleichung $\dot{x} = g(x)$? Garantiert das Existenz, Eindeutigkeit und Glattheit von Lösungen?

Lösung: Die Funktion $h(x) = x^+$ ist lipschitz-stetig, ebenso f. Wir können also den Satz von Picard–Lindelöf anwenden! Übung: Schreiben Sie die Dehnungsschranken sorgfältig aus.

☺ Bei der Definition der Nash–Funktion $f : \bar{S} \to \bar{S}$ haben wir mit der Hilfsfunktion h noch einige Freiheiten, wie oben erwähnt. Insbesondere können wir f nicht nur als stetig konstruieren, sondern auch stetig differenzierbar, sogar **beliebig glatt**.

☺ Wir nutzen dankend alle Werkzeuge der **autonomen dynamischen Systeme**, also der gewöhnlichen Differentialgleichungssysteme im $\mathbb{R}^n$. Insbesondere nutzen wir die Klassifikation der **lokalen Dynamik** um einen Fixpunkt, hier allerdings eher topologisch, da die Jacobi–Matrix mangels Differenzierbarkeit nicht definiert ist oder Null nach Glättung.

Hatte ich es schon erwähnt: Das alles ist wunderschöne Mathematik!

Nash–Funktion und Populationsdynamik

Wir sehen in den obigen Beispielen **stabile und instabile Fixpunkte**. Das hat unmittelbare Auswirkungen in der Populationsdynamik.

Statt zweier Spieler können wir uns auch zwei **Populationen** A und B vorstellen. In der ersten ist die Mischung der Strategien $1 - p$ und p, in der zweiten $1 - q$ und q. Jedes Individuum aus Population A spielt gegen zahlreiche Gegner aus Population B und aktualisiert aufgrund dieser Erfahrung seine Strategie, falls ihm das profitabel erscheint.

☺ Jedes Individuum spielt in diesem Modell seine fest gewählte **reine** Strategie, randomisiert also nicht! Doch als Mittelwert über die gesamte Population erhalten wir die lineare Fortsetzung $\bar{u}$ gemäß der Erwartung.

☺ Individuen beider Populationen optimieren ihr Verhalten nicht aktiv, diese Aufgabe übernimmt die **Selektion** von ganz allein: Erfolgreiche Strategien vermehren sich schneller, weniger erfolgreiche langsamer.

☺ Somit beobachten wir im Populationsmittel die obige Dynamik. Bei der Gestaltung der Funktion f haben wir noch einige Freiheiten, aber das qualitative Verhalten ist bereits sehr aufschlussreich!

Nash–Funktion und Populationsdynamik

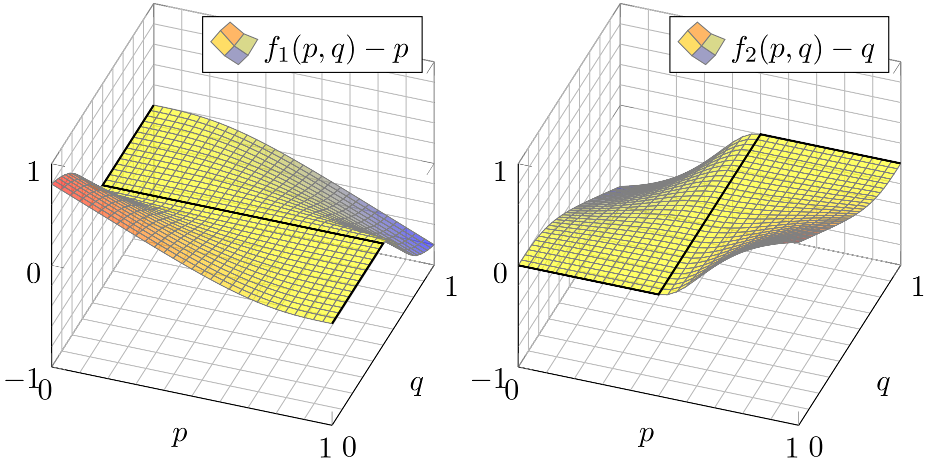
Der Vorteil dieser Sichtweise ist, dass die mentalen Anforderungen an die Individuen sehr gering sind. Dieses Modell lässt sich daher auch in der **Evolutionsbiologie** gut anwenden, sogar auf das Verhalten von einfachen Lebewesen, etwa Insekten, die nur geringe Rechenkapazität und keinerlei spieltheoretische Kenntnisse haben (soweit ich weiß).

☺ Im Mittel beobachten wir die gerade erklärte **Populationsdynamik**. Sie wird angetrieben durch den Selektionsdruck. Die Dynamik unterliegt im Kleinen zwar erheblichen stochastischen Störungen, doch bei großen Populationen ist die Differentialgleichung eine recht gute Näherung.

☺ Anschaulich strebt sie einem stabilen Fixpunkt zu oder ruht in einem. Instabile Fixpunkte hingegen werden nicht dauerhaft beobachtet: Jede noch so kleine zufällige Abweichung führt uns fort.

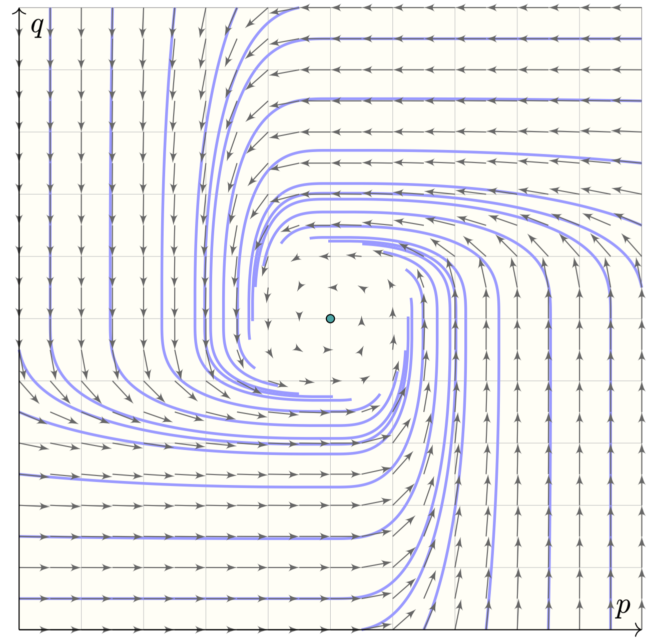
☺ Genauer betrachtet sind die Nash–Gleichgewichte nicht alle gleich, sie haben eine Mikrostruktur (analytisch, geometrisch, topologisch), sie haben lokale Eigenschaften bezüglich der evolutionären Dynamik.

Variante: differenzierbare Nash–Funktion

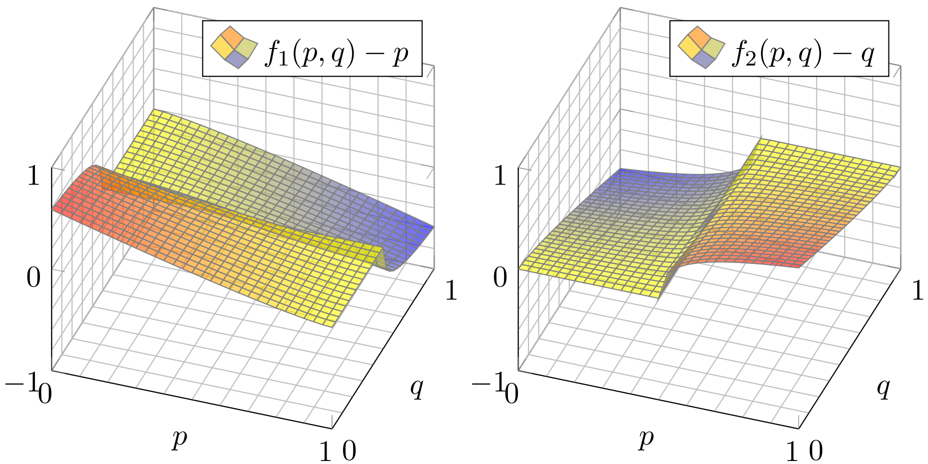


Die Funktion $x \mapsto x^+$ ist stetig, aber in $x = 0$ nicht differenzierbar, also $\mathscr{C}^0$, aber nicht $\mathscr{C}^1$. Ich ersetze sie hier durch die Funktion $x \mapsto (x^+)^2$, diese ist $\mathscr{C}^1$, aber nicht $\mathscr{C}^2$. Die Graphik ist erwartungsgemäß glatter, allerdings sehen wir die Nullstellen nicht mehr so markant als Knicke.

Variante: differenzierbare Nash–Funktion



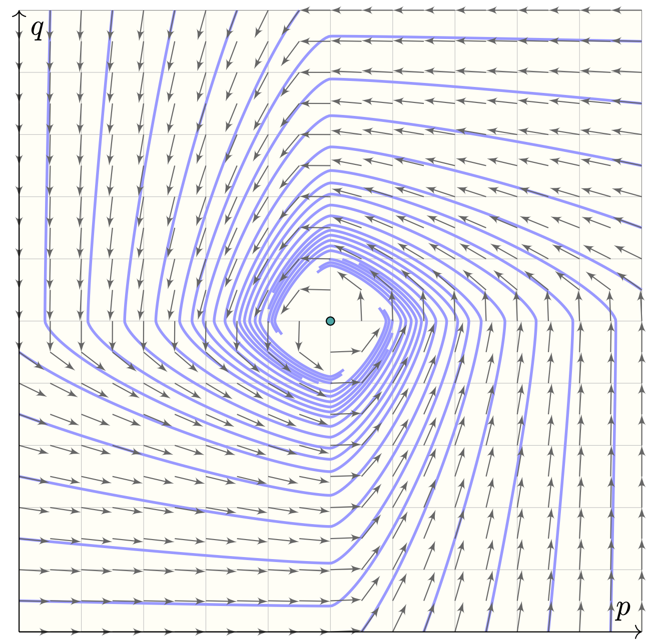
Variante: hölder–stetige Nash–Funktion



Die Funktion $x \mapsto x^+$ ist lipschitz-stetig mit Steigung ≤ 1. Ich ersetze sie hier durch die Funktion $x \mapsto \sqrt{x^+}$, diese ist immerhin noch hölder–stetig zum Exponenten $1/2$. Die Knicke sind erwartungsgemäß noch markanter.

Zur Modellierung der Populationsdynamik bestehen viele Möglichkeiten! Die numerischen Parameter passen wir den empirischen Daten an.

Variante: hölder-stetige Nash–Funktion



Rückblick und Zwischenbilanz

Actions have consequences, more intricately: joint actions have individual consequences.

Was ist ein strategisches Spiel in Normalform? Eine Abbildung

$$u : S_1 \times \dots \times S_n \to (R_1, \le_1) \times \dots \times (R_n, \le_n).$$

Was ist ein Nash–Gleichgewicht? Ein Punkt $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ mit

$$s_i \in \operatorname{Arg\,max}_{a \in S_i} u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, a, s_{i+1}, \dots, s_n).$$

Für jede Spieler:in i ist die von ihr gewählte Strategie s_i eine beste Antwort auf die Gegenstrategien $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$. Keine Spieler:in i hat einen Anreiz, ihre Strategie s_i zu ändern.

Interpretation und Anwendung: Wie und warum kommen Spieler dazu, tatsächlich ein solches Nash–Gleichgewicht zu spielen? Denkbar sind:

- Rationale Analyse des Spiels (*rational reasoning*)
- Kommunikation vor dem Spiel (*pre-play communication*)
- Evolution durch Versuch und Irrtum (*trial-and-error adjustment*)

Rückblick und Zwischenbilanz

Hier ist S_i die Menge der **Strategien**, die Spieler i wählen kann, und R_i ist die Menge seiner **Resultate**, linear geordnet durch $\le_i$. Wir nennen $u_i : S_1 \times \dots \times S_n \to R_i$ die **Nutzenfunktion** für Spieler i. Meist sind R_i die reellen Zahlen, wir nennen u dann ein **reelles Spiel**.

So können wir alle Spiele darstellen: einheitlich, übersichtlich, präzise. Jeder Spieler i versucht nun seinen Gewinn $u_i(s) \in R_i$ zu maximieren. Allerdings kontrolliert Spieler i nur seine eigene Strategie $s_i \in S_i$, aber nicht die Strategien $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ der anderen Spieler!

Zur Analyse solcher Konfliksituationen dienen **Nash–Gleichgewichte**. Dies ist ein zentral wichtiges, nützliches und bewährtes Werkzeug. Hierzu beginnen wir, die mathematischen Grundlagen zu legen, in Form von tragfähigen Definitionen, sodann Sätzen und Beweisen.

Dies sind zunächst mathematische Konzepte. Wir wollen sie schließlich auf Anwendungen übertragen. Dabei stellt sich die kritische Frage, ob Nash–Gleichgewichte tatsächlich gespielt werden: wann? wie? warum? Hierzu möchte ich drei mögliche Begründungen darlegen.

Rückblick und Zwischenbilanz

Rationale Analyse des Spiels. In manchen – nicht allen! – Anwendungen ist es plausibel anzunehmen, dass alle Spieler hinreichend rational sind. Das gilt insbesondere, wenn das Spiel einfach zu analysieren ist und die Spieler ausreichend Zeit dazu haben. Oder wenn das Spiel so wichtig ist, dass alle Spieler die notwendigen Analysen durchführen (müssen).

☺ Gibt es nur ein Nash–Gleichgewicht, so wird genau dieses gespielt. Dank hinreichender Rationalität kennt jeder Spieler das Gleichgewicht, und keiner der Spieler hat einen Anreiz, davon abzuweichen.

☹ Dieses Argument gilt nur bei einem eindeutigen Gleichgewicht. Gibt es mehrere, wie bei Bach-oder-Strawinsky, so ist die Wahl offen.

Kommunikation vor dem Spiel. In manchen Anwendungen ist es möglich, dass alle Spieler vor dem Spiel kommunizieren. Sie können dies nutzen und einen gemeinsamen Strategievektor $(s_1, \dots, s_n)$ verabreden.

☹ Diese Verabredung ist allerdings nicht bindend oder einklagbar.

☺ Ist $(s_1, \dots, s_n)$ ein Nash–Gleichgewicht, so ist diese Vereinbarung selbst-stabilisierend: Kein Spieler hat einen Anreiz, davon abzuweichen.

Rückblick und Zwischenbilanz

Evolution durch Versuch und Irrtum. Wir betrachten ein endliches reelles Spiel $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$. Dieses wird nun häufig wiederholt. Jeder Spieler i beginnt mit einer gemischten Strategie $s_i \in \bar{S}_i$ und passt sie nach jedem Spieldurchgang an, etwa vermöge der Nash–Funktion.

☺ Günstigenfalls konvergiert dieser Prozess gegen ein Gleichgewicht: Die Gleichgewichte sind Fixpunkte der Nash–Funktion, und Konvergenz liegt vor, wenn wir im Attraktionsbecken eines Fixpunktes starten.

Der Vorteil dieser Sichtweise ist, dass die mentalen Anforderungen an die Individuen sehr gering sind. Dieses Modell lässt sich daher auch in der **Evolutionsbiologie** erfolgreich anwenden. Hier spielen **Populationen** gegeneinander. Die Individuen optimieren ihr Verhalten nicht aktiv, diese Aufgabe übernimmt die **Selektion** von ganz allein: Erfolgreiche Strategien vermehren sich schneller, weniger erfolgreiche langsamer. Im Mittel beobachten wir die oben erklärte **Populationsdynamik**.

☺ Die **evolutionäre Spieltheorie** arbeitet diese Ideen aus und untersucht evolutionäre Phänomene mit spieltheoretischen Methoden.

Spiele in Normalform / *cheat sheet*

Definition E1k: strategisches Spiel in Normalform

Ein **strategisches Spiel in Normalform** über I ist eine Abbildung

$$\boxed{u : S_I = \prod_{i\in I} S_i \to R_I = \prod_{i\in I} R_i : s = (s_i)_{i\in I} \mapsto r = (r_i)_{i\in I}.}$$

Formal ist dieses Spiel (I, S, R, u) durch folgende Daten definiert:
(1) eine **Spielermenge** $I = \{1, \dots, n\}$ sowie für jeden Spieler $i \in I$
(2) eine **Strategiemenge** $S_i \neq \emptyset$ möglicher Strategien / Aktionen / Züge,
(3) eine **Ergebnismenge** $(R_i, \leq_i)$ möglicher Resultate, linear geordnet,
(4) eine **Nutzenfunktion** $u : S \to R$, individuell $u_i : S \to R_i : s \mapsto r_i$.

Wir nutzen folgende Notation, die ich anschließend genauer erläutere:

Koalition $K \subseteq I$, Komplement $-K := I \smallsetminus K$,
Zerlegung $I = K \sqcup J$, statt $\{i\}, -\{i\}$ kurz $i, -i$,
Strategie $s_i \in S_i \neq \emptyset$, Ergebnis $r_i \in (R_i, \leq_i)$,
Bündel $s_K \in S_K := \prod_{i\in K} S_i$, Zerlegung $s_I = (s_K; s_J)$,
Nutzen $u_i : S_i \times S_{-i} \leftrightsquigarrow S \to R_i : (s_i; s_{-i}) \mapsto u_i(s_i; s_{-i})$

Spiele in Normalform

Hier ist $I = \{1, \dots, n\}$ die Menge der Spieler / Individuen / Akteure / ....
Manche Autor:innen schreiben statt I lieber N oder P oder ähnliches.
Meist ist die Spielermenge endlich, doch wir nutzen auch unendliche.

Für die *Buchhaltung* ist Durchnummerieren bequem, kurz $I = \{1, \dots, n\}$.
Für das *Story Telling* sind Namen schöner, wie Alice, Bob, Chuck, etc.
Es geht auch beides zugleich, wie $I = \{1{=}\text{Alice}, 2{=}\text{Bob}, 3{=}\text{Chuck}\}$.

Jede Spieler:in $i \in I$ hat eine nicht-leere Strategiemenge S_i und eine linear geordnete Ergebnismenge $(R_i, \leq_i)$. Jedes Element $s_i \in S_i$ heißt Strategie / Aktion / Option / ..., $r_i \in R_i$ heißt Ergebnis / Resultat / Auszahlung / ....

Das Produkt über $K \subseteq I$ schreiben wir konzise, kurz und bequem $S_K := \prod_{i\in K} S_i$ und $R_K := \prod_{i\in K} R_i$. Wir setzen $S := S_I$ und $R := R_I$. Unser Spiel ist demnach eine Abbildung $u : S \to R$. Jede Spieler:in $i \in I$ wählt ihre Strategie $s_i \in S_i$ und erhält die Auszahlung $u_i(s) \in R_i$.

🙂 Das ist das wesentliche Punkt: Das Ergebnis $u_i(s)$ jeder Spieler:in i hängt nicht nur von ihrer eigenen Aktion $s_i \in S_i$ ab, sondern auch von den Aktionen $s_{-i} \in S_{-i}$ aller anderen Spieler:innen $j \in I \smallsetminus \{i\}$.

Spiele in Normalform

Jede Spieler:in $i \in I$ kann ihre Strategie $s_i \in S_i$ frei wählen, unabhängig von allen anderen Spielern, und sie hat auch nur auf s_i direkten Einfluss.

Jedes Element $s \in \prod_{i\in I} S_i$ nennen wir **Strategievektor**: $s = (i \mapsto s_i)_{i\in I}$.
Wir zerlegen $S := \prod_{i\in I} S_i$ in die Faktoren S_i und $S_{-i} := \prod_{j\in I\smallsetminus\{i\}} S_j$:

$$S \cong S_i \times S_{-i} : s \leftrightarrows (s_i; s_{-i})$$

Wir schreiben hier $s_{-i} = s|_{I\smallsetminus\{i\}}$ für die **Einschränkung** auf $I \smallsetminus \{i\}$ und $s = (s_i; s_{-i}) = \{i \mapsto s_i\} \cup s_{-i}$ für die **Ergänzung** um $i \mapsto s_i$.
Das entspricht der Umsortierung, die den Faktor S_i vorzieht.

Besser und konfliktfrei wäre statt s_{-i} die Notation $s_{\smallsetminus i} = s|_{I\smallsetminus\{i\}} \in S_{\smallsetminus i}$.
Ich folge hier der üblichen und verbreiteten Schreibweise $s_{-i} \in S_{-i}$.
Die Nutzenfunktion $u_i : S \to R_i$ schreiben wir damit bequem:

$$u_i : S_i \times S_{-i} \leftrightsquigarrow S \to R_i : (s_i; s_{-i}) \mapsto u_i(s_i; s_{-i})$$

Die explizite Nennung der Bijektion $S \cong S_i \times S_{-i} : s \leftrightarrows (s_i; s_{-i})$ unterdrücken wir hierbei und benennen beide Funktionen mit u_i.

Spiele in Normalform

Für ein **endliches Spiel** fordern wir I und S_i endlich für jedes $i \in I$.
Im Falle eines **reellen Spiels** fordern wir zudem $R_i = \mathbb{R}$ für alle $i \in I$.
Das Spiel ist die **Auszahlungsfunktion** $u : S = \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} \mathbb{R} = \mathbb{R}^I$.
Die Funktion $u_i : S = \prod_{j\in I} S_j \to \mathbb{R}$ ist die **Auszahlung** für Spieler:in i.

Bislang genügte uns die Spielermenge $I = \{1, 2\}$ oder $I = \{1, 2, \dots, n\}$.
Wir definieren Spiele nun allgemein für eine beliebige Spielermenge I.
Auf den ersten Blick mag diese Allgemeinheit verwundern; wir können uns ein Spiel mit unendlich vielen Spielern meist nur schwer vorstellen.

Dies tritt jedoch tatsächlich natürlich auf, etwa wenn wir Modelle mit zeitlichem Verlauf und mehreren Spielergenerationen untersuchen.
Wir wollen daher die nötigen Begriffe und Definitionen vorbereiten, auch wenn unsere Existenzsätze oft endliche Spiele voraussetzen.

Dasselbe gilt für allgemeine Definition der Ergebnismenge $(R_i, \leq)$.
Wir nehmen im Folgenden meist $(R_i, \leq)$ als Teilmenge von $(\mathbb{R}, \leq)$ an.
Es lohnt, sich zunächst klar zu machen, was minimal benötigt wird.
Wir nutzen dankbar weitere Struktur, wo immer sie verfügbar ist!

Formal könnten wir unser Spiel als Quadrupel (I, S, R, u) definieren. Das ist wunderbar explizit und ausführlich, scheint mir aber für den praktischen Gebrauch unnötig länglich und übertrieben pedantisch. Implizit enthält die Abbildung $u : \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R_i$ all diese Daten:

Bei Bedarf können wir von der Abbildung u alle Informationen erfragen bzw. rekonstruieren: Was ist deine Definitionsmenge? S! Was ist deine Zielmenge? R! Ebenso können wir S fragen: Bist du ein Produkt? Ja! Über welcher Menge? I! Was ist für $i \in I$ dein Faktor? S_i! Ebenso R: Bist du ein Produkt? Ja! Über welcher Menge? I! Was ist für $i \in I$ dein Faktor? R_i! Darunter verstehen wir hier die geordnete Menge $(R_i, \le)$.

Ich schreibe also explizit $u : S_I = \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R_i = R_I$ oder implizit u. Ersteres entspricht dem Quadrupel (I, S, R, u), ist aber noch sinnfälliger. Die Indizes schreiben wir später auch oben: Die Strategiemenge S^i und die Ergebnismenge R^i für Spieler $i \in I$ führen zu den Produkten $S^I := \prod_{i\in I} S^i$ und $R^I := \prod_{i\in I} R^i$, hier besonders raffiniert abgekürzt. Spiele sind dann Abbildungen $u : S^I \to R^I$, reelle Spiele $u : S^I \to \mathbb{R}^I$.

Die so eingeführte Schreibweise ist bequem und hat sich bewährt. Streng formal jedoch müsste ich $S_{\{j\}}$ statt S_j für $j \in I$ schreiben. Damit gilt $S_K = \prod_{i\in K} S_{\{i\}}$ für alle $K \subseteq I$, auch für $K = \{j\}$.

Ist das Haarspalterei? Es ist formal korrekt, wenn auch meist übertrieben. Wir gehen stillschweigend davon aus, dass sich Spieler / Elemente $j \in I$ und Koalitionen / Teilmengen $K \subseteq I$ stets unterscheiden, $I \cap \mathfrak{P}(I) = \emptyset$. Das klingt plausibel und ist möglich, aber weder nötig noch automatisch.

Beispiel: Nach John von Neumann können wir die natürlichen Zahlen als Mengen darstellen durch $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, usw. .... Für $I = \{0, \dots, n-1\}$ gilt demnach für $i \in I$ auch $i \subseteq I$. Das ist schlecht: Hier lassen sich Spieler:innen und Koalitionen nicht unterscheiden!

Wir schreiben $-K := I \smallsetminus K$, sowie statt $\{i\}$ und $-\{i\}$ kurz i und $-i$. Diese Schreibweise für das Komplement ist in der Spieltheorie üblich, wirkt aber vielleicht anfangs ungewohnt und etwas abschreckend; sie entspricht der traditionell mathematischen Notation $\overline{K} = \complement K = I \smallsetminus K$.

Statt *Strategien* $s_i \in S_i$ sprechen wir je nach Kontext auch von *Aktionen* und schreiben dann $a_i \in A_i$ und entsprechend $u : \prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} R_i$.

Motivation: Allgemein codieren wir jedes *dynamische* Spiel durch einen Graphen $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$, siehe Definition B1I. Wir unterscheiden dann (lokale) Aktionen $A_x = \prod_{i\in I} A^i_x$ in jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ und (globale) Strategien $S = \prod_{x\in X^\circ} A_x$, individuell $S^i = \prod_{x\in X^\circ} A^i_x$ für $i \in I$.

In diesem Kapitel betrachten wir nur strategische Spiele in Normalform, ohne zeitliche Dimension. Zur Betonung sagt man daher auch *statisch*. In diesem Falle gibt es nur einen aktiven Zustand, formal $X^\circ = \{x\}$, daher sind Aktionen und Strategien hier dasselbe.

Die Aktionsmenge A_i soll immer nicht-leer sein. Einelementig $A_i = \{a^*_i\}$ bedeutet, Spieler:in i hat keine Wahl, sondern muss die Aktion a^*_i spielen. Allgemein können wir jede Menge $A_i \ne \emptyset$ mit einem Fußpunkt $a^*_i \in A_i$ als *default option* ausstatten und fortan das Paar (A_i, a^*_i) betrachten, ebenso das Produkt (A_K, a^*_K) mit $a^*_K = (a^*_i)_{i\in K}$. Wenn mehrere Spieler zum Handeln aufgerufen werden, so wird Nicht-Meldung als a^*_i gewertet.

Der **Träger** $\operatorname{supp}(u) := \{\, i \in I \mid \sharp A_i \ge 2 \,\}$ des Spiels $u : \prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} R_i$ ist die Teilmenge aller Spieler $i \in I$, die tatsächlich eine Wahl haben. Meist setzen wir *endlichen* Träger voraus, das heißt, nur endlich viele Spieler $i \in I$ sind gerade aktiv, die anderen warten (in dieser Runde).

Für ein Spiel in Normalform können nicht-aktive Spieler natürlich weggelassen werden, doch im Allgemeinen sind sie dennoch wichtig: Später untersuchen wir Spiele, die über mehrere Runden / Zeitschritte $t \in \mathbb{N}$ gehen, aber in jeder Runde interagieren nur endlich viele Spieler.

Nash–Gleichgewichte

Definition E1L: Nash–Geichgewicht

Vorgelegt sei das Spiel $u : \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R_i$ über der Spielermenge I.
Sei $s \in S = \prod_{i\in I} S_i$ ein Strategievektor. Bezüglich Spieler $i \in I$ heißt s

(1) strikt stabil: $\forall a \in S_i \smallsetminus \{s_i\} : u_i(s_i; s_{-i}) > u_i(a; s_{-i}) \quad :\Leftrightarrow: s \in \mathrm{NE}_i^!(u)$

(2) stabil: $\forall a \in S_i \smallsetminus \{s_i\} : u_i(s_i; s_{-i}) \ge u_i(a; s_{-i}) \quad :\Leftrightarrow: s \in \mathrm{NE}_i(u)$

Gilt dies für alle $i \in I$ so heißt s ein **(striktes) Nash–Gleichgewicht**, geschrieben $s \in \mathrm{NE}^!(u) := \bigcap_{i\in I} \mathrm{NE}_i^!(u)$ und $s \in \mathrm{NE}(u) := \bigcap_{i\in I} \mathrm{NE}_i(u)$.

(3) Sei u reell und eine Toleranz $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ vorgegeben. Wir nennen s dann

ε–stabil: $\forall a \in S_i \smallsetminus \{s_i\} : u_i(s_i; s_{-i}) \ge u_i(a; s_{-i}) - \varepsilon \quad :\Leftrightarrow: s \in \mathrm{NE}_i^\varepsilon(u)$

Gilt Letzteres für alle $i \in I$ so heißt s ein **ε–Nash–Gleichgewicht**.
Allgemein setzen wir $\mathrm{NE}^\varepsilon(u) := \bigcap_{i\in I} \mathrm{NE}_i^{\varepsilon_i}(u)$ für $\varepsilon : I \to \mathbb{R}_{\ge 0} : i \mapsto \varepsilon_i$.

🙂 Zur Approximation gilt somit $\mathrm{NE}(u) = \mathrm{NE}^0(u) = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathrm{NE}^\varepsilon(u)$.
🙂 Für endliche Spiele erhalten wir formal $\mathrm{NE}^!(u) = \bigcup_{\varepsilon<0} \mathrm{NE}^\varepsilon(u)$.

Nash–Gleichgewichte

Die **unmittelbare Bedeutung** dieser Definition ist folgende:

(1) Der Spieler i hat einen Nachteil davon, seine Strategie s_i zu ändern.

(2) Der Spieler i hat keinen Vorteil / Anreiz, einseitig von s_i abzuweichen.

(3) Der Spieler i hat bestenfalls einen ε–kleinen Vorteil. Dieser kann zum Beispiel unterhalb der Wahrnehmungsschwelle / vernachlässigbar sein.

Die Strategien s_{-i} aller anderen Spieler werden als konstant betrachtet. Ich erinnere an die Motivation hinter diesem Modell: Spieler i kontrolliert nur seine Strategie $s_i \in S_i$. Er hat auf s_{-i} keinen direkten Einfluss, etwa durch Absprachen, Verträge, Drohungen, o.ä. außerhalb des Spiels.

Gilt (1) / (2) / (3) für jeden Spieler i, so nennen wir den Strategievektor s ein striktes Gleichgewicht / Gleichgewicht / ε–Gleichgewicht.

Solche Gleichgewichte beschreiben **mögliches rationales Verhalten**. Die Definition ist einfach, aber die Interpretation bedarf einiger Übung. Hierzu haben wir oben die ersten von zahlreichen Beispielen angeführt. Erweitern und pflegen Sie Ihren Beispielfundus!

Existenz von Nash–Gleichgewichten

Der Satz von Nash garantiert die Existenz von Gleichgewichten. Über strikte Gleichgewichte macht er wohlweislich keine Aussage. Sie sind vielleicht einfacher zu verstehen, aber leider oft zu streng. Insbesondere gibt es keine allgemeine Garantie für ihre Existenz.

Übung: Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel und $\bar u : \bar S_1 \times \dots \times \bar S_n \to \mathbb{R}^n$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.

(1) Gilt $\mathrm{NE}^!(u) \subseteq \mathrm{NE}^!(\bar u)$? und umgekehrt $\mathrm{NE}^!(u) \supseteq \mathrm{NE}^!(\bar u)$?

(2) Gilt $\mathrm{NE}(u) \subseteq \mathrm{NE}(\bar u)$? und umgekehrt $\mathrm{NE}(u) \supseteq \mathrm{NE}(\bar u)$?

Übung: Sei $u : S_1 \to S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein endliches Zwei–Personen–Spiel.

(1) Wenn ein striktes Gleichgewicht existiert, ist es dann eindeutig? Wie viele strikte Gleichgewichte kann u haben? und $\bar u$?

(2) Was gilt, wenn u zudem konstante Summe hat? Oder allgemeiner: wenn u strikt kompetitiv ist?

Existenz von Nash–Gleichgewichten

Im Satz von Nash (E1E) wurde das Spiel u als endlich vorausgesetzt: Die Spielermenge I und jede Strategiemenge S_i müssen endlich sein.

Übung: In den Übungen nutzen Sie den Fixpunktsatz von Kakutani, um den Satz von Nash erneut zu beweisen und zu verallgemeinern.

Übung: Sei $I = \{1, 2\}$ sowie $S_i = \{\, s_i^k \mid k \in \mathbb{N} \}$ abzählbar unendlich. Gibt es zu jedem Spiel $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$ ein Nash–Gleichgewicht? Gilt dies für die Fortsetzung $\bar u : \bar S_1 \times \bar S_2 \to \mathbb{R}^2$ auf gemischte Strategien? Diskutieren Sie endliche Konvexkombinationen und dann auch Reihen.

Übung: Sei $I = \mathbb{N}$ sowie $S_i = \{0, 1\}$ für alle $i \in I$, also $\bar S_i \cong [0, 1]$. Gibt es zu jedem Spiel $u : \prod_{i\in I} S_i \to \mathbb{R}^I$ ein Nash–Gleichgewicht? Gilt dies für die Fortsetzung $\bar u : \prod_{i\in I} \bar S_i \to \mathbb{R}^I$? (Knifflig, siehe E1104)

Der Hilbert–Würfel $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ ist kompakt nach dem Satz von Tychonov. Zudem ist er ein wichtiger Modellraum, etwa beim Metrisierungssatz von Urysohn. Hier nun tritt er als Strategieraum $\bar S$ von Spielen auf.

Nashs Satz lässt sich in verschiedene Richtungen verallgemeinern, etwa auf spieltheoretische Modelle überlappender Generationen (Kapitel H). Hier sind tatsächlich unendlich viele Spieler realistisch. Vereinfachend interagiert dabei jeder Spieler $i \in I$ nur mit endlich vielen Nachbarn: $u_i : \prod_{j\in I} S_j \to \mathbb{R}$ hängt nur von endlich vielen Koordinaten $j \in I$ ab. Insbesondere ist u_i dann stetig bezüglich der Produkttopologie.

Allgemein formulieren wir hierzu folgendes Ergebnis:

Satz E1M: Satz von Nash für lokal-endliche Spiele

Sei $I = \mathbb{N}$. Für jeden Spieler $i \in I$ sei die Strategiemenge $S_i \neq \emptyset$ endlich und die Nutzenfunktion $u_i : \prod_{j\in I} S_j \to \mathbb{R}$ stetig in der Produkttopologie.

Dann lässt sich $u : \prod_{i\in I} S_i \to \mathbb{R}^I$ stetig fortsetzen zu $\bar{u} : \prod_{i\in I} \bar{S}_i \to \mathbb{R}^I$, und das Spiel $\bar{u}$ erlaubt mindestens ein Nash–Gleichgewicht.

Aufgabe: Versuchen Sie, diesen Verallgemeinerung zu beweisen (wenn Sie mutig sind für eine beliebige Spielermenge I).

Lösung: Wir setzen $u_i : \prod_{j\in I} S_j \to \mathbb{R}$ affin fort zu $\bar{u}_i : \bar{S} = \prod_{j\in I} \bar{S}_j \to \mathbb{R}$. Man rechnet sorgsam nach, dass mit u_i auch $\bar{u}_i$ stetig ist bezüglich der punktweisen Konvergenz, also der Produkttopologie. (Übung!)

Wir wählen $s^0 \in \bar{S} = \prod_{i\in\mathbb{N}} \bar{S}_i$ willkürlich. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ variieren wir $(s_0, \dots, s_{k-1}) \in \prod_{i<k} \bar{S}_i$ und halten s_i für $i \ge k$ fest. Dank Nash E1E existiert ein Strategievektor $s^k \in \bar{S}$, der für alle Spieler $i < k$ stabil ist.

Dank Kompaktheit des Produktraums $\bar{S}$ existiert eine konvergente Teilfolge $(s^{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$. Nach Umnummerierung schreiben wir kurz $s^k \to s$. Weiterhin gilt Eigenschaft (a): $s^k \in \bar{S}$ ist stabil für alle Spieler $i < k$.

Mit diesem Grenzwert haben wir ein Strategiebündel $s \in \bar{S}$ konstruiert. Wir zeigen nun: s ist ein Nash–Gleichgewicht für das Spiel $\bar{u} : \bar{S} \to \mathbb{R}^I$.

Hierzu nutzen wir, dass die Abbildung $\bar{u} : \bar{S} \to \mathbb{R}^I$ stetig ist. Für jedes $i \in I$ gilt also (b) $\bar{u}_i(s^k) \to \bar{u}_i(s)$ für $k \to \infty$.

Sei $i \in I$ und $\tilde{s}_i \in \bar{S}_i$ eine alternative Strategie für Spieler i. Sei $\varepsilon > 0$. Für jeden hinreichend großen Index $k > i$ gilt:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(s_i; s_{-i}) &\overset{\text{(b)}}{\ge} \bar{u}_i(s_i^k; s_{-i}^k) - \varepsilon \\ &\overset{\text{(a)}}{\ge} \bar{u}_i(\tilde{s}_i; s_{-i}^k) - \varepsilon \\ &\overset{\text{(b)}}{\ge} \bar{u}_i(\tilde{s}_i; s_{-i}) - 2\varepsilon \end{aligned}$$

Wir haben also $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) \ge \bar{u}_i(\tilde{s}_i; s_{-i}) - 2\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Das bedeutet $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) \ge \bar{u}_i(\tilde{s}_i; s_{-i})$. Dies gilt für alle $\tilde{s}_i \in \bar{S}_i$. Demnach ist s ein Nash–Gleichgewicht, wie behauptet, kurz $s \in \mathrm{NE}(\bar{u})$ und somit insbesondere $\mathrm{NE}(\bar{u}) \neq \emptyset$.

Bemerkung: Ist I eine beliebige (überabzählbare) Menge, so gelingt der Beweis wörtlich genauso, allerdings müssen wir Folgen durch Filter ersetzen. Der Satz von Tychonov garantiert die Kompaktheit von $\bar{S}$. (Die Ausformulierung ist eine Fingerübung in technischer Virtuosität.)

Im Forum 2022 wurde erfreulich viel gefragt, Leichtes und Schweres, etwa, ob wir für Satz E1M die geforderte Stetigkeit von u benötigen. Gibt es ein lokal-endliches Spiel u ohne gemischte Gleichgewichte? Die Konstruktion erfordert Kreativität, der Nachweis dann Sorgfalt.

$$u : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u_i(s) = \begin{cases} 2^{-i} s_i & \text{falls } \sharp\operatorname{supp}(s) < \infty, \\ -s_i & \text{falls } \sharp\operatorname{supp}(s) = \infty. \end{cases}$$

Übung: (0) Das Spiel u hat keine Nash–Gleichgewichte, $\mathrm{NE}(u) = \emptyset$: Zu jedem $s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ können sich unendlich viele Spieler verbessern.

(1) Auch die Fortsetzung $\bar{u} : [0,1]^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ hat keine Nash–Gleichgewichte. Sei $\bar{s}_i \in [0,1]$ die Wkt für $s_i = 1$ und dazu p die Wkt für $\sharp\operatorname{supp}(s) < \infty$. Eine einzelne Strategie $\bar{s}_i$ hat auf p keinen Einfluss. Die Auszahlung ist $\bar{u}_i(\bar{s}) = (p2^{-i} + p - 1)\bar{s}_i$. Ist $p = 1$, so gilt $\bar{s}_i < 1$ für unendlich viele $i \in \mathbb{N}$, und jeder davon verbessert sich durch $\bar{s}_i' = 1$. Ist $p < 1$, so gilt $\bar{s}_i > 0$ für unendlich viele $i \in \mathbb{N}$, und fast jeder davon verbessert sich durch $\bar{s}_i' = 0$.

Koalitionen und starke Gleichgewichte

Wir betrachten weiterhin ein Spiel $u : A_I := \prod_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in I} R_i =: R_I$.

Definition E1N: starkes Gleichgewicht (Aumann 1959)

Ein Strategiebündel $a \in A_I$ ist **suboptimal** für die Koalition $K \subseteq I$, falls zu $a_K \in A_K$ eine strikt bessere Alternative $b_K \in A_K$ existiert:

$$u_K(a_K; a_{-K}) < u_K(b_K; a_{-K})$$

Auf dem Produkt R_K definieren wir die Relation $<$ koordinatenweise. Das heißt, für jeden Spieler $i \in K$ gilt $u_i(a_K; a_{-K}) < u_i(b_K; a_{-K})$.

Andernfalls ist $a \in A_I$ **optimal** für K: Zu jeder Alternative $b_K \in A_K$ existiert ein kritischer Spieler $j \in K$ mit $u_j(a_K; a_{-K}) \geq u_j(b_K; a_{-K})$.

Wir nennen $a \in A_I$ ein **starkes Gleichgewicht** des Spiels u, falls a optimal ist für jede Koalition $K \subseteq I$.

Beispiel: (0) Für $K = \emptyset$ ist jedes Strategiebündel $a \in A_I$ optimal.
(1) Speziell für $K = \{i\}$ ist Optimalität die übliche Nash–Bedingung.
Jedes starke Gleichgewicht ist demnach auch ein Nash–Gleichgewicht.

Starke Gleichgewichte sind meist zu stark.

Wir untersuchen einige vertraute Beispiele auf starke Gleichgewichte:

A \ B	0	1
0	1, 2	0, 0
1	0, 0	2, 1

Bach oder Strawinsky

A \ B	0	1
0	2, 2	1, 5
1	5, 1	-9, -9

Feiglingspiel / *chicken game*

A \ B	0	1
0	-2, -2	-2, -5
1	-5, -2	0, 0

Bleiben oder gehen

A \ B	0	1
0	-4, -4	0, -5
1	-5, 0	-1, -1

Gefangenendilemma

Starke Gleichgewichte sind meist zu stark.

📖 Robert Aumann: *Acceptable points in general cooperative n–person games.* In: Contributions to the Theory of Games IV, PUP 1959.

Beispiele: In den obigen Beispielen sind Nash–Gleichgewichte wie üblich markiert durch das Zusammentreffen von zwei farbigen Dreiecken. Starke Gleichgewichte erhalten zudem einen schwarzen Rahmen.

Bei *Bach oder Strawinsky* und ebenso beim *Feiglingspiel* gibt es genau zwei reine Nash–Gleichgewichte. Beide sind stark, denn keines lässt sich strikt verbessern, egal durch welche Koalition $K \in \{\{A\}, \{B\}, \{A, B\}\}$.

Auch *Bleiben oder gehen* hat zwei reine Nash–Gleichgewichte, doch nur das Höhere ist stark. In der Menge $\mathrm{NE}(u)$ aller Nash–Gleichgewichte erhalten wir so eine feinere Unterscheidung. Das nützt manchmal.

Das Gefangenendilemma hat nur ein Nash–Gleichgewicht, und dieses ist nicht stark. Das ist genau der Grund, warum die Lösung nach Nash hier als paradox empfunden wird. Das untersuchen wir gleich noch genauer.

⚠ Für starke Gleichgewichte gilt kein allgemeiner Existenzsatz!

Starke Gleichgewichte sind meist zu stark.

📖 Douglas Bernheim, Bezalel Peleg, Michael Whinston: *Coalition-proof Nash equilibria.* J. Econ. Theory 42 (1987) 1–12.

Ich zitiere ihr Argument, leicht gekürzt zur besseren Lesbarkeit:

While Nash defines equilibrium only in terms of unilateral deviations, strong equilibrium allows for deviations by every conceivable coalition. We believe, however, that the strong concept is actually "too strong." [...]

In environments with unlimited private communication, however, any meaningful agreement to deviate must also be self-enforcing (i.e., immune to deviations by subcoalitions). [...]

As is evident, the consistent application of the notion of self-enforceability involves a recursion. This recursion makes the formal definition of coalition-proof equilibrium which we present below somewhat tricky. However, by consistently applying the requirement of self-enforcability, the coalition-proof concept avoids the inconsistencies of the strong concept.

Koalitions-Stabilität ist wünschenswert.

Wir betrachten weiterhin ein Spiel $u : A_I := \prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} R_i =: R_I$.

Definition E1o: koalitions-stabiles Gleichgewicht

Ein Strategiebündel $a \in A_I$ ist **instabil** für die Koalition $K \subseteq I$, falls gilt: Zu $a_K \in A_K$ existiert eine strikt bessere Alternative $b_K \in A_K$, das heißt

$$u_K(a_K; a_{-K}) < u_K(b_K; a_{-K}),$$

und $(b_K; a_{-K})$ wiederum ist stabil für jede echte Teilkoalition $J \subsetneq K$. Andernfalls ist das Strategiebündel a **stabil** für die Koalition $K \subseteq I$.

(0) Jedes Strategiebündel $a \in A_I$ ist stabil für die leere Koalition $K = \emptyset$.

(1) Für $K = \{i\}$ ist Stabilität die Nash–Bedingung: Spieler i hat keine strikt bessere Alternative, für alle $b_i \in A_i$ gilt $u_i(a_i; a_{-i}) \geq u_i(b_i; a_{-i})$.

(2) Für die Zwei-Spieler-Koalition $K = \{i, j\} \subseteq I$ bedeutet Instabilität:
(2a) Für die Koalition K existiert eine strikt bessere Alternative $b_K \in A_K$, das heißt $u_i(a_K; a_{-K}) < u_i(b_K; a_{-K})$ und $u_j(a_K; a_{-K}) < u_j(b_K; a_{-K})$,
(2b) und das neue Bündel $(b_K; a_{-K})$ ist stabil für i und stabil für j.

Koalitions-Stabilität ist wünschenswert.

Wir untersuchen einige vertrauten Beispiele auf Koalitions-Stabilität:

A \ B	0	1
0	1 ; 2	0 ; 0
1	0 ; 0	2 ; 1

Bach oder Strawinsky

A \ B	0	1
0	2 ; 2	1 ; 5
1	5 ; 1	−9 ; −9

Feiglingsspiel / *chicken game*

A \ B	0	1
0	−2 ; −2	−2 ; −5
1	−5 ; −2	0 ; 0

Bleiben oder gehen

A \ B	0	1
0	−4 ; −4	0 ; −5
1	−5 ; 0	−1 ; −1

Gefangenendilemma

Koalitions-Stabilität ist wünschenswert.

Beispiele: In den obigen Beispielen sind Nash–Gleichgewichte wie üblich markiert durch das Zusammentreffen von zwei farbigen Dreiecken, koalitions-stabile erhalten zudem einen schwarzen Rahmen.

Bei *Bach oder Strawinsky* und beim *Feiglingspiel* gibt es genau zwei reine Nash–Gleichgewichte. Beide sind koalitions-stabil, denn keines lässt sich strikt verbessern, egal durch welche Koalition $K \in \{\{A\}, \{B\}, \{A, B\}\}$.

Auch *Bleiben oder gehen* hat zwei reine Nash–Gleichgewichte, doch nur das Höhere ist koalitions-stabil. Diese Unterscheidung ist nützlich und hilft uns bei der Beschreibung / Analyse / Diskussion solcher Situationen.

Das Gefangenendilemma hat nur ein Nash–Gleichgewicht, und dieses ist koalitions-stabil. Dieses wohlüberlegte Konzept löst in gewisser Weise das Paradox auf: Die Koalition $\{A, B\}$ kann zwar das Ergebnis für alle strikt verbessern, doch die Vereinbarung dieser Koalition ist nicht stabil.

⚠ Warum nutzen wir dann statt Nash nicht gleich Koalitions-Stabilität? Für koalitions-stabile Gleichgewichte gilt kein allgemeiner Existenzsatz! Die folgende Übung gibt hierzu ein naheliegendes Beispiel.

Koalitions-Stabilität ist wünschenswert.

Übung: Alice, Bob und Chuck teilen sich ein (kontinuierliches) Erbe. Jede:r schlägt eine Aufteilung $(a, b, c) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a + b + c = 1$ vor, alle drei gleichzeitig per Brief an den Notar. Schlagen zwei oder drei dasselbe vor, so wird dies ausgezahlt, andernfalls verfällt das Erbe. Finden Sie alle Nash–Gleichgewichte. Welche sind koalitions-stabil? Erweiterung: Was passiert beim Übergang zu *gemischten* Strategien? Herausforderung: Konstruieren Sie *endliche* Gegenbeispiele dieser Art.

Thus far, we have been unable to find sufficient conditions which guarantee the existence of coalition-proof Nash equilibria for a reasonably large set of games. It is, of course, easy to see that coalition-proof equilibria exist in any model for which, given any set of actions by any proper subset of players, the game induced on the remaining players has a unique Nash equilibrium. [...] Coalition-proof Nash equilibria certainly exist in a larger number of games than do strong Nash equilibria. Further, examination of a number of examples indicates that coalition-proof equilibria do exist quite frequently, and in such cases provide a valuable tool for refining the Nash equilibrium set.

Bernheim, Peleg, Whinston: *Coalition-proof Nash equilibria.*

Sicherheitsstrategie und Sicherweitswert

Definition E2A: Sicherheitswert und Sicherheitsstrategie

Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to R_1 \times \dots \times R_n$ ein endliches Spiel, oder allgemein ein reelles Spiel mit $S = S_1 \times \dots \times S_n$ kompakt und $u : S \to \mathbb{R}^n$ stetig.

Spieler i kann mindestens folgende Auszahlung für sich garantieren:

$$\operatorname{val}_i(u) := \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i; s_{-i}) = \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i^*, s_{-i})$$

Hierzu wählt er als **Sicherheitsstrategie** $s_i^* \in S_i$ einen Min-Maximierer. Wir nennen $\operatorname{val}_i(u)$ den **Sicherheitswert** des Spiels u für Spieler i.

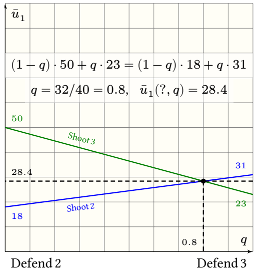
☺ Spieler i maximiert seinen Mindestgewinn durch die Strategie $s_i^* \in S_i$. Mögliche Interpretation: Spieler i zieht zuerst, öffentlich und endgültig.

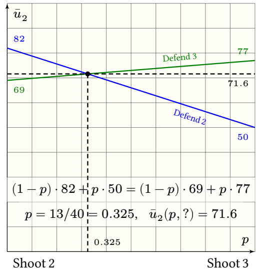
Im Allgemeinen bilden Sicherheitsstrategien $(s_i^*)_{i \in I}$ kein Gleichgewicht! Das gilt selbst für Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele, wie wir gleich sehen: Manchmal bleibt eine Lücke zwischen Maximin und Minimax.

☺ Diese verschwindet genau für Nash–Gleichgewichte: Das ist der Inhalt von Neumanns Minimax-Satz E2D.

Basketball Endgame als Spiel mit konstanter Summe

A \ B	Defend 2	Defend 3
Shoot 2	82 / 18	69 / 31
Shoot 3	50 / 50	77 / 23





Aufgabe: Bestimmen und interpretieren Sie die Sicherheitsstrategien.

$$\max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x,y) = 23 \qquad \text{vs} \qquad \max_{y \in S_2} \min_{x \in S_1} u_2(x,y) = 69$$

☹ Es gilt die Summe $u_1 + u_2 = 100$, aber nur $23 + 69 = 92 < 100$.
☹ Die Sicherheitsstrategien $(s_i^*)_{i \in I}$ bilden kein Nash–Gleichgewicht.

$$\max_{x \in [S_1]} \min_{y \in [S_2]} \bar u_1(x,y) = 28.4 \qquad \text{vs} \qquad \max_{y \in [S_2]} \min_{x \in [S_1]} \bar u_2(x,y) = 71.6$$

☺ Dahinter stecken allgemeine Regeln und der Minimax-Satz E2D.
☺ Die Lücke verschwindet genau für Nash–Gleichgewichte!

Matching Pennies ist ein Nullsummenspiel.

A \ B	Kopf	Zahl
Kopf	+1 / −1	−1 / +1
Zahl	−1 / +1	+1 / −1

Aufgabe: Bestimmen und interpretieren Sie die Sicherheitsstrategien.

$$\max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x,y) = -1 \qquad \text{vs} \qquad \max_{y \in S_2} \min_{x \in S_1} u_2(x,y) = -1$$

☹ Es gilt die Summe $u_1 + u_2 = 0$, doch nur $(-1) + (-1) = -2 < 0$.
☹ Die Sicherheitsstrategien $(s_i^*)_{i \in I}$ bilden kein Nash–Gleichgewicht.

$$\max_{x \in [S_1]} \min_{y \in [S_2]} \bar u_1(x,y) = 0 \qquad \text{vs} \qquad \max_{y \in [S_2]} \min_{x \in [S_1]} \bar u_2(x,y) = 0$$

☺ Dahinter stecken allgemeine Regeln und der Minimax-Satz E2D.
☺ Die Lücke verschwindet genau für Nash–Gleichgewichte!

Schere-Stein-Papier ist ein Nullsummenspiel.

A \ B	Schere	Stein	Papier
Schere	0 / 0	+1 / −1	−1 / +1
Stein	−1 / +1	0 / 0	+1 / −1
Papier	+1 / −1	−1 / +1	0 / 0

Aufgabe: Bestimmen und interpretieren Sie die Sicherheitsstrategien.

$$\max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x,y) = -1 \qquad \text{vs} \qquad \max_{y \in S_2} \min_{x \in S_1} u_2(x,y) = -1$$

☹ Es gilt die Summe $u_1 + u_2 = 0$, doch nur $(-1) + (-1) = -2 < 0$.

$$\max_{x \in [S_1]} \min_{y \in [S_2]} \bar u_1(x,y) = 0 \qquad \text{vs} \qquad \max_{y \in [S_2]} \min_{x \in [S_1]} \bar u_2(x,y) = 0$$

☺ Die Lücke verschwindet genau für Nash–Gleichgewichte!

Gleichgewichte und Minimax = Maximin

Lemma E2b: Gleichgewichte und Minimax = Maximin

Sei $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Nullsummenspiel, also $u_1 + u_2 = 0$.
Zudem sei das Spiel endlich oder $S_1 \times S_2$ kompakt und u stetig.

(0) Allgemein gilt „Maximin ≤ Minimax", also ausgeschrieben:

$$\max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x,y) \le \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x,y)$$

(1) Ist $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ein Nash–Gleichgewicht, so gilt Gleichheit:

$$u_1(s_1,s_2) = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x,y) = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x,y)$$

(2) Angenommen, es gilt die ersehnte Gleichheit „Maximin = Minimax".
Wir wählen einen Min-Maximierer $s_1 \in S_1$ und Max-Minimierer $s_2 \in S_2$:

$$\begin{aligned} v &= \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x,y) = \min_{y \in S_2} u_1(s_1,y), \\ v &= \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x,y) = \max_{x \in S_1} u_1(x,s_2). \end{aligned}$$

Dann ist das Paar $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ein Nash–Gleichgewicht.

Gleichgewichte und Minimax = Maximin

Beweis: (0) Für alle $x \in S_1$ und $y \in S_2$ gilt:

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &\overset{(a)}{\le} u_1(x,y) \\ u_1(x,y) &\overset{(b)}{\le} \max_{x \in S_1} u_1(x,y) \\ \min_{y \in S_2} u_1(x,y) &\overset{(c)}{\le} \max_{x \in S_1} u_1(x,y) \\ \min_{y \in S_2} u_1(x,y) &\overset{(d)}{\le} \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x,y) \\ \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x,y) &\overset{(e)}{\le} \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x,y) \end{aligned}$$

🙂 Wir führen inf/sup, hier min/max, in der richtigen Reihenfolge ein!
Die Ungleichung (a) ist trivial. Wir nehmen rechts das Maximum über x, damit wird die rechte Seite höchstens größer, also gilt (b). Wir nehmen links das Minimum über y, damit wird die linke Seite höchstens kleiner, also gilt (c). Die Ungleichung (c) gilt somit für alle $x \in S_1$ und $y \in S_2$; dabei hängt allerdings die linke Seite nur noch von x ab und die rechte Seite nur noch von y. Hieraus folgen sofort (d) und (e).

Gleichgewichte und Minimax = Maximin

(1) Für jedes Nash–Gleichgewicht $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ gilt:

$$\left\{ \begin{aligned} u_1(s_1,s_2) &= \max_{x \in S_1} u_1(x,s_2) &\ge \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x,y) \\ u_1(s_1,s_2) &= \min_{y \in S_2} u_1(s_1,y) &\le \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x,y) \end{aligned} \right\} \Longrightarrow$$

$$\min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x,y) \le u_1(s_1,s_2) \le \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x,y)$$

Dank (0) gilt auch die umgekehrte Ungleichung, hieraus folgt Gleichheit.

(2) Dank der genannten Voraussetzungen gilt:

$$\left\{ \begin{aligned} u_1(s_1,s_2) &\le \max_{x \in S_1} u_1(x,s_2) = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x,y) = v \\ u_1(s_1,s_2) &\ge \min_{y \in S_2} u_1(s_1,y) = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x,y) = v \end{aligned} \right\} \Longrightarrow$$

$$u_1(s_1,s_2) = \max_{x \in S_1} u_1(x,s_2) = \min_{y \in S_2} u_1(s_1,y)$$

Demnach ist $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ein Nash–Gleichgewicht. QED

Austauschregel für Nullsummenspiele

Hieraus folgen grundlegende Rechenregeln für Nullsummenspiele:

Satz E2c: Austauschregel für Nullsummenspiele

(1) Dualität: Für unser Nullsummenspiel $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$ gilt genau dann „Minimax = Maximin", wenn Nash–Gleichgewichte existieren.

(2) Auszahlungsgleichheit: Je zwei Nash–Gleichgewichte (s_1, s_2) und (s_1^*, s_2^*) des Spiels u führen zum selben Ergebnis $u_1(s_1,s_2) = u_1(s_1^*, s_2^*)$.

(3) Alle Nash–Gleichgewichte sind austauschbar: Sind (s_1, s_2) und (s_1^*, s_2^*) Nash–Gleichgewichte des Spiels u, dann auch (s_1, s_2^*) und (s_1^*, s_2).

(4) Sind $S_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ und $S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und darauf u affin-linear, so ist $\mathrm{NE}(u)$ das Produkt zweier konvexer Mengen $K_1 \subseteq S_1$ und $K_2 \subseteq S_2$.

🙂 Die Aussagen (2) und (3) gelten für *alle* Nash–Gleichgewichte.
Das ist eine nützliche Besonderheit von Nullsummenspielen.

Es gibt Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele ohne Gleichgewichte, etwa *Matching Pennies* und *Schere-Stein-Papier* und viele weitere.
Auch für diese sind die Aussagen (2) und (3) wahr, aber eben *leer*.

Die Sätze von Nash und von Neumann

Gleichgewichte sind grundlegend. Gibt es sie immer? Ja, oft genug:
Dies verdanken wir dem Existenzsatz E1E für Nash–Gleichgewichte.
Hieraus folgt der Hauptsatz für Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele:

Satz E2D: Minimax-Satz, John von Neumann 1928

Sei $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$ ein endliches Nullsummenspiel, also $u_1 + u_2 = 0$, und $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \to \mathbb{R}^2$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.

Dank E1E existiert ein Gleichgewicht $(s_1^*, s_2^*) \in \bar{S}_1 \times \bar{S}_2$, und somit gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{val}_1(\bar{u}) &:= \max_{x \in \bar{S}_1} \min_{y \in \bar{S}_2} \bar{u}_1(x,y) &= \bar{u}_1(s_1^*, s_2^*) &= \min_{y \in \bar{S}_2} \max_{x \in \bar{S}_1} \bar{u}_1(x,y), \\
\operatorname{val}_2(\bar{u}) &:= \max_{y \in \bar{S}_2} \min_{x \in \bar{S}_1} \bar{u}_2(x,y) &= \bar{u}_2(s_1^*, s_2^*) &= \min_{x \in \bar{S}_1} \max_{y \in \bar{S}_2} \bar{u}_2(x,y).
\end{aligned}$$

Das ist der **Wert** des Spiels $\bar{u}$ für Spieler i. Es gilt $\operatorname{val}_1(\bar{u}) + \operatorname{val}_2(\bar{u}) = 0$.

Die Sätze von Nash und von Neumann

☺ Diese Vereinfachung ist eine Besonderheit für Nullsummenspiele, oder allgemein Zwei-Personen-Spiele mit konstanter Summe: Sicherheitsstrategien sind optimal, sobald sich die Lücke schließt, also Min-Maximierer und Max-Minimierer denselben Wert ergeben.

☺ Dieser Wert ist das erwartete Ergebnis bei rationaler Spielweise.

Mit diesem Satz begann die Theorie, als erstes substantielles Ergebnis: Jedem Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel wird so ein Wert zugeordnet.

Von Neumann bewies diesen Satz 1928 zunächst auf andere Weise. Nashs allgemeiner Existenzsatz eröffnete 1950 einen kürzeren Weg.

I thought there was nothing worth publishing until the Minimax Theorem was proved. As far as I can see, there could be no theory of games without that theorem. (John von Neumann, 1953)

☺ Von Neumanns Ideen beeinflussten maßgeblich die Entdeckung der ersten Dualitätsprinzipien in der Linearen Optimierung. Wir werden dies im nächsten Kapitel genauer untersuchen.

Strikt kompetitive Spiele

Definition E2E: konstante Summe und strikt kompetitiv

Ein Spiel $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ hat **konstante Summe (Null)**, wenn es die Bedingung $u_1 + \dots + u_n = \text{const}$ (bzw. $= 0$) erfüllt.

Ein Zwei-Personen-Spiel $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$ ist **strikt kompetitiv**, wenn für alle $s, s' \in S$ die Äquivalenz $u_1(s) < u_1(s') \iff u_2(s) > u_2(s')$ gilt.

Für **kompetitive Spiele** verlangen wir diese Äquivalenz nur für alle Strategievektoren $s, s' \in S$, die sich in einer Koordinate unterscheiden.

Strikt kompetitive Spiele

Übung: Konstante Summe $\overset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ strikt kompetitiv $\overset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ kompetitiv.
Gilt das Minimax-Lemma E2B für kompetitive Spiele $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$?
Wenn u kompetitiv ist, gilt dies dann auch für die Fortsetzung $\bar{u}$?
Hat u konstante Summe, dann auch $\bar{u}$. (Dies nutzen wir in E2D.)

Kompetitive Spiele sind ein sehr spezieller aber durchaus wichtiger Fall. Es lohnt sich daher, hierzu spezielle Sätze und Techniken zu entwickeln. In vielen realistischen Situationen haben Spiele nicht konstante Summe und sind auch nicht kompetitiv. Nash–Gleichgewichte helfen allgemein!

Strikt kompetitive Spiele

Beispiel: Das Spiel *Schere-Stein-Papier* hat kein Gleichgewicht in reinen Strategien. Auch der Minimax-Satz gilt nicht in reinen Strategien.
In gemischten Strategien haben die Spieler viel mehr Möglichkeiten.
Der Satz von Nash sagt die Existenz von Gleichgewichten voraus.
Hier ist $\frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Stein} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier}$ das einzige Gleichgewicht.

Aufgabe: Prüfen Sie sorgfältig nach, dass dies ein Gleichgewicht ist.
Wie zeigen Sie geschickt, dass dies das einzige Gleichgewicht ist?
Hierbei hilft Ihnen die Austauschregel E2c für Nullsummenspiele.

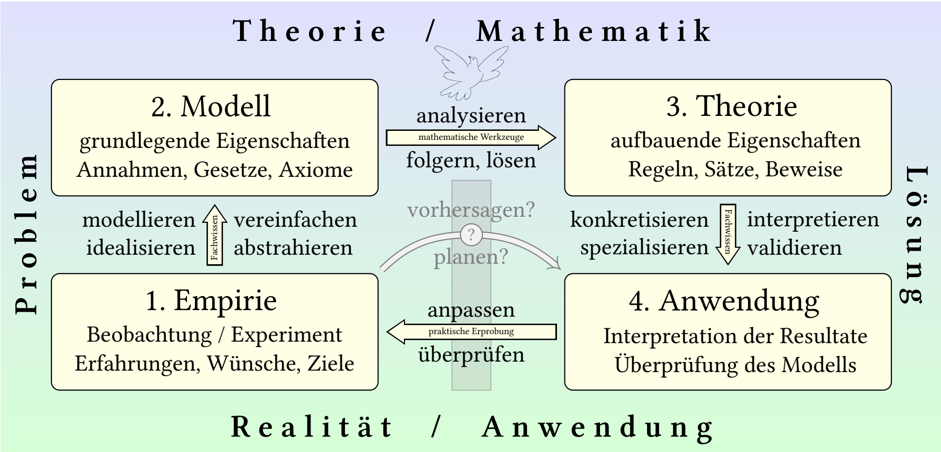
Strikt kompetitive Spiele

Aufgabe: Untersuchen Sie ebenso alle bisher vorgestellten Spiele.
Welche haben konstante Summe, welche sind (strikt) kompetitiv?

Finden Sie alle Nash–Gleichgewichte und vergleichen Sie diese beiderseitig mit Sicherheitsstrategien (also Min-Maximierern).

Wozu dient Mathematik?

Alles Leben ist Problemlösen. (Karl Popper, 1902–1994)



Mathematik untersucht sowohl abstrakte Strukturen als auch konkrete Anwendungen. Dies sind keine Gegensätze, sondern sie ergänzen sich!

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant, 1724–1804)

Wozu dient Mathematik?

Beispiel: Schere-Stein-Papier mit Brunnen

Wir erweitern das Spiel *Schere-Stein-Papier*. Beide Spieler haben nun zusätzlich die Strategie *Brunnen*: Die beiden Auszahlungsmatrizen sind:

A \ B	Schere	Stein	Papier	Brunnen
Schere	0 / 0	$+1$ / -1	-1 / $+1$	$+1$ / -1
Stein	-1 / $+1$	0 / 0	$+1$ / -1	$+1$ / -1
Papier	$+1$ / -1	-1 / $+1$	0 / 0	-1 / $+1$
Brunnen	-1 / $+1$	-1 / $+1$	$+1$ / -1	0 / 0

Aufgabe: Ist dies ein Nullsummenspiel? Was ist sein Wert? Sehen Sie ein Nash–Gleichgewicht dieses Spiels? gar alle?

Beispiel: Schere-Stein-Papier mit Brunnen

Lösung: Die Strategie Brunnen dominiert schwach Stein. Wir streichen daher Stein und erhalten $u' : S' \times S' \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der reduzierten Strategiemenge $S' = \{\text{Schere}, \text{Papier}, \text{Brunnen}\}$. Dieses Spiel Schere-Papier-Brunnen ist **isomorph** zu *Schere-Stein-Papier*.

⚠ Isomorphie und Symmetrie vereinfachen unsere Analyse! Wir kennen daher das Gleichgewicht $(s', s') \in \mathrm{NE}(\bar{u}')$ mit

$$s' = \frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier} + \frac{1}{3} \cdot \text{Brunnen}$$

Der untenstehende Satz E2H garantiert $\mathrm{NE}(\bar{u}') \subseteq \mathrm{NE}(\bar{u})$, also ist (s', s') auch ein Nash–Gleichgewicht für *Schere-Stein-Papier-Brunnen*.

⚠ Das Spiel u könnte durchaus noch weitere Gleichgewichte haben. Das muss man jeweils genauer nachrechnen. Versuchen Sie es! Hierbei hilft Ihnen die Austauschregel E2C für Nullsummenspiele.

🙂 Dies ist ein symmetrisches Nullsummenspiel, der Wert ist also 0. Zur Berechnung des Wertes genügt uns ein einziges Gleichgewicht, hier (s', s'). Alternativ impliziert bereits die Symmetrie den Wert 0.

Stark und schwach dominierte Strategien

Definition E2F: dominierte Strategien

Sei $u : \prod_{i \in I} S_i \to \prod_{i \in I} R_i$ ein strategisches Spiel und $i \in I$ ein Spieler. Für je zwei seiner Strategien $x, y \in S_i$ vergleichen wir die Funktionen

$$u_i(x; -), u_i(y; -) : S_{-i} \to R_i.$$

Schwache Dominanz $x \le_i^u y$ bedeutet $u_i(x; s_{-i}) \le u_i(y; s_{-i})$,
starke Dominanz $x <_i^u y$ bedeutet $u_i(x; s_{-i}) < u_i(y; s_{-i})$
jeweils für alle möglichen Gegenstrategien $s_{-i} \in S_{-i}$.

Für Teilmengen $X, Y \subseteq S_i$ bedeutet Dominanz $X \le_i^u Y$ bzw. $X <_i^u Y$: Zu jedem $x \in X$ existiert ein $y \in Y$ mit $x \le_i^u y$ bzw. $x <_i^u y$.

Wir nennen $x \in S_i$ **dominiert in** u, falls $x \le_i^u y$ für ein $y \in S_i \setminus \{x\}$ gilt.
Wir nennen $y \in S_i$ **dominant in** u, falls $x \le_i^u y$ für alle $x \in S_i \setminus \{y\}$ gilt.

Wir schreiben $\mathrm{D}_i(u) := \{ y \in S_i \mid S_i \le_i^u y \}$ und $\mathrm{DNE}(u) := \prod_{i \in I} \mathrm{D}_i(u)$.
Ebenso für starke Dominanz und $\mathrm{D}_i^!(u) := \{ y \in S_i \mid S_i \setminus \{y\} <_i^u y \}$

⚠ Es gilt $\mathrm{DNE}(u) \subseteq \mathrm{NE}(u)$, oft $\mathrm{DNE}(u) = \emptyset$, selten $\mathrm{DNE}(u) = \mathrm{NE}(u)$.

Stark und schwach dominierte Strategien

Schwache und starke Dominanz sind häufig nützlich; dazwischen liegt: **Halbstarke Dominanz** $x \lessapprox_i^u y$ bedeutet $u_i(x; s_{-i}) \le u_i(y; s_{-i})$ für alle und $u_i(x; s_{-i}) < u_i(y; s_{-i})$ für mindestens eine Gegenstrategie $s_{-i} \in S_{-i}$.

Bei Mengen bedeutet Dominanz $X \le_i^u Y$ bzw. $X <_i^u Y$: Es existiert eine Abbildung $f : X \to Y$ mit $x \le_i^u f(x)$ bzw. $x <_i^u f(x)$ für alle $x \in X$.

Die (schwach) dominanten Strategien $s_i \in \mathrm{D}_i(u)$ bedeuten: s_i ist immer eine beste Antwort, gegen alle $s_{-i} \in S_{-i}$.

Eine stark dominante Strategie $s_i \in \mathrm{D}_i^!(u)$ bedeutet: s_i ist die eindeutige beste Antwort, gegen alle $s_{-i} \in S_{-i}$.

🙂 Schwache Dominanz $x \le_i^u y$ bedeutet: Ein rationaler Spieler **kann** seine Strategie x jederzeit ersetzen durch eine mindestens ebenso gute Alternative, etwa y. Er kann x spielen, er kann es aber auch vermeiden.

🙂 Starke Dominanz $x <_i^u y$ bedeutet: Ein rationaler Spieler **muss** seine Strategie x jederzeit ersetzen durch eine strikt bessere Alternative, etwa y. Er kann nicht x spielen, er wird dies in jedem Falle vermeiden.

Streichung dominierter Strategien

Satz E2G: Streichung dominierter Strategien, reiner Fall

Gegeben sei ein Spiel $u : \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R_i$ und $S_i = S_i' \sqcup D_i$ für $i \in I$. Löschung von D_i ergibt die Einschränkung $u' : \prod_{i\in I} S_i' \to \prod_{i\in I} R_i$:

(1) Aus starker Dominanz $S_i' >_i^u D_i$ folgt $\mathrm{NE}(u') = \mathrm{NE}(u)$.

(2) Aus schwacher Dominanz $S_i' \ge_i^u D_i$ folgt $\mathrm{NE}(u') \subseteq \mathrm{NE}(u)$.

Beweis: (2) Sei $s \in \mathrm{NE}(u')$, also $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x'\in S_i'} u_i(x'; s_{-i})$. Dies ist gleich $\max_{x\in S_i} u_i(x; s_{-i})$ dank $S_i' \ge_i^u D_i'$, also $s \in \mathrm{NE}(u)$.

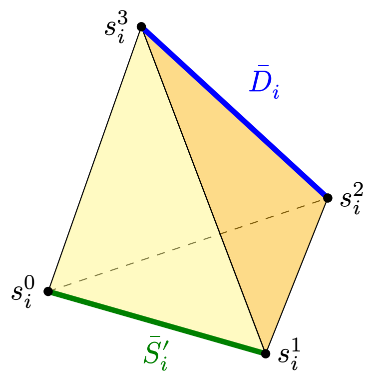
(1) Sei $s \in \mathrm{NE}(u)$, also $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x\in S_i} u_i(x; s_{-i})$. Aus $S_i' >_i^u D_i'$ folgt $s_i \in S_i'$. Also $s \in S'$ und $s \in \mathrm{NE}(u')$. QED

Fortsetzung: Zu $u : \prod_{i\in I} S_i \to \mathbb{R}^I$ betrachten wir $\bar u : \prod_{i\in I} \bar S_i \to \mathbb{R}^I$. Gilt (starke bzw. schwache) Dominanz E2F bezüglich aller reinen Gegenstrategien $s_{-i} \in S_{-i}$, so auch für alle gemischten $\bar s_{-i} \in \bar S_{-i}$.

Aus $x_0 \le_i^u y_0, \dots, x_n \le_i^u y_n$ folgt $\sum_k p_k x_k \le_i^u \sum_k p_k y_k$ für alle $p \in \Delta^n$. Gilt für ein k zudem $x_k <_i^u y_k$ und $p_k > 0$, so folgt $\sum_k p_k x_k <_i^u \sum_k p_k y_k$.

Streichung dominierter Strategien

Geometrisch sieht die Löschung gemischter Strategien etwa so aus:



In diesem Beispiel sei $S_i' = \{s_i^0, s_i^1\}$ und $D_i = \{s_i^2, s_i^3\}$. Wir können nicht nur die Ecken s_i^2 und s_i^3 löschen, sondern müssen auch alle gemischten Strategien löschen, die diese Ecken in ihrem Träger nutzen, also $\bar S_i \smallsetminus \bar S_i'$.

Streichung dominierter Strategien

Satz E2H: Streichung dominierter Strategien, gemischter Fall

Sei $u : \prod_{i\in I} S_i \to \mathbb{R}^I$ und $u' : \prod_{i\in I} S_i' \to \mathbb{R}^I$ mit $S_i = S_i' \sqcup D_i$. Dann gilt

$$\bar S_i = \bar S_i' * \bar D_i = \{ (1-t)x + ty \mid t \in [0,1],\ x \in \bar S_i',\ y \in \bar D_i \}.$$

Die Differenz der gemischten Strategiemengen ist demnach

$$\bar S_i \smallsetminus \bar S_i' = \{ (1-t)x + ty \mid t \in]0,1],\ x \in \bar S_i',\ y \in \bar D_i \}.$$

(1) Aus $\bar S_i' >_i^u D_i$ folgt $\bar S_i' >_i^u \bar S_i \smallsetminus \bar S_i'$ wie zuvor erklärt.

Das bedeutet: Stark dominierte Strategien von u kommen in keinem Nash–Gleichgewicht von $\bar u$ vor. Bei ihrer Streichung gilt $\mathrm{NE}(\bar u') = \mathrm{NE}(\bar u)$.

(2) Aus $\bar S_i' \ge_i^u D_i$ folgt $\bar S_i' \ge_i^u \bar S_i \smallsetminus \bar S_i'$ wie zuvor erklärt.

Bei Streichung schwach dominierter Strategien gilt $\mathrm{NE}(\bar u') \subseteq \mathrm{NE}(\bar u)$. Im Allgemeinen können dabei Nash–Gleichgewichte verloren gehen.

Streichung dominierter Strategien

Aufgabe: Rechnen Sie diese Aussagen zur Übung sorgfältig nach!

Beweis: (2) Sei $s \in \mathrm{NE}(\bar u')$, also $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x'\in \bar S_i'} u_i(x'; s_{-i})$. Für jedes $x \in \bar S_i$ gilt $x = (1-t)s_i' + ts$ mit $t \in [0,1]$, $s_i' \in \bar S_i'$ und $s \in \bar D_i$. Es existiert $s' \in \bar S_i'$ mit $s' \ge_i^u s$, also $x \le_i^u x' := (1-t)s_i' + ts' \in \bar S_i'$. Hieraus folgt $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x\in \bar S_i} u_i(x; s_{-i})$, also $s \in \mathrm{NE}(\bar u)$.

(1) Sei $s \in \mathrm{NE}(\bar u)$, also $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x\in \bar S_i} u_i(x; s_{-i})$ für jedes $i \in I$. Wir haben $s_i = (1-t)s_i' + ts$ mit $t \in [0,1]$, $s_i' \in \bar S_i'$ und $s \in \bar D_i$. Es existiert $s' \in \bar S_i'$ mit $s' >_i^u s$. Für $x' = (1-t)s_i' + ts'$ wäre $x' >_i^u s_i$ oder $t = 0$. Also gilt $t = 0$ und somit $s_i = s_i' \in \bar S_i'$. Das zeigt $s \in \mathrm{NE}(\bar u')$.

☺ Die Sachlage ist einfach. Warum ist die Notation so detailverliebt? Damit alles klar und einfach wird, müssen wir sorgsam argumentieren!

☺ Das Erkennen und Streichen von (strikt) dominierten Strategien vereinfacht die Spielanalyse. Das ist überaus nützlich und meist leicht, doch die Feinheiten sind subtil und müssen sauber ausgeführt werden. Ich betone dies, weil es erfahrungsgemäß oft falsch angewendet wird.

Stark und schwach dominierte Strategien

🙂 Anschaulich gesagt: (2) Beim Erweitern von u' zu u nehmen wir schwach dominierte Strategien hinzu. Diese erhöhen offensichtlich nicht das Maximum für den Spieler $i \in I$, also bleiben Gleichgewichte des kleinen Spiels u' auch Gleichgewichte des großen Spiels u.

(1) Stark dominierte Strategien kommen in keinem Gleichgewicht vor. Wir können sie getrost streichen oder hinzufügen, auch hinzumischen.

🙂 Streichung dominierter Strategien vereinfacht das Spiel u zu u'. Das hilft bei der Suche nach einem bzw. allen Gleichgewichten:

(2) Die Streichung schwach dominierter Strategien löscht vielleicht Gleichgewichte. Die Inklusion $\mathrm{NE}(u') \subseteq \mathrm{NE}(u)$ hingegen gilt immer: Haben wir also ein Gleichgewicht für u' gefunden, so bleibt dies für u. Das genügt, wenn wir nur *irgendein* Gleichgewicht von u finden wollen.

(1) Die Streichung stark dominierter Strategien ändert nichts an den Gleichgewichten: Genau das garantiert unsere obige Rechnung.

🙂 Dies können wir iterieren, bis keine Streichungen mehr möglich sind. Hierzu benötigen wir (wie immer) Rationalität entsprechend hoher Stufe!

Stark und schwach dominierte Strategien

Erinnerung: Stufen der Rationalität

$\mathcal{R}_1$: Wer von Ihnen weiß, was „Stufen der Rationalität“ bedeutet?
$\mathcal{R}_2$: Wer von Ihnen weiß, dass alle anderen das ebenfalls wissen?
$\mathcal{R}_3$: Wer von Ihnen weiß, dass alle wissen, dass alle das wissen? ...

♦ **Definition A2A:** Stufen der Rationalität

Unter **(unbeschränkter) Rationalität** verstehen wir folgende Axiome:

$\mathcal{R}_0$: Jeder Spieler will sein Ergebnis (Nutzen, Gewinn, ...) maximieren.

$\mathcal{R}_1$: Jeder Spieler versteht zudem alle Spielregeln und Konsequenzen.

$\mathcal{R}_2$: Es gilt die vorige Aussage $\mathcal{R}_1$, und jeder Spieler weiß dies.

$\mathcal{R}_3$: Es gilt die vorige Aussage $\mathcal{R}_2$, und jeder Spieler weiß dies.

etc... Genauer definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Aussage

$\mathcal{R}_n$: Es gilt die Aussage $\mathcal{R}_{n-1}$, und jeder Spieler weiß dies.

$\mathcal{R}_\infty$: Es gilt die Aussage $\mathcal{R}_n$ für jede Stufe $n \in \mathbb{N}$.

🙂 Wir nennen dies *gemeinsames Wissen*, engl. *common knowledge*. Beantworten Sie erneut die obigen Fragen: haben wir $\mathcal{R}_\infty$ hergestellt?

Erinnerung: Stufen der Rationalität

Beispiel zu schwach dominierten Strategien

Aufgabe: Konstruieren Sie ein Spiel u, bei dem die Streichung einer schwach dominierten Strategie *alle* Nash–Gleichgewichte vernichtet.

Lösung: Wir beginnen mit einem Teilspiel u', etwa *Matching Pennies*:

A \ B	b_0	b_1	b_2
a_0	-1 / $+1$	$+1$ / -1	0 / -2
a_1	$+1$ / -1	-1 / $+1$	$\boxed{+2}$ / $\boxed{+1}$

Die Strategie b_1 dominiert schwach die neue Strategie b_2 von Spieler B. Die Auszahlungen für Spieler A sind beliebig, wir wählen sie geschickt.

Die Strategie (a_1, b_2) ist ein Nash–Gleichgewicht des Spiels u. Beim Streichen der dominierten Strategie b_2 wird es vernichtet.

Das Spiel u' hat gar keine Gleichgewichte, $\bar{u}'$ hingegen schon. Hier gilt $\mathrm{NE}(\bar{u}') \subsetneq \mathrm{NE}(\bar{u})$, im Einklang mit obigem Satz E2H.

Beispiel zu stark dominierten Strategien

Aufgabe: Finden Sie alle reinen Gleichgewichte, dann alle gemischten.

A \ B	b_0	b_1	b_2
a_0	4 / 1	$\boxed{3}$ / $\boxed{3}$	1 / 2
a_1	3 / 2	2 / 1	3 / 0

Lösung: Die reinen Gleichgewichte finden wir durch Hinsehen: Hier ist nur (a_0, b_1) ein Nash–Gleichgewicht, es ist sogar strikt.

Die Strategie b_1 dominiert stark b_2. Im Teilspiel u' dominiert a_0 stark a_1. Im Teilspiel u'' dominiert b_1 stark b_0. Schließlich bleibt nur das triviale Teilspiel u''' bestehend aus (a_0, b_1). Das ist das einzige Gleichgewicht!

⚠ Es ist eine recht seltene Ausnahme, dass sich Spiele so einfach lösen lassen durch iterierte Löschung von (stark) dominierten Strategien. Meist lassen sich nur wenige oder gar keine Strategien ausschließen. Wenn es jedoch möglich ist, bietet dies eine nützliche Vereinfachung.

Dominierte Strategien in der affinen Fortsetzung

Aufgabe: Gibt es Spiele $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit einer Strategie $s_2 \in S_2$, die im Spiel u nicht dominiert wird, wohl aber in $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

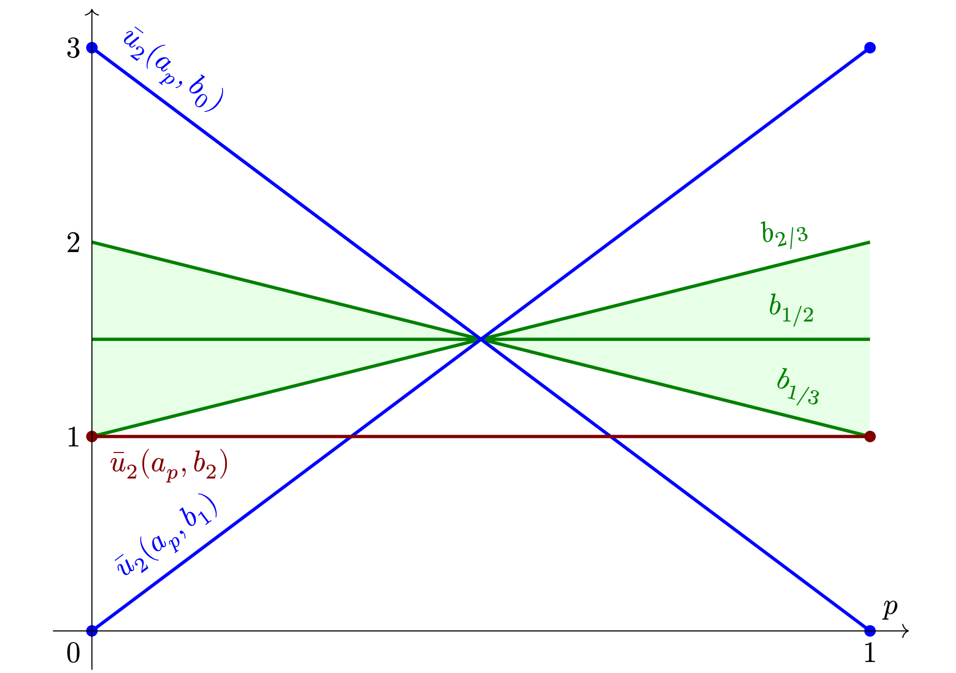
Lösung: Ja, das ist möglich. Wir konstruieren ein einfaches Beispiel:

A \ B	b_0	b_1	b_2
a_0	$*$ / 3	$*$ / 0	$*$ / 1
a_1	$*$ / 0	$*$ / 3	$*$ / 1

Die Strategie b_2 wird von keiner reinen Strategie dominiert: weder b_0 noch b_1. Dies gelingt jedoch der gemischten Strategie $\frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{2}b_1 >_2^u b_2$. (Die Auszahlungen für Spieler 1 sind unerheblich und nicht gezeigt.)

Starke Dominanz $b_t := (1-t)b_0 + tb_1 >_2^u b_2$ gilt für alle $1/3 < t < 2/3$, und immerhin noch schwache Dominanz in den Fällen $t \in \{1/3, 2/3\}$.

Dominierte Strategien in der affinen Fortsetzung



Rationalität: Eine stark dominierte Strategie sollte nie gespielt werden. Ebensowenig eine Strategie, die nie beste Antwort ist. Ist beides dasselbe?

Definition E2I: Rationalisierbarkeit

Die Strategie $s_i \in S_i$ heißt **rationalisierbar** oder **mindestens einmal beste Antwort**, wenn sie beste Antwort ist auf mind. eine (korrelierte) Gegenstrategie $s_{-i} \in [S_{-i}]$, also $\bar u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x\in \bar S_i} \bar u_i(x; s_{-i})$ erfüllt.

Jedes Nash–Gleichgewicht $s \in S$ besteht aus rationalisierbaren $s_i \in S_i$.

Satz E2J: Rationalisierbar ist das Gegenteil von stark dominiert.

Genau dann ist s_i^* stark dominiert, wenn s_i^* nie beste Antwort ist.

Beweis: Die Implikation „$\Rightarrow$" ist klar: Dominiert $s_i \in \bar S_i$ stark $s_i^* \in S_i$, so gilt $\bar u_i(s_i; s_{-i}) > \bar u_i(s_i^*; s_{-i})$ für alle Gegenstrategien $s_{-i} \in [S_{-i}]$.

Die Implikation „$\Leftarrow$" ist bemerkenswert: Zu jedem $s_{-i} \in [S_{-i}]$ existiert ein geeignetes $s_i \in \bar S_i$, das die Ungleichung $\bar u_i(s_i; s_{-i}) > \bar u_i(s_i^*; s_{-i})$ erfüllt. Wir suchen stärker ein $s_i \in \bar S_i$ für alle $s_{-i} \in [S_{-i}]$. „Einer für alle!"

Wir konstruieren hierzu aus u ein Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel $v : S_1^* \times S_2^* \to \mathbb{R}^2$ mit Strategiemengen $S_1^* = S_i \setminus \{s_i^*\}$ und $S_2^* = S_{-i}$ und der Auszahlungsfunktion $v_1(s_i, s_{-i}) = u_i(s_i; s_{-i}) - u_i(s_i^*; s_{-i})$. Sei $\bar v : \bar S_1^* \times \bar S_2^* \to \mathbb{R}^2$ die Fortsetzung auf gemischte Strategien. Im Spiel u ist s_i^* keine beste Antwort auf s_{-i}, wenn

$$\max_{s_i \in \bar S_1^*} \bar v_1(s_i, s_{-i}) > 0.$$

Im Spiel u ist s_i^* demnach nie beste Antwort, wenn

$$\min_{s_{-i}\in \bar S_2^*} \max_{s_i \in \bar S_1^*} \bar v_1(s_i, s_{-i}) > 0.$$

Nach dem Hauptsatz E2D gilt Minimax = Maximin, also

$$\max_{s_i \in \bar S_1^*} \min_{s_{-i}\in \bar S_2^*} \bar v_1(s_i, s_{-i}) > 0.$$

Es existiert demnach ein $s_i \in \bar S_1^*$ mit $\min_{s_{-i}\in \bar S_2^*} \bar v_1(s_i, s_{-i}) > 0$. Das bedeutet $\bar u_i(s_i; s_{-i}) > \bar u_i(s_i^*; s_{-i})$ für alle $s_{-i} \in \bar S_{-i}$. $\boxed{\text{QED}}$

Für Spiele mit nur zwei Spielern ist die Konstruktion klar und natürlich. Ab drei Spielern müssen wir etwas genauer hinsehen: Jeder Spieler kann (optimistisch-naiv) all seine Gegenspieler als unabhängig annehmen, oder aber (pessimistisch-paranoid) all seine Gegenspieler als „Achse des Bösen" zusammenfassen. Für die Strategiemengen bedeutet das:

$$\begin{aligned} [S_{-i}] &= [S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n] \\ \supsetneq \bar S_{-i} &= [S_1] \times \dots \times [S_{i-1}] \times [S_{i+1}] \times \dots \times [S_n] \end{aligned}$$

Wir gehen in Definition E2I und Satz E2J vom *worst case* aus, dass sich alle Gegenspieler zu einer Koalition gegen Spieler i verbünden können. Diese *korrelierten Strategien* untersuchen wir später noch genauer.

Sind alle Gegenspieler unabhängig, so ersetzen wir die konvexe Menge $[S_{-i}]$ durch die nicht-konvexe Menge $\bar S_{-i} \subsetneq [S_{-i}]$; die oben bewiesene Implikation gilt dann im Allgemeinen nicht mehr (siehe Übungen).

Die Begriffe „stark dominiert" und „nie beste Antwort" klingen ähnlich, doch der genaue logische Zusammenhang ist raffiniert und faszinierend.

Die Implikation „$\Rightarrow$" ist klar, doch die Umkehrung „$\Leftarrow$" ist bemerkenswert und keineswegs selbstverständlich. Wir erweitern hier zu gemischte Strategien mit dem Vorteil, dass nun die Dualitätslücke verschwindet! Erst so können wir die ersehnte Äquivalenz beider Begriffe beweisen.

☺ Sie suchen *alle* Nash–Gleichgewichte und wollen vereinfachen? Dann streichen Sie guten Gewissens alle *stark* dominierten Strategien. Das sind dank obigem Satz genau solche, die niemals beste Antwort sind.

☺ Sie suchen nur *ein* Nash–Gleichgewicht und wollen vereinfachen? Dann können Sie zudem noch *schwach* dominierte Strategien streichen.

☺ Rekursiv erklären wir so die iterierte Löschung (stark) dominierter Strategien und ebenso Rationalisierbarkeit der Stufe $1, 2, 3, \dots$. Das ist wie oben gesehen oft nützlich zur Vereinfachung / Reduktion eines Spiels.

Quantoren tauschen? Aber richtig!

Satz und Beweis erinnern uns an das Problem des Quantorentauschs!

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} p(x,y) \qquad \le \qquad \min_{y\in Y}\max_{x\in X} p(x,y)$$

Sei $p : X \times Y \to \{0{=}\text{falsch}, 1{=}\text{wahr}\} : (x,y) \mapsto p(x,y)$ eine Aussageform.

$$\begin{array}{lcl} X \ni x \mapsto \forall y \in Y : p(x,y) & \text{entspricht} & x \mapsto \min_{y\in Y} p(x,y) \\ \exists x \in X : \forall y \in Y : p(x,y) & \text{entspricht} & \max_{x\in X}\min_{y\in Y} p(x,y) \\ Y \ni y \mapsto \exists x \in X : p(x,y) & \text{entspricht} & y \mapsto \max_{x\in X} p(x,y) \\ \forall y \in Y : \exists x \in X : p(x,y) & \text{entspricht} & \min_{y\in Y}\max_{x\in X} p(x,y) \end{array}$$

Je zwei Allquantoren vertauschen, ebenso je zwei Existenzquantoren.

$$\begin{array}{lcl} \forall x \in X : \forall y \in Y : p(x,y) & \iff & \forall y \in Y : \forall x \in X : p(x,y) \\ \exists x \in X : \exists y \in Y : p(x,y) & \iff & \exists y \in Y : \exists x \in X : p(x,y) \end{array}$$

Wir dürfen Allquantoren vorziehen (E2B), aber nicht Existenzquantoren:

$$\exists x \in X : \forall y \in Y : p(x,y) \quad \Longrightarrow \quad \forall y \in Y : \exists x \in X : p(x,y)$$

Quantoren tauschen? Aber richtig!

Im Allgemeinen können wir Existenzquantoren nicht nach vorne ziehen! Einen Existenzquantor nach vorne ziehen *stärkt* die Aussage, ihn nach hinten zu ziehen *schwächt* die Aussage, sie wird leichter zu beweisen.

Gegenbeispiel, zunächst nur informell, dafür leicht zu verstehen: Sei $p(x,y) =$ „x ist Mutter von y“. Zu *jedem* Menschen existiert eine Mutter, aber es existiert keine Mutter zu *allen* Menschen gemeinsam.

Formales Gegenbeispiel: Über $(\mathbb{Z},<)$ betrachten wir $p(x,y) = (x<y)$:

$$\begin{array}{lcl} \forall y : \exists x : x<y & \text{also} & \forall y\, \overbrace{(\exists x\, (x<y))}^{q(y)} \\ \exists x : \forall y : x<y & \text{also} & \exists x\, \underbrace{(\forall y\, (x<y))}_{r(x)} \end{array}$$

Die erste Aussage ist wahr, die zweite falsch! Ausführlich:
Es gilt $q(y)$ für *jedes* $y \in \mathbb{Z}$, also ist die erste Aussage *wahr* über $(\mathbb{Z},<)$.
Es gilt $r(x)$ für *kein* $x \in \mathbb{Z}$, also ist die zweite Aussage *falsch* über $(\mathbb{Z},<)$.

Die Quantoren $\forall$ und $\exists$ stehen immer *vor* der Aussage, daher gilt die Klammerung *von rechts nach links*, ebenso für min und max.

Quantoren tauschen? Aber richtig!

$$\forall\exists \quad \Longleftarrow \quad \exists\forall$$

Alle für einen
und
einer für alle?

Einer für alle
impliziert
für jeden einen!

Quantoren tauschen? Aber richtig!

Ich kann mir die folgende, etwas wilde Assoziation nicht verkneifen.

„Alle für einen, einer für alle“ heißt es in Alexandre Dumas’ berühmtem Roman *Die drei Musketiere* aus dem Jahre 1844. Im französischen Original *Les Trois Mousquetaires* heißt das Motto: „Un pour tous ! Tous pour un !“ Noch dramatischer ausgeführt ist die englische Übersetzung:

All for one and one for all,
united we stand, divided we fall.

Held:innen der Mathematik! In lyrischer Verkleidung schrieb Dumas die Quantorenlogik in die Weltliteratur und die Herzen vieler Leser:innen.

„Unus pro omnibus, omnes pro uno“ heißt die lateinische Redewendung. Ab den 1830er Jahren verbreitete sie sich als inoffizieller Wahlspruch der Schweizer Eidgenossenschaft. Eine antike Quelle ist nicht belegt.

Die wechselnde Reihung scheint dem Klang zu folgen, nicht der Logik. William Shakespeare nutzte die englische Formulierung „One for all, or all for one“ bereits 1594. All is well that… begins with Shakespeare.

Wann sind zwei Spiele äquivalent?

E241

(o) Spiele $u : S_I \to R_I$ und $u' : S_I \to R'_I$ sind **ordnungsäquivalent**, falls

$$u_i(x_i; s_{-i}) \le_i u_i(y_i; s_{-i}) \quad\iff\quad u'_i(x_i; s_{-i}) \le'_i u'_i(y_i; s_{-i})$$

für jeden Spieler $i \in I$ und alle Aktionen $x_i, y_i \in S_i$ bei festem $s_{-i} \in S_{-i}$.
Das erhält individuelle Maximierung, also auch Nash–Gleichgewichte:

$$\text{(o)} \implies \operatorname{Arg\,max}_{x_i \in S_i} u_i(x_i; s_{-i}) = \operatorname{Arg\,max}_{x_i \in S_i} u'_i(x_i; s_{-i})$$

(a) Zwei Spiele $u, u' : S_I \to \mathbb{R}_I$ sind **(schwach) affin äquivalent**, falls

$$u'_i(x_i; s_{-i}) = w_i\, u_i(x_i; s_{-i}) + c_i(s_{-i})$$

mit positiver Skalierung $w_i \in \mathbb{R}_{>0}$ und additiver Konstante $c_i(s_{-i}) \in \mathbb{R}$.
Das ist verträglich mit individuellen Konvexkombinationen in $[S_i] \supseteq S_i$.

(e) Sie sind **exakt äquivalent**, falls zudem $w_i = 1$ für alle $i \in I$ gilt.

$$u'_i(x_i; s_{-i}) = u_i(x_i; s_{-i}) + c_i(s_{-i})$$

Wir schreiben dann $u \overset{\mathrm{o}}{\equiv} u'$ bzw. $u \overset{\mathrm{a}}{\equiv} u'$bzw. $u \overset{\mathrm{e}}{\equiv} u'$, kurz $u \equiv u'$.

Wann sind zwei Spiele äquivalent?

E242
Erläuterung

Ordnungsäquivalenz bedeutet, aus Sicht jedes Spielers $i \in I$, dass alle Resultate $u_i(x_i, s_{-i}) \mapsfrom x_i \mapsto u'_i(x_i, s_{-i})$ in derselben Ordnung auftreten. Dabei wird das gegnerische Strategiebündel $s_{-i} \in S_{-i}$ festgehalten; diese Äquivalenz nennen wir daher auch (schwach) monoton.

Meist betrachten wir Auszahlungen in den reellen Zahlen $R_i = \mathbb{R}$. In diesem Falle können wir strenger affine Äquivalenz betrachten. Da wir $w_i > 0$ verlangen, ist dies immer eine Ordnungsäquivalenz. Affine Äquivalenz ist der passende Begriff für affine Fortsetzung:

Aufgabe: Zeigen Sie $u \overset{\mathrm{a}}{\equiv} u' \Rightarrow \bar u \overset{\mathrm{a}}{\equiv} \bar u'$ und $u \overset{\mathrm{e}}{\equiv} u' \Rightarrow \bar u \overset{\mathrm{e}}{\equiv} \bar u'$.

Lösung: Für $\bar x_i = \sum_k p_k x_i^k \in [S_i]$ und $\bar s_{-i} = \sum_\ell q_\ell s_{-i}^\ell \in [S_{-i}]$ gilt

$$\begin{aligned}
\bar u'_i(\bar x_i; \bar s_{-i}) &\overset{\text{Def}}{=} \textstyle\sum_k \sum_\ell p_k q_\ell\, u'_i(x_i^k; s_{-i}^\ell) \\
&\overset{\text{Aff}}{=} \textstyle\sum_k \sum_\ell p_k q_\ell [w_i\, u_i(x_i^k; s_{-i}^\ell) + c_i(s_{-i}^\ell)] \\
&\overset{\text{Aff}}{=} w_i \left[\textstyle\sum_k \sum_\ell p_k q_\ell\, u_i(x_i^k; s_{-i}^\ell)\right] + \textstyle\sum_\ell q_\ell\, c_i(s_{-i}^\ell) \\
&\overset{\text{Def}}{=} w_i\, \bar u_i(\bar x_i; \bar s_{-i}) + \bar c_i(\bar s_{-i}).
\end{aligned}$$

Was ist ein Teilspiel?

E243

Vorgelegt seien zwei Spiele $u : S_I \to R_I$ und $u' : S'_J \to R'_J$. **Teilspiel** $u \subseteq u'$ bedeutet Einschränkung $u = u'|_{S_I}^{R_I}$ auf $S_i \subseteq S'_i$ und $(R_i, \le_i) \subseteq (R'_i, \le'_i)$.
In Worten bedeutet das, aus dem Spiel u' entsteht das Teilspiel u durch Einschränkung der Strategiemenge S'_i auf die Teilmenge S_i und der Ergebnismenge R'_i auf die Teilmenge R_i für jeden Spieler $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"] & \prod_{i\in I} S_i = S_I \arrow[r, "u"] \arrow[d, hook, "g"] & R_I = \prod_{i\in I} R_i \arrow[d, hook, "h"] \\
J & \prod_{j\in J} S'_j = S'_J \arrow[r, "u'"] & R'_J = \prod_{j\in J} R'_j
\end{tikzcd}$$

Ein Morphismus ist allgemein eine „strukturerhaltende Abbildung“. Ist das auch für Spiele sinnvoll? Wir beginnen konkret mit Teilspielen.
Wir nutzen die bequeme Schreibweise $\prod_{i\in I} S_i =: S_I \xrightarrow{u} R_I := \prod_{i\in I} R_i$.
Im Spezialfall $S_i = M$ für alle $i \in I$ ist $S_I = M^I$ die übliche Potenz.
Allgemein erlauben wir Teilmengen $S_i \subseteq M$ und erhalten $S_I \subseteq M^I$.
Ebenso schreiben wir $R_I = \prod_{i\in I} R_i$. Meist gilt $R_i \subseteq \mathbb{R}$, also $R_I \subseteq \mathbb{R}^I$.

Was ist ein Teilspiel?

E244
Erläuterung

Teilspiele begegnen uns im Folgenden recht häufig. Sie entstehen ganz natürlich immer und überall dort, wo wir die Strategien einschränken, also mögliche Aktionen oder Optionen auf eine Teilmenge reduzieren.

Aufgabe: Aus $u \subseteq u'$ folgt $\mathrm{NE}(u) \supseteq \mathrm{NE}(u') \cap S_I$, aber i.A. nicht „$\subseteq$“.

Lösung: Sei $s \in S_I$. Für jeden Spieler $i \in I$ gilt:

$$\begin{aligned}
s \in \mathrm{NE}_i(u') &\overset{\text{Def}}{\iff} s_i \in \operatorname*{Arg\,max}_{x_i \in S'_i} u'_i(x_i; s_{-i}) \\
&\overset{\text{Teilspiel}}{\implies} s_i \in \operatorname*{Arg\,max}_{x_i \in S_i} u_i(x_i; s_{-i}) \overset{\text{Def}}{\iff} s \in \mathrm{NE}_i(u)
\end{aligned}$$

Das bedeutet $\mathrm{NE}_i(u) \supseteq \mathrm{NE}_i(u') \cap S_I$. Daraus folgt die Behauptung:

$$\mathrm{NE}(u) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{NE}_i(u) \supseteq \bigcap_{i\in I} \mathrm{NE}_i(u') \cap S_I = \mathrm{NE}(u') \cap S_I$$

Die Umkehrung „$\subseteq$“ gilt offensichtlich nicht: Sei $u : \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R_i$. Wir können alle Nash–Gleichgewichte von u zerstören, indem wir jedem Spieler $i \in I$ eine neue Strategie $s'_i \notin S_i$ geben, also $S'_i := S_i \sqcup \{s'_i\}$, und eine neue maximale Auszahlung $r'_i \notin R_i$, also $R'_i := R_i \sqcup \{r_i\}$ mit $R_i < r'_i$. Wir setzen u fort zu u' mit $u'_i(s'_i; -) = r'_i$. Damit gilt $\mathrm{NE}(u') = \{s'\}$.

Was ist ein Spielmorphismus?

Wie vergleichen wir zwei Spiele $u : S_I \to R_I$ und $u' : S'_J \to R'_J$?
Hierfür sind Morphismen von Spielen der passende Begriff:

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[d, "f"] & \prod_{i\in I} S_i = S_I \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"] & R_I = \prod_{i\in I} R_i \arrow[d, "h"] \\
J & \prod_{j\in J} S'_j = S'_J \arrow[r, "u'"] & R'_J = \prod_{j\in J} R'_j
\end{tikzcd}
$$

Definition E2K: Spielmorphismus $u \to u'$

Ein **Spielmorphismus** $(f, g, h) : u \to u'$ erfüllt $h \circ u = u' \circ g$.

1. Die Spielerabbildung $f : I \to J$ ist surjektiv (meist bijektiv): Der Zielspieler $j \in J$ wird von der Koalition $f^{-1}(j) \subseteq J$ gesteuert.
2. Die Aktionsabbildung $g : S_I \to S'_J : s = (s_i)_{i\in I} \mapsto s' = (s'_j)_{j\in J}$ definiert den Steuermechanismus $s'_j = g_j(s_i)_{i\in f^{-1}(j)}$ für jeden Zielspieler $j \in J$.
3. Die Resultatsabbildung $h : R_I \to R'_J : r = (r_i)_{i\in I} \mapsto r' = (r'_j)_{j\in J}$ mit $r'_j = h_j(r_i)_{i\in f^{-1}(j)}$ ist strikt monoton für alle $i \in I$ und $j = f(i)$.

Was ist ein Spielmorphismus?

Wir haben oben den konkreten Fall von Teilspielen vorangestellt: Für jedes Teilspiel $u \subseteq u'$ gilt $(f, g, h) : u \hookrightarrow u'$ mit $I = J$ und $f = \mathrm{id}$ sowie $g_i = \mathrm{inc} : S_i \hookrightarrow S'_i$ und $h_i = \mathrm{inc} : R_i \hookrightarrow R'_i$ für jeden Spieler $i \in I$.

Allgemein können wir Spieler permutieren, das heißt, wir erlauben statt $f = \mathrm{id}$ nun beliebige Bijektionen $f : I \xrightarrow{\sim} J$. Im einfachsten Fall gilt für jeden Startspieler $i \in I$ und den zugehörigen Zielspieler $j = f(i)$ dann $S_i = S'_j$ und $g_j = \mathrm{id}$ sowie $R_i = R'_j$ und $h_j = \mathrm{id}$. Das bedeutet, nur die Spieler werden permutiert / umbenannt, sonst bleibt alles unverändert.

Vom Startspieler $i \in I$ zum Zielspieler $j = f(i)$ können auch Strategien permutiert werden, ebenso Resultate. Allgemein erlauben wir daher Abbildungen $g_j : S_i \to S'_j$ und $h_j : (R_i, \le_i) \to (R'_j, \le'_j)$ strikt monoton. Diese Daten zusammen definieren den Morphismus $(f, g, h) : u \to u'$.

Oft wollen wir die Auszahlungen nicht ändern, in diesem Fall arbeiten wir mit $R_i = R'_j$ und $h_j = \mathrm{id}$. Meist betrachten wir Auszahlungen in den reellen Zahlen, daher bietet sich $R_i = R'_j = \mathbb{R}$ und $h_j = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ an.

Was ist ein Spielmorphismus?

Bijektionen $(f, g, h) : u \xrightarrow{\sim} u'$ untersuchen wir anschließend genauer als Symmetrien; diese Sichtweise ist naheliegend und häufig nützlich. Aus mathematischer Neugier (und guten Erfahrungen mit Kategorien) fragen wir mutig ganz allgemein: Was ist ein Spielmorphismus?

Für Morphismen erlauben wir uns die Freiheit, nicht nur Bijektionen $f : I \xrightarrow{\sim} J$ zu betrachten, sondern allgemeiner Surjektionen $f : I \twoheadrightarrow J$: Jeder Zielspieler $j \in J$ wird gesteuert durch die Koalition $K = f^{-1}(j)$ vermöge eines geeigneten Steuermechanismus $g_j : s \mapsto s'_j = g_j(s_K)$.

Beispiel: Als typische Anwendung denken wir an eine Zerlegung von I gemäß $I = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_\ell$ in Koalitionen (Nationen, Firmen, Gruppen, ...). Das detaillierte Spiel $u : S_I \to R_I$ reduzieren wir zu $u' : S'_J \to R'_J$ mit $J = \{1, \dots, \ell\}$, indem wir vereinfachen, zusammenfassen, vergröbern.

Wie jede Koalition intern ihre Entscheidungen trifft, regelt die Abbildung $g_j : s \mapsto s'_j = g_j(s_K)$. Auch die Auszahlung $h_j : r \mapsto r'_j = h_j(r_K)$ ist für $K = f^{-1}(j)$ gemeinsam, reell etwa $h_j(r_K) = \sum_{i\in K} r_i$ in $(\mathbb{R}, +, \le)$.

Was ist ein Spielmorphismus?

Warum fordern wir eine Surjektion $f : I \twoheadrightarrow J$ der Spielermengen? Wir benötigen eine Strategie $s'_j \in S'_j$ für jeden Zielspieler $j \in J$, und das garantieren wir durch die Forderung $j \in f(I) \subseteq J$.

Alternativ können wir jede Strategiemenge (S'_j, s^0_j) mit einer kanonischen Strategie $s^0_j \in S'_j$ ausstatten (engl. *default action*). Jeder Spieler $j \in J \smallsetminus f(I)$ spielt dann diese Strategie s^0_j.

Beispiel: Wenn wir in einer Gruppe eine Entscheidung treffen müssen, so können wir jedes Individuum befragen. Manchmal muss dazu jede:r eine Antwort geben. Alternativ können wir das Prozedere vereinfachen und nach Ablauf einer Wartezeit eine kanonische Antwort ansetzen.

Das Produkt $(S'_J, s^0_J) = \prod_{j\in J}(S'_j, s^0_j)$ besteht aus der Produktmenge $S'_J = \prod_{j\in J} S'_j$ mit dem kanonischen Strategiebündel $s^0_J = (s^0_j)_{j\in J}$. Neben den Projektionen $\mathrm{pr}_K : (S'_J, s^0_J) \twoheadrightarrow (S'_K, s^0_K)$ für $K \subseteq J$ haben wir nun zusätzlich die kanonischen Injektionen $\mathrm{inc}_K : (S'_K, s^0_K) \hookrightarrow (S'_J, s^0_J)$.

Isomorphismen von Spielen

Aufgabe: In welchem Sinne sind die folgenden Spiele isomorph?

u^1: A \ B	0	1
0	-1, -1	-5, 0
1	0, -5	-4, -4

u^2: A \ B	0	1
0	4, 1	0, 3
1	5, -7	1, -5

u^3: A \ B	0	1
0	2, 2	0, 3
1	3, 0	1, 1

u^4: A \ B	0	1
0	0, 1	1, 2
1	3, 0	2, 3

Lösung: $u^1 \cong u^2$: Spieler & Strategien fix, Ergebnisse affin transformiert. $u^1 \cong u^3$: nicht affin, nur monoton. $u^1 \cong u^4$: nur schwach monoton.

Isomorphismen von Spielen

Isomorphismen von Spielen sind mathematisch naheliegend. John Nash hat sie 1950 eingeführt und genutzt (auf Anregung von David Gale), später Harsanyi und Selten: *A general theory of equilibrium selection in games*, MIT 1988. In Kapitel 3 erklären sie affine Isomorphismen:

A reasonable solution concept should neither be influenced by positive linear payoff transformations nor by renamings of players, agents, and choices. The notion of an isomorphism combines both kinds of operations. We look at invariance with respect to isomorphisms as an indispensable requirement.

In 2×2–Spielen hat jeder Spieler vier Auszahlungen. Bei Ausschluss von Gleichständen gibt es $4! = 24$ Anordnungen, dies führt zu $24^2 = 576$ Spielklassen. Permutation der Strategien reduziert dies auf $12^2 = 144$. Alle Spielklassen wurden geduldig aufgelistet von Goforth, Robinson: *The Topology of* 2×2 *Games. A new periodic table*, Routledge 2005.

Unter schwacher Monotonie bleiben sogar nur $2^4 = 16$ Klassen. Selbst wenn wir Gleichstände erlauben, sind es nur $3^4 = 81$ Klassen. Nash–Gleichgewichte bleiben unter all diesen Isomorphismen erhalten.

Symmetrien von Spielen

Aufgabe: Bestimmen Sie die Symmetriegruppen der folgenden Spiele!

u^1: A \ B	bleiben	gehen
bleiben	-2, -2	-2, -5
gehen	-5, -2	0, 0

u^2: A \ B	B	S
B	1, 2	0, 0
S	0, 0	2, 1

u^3: U \ G	0	1
0	-1, $+1$	$+1$, -1
1	$+1$, -1	-1, $+1$

u^4: C \ D	K	L
K	0, 0	1, 2
L	2, 1	0, 0

☺ Wir permutieren hier kohärent Spieler, Strategien und Ergebnisse. Welche dieser Spiele sind zueinander isomorph? Auf wie viele Weisen?

Symmetrien von Spielen

Wir notieren jede Symmetrie $(\tau, \sigma_1, \sigma_2)$ als Bijektion der Spielermenge $\tau : I \simeq I$ sowie der Strategiemengen $\sigma_1 : S_1 \simeq S_{\tau 1}$ und $\sigma_2 : S_2 \simeq S_{\tau 2}$.

☺ Das erste Spiel *Bleiben-oder-Gehen* hat genau zwei Symmetrien: Die Identität $g_0 = (\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ und den Spielertausch $g_1 = ((\mathrm{A\,B}), \mathrm{id}, \mathrm{id})$.

☺ Das zweite Spiel *Bach oder Strawinsky* hat genau zwei Symmetrien: Die Identität $g_0 = (\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ und den Tausch $g_1 = ((\mathrm{A\,B}), (B\,S), (B\,S))$. Wir tauschen nicht nur die Spieler, sondern zwingend auch Strategien.

☺ Das dritte Spiel *Matching Pennies* hat genau vier Symmetrien: Die Identität $g_0 = (\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ und die Drehung $g_1 = (\mathrm{id}, (0\,1), (0\,1))$, Spielerflip $g_2 = ((\mathrm{U\,G}), \mathrm{id}, (0\,1))$ und Spielerflop $g_3 = ((\mathrm{U\,G}), (0\,1), \mathrm{id})$. Die Gruppe $G = \{g_0, g_1, g_2, g_3\}$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, nicht $\mathbb{Z}/4$.

☺ Das vierte Spiel hat ebenfalls genau zwei Symmetrien: Die Identität $g_0 = (\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ und den Tausch $g_1 = ((\mathrm{C\,D}), \mathrm{id}, \mathrm{id})$. Das zweite und vierte Spiel sind isomorph, sonst keine weiteren. $\tau : \mathrm{C} \mapsto \mathrm{A}, \mathrm{D} \mapsto \mathrm{B}$ sowie $\sigma_1 : K \mapsto B, L \mapsto S$ und $\sigma_2 : K \mapsto S, L \mapsto B$. $\tau' : \mathrm{C} \mapsto \mathrm{B}, \mathrm{D} \mapsto \mathrm{A}$ sowie $\sigma_1' : K \mapsto S, L \mapsto B$ und $\sigma_2' : K \mapsto B, L \mapsto S$.

Symmetrien unter Spielern

Jede Permutation $\tau \in \operatorname{Sym}(I)$ operiert durch Umordnung $u \mapsto \tau \circ u \circ \tau^-$:

$$\begin{tikzcd}
S := S_1 \times \dots \times S_n \arrow[rrr, "u"] \arrow[dddd, "\sigma"', "\cong"] & & & R_1 \times \dots \times R_n =: R \arrow[dddd, "\rho"', "\cong"] \\
& (s_1, \dots, s_n) \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, "s'_{\tau i}=s_i"', "s'_j=s_{\tau^- j}"] & (r_1, \dots, r_n) \arrow[dd, "r'_{\tau i}=r_i"', "r'_j=r_{\tau^- j}"] & \\
& & & \\
& (s'_1, \dots, s'_n) \arrow[r, mapsto] & (r'_1, \dots, r'_n) & \\
S' := S'_1 \times \dots \times S'_n \arrow[rrr, "u'=\rho\circ u\circ\sigma^-"] & & & R'_1 \times \dots \times R'_n =: R'
\end{tikzcd}$$

Definition E2L: Spieler–Symmetrie

Ein Spiel u ist **spieler-symmetrisch** unter der Permutation $\tau : I \xrightarrow{\sim} I$, wenn $u = \tau \circ u \circ \tau^-$ gilt, also $S_i = S_{\tau i}$ und $R_i = R_{\tau i}$ für alle $i \in I$ sowie $u_i(s_1, \dots, s_n) = u_{\tau i}(s_{\tau 1}, \dots, s_{\tau n})$ für alle $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$.

Die Spieler-Symmetrien von u bilden die Gruppe $\operatorname{Sym}(u) \le \operatorname{Sym}(I)$.
Das Spiel u heißt **spieler-symmetrisch**, falls $\operatorname{Sym}(u) = \operatorname{Sym}(I)$ gilt.

Symmetrien unter Spielern

Sei $I = \{1, 2, \dots, n\}$ die Spielermenge. Jede Permutation $\tau : I \xrightarrow{\sim} I$ definiert Permutationen $\sigma : S_1 \times \dots \times S_n \to S'_1 \times \dots \times S'_n$ mit $S'_{\tau i} = S_i$ und $\rho : R_1 \times \dots \times R_n \to R'_1 \times \dots \times R'_n$ mit $R'_{\tau i} = R_i$ wie üblich auf n–Tupeln.
Wir erhalten das Spiel $u' = \rho \circ u \circ \sigma^-$ durch **Umordnung der Spieler**.
So operiert die symmetrische Gruppe $\operatorname{Sym}(I)$ auf den Spielern über I.

Allgemein seien I, J Spielermengen und $\tau : I \xrightarrow{\sim} J$ eine Bijektion.

Für jedes $i \in I$ sei $\sigma_i : S_i \xrightarrow{\sim} S'_{\tau i}$ eine Bijektion der Strategiemengen.
Dies definiert $\sigma : \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{j\in J} S'_j$ durch $(s_i)_{i\in I} \mapsto (\sigma_{\tau^- j} s_{\tau^- j})_{j\in J}$.
Im einfachsten Falle denken wir an $S_i = S'_{\tau i}$ und $\sigma_i = \mathrm{id}_{S_i}$ für alle $i \in I$.

Für jedes $i \in I$ sei $\rho_i : (R_i, \le) \xrightarrow{\sim} (R'_{\tau i}, \le)$ eine monotone Bijektion.
Dies definiert $\rho : \prod_{i\in I} R_i \to \prod_{j\in J} R'_j$ durch $(r_i)_{i\in I} \mapsto (\rho_{\tau^- j} r_{\tau^- j})_{j\in J}$.
Im strikten Fall verlangen wir $R_i = R'_{\tau i}$ und $\rho_i = \mathrm{id}_{R_i}$ für alle $i \in I$.

Kurzum: Wir permutieren kohärent Spieler, Strategien und Ergebnisse.
Das Spiel $u : S \to R$ permutieren wir zum Spiel $u' = \rho \circ u \circ \sigma^- : S' \to R'$.

Die folgende Definition präzisiert diese Idee für fünf Szenarien und erklärt strikte, (schwach) monotone, (schwach) affine Isomorphismen.

Isomorphismen von Spielen

Definition E2M: Isomorphismus von Spielen

Vorgelegt seien zwei strategische Spiele in Normalform

$$u : \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R_i \quad \text{und} \quad u' : \prod_{j\in J} S'_j \to \prod_{j\in J} R'_j$$

sowie hierzu Bijektionen $\tau : I \xrightarrow{\sim} J$ und $\sigma_i : S_i \xrightarrow{\sim} S'_{\tau i}$ für jedes $i \in I$.
Das definiert die **Produktbijektion** $\sigma : S \xrightarrow{\sim} S' : (s_i)_{i\in I} \mapsto (\sigma_{\tau^- j} s_{\tau^- j})_{j\in J}$.

Wir nennen (τ, σ) oder kurz $\sigma : u \to u'$ einen **Isomorphismus**, wenn gilt:

Strikt: Für alle $i \in I$ und $s \in S$ gilt $R_i = R_{\tau i}$ und $u'_{\tau i}(\sigma s) = u_i(s)$.

Monoton: Für alle Spieler $i \in I$ und alle Strategievektoren $s, s^* \in S$ gilt die Äquivalenz $u_i(s) \le u_i(s^*) \iff u'_{\tau i}(\sigma s) \le u'_{\tau i}(\sigma s^*)$.
Schwach monoton: Wir verlangen Monotonie nur falls $s_{-i} = s^*_{-i}$.

Affin: Beide Spiele sind reell, also $R_i = R_j = \mathbb{R}$ für alle $i \in I$ und $j \in J$, und es gilt $u'_{\tau i}(\sigma s) = a_i u_i(s) + b_i$ mit Konstanten $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $a_i > 0$.
Schwach affin: Es gilt $u'_{\tau i}(\sigma s) = a_i u_i(s) + b_i(s_{-i})$ mit $b_i : S_{-i} \to \mathbb{R}$.

Isomorphismen von Spielen

Schwach fordern wir Monotonie / Affinität für jeden Spieler $i \in I$ und $s_i \in S_i$ jeweils separat bei festgehaltener Gegenstrategie $s_{-i} \in S_{-i}$.

Proposition E2N: Abstrakter Nonsense wirkt konkret.

Strategische Spiele und ihre Isomorphismen bilden eine **Kategorie**:

$$\mathtt{Game} = \mathtt{Game}_{\mathrm{s}}, \quad \mathtt{Game}_{\mathrm{m}}, \quad \mathtt{Game}_{\mathrm{wm}}, \quad \mathtt{Game}_{\mathrm{a}}, \quad \mathtt{Game}_{\mathrm{wa}}.$$

Diese ist jeweils ein **Gruppoid**, denn jeder Morphismus ist invertierbar,

Jeder Isomorphismus $\sigma : u \xrightarrow{\sim} u'$ bewahrt **Gleichgewichte**: Wir erhalten Bijektionen $\mathrm{NE}(u) \xrightarrow{\sim} \mathrm{NE}(u')$ und $\mathrm{NE}^!(u) \xrightarrow{\sim} \mathrm{NE}^!(u')$ vermöge $s \mapsto \sigma(s)$.

Zum Spiel $u \in \mathtt{Game}_*$ bilden die Automorphismen die **Gruppe** $\mathrm{Aut}_*(u)$.
Diese Gruppe **operiert** demnach auf den Mengen $\mathrm{NE}(u)$ und $\mathrm{NE}^!(u)$.

Aufgabe: Prüfen Sie die behaupteten Eigenschaften sorgfältig nach!
Bestimmen Sie diese Gruppen für möglichst viele unserer Beispiele!
Symmetrien sind nützlich und geben Auskunft über Gleichgewichte!

Existenz symmetrischer Gleichgewichte

Aufgabe: (0) Seien u, u' endliche reelle Spiele. Jede Produktbijektion $\sigma : u \rightsquigarrow u'$ setzt sich eindeutig affin fort zur Produktbijektion $\bar\sigma : \bar u \rightsquigarrow \bar u'$.

(1) Die Fortsetzung $\sigma \mapsto \bar\sigma$ erhält i.A. nicht (schwache) Monotonie!

(2) Ist $\sigma : u \rightsquigarrow u'$ strikt oder (schwach) affin, so auch $\bar\sigma : \bar u \rightsquigarrow \bar u'$. Wir erhalten also $\mathrm{Aut}_*(u) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_*(\bar u) : \sigma \mapsto \bar\sigma$ für $* \in \{\mathrm{s}, \mathrm{a}, \mathrm{wa}\}$.

(3) Sei $G \le \mathrm{Aut}_*(u)$. Ist $s \in \bar S$ ein Nash–Gleichgewicht, so auch $\bar\sigma(s)$ für alle $\sigma \in G$, aber i.A. nicht die Symmetrisierung $\bar s := \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \bar\sigma(s)$.

(4) Nash bewies 1950 folgende Verschärfung seines Existenzsatzes:

Satz E2o: Existenzsatz für symmetrische Gleichgewichte, Nash 1950

Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel, wie oben erklärt, und $\bar u : \bar S_1 \times \dots \times \bar S_n \to \mathbb{R}^n$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.

Sei $G \le \mathrm{Aut}_*(u)$ eine Symmetriegruppe mit $* \in \{\mathrm{s}, \mathrm{a}, \mathrm{wa}\}$ wie oben. Dann besitzt $\bar u$ mindestens ein G–invariantes Nash–Gleichgewicht:

Die Menge $\mathrm{NE}(\bar u)^G := \{\, s \in \mathrm{NE}(\bar u) \mid \forall \sigma \in G : \bar\sigma(s) = s \,\}$ ist nicht leer.

Folgern Sie dies aus der natürlichen Äquivarianz der Nash–Funktion.

Existenz symmetrischer Gleichgewichte

Dieses schöne Argument führen Sie in unserer Übung aus!

Anleitung: Wiederholen Sie den Beweis von Nashs Existenzsatz E1e, insbesondere die Konstruktion der Nash–Funktion für Lemma E1j.

Beweisen Sie genauso (!) den stärkeren Satz E2o, zunächst für strikte Symmetrien $G \le \mathrm{Aut}_\mathrm{s}(u)$, indem Sie folgende Fragen beantworten:

(4a) Ist die Teilmenge $\bar S^G = \{\, s \in \bar S \mid \forall \sigma \in G : \bar\sigma(s) = s \,\} \subseteq \bar S$ der G–invarianten Strategievektoren nicht leer? konvex? kompakt?

(4b) Ist die Nash–Funktion $f : \bar S \to \bar S$ äquivariant unter G, gilt also $f(\bar\sigma(s)) = \bar\sigma(f(s))$ für alle $\sigma \in G$ und $s \in \bar S$?

(4c) Wie folgt hieraus die ersehnte Existenzaussage?

Für schwach affine Symmetrien behelfen wir uns mit einem Trick. Durch einen schwach affinen Isomorphismus normieren wir u so, dass für jeden Spieler $i \in I$ bei fester Gegenstrategie $s_{-i} \in S_{-i}$ gilt: $\min_{s_i \in S_i} u_i(s_i; s_{-i}) = 0$ und $\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i; s_{-i}) \in \{0, 1\}$. Das vereinfacht unsere Argumente erheblich, da für jedes normierte Spiel u schwach affine Symmetrien dasselbe sind wie strikte Symmetrien. Voilà!

Symmetrien von Spielen und Gleichgewichten

Für die Untersuchung von Spielen sind die Nash–Gleichgewichte fundamental und haben sich als wesentliches Werkzeug bewährt. Es ist daher interessant, die Menge $\mathrm{NE}(u) \subseteq S$ bzw. $\mathrm{NE}(\bar u) \subseteq \bar S$ aller Nash–Gleichgewichte möglichst explizit zu bestimmen.

In realistischen Fällen ist dies aufwändig. Selbst wenn es theoretisch möglich ist, so ist es doch praktisch oft außerhalb unserer Reichweite. Wir wollen die Menge $\mathrm{NE}(\bar u) \subseteq \bar S$ der Gleichgewichte dann wenigstens qualitativ beschreiben (analytisch, geometrisch, topologisch). Sind hier beliebig komplizierte Räume möglich oder gibt es Einschränkungen?

Der Existenzsatz für Nash–Gleichgewichte ist ein erster wichtiger Schritt. Er garantiert allgemein: Für jedes endliche reelle Spiel u gilt $\mathrm{NE}(\bar u) \ne \emptyset$. Der obige Satz verallgemeinert dies schmerzfrei zu $\mathrm{NE}(\bar u)^G \ne \emptyset$.

Solcherart Struktursätze sind durchaus auch praktisch relevant, da sie Rechnungen vereinfachen können oder überprüfen helfen. Weitere Fixpunktsätze, etwa von Kakutani oder Glicksberg, liefern Existenzaussagen für Gleichgewichte in allgemeineren Spielen u.

Symmetrien von Spielen und Gleichgewichten

Nashs Dissertation ist, wie oben bereits geschildert, ungewöhnlich kurz. Auf Anregung von David Gale hat Nash seinen berühmten Existenzsatz zugleich auf symmetrische Spiele und ihre Gleichgewichte ausgedehnt. Das ist nun eine schöne Übung für Sie, fördert Sorgfalt und Kreativität.

Auf Drängen von Alfred Tucker, seinem Betreuer, hat Nash widerwillig auch ein paar einfache Beispiele eingefügt. Kurzfristig wollte Nash das Promotionsprojekt mit Tucker beenden, um an ambitionierteren Themen zu arbeiten, etwa mit Steenrod in der algebraischen Geometrie. Durch beharrliches Drängen konnte Tucker die Promotion zum Ende führen.

Like many great scientific ideas, [...] Nash's idea seemed initially too simple to be truly interesting, too narrow to be widely applicable, and, later on, so obvious that its discovery by someone was deemed all but inevitable. [...] Its significance was not immediately recognized, not even by the brash twenty-one-year-old author himself, and certainly not by the genius who inspired Nash, von Neumann.

Sylvia Nasar: *A Beautiful Mind* (1998) p. 98

Im **Casino Royal** (02.05.2025) hatten wir weitere schöne Gelegenheit, unsere zarte Theorie zu Gleichgewichten in der harten Praxis zu testen.

Vier Pirat:innen teilen sich 500€i$to, wobei 50€i$to der kleinste Schein ist. Jede:r schreibt ihren Wunsch auf und reicht diesen bei der Notarin ein. Ist die Summe $\le$ 500€i$to, so wird ausgezahlt, sonst gibt es gar nichts. Vier Spieler:innen treten an, pseudonym Rudolf, Franz, Günter und Ben.

Erstes Spiel: Absprache ist nicht möglich. Jede:r der vier entscheidet sich unabhängig für 100€i$to, geht somit auf Nummer sicher: Abrunden! Dies wird ausgezahlt, die verbleibenden 100€i$to gehen verloren. Erstaunlich: Niemand hat auf 150€i$to oder mehr spekuliert!

Zweites Spiel: Nun ist Absprache erlaubt. Die vier beschließen gerecht zu losen. Sie schreiben 150, 150, 100, 100 auf vier Zettel, ziehen diese als Lose, und schreiben dann ihre Namen drauf. Das ist ein Gleichgewicht! So wird ausgezahlt, ganz ohne Verlust. Welch elegante Randomisierung! Obwohl das Spiel keinen Zufall enthält, randomisieren die Spieler gerne freiwillig, um Konflikte aufzulösen und Symmetrie zu wahren / erzeugen.

Drittes Spiel: Um Konflikte zu schüren, losen wir eine Reihenfolge aus (Franz, Günter, Rudolf, Ben), in der die vier ihre Forderungen öffentlich und unwiderruflich nennen. Das bricht die vorige Symmetrie. Die vier verhandeln, argumentieren, drohen, …, aber können sich nicht einigen.

Gefühlt hat Franz eine größere Verhandlungsmacht, aber was bedeutet das konkret in €i$to? Sein Privileg des ersten Zugs ist auch eine Bürde! Franz will 200€i$to, Günter 150€i$to, Rudolf macht seine Drohung wahr und fordert 200€i$to, Ben wird nicht mehr gefragt. Alles geht verloren.

Später erklärt Rudolf, man müsse Drohungen konsequent durchziehen, sonst wird man unglaubwürdig. Das ist ein interessantes Argument: Reputation! Der Blick weitet sich von diesem Spiel auf nachfolgende. Was wird hier eigentlich gespielt? nur dieses Spiel? oder viele weitere?

Viertes Spiel: Dasselbe Spiel nochmal, nun in der Reihenfolge Günter, Ben, Franz, Rudolf. Auch diese Verhandlungen scheitern. Tragisch. Ist das rational? Nein. Realistisch? Wohl schon. O wie einfach waren Symmetrie und Randomisierung: Freiheit, Gleichheit, Brüderlichkeit!

Ein neues Team von vier Pirat:innen tritt an. Diesmal kommt die Beute in vier unteilbaren Stücken im Wert von 50, 100, 150, 200. Wenn alle vier verschiedene Stücke wählen, so wird ausgezahlt, sonst gibt es nichts.

Erstes Spiel: Absprache ist nicht möglich. Wie kann eine kollisionsfreie Aufteilung gelingen? Schwierig! Jede:r schreibt ihre Wahl auf und reicht sie bei der Notarin ein. Leider gibt es Kollisionen, alles geht verloren.

Das größte Stück wird dreifach beansprucht: ein Nash–Gleichgewicht! Bereuen die Spieler:innen? Individuell nicht. Trotzdem ärgerlich. Nur die Dreier-Koalition hätte den Konflikt auflösen können.

Zweites Spiel: Nun ist Absprache erlaubt. Auch diese vier entscheiden sich für Randomisierung, sie werfen eine Münze im Turniersystem. So werden die vier Stücke zufällig zugeteilt, diesmal kollisionsfrei.

Drittes Spiel: Dasselbe nochmal, jetzt ohne Absprache! Wortlos schreibt jede:r ihren Wunsch auf. O Wunder, es gelingt! Alle vier haben denselben Gedanken: Jede:r wählt das Komplement des vorigen Spiels. Offenbar spüren alle den Wunsch, ausgleichende Gerechtigkeit zu schaffen.

Viertes Spiel: Ehrlich gesagt hatten eben alle dieselbe Idee, doch einer hat sich verrechnet. Wir versuchen es nochmal. Diesmal gelingt es. Hier bricht nicht der Zufall die Symmetrie, sondern die Historie.

Fünftes Spiel: Ein fünfter Pirat kommt hinzu. Die Beute besteht aus fünf unteilbaren Stücken im Wert von 0, 50, 100, 150, 200. Das ist tückisch! Nach kurzer Beratung erstellen sie fünf passende Lose, ziehen blind, *ohne* aufzudecken, und jede:r schreibt ihren Namen auf die Rückseite. Doppelblind verhindert hier, dass die Pirat:in mit dem Los 0 Amok läuft.

Ein neues Team von vier Piraten tritt an, vorige werden geblitzdingst. Auf Vorschlag aus dem Publikum spielen wir noch folgende Variante: Die Stücke sind wieder 50, 100, 150, 200. Doch diesmal verfallen nur die strittigen Stücke, also solche, die mehr als einmal beansprucht werden. Hier wirken sich Irrationalität und Drohungen weniger dramatisch aus, denn sie reißen nicht *alle* anderen Spieler:innen mit in den Abgrund.

Fazit: Die genauen Regeln sind wesentlich. Kommunikation kann helfen, muss aber nicht. Symmetrie und Randomisierung sind extrem nützlich.

Reguläre Bimatrix-Spiele

Wir betrachten ein Zwei-Personen-Spiel in strategischer Normalform

$$u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (s_1, s_2) \mapsto \big(u_1(s_1, s_2),\, u_2(s_1, s_2) \big),$$

geordnet durch $S_1 = \{s_1^0 < s_1^1 < \dots < s_1^m\}$ und $S_2 = \{s_2^0 < s_2^1 < \dots < s_2^n\}$.
Die Auszahlungen (u_1, u_2) entsprechen zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{S_1 \times S_2}$.
Wir betrachten Untermatrizen zu $I \subseteq S_1$ und $J \subseteq S_2$ mit $\sharp I = \sharp J + 1$ und ergänzen zu einer quadratischen $(I \times J^*)$–Matrix mit $J^* = J \sqcup \{*\}$:

$$A_{I \times J^*} := \left[\begin{array}{c|c} & 1 \\ A_{I \times J} & \vdots \\ & 1 \end{array} \right] : (i,j) \mapsto \begin{cases} a_{i,j} & \text{für } i \in I \text{ und } j \in J, \\ 1 & \text{für } i \in I \text{ und } j = *. \end{cases}$$

Definition E3A: reguläre Spiele

Die Auszahlungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{S_1 \times S_2}$ nennen wir (affin) **regulär**, falls $\det(A_{I \times J^*}) \neq 0$ gilt für alle $I \subseteq S_1$ und $J \subseteq S_2$ mit $\sharp I = \sharp J + 1$.
Das Spiel $u = (A, B)$ heißt **regulär**, wenn A und $B^\top$ regulär sind.

☺ Das ist generisch erfüllt: Fast alle Bimatrix-Spiele sind regulär!

Reguläre Bimatrix-Spiele

Kleinstes Beispiel: Sei $I = \{i < i'\}$ und $J = \{j\}$.

$$A_{I \times J^*} := \begin{bmatrix} a_{i,j} & 1 \\ a_{i',j} & 1 \end{bmatrix}$$

Regularität bedeutet hier $\det A_{I \times J^*} = a_{i,j} - a_{i',j} \neq 0$. Das heißt:
In der $j$ten Spalte von A stehen lauter verschiedene Auszahlungen.
(Die Ordnung auf I und J klärt die Reihenfolge der Zeilen und Spalten; unsortiert können wir $|\det(A_{I \times J^*})| \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ betrachten und $\neq 0$ fordern.)

☺ Entsprechendes gilt für alle Regularitätsbedingungen $\det A_{I \times J^*} \neq 0$:
Die Zeilen der Matrix $A_{I \times J^*}$ sind $\mathbb{R}$–linear unabhängig, die Zeilen der Untermatrix $A_{I \times J}$ also affin unabhängig, daher *affine* Regularität.
Das vereinfacht Rechnungen, da alle lästigen Ausnahmen wegfallen.

☺ Generisch bedeutet: Regularität gilt für fast alle Bimatrix-Spiele; die regulären bilden eine offene und dichte Teilmenge mit vollem Maß.
Die Menge der singulären Matrizen ist abgeschlossen, nirgends dicht, und hat das Lebesgue–Maß Null. Wenn Sie also zufällig (stetig verteilt) ein Bimatrix-Spiel auswählen, so ist es fast sicher (mit Wkt 1) regulär.

Reguläre Bimatrix-Spiele

Satz E3B: reguläre $2 \times n$–Bimatrix-Spiele

Jedes reguläre $2 \times n$–Spiel hat höchstens $1 + n$ Nash–Gleichgewichte, und ihre Anzahl ist ungerade. Jede dieser Möglichkeiten wird realisiert.

Satz E3C: lokaler Struktursatz für Gleichgewichte regulärer Spiele

Sei $2 \le m \le n$ und $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein reguläres $m \times n$–Spiel.
(0) Dann folgt $\sharp\,\mathrm{NE}(\bar{u}) < \binom{m+n}{m} < \infty$. Das folgt aus der lokalen Struktur:
(1) Jedes Gleichgewicht $(s_1, s_2) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$ hat quadratischen Träger, das heißt $I = \mathrm{supp}(s_1) \subseteq S_1$ und $J = \mathrm{supp}(s_2) \subseteq S_2$ erfüllen $\sharp I = \sharp J$
(2) Jedes Quadrat $I \times J \subseteq S_1 \times S_2$ trägt höchstens ein Gleichgewicht; dieses ist eine rationale Funktion à la Cramer der Matrixeinträge von u.

Satz E3D: Paritätstheorem von Wilson, 1971

Fast alle endlichen Spiele $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ haben nur endlich viele Nash–Gleichgewichte, und ihre Anzahl $\sharp\,\mathrm{NE}(\bar{u})$ ist ungerade.

Reguläre Bimatrix-Spiele

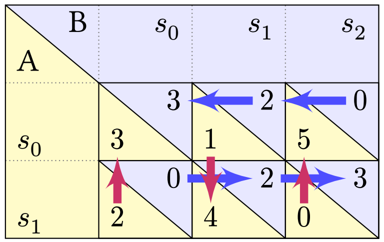
Satz E3B ist eine schöne Übung, die wir nachfolgend ausführen.
Damit lernen Sie insbesondere, alle kleinen Bimatrix-Spiele zu lösen.
Auch Satz E3C können Sie mit den elementaren Mitteln der Linearen Algebra direkt nachrechnen. Ich empfehle dies als ambitionierte Übung.

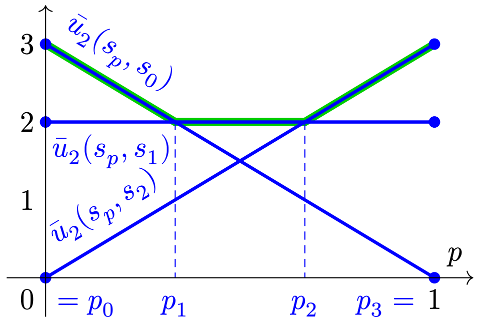
📖 Robert Wilson: *Computing equilibria of n-person games.* SIAM Journal on Applied Mathematics (1971) 80–87. (Zur historischen Einordnung: Derselbe Robert Wilson und Paul Milgrom erhielten den Wirtschafts-Nobelpreis 2020 für ihre Arbeiten zu Auktionen, mehr dazu in Kapitel P.)

Wilsons Paritätstheorem E3D ist wesentlich allgemeiner als Satz E3B.
Eine verblüffende und elegante topologische Erklärung stammt von

📖 Elon Kohlberg und Jean-Francois Mertens: *On the strategic stability of equilibria.* Econometrica (1986) 1003–1037. Ihr Struktursatz E3G inklusive Beweis benötigt dort in §3.2 weniger als eine Seite, muss aber erst einmal sorgsam entpackt werden. Ich skizziere dies unten und folgere daraus das Paritätstheorem. Meine Darstellung entstand 2023 nach inspirierenden Diskussionen mit Mareike Harm im Rahmen ihrer Bachelor-Arbeit.

Lösung regulärer $2 \times n$–Bimatrix-Spiele





Durch Umsortieren der Menge S_2 erreichen wir $b_{00} \ge b_{01} \ge \ldots \ge b_{0n}$. Regulär sind Gleichheiten ausgeschlossen, also $b_{00} > b_{01} > \cdots > b_{0n}$.

In der zweiten Zeile können wir zudem $b_{10} < b_{11} < \cdots < b_{1n}$ annehmen: Gilt $b_{0i} > b_{0j}$ und $b_{1i} > b_{1j}$, so dominiert s_i strikt s_j, und wir löschen s_j.

Wir finden $0 = p_0 < p_1 < \cdots < p_{n+1} = 1$, sodass gilt: Auf Alice' Strategie $s_p = (1-p)s_0 + ps_1$ mit $p \in [p_j, p_{j+1}]$ ist Bobs Strategie s_j beste Antwort.

Für $p = p_j$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ mischen wir $s_q = (1-q)s_{j-1} + qs_j$ so, dass auch umgekehrt Alice' Strategie s_p zur besten Antwort wird.

Lösung regulärer $2 \times n$–Bimatrix-Spiele

🙂 Soweit der Lösungsalgorithmus. Bitte probieren Sie es selbst! Am Ende des Kapitels finden Sie hierzu Übungsaufgaben mit Lösungen.

Aufgabe: In der Übung gehen Sie folgenden Fragen auf den Grund:
Warum kann es hier keine Tripelpunkte geben? Regularität hilft!
Wie rechnen Sie damit alle Nash–Gleichgewichte explizit aus?
Warum ist ihre Anzahl bei Regularität immer ungerade?

Skizze zur ungeraden Anzahl: Wir können $b_{00} > b_{01} > \cdots > b_{0n}$ und $b_{10} < b_{11} < \cdots < b_{1n}$ annehmen, dank Umsortieren und Regularität.
Der linke Rand $p = 0$ gibt ein (reines) NE genau dann, wenn $a_{01} > a_{11}$.
Der rechte Rand $p = 1$ gibt ein (reines) NE genau dann, wenn $a_{0n} < a_{1n}$.
Jede Ordnungsumkehr dazwischen liefert ein gemischtes NE $p \in \,]0, 1[$.

Nehmen wir beide reinen NE links und rechts an oder keines davon, dann gibt es dazwischen eine ungerade Anzahl von Umkehrungen. Nehmen wir hingegen entweder links oder rechts ein reines NE an, so gibt es dazwischen immer eine gerade Zahl von Umkehrungen. In jedem Falle ist die Anzahl der Nash–Gleichgewichte ungerade.

Lösung regulärer Bimatrix-Spiele

Projekt: (1) Schreiben Sie ein Programm, dass reguläre $2 \times n$–Spiele löst. Möglich aber mühsam: Lösen Sie ebenso $2 \times n$–Spiele ganz allgemein.

(2) Schreiben Sie ein Programm, dass ein gegebenes Bimatrix-Spiel auf Regularität prüft und anschließend alle Nash–Gleichgewichte berechnet.

Hinweis: Das ist die praktische Anwendung des lokalen Struktursatzes. Sie können die Bedingung der Regularität dazu noch etwas lockern:

(3) Finden Sie alle regulären Gleichgewichte. (Generisch sind dies alle.)

Projekt: (4) Erzeugen Sie zufällige Bimatrix-Spiele fester Größe $m \times n$ (unter einer geeigneten Verteilung) und zählen Sie die Gleichgewichte.

(5) Welche empirisch-statistische Verteilung entsteht daraus? Wie lässt sich diese beschreiben? Was lässt sich hierzu beweisen?

📖 Andrew McLennan: *The Expected Number of Nash Equilibria of a Normal Form Game.* Econometrica 73 (2005) 141–174.

📖 Y. Rinott, M. Scarsini: *On the Number of Pure Strategy Nash Equilibria in Random Games.* Games and Economic Behavior 33 (2000) 274–293.

Lösung regulärer Bimatrix-Spiele

🙂 Ich verorte Spieltheorie auf der angewandten Seite der Mathematik. Zugleich mobilisiert sie, wie hier zur Berechnung von Gleichgewichten, ein bemerkenswert breites Themenspektrum Ihres Mathematikstudiums: Lineare Algebra und Kombinatorik zum lokalen Struktursatz E3c sowie Geometrie und Algebraische Topologie zum globalen Stuktursatz E3g.

Die definierenden Un/Gleichungen für $\mathrm{NE}(\bar u)$ sind polynomiell und somit eine wunderbar konkrete Anwendung der reell-algebraischen Geometrie. Statt dieser Feinstruktur genügt bereits die viel gröbere, topologische Sichtweise und Brouwers Fixpunktsatz für Nashs Existenzsatz E1e.

Für Nash–Gleichgewichte wählen die Spieler ihre Strategien unabhängig. Später untersuchen wir gewinnbringend korrelierte Strategien, siehe I3. Algebraisch ist die der Übergang von reinen zu gemischten Tensoren. Algorithmisch führt es uns direkt zur Linearen Programmierung.

Manche:r mag diese Vielfalt abschreckend finden, doch wir bewundern die große Spannbreite und Harmonie der verschiedenen Werkzeuge. Wie immer gilt: Mathematik ist wunderschön und nützlich!

Aufgabe: Beweisen Sie Aussage (1) des Struktursatzes E3c. — **Lösung:**

Sei $s_1 = \sum_{i=0}^{k} p_i s_1^i \in \bar S_1$ eine beste Antwort auf $s_2 = \sum_{j=0}^{\ell} q_j s_2^j \in \bar S_2$. Dabei sei $p_0,\dots,p_k > 0$ und $q_0,\dots,q_\ell > 0$ mit $\sum_{i=0}^{k} p_i = \sum_{j=0}^{\ell} q_j = 1$.

(a) Für $\lambda := u_1(s_1,s_2)$ gilt demnach $\lambda = u_1(s_1^0,s_2) = \dots = u_1(s_1^k,s_2)$. Wäre $u_1(s_1^i) > \lambda$, so könnten wir alles auf s_1^i konzentrieren. Wäre $u_1(s_1^i) < \lambda$, so könnten wir die Strategie s_1^i löschen.

(b) Wäre $k > \ell$, so betrachten wir $I = \{s_1^0,\dots,s_1^{\ell+1}\}$ und $J = \{s_2^0,\dots,s_2^\ell\}$. Für $v = (q_0,\dots,q_\ell,-\lambda)^\top \in \mathbb{R}^{J^*}$ gilt $v \ne 0$ und $A_{I\times J^*}\cdot v = 0$ dank (a). Das widerspricht der Regularität $\det A_{I\times J^*} \ne 0$. Also gilt $k \le \ell$.

(c) Ist umgekehrt s_2 eine beste Antwort auf s_1, so folgt $\ell \le k$. Hierzu nutzen wir dasselbe Argument, angewendet auf $B^\top$.

Zusammenfassend zeigt das: In jedem regulären Spiel $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$ hat jedes Nash–Gleichgewicht $(s_1,s_2) \in \mathrm{NE}(\bar u)$ quadratischen Träger; für $\mathrm{supp}(s_1) = \{s_1^0,\dots,s_1^k\}^!$ und $\mathrm{supp}(s_2) = \{s_2^0,\dots,s_2^\ell\}^!$ gilt $k = \ell$. QED

Aufgabe: Beweisen Sie Aussage (2) des Struktursatzes E3c. — **Lösung:**
Sei $(s_1,s_2) \in \mathrm{NE}(\bar u)$ gegeben durch $s_1 = \sum_{i=0}^{k} p_i s_1^i$ und $s_2 = \sum_{j=0}^{\ell} q_j s_2^j$. Wir können und werden $p_0,\dots,p_k > 0$ und $q_0,\dots,q_\ell > 0$ annehmen, also $I = \mathrm{supp}(s_1) = \{s_1^0,\dots,s_1^k\}$ und $J = \mathrm{supp}(s_2) = \{s_2^0,\dots,s_2^\ell\}$. Dank (1) wissen wir $k = \ell$. Zudem löst q die lineare Gleichung

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & A_{I\times J} & & \begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix} \\ \hline 1 & \dots & 1 & 0 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} q_0\\ \vdots \\ q_\ell \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Regulärer Fall: Gilt $\det(A_{I^*\times J^*}) \ne 0$, so ist die Lösung q eindeutig und eine rationale Funktion der Matrixeinträge gemäß Cramerscher Regel:

$$q_i = \det(A^i_{I^*\times J^*}) / \det(A_{I^*\times J^*})$$

Dabei entsteht die Matrix $A^i_{I^*\times J^*}$ aus $A_{I^*\times J^*}$ indem wir die $i$te Spalte durch die rechte Seite der obigen linearen Gleichung ersetzen.

Singulärer Fall: Wir müssen auch den Fall $\det(A_{I^*\times J^*}) = 0$ abfangen. Die Untermatrix $A_{I\times J^*}$ hat vollen Rang $k+1$ dank Regularität E3A. Die Matrix $A_{I^*\times J^*}$ ist also entweder regulär, mit vollen Rang $k+2$, oder die letzte Zeile $(1,\dots,1,0)$ ist Linearkombination der vorigen.

In singulären Falle hat unsere Gleichung demnach keine Lösung, wie wir durch Zeilenumformungen der erweiterten Matrix leicht erkennen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} & A_{I\times J} & & \begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hline 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c|c} & A_{I\times J} & & \begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Dasselbe Argument gilt für $p = (p_0,\dots,p_k)$ und die Matrix $B^\top$.

Fazit: Auf jedem quadratischen Träger (I,J), mit $I \subseteq S_1$ und $J \subseteq S_2$ und $\sharp I = \sharp J$, existiert somit entweder kein Nash–Gleichgewicht oder genau eines, und dieses ist eine rationale Funktion der Matrixeinträge. QED

Aufgabe: Beweisen Sie die obere Schranke (0) aus Satz E3c. — **Lösung:**
Ein Nash–Gleichgewicht $(s_1,s_2) \in \mathrm{NE}(\bar u)$ nennen wir **regulär**, wenn der Träger (I,J) quadratisch ist und die Matrizen $A_{I^*\times J^*}$ und $B^\top_{J^*\times I^*}$ regulär.

Dank der lokalen Struktur (1) und (2) der Gleichgewichte wissen wir: In jedem regulären Spiel u ist jedes Nash–Gleichgewicht (s_1,s_2) regulär. Die Abbildung $\mathrm{NE}(\bar u) \ni (s_1,s_2) \mapsto (\mathrm{supp}(s_1),\mathrm{supp}(s_2))$ ist also injektiv.

Wie viele Paare $(I,J) \in \mathfrak{P}(S_1)\times\mathfrak{P}(S_2)$ mit $\sharp I = \sharp J = k > 0$ gibt es? Das entspricht (I',J) mit $I' = S_1 \setminus I$ und $\sharp(I' \sqcup J) = (m-k)+k = m$.

In $S_1 \sqcup S_2$ mit $\sharp(S_1 \sqcup S_2) = m+n$ betrachten wir also alle Teilmengen $I' \sqcup J$ mit $\sharp(I' \sqcup J) = m$ und $J \ne \emptyset$. Deren Anzahl ist $\binom{m+n}{m} - 1$. QED

Bemerkung: Letzteres ist ein Spezialfall der Vandermonde-Identität:

$$\sum_{k=0}^{\ell} \binom{m}{k}\binom{n}{\ell-k} = \binom{m+n}{\ell}$$

Bemerkung: Die Anzahl der Nash–Gleichgewichte kann tatsächlich exponentiell wachsen. Ein einfaches Beispiel finden Sie auf Seite E415.

Der lokale Struktursatz für Gleichgewichte regulärer Spiele

Aufgabe: Erklären Sie die *brute force* Lösung für reguläre Bimatrix-Spiele.

Lösung: Für jede Größe $k \in \{0, \dots, \min(m,n)\}$ betrachten wir alle Teilmengen $I \subseteq \{s_1^0, \dots, s_1^m\}$ und $J \subseteq \{s_2^0, \dots, s_2^n\}$ der Größe $k+1$. Wie oben erklärt berechnen wir $s_1 = \sum_{i=0}^k p_i s_1^i$ und $s_2 = \sum_{j=0}^k q_j s_2^j$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & B_{I\times J}^\top & & 1 \\ & & & \vdots \\ & & & 1 \\ \hline 1 & \dots & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_k \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} & A_{I\times J} & & 1 \\ & & & \vdots \\ & & & 1 \\ \hline 1 & \dots & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_k \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dank Regularität existiert jeweils höchstens eine Lösung, siehe (2). Wir prüfen Positivität der Lösung, also $p_0, \dots, p_k > 0$ und $q_0, \dots, q_k > 0$.

Abschließend prüfen wir, ob es sich um ein Nash–Gleichgewicht handelt, indem wir gegen alle anderen *reinen* Strategien vergleichen, siehe E1D.

Der lokale Struktursatz E3C für Gleichgewichte regulärer Spiele garantiert uns, dass wir so alle Nash–Gleichgewichte finden. $\boxed{\text{QED}}$

Regularität ist eine generische Eigenschaft

Übung: Beweisen bzw. wiederholen Sie die folgenden Sätze.

Satz E3E: Fast alle Spiele sind regulär.

Wir fixieren die Strategiemengen S_1 und S_2 und setzen $S = S_1 \times S_2$. Hierzu betrachten wir den Raum $\mathbb{R}^{\{1,2\}\times S_1\times S_2}$ aller Bimatrix-Spiele.

In $\mathbb{R}^{\{1\times 2\}\times S_1\times S_2}$ sind die regulären Spiele offen und dicht und haben volles Lebesgue–Maß. Umgekehrt ist die Menge aller singulären Spiele in $\mathbb{R}^{\{1\times 2\}\times S_1\times S_2}$ abgeschlossen, nirgends dicht und haben Lebesgue–Maß 0.

Satz E3F: Nullstellenmengen sind dünn.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Für jedes Polynom $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \smallsetminus \{0\}$ ist die Nullstellenmenge $N = P^{-1}(\{0\})$ in $\mathbb{K}^n$ abgeschlossen, nirgends dicht und hat das Lebesgue–Maß $\operatorname{vol}_n(N) = 0$. Die Nichtnullstellenmenge $f_P^{-1}(\mathbb{K} \smallsetminus \{0\}) \subset \mathbb{K}^n$ ist offen und dicht und hat volles Lebesgue–Maß.

Das gilt insbesondere für die Determinante $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$.

🙂 Sie dürfen stolz sein auf Ihr Können in Topologie und Maßtheorie!

Lösung allgemeiner Bimatrix-Spiele

Reguläre Bimatrix-Spiele sind besonders sympathisch, da hier alle Nash–Gleichgewichte isoliert liegen und sich vergleichsweise leicht berechnen lassen. Zufällig befüllte Bimatrix–Spiele sind fast immer regulär, daher können wir dies als den typischen Fall betrachten.

Daneben gibt es nicht-reguläre Spiele, und auch diese sind interessant: Nicht jede Matrix ist zufällig, manche haben eine besondere Struktur! Selbst in Klausuren haben wir damit sehr gute Erfahrungen gemacht, natürlich angemessen klein und einfach. Allgemein geht es ebenso:

📖 D. Avis, G.D. Rosenberg, R. Savani, B. von Stengel: *Enumeration of Nash equilibria for two-player games.* Econ Theory 42 (2010) 9–37. Online implementiert unter `cgi.csc.liv.ac.uk/~rahul/bimatrix_solver`.

Dies ist inzwischen Teil des *Game Theory Explorer*, `gte.csc.liv.ac.uk`. R. Savani, B. von Stengel: *Game Theory Explorer – Software for the Applied Game Theorist.* Computational Management Science 12 (2015) 5-33.

Maximale Anzahl der Nash–Gleichgewichte

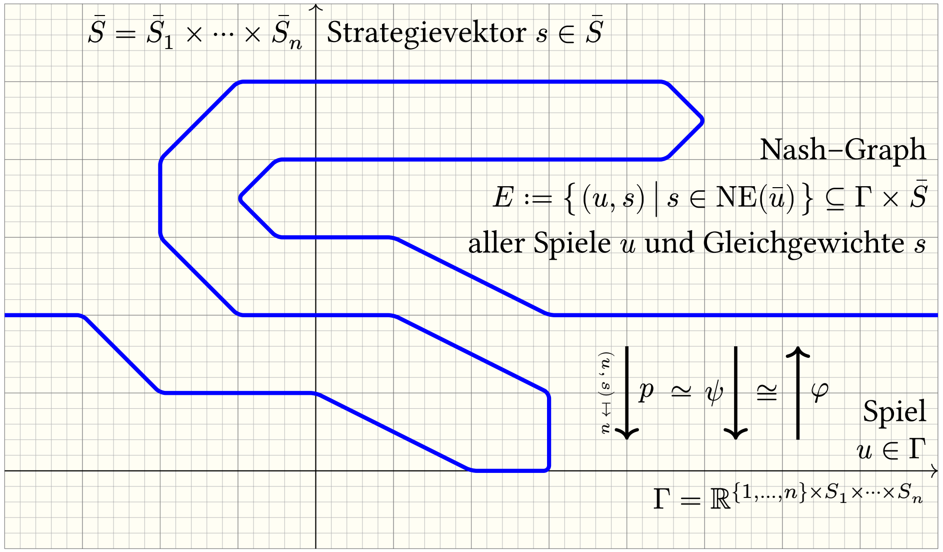
Beispiel: Folgen beide Auszahlungen der Einheitsmatrix $1_{n\times n}$, so hat dieses Koordinierungsspiel genau $2^n - 1$ Nash–Gleichgewichte (E415).

Quint und Shubik vermuteten daraufhin 1997, dass jedes reguläre Bimatrix-Spiel höchstens $2^n - 1$ Nash–Gleichgwichte hat. Dies ist leicht für $n = 2$, siehe den obigen Satz E3B. Auch die Fälle $n = 3$ und $n = 4$ wurden bewiesen, der Fall $n = 5$ erst kürzlich (`arxiv.org/pdf/2411.12385`).

Für $n \ge 6$ wurde die Quint–Shubik–Vermutung wiederlegt von
📖 Bernhard von Stengel: *New Maximal Numbers of Equilibria in Bimatrix Games.* Discrete & Computational Geometry 21 (1999) 557–568.

Als erstes Gegenbeispiel konstruierte Stengel ein 6×6 Bimatrix-Spiel mit 75 Nash–Gleichgewichten. Zudem zeigte er die untere Schranke $2.414^n/\sqrt{n}$ für die maximale Anzahl der Nash–Gleichgewichte. Das liegt nahe der oberen Schranke $2.6^n/\sqrt{n}$ von P. McMullen: *The maximum number of faces of a convex polytope.* Mathematika 17 (1970) 179–184.

Der globale Struktursatz von Kohlberg–Mertens



(1) Wir haben einen Homöomorphismus $(\psi,\varphi) : E \cong \Gamma$
(2) und zudem eine eigentliche Homotopie $H : p \simeq \psi$.

Der globale Struktursatz von Kohlberg–Mertens

Nashs Definition E1B von Gleichgewichten, sein Existenzsatz E1E und sein Beweis sind ein Geniestreich. Dasselbe denke ich zum folgenden globalen Struktursatz E3G von Kohlberg–Mertens. Er besagt anschaulich:

The graph $E \subseteq \Gamma \times \bar S$ of the Nash equilibrium correspondence (when compactified by adding the point ∞) is like a deformation of a rubber sphere around the sphere of normal form games (similarly compactified).

Ich habe dies in der obigen Skizze illustriert. In Wahrheit ist der Raum Γ aller Spiele nicht eindimensional, doch gemäß $\Gamma \cong \mathbb{R}^{I\times S}$ euklidisch und somit sehr übersichtlich. Dasselbe gilt für $\bar S$, ein Produkt von Simplizes.

Ich schlage vor: Bewundern Sie diesen phantastischen Satz und lassen Sie sich davon inspirieren. Sie dürfen gerne später darauf zurückkommen, wenn die Faszination anhält und die mathematische Neugier Sie leitet.

We recommend that a reader without an independent interest in the geometry of Nash equilibria skip the precise statement of this theorem and its proof in a first reading of this paper.

Der globale Struktursatz von Kohlberg–Mertens

Wir zuvor sei $I = \{1,\dots,n\}$ die Spielermenge und $S_1,\dots,S_n$ seien die endlichen Strategiemengen, zusammengefasst zu $S = \prod_{i\in I} S_i$. Hierzu sei $\bar S = \prod_{i\in I} \bar S_i$ die Menge der gemischten Strategievektoren.

Sei $\Gamma = \{ u : S \to \mathbb{R}^I \} \cong \mathbb{R}^{I\times S}$ die Menge aller Spiele in Normalform. Darüber betrachten wir den **Nash–Graphen** all ihrer Gleichgewichte:

$$E = \{ (u,s) \in \Gamma \times \bar S \mid s \in \mathrm{NE}(\bar u) \}$$

Hierzu gehört die Projektion $p : E \to \Gamma : (u,s) \mapsto u$. Über jedem Spiel $u \in \Gamma$ liegt also die Menge $p^{-1}(u) = \{u\} \times \mathrm{NE}(\bar u)$ seiner Gleichgewichte.

Satz E3G: globaler Struktursatz von Kohlberg–Mertens, 1986

(1) *Homöomorphiesatz:* Es gibt einen Homöomorphismus $(\psi,\varphi) : E \cong \Gamma$.
(2) *Homotopiesatz:* Zudem gibt es eine eigentliche Homotopie $H : p \simeq \psi$.

Der Beweis ist trickreich-elegant und benötigt kaum eine Seite (E321). Zum Verständnis muss er allerdings erst sorgsam entpackt werden, das führe ich hier nicht aus. Wenn Sie mutig sind, lesen Sie das Original!

Der globale Struktursatz von Kohlberg–Mertens

Mit folgenden Erläuterungen will ich den Satz für Sie einordnen:

🙂 Der Basisraum $\Gamma = \{ u : S \to \mathbb{R}^I \} \cong \mathbb{R}^{I\times S}$ ist ein euklidischer Raum. Der darüber liegende Totalraum $E \subseteq \Gamma \times \bar S$ könnte auf den ersten Blick beliebig kompliziert sein. Dank (1) ist E jedoch homöomorph zu Γ und somit erfreulich einfach, nämlich ebenfalls ein euklidischer Raum $\mathbb{R}^{I\times S}$. Das ist das erste Wunder (1) dieses Struktursatzes.

☹ Die Projektion $p : E \to \Gamma$ ist offensichtlich kein Homöomorphismus: Über $u \in \Gamma$, also einem Spiel $u : S \to \mathbb{R}^I$, liegen im Allgemeinen mehrere Gleichgewichte (u,s) mit $s \in \mathrm{NE}(\bar u)$, typischerweise nur endlich viele, aber ausnahmsweise sind auch unendlich viele Gleichgewichte möglich. Die Abbildung p codiert somit die gesamte Komplexität des Problems!

🙂 Hier bestaunen wir das zweite Wunder (2) dieses Struktursatzes: Es gibt eine eigentliche Homotopie $H : p \simeq \psi : E \to \Gamma$, also eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times E \to \Gamma$, die $H_0 = p$ stetig deformiert zu $H_1 = \psi$. Diese ist eigentlich, also stetig fortsetzbar zu $H^* : [0,1] \times E^* \to \Gamma^*$ auf die Einpunktkompaktifizierung $E^* = E \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^N$ mit $N = n \cdot |S|$.

Der globale Struktursatz von Kohlberg–Mertens

THEOREM 1: *$\bar{p}$ is homotopic to a homeomorphism. More precisely, there exists a homeomorphism ϕ from Γ to E such that $p \circ \phi$ is homotopic to the identity on Γ under a homotopy that extends to $\bar{\Gamma}$.*

PROOF: Let $T_n = \prod_{i \neq n} S_i$; Γ_n is the set of all $S_n \times T_n$ payoff matrices $G^n_{s,t}$, but it will be more convenient to use the following reparameterization of Γ_n: let $G^n_{s,t} = \tilde{G}^n_{s,t} + g^n_s$, where $\sum_{t \in T_n} \tilde{G}^n_{s,t} = 0$, i.e., g^n_s is the average over t of $G^n_{s,t}$. Thus Γ_n will be considered as the set of all pairs $(\tilde{G}^n, g^n)$, with $\sum_{t \in T_n} \tilde{G}^n_{s,t} = 0$.

Let $z^n_s = \sigma^n_s + \sum_{t \in T_n} G^n_{s,t} \prod_{i \neq n} \sigma^i_{t_i}$.

The z^n_s are continuous functions on E. Conversely, given $\tilde{G}$ and any vector z, one can recompute the corresponding point of E in a unique and continuous way, as follows:

First, $v^n = \min\{\alpha \mid \sum_{s \in S_n} (z^n_s - \alpha)^+ \leqslant 1\}$ (player n's equilibrium payoff); next, $\sigma^n_s = (z^n_s - v^n)^+$; finally

$$(*) \qquad g^n_s = z^n_s - \sigma^n_s - \sum_{t \in T_n} \tilde{G}^n_{s,t} \prod_{i \neq n} \sigma^i_{t_i} \left(= \sum_{t \in T_n} g^n_s \prod_{i \neq n} \sigma^i_{t_i} \right).$$

This homeomorphism, from the set of pairs $(\tilde{G}, z)$ to E, is the homeomorphism of the statement; and $p \circ \phi$ maps $(\tilde{G}, z)$ to $(\tilde{G}, g)$.

There only remains to construct the homotopy.

Let, for $t \in [0,1]$, $q_t(\tilde{G}, z) = (\tilde{G}, tz + (1-t)g)$ (and $q_t(\infty) = \infty$). Since $q_0 = p \circ \phi$ and q_1 (which is the identity) are both continuous, we already know the continuity of q on $[0,1] \times E$; so there only remains to show the continuity of q at all points of $[0,1] \times \{\infty\}$, or equivalently that $\forall M$, $\exists K$ such that $\|(\tilde{G}, z)\| \geqslant K \Rightarrow \forall t$, $\|q_t(\tilde{G}, z)\| \geqslant M$.

Note that $(*)$ implies $|z^n_s - g^n_s| \leqslant |\sigma^n_s| + |\sum_{t \in T_n} \tilde{G}^n_{s,t} \prod_{i \neq n} \sigma^i_{t_i}|$; thus, using the maximum norm throughout,

$$(**) \qquad \|z - g\| \leqslant \|\tilde{G}\| + 1.$$

So choosing $K = 2M + 1$, if $\|\tilde{G}, z\| \geqslant K$ then either $\|\tilde{G}\| \geqslant M$, in which case $\|q_t(\tilde{G}, z)\| \geqslant M$, or $\|\tilde{G}\| < M$ and $\|z\| \geqslant 2M+1$, in which case, by $(**)$, $\|tz + (1-t)g\| \geqslant M$ so again $\|q_t(\tilde{G}, z)\| \geqslant M$. *Q.E.D.*

Der globale Struktursatz von Kohlberg–Mertens

Für Spieler $i \in I$ betrachten wir gemischte Strategien als WMaße auf S_i,

$$\bar{S}_i = \left\{ \sigma_i : S_i \to [0,1] \,\middle|\, \textstyle\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1 \right\}.$$

Darin liegt die Gleichverteilung $\bar{\sigma}_i(s_i) = 1/|S_i|$ als Schwerpunkt.

Unter dem Produktmaß $\sigma \in \bar{S} := \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$ wird der Strategievektor $(s_1, \dots, s_n) \in S := S_1 \times \dots \times S_n$ mit Wkt $\sigma(s) := \sigma_1(s_1) \cdots \sigma_n(s_n)$ gespielt.

Dies ist das Produkt aus $\sigma_i(s_i)$ und $\sigma_{-i}(s_{-i}) := \prod_{j \neq i} \sigma_j(s_j)$, wobei $S \cong S_i \times S_{-i}$ mit $S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j$ und $\bar{S} \cong \bar{S}_i \times \bar{S}_{-i}$ mit $\bar{S}_{-i} = \prod_{j \neq i} \bar{S}_j$

Das Spiel $u = (u_1, \dots, u_n) \in \Gamma$ besteht aus den Auszahlungsmatrizen

$$u_i \;:\; S_i \times S_{-i} \to \mathbb{R} \;:\; (s_i, s_{-i}) \mapsto u_i(s_i, s_{-i})$$

für jeden Spieler $i \in I$. Wir zerlegen $u_i(s_i, s_{-i}) = \bar{u}_i(s_i) + \tilde{u}_i(s_i, s_{-i})$ in den Mittelwert $\bar{u}_i : S_i \to \mathbb{R}$ mit $\bar{u}_i(s_i) := \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) \, \bar{\sigma}_{-i}(s_{-i})$ und die Exzentrizität $\tilde{u}_i : S_i \times S_{-i} \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \tilde{u}_i(s_i, s_{-i}) \, \bar{\sigma}_{-i}(s_{-i}) = 0$.

Wir schreiben $\Gamma \cong \tilde{\Gamma} : u \leftrightarrow (\tilde{u}, \bar{u})$ und $E \cong \tilde{E} : (u, \sigma) \leftrightarrow (\tilde{u}, \bar{u}, \sigma)$.

Der globale Struktursatz von Kohlberg–Mertens

Wir definieren $\tilde{\psi} : \tilde{E} \to \tilde{\Gamma} : (\tilde{u}, \bar{u}, \sigma) \mapsto (\tilde{u}, z)$ mit

$$z_i(s_i) = \sigma_i(s_i) + \bar{u}_i(s_i) + \textstyle\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \tilde{u}_i(s_i, s_{-i}) \, \sigma_{-i}(s_{-i}).$$

Umgekehrt definieren wir $\tilde{\varphi} : \tilde{\Gamma} \to \tilde{E} : (\tilde{u}, z) \mapsto (\tilde{u}, \bar{u}, \sigma)$: Wir setzen

$$v_i = \min\left\{ \alpha \in \mathbb{R} \,\middle|\, \textstyle\sum_{s_i \in S_i} [z_i(s_i) - \alpha]^+ \le 1 \right\}.$$

Daraus erhalten wir zunächst $\sigma_i(s_i) = [z_i(s) - v_i]^+$ und dann

$$\bar{u}_i(s_i) = z_i(s_i) - \sigma_i(s_i) - \textstyle\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \tilde{u}_i(s_i, s_{-i}) \, \sigma_{-i}(s_{-i}).$$

Lemma E3H: Kohlberg–Mertens Homöomorphiesatz

Die so definierte Abbildung $\varphi : \Gamma \to E : \hat{u} \mapsto (\tilde{u}, z) \mapsto (\tilde{u}, \bar{u}, \sigma) \mapsto (u, \sigma)$, wie oben mit $\hat{u} = \tilde{u} + z$ und $\tilde{u} + \bar{u} = u$, ist wohldefiniert, also $\sigma \in \mathrm{NE}(u)$.

Zudem ist $(\varphi, \psi) : \Gamma \cong E$ ein Homöomorphismuspaar, d.h. $\varphi : \Gamma \to E$ und $\psi : E \to \Gamma$ sind stetig und erfüllen $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_\Gamma$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_E$.

Übung: Wenn Sie möchten, können Sie dies nun selbst nachrechnen.

Der globale Struktursatz von Kohlberg–Mertens

Lemma E3I: Kohlberg–Mertens Homotopiesatz

Die Projektion $p : E \to \Gamma : (u, \sigma) \mapsto u$ ist eigentlich homotop zu unserem Homöomorphismus $\psi : E \xrightarrow{\sim} \Gamma : (u, \sigma) \mapsto (\tilde{u}, \bar{u}, \sigma) \mapsto (\tilde{u}, z) \mapsto \hat{u}$ vermöge der affinen Homotopie $H : [0,1] \times E \to \Gamma$ mit $H_t(u, \sigma) = (1-t)u + t\hat{u}$.

Übung: Wenn Sie möchten, können Sie auch dies selbst nachrechnen.

Zur Motivation dieses schönen Projekts zitiere ich einen der Meister selbst aus Srihari Govindan und Robert Wilson: *Direct Proofs of Generic Finiteness of Nash Equilibrium Outcomes.* Econometrica 69 (2001) 765–769.

Harsanyi (1973), Rosenmuller (1971), and Wilson (1971) showed that for each assignment of generic payoffs to the normal form of a game, the number of Nash equilibria is finite and odd. Nowadays, this result is seen as an immediate corollary of Kohlberg and Mertens' (1986, Theorem 1) structure theorem, which states that the Nash graph is homeomorphic to the space of normal-form payoffs. [sic! Zudem ist die Projektion $p : E \to \Gamma$ eigentlich homotop zu einem Homöomorphismus.]

Folgerung: das Paritätstheorem von Wilson

♦ Satz E3D: Paritätstheorem von Wilson, 1971

Fast alle endlichen Spiele $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ haben nur endlich viele Nash–Gleichgewichte, und ihre Anzahl $\sharp\,\mathrm{NE}(\bar u)$ ist ungerade.

Wir nutzen hierzu den Abbildunggrad $\deg : [\mathbb{S}^N, \mathbb{S}^N] \rightsquigarrow \mathbb{Z} : f \mapsto \deg(f)$. Er ordnet jeder stetigen Abbildung $f : \mathbb{S}^N \to \mathbb{S}^N$ eine Zahl $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ zu. Anschaulich zählt $\deg(f)$, wie oft f die Sphäre $\mathbb{S}^N$ um sich selbst wickelt.

(A) Bei Komposition von $f, g : \mathbb{S}^N \to \mathbb{S}^N$ gilt $\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$. Daraus folgt $\deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^N}) = 1$ und $\deg(f) = \pm 1$ für Homöomorphismen.

(B) Aus Homotopie $H : f \simeq g$ folgt Gleichheit $\deg(f) = \deg(g)$.

(C) Hat $y \in \mathbb{S}^N$ nur endlich viele Urbilder, also $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}^!$, so ist $\deg(f) = \sum_{i=1}^k \deg(f, x_i)$ die Summe der lokalen Abbildungsgrade.

Dasselbe gilt für eigentliche Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ und eigentliche Homotopien $H : f \simeq g$, jeweils dank stetiger Fortsetzung im Punkt ∞. Mit diesem Werkzeug beweisen wir nun Wilsons Paritätstheorem.

Folgerung: das Paritätstheorem von Wilson

Beweis von Wilsons Paritätstheorem: Fast alle Spiele $u \in \Gamma$ sind regulär. Genauer: Die regulären Spiele bilden eine offene dichte Teilmenge.

Wir nutzen zunächst unseren lokalen Struktursatz E3C:

(0) Über jedem regulären Spiel $u \in \Gamma$ liegen nur endlich viele, reguläre Nash–Gleichgewichte $s_1, \dots, s_k \in \mathrm{NE}(\bar u)$. Um $(u, s_i) \mapsto u$ ist $p : E \to \Gamma$ ein lokaler Homöomorphismus dank Cramers Umkehrformel.

Wir nutzen nun den globalen Struktursatz E3G von Kohlberg–Mertens:

(1) Wie p hat auch $f = p \circ \varphi : \Gamma \to \Gamma$ über u nur endliche viele Urbilder $x_1, \dots, x_k \in \Gamma$ und ist um jedes davon ein lokaler Homöomorphismus. Für die lokalen Abbildungsgrade gilt demnach $\deg(f, x_i) \in \{\pm 1\}$.

(2) Aus eigentlicher Homotopie $H : f \simeq \mathrm{id}_\Gamma$ folgt schließlich

$$1 \overset{(A)}{=} \deg(\mathrm{id}_\Gamma) \overset{(B)}{=} \deg(f) \overset{(C)}{=} \sum_{i=1}^k \deg(f, x_i).$$

Modulo 2 finden wir $1 \equiv k \bmod 2$. Also ist k ungerade. QED

Rückblick auf den globalen Struktursatz

Theorie und Anwendung arbeiten auch hier bestens zusammen! Der Abbildungsgrad ist ein wunderbares Hilfsmittel, einfach doch wirkungsvoll. Wir haben ihn bereits in der Topologie sehr erfolgreich eingesetzt, zum Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes, des Satzes vom gekämmten Igel und vielen weiteren geometrischen Anwendungen.

Die Beweise sind meist elegant und raffiniert, wie oben gesehen. Freilich muss erst einmal bewiesen werden, dass der Abbildungsgrad existiert und die obigen hilfreichen Eigenschaften besitzt. Das führe ich hier nicht aus, sondern borge mir dieses Werkzeug aus der Algebraischen Topologie. Das ist ein grundehrliches Beispiel von ~~Aneignung~~ Arbeitsteilung.

Es ist schon bemerkenswert, dass die Algebraische Topologie hier in der Spieltheorie durchschlagende Wirkung entfaltet. Erstere gilt gemeinhin als abstrakt, und das ist sie sicher auch; Ignoranten halten sie daher für anwendungsfern, doch das Gegenteil ist wahr: Sie führt uns zu wichtigen Fixpunktsätzen und klärt die geometrische Struktur von Lösungsmengen, wie hier in den Sätzen von Kohlberg–Mertens und Wilson zu bewundern.

Rückblick auf den globalen Struktursatz

Aufgabe: Nashs Existenzsatz wurde im Beweis von Kohlberg–Mertens nicht verwendet. Versuchen Sie, Ersteren aus Letzterem zu folgern.

Lösung: (1) Wie oben erklärt können wir den globalen Struktursatz von Kohlberg–Mertens nutzen und daraus Wilsons Paritätstheorem ableiten. Für jedes generische Spiel $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ist demnach die Anzahl $\sharp\,\mathrm{NE}(\bar u)$ ungerade, also insbesondere größer 0, und somit $\mathrm{NE}(\bar u) \neq \emptyset$.

(2) Das lässt nur noch den Fall nicht-regulärer Spiele offen: Könnte hier die Ausnahme $\mathrm{NE}(\bar u) = \emptyset$ entstehen? Dann wäre $f : p \circ \varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ nicht surjektiv, denn $u \notin \mathrm{Im}(f)$. Wir hätten dann die Homotopie

$$K : [0,1] \times (\mathbb{R}^N \cup \{\infty\}) \to \mathbb{R}^N \cup \{\infty\} \;:\; (t, x) \mapsto u + (f^*(x) - u)/t,$$
$$K_0 = \mathrm{const} : \mathbb{R}^N \cup \{\infty\} \to \{\infty\} \hookrightarrow \mathbb{R}^N \cup \{\infty\},$$
$$K_1 = f^* : \mathbb{R}^N \cup \{\infty\} \to \mathbb{R}^N \cup \{\infty\}.$$

Das führt zur Homotopie $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^N} \simeq f^* \simeq \mathrm{const} : \mathbb{S}^N \to \mathbb{S}^N$. Eine solche ist jedoch unmöglich, denn $\deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^N}) = 1$ und $\deg(\mathrm{const}) = 0$. QED

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2020)

Aufgabe: Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S \times T \to \mathbb{R}^2$ und seine Fortsetzung $\bar{g} : [S] \times [T] \to \mathbb{R}^2$ auf gemischte Strategien.

Alice \ Bob	t_0	t_1	t_2	t_3
s_0	5 / 3	1 / 1	1 / 3	2 / 2
s_1	3 / 3	3 / 6	3 / 0	5 / 4

(1) Nennen Sie alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s, t) \in \mathrm{NE}(g)$.

(2) Alice spielt die Strategie $s_p = (1-p)s_0 + ps_1$ für ein $p \in [0, 1]$. Zeichnen Sie die Auszahlung $f_i(p) := \bar{g}_B(s_p, t_i)$ zu Bobs Strategien t_i.

Eine von Bobs reinen Strategien $x \in T$ ist nie beste Antwort; nennen Sie x und eine gemischte Strategie $y \in [T \smallsetminus \{x\}]$, die x strikt dominiert.

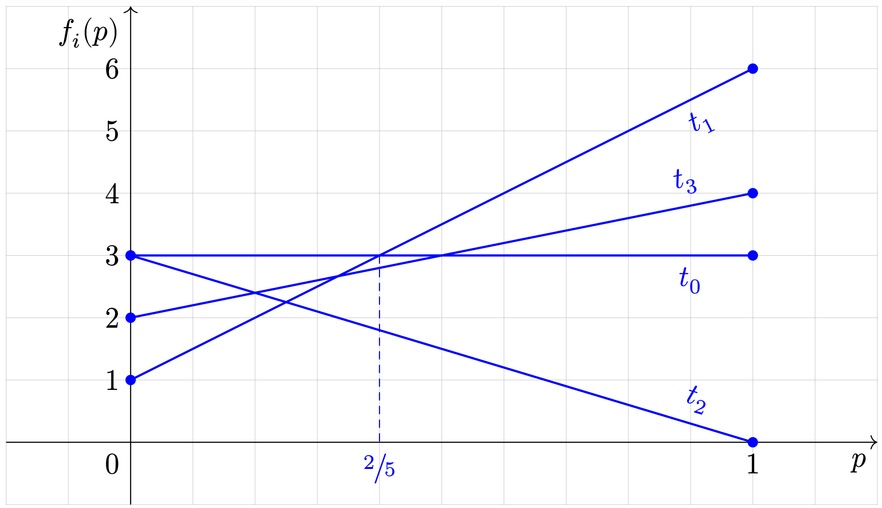
(3) Nennen Sie zu jeder Strategie s_p Bobs beste Antworten.

(4) Bestimmen Sie damit alle Nash–Gleichgewichte $(s, t) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2020)

Lösung: (1) Die reinen Gleichgewichte sind $\mathrm{NE}(g) = \{ (s_0, t_0), (s_1, t_1) \}$.

(2) Wir skizzieren die Auszahlungen $f_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ für Bob:



Demnach ist t_3 nie beste Antwort. Sie wird dominiert von $y = \frac{3}{5}t_0 + \frac{2}{5}t_1$.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2020)

(3) Graphisch lesen wir zu s_p jeweils Bobs beste Antworten ab:

Intervall	$p = 0$	$0 < p < 2/5$	$p = 2/5$	$2/5 < p \le 1$
Antwort	$[t_0, t_2]$	$\{t_0\}$	$[t_0, t_1]$	$\{t_1\}$

(4) Alice spielt $s_p = (1-p)s_0 + ps_1$ mit $p \in [0, 1]$. Fallunterscheidung:

1. Fall: Hier gilt $p = 0$. Bob spielt $t = (1-q)t_0 + qt_2$. Alice bekommt $g_A(s_0, t) = (1-q) \cdot 5 + q \cdot 1$, abweichend $g_A(s_1, t) = (1-q) \cdot 3 + q \cdot 3$. Es muss $g_A(s_0, t) \ge g_A(s_1, t)$ gelten, also $2(1-q) \ge 2q$, somit $q \ge 1/2$.

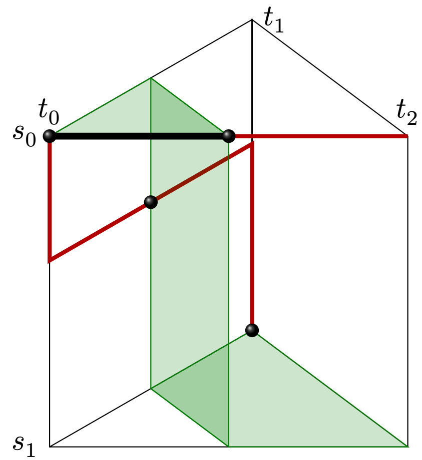
2. Fall: Hier gilt $0 < p < 2/5$. Bob spielt $t = t_0$. Wegen $g_A(s_0, t_0) = 5 > 3 = g_A(s_1, t_0)$ entsteht hier kein Gleichgewicht.

3. Fall: Hier gilt $p = 2/5$. Bob spielt $t = (1-q)t_0 + qt_1$. Alice bekommt $g_A(s_0, t) = (1-q) \cdot 5 + q \cdot 1$ bzw. $g_A(s_1, t) = (1-q) \cdot 3 + q \cdot 3$. Es muss $g_A(s_0, t) = g_A(s_1, t)$ gelten, also $2(1-q) = 2q$, somit $q = 1/2$.

4. Fall: Hier gilt $2/5 < p \le 1$. Bob spielt $t = t_1$. Wegen $g_A(s_0, t_0) = 1 < 3 = g_A(s_1, t_0)$ muss Alice s_1 spielen.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2020)

Zusammenfassung: Nash–Gleichgewichte sind die beiden isolierten Punkte (s_1, t_1) und (s, t) mit $s = 3/5\, s_0 + 2/5\, s_1$ und $t = 1/2\, t_0 + 1/2\, t_1$ sowie das Intervall aller Punkte (s_0, t) mit $t = (1-q)t_0 + qt_2$ und $q \in [0, 1/2]$.



Die rote Reaktionskurve für Bob erhalten wir aus (3). Spielt Bob die Strategie $t = q_0 t_0 + q_1 t_1 + q_2 t_2$, dann erhält Alice die Auszahlung $5q_0 + 1q_1 + 1q_2$, wenn sie s_0 spielt, und $3q_0 + 3q_1 + 3q_2$, wenn sie s_1 spielt. Demnach ist s_0 die beste Antwort, falls $q_0 > 1/2$, und s_1 ist die beste Antwort, falls $q_0 < 1/2$. Im Fall $q_0 = 1/2$ ist jede Konvexkombination von s_0 und s_1 eine beste Antwort; dies ist die grüne Reaktionsfläche.

Die Schnittmenge der beiden Reaktionsrelationen (Kurve / Fläche) ist die Menge der Nash–Gleichgewichte, hier schwarz eingezeichnet.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2019)

Aufgabe: Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S_A \times S_B \to \mathbb{R}^2$ und seine Fortsetzung $\bar{g} : [S_A] \times [S_B] \to \mathbb{R}^2$ auf gemischte Strategien.

Alice \ Bob	s_2	s_3	s_4	s_5
s_0	1, 3	3, 6	5, 5	4, 4
s_1	3, 5	3, 0	6, 1	2, 4

(1) Nennen Sie alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(g)$.

(2) Alice spielt $s_t = (1-t)s_0 + ts_1$ für ein $t \in [0,1]$. Zeichnen Sie die Auszahlung $f_a(t) := \bar{g}_B(s_t, a)$ zu Bobs Antworten $a \in \{s_2, s_3, s_4, s_5\}$.
Eine von Bobs reinen Strategien $x \in S_B$ ist nie beste Antwort; nennen Sie x und eine gemischte Strategie $y \in [S_B \smallsetminus \{x\}]$, die x strikt dominiert.

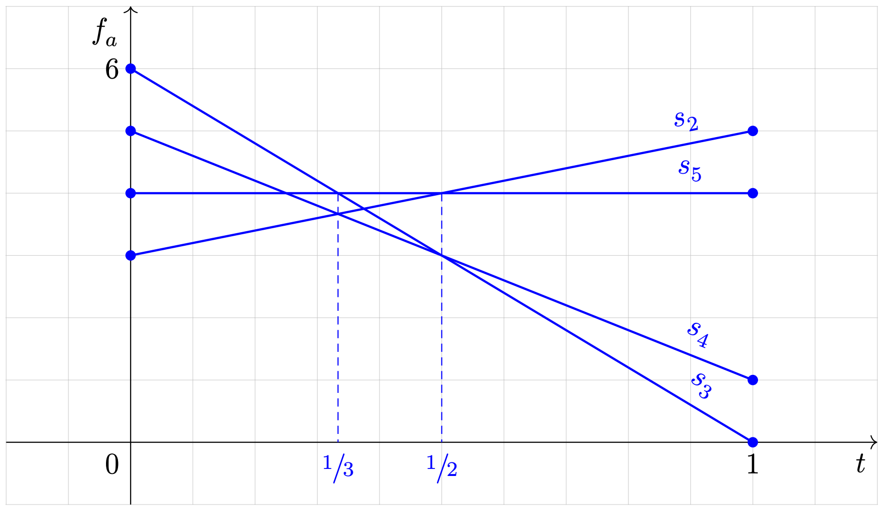
(3) Nennen Sie zu jeder Strategie s_t Bobs beste Antworten.

(4) Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2019)

(1) Die reinen Gleichgewichte sind $\mathrm{NE}(g) = \{\, (s_0, s_3),\ (s_1, s_2)\, \}$.

(2) Wir skizzieren die Auszahlungen $f_a : [0,1] \to \mathbb{R}$ für Bob:



Demnach ist s_4 nie beste Antwort. Sie wird dominiert von $y = \frac{2}{3}s_3 + \frac{1}{3}s_5$.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2019)

(3) Graphisch lesen wir zu s_t jeweils Bobs beste Antworten ab:

Intervall	$0 \le t <$	$1/3$	$< t <$	$1/2$	$< t \le 1$
Antwort	$\{s_3\}$	$[s_3, s_5]$	$\{s_5\}$	$[s_5, s_2]$	$\{s_2\}$

(4) Alice spielt $s_A = s_t = (1-t)s_0 + ts_1$ mit $t \in [0,1]$. Fallunterscheidung:

1. Fall: $0 \le t < 1/3$. Bob spielt $s_B = s_3$. Darauf ist $s_A \in [s_0, s_1]$ Alice' beste Antwort. Wir finden so die Nash–Gleichgewichte (s_t, s_3) für $0 \le t < 1/3$.

2. Fall: $t = 1/3$. Bob spielt $s_B \in [s_3, s_5]$. Nur auf $s_B = s_3$ ist $s_A = s_t$ Alice' beste Antwort. Wir finden so das Nash–Gleichgewicht (s_t, s_3) für $t = 1/3$.

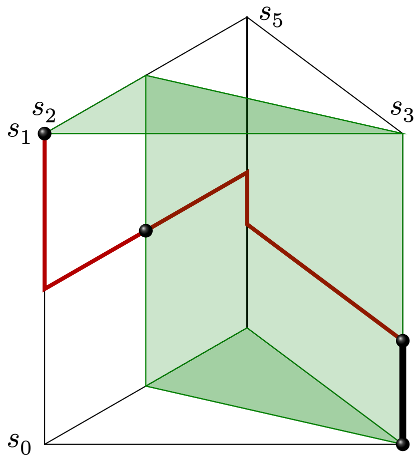
3. Fall: $1/3 < t < 1/2$. Bob spielt $s_B = s_5$. Darauf ist $s_A = s_0$ Alice' beste Antwort. Wir finden in diesem Intervall keine weiteren Gleichgewichte.

4. Fall: $t = 1/2$. Bob spielt $s_B \in [s_2, s_5]$. Nur auf $s_B = 1/2 s_2 + 1/2 s_5$ ist $s_A = s_t$ Alice' beste Antwort. Wir finden so das Gleichgewicht (s_t, s_B).

5. Fall: $1/2 < t \le 1$: Bob spielt $s_B = s_2$. Darauf ist $s_A = s_1$ Alice' beste Antwort. Wir finden so das letzte Nash–Gleichgewicht (s_1, s_2).

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2019)

Zusammenfassung: Nash–Gleichgewichte sind die isolierten Punkte (s_1, s_2) und (s_A, s_B) mit $s_A = 1/2\, s_0 + 1/2\, s_1$ und $s_B = 1/2\, s_2 + 1/2\, s_5$ sowie das Intervall aller Punkte (s_t, s_3) mit $t \in [0, 1/3]$.



Die rote Reaktionskurve für Bob erhalten wir aus (3). Spielt Bob die Strategie $s_B = p_2 s_2 + p_3 s_3 + p_5 s_5$, dann erhält Alice die Auszahlung $p_2 + 3p_3 + 4p_5$, wenn sie s_0 spielt, und $3p_2 + 3p_3 + 2p_5$, wenn sie s_1 spielt. Also ist s_0 die beste Antwort falls $p_2 < p_5$, und s_1 ist die beste Antwort falls $p_2 > p_5$. Im Fall $p_2 = p_5$ ist jede Konvexkombination von s_0 und s_1 beste Antwort. So erhalten wir die grüne Reaktionsfläche für Alice.

Die Schnittmenge der beiden Reaktionsrelationen (Kurve / Fläche) ist die Menge der Nash–Gleichgewichte, hier schwarz eingezeichnet.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2018)

Aufgabe: Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S_A \times S_B \to \mathbb{R}^2$ und seine Fortsetzung $\bar{g} : [S_A] \times [S_B] \to \mathbb{R}^2$ auf gemischte Strategien.

Alice \ Bob	a	b	c
s_0	5 7	10 7	8 3
s_1	10 1	0 4	8 9

(1) Nennen Sie alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(g)$.

(2) Angenommen Alice spielt die gemischte Strategie $s_t = (1-t)s_0 + ts_1$ für ein $t \in [0,1]$. Zeichnen Sie die Auszahlung $f_a(t) := \bar{g}_B(s_t, a)$ zu Bobs Strategie a, ebenso f_b und f_c.

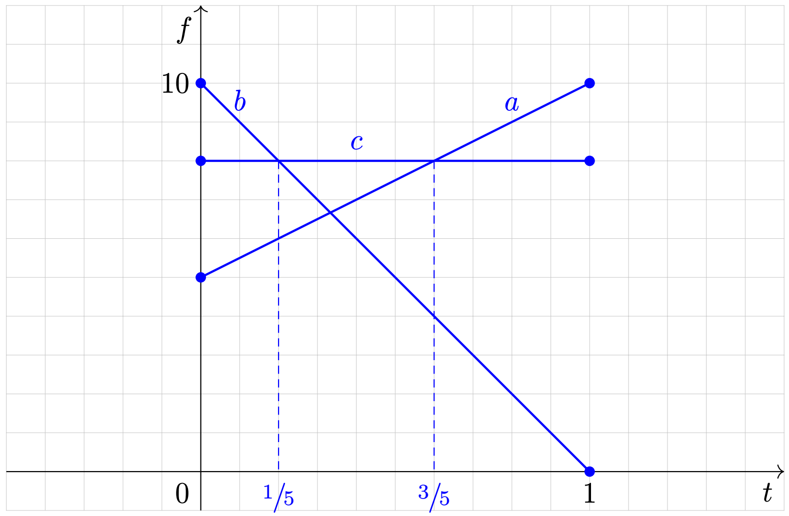
(3) Nennen Sie zu jeder Strategie s_t Bobs beste Antworten.

(4) Bestimmen Sie damit alle Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2018)

Lösung: (1) Das einzige reine Gleichgewicht ist $(s_A, s_B) = (s_0, b)$.

(2) Wir skizzieren die Auszahlungen $f_a, f_b, f_c : [0,1] \to \mathbb{R}$ für Bob:



Nash–Gleichgewichte (Klausur 2018)

(3) Graphisch lesen wir zu s_t jeweils Bobs beste Antworten ab:

Intervall	$0 \le t <$	$1/5$	$< t <$	$3/5$	$< t \le 1$
Antwort	$\{b\}$	$[b, c]$	$\{c\}$	$[a, c]$	$\{a\}$

(4) Neben dem reinen Gleichgewicht (s_0, b) finden wir die gemischten

$$\left(s_{1/5},\ {}^2\!/\!_3 b + {}^1\!/\!_3 c \right) \quad \text{und} \quad \left(s_{3/5},\ {}^1\!/\!_2 a + {}^1\!/\!_2 c \right).$$

☺ Dies sind *gegenseitig* beste Antworten, wie die Definition es verlangt. Hierzu ist eine kleine Rechnung notwendig: Versuchen Sie es als Übung! (Anleitung: Die beiden vorigen Aufgaben führen dies genauer aus.)

☺ Mit dieser Methode können Sie alle $2 \times n$–Spiele lösen.

Wiederholen / entwickeln Sie den Algorithmus, der zu jedem Spiel $g : \{0,1\} \times \{0,1,\dots,n\} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ alle Nash–Gleichgewichte bestimmt.

Der generische Fall ist leichter. Wie lösen Sie den allgemeinen Fall? Wenn Sie möchten, können Sie Ihr Lösungsverfahren programmieren!

Verständnisfragen (Klausur 2018)

Aufgabe: Hat jedes endliche Spiel $g : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(1) mindestens ein *reines* Nash–Gleichgewicht? (2) ein gemischtes?

(3) Hat jedes unendliche Spiel, etwa von der Form $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mindestens ein *gemischtes* Nash–Gleichgewicht?

Lösung: (1) Nein! Ein minimales Gegenbeispiel ist *Matching Pennies*. Etwas größer, dafür aber bekannter ist natürlich *Schere-Stein-Papier*. Diese Spiele erlauben keine reinen Nash–Gleichgewichte.

(2) Ja! Genau das garantiert der Existenzsatz E1E von Nash.

(3) Nein! Ein mögliches Gegenbeispiel ist *Die höchste Zahl gewinnt*, wobei $g(s_1, s_2) = (+1, -1)$ falls $s_1 > s_2$ und $g(s_1, s_2) = (-1, +1)$ falls $s_1 < s_2$ sowie $g(s_1, s_2) = (0, 0)$ falls $s_1 = s_2$. Offensichtlich gibt es kein reines Nash–Gleichgewicht, denn jede Strategie kann vom Gegner übertrumpft werden. Ebensowenig gibt es gemischte Gleichgewichte. Das gilt selbst dann, wenn wir unendliche Konvexkombinationen / diskrete WMaße zulassen, also $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} s(n) = 1$.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2018)

Aufgabe: Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf der Strategiemenge $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ und seine affine Fortsetzung $\bar{g} : [S] \times [S] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf dem Simplex $[S] = [s_1, s_2, \dots, s_n]$.

Alice \ Bob	s_1	s_2	…	s_n
s_1	1, 1	0, 0		0, 0
s_2	0, 0	1, 1		0, 0
…				0, 0
s_n	0, 0	0, 0	0, 0	1, 1

Formal haben wir also

$$g : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : g(s_k, s_\ell) = \begin{cases} (1,1) & \text{falls } k = \ell, \\ (0,0) & \text{falls } k \neq \ell. \end{cases}$$

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2018)

(1) Nennen Sie alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(g)$.
(2) Alice spielt $s_A = \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2$. Nennen Sie Bobs beste Antworten.
(3) Bob spielt $s_B = \frac{2}{5}s_1 + \frac{2}{5}s_2 + \frac{1}{5}s_3$. Nennen Sie Alice' beste Antworten.
(4) Nennen Sie alle gemischten Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Lösung: (1) Wir sehen sofort $\mathrm{NE}(g) = \{ (s_k, s_k) \mid k = 1, 2, \dots, n \}$, denn zu jedem s_k gibt es genau eine beste Antwort, nämlich s_k.

(2) Die besten Antworten auf s_A sind rein $\{s_1, s_2\}$ und gemischt $[s_1, s_2]$.

(3) Die besten Antworten auf s_B sind rein $\{s_1, s_2\}$ und gemischt $[s_1, s_2]$.

(4) Wir finden hier genau $2^n - 1$ Nash–Gleichgewichte:

$$\mathrm{NE}(\bar{g}) = \left\{ (s_A^X, s_B^X) \,\middle|\, \emptyset \neq X \subseteq \{1, 2, \dots, n\},\ s_A^X = s_B^X = \frac{1}{|X|} \textstyle\sum_{k \in X} s_k \right\}.$$

🙂 Jedes dieser Strategiepaare (s_A^X, s_B^X) ist wirklich ein Gleichgewicht. Umgekehrt ist jedes Gleichgewicht (s_A, s_B) von tatsächlich dieser Form. Der Beweis ist nicht schwer, aber etwas länglich, deshalb genügte in der Klausur die Nennung der Lösung. Versuchen Sie den Beweis als Übung!

Diagonalspiele und ihre Nash–Gleichgewichte

🙂 Generisch ist die Menge der Nash–Gleichgewichte endlich (Satz E3c). Ihre Anzahl kann exponentiell wachsen, wie wir hier konkret sehen:

Aufgabe: Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

Alice \ Bob	s_1	s_2	…	s_n
s_1	a_1, b_1	0, 0		0, 0
s_2	0, 0	a_2, b_2		0, 0
…				0, 0
s_n	0, 0	0, 0	0, 0	a_n, b_n

Die Konstanten $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}_{>0}$ seien strikt positiv. Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte, rein und gemischt!

Diagonalspiele und ihre Nash–Gleichgewichte

Lösung: (1) Reine Gleichgewichte sind

$$\mathrm{NE}(g) = \{ (s_k, s_k) \mid k = 1, 2, \dots, n \},$$

denn zu jedem s_k gibt es genau eine beste Antwort, nämlich s_k.

(2) Wie zuvor finden wir genau $2^n - 1$ gemischte Nash–Gleichgewichte,

$$\mathrm{NE}(\bar{g}) = \left\{ (s_A^X, s_B^X) \,\middle|\, \emptyset \neq X \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \right\}.$$

Konstruktion: Zu X sei $s_A^X = \sum_{k \in X} p_k s_k$ und $s_B^X = \sum_{k \in X} q_k s_k$ mit $p_k = c_B^X / b_k$ und $\sum_k p_k = 1$ sowie $q_k = c_A^X / a_k$ und $\sum_k q_k = 1$.

⚠ Alice' Wkten sind reziprok zu Bobs Gewinnen, und umgekehrt. Nur so ist Bobs Gewinnerwartung c_B^X konstant für alle s_k mit $k \in X$. Ebenso ist Alice' Gewinnerwartung c_A^X konstant für alle s_k mit $k \in X$.

🙂 Jedes dieser Strategiepaare (s_A^X, s_B^X) ist wirklich ein Gleichgewicht. Umgekehrt ist jedes Gleichgewicht (s_A, s_B) tatsächlich von dieser Form. Der Beweis ist nicht schwer, erfordert aber etwas Geduld und Sorgfalt. Wenn Sie möchten, führen Sie als Übung den Beweis sorgsam aus!

Eine exzellente Initiative (Klausur 2020)

Aufgabe: Die Universitäten $i \in I = \{1, 2, \dots, 9\}$ leiden unter Geldnot. Ein Wohltäter schreibt 100 Mio Euro aus nach folgendem Verfahren: Jede Universität $i \in I$ verpflichtet sich ihm gegenüber zu Leistungen im Wert von $b_i \in \{0, 1, \dots, 100\}$ Mio Euro. Diese Gebote sind gleichzeitig, verdeckt und unwiderruflich. Das höchste Gebot b_i gewinnt die 100 Mio Euro, genauer: Die Universitäten in der so definierten Gewinnermenge $M = \{ i \in I \mid b_i = \max_{j \in I} b_j \}$ teilen sich die 100 Mio Euro gleich auf:

$$u_i \,:\, \{0, 1, \dots, 100\}^9 \to \mathbb{R} \,:\, b \mapsto u_i(b) = \begin{cases} -b_i & \text{falls } i \notin M, \\ \frac{100}{|M|} - b_i & \text{falls } i \in M. \end{cases}$$

Das entspricht einer perfiden Auktion, bei der jeder Bieter zahlt (P205). Das klingt zunächst verrückt, kommt aber in der Realität öfters vor.

(1) Sie spielen die Universität $i \in I$. Sei $c_i := \max_{j \neq i} b_j$ das höchste Konkurrenzgebot. Angenommen, es gilt (a) $c_i \in \{0, 1, \dots, 98\}$ oder (b) $c_i = 99$ oder (c) $c_i = 100$. Was wären dazu Ihre besten Antworten?

(2) Bestimmen Sie alle (reinen) Nash–Gleichgewichte dieses Spiels.

Eine exzellente Initiative (Klausur 2020)

Lösung: (1) Wir gehen die drei Szenarien sorgfältig durch:

(1a) Die beste Antwort ist $b_i = c_i + 1$ mit Gewinn $100 - b_i = 99 - c_i > 0$.

Begründung durch sorgsame Fallunterscheidung aller Alternativen:
Für $b_i \geq c_i + 2$ ist der Gewinn $100 - b_i \leq 98 - c_i \leq 0$, also kleiner.
Für $b_i = c_i$ ist der Gewinn $100/|M| - b_i \leq 50 - c_i$, also kleiner.
Für $b_i < c_i$ ist der Gewinn $-b_i \leq 0$, also kleiner.

(1b) Die besten Antworten sind $b_i = 0$ oder $b_i = 100$ mit Gewinn 0.

Begründung durch sorgsame Fallunterscheidung aller Alternativen:
Für $b_i = 99$ ist der Gewinn $100/|M| - b_i \leq 50 - 99 < 0$, also kleiner.
Für $1 \leq b_i \leq 98$ ist der Gewinn $-b_1 < 0$, also kleiner.

(1c) Die beste Antwort ist $b_i = 0$ mit Gewinn 0.

Begründung durch sorgsame Fallunterscheidung aller Alternativen:
Für $b_i = 100$ ist der Gewinn $100/|M| - b_i \leq 50 - 100 < 0$, also kleiner.
Für $1 \leq b_i \leq 99$ ist der Gewinn $-b_i < 0$, also kleiner.

Eine exzellente Initiative (Klausur 2020)

(2) Dieses Spiel hat keine (reinen) Nash–Gleichgewichte! Wir betrachten

$$u \,:\, \{0, 1, \dots, 100\}^9 \to \mathbb{R}^9.$$

Angenommen $b \in \{0, 1, \dots, 100\}^9$ wäre ein Nash–Gleichgewicht. Wir betrachten die erste Universität $i \in I$ mit dem maximalen Betrag $b_i = \max_j b_j$. Nach obigem Muster unterscheiden wir drei Fälle (1–3):

(2a) Gilt $b_i \leq 98$, dann kann sich jede andere Universität $j \in I \setminus \{i\}$ verbessern. Also ist b, entgegen unserer Annahme, kein Gleichgewicht.

(2b) Gilt $b_i = 99$, dann wählen alle anderen 0 oder 100, hier also 0. Somit kann i sich verbessern, und b ist keine Gleichgewicht.

(2c) Gilt $b_i = 100$, dann wählen alle anderen Universitäten 0. Somit kann i sich verbessern, und b ist keine Gleichgewicht.

☺ Dieses negative Ergebnis ist bemerkenswert, gar erschütternd. Dank guter Notation ist alles klar und präzise nachzurechnen.

Eine exzellente Initiative (Klausur 2020)

Interpretation: Da es kein Gleichgewicht gibt, ist das Verhalten schwer vorhersehbar. Die Initiative des „Wohltäters“ zielt vielleicht sogar genau darauf ab, die Universitäten in verlustreiche Bietergefechte zu verwickeln, bei dem er mehr gewinnt als der ausgelobte Preis kostet. Umgekehrt ist nach dem Verfahren der Katzenjammer groß: „Hätte ich gewusst..., dann hätte ich...“. Bei Nash–Gleichgewichten passiert das nicht!

Auktionen: Unser Beispiel zeigt eine perfide Auktion, bei der jeder Bieter bezahlt, selbst wenn er dafür gar nichts bekommt, engl. *all pay auction*, siehe Seite P205. Zu einer ersten Analyse genügen uns bereits der Begriff des Nash–Gleichgewichts und sorgsame Fallunterscheidungen. Nur so lässt sich das Problem wirklich durchdringen.

Kapitel P behandelt Auktionen noch allgemeiner und ausführlicher. Der grundlegende Satz P2c der Auktionstheorie, Vickreys berühmte Erlösäquivalenz, hilft hier leider nicht, denn er setzt die Existenz eines Gleichgewichts voraus! Überhaupt helfen hier keine allgemeinen Sätze, sondern nur präzise Definitionen und sorgfältiges Ausarbeiten.

Jede Dozent:in $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \ge 2$, investiert in die Vorbereitung ihrer Lehre den Aufwand $b_i \in \{0, 1, \dots, 200\}$, gleichzeitig und verdeckt. Die beste Lehre, mit maximalem Aufwand b_i, erhält einen Lehrpreis im Wert von 49.80, bei Gleichstand wird unter den besten geteilt.

Aufgabe: (0) Geben Sie die Gewinnfunktion $u : \{0, 1, \dots, 200\}^n \to \mathbb{R}^n$ an.
(1) Sie spielen die Dozent:in $i \in I$ und betrachten $c_i := \max_{j \ne i} b_j$.
(1a) Angenommen, es gilt $c_i \le 48$. Was sind dazu Ihre besten Antworten?
(1b) Angenommen, es gilt $c_i \ge 49$. Was sind dazu Ihre besten Antworten?
(2) Bestimmen Sie alle (reinen) Nash–Gleichgewichte dieses Spiels u.
(3) Sind Lehrpreise ein faires Mittel zur Verbesserung der Lehre?

Manche:r entgegnet empört: „Gute Lehre ist kein Kosten-Nutzen-Kalkül, sondern entsteht aus Idealismus und Begeisterung.“ Das mag stimmen. Wer jedoch Personen die Entlohnung oder auch Anerkennung verwehrt, sollte nicht auf Idealismus pochen oder altruistische Wunder erhoffen. Sind Lehrpreise als Anreiz sinnvoll oder doch unvernünftig?

Lösung: (0) Mit $M = \{ i \in I \mid b_i = \max_{j \in I} b_j \}$ gilt

$$u_i : \{0, 1, \dots, 200\}^n \to \mathbb{R} : b \mapsto u_i(b) = \begin{cases} -b_i & \text{falls } i \notin M, \\ \frac{49.8}{|M|} - b_i & \text{falls } i \in M. \end{cases}$$

(1a) Die beste Antwort auf $c_i \le 48$ ist $b_i = c_i + 1$ mit Gewinn

$$49.8 - b_i = 48.8 - c_i \ge 0.8.$$

Begründung durch Fallunterscheidung aller Alternativen:
Für $b_i \ge c_i + 2$ ist der Gewinn $49.8 - b_i \le 47.5 - c_i$, also kleiner.
Für $b_i = c_i$ ist der Gewinn $49.8/|M| - b_i \le 24.9 - c_i$, also kleiner.
Für $b_i < c_i$ ist der Gewinn $-b_i \le 0$, also kleiner.

(1b) Die beste Antwort auf $c_i \ge 49$ ist $b_i = 0$ mit Gewinn $u_i(b) = 0$.
Für $b_i = c_i$ ist der Gewinn $49.8/|M| - b_i \le 24.9 - 49 < 0$, also kleiner.
Für $b_i > c_i$ ist der Gewinn $49.8 - b_i \le 49.8 - 50 < 0$, also kleiner.
Für $1 \le b_i < c_i$ ist der Gewinn $-b_i < 0$, also kleiner.

(2) Wir zeigen, dass es keine (reinen) Nash–Gleichgewichte gibt!
Angenommen $b \in \{0, 1, \dots, 200\}^n$ wäre ein Nash–Gleichgewicht von u.
Wir betrachten die erste Dozent:in $i \in I$ mit dem maximalen Aufwand $b_i = \max_j b_j$. Nach obigem Muster unterscheiden wir zwei Fälle:
(2a) Gilt $b_i \le 48$, dann kann sich jede andere Dozent:in $j \in I \setminus \{i\}$ verbessern durch $b'_j = b_i + 1$ (dank 1a). Also ist b kein Gleichgewicht.
(2b) Gilt $b_i \ge 49$, dann wählen alle anderen Dozent:innen $b_j = 0$ (dank 1b). Somit kann i sich verbessern durch $b'_i = 1$, und b ist kein Gleichgewicht.

Erläuterung: Dies ist ein erschütterndes Ergebnis, aber in diesem Modell leicht nachzurechnen. Es zeigt eine perfide Auktion, bei der jeder Bieter bezahlt, selbst wenn er dafür nichts bekommt, engl. *all pay auction*, siehe Seite P205. Zu einer ersten Analyse genügen uns bereits der Begriff des Nash–Gleichgewichts und sorgsame Fallunterscheidungen.

Diese und ähnliche Dilemmata erleben wir manchmal alltäglich um uns herum… vielleicht sogar in der universitären Lehre? Wir haben es auch im Casino in unseren legendären Versteigerungen ausprobiert.

Interpretation: Da es in diesem Spiel kein Nash–Gleichgewicht gibt, ist rationales Verhalten hier erschwert, Empfehlungen oder Prognosen kaum möglich. Der Anreiz des Lehrpreises soll vielleicht irrationales Verhalten fördern und die Dozent:innen zu unrentabel hohem Aufwand verleiten.

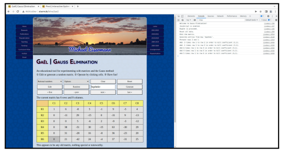
Nach dem Semester endet dies gar in Enttäuschung und Verbitterung: „Viel Mühe, wenig Ertrag: Die Lehre ist ein undankbares Geschäft.“ – „Hätte ich das gewusst, dann hätte ich mir nicht so viel Mühe gegeben.“ Hätte…, hätte…! Bei Nash–Gleichgewichten passiert das nicht.

Das erinnert uns an die Frage: Was genau sagen uns Gleichgewichte?
Sie sind rational bei vorausschauender Planung, etwa beim Verhandeln.
Sie minimieren die Reue, auch im Rückblick bleibt jede:r dabei.
Sie sind dauerhaft spielbar und somit nachhaltig.

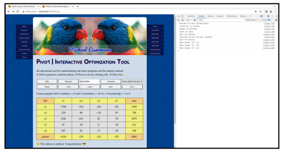
Kurzum: Der Mechanismus der Lehrpreise klingt zunächst verlockend, erweist sich aber bei genauerem Hinsehen als eine perfide *all pay auction*. Wer gute Leistung dauerhaft fördern möchte, muss sie auch ausreichend entlohnen und anerkennen. Alles andere ist kurzfristige Augenwischerei.

Kapitel F

Lineare Optimierung und Dantzigs Simplexverfahren



Gauß ⟷ Dantzig



We are all familiar with methods for solving linear equation systems [...] On the other hand, the study of linear inequality systems excited virtually no interest until the advent of game theory in 1944 and linear programming.
George Bernard Dantzig (1914–2005)

Inhalt dieses Kapitels F

Motivation und Überblick

Dieses Kapitel widmet sich dem Problem der **linearen Optimierung**. Diese Technik ist extrem vielseitig und zentral für viele Anwendungen.

Das von George Bernard Dantzig entwickelte **Simplexverfahren** gehört zweifellos zu den Top-Ten der wichtigsten Algorithmen. Gute Nachricht: Er ist nicht schwieriger als der Gauß–Algorithmus der Linearen Algebra; allein Terminierung und Laufzeit sind schwieriger – und interessanter.

Ich möchte Ihnen hier dieses wunderbare Verfahren näher bringen, soweit möglich sogar dafür begeistern. Vor allem jedoch möchte ich, dass Sie es praktisch nutzen können, um konkrete Probleme zu lösen.

Zugegeben, der erste Zugang ist nicht ganz leicht. Aber es lohnt sich! Harmonisch wie selten vereinen sich schöne Aspekte der Mathematik: Lineare Algebra (Gauß), Geometrie (Polytope), Analysis (Kompaktheit), Numerik (Optimierung), Wahrscheinlichkeit (Gleichgewichte), usw.

Unser Plan war es, schon in den vorangegangenen Übungsaufgaben Ihre Neugier zu wecken und Ihr Verlangen nach besseren Methoden. Nun ist der Moment gekommen, die entfachte Sehnsucht zu stillen.

Motivation und Überblick

Viele Hörer:innen der Spieltheorie haben das Simplexverfahren schon einmal gesehen, manche bereits mehrfach, etwa in Veranstaltungen zur

- Numerik / (Numerische) Lineare Algebra,
- Informatik / Algorithmische Geometrie,
- Optimierung / Lineare Optimierung.

Anders als bei anderen, vergleichbar fundamentalen Resultaten hält sich ihr Enthusiasmus jedoch oft in Grenzen: „Wollen Sie das wirklich tun?“ fragten mich Studierende, als ich begeistert von Linearer Optimierung fabulierte und verkündete, dies in die Spieltheorie einzubauen.

Ja, ich will! Das Simplexverfahren hat seinen historischen Ursprung in der Spieltheorie, und es löst auch heute noch als braves Arbeitspferd eine phantastische Vielfalt von Problemen, hier und überall sonst.

Wann, wenn nicht jetzt?
Wo, wenn nicht hier?
Wer, wenn nicht wir?
John F. Kennedy (1917–1963)

Motivation: Nash–Gleichgewichte

Endliche reelle Zwei-Personen-Spiele führen zu **Bimatrixspielen**:

$$u : \Delta^m \times \Delta^n \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (\, x^\top A\, y,\; x^\top B\, y \,)$$
$$\Delta^m = \{\, (x_0, x_1, \dots, x_m)^\top \mid x_i \ge 0,\ \textstyle\sum_{i=0}^m x_i = 1 \,\}$$
$$\Delta^n = \{\, (y_0, y_1, \dots, y_n)^\top \mid y_j \ge 0,\ \textstyle\sum_{j=0}^n y_j = 1 \,\}$$

Wir suchen **Nash–Gleichgewichte** $(x, y) \in \Delta^m \times \Delta^n$, verlangen also:

$$u_1(x, y) \ge u_1(\tilde{x}, y) \quad \text{für alle Konkurrenten } \tilde{x} \in \Delta^m$$
$$u_2(x, y) \ge u_2(x, \tilde{y}) \quad \text{für alle Konkurrenten } \tilde{y} \in \Delta^n$$

Dank Linearität genügt es, diese Ungleichungen für die **Ecken** zu testen:

$$x^\top A\, y \ge e_i^\top A\, y \quad \text{für alle } i = 0, \dots, m$$
$$x^\top B\, y \ge x^\top B\, e_j \quad \text{für alle } j = 0, \dots, n$$

🙂 Nash–Gleichgewichte entsprechen multilinearen Un/Gleichungen.
Für Nullsummenspiele reduzieren wir dies auf lineare Un/Gleichungen.
Ziel: Dies wollen wir systematisch lösen... dank Simplexverfahren!

Motivation: Nash–Gleichgewichte

Aus Kapitel E kennen wir strategische Spiele $u : \prod_{i \in I} S_i \to \prod_{i \in I} R_i$ in Normalform (E1K) und den Begriff des Nash–Gleichgewichts (E1L).

Nashs Existenzsatz (E1E) garantiert: Zu jedem endlichen reellen Spiel $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ existieren Nash–Gleichgewichte, wenn schon nicht in reinen, so doch in gemischten Strategien, kurz $\mathrm{NE}(\bar{u}) \ne \emptyset$.

Das führt zur offensichtlichen Frage: Wie berechnen wir Gleichgewichte? Nashs Satz gibt hierzu leider keinerlei Auskunft, er ist nicht konstruktiv.

Zur Illustration habe ich das Problem hier für zwei Spieler ausformuliert. Die Un/Gleichungen sind algebraisch, leider nicht linear, sondern nur bilinear in x und y, bei n Spielern entsprechend multilinear. Das macht es kompliziert. Die Lösungsmenge ist immerhin semi-algebraisch.

Für Zwei-Personen-Nullsummenspiele wissen wir noch mehr (E2D): Hier entsprechen die Nash–Gleichgewichte genau den Min-Maximierern und den Max-Minimierern. Dank dieser Eigenschaft können wir die Gleichgewichtsbedingungen zu linearen Un/Gleichungen vereinfachen. Letztere können wir dann mit dem Simplexverfahren lösen, siehe F209.

Motivation: korrelierte Gleichgewichte

Sei $u : S = S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel.

Eine **korrelierte Strategie** ist ein WMaß $\mathbf{P} \in [S]$ auf der Menge S, also $\mathbf{P} : S \to \mathbb{R} : s \mapsto \mathbf{P}(s) = \mathbf{P}(\{s\})$ mit $\mathbf{P}(s) \ge 0$ und $\sum_{s \in S} \mathbf{P}(s) = 1$.

Diese ist ein **korreliertes Gleichgewicht** des Spiels u, wenn gilt:

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i; s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i}) \ge \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i'; s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i})$$

für jeden Spieler i und alle Strategien $s_i, s_i' \in S_i$ und $s_{-i} \in S_{-i}$.

Praktisch: Ein **Signalgeber** lost die Empfehlung $s \in S$ aus mit Wkt $\mathbf{P}$ und teilt jedem Spieler $i \in I$ nur seine individuelle Strategie s_i mit.
Gleichgewicht: Für keinen Spieler lohnt sich eine Abweichung.

🙂 Dies sind lineare Un/Gleichungen in den gesuchten Wkten $\mathbf{P}(s)$:

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \left[u_i(s_i; s_{-i}) - u_i(s_i'; s_{-i})\right] \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i}) \ge 0$$

Wäre es nicht wunderbar, solche Probleme routiniert lösen zu können?
Hierfür gibt es eine starke Theorie und effiziente Lösungsverfahren!

Motivation: korrelierte Gleichgewichte

Kapitel I behandelt den Begriff des korrelierten Gleichgewichts als Spezialfall von Bayes–Spielen mit unvollständiger Information.

Die Idee eines Signalgebers ist genial einfach und einfach genial:
Die Spieler können damit faire und stabile Absprachen konstruieren.

Gleichgewichte sind durch ein System linearer Un/Gleichungen definiert:
Unter seiner partiellen Information folgt jeder Spieler seiner Empfehlung.

Dies führt sofort zu der Frage: Wie berechnen wir Gleichgewichte?
Für solche Probleme ist die lineare Optimierung maßgeschneidert!

Als erste Motivation zur linearen Optimierung in der Spieltheorie mögen diese beiden Anwendungen zu Gleichgewichten vorläufig genügen.

Die lineare Optimierung hat darüber hinaus zahlreiche weitere Anwendungsgebiete, sie ist wahrhaft ein Universalwerkzeug.

Ich behandle im Folgenden zunächst die allgemeine Problemstellung.
Anschließend kehren wir zu den motivierenden Eingangsfragen zurück.

Panorama: Einige der wichtigsten Algorithmen

Welche Algorithmen scheinen Ihnen die wichtigsten? Einige Vorschläge:
(Diese Liste können Sie durch viele würdige Kandidaten fortsetzen.)

Euklidischer Algorithmus zur Berechnung des ggT
Gröbner–Basen zur Lösung polynomieller Gleichungssysteme
Schnelle Primzahltests und Public Key Cryptography (PKC)

Newtons Methode zur iterativen Nullstellennäherung
Matrixzerlegung, Gauß (LU), Householder-Givens (QR), Cholesky
Lineare Optimierung, Simplexverfahren, Innere-Punkt-Methode

Schnelles Suchen und Sortieren, Quick-/Merge-/Heap-sort
Schnelle Fourier–Transformation (FFT) zur Signalverarbeitung
Datenkompression mittels JPEG, MPEG, MP3, Wavelets, etc.

Monte-Carlo-Methode zur Erwartungsschätzung durch Sampling
Kalman–Filter zur Zeitreihenanalyse und Zustandsschätzung
Googles PageRank zur Popularitätswertung von Internetseiten

Panorama: Einige der wichtigsten Algorithmen

Die Informatik steht in regem Austausch mit allen Wissenschaften, ganz besonders intensiv mit der Mathematik, einer ihrer historischen Wurzeln. Neben den klassischen Bereichen der **angewandten Mathematik** und **Numerik** erblühen so neue Gebiete der **Computational Mathematics**:

Computer Algebra Systems (CAS), Computational Group Theory (CGT), Computational Number Theory (CNT), Computational Geometry (CG), Computational Statistics, Data Science und Machine Learning (ML), Algorithmic Game Theory (AGT), Mathematical Economics, etc.

Meine obige Liste ist nicht ganz willkürlich, doch naturgemäß subjektiv; sie reflektiert persönliche Vorlieben in Algebra, Numerik und Stochastik.

Inspiriert wurde sie von einer ähnlichen Top-10-Liste in *Computing in Science and Engineering* (2000), dem *Princeton Companion to Applied Mathematics* (2016) und dem Buch *Modern Computer Algebra* (2013).

Natürlich hängt das Ranking von der Präzisierung der Frage ab:
Was gilt als ein Algorithmus? Wie bewerten wir seine Wichtigkeit?
Ich würdige hier grundlegende Bedeutung und häufige Anwendung.

Panorama: Einige der wichtigsten Algorithmen

Zwei dieser Algorithmen sind (vereinfacht) seit der Antike bekannt; ihre anhaltende Aktualität und Entwicklungsfähigkeit ist bemerkenswert. Euklid (um 300 v.u.Z.) nutzte seinen Algorithmus für natürliche Zahlen, er gilt ebenso für Polynome und allgemein in jedem euklidischen Ring. Die Methode von Newton (1643–1727) zur Nullstellennäherung nutzte bereits Heron von Alexandria (10–70 n.u.Z.) in einfachen Spezialfällen.

Alle weiteren Algorithmen sind Entdeckungen des 20. Jahrhunderts und boomen seit Entwicklung und durch Einsatz elektronischer Computer. Einige lohnen sich bereits deutlich spürbar für größere Handrechnungen, meist jedoch trumpfen sie für ernsthaft große Probleme erst richtig auf. Sie sind nicht mehr wegzudenken aus realistisch-großen Anwendungen in Natur- und Ingenieurwissenschaften, Industrie, Ökonomie, Militär, …

Kryptographie, Datenkompression, PageRank und Data Mining erblühen insbesondere durch die rasante Popularisierung des Internets seit 1990. In diesen Bereichen ist die Mathematik auch im Alltag direkt spürbar und deutlich sichtbar für alle, die unter die Oberfläche schauen.

Panorama: Einige der wichtigsten Algorithmen

Jede große Entwicklung des 20. Jahrhunderts, etwa die Raumfahrt, benötigte diese algorithmischen Grundlagen – und noch viele weitere. Zu Beginn des 21. Jahrhunderts ist absehbar, dass auch die nächsten großen Entwicklungen darauf aufbauen und die Werkzeuge erweitern. Durch Data Science und Machine Learning werden die algorithmischen Grundlagen nicht ersetzt oder überflüssig, sondern weiter ausgebaut.

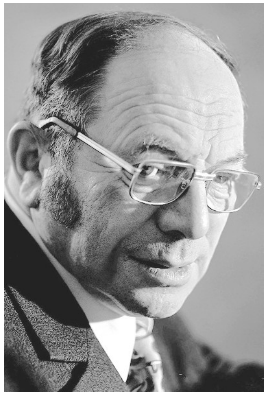
Schon heute ist es kaum möglich, sich auf eine „Top-Ten“ zu einigen. In Zukunft wird dies noch schwieriger, da die diversen Teilgebiete der Computational Mathematics weiter gedeihen und expandieren werden. Vielleicht sollte ich daher besser von der „Top-one-hundred“ sprechen, allgemein von Top-Algorithmen je nach Gebiet und Problemstellung. Differenzierung und Spezialisierung werden weiter fortschreiten.

In diesem Kapitel geht es um Optimierung, speziell lineare Optimierung, vor allem um Dantzigs Simplexverfahren zur Lösung linearer Programme. Dies gehört zweifellos zu den Top-Ten der wichtigsten Algorithmen. Zur würdigen Einordnung habe ich das Gesamtpanorama skizziert.

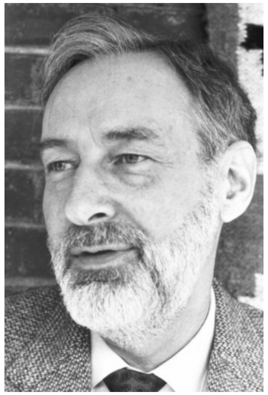
Lineare Optimierung: historischer Überblick

F013

Lineare Optimierung ist Lineare Algebra über $\mathbb{R}$ mit Variablen in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Eine schön illustrierte Einführung und motivierenden Überblick bietet TomS: *The Art of Linear Programming.* `youtu.be/E72DWgKP_1Y`.



Leonid V. Kantorovich
(St. Petersburg 1912 – Moskau 1986)



Tjalling C. Koopmans
(Wijdemeren 1910 – New Haven/CT 1985)

George B. Dantzig
(Portland/OR 1914 – Stanford/CA 2005)

Lineare Optimierung: historischer Überblick

F014
Erläuterung

Lineare Probleme treten in vielen Anwendungen auf, insbesondere zur Optimierung. Sie bilden extrem ausdrucksstarke und vielseitige Modelle und zeigen faszinierende, oft auch unerwartete Verbindungen zwischen verschiedenen Gebieten der angewandten und der reinen Mathematik.

Die Forschung zur Optimierung intensiviert sich zu Beginn des zweiten Weltkrieges. Um 1939–1941 untersuchen der sowjetische Mathematiker Leonid Kantorovich (1912–1986) und der niederländisch-amerikanische Ökonom Tjalling Koopmans (1910–1985) systematisch Transport- und Optimierungsprobleme. Für ihre bahnbrechenden Arbeiten erhalten sie 1975 den Wirtschafts-Nobelpreis, `www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1975`.

Als Dritter im Bunde zusammen mit Kantorovich und Koopmans gilt der US-amerikanische Mathematiker George Bernard Dantzig (1914–2005) als Begründer der Linearen Optimierung. Berühmt wurde Dantzig durch das von ihm entwickelte Simplexverfahren von 1947. Zusammen mit John von Neumann und Oskar Morgenstern baute er die Beziehungen zur Spieltheorie aus. Er erhielt 1976 die National Medal of Science.

Lineare Optimierung: historischer Überblick

F015
Erläuterung

George Dantzig studierte Mathematik an der University of Maryland (BSc) und an der University of Michigan (MSc). Allerdings fand er das Studium zu abstrakt und begeisterte sich nur für Statistik. Daher ging er 1939 nach Berkeley um bei Jerzy Neyman (1894–1981) zu promovieren. Um Neyman entstand eine führende Schule mathematischer Statistik.

George Dantzig ist der Held einer *urbanen Legende*. Als er einmal zu spät zur Vorlesung von Professor Neyman kam, standen an der Tafel zwei bislang unbewiesene Vermutungen aus der Statistik. Dantzig hielt sie versehentlich für Hausaufgaben und löste sie in den folgenden Tagen. Auf Neymans Vorschlag wurde dies zu Dantzigs Doktorarbeit.

Diese Geschichte kursiert in vielen Varianten, im Laufe der Zeit wurden Namen geändert und Details ausgeschmückt. Sie wurde zur Erbauungsgeschichte in diversen Predigten und zum Sinnbild für *positives Denken*. Diese unglaubliche Geschichte ist tatsächlich eine wahre Begebenheit! Anders als die meisten Legenden lässt sich ihr Ursprung gut belegen, siehe `www.snopes.com/fact-check/the-unsolvable-math-problem`.

Literatur zur linearen Optimierung

F016
Erläuterung

Lehrbücher speziell zur linearen Optimierung und ihren Grundlagen:

J. Matoušek, B. Gärtner: *Understanding and Using Linear Programming.* Springer 2006 (mitreißende Einführung, traditionell unschöne Notation)

R.J. Vanderbei: *Linear Programming.* (4th ed.) Springer 2014

V. Chvátal: *Linear Programming.* Freeman and Company 1983

G.B. Dantzig: *Linear Programming and Extensions.* RAND 1963

(Theorie und Anwendung werden umfassend erklärt. Die Darstellung gewänne sehr durch Tuckers Notation: Klarheit, Eleganz, Effizienz! Ich hoffe noch auf angemessen ästhetische Lehrbücher, siehe F131.)

Lehrbücher allgemein zur Optimierung und numerischen Aspekten:

C. Geiger, C. Kanzow: *Numerik restringierter Optimierungsaufgaben.* Springer 2002; … *unrestringierter Optimierungsaufgaben.* Springer 1999

S. Boyd, L. Vandenberghe: *Convex optimization.* CUP 2004

F. Jarre, J. Stoer: *Optimierung.* Springer 2004

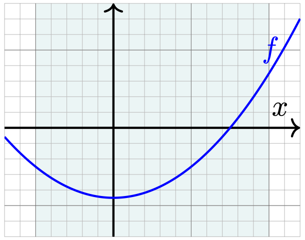
Software: `en.wikipedia.org/wiki/List_of_optimization_software`

Optimierung: allgemeine Problemstellung

F017

Die mathematische **Optimierung** untersucht Probleme folgender Art:

Maximiere die Zielfunktion	$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$
unter den Nebenbedingungen	$g_1(x) \ge 0, \dots, g_m(x) \ge 0$.



Schule: Max/Minimiere $f(x) = ax^2 + bx + c$ unter den Nebenbedingungen $x_0 \le x \le x_1$.
Allgemeine Aufgabe der Kurvendiskussion: Finde alle Extremstellen von $f : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$.

Die Frage betrachten wir mehrdimensional. Sie tritt in Anwendungen extrem häufig auf:

Lineare Optimierung (LP): Hier sind $f, g_1, \dots, g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affin-linear.
Quadratische Optimierung (QP): Hier ist $f(x) = x^\top Qx + cx$ quadratisch.
Konvexe Optimierung (CP): Hier sind $f, g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nur konvex.

Ebenso: Die Minimierung von f entspricht der Maximierung von $-f$.
Auch Gleichungen $g_i(x) = 0$ kommen vor, also $g_i(x) \ge 0$ und $g_i(x) \le 0$.

Optimierung: allgemeine Problemstellung

F018 Erläuterung

Oft müssen wir zwischen mehreren Alternativen $x \in X$ entscheiden. Ziel der **Optimierung** [*optimization* oder *operations research*] ist es, unter allen möglichen / zulässigen Optionen die beste(n) zu finden.

Hierbei kann die Menge X endlich / diskret sein (diskrete Optimierung), etwa $X = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid g_1(x), \dots, g_m(x) \ge 0\}$ (ganzzahlige Optimierung), oder kontinuierlich, speziell etwa $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x), \dots, g_m(x) \ge 0\}$.

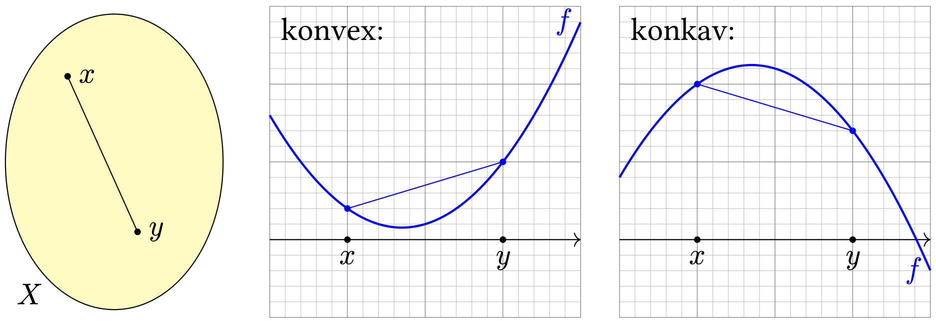
Gegeben ist die **Zielfunktion** $f : X \to \mathbb{R}$, etwa Kosten oder Ertrag. Gesucht ist $\inf f$, und wenn möglich ein/alle $x \in X$ mit $f(x) = \min f$; entsprechend $\sup f$, und wenn möglich ein/alle $x \in X$ mit $f(x) = \max f$.

Die Elemente $x \in X$ heißen **zulässig**; sie erfüllen alle erforderlichen Nebenbedingungen. Die Menge X heißt daher auch **Erfüllungsmenge**. Im Falle $X = \emptyset$ heißt das Problem **unerfüllbar**. Wird das Infimum bzw. Supremum von f nicht angenommen, so heißt das Problem **unlösbar**.

Neben **Optimierung** ist auch der traditionelle Begriff **Programmierung** gebräuchlich. Die Bezeichnung „Programm“ bedeutet schlicht „Planung“, also ausnahmsweise nicht die Erstellung eines Computerprogramms.

Optimierung: allgemeine Problemstellung

F019 Erläuterung



Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn für alle Punkte $x, y \in X$ und $t \in [0,1]$ auch der Zwischenpunkt $z = (1-t)x + ty$ in der Menge X liegt.

Wir nennen $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ **konvex**, wenn zudem auf ganz X gilt:

$$f((1-t)x + ty) \;\le\; (1-t)f(x) + tf(y)$$

Im Falle „<“ für alle $x \ne y$ in X und alle $t \in \,]0,1[$ heißt f **strikt konvex**. Entsprechend nennen wir f **(strikt) konkav**, wenn $-f$ (strikt) konvex ist.

Optimierung: allgemeine Problemstellung

F020 Erläuterung

Fingerübungen zur Wiederholung und zur Festigung der Begriffe:

Übung: Jede affin-lineare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto bx + c$ ist konvex und konkav. Die quadratische Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto x^\top Ax + bx + c$ mit symmetrischer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann (strikt) konvex / konkav, wenn A positiv / negativ semidefinit ist (bzw. strikt definit).

Übung: Sei $f : \mathbb{R} \supset [a,b] \to \mathbb{R}$ einmal bzw. zweimal differenzierbar. Genau dann ist f (strikt) konvex / konkav, wenn f' (strikt) wächst / fällt, also $f'' \ge 0$ / $f'' \le 0$ gilt (im strikten Falle entsprechend $f'' > 0$ / $f'' < 0$). Wie lauten die Kriterien für $\mathscr{C}^2$–Funktionen $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$?

Übung: Jeder Durchschnitt $X = \bigcap_{i\in I} X_i$ konvexer Mengen ist konvex. Jede Positivkombination $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$ konvexer Funktionen ist konvex. Ist $f : \mathbb{R}^n \supseteq X \to \mathbb{R}$ konvex, so auch die Menge $\{x \in X \mid f(x) \le c\}$. Ist $f_i : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konvex für jedes $i \in I$, so auch $f = \sup_{i\in I} f_i$.

Übung: Für jedes konvexe Problem gilt: Jedes lokale Minimum ist ein globales Minimum. Die Menge aller optimalen Punkte ist konvex. Ist die Zielfunktion strikt konvex, so ist die Optimalstelle eindeutig.

Erstes Beispiel: eindimensionale Optimierung

F021

Aufgabe: Maximieren Sie die Zielfunktion $z(x) = 3x + 5$ unter den Nebenbedingungen $\quad x \ge 0, \quad x + 2 \ge 0, \quad -2x + 3 \ge 0, \quad -3x + 4 \ge 0.$

Lösung: Der Ursprung $x = 0$ ist zulässig. Also gilt $\max z \ge z(0) = 5$.

Die Funktion $z(x) = 3x + 5$ wächst monoton mit x: Steigung $+3 > 0$. Ausgehend von $x = 0$ wollen wir daher x möglichst weit erhöhen.

$$\begin{aligned}
& & x \ge 0 &\quad\Longrightarrow\quad \text{keine Einschränkung}\\
y_1 &:= & x + 2 \ge 0 &\quad\Longrightarrow\quad \text{keine Einschränkung}\\
y_2 &:= & -2x + 3 \ge 0 &\quad\Longrightarrow\quad \text{Einschränkung } x \le 3/2\\
y_3 &:= & -3x + 4 \ge 0 &\quad\Longrightarrow\quad \text{Einschränkung } x \le 4/3
\end{aligned}$$

Der Engpass entsteht demnach in der letzten Bedingung $y_3 \ge 0$. Somit maximiert $x = 4/3$, und wir erhalten $\max z = z(4/3) = 9$.

☺ Das ist eine schöne Anwendung solider schulischer Ausbildung: Es genügen eine gute Notation und sorgfältige Fallunterscheidungen.

⚠ Ersetzen wir $x + 2 \ge 0$ durch $x - 2 \ge 0$, so werden die NB unerfüllbar!

Erstes Beispiel: eindimensionale Optimierung

F022
Erläuterung

Unser Ziel ist im Folgenden, solche Probleme der linearen Optimierung in höheren Dimensionen zu lösen. Das Simplexverfahren nutzt dabei die eindimensionale Optimierung wie oben auf der Suche nach Engpässen.

Da wir nun mehrere Variablen $x_1, \dots, x_n \ge 0$ haben und auch mehrere Nebenbedingungen $y_1, \dots, y_m \ge 0$, benötigen wir eine übersichtliche und effiziente Buchhaltung. Dies erreichen wir durch die Schreibweise als Vektoren und Matrizen: $x \ge 0$ und $y = Ax + b \ge 0$ und $z(x) = cx + d$.

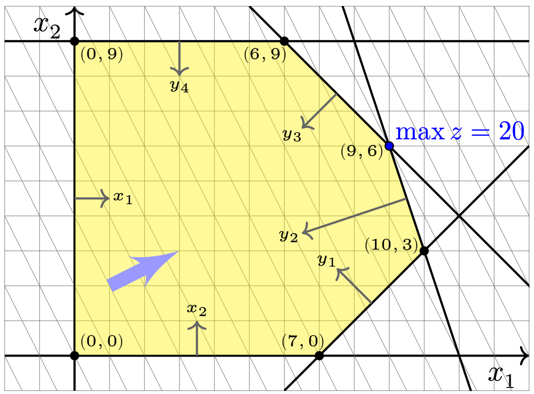
Die geniale Idee von Dantzig (1947) war es, das Problem zu lösen mit Zeilenoperationen wie im Gauß–Algorithmus. Hurra, Lineare Algebra! Ich führe dieses Verfahren an einem repräsentativen Beispiel aus. Wenn Sie genau aufpassen, dann können Sie es danach selbst.

Wie schon beim Gauß–Algorithmus bieten sich beim Simplexverfahren mehrere Wege, die Methode zu erfahren, zu begreifen und zu erlernen: (1) durch zahlreiche, gut gewählte Beispiele, (2) durch Formulierung des allgemeinen Verfahrens, (3) durch sorgsame Programmierung und Tests, (4) durch formalen Beweis der Richtigkeit des Verfahrens.

Zweites Beispiel: zweidimensionale Optimierung

F023

Aufgabe: Maximieren Sie die Zielfunktion $z(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - 4$.



Nichtnegativität: $\quad x_1 \ge 0$
$\qquad\qquad\qquad\qquad x_2 \ge 0$

Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned}
y_1 &:= 7 - x_1 + x_2 &\ge 0\\
y_2 &:= 33 - 3x_1 - x_2 &\ge 0\\
y_3 &:= 15 - x_1 - x_2 &\ge 0\\
y_4 &:= 9 - x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

In dieser „kanonischen“ Formulierung sind alle Variablen x_i, y_j nicht-negativ.

☺ Anwendung: Produkte x_1, x_2; Ressourcen y_1, y_2, y_3, y_4; Profit z.

☺ Zweidimensionale Optimierung können wir graphisch lösen. Hierzu genügt Sorgfalt und etwas Schulmathematik der Mittelstufe.

☺ Für beliebige Dimension entwickeln wir ein algebraisches Verfahren. Dazu entwickeln wir sorgsame Buchführung für Un/Gleichungssysteme.

Zweites Beispiel: zweidimensionale Optimierung

F024
Erläuterung

Sie verkaufen zwei Produkte mit Gewinn 2€ bzw. 1€ bei 4€ Fixkosten. Bei der Produktion müssen Sie gewisse Nebenbedingungen einhalten.

y_1: Sie haben 7 Teile vom Typ 1, Produkt 1 verbraucht eines, Produkt 2 setzt eines frei. (Das ist zwar ungewöhnlich, aber durchaus denkbar.)
y_2: Sie haben 33 Teile vom Typ 2, jedes Produkt benötigt davon 3 bzw. 1.
y_3: Sie haben 15 Teile vom Typ 3, jedes Produkt benötigt davon genau 1.
y_4: Sie haben 9 Teile vom Typ 4, nur Produkt 2 benötigt davon eines.

Jede unserer sechs Bedingungen $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$ definiert eine abgeschlossene Halbebene. Diese sind in obiger Graphik eingetragen.

Alle Bedingungen sollen gelten, das entspricht dem logischen Und: Der Durchschnitt unserer sechs Halbebenen ist ein abgeschlossenes Polygon $P \subset \mathbb{R}^2$. Allgemein erhalten wir ein n–dimensionales Polytop.

In unserem Fall ist die Erfüllungsmenge P beschränkt, somit kompakt. Die Zielfunktion $z : P \to \mathbb{R}$ ist affin-linear, somit stetig, nimmt also ein Maximum an. Unserer Graphik entnehmen wir $\max z = z(9, 6) = 20$.

☺ Das folgende Simplexverfahren löst das Problem algebraisch.

Lineare Optimierung durch das Simplexverfahren

F101

Anfangs betrachten wir $x_1, x_2 \ge 0$ als **freie Variablen**. Hiervon abhängig sind die **Schlupfvariablen** $y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$ sowie die **Zielfunktion** z.

	x_1	x_2	1
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
z	2	1	-4

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	1	-1	0	0	0	7
-3	-1	0	-1	0	0	33
-1	-1	0	0	-1	0	15
0	-1	0	0	0	-1	9
2	1	0	0	0	0	-4

Der Ursprung $x_1 = x_2 = 0$ ist zulässig: $y_1 = 7$, $y_2 = 33$, $y_3 = 15$, $y_4 = 9$.
Wir maximieren $x_1 \ge 0$, bis zum Engpass $y_1 \ge 0$, Basiswechsel $x_1 \leftrightarrow y_1$:

	y_1	x_2	1
x_1	-1	1	7
y_2	3	-4	12
y_3	1	-2	8
y_4	0	-1	9
z	-2	3	10

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	1	-1	0	0	0	7
0	-4	3	-1	0	0	12
0	-2	1	0	-1	0	8
0	-1	0	0	0	-1	9
0	3	-2	0	0	0	10

Lineare Optimierung durch das Simplexverfahren

F102

Nun sind die Variablen $y_1, x_2 \ge 0$ frei, und $x_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$ sind Schlupf.
Wir notieren links die Kurzfassung und rechts das erweiterte Tableau.

	y_1	x_2	1
x_1	-1	1	7
y_2	3	-4	12
y_3	1	-2	8
y_4	0	-1	9
z	-2	3	10

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	1	-1	0	0	0	7
0	-4	3	-1	0	0	12
0	-2	1	0	-1	0	8
0	-1	0	0	0	-1	9
0	3	-2	0	0	0	10

Der Ursprung $y_1 = x_2 = 0$ ist zulässig, denn wir haben Engpässe beachtet.
Wir maximieren $x_2 \ge 0$, bis zum Engpass $y_2 \ge 0$, Basiswechsel $x_2 \leftrightarrow y_2$:

	y_1	y_2	1
x_1	$-1/4$	$-1/4$	10
x_2	$3/4$	$-1/4$	3
y_3	$-1/2$	$1/2$	2
y_4	$-3/4$	$1/4$	6
z	$1/4$	$-3/4$	19

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	0	$-1/4$	$-1/4$	0	0	10
0	-1	$3/4$	$-1/4$	0	0	3
0	0	$-1/2$	$1/2$	-1	0	2
0	0	$-3/4$	$1/4$	0	-1	6
0	0	$1/4$	$-3/4$	0	0	19

Lineare Optimierung durch das Simplexverfahren

F103

	y_1	y_2	1
x_1	$-1/4$	$-1/4$	10
x_2	$3/4$	$-1/4$	3
y_3	$-1/2$	$1/2$	2
y_4	$-3/4$	$1/4$	6
z	$1/4$	$-3/4$	19

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	0	$-1/4$	$-1/4$	0	0	10
0	-1	$3/4$	$-1/4$	0	0	3
0	0	$-1/2$	$1/2$	-1	0	2
0	0	$-3/4$	$1/4$	0	-1	6
0	0	$1/4$	$-3/4$	0	0	19

Der Ursprung $y_1 = y_2 = 0$ ist zulässig, denn wir haben Engpässe beachtet.
Wir maximieren $y_1 \ge 0$, bis zum Engpass $y_3 \ge 0$, Basiswechsel $y_1 \leftrightarrow y_3$:

	y_3	y_2	1
x_1	$1/2$	$-1/2$	9
x_2	$-3/2$	$1/2$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$3/2$	$-1/2$	3
z	$-1/2$	$-1/2$	20

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	0	0	$-1/2$	$1/2$	0	9
0	-1	0	$1/2$	$-3/2$	0	6
0	0	-1	1	-2	0	4
0	0	0	$-1/2$	$3/2$	-1	3
0	0	0	$-1/2$	$-1/2$	0	20

Diese LP sind äquivalent, das letzte ist optimal: Wir lesen $\max z = 20$ ab.
Probe durch Einsetzen: Wir haben $z = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_2 + 20 = 2x_1 + x_2 - 4$.

Lineare Optimierung durch das Simplexverfahren

F104
Erläuterung

🙂 Unsere Aufgabe lösen wir durch drei elementare Basiswechsel. Jeder ist offensichtlich eine Äquivalenzumformung: Das Problem wird umformuliert von $x \ge 0$ und $Ax + b \ge 0$ und $z(x) = cx + d \to \max!$ zu $x' \ge 0$ und $A'x' + b' \ge 0$ und $z'(x') = c'x' + d' \to \max!$ und zurück.
Dabei geht keine Information verloren: Beide Formulierungen haben dieselben Lösungen und lassen sich leicht ineinander umrechnen.

🙂 Geometrisch entspricht dies einer affin-linearen Transformation: Wir wechseln vom Koordinatensystem (x_1, x_2) zu (y_1, x_2) zu (y_1, y_2) zu (y_3, y_2). In Letzterem können wir die Lösung direkt ablesen!
Der Ursprung unseres jeweiligen Koordinatensystems wandert von Ecke zu Ecke in unserem Polytop. Wir laufen jeweils entlang einer Kante, zum Beispiel in Richtung des stärksten Anstiegs von z.

Daher hat das Verfahren seinen Namen: Wir bewegen uns entlang von Kanten, also 1–Simplizes im Rand des Polytops. Alternativ könnten wir auch durchs Innere laufen, diese Idee nutzen „Innere-Punkt-Methoden“.
Projekt: Erproben Sie möglichst viele Varianten dieser Umformungen.

Elementarer Basiswechsel zur Umformung

F105

	x_1	x_2
y_1	a	b
y_2	c	d

Basis- $\Longleftrightarrow$ wechsel

	y_1	x_2
x_1	$\dfrac{1}{a}$	$-\dfrac{b}{a}$
y_2	$\dfrac{c}{a}$	$d-\dfrac{bc}{a}$

$$y_1 = ax_1 + bx_2 \qquad x_1 = \frac{1}{a}y_1 - \frac{b}{a}x_2$$

$$y_2 = cx_1 + dx_2 \qquad y_2 = \frac{c}{a}y_1 + \left[d - \frac{bc}{a}\right]x_2$$

☺ Erfüllbarkeit und Lösbarkeit und Maximalwert bleiben dabei erhalten. Außerhalb des Kreuzes sehen wir genau den Gauß–Algorithmus.

☺ Freie Variablen / Spalten transformieren sich genauso wie abhängige Variablen / Nebenbedingungen / Zeilen, bis auf ein negatives Vorzeichen.

☺ Tucker–Tableaux betonen die Dualität der Linearen Optimierung.

Elementarer Basiswechsel und Dualität

F106

	x_1	x_2
y_1	a	b
y_2	c	d

Basis- $\Longleftrightarrow$ wechsel

	y_1	x_2
x_1	$\dfrac{1}{a}$	$-\dfrac{b}{a}$
y_2	$\dfrac{c}{a}$	$d-\dfrac{bc}{a}$

trans- $\Updownarrow$ negieren

trans- $\Updownarrow$ negieren

	y_1^*	y_2^*
x_1^*	$-a$	$-c$
x_2^*	$-b$	$-d$

Basis- $\Longleftrightarrow$ wechsel

	x_1^*	y_2^*
y_1^*	$-\dfrac{1}{a}$	$-\dfrac{c}{a}$
x_2^*	$\dfrac{b}{a}$	$-d+\dfrac{bc}{a}$

Lineare Optimierung durch das Simplexverfahren

F107 Erläuterung

	x_1	x_2	
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
z	2	1	-4

Der Ursprung $x_1 = x_2 = 0$ ist zulässig, denn $y_1 = 7$, $y_2 = 33$, $y_3 = 15$, $y_4 = 9$.
Wir wollen x_1 möglichst weit erhöhen.
Der Engpass entsteht durch $y_1 \ge 0$.
Wir ersetzen $y_1 = -x_1 + x_2 + 7$
durch $x_1 = -y_1 + x_2 + 7$.

$$\begin{aligned} y_2 &= -3x_1 - 1x_2 + 33 = +3y_1 - 4x_2 + 12 \\ y_3 &= -1x_1 - 1x_2 + 15 = +1y_1 - 2x_2 + 8 \\ y_4 &= +0x_1 - 1x_2 + 9 \ \ = +0y_1 - 1x_2 + 9 \\ z &= +2x_1 + 1x_2 - 4 \ \ = -2y_1 + 3x_2 + 10 \end{aligned}$$

$x_1 \Updownarrow y_1$

	y_1	x_2	
x_1	-1	1	7
y_2	3	-4	12
y_3	1	-2	8
y_4	0	-1	9
z	-2	3	10

Der Ursprung $y_1 = x_2 = 0$ ist zulässig;
er entspricht der Ecke $(x_1, x_2) = (7, 0)$.
Wir wollen x_2 möglichst weit erhöhen.
Der Engpass entsteht durch $y_2 \ge 0$.
Wir ersetzen $y_2 = 3y_1 - 4x_2 + 12$
durch $x_2 = \frac{3}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + 3$.

Lineare Optimierung durch das Simplexverfahren

F108 Erläuterung

$x_2 \Updownarrow y_2$

... Basiswechsel ...

	y_1	y_2	
x_1	$-1/4$	$-1/4$	10
x_2	$3/4$	$-1/4$	3
y_3	$-1/2$	$1/2$	2
y_4	$-3/4$	$1/4$	6
z	$1/4$	$-3/4$	19

Der Ursprung $y_1 = y_2 = 0$ ist zulässig;
er entspricht der Ecke $(x_1, x_2) = (10, 3)$.
Wir wollen y_1 möglichst weit erhöhen.
Der Engpass entsteht durch $y_3 \ge 0$.
Wir ersetzen $y_3 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + 2$
durch $y_1 = -2y_3 + y_2 + 4$.

$y_1 \Updownarrow y_3$

... Basiswechsel ...

	y_3	y_2	
x_1	$1/2$	$-1/2$	9
x_2	$-3/2$	$1/2$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$3/2$	$-1/2$	3
z	$-1/2$	$-1/2$	20

Der Ursprung $y_3 = y_2 = 0$ ist zulässig;
er entspricht der Ecke $(x_1, x_2) = (9, 6)$.
Die Zielfunktion ist hier maximal!
Wir erhalten das Ergebnis: $\max z = 20$.

Probe: Wir haben $z = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_2 + 20$,
und Einsetzen ergibt $z = 2x_1 + x_2 - 4$.

Lineare Optimierung / Programmierung

Definition F1A: lineare Optimierung / Programmierung

Ein **lineares Programm** (LP, lineare Optimierung) hat die Normalform

$$x \ge 0,\quad y(x) = Ax + b \ge 0,\quad z(x) = cx + d \to \max!,\quad \text{kurz}\quad z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$$

mit Daten $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, $c \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $d \in \mathbb{R}$; gesucht ist $x \in \mathbb{R}^n$.
Das LP ist **optimal**, wenn $c \le 0 \le b$ gilt; dann löst $x = 0$ das Problem.

(NN) **Nichtnegativität** $x \ge 0$, ausgeschrieben: $x_1 \ge 0, \ \dots, \ x_n \ge 0$.

(NB) **Nebenbedingungen** $y := Ax + b \ge 0$, ausgeschrieben:

$$\begin{array}{rcccccccccc} y_1 & := & a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & + & b_1 & \ge & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m & := & a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & + & b_m & \ge & 0 \end{array}$$

Dies definiert das **Polytop** $P(A,b) := \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x \ge 0,\ Ax + b \ge 0 \,\}$.
Punkte $x \in P(A,b)$ heißen **zulässig**, die NB heißen dann **erfüllbar**.

(Z) Die **Zielfunktion** ist $z : P(A,b) \to \mathbb{R} : z(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + d$.
Ist $P(A,b) \ne \emptyset$ und z nach oben **beschränkt**, so heißt das LP **lösbar**.

Lineare Optimierung / Programmierung

Die Daten $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ definieren die **Problemstellung** wie oben erklärt.
Zwei Ausnahmen können vorkommen und führen zur Unlösbarkeit:

1. Die Bedingungen $x \ge 0$ und $Ax + b \ge 0$ sind **nicht erfüllbar**:
   Das Polytop ist in diesem Falle leer, also $P(A,b) = \emptyset$.
2. Die Funktion $z : P(A,b) \to \mathbb{R} : x \mapsto cx + d$ **wächst unbeschränkt**.
   In diesem Falle wird das Supremum nicht angenommen.

Günstigenfalls ist das Polytop $P(A,b)$ nicht-leer und z beschränkt, etwa $P(A,b) \ne \emptyset$ kompakt: Wir suchen $x \in P(A,b)$ mit $z(x) = \max z$.
Von einem Lösungsalgorithmus erwarten wir, dass er die Ausnahmen (1) und (2) ordnungsgemäß meldet, ansonsten die Optimierung korrekt löst.

Es ist vorteilhaft, die Ungleichungen $Ax + b \ge 0$ in zwei zu teilen:
Wir definieren die **Schlupfvariablen** $y := Ax + b$ und fordern $y \ge 0$.
Wir können dann Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$ durchführen wie oben erklärt; dies Umformung werden wir nun zum Simplexverfahren ausbauen.

☹ Konventionen und Schreibweisen variieren leider in der Literatur.
☺ Die obige Notation als Tableau ist ebenso elegant wie effizient.

Lineare Optimierung / Programmierung

Die lineare Optimierung gehört zu den Top-Ten aller Algorithmen, besser gesagt: zu den Top-Ten aller algorithmischen Problemstellungen. Viele Eigenschaften linearer Programme entsprechen Eigenschaften von Polytopen und lassen sich so geometrisch interpretieren und beweisen. So verbinden sich numerische, algebraische und geometrische Aspekte; auch hier sind „rein“ und „angewandt“ Facetten derselben Mathematik.

Die Abkürzung „LP“ können Sie auch als „lineares Problem“ lesen. Die traditionelle Bezeichnung „Programm“ bedeutet schlicht „Planung“, also ausnahmsweise nicht die Erstellung eines Computerprogramms. Der Begriff wurde Mitte der 1940er Jahre von George Dantzig geprägt noch bevor Computer zur Lösung solcher Probleme eingesetzt wurden.

Die lineare Optimierung ist ein Spezialfall der konvexen Optimierung und zentrale Technik vieler Anwendungen, etwa im Operations Research. Häufig lassen sich Optimierungsprobleme auf diese Form zurückführen und so mit Standardtechniken lösen. Das ist insbesondere interessant, wenn (noch) keine maßgeschneiderten Lösungsverfahren bekannt sind.

Lineare Optimierung / Programmierung

Lineare Ungleichungssysteme wurden schon 1827 von Fourier gelöst, seine Methode 1936 von Motzkin wiederentdeckt und fortentwickelt Zur linearen Optimierung wurde dies 1939 von Leonid Kantorovich ausgebaut, der hierzu auch erste Lösungsmethoden entwickelte.

Das **Simplexverfahren** wurde 1947 von George Dantzig angegeben. In der Praxis hat sich dies als eines der schnellsten Verfahren erwiesen, zumindest für generische Problemstellungen. Im schlechtesten Fall hat es exponentielle Laufzeit, wie der berüchtigte Klee–Minty–Würfel zeigt.

Das klassische Simplexverfahren ist immerhin **polynomial im Mittel**. Zur Verfeinerung wurden seither mehrere Pivotstrategien vorgeschlagen. Weiterhin offen ist die grundlegende Frage: Gibt es eine Pivotstrategie für das Simplexverfahren, die immer polynomiale Laufzeit garantiert?

Die lineare Optimierung lässt sich nachweislich in polynomialer Zeit lösen, wie Leonid Khachiyan (Ellipsoidverfahren, 1979) und Narendra Karmarkar (Innere-Punkte-Verfahren, 1984) zeigen konnten. Ob dies auch mit einer Pivotstrategie gelingt, bleibt eine Herausforderung.

Basiswechsel sind Äquivalenzumformungen.

Aufgabe: Schreiben Sie den elementaren Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$ aus.

Lösung: Der Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$ ist nur möglich, falls $a_{\ell k} \neq 0$:

$$y_\ell = a_{\ell k} x_k + \sum_{i \neq k} a_{\ell i} x_i + b_\ell \quad \Longleftrightarrow \quad x_k = \frac{1}{a_{\ell k}} y_\ell - \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_{\ell k}} a_{\ell i} x_i - \frac{1}{a_{\ell k}} b_\ell$$

Wir ersetzen überall die alte Variable x_k durch die neue Variable y_ℓ:

$$y_j = a_{jk} x_k + \sum_{i \neq k} a_{ji} x_i + b_j = \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}} y_\ell + \sum_{i \neq k} \Big[a_{ji} - \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}} a_{\ell i} \Big] x_i + \Big[b_j - \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}} b_\ell \Big]$$

$$z = c_k x_k + \sum_{i \neq k} c_i x_i + d = \frac{c_k}{a_{\ell k}} y_\ell + \sum_{i \neq k} \Big[c_i - \frac{c_k}{a_{\ell k}} a_{\ell i} \Big] x_i + \Big[d - \frac{c_k}{a_{\ell k}} b_\ell \Big]$$

Der Tausch macht $y_\ell \geq 0$ zur Variablen und $x_k \geq 0$ zur Nebenbedingung.

Umkehrung: Erneuter Basiswechsel $y_\ell \leftrightarrow x_k$ macht alles rückgängig.
🙂 Alle Basiswechsel sind in diesem Sinne Äquivalenzumformungen.

Invarianz: Das alte LP $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und das neue LP $\left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ sind äquivalent; sie stimmen überein in Erfüllbarkeit und Lösbarkeit und Maximalwert.

Basiswechsel können optimieren.

Satz F1B: Jedes lösbare LP $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist optimierbar durch Basiswechsel.

Wir können $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ transformieren in ein optimales LP $z' : \left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ mit $c' \leq 0 \leq b'$, somit lösen durch $x' = 0$ und $\max z = \max z' = z'(0) = d'$.

Wir präzisieren und beweisen dies am Ende des Kapitels als Hauptsatz des Simplexverfahrens, siehe F3A. Hier zunächst geometrisch-intuitiv:

Beweisidee: Das Maximum wird in einer Ecke $x^* \in P(A, b)$ realisiert. Zu dieser gelangen wir durch Basiswechsel (entlang von Kanten). QED

Genauer: Unter den Bedingungen $x_1, \dots, x_n \geq 0$ und $y_1, \dots, y_m \geq 0$ gibt es n linear unabhängige, die im Punkt x^* aktiv sind, also zu Gleichungen werden, und deren Richtungsvektoren der Funktion z entgegenlaufen. Diese (zunächst abhängigen) Variablen können wir durch Basiswechsel zu freien Variablen machen, und das LP $z' : \left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ wird somit optimal.

🙂 Dieses geometrische Argument zeigt, *dass* eine Lösung möglich ist.
☹ Es erklärt leider nicht, *wie* wir eine Lösung konkret finden können.
🙂 In F3 formulieren und beweisen wir dazu den Simplexalgorithmus.

Optimierung durch Basiswechsel

Der geometrische Beweis von Satz F1B zeigt zunächst nur, *dass* eine Lösung prinzipiell möglich ist, er erklärt aber leider nicht, *wie* wir eine Lösung konkret finden können. Dies leistet Dantzigs Pivotstrategie: Wir hangeln uns von Ecke zu Ecke „immer an der Wand entlang“.

Im Grundlagenstreit der 1920er Jahre verteidigte Hermann Weyl den Konstruktivismus in seinem Artikel *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik* (Vorträge, gehalten im mathematischen Kolloquium Zürich), Math. Zeitschrift 10 (1921) 39–79. Dort schrieb er die weisen Worte:

> *[Ein Existenzsatz zeigt] das Vorhandensein eines Schatzes, ohne jedoch zu verraten, an welchem Ort. [...] Nicht das Existenztheorem ist das Wertvolle, sondern die im Beweise geführte Konstruktion. Die Mathematik ist, wie Brouwer gelegentlich sagt, mehr ein Tun denn eine Lehre.*

Erst der Simplexalgorithmus ermöglicht uns, den Schatz zu heben! Dazu ist noch deutlich mehr Arbeit nötig: Wir müssen jeden Schritt, also den jeweils vorzunehmenden Basiswechsel explizit festlegen, und dann nachweisen, dass die Methode immer zum Ziel führt.

Optimierung durch Basiswechsel

Zur Klärung möglicher Missverständnisse betone ich den Dreischritt:

1. Die Daten $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ definieren zunächst die **Problemstellung**. Damit legen wir präzise fest, was wir als **Lösung** akzeptieren.
2. Jeder Basiswechsel ermöglicht eine **elementare Umformung**. Das Problem geht über in ein **äquivalentes Problem** $z' : \left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$.
3. Erst die genaue Abfolge der Schritte definiert einen **Algorithmus**. Hierzu dient die explizite Formulierung einer **Pivotstrategie** (F3).

Anders als im Gauß–Algorithmus ist die Laufzeit schwer zu beschränken. Schlimmstenfalls ist sie exponentiell, etwa für den Klee–Minty–Würfel. Daher wurden zahlreiche weitere Pivotstrategien vorgeschlagen, oder auch grundsätzlich neue Zugänge wie etwa Innere-Punkte-Methoden.

Für einen ersten Durchgang möchte ich diese anspruchsvolleren Fragen vermeiden, genauer gesagt auf einen zweiten Durchgang verschieben. Erst wenn Sie genug eigene Erfahrung mit dem Verfahren gesammelt haben, sind Sie bereit und motiviert für eine genauere Untersuchung.

Dualität für lineare Programme (nach John von Neumann)

Beispiel: Zur Illustration untersuchen wir erneut unsere Rechnung.

	x_1	x_2	
u_1	-1	1	7
u_2	-3	-1	33
u_3	-1	-1	15
u_4	0	-1	9
u_0	2	1	-4

Ausgeschrieben: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

$u_1 = -1x_1 + 1x_2 + 7 \ge 0$

$u_2 = -3x_1 - 1x_2 + 33 \ge 0$

$u_3 = -1x_1 - 1x_2 + 15 \ge 0$

$u_4 = +0x_1 - 1x_2 + 9 \ge 0$

$u_0 = +2x_1 + 1x_2 - 4 \ge 0$

Wir wollen u_0 maximieren. Wir finden leicht eine grobe obere Schranke:

$$u_0 \le u_0 + u_2 = -1x_1 - 0x_2 + 29 \le 29$$

Mit etwas Glück und Geschick finden wir eine kleinere obere Schranke:

$$u_0 \le u_0 + \tfrac{1}{2}u_2 + \tfrac{1}{2}u_3 = -0x_1 - 0x_2 + 20 \le 20$$

Jede solche Positivkombination liefert uns eine obere Schranke für u_0.
Was ist die kleinste obere Schranke? Dies definiert das duale Problem!

Dualität für lineare Programme (nach John von Neumann)

Allgemein suchen wir geeignete Multiplikatoren $y_1, \dots, y_m \ge 0$:

$$u_0 \le u_0 + y_1 u_1 + \dots + y_m u_m = \underbrace{(yA + c)}_{\le 0} x + \underbrace{yb + d}_{\to \min!}$$

Die Bedingungen $y_j, u_j \ge 0$ garantieren die behauptete Ungleichung.
Wir verlangen $yA + c \le 0$, denn dadurch wird der Punkt $x = 0$ optimal.
Wir wollen $yb + d$ minimieren, als möglichst kleine obere Schranke.
Aus dem primalen Problem erhalten wir so das duale Problem:

primales LP: $x \ge 0,\quad Ax + b \ge 0,\quad u_0(x) = cx + d \to \max!$

duales LP: $y \ge 0,\quad yA + c \le 0,\quad v_0(y) = yb + d \to \min!$

Dualität ist eine wichtige Methode und ein grundlegendes Ergebnis der Linearen Optimierung, sowohl theoretisch als auch praktisch.

☺ Das duale Problem ist erneut linear, hat also dieselbe Struktur.
Das primale und das duale Problem beschränken sich gegenseitig.

☺ Die lineare Optimierung erfreut sich zudem der **starken Dualität**:
Hier gilt $\max u_0 = \min v_0$. Es besteht keine Dualitätslücke!

Dualität für lineare Programme (nach John von Neumann)

Jedes lineare Programm kommt als **duales Paar**:

primales LP: $x \ge 0,\quad Ax + b \ge 0,\quad u(x) = cx + d \to \max!$

duales LP: $y \ge 0,\quad yA + c \le 0,\quad v(y) = yb + d \to \min!$

Das entspricht der Transnegation von $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ zu $-v : -\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^\top$.
Für jedes optimale LP, also $c \le 0 \le b$, ist die Lösung offensichtlich:

$x = 0$ ist zulässig $\iff$ $b \ge 0$ $\implies$ $y = 0$ minimiert $v(y) = yb + d$

$y = 0$ ist zulässig $\iff$ $c \le 0$ $\implies$ $x = 0$ maximiert $u(x) = cx + d$

Satz F1c: Dualität der linearen Optimierung

Schwache Dualität: Für jeden zulässigen Punkt $x \ge 0$ mit $Ax + b \ge 0$ und dual jeden zulässigen Punkt $y \ge 0$ mit $yA + c \le 0$ gilt $u(x) \le v(y)$.

Sind also simultan beide LP erfüllbar, so sind auch beide lösbar.

Starke Dualität: Ist das primale LP lösbar, so auch das duale LP, und es gilt die Gleichheit $\max u = \min v$, also keine Dualitätslücke.

Ist das primale LP erfüllbar, aber nicht das duale, so ist u unbeschränkt.
Ist das duale LP erfüllbar, aber nicht das primale, so ist v unbeschränkt.

Dualität für lineare Programme (nach John von Neumann)

Aufgabe: (1) Beweisen Sie die schwache Dualität durch Einsetzen.

(2) Folgern Sie die starke Dualität (F1c) aus der Optimierbarkeit (F1b).
Hinweis: Gilt Dualität für optimale LP? optimierbare LP? lösbare LP?

Lösung: (1) Wir nutzen die Zulässigkeit $x \ge 0$ und $b \ge -Ax$ sowie dual $y \ge 0$ und $c \le -yA$. Positivkombinationen erhalten alle Ungleichungen:

$$u(x) \overset{\text{Def}}{=} cx + d \overset{\text{Vor}}{\le} (-yA)x + d \overset{\text{Ass}}{=} y(-Ax) + d \overset{\text{Vor}}{\le} yb + d \overset{\text{Def}}{=} v(y)$$

☺ Schwache Dualität erhalten wir direkt durch geschickten Vergleich.

(2) Starke Dualität ist klar für jedes optimale LP, mit $c \le 0 \le b$: Hier löst $x = 0$ das primale LP und $y = 0$ das duale LP, also $\max u = d = \min v$.

Dank Basiswechsel gilt Dualität dann auch für jedes optimierbare LP.
Dies wirkt auf beide Probleme, primal und dual, auf dieselbe Weise.

Dank Optimierbarkeit F1b gilt starke Dualität für jedes lösbare LP. $\boxed{\text{QED}}$

Die Ergänzung zur Unbeschränktheit führe ich auf Seite F125 aus.
Für Sie ist dies eine schöne Übung, um Ihr Verständnis zu schulen!

Elementare Basiswechsel beweisen die Dualität!

Das ist ein bewundernswerter „Beweis durch Rechnung“ oder eine „Konstruktion durch Algorithmus“. Diesen Idealfall haben wir nicht oft. Unter den Algorithmen auf Seite F009 erfüllen dies Euklid und Gauß.

Dantzigs Simplexverfahren über $\mathbb{R}$. (Es genügt ein angeordneter Körper.)
Gegeben ist ein lineares Programm $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ wie oben erklärt.
(0) *Elementare* Umformungen sind Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$.
(1) *Erreichbar* ist damit ein optimales LP $u' : \left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ mit $c' \le 0 \le b'$.
(2) *Anwendung:* Damit können wir jedes lineare Programm lösen.
(3) *Folgerung:* Es gilt starke Dualität wie oben nachgewiesen.

Gauß–Algorithmus über einem Körper $\mathbb{K}$. (Es genügt ein Divisionsring.)
Gegeben ist eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ für ein lineares Gleichungssystem.
(0) *Elementare* Umformungen sind die Zeilen- und Spaltenoperationen.
(1) *Erreichbar* ist damit die Gauß–Normalform $SAT = D^r_{m\times n} \in \mathbb{K}^{m\times n}$.
(2) *Anwendung:* Das löst jedes lineare Gleichungssystem $Ax = b$.
(3) *Folgerungen:* (a) Jede invertierbare Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ist quadratisch.
(b) Je zwei (endliche) Basen eines Vektorraums haben dieselbe Länge.

Gauß–Algorithmus beweist Invarianz der Dimension!

Ich finde es sehr erstaunlich, dass ein konkretes Rechenverfahren nicht nur konkrete Zahlenbeispiele löst, sondern allgemeine Sätze beweist! Sie haben das so noch nie gesehen? Ihre Lineare Algebra verlief anders und liegt lange zurück? Dann ist es Zeit für einen feierlichen Rückblick:

Übung: Wiederholen / erklären Sie ausführlich obiges Vorgehen (0–3).

(4) Umformung von A zu $D = D^r_{m\times n}$ ändert nicht die Sur/In/Bijektivität.
(4a) D ist surjektiv gdw rechtsinvertierbar gdw $r = m$,
(4b) D ist injektiv gdw linksinvertierbar gdw $r = n$,
(4c) D ist bijektiv gdw invertierbar gdw $r = m = n$.
Dasselbe gilt demnach für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ vom Rang r.
Insbesondere gilt: (3a) Ist $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ invertierbar, so folgt $m = n$.

Bemerkung: Der Begriff der „Dimension“ ist zentral für die Lineare Algebra und die gesamte Mathematik! Er beruht auf der Existenz von Basen und der Invarianz der Dimension. Wie wurde Letzteres in Ihrer Linearen Algebra bewiesen? Mit Matrixrechnung? Austauschsatz von Steinitz? Welches Argument finden Sie leichter? effizienter? schöner?

Gruselige Gegenbeispiele ohne Dimensionsinvarianz

Gute Gegen/Beispiele helfen uns, wichtige Ergebnisse zu würdigen!

Aufgabe: Sei R ein beliebiger Ring, hier lassen Sie Ihre Phantasie spielen!
(1) Gibt es R–lineare Räume V ohne jede Basis? *Baseless allegation!?*
(2) Gibt es Isomorphismen $R^p \cong R^q$ mit $p \ne q$? *Another dimension!?*
(3) Gibt es invertierbare Matrizen $A \in R^{p\times q}$? *Only square is fair!?*

⚠ In solchen Problemfällen ist der Begriff „Dimension“ nicht sinnvoll! Fürchten wir tatsächlich die genannten Hindernisse, gar Pathologien? Sie klingen zunächst unglaublich, doch bedenken Sie die allzu große Allgemeinheit: Sie dürfen sich hier einen beliebigen Ring aussuchen!

Lösung: (1) Ja, klar, über dem Ring $\mathbb{Z}$ sind $\mathbb{Z}/2$ und $\mathbb{Q}$ nicht frei.
(2) Ja, klar, für den Nullring $R = \{0\}$ gilt $R^p = \{(0,\dots,0)\} \cong R^q$.
(3) Ja, klar, über $R = \{0\}$ ist jede Matrix $A \in R^{p\times q}$ invertierbar!

Der Nullring ist albern, daher wollen wir ihn meist ausschließen.
Welche Ringe sind tauglich? Genügt es, den Nullring zu verbieten?
Über einem Divisionsring können solche Pathologien nicht auftreten.
⚠ Dazwischen ist noch viel Platz für Überraschungen wie etwa F1D.

Gruselige Gegenbeispiele ohne Dimensionsinvarianz

Das folgende Beispiel gemahnt uns, dass nichts selbstverständlich ist:

Beispiel F1D: $R^p \cong R^q$ dank Reißverschluss über $R = \operatorname{End}_K(K[X])$.

Sei K ein Körper, etwa $\mathbb{F}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$, und hierüber $V = K^{(\mathbb{N})} = K[X]$ der Vektorraum der Folgen $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ mit endlichem Träger.
(a) Im Ring $R = (\operatorname{End}_K(V), +, \circ)$ seien $a, b, c, d : V \to V$ gegeben durch

$$\begin{aligned} a(x) &= (x_0, 0, x_1, 0, x_2, 0, \dots), & c(x) &= (x_0, x_2, x_4, x_6, x_8, \dots), \\ b(x) &= (0, x_0, 0, x_1, 0, x_2, \dots), & d(x) &= (x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, \dots). \end{aligned}$$

Dies zerlegt jedes Polynom $P \in K[X]$ in seinen geraden und ungeraden Anteil, $(c, d) : P \mapsto (P_0, P_1)$ mit $P = P_0(X^2) + XP_1(X^2)$. Reißverschluss:

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca & cb \\ da & db \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ac + bd = 1.$$

(b) Die Matrizen $\left[\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right]$ und $\left[\begin{smallmatrix} a & b \end{smallmatrix}\right]$ stiften einen Isomorphismus $R^1 \cong R^2$.
(c) Per Induktion folgt $R^1 \cong R^n$ und somit $R^p \cong R^q$ für alle $p, q \in \mathbb{N}_{\ge 1}$.

Dualität für lineare Programme: Ergänzung

Aufgabe: Beweisen sie die beiden verbleibenden Aussagen aus unserem obigen Dualitätssatz F1c zur Unbeschränktheit linearer Programme.

Lösung: Es genügt, die erste Aussage zu beweisen, die zweite ist dual:
(3) Sei das primale LP erfüllbar, durch $x \ge 0$ mit $Ax + b \ge 0$, aber nicht das duale, das heißt aus $y \ge 0$ folgt $yA + c \nleq 0$. Dann ist u unbeschränkt.

☺ Für diesen Sonderfall muss man nur genau hinsehen, dazu allerdings auf die Ebene der Koeffizienten hinabsteigen, dann wird alles klar:

(3a) Für $y = 0$ gilt $yA + c = c \nleq 0$. Es existiert also ein Index i mit $c_i > 0$. Für alle $y \ge 0$ gilt $yA + c \nleq 0$. Daraus folgt $a_{ji} \ge 0$ für alle Indizes j.

(3b) Wir betrachten dazu die Halbgerade $x^t := x + te_i$ für $t \in \mathbb{R}_{\ge 0}$.
Aus $Ax + b \ge 0$ folgt $Ax^t + b = (Ax + b) + a_{ji}t \ge 0$, dank $a_{ji} \ge 0$.
Also ist zu jedem $t \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ der zugehörige Punkt x^t primal zulässig.
Dank $c_i > 0$ ist unsere Zielfunktion $u(x^t) = cx + d + c_i t$ unbeschränkt.

Dualität für lineare Programme: Ergänzung

☺ Es ist wie so oft mit den vermeintlich ganz einfachen Grundlagen: Sie müssen es selbst rechnen, dann erst dürfen Sie „trivial“ ausrufen.

Aufgabe: Konstruieren Sie lineare Programme, die dual unerfüllbar sind, und (a) primal unbeschränkt oder aber ebenso (b) primal unerfüllbar.

Lösung: Es gibt viele Möglichkeiten, die allereinfachsten sehen so aus:
(a) Das LP $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist primal unbeschränkt und dual unerfüllbar.
Ausführlich: Dual gilt $y \ge 0$ und $y1 + 1 \le 0$ ist unerfüllbar.
Primal gilt $x \ge 0$ und $1x + 1 \ge 0$ mit $x \mapsto 1x + 0$ unbeschränkt.
(b) Das LP $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist primal unerfüllbar und dual unerfüllbar.
Ausführlich: Dual gilt $y \ge 0$ und $0x + 1 \le 0$ ist unerfüllbar.
Primal gilt $x \ge 0$ und $0x - 1 \ge 0$ ist ebenso unerfüllbar.

☺ Damit haben wir starke Sätze und illustrative Gegenbeispiele für die folgende Tabelle, in der wir alles übersichtlich zusammentragen.

Dualität für lineare Programme: Zusammenfassung

Für jedes lineares Problem $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ gibt es genau drei Möglichkeiten: lösbar, unerfüllbar (somit beschränkt), unbeschränkt (somit erfüllbar). Für zwei beliebige Probleme ergeben sich demnach 9 Kombinationen.

Aufgabe: Sei $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und $-v : -\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^\top$ ein duales Problempaar. Welche der neun Kombinationen sind hier tatsächlich möglich?

Lösung: Für ein duales Problempaar gibt es genau vier Möglichkeiten:

primal \ dual	unerfüllbar (somit beschränkt)	lösbar (erfüllbar und beschränkt)	unbeschränkt (somit erfüllbar)
unerfüllbar (somit beschränkt)	✓ möglich	✗ starke Dualität	✓ möglich
lösbar (erfüllbar und beschränkt)	✗ starke Dualität	✓ möglich	✗ schwache Dualität
unbeschränkt (somit erfüllbar)	✓ möglich	✗ schwache Dualität	✗ schwache Dualität

Dualität für lineare Programme: Zusammenfassung

Korollar F1e: Erfüllbarkeit und Lösbarkeit

Vorgelegt sei ein lineares Problem $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit Dual $-v : -\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^\top$. Genau einer der folgenden vier Fälle tritt ein:

1. Das primale und das duale Problem sind beide unerfüllbar.
2. Das primale ist unbeschränkt und das duale ist unerfüllbar.
3. Das duale ist unbeschränkt und das primale ist unerfüllbar.
4. Das primale und das duale Problem sind beide erfüllbar. Dann sind beide lösbar, und es gilt Gleichheit $\max u = \min v$.

Der Dualitätssatz erscheint nur auf den ersten Blick kompliziert. Beim zweiten Hinschauen erweist er sich als einfach und elegant.

Übung: Wiederholen Sie sorgsam alle Argumente zur Dualität. Beweisen Sie die schwache und starke Dualität und obiges Korollar.

Nehmen Sie sich die Zeit, diese Entwicklung gründlich zu verstehen: Jeder einzelne Schritt ist leicht; fügen Sie alle Teile zusammen!

Dualität in unserem Zahlenbeispiel

Beispiel: Zur Illustration betrachten wir erneut unser voriges Beispiel:

primal	x_1	x_2	
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
u	2	1	-4

$\Longleftrightarrow$

primal	y_3	y_2	
x_1	$1/2$	$-1/2$	9
x_2	$-3/2$	$1/2$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$3/2$	$-1/2$	3
u	$-1/2$	$-1/2$	20

Der Punkt $x = (9,6)^\top$ ist zulässig, dank $Ax + b = (4,0,0,3)^\top \ge 0$. Demnach gilt $\max u \ge u(x) = 20$. Das zweite Tableau zeigt zudem $u = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_2 + 20 \le 20$. Beide zusammen beweisen $\max u = 20$.

☺ Die Richtigkeit dieser zweiten Aussage können wir auch unabhängig nachprüfen, genau dazu dienen zertifizierte Lösungen: Sehen Sie wie?

Aufgabe: Dualisieren Sie dieses Problem und und lösen Sie dies.
Müssen Sie zur Lösung erneut Basiswechsel durchführen?
Wie nutzen Sie die Äquivarianz unter Transnegation?
Woran erkennen Sie die Eindeutigkeit der Lösung?

Dualität in unserem Zahlenbeispiel

Lösung: Dualisieren ist gleichbedeutend zur Transnegation:

dual	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	-1	-3	-1	0	2
x_2	1	-1	-1	-1	1
v	7	33	15	9	-4

Transposition:
NN: $y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$
NB: $x_1, x_2 \le 0$ bzw. $-x_1, -x_2 \ge 0$
Ziel: $v \to$ min! bzw. $-v \to$ max!

Das duale Problem bringen wir somit ebenfalls auf Normalform und lösen es durch eine geeignete Folge von Basiswechseln:

	y_1	y_2	y_3	y_4	
$-x_1$	1	3	1	0	-2
$-x_2$	-1	1	1	1	-1
$-v$	-7	-33	-15	-9	4

$\Longleftrightarrow$

	$-x_1$	$-x_2$	y_1	y_4	
y_3	$-1/2$	$3/2$	2	$-3/2$	$1/2$
y_2	$1/2$	$-1/2$	-1	$1/2$	$1/2$
$-v$	-9	-6	-4	-3	-20

Der Punkt $y = (0, 1/2, 1/2, 0)$ ist zulässig, also $\min v \le v(y) = 20$.
Wir finden $v = 9(-x_1) + 6(-x_2) + 4y_1 + 3y_4 + 20$, also $\min v = 20$.

☺ Das beweist die starke Dualität in unserem konkreten Beispiel. Allgemein gelingt dies ebenso, wie in der vorigen Aufgabe erklärt.

Warum sind Tucker–Tableaux die perfekte Notation?

Lineare Programme lassen sich verschieden aufschreiben. Auf Seite F101 sehen Sie die Langform. Sie ist möglich, aber nicht ratsam: umständlich, redundant, uninformativ. Die elegante Kurzform $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ als **Tableau** führte Tucker um 1958 ein. Beim Rechnen spüren Sie die Vorteile:

1. Die Schreibweise als Tableau ist effizient, konzise und informativ.
2. Alle Basiswechsel lassen sich elegant und direkt darauf ausführen.
3. Tableaux sind symmetrisch: Dualisieren bedeutet Transnegieren.

☺ Am Tableau $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ lesen wir wichtige Informationen direkt ab, etwa freie Variablen (Spalten) und abhängige Schlupfvariablen (Zeilen). Es ist *optimal*, falls $c \le 0 \le b$. Es ist *offensichtlich erfüllbar*, durch $x = 0$, falls $b \ge 0$ gilt, und *offensichtlich unerfüllbar*, falls $b_j < 0$ und alle $a_{ji} \le 0$. Es ist *offensichtlich beschränkt*, falls $c \le 0$, und *offensichtlich unlösbar*, falls $c_i > 0$ und alle $a_{ji} \ge 0$, also unerfüllbar oder unbeschränkt (Lemma F3B).

📖 M.L. Balinski, A.W. Tucker: *Duality theory, a constructive approach.* SIAM Review 11 (1969) 347–377, online `www.jstor.org/stable/2028941`. Satz F1B, allgemein Satz F3A, finden Sie dort als *Main Theorem.*

Warum sind Tucker–Tableaux die perfekte Notation?

☺ Jedes lösbare Problem $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist elementar optimierbar (Satz F1B): Durch Basiswechsel können wir es in ein optimales LP transformieren. Diese Umformungen sind Grundlage von Dantzigs Simplexverfahren! Probieren Sies es selbst, online und interaktiv mit `eiserm.de/lehre/Pivot`. Die hübsche Schwesterseite `eiserm.de/lehre/Gael` leistet dasselbe für den Gauß–Algorithmus. Sanfte Gamifizierung: Der Computer übernimmt für Sie die Buchführung, Sie erproben sich in kreativ-forschendem Lernen.

By relieving the brain of all unnecessary work, a good notation sets it free to concentrate on more advanced problems […] Before the introduction of the Arabic notation, multiplication was difficult, and the division of integers called into play the highest mathematical faculties. Probably nothing in the modern world would have more astonished a Greek mathematician than to learn that, under the influence of compulsory education, a large proportion of the population […] could perform the operation of division for the largest numbers. Our modern power of easy reckoning with decimal fractions is the almost miraculous result of the gradual discovery of a perfect notation.
Alfred North Whitehead (1861–1947), *An Introduction to Mathematics* (1911)

Zertifizierte Lösung einer linearen Optimierung

F133

Aufgabe: Anwender Bob will $u(x) = cx + d$ maximieren, wobei $x \ge 0$ und $Ax + b \ge 0$ gelte. Mit $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ beauftragt er Spezialistin Alice.

(1) In welcher Form sollte Alice ihre Lösung an Bob übergeben?
(2) Wie kann Bob leicht prüfen, ob sie zulässig ist? zudem optimal?
(3) Wie kann Alice Optimalität zertifizieren und Bob dies effizient prüfen?

Lösung: (1) Alice kann Bob einen Lösungsvektor $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ schicken.

(2) Bob kann $x \ge 0$ und $Ax + b \ge 0$ durch Einsetzen direkt prüfen.
☺ In diesem Falle ist der Punkt x zulässig und $\max u \ge u(x)$ garantiert.
☹ Die Gleichung $\max u = u(x)$ ist zunächst schwieriger zu beweisen!
☺ Glücklicherweise gibt es eine simple Lösung. Dualität wirkt Wunder:

(3) Zum Beweis der Optimalität von $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ schickt Alice ein $y \in \mathbb{R}^{1\times m}$ mit $y \ge 0$ und $yA + c \le 0$ sowie $u(x) = v(y)$. Das kann Bob leicht prüfen!
☺ Bereits schwache Dualität garantiert $\max u = u(x) = v(y) = \min v$.
☺ Starke Dualität garantiert zuvor, dass zu x ein Zertifikat y existiert!
☺ Lösungen sollten immer als duales Paar (x, y) angegeben werden.

Zertifizierte Lösung einer linearen Optimierung

F134
Erläuterung

Um diese Aufgabenstellung etwas dramatischer zu betonen, biete ich Ihnen drei Hintergrundgeschichten zur Anregung Ihrer Phantasie:

Persönliche Sorgfalt: Sie möchten Ihre eigene Rechnung effizient und sicher überprüfen, natürlich ohne alles erneut durchrechnen zu müssen. Sie suchen hierzu einen einfachen und automatisch ausführbaren Test.

Nutzen in einer Klausur: Sie schreiben eine Klausur und wollen sich Ihres Ergebnisses absolut sicher sein. Das Klausurenteam will diese Sorgfalt gezielt fördern und fragt daher explizit nach einem Zertifikat.

Vertrag zwischen unabhängigen Geschäftspartnern: Die Rechnung, hier eine lineare Optimierung, ist meist lang und aufwändig. Sie erfordert Spezialsoftware und immense Rechenzeit, die Sie nicht kaufen oder mieten wollen; Sie benötigen nur das Ergebnis. Hierzu beauftragen Sie eine externe Firma, die sich auf diese Art von Rechnung spezialisiert hat. Bei Lieferung der Ware (dem berechneten Ergebnis) können Sie der Firma vertrauen, noch besser ist jedoch ein Zertifikat: Dies wird mitgeliefert, und bei Wareneingang können Sie alles schnell und sicher prüfen.

Zertifizierte Lösung einer linearen Optimierung

F135

Definition F1F: zertifizierte Lösung einer linearen Optimierung

Eine **zertifizierte Lösung** zum LP $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist ein duales Paar (x, y) mit $x \ge 0$ und $Ax + b \ge 0$ sowie $y \ge 0$ und $yA + c \le 0$, sodass $cx = yb$ gilt. Das garantiert nämlich, x löst das primale LP und y löst das duale LP.

Beispiel: Vorgelegt sei das Ergebnis mehrerer Basiswechsel:

primal	x_1	x_2	
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
u	2	1	-4

$\Longleftrightarrow$

primal	y_3	y_2	
x_1	$1/2$	$-1/2$	9
x_2	$-3/2$	$1/2$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$3/2$	$-1/2$	3
u	$-1/2$	$-1/2$	20

Aufgabe: Ist die Lösung korrekt? Finden Sie ein Zertifikat!
Lösung: Wir sehen das duale Paar $x = (9, 6)^\top$ und $y = (0, 1/2, 1/2, 0)$.
Die Probe gelingt dann leicht, direkt und effizient durch Einsetzen:
Es gilt $x \ge 0$ und $Ax + b \ge 0$ sowie $y \ge 0$ und $yA + c \le 0$ mit $cx = yb$.

Zertifizierte Lösung einer linearen Optimierung

F136
Erläuterung

☺ Jedes Zertifikat (x, y) garantiert: Der Spaltenvektor $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ löst das primale LP, und der Zeilenvektor $y \in \mathbb{R}^{1\times m}$ löst das duale LP. Das ist ein wunderbar effizientes Beispiel einer Zertifizierung, denn es vereint alle wünschenswerten Eigenschaften:

☺ Wenn wir die Lösung x mit dem Simplexverfahren berechnen, dann kostet die Konstruktion des Zertifikats y nahezu nichts extra: Mit dem eigentlichen (primalen) Problem löst das Simplexverfahren zusätzlich und gratis auch das duale Problem. *Solve one, get one free!*

☺ Dies nutzen wir dankend zur Zertifizierung, ganz ohne Mehraufwand. Wir extrahieren das duale Paar (x, y) als *konzise Lösung mit Beweis.* Die zertifizierte Lösung (x, y) lässt sich schnell und sicher prüfen: Zur direkten Probe genügen allein die Grundrechenarten.

☺ Zur Prüfung von (x, y) genügt bereits die schwache Dualität. Die starke Dualität garantiert, dass zu x ein Zertifikat y existiert! So prüfen Sie Ihre eigene Rechnung: *Jeder Irrtum wird erkannt!* So überzeugt Ihre Lösung, unabhängig vom (langen) Rechenweg.

Zertifizierte Lösungen: Analogien in der Algebra

☺ Sie kennen ähnliche Situationen aus der (linearen) Algebra:
Auch hier ist ein Zertifikat eine *konzise Lösung mit Beweis*.

Invertierbarkeit einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über einem Körper $\mathbb{K}$:
Ist A invertierbar, so genügt $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $AB = BA = 1_{n\times n}$.
Ist A nicht invertierbar, so genügt $v \in \mathbb{K}^n \smallsetminus \{0\}$ mit $Av = 0$.

Diagonalisierbarkeit einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über einem Körper $\mathbb{K}$:
Ist A diagonalisierbar, so genügt eine Basis $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ und Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $Av_k = \lambda_k v_k$ für alle $k = 1, \dots, n$.

Übung: Wie zertifizieren Sie die Nicht-Diagonalisierbarkeit von A?

Lösung: (1) Erstes Hindernis ist das Zerfallen des char. Polynoms P_A.
Über $\mathbb{C}$ ist die Antwort klar, über $\mathbb{R}$ ist sie leicht. Über $\mathbb{Q}$ können Sie alle Kandidaten für Nullstellen von P_A aufzählen, prüfen und abspalten.

(2) Angenommen, P_A zerfällt über $\mathbb{K}$. Dann genügt ein Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ mit einem Hauptvektor $v \in \mathbb{K}^n$, sodass $(A-\lambda)v \ne 0$ und $(A-\lambda)^2 v = 0$.
Das Paar (λ, v) zertifiziert, dass A nicht diagonalisiert werden kann.

Zertifizierte Lösungen: Analogien in der Algebra

Bild und Kern einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ über einem Körper $\mathbb{K}$:
Naiv würden wir eine Basis von Bild und Kern fordern. Zum Nachweis muss lineare Unabhängigkeit geprüft werden. Wie können wir sicher stellen, dass das Bild bzw. der Kern nicht noch größer ist?

Mit dem Gauß–Algorithmus konstruieren wir Matrizen $S, S' \in \mathbb{K}^{m\times m}$ mit $SS' = S'S = 1_{m\times m}$ und $T, T' \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $TT' = T'T = 1_{n\times n}$ sodass $S'AT = D$ gilt, wobei mit $d_{ii} = 1$ für $i = 1, \dots, r$ und $d_{ij} = 0$ sonst.
Es gilt $AT = SD$: Das Bild $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(AT) = \operatorname{Im}(SD)$ hat demnach als eine Basis die ersten r Spalten von S, also $Se_1, \dots, Se_r \in \mathbb{K}^m$.
Der Kern $\operatorname{Ker}(A)$ hat als eine Basis die letzten $n-r$ Spalten von T, also $Te_{r+1}, \dots, Te_n \in \mathbb{K}^n$. Zertifizierte Lösung ist hier (S, S', T, T').

Größter gemeinsamer Teiler (ggT) d von a, b in $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{K}[X]$ oder $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.
Mit $d \mid a$ und $d \mid b$ wissen wir nur, dass d ein gemeinsamer Teiler ist.
Gilt zudem $d = au + bv$, so ist d garantiert größter gemeinsamer Teiler:
Für jeden gemeinsamen Teiler d' mit $d' \mid a$ und $d' \mid b$ folgt $d' \mid au + bv$.
Zertifizierter ggT ist (d, a', b', u, v) mit $a = a'd$, $b = b'd$, $d = au + bv$.

Zertifizierte Lösungen: Analogien in der Algebra

Nicht immer ist eine Zertifizierung so offensichtlich, umso mehr lohnt sich die mathematische Fragestellung! Hier eine schöne Illustration:

Übung: Eine Firma / Software / Cloud bietet zu jeder noch so großen natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ die Faktorisierung in ihre Primfaktoren an.
Wie würden Sie einen Vertrag mit dieser Firma aushandeln? Wie können Sie bei Lieferung die Qualität der Ware schnell und sicher prüfen?

Lösungsidee: Der kritische Punkt ist, die Primalität eines jeden Faktors $p \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ zu zertifizieren. Dies ist für den Kunden schwierig und sollte daher vom Anbieter geleistet werden. Hierzu genügt eine primitive Einheitswurzel $w \in \mathbb{Z}_p$, also ein Element maximaler Ordnung $p-1$ in der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}_p^\times, \cdot)$. Zum effizienten Nachweis der Ordnung genügt eine Primfaktorisierung $p - 1 = q_1^{e_1} \cdots q_\ell^{e_\ell}$ mit $q_1 < \dots < q_\ell$.
Rekursiv erfordert dies Zertifikate kleinerer Primzahlen.

Übung: Sehen Sie ein einfaches Zertifikat für einen optimalen Rundweg beim Problem des Handlungsreisenden [*travelling salesman problem*]?

Zertifizierte Lösungen: Analogien in der Analysis

Übung: Eine Firma / Software / Cloud bietet zu jeder Kontraktion $f : (X, d) \to (X, d)$ die näherungsweise Berechnung des Fixpunkts an.
Wie würden Sie einen Vertrag mit dieser Firma aushandeln? Wie können Sie bei Lieferung die Qualität der Ware schnell und sicher prüfen?

Lösungsidee: Fixpunktsatz von Banach mit Fehlerschranke.
Der tolerierte Fehler $\varepsilon > 0$ muss im Vertrag festgelegt werden.

Übung: Eine Firma / Software / Cloud bietet zu jedem Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\operatorname{ggT}(P, P') = 1$ die näherungsweise Berechnung aller Nullstellen an.
Wie gestalten Sie Ihren Vertrag mit dieser Firma?
Wie prüfen Sie bei Lieferung schnell und sicher die Qualität?

Lösungsidee: Newton–Verfahren und Satz von Kantorovich,
siehe `de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Kantorowitsch`.

Übung: Sehen Sie mögliche praktikable Zertifikate für eine numerische Näherungslösung einer Differentialgleichung (gewöhnlich / partiell)?
Sie erahnen, die Frage ist durchaus relevant und interessant!

Beispiel zum Simplexverfahren (Klausur 2018)

Aufgabe: Gegeben ist das lineare Programm $x \ge 0$, $Ax + b \ge 0$, $u(x) = cx + d \to \max!$, kurz $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ wie in folgendem Tableau.

	x_1	x_2	v
y_1	-1	0	3
y_2	-1	-1	5
y_3	1	-2	4
u	$\alpha{=}2$	1	1

$\Longleftrightarrow$

	y_1	x_2	v
x_1	-1	0	3
y_2	1	-1	2
y_3	-1	-2	7
u	-2	1	7

(1) Führen Sie den letzten Basiswechsel zur optimalen Form aus.

(2) Bestimmen Sie eine zertifizierte Lösung (x, y) und das Maximum u. Prüfen Sie explizit jede der hierfür relevanten Un/Gleichungen.

(3) Zeichnen Sie zur Kontrolle die Erfüllungsmenge $P(A, b)$. Welche Teile der Lösung (2) können Sie daran ablesen?

(4) Wir ersetzen im ursprünglichen LP den Koeffizienten 2 durch $\alpha \in \mathbb{R}$. Nennen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das LP *unendlich viele* Lösungen hat.

(5) Wie verläuft das Simplexverfahren in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$?

Beispiel zum Simplexverfahren (Klausur 2018)

Lösung: (1) Es genügt ein letzter Basiswechsel zur optimalen Form:

	y_1	x_2	v
x_1	-1	0	3
y_2	1	-1	2
y_3	-1	-2	7
u	-2	1	7

$\Longleftrightarrow$

	y_1	y_2	v
x_1	-1	0	3
x_2	1	-1	2
y_3	-3	2	3
u	-1	-1	9

(2) Wir lesen die zertifizierte Lösung $x = (3, 2)^\top$ und $y = (1, 1, 0)$ ab.

Probe: Der Punkt $x = (3, 2)^\top$ erfüllt $x \ge 0$ und $Ax + b = (0, 0, 3)^\top \ge 0$, ist also primal zulässig. Der Punkt $y = (1, 1, 0)$ erfüllt $y \ge 0$ und $yA + c = (0, 0) \le 0$, ist also dual zulässig.

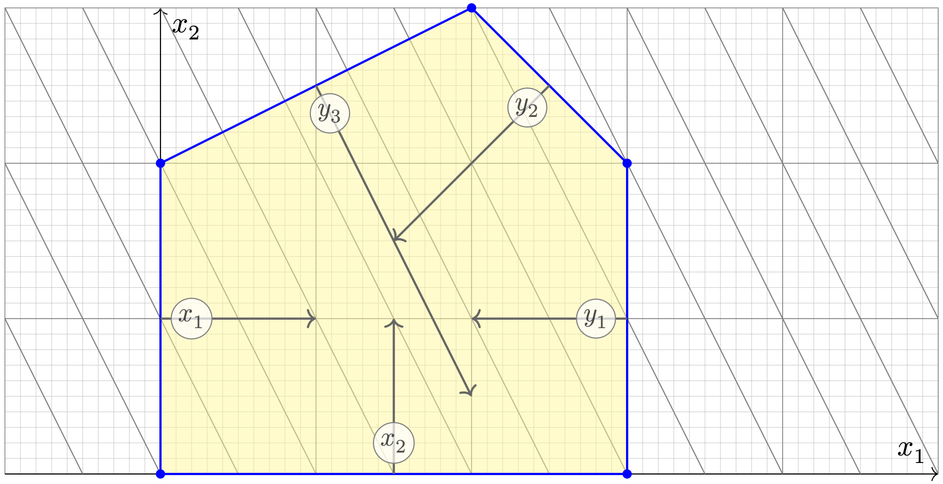
Die untere Schranke $u(x) = cx + d = 9$ und die obere Schranke $v(y) = yb + d = 9$ stimmen überein. Das beweist Optimalität!

☺ Somit ist (x, y) eine zertifizierte Lösung und $\max u = \min v = 9$.

Mit dem eigentlichen (primalen) Problem löst das Simplexverfahren zugleich und gratis auch das duale Problem: *Solve one, get one free!*

Beispiel zum Simplexverfahren (Klausur 2018)

(3) Die Erfüllungsmenge $P(A, b) = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0,\ Ax + b \ge 0 \,\}$:



☺ Mit nur zwei freien Variablen x_1, x_2 erhalten wir ein ebenes Problem. In diesem glücklichen Spezialfall können wir das LP graphisch lösen. Die duale Lösung y ist schwerer zu sehen, bestenfalls zu erahnen.

Beispiel zum Simplexverfahren (Klausur 2018)

(4) Der Skizze entnehmen wir $\alpha = 1$ und $\alpha = -1/2$. Weitere gibt es nicht.

☺ Das können Sie graphisch leicht ablesen. Ebenso algebraisch, aber subtiler, indem Sie auf lineare Abhängigkeit prüfen. Sehen Sie wie?

(5a) Die Graphik erklärt sehr eindrücklich die Rechnung: Für $\alpha > 1$ führen die Basiswechsel $x_1 \leftrightarrow y_1$ und $x_2 \leftrightarrow y_2$ zur optimalen Form.

(5b) Für $-1/2 < \alpha < 1$ genügen die Basiswechsel $x_2 \leftrightarrow y_3$ und $x_1 \leftrightarrow y_2$.

(5c) Für $\alpha < -1/2$ genügt bereits der Basiswechsel $x_2 \leftrightarrow y_3$.

(5ab) Im Grenzfall $\alpha = 1$ sind beide Wege (a) und (b) möglich.

(5bc) Im Grenzfall $\alpha = -1/2$ sind beide Wege (b) und (c) möglich.

☺ Führen Sie die expliziten Rechnungen als Übung aus! So erfahren Sie die Methode. *Rechnen reinigt die Seele.*

Beispiel zum Simplexverfahren (Klausur 2019)

Aufgabe: Gegeben ist das lineare Programm $x \geq 0$, $Ax + b \geq 0$, $u(x) = cx + d \to \max!$, kurz $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ wie in folgendem Tableau.

	x_1	x_2	v
y_1	-2	1	6
y_2	-1	-2	8
u	2	1	3

(1) Führen Sie zwei Basiswechsel zur optimalen Form aus.

(2) Bestimmen Sie hieraus eine zertifizierte Lösung (x, y) und das so erzielte Maximum u, mit Probe.

(3) Zeichnen Sie zur graphischen Kontrolle der Lösung die Erfüllungsmenge $P(A, b) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ Ax + b \geq 0 \}$.

Beispiel zum Simplexverfahren (Klausur 2019)

Lösung: (1) Zwei Basiswechsel genügen zur optimalen Form:

	x_1	x_2	v
y_1	-2	1	6
y_2	-1	-2	8
u	2	1	3

$\Longleftrightarrow$

	y_1	x_2	v
x_1	$-1/2$	$1/2$	3
y_2	$1/2$	$-5/2$	5
u	-1	2	9

$\Longleftrightarrow$

	y_1	y_2	v
x_1	$-2/5$	$-1/5$	4
x_2	$1/5$	$-2/5$	2
u	$-3/5$	$-4/5$	13

Beispiel zum Simplexverfahren (Klausur 2019)

(2) Wir lesen die zertifizierte Lösung $x = (4, 2)^\top$ und $y = (3/5, 4/5)$ ab.

Probe: Der Punkt $x = (4, 2)^\top$ erfüllt $x \geq 0$ und $Ax + b = (0, 0)^\top \geq 0$, ist also primal zulässig. Der Punkt $y = (3/5, 4/5)$ erfüllt $y \geq 0$ und $yA + c = (0, 0) \leq 0$, ist also dual zulässig.

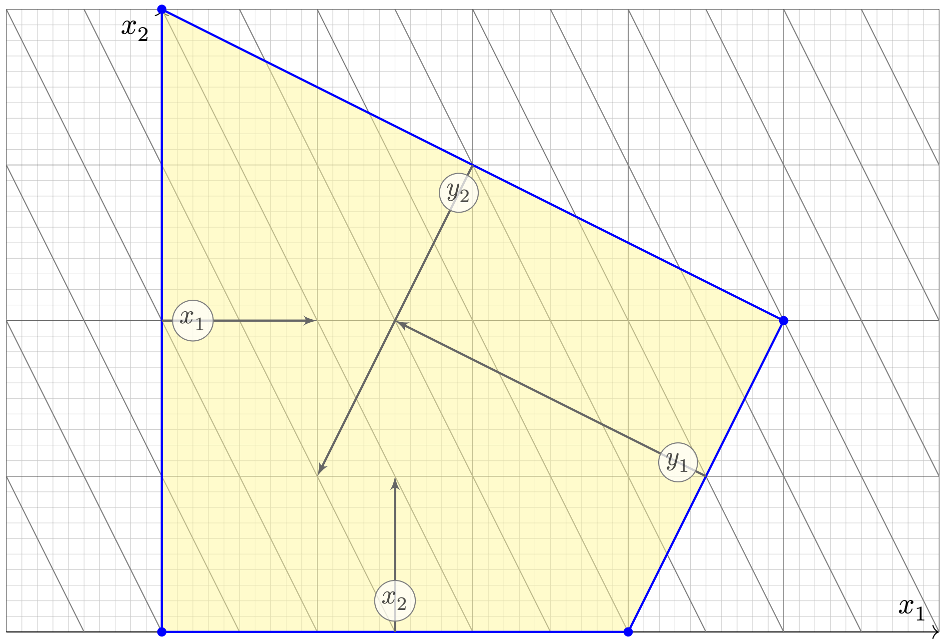
Die untere Schranke $u(x) = cx + d = 13$ und die obere Schranke $v(y) = yb + d = 13$ stimmen überein. Das beweist Optimalität!

☺ Somit ist (x, y) eine zertifizierte Lösung und $\max u = \min v = 9$.

Mit dem eigentlichen (primalen) Problem löst das Simplexverfahren zugleich und gratis auch das duale Problem: *Solve one, get one free!* Dies nutzen wir dankend zur Zertifizierung, ohne Mehraufwand. So prüfen Sie Ihre eigene Rechnung: *Jeder Irrtum wird erkannt!*

Zugegeben, das vorgelegte lineare Programm ist geradezu winzig, um den Rechenaufwand in einer Klausur noch erträglich zu halten. Auch sind alle Ungleichungen hier straff, das ist etwas unrealistisch. Die Übungen bieten Ihnen etwas realistischere Anwendungsbeispiele.

Beispiel zum Simplexverfahren (Klausur 2019)



Vom Nullsummenspiel zum linearen Programm

Aufgabe: Untersuchen Sie nochmals das Spiel *Schere-Stein-Papier:*

	Schere	Stein	Papier
Schere	0 / 0	-1 / $+1$	$+1$ / -1
Stein	$+1$ / -1	0 / 0	-1 / $+1$
Papier	-1 / $+1$	$+1$ / -1	0 / 0

$$A = -B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finden Sie ein Nash–Gleichgewicht und die Auszahlung für Spieler 1:
(1) Schreiben Sie das Problem explizit als ein lineares Programm.
(2) Finden Sie eine Lösung. Ist sie eindeutig? Finden Sie ein Zertifikat!

Dieses Nullsummenspiel dient hier zur Illustration. Sie kennen bereits die Lösung: Es gibt genau ein Nash–Gleichgewicht, nämlich $(1/3, 1/3, 1/3)$, und der Wert des Spiels ist 0, auch schon aus Symmetriegründen.

Vom Nullsummenspiel zum linearen Programm

Lösung: Wir schreiben Schere-Stein-Papier als Bimatrixspiel

$$u : \Delta^2 \times \Delta^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \big(x^\top A\, y,\ -x^\top A\, y \big).$$

Hierbei ist $\Delta^2 = [e_0, e_1, e_2] \subset \mathbb{R}^3$ und $e_0, e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$ die Standardbasis.
Der Spielwert / die Gleichgewichtsauszahlung für Spieler 1 ist:

$$z = \max_{x \in [e_0,e_1,e_2]} \min_{y \in [e_0,e_1,e_2]} x^\top A\, y = \max_{x \in [e_0,e_1,e_2]} \min_{y \in \{e_0,e_1,e_2\}} x^\top A\, y$$

Wir erhalten ein endliches System linearer Un/Gleichungen:

$$\begin{aligned} &z \to \max!, \qquad && z \le x^\top A\, e_0, \qquad && x_0 \ge 0, \\ & && z \le x^\top A\, e_1, && x_1 \ge 0, \\ & && z \le x^\top A\, e_2, && x_2 \ge 0, \\ & && 1 = x_0 + x_1 + x_2, && z \ge 0. \end{aligned}$$

Trick: $A' = A + \left(\begin{smallmatrix} 2&2&2\\2&2&2\\2&2&2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2&1&3\\3&2&1\\1&3&2 \end{smallmatrix}\right)$ erfüllt $A' > 0$ und $z' = z + 2 > 0$.
Bonus: Statt $x_0 + x_1 + x_2 = 1$ genügt die Ungleichung $x_0 + x_1 + x_2 \le 1$.

Vom Nullsummenspiel zum linearen Programm

(1) Durch diese Umformulierung erhalten wir unser lineares Programm:

$$\begin{aligned} &z \to \max!, \qquad && x_0 \ge 0, \qquad && s_0 = x^\top A\, e_0 - z && \ge 0, \\ & && x_1 \ge 0, && s_1 = x^\top A\, e_1 - z && \ge 0, \\ & && x_2 \ge 0, && s_2 = x^\top A\, e_2 - z && \ge 0, \\ & && z \ge 0, && s_3 = 1 - x_0 - x_1 - x_2 && \ge 0. \end{aligned}$$

(2) Wir schreiben dies als Tableau und lösen das LP:

	x_0	x_1	x_2	z	
s_0	2	3	1	-1	0
s_1	1	2	3	-1	0
s_2	3	1	2	-1	0
s_3	-1	-1	-1	0	1
z	0	0	0	1	0

Damit haben wir unser Problem in Normalform und können es lösen.
Etwas ungewöhnlich ist, dass die Zielfunktion z auch als Variable auftritt.
Wer das nicht mag, schreibt lieber $z = t \to \max!$ mit der Hilfsvariablen t.

Vom Nullsummenspiel zum linearen Programm

	x_0	x_1	x_2	s_0	
z	2	3	1	-1	0
s_1	-1	-1	2	1	0
s_2	1	-2	1	1	0
s_3	-1	-1	-1	0	1
z	2	3	1	-1	0

	x_0	s_1	x_2	s_0	
z	-1	-3	7	2	0
x_1	-1	-1	2	1	0
s_2	3	2	-3	-1	0
s_3	0	1	-3	-1	1
z	-1	-3	7	2	0

	x_0	s_1	s_2	s_0	
z	6	$5/3$	$-7/3$	$-1/3$	0
x_1	1	$1/3$	$-2/3$	$1/3$	0
x_2	1	$2/3$	$-1/3$	$-1/3$	0
s_3	-3	-1	1	0	1
z	6	$5/3$	$-7/3$	$-1/3$	0

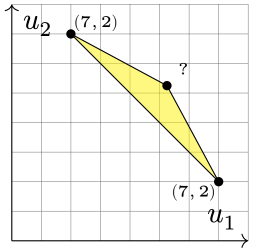
	s_3	s_1	s_2	s_0	
z	-2	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	2
x_1	$-1/3$	0	$-1/3$	$1/3$	$1/3$
x_2	$-1/3$	$1/3$	0	$-1/3$	$1/3$
x_0	$-1/3$	$-1/3$	$1/3$	0	$1/3$
z	-2	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	2

Eine Lösung ist $x^\top = (x_0, x_1, x_2, z) = (1/3, 1/3, 1/3, 2)$. Sie ist eindeutig.
Wurde richtig gerechnet? Zertifikat $y = (s_0, s_1, s_2, s_3) = (1/3, 1/3, 1/3, 2)$.
Es gilt $x \ge 0$ und $Ax + b \ge 0$ sowie $y \ge 0$ und $yA + c \le 0$ mit $cx = yb$.

Berechnung von korrelierten Gleichgewichten

Aufgabe: Analysieren Sie das *Chicken-Game / Feige-oder-mutig*.
Korrelierte Gleichgewichte wurden eingangs auf Seite F007 motiviert.

A \ B	feige	mutig
feige	6, 6 (x_0)	2, 7 (x_1)
mutig	7, 2 (x_2)	0, 0



Welche korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^2$ maximieren $u_1 + u_2$?
(1) Schreiben Sie das Problem explizit als ein lineares Programm.
(2) Finden Sie eine Lösung. Ist sie eindeutig? Finden Sie ein Zertifikat!

Ziel in (1) ist, die Ungleichungen der Definition I3c auszuschreiben, so wie wir dies bereits zu Beginn dieses Kapitels eingeführt haben. Wir haben nun alle Techniken, dies anschließend in Teil (2) zu lösen: Der Simplexalgorithmus ist unser Universalwerkzeug.

Berechnung von korrelierten Gleichgewichten

(1) Wir erhalten folgendes System linearer Ungleichungen:

$$\begin{aligned} u = 12x_0 + 9x_1 + 9x_2 \to \max!, \quad & x_0 \ge 0, \quad y_0 = -x_0 + 2x_1 \ge 0, \\ & x_1 \ge 0, \quad y_1 = -x_0 + 2x_2 \ge 0, \\ & x_2 \ge 0, \quad y_2 = 1 - x_0 - x_1 - x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

(2) Wir schreiben dies als Tableau $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und lösen das LP:

	x_0	x_1	x_2	
y_0	-1	2	0	0
y_1	-1	0	2	0
y_2	-1	-1	-1	1
u	12	9	9	0

$\Longleftrightarrow$

	y_0	x_1	x_2	
x_0	-1	2	0	0
y_1	1	-2	2	0
y_2	1	-3	-1	1
u	-12	33	9	0

$\Longleftrightarrow$

	y_0	y_1	x_2	
x_0	0	-1	2	0
x_1	$1/2$	$-1/2$	1	0
y_2	$-1/2$	$3/2$	-4	1
u	$9/2$	$-33/2$	42	0

$\Longleftrightarrow$

	y_0	y_1	y_2	
x_0	$-1/4$	$-1/4$	$-1/2$	$1/2$
x_1	$3/8$	$-1/8$	$-1/4$	$1/4$
x_2	$-1/8$	$3/8$	$-1/4$	$1/4$
u	$-3/4$	$-3/4$	$-21/2$	$21/2$

Berechnung von korrelierten Gleichgewichten

Eine Lösung ist $x = (x_0, x_1, x_2)^\top = (1/2, 1/4, 1/4)^\top$. Sie ist eindeutig. Beides können wir bequem am letzten Tableau ablesen: Es ist optimal.

Wurde richtig gerechnet? Zertifikat $y = (y_0, y_1, y_2) = (3/4, 3/4, 21/2)$. Es gilt $x \ge 0$ und $Ax + b \ge 0$ sowie $y \ge 0$ und $yA + c \le 0$ mit $cx = yb$.

🙂 Auch hier können wir das Ergebnis schnell und sicher überprüfen. Das ist mehr als ein einfacher Plausibilitätscheck, es ist ein Beweis! Die ausführliche Rechnung benötigen wir, um die Lösung zu *finden*. Anschließend können wir die Rechnung vergessen, das ist vielleicht schade, aber sie ist entbehrlich: Das Ergebnis ist nachweislich richtig!

Aufgabe: Lösen Sie ebenso folgende Varianten dieses Problems:
(3) Welche korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^2$ minimieren $u_1 + u_2$?
(4) Welche korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^2$ max/minimieren u_1?
(5) Welche korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^2$ max/minimieren u_2?
Finden Sie eine Lösung. Ist sie eindeutig? Finden Sie ein Zertifikat!

Lösung: Die obige Graphik suggeriert Ihnen jeweils die Lösung(en). Wirkliche Sicherheit erlangen Sie nur durch eigenes Rechnen.

Berechnung von korrelierten Gleichgewichten

Wir variieren die vorige Aufgabe, indem wir die Vereinfachung $x_3 = 0$ fallen lassen und das allgemeine Problem untersuchen:

A \ B	feige	mutig
feige	6, 6 (x_0)	2, 7 (x_1)
mutig	7, 2 (x_2)	0, 0 (x_3)

Übung: Finden Sie alle korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^3$, die (1) $u_1 + u_2$ max/minimieren, ebenso (2) u_1 und symmetrisch (3) u_2. Schreiben Sie das Problem explizit als ein lineares Programm. Finden Sie eine Lösung. Ist sie eindeutig? Finden Sie ein Zertifikat!

Übung: Wir vereinfachen die vorige Aufgabe, indem wir aus Symmetrie $x_1 = x_2$ und weiterhin $x_3 = 0$ setzen. Lösen das vereinfachte Problem.

Lineare Approximation mit kleinstem Fehler

Gegeben sind **Datenpunkte** $(p_1, q_1), \dots, (p_m, q_m) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Gesucht ist eine **lineare Prognose** $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto a^\top x + b$ mit dem Ziel $h(p_i) \approx q_i$.
Was ist die beste Prognose? Der Fehler im $i$ten Datenpunkt (p_i, q_i) ist:

$$E_i := h(p_i) - q_i = a^\top p_i + b - q_i$$

Der L^1–Gesamtfehler ist die Absolutsumme. Damit minimieren wir:

$$F_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : (a, b) \mapsto \sum_{i=1}^m |E_i|^1 = \sum_{i=1}^m |a^\top p_i + b - q_i|^1$$

Der L^2–Gesamtfehler ist die Quadratsumme. Damit minimieren wir:

$$F_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : (a, b) \mapsto \sum_{i=1}^m |E_i|^2 = \sum_{i=1}^m |a^\top p_i + b - q_i|^2$$

Die Statistik nennt das **lineare Regression**. Beim maschinellen Lernen ist es ein erstes Beispiel für **angeleitetes Lernen** [*supervised learning*].
Der Exponent $\alpha \in [1, \infty]$ sorgt für geeignete **Gewichtung** großer Fehler.

Aufgabe: (1) Schreiben Sie die L^1–Minimierung als lineare Optimierung.
(2) Lösen Sie die L^2–Minimierung (im eindimensionalen Fall $n = 1$).

Lineare Approximation mit kleinstem L^1–Fehler

Lösung: (1) Wir minimieren die Absolutsumme der punktweisen Fehler:

$$F_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : (a, b) \mapsto \sum_{i=1}^m |E_i| = \sum_{i=1}^m |a^\top p_i + b - q_i|.$$

Diese Problemstellung ist nicht linear aufgrund der Absolutbeträge!
Wir wollen die Beträge auflösen. Hierzu nutzen wir $|E_i| = \max\{\pm E_i\}$.
Wir führen zusätzliche Variablen $e_1, \dots, e_m$ ein mit Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} e_i &\ge +(a^\top p_i + b - q_i), \\ e_i &\ge -(a^\top p_i + b - q_i), \end{aligned}$$

und minimieren damit die neue Zielfunktion

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : (a, b, e) \mapsto e_1 + \dots + e_m.$$

In jedem Optimalpunkt (a, b, e) gilt dann $e_i = |E_i|$, wie erhofft.
Somit minimiert (a, b) die Absolutsumme $F_1(a, b) = \sum_{i=1}^m |E_i|$.

🙂 Dieser Trick funktioniert allgemein: Jede Zielfunktion der Form $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto E_0(x) + \sum_{i=1}^m |E_i(x)|$ formulieren wir um zu $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} : (x, e) \mapsto E_0(x) + \sum_{i=1}^m e_i$ mit $e_i \ge \pm E_i(x)$.

Lineare Approximation mit kleinstem L^2–Fehler

Lösung: (2) Wir minimieren die Quadratsumme der punktweisen Fehler:

$$F_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : (a, b) \mapsto \sum_{i=1}^m E_i^2 = \sum_{i=1}^m (a p_i + b - q_i)^2.$$

Das ist eine positive quadratische Funktion in a und b. Minimum:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial a} &= \sum_{i=1}^m 2(a p_i + b - q_i) \cdot p_i &\overset{!}{=}\; 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial b} &= \sum_{i=1}^m 2(a p_i + b - q_i) &\overset{!}{=}\; 0 \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem wird gelöst durch

$$a = \frac{\sum (p_i - \bar p)(q_i - \bar q)}{\sum (p_i - \bar p)^2} = \frac{\sum p_i q_i - m \bar p \bar q}{\sum p_i^2 - m \bar p^2}, \qquad b = \bar q - a \bar p.$$

Wir nutzen hierbei die Mittelwerte $\bar p = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_i$ und $\bar q = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m q_i$.
Selbstverständlich nehmen wir $m \ge 2$ an und $i \mapsto p_i$ nicht konstant.

🙂 Geometrisch: Für die zentrierten Vektoren $\vec p_i = p_i - \bar p$ und $\vec q_i = q_i - \bar q$ berechnet sich $a = \langle \vec p \,|\, \vec q \rangle / \langle \vec p \,|\, \vec p \rangle$ durch zwei Skalarprodukte in $\mathbb{R}^m$!
Die Kleinste-Quadrate-Schätzung ist eine orthogonale Projektion.

Lineare Approximation mit kleinstem L^2–Fehler

Wir nennen $y = ax + b$ die **Kleinste-Quadrate-Gerade** (KQ-Gerade).
Der Wert $\hat q_i = a p_i + b$ heißt der **KQ-gefittete Wert** und entsprechend die Abweichung $f_i = \hat q_i - q_i = a p_i + b - q_i$ der **KQ-gefittete Fehler**.

Eigenschaften: Die Summe aller Fehler $f_i = \hat q_i - q_i = a p_i + b - q_i$ ist Null.
Liegen alle Datenpunkte (p_i, q_i) auf einer Geraden, so ist dies unsere KQ-Gerade mit perfektem Fit: Überall gilt $\hat q_i = q_i$ und somit $f_i = 0$.

Wie gut beschreibt die Gerade die Daten? **Korrelationskoeffizient**

$$r(p, q) := \frac{\sum (p_i - \bar p)(q_i - \bar q)}{\sqrt{\sum (p_i - \bar p)^2} \sqrt{\sum (q_i - \bar q)^2}} = \frac{\langle \vec p \,|\, \vec q \rangle}{\sqrt{\langle \vec p \,|\, \vec p \rangle} \sqrt{\langle \vec q \,|\, \vec q \rangle}}$$

Für das Skalarprodukt $\langle \vec p \,|\, \vec q \rangle$ gilt die Cauchy–Schwarz–Ungleichung:
Es gilt $-1 \le r \le 1$, mit $r = \pm 1$ genau dann, wenn alle Daten auf einer Geraden liegen: gleichsinnig für $r = +1$ und gegensinnig für $r = -1$.

Die Linearisierung ist gut für große Werte von r^2, schlecht für kleine.
Geometrisch bedeutet $r = 0$: Die Vektoren $\vec p, \vec q$ stehen **senkrecht**.
Stochastisch: Die Zufallsvariablen p, q sind **linear unkorreliert**.

Der Hauptsatz des Simplexverfahrens

Zu lösen sei ein **lineares Programm** $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Das heißt ausgeschrieben:

$$\boxed{x \ge 0, \quad Ax + b \ge 0, \quad u(x) = cx + d \to \max!}$$

Als **Äquivalenzumformungen** nutzen wir die Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$:

	x_k	x_i
y_ℓ	α	β
y_j	γ	δ

Basis- $\Longleftrightarrow$ wechsel

	y_ℓ	x_i
x_k	$1/\alpha$	$-\beta/\alpha$
y_j	γ/α	$\delta - \beta\gamma/\alpha$

Das definiert zunächst die *möglichen* Schritte, noch nicht ihre *Abfolge*. Unseren vorläufigen Satz F1B präzisieren wir nun als Hauptsatz F3A und beweisen ihn durch Angabe eines expliziten Algorithmus.

Satz F3A: Basiswechsel lösen jedes lineare Programm.

Jedes lineares Programm $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ wird durch geeignete Basiswechsel zu $\left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ entweder (0) optimal oder (1) offensichtlich unlösbar.

Wann ist ein lineares Programm offensichtlich unlösbar?

(0) optimal

		v
		$\oplus$
		$\oplus$
		$\oplus$
u	$\ominus \quad \ominus \quad \ominus$	d

(1a) unerfüllbar

		v
y_j	$\ominus \quad \ominus \quad \ominus$	$-$

(1b) unbeschränkt

		x_i	
		$\oplus$	
		$\oplus$	
		$\oplus$	
u		$+$	

Abkürzend steht $+$ für > 0 und $-$ für < 0 sowie $\oplus$ für ≥ 0 und $\ominus$ für ≤ 0. Die folgenden offensichtlichen Fälle lesen wir direkt am Tableau ab:

Lemma F3B: offensichtlich unlösbare lineare Programme

(0) Im Falle $c \le 0 \le b$ ist unser LP optimal mit Zertifikat $(x = 0, y = 0)$: $x \ge 0 \ \wedge \ Ax + b \ge 0$ und $y \ge 0 \ \wedge \ yA + c \le 0$ sowie $\max u = d = \min v$.

(1a) Gilt $b_j < 0$ für ein j und $a_{ji} \le 0$ für alle i, so ist unser LP unlösbar: primal unerfüllbar, also dual entweder unerfüllbar oder unbeschränkt.

(1b) Gilt $c_i > 0$ für ein i und $a_{ji} \ge 0$ für alle j, so ist unser LP unlösbar: dual unerfüllbar, also primal entweder unerfüllbar oder unbeschränkt.

Vom heuristischen Verfahren zum Algorithmus

☺ Wir kennen nun das Ziel: (0) optimal oder (1) offensichtlich unlösbar! Wie finden wir hierzu eine Methode? Welche Pivotstrategie wählen wir? Wie beweisen wir den Algorithmus, also Terminierung und Korrektheit? Zur Vereinfachung teilt man traditionell den Algorithmus in zwei Phasen:

Phase 1: Durch Basiswechsel überführen wir das LP in die Form $b \ge 0$. Gelingt dies, so ist $x = 0$ zulässig. Andernfalls ist das LP unerfüllbar.

Phase 2: Wir behalten $b \ge 0$ und überführen das LP in die Form $c \le 0$. Gelingt dies, so ist $x = 0$ optimal. Andernfalls ist das LP unbeschränkt.

Bislang haben wir in unseren Rechnungen immer $b \ge 0$ vorausgesetzt und sind somit sofort in Phase 2 eingestiegen. Das hat gute Gründe: Interessanterweise ist zunächst Phase 2 deutlich leichter zugänglich. Dank Dualisierung können wir damit anschließend Phase 1 lösen.

Wenn Sie das Kapitel bis hier durchgearbeitet haben, dann kennen (und lieben) Sie das Simplexverfahren und bereits erste schöne Anwendungen. Da Sie nun über erste eigene Erfahrung mit diesem Verfahren verfügen, sind Sie bereit und motiviert zur genaueren Untersuchung. Es lohnt sich!

Vom heuristischen Verfahren zum Algorithmus

Bisher spreche ich vorsichtig von dem / einem „Simplexverfahren“, noch nicht von „Algorithmus“, denn die Schrittfolge ist noch vage. Die Pivotwahl, Spalte k und Zeile ℓ, legen wir nun eindeutig fest:

Algo F3C: Phase 2 des Simplexverfahrens [mit Dantzigs Pivotregel]

Eingabe: ein lineares Programm als Tableau $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $b \ge 0$
Ausgabe: ein dazu äquivalentes Tableau, optimal oder unbeschränkt

1: **while** weder optimal noch offensichtlich unbeschränkt **do**
2: Pivotspalte: Wähle $k \in \{1, \dots, n\}$ [minimal] mit $c_k > 0$ [maximal].
// Gilt $c_k \le 0$ für alle k, dann ist u optimal.
3: Pivotzeile: Wähle $\ell \in \{1, \dots, m\}$ mit $a_{\ell k} < 0$ und $b_\ell / |a_{\ell k}|$ minimal
// Gilt $c_k > 0$ und $a_{\ell k} \ge 0$ für alle ℓ, dann ist u unbeschränkt.
4: Basiswechsel: Tausche $x_k \leftrightarrow y_\ell$ zum neuen LP $u' : \left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$.
// Es gilt $b_j - \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}} b_\ell \ge 0$ dank (3) und $d' = d - \frac{c_k}{a_{\ell k}} b_\ell \ge d$ dank (2).

Dantzigs Pivotregel: Wähle $c_k > 0$ maximal, bei Gleichstand k minimal.

Phase 2 des Simplexverfahrens: Pivotstrategie

Phase 2 spielt in der Menge aller offensichtlich erfüllbaren Tableaux

$$\mathcal{T} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1)} \;\middle|\; b \ge 0 \right\}.$$

🙂 *Generisch* gilt stets $b_\ell > 0$ und somit $d' > 0$, das garantiert Fortschritt. Da nur endlich viele Erhöhungen möglich sind, endet dieses Verfahren.

Genauer: Wir nennen unser Tableau $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ **offensichtlich fies**, falls $b_j = 0$ in einer Zeile j oder $c_i = 0$ in einer Spalte i gilt. Wir nennen es **fies**, falls ein äquivalentes Tableau offensichtlich fies ist. Andernfalls ist es **nett**.

Übung: Die Menge der fiesen Tableaux hat Lebesgue–Maß 0. Die netten Tableaux sind offen und dicht in $\mathcal{T}$. Für solche endet Algorithmus F3c nach endlich vielen Schritten. Zudem ist das Optimum eindeutig.

🙂 Anschaulich: Wenn wir unser Tableau stetig verteilt zufällig wählen, dann kommen die befürchteten Ausnahmen mit Wkt 0 vor, also fast nie.

⚠ Nicht jedes Tableau ist zufällig gewählt. Fiese Tableaux sind zwar seltene Ausnahmen, aber durchaus möglich! Hier kann das Verfahren stagnieren, $d' = d$, und bei ungeschickter Pivotwahl sogar Zykel bilden.

Phase 2 des Simplexverfahrens: Pivotstrategie

Wie können wir für fiese Tableaux dennoch Fortschritt garantieren?

🙂 **Perturbation:** Ergänze $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ um eine Spalte. Statt mit $b_j, d \in \mathbb{R}^1$ rechnen wir mit $b_j, d \in \mathbb{R}^2$ und vergleichen lexikographisch. So können wir $b_\ell > 0$ und $d' > d$ garantieren. Notfalls wiederholen wir diesen Trick durch Anfügen weiterer Spalten. So ergänzt werden alle Tableaux nett! Diese Perturbation vermeidet insbesondere Zykel. Die Hilfskomponenten können wir löschen, sobald $b > 0$ in den vorderen Komponenten gilt.

🙂 Das Element $(b_i^0, b_i^1, \dots) \in \mathbb{R}^k$ entspricht $b_i = b_i^0 + \varepsilon b_i^1 + \dots \in \mathbb{R}[\varepsilon]/\langle \varepsilon^k \rangle$. Der lexikographische Vergleich sortiert nach Größenordnung für $\varepsilon \to 0$. Dabei ist $\mathbb{R}[\varepsilon]$ der Polynomring in der Variablen ε und $\mathbb{R}[\varepsilon]/\langle \varepsilon^k \rangle \cong \mathbb{R}^k$ der abgeschnittene Polynomring mit $\varepsilon^k = 0$. Da wir mit $a_{ji}, c_i \in \mathbb{R}$ rechnen, nutzen wir diese Ringe $\mathbb{R}^1 \rightleftarrows \mathbb{R}^2 \rightleftarrows \mathbb{R}^3 \rightleftarrows \dots$ nur als Vektorräume über $\mathbb{R}$.

Satz F3D: Terminierung und Korrektheit der Phase 2

Der angegebene Algorithmus für Phase 2 terminiert zu jeder Eingabe nach endlich vielen Schritten und liefert stets ein korrektes Ergebnis: entweder ein optimales Tableau oder ein unbeschränktes Tableau.

Phase 1 des Simplexverfahrens: Dualisierung

Gegeben sei ein lineares Programm $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Wir wollen $b \ge 0$ erreichen. Wir transnegieren zu $\left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) = -\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^\top$ und wollen $c' \le 0$ erreichen.

Wir erweitern zu $\left(\begin{smallmatrix} A' & b^* & b' \\ c' & d^* & d' \end{smallmatrix}\right)$ durch eine willkürliche Hilfsspalte $b^* > 0$. Hier können wir Phase 2 anwenden und die alte Spalte b' mitführen. Wir erreichen $c' \le 0$, löschen die Hilfsspalte und transnegieren zurück.

Gelingt dies nicht, so erreichen wir ein unbeschränktes Tableau $\left(\begin{smallmatrix} A' & b^* & b' \\ c' & d^* & d' \end{smallmatrix}\right)$. Wir löschen die Hilfsspalte und transnegieren zurück. Unser primales Tableau $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist dann offensichtlich nicht erfüllbar.

Satz F3E: Terminierung und Korrektheit der Phase 1

Dieser Algorithmus für Phase 1 terminiert nach endlich vielen Schritten und liefert stets ein korrektes Ergebnis: entweder ein erfüllbares Tableau mit $b \ge 0$ oder ein unbeschränktes Tableau des dualen Problems.

Übung: Prüfen Sie die Methode und die beiden Sätze sorgsam nach. Parallel hierzu können Sie alles an konkreten Beispielen ausprobieren dank unserem interaktiven Optimierungs-Tool `eiserm.de/lehre/Pivot`.

Das Simplexverfahren: Zusammenfassung

Erst die Erklärung all dieser Schritte definiert den Simplexalgorithmus; speziell Dantzigs Pivotstrategie definiert *Dantzigs Simplexalgorithmus*. Erfreulicherweise gelingt die Methode über jedem geordneten Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot, \le)$, etwa über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$ oder jedem Zwischenkörper wie $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Algo F3F: Simplexalgorithmus

Eingabe: ein lineares Programm als Tableau $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ über $(\mathbb{K}, +, \cdot, \le)$,

Ausgabe: ein dazu äquivalentes Tableau $u' : \left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$, entweder optimal mit $c' \le 0 \le b'$ oder offensichtlich unerfüllbar / unbeschränkt

1: Phase 1: Durch Basiswechsel überführen wir das LP in die Form $b \ge 0$. Gelingt dies, so ist $x = 0$ zulässig. Andernfalls ist das LP unerfüllbar.

2: Phase 2: Wir behalten $b \ge 0$ und überführen das LP in die Form $c \le 0$. Gelingt dies, so ist $x = 0$ optimal. Andernfalls ist das LP unbeschränkt.

Dank F3E und F3D ist diese Methode korrekt. Das beweist Satz F1B und rechtfertigt nachträglich unsere geometrisch-heuristische Beweisidee. Dualität *benötigen* wir hier nicht, wir *folgern* sie wie in Satz F1C.

Wiederholung, für lineare Gleichungssysteme ist die Komplexität klar: Der Gauß–Algorithmus bringt jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ über dem Körper $\mathbb{K}$ in die reduzierte Zeilenstufenform (*reduced row echelon form*, kurz *rref*). Dazu benötigt er höchstens mr Zeilenoperationen, wobei $r \le \min\{m, n\}$ der Rang ist, und somit höchstens mnr arithmetische Operationen in $\mathbb{K}$.

Die lineare Optimierung zeigt gewisse Ähnlichkeiten zwischen Systemen von Gleichungen und Ungleichungen, allein die Laufzeit ist schwieriger.

Übung: Bei n Variablen und m Bedingungen gibt es $\le \binom{m+n}{n}$ äquivalente Tableaux. Wir können *brute force* alle durchprobieren. Die Komplexität jedes Simplexverfahrens ist höchstens exponentiell, denn $\binom{2n}{n} < 4^n/\sqrt{\pi n}$.

Schlimmstenfalls ist sie exponentiell! Ein berühmt-berüchtigtes Beispiel: Mit Dantzigs Pivotregel besucht das Simplexverfahren alle 2^n Ecken des Klee–Minty–Würfels, siehe `en.wikipedia.org/wiki/Klee-Minty_cube`.

Übung: Mit unserer interaktiven Webseite `eiserm.de/lehre/Pivot` können Sie bequem die Klee–Minty–Würfel erzeugen und erproben. Wie viele Basiswechsel benötigen Sie, wenn Sie ganz stur Dantzigs Pivotstrategie folgen? Wie viele benötigen Sie auf kürzestem Wege?

Manche sagen: „Du hast es erst dann verstanden, wenn du es einem Computer beibringen kannst.“ Das ist extrem, aber nützlich. Beispiele: Können Sie den Gauß–Algorithmus nutzen? beweisen? programmieren? ebenso die Determinante berechnen? erklären? effizient implementieren?

Projekt: Implementieren Sie Dantzigs Simplexalgorithmus. Erzeugen Sie dazu zufällige lineare Programme und messen Sie die mittlere Laufzeit. Recherchieren oder erfinden Sie weitere Pivotstrategien, implementieren und testen Sie diese. (Wenn Sie wollen, gerne als Erweiterung von `Pivot`.)

Neben Dantzigs wurden zahlreiche weitere Pivotstrategien entwickelt. Es gibt daher nicht nur *den* einen Simplexalgorithmus, sondern mehrere.

$$\boxed{\text{Simplexalgorithmus} = \text{Simplexverfahren} + \text{Pivotstrategie}}$$

Anders gesagt, das Simplexverfahren ist eine *Familie* von Algorithmen. Als den freien Parameter wählen wir hierzu jeweils eine Pivotstrategie. Speziell Dantzigs Pivotstrategie definiert *Dantzigs Simplexalgorithmus.* Zahlreiche weitere Pivotstrategien wurden seit 1947 vorgeschlagen.

Zu den meisten Pivotstrategien wurden ebenfalls Beispiele gefunden, die exponentielle Laufzeit erfordern. Diese Fälle sind gefürchtet, treten jedoch in der Praxis selten auf. Deshalb ist das Simplexverfahren sehr erfolgreich, obwohl es exponentiellen Aufwand verursachen kann.

Der Durchbruch hierzu gelang Daniel Spielman und Shang-Hua Teng: *Smoothed analysis of algorithms: Why the simplex algorithm usually takes polynomial time.* JACM 51 (2004) 385–463. Für zufällige Perturbationen ist die erwartete Laufzeit polynomiell. Sie erhielten 2008 den Gödel–Preis!

Anschaulich gesagt: Das Simplexverfahren löst effizient nahezu jedes Programm, zumindest jedoch fast alle nahegelegenen Perturbationen. Das erklärt die empirische Beobachtung und bestärkt das inzwischen über siebzig Jahre gewachsene Vertrauen in das Simplexverfahren.

Die lineare Optimierung lässt sich nachweislich in polynomialer Zeit lösen, wie Leonid Khachiyan (Ellipsoidverfahren, 1979) und Narendra Karmarkar (Innere-Punkte-Verfahren, 1984) zeigen konnten. Ob dies auch mit einer Pivotstrategie gelingt, bleibt eine Herausforderung.

Kapitel G

Soziale Normen und Dilemmata, Koordination und Evolution

Dem Anwenden muss das Erkennen vorausgehen.
Max Planck (1858–1947)

Evolutionary game theory deploys the Darwinian notion that good strategies diffuse across populations of players rather than being learned by rational agents.
Herbert Gintis, *Game Theory Evolving* (2009)

Inhalt dieses Kapitels G

Motivation und Überblick

Im Kapitel E haben wir **strategische Spiele in Normalform** definiert und dazu den zentralen Begriff des Nash–Gleichgewichts eingeführt. In diesem und den folgenden Kapiteln diskutieren wir erste einfache Anwendungen, Verfeinerungen und Erweiterungen dieser Konzepte.

Dazu untersuchen wir diverse Situationen von Konflikt und Kooperation, etwa ökonomische Konkurrenz, mit unseren spieltheoretischen Mitteln. Unsere ersten Modelle sind meist beschämend simpel, doch sie zeigen bereits interessante Phänomene und illustrieren immerhin das Prinzip.

Reale Anwendungen, in denen etwas Wichtiges auf dem Spiel steht, würde man noch wesentlich genauer und aufwändiger untersuchen. Die erste Aufgabe ist dabei immer die Formulierung eines Modells. Die Begriffe und Methoden dazu führe ich hier exemplarisch vor.

Dieses Kapitel diskutiert soziale Konventionen und Dilemmata, in denen individuelle Nutzenmaximierung und gesellschaftliche Moral kollidieren. Im dritten Teil untersuchen wir evolutionäre Modelle, in denen Spieler bzw. Populationen ihr Spielverhalten über die Zeit schrittweise ändern.

Motivation und Überblick

Die Untersuchung konkreter Beispiele nutzt praktisch und theoretisch: In günstigen Fällen verstehen wir dadurch die betrachtete Anwendung und erkennen die Möglichkeiten und Einschränkungen unseres Modells. Dies sind Instanzen des zuvor erklärten Modellierungskreislaufs (A301).

Daraus ergeben sich meist Verallgemeinerungen und Verfeinerungen, die wiederum für die Weiterentwicklung der Theorie zuträglich sind. Wie immer gehört die ehrliche Ausführung praktischer Anwendungen untrennbar zusammen mit der sorgfältigen Entwicklung der Theorie.

Die evolutionäre Spieltheorie (EGT) begann in den 1970er Jahren, ist seither überall erfolgreich und bereichert die klassische Spieltheorie um dynamische Aspekte. Ich nenne drei populäre Lehrbücher:

📖 Herbert Gintis: *Game Theory Evolving*. PUP 2009

Josef Hofbauer, Karl Sigmund: *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge University Press 1998

William H. Sandholm: *Population Games and Evolutionary Dynamics – Economic Learning and Social Evolution*. MIT Press 2010

Koordination: links oder rechts?

G101

Das Spiel „Straßenverkehr“

A \ B	links	rechts
links	1, 1	0, 0
rechts	0, 0	1, 1

Warum fährt man auf den britischen Inseln auf der linken Straßenseite, im restlichen Kontinentaleuropa hingegen auf der rechten Straßenseite?

Beides sind gesellschaftliche Konventionen und weitgehend willkürlich. Die getroffene Wahl ist allein durch Tradition begründet. Klar ist jedoch: Jede der beiden Festlegungen ist besser als keine Übereinkunft! Dies sind Gleichgewichte: Abweichen lohnt sich nicht.

Ebenso: Schreibrichtung, Händeschütteln, Umarmung, Kuss, etc. Solcherart soziale Vereinbarungen umgeben uns überall!

Koordination: links oder rechts?

G102
Erläuterung

Heutzutage überwiegt weltweit der Rechtsverkehr, und Linksverkehr gilt hauptsächlich in früheren britischen Kolonien. Historisch scheint jedoch der Linksverkehr vorherrschend gewesen zu sein. Erklärungen gründen meist darauf, dass Menschen wohl mehrheitlich Rechtshänder:innen sind, und dies die Normen für den Straßenverkehr irgendwie beeinflusst.

Im Zuge der Französischen Revolution und der Napoleonischen Kriege stellten Frankreich und besiegte Länder Europas auf Rechtsverkehr um. Durch gegenseitige Verträge wurde dies bis 1927 weiter vereinheitlicht. Ausnahmen bildeten einige Nachfolgestaaten Österreich-Ungarns, die erst bis 1941 auf Rechtsverkehr umstellten, sowie Schweden bis 1967.

Fun fact: Fußgänger, Radler, Roller, Skater, etc. wenden die Konvention nicht streng an. Das führt manchmal zu Koordinierungsschwierigkeiten.

Fun fact: Das Gegenstück im Schienenverkehr ist die sog. *Fahrordnung*; sie entspricht in vielen Ländern nicht der Ordnung des Straßenverkehrs. Auch beliebige Mischungen verschiedener Konventionen sind denkbar. Einfache und allgemeine Lösungen sind jedoch fehlerresistenter.

Koordination: links oder rechts?

G103
Erläuterung

Die meisten Schriftsysteme haben eine bevorzugte Schreibrichtung. Das ist nicht zwingend erforderlich, doch eine Konvention vereinfacht! *Fun fact:* In den ältesten lateinischen Schriften ist die Schreibrichtung noch nicht festgelegt. So ist der *Lapis Niger* aus dem 6. Jh. v.u.Z. noch *bustrophedonal*, das heißt wörtlich ‘ochsenwendig’, also ‘hin und her wie ein Ochse beim Pflügen’, mit zeilenweise wechselnder Schreibrichtung.

In Kulturen, in denen sich Menschen zur Begrüßung die Hand reichen, bestimmt ganz genau solch eine soziale Norm die dazu gewählte Hand. Eine Kollision der gleichzeitig (!) ausgeführten Bewegung ist auch hier irritierend, wenn auch viel weniger dramatisch als im Straßenverkehr. Für Kinder ist die Konvention zunächst fremd, dann schnell erlernt.

Hierbei ist die vorherrschende Konvention, die rechte Hand zu geben. Eine Erklärung besagt, dass man durch Händeschütteln früher seine friedlichen Absichten bekundete: man kommt unbewaffnet. Etwa 85% bis 90% der Menschen sind Rechtshänder:innen und würden eine Waffe in der rechten Hand führen. Diese wurde daher zur Begrüßungshand.

Koordination: links oder rechts?

G104
Erläuterung

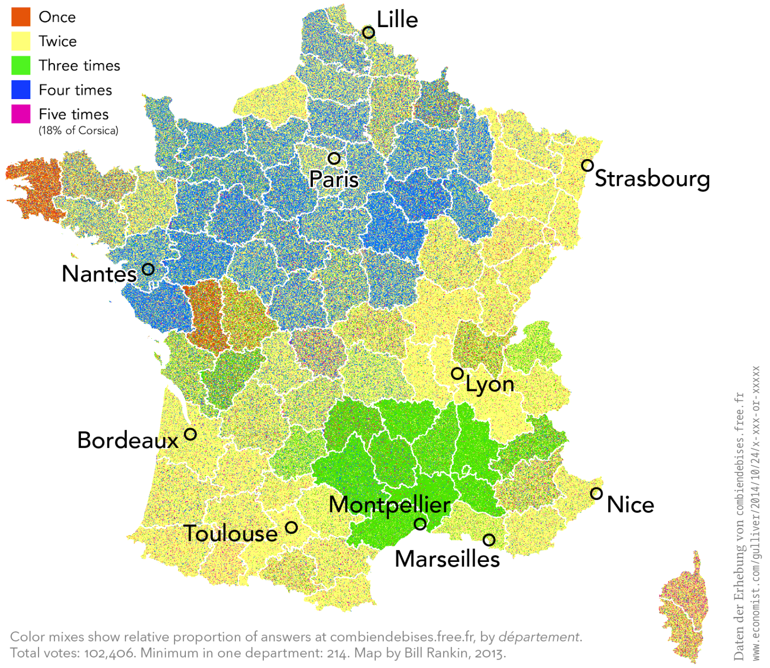
Aus Sicht der Spieltheorie wählt eine gesellschaftliche Norm eines von mehreren Nash–Gleichgewichten und legt es als Standard fest. Kein Akteur hat daraufhin einen Anreiz, einseitig davon abzuweichen, im Falle eines strikten Nach–Gleichgewichts sogar nur Nachteile.

Sobald eine solche Norm in Kraft ist, stabilisiert sie sich von selbst. Extrinsische, übergeordnete Sanktionen sind dazu nicht nötig, da sich jeder Akteur durch Abweichung selbst benachteiligt. Das ist der Zauber von (strikten) Nash–Gleichgewichten.

Abweichungen entstehen höchstens sporadisch durch Fehler: „Mein Rechts oder dein Rechts?“, ebenso „Das andere Links!“ Das erinnert uns daran, dass die Sprache selbst eine Konvention ist, insbesondere auch die willkürliche Zuordnung ihrer Bezeichnungen.

Fun Fact: Einige Menschen haben eine Links-Rechts-Schwäche. Ich kenne jedoch niemanden mit einer Oben-Unten-Schwäche. *Oben* und *unten* sind keine intersubjektiv sozialen Konventionen, sondern hier auf Erden eine objektiv physikalische Wirklichkeit.

Wie viele Küsschen zur Begrüßung? / *Combien de bises?*



Wie viele Küsschen zur Begrüßung? / *Combien de bises?*

Diese detaillierten Umfragedaten wurden seit 2007 online erhoben unter `combiendebises.free.fr` mit inzwischen über 200 000 Stimmen. Es handelt sich um ein schönes Beispiel von **Bürgerwissenschaft** / Citizen Science, `de.wikipedia.org/wiki/Citizen_Science`.

Wendet man sich dabei zuerst nach links oder zuerst nach rechts? Ungefähr eine Zwei-Drittel-Mehrheit dreht sich zuerst nach rechts. Das scheint also nicht so stark normiert, wie zu erwarten wäre. Die Lateralität kann wohl leicht spontan koordiniert werden.

Wenn Sie also im nächsten Semester als Erasmus-Student:in nach Toulouse oder Nantes gehen, dann wissen Sie, welche Konventionen Sie dort erwarten. Aktuell stimmt dies leider nicht mehr, denn unser gesellschaftliches Zusammenleben befindet sich in schnellem Wandel:

Diese Daten wurden lange vor der Covid19-Pandemie erhoben. Während der Pandemie mussten viele traditionelle Begrüßungsrituale pausieren. Es ist interessant zu sehen, wie diese wiederaufgegriffen werden und sich eventuell mit der Zeit weiterentwickeln und verschieben.

Wie viele Küsschen zur Begrüßung? / *Combien de bises?*

A \ B	1	2	3	4	5
1	1, 1	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0
2	0, 0	1, 1	0, 0	0, 0	0, 0
3	0, 0	0, 0	1, 1	0, 0	0, 0
4	0, 0	0, 0	0, 0	1, 1	0, 0
5	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	1, 1

Dies ist nur eines von vielen spieltheoretischen Modellen zur Erklärung. Hier kommt es uns nur auf die (strikten) Nash–Gleichgewichte an. Die soziale Konvention wählt (willkürlich) eines davon aus.

Wie viele Küsschen zur Begrüßung? / *Combien de bises?*

Dieses übertrieben einfache Modell erklärt die Beobachtung recht gut. Vorsicht: Gemessen / beobachtet / abgestimmt wurde das Verhalten, nicht die zugrundeliegende Gewinnfunktion des gezeigten Modells. Die konkreten Zahlen dieses Bimatrixspiels sind reine Spekulation.

Skurrile regionale Konventionen gibt es häufig, auch in Deutschland. *Anekdote:* An der Uni Stuttgart müssen die Leistungspunkte jedes Moduls durch 3 teilbar sein. Das ist so selbstverständlich, als hätte es Moses vom Berg heruntergebracht, auf der Rückseite der Zehn Gebote.

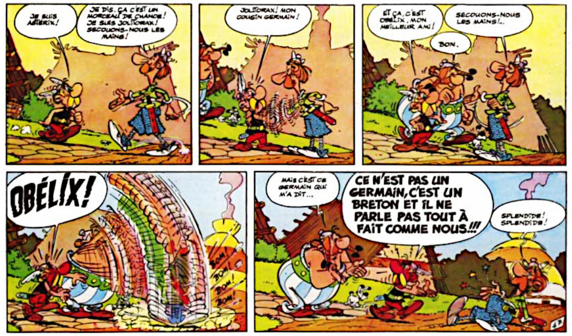
Das ist zugegeben keine soziale Übereinkunft, sondern wurde verordnet. Dass es eine willkürliche Konvention (zur Vereinfachung?) ist, zeigt ein Blick über den Tellerrand nach Karlsruhe: Dort ist diese Einschränkung unbekannt, und die Bemessung von Leistungspunkten flexibler.

Auch deshalb ist es gut, dass Sie verschiedene Unis und andere Länder kennenlernen. Erasmus und ähnliche Programme unterstützen Sie dazu nach Kräften. Was Sie im Ländle noch für naturgegeben hielten, erweist sich als menschengemacht und willkürlich – und geht auch anders!

Soziale Konventionen und interkulturelle Kompetenz

Auf Deutsch sagen wir sowohl *Händedruck* als auch *Händeschütteln*, auf Französich nur *se serrer la main*, auf Englisch nur *to shake hands*. Übersetzt wird nicht nur sprachlich, sondern immer auch interkulturell.

Soziale Konventionen und interkulturelle Kompetenz



Auf Französisch klingt „secouons-nous les mains“ vollkommen absurd. Das kann die deutsche Übersetzung nicht widergeben.

Auf English hingegen klingt „shake me by the hand“ irre. Auch „Let’s squeeze hands“ wäre lustig, läuft aber der Handlungslogik zuwider.

Soziale Konventionen und interkulturelle Kompetenz

Learning another language is not only
learning different words for the same things,
but learning another way to think about things.
Flora Lewis (1922–2002)

„Die spinnen, die Römer!“, urteilt Obelix und wiegt sich in der zutiefst gallischen Gewissheit, im Mittelpunkt der Welt zu stehen. Welch Cliché! Ironisch überspitzt zeichnen die Comics stereotype kulturelle Eigenarten, die humorvolle Darstellung fördert Reflektion und Selbst/Erkenntnis.

Die Bildungspläne der Länder formulieren explizit die interkulturelle Kompetenz als eines der Lernziele, insbesondere in den Sprachen, aber auch darüber hinaus im Gesamtkonzept schulischer Bildung. Interkulturelle Erziehung > Lernen > Kompetenz > Kommunikation

Wie beginnt und beendet man einen Brief? eine Email? eine digitale Kurznachricht wie WhatsApp oder ähnliche? Nach Eingewöhnung finden Sie das vielleicht selbstverständlich, doch das ist es ganz und gar nicht, insbesondere in ungewohnten Kontexten und fremden Sprachen!

Soziale Konventionen und interkulturelle Kompetenz

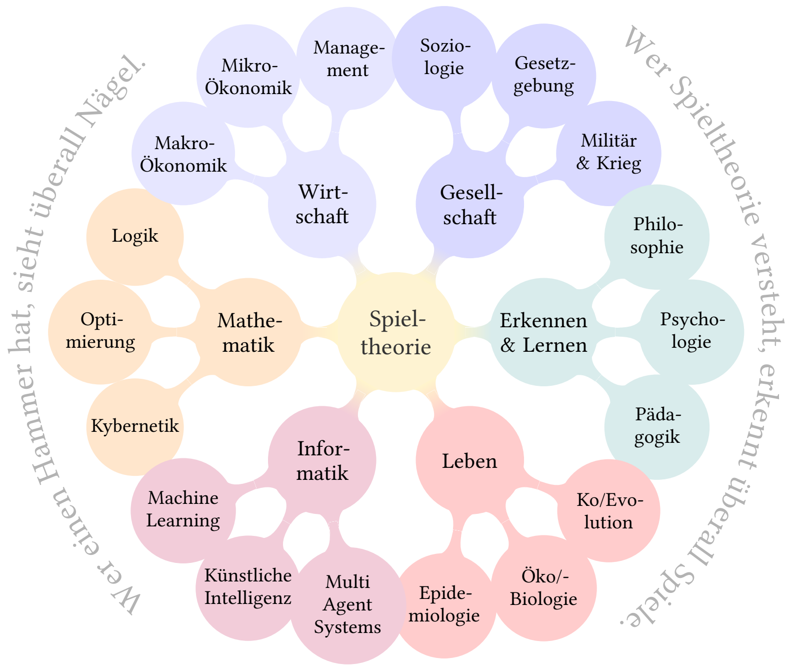
Das Spiel „Wie geht’s?“

A \ B	kurz	lang
kurz	1, 1	0, 0
lang	0, 0	1, 1

Die alltägliche Begrüßung kennt eine weitere erstaunliche Konvention:
Deutsch: „Wie geht’s?“ – „Gut, danke. Und selbst?“ – „Gut, muss ja.“
Englisch: „How are you?“ – „Fine, thanks. And you?“ – „I’m fine.“
Französisch: „Ça va?“ – „Oui, ça va. Et toi?“ – „Ça va, merci.“

Die konventionelle Höflichkeit sieht vor, sich nach dem Befinden des Gegenübers zu erkundigen, doch im Gegenzug nicht unangemessen ausführlich auf die offene Frage einzugehen. Selbst wo mehr zu sagen wäre, wird das Protokoll dazu nicht genutzt. Es ginge auch anders.

Wer interessiert sich für Spieltheorie?



Wer interessiert sich für Spieltheorie?

Diese Graphik macht vollmundige Ankündigungen und große Worte: Spieltheorie steht prominent in der Mitte und kommuniziert mit allem! Das ist nicht nur so dahergesagt, sondern soll auch erfüllt werden. Die versprochenen Querbezüge will ich nach und nach einlösen.

Auf der linken Seite dieser Graphik kennen wir bereits erste Beispiele, etwa aus Ökonomik, Mathematik, Informatik und ihren Teilgebieten. In diesem und im nächsten Kapitel möchte ich mir etwas Zeit nehmen und einige Illustrationen auf der rechten Seite wenigstens skizzieren.

Eine extren erfolgreiche Anwendung ist die evolutionäre Spieltheorie G3. Das ist seit den 1970er Jahren zu einem eigenständigen Gebiet gewachsen, das ich hier wenigstens kurz nennen will. Die Biologie nutzt systematisch die Spieltheorie, um Probleme der Evolutionstheorie zu lösen.

Für unser alltägliches Leben ebenso wichtig sind soziale Dilemmata G2. Auch das ist ein weites Forschungsfeld mit faszinierenden Anwendungen, die wir oft spüren und verstehen wollen. Ich begnüge mich mit ein paar Highlights und optionalen Hinweisen zur Vertiefung.

Zielkonflikte: Nash oder Pareto?

Das Gefangenendilemma

Clyde Bonnie	schweigen	gestehen
schweigen	−1 −1	0 −5
gestehen	−5 0	−4 −4

Dieses Spiel ist berühmt für seinen vermeintlich paradoxen Ausgang. Es illustriert das Grundproblem „Kooperation versus Egoismus“.

Nash–Gleichgewichte können das Pareto–Optimum verfehlen. Gut gewählte Mechanismen versuchen, beides zu versöhnen.

Dieses Beispiel reduziert den Konflikt auf das Wesentliche. In vielen realen Situationen steckt eine Variante davon!

Zielkonflikte: Nash oder Pareto?

Als erste Illustration nenne ich Beobachtungen, die zunächst paradox erscheinen: Was nützen dem Pfau seine Federn? Kann ein unnützer Doktortitel dennoch nützlich sein? Auf eine naiv-pessimistische Weise betrachtet handelt es sich um Inkarnationen des Gefangenendilemmas.

Besonders eindrücklich ist die Beobachtung bei Pfauen und hat Charles Darwin lange umgetrieben. Seine Erklärung ist die **sexuelle Selektion!** Hähne und Hennen befinden sich in einem gegenseitigen Dilemma. Keine:r kann einseitig das Verhalten ändern, denn dies wäre nachteilig.

Bei der jährlichen Pfauenkonferenz zu Toleranz und Antidiskriminierung beschließen alle einstimmig, Hähne nicht auf ihr Äußeres zu reduzieren. Das nützt herzlich wenig: Zur nächsten Paarungszeit sind alle guten Vorsätze schnell vergessen und Hennen denken nur an das Eine.

Pfauen handeln nicht bewusst-planend, sondern genetisch festgelegt. Meine verzerrte Darstellung dient nur der dramatischen Zuspitzung. Zum lehrreichen Kontrast schlage ich Bewerbung und Doktortitel vor. Die Struktur ist genau dieselbe. Unser Lachen verstummt.

Was nützen dem Pfau seine Federn?

Pfauen-Männchen haben ein prachtvolles Gefieder. Für das Überleben ist es leider hinderlich: Tarnung, Flucht, Energie, … Warum lohnen sich dennoch lange Federn? Wozu dienen sie? Angenommen, es gebe „fitte“ und „unfitte“ Pfauen-Männchen. Letztere werden öfter von Raubtieren gefressen etc. Sowohl fitte als auch unfitte können kurze oder lange Federn haben. Die mit langen Federn werden aufgrund der genannten Nachteile jedenfalls öfter gefressen.

Eine Population von Pfauen-Männchen könnte etwa so aussehen:

Pfauen	fit	unfit
kurze Federn	40%	20%
lange Federn	30%	10%

Das Pfauen-Weibchen sieht nicht die Fitness, sondern nur die Federn!

Aufgabe: Welche Strategie der Partnerwahl ist für sie vorteilhaft?

- Federlänge ignorieren: Trefferquote 70 : 30 (möglich)
- Kurze Federn bevorzugen: Trefferquote 40 : 20 (schlechter)
- Lange Federn bevorzugen: Trefferquote 30 : 10 (besser!)

☺ Trotz kurzfristiger Nachteile zahlen sich lange Federn dauerhaft aus!

▶ J.M. Smith: *Handicap principle.* `youtu.be/pOPmlInVej0`

Visuelles Ornament und sexuelle Selektion

Das auffällige Gefieder der Pfauen-Männchen wird als *visuelles Ornament* bezeichnet. Die lange Schleppe ist zwar hinderlich und vermindert das Flugvermögen, paradoxerweise kann es dennoch ein Indikator für genetische Fitness sein und Pfauen-Weibchen als Indiz für gesunden Nachwuchs dienen. (Siehe unser Zahlenbeispiel.) Wäre es nicht effizienter, Pfauen würden diesen Aufwand sparen und die Energie in bessere Überlebensstrategien stecken? Auf den ersten Blick besehen ja. Aber für ein Weibchen gibt es keine bessere Wahl: Es sieht nicht die tatsächliche Fitness, sondern nur das *Signal* der Federn. Auf Grundlage dieser unvollständigen Information muss es sich für die langen Federn entscheiden, selbst wenn das Überlebensnachteile mit sich bringt, auch für seinen eigenen Nachwuchs! Damit bleibt auch den Männchen keine Wahl, lange Federn werden zum Must-Have. Diese *sexuelle Selektion* ist ein Schlussstein in Darwins Evolutionstheorie.

Auch Menschen ist dieses Phänomen vertraut: Manche Männer beeindrucken Frauen, indem sie Geld verschwenden oder andere verrückte Dinge tun. Wäre dieses Verhalten insgesamt nachteilig, so würde man vermuten, dass es auf lange Sicht ausstirbt. Das ist jedoch nicht der Fall, da Frauen dieses Verhalten als Indikator für (gesellschaftlichen) Erfolg interpretieren können und eventuell bei der Partnerwahl belohnen. (All das funktioniert selbstverständlich auch umgekehrt…)

Dieses Phänomen wird *Handicap-Prinzip* genannt. Beispiele gibt es viele: Produktwerbung verschwendet Geld, wird aber vom Käufer belohnt. Manch akademischer Titel ist scheinbar Zeitverschwendung, wird aber vom Arbeitgeber honoriert. Auch Ihr Studium ist nur teilweise für Ihren späteren Beruf relevant, und dennoch wird diese Anstrengung meist belohnt. Zum Beispiel gelten Leistungen in Mathematik als zuverlässiger Indikator für intellektuelle Leistungsfähigkeit. Dazu diskutieren wir den Arbeitsmarkt, extrem vereinfacht, in folgendem Gedankenexperiment.

Kann ein unnützer Doktortitel doch nützlich sein?

Eine Personalchefin sucht für eine Stelle einen Ingenieur (m/w/d). Aus Erfahrung schätzt sie die allgemeine Bewerberlage wie folgt:

Bewerber	geeignet	ungeeignet
Diplom/Master	50%	25%
Promotion	20%	5%

Als individuelle Information hat sie zunächst nur den *Abschluss* laut Bewerbungsunterlagen. Die eigentlich interessante Zielgröße der *tatsächlichen Eignung* kennt sie hingegen nicht. Eine Promotion kostet Zeit und Mühe, bringt aber für *diese* Stelle keinen direkten Nutzen.

Aufgabe: Welche Strategie ist bei ihrer Auswahl vorteilhaft?

- Abschluss ignorieren: Trefferquote 70 : 30 (möglich)
- Master einstellen: Trefferquote 50 : 25 (schlechter)
- Doktor einstellen: Trefferquote 20 : 5 (besser!)

☺ Trotz aller Nachteile kann sich eine Promotion also auszahlen
… selbst wenn sie für die eigentliche Tätigkeit nicht relevant ist!

⚠ Ineffizienz ist der Preis für unvollständige Information.

Bedingte Wkt: Vorurteil oder Gerechtigkeit?

Wir untersuchen hier zwei simple, aber frappierende Beispiele: Federn und Doktortitel. Beide sind durchaus realistisch und handfeste Illustrationen für das Konzept der *bedingten Wahrscheinlichkeit*: Diese ist nicht nur eine schöne Theorie, sondern überall tägliche Praxis. Die Argumente in unserer fiktiven Bewerbungssituation mögen manche für ungerecht halten. In der Tat basieren Sie auf *Vorurteilen* der Arbeitgeberin – ein eher negativ besetzter Ausdruck, aber inhaltlich bedeutet es dasselbe wie bedingte Wahrscheinlichkeit: Sie nutzt ihre Erfahrung. Unter den gegebenen spärlichen Informationen ist das Vorurteil nützlicher als gar kein Urteil.

Das Grundproblem: Die primäre Zielgröße „Eignung“ ist nicht direkt zugänglich. Der sekundäre Faktor „Ornament“ ist eigentlich unwichtig, dafür aber leicht sichtbar. In Ermangelung primärer Information muss man sich mit sekundärer Information begnügen. Diese erhält dadurch eine größere Bedeutung als sie eigentlich haben sollte, und das wird als ineffizient oder ungerecht empfunden. Das ist der Preis für unvollständige Information!

Zur Beruhigung der Gemüter: Nichts hält die Arbeitgeberseite davon ab, über die erste grobe Vorinformation hinaus genauere Information zu gewinnen, zum Beispiel durch Gespräche, Tests, Assessment oder eine Probezeit. Genau das wird in der Praxis auch erfolgreich genutzt. Das ist der Vorteil, wenn man Information nicht nur *passiv* beobachtet, sondern *aktiv* herstellen kann.

Schließlich zur Ehrenrettung der Promotion, auch aus persönlicher Erfahrung: Viele Studierende empfinden große Begeisterung für ihr Fach. Dies kann sogar dazu führen, dass sie aus ehrlichem intrinsischem Interesse einer Frage auf den Grund gehen wollen und darüber sogar promovieren. Das wird durch die obigen, allzu kühl berechnenden Argumente nicht in Zweifel gezogen!

Was bedeuten „Moral“ und „Ethik“?

Eine **Moral** ist (1) ein Normensystem für das rechte Handeln von (2) vernunftbegabten Wesen mit (3) Anspruch auf Allgemeingültigkeit. Hierzu ist die **Ethik** die wissenschaftliche Beschäftigung mit der Moral.

Praxis, konkret	Theorie, abstrakt
Performanz	Kompetenz
(recht) erziehen	Pädagogik
(gut) unterrichten	Didaktik
(richtig) formulieren	Grammatik
(richtig) rechnen	Mathematik
(gut) wirtschaften	Ökonomik
(moralisch) handeln	Ethik

The aim of theory really is, to a great extent, that of systematically organizing past experience in such a way that the next generation […] will be able to absorb the essential aspects in as painless a way as possible.
Michael F. Atiyah (1929–2019), *How research is carried out*

Was bedeuten „Moral“ und „Ethik“?

„Moralisch“ bedeutet demnach so viel wie „sittlich“ oder „anständig“, jeweils relativ zu der zugrundeliegenden gesellschaftlichen Norm, und „ethisch“ bedeutet so viel wie „sittenwissenschaftlich“.

Moralen sind Normensysteme, Ethik ist die Wissenschaft hiervon, griech. ἔθος [éthos]: Charakter, Wesen, Eigenheit, Sitte, Gewohnheit.

Wir sehen hier die allgegenwärtige Dualität von Praxis und Theorie. Beide ergänzen sich und arbeiten zusammen wie linke und rechte Hand. πρᾶγμα [pragma], πρᾶξις [praxis]: Tat, Handlung, Verfahren, Umtriebe. ϑεωρία [theoria]: Betrachtung, Überlegung, Untersuchung, Erkenntnis.

Meine Liste ist eine praktische Sammlung von Theorien: Theorienpraxis. Ich denke nun über Theorien und ihre Analogien nach: Theorientheorie. Ich erinnere an einen frechen Sinnspruch zu Praxis – Theorie – Lehre:

Wer etwas kann, der tut es.
Wer es nicht kann, der erforscht es.
Wer auch das nicht kann, der lehrt es.
(anonyme Weisheit, eigene Interpretation)

Was bedeuten „Moral“ und „Ethik“?

Es ist sinnvoll, den Gegenstand und die Untersuchung desselben zu unterscheiden, und genau dazu verhelfen uns präzise Bezeichnungen. In der Umgangssprache geraten diese Begriffspaare oft durcheinander. Hier ein paar einfache doch eindrückliche Beispiele zur Illustration:

Ein moralisches Problem haben Sie, wenn Sie sich um die Richtigkeit Ihres Handelns sorgen. Ethische Probleme hingegen beschäftigen Sie, wenn Sie z.B. versuchen, Kant oder andere Moralphilosophen zu lesen.

Sie haben ein psychisches Problem, wenn Sie unter einer Phobie leiden. Hingegen untersuchen Sie ein psychologisches Problem, wenn Sie sich fragen, wie Phobien mit Kindheitserfahrungen zusammenhängen.

Sie haben ein soziales Problem, wenn Sie sich ausgegrenzt fühlen. Hingegen studieren Sie ein soziologisches Problem, wenn Sie versuchen, Ausgrenzung gesellschaftswissenschaftlich zu erklären.

Sie haben ein rechnerisches Problem, wenn Ihre konkret vorliegende Rechnung nicht aufgeht. Hingegen haben Sie ein mathematisches Problem, wenn Sie Mathematik und ihre Anwendungen erforschen.

Was bedeuten „Moral“ und „Ethik“?

Die Moral, also rechtes Handeln, basiert auf einem Menschenbild.

Vertrauen ist gut, Kontrolle ist besser.
Wladimir Iljitsch Lenin (1870–1924)

Engagement, Kooperation, Ehrlichkeit, Sorgfalt, etc. erfordern Mut und müssen belohnt werden.

Hier hilft Erfahrung, individuelle und gesellschaftliche.

An expert is a person who has made all the mistakes that can be made in a very narrow field.
Niels Bohr (1885–1962)

An expert is someone who knows some of the worst mistakes that can be made in his subject, and how to avoid them.
Werner Heisenberg (1901–1976)

Wie verhalten sich Ratio und Moral?

⚠ Rationales / ökonomisches / nutzenmaximierendes Verhalten kann moralisch oder unmoralisch sein, das hängt von den (Spiel-)Regeln ab und von den (gesellschaftlich vereinbarten) moralischen Normen.

Handle nur nach derjenigen Maxime, durch die du zugleich wollen kannst, dass sie ein allgemeines Gesetz werde.
Immanuel Kant (1724-1804), *Kritik der praktischen Vernunft* (1788)

Erst kommt das Fressen, dann die Moral.
Bertolt Brecht (1898-1956), *Dreigroschenoper* (1928)

🙂 Gleichsinnige, günstige Ausrichtung [*alignment*]: Ratio $=$ Moral

☹ Gegensinnige Ausrichtung [*misalignment*, Dilemma]: Ratio $\neq$ Moral

⚠ Unsere Gesellschaft braucht Nachhaltigkeit und Kooperation. Wir wollen und müssen solche Dilemmata erkennen und lösen.

Mechanismendesign: Individuelles Verhalten können wir nicht ändern, aber wir können versuchen, gute (Spiel-)Regeln zu implementieren.

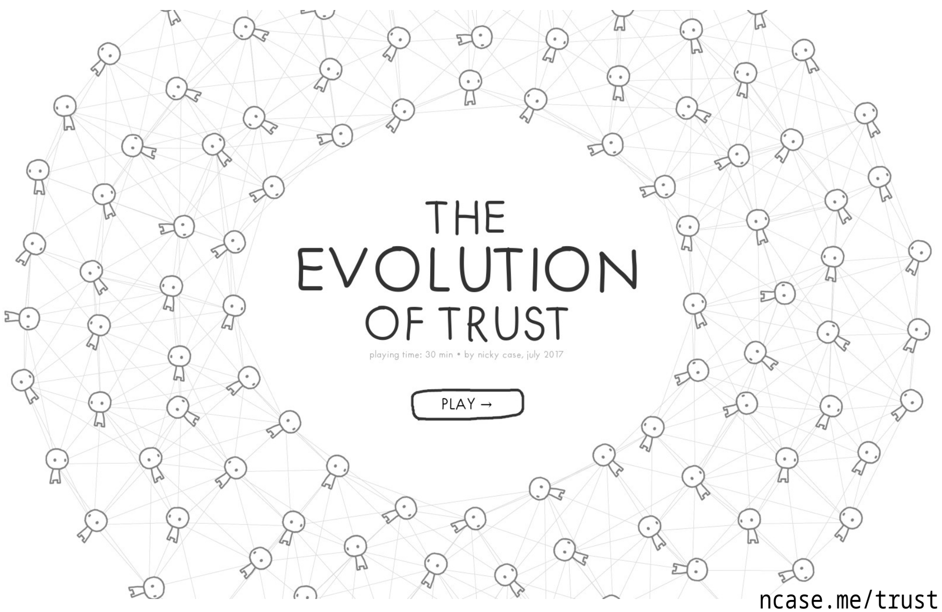
Wie verhalten sich Ratio und Moral?

Wie können wir soziale Dilemmata erkennen und eventuell auflösen? Zunächst einmal müssen wir Spiele verstehen und Muster erkennen: Die Spielregeln sind vorgegeben, welches Verhalten folgt daraus? Ist dieses Verhalten gesellschaftlich günstig / erwünscht / moralisch?

Sodann wollen wir geeignete Mechanismen / Spielregeln konstruieren. Das klingt zunächst abstrakt, ist aber absolut konkret. Wir tun es täglich: Wenn wir Prüfungen organisieren, wollen wir Ehrlichkeit belohnen und Betrug bestrafen. Ja, wir müssen dies geradezu, denn alles andere wäre naiv und bald zum Scheitern verurteilt. Das gilt allgemein, nicht nur für Prüfungsordnungen, sondern für alle Gesetze, Kontrollen, Anreize, etc.

Diese Überlegungen führen uns von simplen Spielen zu komplexeren Konflikten, von einfachen Modellen zu gesellschaftlichem Verhalten. Daher betone ich hier das Grundprinzip des Mechanismendesign: Individuelles Verhalten können wir nicht direkt ändern oder vorgeben, aber wir können versuchen, gute (Spiel-)Regeln zu implementieren, die das gewünschte Verhalten ermöglichen, nicht hindern, sondern fördern.

Wie verhalten sich Ratio und Moral?



ncase.me/trust

Wie verhalten sich Ratio und Moral?

The Evolution of Trust bietet hierzu eine wunderbare Illustration. Was ich Ihnen hier erzähle, können Sie dort spielerisch ausprobieren.

Es verbindet wunderschön die beiden Themen dieses Kapitels: soziale Dilemmata und die Evolution gesellschaftlichen Verhaltens.

Das Spiel basiert auf Robert Axelrods berühmten Büchern zum Thema: *The Evolution of Cooperation* (Basic Books 1984, revised 2006) und *The Complexity of Cooperation* (Princeton University Press 1997).

Untersucht wird die mögliche Kooperation im **Gefangenendilemma**. Bei einmaligem Spiel ist hier *rational* keine Kooperation möglich. Bei wiederholtem Spiel jedoch kann sich Kooperation lohnen.

Ob sich Kooperationsbereitschaft wirklich auszahlt und durchsetzt, hängt vom gesellschaftlichen Kontext ab, und dieser entwickelt sich. Daher der Titel dieser lehrreichen Simulation: *The Evolution of Trust*.

Wir werden die Frage in Kapitel K zu **wiederholten Spielen** erneut aufgreifen und mit verfeinerten Werkzeugen genauer untersuchen.

Das Restaurant-Paradox

Aufgabe: (0) Ein Ensemble von 20 Personen besucht ein Restaurant. Jede darf wählen: ein gutes Menu für 40€ oder ein exzellentes für 60€. Jede zahlt ihre eigene Rechnung und denkt: „10€ mehr wäre es mir wert, aber nicht 20€." Daher entscheidet sie sich für das Menu zu 40€.

(1) Das Ensemble beschließt *vor* dem Restaurant, eine gemeinsame Rechnung zu verlangen und alles durch 20 zu teilen. Was passiert?

Lösung: (1) Jede einzelne Person kostet ihr Upgrade nur noch 1€. Sie wählt also für sich das teurere Menu. Am Ende zahlt jede 60€.

Das Ergebnis ist anschaulich klar. Wir üben nochmal den Formalismus und all unsere Begriffe an diesem schönen übersichtlichen Beispiel, insbesondere Nash–Gleichgewichte, Dominanz und Symmetrie.

Bistromathics: Numbers written on restaurant checks within the confines of restaurants do not follow the same mathematical laws as numbers written on any other pieces of paper in any other parts of the Universe.
Douglas Adams (1952–2001), *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*

Das Restaurant-Paradox

Aufgabe: Formulieren Sie explizit beide Spiele $u, u' : S \to \mathbb{R}^{20}$. Finden Sie alle Gleichgewichte, Dominanzen und Symmetrien.

Lösung: (0) Die Spielermenge ist $I = \{1, 2, \dots, 20\}$. Jeder Spieler $i \in I$ hat die Strategiemenge $S_i = \{\, 0{=}\text{gut},\ 1{=}\text{exzellent}\,\}$, gemeinsam also $S = \prod_{i \in I} S_i = \{0, 1\}^I$. Die Nutzenfunktion ist laut Aufgabenstellung

$$u_i : S \to \mathbb{R} : s \mapsto 10 s_i - 20 s_i = -10 s_i .$$

Für jeden Spieler ist die Strategie 0 strikt dominant. Somit ist $s = (0, 0, \dots, 0)$ das einzige Nash–Gleichgewicht (und zudem strikt).

(1) Im zweiten Fall kommt es zur Kopplung durch die Nutzenfunktion

$$u_i' : S \to \mathbb{R} : s \mapsto 10 s_i - \tfrac{1}{20} \sum_{j=1}^{20} 20 s_j = 10 s_i - \sum_{j=1}^{20} s_j .$$

Für jeden Spieler ist die Strategie 1 strikt dominant. Somit ist $s = (1, 1, \dots, 1)$ das einzige Nash–Gleichgewicht (und zudem strikt).

Beide Spiele sind symmetrisch, also $\mathrm{Sym}(u) = \mathrm{Sym}(u') = \mathrm{Sym}(I)$. Das zweite ähnelt dem **Gefangenendilemma**, hier für n Spieler.

Soziales Dilemma vs unsichtbare Hand

Der schottische Ökonom **Adam Smith** (1723–1790) prägte in seinem Hauptwerk *Der Wohlstand der Nationen* (1776) die vielzitierte Idee der „unsichtbaren Hand des Marktes": Sie sorge dafür, so seine Hoffnung, dass individueller Egoismus automatisch zu kollektiver Wohlfahrt führe.

Bei einem **sozialen Dilemma** jedoch wirkt Egoismus genau umgekehrt: Individuell rationales Verhalten führt für alle zu einer Verschlechterung. Das widerlegt allzu naive Hoffnungen oder kühne Verallgemeinerungen: Die „unsichtbare Hand" mag manchmal wirken, aber keineswegs immer.

Ein **soziales Dilemma** liegt vor, wenn individuell rationales Verhalten ein suboptimales / ineffizientes Gesamtergebnis erzeugt, also die Akteure insgesamt schlechter dastehen als durch Absprache möglich wäre, etwa durch sozial kontrollierte Übereinkunft oder einen einklagbaren Vertrag.

Soziolog:innen sprechen von **sozialen Fallen** oder **paradoxen Effekten**: Individuell rationales Verhalten kann zu irrationalen Ergebnissen führen. Naive Analysen verfallen häufig dem Irrtum, unvernünftige Ergebnisse auf unvernünftiges Handeln zurückzuführen. Das Gegenteil ist der Fall.

Soziales Dilemma vs Mechanismendesign

Das Ziel des **Mechanismendesign** (engl. *mechanism design*) ist die Schaffung eines Rahmens, der das gewünschte Verhalten ermöglicht. Die invividuelle Entscheidungsfreiheit kann / soll / darf dabei nicht direkt eingeschränkt werden, allein der gemeinsame Rahmen wird gestaltet.

Ist unser Ziel, möglichst sparsam zu sein, so ist Variante 0 ratsam. Wenn unser Ziel hingegen ist, ein rauschendes Fest zu feiern, bei dem wir nicht aufs Geld schauen, dann ist Variante 1 besser. Die Wahl des Mechanismus schafft einen Rahmen, in dem das gewünschte Verhalten rational ist.

Solidarität versus Unvernunft. Gegenseitige Hilfe ist nicht nur eine urmenschliche Regung, sondern kann durchaus individuell rational sein, zum eigenen Vorteil, etwa bei Versicherungen oder Katastrophenhilfe. Meist geht dies über die spontane Hilfe im konkreten Einzelfall hinaus, dazu soll sie als verlässliche, allgemeine Zusicherung formuliert werden.

Bei **Fehlkonstruktion** kann Solidarität jedoch falsche Anreize setzen, im Extremfall fördert sie (global gesehen) unvernünftiges Verhalten: Tendenz zu unnötigen Risiken oder achtloser Verschwendung.

Aufgabe: Nennen, formalisieren und analysieren Sie weitere Beispiele, die ähnlich strukturiert sind und zu sozialen Dilemmata führen können: (1) zunächst auf lokaler Ebene, etwa in einer Wohngemeinschaft, (2) auf nationaler bzw. europäischer Ebene, (3) schließlich global. Welche Mechanismen wären jeweils denkbar, hilfreich, praktikabel? Das führt schnell zu aktuellen und brisanten politischen Fragen!

Skizze: Hier eine Auswahl möglicher Beispiele, die Liste ist endlos.

(1) Sollte eine WG einen gemeinsamen Getränkekühlschrank haben? Ist die WG-Regel „Jeder spült den Abwasch nach Bedarf“ sinnvoll? Sollte unser öffentlicher Personennahverkehr (ÖPNV) gratis sein?

⚠ Solche Fragen werden meist nur qualitativ-vage diskutiert. Wenn Sie dies genauer ausführen wollen, quantitativ als mathematisches Modell, so müssen Sie zuerst die zu Grunde gelegte Nutzenfunktion klären. Beim ÖPNV können zwar höhere Kosten entstehen, doch dafür die Umwelt geschont werden. Die genaue Zielfunktion ist entscheidend! Die Politik hörte diese Vorlesung und versuchte das Deutschlandticket.

(2) Sollte das Studium (vollkommen oder weitgehend) gratis sein? Sollten wir unsere Finanzämter mit mehr Personal ausstatten? Wem nützt eine private Kranken- oder eine Bürgerversicherung? Schafft die Währungsunion Anreize zu achtloser Haushaltsführung? Gilt dies ebenso für den innerdeutschen Länderfinanzausgleich?

(3) Wie können wir den menschengemachten Klimawandel bremsen? Wie kann bzw. sollte Emissionsrechtehandel institutionalisiert werden? Wie können wir Rodung und Abholzung der Urwälder verhindern? Wie können wir die Überfischung der Weltmeere verhindern? Wie können wir die Ressourcen unserer Welt schützen?

⚠ Damit zielen wir auf aktuelle, zentrale Probleme der Menschheit. Eine mathematische Analyse scheint möglich, etwa durch Entwicklung geeigneter Mechanismen, eine praktikable Lösung ist hingegen schwer. Es genügt leider nicht, eine vernünftige Lösung auszuklügeln, sie muss auch akzeptiert und umgesetzt werden. Gute Ideen scheitern leider oft. Das von allen gemeinsam gewünschte Ziel wird dem Egoismus geopfert.

Nach obigem Muster funktionieren viele soziale **Konfliktsituationen** wie Schwarzfahren, Versicherungs-/Sozialbetrug, Steuerhinterziehung.

Der individuelle Nutzen ist klein, der allgemeine Schaden ist groß, doch durch die große Zahl der Betroffenen wird der Schaden verteilt und dem einzelnen nur zu einem kleinen Bruchteil in Rechnung gestellt.

Das zynische Motto: **Gewinne privatisieren, Verluste sozialisieren.** Das ist insbesondere bei Bankenkrisen und -rettungen hochaktuell. Auch die wiederkehrenden Eurokrisen folgen einer ähnlichen Struktur.

Die **Politik der hohen Schornsteine** verteilt Abgase möglichst weit, die Emissionen insgesamt werden jedoch nicht reduziert, im Gegenteil! Jeder Akteur zielt nicht auf das Gesamtergebnis, sondern seinen Vorteil.

Dagegen scheint kein Kraut gewachsen, oft versagen die Mechanismen der sozialen Kontrolle, Religion, Moral, Ethik. Genau hierzu formulierte Immanuel Kant in seiner Ethik den **kategorischen Imperativ**:
„Handle nur nach derjenigen Maxime, durch die du zugleich wollen kannst, dass sie ein allgemeines Gesetz werde.“

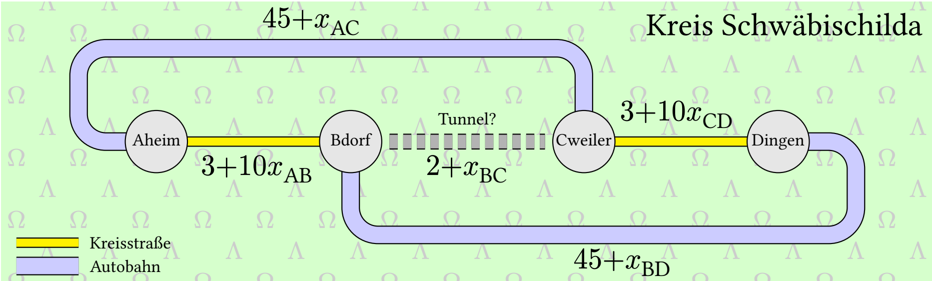
Das Problem heißt **Tragik der Allmende** [*tragedy of the commons*]. Eine *Allmende* ist gemeinschaftlich genutztes Eigentum, zum Beispiel landwirtschaftliche Nutzfläche oder Weidefläche. Allmenden sind heute noch beispielsweise im Schwarzwald und im Alpenraum verbreitet.

Commoners sind Bauern oder Hirten, die gemeinsam Kroneigentum als Allmende bewirtschaften. Der Begriff *tragedy of the commons* wurde 1833 geprägt vom Ökonomen William Forster Lloyd (1794–1852) und 1968 vom Ökologen Garrett Hardin (1915–2003) in *Science* ausgeführt.

Akute Beispiele für die **Ausbeutung natürlicher Ressourcen** sind: Überfischung der Weltmeere, Raubbau an Regenwäldern, Plünderung von Wildtierbeständen, Verschmutzung der Atmosphäre, anthropogene Klimaveränderung. Gemeines Muster: Individueller kurzfristiger Vorteil (Gier) schlägt gemeinsamen langfristigen Nutzen (Nachhaltigkeit).

Die **Spieltheorie** kann solche Mechanismen zunächst *erklären*, immerhin. Die Menschheit wird beweisen müssen, ob sie diesen unvermeidlichen Konflikten gewachsen ist und rechtzeitig wirksame *Lösungen* findet.

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess



Täglich pendeln 6000 Autofahrer von Aheim nach Dingen, entweder über Bdorf (ABD) oder über Cweiler (ACD). Angegeben sind die Fahrzeiten in Minuten, wobei $x_{ij} \in [0,6]$ jeweils die Autozahl in Tausend ist. **Aufgabe:**

(0) Erklären Sie dies explizit als strategisches Spiel mit 6000 Spielern.

(1) Finden Sie alle Gleichgewichte: Welcher Verkehrsfluss stellt sich ein?
Lösung: Aufteilung 3000 : 3000, Fahrzeit jeweils 81 Minuten.

(2) Zur Verkürzung der Fahrzeit plant der Landkreis einen Autobahntunnel von Bdorf nach Cweiler. Hilft das oder nicht? Rechnen Sie es aus!
Lösung: Aufteilung 2000 : 2000 : 2000, Fahrzeit jeweils 90 Minuten!

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

Oft hört man pauschal: „Mehr Straßen garantieren schneller ankommen.“ Das kann helfen, aber keineswegs immer: „Zusätzliche Straßen können Staus verstärken.“ Auch das hört man so pauschal. Schauen wir hin!

Unser Beispiel ist zugegeben konstruiert, dafür ist es besonders einfach. Es soll zunächst illustrieren, dass das Phänomen wirklich möglich ist. Echte Problemfälle muss man wesentlich genauer untersuchen.

Die Zahlen sind so angelegt, dass wir die Lösungen leicht überblicken: In beiden Fällen teilen sich die Verkehrsströme jeweils in gleiche Teile.

Unglaublich: Der Tunnel erhöht die Fahrzeit von 81 auf 90 Minuten! Ohne Absprache gibt es kein Zurück: Nur wenn sich genügend Fahrer für die beiden alten Strecken ABD und ACD entschließen, verringert sich der Stau auf den Landstraßen, und alle sind insgesamt schneller.

Könnten die Pendler nicht ihren alten Strecken folgen und den Tunnel ignorieren? Sicher, doch jeden lockt die Abkürzung mit 68 Minuten. Das Verrückte ist: Jeder einzelne handelt rational! So stellt sich ein neues Gleichgewicht ein, das paradoxerweise für alle schlechter ist.

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

Lösung: (0) Spielermenge sei $I = \{1, 2, \dots, 6000\}$. Die Strategiemenge für Fahrer $i \in I$ ist $S_i = \{\mathrm{ABD}, \mathrm{ACD}\}$ bzw. mit Tunnel $S_i' = S_i \cup \{\mathrm{ABCD}\}$. Die Verkehrszählung (in Tsd) ergibt $x_{AC}, x_{BD}, x_{BC}, x_{AB}, x_{CD} : S \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
x_{AC}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i = \mathrm{ACD} \,\} &&= x_1 \\
x_{BD}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i = \mathrm{ABD} \,\} &&= x_2 \\
x_{BC}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i = \mathrm{ABCD} \,\} &&= x_3 \\
x_{AB}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i \in \{\mathrm{ABD}, \mathrm{ABCD}\} \,\} &&= x_2 + x_3 \\
x_{CD}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i \in \{\mathrm{ACD}, \mathrm{ABCD}\} \,\} &&= x_1 + x_3
\end{aligned}$$

Hieraus berechnen wie die Fahrzeiten, und diese sind zu minimieren:

$$-u_i : S \to \mathbb{R} : s \mapsto \begin{cases} 48 + x_{AC}(s) + 10x_{CD}(s) & \text{für } s_i = \mathrm{ACD}, \\ 48 + 10x_{AB}(s) + x_{BD}(s) & \text{für } s_i = \mathrm{ABD}, \\ 8 + 10x_{AB}(s) + x_{BC}(s) + 10x_{CD}(s) & \text{für } s_i = \mathrm{ABCD}. \end{cases}$$

☹ Die Strategiemenge $S = S_1 \times \dots \times S_{6000}$ ist astronomisch groß!
☺ Das Spiel u ist spieler-symmetrisch: $\mathrm{Sym}(u) = \mathrm{Sym}(I)$. Statt des Strategievektors $s \in S$ genügen uns die Häufigkeiten der Strategien!

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

(1) Angenommen, x_1 Tsd wählen ACD, x_2 Tsd wählen ABD.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 = 6, \quad x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\
z_1(x_1, x_2) &= [45 + x_1] + [3 + 10x_1] \\
z_2(x_1, x_2) &= [3 + 10x_2] + [45 + x_2]
\end{aligned}$$

Gleichgewicht herrscht für $z_1 = z_2$, also $x_1 = x_2 = 3$ (LGS, Symmetrie). In der Ausgangssituation ist die Fahrzeit somit $z_1 = z_2 = 81$ Minuten.

(2) Angenommen, x_3 Tsd fahren ABCD durch den neu eröffneten Tunnel.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 = 6, \quad x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \\
z_1(x_1, x_2, x_3) &= [45 + x_1] + [3 + 10(x_1 + x_3)] \\
z_2(x_1, x_2, x_3) &= [3 + 10(x_2 + x_3)] + [45 + x_2] \\
z_3(x_1, x_2, x_3) &= [3 + 10(x_2 + x_3)] + [2 + x_3] + [3 + 10(x_1 + x_3)]
\end{aligned}$$

Gleichgewicht herrscht für $z_1 = z_2 = z_3$, also $x_1 = x_2 = x_3 = 2$ (LGS). Mit Tunnel erhöht sich die Fahrzeit auf $z_1 = z_2 = z_3 = 90$ Minuten!

☺ Spieler-Symmetrie hilft! Die Nash–Gleichgewichte sind strikt!
Zur Vereinfachung betrachten wir x_i als kontinuierlich (*non-atomic*).

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

G213

Das erstaunliche Ergebnis wird als **Braess–Paradox** bezeichnet: Eine zusätzliche Handlungsoption kann die Situation für alle verschlechtern!

Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung

Von D. BRAESS, Münster [1])

Eingegangen am 28. März 1968

Zusammenfassung: Für die Straßenverkehrsplanung möchte man den Verkehrsfluß auf den einzelnen Straßen des Netzes abschätzen, wenn die Zahl der Fahrzeuge bekannt ist, die zwischen den einzelnen Punkten des Straßennetzes verkehren. Welche Wege am günstigsten sind, hängt nun nicht nur von der Beschaffenheit der Straße ab, sondern auch von der Verkehrsdichte. Es ergeben sich nicht immer optimale Fahrzeiten, wenn jeder Fahrer nur für sich den günstigsten Weg heraussucht. In einigen Fällen kann sich durch Erweiterung des Netzes der Verkehrsfluß sogar so umlagern, daß größere Fahrzeiten erforderlich werden.

Dietrich Braess promovierte 1964 an der Universität Hamburg in theoretischer Kernphysik. Er habilitierte 1968 in Mathematik an der Universität Münster. Dort war er Professor, anschließend an der Ruhr-Universität Bochum. Seine Forschungsschwerpunkte lagen in der Numerik partieller Differentialgleichungen, insbesondere elliptische PDE, Approximationstheorie, Mehrgitterverfahren und Finite Elemente.

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

G214 Erläuterung

📖 *Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung*, Unternehmensforschung Operations Research 12 (1968), 258–268. Ein Scan der Originalarbeit und eine umfangreiche Literatursammlung finden Sie auf der Homepage von Dietrich Braess, `homepage.ruhr-uni-bochum.de/Dietrich.Braess/#paradox`.

Die Rechnung illustriert wunderbar die Idee des Nash–Gleichgewichts! Die Definition ist einfach, aber die Interpretation bedarf einiger Übung und zahlreicher Beispiele, darunter auch solch verblüffende Paradoxien. Die genaue Analyse löst dieses Scheinparadox allerdings schnell auf. Bei genauerem Hinsehen ähnelt auch dies dem Gefangenendilemma.

Ist es nur eine psychologische Falle? Eine Charakterschwäche im Sinne von Gier schlägt Geist? Nicht nur, jeder einzelne handelt, wie gesagt, vollkommen rational. Dabei optimieren alle Teilnehmer rein individuell. Die vertrackte Situation provoziert dieses Verhalten, es ist das Resultat individueller Optimierung ohne bindende Absprache oder Koordinierung.

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

G215 Erläuterung

Aufgabe: Entwickeln Sie ein Verkehrsleitsystem, das jedem Fahrer am Ortsausgang von Aheim und Bdorf zufällig eine Route zuweist, sodass die erwartete Fahrzeit für alle gleich ist. Welches Minimum können Sie so erreichen? Hierzu braucht es eine unabhängige Instanz! Muss dieses System Strafen androhen? Erreicht es ein korreliertes Gleichgewicht?

Mehr Straßen erhöhen automatisch den Verkehrsfluss? Nicht immer! Die Planung vor dem Straßenbau ist wichtig, wie oben gesehen, und manchmal erfordert optimaler Betrieb eine aktive zentrale Steuerung

Ähnlich drastisches Beispiel: In manchen Städten ignorieren Fahrer:innen die Ampeln, um sich „noch schnell" über die Kreuzung zu schummeln. In der Rushhour führt dies zum katastrophalen Gegenteil: Stau!

Das kann übrigens auch für Geschwindigkeitsbeschränkungen gelten: Individuelle Disziplin kann allseitigen Nutzen erzeugen. So weit, so klar. Das ist allerdings unpopulär und schwer zu vermitteln: Preis der Freiheit.

Freie Fahrt für freie Bürger! forderte der ADAC 1974 zu Zeiten der Ölpreiskrise, und später die Leipziger Montagsdemonstration 1989.

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

G216 Erläuterung

Die **Verkehrsströmungslehre** (engl. *traffic flow theory and control*) ist ein ausgedehntes Gebiet und alltäglich nahezu überall relevant. Je nach Trägersystem (Straße, Bahn, Flugzeug, etc) nutzt sie spezielle mathematische Modelle und Methoden: Optimierung (kombinatorisch, numerisch, Simulation) und Stochastik (Warteschlangentheorie) und schließlich Spieltheorie (individuell vs zentral gesteuert).

Den Straßenverkehr kann man dabei kontinuierlich modellieren analog zur Fluiddynamik mit Differentialgleichungen, oder auch mit zellulären Automaten wie im Nagel–Schreckenberg–(NaSch–)Modell, siehe `de.wikipedia.org/wiki/Nagel-Schreckenberg-Modell`.

Seit den 1990er Jahren entwickeln sich spieltheoretische Ansätze zu Psychologie und Rationalität, ökonomischen Anreizen, usw. Die Computersimulation wird ergänzt durch Experimente mit menschlichen Teilnehmern wie in der experimentellen Ökonomik. Einen Querschnitt zeigt der Symposiumsband von Schreckenberg, Selten: *Human Behaviour and Traffic Networks*, Springer 2004. Aktuell stellen Elektromobilität und ÖPNV neue Herausforderungen.

Das Braess–Paradox... mitten in Stuttgart!

Das Braess–Paradox ist ebenso simpel wie verblüffend: *Hinzufügen* einer Verbindung kann alle Fahrzeiten *erhöhen* und den Gesamtfluss *senken*. Ist es eine rein akademische Konstruktion, zwar lehrreich, aber fiktiv? Oder lässt sich das Phänomen auch in der Wirklichkeit beobachten? Der erste wissenschaftlich dokumentierte Fall stammt aus Stuttgart!

Das Beispiel von Braess stammt aus dem Frühjahr 1968 und mag konstruiert scheinen, läßt sich aber durch die Erfahrung untermauern. Ende 1968 wurde in Stuttgart das Straßensystem, das am Schloßplatz entstanden war, eröffnet und von den Benützern nicht in der geplanten Weise angenommen. Ein Verkehrschaos zu den Spitzenzeiten war die Folge. Es wurde durch Sperrung der unteren Königstraße, also genau den im Beispiel betrachteten Fall, behoben.

📖 Walter Knödel: *Graphentheoretische Methoden und ihre Anwendungen.* Springer 1969. Dieses Lehrbuch behandelt kürzeste Wege und maximale Flüsse. Auf den Seiten 57–59 wird kurz und prägnant die Problematik der de/zentralen Optimierung erläutert, das Braess–Paradox mathematisch erklärt und mit dem damals aktuellen Beispiel aus Stuttgart illustriert.

Das Braess–Paradox... mitten in Stuttgart!

Ein Punkt aber verdient, besonders hervorgehoben zu werden. Überläßt man den individuellen Verkehr sich selbst, dann wird jeder Verkehrsteilnehmer versuchen, die für ihn persönlich günstigsten Wege zu benützen. Ob das im Interesse der Allgemeinheit liegt oder ob er durch Benützen ohnehin schon überlasteter Straßenzüge einer großen Anzahl anderer Verkehrsteilnehmer Schaden zufügt, wird ihm gleichgültig sein oder sich sogar seiner Kenntnis entziehen. Man könnte daher vermuten, daß in einem sich selbst überlassenen individuellen Verkehr sich stets einige wenige Vorteile auf Kosten vieler Verkehrsteilnehmer verschaffen können. Diese Annahme ist nicht in jedem Fall richtig. Es kann der für die Allgemeinheit noch schlimmere Fall eintreten, daß jeder Verkehrsteilnehmer auf dem für ihn optimalen Weg fährt und dabei länger braucht als in einem total gelenkten Verkehr im gleichen Netz, wo es nicht gestattet ist, die optimalen Wege zu benützen, sondern Umwege erzwungen werden. Wir belegen diese Behauptung durch ein Beispiel von Braess [12]. Quintessenz des Beispiels ist: Auf den optimalen Wegen blockieren sich die Verkehrsteilnehmer gegenseitig. Wird der Verkehr durch Zwangsmaßnahmen (Sperren einer Straße) entflochten, dann müssen die Verkehrsteilnehmer, die diese Straße nicht benützen dürfen, Umwege in Kauf nehmen. Sie kommen aber auf den Umwegen rascher voran als vorher auf den optimalen Wegen.

Das Braess–Paradox... mitten in Stuttgart!

Prof. Knödel war und bleibt eine Ikone der Universität Stuttgart. Deshalb male ich die Geschichte mit etwas Lokalkolorit aus.

Walter Knödel (1926–2018) studierte an der Universität Wien Mathematik und Physik. Er promovierte dort 1948 in Zahlentheorie und habilitierte sich 1953. Ab 1961 war er Professor für Informatik an der Universität Stuttgart, damals hieß es „Lehrstuhl für Instrumentelle Mathematik“.

Die 1960er Jahre waren geprägt von Studien- und Verwaltungsreformen. Studierende verdammten den „Muff von 1000 Jahren unter den Talaren“ und forderten „Drittelparität“. Die TH Stuttgart nannte sich seit 1965 Universität und gab sich eine neue Grundordnung: Die drei alten großen Fakultäten wurden aufgelöst und 18 neue Fachbereiche geschaffen.

Prof. Knödel schrieb 1968 ein Memorandum zur Gründung eines eigenen Fachbereichs für Computerwissenschaften an der Universität Stuttgart und initiierte 1970 den Studiengang Informatik. Aus seinem Lehrstuhl entstand 1971 das Institut für Informatik. Der Fachbereich 19 Informatik wurde 1975 eingerichtet und Prof. Knödel zum Gründungsdekan gewählt.

Das Braess–Paradox... mitten in Stuttgart!

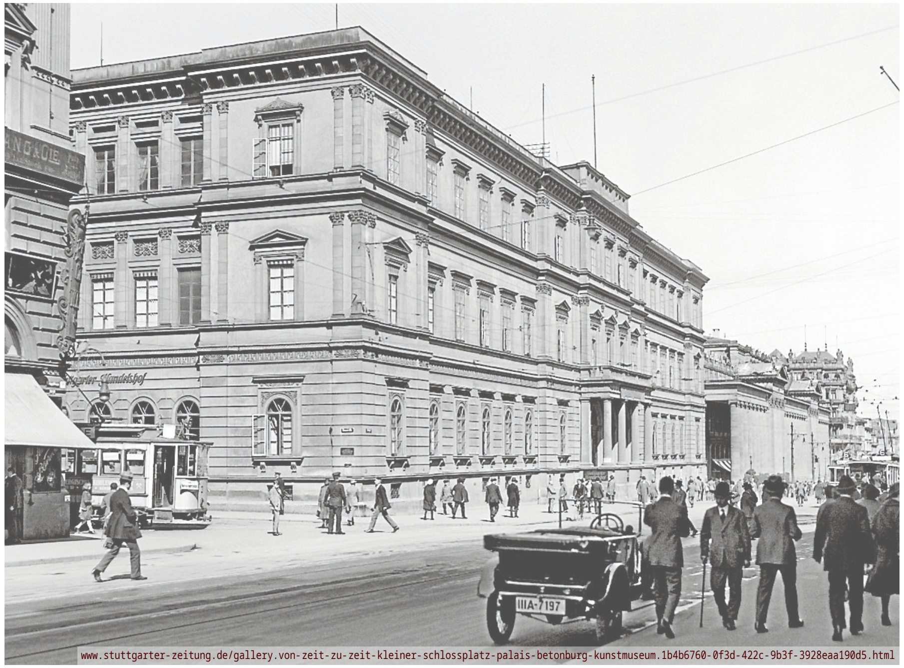
Die Süddeutsche Zeitung schreibt in ihrer Ausgabe vom 19. Mai 2010: „So waren die Verkehrsplaner in Stuttgart 1969 überrascht, als nach großen Investitionen ins Straßennetz rund um den Schlossplatz der Verkehrsfluss ins Stocken kam. Die Situation besserte sich erst, nachdem ein Teil der Königsstraße zur Fußgängerzone erklärt wurde.“

Weitere solche Beispiele werden aus New York und Seoul berichtet; das Problem sei unter Experten inzwischen hinlänglich bekannt, so heißt es. Straßenplaner nutzen geeignete Messdaten und Simulationssoftware zur Optimierung, insbesondere zur frühzeitigen Erkennung und Vermeidung paradoxer Verkehrsflüsse. Denken hilft! Mathematik wirkt!

Es gibt **physikalische Entsprechungen** mit Federn in der Mechanik oder elektrischen Strömen in einer Schaltung, siehe Joel Cohen, Paul Horowitz: *Paradoxical behaviour of mechanical and electrical networks*, Nature 352 (1991), 699–701, online `www.nature.com/articles/352699a0`.

Das Phänomen ist also kein psychologischer Taschenspielertrick. Kommt das Paradox auch in realen Verkehrssituationen vor? Ja!

Das Braess–Paradox... mitten in Stuttgart!



Das Braess–Paradox... mitten in Stuttgart!

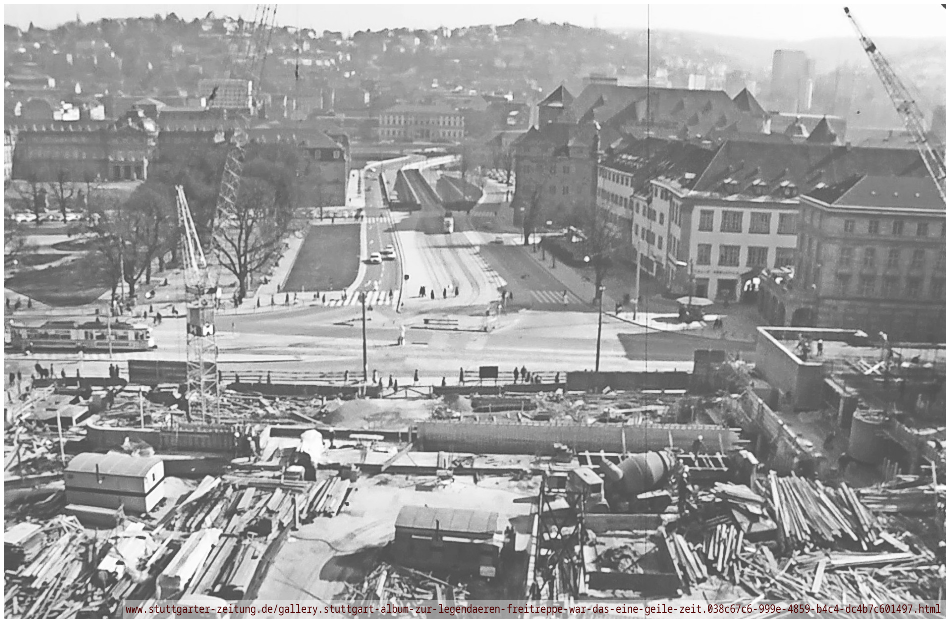
Stuttgarter Verkehrsprojekte sind stets ambitioniert sowie politisch und emotional aufgeladen. Insbesondere der Kleine Schlossplatz gilt als Wahrzeichen für die Irrtümer der Stadtplanung.

Am 04.12.1968 eröffnete Oberbürgermeister Arnulf Klett (1905–1974) den Kleinen Schlossplatz: drei Jahre Bauzeit und 100 Millionen DMark für 6000 Quadratmeter. Als OB war Klett für die Stadtplanung nach dem Zweiten Weltkrieg verantwortlich. Weite Bevölkerungsteile bevorzugten einen Wiederaufbau beschädigter Gebäude, doch Klett wollte den Grundriss der City neu ordnen. Kritiker:innen werfen ihm daher vor, die wenigen Reste des alten Stuttgart voreilig abgerissen zu haben, so etwa 1963 das Kronprinzenpalais, am Platz des heutigen Kunstmuseum Stuttgart.

Die Planungen beginnen sofort nach dem Krieg: Im Sommer 1945 gründet sich an der TH eine Arbeitsgruppe Stadtplanung und Verkehr, 1947 beauftragt Klett einen Generalbebauungsplan. Erklärtes Ziel ist die autofreundliche Stadt. Jahrelang streitet man über das Kronprinzenpalais aus dem Jahre 1854. Bahnhofserbauer Paul Bonatz (1877–1956) plädierte vergeblich für den Erhalt dieses „wichtigen Teils des Stadtgedächtnisses“. Stadt und Land einigen sich 1956 schließlich auf die autogerechte Tunnellösung. Bis Jahr 1963 steht die Ruine am Rande des Schlossplatzes, dann weicht der historische Bau dem Planiedurchstich – unter großen Protesten in der Bevölkerung.

Bei Eröffnung der „Betonburg“ jubeln Stadthonoratioren und Fachwelt, doch bald schon steht der Kleine Schlossplatz für Drogen, Schmutz und Tristesse. Die Situation bessert sich langsam, als die Königstraße 1977 zur Fußgängerzone wird, dann vor allem als 1993 zur Leichtathletik-WM eine 30 Meter breite Freitreppe von der Königstraße empor den Kleinen Schlossplatz spürbar belebt. Abrissbagger kommen erneut 2002 und schaffen Platz für das lang ersehnte Kunstmuseum. Photosammlung: `zeitsprung-stuttgart.de/einzelansicht-zeitsprung/schlossplatz-005`

Das Braess–Paradox... mitten in Stuttgart!

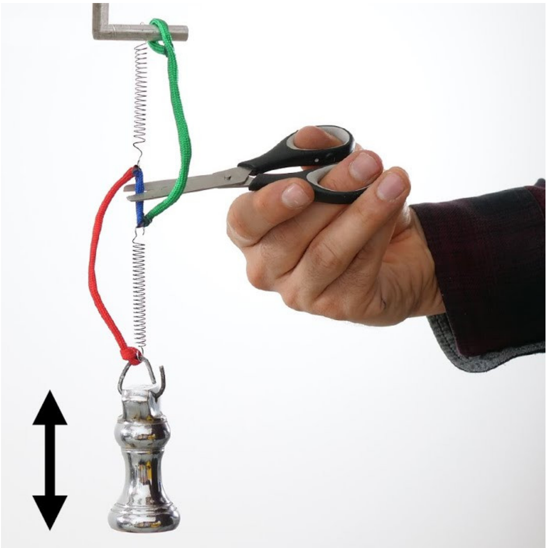


1968 Bauarbeiten für den Kleinen Schlossplatz, Blick auf die Planie

Das Braess–Paradox... mitten in Stuttgart!

Bis 1978 fuhr die Straßenbahn „Strampe“ über den Schlossplatz.

Paradoxe Systeme in der Physik



▶ Steve Mould: *The Spring Paradox*, `youtu.be/Cg73j3QYRJc` (9min)
▶ Up and Atom: *Braess's Paradox*, `youtu.be/cALezV_Fwi0` (17min)

Paradoxe Systeme in der Physik

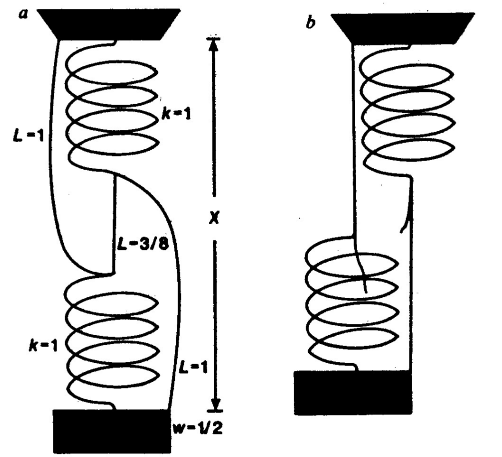


FIG. 1 Mechanical network. Springs have zero unstretched length and spring constant $k=1$. Strings are inelastic. The string that links the two springs has length $\frac{3}{8}$ m. Both safety strings have length 1 m. The weight exerts a force of $\frac{1}{2}$ N. *a*, In the initial network, both safety strings are limp, and the distance X from support to weight is $1\frac{3}{8}$ m. *b*, After the linking string is cut, the weight is higher at equilibrium; the new distance from support to weight is $1\frac{1}{4}$ m.

Nature 352 (1991), 699–701, `www.nature.com/articles/352699a0`

Paradoxe Systeme in der Physik

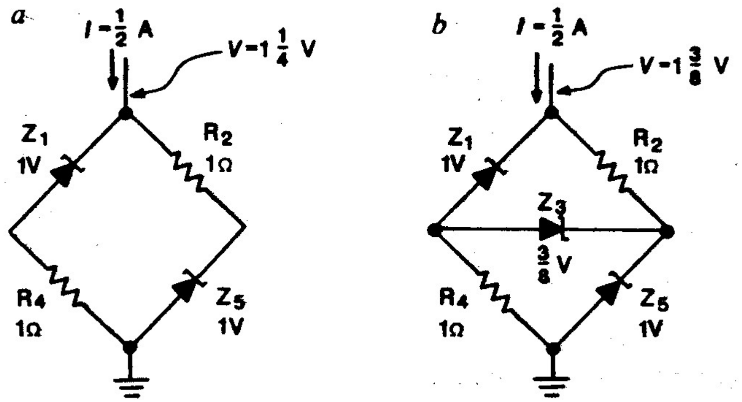


FIG. 3 Electrical network of ideal components. *a*, Initially, current flows symmetrically through left and right branches, and the voltage drop from source to ground is $1\frac{1}{4}$ V. *b*, When a $\frac{3}{8}$-V Zener diode is introduced across the network, the current through the 1-V Zener diodes drops to zero and all current flows through the 1-Ω resistors and the $\frac{3}{8}$-V Zener diode, producing a larger voltage drop from source to ground of $1\frac{3}{8}$ V.

Nature 352 (1991), 699–701, `www.nature.com/articles/352699a0`

Paradoxe Systeme in der Physik

Aufgabe: Führen Sie das oben skizzierte mechanische System aus und rechnen Sie das behauptete paradoxe Verhalten sorgfältig nach! Wenn Sie es praktisch-konkret mögen, können Sie es sogar bauen.

Projekt: Wie können Sie dies für Wasser realisieren? oder Wärme? Lässt es sich ebenso einfach in einem Experiment demonstrieren? Welche physikalischen Eigenschaften ermöglichen das Paradox?

Projekt: Er/Finden Sie (potentiell) paradoxe Systeme in Ihrem Alltag:

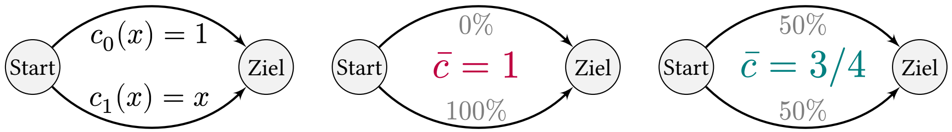
- Nutzung von Aufzügen und Treppen: Warteschlangen?
- In der Mensa: Essensausgabe? Geschirrrückgabe?
- Anmeldung zu Übungsgruppen, Seminaren, etc.

Vermutlich müssen Sie hier geeignete Annahmen / Parameter wählen. Selbst wenn die so konstruierten Beispiele etwas unrealistisch anmuten, so illustrieren sie doch immerhin die Möglichkeit paradoxen Verhaltens.

Pigous Beispiel: schockierend einfach

„*[The individual is] led by an invisible hand to promote an end which was no part of his intention.*“ (Adam Smith, *The Wealth of Nations*, 1776)

„*Selfish behavior need not produce a socially optimal outcome.*“ Extremes Beispiel von A. C. Pigou, *The Economics of Welfare*, 1920:



Zwei Routen stehen zur Verfügung: Auf der oberen ist die Fahrzeit immer 1 Stunde, auf der unteren x Stunden bei Auslastung $x \in [0, 1]$.

Aufgabe: Was ist das Gleichgewicht bei (1) individueller Optimierung vs (2) zentraler Optimierung durch ein verbindliches Verkehrsleitsystem?

Lösung: (1) Alle wählen den unteren Weg, die Fahrzeit ist 1 Stunde. (2) Jeweils die Hälfte wird (zufällig) nach oben oder unten geleitet. Niemand ist schlechter dran als in (1). Die Hälfte der Fahrer benötigt nur noch 1/2 Stunde. Die mittlere Fahrzeit sinkt von 1 auf 3/4 Stunde!

Pigous Beispiel: schockierend einfach

Erfahrungsgemäß akzeptieren Autofahrer:innen nur widerwillig etwaige Eingriffe in ihre Entscheidungsfreiheit, siehe *Freie Fahrt für freie Bürger!* Dennoch kann eine zentrale Koordinierung – mit bindender Wirkung! – die Effizienz für alle steigern, in günstigen Fällen wie oben skizziert.

Solche Fragen stellen sich zum Beispiel auch in digitalen Netzwerken: Datenpakete werden von ihrem Start zum gewünschten Ziel geleitet, und auch hier entstehen Kosten und Wartezeiten. Die Koordination kann zentral organisiert werden, oder aber den Akteuren überlassen werden.

Somit erweisen sich diese paradoxen Beispiele nicht als exotisch, wie es zunächst scheinen mag, sondern eröffnen ein faszinierendes Thema. Sowohl auf unseren „Datenautobahnen“ als auch auf realen Straßen lohnt es, effiziente Mechanismen zu suchen und zu implementieren.

Zum Vergleich und als Kontrast: In der klassischen Logistik transportiert ein Unternehmen die Waren und optimiert dazu zentral alle Abläufe. Das ist bereits eine hohe (mathematische) Kunst. Durch dezentral und egoistisch handelnde Akteure entstehen völlig neue Herausforderungen!

Wie hoch ist der Preis der Anarchie?

Im obigen Braess–Beispiel wächst die Fahrzeit von 81 auf 90 Minuten, im viel einfacheren Pigou–Beispiel von 3/4 auf 1 Stunde. Gibt es noch schlimmere Beispiele? Wie groß kann die Ineffizienz maximal werden?

Gefragt und beantwortet haben dies Tim Roughgarden und Éva Tardos: *How bad is selfish routing?* JACM 49 (2002) 236-259. Ihr Ergebnis ist ebenso elegant wie überraschend und erhielt 2012 den Gödel–Preis:

Satz G2A: Preis der Anarchie, Roughgarden–Tardos 2002

Gegeben sei ein Straßennetz. Die Fahrzeit für jede einzelne Strecke e sei affin-linear, also von der Form $c_e(x) = a_e + b_e x_e$ bei Auslastung x_e.
Sei C die Fahrzeit bei kollektiver Optimierung und I die Fahrzeit bei individueller Optimierung. Dann gilt die Schranke $I/C \le 4/3$.

Bestenfalls gibt es keine Diskrepanz, schlimmstensfalls führt Egoismus zu 33% Ineffizienz. Diese Schranke hängt von den Kostenfunktionen ab, siehe *Routing Games*, Kapitel 18 in *Algorithmic Game Theory*, CUP 2007; online frei zugänglich unter `www.timroughgarden.org`.

Wie hoch ist der Preis der Anarchie?

Arthur Cecil Pigou (1877–1959) war ein britischer Ökonom. In seinem berühmtesten Werk *The Economics of Welfare* (1920) entwickelt er das Konzept der Externalitäten seines Lehrers Alfred Marshall (1842–1924).

Es ist erstaunlich, dass es in Satz G2A eine universelle Schranke gibt! Sogar noch erstaunlicher ist, dass dies nahezu einhundert Jahre lang niemandem aufgefallen ist, ja dass nicht einmal die Frage gestellt wurde. Dementsprechend hat das Ergebnis ein neues Forschungsgebiet eröffnet.

Individuelles versus zentrales Routing ist ein aktuelles Forschungsthema in der Schnittmenge von Verkehrsplanung, Spieltheorie und Algorithmik. Zu diesem Themenkomplex gibt es ein unterhaltsam-informatives Interview mit Tim Roughgarden, `youtu.be/w7ddIRFfqM` (80min).

Among many recognitions, Tim has received the Gödel Prize for his research in computational game theory, a field that resides in the intersection of two disciplines: economics and computer science. We talk to Tim about one of the central insights of that work: the Prize of Anarchy, which quantifies the loss in efficiency of a system due to selfish behaviour of its agents.

Potentialspiele: Alle ziehen am selben Strang.

Sei $u : S_I \to R_I$ ein Spiel. Spieler $i \in I$ hat die Auszahlung $u_i : S_I \to R_i$. Können wir diese Funktionen durch ein $\Phi : S_I \to R$ zusammenfassen? Wann ist unser Spiel $u = (u_1, \dots, u_n)$ äquivalent zum Spiel $(\Phi, \dots, \Phi)$?

(o) Wir nennen $\Phi : S_I \to R$ ein **Ordnungspotential** für u, falls

$$u_i(x_i; s_{-i}) \le_i u_i(y_i; s_{-i}) \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(x_i; s_{-i}) \le \Phi(y_i; s_{-i})$$

für jeden Spieler $i \in I$ und alle Aktionen $x_i, y_i \in S_i$ bei festem $s_{-i} \in S_{-i}$.

(a) Wir betrachten $u : S_I \to \mathbb{R}_I$. Ein **affines Potential** $\Phi : S_I \to \mathbb{R}$ erfüllt

$$u_i(x_i; s_{-i}) - u_i(y_i; s_{-i}) = w_i\big[\Phi(x_i; s_{-i}) - \Phi(y_i; s_{-i})\big] \text{ mit } w_i \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Demnach existieren Integrationskonstanten $c_i : S_{-i} \to \mathbb{R}$, sodass

$$u_i(x_i; s_{-i}) = w_i\, \Phi(x_i; s_{-i}) + c_i(s_{-i}).$$

(e) Für ein **exaktes Potential** verlangen wir zudem $w_i = 1$ für alle $i \in I$. Somit ist das Spiel u ordnungs- / affin / exakt äquivalent zu $(\Phi, \dots, \Phi)$ gemäß unserer Definition E241, und wir nennen u ein **Potentialspiel**.

Potentialspiele: Alle ziehen am selben Strang.

☺ Potentiale sind eine besondere Symmetrie, nicht notwendig in den Spielern, sondern in den Auszahlungen: *Alle ziehen am selben Strang.*

Sei speziell $R = R_i = \mathbb{R}$. Für ein **affines Potential** verlangen wir

$$u_i(x_i; s_{-i}) - u_i(y_i; s_{-i}) = w_i\big[\Phi(x_i; s_{-i}) - \Phi(y_i; s_{-i})\big] \text{ mit } w_i \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Dies können wir geschickt umformulieren: Demnach hängt die Differenz

$$c_i(x_i; s_{-i}) := u_i(x_i; s_{-i}) - w_i \Phi(x_i; s_{-i})$$

nicht von x_i ab, also $u_i(x_i; s_{-i}) = w_i \Phi(x_i; s_{-i}) + c_i(s_{-i})$.

Übung: Ist Φ ein affines Potential zu u, so ist $\bar\Phi$ ein affines Potential zu $\bar u$. Diese Fortsetzung ist die Hauptmotivation, affine Potential zu betrachten.

Vage Analogie zu Potentialen in der Physik: Wir betrachten ein stetiges Vektorfeld $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Eine diff'bare Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist ein Potential / Stammfunktion, falls $f_i = \partial F / \partial x_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. In Potentialspielen ist die Konstruktion zwar offenkundig verschieden, doch in beiden Fälen vereinfachen wir n Funktionen zu einer einzigen.

Potentialspiele haben reine Nash–Gleichgewichte.

Satz G2B: Rosenthal, 1973

Sei $u : S_I = \prod_{i \in I} \to \prod_{i \in I} R_i = R_I$ ein Spiel mit Potential $\Phi : S_I \to R$. Dann ist u äquivalent zu $v = (\Phi)_{i \in I}$, also $\mathrm{NE}(u) = \mathrm{NE}(v) \supseteq \operatorname{Arg\,max} \Phi$.

(1) Ist S_I endlich, oder S_I kompakt und Φ stetig, so gilt $\operatorname{Arg\,max} \Phi \ne \emptyset$.

(2) Allgemein gilt $\mathrm{NE}(v) = \{\, s \in S_I \mid \forall i \in I : s_i \in \operatorname{Arg\,max}_{x_i \in S_i} \Phi(x_i; s_{-i}) \,\}$

☺ Nicht alle Spiele haben *reine* Nash–Gleichgewichte, denken Sie an *Matching Pennies* oder *Schere-Stein-Papier*. Allgemeine Existenzsätze hierzu sind entsprechend selten. Das beste Werkzeug sind Potentiale!

📖 Robert W. Rosenthal: *A Class of Games Possessing Pure-Strategy Nash Equilibria.* International Journal of Game Theory 2 (1973) 65–67.

Dov Monderer, Lloyd S. Shapley: *Potential Games.* Games and Economic Behavior 14 (1996) 124–143. Jedes Potentialspiel hat gute Eigenschaften, etwa die *finite improvement property*: Wenn die Spieler reihum ihre Strategien verbessern, so endet dies nach endlich vielen Schritten. Monderer und Shapley zeigen eine geeignete Umkehrung!

Potentialspiele haben reine Nash–Gleichgewichte.

Aufgabe: Welches unserer beiden Restaurantspiele erlaubt ein Potential?

$$\begin{aligned} u &: S = \{0,1\}^I \to \mathbb{R}^I : u_i(s) = -10 s_i \\ u' &: S = \{0,1\}^I \to \mathbb{R}^I : u'_i(s) = 10 s_i - \textstyle\sum_{j \in I} s_j \end{aligned}$$

Lösung: (1) Für u ist $\Phi(s) = -10 \sum_{i \in I} s_i$ ein (exaktes) Potential:

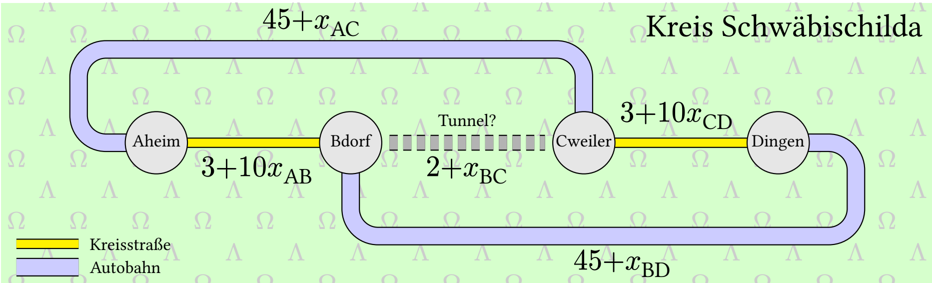
$$u_i(s) = \Phi(s) + c_i(s_{-i}) \quad \text{mit} \quad c_i(s_{-i}) = 10 \textstyle\sum_{j \ne i} s_j$$

Hier gilt $\mathrm{NE}(u) = \{(0, \dots, 0)\} = \operatorname{Arg\,max} \Phi$.

(2) Für u' ist $\Phi'(s) = 9 \sum_{i \in I} s_i$ ein (exaktes) Potential:

$$u'_i(s) = \Phi'(s) + c'_i(s_{-i}) \quad \text{mit} \quad c'_i(s_{-i}) = -10 \textstyle\sum_{j \ne i} s_j$$

Hier gilt $\mathrm{NE}(u') = \{(1, \dots, 1)\} = \operatorname{Arg\,max} \Phi'$. Dazu fragen Monderer und Shapley: *This raises the natural question about the economic content (or interpretation) of Φ: What do the firms try to jointly maximize? We do not have an answer to this question. However, it is clear that the mere existence of a potential function helps us (and the players) to better analyze the game.*



Satz G2c: Jedes Auslastungsspiel hat ein Potential. Rosenthal, 1973

Sei I die Menge der Spieler und R die Menge der Ressourcen.

Für jeden Spieler $i \in I$ sei $S_i \subseteq \mathfrak{P}(R)$ seine Strategiemenge.
Zu jeder Ressource $r \in R$ seien $c_r(x) \in \mathbb{R}$ die Kosten bei x Nutzern.

Im Strategiebündel $s \in S_I$ nutzen $x_r(s) \in \mathbb{N}$ Spieler die Ressource r.
Spieler $i \in I$ hat demnach die Gesamtkosten $u_i(s) := \sum_{r \in R} c_r(x_r(s))$.

Dieses **Auslastungsspiel** $u : S_I \to \mathbb{R}_I$ hat ein Potential $\Phi : S_I \to \mathbb{R}$:
Für $\Phi(s) := \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{x_r(s)} c_r(k)$ gilt $u_i(s_i; s_{-i}) = \Phi(s_i; s_{-i}) - \Phi(s_{-i})$.

🙂 Für jedes Auslastungsspiel können wir daher sein Potential und obige Techniken nutzen. Insbesondere existieren *reine* Nash–Gleichgewichte.

⚠ Die *Formel* ist symmetrisch in allen Spielern, die *Funktion* nicht ganz: Genau dann ist u symmetrisch unter Vertauschung $i \leftrightarrow j$, wenn $S_i = S_j$. So können wir leicht die Symmetriegruppe $\mathrm{Sym}(u) \le \mathrm{Sym}(I)$ ablesen.

Aufgabe: Formulieren Sie obige Braess–Beispiele als Auslastungsspiele.

Lösung: Die Spielermenge ist $I = \{1, \dots, 6000\}$. Jeder Spieler $i \in I$ hat dieselbe Strategiemenge $S_i = \{\{\mathrm{AB}, \mathrm{BD}\}, \{\mathrm{AC}, \mathrm{CD}\}, \{\mathrm{AB}, \mathrm{BC}, \mathrm{BD}\}\}$
Die Ressourcen sind hier die Straßen $R = \{\mathrm{AB}, \mathrm{AC}, \mathrm{BD}, \mathrm{CD}, \mathrm{BC}\}$
Wir zählen $x_r(s) := \sharp\{i \in I \mid r \in s_i\}/1000$ in Einheiten von Tausend.
Die Kosten, hier also Auszahlungen mit negativem Vorzeichen, sind

$$\begin{aligned} c_{\mathrm{AB}}(x) &= c_{\mathrm{CD}}(x) = 3 + 10x, \\ c_{\mathrm{AC}}(x) &= c_{\mathrm{BC}}(x) = 45 + x, \\ c_{\mathrm{BC}}(x) &= 2 + x. \end{aligned}$$

🙂 Die einheitliche Sprech- und Schreibweise schafft Klarheit!

Damit illustriert unser Verkehrsbeispiel wunderbar Auslastungsspiele, und diese wiederum illustrieren Potentialspiele. Monderer und Shapley zeigen umgekehrt, dass jedes Potentialspiel sich so darstellen lässt.

Alle Spieler $i \in I$ optimieren hier das gemeinsame Potential $s \mapsto \Phi(s)$. Die Interpretation von Φ ist im Allgemeinen wenig intuitiv-anschaulich, hingegen spüren wir sofort die begrifflich-technische Vereinfachung. Doch Vorsicht: Bei jeder eigenen Verbesserung $(s_i; s_{-i}) \to (s_i'; s_{-i})$ verursacht der Spieler i für andere Spieler eventuell Zusatzkosten, sozusagen als Kollateralschaden, man spricht von **Externalitäten**.

Damit kommen wir auf die Tragik der Allmende zurück: Als **Externalität** oder **externen Effekt** bezeichnet man in der Ökonomik jede Auswirkung einer Handlung, die nicht den Entscheidungsträger selbst trifft, sondern einen anderen. Als typisches Beispiel sind Umweltschäden ein (negativer) externer Effekt. Als Abhilfe versucht man die Kosten zu **internalisieren**, etwa durch gerechte CO2-Steuer oder funktionierenden Emissionshandel. Das folgt dem Verursacherprinzip: „Wer's verbockt, muss es auslöffeln."

Dagegen der perfide Trick: „Profite privatisieren, Verluste sozialisieren." Erfahrungsgemäß ist es schwierig, Effizienz und Fairness zu vereinen. Damit beides gelingt, müssen verzerrte Kostenfaktoren vermieden und die Kostenwahrheit durch Internalisierung hergestellt werden.

Wir spüren die Problematik täglich hautnah bei externen Klimakosten; hier heißen Externalitäten wohlklingend „ökologischer Fußabdruck." Bei Lebensmitteln sind sie am höchsten für Fleischprodukte, gefolgt von Milchprodukten, und am niedrigsten für pflanzliche Biolebensmittel.

Als verzerrende Faktoren sind die Umweltkosten weit unzureichend in die Produkte eingepreist. Moralische Bewertung genügt nicht, so das Argument, wir brauchen stattdessen korrekte monetäre Bewertung, die den Verbrauch reguliert und letztlich die Umweltschäden senkt.

Bei fairer und rationaler Betrachtung leuchtet das wohl fast jedem ein. Das Thema Essen ist allerdings hochemotional, ebenso Autofahren vs ÖPNV, Wirtschaftswachstum vs Ressourcenverbrauch, … kurzum in all unseren alltäglichen Konsumentscheidungen. Vernunft bleibt schwierig!

Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra

Räuber-Beute-Modell: $\begin{cases} \dot{x}_1 = \quad \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 & =: f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2 & =: f_2(x_1, x_2) \end{cases}$

Größe	Bedeutung	Beispiel
$t \ge 0$	Zeit	Jahre
$x_1(t) \ge 0$	Anzahl der Beutetiere	Hasen/Mio
$x_2(t) \ge 0$	Anzahl der Raubtiere	Luchse/Tsd
$\alpha_1 > 0$	Reproduktionsrate der Beute (ohne Räuber)	0.8/Jahr
$\beta_1 > 0$	Sterberate der Beute pro Räuber	0.4/Jahr
$\alpha_2 > 0$	Sterberate der Räuber (ohne Beute)	0.6/Jahr
$\beta_2 > 0$	Reproduktionsrate der Räuber pro Beute	0.2/Jahr

Dieses DGSystem beschreibt die Entwicklung großer Räube-Beute-Populationen. Beispiel: Fangaufzeichnungen der Hudson Bay Company zeigten über 90 Jahre einen 9jährigen Zyklus. Formuliert und untersucht wurde dieses Modell 1925 von Alfred Lotka und unabhängig 1926 von Vito Volterra, seither ist es das Paradebeispiel einer Populationsdynamik in der Biologie. Die quadratischen Terme entsprechen dem Massenwirkungsgesetz chemischer Reaktionen. Epidemien folgen einer ähnlichen Dynamik, man untersucht und nutzt dies für Maßnahmen. Viele Systeme mit nicht-linearen Rückkopplungen gehorchen ähnlichen Gleichungen.

Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra

Räuber-Beute-Modell: $\begin{cases} \dot{x}_1 = \quad 0.8\, x_1 - 0.4\, x_1 x_2 & =: f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -0.6\, x_2 + 0.2\, x_1 x_2 & =: f_2(x_1, x_2) \end{cases}$

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie den Zustandsraum und das Vektorfeld. Existiert zu jedem Startwert $x(0) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung $t \mapsto x(t)$? eindeutig?

(2) Was folgt aus $x_2(0) = 0$? aus $x_1(0) = 0$? Wo liegen Fixpunkte? Skizzieren Sie Lösungen zu $x_1(0) = 3$ und $x_2(0) = 2.0, 1.8, \dots, 0.0$.

(3) Ist das System linear? Wie / Können Sie Lösungen berechnen?

(4) Linearisieren & lösen Sie für kleine Störungen des Gleichgewichts. Wie lange dauert eine Periode? Wie verlässlich ist das lineare Modell?

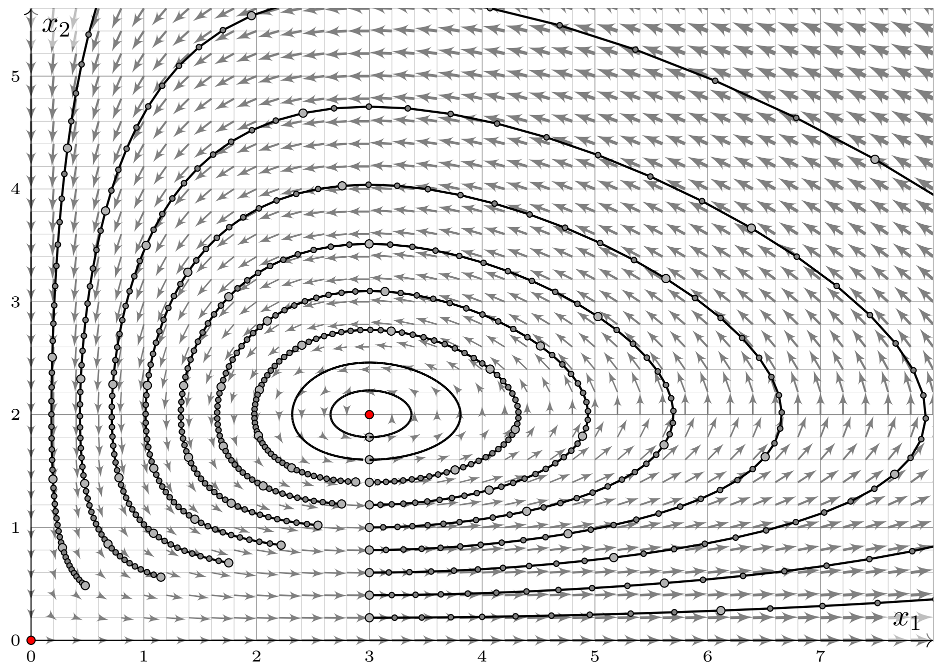
(5) Das Potential $\Phi := \beta_2 x_1 - \alpha_2 \ln x_1 + \beta_1 x_2 - \alpha_1 \ln x_2$ erfüllt $\dot{\Phi} = 0$.

(6) Erste Lotka–Volterra–Regel, Periodizität der Lösungen:
Beide Populationsgrößen entwickeln sich periodisch.

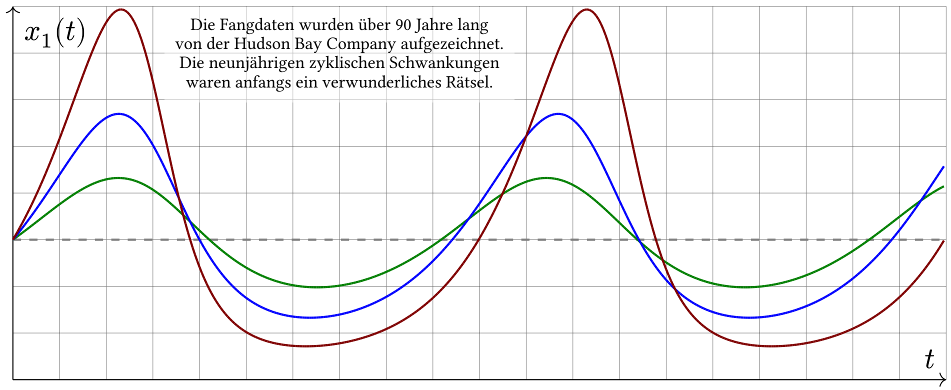
(7) Zweite Lotka–Volterra–Regel, Konstanz der Mittelwerte:
Die zeitlichen Mittelwerte sind $\overline{x_1} = \alpha_2/\beta_2$ *und* $\overline{x_2} = \alpha_1/\beta_1$.

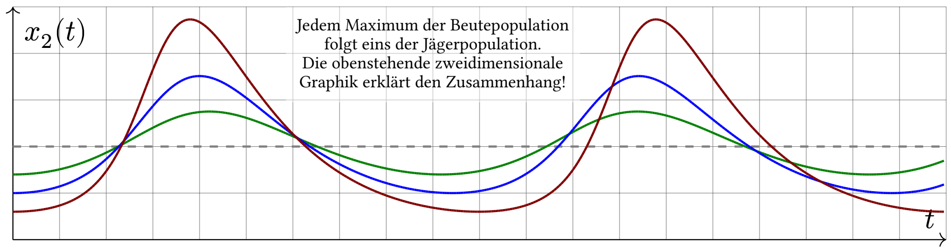
(8) Angenommen, der Mensch hält die Beutetiere für Schädlinge.
Im Zustand $(3, 1)$ werden sie gejagt und auf $(1, 1)$ reduziert. Erfolg?

Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra



Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra





Räuber-Beute-Modell: Linearisierung

Lösung: (1) Wir nutzen den ∃&E-Satz: f ist stetig differenzierbar.

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1x_1-\beta_1x_1x_2\\-\alpha_2x_2+\beta_2x_1x_2\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad f'\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1-\beta_1x_2 & -\beta_1x_1\\ \beta_2x_2 & -\alpha_2+\beta_2x_1\end{pmatrix}$$

🙂 Zu jedem $x(0)\in\mathbb{R}^2$ existiert genau eine Lösung mit $\dot{x}(t)=f(x(t))$.

(2) Aus $x_2(0)=0$ folgt $x_2(t)=0$ und $x_1(t)=\mathrm{e}^{\alpha_1t}\,x_1(0)$ für alle $t\ge 0$.
Aus $x_1(0)=0$ folgt $x_1(t)=0$ und $x_2(t)=\mathrm{e}^{-\alpha_2t}\,x_2(0)$ für alle $t\ge 0$.
Die Fixpunkte $\dot{x}=f(x)\stackrel{!}{=}0$ sind $(0,0)$ und $(\alpha_2/\beta_2,\alpha_1/\beta_1)=(3,2)$.

(3) Dieses System ist nicht linear! Lösungen können wir (hier wie meist) nur numerisch berechnen. Wie skizziert, Runge–Kutta sei Dank!

(4) Wir linearisieren um $x_0=(\alpha_2/\beta_2,\alpha_1/\beta_1)$. Für $x(t)=x_0+u(t)$ gilt:

$$\dot{u}=\dot{x}=f(x)=f(x_0+u)\approx f(x_0)+f'(x_0)\,u=A\,u$$

🙂 Die Jacobi–Matrix beschreibt das Verhalten um den Fixpunkt:

$$A=f'(x_0)=f'\begin{pmatrix}\alpha_2/\beta_2\\ \alpha_1/\beta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\alpha_2\beta_1/\beta_2\\ \alpha_1\beta_2/\beta_1 & 0\end{pmatrix}$$

Räuber-Beute-Modell: Linearisierung

Nicht-linear ist schwierig, doch **lineare Systeme** lösen wir leicht:

$$p_A(x)=\det(A-xE)=\det\begin{pmatrix}-x & -\alpha_2\beta_1/\beta_2\\ \alpha_1\beta_2/\beta_1 & -x\end{pmatrix}=x^2+\alpha_1\alpha_2$$

Eigenwerte: $\lambda_1=+\mathrm{i}\sqrt{\alpha_1\alpha_2}=+\mathrm{i}\omega,\quad \lambda_2=-\mathrm{i}\sqrt{\alpha_1\alpha_2}=-\mathrm{i}\omega$

Eigenvektoren: $v_1=\begin{pmatrix}\sqrt{\alpha_2\beta_1/\beta_2}\\ -\mathrm{i}\sqrt{\alpha_1\beta_2/\beta_1}\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}\sqrt{\alpha_2\beta_1/\beta_2}\\ +\mathrm{i}\sqrt{\alpha_1\beta_2/\beta_1}\end{pmatrix}$

Eigenfunktionen: $u_1(t)=\mathrm{e}^{\lambda_1t}\,v_1,\quad u_2(t)=\mathrm{e}^{\lambda_2t}\,v_2$

Für unser reelles System verlangen wir **reelle Lösungen**:

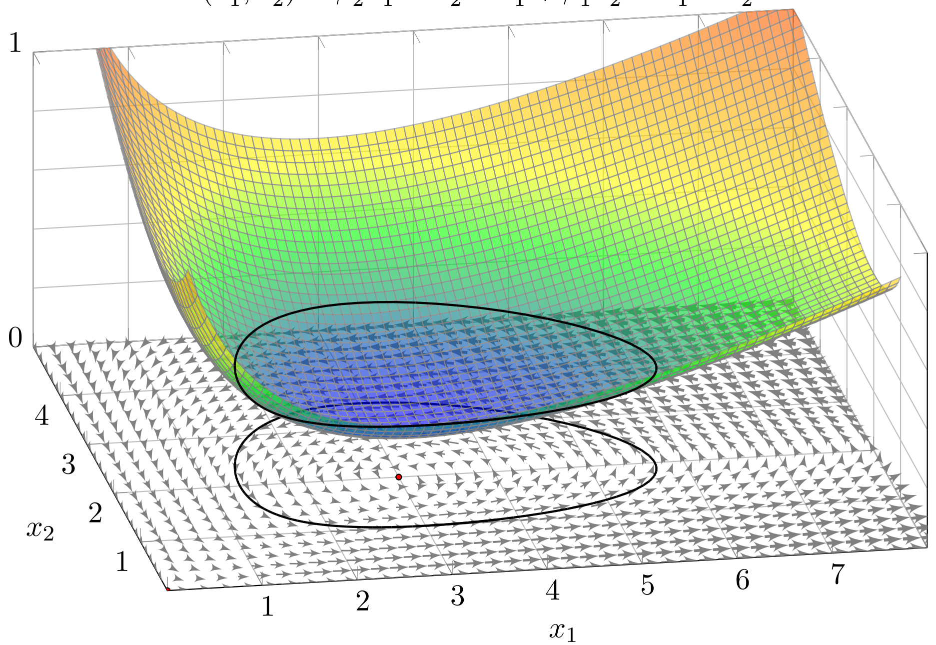
$$\operatorname{Re}u_1(t)=\begin{pmatrix}\cos(\omega t)\sqrt{\alpha_2\beta_1/\beta_2}\\ \sin(\omega t)\sqrt{\alpha_1\beta_2/\beta_1}\end{pmatrix},\quad \operatorname{Im}u_1(t)=\begin{pmatrix}\sin(\omega t)\sqrt{\alpha_2\beta_1/\beta_2}\\ -\cos(\omega t)\sqrt{\alpha_1\beta_2/\beta_1}\end{pmatrix}$$

Die Kreisfrequenz $\omega=\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ bedeutet Periodendauer $T=2\pi/\omega$.
Im Beispiel ist $\alpha_1=0.8$ und $\alpha_2=0.6$, also $\omega\approx 0.69$ und $T\approx 9.07$.

🙂 Plausibel: Für kleine Störungen deckt sich das mit obigen Skizzen. Große Störungen und Langzeitverhalten erfordern weitere Argumente!

Räuber-Beute-Modell: Potentialfläche

Das Potential $\Phi(x_1,x_2)=\beta_2x_1-\alpha_2\ln x_1+\beta_1x_2-\alpha_1\ln x_2$ erfüllt $\dot{\Phi}=0$.



Räuber-Beute-Modell: Periodizität

(5) Für das Potential $\Phi(x_1,x_2):=\beta_2x_1-\alpha_2\ln x_1+\beta_1x_2-\alpha_1\ln x_2$ gilt

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}&=\beta_2\dot{x}_1-\alpha_2\dot{x}_1/x_1+\beta_1\dot{x}_2-\alpha_1\dot{x}_2/x_2\\ &=(\beta_2-\alpha_2/x_1)(\alpha_1x_1-\beta_1x_1x_2)+(\beta_1-\alpha_1/x_2)(-\alpha_2x_2+\beta_2x_1x_2)=0.\end{aligned}$$

(6) Jede Lösung in $\mathbb{R}^2_{>0}$ schließt sich deshalb nach endlicher Zeit $T>0$:

(7) Die zeitlichen Mittelwerte der Populationsgrößen sind

$$\overline{x_1}:=\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}x_1(t)\,\mathrm{d}t\qquad\text{und}\qquad\overline{x_2}:=\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}x_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Aus den beiden Differentialgleichungen folgt:

$$\beta_2\overline{x_1}-\alpha_2=\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}\beta_2x_1(t)-\alpha_2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}\frac{\dot{x}_2(t)}{x_2(t)}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{\ln x_2(t)}{T}\right]_{t=0}^{T}=0$$

$$\alpha_1-\beta_1\overline{x_2}=\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}\alpha_1-\beta_1x_2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}\frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{\ln x_1(t)}{T}\right]_{t=0}^{T}=0$$

Das bedeutet $\overline{x_1}=\alpha_2/\beta_2$ und $\overline{x_2}=\alpha_1/\beta_1$. Erstaunlich: Der Mittelwert $\overline{x_1}$ der Beutepopulation hängt nicht von deren Reproduktionsrate ab!

Was ist evolutionäre Spieltheorie?

Die **evolutionäre Spieltheorie** hat mehrere Ursprünge und Ziele:
In der Biologie untersucht sie das Wirken der Evolution (durch Mutation und Selektion) auf Ebene der Akteure (Gene, Individuen, Familien, ...).
In der Ökonomik hingegen untersucht sie die soziale Interaktion in großen Populationen von Spielern. Sie verbindet somit Biologie und Ökonomik auf überraschende Weise und zu beiderseitigem Nutzen.

In den Wirtschaftswissenschaften ist dies ein sehr erfolgreicher Ansatz der **Mikrofundierung**, zur Erklärung und Prognose von sozialen und ökonomischen Phänomenen durch die Interaktion von Individuen.

Die klassische Spieltheorie betrachtet die strategische Analyse durch (idealisiert vollkommen) rationale Spieler, von denen jeder durch planvolles Handeln sein individuelles Ergebnis optimieren will.

Die evolutionäre Spieltheorie verbindet dies mit der zweiten, ebenso einfachen wie grundlegenden Sichtweise der Populationsdynamik: Erfolgreiche Strategien vermehren sich schneller als andere.

Was ist evolutionäre Spieltheorie?

Der **evolutionäre Ansatz** lässt sich auch dann noch sinnvoll anwenden, wenn die betrachteten Akteure nur über begrenzte Rationalität verfügen, oder im Extremfall überhaupt gar keine individuellen strategischen Entscheidungen treffen können (wie etwa Mikroorganismen).

Zur Erklärung und Deutung von Gleichgewichten nutzen Ökonomen seit jeher Ideen der Evolutionsbiologie: Das gesellschaftlich beobachtete Verhalten pendelt sich durch **trial and error** auf gewisse Fixpunkte ein. In diesem Sinne stützt die biologische Sichtweise die ökonomische.

Die evolutionäre Spieltheorie nimmt diese Deutung ernst und untersucht damit nicht nur die Fixpunkte, sondern auch die Dynamik drumherum und sogar fernab dieser Gleichgewichtslagen. Damit lassen sich auch Bewegungen abseits der Rationalität erklären, zumindest qualitativ.

Sie spüren dies sehr eindrücklich, wenn Sie selbst Spiele wiederholt spielen und so Ihre Strategie langsam anpassen, erlernen, optimieren. Erste einfache Beispiele dazu haben wir auch im Casino erlebt.

Was ist evolutionäre Spieltheorie?

Die mathematische Untersuchung evolutionärer Vorgänge erfordert als Grundlage immer ein **Bewegungsgesetz**, um die Dynamik präzise formulieren zu können, etwa diskret als Rekursionsgleichung oder meist kontinuierlich in Form einer Differentialgleichung.

Denken Sie als berühmte **Analogien in der Physik** etwa an Newtons Bewegungsgleichung der Mechanik, an Maxwells Gleichungen der Elektrodynamik, oder an Fouriers Wärmeleitungsgleichung, an die Schrödinger– oder Dirac–Gleichung der Quantenmechanik, etc.

Für die evolutionäre Spieltheorie dient meist die Replikatorgleichung als das grundlegende Modell für die Dynamik. Es gibt weitere Möglichkeiten, wie die Nash–Funktion aus dem Existenzsatz E1E für Gleichgewichte: Diese beschreibt weniger natürliche Selektion als rationale Planung.

Was ist evolutionäre Spieltheorie?

Dazu setzen wir im Folgenden voraus, dass die Population so groß ist, dass wir das eigentlich diskrete Modell ohne allzu große Fehler durch ein einfaches, kontinuierlich-differentielles Modell ersetzen können.
Wir ignorieren also jedwede mikroskopische Körnigkeit oder Zufälle.

Denselben Grenzübergang haben wir übrigens bereits im obigen Räuber-Beute-Modell von Lotka-Volterra stillschweigend vollzogen: Hasen und Luchse sind diskrete Einheiten, nicht kontinuierlich, doch das kontinuierliche Modell ist nah genug an der Realität.

Physikalische Analogie sind Wärmelehre und kinetische Gastheorie: Die erste behandelt makroskopische Phänomene (zumeist Mittelwerte), die zweite untersucht mikroskopische Phänomene (einzelne Teilchen). Im Grenzübergang führt das mikro- zum makroskopischen Modell.

Die Replikatorgleichung

Die Differentialgleichung $\dot{x} = \lambda x$ beschreibt exponentielles Wachstum: Zum Startwert $x(0)$ ist $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto x(0)\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ die eindeutige Lösung.

Für gemischte Strategien nutzen wir baryzentrische Koordinaten:

$$s_i \in \bar{S}_i \quad : \quad s_i = \sum_k x_i^k s_i^k, \quad x_i^k \ge 0, \quad \sum_k x_i^k = 1$$

Unsere vorigen Beispiele motivieren folgende Differentialgleichung:

$$\boxed{\dot{x}_i^k = x_i^k \left[\bar{u}_i(s_i^k; s_{-i}) - \bar{u}_i(s_i; s_{-i})\right]}$$

Gilt $[\dots] \gtrless 0$, so hat s_i^k gegenüber s_i einen Fitnessvorteil/nachteil, also wächst/sinkt der Anteil x_i^k dieser Strategie an der Gesamtpopulation.

Aufgabe: (0) Wie glatt ist das Vektorfeld f auf der rechten Seite? Garantiert das Existenz, Eindeutigkeit und Glattheit von Lösungen?

(1) Als Startwert geben wir $x_i^k(t_0) \ge 0$ und $\sum_k x_i^k(t_0) = 1$ vor. Bleiben diese Normierungsbedingungen für alle $t \in \mathbb{R}$ erhalten?

(2) Wie verhalten sich Fixpunkte zu Nash–Gleichgewichten? Lässt sich damit die Existenz von Nash–Gleichgewichten zeigen?

Die Replikatorgleichung

Lösung: (0) Für Bimatrixspiele $\Delta^m \times \Delta^n \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (x^\top A\,y, x^\top B\,y)$:

$$\dot{x}_i = x_i\left[e_i^\top A\,y - x^\top A\,y\right], \qquad \dot{y}_j = y_j\left[x^\top B\,e_j - x^\top B\,y\right].$$

Allgemein sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein Spiel mit $S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^{\ell_i}\}$. Wir setzen u in jeder Koordinate linear fort zu $\bar{u} : \mathbb{R}^{S_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{S_n} \to \mathbb{R}^n$,

$$\bar{u}\left(\dots, \sum_{k=0}^{\ell_i} x_i^k s_i^k, \dots\right) = \sum_{k=0}^{\ell_i} x_i^k u(\dots, s_i^k, \dots).$$

Das Vektorfeld auf der rechten Seite unserer Gleichung $\dot{x} = f(x)$ ist

$$f : \mathbb{R}^{\ell_1+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{\ell_n+1} \to \mathbb{R}^{\ell_1+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{\ell_n+1},$$
$$f_i^k(x) = x_i^k \left[\bar{u}_i(s_i^k; s_{-i}) - \bar{u}_i(s_i; s_{-i})\right].$$

Jede Koordinate $f_i^k(x)$ ist polynomiell in den Variablen $x = (x_1, \dots, x_n)$, genauer vom Grad 2 in x_i^k und vom Grad 1 in allen anderen Variablen.

Zu jedem Startpunkt $x(t_0)$ garantiert der Satz von Picard–Lindelöf lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung, mit (1) sogar global.

Da f glatt ist, gilt dies auch für jede Lösung $t \mapsto x(t)$ von $\dot{x} = f(x)$.

Der Satz von Cauchy–Kowalewskaja garantiert, dass jede Lösung $t \mapsto x(t)$ sogar analytisch ist, also lokal eine konvergente Potenzreihe.

Die Replikatorgleichung

(1) Sei $x : I \to \mathbb{R}^N$ eine Lösung auf einem Intervall I mit $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$. Wir zeigen: Gilt $x_i^k(t) \ge 0$ und $\sum_k x_i^k(t) = 1$ für $t = t_0$, so für alle $t \in I$.

Geometrisch: Auf $X = \Delta^{\ell_1} \times \dots \times \Delta^{\ell_n}$ zeigt das Vektorfeld f nirgends nach außen. Jede Lösung, die in X startet, verbleibt in X. Ausführlich:

(1a) Behauptung: Gilt $x_i^k(t) = 0$ für ein (i,k) und $t = t_0$, so für alle $t \in I$.

Dank Existenzsatz gibt es eine Lösung $\tilde{x} : J \to \mathbb{R}^N$ mit $\tilde{x}(t_0) = x(t_0)$, wobei wir den Funktionswert $\tilde{x}_i^k(t) = 0$ für alle $t \in J$ fest vorgeben. Automatisch gilt dann $\partial_t \tilde{x}_i^k(t) = 0 = f_i^k(\tilde{x}(t))$ für alle $t \in J$. Dank Eindeutigkeitssatz folgt $x_i^k(t) = 0$ für alle $t \in I \cap J$.

(1b) Behauptung: Gilt $\sum_k x_i^k(t) = 1$ für ein i und $t = t_0$, so für alle $t \in I$.

Dank Existenzsatz gibt es eine Lösung $\tilde{x} : J \to \mathbb{R}^N$ mit $\tilde{x}(t_0) = x(t_0)$, wobei wir $\tilde{x}_i^0(t) = 1 - \sum_{k=1}^{\ell_i} \tilde{x}_i^k(t)$ für alle $t \in J$ fest vorgeben. Automatisch gilt dann $\partial_t \tilde{x}_i^0(t) = f_i^0(\tilde{x}(t))$ für alle $t \in J$, denn

$$f_i^0(\tilde{x}(t)) - \partial_t \tilde{x}_i^0 = \sum_{k=0}^{\ell_i} x_i^k \left[\bar{u}_i(s_i^k; s_{-i}) - \bar{u}_i(s_i; s_{-i})\right] = 0.$$

Dank Eindeutigkeitssatz folgt $\sum_k x_i^k(t) = 1$ für alle $t \in I \cap J$.

Die Replikatorgleichung

Die behauptete Gleichung gilt lokal um jeden Zeitpunkt $t_0 \in I$. Dank Zusammenhang gilt sie somit auf dem gesamten Intervall I.

Für jede Auswahl von (abgeschlossenen oder offenen) Teilsimplizes $\Delta_1 \subseteq \Delta^{\ell_1}, \dots, \Delta_n \subseteq \Delta^{\ell_n}$ ist die Menge $\Delta_1 \times \dots \times \Delta_n \subset \mathbb{R}^N$ invariant.

Wir müssen hier sorgfältig mit dem Eindeutigkeitssatz argumentieren. Ein klassisches Gegenbeispiel ist die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ mit rechter Seite $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$. Zum Startwert $x(0) = 0$ existieren neben der Lösung $t \mapsto 0$ noch unendlich viele weitere, etwa $t \mapsto t^3/27$. Die Mengen der Zerlegung $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{<0} \sqcup \{0\} \sqcup \mathbb{R}_{>0}$ sind hier nicht invariant!

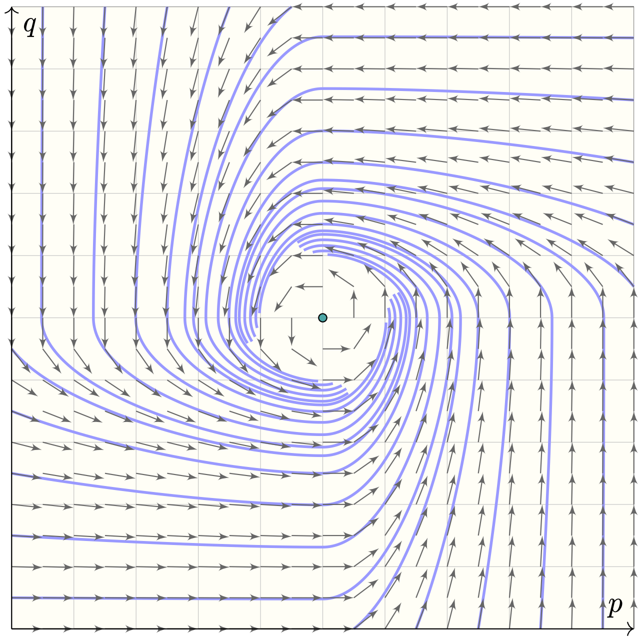
(2) Jedes Nash–Gleichgewicht ist eine Nullstelle des Vektorfeldes, aber nicht jede Nullstelle des Vektorfeldes ist ein Nash–Gleichgewicht: Diese Äquivalenz gilt nur im Inneren, mit $x_i^k > 0$ für alle i und k. Z.B. ist jede Ecke eine Nullstelle, aber nicht immer ein Gleichgewicht.

Daher lässt sich die Replikatorgleichung nicht zum Beweis nutzen. Der Beweis von Satz E1E konstruiert dazu geschickt die Nash-Funktion; dank Lemma E1J sind ihre Fixpunkte genau die Nash–Gleichgewichte.

Nash–Dynamik zu Matching Pennies

B / A	Kopf	Zahl
Kopf	-1 / $+1$	$+1$ / -1
Zahl	$+1$ / -1	-1 / $+1$

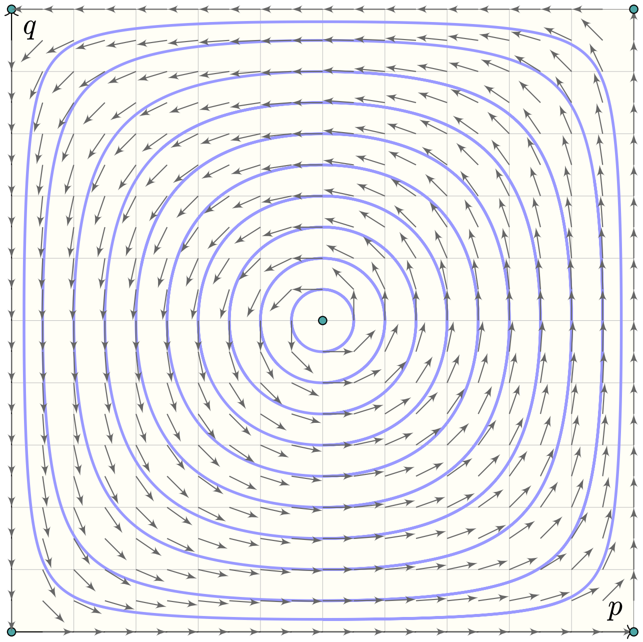
Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.
Wir sehen wunderbar den einzigen Fixpunkt des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ ist dies das einzige Nash–Gleichgewicht.



Replikatordynamik zu Matching Pennies

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Matching Pennies* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

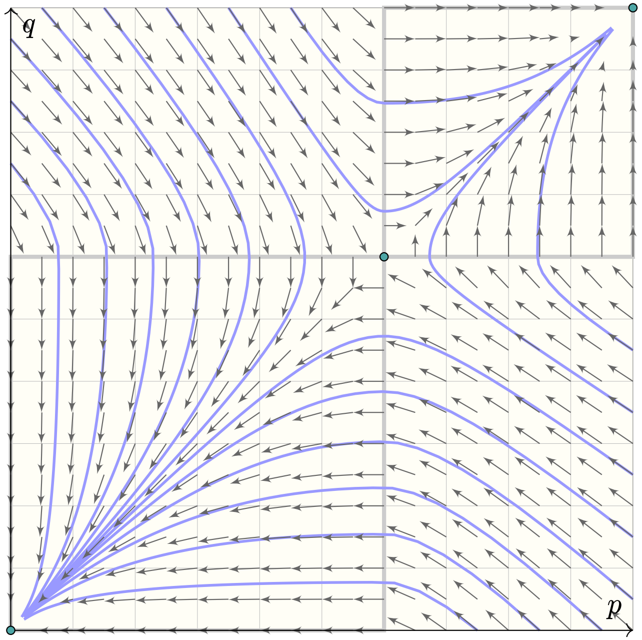
B / A	Kopf	Zahl
Kopf	-1 / $+1$	$+1$ / -1
Zahl	$+1$ / -1	-1 / $+1$



Nash–Dynamik zu Bleiben-oder-Gehen

B / A	bleiben	gehen
bleiben	-2 / -2	-2 / -5
gehen	-5 / -2	0 / 0

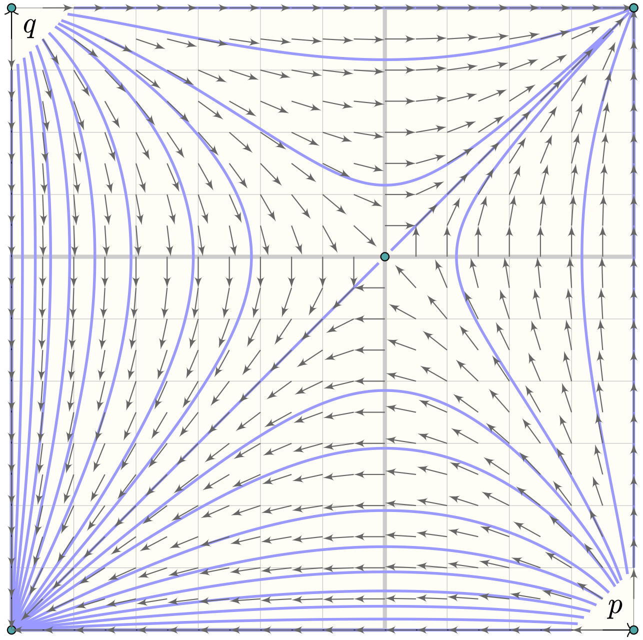
Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.
Wir sehen wunderbar die drei Fixpunkte des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ sind dies die drei Nash–Gleichgewichte.



Replikatordynamik zu Bleiben-oder-Gehen

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Bleiben-oder-Gehen* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

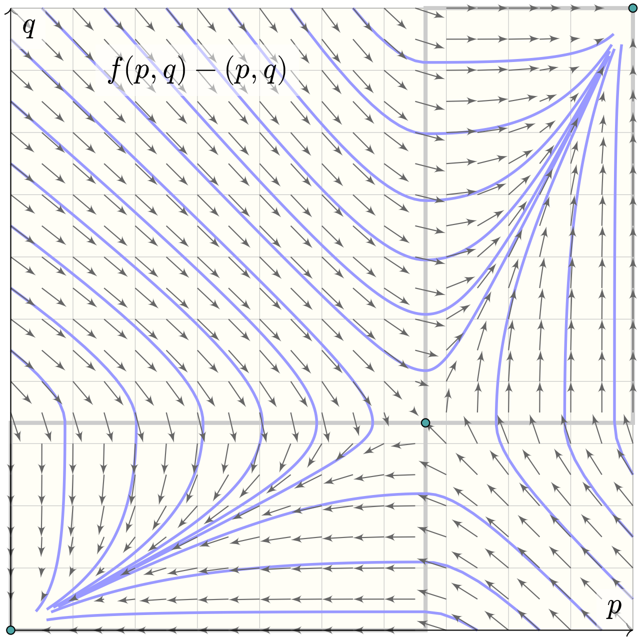
B / A	bleiben	gehen
bleiben	-2 / -2	-2 / -5
gehen	-5 / -2	0 / 0



Nash–Dynamik zu Bach oder Strawinsky

B A	Bach	Strawinsky
Bach	2 1	0 0
Strawinsky	0 0	1 2

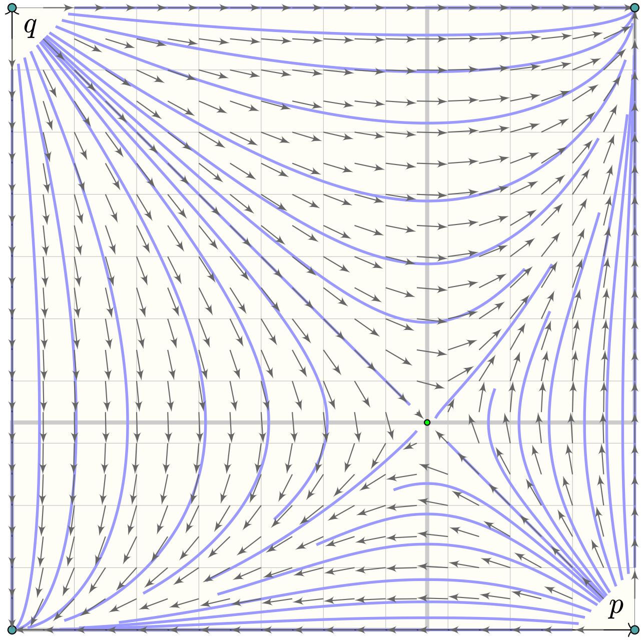
Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.
Wir sehen wunderbar die drei Fixpunkte des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ sind dies die drei Nash–Gleichgewichte.
Zur Anregung Ihrer Phantasie zeige ich typische Flusslinien.



Replikatordynamik zu Bach oder Strawinsky

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Bach oder Strawinsky* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

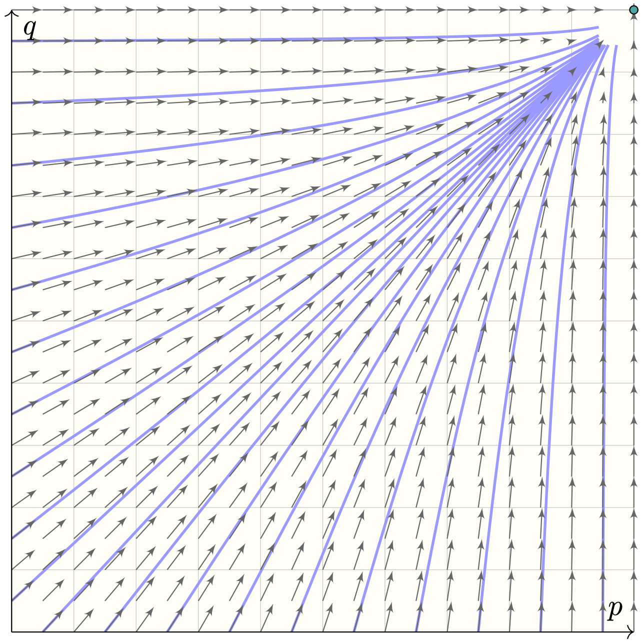
B A	Bach	Strawinsky
Bach	2 1	0 0
Strawinsky	0 0	1 2



Nash–Dynamik zum Gefangenendilemma

B A	schweigen	gestehen
schweigen	-1 -1	0 -5
gestehen	-5 0	-4 -4

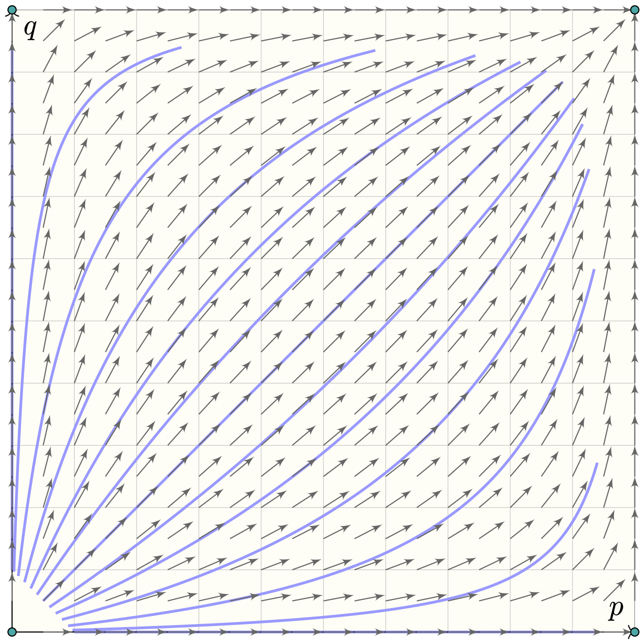
Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.
Wir sehen wunderbar den einzigen Fixpunkt des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ ist dies das einzige Nash–Gleichgewicht.



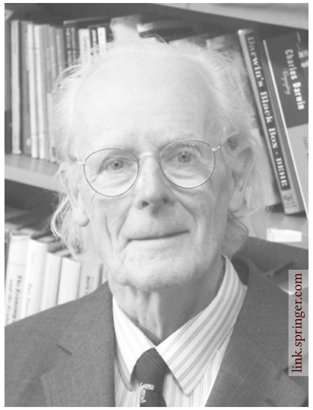
Replikatordynamik zu Gefangenendilemma

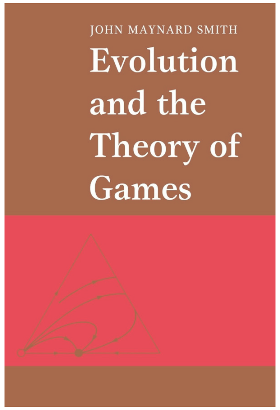
Zur Erinnerung die Daten des *Gefangenendilemmas* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

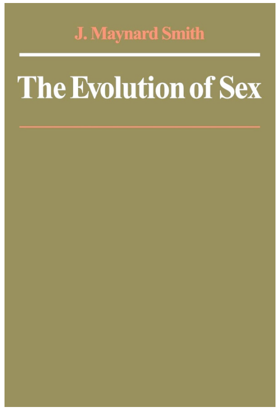
B A	schweigen	gestehen
schweigen	-1 -1	0 -5
gestehen	-5 0	-4 -4



John Maynard Smith (1920–2004)







John Maynard Smith (London 1920 – Lewes, East Sussex 2004) war ein britischer Theoretischer Biologe. Er ist berühmt für seine Beiträge zur Evolutionsbiologie und zur Evolutionären Spieltheorie, etwa das Konzept der evolutionär stabilen Strategien. Er erhielt 1999 den Crafoord–Preis; dieser ehrt järlich seit 1982 Grundlagenforschung in Disziplinen, die der Nobelpreis nicht berücksichtigt, wie Biologie, Mathematik, Astronomie.

John Maynard Smith (1920–2004)

The last decade has seen a steady increase in the application of concepts from the theory of games to the study of evolution. Fields as diverse as sex ratio theory, animal distribution, contest behaviour and reciprocal altruism have contributed to what is now emerging as a universal way of thinking about phenotypic evolution. […] Paradoxically, it has turned out that game theory is more readily applied to biology than to the field of economic behaviour for which it was originally designed. There are two reasons for this. First, the theory requires that the values of different outcomes (for example, financial rewards, the risks of death and the pleasures of a clear conscience) be measured on a single scale. In human applications, this measure is provided by 'utility' — a somewhat artificial and uncomfortable concept: in biology, Darwinian fitness provides a natural and genuinely one-dimensional scale. Secondly, and more importantly, in seeking the solution of a game, the concept of human rationality is replaced by that of evolutionary stability. The advantage here is that there are good theoretical reasons to expect populations to evolve to stable states, whereas there are grounds for doubting whether human beings always behave rationally.

John Maynard Smith: *Evolution and the Theory of Games* (1982) p. vii

John Maynard Smith (1920–2004)

John Maynard Smith war einer der führenden Evolutionsbiologen. Seine Stärke war, Probleme mit mathematischen Modellen zu klären. Wichtige Fragen, die er untersuchte, waren zum Beispiel: Auf welchen Ebenen wirkt die Evolution, und wie stark – Gene, Individuen, Gruppen? Wie entstehen große Transitionen, etwa zu mehrzelligen Organismen? Was sind die Kosten und die Vorteile der sexuellen Vermehrung?

`youtu.be/0b0Nm_L3TKg&list=PLVV0r6CmEsFzJSvAc4MBuUP_Grj01lLHp`

Ronald Fisher erklärte 1930 die Stabilität des Geschlechterverhältnisses; sein Argument ist heute als *Fishers Prinzip* weithin bekannt. Schon 1871 hatte Charles Darwin ähnliche Gedanken geäußert, in der ersten Ausgabe seines Buches *The Descent of Man, and Selection in Relation to Sex*, doch schon 1874 nahm er sie in der zweiten Ausgabe zurück mit den Worten:

I formerly thought that when a tendency to produce the two sexes in equal numbers was advantageous to the species, it would follow from natural selection, but I now see that the whole problem is so intricate that it is safer to leave its solution for the future.

John Maynard Smith (1920–2004)

John Maynard Smith war eine faszinierende Persönlichkeit. Er ging auf das elitäre Eton College, dort war er zwar unglücklich, erhielt aber eine gute Grundbildung in Mathematik, zudem lernte er die Evolutionstheorie kennen, insbesondere die Arbeiten von J.B.S. „Jack" Haldane (1892–1964).

Entgegen dem Wunsch seiner Familie wurde Smith nicht Börsenmakler, sondern studierte Ingenieurwesen und arbeitete im Flugzeugbau. Erst ab 1947 studierte er Biologie am University College London bei Haldane. Smith wurde 1962 einer der Gründungsprofessoren der University of Sussex und war dort Dekan von 1965 bis zu seiner Emeritierung 1985.

Maynard Smith formalisierte 1973 evolutionär stabile Strategien (ESS) als zentrales Konzept der evolutionären Spielthorie, aufbauend auf einer Idee von George Price (1922–1975). Dies führte zu ihrem berühmten Artikel *The logic of animal conflict* (1973) und zu Smiths Buch *Evolution and the Theory of Games* (1982). Mit diesem mathematischem Werkzeug konnte Smith insbesondere die Stabilität des Geschlechterverhältnisses erklären. Damit wurden ESS zu einem Universalwerkzeug der Evolutionsbiologie!

Worauf wirkt die Selektion: Gene? Individuen? Gruppen?

Kurzfristig wirkt die Selektion auf Individuen: Bessere Anpassung an die Umweltbedingungen ermöglicht erst Überleben und dann Vermehrung. Langfristig wirkt die Selektion auf die Gene: Erfolgreiche Gene führen zu besserer Anpassung, somit Überleben und Vermehrung der Individuen, die diese Gene tragen. Deshalb verbreiten sich erfolgreiche Gene stärker. Daher die Kurzfassung: Mutation und Selektion treiben die Evolution.

Zwischen diesen beiden Ebenen, individuell kurzfristig und genetisch langfristig, gibt es interessante Spannungen: Gelegentlich opfern sich Individuen für Ihre Familie oder Gruppe, sie sichern nicht das eigene Überleben, aber immerhin das von Verwandten mit ähnlichen Genen. Für das Gen ist dieses Verhalten vorteilhaft, breitet sich also aus.

Richard Dawkins: *The Selfish Gene.* OUP 1976, 40th anniv. ed. 2016. In seiner populären Darstellung evolutionären Denkens rückt Dawkins konsequent die Sicht der Gene in den Mittelpunkt. Nebenbei überträgt er die Prinzipien von Mutation und Selektion auf soziokulturelle „Meme“. In der Ära des Internets wurde dies zum allgegenwärtigen Begriff!

Wie entwickelt sich komplexes Zusammenleben?

Wie kam es zur Evolution mehrzelligen Lebens? Die einzelne Zelle gibt ihre Eigenständigkeit auf und ordnet sich dem Gesamtorganismus unter. Auch hier herrscht offenkundig eine Spannung zwischen beiden Ebenen. (Krebszellen fügen sich nicht harmonisch ein, sondern laufen Amok.)

Ganz ähnliche Konflikte entstehen bei sozialen Insekten. Diese leben in *Kolonien* zusammen, bei starker sozialer Ausprägung sprechen wir von (Ameisen-)*Staaten* oder (Bienen-)*Völkern*. Diese haben eine Kaste von Arbeiter:innen, die sich selbst nicht mehr fortpflanzen. Warum ordnen sich die Individuen hier unter und geben gar ihre Reproduktion auf? Die eusozialen Insekten sind extrem erfolgreich: Sie stellen nur 2% der Insektenarten, aber die Hälfte der Biomasse. Die Details sind verzwickt, doch Verwandtenselektion (*kin selection*) kann das Phänomen erklären.

Ähnliche Konflikte spüren wir selbst als Individuen in großen Gruppen, oder beim Zusammenfassen kleinerer Einheit zu großen Organisationen. Wann dürfen / können Regionen politische Unabhängigkeit reklamieren? Schottland? Katalonien? Kalifornien? Phantasiestaaten & Mikronationen?

Die Evolution der sexuellen Vermehrung

Warum gibt es überhaupt Männer? Sind sie nicht ein teurer Luxus? Frauen gebären Nachwuchs, Männer dagegen sind nicht reproduktiv, auf den ersten Blick sicher „nice to have“, aber ansonsten entbehrlich. *Full disclosure:* Ich habe nichts gegen Männer, oft werde ich selbst für einen Mann gehalten. Ich frage rein aus wissenschaftlicher Neugier.

Grundsätzlich gefragt: Was sind die Vorteile sexueller Vermehrung? Sie ist evolutionär erfolgreich, also muss es gute Gründe für sie geben! Zunächst die Nachteile: Zum einen kostet die Paarung Zeit und Energie. Manche halten Sex zwar für die schönste Sache der Welt, doch das ist sicher kein objektives Urteil, sondern genetisch fest einprogrammiert. Großer Vorteil: Sex kombiniert Gene und beschleunigt die Evolution.

Wenn wir schon zwei Geschlechter haben, warum gebiert nur eines? Dadurch wird die Reproduktivität um 50% reduziert. Dieses Paradoxon nannte Maynard Smith 1971 *the twofold cost of sex* und erklärte anhand mathematischer Modelle: Asexuelle Reproduktion ist zwar kurzfristig erfolgreicher, doch sexuelle Reproduktion bietet langfristig Vorteile.

Die Evolution der sexuellen Vermehrung

Manche Arten nutzen *beide* Methoden der Vermehrung, typischerweise *sexuell* in guten Zeiten und *asexuell* in Notlagen, manche wechseln dann zur *Parthenogenese* (gr. παρθενογένεσις, ‘Jungfernzeugung’). Das deutet auf den obigen Grundkonflikt hin, kurzfristige vs langfristige Vorteile.

Fun fact: Ginkgobäume haben zwei Geschlechter, die weiblichen bilden Samen; diese ähneln Mirabellen, sind aber streng besehen keine Frucht. Für uns Menschen stinken die Samen nach Buttersäure, wie Erbrochenes oder ranzige Milch, daher pflanzen wir selbstredend lieber männliche Ginkgos. So wurden 2012 in der Zürcher Europa-Allée 76 *männliche* Ginkgos gepflanzt. Inzwischen stellte sich jedoch heraus, dass Ginkgos ihr Geschlecht wechseln können! So sind einige der ehemals männlich gelesenen Zürcher Ginkgos nun *weiblich* und bilden stinkende Samen.

Die Stadt ließ sich vertraglich zusichern, dass die Baumschule fälschlich gepflanzte weibliche Ginkgos ersetzt. Was passiert nun, wenn männliche Bäume ihre weibliche Seite entdecken? Die juristische Frage bleibt offen. Grundlegende mathematische Fragen hingegen wollen wir nun klären.

Evolutionär stabile Strategien

Gegeben sei ein endliches reelles Spiel $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$. Seine affine Fortsetzung $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \to \mathbb{R}^2$ interpretieren wir als Populationsmodell.

Zudem sei u symmetrisch, also $S_1 = S_2 = S$ und $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$, und somit $\bar{S}_1 = \bar{S}_2 =: \bar{S}$ und $\bar{u}_1(s_1, s_2) = \bar{u}_2(s_2, s_1) =: v(s_1, s_2)$.

Dank E1E existieren symmetrische Nash–Gleichgewichte $(s, s) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$. Das bedeutet, die Strategie $s \in \bar{S}$ erfüllt $v(s, s) \ge v(\tilde{s}, s)$ für alle $\tilde{s} \in \bar{S}$.

Zur Strategie $s \in \bar{S}$ tritt nun eine Mutation $\tilde{s} \in \bar{S}$ mit kleiner Wkt $\varepsilon > 0$. Die Gesamtpopulation verschiebt sich somit von s zu $s' = (1 - \varepsilon)s + \varepsilon\tilde{s}$.

Vor diesem Hintergrund s' vergleichen wir die Fitness von s bzw. $\tilde{s}$:

$$\begin{aligned} f(s) &= v(s, s') = (1-\varepsilon)\, v(s, s) + \varepsilon\, v(s, \tilde{s}) \\ f(\tilde{s}) &= v(\tilde{s}, s') = \underbrace{(1-\varepsilon)\, v(\tilde{s}, s)}_{\text{nullte Ordnung}} + \underbrace{\varepsilon\, v(\tilde{s}, \tilde{s})}_{\text{erste Ordnung}} \end{aligned}$$

Dabei soll $f(s) > f(\tilde{s})$ gelten für alle $\varepsilon \in \,]0, \delta[$ und ein festes $\delta > 0$. Das führt uns unmittelbar zu der folgenden praktischen Definition.

Evolutionär stabile Strategien

Gegeben sei ein endliches symmetrisches Spiel $u : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mit $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$, und seine Fortsetzung auf gemischte Strategien

$$\bar{u} : \bar{S} \times \bar{S} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (s_1, s_2) \mapsto \big(\, v(s_1, s_2),\ v(s_2, s_1) \,\big).$$

Definition G3A: evolutionär stabile Strategien

Die Strategie $s \in \bar{S}$ heißt **evolutionär stabil** gegen $\tilde{s} \in \bar{S}$, wenn gilt:

0 entweder strikt $v(s, s) > v(\tilde{s}, s)$

1 oder schwach $v(s, s) = v(\tilde{s}, s)$, aber $v(s, \tilde{s}) > v(\tilde{s}, \tilde{s})$.

Gilt dies für alle $\tilde{s} \in \bar{S} \smallsetminus \{s\}$, so heißt s **evolutionär stabil**, kurz:

$$\mathrm{ESS}(\bar{u}) := \{\, s \in \bar{S} \mid s \text{ ist evolutionär stabil} \,\}$$

Übung: Für jedes reelle symmetrische Spiel u gilt:

$$(s, s) \in \mathrm{NE}^!(\bar{u}) \quad\Longrightarrow\quad s \in \mathrm{ESS}(\bar{u}) \quad\Longrightarrow\quad (s, s) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$$

Die Umkehrungen gelten i.A. nicht, wie Gegenbeispiele zeigen.

Evolutionär stabile Strategien

Wir wollen die Formel ausführlicher herleiten und diskutieren.

Sei $S = S_1 = S_2 = \{s_0, s_1, \dots, s_\ell\}$ die Strategiemenge. Im Kontext der Evolutionstheorie können wir uns jedes s_k als einen Genotyp vorstellen.

Die aktuelle Population besteht aus einer Mischung $s = \sum_{j=0}^{\ell} p_j s_j$, wobei wie immer $p_0, p_1, \dots, p_\ell \ge 0$ und $p_0 + p_1 + \dots + p_\ell = 1$ gilt.

Das vorgegebene Spiel $u : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (s_i, s_j) \mapsto (v(s_i, s_j), v(s_j, s_i))$ beschreibt die Interaktion zweier Individuen vom Genotyp s_i und s_j.

Die Spielersymmetrie bedeutet, dass keiner als „erster“ oder „zweiter“ Spieler ausgezeichnet wird. Die Paarungen werden zufällig ausgelost gemäß der in der Population $s = \sum_{j=0}^{\ell} p_j s_j$ vorliegenden Häufigkeiten.

Bezüglich der aktuellen Population $s \in \bar{S}$ hat jede reine Strategie $s_i \in S$ die Fitness $f(s_i) = v(s_i, s) = \sum_{j=0}^{\ell} p_j v(s_i, s_j)$, denn s_i spielt gegen s.

Die durchschnittliche Fitness in der Population s ist daher

$$f(s) = v(s, s) = \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell} p_i p_j v(s_i, s_j).$$

Evolutionär stabile Strategien

Die Mutation $\tilde{s}$ tritt mit einer kleinen Wkt $\varepsilon > 0$ auf. Dies verschiebt die bisherige Population s zur veränderten Mischung $s' = (1 - \varepsilon)s + \varepsilon\tilde{s}$.

Bezüglich dieser neuen Gesamtpopulation s' vergleichen wir die durchschnittliche Fitness der alten Population s mit der Mutation $\tilde{s}$:

$$\begin{aligned} f(s) &= v(s, s') = (1-\varepsilon)\, v(s, s) + \varepsilon\, v(s, \tilde{s}) \\ f(\tilde{s}) &= v(\tilde{s}, s') = (1-\varepsilon)\, v(\tilde{s}, s) + \varepsilon\, v(\tilde{s}, \tilde{s}) \end{aligned}$$

🙂 Entscheidend ist diese vereinfachende Annahme unseres Modells: Die Paarungen werden zufällig ausgelost gemäß der in der Population s' vorliegenden Häufigkeiten. Keiner kann sich sein Gegenüber aussuchen. Das ist realistisch, wenn die Individuen (nahezu) ununterscheidbar sind.

Wir nutzen die Linearität von v im zweiten Parameter $s' = (1 - \varepsilon)s + \varepsilon\tilde{s}$. Der termweise Vergleich führt zu den oben genannten Ungleichungen.

⚠ Wir vereinfachen hier radikal. Die Analyse ist komplizierter und verläuft anders, wenn sich die Teilpopulationen nicht zufällig mischen, sondern meiden oder suchen, oder räumlich inhomogen verteilt sind.

Fishers Erklärung der Geschlechterverteilung

Warum ist das beobachtete Geschlechterverhältnis recht stabil $1:1$?

Fisher's principle – the most celebrated argument in evolutionary biology

(1) Angenommen, Männchen würden seltener geboren als Weibchen. (2) Dann hat statistisch ein neugeborenes Männchen mehr Nachkommen als ein neugeborenes Weibchen. (3) Eltern mit Disposition zu männlichem Nachwuchs haben daher mehr Enkel. (4) Die Gene hierfür verbreiten sich daher etwas schneller und korrigieren so das Geschlechterverhältnis in Richtung $1:1$. (5) Dadurch verschwindet der genannte Vorteil langsam. (6) Dasselbe gilt, wenn mehr Weibchen als Männchen geboren werden.

Mit anderen Worten: Das $1:1$ Verhältnis ist evolutionär stabil (ESS).

Heutzutage wird die spieltheoretische Beschreibung selbstverständlich als grundlegendes quantitatives Modell in der Biologie angewendet. Umgekehrt prägt die evolutionäre Sichtweise ebenso die Spieltheorie.

Evolutionär stabile Strategien

Projekt: Formulieren Sie zu Fishers Prinzip ein quantitatives Modell.
Maynard Smith: *Evolution and the Theory of Games.* CUP 1982, §2.

Übung: Manche Autor:innen definieren stabile Gleichgewichte $s \in \bar{S}$ durch leicht abweichende Bedingungen, etwa eines der folgenden:

$$\begin{array}{lllll}
(1) & v(s,s) > v(\tilde{s},s) & \text{oder} & [v(s,s) = v(\tilde{s},s) & \text{und} \quad v(s,\tilde{s}) > v(\tilde{s},\tilde{s})] \\
(2) & v(s,s) \ge v(\tilde{s},s) & \text{und} & v(\tilde{s},s) > v(\tilde{s},\tilde{s}) & \\
(3) & v(s,s) \ge v(\tilde{s},s) & \text{und} & v(s,s) > v(\tilde{s},\tilde{s}) &
\end{array}$$

für alle Alternativen $\tilde{s} \in \bar{S} \setminus \{s\}$. Welche Implikationen gelten zwischen diesen drei Definitionen und (strikten) Nash–Gleichgewichten?

Übung: Wir nutzen evolutionäre Stabilität für paarweise Interaktion in einem symmetrischen Zwei-Personen-Spiel. Wie sieht die Bedingung für symmetrische Drei-Personen-Spiele aus? und n–Personen-Spiele?

Übung: Sei $u : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein endliches symmetrisches Spiel.
(1) Sei $\sharp S = 2$. Hat $\bar{u}$ immer ein evolutionär stabiles Gleichgewicht?
(2) Sei $\sharp S = 3$. Hat $\bar{u}$ immer ein evolutionär stabiles Gleichgewicht?

Evolutionär stabile Strategien

NATURE VOL. 246 NOVEMBER 2 1973

The Logic of Animal Conflict

J. MAYNARD SMITH
G. R. PRICE

Conflicts between animals of the same species usually are of "limited war" type, not causing serious injury. This is often explained as due to group or species selection for behaviour benefiting the species rather than individuals. Game theory and computer simulation analyses show, however, that a "limited war" strategy benefits individual animals as well as the species.

John Maynard Smith: *My first encounters with game theory, courtesy of George Price.* `youtu.be/YDYwLp7ijwo&list=PLVV0r6CmEsFzJSvAc4MBuUP_GrjO1lLHp`

Evolutionär stabile Strategien

Spieltheorie wird sehr erfolgreich in der Evolutionsbiologie angewendet. Hier ist der Hauptmechanismus nicht individuelle Rationalität, sondern die Evolution der Population durch Vererbung, Mutation und Selektion.

Evolutionär stabile Strategien (ESS) wurden 1973 eingeführt von John Maynard Smith and George Robert Price: *The logic of animal conflict.* Seither avancierten ESS zu den Universalwerkzeugen der Spieltheorie.

At first I thought it was pretty trivial.
Any idiot could do it in an afternoon. [...]
The point of a mathematical model is, really,
to make it absolutely clear what is being said.
Maynard Smith zu evolutionär stabilen Strategien
`youtu.be/C7m_Qeo8CE0&t=10`, `youtu.be/PWJ6Nyysp-M&t=90`

Die mathematische Formulierung dieses Konzepts und das Verständnis seiner zahlreichen Anwendungen war ein Meilenstein der theoretischen Biologie und wurde vielfach mit Preisen ausgezeichnet. Im Rückblick ist kaum vorstellbar, wie lang und mühsam der Kristallisationsprozess war.

Taube oder Falke?

Gelegentlich kämpfen zwei Individuen einer Population um eine Beute, vom Wert 2. Jedes agiert als Taube (defensiv) oder als Falke (offensiv). Der Ausdruck *hawk or dove* bezeichnet allgemein solches Verhalten.

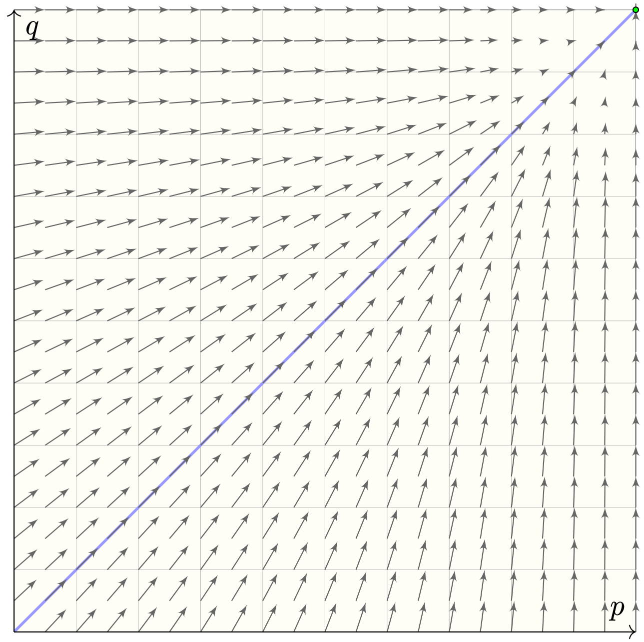
Spielen beide Taube, so teilen sie sich die Beute. Spielt nur einer Falke, so bekommt er die gesamte Beute. Spielen beide Falke, so kämpfen sie, der Wert wird geteilt, aber reduziert um die Kosten a des Kampfes.

A \ B	Taube	Falke
Taube	A: 1, B: 1	A: 0, B: 2
Falke	A: 2, B: 0	A: $1-a$, B: $1-a$

Aufgabe: Finden Sie zu $a \in \mathbb{R}$ alle (symmetrischen) Gleichgewichte in gemischten Strategien. Welche davon sind evolutionär stabil?

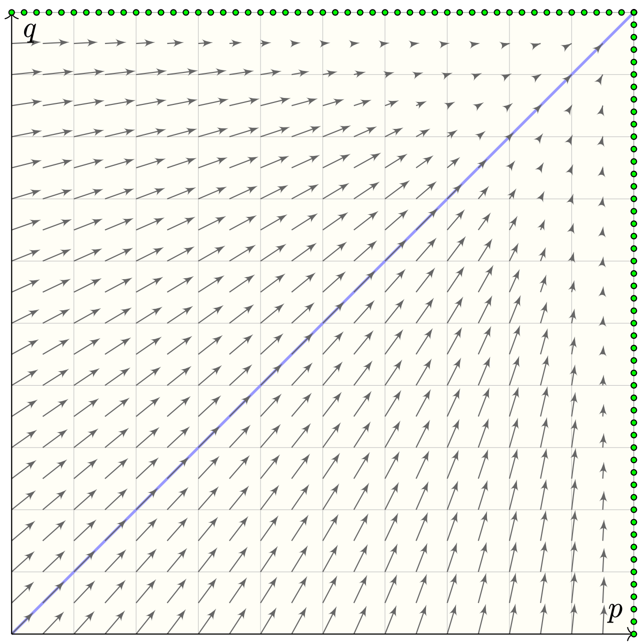
Taube oder Falke?

$a = 1/2$



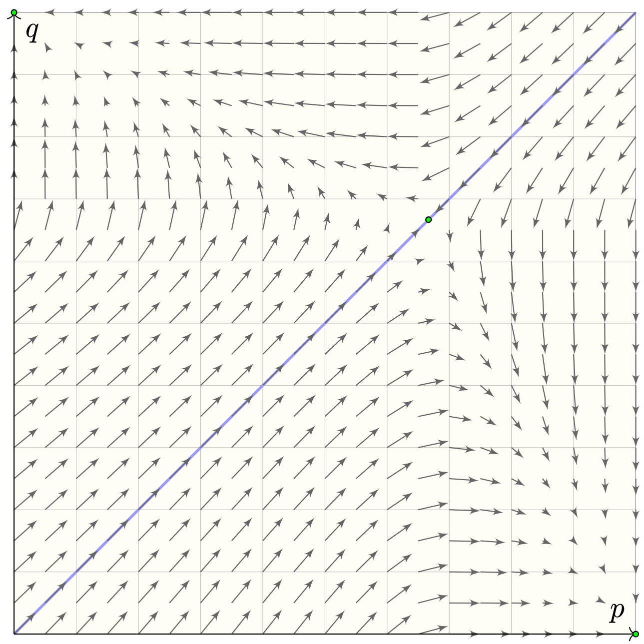
Taube oder Falke?

$a = 1$



Taube oder Falke?

$a = 3/2$



Taube oder Falke?

Lösung: Für $a < 1$ existiert genau ein Gleichgewicht, $(\text{Falke}, \text{Falke})$, denn die Strategie Taube wird strikt dominiert durch die Strategie Falke. Eine Mutation Taube kann sich in dieser reinen Falken–Population nicht durchsetzen, da sie offensichtlich Fitnessnachteile hat.

Im Sonderfall $a = 1$ gibt es unendlich viele gemischte Gleichgewichte, nämlich (s, Falke) und (Falke, s) für jede gemischte Strategie $s \in \bar{S}$.

Für $a > 1$ hat das Spiel die beiden reinen Gleichgewichte $(\text{Taube}, \text{Falke})$ und $(\text{Falke}, \text{Taube})$, beide sind strikt, und zudem noch genau ein gemischtes Gleichgewicht (s, s) wie nachfolgend angegeben.

Für $a \ge 1$ hat das Spiel genau ein symmetrisches Gleichgewicht:

$$s = \tfrac{a-1}{a} \cdot \text{Taube} + \tfrac{1}{a} \cdot \text{Falke}.$$

Die folgende Rechnung bestätigt, dass dies ein Gleichgewicht ist.
Ist diese Strategie evolutionär stabil? Wir wenden die Definition an!

Taube oder Falke?

Wir vergleichen das Gleichgewicht s mit einer alternativen Strategie

$$\tilde{s} = (1-p) \cdot \text{Taube} + p \cdot \text{Falke}.$$

Wir finden durch geduldiges Ausrechnen:

$$\begin{aligned}
v(\text{Taube}, s) &= \tfrac{a-1}{a}, & v(s, \text{Taube}) &= \tfrac{a+1}{a}, & v(\text{Taube}, \tilde{s}) &= 1-p,\\
v(\text{Falke}, s) &= \tfrac{a-1}{a}, & v(s, \text{Falke}) &= \tfrac{1-a}{a}, & v(\text{Falke}, \tilde{s}) &= 2-p-ap,\\
v(\tilde{s}, s) &= \tfrac{a-1}{a}, & v(s, \tilde{s}) &= \tfrac{a+1-2ap}{a}, & v(\tilde{s}, \tilde{s}) &= 1-ap^2.
\end{aligned}$$

Hier gilt $v(s,s) = v(\tilde{s}, s) = (a-1)/a$ und $v(s,\tilde{s}) > v(\tilde{s},\tilde{s})$ für $p \ne 1/a$:

$$v(s,\tilde{s}) - v(\tilde{s},\tilde{s}) = \tfrac{a+1-2ap}{a} - (1-ap^2) = a\big(p - \tfrac{1}{a}\big)^2 \ge 0$$

Die Strategie s ist somit evolutionär stabil gegen alle $\tilde{s} \in \bar{S} \smallsetminus \{s\}$.
Eine Population nur aus Falken ist instabil, ebenso nur aus Tauben.
Nur eine Population in der richtigen Mischung $s = \frac{a-1}{a} \cdot \text{Taube} + \frac{1}{a} \cdot \text{Falke}$ ist im Nash–Gleichgewicht. Sie ist zudem sogar evolutionär stabil gegen *alle* Eindringlinge / Mutanten $\tilde{s} \in \bar{S} \smallsetminus \{s\}$, egal ob rein oder gemischt.

Taube oder Falke?

Ich betone nochmals, dass wir hier nur symmetrische Spiele und symmetrische Strategien betrachten: Die gesamte Population spielt gegen sich selbst, das ist eine besondere Situation. In den Graphiken bedeutet das: Wir bewegen uns ausschließlich auf der Diagonalen!

Erlauben wir auch asymmetrische Strategiepaare $(s_1, s_2) \in \bar{S} \times \bar{S}$, so ist das obige Gleichgewicht (s, s) nicht stabil, wie die Graphik zeigt:
Wir betrachten stetig verteilte zufällige Abweichung (s_1, s_2) von (s, s). Fast jede entwickelt sich unter der Dynamik des Nash–Vektorfeldes zu einem der beiden Gleichgewichte $(\text{Taube}, \text{Falke})$ oder $(\text{Falke}, \text{Taube})$.
Diese beiden Nash–Gleichgewichte sind strikt, in diesem Sinne stabil. Die beiden Attraktionsbecken werden durch die Diagonale getrennt.

Ob ein Nash–Gleichgewicht (s, s) evolutionär stabil ist oder nicht, lässt sich am Nash–Vektorfeld erahnen, aber nicht sicher ablesen. Hierzu benötigen wir die Definition und eine sorgfältige Rechnung! Die vorige Aufgabe führt diese Untersuchung exemplarisch aus.

Taube oder Falke?

Einen guten Überblick gibt die Klassifikation aller 2×2–Spiele bis auf schwach monotone Isomorphie. Der Parameter a definiert eine Homotopie von Spielen, wobei wir die Isomorphieklasse wechseln!

Kommt die Strategie Falke in einem evolutionär stabilen Gleichgewicht vor, dann zwingend auch die verlustreiche Konfrontation $(\text{Falke}, \text{Falke})$.
Mit **korrelierten Gleichgewichten** lässt sich dies vermeiden!
Hierzu benötigen beide ein einfach zu beobachtendes Signal.
Die **Bourgeois-Strategie** bricht die Symmetrie wie folgt:
Spieler A ist derjenige, der die Beute zuerst besitzt / erjagt / findet.
Spieler B ist derjenige, der als zweites bei der Beute ankommt.
Dann ist die reine Strategie $(\text{Falke}, \text{Taube})$ ein Nash–Gleichgewicht.
Es ist statistisch weniger verlustreich als gemischte Gleichgewichte.
Dies erklärt zugleich das häufig beobachtete **Revierverhalten**.
Ebenso ist $(\text{Taube}, \text{Falke})$ ein Nash–Gleichgewicht, aber unsinnig.
Praktisch hieße das nämlich: Der aktuelle Besitzer gibt bei jedem drohenden Konflikt freiwillig seine Beute auf. Das wäre höchst instabil.

Dynamik von Rock-Paper-Lizards

Wir untersuchen noch einmal das Spiel *Schere-Stein-Papier*, diesmal modifiziert durch die Auszahlung $a \in \mathbb{R}$ bei Gleichstand.

	s_1	s_2	s_3
s_1	a / a	-1 / $+1$	$+1$ / -1
s_2	$+1$ / -1	a / a	-1 / $+1$
s_3	-1 / $+1$	$+1$ / -1	a / a

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & +1 \\ +1 & a & -1 \\ -1 & +1 & a \end{pmatrix}$$

Aufgabe: (1) Finden Sie hier alle (symmetrischen) Gleichgewichte in gemischten Strategien. Welche davon sind evolutionär stabil?

(2) Formulieren Sie die Populationsdynamik $\dot{x} = f(x)$ auf $\Delta^2 \subset \mathbb{R}^3$ (a) gemäß dem Nash–Feld und (b) gemäß der Replikatorgleichung.

Dynamik von Rock-Paper-Lizards

Lösung: (2a) Das Nash–Feld $f : \Delta^2 \to \mathbb{R}^2$ ist

$$f_i(x) = \frac{x_i + [e_i^\top A\,x - x^\top A\,x]^+}{1 + \sum_{j=0}^{2} [e_j^\top A\,x - x^\top A\,x]^+} - x_i$$

(2b) Die Repliktorgleichung ist gegeben durch $f : \Delta^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f_i(x) = x_i [e_i^\top A\,x - x^\top A\,x]$$

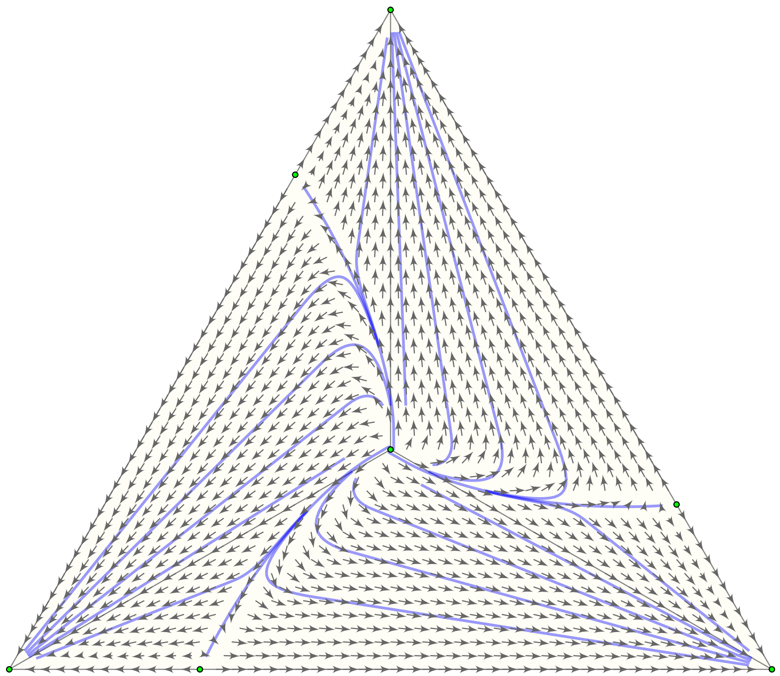
Die folgenden Skizzen zeigen die Populationsdynamik für verschiedene Parameterwerte $a \in \mathbb{R}$ sowie einige Flusslinien dieser beiden Felder.

Zu jedem Startpunkt $x(t_0)$ garantiert der Satz von Picard–Lindelöf lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $x : \mathbb{R} \supset I \to \Delta^2$. Dies gilt sogar global, für maximale Lösungen $x : \mathbb{R} \to \Delta^2$: Alle Flusslinien verlaufen im Simplex Δ^2, denn das Vektorfeld f zeigt nirgends nach außen.

🙂 Die zyklische Dynamik für $a = 0$ lässt sich in der Natur beobachten! Der Seitenfleckenleguan [*side-blotched lizard*] tritt in drei Varianten auf, deren Häufigkeit wie bei Schere-Stein-Papier zyklisch wechselt, siehe `en.wikipedia.org/wiki/Side-blotched_lizard`.

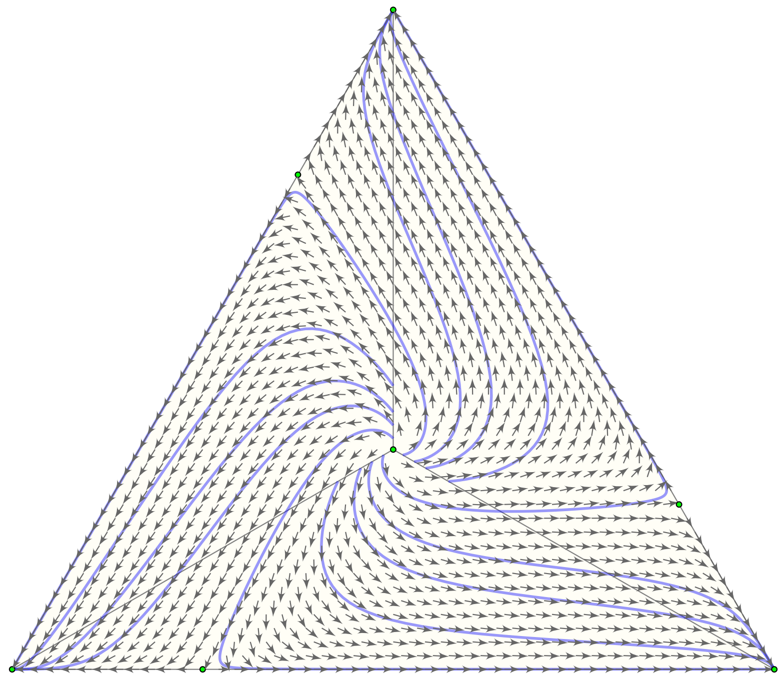
Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards

$a = 2$



Replikatordynamik von Rock-Paper-Lizards

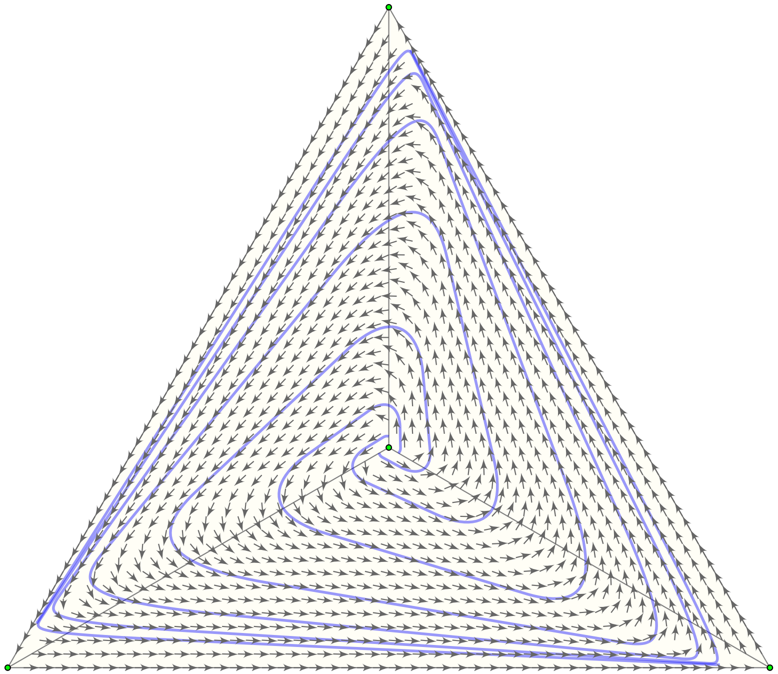
$a = 2$



Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards

G353
Erläuterung

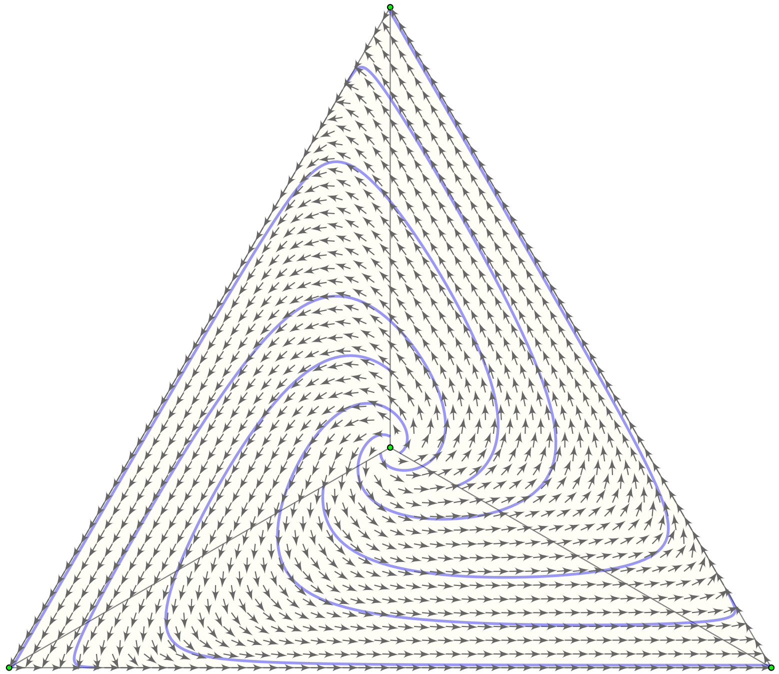
$a = 1$



Replikatordynamik von Rock-Paper-Lizards

G354

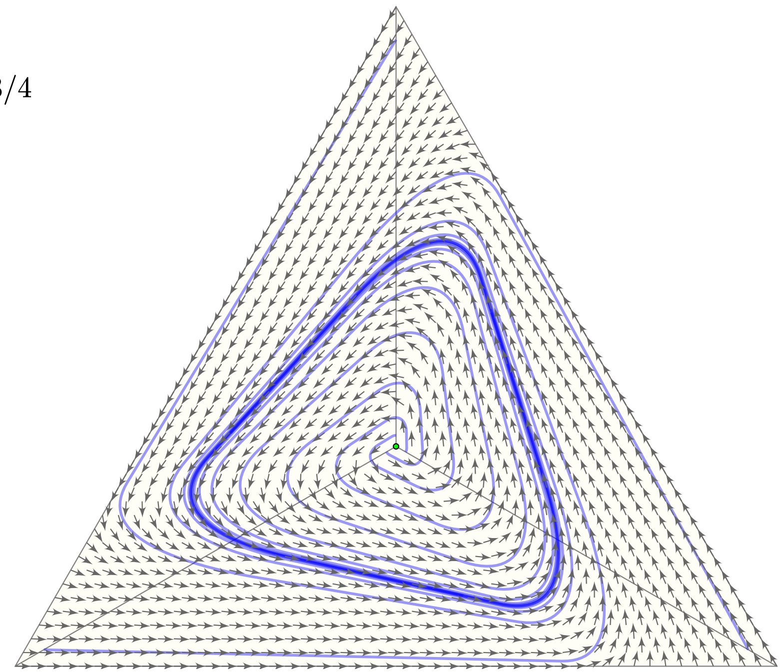
$a = 1$



Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards

G355
Erläuterung

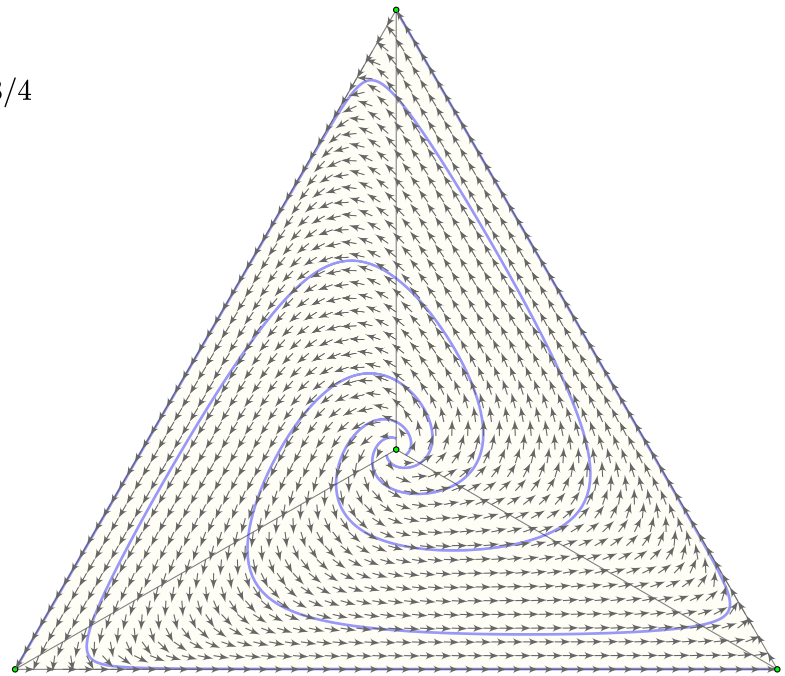
$a = 3/4$



Replikatordynamik von Rock-Paper-Lizards

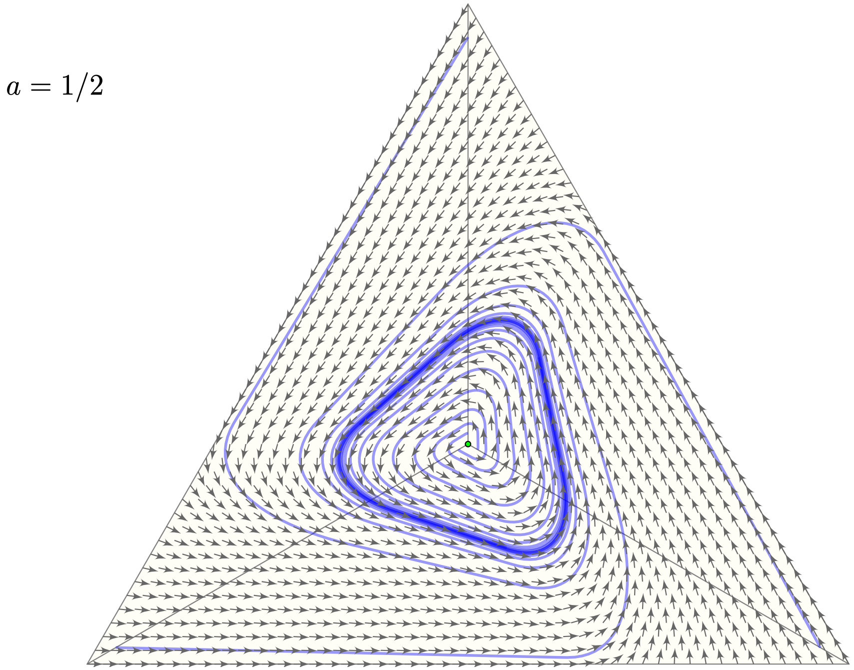
G356

$a = 3/4$



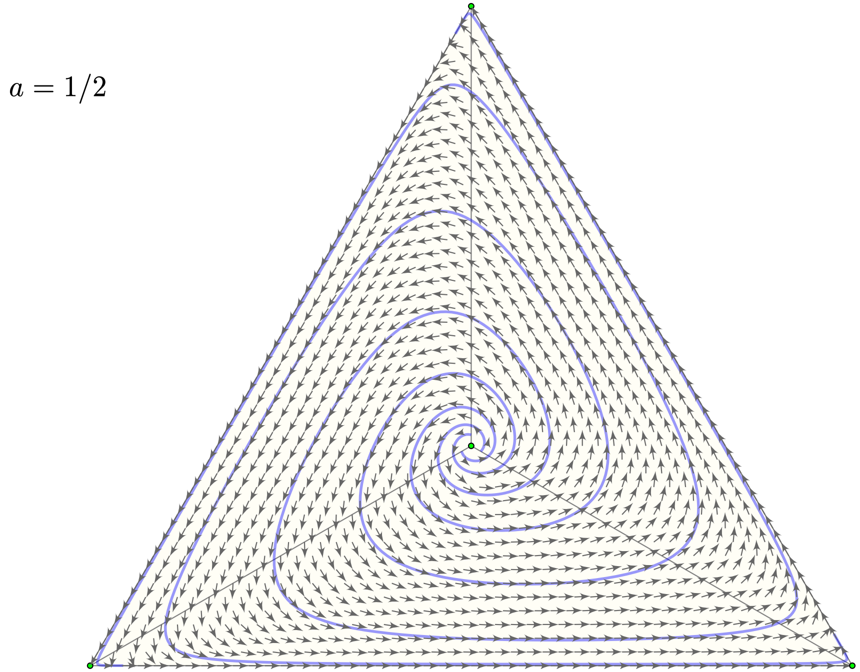
Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards

G357
Erläuterung



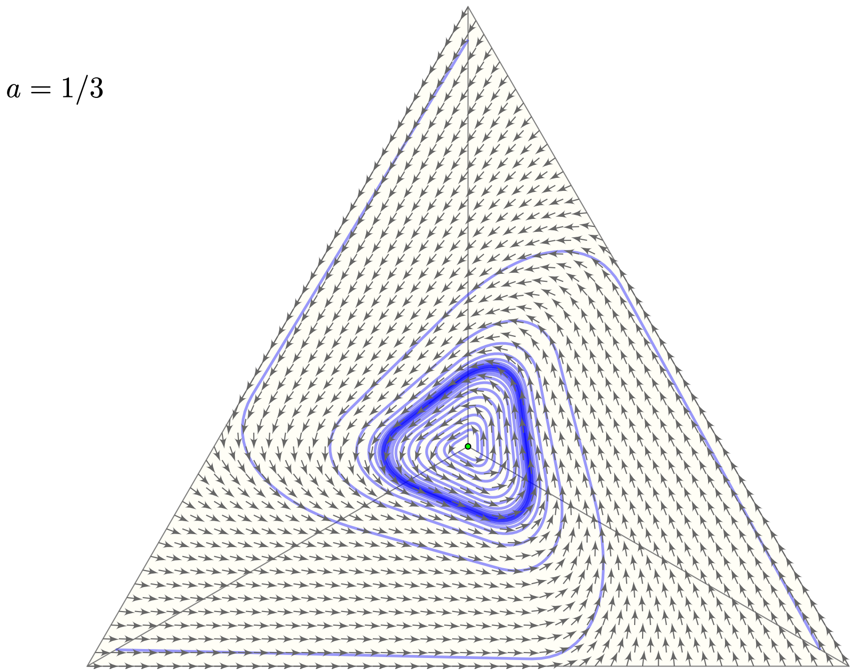
Replikatordynamik von Rock-Paper-Lizards

G358



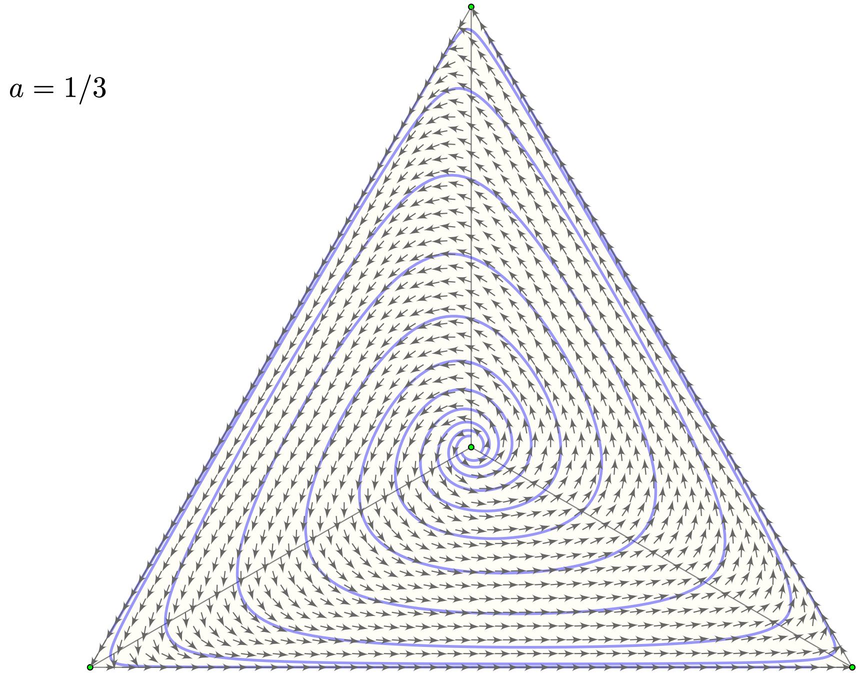
Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards

G359
Erläuterung



Replikatordynamik von Rock-Paper-Lizards

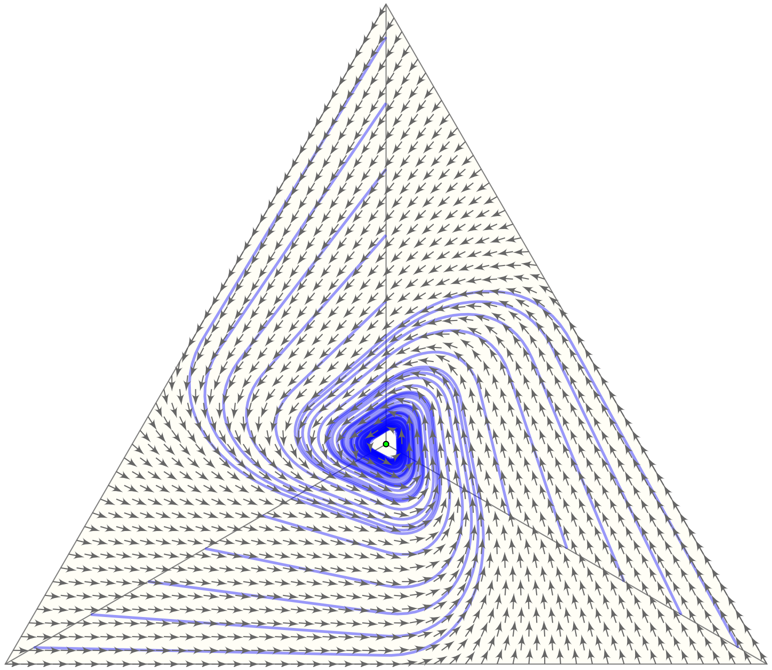
G360



Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards

G361
Erläuterung

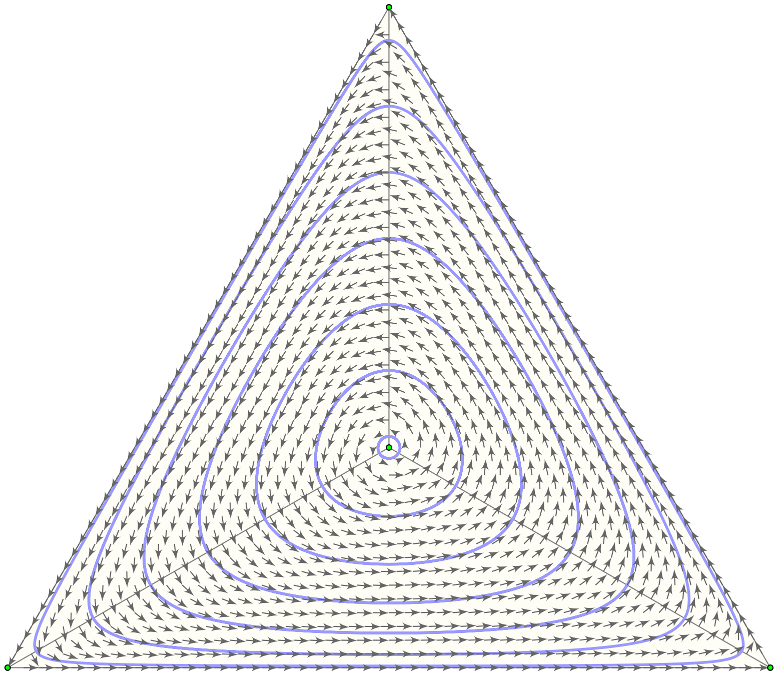
$a = 0$



Replikatordynamik von Rock-Paper-Lizards

G362

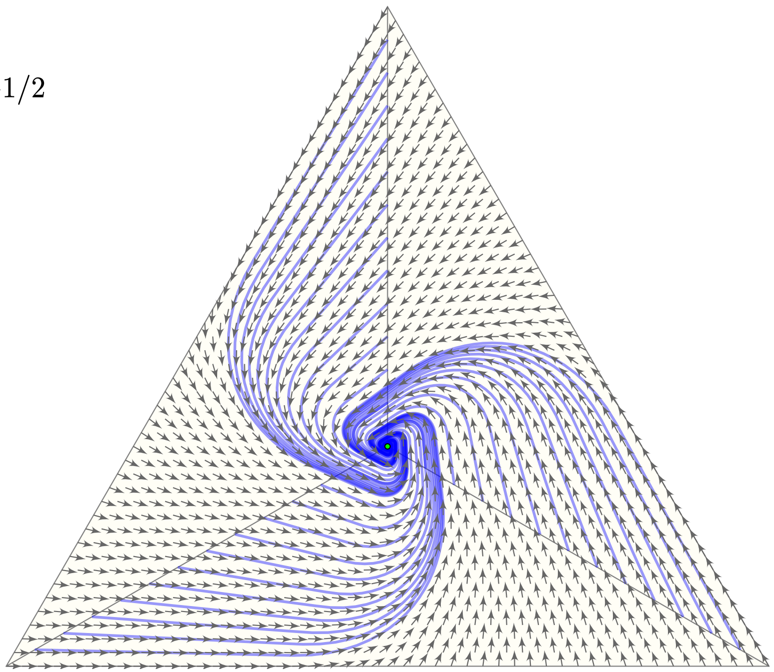
$a = 0$



Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards

G363
Erläuterung

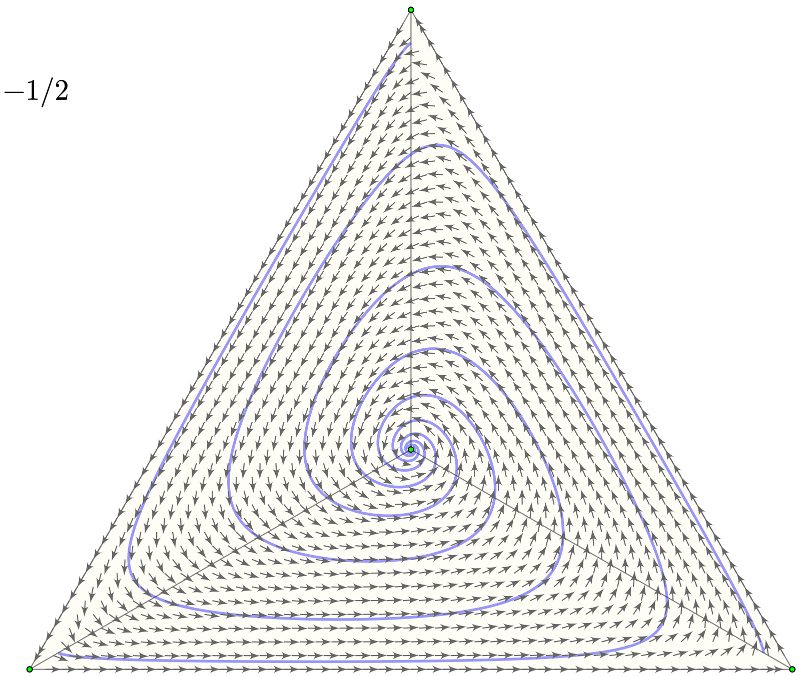
$a = -1/2$



Replikatordynamik von Rock-Paper-Lizards

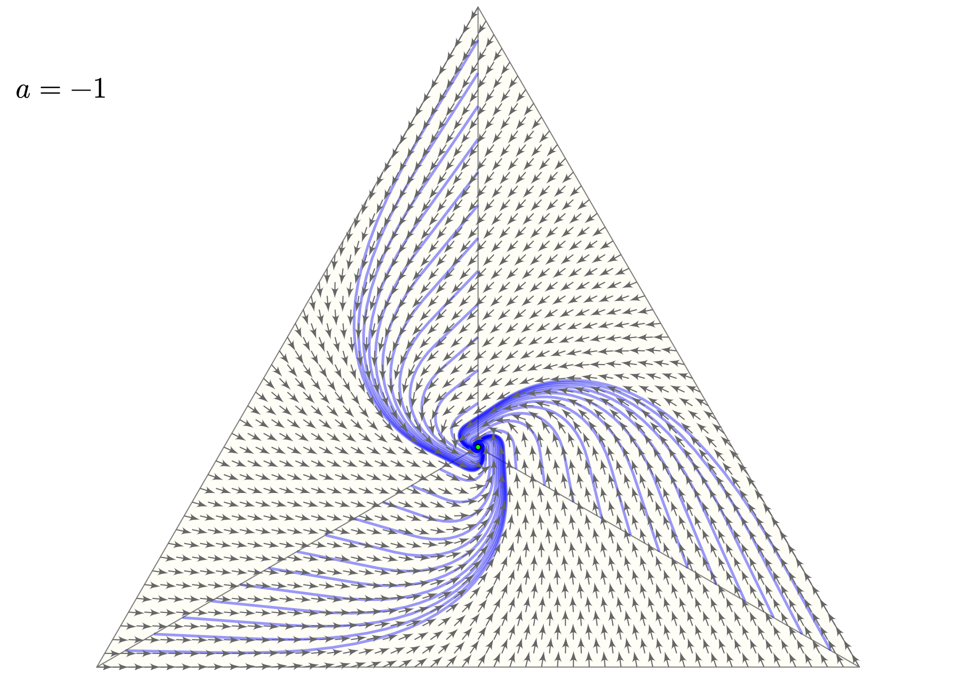
G364

$a = -1/2$



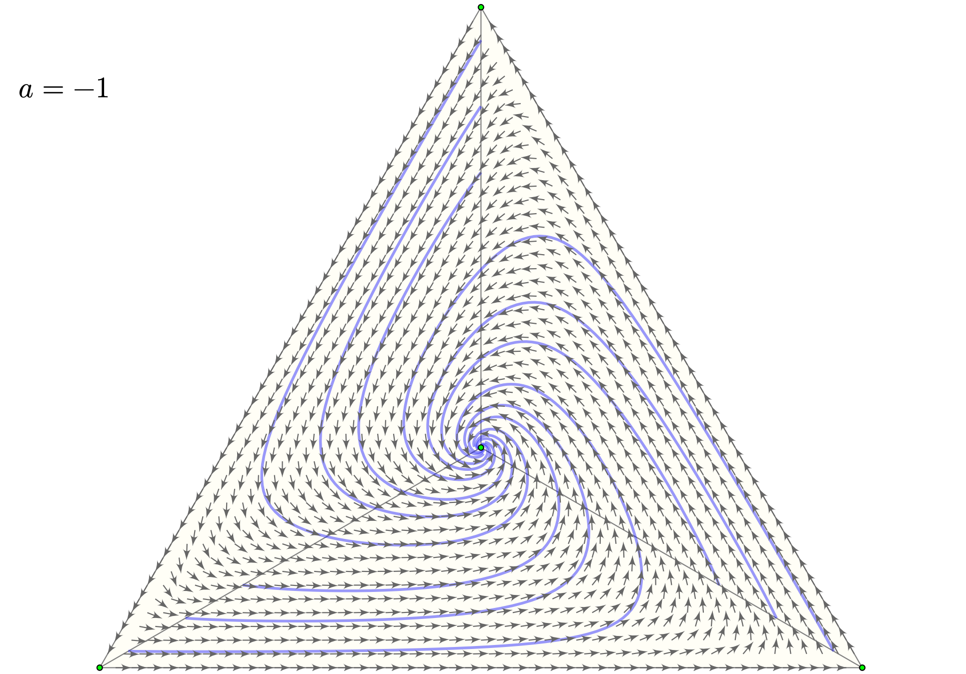
Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards

G365
Erläuterung



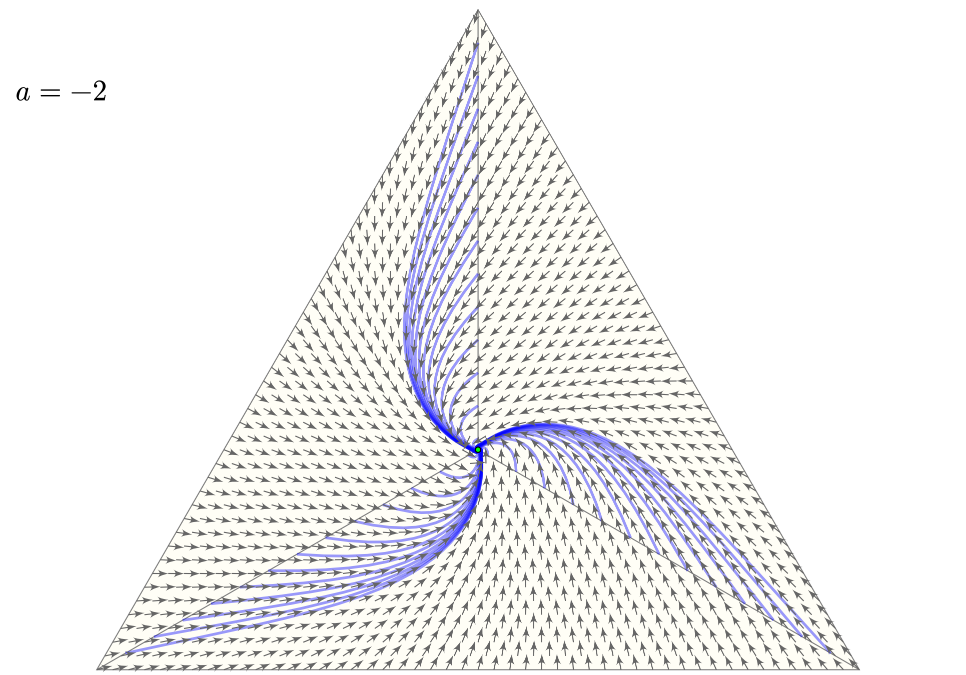
Replikatordynamik von Rock-Paper-Lizards

G366



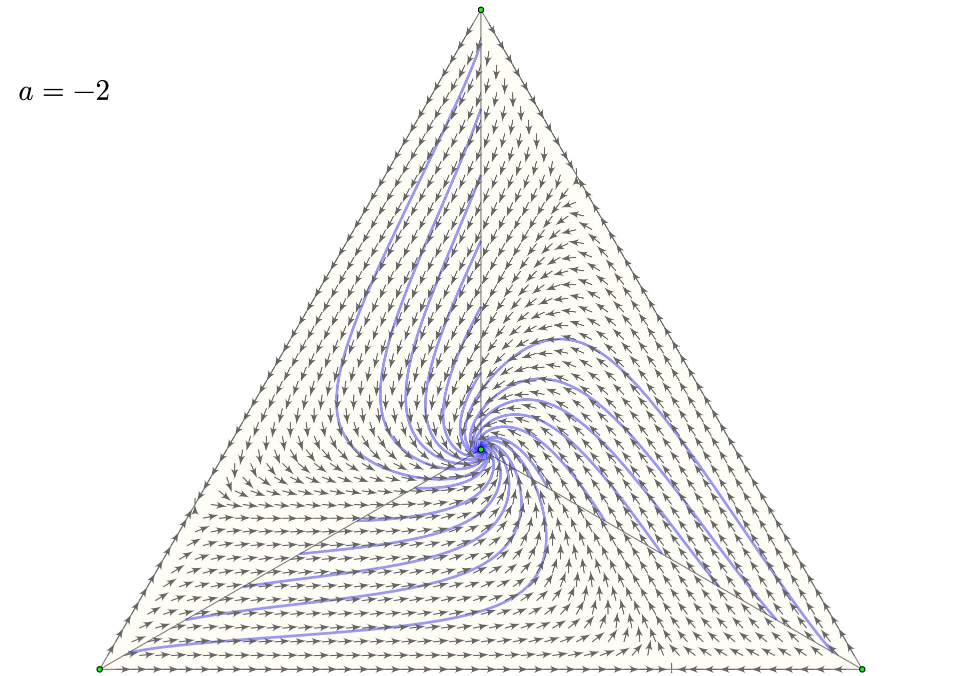
Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards

G367
Erläuterung

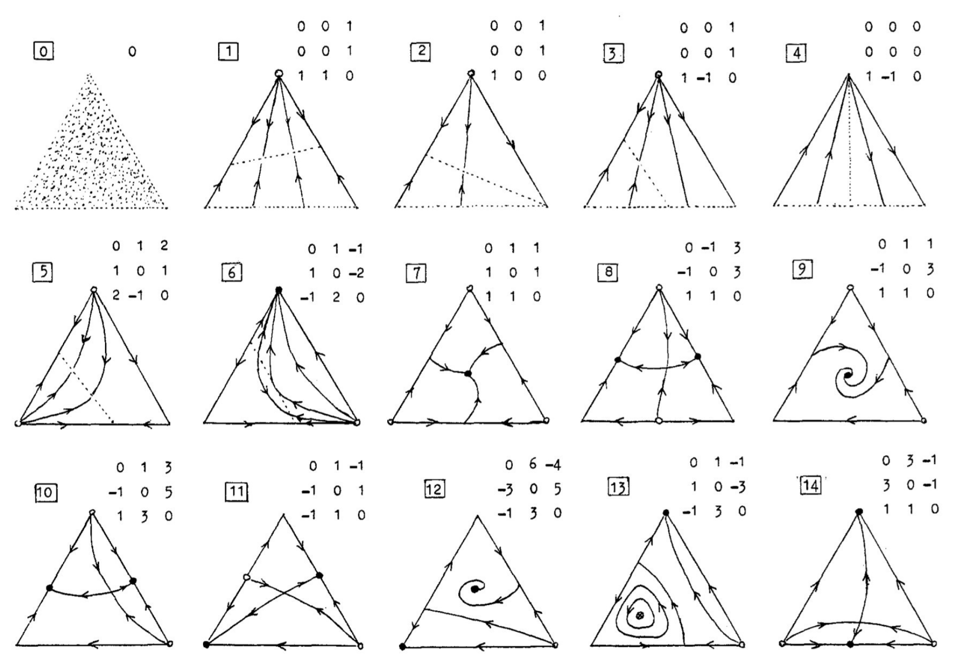


Replikatordynamik von Rock-Paper-Lizards

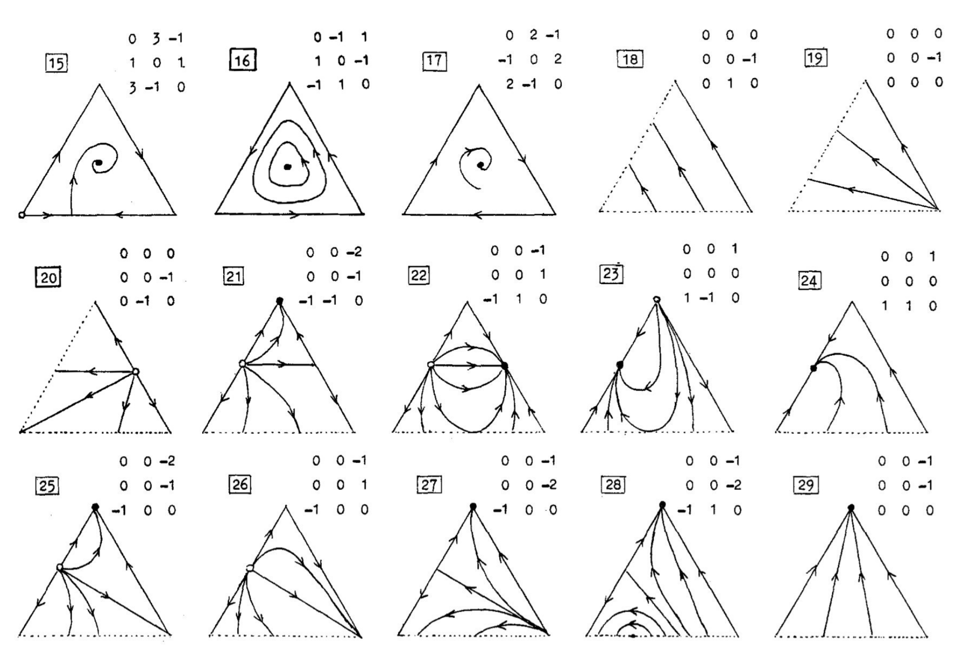
G368



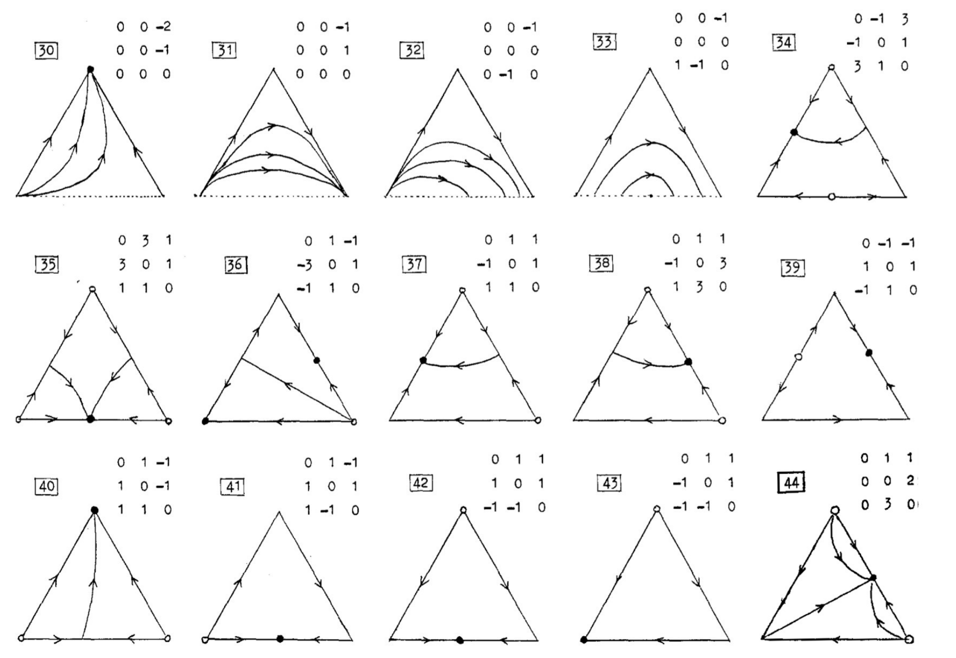
Mögliche Dynamik der Replikatorgleichung



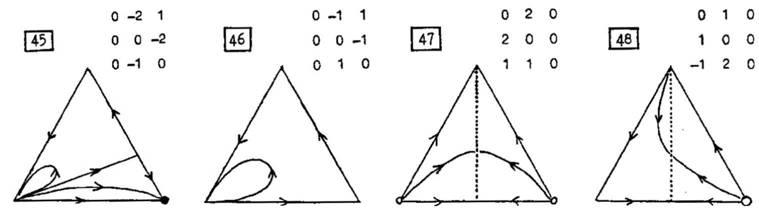
Mögliche Dynamik der Replikatorgleichung



Mögliche Dynamik der Replikatorgleichung



Mögliche Dynamik der Replikatorgleichung



Diese Graphiken zeigen die mögliche Dynamik der Replikatorgleichung nach I.M. Bomze: *Lotka–Volterra equation and replicator dynamics: a two-dimensional classification.* Biological Cybernetics 48 (1983), 201–211, mit Korrekturen und Ergänzungen zu den Fällen 16, 20, 44–48 aus I.M. Bomze: *Lotka–Volterra equation and replicator dynamics: new issues in classification.* Biological Cybernetics 72 (1995), 447–453.

Projekt: Was wird hier klassifiziert? modulo welcher Äquivalenz? Wie ist demnach die Aussage des hier zu formulierenden Satzes? Wie lässt sich das möglichst übersichtlich organisieren und beweisen? Wie vermeidet man nachweislich alle Auslassungen und Dopplungen?

Klein aber mein allein: das LUPI-Spiel

Das folgende schöne Spiel kennen Sie aus dem Mock Exam:
Jede Spieler:in $i \in I := \{1, \dots, n\}$ wählt eine Zahl $x_i \in X \subseteq \mathbb{N}$.
Die kleinste Einzelnennung gewinnt: *least unique positive integer.*
Wir spielen Sie optimal? für $n = 3, 4, 5, \dots$ oder zufällige Spielerzahl?

☺ Dieses Spiel ist ebenso einfach wie faszinierend. Sie können es selbst ausprobieren und mit Freunden spielen. Dabei lassen sich alle Konzepte der Spieltheorie wunderbar beobachten: Rationalität, Gleichgewichte, Evolution, Koalitionen, etc. Zudem war dies ein echtes Gewinnspiel:

Limbo, staatliche Lotterie in Schweden vom 29. Januar bis 24. März 2007, $X = \{1, \dots, 99\,999\}$, Spieleinsatz 1€, Auszahlung 18%, mindestens 10 000€. Feiner doch wichtiger Unterschied: Der Gewinn wird immer ausgezahlt, gleich aufgeteilt unter der kleinsten Zahl mit der seltensten Nennung.

Maximales Drama: Die Lotterie wurde gestoppt nachdem am 23. März eine Tageszeitung berichtete, Spieler:innen hätten sich abgesprochen. Das LUPI-Spiel bietet schöne Herausforderungen und Überraschungen. Daher erfreut es sich seit einigen Jahren großer Beliebtheit!

Klein aber mein allein: das LUPI-Spiel

Fun fact: Im Lateinischen heißt *lupus* ‘Wolf’, der Plural ist *lupi* ‘Wölfe’. Das LUPI-Spiel ist eine Art inverse Auktion und wird in der jüngeren Literatur ausgiebig diskutiert. Ich nenne hierzu nur zwei Artikel:

📖 R. Östling, J.T. Wang, E.Y. Chou, C.F. Camerer: *Testing Game Theory in the Field: Swedish LUPI Lottery Games.* American Economic Journal: Microeconomics 3 (2011) 1–33. `doi.org/10.1257/mic.3.3.1`

📖 B. Szentes: *The three-player lowest unique number game.* Economics Letters 251 (2025) 112299. `doi.org/10.1016/j.econlet.2025.112299`

Das LUPI-Spiel eignet sich hervorragend für den schulischen Unterricht, als eine gelungene Verbindung von Mathematik und Gamification (A4). Schüler:innen können daran lernen, mit stochastischen Informationen umzugehen und rational zu entscheiden, dank quantitativer Modelle!

Das LUPI – Projekt
(Dr. Stefanie Schumacher & Dr. Thomas Krohn)

UNIVERSITÄT BIELEFELD
Fakultät für Mathematik

Didaktik der Mathematik
Universität Leipzig

`www.mathcs.uni-leipzig.de/math/abteilungen/didaktik-der-mathematik/lupi-spiel`

Klein aber mein allein: das LUPI-Spiel

Aufgabe: Formulieren Sie die Gewinnfunktion $u : X^n \to \mathbb{R}^n$.
Finden Sie alle reinen Nash–Gleichgewichte $(x_1 \le \dots \le x_n) \in \mathrm{NE}(u)$.
Gibt es symmetrische Nash–Gleichgewichte $(x, \dots, x) \in \mathrm{NE}(u)$?

Lösung: Genau dann gilt $u_i(x) = 1$, wenn $\sharp\{\, j \in I \mid x_j = x_i \,\} = 1$ und $\sharp\{\, j \in I \mid x_j = v \,\} \neq 1$ für alle $v < x_i$. Andernfalls gilt $u_i(x) = 0$.

Manche Gleichgewichte, wie $x = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 4)$, sind offensichtlich: Eine der Zahlen x_i wurde nur einmal gewählt, aber jede kleinere Zahl $v < x_i$ mindestens zweimal. (Übung: Das ist ein Gleichgewicht.)

Überraschend: Auch $(0, 0, 1, 1, 5)$ ist ein Gleichgewicht. Die höchste Zahl $x_i = \max x$ wurde genau einmal gewählt, $0, \dots, v-1$ genau zweimal, $v, \dots, x_i - 1$ keinmal. Diese Gleichgewichte werden leicht übersehen!

Für $n \ge 3$ ist jedes Gleichgewicht von obiger Form. (Übung: Warum?)
Im Sonderfall $n = 2$ ist zudem $x = (0, 0)$ ein Nash–Gleichgewicht: Keine Spieler:in kann ihr Ergebnis aus eigener Kraft verbessern.

Für $n \ge 3$ gibt es kein symmetrisches *reines* Nash–Gleichgewicht, denn symmetrisch hieße hier, alle Spieler:innen wählen dieselbe Zahl.

Klein aber mein allein: das LUPI-Spiel

Diese Analyse der reinen Nash–Gleichgewichte erinnert uns eindringlich an eine allgemeine Erfahrung: Eine vorgelegte Lösung zu *prüfen* ist meist leicht, doch eine oder gar alle Lösungen zu *finden* ist spürbar schwerer. Die Aufgabe ist daher eine gute Fingerübung zur Sorgfalt und Präzision.

Wir erkennen zudem: Reine Strategien sind für dieses Spiel viel zu eng, denn es scheint unsinnig, sich auf eine bestimme Wahl $x \in X$ festzulegen. Wie bei *Schere-Stein-Papier* möchten Spieler:innen hier randomisieren. Daher gehen wir im Folgenden zu gemischten Strategien $p \in \bar{X}$ über.

Besonders interessant sind *symmetrische* Nash–Gleichgewichte $(p, \dots, p) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$. Wie wir gerade gesehen haben, ist dies in reinen Strategien unmöglich. In gemischten Strategien hingegen existiert, wie wir gleich zeigen, genau ein symmetrisches Nash–Gleichgewicht.

Hier können wir wunderbar all unsere spieltheoretischen Werkzeuge erproben und schärfen: theoretisch, rechnerisch und experimentell. Wir lernen damit sowohl die individuelle Randomisierung als auch die Populationsdynamik in evolutionärer Sichtweise besser verstehen.

Das symmetrische Gleichgewicht im LUPI-Spiel

Aufgabe: Formulieren Sie für $n = 3$ die Gewinnfunktion $\bar{u} : \bar{X}^3 \to \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie alle symmetrischen Gleichgewichte $(p, p, p) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$.

Lösung: (a) Wir nutzen den Raum der gemischten Strategien

$$\bar{X} = \left\{ p : X \to [0,1] : x \mapsto p_x \,\middle|\, \sum_{x \in X} p_x = 1 \right\}.$$

Hierauf ist die Gewinnfunktion $\bar{u}_1 : \bar{X}^3 \to [0,1]$ gegeben durch

$$\bar{u}_1(p,q,r) = \sum_{x \in X} p_x \left[\sum_{v<x} q_v r_v + \sum_{y>x} q_y \sum_{z>x} r_z \right].$$

(b) Wir suchen $(p,p,p) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$. Für jede Alternative $q \in \bar{X}$ gilt also

$$\bar{u}_1(q,p,p) = \sum_{x \in X} q_x \hat{p}_x \quad \text{mit} \quad \hat{p}_x := \sum_{v<x} p_v^2 + \Big(\sum_{y>x} p_y \Big)^2.$$

Nash–Gleichgewicht bedeutet hier $\bar{u}_1(q,p,p) \le \bar{u}_1(p,p,p)$ für alle $q \in \bar{X}$. Das gilt gdw $\hat{p}$ konstant ist. Daraus folgt Eindeutigkeit & Existenz von p.

Das symmetrische Gleichgewicht im LUPI-Spiel

Satz G3B: Lösung des LUPI-Spiels für 3 Spieler

(0) Voller Träger: Gilt $(p,p,p) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$, so folgt $p_x > 0$ für alle $x \in X$.
(1) Konstanz: Es gilt $(p,p,p) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$ gdw $\hat{p}_x = \hat{p}_0$ für alle $x \in X$.
(2) ∃&E: Es existiert genau ein Gleichgewicht $(p,p,p) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$.
(3) Für dieses gilt $p_x = \alpha^x(1-\alpha)$ mit $0 < \alpha < 1$ und $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = 1$.

Beweis: (0) Induktion über x: Es gilt $p_0 > 0$. Andernfalls, für $p_0 = 0$, gilt $\hat{p}_x = 1$; daher wäre $q_0 = 1$ besser, denn $\bar{u}_1(p,p,p) \le 1/3 < 1 = \bar{u}_1(q,p,p)$.
Aus $p_x > 0$ folgt $p_{x+1} > 0$. Andernfalls, für $p_x > 0$ und $p_{x+1} = 0$, gilt $\hat{p}_{x+1} - \hat{p}_x = p_x^2$; daher wäre q besser mit $q_x = 0$ und $q_{x+1} = p_x$.

(1) Nash–Gleichgewicht bedeutet, p maximiert obige Funktion

$$f : \bar{X} \to [0,1] \;:\; q \mapsto \bar{u}_1(q,p,p) = \textstyle\sum_{x \in X} q_x \hat{p}_x.$$

„$\Leftarrow$“: Ist $\hat{p}$ konstant, so auch $f : q \mapsto \hat{p}_0$, insbesondere maximiert p.
„$\Rightarrow$“: Dank (0) hat p vollen Träger. Gäbe es $x, y \in X$ mit $p_x > p_y > 0$, so wäre q besser nach der Verschiebung $q_x = p_x + p_y$ und $q_y = 0$.

Das symmetrische Gleichgewicht im LUPI-Spiel

(2) Eindeutigkeit: Die oben erklärte Zuordnung $p \mapsto \hat{p}$ ist injektiv. Wenn wir also $\hat{p}$ kennen, so existiert dazu höchstens eine Lösung p.

Es gilt $\hat{p}_0 = (1-p_0)^2$ und $\hat{p}_1 = p_0^2 + (1-p_0-p_1)^2$ etc. Daraus lässt sich $p_0, p_1, \dots$ rekursiv berechnen. Dadurch wird $p \in \bar{X}$ eindeutig bestimmt.

Die Existenz ist etwas trickreicher; sie folgt aus der expliziten Lösung (3).

(3) Wir machen den geometrischen Ansatz $p_x = \alpha^x(1-\alpha)$ mit $\alpha \in \,]0,1[$.

$$\begin{aligned}
\hat{p}_{x+1} - \hat{p}_x &= \textstyle\sum_{v<x+1} p_v^2 + \big[\sum_{y>x+1} p_y\big]^2 - \sum_{v<x} p_v^2 - \big[\sum_{y>x} p_y\big]^2 \\
&= \alpha^{2x}(1-\alpha)^2 + \alpha^{2x+4} - \alpha^{2x+2} \\
&= \alpha^{2x}(1 - 2\alpha + \alpha^4) \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Genau dann erhalten wir eine Lösung, wenn $1 - 2\alpha + \alpha^4 = 0$ gilt. Diese Gleichung hat zwei reelle Lösungen, neben 1 noch $\alpha \approx 0.54369$. Letzteres ist die Nullstelle von $x^3 + x^2 + x - 1 = (x^4 - 2x + 1)/(x-1)$.

Damit haben wir gezeigt: Für $n = 3$ Spieler und $X = \mathbb{N}$ hat das LUPI-Spiel genau ein symmetrisches Nash–Gleichgewicht, $p_x = \alpha^x(1-\alpha)$. $\boxed{\text{QED}}$

Das symmetrische Gleichgewicht im LUPI-Spiel

Bemerkung: Bereits Aussage (0) ist erstaunlich: Jedes Gleichgewicht hat vollen Träger, das heißt, selbst beliebig große Zahlen $x \in X$ werden mit positiver Wkt gespielt. Warum ist das rational, selbst bei nur 3 Spielern? Das ist keineswegs intuitiv, doch wir können es sorgsam nachrechnen!

(1) Die Konstanz von $\hat{p}$ haben wir oben direkt nachgewiesen. Alternativ gelingt dies mit den Techniken der Analysis: Zu der Nebenbedingung $h(q) := \sum_{x \in X} q_x = 1$ existiert ein Lagrange–Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ sodass

$$\partial f / \partial q_x \stackrel{!}{=} \lambda \cdot \partial h / \partial q_x \quad \text{also} \quad \hat{p}_x = \lambda.$$

Wiederholen Sie die Methode der Lagrange–Multiplikatoren. Warum lässt sie sich hier anwenden? Wird endliche Dimension benötigt? Gelingt dies hier auch bei unendlich vielen Freiheitsgraden?

(2) Führen Sie Eindeutigkeit und Existenz aus. Wie hilft Monotonie? Wie hilft Nashs Existenzsatz in symmetrisierter Formulierung E2o?

(3) Diese explizite Lösung, als geometrische Verteilung, ist ein Glücksfall speziell für $n = 3$. Für $n \ge 4$ gelingt die Lösung nur noch numerisch.

Replikatordynamik des LUPI-Spiels

Aufgabe: Nähern Sie das eindeutige symmetrische Nash–Gleichgewicht für $n = 3$ als Grenzwert der Replikatordynamik $\dot{p}_x = p_x(1 \cdot \hat{p}_x - \sum_y p_y \hat{p}_y)$.

Numerische Lösung: Wir berechnen die Gewinnwkt $\hat{p} : X \to [0, 1]$:

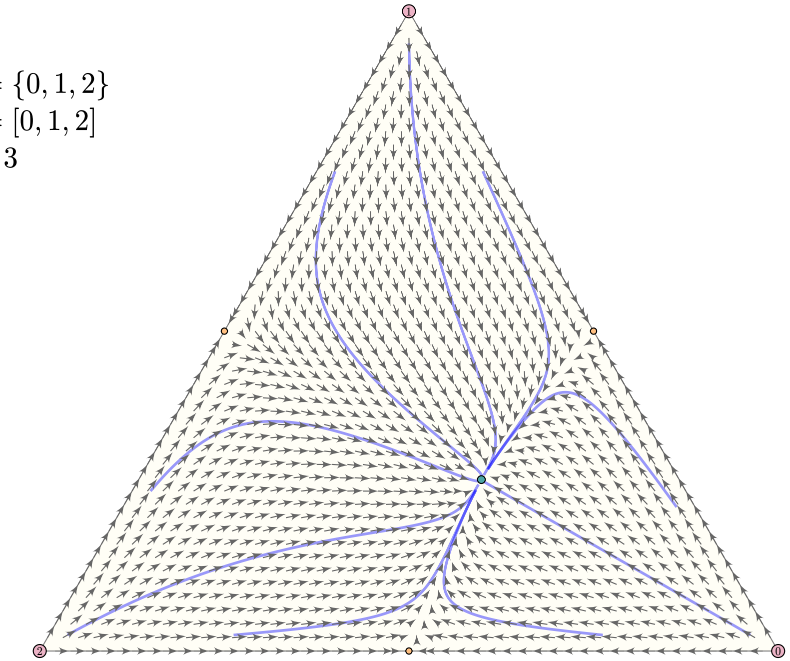
```
xmax = 13                                      # choose x from X = {0,...,xmax-1}
p = [ 1/xmax for x in range(0, xmax) ]         # our initial strategy p is uniform
def win(p):                                    # winning probabilities with 3 players
    return [ sum( p[v]**2 for v in range(0, x) ) +
             sum( p[y] for y in range(x+1, xmax) )**2 for x in range(0, xmax) ]
```

Dann folgen wir der Replikatordynamik (Euler–Verfahren mit $\Delta t = 1$, besser wäre natürlich Runge–Kutta, doch hier genügt *quick and dirty*):

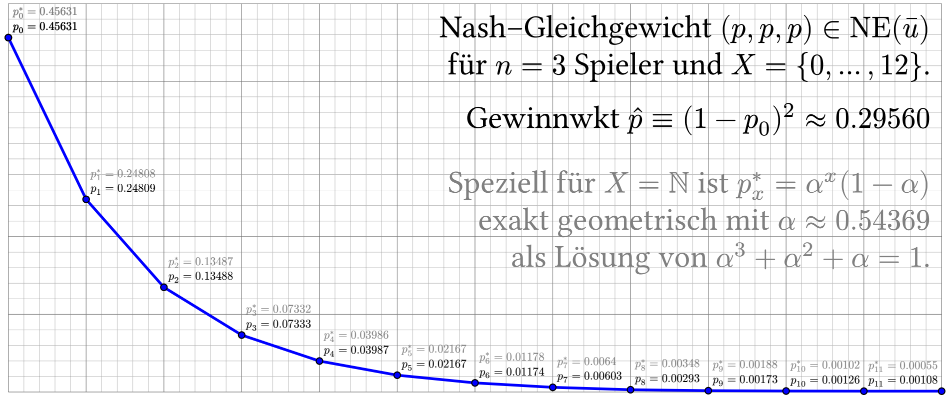
```
step = 1.0; eps = 1e-5                         # time step and tolerated error
def replicator_limit(p):                       # apply the replicator dynamics to p
    while True:                                # repeat until within tolerance
        w = win(p)
        if max( abs( w[0] - w[x] ) for x in range(0, xmax) ) < eps: return p
        average = sum( p[x] * w[x] for x in range(0, xmax) )
        for x in range(0, xmax): p[x] += p[x] * (w[x] - average) * step
```

Replikatordynamik des LUPI-Spiels

$X = \{0, 1, 2\}$
$\bar{X} = [0, 1, 2]$
$n = 3$



Replikatordynamik des LUPI-Spiels



Nash–Gleichgewicht $(p, p, p) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$
für $n = 3$ Spieler und $X = \{0, \dots, 12\}$.

Gewinnwkt $\hat{p} \equiv (1 - p_0)^2 \approx 0.29560$

Speziell für $X = \mathbb{N}$ ist $p_x^* = \alpha^x(1 - \alpha)$
exakt geometrisch mit $\alpha \approx 0.54369$
als Lösung von $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = 1$.

Die vorige Folie zeigt die Dynamik für drei Optionen, $X = \{0, 1, 2\}$; für mehr Optionen lässt sich dies höherdimensional nur schwer skizzieren. Stattdessen nenne ich das gesuchte Nash–Gleichgewicht als Fixpunkt p.

Für $X = \mathbb{N}$ haben wir oben die geometrische Verteilung p^* berechnet. Für $X = \{0, \dots, M\}$ mit wachsendem M nähert sich p schnell an p^* an. Schon für moderat große M wird die numerische Rechnung überflüssig.

Replikatordynamik des LUPI-Spiels

🙂 Speziell für $n = 3$ Spieler auf $X = \mathbb{N}$ ist p eine besonders einfache Verteilung, nämlich geometrisch $p(x) = \alpha^x(1 - \alpha)$. Das ist ein Glücksfall! Nur im Fall $n = 3$ können wir das symmetrische Nash–Gleichgewicht explizit berechnen, in geschlossener Form, numerisch bestätigt.

Die Replikatordynamik konvergiert recht schnell. Anschaulich kann man das LUPI-Spiel und seine Lösung also gut erlernen durch häufiges Spiel. Das unterstützt die praktische Erprobung und unterstreicht noch einmal die Wirksamkeit unserer spieltheoretischen Analysewerkzeuge.

Die Gewinnwkt ist 0.29560 und somit nur geringfügig kleiner als die theoretische Obergrenze $1/3$. Da sich die drei Spieler nicht absprechen, würde man anschaulich größere Verluste durch Kollisionen erwarten. Doch für $n = 3$ ist das Gleichgewicht noch erstaunlich effizient.

Die drei Spieler können ihre Gesamtausbeute erhöhen, indem sie sich absprechen. **Korreliertes Gleichgewicht:** Sie können ein Los entscheiden lassen, wer von den dreien gewinnt, und spielen dann ein dazu gehöriges *reines* Nash–Gleichgewicht, etwa $(0, 1, 1)$ oder $(1, 0, 1)$ oder $(1, 1, 0)$.

Replikatordynamik des LUPI-Spiels

Aufgabe: Nähern Sie das eindeutige symmetrische Nash–Gleichgewicht für $n = 4$ als Grenzwert der Replikatordynamik $\dot{p}_x = p_x(1 \cdot \hat{p}_x - \sum_y p_y \hat{p}_y)$.

Lösung: Wir folgen dem obigen Vorbild für $n = 3$ Spieler, nun für $n = 4$. Wir suchen $(p,p,p,p) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$. Für jede Alternative $q \in \bar{X}$ gilt

$$\bar{u}_1(q,p,p,p) = \sum_{x \in X} q_x \hat{p}_x \quad \text{mit} \quad \hat{p}_x := \sum_{v<x} \Big(p_v^3 + 3p_v^2 \sum_{y>v} p_y\Big) + \Big(\sum_{y>x} p_y\Big)^3.$$

Nash–Gleichgewicht bedeutet $\bar{u}_1(q,p,p,p) \le \bar{u}_1(p,p,p,p)$ für alle $q \in \bar{X}$. Das gilt gdw $\hat{p}$ konstant ist. Daraus folgt Eindeutigkeit & Existenz von p.

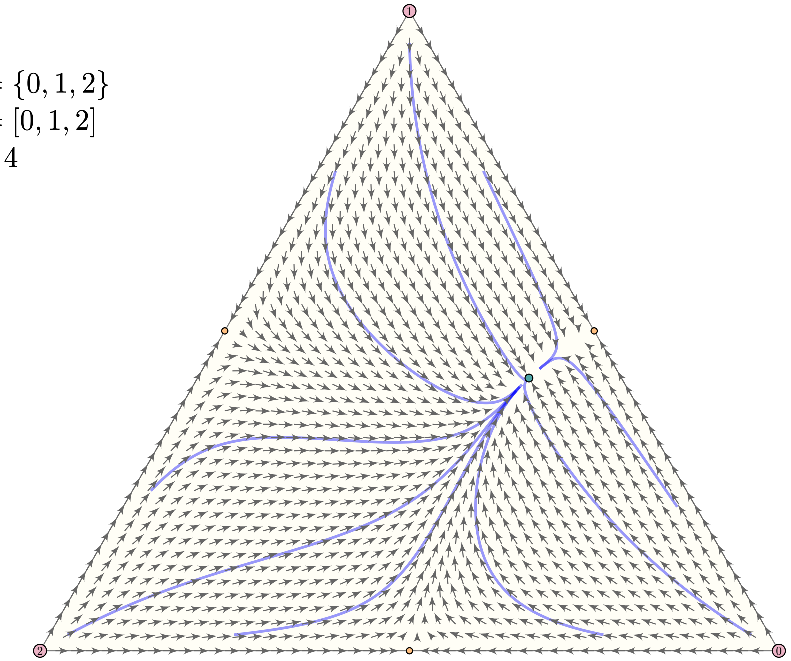
Übung: Beweisen Sie dies nach dem Vorbild von Satz G3B, Aussage (0–2).

Wir haben die Normierung $\sum_{x \in X} p_x = 1$, also $\sum_{y>x} p_y = 1 - \sum_{v \le x} p_v$. Seien $p_0, \dots, p_{x-1}$ bereits berechnet. Dann ist $\hat{p}_x$ monoton fallend in p_x. Somit ist $p \mapsto \hat{p}$ injektiv, also die Lösung p durch $\hat{p}$ eindeutig festgelegt.

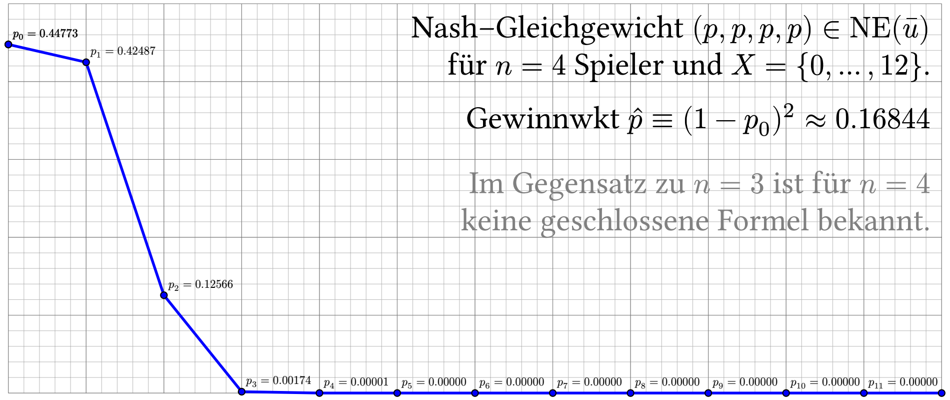
Die Existenz hingegen ist etwas kniffliger. Zu unserem Glück garantiert Nashs Existenzsatz E2o mindestens ein symmetrisches Gleichgewicht. Die numerische Optimierung gelingt wie oben dank Replikatordynamik.

Replikatordynamik des LUPI-Spiels

$X = \{0,1,2\}$
$\bar{X} = [0,1,2]$
$n = 4$



Replikatordynamik des LUPI-Spiels



Nash–Gleichgewicht $(p,p,p,p) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$ für $n = 4$ Spieler und $X = \{0, \dots, 12\}$.

Gewinnwkt $\hat{p} \equiv (1 - p_0)^2 \approx 0.16844$

Im Gegensatz zu $n = 3$ ist für $n = 4$ keine geschlossene Formel bekannt.

Die vorige Folie zeigt die Dynamik für drei Optionen, $X = \{0,1,2\}$; für mehr Optionen lässt sich dies höherdimensional nur schwer skizzieren. Stattdessen nenne ich das gesuchte Nash–Gleichgewicht als Fixpunkt p.

Erstaunlicherweise konzentriert sich p auf wenige, sehr kleine Werte! Für die numerische Berechnung ist das eine willkommene Abkürzung. Mit dieser Technik lösen Sie Spielerzahlen $n = 4, 5, 6, \dots$ und $X \subseteq \mathbb{N}$.

Replikatordynamik des LUPI-Spiels

Hier ensteht eine weitere Überraschung, recht unintutitiv, gar paradox: Beim Übergang von 3 auf 4 Spielern werden höhere Zahlen seltener! Anschaulich erwarten wir höhere Zahlen, um dem Populationsdruck zu entgehen. Das passiert tatsächlich, aber erst für $4, 5, 6, \dots$ Spieler.

Die Kollisionswkt steigt und die Gewinnwkt sinkt dramatisch. Je mehr Spieler:innen teilnehmen, desto ineffizienter das Verfahren und desto lukrativer die Absprachen. Nash–Gleichgewichte berücksichtigen dies nicht, dazu untersuchen wir Koalitionen und korrelierte Gleichgewichte.

Bei einer realen Lotterie, etwa beim schwedischen *Limbo* oder auch bei unserem Mock Exam, kennt die Spieler:in nicht die genaue Anzahl n der Konkurrent:innen. In solchen Fällen ist es ratsam, n als Zufallsvariable zu betrachten. Dieser Fall wird von Östling *et al.* elegant gelöst.

Dieser schöne Artikel untersucht auch die Frage des Lernens aus Daten, sowohl in *Limbo* als auch im Laborexperiment. Es entstehen recht starke Übereinstimmungen, aber auch interessante Abweichungen. Daher bleibt das LUPI-Spiel weiter spannend, sowohl theoretisch als auch praktisch.

Evolutionäre Spielpraxis: Lernen durch Versuch und Irrtum?

Im **Casino Royal** (09.05.2025) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, die evolutionäre Sichtweise anzuwenden, hier nicht biologisch (Gene, Fitness, Reproduktion), sondern didaktisch (Versuch, Irrtum, Aha).

Kartenduell. Gustav Gleich und Uschi Unterschiedlich erhalten je drei Karten: Gustav ♦A, ♣A, ♣2 und Uschi ♦A, ♣A, ♦2. Jede:r spielt verdeckt eine Karte, dann wird verglichen: Spielen beide die 2, so endet das Spiel unentschieden. Sonst: Sind die Farben gleich, so gewinnt Gustav Gleich; sind die Farben unterschiedlich, so gewinnt Uschi Unterschiedlich. Der Gewinner erhält vom Verlierer den Wert der Siegerkarte, $A \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$.

G \ U	♦A	♣A	♦2
♦A	$1,\ -1$	$-1,\ 1$	$1,\ -1$
♣A	$-1,\ 1$	$1,\ -1$	$-2,\ 2$
♣2	$-1,\ 1$	$2,\ -2$	$0,\ 0$

Zunächst werden obige Spielregeln in Prosa laut verlesen. Das kann sich aber keine:r so recht merken. Ein Freiwilliger schreibt die Daten an die Tafel. Wie gelingt das übersichtlich? Als Bimatrixspiel, wie links, das hilft: Normalform, bewährt und effizient!

Evolutionäre Spielpraxis: Lernen durch Versuch und Irrtum?

Wir vereinbaren hierzu, dass in Einheiten von 100€i$to ausgezahlt wird. Teilnehmer:innen bemerken kritisch, dass dies ein Nullsummenspiel ist. Damit sich das Spiel wirklich lohnt, gibt es 100€i$to Startgeld pro Runde. (Am selben Tag wurde dieser Trick morgens in der Vorlesung diskutiert, als Positivierung eines Nullsummenspiels im Simplexverfahren F210.)

Gustav spielt…	Uschi spielt…	Auszahlung		Wand	Fenster
♦A	♦A	+100	−100	+200	0
♦A	♦A	+100	−100	+200	0
♦A	♦2	+100	−100	+200	0
(100, 0, 0)	(40, 20, 40)	+60	−60	+160	+40
(0, 0, 100)	(10, 50, 40)	+90	−90	+190	+10
(50, 0, 50)	(100, 0, 0)	0	0	+100	+100
(0, 100, 0)	(0, 0, 100)	−200	+200	+300	−100
(100, 0, 0)	(0, 0, 100)	+100	−100	0	+200
(50, 25, 25)	(0, 0, 100)	0	0	+100	+100

Evolutionäre Spielpraxis: Lernen durch Versuch und Irrtum?

Die Teilnehmer:innen bilden zwei Teams. Team „Wand“ spielt zunächst Gustav, Team „Fenster“ spielt Uschi, nach fünf Runden wird gewechselt. (Beim nächsten Mal denke ich daran, dass die Teams sich Namen geben. Das ist theoretisch überflüssig, macht aber praktisch viel mehr Spaß.)

In den ersten drei Runden reichen die Teams nur reine Strategien ein. Gustav erwischt (zufällig?) einen guten Start. Alle Teilnehmer:innen fühlen sich an das Spiel *Schere-Stein-Papier* erinnert und versuchen, die Psychologie des Gegenteams zu erahnen. Das scheint schwierig.

Mangels Symmetrie ist das Spiel nicht ganz leicht zu durchschauen. Uschi verliert tendenziell mehr, findet aber kein rechtes Gegenmittel. Schnell kommt der Verdacht auf, Gustav sei systematisch im Vorteil. Das bessert sich, als die Spieler:innen gemischte Strategien einreichen.

Randomization as a service: Jede Spieler:in darf nun gemischte Strategien einreichen, Angabe der Wahrscheinlichkeiten in ganzen Prozentpunkten. Zuvor hatten die Teams schon heimlich intern gelost, nun offiziel extern! Wie wird ausgezahlt? Wir berechnen und zahlen den Erwartungswert.

Evolutionäre Spielpraxis: Lernen durch Versuch und Irrtum?

Nach den ersten fünf Runden wird für die letzten vier Runden getauscht. Obwohl Uschi als strukturell benachteiligt gilt, gewinnt eher Team Wand. Beide Teams nutzen die Randomisierung eher zaghaft und keineswegs systematisch. Annäherung an ein Gleichgewicht ist nicht zu erkennen.

Zum Abschluss kommt es zu einer kurzen Diskussion. Ein Teilnehmer aus Team Wand erklärt: „Jetzt nach dem Spiel kann ich unseren Trick verraten: Für Gustav ist ♣2 immer besser als ♣A.“ — „Sie meinen, die Karte ♣A wird dominiert von ♣2?“ — „Ja, genau! Deshalb haben wir als Gustav niemals ♣A gespielt. Uschi hingegen hat so einen Trick nicht.“ Wirklich? Ich möchte nachfragen und aufklären, doch das übernimmt nächste Woche die Übung. Wir erinnern an die Stufen der Rationalität!

Im Rückblick wird deutlich: Uschi verliert hier recht oft und spürt daher den Druck, ihre Verluste zu minimieren, bislang noch wenig erfolgreich. Genau das würde ihr mit einem Nash–Gleichgewicht gelingen! Das wird in kommender Übung ausgerechnet, war aber im Casino noch unbekannt. Es ist selbst mit Spielerfahrung nicht leicht zu erraten oder zu erspüren.

Preisduell: Diese lineare Stadt ist zu klein für uns beide!

G393 Casino

Die Teams spielen zwei Familienunternehmen im hart umkämpften Eisbusiness. In ihrer linearen Stadt $[0, L]$ der Länge $L = 10$ wohnen die Kunden kontinuierlich gleichverteilt mit Dichte 1.

Die konkurrierenden Eisläden „€i$bärs €is$tolle“ und „€mil$ €i$diele“ liegen jeweils an den Rändern 0 und L. Ihr Eis ist sagenhaft lecker und nach Jahren der Optimierung perfekt produziert und exakt gleich gut. Beide haben feste Produktionskosten von $c = 500$€i$to pro Einheit.

Jede Kundeneinheit kauft eine Eiseinheit zum günstigsten Gesamtpreis, Verkaufspreis $p_i \geq c$ plus Transportkosten $k = 4$€i$to pro Wegeinheit. Jeder Eisladen möchte daher seine Preise hoch ansetzen, um gute Profite zu machen, aber nicht zu hoch, um nicht allzu viele Kunden zu verlieren.

Woche für Woche fixiert jeder Konzern seinen wohlüberlegten Eispreis. Absprachen sind durch die rigorosen Eiskartellgesetze streng verboten. Die Spielleitung berechnet aus den Preisen die Kundenströme sowie für jedes Unternehmen Umsatz und Profit. Am Ende wird ausgezahlt.

Preisduell: Diese lineare Stadt ist zu klein für uns beide!

G394 Casino

Wie sollen, wie werden die beiden Eisgiganten ihre Preise weise wählen?

	heißer Preis		eiskalter Profit	
Woche	€is$tolle	€i$diele	€is$tolle	€i$diele
1	1000	1000	2500	2500
2	800	670	0	1700
3	540	580	400	0
4	540	500	0	0
5	540	540	200	200
6	540	540	200	200
7	520	520	100	100
8	550	550	250	250
9	662	800	810	0

Zum Saisonauftakt in Woche 1 sprechen sich die beiden Teams ab; das ist zwar illegal, aber nicht unmöglich. Ihre Profitgier wird nur gebremst vom Maximalpreis, 1000€i$to. Die Profite sind enorm! Noch heute schwärmen die Clans vom „goldenen Eiszeitalter“. Die Staatsanwaltschaft ermittelt.

Preisduell: Diese lineare Stadt ist zu klein für uns beide!

G395 Casino

Die Gesetzgeber:in reagiert sofort, hat aus der Dönerdebatte 2024 („Olaf, mach Döner wieder 3€!“) gelernt und zieht die Eispreisbremse: 800€i$to. In Woche 2 bröckeln die Eispreise, sind aber noch unverschämt hoch. Da €i$diele deutlich billiger verkauft, gehen alle Kunden dort hin.

Die Mitarbeiter:innen von €is$tolle müssen ihr leckeres Eis selbst essen. Das kann schon mal passieren, doch so geht es nicht weiter! In Woche 3 entbrennt nun der Preiskampf! Diesmal bekommt €is$tolle alle Kunden. In Woche 4 unterbietet €i$diele dann ganz eiskalt zum Selbstkostenpreis: €is$tolle bekommt keine Kunden und €i$diele macht keinen Profit.

Wie wird es weiter gehen in dieser epischen Saga von Kartell und Verrat? Droht ein Unterbietungswettkampf und schließlich gegenseitiger Ruin? Ganz im Gegenteil: In Woche 5 ist mit beiderseitigem Preis von 540€i$to ein Gleichgewicht gefunden: Nochmal zur Probe: in Woche 6 dasselbe!

Diese Einigung wie durch Zauberhand sieht aus wie eine Absprache. Doch entgegen dem Kartell von Woche 1 ist dies nun ein Gleichgewicht, kein illegales Gemauschel, sondern eine inhärente Eigenschaft des Spiels.

Preisduell: Diese lineare Stadt ist zu klein für uns beide!

G396 Casino

Wir testen dieses Gleichgewicht und verändern die Rahmenbedingungen, so können wir die Elastizität dieser magischen Preisfindung beobachten! Zum Beispiel können äußere Einflüsse die Transportkosten beeinflussen, Mindestlohn, Logistikmarkt, Zölle, Pandemie, Zombie-Apokalypse, etc.

In Woche 7 sinken die Transportkosten auf $k = 2$€i$to, doch in Woche 8 steigen sie auf $k = 5$€i$to. Damit sinkt zeitgleich auch der Verkaufspreis auf 520€i$to bzw. steigt auf 550€i$to. Das ist erstaunlich: Natürlich sinkt / steigt der Gesamtpreis, aber verückterweise zudem der Verkaufspreis!

Dieses bemerkenswerte Ergebnis haben die Spieler:innen experimentell erspürt. *Full disclosure:* Einige kannten das Nash–Gleichgewicht im Preis $(c + kL, c + kL)$ aus der Übung. Der zugehörige Profit ist $kL^2/2$ wie oben. Gescheiterte Probe: In Woche 9 spielen wir eine Kleinstadt mit $L = 5$.

Warum wünschen sich die Firmen möglichst *hohe* Transportkosten? Beide planen vernünftig und spielen das Gleichgewicht mit Profit $kL^2/2$. Je höher k, desto stärker nutzt jeder Eismogul sein lokales Monopol. „Können wir unsere Eisdiele verschieben?“ Siehe Strandkiosk A233!

Kapitel H

Ponzi–Betrug vs Rentenmodell: Wie gelingt ein Generationenvertrag?

A man only begins to grasp the true meaning of life when he plants a tree under whose shade he knows he will never sit.
Elton Trueblood (1900–1994)

Das Geld ist nicht da. Wir leihen es uns aus der Zukunft.
Christian Lindner (1979–) zu Schulden 2022

Inhalt dieses Kapitels H

Motivation und Überblick

In diesem Kapitel geht es um einige große Fragen der Menschheit, für die ich einige (zunächst sehr kleine) Antworten skizzieren möchte. Wir wollen anhand einfacher spieltheoretischer Modelle Gut von Böse unterscheiden, Gleichgewicht von Betrug, Nachhaltigkeit von Illusion.

Wie / Können Sie aus nichts Geld machen? Sie ahnen jetzt bereits, das wird legal wohl nicht möglich sein, dennoch werden solch windige Projekte oft versucht und als bequeme Einkommensquelle angepriesen. Das Internet ist für solche Betrügereien leider ein idealer Nährboden.

In diesem Kapitel werden wir uns solche Modelle genauer anschauen. Sie sind meist nach dem ewig selben, sehr einfachen Muster gebaut, doch dank phantasievoller Verkleidung erkennt man sie nicht sofort. Ich beginne daher mit ein paar lächerlich simplen Illustrationen.

Natürlich will ich Sie nicht zu solchen Aktivitäten anstiften, im Gegenteil! Ich möchte, dass Sie illegale Tricks leichter als solche durchschauen und sich möglichst dauerhaft dagegen immunisieren. Die Erfahrung zeigt, dass dies leider nicht so einfach ist, wie man zunächst hoffen könnte.

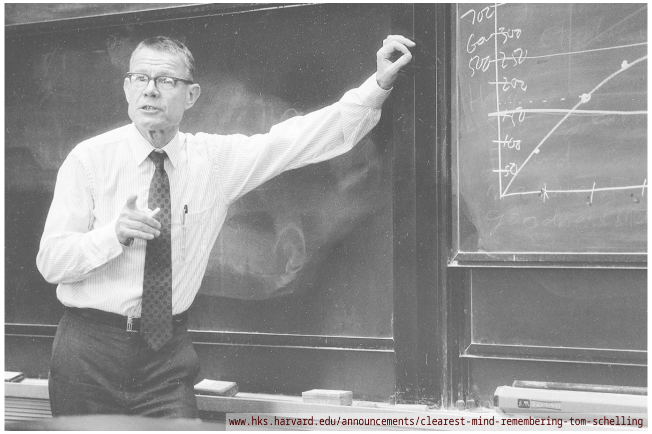
Motivation und Überblick

Warum sollten Sie meine Rente zahlen? Diese Frage liegt mir ganz persönlich am Herzen, und ich gebe zu: aus egoistischen Gründen. Aus ebenso egoistischen Gründen wollen Sie das vielleicht nicht. *Full Disclosure.* Soweit die erschütternd ehrliche Ausgangslage.

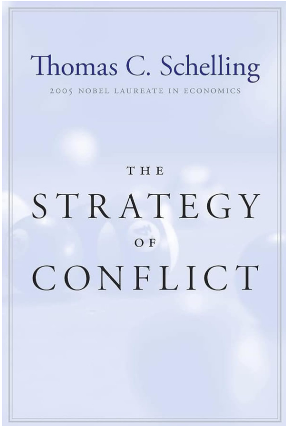
Ich möchte Sie in diesem Kapitel davon überzeugen, dass es auch für Sie lohnend sein kann, meine Rente zu zahlen! Das glauben Sie nicht? Dann lesen und prüfen Sie alles kritisch und lernen Sie staunend dazu! Sie müssen es demnächst nämlich Ihren Kindern erklären.

Warum sollte Ihre Generation meine Generation verklagen? So ein Generationenvertrag, hier im Beispiel zur Altersversorgung, ist eine feine Sache. Zum Kontrast und als Steigerung möchte ich auf ein grundlegendes Problem eingehen: Was tun, wenn eine Generation Raubbau betreibt und die Lebensgrundlage zukünftiger Generationen vernichtet? Dazu müssten zukünftige Generationen ihre Rechte bereits heute einklagen! Das klingt unmöglich. Gibt es dennoch eine Lösung? *Spoiler:* Ja, das geht, wird aber wohl nicht genutzt. Wir werden sehen.

Thomas Schelling (1921–2016)



www.hks.harvard.edu/announcements/clearest-mind-remembering-tom-schelling



Thomas Crombie Schelling (Oakland/CA 1921 – Bethesda/MD 2016) war ein US-amerikanischer Ökonom und Nobelpreisträger. Er arbeitete für die US-Regierung im Marshall–Plan (1948–1953), wurde dann Professor in Yale (1953–58), in Harvard (1958–90), an der University of Maryland (ab 1990) sowie Fellow der RAND Corporation (1956–2002).

Thomas Schelling (1921–2016)

Schellings bekanntestes Buch ist *The Strategy of Conflict* von 1960. Auf Grundlage seiner politisch-ökonomischen Erfahrungen untersucht er darin praktische Probleme in Politik und Wirtschaft mit strategischen Analysetechniken, insbesondere angewendet auf (nuklear-)strategisches Verhalten. Zum Beispiele erklärt Schelling, dass vollständige nukleare Abrüstung illusorisch sei, da das Wissen weiterhin vorhanden ist. Sein Buch zählt zu den einflussreichsten des 20. Jahrhunderts.

Mit Robert Aumann erhielt Schelling 2005 den Wirtschaftsnobelpreis.

Thomas Schelling specialized in the application of game theory to cases in which adversaries must repeatedly interact, especially in international trade, treaties and conflicts. His work prompted new developments in game theory and accelerated its use and application throughout the social sciences.

Schelling's analysis of strategic commitments has explained a wide range of phenomena, from the competitive strategies of firms to the delegation of political decision power.

`www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2005/schelling`

Thomas Schelling (1921–2016)

John von Neumann und Oskar Morgenstern legten 1944 mit ihrem Buch *Theory of Games and Economic Behavior* den Grundstein zur Spieltheorie. Die Theorie fokussierte insbesondere Zwei-Personen-Nullsummenspiele, denn diese sind sowohl mathematisch als auch historisch naheliegend: Sie modellieren den unerbittlichen Konflikt des zweiten Weltkrieges.

Die folgende Nachkriegsgeneration von Forschern, egal ob in Theorie oder Anwendung oder beides, baute darauf auf und untersuchte über Nullsummen hinaus allgemeine Spiele. Wohl nicht rein zufällig änderte sich zeitgleich der politische Rahmen und die mathematische Technik.

Als einer der Pioniere untersuchte Schelling die subtile Gratwanderung zwischen Konflikt und Kooperation. Diese theoretischen Grundlagen und praktischen Anwendungen halfen, die Mechanismen des kalten Krieges zu entschlüsseln, nukleare Abschreckung, Verhandlung und Abrüstung.

Gespräche von Stanley Kubrick und Peter George mit Thomas Schelling führten 1964 zu ihrer – bis heute brillanten – Satire des kalten Krieges: *Dr. Strangelove or: How I Learned to Stop Worrying and Love the Bomb.*

Thomas Schelling (1921–2016)

Schellings Analysen betrafen auch soziale Konflikte innerhalb der USA. Trotz Fortschritte gibt es weiterhin „schwarze“ und „weiße“ Wohngebiete. Schelling untersuchte diese Dynamik in seinem Buch *Micromotives and Macrobehavior* (1978) und erklärte ihren autokatalytischen Charakter.

In diesem Kapitel diskutieren wir Generationenmodelle und wenden sie anschließend an auf den Entscheidungsprozess einer einzelnen Person. Thomas Schelling prägte hierzu den Begriff „Egonomics“ in seiner Arbeit *Egonomics, or the Art of Self-Management* (1978). Wie balanciert unsere Person zwischen kurzfristiger Belohnung und langfristigem Erfolg? Schellings neue Sichtweise entspringt dem spieltheoretischen Modell:

Da das Individuum zu verschiedenen Zeitpunkten Entscheidungen treffen muss, ist es angemessen, nicht von einem einzigen „Selbst“ zu sprechen, sondern von einer Abfolge verschiedener „Selbsts“. Diese genial-einfache Idee hat seither großen Einfluss in Psychologie und Verhaltensökonomik. Die Begriffe „zukünftiges Ich“ / *future me* und „früheres Ich“ / *past me* sind inzwischen selbstverständlich und in der Altagskultur angekommen.

Tabellenkalkulation und Umordnungsschwindel

H101

Können wir aus nichts Geld machen dank kreativer Tabellenkalkulation? Ist es in Tabellen egal, ob Sie erst Zeilen oder erst Spalten summieren?

Klar, bei *endlichen* Tabellen! Für *unendliche* gibt es Überraschungen: Sei $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $a(i,i) = +1$ und $a(i+1,i) = -1$ und sonst $= 0$.

	j					
$\vdots$	0	0	0	0	0	$\iddots$
0	0	0	0	0	+1	$\iddots$
0	0	0	0	+1	−1	0
0	0	0	+1	−1	0	0
0	0	+1	−1	0	0	0
0	+1	−1	0	0	0	0 i
	+1	0	0	0	0	$\cdots$

Zeilen zuerst:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a(i,j) = 0$$

Spalten zuerst:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a(i,j) = 1$$

⚠ Umordnung verlangt absolute Summierbarkeit!

Integrale und Vertauschungsschwindel

H102 Erinnerung

Aufgabe: Skizzieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\mathbf{1}_{[k,k+1[\times[k,k+1[} - \mathbf{1}_{[k+1,k+2[\times[k,k+1[} \Big).$$

Berechnen und vergleichen und bestaunen Sie die Doppelintegrale

$$\int_{y\in\mathbb{R}} \int_{x\in\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{?}{=} \int_{x\in\mathbb{R}} \int_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Widerspricht das Fubini? Was erhält man für f^+ und f^- sowie $|f|$?

Lösung: Zeilen zuerst, d.h. erst nach x und dann nach y integrieren:

$$\int_{y\in\mathbb{R}} \int_{x\in\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y\in\mathbb{R}} 0\,\mathrm{d}y = 0$$

Spalten zuerst, d.h. erst nach y und dann nach x integrieren:

$$\int_{x\in\mathbb{R}} \int_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{x\in\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1[}(x)\,\mathrm{d}x = +1$$

⚠ Das zeigt, dass wir nicht blind drauflosrechnen dürfen!

Umordnung absolut summierbarer Reihen

H103 Erinnerung

☺ Wir erinnern an folgenden wichtigen Umordnungssatz der Analysis 1.

Cauchy–Umordnungssatz: Für jede Doppelfolge $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i+j=k} |a_{ij}|.$$

Ist dieser Wert endlich, so ist (a_{ij}) absolut summierbar, und dann gilt

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i+j=k} a_{ij}.$$

☺ Diese nützliche Rechenregel hat zahlreiche Anwendungen, zum Beispiel die Multiplikation von Reihen, insbesondere Potenzreihen.

⚠ Unser obiges Beispiel ist nicht absolut summierbar, und die Umordnung der Reihe schlägt tatsächlich fehl!

☺ Dasselbe gilt für die Integration und den Satz von Fubini: Absolute Integrierbarkeit ist unsere verlässliche Verbündete!

⚠ Kreativität ist schön, Korrektheit ist unverzichtbar!

Umordnung absolut summierbarer Reihen

H104 Erinnerung

☺ Die Umordnung von (Potenz-)Reihen wird überall genutzt!

Aufgabe: Aus der Exponentialreihe folgt die **Funktionalgleichung**

$$\boxed{\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) \quad \text{für alle} \quad z,w\in\mathbb{C}.}$$

Nachrechnen: Dank Umordnungssatz und binomischer Formel gilt:

$$\begin{aligned} \exp(z)\exp(w) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{w^\ell}{\ell!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+\ell=n} \frac{z^k}{k!}\frac{w^\ell}{\ell!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w). \end{aligned}$$

☺ Dies entspricht dem **Potenzgesetz**, daher die Kurzschreibweise

$$\mathrm{e}^z := \exp(z) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^w.$$

Zusammen mit der wichtigen **Euler–Formel** $\exp(\mathrm{i}z) = \cos z + \mathrm{i}\sin z$ erhalten wir hieraus sofort **Additionstheoreme** für sin und cos.

Fubini für positive und für integrierbare Funktionen

Sie kennen das Problem von Reihen und dann Integralen seit Beginn Ihres Studiums: Wann / Gilt Konvergenz? Wann / Dürfen wir umordnen? Hier ein Exkurs zu Ihrer mathematisch-analytischen Allgemeinbildung.

Satz von Fubini (1907): Seien $X \subseteq \mathbb{R}^p$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ messbare Teilmengen.

(1) Für jede messbare Funktion $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ gilt

$$\int_{X\times Y} \left|f(x,y)\right| \mathrm{d}(x,y) = \int_X \int_Y \left|f(x,y)\right| \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_Y \int_X \left|f(x,y)\right| \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

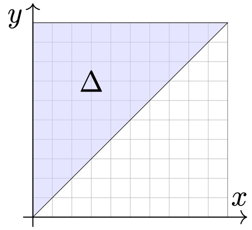
(2) Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und dann gilt

$$\boxed{\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_X \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_Y \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.}$$

Fubini reduziert mehrdimensionale Integrale auf eindimensionale.
Wir brauchen absolute Integrierbarkeit: genau die, mehr nicht.
Wir dürfen uns dann die bequemste Reihenfolge aussuchen.

Die Qual der Wahl... der Integrationsreihenfolge

Aufgabe: Integrieren Sie $f(x,y) = \mathrm{e}^{-y^2/2}$, $\sin(y^2)$, $\frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}$, $\frac{\sin(y)}{y}$, ... über



$$\Delta = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x \le y \le 1 \right\}.$$

Lösung: Normalbereich in y– und x–Richtung:

$$\begin{aligned}\Delta &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1 \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y \right\}.\end{aligned}$$

Holzweg: Der erste naive Anlauf ist nicht elementar integrierbar!

$$\int_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Fub}}{=} \int_{x=0}^1 \int_{y=x}^1 \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Bei umgekehrter Integrationsreihenfolge gelingt es jedoch leicht:

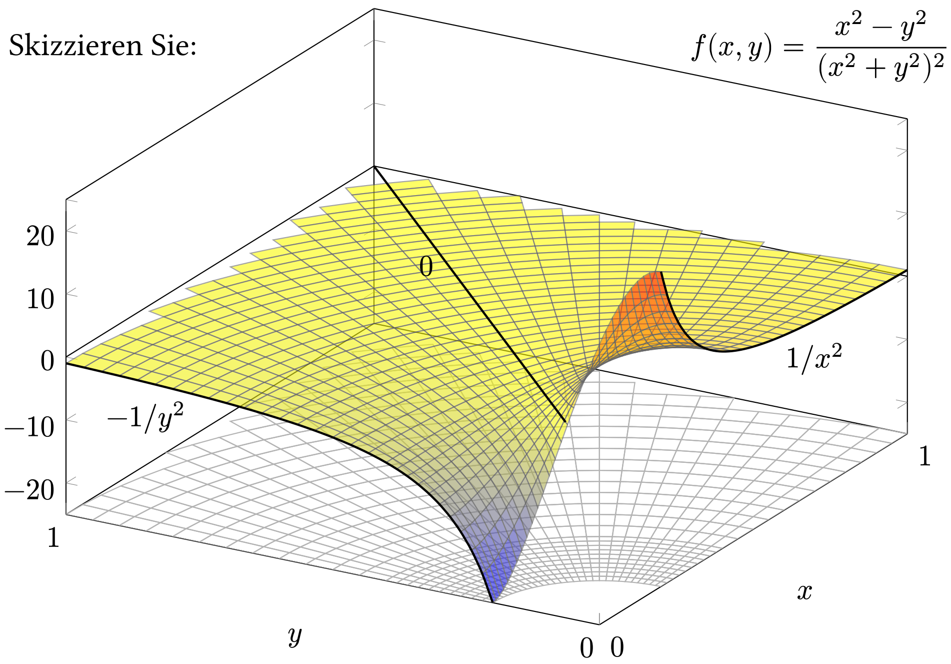
$$\int_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Fub}}{=} \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^y \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{\text{HDI}}{=} \int_{y=0}^1 \Big[x\,\mathrm{e}^{-y^2/2}\Big]_{x=0}^y \mathrm{d}y$$

$$= \int_{y=0}^1 y\,\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y \overset{\text{HDI}}{=} \Big[-\mathrm{e}^{-y^2/2}\Big]_{y=0}^1 = 1 - \mathrm{e}^{-1/2} \approx 0.39347$$

Fubini vs Houdini: ein rationales Gegenbeispiel

Skizzieren Sie:

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$



Fubini vs Houdini: ein rationales Gegenbeispiel

Aufgabe: Finden Sie möglichst einfache Gegenbeispiele f mit

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \ne \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Gelingt dies mit $f \ge 0$? Nein! mit f stetig? Nein! mit f rational? Ja!

Lösung: Wir betrachten die oben skizzierte Funktion:

$$\int_{y=0}^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y \underset{\text{Probe!}}{\overset{\text{PBZ}}{=}} \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^1 = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\arctan(x)\Big]_{x=0}^1 = \frac{\pi}{4}$$

Im zweiten Integral tauschen die Variablen x und y die Rollen:

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4}.$$

⚠ Fubini gilt nicht immer, selbst bei rationalem Integranden!

Kreative Summation nach Guido Grandi (1703)

These: Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen.
Ziel: Ich will aus nichts Geld machen. Hier mein genialer Businessplan:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 0 & & & & & & & & \\
\overset{(a)}{=} & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots \\
\overset{(b)}{=} & (1-1) & + & (1-1) & + & (1-1) & + & (1-1) & + & \dots \\
\overset{(c)}{=} & 1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & \mp & \dots \\
\overset{(d)}{=} & 1 & + & (-1+1) & + & (-1+1) & + & (-1+1) & + & \dots \\
\overset{(e)}{=} & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots \\
\overset{(f)}{=} & 1 & & & & & & & &
\end{array}
$$

Der italienische Mönch und Mathematiker Guido Grandi erklärte damit 1703 wie Gott das Universum aus dem Nichts erschaffen haben könnte. Können wir diesen göttlichen Trick auch ökonomisch nutzen?

Kreative Summation nach Guido Grandi (1703)

Aufgabe: Sie misstrauen der Rechnung? Wo genau steckt der Fehler?

Lösung: Bei jeder Gleichung „$A = B$“ müssen wir *drei* Fragen klären: Sind die linke Seite A und die rechte Seite B wohldefinierte Objekte? Erst dann können wir die Gleichheit beider Objekte untersuchen! Meistens beachten wir nur letzteres, doch das scheitert hier.

Die ersten Gleichheitszeichen (a,b) und die letzten (e,f) sind korrekt, doch die mittleren (c,d) haben überhaupt keinen Sinn: Die Summe $S := 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ definiert keinen Wert! Diese Reihe konvergiert nicht. Dennoch verspüren viele Menschen das unbändige Verlangen, auch solchen Reihen irgendwelche Werte zuzuweisen.

Welche Zahl soll S sein? Selbst wenn wir phantasievoll irgendeinen Wert zuweisen / erfinden / definieren, etwa $1/2$, mindestens eine der beiden mittleren Gleichungen (c,d) wird falsch, in den meisten Fällen beide. Zu solch hoffnungslosem Unsinn sagt man auch *not even wrong*.

Dennoch ist dies eine beliebte Betrugsmasche, nach dem Muster „heute arm = … schwurbel schwurbel schwurbel … = morgen reich“.

Kreative Summation nach Guido Grandi (1703)

Fun fact: Die möglichen Werte $S = 0$ und $S = 1$ wurden oben „erklärt“. Wenn S einen Wert hat, dann gilt $S = 1 - S$, also $2S = 1$, somit $S = 1/2$.

Den Wert $1/2$ erhalten wir auch, wenn wir naiv die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1/(1-z)$ bei $z = -1$ auswerten (unseriös), oder raffiniert die Konvergenz erzwingen, etwa durch Cesàro–Summation (seriös).

Damit noch nicht genug! Wir könnten auch folgende Reihe nutzen:

$$\frac{1+z}{1+z+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{3k} - z^{3k+2} = 1 - z^2 + z^3 - z^5 + z^6 - z^8 + \dots$$

Ausgewertet bei $z = 1$ erhalten wir den Wert $S = 2/3$. Die Analysis bietet alle nötigen Grundlagen, um genau diesem Schlamassel zu entgehen.

Reihen sind ein wunderbares Werkzeug, sie sind schön und nützlich. Nur konvergent sollten Sie sein, sonst haben sie keinen Wert!

☺ Zur Konvergenz von Reihen bietet die Analysis wirksame Kriterien. Für konvergente Reihen gelten dann überaus nützliche Rechenregeln.

Kreative Summation nach Guido Grandi (1703)

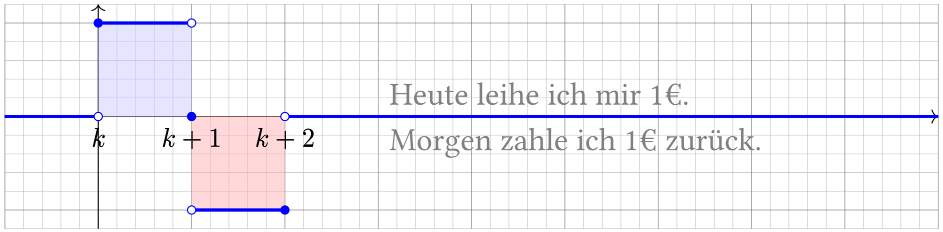
Doch genug von mühsamer Mathematik, von seriösen Rechenregeln, von langweiliger und unnützer Haarspalterei. Wer braucht Korrektheit, wenn Kreativität lockt? Also zurück zu meinem genialen Businessplan! Ist Wissenschaft nicht nur dann gut, wenn sie Profit generiert? Oder wenigstens den oberflächlichen Anschein davon?

Bisher war natürlich alles Schwindel! Hier ist mein verbesserter Plan: Am Tag 1 leihe ich mir 1 Euro, den ich dann am Tag 2 zurückzahle. Auch am Tag 2 leihe ich mir 1 Euro, den ich am Tag 3 zurückzahle. Dies setze ich nun unbegrenzt fort. Was ich leihe, zahle ich zurück… dennoch verschafft mir diese Reihe 1 Euro, den ich nie zurückzahle!

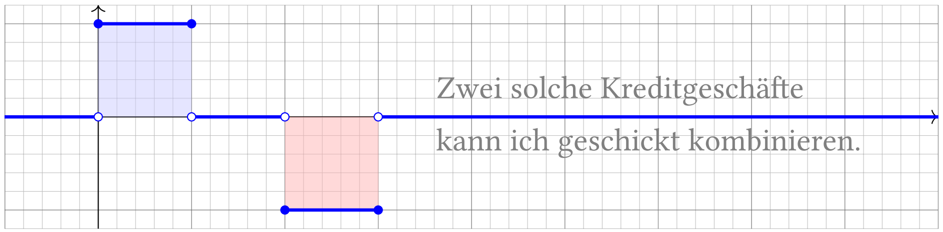
Anschaulich: Die Schulden werden nach Unendlich verschoben. Für manche Menschen bedeutet $t = \infty$ einfach alles nach ihnen. Wie bitte, Sie halten das für unrealistisch, gar verrückt? Ja, sicher. Dennoch wird diese Methode erstaunlich häufig angewendet. Diese Masche gelingt, solange sie akzeptiert wird.

Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

Kredit und Tilgung: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k = \mathbf{1}_{[k,k+1]} - \mathbf{1}_{[k+1,k+2]}$.



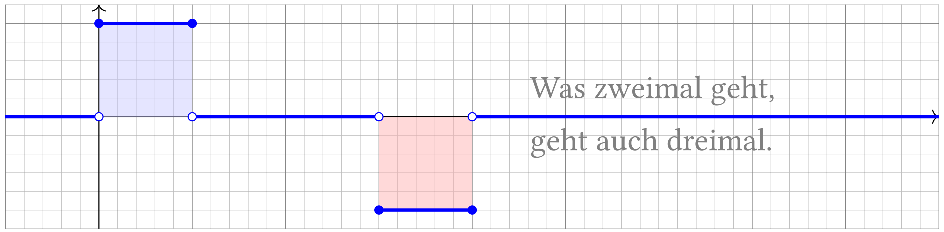
Offensichtlich gilt $\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0$.



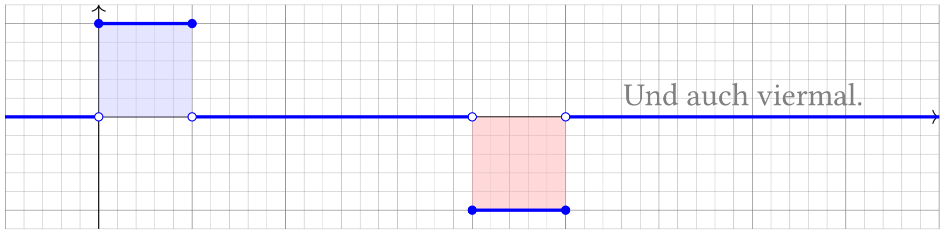
Auch für $g_1 = f_0 + f_1$ ist das Integral Null.

Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

Graph zu $g_2 = f_0 + f_1 + f_2$:



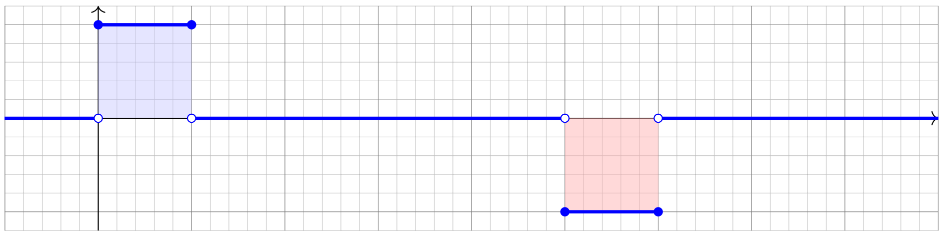
Graph zu $g_3 = f_0 + f_1 + f_2 + f_3$:



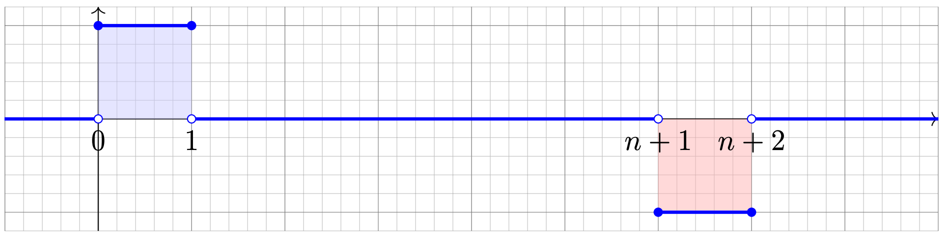
Das Integral ist jeweils Null.

Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

Graph zu $g_4 = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4$:



Graph zur Teleskopsumme $g_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n$:



Das Integral $\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,\mathrm{d}x$ ist jeweils Null. Was passiert für $n \to \infty$?

Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

Aufgabe: Man berechne und vergleiche und bestaune:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x\right) \overset{?}{=} \int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right)\mathrm{d}x$$

Lösung: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sehen wir(rechnerisch oder graphisch):

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad\Longrightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0$$

Andererseits kennen wir für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Teleskopsumme

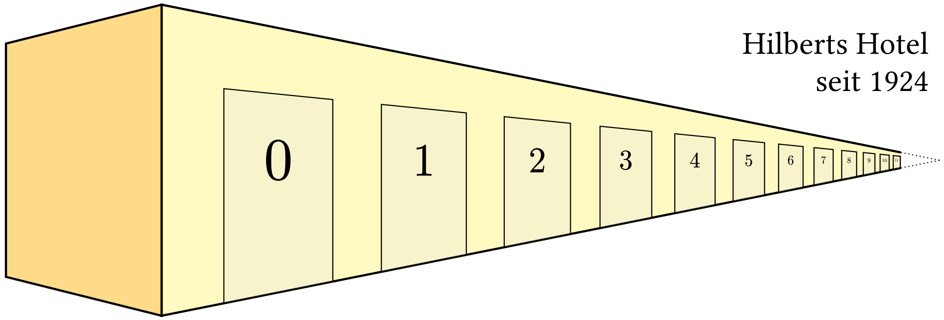
$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) - \mathbf{1}_{[n+1,n+2]}(x) \quad\to\quad \mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $n \to \infty$ gilt daher punktweise Konvergenz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \quad\Longrightarrow\quad \int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right)\mathrm{d}x = 1.$$

⚠ Anschauliche Ursache: „Masse verschwindet nach Unendlich“.

Von Hilberts Hotel zu Hilberts Spielbank



Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen,
soll uns niemand vertreiben können.
David Hilbert (1862–1943)

Über das Unendliche, Mathematische Annalen 95 (1926), 161–190. Diesen Lobpreis der Cantorschen Mengenlehre gegenüber endlicher Arithmetik schrieb Hilbert im Grundlagenstreit mit Brouwer, siehe `de.wikipedia.org/wiki/Grundlagenkrise_der_Mathematik`.

Von Hilberts Hotel zu Hilberts Spielbank

Sie kennen diese wundersame Geschichte aus Ihrem ersten Semester: Wenn in einem **endlichen Hotel** alle Zimmer belegt sind, dann kann kein Gast mehr aufgenommen werden. Das gilt selbst dann noch, wenn die Managerin die Gäste neu auf die Zimmer verteilt. Es hilft alles nichts!

Anders in **Hilberts Hotel** mit unendlich vielen Zimmern $0, 1, 2, 3, \dots$: Sind alle Zimmer belegt, so kann immer noch ein Gast aufgenommen werden: Der Gast aus Zimmer 0 zieht nach 1, der von 1 nach 2, der von 2 nach 3, usw. Wir nutzen hierzu die Bijektion $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}_{\ge 1} : n \mapsto n + 1$.

Ebenso zwei Gäste, oder drei, oder vier... Nun kommt ein Hilbert–Bus mit unendlich vielen neuen Gästen. Die Managerin quartiert die alten Gäste um vermöge der Bijektion $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} 2\mathbb{N} : n \mapsto 2n$. Die neuen Gäste beziehen ihre Zimmer vermöge $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} 2\mathbb{N} + 1 : n \mapsto 2n + 1$. Zusammen erhalten wir so die Bijektion $\{0, 1\} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} : (i, n) \mapsto 2n + i$.

Schließlich kommen unendliche viele Busse jeweils mit unendlich vielen Gästen. Kein Problem, hierzu finden wir eine Bijektion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$.
Übung: Explizieren Sie eine solche Bijektion! Wer geht wohin?

Von Hilberts Hotel zu Hilberts Spielbank

On a dark desert highway — not much scenery
Except this long hotel stretchin' far as I could see.
Neon sign in front read "No Vacancy,"
But it was late and I was tired, so I went inside to plea.

The clerk said, "No problem. Here's what can be done —
We'll move those in a room to the next higher one.
That will free up the first room and that's where you can stay."
I tried understanding that as I heard him say:

[CHORUS] "Welcome to the Hotel called Infinity —
Where every room is full (every room is full)
Yet there's room for more.
Yeah, plenty of room at the Hotel called Infinity —
Move 'em down the floor (move 'em down the floor)
To make room for more."

Von Hilberts Hotel zu Hilberts Spielbank

I'd just gotten settled, I'd finally unpacked
When I saw 8 more cars pull into the back.
I had to move to room 9; others moved up 8 rooms as well.
Never more will I confuse a Hilton with a Hilbert Hotel!

My mind got more twisted when I saw a bus without end
With an infinite number of riders coming up to check in.
"Relax," said the nightman. "Here's what we'll do:
Move to the double of your room number:
that frees the odd-numbered rooms." [CHORUS]

Last thing I remember at the end of my stay —
It was time to pay the bill but I had no means to pay.
The man in 19 smiled, "Your bill is on me.
20 pays mine, and so on, so you get yours for free!"

(`www.math.utep.edu/Faculty/lesser/GreatestLesserHits`)

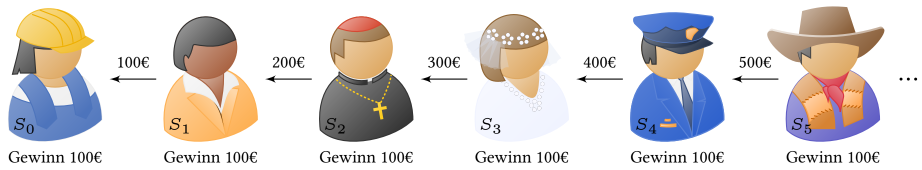
Schneeballsystem und Ponzi–Betrug

Charles Ponzi: „Investieren Sie jetzt, alle werden gewinnen!“

Absolut verlässliche Garantie

Ich bin ein grundehrlicher Garantieschein und immer verlässlich.
Wer mich für n Euro kauft, darf mich für $n + 100$ Euro verkaufen.
Dank dieser Eigenschaft bringe ich allen Wohlstand und Glück.

These: Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen.



Wundersame Vermehrung des Geldes: *Everyone's a winner?*
Sie glauben, so naiv kann doch niemand sein? **Greater Fool Theory**:
Denken Sie an Cryptos oder NFTs! J. Geuter, `youtu.be/8ciirqCCqd0`

Schneeballsystem und Ponzi–Betrug

Metamathematische Erfahrung führt zur folgenden provokanten These: Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen (in gut gemeinten Anwendungen) bzw. ausbeuten (in betrügerischer Absicht).

Letzteres gilt besonders für wenig bekannte Regelmäßigkeiten (Sätze), noch besser eignen sich Unverständnis und weit verbreitete Fehler. Ausgenutzt wird hierbei nicht direkt der mathematische Sachverhalt, sondern vor allem die ungleich verteilte Kenntnis darüber.

Einige Indizien sprechen für die häufige Richtigkeit der Vermutung. Glücksspiele, auch und besonders unsere staatlichen Lotterien, verdienen Geld mit der Risikoliebe — und irrationalem Handeln, vermutlich Unwissen. Daher heißen sie auch *Steuer auf Dummheit*.

Neben legaler Ausnutzung mathematisch-logischen Unwissens gibt es auch die illegale, kriminelle Seite: Das nennen wir Betrug. Hier blühen die erstaunlichsten Schöpfungen menschlicher Dreistigkeit, gefördert durch die erstaunlichsten Auswüchse menschlicher Dummheit. Dumm-dreist versprochen wird: *Everyone's a winner, baby, that's no lie!*

Schneeballsystem und Ponzi–Betrug

Wir machen folgendes **Finanzexperiment** – bitte nur in Gedanken!

„Ich darf mich vorstellen, mein Name ist Charles Ponzi, Finanzgenie. Bitte passen Sie gut auf und machen Sie mit, alle werden gewinnen! Ich bin Spieler 0*, Sie sind Spieler* 1*, Ihr Nachbar ist Spieler* 2*, usw. Spieler 1: Sie geben mir 100€, Ihr Nachbar gibt Ihnen dann 200€, Ihnen bleiben 100€ Gewinn. Spieler 2: Sie haben gerade 200€ gegeben, Ihr Nachbar gibt Ihnen jedoch 300€, also bleiben auch Ihnen 100€ Gewinn. Und so weiter, und so weiter. Jeder Teilnehmer macht so 100€ Gewinn.“*

Wo genau liegt das Problem? Nicht alle durchschauen es sofort...
Als Grundregel helfen **Erhaltungssätze**: Werte kann man nicht mühelos vermehren, das sollte jeden warnen: *There are no free lunches!*

Eine genauere Analyse offenbart das **Problem der Endlichkeit**. $\mathscr{R}_1$: Der letzte Spieler S_n bleibt auf seinen Schulden sitzen. Ist er rational, wird er schon zuvor nichts zahlen. $\mathscr{R}_2$: Ist S_{n-1} rational zweiter Stufe, so sieht er den Zusammenbruch kommen und wird zuvor nichts zahlen...
Die frühen Spieler benötigen jedoch Rationalität sehr hoher Stufe!

Schneeballsystem und Ponzi–Betrug

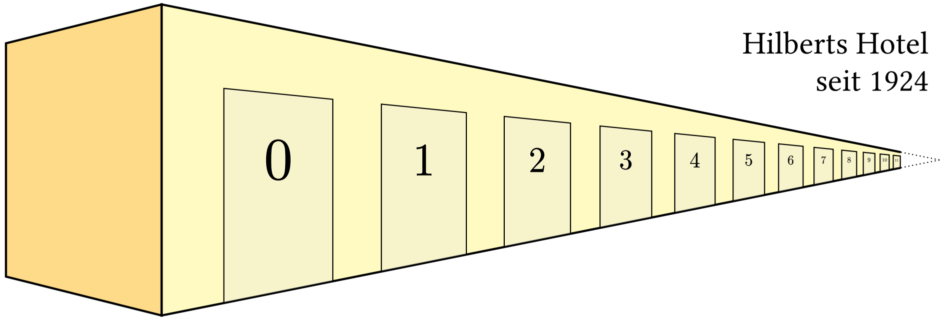
Schneeballsystem nennt man ein betrügerisches Geschäftsmodell, das zu seinem Betrieb immer neue Teilnehmer benötigt: Es gibt kein profitables Produkt, sondern Gewinne entstehen hauptsächlich oder ausschließlich durch das frisch zufließende Kapitel neuer Teilnehmer.

Dies heißt auch **Ponzi–Betrug**, engl. *Ponzi scheme*: Beiträge neuer Teilnehmer bezahlen die Ausschüttungen der vorgehenden Teilnehmer.

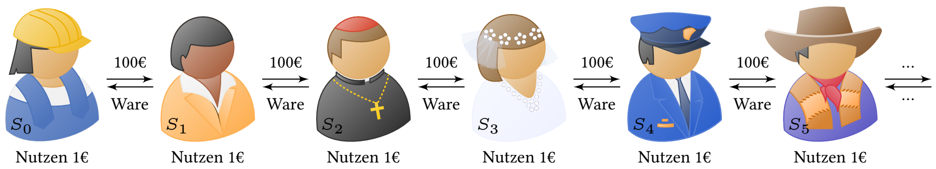
Berühmt-berüchtigt wurde diese Betrugsmasche durch **Charles Ponzi**, der in den 1920er Jahren Anleger in den USA um 20Mio Dollar prellte. Er versprach phantastische Renditen und lockte immer neue Investoren. Seine Methode **robbing Peter to pay Paul** flog nach acht Monaten auf.

Aktuelles Beispiel eines baugleichen Systems ist der Betrugsskandal des Investmentunternehmens von **Bernard Madoff**. Es brach 2008 in der Bankenkrise zusammen, Investoren verloren etwa 18Mrd Dollar.

Ähnlich funktionieren **Kettenbriefe** und **Pyramidensysteme**, die heute im Internet kursieren: *Make Money Fast*, siehe `youtu.be/VNieth9wBTQ`. Dieser Schwindel versucht, Schulden nach Unendlich zu verschieben.



These: Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen.



Wundersamer Nutzen des Geldes: *Everyone's a winner!* Ponzi–Betrug? Kann Geld aus dem Nichts entstehen? Arte: 42, `youtu.be/NMUFAzV6C5M`

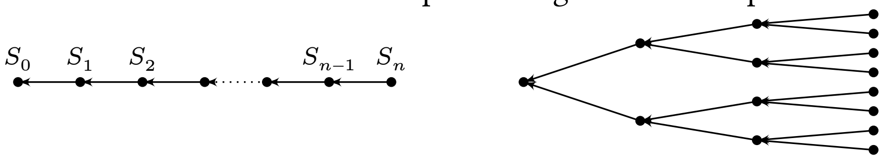
Als erstes möchte ich ehrlich zugeben: Das gezeigte Modell ist zwar leicht verständlich, aber leider auch extrem vereinfacht und allzu simpel. Komplizierte Geldsysteme versteht vermutlich kaum jemand so recht, oder bestenfalls nur in Analogie zu simplen Fällen wie diesem.

Spieler 0 bekommt Ware, die er nützlich findet und haben möchte. Spieler 1 bekommt im Gegenzug 100€; sie selbst sind für ihn unnütz, aber sie dienen ihm als Platzhalter. Spieler 1 weiß, oder besser: hofft, dass er damit Spieler 2 bezahlen kann. Und tatsächlich:

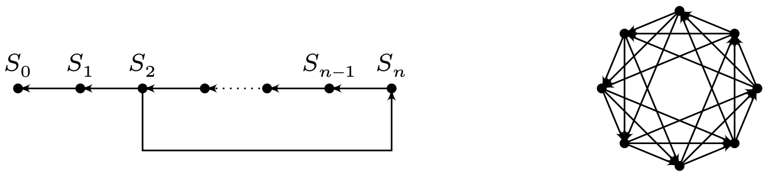
Spieler 1 bekommt Ware, die er nützlich findet und haben möchte. Spieler 2 bekommt im Gegenzug 100€; sie selbst sind für ihn unnütz, aber sie dienen ihm als Platzhalter. Spieler 2 weiß, oder besser: hofft, dass er damit Spieler 3 bezahlen kann. Und tatsächlich: ...

Jeder Spieler S_n weiß, mit einer kleinen Wkt $\varepsilon_n \in \,]0, \varepsilon]$ kann das System im nächsten Schritt zusammenbrechen. Der erwartete Verlust $\varepsilon_n \cdot$ 100€ ist jedoch geringer als der erwartete Nutzen, hier beispielhaft 1€. Daher ist es für jeden Spieler lukrativ, dieses Risiko einzugehen.

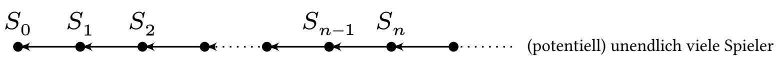
Nutzentransfer in einfachen Beispielen dargestellt als Graph:



☹ Gleichgewicht unmöglich: Ponzi–Betrug, Schneeballsystem



☺ Gleichgewicht möglich: Geldzirkulation, evtl. Abfluss, Steuern, etc.



☺ Gleichgewicht möglich: Generationenvertrag, Rentensystem, etc. Anders als beim Ponzi–Betrug kann Geldzirkulation überall positiven Nutzen erzeugen. Das sagt noch nichts über un/gerechte Verteilung!

In unserem simplen Beispiel hat jeder denselben Nutzen / Gewinn 1€. Zur Rationalität genügt, dass jeder positiven Nutzen hat; dieser kann unterschiedlich verteilt sein, gar extrem ungerecht. Solche Phänomene beobachten wir tatsächlich deutlich in der uns umgebenden Ökonomie.

Das herrschende Geldsystem ist das Geldsystem der Herrschenden. Es wird verteidigt mit dem ideologischen Anspruch der Gerechtigkeit. In der Praxis kann es dies oft nicht einlösen. Liegt das am Geldsystem selbst oder an anderen Faktoren? Darüber lohnt es sich zu streiten.

Geld ist eine neue Form der Sklaverei, die sich von der alten nur unterscheidet, indem sie unpersönlich ist, dass es keine direkte Beziehung zwischen Herren und Sklaven gibt.
Leo Tolstoi (1828–1910)

Insgesamt wird der Kapitalismus kritisiert als Variante des Ponzi-Betrugs: Aus marxistischer Sicht zerstört er seine gesellschaftlichen Grundlagen. Aus ökologischer Sicht zerstören wir so unsere natürlichen Ressourcen. Ist die fehlende Nachhaltigkeit korrigierbar oder systematisch?

Wie und warum funktioniert Geld?

Jedes Tauschmittel muss gewisse Bedingungen erfüllen: (0) Es muss praktikabel und haltbar sein, aber nur schwer vermehrbar oder fälschbar. (1) Ausreichend viele Akteure akzeptieren es als Zahlungsmittel: Sie vertrauen darauf, dass ausreichend viele es akzeptieren, usw.

Aufgabe: Wir untersuchen eine einfache Gesellschaft $I = \{1, 2, \dots, N\}$. Spieler handeln mit gewisser Wkt miteinander, etwa gleichverteilt.

A \ B	M	V
M	A: 0, B: 0	A: 0, B: $-a$
V	A: $-a$, B: 0	A: b, B: b

Geldnutzen zwischen Tauschpartnern: Verlust a, Nutzen b, etwa $a = b = 1$.

M: misstraut dem Tauschmittel / Geld und lehnt jeden Handel damit ab.

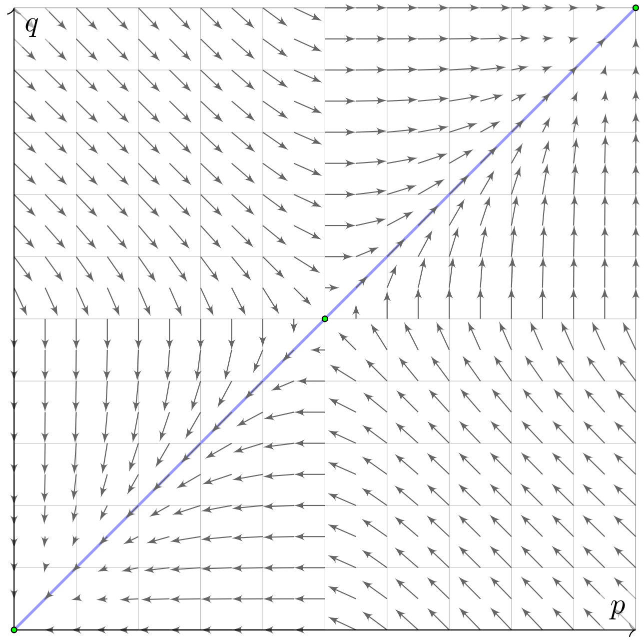
V: vertraut dem Tauschmittel / Geld und akzeptiert jeden Handel damit.

Ab welcher Akzeptanzrate $q \in [0, 1]$ setzt sich das Tauschmittel durch?

Lösung: Der erwartete Nutzen für M-Spieler ist Null. Der erwartete Nutzen für V-Spieler ist $qb - (1 - q)a$, also positiv für $q > a/(a + b)$.

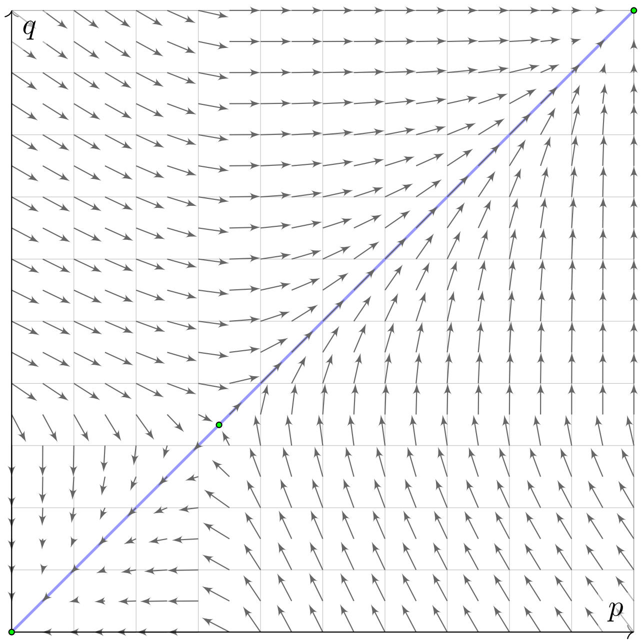
Wie und warum funktioniert Geld?

$a = 1$
$b = 1$



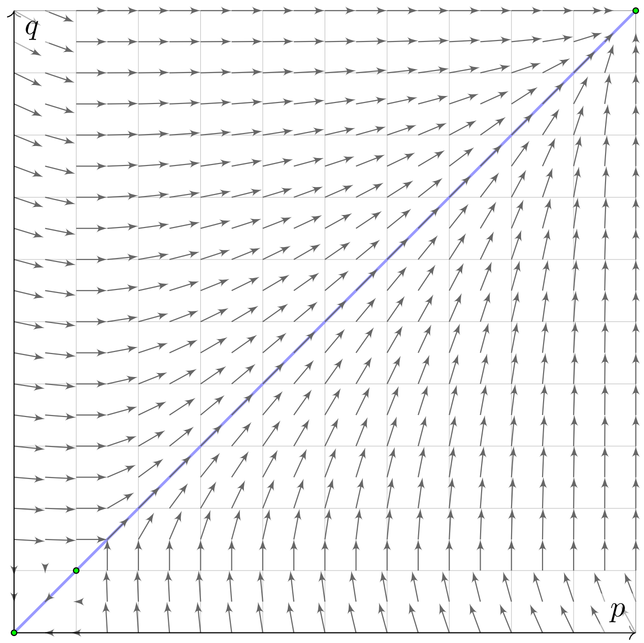
Wie und warum funktioniert Geld?

$a = 1$
$b = 2$



Wie und warum funktioniert Geld?

$a = 1$
$b = 9$



Wie und warum funktioniert Geld?

Jedes Geldsystem beruht auf **Vertrauen**, es ist eine stillschweigende **Vereinbarung** per Tradition oder ein **Gesellschaftsvertrag** per Gesetz. In unserem stark vereinfachten Modellbeispiel entsprechen allseitiges Misstrauen bzw. Vertrauen den beiden stabilen Nash–Gleichgewichten.

Ein Geldsystem funktioniert, solange ausreichend viele Teilnehmer dem System vertrauen und sich ein Nutzengleichgewicht einstellt, also Akzeptanz durch strikt positiven Nutzen für jeden Teilnehmer. Die oben Graphiken zeigen hierzu die Nash–Dynamik.

In schweren **Krisen** (Hyperinflation, Staatsbankrott, Bankenkollaps) übersteigt das Misstrauen (geschätzte Abbruchwkt) den Geldnutzen. Dann bricht das Geldsystem zusammen, und die Akteure flüchten sich in **Sachwerte**, etwa Rohstoffe, Edelmetalle, Immobilien, Aktien, usw…

Dies ist ein sich selbst verstärkender (autokatalytischer) Vorgang. Im positiven Falle ist es eine Aufwärtsspirale, die zu einem stabilen Geldsystem führt. Im negativen Falle ist es eine Abwärtsspirale, die alle Geldwerte vernichtet. Beides kommt tatsächlich vor.

Wie und warum funktioniert Geld?

Im **Tauschhandel** entwickeln sich meist bestimmte Güter zur Referenz, etwa nützliche (Getreide, Vieh) oder seltene (Muscheln, Edelmetalle): Sie werden allgemein als wertvoll anerkannt, existieren in ausreichender aber beschränkter Menge, sind praktikabel und haltbar. Sie können als **Tauschmittel** und **Wertspeicher** dienen und erhalten so Geldfunktion.

Anekdote: Auch **Zigaretten** dienten als Währung auf Schwarzmärkten. Warum akzeptiert ein Nichtraucher dieses Zahlungsmittel? Er vertraut auf viele Raucher… und auf Nichtraucher, die darauf vertrauen… usw. Viele Güter sind dazu geeignet. Der Kernpunkt ist immer das Vertrauen! Eigenschaft (0) ist gegeben, (1) wird gesellschaftlich hergestellt.

Als **Zahlungsmittel** dienen ganz allgemein übertragbare, einheitliche Wertträger. Molluskengeld (Muschelgeld) ist eine vormünzliche Geldform und wird teilweise heute noch als Kleingeld verwendet. **Kaurigeld** aus den Gehäusen von Kaurischnecken war das erste allgemeingültige Geld und förderte maßgeblich den überregionalen Handel. Hier gibt es keine Kontrolle über die Geldmenge, diese wird der Natur überlassen.

Wie und warum funktioniert Geld?

Die Übertragung dieser Funktion auf **Münzen** (China, Indien, Ägäis um 700 v.u.Z.) und **Papiergeld** (China um 1000 n.u.Z.) ist eine erstaunliche Errungenschaft. Das nötige Vertrauen muss zunächst aufgebaut werden, als Garant dienten meist zentrale Institutionen (König, Staat, Bank).

Sprichwörtlich ist hier König Krösus (ca. 590–541 v.u.Z.): Als König von Lydien in Vorderasien prägte er als erster Münzen und verhalf so einer der nachhaltigsten Erfindungen der Geschichte zum Durchbruch. Er überführte die Gesellschaft in ein neues Gleichgewicht.

Seit jeher müssen diese Institutionen auch **Falschgeld** bekämpfen. In Deutschland wird bestraft (§146 StGB), wer Geld nachmacht oder verfälscht, sich Falschgeld verschafft und in Verkehr bringt, auch wer gutgläubig Falschgeld erwirbt und wissentlich weitergibt (§147 StGB).

Falschgeld wird staatlicherseits eingezogen und nicht erstattet; solange jedoch niemand die Echtheit prüft, wirkt falsches genau wie echtes Geld. Alles beruht auf diesem Gleichgewicht, **Misstrauen gegen Vertrauen!** Staatliche Institutionen versuchen es zu schützen und zu fördern.

Wie und warum funktioniert Geld?

Der Blick auf die Geschichte zeigt eine Abstraktion vom Tauschhandel über prämonetäre Zahlungsmittel erst zu Münzen, dann Geldscheinen, Plastikgeld, Kryptowährungen, usw. Der Abstraktion scheinen dabei keine Grenzen gesetzt, wir erleben dies gerade in unserem Zeitalter:

Papiergeld wurde lange Zeit mit Gold gedeckt, um das Vertrauen zu stärken. Später stellte sich heraus, dass dieser **Goldstandard** nicht (mehr) nötig war, und so wurde er erst gelockert, dann 1971 ganz aufgegeben.

Buchgeld stand früher im *Bankbuch*, heute wird es auf Girokonten *gebucht*. Es heißt auch **Bankengeld** oder **Giralgeld** (it. *giro*, gr. γυρῖς [gyrós], ‘Kreis, Umlauf’). Es ist zunächst nur ein **Zahlungsversprechen** oder umgekehrt eine **Geldforderung**, kein gesetzliches Zahlungsmittel. Solange ihm alle Beteiligten vertrauen, übernimmt es Geldfunktion.

Ich betone erneut die unabdingbare Voraussetzung des Vertrauens: Ein Geldsystem funktioniert, solange ausreichend viele Teilnehmer dem System vertrauen und sich ein Nutzengleichgewicht einstellt, also Akzeptanz durch strikt positiven Nutzen für jeden Teilnehmer.

Wie und warum funktioniert Geld?

Ähnlich verlief seit den 1960er Jahren die Einführung und Akzeptanz von **Kreditkarten** (Plastikgeld). Die Situation ist nicht symmetrisch, der Mechanismus aber ähnlich: Ausreichend viele Händler müssen diese Karte akzeptieren und zugleich müssen ausreichend viele Kunden sie nutzen wollen. In unserem obigen Modell entspräche dies einem Spiel zwischen zwei Populationen $I = \{1, 2, \dots, M\}$ und $J = \{1, 2, \dots, N\}$. Mit genügend Anstrengung kann man ein neues System etablieren. Schwindet das Vertrauen, so kollabiert das System (auf ein voriges).

Wir beobachten parallel, wenn auch in sehr beschränktem Umfang, den umgekehrten Trend zu **Regionalwährungen** und **Tauschringen**. Das funktioniert nur, wenn genügend Leute vertrauensvoll mitmachen, andernfalls bricht diese Form des Tausches wieder zusammen.

Manche:r mag kritisch einwenden, hier wird das **Geld neu erfunden**. Dennoch sind solche lebensgroßen Experimente oft erstaunlich und aufschlussreich, sowohl in ihren Erfolgen wie in ihren Schwierigkeiten. Man versteht etwas erst dann, wenn man es selbst herstellen kann.

Wie und warum funktioniert Geld?

Wir erleben die jüngsten Entwicklungen dieser **Abstraktion** nahezu live: vom einst direkten Warentausch über Tauschmittel, Münzen, Scheine, Buchgeld zum elektronischen Geld und zuletzt **Kryptowährungen**.
Ist dies nachhaltig oder ein Ponzi–Betrug? Wie werden sehen.

Auch Kryptowährungen leben vom Vertrauen, von allseitiger Akzeptanz, und benötigen zu diesem Zweck sichernde Institutionen, also eine geeignete und vertrauenswürdige Infrastruktur. Hier ist die dezentral organisierte **Blockchain** eine wesentliche technologische Neuerung.

Der Wert entsteht durch Aushandlung und gegenseitiges Vertrauen, hier gestützt durch technische Vorkehrungen. Die enorme Wertsteigerung entsteht durch spekulative Hoffnungen auf zukünftige Interessenten. Die Grenze zum Ponzi–Betrug ist daher nicht einfach zu ziehen.

In Deutschland sind Kryptowährungen (noch) kein Zahlungsmittel.
Die BaFin sieht Bitcoin als Rechnungseinheit, eine Art Privatgeld.
El Salvador experimentiert seit Sep. 2021 damit, trotz aller Risiken.
Sind Kryptowährungen das bessere Geld? `youtu.be/vOLZz1M_pG8`

Wie und warum funktioniert Geld?

Das Spiel *Misstrauen-gegen-Vertrauen* hat drei Gleichgewichte:
Die beiden reinen Gleichgewichte (Misstrauen,Misstrauen) und (Vertrauen,Vertrauen) sind stabil, das gemischte Gleichgewicht dazwischen ist instabil. Wie gelingt der Übergang vom einen (Misstrauen,Misstrauen) zum anderen (Vertrauen,Vertrauen)?
Genau diese Hürde muss jedes Zahlungsmittel überwinden.

Zunächst einmal hilft es, wenn das Zahlungsmittel Vorteile b hat, zudem möglichst große gegenüber den möglichen Nachteilen a.
Genau dies beobachten wir historisch: „Die Vorteile überwiegen.“
Das ist notwendig, genügt aber noch nicht für den Übergang!

Weiterhin ist es anfangs günstig, eine korrelierte Strategie zu verfolgen. In der Praxis kann dies geschehen, indem ein speziell ausgewiesener Markt für die Benutzung des neuen Zahlungsmittels eingerichtet wird. Jeder Teilnehmer entscheidet sich, ob er daran teilnimmt (Vertrauen) oder nicht (Misstrauen). Dadurch werden die beiden Teilpopulationen weitgehend getrennt und verlustreiche Konflikte vermieden.

Was lernen wir aus Modellen?

Wie verhalten sich unsere spieltheoretischen Modelle zur Wirklichkeit?

Good modeling requires a judicious balance between detail and abstraction, between realism and relevance, between simplification and tractability.

Models should not only be sufficiently well defined to be mathematically analyzable but they should be playable as games (and possibly used as experimental games).

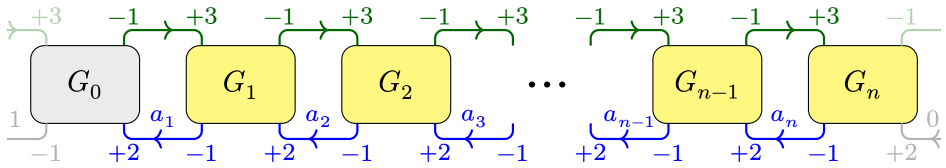
This additional gaming criterion provides a debugging device and serves as a check on the complexity and ease or difficulty with which the mechanism is run. […] The actual playing of a game also calls attention to the limitations caused by transactions costs and time to many mechanisms. […]

Critics will feel that the simplifications are gross distortions of the real world, while the mathematically oriented theorist may feel that the models are too cluttered up with unnecessary detail. It is possibly helpful to look at the models as playable games which can be analyzed rather than stress immediate realism.

Martin Shubik (1926–2018), *Theory of Money and Institutions*
(in *Handbook of Monetary Economics*, vol. 1, chap. 5, p. 179)

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge
H201

Die Generationen $G_0, G_1, \dots, G_n$ interagieren nach folgendem Muster:



Jede Generation G_i kennt nur die Aktion $a_{i-1} \in \{0,1\}$ ihrer Eltern G_{i-1}. Sie entscheidet sich daraufhin entweder für Egoismus ($a_i = 0$) oder Altersversorgung ($a_i = 1$). Ihre Auszahlung ist $u_i = 2 - 1a_i + 2a_{i+1}$. Wie skizziert gelten die Randbedingungen $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = 0$.

Jede Generation G_i hat demnach vier mögliche Strategien:

Egoist	$E = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 0\\ 1\mapsto 0\end{smallmatrix}\right]$,	Altruist	$A = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 1\\ 1\mapsto 1\end{smallmatrix}\right]$,
Kontra	$K = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 1\\ 1\mapsto 0\end{smallmatrix}\right]$,	Nachmacher	$N = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 0\\ 1\mapsto 1\end{smallmatrix}\right]$.

Aufgabe: Untersuchen Sie den endlichen Fall $n < \infty$, dann $n = \infty$. Was sind hier Gleichgewichte? Kann Altersversorgung rational sein?

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge
H202 Erläuterung

🙂 Unser Modell ist extrem vereinfacht, aber es illustriert das Prinzip. Es ist ein Gleichnis, ein einfaches Lehrbeispiel und leicht zu verstehen. Wir suchen alle stabilen Lösungen, also **Nash–Gleichgewichte**.

Zur Vereinfachung nehmen wir hier an, jede Generation G_i investiert automatisch in ihre Kinder G_{i+1}. Auch dies könnten wir als strategische Option untersuchen, ich gehe auf diese Verfeinerung nicht weiter ein.

Konrad Adenauer wird in dieser Frage der Ausspruch zugeschrieben: „Kinder bekommen die Leute immer.“ — Aus heutiger Sicht ein Irrtum.

Die Werteskalen und konkret angesetzten Zahlen sind etwas willkürlich. Uns geht es um die Frage, ob und wie Gleichgewichte möglich sind.

Die Frage mag überraschen: Jeder Akteur, die Generation G_i, trifft nur eine Entscheidung, nämlich die Zuwendung a_i an ihre Elterngeneration G_{i-1}, jedoch **ohne irgendeine Gegenleistung** erhoffen zu können.

Ist diese Zuwendung also irrational im Sinne individueller Maximierung? Oder gibt es doch Mechanismen, die sie materiell belohnen könnten? Genau diesen Fragen gehen wir in den nächsten Aufgaben nach!

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge
H203 Erläuterung

Aufgabe: (0) Formulieren Sie dies sorgfältig als strategisches Spiel

$$u : \prod_{i\in I} S_i \to \mathbb{R}^I : s \mapsto u(s).$$

Lösung: (0) Die Spielermenge ist $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Jede Generation G_i kennt nur die Aktion $a_{i-1} \in \{0,1\}$ ihrer Eltern und muss daraufhin ihre Aktion $a_i \in \{0,1\}$ wählen. Somit hat sie die vier möglichen Strategien

Egoist	$E = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 0\\ 1\mapsto 0\end{smallmatrix}\right]$,	Altruist	$A = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 1\\ 1\mapsto 1\end{smallmatrix}\right]$,
Kontra	$K = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 1\\ 1\mapsto 0\end{smallmatrix}\right]$,	Nachmacher	$N = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 0\\ 1\mapsto 1\end{smallmatrix}\right]$.

Jeder Spieler $i \in I$ hat also die Strategiemenge $S_i = \{E, A, K, N\}$. Der Strategievektor $s \in S := \prod_{i\in I} S_i$ bestimmt den Aktionsvektor $a \in \{0,1\}^I$: Wir setzen $a_0 = 1$ und rekursiv $a_i = s_i(a_{i-1})$ für $i \in I$ sowie $a_{n+1} = 0$.

Die Auszahlung $u : S \to \mathbb{R}^I$ ist in diesem Modell $u_i(s) = 2 - 1a_i + 2a_{i+1}$. Für Generation G_1 sind die Strategien $E \equiv K$ und $A \equiv K$ äquivalent, denn jedes Paar führt jeweils zu derselben Aktion a_1 und Auszahlung.

Die Randbedingungen, hier $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = 0$, sind etwas willkürlich, aber notwendig. Anschaulich können wir $s_0 = A$ und $s_{n+1} = E$ setzen.

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge
H204 Erläuterung

Beobachtbar sind in diesem Spiel nur die Aktionen $a_i \in \{0,1\}$. Diese allein bestimmen bereits alle Auszahlung $u_i = 2 - 1a_i + 2a_{i+1}$. Sprichwörtlich sagt hierzu der Volksmund: „Nur die Taten zählen.“ Biblisch: „An ihren Früchten sollt ihr sie erkennen.“ (Matthäus 7,20)

Die **Strategie** s_i ist hier jedoch nicht die Aktion a_i selbst, sondern die Methode (Funktion, Handlungsanweisung), um diese Aktion zu ermitteln. Die auszuführende Aktion a_i ist nämlich nicht konstant vorgeschrieben, sondern hängt ab von der vom Spieler i beobachteten Vorgeschichte.

Dieses raffinierte Modell unterscheidet auf genial-einfache Weise zwischen **Genotyp** $s_i \in \{E, A, K, N\}$, den individuellen Strategien, und **Phänotyp** $a_i \in \{0,1\}$, den ausgespielten Aktionen abhängig von der Vorgeschichte. Der Phänotyp entsteht aus Genotyp und Umwelt.

Ebenso können wir uns die Strategie s_i von Spieler i als seine **Moral** vorstellen, also seine (explizite) Vorschrift für das „rechte Handeln“. Die Handlung $a_i = s_i(a_{i-1})$ ist seine Reaktion auf die Handlungen anderer, also auf die in der Gesellschaft vorgefundenen Umstände.

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge

Aufgabe: (1) Finden Sie alle Gleichgewichtsauszahlungen $u(s) \in \mathbb{R}^I$!
(2) Genauer gefragt: Welche Gleichgewichte $s \in \mathrm{NE}(u)$ liegen dahinter?

Lösung: (1) Der konstante Strategievektor $s = (E, E, \dots, E)$ führt zu den Aktionen $a = (0, 0, \dots, 0)$ mit den Auszahlungen $u(s) = (2, 2, \dots, 2)$.
Hier ist s ein Nash–Gleichgewicht: Kein Spieler kann sich verbessern.

Jedes Nash–Gleichgewicht $s \in S$ führt zu genau demselben Ergebnis: Rückwärtsinduktion: Wäre $a \neq (0, 0, \dots, 0)$, dann existierte ein letzter Spieler $i \in I$ mit $a_i = 1$, also $a_{i+1} = \dots = a_{n+1} = 0$, und i könnte sich aus eigener Kraft verbessern. Somit wäre s kein Gleichgewicht.

☺ Damit kennen wir alle Gleichgewichtsauszahlungen $u(s) \in \mathbb{R}^I$!

(2) Sei $s \in \mathrm{NE}(u)$. Aus (1) wissen wir bereits $a_i(s) = 0$ für alle $i \in I$. Aufgrund der vorgegebenen Randbedingung $a_0 = 1$ gilt $s_1 \in \{E, K\}$. Für $i \geq 2$ gilt $a_{i-1} = a_i = 0$, also $s_i \in \{E, N\}$. Wäre $s_i = N$, so könnte Spieler $i - 1$ sich aus eigener Kraft verbessern. Also bleibt nur $s_i = E$.

☺ Damit kennen wir alle Nash–Gleichgewichte $s \in \mathrm{NE}(u)$!

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge

Bei nur **endlich vielen Generationen** ist dies ein Ponzi–Betrug:
Dieses Umverteilungssystem muss irgendwann zusammenbrechen!

$\mathscr{R}_1$: Die letzte Generation G_n hat kein Interesse an einer Zuwendung an ihre Elterngeneration G_{n-1}. Im Gegenteil schadet sich G_n damit. Bei rationalem Verhalten wird die Generation G_n also $a_n = 0$ wählen.

$\mathscr{R}_2$: Die vorletzte Generation G_{n-1} sieht dies kommen, Rationalität zweiter Stufe vorausgesetzt. Daher wird auch sie $a_{n-1} = 0$ wählen.

So geht es weiter: $a_n = 0$ führt zu $a_{n-1} = 0$ bis schließlich $a_1 = 0$.
Bei rationaler Spielweise entstehen hier also keinerlei Zuwendungen.

Diese raffinierte Schlussweise kennen wir als **Rückwärtsinduktion**.
Wir eliminieren hierbei schrittweise alle strikt dominierten Strategien

Zu beachten ist hierbei jedoch, dass die Generation G_i Rationalität der Stufe $n - i + 1$ benötigt. Die frühen Generationen benötigen demnach Rationalität sehr hoher Stufe! Das entspricht genau dem Ponzi–Betrug.

Die Schlussweise gilt nicht mehr im Falle unendlich vieler Generationen. Tatsächlich finden wir im unendlichen Falle völlig neue Gleichgewichte.

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge

Unser Argument beruht auf Rationalität im Sinne der Definition A2a. Dies wird klarer, wenn wir zum Kontrast folgende Alternative betrachten: Generation G_n möchte zwar ihren Nutzen maximieren (Axiom $\mathscr{R}_0$ gilt), ignoriert aber, dass sie die letzte Generation ist (Axiom $\mathscr{R}_1$ ist verletzt).

Aufgabe: Was passiert, wenn die letzte Generation irrational handelt? Im Angesicht des Weltuntergangs verfolgt sie vielleicht andere Ziele und könnte sich für irgendeine Strategie $s_n \in \{E, A, K, N\}$ entscheiden.

Lösung: (3) Wir fixieren $s_n = E$. Das ist die dominante Strategie.
Es gelten dieselben Argumente und Ergebnisse wie zuvor in (1,2).

(4) Wir fixieren $s_n = A$. Für alle vorigen Spieler $i = n - 1, \dots, 1$ gelten dieselben Argumente wie zuvor: Wir finden $s_i = E$ und $s_1 \in \{E, K\}$.

(5) Wir fixieren $s_n = K$. Für alle vorigen Spieler $i = n - 1, \dots, 1$ gelten dieselben Argumente wie zuvor: Wir finden $s_i = E$ und $s_1 \in \{E, K\}$.

(6) Wir fixieren $s_n = N$. Für Spieler $n - 1$ ist nun $s_{n-1} = A$ dominant. Für alle Spieler $i = n - 2, \dots, 1$ finden wir per Rückwärtsinduktion $s_i = E$ und schließlich $s_1 \in \{E, K\}$. (Siehe unten, das Experiment im Casino.)

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge

Bei endlich vielen Generationen gibt es nur ein Gleichgewicht (1). Selbst bei irrationalem Verhalten bricht das System irgendwann ein. Selbst wenn die frühen Spieler von diesem System profitieren sollten, so ist doch klar: irgendein späterer Spieler muss die Zeche zahlen.

In der Realität treten Betrugssysteme mit diesem Muster tatsächlich auf. Warum fallen Spieler darauf herein? Mehrere Erklärungen sind denkbar:

Die frühen Spieler können irrational handeln, weil sie das Spielsystem nicht durchschauen oder analysieren können. (Annahme $\mathscr{R}_1$ ist verletzt.)

Es könnte auch sein, dass frühe Spieler durchaus das Spielsystem durchschauen, also für sie die Annahme $\mathscr{R}_1$ gilt, sie aber umgekehrt auf die Naivität späterer Spieler hoffen. (Annahme $\mathscr{R}_2$ ist verletzt.)

Bei beschränkter Rationalität gibt es genug Möglichkeiten, auf solche Betrugssysteme hereinzufallen. Erfahrung lehrt, dass dies geschieht. Das gilt insbesondere, wenn sich Details und Darstellung ändern, und so die erneute Analyse die Kapazitäten der Spieler übersteigt. Zudem ist das Internet ideal zur Verbreitung von Betrügereien.

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Im **Casino Royal** (13.05.2022) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, die Kooperation überlappender Generationen als Spiel zu erproben. Experimente helfen uns zur Schärfung und Überprüfung der Theorie, getreu den obigen weisen Worten von Martin Shubik auf Seite H140.

Zur Einleitung habe ich die Spielregeln anhand der Folie H201 erklärt sowie die Modalitäten unserer Umsetzung im Hörsaal, siehe unten. Anfangs spielten sechs Studierende, dann sieben und schließlich neun. Einige Casino-Teilnehmer:innen besuchen die Vorlesung, andere nicht.

Zu diesem Zeitpunkt stand die Vorlesung genau *vor* dem Abschnitt zu überlappenden Generationen. Die Teilnehmer:innen hatten das Spiel – zumindest in der Vorlesung – noch nicht gesehen oder analysiert. Auch im Casino fand die Diskussion erst zwischen den Runden statt.

Als Randbedingungungen wurden $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = 1$ festgelegt. Der Unterschied von $a_{n+1} = 1$ zu $a_{n+1} = 0$ ist nur psychologisch: Für Spieler n addiert sich eine Konstante zur seiner Auszahlung. Ab dem vierten Spiel haben wir Randeffekte spielerisch getestet.

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Erstes Spiel: Sechs Studierende spielten die Generationen $G_1, \dots, G_6$. Dazu bekam jede:r Spieler:in zufällig ihre Generation G_i zugewiesen und notierte dazu ihre Strategie $s_i \in \{E, A, K, N\}$ auf einem Zettel. Die Zettel wurden eingesammelt und an der Tafel ausgewertet:

$$\leftarrow 0 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \;\mathrm{x}\; 4 \;\mathrm{x}\; 5 \;\mathrm{x}\; 6 \leftarrow 7$$

0	1	2	3	4	5	6	7
A	A	N	N	E	E	N	A
	3	3	1	2	2	4	

Wie immer gilt Vorsicht: Dies ist kein kontrolliertes Laborexperiment. Wir baten alle, bei der Auswahl ihrer Strategien nicht zu spicken und sich nicht abzusprechen. Strikt durchgesetzt haben wir dies jedoch nicht.

Natürlich nahmen alle diese Bitte sehr ernst, schon aus Eigeninteresse, denn jede:r weiß natürlich: Manipulationen des Raum-Zeit-Kontinuums führen zu unkalkulierbaren Risiken … und meist zu Kino-Blockbustern.

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Zweites Spiel: Selbe Spielregeln wie zuvor. Inzwischen spielten sieben Studierende mit. Jede:r Spieler:in kannte die ihr zugeloste Generation $i \in \{1, \dots, 7\}$ und wählte daraufhin ihre Strategie $s_i \in \{E, A, K, N\}$. Die Zettel wurden eingesammelt und an der Tafel ausgewertet:

$$\leftarrow 0 \leftarrow 1 \;\mathrm{x}\; 2 \;\mathrm{x}\; 3 \;\mathrm{x}\; 4 \;\mathrm{x}\; 5 \;\mathrm{x}\; 6 \;\mathrm{x}\; 7 \leftarrow 8$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	N	E	N	E	N	E	E	A
	1	2	2	2	2	2	4	

Nach den vorigen Erfahrungen bewegt sich die Gesellschaft in Richtung Egoismus. In einem Kontext von Egoisten fallen die Nachmacher nicht weiter auf, und die Gesellschaft verhält sich insgesamt egoistisch.

Das theoretisch erwartete Nash–Gleichgewicht wird nicht so schnell erreicht. In einer überwiegend egoistischen Gesellschaft ist der Druck gering, von N nach E zu wechseln, siehe G_1 gegenüber G_3, G_5, G_6, G_7.

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Drittes Spiel: Selbe Spielregeln wie zuvor. Inzwischen spielten neun Studierende mit. Jede:r Spieler:in kannte die ihr zugeloste Generation $i \in \{1, \dots, 9\}$ und wählte daraufhin ihre Strategie $s_i \in \{E, A, K, N\}$. Die Zettel wurden eingesammelt und an der Tafel ausgewertet:

$$\leftarrow 0 \;\mathrm{x}\; 1 \;\mathrm{x}\; 2 \;\mathrm{x}\; 3 \;\mathrm{x}\; 4 \;\mathrm{x}\; 5 \;\mathrm{x}\; 6 \;\mathrm{x}\; 7 \;\mathrm{x}\; 8 \leftarrow 9 \leftarrow 10$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	E	N	E	E	N	E	E	E	K	A
	2	2	2	2	2	2	2	4	3	

Wir sind nahe am Nash–Gleichgewicht, doch nicht ganz. Die Strategie K ist überraschend. Nehmen die Spieler:innen das Spiel ernst genug? Manche wollten vielleicht zur Abwechslung etwas neues ausprobieren.

Zudem kamen einige Teilnehmer:innen verspätet hinzu und lernten das Spiel nun erst durch *trial and error* und durch Imitation. Das war zwar so nicht geplant, entspricht aber durchaus dem wahren Leben.

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Viertes Spiel: Selbe Spielregeln wie zuvor. Als Neuerung haben wir auf Vorschlag der Teilnehmer:innen beschlossen, der Generation G_{n+1} die Strategie N zuzuweisen. Jede:r Spieler:in kannte die ihr zugeloste Generation $i \in \{1, \dots, 9\}$ und wählte ihre Strategie $s_i \in \{E, A, K, N\}$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	E	N	N	E	N	N	E	E	A	N
	2	2	2	2	2	2	2	4	3	

Hier wären $n+1$ verschiedene, profitable Nash–Gleichgewichte möglich, nämlich $s^k = (E, \dots, E, A, N, \dots, N)$, also $s_k^k = A$ und $s_i^k = E$ für $i < k$ und $s_i^k = N$ für $i > k$. Wir sehen oben (fast) den einfachsten Fall $k = n$.

Warum wurden weiterreichende Nash–Gleichgewichte s^k nicht gespielt? Sie benötigen Absprachen, doch die Generation $n-1$ hat kein Interesse daran, da ihre Auszahlung dann von 4 auf 3 sinken würde.

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Fünftes Spiel: Ab jetzt gab jede Spieler:in *zuerst* ihre Strategie an, *danach* wurde ihr eine Generation per Los zugewiesen. Symmetrie! Auf Vorschlag der Teilnehmer:innen blieb Generation G_{n+1} bei Strategie N, zudem wurde eine mittlere Generation fest auf N gesetzt, hier G_6.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	E	N	N	E	N	N	E	E	A	A	N
	2	2	2	2	2		2	4	3	3	

Die Gesellschaft blieb vorwiegend egoistisch geprägt, die einzigen zwei Altruisten fanden sich zufällig am Ende, die Nachmacher schlossen sich daher den Egoisten an. Insgesamt blieb es bei geringer Kooperation.

Die Symmetrie hilft, doch noch wurde kein Gleichgewicht erreicht. Kann eine konzertierte Aktion erfolgreich sein? Das erfordert eine Absprache vor dem Spiel! Jedes Nash–Gleichgewicht ist dann selbst-stabilisierend.

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Sechstes Spiel: Selbe Spielregeln wie zuvor im fünften Spiel. Weiterhin wurde unter den Spieler:innen keine gemeinsame Absprache getroffen. Das hätte die Strategien koordinieren können, wurde aber weder von der Spielleitung initiiert noch von den Teilnehmer:innen gefordert.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	A	E	A	A	E	N	N	N	N	N	N
	1	4	3	1	2		2	2	2	2	

Wir nähern uns, wenn auch weiterhin nur langsam, dem erwarteten Nash–Gleichgewicht $s^0 = (N, N, \dots, N)$. Die Symmetrie hilft, da keine Spieler:in vorweg ihre Generation weiß, doch das genügt noch nicht.

Leider haben wir hier aufgehört und so die Gelegenheit verpasst, noch einmal mit vorheriger Absprache zu spielen. Kann eine ausgiebige Diskussion zum Nash–Gleichgewicht führen? Es bleibt spannend!

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Übung: Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte $s \in \mathrm{NE}(u)$ zu den Randbedingungen $s_0 \in \{A, E\}$ und $s_{n+1} \in \{A, E, K, N\}$. Interessant ist insbesondere der obige Fall $s_0 = A$ und $s_{n+1} = N$.

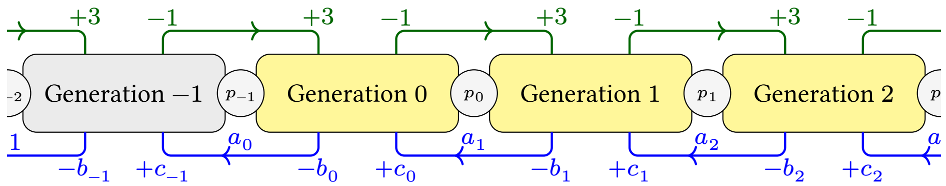
Übung: Überlegen Sie in praktischen Situationen, etwa im obigen Spiel, wie ein solches Gleichgewicht ausgewählt / angesteuert / gefunden werden kann. Versuch und Irrtum? Verhandlung und Absprache?

Übung: Die symmetrisierte Fassung ist ein anderes Spiel $\tilde{u} : S^I \to \mathbb{R}^I$. Formulieren Sie dies aus und bestimmen Sie die Nash–Gleichgewichte. Das beschreibt (und erklärt?) obige Durchgänge vier, fünf und sechs.

Übung: Mischung als Variante: Einige Spieler:innen kennen vorneweg Ihre Generation $i \in I$, andere bekommen nur $*$ als Info und werden erst nach ihrer Strategiewahl zugelost. Das Sein bestimmt das Bewusstsein?

Es ist nicht das Bewusstsein der Menschen, das ihr Sein, sondern umgekehrt ihr gesellschaftliches Sein, das ihr Bewusstsein bestimmt.
Karl Marx und Friedrich Engels, *Kritik der politischen Ökonomie* (1859)

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell



Die Generationen $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ interagieren wie gezeigt, mit Kosten $b_i \in \mathbb{R}_{>0}$ und Nutzen $c_i \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie den Fortsetzungswkten $p_i \in [0,1]$ für $i \in \mathbb{N}$.

Jede Generation G_i kennt nur die Aktion $a_{i-1} \in \{0,1\}$ ihrer Eltern G_{i-1}. Sie entscheidet sich daraufhin entweder für Egoismus ($a_i = 0$) oder Altersversorgung ($a_i = 1$). Ihre Auszahlung ist $u_i = 2 - b_i a_i + p_i c_i a_{i+1}$.

Aufgabe: Was sind hier Gleichgewichte? Ist Altersversorgung rational?

Lösung: Notwendig ist, dass sich Altersversorgung individuell lohnt:

(0) Gilt $p_m c_m < b_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so ist $a_m = 0$ strikt dominant für G_m. Per Rückwärtsinduktion folgt dann $a_i = 0$ für alle vorigen $i = 0, 1, \dots, m$.

(1) Gilt hingegen $p_i c_i > b_i$ für alle $i \geq m$, so erscheint Altersversorgung tatsächlich als ein weiteres mögliches Gleichgewicht.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

Die graphische Darstellung unseres Modells bedeutet folgendes: Jede Generation G_i wählt ihre Aktion $a_i \in \{0,1\}$: Sie kann ihre Eltern vernachlässigen ($a_i = 0$) oder versorgen ($a_i = 1$). Letzteres kostet b_i, nutzt aber den Eltern c_{i-1}. Mit Wkt $p_i \in [0,1]$ geht alles weiter.

Jede Generation G_i kennt nur die Aktion $a_{i-1} \in \{0,1\}$ ihrer Eltern. Sie hat demnach die Strategiemenge $S_i = \{E, A, K, N\}$ mit

Egoist	$E = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 0\\ 1\mapsto 0\end{smallmatrix}\right]$,	Altruist	$A = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 1\\ 1\mapsto 1\end{smallmatrix}\right]$,
Kontra	$K = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 1\\ 1\mapsto 0\end{smallmatrix}\right]$,	Nachmacher	$N = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 0\\ 1\mapsto 1\end{smallmatrix}\right]$.

Der Strategievektor $s \in S$ bestimmt den Aktionsvektor $a : \mathbb{Z} \to \{0,1\}$: Wir setzen $a_i = 1$ für $i \in \mathbb{Z}_{<0}$ und rekursiv $a_i = s_i(a_{i-1})$ für $i \in \mathbb{N}$. (Randbedingungen sind willkürlich, aber zur Rechnung notwendig.)

Die Auszahlung $u : S \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist dann $u_i(s) = 2 - b_i a_i + p_i c_i a_{i+1}$. Hier wird der Nutzen c_i diskontiert durch die Fortsetzungswkt p_i. Das oben ausgeführte konkrete Basismodell entspricht der Wahl der Modellparameter $b_i = 1$ und $c_i = 2$ sowie $p_i = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

☺ Die Altersversorgung ähnelt oberflächlich einem **Ponzi–Betrug**, führt uns aber tatsächlich zu nicht-trivialen Nash–Gleichgewichten! Das ist der Nutzen konkreter Modelle: Wir können alles ausrechnen.

Der endliche und unendliche Fall werden wunderbar zusammengefasst, verallgemeinert und interpoliert durch die Abbruchwkten $1 - p_i \in [0,1]$. Der Fall $p_n = 0$ entspricht sicherem Abbruch, also dem endlichen Fall.

Diese Erweiterung unseres Generationenmodells ist mathematisch gesehen eine Verallgemeinerung, vor allem aber eine Vereinfachung! Das erweiterte Modell ist zudem auch wesentlich realistischer.

Die Wkten haben hier keine Erinnerung, somit ist für jede Generation G_i der Vergleich sehr einfach: Den Kosten b_i gegenüber steht die erwartete Altersversorgung $p_i c_i$, also der Nutzen c_i diskontiert durch die Wkt p_i.

Im Falle $p_i c_i < b_i$ ist für G_i nur das egoistische Verhalten stabil / rational. Im Falle $p_i c_i > b_i$ *kann* das altruistische Verhalten für G_i rational sein, *wenn* G_{i+1} und alle nachfolgenden Generationen dies belohnen.

☺ Nash–Gleichgewichte zeigen mögliches, rationales Verhalten.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

⚠ Das Modell erklärt nicht, was eine **gerechte Altersversorgung** ist. Insbesondere erklärt es noch nicht, *welches* Gleichgewicht gespielt wird. Es zeigt jedoch, dass eine Altersversorgung der Eltern nicht altruistisch begründet sein muss, sondern durchaus egoistisch vorteilhaft sein kann.

Es gibt Menschen, die diesem System **misstrauen**, es ablehnen und seine Wirksamkeit abstreiten. In unserem Modell ist die von ihnen zugrundegelegte Wkt Null oder zu klein, um ein Nash–Gleichgewicht tragen zu können. Auch dieses Misstrauen ist also im Modell abbildbar.

Unsere Modelle sind einfache Beispiele zum **Mechanismendesign** (engl. *mechanism design*). Das Ziel ist die Schaffung eines Rahmens (als Spiel, Anreiz, Gesetz, etc.), der gewünschtes Verhalten ermöglicht, fördert oder gar erzwingt. Die inviduelle Entscheidungsfreiheit kann / soll / darf dabei nicht direkt eingeschränkt werden, allein der Rahmen wird so gestaltet, dass rationale Spieler das gewünschte Verhalten wählen.

Die Spieltheorie ist daher logische Grundlage für jeden **Gesetzgeber**, oder allgemein für jede Gestaltung von Regeln des Zusammenlebens.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

H221

(1) Sei $p_i c_i > b_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, etwa $b_i = 1$ sowie $c_i = 2$ und $p_i = 1$. Zu $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ betrachten wir folgenden Strategievektor $s^n \in S$:

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
i = & & 0, & 1, & \dots, & & & n, & \dots & & & & \\
s^n = & (& E, & E, & \dots, & E, & E, & A, & N, & N, & N, & \dots &) \\
a^n = & (& 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 1, & 1, & 1, & 1, & \dots &) \\
u(s^n) = & (& 2, & 2, & \dots, & 2, & 4, & 3, & 3, & 3, & 3, & \dots &)
\end{array}
$$

Ausgeschrieben gilt $s_i^n = E$ für $i < n$ und $s_n^n = A$ und $s_i^n = N$ für $i > n$. Dies führt zu $a_i^n = 0$ für $i < n$ und $a_i^n = 1$ für $i \ge n$, also $u(s^n)$ wie oben.

Kann sich irgendein Akteur $i \in \mathbb{N}$ aus eigener Kraft verbessern? Nein! 🙂 Also ist der Strategievektor s^n tatsächlich ein Nash–Gleichgewicht!

Sei $s \in S$ ein beliebiges Nash–Gleichgewicht mit Aktionen $a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und Auszahlungen $u(s) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Gälte $a_i = 1$ und $a_{i+1} = 0$, so könnte i sich aus eigener Kraft verbessern. Also gilt $a = a^n$ für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

🙂 Anders gesagt, a kann steigen oder bleiben, aber nicht fallen. Damit kennen wir bereits alle Gleichgewichtsauszahlungen!

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

H222 Erläuterung

Übung: Finden Sie alle dahinter liegenden Gleichgewichte $s \in \mathrm{NE}(u)$. **Rückwärtsinduktion** gilt nicht im Falle unendlich vieler Generationen: Es gibt keine letzte Generation, mit der die Induktion beginnen könnte. Tatsächlich finden wir im unendlichen Falle völlig neue Gleichgewichte.

Das Generationenmodell unterscheidet auf raffinierte Weise zwischen dem **Genotyp** $s_i \in \{E, A, K, N\}$ (Veranlagung, Überzeugung, Moral) und dem **Phänotyp** $a_i \in \{0, 1\}$ (Ausprägung, Erscheinung). Letztere sind die ausgespielten Aktionen, abhängig von der **Vorgeschichte**.

Die Generation G_0 hat nur zwei phänotypisch verschiedene Wahlen: $E \equiv N$ oder $A \equiv K$. Jede Generation G_i für $i \ge 1$ hat vier Strategien.

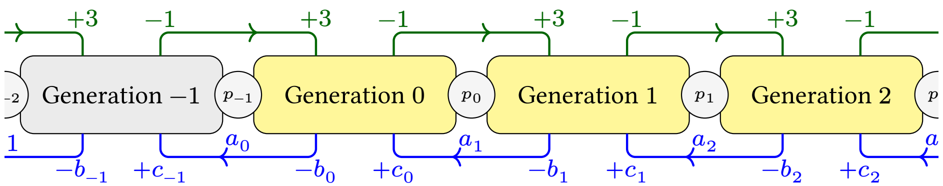
Jede Generation G_i trifft eine einzige Entscheidung, die Zuwendung a_i an ihre Elterngeneration G_{i-1}. Die Elterngeneration G_{i-1} hat keinerlei Rückwirkung auf G_i, also kein echtes Druckmittel (allenfalls moralische Appelle oder leere Drohungen, die wir in unserem Modell ignorieren).

Allein die Kindergeneration G_{i+1} hat ein mögliches Druckmittel auf G_i. Bemerkenswerterweise genügt schon dieser schwächere Mechanismus.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

H223

Zusammenfassung unserer Ergebnisse zum Rentenmodell:



Satz H2A: Gleichgewichte im Rentenmodell

Die Generationen $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ interagieren wie gezeigt, mit Kosten $b_i \in \mathbb{R}_{>0}$ und Nutzen $c_i \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie den Fortsetzungswkten $p_i \in [0, 1]$ für $i \in \mathbb{N}$.

(1) Ist $s \in \prod_{i \in \mathbb{N}} S_i$ ein Nash–Gleichgewicht, so ist der Aktionsvektor $a = a(s) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ wachsend, also $a = a^n := \mathbf{1}_{\mathbb{N}_{\ge n}}$ für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(2) Gilt $p_m c_m < b_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so ist $a_m = 0$ strikt dominant für G_m, per Rückwärtsinduktion folgt $a_i = 0$ für alle $i = 0, 1, \dots, m$, also $n > m$.

(3) Gilt $p_i c_i > b_i$ für alle $i \ge m$, so lässt sich jeder Aktionsvektor $a = a^n$ mit $n \ge m$ durch ein Nash–Gleichgewicht $s = s^n \in \prod_{i \in \mathbb{N}} S_i$ realisieren.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

H224 Erläuterung

Damit dieses filigrane Gleichgewicht bestehen kann, muss es unendlich viele Generationen geben. Der endliche Fall verläuft völlig konträr!

Genauer: Es muss *potentiell* unendlich viele Generationen geben, denn keine Generation darf ernsthaft glauben, die letzte zu sein. Die Maxime „Nach mir die Sintflut!“ führt zu Rücksichtslosigkeit.

Realistischer ist daher folgendes Modell: Jede Generation G_i glaubt, dass die Generationenfolge mit Wkt $p_i \in [0, 1]$ weitergeht. Mit Wkt $1 - p_i$ geht die Welt unter, oder Generation G_{i+1} spielt einfach nicht mehr mit.

Im Beispiel vergleicht G_i die Aktion $a_i = 0$ und die Auszahlung $u_i = 2$ mit ihrer Alternative $a_i = 1$ und der Auszahlung $u_i = 1 + 2p_i > 2$. Für $p_i > 1/2$ fällt der Vergleich weiterhin zugunsten der Aktion $a_i = 1$ aus.

Bei Fortsetzungswkt von $p_i = 2/3$ erwarten wir nur drei Generationen, dennoch lohnt zu jedem Zeitpunkt immer noch der Generationenvertrag!

Fazit: Jede Generation muss zuversichtlich genug an den Fortbestand weiterer Generationen glauben und so auf die Fortsetzung des Systems vertrauen; dann und nur dann sind nicht-triviale Gleichgewichte möglich.

Empirie: It’s a long way to the top... und zum Gleichgewicht!

Im **Casino Royal** (20.05.2022) wollte ich die Erfahrungen der Vorwoche zu einem würdigen Abschluss bringen. Die positive Entwicklung stimmte optimistisch, es fehlte nicht viel. In der Vorlesung am Mittwoch hatten wir das Generationenmodell diskutiert und alle Gleichgewichte bestimmt. Das Kapitel war abgeschlossen. In diesem Sinne schien alles gelöst.

Meine Hoffnung war, das höherwertige Gleichgewicht in einem letzten, kurzen Experiment zu erproben, auch empirisch als „die beste Lösung“ zu etablieren, und damit die schöne Theorie zu bestätigen und zu krönen. Allein, es kam alles anders. Jedes Casino ist lehrreich, und manchmal geschieht Spektakuläres, Geschichte wird geschrieben. Dieses Casino lief weitgehend konträr zur Intuition und hat erneut das Zeug zur Legende.

Es kamen 15 Teilnehmer:innen, $1/3$ war schon letzte Woche im Casino, für $2/3$ war das Generationenspiel neu. Eine Teilnehmerin der Vorwoche stellte die Regeln für alle nochmals vor, anhand der obigen Folie H201, so entstand ein hinreißendes Beamer-Karaoke. (Notiz an mich selbst: Ich sollte auch meine Vorlesungen generell auf Karaoke umstellen!)

Empirie: It’s a long way to the top... und zum Gleichgewicht!

Erstes Spiel: Jede:r Spieler:in bekommt eine Generation $G_1, \dots, G_{15}$ zugelost und notiert ihre Strategie $s_i \in \{E, A, K, N\}$ auf einem Zettel. Alle Zettel werden eingesammelt und an der Tafel ausgewertet:

←	0	←	1	X	2	X	3	X	4	X	5	X	6	X	7	←	8	←	9	←	10	X	11	X	12	X	13	←	14	←	15	←	16
	A		A		E		N		E		N		N		N		A		N		A		E		E		N		A		A		N
			1		2		2		2		2		2		4		3		3		1		2		2		4		3		3		

Die Randbedingungen $s_0 = A$ und $s_{16} = N$ sind fix und allen bekannt. Das Ende $\dots, A, A, N$ ist daher unerwartet, rational wäre $\dots, E, A, N$. Andererseits sind viele Spieler:innen noch unerfahren, probieren aus und experimentieren. Gut, dass wir mit dieser Proberunde beginnen!

In diesem Testlauf ohne vorige Aussprache zählen wir 6 Nachmacher, 5 Altruisten, 4 Egoisten. Das ist die nüchterne Ausgangslage, nun sind alle hochmotiviert und bereit zu zivilisatorischen Höchstleistungen. Können unsere wackeren Held:innen die Welt verbessern?

Empirie: It’s a long way to the top... und zum Gleichgewicht!

Nach dem Probelauf kommt der Vorschlag, zur symmetrischen Form überzugehen. Alle stimmen zu. Zudem wünschen die Teilnehmer:innen dringend eine ausführliche Aussprache mit dem Ziel und in der Hoffnung, ein gemeinsames Vorgehen abzustimmen. Das hatte bislang gefehlt!

In flammender Rede erklärt Frau H. ihre Vision, ich paraphrasiere: „Ich war in der Vorlesung und habe zu diesem Spiel alles verstanden. Das Beste ist, wenn wir alle Nachmacher spielen, dann bekommt jede:r von uns die Auszahlung 3. Das ist viel besser als eben und zudem ein Gleichgewicht: Wer davon abweicht, und zum Beispiel E oder K spielt, schadet sich selbst, denn dann bekommt er/sie statt 3 nur 2.“

Ich versuche zu polemisieren: „Ganz egoistisch gesehen wäre es am lukrativsten, altruistische Kinder zu haben und selbst Egoist zu spielen.“ Dieses Störmanöver wird abgeschmettert mit dem Argument, dass noch keine ihre Position kennt, und die anderen ja doch Nachmacher spielen (sollen). Es werden noch Details zu diesem Vorschlag erörtert und an die Autorität appelliert, erstaunlicherweise diesmal nicht an die Moral.

Empirie: It’s a long way to the top... und zum Gleichgewicht!

Zweites Spiel: Die visionäre Rede von Frau H. zeigt Wirkung, fast alle folgen der überzeugend vorgebrachten Argumentation, doch nicht ganz: Neben elf (!) Nachmachern gibt es zwei Altruisten, einen Egoisten und einen Kontraspieler. Die zufällige Zulosung der Generationen ergibt:

←	0	←	1	←	2	←	3	←	4	←	5	←	6	X	7	X	8	X	9	X	10	X	11	X	12	←	13	←	14	X	15	X	16
	A		N		N		N		A		N		N		K		N		N		N		N		N		A		N		E		N
			3		3		3		3		3		1		2		2		2		2		2		4		3		1		2		

Beim Auslosen von links nach rechts beginnt alles so vielversprechend! Auch hier ist das Ende unglücklich. Da die Generation zugelost wurde, liegt es diesmal nicht an unkluger Strategie, sondern ist einfach Pech.

Noch tragischer ist die Kontra-Generation 7: Sie schadet nicht nur sich selbst, sondern reißt vier wohlmeinende Nachmacher-Generationen mit ins Verderben. Erst die fünfte hat großes Glück und altruistische Kinder.

Die altruistische Generation 4 hingegen fällt phänotypisch gar nicht auf. Kontrovers: Soll man Altruisten rügen oder loben, bremsen oder fördern?

Empirie: It’s a long way to the top... und zum Gleichgewicht!

Die Enttäuschung ist groß, und manche machen ihrer Wut sofort Luft: „Hätte Generation 7 nicht Kontra gespielt, sondern Nachmacher wie zuvor vereinbart, dann wäre unser Plan wunderbar aufgegangen.“ Hätte, hätte, Generationenkette. *You can’t make this stuff up!*

Herr S. ergreift das Wort: „Ich stimme meiner Vorrednerin voll und ganz zu: Wir sollten alle Nachmacher spielen. Leider sind manche nicht fähig oder nicht willens dazu. Um das auszugleichen, sollten ein paar von uns Altruist spielen, sagen wir mit Wkt $1/4$. Das bricht Negativsträhnen.“

Als Advocatus Diaboli versuche ich erneut zu polemisieren. Vorneweg *ad hominem*: „Herr S. hat eben noch Geld verloren, nun spielt er sich als Experte auf.“ Dann populistisch: „Ich als einfacher Mann auf der Straße finde das zu kompliziert. Die Studenten lernen so einen theoretischen Quatsch an der Uni, in der Praxis funktioniert das nie und nimmer!“. – „Doch, man kann es leicht nachrechnen.“ – „Nein, ich nicht.“

Ich zweifle, ob Anleitung und Begründung wirklich verstanden werden. Allen anderen scheint es klar genug, ihnen genügt die Aussprache.

Empirie: It’s a long way to the top... und zum Gleichgewicht!

Drittes Spiel: Die Ansprache von Herrn S. hat wohl Eindruck gemacht. Neben zehn (!) Nachmachern gibt es einen Altruisten und vier Egoisten. Der gesellschaftliche Zusammenhalt hat sich somit leicht verschlechtert. Die zufällige Zulosung der Generationen ergibt:

← 0 ← 1 ← 2 X 3 X 4 ← 5 X 6 X 7 X 8 X 9 X 10 X 11 X 12 X 13 X 14 X 15 X 16

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	*N*	*N*	*E*	*N*	*A*	*E*	*N*	*E*	*E*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
	3	1	2	4	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	

Herr S. ist sichtlich geknickt und sagt später: „Ich frage mich, ob mein Vorschlag nicht mehr geschadet als genutzt hat. Vielleicht haben einige Spieler auf einen ausreichend hohen Anteil von Altruisten spekuliert, und deshalb Egoist gespielt?“ Gelohnt hat sich das jedenfalls nicht!

Der Vorschlag ist gewitzt. Doch als jahrelang erfahrener Spieltheoretiker weiß Herr S. natürlich, dass sein Strategiebündel kein Gleichgewicht ist, also nicht selbst-stabilisierend. Im Gegenteil verlockt es zur Spekulation. Wo kein Gleichgewicht ist, helfen auch keine frommen (Experten-)Worte.

Empirie: It’s a long way to the top... und zum Gleichgewicht!

Wieder ist die Enttäuschung groß. Wie kann das sein? Wer ist schuld?

Herr S. improvisiert eine kreative Erklärung: „Manche von uns sind neu, andere haben schon Spielgeld aus den Vorwochen. Sie möchten nicht, dass mehr Spielgeld in Umlauf kommt und sabotieren vielleicht unsere Bemühungen.“ Es ist nur ein kleiner Schritt zum Verschwörungsmythos.

Herr M. proklamiert: „Wir sollten endlich alle zusammenhalten und Prof. Eisermann möglichst viel Geld aus der Tasche ziehen!“ Wo der innere Zusammenhalt fehlt, eint vielleicht ein gemeinsamer äußerer Feind? Das klappt immer. Als zusätzliche Motivation schadet es nie.

Herr A. unterbreitet seine Troll-Vermutung: „Einige Teilnehmer:innen nehmen das Spiel nicht ernst. Statt der Auszahlung in €i$to maximieren sie ihren Spaß am allgemeinen Chaos und an dem Ärger der anderen. Daher sollten wir nicht Spielgeld auszahlen, sondern echtes Geld!“

Nach Rat unserer Rechtsabteilung („Nein!“) willige ich ein, echtes Geld auszuzahlen. Umrechnungskurs $1 \mapsto -50$¢, $2 \mapsto 0$¢, $3 \mapsto 50$¢, $4 \mapsto 100$¢.

Empirie: It’s a long way to the top... und zum Gleichgewicht!

Alle Teilnehmer:innen werden über Chancen und Risiken aufgeklärt und ausdrücklich darauf hingewiesen, dass sie bei diesem Durchgang zwar Geld gewinnen, aber auch Geld verlieren können. Frau Stoll erläutert ausführlich, dass man sicherheitshalber Egoist spielen kann.

Viertes Spiel: Es geht um Geld, zuvor echte €i$to, jetzt echte Euro! Ich konferiere mit meiner Bank und hole Bargeld, daher verpasse ich den Großteil der lebhaften Debatte. Das Ergebnis spricht für sich:

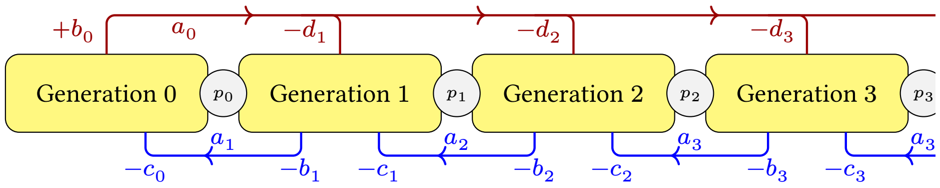
← 0 ← 1 ← 2 ← 3 ← 4 ← 5 ← 6 ← 7 ← 8 ← 9 ← 10 ← 11 ← 12 ← 13 ← 14 ← 15 ← 16

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*A*	*N*	*A*	*N*	*N*	*N*	*N*
	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	

Yes! Nach intensiven Verhandlungen ist die von allen so lang ersehnte Lösung endlich erreicht, ich um 7.50€ ärmer, alle an Erfahrung reicher. Wir werden hingewiesen auf StGB §284 *Unerlaubte Veranstaltung eines Glücksspiels.* Ich halte dagegen GG Art. 5.3.1 *Kunst und Wissenschaft, Forschung und Lehre sind frei.* What happens in Vegas, stays in Vegas.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Können zukünftige Generationen ihre Rechte schon heute einklagen?



Nach uns die Sintflut!
Wo kein Kläger, da kein Richter!

Wir haben die Erde nicht von unseren Eltern geerbt,
sondern von unseren Kindern nur geliehen.

Akteure sind die Generationen G_i für $i \in \mathbb{N}$. Die Generation G_0 wählt ihre Aktion / Strategie $a_0 \in A_0 = \{0 = \text{Nachhaltigkeit}, 1 = \text{Raubbau}\}$.

Jede Generation G_i mit $i \geq 1$ kennt die gesamte Vorgeschichte und folgert daraus ihre Aktion $a_i \in A_i = \{0 = \text{schweigen}, 1 = \text{anklagen}\}$.

Letzteres kostet sie selbst $b_i > 0$ und ihre Elterngeneration $c_{i-1} > 0$. Generation G_i hat somit die Strategiemenge $S_i = \{\, s_i : \{0,1\}^i \to \{0,1\} \,\}$.

Mit Wkt $p_i \in [0,1]$ setzt sich das System von Generation G_i zu G_{i+1} fort. Auszahlungen sind $u_0 = b_0 a_0 - p_0 c_0 a_1$ und $u_i = -b_i a_i - p_i c_i a_{i+1} - d_i a_0$.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

„Nach uns die Sintflut!“ Was tun, wenn eine Generation durchdreht? Kommt sie immer straflos davon? „Wo kein Kläger, da kein Richter!“ Oder können wir **intergenerationelle Schutzmechanismen** entwickeln für den Erhalt der Umwelt und die Rechte zukünftiger Generationen?

Wir haben die Erde nicht von unseren Eltern geerbt,
sondern von unseren Kindern nur geliehen.

Der Autor dieses Sinnspruchs ist unbekannt. Eine frühe Verwendung geht zurück auf Moses Henry Cass, 1974 Autraliens Umweltminister:

We have not inherited this earth from our parents to do with it what we will.
We have borrowed it from our children and we must be careful
to use it in their interests as well as our own.

Die **Generationengerechtigkeit** leidet an ihrer inhärenten Asymmetrie: Zukünftige Generationen können ihre Interessen aktuell nicht vertreten. Gewaltenteilung beruht prinzipiell auf **Checks and Balances**, und diese erfordern gleichzeitige Existenz, Kommunikation und Einflussnahme.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Wir, die aktuelle Generation G_0, sind jetzt verantwortlich für diese Welt. Wenn unser Handeln sich in Generation G_n niederschlägt, kann sie sich nicht wehren: Wir sind lange tot, alle Appelle und Anklagen sind nutzlos. Heute sind wir zwar noch lebendig und belangbar, doch Generation G_n lebt noch nicht und kann uns daher nicht zur Verantwortung ziehen.

Nur Sie, die direkt nachfolgende Generation G_1, könnten uns belangen. Sie stehen also vor Ihrer Entscheidung: schweigen oder anklagen? Sie können unser Verschulden nicht mehr heilen, nur noch ertragen. Anklage kostet Sie Ressourcen: Zeit, Energie, Mühe, Überwindung. Rational würden Sie also die Situation zähneknirschend akzeptieren. Sie werden sich beruhigend einreden, es sei noch nicht so schlimm. Wir, G_0, kommen straflos davon. „Wo kein Kläger, da kein Richter.“

Was werden später Ihre Kinder, die Generation G_2 tun? Sie können uns, die Großeltern G_0 und eigentlichen Verursacher, nicht mehr belangen. Generation G_2 kann nur Sie, die eigene Elterngeneration G_1, anklagen. Werden Ihre Kinder das tun? Vermutlich nicht. Sie werden schweigen, so wie Sie geschwiegen haben. So geht es Generation um Generation.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Ist diese Entwicklung unausweichlich? Oder gibt es Alternativen? **Nachhaltigkeit** ist die Nutzung und Bewahrung von Ressourcen; sie garantiert die Stabilität und die natürliche Regenerationsfähigkeit. Deutschland hat die Ressourcen für 2022 bereits am 4. Mai verbraucht.

Die **Ethnologie** untersucht hierzu traditionell-nachhaltiges Wirtschaften in indigenen Kulturen. Ein typisches Muster: Stabile Systeme verfügen über stabilisierende Mechanismen durch ethisch-moralische Prinzipien. Diese sind meist nicht rational, sondern animistisch-religiös begründet durch Mythen, Rituale, Tabus, etc. Das erschwert die Übertragung auf unsere aktuelle Gesellschaft. Ist hier Rationalität überhaupt möglich?

Hierzu untersuchen wir die Situation spieltheoretisch. Das obige Modell ist wie immer beschämend simpel, aber es illustriert doch das Prinzip. Selbstverständlich können Fehlentscheidungen nicht gänzlich verhindert werden. Aber wir suchen ein ausgewogenes System von *Checks and Balances*, das **erkennbare Fehlentscheidungen** angreifbar macht: Sie können angeklagt werden, ja sie müssen angeklagt werden!

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Aufgabe: Was sind hier Gleichgewichte? Ist Nachhaltigkeit rational? Können Sie ein System von **Checks and Balances** implementieren? Was wird hier kontrolliert? Und wer kontrolliert die Kontrolleure?

We will have to repent in this generation not merely for
the vitriolic words and the violent actions of the bad people,
but for the appalling silence and indifference of the good people.
Martin Luther King (1929–1968)

Gesetz zur Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen (GzG):

§0: Jede Generation muss nach ihrem bestem Wissen und Gewissen die berechtigten Interessen aller zukünftigen Generationen wahren.

§1: Jede Generation muss §0 von ihren Eltern einfordern.

§2: Jede Generation muss §1 von ihren Eltern einfordern.

§3: Jede Generation muss §2 von ihren Eltern einfordern.

usw… Jede Generation muss diese Prinzipien strengstens einhalten, Forderungen unverzüglich einklagen und jede Säumnis bestrafen.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Lösung: Wann kann sich Nachhaltigkeit individuell lohnen?

(0) Gilt $p_n c_n < b_n$ für ein $n \ge 1$, so ist $a_n = 0$ strikt dominant für G_n, und per Rückwärtsinduktion folgt $a_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$ und $a_0 = 1$.

(1) Gilt $p_i c_i > b_i$ für alle $i \ge 1$, dann bilden nachhaltiges Verhalten und strenge Kontrolle ein weiteres mögliches Gleichgewicht.

Wie kann das funktionieren? Wird Information von der Zukunft in die Gegenwart übertragen? Nein, natürlich nicht! Aber die gegenwärtige Information wird generationenübergreifend bewertet und vertreten.

Kurz gesagt: Das Anklagerecht wird zur Anklagepflicht aufgewertet. Auch diese Pflicht muss überwacht werden, und das Anklagerecht hierzu zur Anklagepflicht aufgewertet werden, usw. Das erklärt die spezielle rekursive Form des oben skizzierten Gesetzes (GzG).

Die gesamte Konstruktion ist subtil und nicht einfach realisierbar. Aber seien wir ehrlich: Wer erwartet denn hier einfache Lösungen? Die Sachlage ist so verzwickt, dass wir erstaunt und glücklich sind, wenn sich überhaupt eine Lösung abzeichnet. Denken hilft!

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Das Modell erklärt nicht explizit, was **Generationengerechtigkeit** ist, es versucht lediglich, einen **Kontrollmechanismus** zu implementieren. Das ist generationenübergreifend keineswegs trivial, wie wir wissen.

Unser Modell ist ein einfaches Beispiel von **Mechanismendesign** (engl. *mechanism design*). Das Ziel ist die Schaffung eines Rahmens (als Spiel, Anreiz, Gesetz, etc.), der gewünschtes Verhalten ermöglicht, fördert oder gar erzwingt. Die individuelle Entscheidungsfreiheit kann / soll / darf nicht direkt eingeschränkt werden, allein der Rahmen wird so gestaltet, dass rationale Spieler das gewünschte Verhalten wählen.

Die Spieltheorie ist daher logische Grundlage für jeden **Gesetzgeber**, oder allgemein für jede Gestaltung von Regeln des Zusammenlebens.

Unsere Modelle sind simpel, aber die Fragen sind ernst. Seit Jahren wird darüber gestritten, in welchem Umfang die menschliche Aktivität das Klima beeinflusst oder gar eine Klimakatastrophe auslösen kann. Das ist nicht nur eine wissenschaftliche, sondern eine politische Frage. Daher müssen wir auch soziale Regeln und Kontrollen bedenken.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Unser Modell versucht, Nachhaltigkeit mit Rationalität zu vereinen. Wem das zu theoretisch ist, der fragt nach praktischen Anwendungen: Lassen sich solche Prinzipien wirklich nutzen oder schon beobachten?

Die **Ethnologie** untersucht hierzu traditionell-nachhaltiges Wirtschaften in indigenen Kulturen. Rekordhalter sind die Ureinwohner Australiens (Aborigines) mit etwa 40 000 Jahren erfolgreicher Anpassung.

Manche Ethnologen interpretieren **Mythen und Riten** derart, dass sie genau diese stabilisierende Aufgabe erfüllen und den Gemeinschaften ermöglichen, sich Umweltveränderungen so weit wie nötig anzupassen und zugleich ihr Ökosystem so wenig wie möglich zu belasten.

Negativbeispiele sind (soweit wir es verstehen) die Bewohner der Osterinseln, die zwischen 1300 und 1700 n.u.Z. durch systematische Abholzung ihre eigenen Lebensgrundlagen zerstörten. Gleiches gilt wohl für den Untergang der Maya-Kultur in Mittelamerika zwischen 750 und 950 n.u.Z. durch natürliche und anthropogene Klimaänderung. Nochmal: Unsere Modelle sind simpel, aber die Fragen sind ernst.

Nachhaltigkeit als spieltheoretisches Modell

Aufgabe: (0) Formulieren Sie dies als Spiel $u : \prod_{i\in\mathbb{N}} S_i \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
(1) Ist Raubbau $(b_0, -d_1, -d_2, \dots)$ eine Gleichgewichtsauszahlung?
(2) Ist Nachhaltigkeit $(0, 0, 0, \dots)$ eine Gleichgewichtsauszahlung?
(3) Wenn sich $G_0, \dots, G_n$ gegen alle nachfolgenden verbünden?

Lösung: (0) Die Konfliktsituation wurde vollständig als Spiel formalisiert: Auszahlungen sind $u_0 = b_0 a_0 - p_0 c_0 a_1$ und $u_i = -b_i a_i - p_i c_i a_{i+1} - d_i a_0$.
Dies entspricht der obigen Graphik mit den Konstanten $b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}_{>0}$.

Generation G_i hat die Strategiemenge $S_i = \{\, s_i : \{0,1\}^i \to \{0,1\} \,\}$.
Beispiel: Die konstante Abbildung $s_i = 0$ bedeutet „immer schweigen".
Rekursiv erhalten wir die Aktion $a_i = s_i(a_0, a_1, \dots, a_{i-1})$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.

(1) Der Strategievektor $s = (1, 0, 0, 0, \dots)$ führt zu den Aktionen $a = (1, 0, 0, 0, \dots)$ und den Auszahlungen $u = (b_0, -d_1, -d_2, -d_3, \dots)$.

Dieser Strategievektor s ist tatsächlich ein Nash–Gleichgewicht.
Keiner der Akteure G_i kann sich aus eigener Kraft verbessern.
Das ist zwar traurig, aber ein mögliches Gleichgewicht.

Nachhaltigkeit als spieltheoretisches Modell

Für die Modellparameter setzen wir $0 < b_i < p_i c_i$ voraus für alle $i \ge 1$.
Der angerichtete Schaden $d_i > 0$ spielt dagegen keine weitere Rolle.

(2) Jede Generation G_i prüft §0–§∞ GzG, bis §$(i-1)$ genügt: Hat ihre Elterngeneration G_{i-1} die Rechte zukünftiger Generationen gewahrt?

Falls ja, so schweigt sie: $a_i = 0$. Falls nein, so klagt sie an: $a_i = 1$.
Formel $s_i : \{0,1\}^i \to \{0,1\} : (a_0, \dots, a_{i-1}) \mapsto a_0 + \dots + a_{i-1} \bmod 2$.

Dieser spezielle Strategievektor $s = (s_0, s_1, s_2, s_3, \dots)$ führt zu den Aktionen $a = (0, 0, 0, 0, \dots)$ und den Auszahlungen $u = (0, 0, 0, 0, \dots)$.

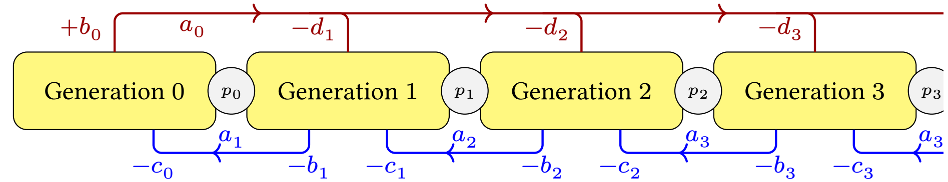
Dieser Strategievektor s ist tatsächlich ein Nash–Gleichgewicht.
Keiner der Akteure G_i kann sich aus eigener Kraft verbessern.

(3) Das gilt selbst, wenn sich $G_0, G_1, \dots, G_n$ verbünden sollten.
Rückwärtsinduktion: Schließlich wird G_n einlenken müssen.
Daher lenken vorsorglich auch $G_{n-1}, G_{n-2}, \dots, G_0$ ein.

⚠ Wir haben hier starke Voraussetzungen, insbesondere Kenntnis der gesamten Vergangenheit und so umfangreiche Strategiemöglichkeiten.

Nachhaltigkeit als spieltheoretisches Modell

Zusammenfassung unserer Ergebnisse zum Nachhaltigkeitsmodell:



Satz H2B: Gleichgewichte im Nachhaltigkeitsmodell

Die Generationen $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ interagieren wie oben erklärt.

(0) Raubbau $s_0 = 1$ und Schweigen $s_i = 0$ für alle $i \ge 1$ bilden ein Gleichgewicht dieses Spiels. (Das ist zwar traurig, aber wahr.)

(1) Gilt $p_n c_n < b_n$ für ein $n \ge 1$, so ist $a_n = 0$ strikt dominant für G_n, und per Rückwärtsinduktion folgt $a_i = 0$ für $i = 1, 2, \dots, n$ und $a_0 = 1$.

(2) Gilt $p_n c_n > b_n$ für alle $n \ge 1$, dann bilden nachhaltiges Verhalten und strenge Kontrolle ein Gleichgewicht. Explizit als Formel ausgeschrieben:

$$s_i : \{0,1\}^i \to \{0,1\} : (a_0, \dots, a_{i-1}) \mapsto a_0 + \dots + a_{i-1} \bmod 2$$

Nachhaltigkeit als spieltheoretisches Modell

Dieses Modell ist interessant unter mindestens zwei Blickwinkeln:
Als mathematische Miniatur zur spieltheoretischen Modellierung sowie darüber hinaus als Gleichnis, vielleicht Denkanstoß für die Wirklichkeit.
Kann es Beobachtungen erklären oder gar unser Verhalten verbessern?

Zunächst die mathematische Seite: Das Modell und der Satz scheinen Ihnen vielleicht bei einer ersten Begegnung noch recht kompliziert.
Bei der zweiten Betrachtung erweist es sich jedoch als recht simpel:
Mit wenig Aufwand können wir eine komplexe Situation beschreiben.

Die Formel $s_i : \{0,1\}^i \to \{0,1\} : (a_0, \dots, a_{i-1}) \mapsto a_0 + \dots + a_{i-1} \bmod 2$ mag Sie überraschen und Ihnen übertrieben pedantisch vorkommen.
Andererseits ist sie wunderbar explizit, einfach, präzise, narrensicher.
Damit haben wir etwas in der Hand und können mathematisch arbeiten.

Sie sehen hier, wie gut gebaute Modelle mathematische Eleganz und argumentative Kraft entfalten können. Sie können uns informieren und vielleicht sogar unser Handeln leiten. Falls Sie noch nicht überzeugt sind, dürfen Sie gerne selbst noch bessere Modelle entwickeln!

Modell und Wirklichkeit

Können zukünftige Generationen ihre Rechte schon heute einklagen? Das war unsere Ausgangsfrage. Die Antwort lautet zusammengefasst: Ja, doch dazu brauchen sie einen Anwalt! Das können nur heutige Generationen leisten, in unserem Modell die heutige Jugend G_1.

Die Wirklichkeit ist viel komplexer als unser simples Modell; nie sollten wir unsere stark vereinfachte Abstraktion mit der Realität verwechseln. Dennoch kann unser Modell Strukturen und Mechanismen erklären, es kann als lehrreiches Gleichnis verstanden und genutzt werden.

Die aktuelle Jugend G_1 handelt nicht aus eigennützigen Motiven, im Gegenteil für sie selbst wären Schweigen und Erdulden einfacher. Doch sie ist in der Pflicht, die folgenden Generationen zu vertreten. Genau dies verleiht ihrem Protest Nachdruck und Legitimität.

Wann, wenn nicht jetzt?
Wo, wenn nicht hier?
Wer, wenn nicht wir?
John F. Kennedy (1917–1963)

Modell und Wirklichkeit

Unser Modell vereinfacht jede Generation G_i zu einem einzigen Akteur. Übertragen auf die Menschheit ist das recht unrealistisch: Einerseits ist diese Einteilung willkürlich. Andererseits gibt es Divergenzen innerhalb jeder Generation. Damit wird auch die Schuldfrage juristisch schwierig:

Wer sind hier die handelnden (juristischen) Personen? Zählt nur die Individualschuld? Gibt es Kollektivschuld? Verantwortliche können sich in einer Gruppe verstecken, es droht das Restaurant-Paradox (G201). Reales Handeln erfordert begriffliche Klarheit und Entschlossenheit.

Die gesamte Konstruktion ist subtil und nicht einfach realisierbar. Aber seien wir ehrlich: Wer erwartet denn hier einfache Lösungen? Die Sachlage ist so verzwickt, dass wir erstaunt und glücklich sind, wenn sich überhaupt Lösungen abzeichnen. Denken hilft!

Alternative: Schlägt hier der **große Filter** zu? (engl. *the great filter*) Das Universum ist groß, doch wir kennen bislang keine Zivilisationen außer unserer. Daher dürfen wir spekulieren: warum? Ist das Zufall oder Notwendigkeit? Zerbrechen Zivilisationen systematisch an ihrem Erfolg?

Modell und Wirklichkeit

Ist die Menschheit noch zu retten? Diese Frage ist brisanter denn je! Im SoSe 2018 haben wir erstmals unsere Veranstaltung zur Spieltheorie und ökonomischem Verhalten angeboten und dabei insbesondere auch Generationenmodelle diskutiert. Am 20.08.2018 demonstrierte daraufhin Greta Thunberg zum ersten Mal für Klimaschutz, damals noch alleine, und begann die Bewegung **Fridays For Future.** Zufall? Ich glaube nicht!

Meine zugespitzte Darstellung suggeriert eine kausale Verbindung, die sicher nicht besteht, auf die ich aber zugegeben sehr stolz wäre. Die wahre Kausalität ist ganz einfach das drängende reale Problem, das Menschen weltweit und auch unsere kleine Vorlesung beeinflusst. Hören Sie vor diesem Hintergrund die verzweifelte Anklage „How dare you?“ vom UN-Klimagipfel am 23.09.2019 (`youtu.be/TMrtLsQbaok`).

Der Beitrag spieltheoretischer Modelle bleibt vermutlich unbedeutend, doch immerhin taugen sie als Gleichnisse und vielleicht Denkanstöße. Es lohnt allemal, darüber nachzudenken, daran zu lernen und die Wirklichkeit etwas besser zu verstehen. Es geht um alles.

Modell und Wirklichkeit

Im WiSe 2019 durften wir unsere Veranstaltung erneut anbieten. Darauf haben sich Aktivist:innen in Deutschland und Österreich zum Bündnis **Letzte Generation** zusammengefunden, um durch zivilen Ungehorsam ein entschlosseneres Handeln gegen die Klimakrise zu erzwingen.

Dieser **Aufstand der Letzten Generation** entspringt der Befürchtung, dass im Erdklima kritische Grenzen (sog. Kippelemente) irreversibel überschritten werden und die Erde unbewohnbar machen; dabei sei diese Generation die letzte, die diese Katastrophe abwenden könne.

Relevant ist für unsere Diskussion vor allem die explizit vorgebrachte **Legitimation**, als die letzte Generation die Welt vor dem Untergang bewahren zu können. Von Kritikern wird dieser Anspruch scharf als **Selbstermächtigung** gegeißelt. Das ist die entscheidende Frage!

Jede Demokratie muss angemessen mit zivilem Ungehorsam umgehen, aber Verfassungsfeinde abwehren, soviel ist klar. Zugleich wollen wir rational entscheiden, daher verdienen berechtigte Argumente Gehör. Deshalb nochmal: Wer vertritt die Rechte zukünftiger Generationen?

Wer erzieht die Erzieher?

Vielleicht sind Sie, die „Kinder“, viel zu nachsichtig mit uns, den „Eltern“? Das scheint in der Natur des Menschen verankert zu sein, kann aber die intergenerationelle Gerechtigkeit und Verantwortung vereiteln.

Können viele zusammenhalten?

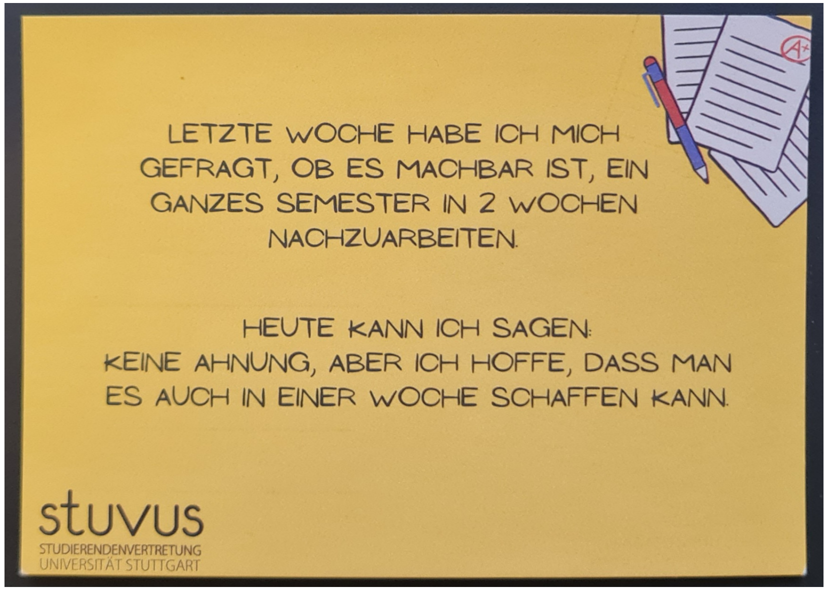
Das **Rentenmodell** zur Altersversorgung ist raffiniert, aber noch leicht. Gleichgewichte mussten wir erst suchen und dann sorgsam nachweisen, auch im Experiment erreichen wir das Ziel erst nach mehreren Anläufen. Doch alles in allem ist die Situation noch recht übersichtlich.

Unser **Nachhaltigkeitsmodell** zur Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen ist naturgemäß etwas schwieriger, sowohl im logischen Aufbau als auch in der praktischen Umsetzung. Die Frage ist überaus wichtig, unsere Verantwortung ist groß, doch unsere Erfahrung gering.

Wenn Ihnen das zu anwendungsfern oder allzu langfristig gedacht ist: Betrachten Sie doch einmal Ihr eigenes Leben als Aneinandereihung von Generationen Ihres Ichs. Das ist eine überaus interessante und sinnvolle Betrachtungsweise, denn nicht alle verfolgen genau dasselbe Ziel!

Quid rides? Mutato nomine de te fabula narratur.
[Was lachst du? Mit anderem Namen handelt die Geschichte von dir.]
Horaz, Sermones I. 1. 69.

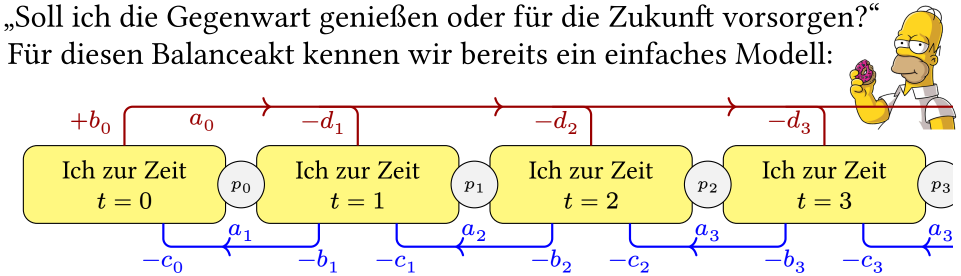
Zeitmanagement vs Prokrastination



In jedem von uns schlummert das Talent zur selbstverschuldeten Katastrophe.

Egonomics nach Thomas Schelling

Manche:r kämpft bei Entscheidungen mit dem inneren Schweinehund: „Soll ich die Gegenwart genießen oder für die Zukunft vorsorgen?“ Für diesen Balanceakt kennen wir bereits ein einfaches Modell:



Viele Menschen kennen solche **Selbst-Konflikte**: Einerseits möchte ich heute Eis / Schokolade / Chips / Nachtisch essen. Andererseits werde ich mich morgen dafür verfluchen, denn ich will eigentlich abnehmen.

Ähnlich ist es mit der Entscheidung, Geld auszugeben oder zu sparen. Manche:r möchte Geld lieber heute verjubeln als für eine ferne Rente zurücklegen. Die Rollen können aber auch umgekehrt verteilt sein: Manche:r zwingt sich durch Sparpläne zu einem langfristigen Handeln. Genauer gesagt: Das heutige Ich zwingt das zukünftige Ich dazu.

Egonomics nach Thomas Schelling

Diese Idee geht zurück auf Thomas Schelling: *Egonomics, or the art of self-management*, American Economic Review 68 (1978) 290–294.
Ihr „gegenwärtiges Ich“ spielt gegen Ihr „zukünftiges Ich“.

Bei der Entscheidung kommunizieren zum Glück nicht *alle* Generationen zugleich, sondern nur *zwei*: Das heutige Ich, als aktuell handelnde Instanz, und das morgige Ich, als Kontrolle und Anwalt für die Zukunft. Dieser Konflikt wird sinnbildlich oft durch Engelchen und Teufelchen dargestellt, wunderbar vertont ▶ Fettes Brot: *Jein.* `youtu.be/tvFZr03QfpY`

Das Studieren ist geprägt von **Freiheiten** und von **Entscheidungen**.
Die Übungen / Hausarbeit / Klausurvorbereitung rechtzeitig anfangen oder doch lieber auf morgen verschieben und heute zur Party gehen?

Was du heute kannst besorgen, das verschiebe nicht auf morgen.

Die alternative Sichtweise lautet, von unbekümmert bis fatalistisch:

Was du morgen kannst besorgen, das kannst du auch noch übermorgen.

Egonomics nach Thomas Schelling

Prokrastination, vulgo Aufschieberitis, bezeichnet ein extremes Vertagen bzw. häufiges Unterbrechen unangenehmer Arbeiten. Es verursacht bei Betroffenen mitunter starkes Leid. Manche:r setzt sich selbst Deadlines, um so für planvolle Struktur und Interessenausgleich zu sorgen.

Weitere Selbst-Konflikte sind zum Beispiel die Lust zu rauchen gegen den Wunsch gesund und länger zu leben. Manche:r vermeidet, Zigaretten auf Vorrat zu kaufen, um dem zukünftigen Ich den Zugang zu erschweren. Manchmal gelingt es, sich für den guten Zweck „selbst auszutricksen“.

Allgemein führt Suchtverhalten zu extremen Selbst-Konflikten dieser Art und ebenso radikalen Versuchen, die Selbst-Kontrolle zurückzuerlangen. Aber auch simple Angewohnheiten folgen oft einem ähnlichen Muster: angenehmes lieber sofort, unangenehmes lieber später. Ist das rational?

Ein mögliches Mittel ist **Selbstbindung**. Ein Beispiel für Sportmuffel ist die Jahresmitgliedschaft im Fitnessstudio oder ein Vertrag mit einem Personal Trainer: „Es war teuer, also muss ich jetzt Sport machen.“
Auch Studiengebühren sollen diesen positiven Effekt zeitigen.

Odysseus widersteht den Sirenenklängen.

Odysseus und die Sirenen, attische Vasenmalerei, ca. 480–470 v.u.Z.

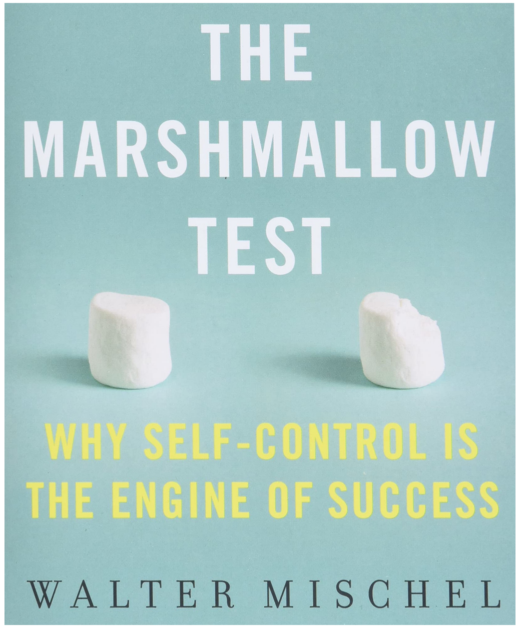
Odysseus widersteht den Sirenenklängen.

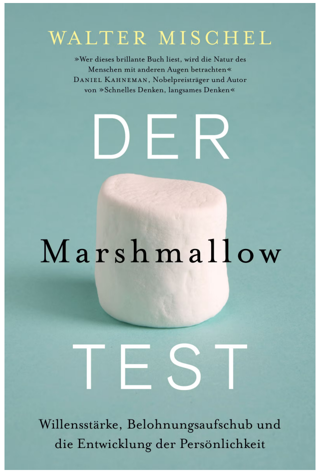
Das klassische Beispiel einer Selbstbindung, im ganz wörtlichen Sinne, ist Odysseus, der sich an den Schiffsmast binden lässt, um dem betörenden Gesang der Sirenen lauschen und ihnen doch widerstehen zu können. Homers *Odyssee* (8. Jh.v.u.Z.) erzählt wortgewaltig die Irrfahrten und Abenteuer des Odysseus, darunter seine Begegnung mit den Sirenen.

Dieses sind sangreiche Nymphen, die jedermann bezaubern, der auf ihr Lied horcht. […] Ich aber gedachte an das Wort, das Circe, die mir dieses alles voraussagte, gesprochen hatte. […] Das weiche Wachs strich ich sodann meinen Reisegenossen in die Ohren. Sie aber banden mich auf mein Geheiß aufrecht unten an den Mast; dann setzten sie sich wieder an die Ruder und trieben das Fahrzeug getrost vorwärts. […] Erst als wir glücklich vorübergesteuert und ganz aus dem Bereich der Sirenenstimmen waren, nahmen meine Freunde sich selbst das Wachs aus den Ohren, und mir lösten sie die Fesseln wieder. Ich aber dankte ihnen herzlich für ihre Beharrlichkeit.

Gustav Schwab: *Die schönsten Sagen des klassischen Altertums*, Band 3, Stuttgart 1840, `www.deutschestextarchiv.de/schwab_sagen03_1840?p=182`

Mischels Marshmallow-Experiment





Mischels Marshmallow-Experiment

Das berühmte **Marshmallow-Experiment** wurde von Walter Mischel in den Jahren 1968 bis 1974 in Stanford durchgeführt. Vierjährige Kinder mussten wählen zwischen einem Marshmallow sofort oder zwei in etwa 15 Minuten, also kleine sofortige Belohnung gegen größere später.

Die Fähigkeit zur Selbstbeherrschung hat langfristige Konsequenzen. Kinder, die länger warten konnten, waren statistisch gesehen auch später als Erwachsene kontrollierter, zudem beruflich erfolgreicher, sie waren seltener übergewichtig und wurden seltener drogensüchtig.

📖 W. Mischel, Y. Shoda, M.L. Rodriguez: *Delay of gratification in children.* Science 244 (1989) 933–938. Dieser und weitere Artikel sind online verfügbar unter `bingschool.stanford.edu/research/publications`.
▶ Walter Mischel: *The Marshmallow Test.* `youtu.be/XcmrCLL7Rtw`

Wohl kaum ein Experiment der Psychologie ist so bekannt wie dieses. Die faszinierende Geschichte wird wunderbar erzählt von Jonah Lehrer: *DON'T! The secret of self-control*, in The New Yorker vom 18. Mai 2009, online verfügbar unter `www.newyorker.com/magazine/2009/05/18/dont-2`.

Mischels Marshmallow-Experiment

Belohnungsaufschub (*deferred gratification*) erfordert Selbstdisziplin und Impulskontrolle. Dies ist notwendig für langfristiges planvolles Handeln und ein wichtiger Aspekt der Selbstkontrolle. Trotz methodischer Kritik, siehe unten, bin ich überzeugt, dass Mischels Ansatz wertvoll bleibt. Jedenfalls lohnt er, weiter bedacht und erforscht zu werden!

▶ Walter Mischel über Selbstkontrolle, `youtu.be/9QXwngVqfdI`

The relationship between knowledge and action is very complicated.
In one study we asked: "What would an intelligent child do?"
And the child says: "An intelligent child would wait."
Then we asked the child: "What would you do?"
– "I'll take it now!"

Optimierung: Lieber der Spatz in der Hand oder die Taube auf dem Dach? Die Kinder verstehen die Regeln und vertrauen dem Versprechen auf spätere Belohnung. Sie *wissen* genau, was dass sie warten sollten, dennoch schaffen nicht alle, dies auch zu *tun*.

Mischels Marshmallow-Experiment

Mischels Experiment zielt genau auf die Spannung zwischen kurzfristig und langfristig, mit der wir alle auch als Erwachsene ringen müssen. Die Reaktionen und Strategien der Kinder sind aufschlussreich: verdecken, wegschauen, ablenken, spielen, priming, etc.

Konrad Adenauer wird (sinngemäß) folgender Ausruf zugeschrieben:

Was interessiert mich mein Geschwätz von gestern?

Im Sinne von Gratifikationsaufschub vs sofortiger Belohnung oder Selbstkontrolle vs Prokrastination formulieren wir die Umkehrung:

Was interessiert mich mein Gejammer von morgen?

Wir werden in spieltheoretischen Modellen die zeitliche Struktur noch wesentlich genauer untersuchen, indem wir dynamische Spiele erklären. Die Lösungskonzepte werden ausgehend von Nash–Gleichgewichten noch weiter verfeinert, etwa zu teilspielperfekten Gleichgewichten. Erste wichtige Aspekte und Anwendungen erkennen wir schon hier.

Marshmallow-Experiment: methodische Kritik

Wie jedes Experiment sollten wir auch dieses hier kritisch betrachten; da es besonders berühmt ist, nenne ich einige Warnungen und Hinweise.

Die Versuchsgruppe war klein und selektiv: Sie bestand aus Kindern der Bing Nursery School an der Stanford University, und die meisten hatten dementsprechend gut ausgebildete Eltern. Solche sozialen Faktoren beeinflussen das Verhalten. Es ist daher denkbar, dass hier gefundende Zusammenhänge wenig repräsentativ für die Gesamtbevölkerung sind.

In der Längsstudie der Folgejahre konnten erwartungsgemäß immer weniger Studienteilnehmer erreicht und befragt werden, was die Fallzahl weiter verringerte und statistisch verlässliche Aussagen erschwerte. Zudem muss man wie immer Korrelation und Kausalität unterscheiden!

Eine kritische Studie finden Sie in T.W. Watts, G.J. Duncan, H. Quan: *Revisiting the Marshmallow Test*, Psychological Science (2018) 1–19, online unter `journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/0956797618761661`. Auch diese neue Studie sollten wir kritisch abwägen.

Marshmallow-Experiment: Umfeld des Silicon Valley

Ein Kritikpunkt an Mischels Langzeitstudie ist die spezielle Population. Die Kindergruppe in Stanford war sozio-ökonomisch stark geprägt vom Silicon Valley. Eine Anekdote illustriert die teils extreme Verzerrung:

Susan Wojcicki (1968–2024) ging als Kind zur Bing Nursery School. Dort nahm sie an Mischels Marshmallowtest teil und zeigte Willensstärke aka Selbstkontrolle. Ende der 1990er Jahre vermietete sie ihre Garage an die Google-Gründer Larry Page und Sergey Brin. Später wurde Sie CEO / Vorstandsvorsitzende von YouTube (2014–2023) und Multimilionärin.

Welche Faktoren bestimmen den Erfolg? Das ist im Rückblick schwer zu ergründen. Ihre Mutter Esther Wojcicki schrieb dazu das Erziehungsbuch *How to raise successful people: simple lessons for radical results* (2019). Tatsächlich waren ihre drei Töchter überragend erfolgreich: Susan als CEO von YouTube, Anne als CEO von 23andMe, Janet als Ärztin und Professorin an der UC San Francisco. Diese Frauen prägen das Silicon Valley und gelten als Erfolgsfamilie. Sie glauben, das habe mit ihrer Erziehung zu tun. Statistisch belastbare Daten sind jedoch schwierig.

Marshmallow-Experiment: Korrelation ≠ Kausalität

Korrelation tritt in diversen Zusammenhängen auf, manchmal mit und häufig auch ohne Kausalität:

$A \Longrightarrow B$	$A \Longleftarrow B$	$A \not\rightleftarrows B$	$A \leftarrow X \rightarrow B$, $A \not\rightleftarrows B$
Kausalität „A verursacht B“	Kausalität „B verursacht A“	Gleichzeitigkeit ohne Kausalität	gemeinsame Ursache X

X: Confounder (Störfaktor)

Aufgabe: Diskutieren Sie das Auftreten folgender Korrelationen:
(1) „Regionen mit mehr Störchen haben höhere Geburtenraten.“
(2) „Mit einem Glas Rotwein täglich lebt es sich gesünder.“
(3) „Vorlesungsbesuch geht mit Klausurerfolg einher.“

(1) Störche und Geburten sind positiv korreliert; siehe Robert Matthews: *Storks deliver Babies.* Teaching Statistics 22 (2000) 36–38. Mögliche gemeinsame Ursache: Ländliche Regionen haben (a) mehr Störche und (b) mehr Geburten. Mehr Störche anzusiedeln, erhöht nicht die Geburten.

(2) Positive Korrelation besteht. Mögliche gemeinsame Ursache: Hohes Einkommen impliziert (a) gute Gesundheit und (b) Weinkonsum. Doch erhöht mehr Rotwein wirklich die Gesundheit? Medizinische Zusammenhänge werden diskutiert, traditionell vor allem in französischen Studien.

(3) Die Korrelation ist stark. Schon drei verpasste Termine senken signifikant den Klausurerfolg. Prof. Dr. Rolf Schulmeister (Uni Hamburg) hat eine Meta-Studie von 300 empirischen Arbeiten vorgelegt: *Abwesenheit von Lehrveranstaltungen. Ein nur scheinbar triviales Problem.* (2015)

Marshmallow-Experiment: Replikationskrise der Psychologie

In Mischels Marshmallow-Experiment sind viele Störfaktoren denkbar. Ein Kind aus wohlhabender Familie hat (a) bessere Erfolgsaussichten und (b) übt sich vielleicht in Geduld und Gratifikationsaufschub, denn es lernt früh, auf Stabilität und Belohnung zu vertrauen. Der sozio-ökonomische Status wäre dann eine gemeinsame Ursache und erklärte eine Korrelation zwischen (a) und (b), ohne dass es eine Kausalität zwischen beiden gäbe.

Nachfolgestudien haben unter großem Aufwand versucht, mögliche (sozio-ökonomische) Störfaktoren rauszunehmen. Der verbleibende statistische Zusammenhang zwischen Selbstkontrolle und Lebenserfolg fällt dadurch deutlich kleiner aus, manchmal nicht mehr signifikant.

Die Psychologie durchlebt seit den 2000er Jahren eine **Replikationskrise**: Frühere wissenschaftliche Veröffentlichungen sind heute methodisch zweifelhaft und konnten in erneuten Studien nicht bestätigt werden. Ähnliches berichtet obige Studie *Revisiting the Marshmallow Test.* Mischels Ansatz ist weiterhin aufschlussreich, die Korrelationen der Langzeitstudie jedoch sind mit großer Vorsicht zu prüfen.

Studium als Investition und als Konsum

Lohnt sich die Büffelei? (FAZ, Studenten-Spezial, 20.05.2015)

www.faz.net/aktuell/karriere-hochschule/campus/-13591577.html

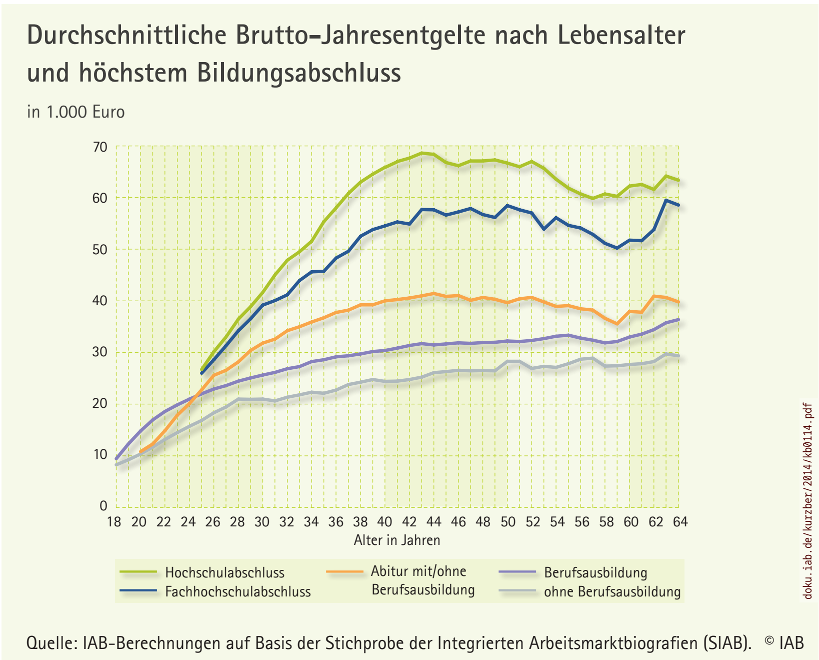
Studium als Investition und als Konsum

Studium oder Ausbildung — wer vor dieser Wahl steht, macht folgende Rechnung auf: Eine Lehre ist der erste Schritt in Richtung finanzieller Unabhängigkeit. Zwar ist die Vergütung nicht opulent, doch in Kombination mit Hotel Mama winkt ein bescheidener Luxus. Und nach zwei oder drei Jahren lässt sich mit dem Abschluss in der Tasche richtig Geld verdienen.

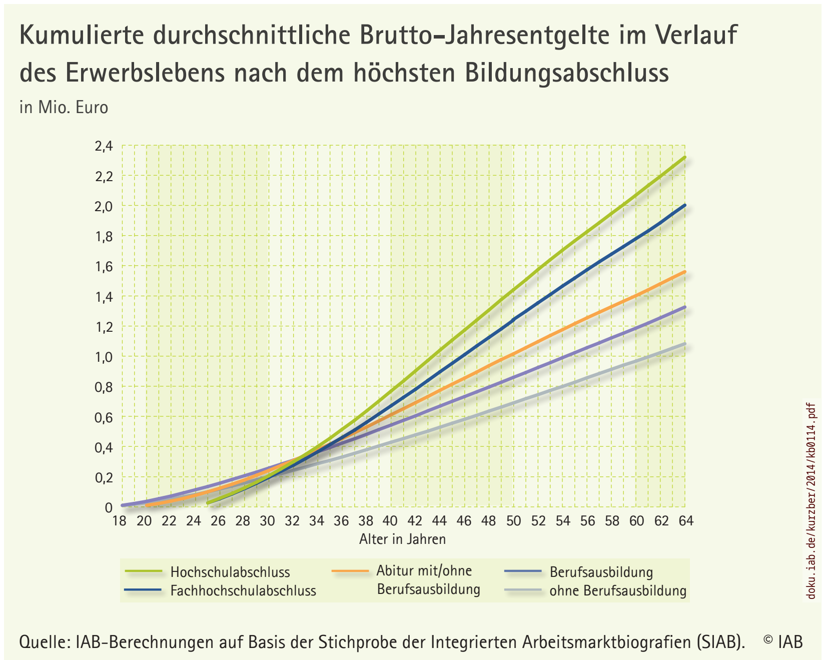
Anders beim Studium: Wer nach akademischen Weihen strebt, muss erst einmal investieren. Wenn ein Umzug nötig ist, kann Bildung richtig teuer werden. Bis der Hochschulabsolvent sein erstes Geld verdient, hat die Fachkraft oft schon die ersten Stufen auf der Karriere- und Gehaltsleiter genommen. Lässt sich das im Laufe eines Berufslebens noch aufholen?

Die Daten und Graphiken stammen vom Institut für Arbeitsmarkt- und Berufsforschung der Bundesagentur für Arbeit. (Der Stand 2014 scheint die letzte Veröffentlichung. Ich aktualisiere sobald neue Daten kommen. Vermutlich sind aber auch diese älteren Daten weiterhin repräsentativ.) Die Graphiken zeigen, gruppiert nach Abschluss, die Entgelte jetziger Arbeitnehmer, die in den letzten 40 Jahren ihre Abschlüsse erwarben.

Studium als Investition und als Konsum



Studium als Investition und als Konsum



Studium als Investition und als Konsum

Das Leben ist, soweit ich es sagen kann, ein fragiles Gleichgewicht von **Konsum und Investition**. Das gilt insbesondere für ein Studium:

Sie investieren lange Jahre in Ihre Ausbildung. Da ist viel schönes dabei, das kann als sofortige Belohnung dienen, aber auch viel harte Arbeit, die Sie vielleicht gerne vermeiden oder zumindest aufschieben möchten.

Natürlich lohnt sich ein Studium, sowohl kurz- als auch mittel- und langfristig, aber es erfordert doch ein hohes Maß an Selbstdisziplin. Diese Disziplin zu beweisen ist bereits eine beachtliche Leistung.

Bekanntlich brechen einige ihr Studium ab, und das hat viele Gründe. Ein Grund sind mangelnde Information und falsche Vorstellungen: „Das Studium im Fach X habe ich mir ganz anders vorgestellt.“

Seit Jahrzehnten versuchen wir daher, junge Menschen zu informieren. Dazu gehören neben den schönen Ziele auch die Schwierigkeiten, kurzfristig und langfristig. Es ist eine komplexe Entscheidung!

Ich denke, wir müssen grundsätzlich anerkennen, dass die Wahl eines Studiums eine schwierige Herausforderung ist und auch misslingen darf.

Studium als Investition und als Konsum

Vielleicht ist Ihr Studium ja eine Art Marshmellow-Experiment, bei dem Sie unter Beweis stellen, wie viel Selbstdisziplin Sie aufbringen können. Tatsächlich ist es – über die eigentlichen Inhalte, speziellen Fähigkeiten und allerlei Kompetenzen hinaus – ganz allgemein ein **guter Prädiktor**:

Wer erfolgreich Mathematik studiert hat, den haut so schnell nichts um. Sie beweisen damit neben mathematischen Fähigkeiten ein hohes Maß an Selbstdisziplin, Frustrationstoleranz und Durchhaltevermögen.

🙂 Ganz nebenbei lernen Sie auch noch, mathematische Methoden selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ anzuwenden.
Für manche steht dies im Vordergrund, für andere eher nicht.

Dasselbe gilt sinngemäß genauso für jeden anderen Studiengang.
In hochqualifizierten Berufen benötigen Sie nicht gedrillte Handgriffe, sondern allgemeine Methoden und ein hohes Maß an Lernfähigkeit.

🙂 Wir haben dieses scheinbare Paradox bereits in Kapitel G diskutiert:
Kann ein Studium auch ein Signal persönlicher Eigenschaften sein?
Kann ein unnützer Doktortitel doch nützlich sein? Ja, durchaus!

Studium als Investition und als Konsum

Alice trifft Bob, der sich mit stumpfer Axt abmüht, einen Baum zu fällen. „Schärf deine Axt! Dann gelingt dir deine Arbeit leichter.“, rät Alice ihm. Das weist Bob zurück: „Dazu fehlt mir die Zeit, ich muss Bäume fällen!“ Genau das ist Ihre Entscheidung: Planen Sie kurzfristig oder langfristig?

Studium als Investition und als Konsum

Die Schule hat Ihnen herzlich wenig Mathematik zugetraut. Anfangs mag das gefallen, es ist ja so leicht! Doch dann wollten Sie sich entscheiden, ein anspruchsvolles Fach – gar Mathe! – zu studieren, und darauf hatte die Schule Sie in keinster Weise vorbereitet. Ihre Axt war leider stumpf!

Mathe gilt als schwer, daher hängen viele Schüler:innen sich allzu früh ab. Vielleicht ermutigt von Eltern? Zudem vergrätzt durch den Bildungsplan? Kurzfristig ist Lernen mühsam, doch langfristig zentral für den Erfolg! Es gelingt nur mit extrinsicher Anregung *und* intrinsicher Motivation.

Ihr Mathestudium versuchen wir Dozierende auszubalancieren zwischen Anlage tragfähiger Grundlagen und Ernte motivierender Anwendung. Lernen ist induktiv: Ihre Investition von gestern ist Ihr Ertrag von heute. Ihre Investition von heute ist Ihr Ertrag von morgen. So geht es weiter…

Auch für diese Vorlesung muss ich weise abwägen: Kurzfristig begeistern die großen Ideen, erfreut die gepflegte Unterhaltung, erheitert der Witz. Für den langfristigen Erfolg benötigen Sie aber vor allem solide Technik, mathematische Sorgfalt und das kleinschrittige Lernen des Handwerks.