Spieltheorie und ökonomisches Verhalten

Die mathematische Analyse
von Konflikt und Kooperation

erkennen.
beweisen.
anwenden.

Prof. Dr. Michael Eisermann
zusammen mit Dr. Friederike Stoll
`eiserm.de/lehre/Spieltheorie`

Universität Stuttgart

Sommersemester 2022
Stand 17. August 2022

*Für die Mitteilung von Unklarheiten und Fehlern aller Art
sowie für Verbesserungsvorschläge bin ich stets dankbar!*

Habe Mut, dich deines eigenen
Verstandes zu bedienen!

Much to learn, you still have.
This is just the beginning.

Urheberrecht und Haftungsausschluss

Diese Unterlagen werden genutzt zur Vorlesung *Spieltheorie und ökonomisches Verhalten* und richten sich vornehmlich an Studierende der Mathematik und benachbarter Fächer. Sie vermitteln einschlägiges Grundlagenwissen und mathematische Werkzeuge.

Die Inhalte wurden vom Autor mit größter Sorgfalt für die Präsentation in der Lehre erstellt. Sie werden allein zu Lehrzwecken zur Verfügung gestellt, in der Hoffnung, dass sie zum Lernen und Üben nützen mögen, ohne jeden Anspruch auf Eignung zu irgendeinem anderen Zweck. Sie sind keine Handlungsanweisung oder Empfehlung. Nur eigenständiges Denken hilft!

Kunst und Wissenschaft, Forschung und Lehre sind frei. (GG Art. 5.3.1) Der Autor übernimmt keinerlei Gewähr für die angebotenen Informationen und Daten, deren Aktualität, Korrektheit, Vollständigkeit, Qualität oder irgendeine Nutzbarkeit außerhalb der Lehre. Haftungsansprüche für mögliche Schäden, materieller oder immaterieller Art, sind grundsätzlich ausgeschlossen.

Für Inhalte externer Quellen, insb. verlinkter Webseiten, ist stets deren Anbieter verantwortlich.

Vorwort zu diesen Notizen

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie.
(Immanuel Kant, 1724–1804)

Dies sind Unterlagen unserer Vorlesung *Spieltheorie und ökonomisches Verhalten*, die wir im Sommer 2018 und Winter 19/20 erstmalig abhielten. Vieles ist noch experimentell und wird weiter optimiert und ergänzt.

Vorlesung und Übungen richten sich an Studierende der Mathematik, oder allgemein an alle Interessierten, die vor mathemischen Methoden nicht zurückschrecken, sondern ihre ordnende Kraft zu schätzen wissen.

Spielerisch-experimentelle Aspekte kommen nicht zu kurz, so hoffen wir. Ebenso bin ich überzeugt, dass mathematische Modelle und Argumente, Sätze und Beweise, gerade hier Erklärung und Vervollständigung bieten. Der Dialog mit den Teilnehmer:innen bestimmt die jeweilige Dosierung.

Das Ziel dieser Veranstaltung ist hehr, aber unsere Möglichkeiten sind bescheiden. Wir möchten Ihr Interesse wecken, ja Ihre Begeisterung entfachen, damit Sie darüber hinaus gehen und selbstständig lernen. Literatur finden Sie am Ende dieser Einführung und auf der Webseite.

Vorwort zu diesen Notizen

Es gibt nichts Gutes, außer man tut es.
(Erich Kästner, 1899–1974)

Spieltheorie bietet wunderbare Einsichten und ist oft erstaunlich direkt anwendbar in der Praxis. Hierzu sollen Sie zahlreiche Bei-Spiele selbst erfahren und dadurch verstehen. Um damit wirklich vertraut zu werden, sollen Sie regelmäßig spielen, sowohl empirisch als auch theoretisch, also spieltheoretische Fragen mathematisch formulieren und lösen.

Wir sind glücklich (und ein wenig stolz), Ihnen zu dieser Vorlesung auch gut betreute Übungen anbieten zu können. Das ist angesichts knapper Ressourcen leider keineswegs selbstverständlich, aber wesentlich für Ihren Erfolg! Wenn Sie sich ernsthaft darauf einlassen, werden Sie viel Freude daran haben und so manches Aha-Erlebnis. Möge es nützen!

Erkläre es mir, und ich werde es vergessen.
Zeige es mir, und ich werde mich erinnern.
Lass es mich tun, und ich werde es verstehen.
(Konfuzius, 551–497 v.Chr.)

Was ist und was soll die Spieltheorie?

Die Spieltheorie untersucht Situationen von **Konflikt und Kooperation**: Diese entstehen regelmäßig zwischen strategisch handelnden Agenten, etwa Menschen, Unternehmen, Staaten oder künstlichen Intelligenzen. Hierzu entwickelt die Spieltheorie Modelle, **Begriffe und Methoden**; zu typischen Problemstellungen schlägt sie rationale Lösungen vor.

Sie beschreibt und erklärt **strategische Entscheidungssituationen**: Spieler antizipieren in ihrem Kalkül die Aktionen der Gegenspieler. Anders gesagt: Spieltheorie ist **interaktive Entscheidungstheorie**: Sobald mehrere Entscheider (Individuen, Akteure, Spieler) gemeinsam ein Ergebnis erzielen, ist dies ein Anwendungsgebiet der Spieltheorie.

Sie ist damit sehr **vielseitig anwendbar**, denn fast alles ist ein Spiel, oder genauer gesagt: Fast alles lässt sich als ein Spiel betrachten. Diese Sichtweise erweist sich häufig als erhellend und nützlich. Tatsächlich wird die Spieltheorie heute nahezu **überall angewendet**, neben ihrer Herkunft in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften zunehmend auch in der Informatik und der Evolutionsbiologie.

Was ist und was soll die Spieltheorie?

Jede **spieltheoretische Analyse** umfasst immer zwei Bestandteile:

- Das Spiel als formale Beschreibung der strategischen **Situation**: die Spieler, all ihre Handlungsoptionen und deren Konsequenzen. Die Spieltheorie hat hierfür eine reichhaltige Sprache entwickelt.
- Lösungen als Prognose oder Empfehlung für den **Spielverlauf**: idealerweise alle Lösungen des betrachteten Lösungskonzepts. Universelles Werkzeug ist der Begriff des (Nash–)Gleichgewichts.

Das Spiel definiert die **Regeln**, also die möglichen Aktionen und die zugehörigen Auszahlungen, aber noch nicht das Verhalten der Spieler. Das Lösungskonzept codiert Annahmen über das **Spielerverhalten**, insbesondere Nutzenmaximierung und un/beschränkte Rationalität.

Je nach Art des Spiels (statisch / dynamisch, deterministisch / zufällig, un/vollständig informiert, etc.) gibt es verschiedene **Lösungskonzepte**. In jedem Falle lohnt sich eine empirische Überprüfung bzw. Kalibrierung: Dies untersucht die **experimentelle Spieltheorie** / Verhaltensökonomik [*behavioural economics*] in Laborexperimenten und in Feldstudien.

Warum und wozu betreiben wir Spieltheorie?

Warum Spieltheorie? Zunächst einmal aus Neugier und aus Freude! Wie jede elegante, insbesondere mathematische Idee lässt sich auch die Spieltheorie um ihrer selbst willen erlernen, studieren, bewundern. Zudem ist Spieltheorie überaus vielseitig anwendbar. . .

Wozu Spieltheorie? Ihre Anwendungen sind überaus vielfältig in Politik (Wahlen, Gesetze, Anreize), Philosophie (Ir/Rationalität, Normen, Ethik), Biologie (Ko/Evolution von Genen und Memen), Ökonomie (Strategien, Optimierung, Gleichgewichte, Märkte, Mechanismen, Auktionen, . . .), Sozialpolitik (Sicherung, Wohlfahrt, Gemeinwohl, Ausgleich), usw.

Eugene Wigners berühmte Weisheit zur **unverschämten Wirksamkeit** der Mathematik gilt ebenso für die Spieltheorie und ihre Anwendungen:

> *The enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious and there is no rational explanation for it. [. . .] The miracle of the appropriateness of the language of mathematics [. . .] is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research.*

Wie kommt die Mathematik zur Spieltheorie?

Mathematik ist Grundlage und Werkzeug aller modernen Technologie. In zunehmenden Maße gilt dies auch für weite Teile der Ökonomie. Je nach Kenntnis und Nähe zum Thema mag dies überraschen.

Die Wechselwirkung zwischen Mathematik und Naturwissenschaften ist seit jeher extrem stark, gefolgt von den Ingenieurwissenschaften.

Die Wechselwirkung mit den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften ist dagegen vergleichsweise schwach; prominente Ausnahmen hiervon sind statistische Methoden zur Erhebung und Auswertung von Daten, jüngst unter dem öffentlichkeitswirksamen Banner *Data Science* und *Big Data*.

Ebenso hat die mathematisch fundierte Spieltheorie seit etwa 1950 die Sicht- und Denkweisen in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften nachhaltig geprägt. Sie ist gereift und erprobt und anerkannt und gehört heute zum unverzichtbaren Standardwerkzeug der Mikroökonomik.

Die Spieltheorie kann (und wird) Ihnen viel Freude bereiten. Entgegen dem ersten Anschein ist sie aber nicht einfach, vor allem konzeptuell: Sie müssen grundlegende und raffinierte Ideen erst einmal verarbeiten.

Liturgie: Ablauf dieser Veranstaltung

Was erwarten / erwartet Sie in der Spieltheorie? schöne Mathematik? lehrreicher Spielspaß? perfekte Mischung? → `answergarden.ch/963641`

Spielpraxis — AngST *All fun and games*	Fr 14:00 – 15:30 *Optional, da zockst du!*	V57.04 „Spielhölle“
Vorlesung — KnaST *Blood, sweat, and tears*	Mi 9:45 – 11:15 Fr 9:45 – 11:15	V57.04 V57.05
Übung — ÜbST *Learning by doing (the math)*	Di 14:00 – 15:30 *Da guckst du nicht nur, da übst du!*	V57.05
Klausur — HaST *All is well that ends well.*	Sep / Okt 2022 Feb / Mrz 2023	C@mpus C@mpus

Come for the show, stay for the math!

Liturgie: Ablauf dieser Veranstaltung

Als wir die Veranstaltung zur Spieltheorie zum ersten Mal durchführten, stellte sich heraus, dass Teilnehmer unterschiedliche Ziele verfolgen:

- Einige kommen vor allem für den Spielspaß.
- Manche kommen für die schöne Mathematik.
- Andere kommen für die perfekte Mischung.

Die Teilnehmer hatten sehr verschiedene Präferenzen, aber wir nur ein gemeinsames Angebot: *One size fits all.* Diese Situation war nicht ideal.

Soweit unsere Marktforschung. Wir haben viel Zeit und Mühe investiert, wir haben nicht geruht und unser Premiumprodukt noch weiterentwickelt. Der Kampf um die beste Vorlesung ist hart. Die Konkurrenz schläft nicht.

Wäre es nicht wunderbar, wenn sich jede/r interessierte Studierende die Spieltheorie aussuchen könnte, die ihr/ihm am besten passt?

Für die einen purer Spielspaß, für die anderen schöne Mathematik, und für die Genießer die perfekte Mischung aus beidem.

Suchen Sie nicht länger, wir haben die Antwort!

Liturgie: Ablauf dieser Veranstaltung

Wir bieten Ihnen die Spieltheorie weiterhin in gewohnt bester Qualität auf dem Silbertablett, und jetzt sogar in zwei Geschmacksrichtungen:

- Als **knallharte, mathematische Spieltheorie** mit wöchentlich zwei Vorlesungen und einer Übung und der abschließenden Klausur: Die 9 Leistungspunkte für die Spieltheorie gibt es hier und nur hier.
- Als **spaßorientierte, angewandte Spieltheorie**: Auch hier können Sie viel gewinnen: Erfahrung und Erleuchtung, Süssigkeiten und echtes Geld. Aber erwarten sie nicht auch noch Leistungspunkte!

Die beiden Teile ergänzen sich, sind aber unabhängig. *Choose wisely!*

Die experimentelle Spieltheorie illustriert und motiviert durch zahlreiche konkrete Beispiele und manche überraschende empirische Erkenntnis. Idealerweise wollen Sie dann auch die Theorie dahinter verstehen.

Im mathematischen Teil erlernen Sie präzise Modelle und Methoden und nutzen diese dann selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ. Idealerweise wollen Sie diese Erkenntnisse dann testen und anwenden.

Liturgie: Ablauf dieser Veranstaltung

Die Klausur behandelt alle Themen und Techniken aus Vorlesung und Übung, der experimentelle Spielspaß wird dort natürlich nicht abgefragt.

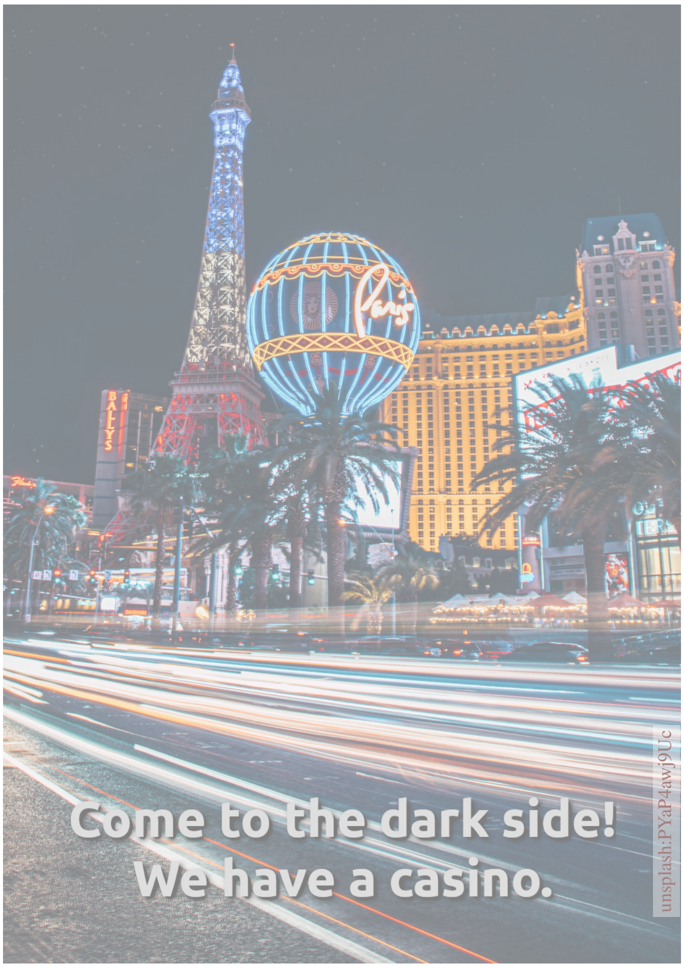
Though this be madness, yet there is method in’t.
[Ist dies schon Wahnsinn, so hat er doch Methode.]
(William Shakespeare, 1564–1616, *Hamlet*)

Wir feiern diese bahnbrechende Innovation mit einem neuen Branding: Der experimentelle Teil ist die angewandte Spieltheorie, kurz AngST. Die Vorlesung ist knallhart mathematische Spieltheorie, kurz KnaST.

Besonders stolz sind wir auf unsere berühmten wöchentlichen Übungen zur Spieltheorie, kurz ÜbST. „Krass! Da guckst du nicht nur, da übst du!“ Die Klausur schließlich wird das Happy End zur Spieltheorie, kurz HaST.

Träumen Sie nicht schon lange von einer Veranstaltung namens AngST? Ist es nicht entwaffnend ehrlich, wenn Ihre Vorlesung KnaST heißt? Ist nicht Ihr ganzes Studium geprägt von ÜbST und HaST? Ihre Suche wird belohnt: Hier bekommen Sie alles!

Experimente in unserem Casino | Spieltheorie in der Vorlesung



Wie gelingt Ihnen die Spieltheorie?

Falls Sie (auch) wegen der Leistungspunkte hier sind, erkläre ich Ihnen, wie Sie erfolgreich studieren. Selbstverständliche Voraussetzungen:

- **sichere Beherrschung** aller Grundlagen aus Ana 1-3 und Lina 1-2
- **wöchentliche Bearbeitung** von Vorlesung, Quiz und Übungen

Die Spieltheorie entspricht 9 Leistungspunkten: insgesamt 270h

- **Präsenz:** 14 Wochen à 4h Vorlesung + 2h Übung $\lessapprox$ 80h
- **Individuelle Arbeit:** ein weiterer Tag (8h) pro Woche $\gtrapprox$ 110h
- **Wiederholung** zur Prüfungsvorbereitung: 2 bis 3 Wochen $\approx$ 80h

Das ist keine Übertreibung sondern jahrzehntelange Erfahrung:
6 Präsenzstunden pro Woche erfordern 12 Stunden eigene Arbeit.

Sie können Ihre Zeit anders aufteilen, aber viel Spielraum bleibt nicht.
Es gilt die Erhaltung der Arbeit: Die 270 Stunden werden Sie brauchen!

Qui va lentement, va sûrement, et qui va sûrement, va loin.
[Wer langsam geht, geht sicher, und wer sicher geht, kommt weit.]

Liturgie: Ablauf der Vorlesung

Liturgie, griech. λειτουργία [leiturgía] 'öffentlicher Dienst', kommt von λειτός [leitós] 'Volk, Volksmenge' und ἔργον [érgon] 'Werk, Dienst'. Dies bezeichnet die Gesamtheit religiöser Zeremonien und Feiern. Ich glaube, auch universitäre Lehre sollten wir zelebrieren und feiern.

Je dois dire qu'il n'y avait pas un cours de Lebesgue
où l'on ne riait pas d'une manière infiniment agréable.
Je soupçonne même qu'au moins le tiers des gens
venait au cours de Lebesgue pour s'amuser.
C'était infiniment intéressant, infiniment profond. [...]
Il y en avait une dizaine, une quinzaine [d'auditeurs]. A la fin, beaucoup moins.
Quel que soit le cours au Collège de France à la fin il y en a moins, n'est-ce pas?
(Szolem Mandelbrojt, 1899–1983, *Souvenirs à bâtons rompus*)

Vor uns liegt eine Vielzahl interessanter, schöner und wichtiger Themen. Die gemeinsame Lernzeit ist kostbar. Nutzen Sie Ihre Vorlesung optimal! Nutzen Sie die Möglichkeiten dieser Veranstaltung und fragen Sie uns! Die Feinjustierung ist wichtiger als Sie vielleicht vermuten.

Liturgie: Ablauf der Übungen

Verpflichtend ist die wöchentliche, aktive Teilnahme in der Übung. Ebenso lohnend ist natürlich die aktive Teilnahme an der Vorlesung. Sie sind eng aufeinander abgestimmt, idealerweise nutzen Sie beide:

Die Vorlesung erklärt Ihnen die nötigen Begriffe und Methoden, anschließend können Sie diese Techniken anwenden und einüben und die behandelten Themen mit weiterem Übungsmaterial vertiefen. Die Übungsblätter werden wöchentlich online zur Verfügung gestellt.

Für die Zulassung zur Klausur (aka Übungsschein) erwarten wir Ihre regelmäßige aktive Teilnahme an der wöchentlichen Übungsgruppe. Genaueres siehe Iliaskurs.

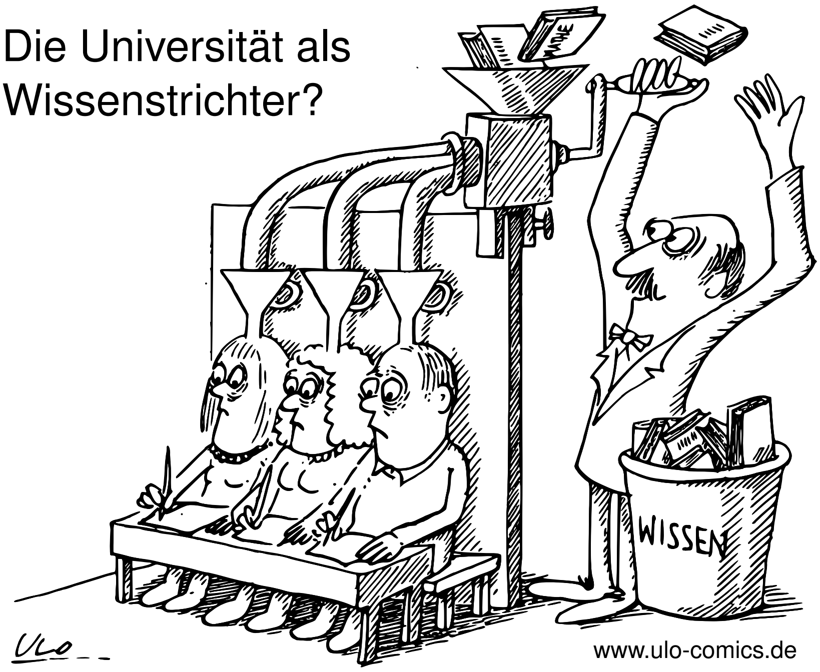
Mathematik lernen Sie nicht allein durch Zuschauen,
sondern durch eigene Arbeit und regelmäßige Übung.
Klavierspielen lernen Sie ja auch nicht
allein durch den Besuch von Konzerten!
(nach Carl Runge, 1856–1927)

Themen für dieses Semester

Optimale Entscheidungen	Rückwärts-induktion	Kombinatorische Spieltheorie	Markov–Spiele
Statische Spiele	Strategische Spiele	Lineare Optimierung	Soziale Dilemmata
Dynamische Spiele	Generationen-vertrag	Unvollständige Information	Dynamische Spiele
Kooperative Spiele	Wiederholte Spiele	Verhandlungen	Koalitionen
Mechanismen-Design	Kollektive Entscheidungen	Implementierung	Auktionen

Wie gelingt Ihnen das Studium?

Die Universität als Wissenstrichter?



Erwarten Sie nicht, dass irgendjemand Ihnen irgendetwas beibringen könnte — ohne Ihr Zutun. Ich kann Ihnen viel Spannendes erzählen, doch nur Sie selbst können sich Verständnis erarbeiten. Zwei Faktoren bestimmen Ihren Lernerfolg: extrinsische Anregung und intrisische Motivation!

Diese Vorlesung wird Ihnen viele interessante Dinge zeigen, Phänomene und Beispiele erläutern, Argumente und Sätze erklären. Wenn Sie möchten, kann das eine große Hilfe sein, doch letztlich müssen Sie selbst dieses Material eigenständig durcharbeiten, um es zu beherrschen.

Lernziele

Die Studierenden beherrschen die grundlegenden Begriffe und Techniken der Spieltheorie. Sie verfügen über die mathematischen Grundlagen für das Verständnis spieltheoretischer Modelle in den angrenzenden Wissenschaften und können sich mit Spezialisten darüber verständigen. Sie sind in der Lage, die behandelten Methoden selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ anzuwenden, ähnlich strukturierte Probleme zu erkennen, mathematisch zu modellieren und rechnerisch zu lösen.

- **Selbstständig:** Es geht nicht nur um Auswendiglernen, sondern um Verstehen und unabhängige Urteilsfähigkeit.
- **Sicher:** Es geht nicht nur um Intuition oder Spekulieren, sondern um nachvollziehbare Argumente und Rechnungen.
- **Kritisch:** Es geht nicht nur um Glauben oder (Auto)Suggestion, sondern um (selbst)kritische Fragen und sorgfältige Antworten.
- **Korrekt:** Sie beherrschen Definitionen, Sätze, Methoden, Proben. Gegenbeispiele zeigen Fehlerquellen, die es zu vermeiden gilt.
- **Kreativ:** Es geht nicht nur um fertige Rezepte, sondern um eigenständige Anwendung.

Arbeitsaufwand

Bei allem Spielspaß erfordert diese ambitionierte Zielsetzung Fleiß und Disziplin. Das spiegelt sich deutlich im Zeit- und Arbeitsaufwand wider. Die folgende einfache Rechnung löst immer wieder Erstaunen aus:

Dieser Kurs entspricht 9 Leistungspunkten, also 270 Arbeitsstunden:

- ca 90 Stunden Präsenz (6 Stunden wöchentlich, bestehend aus 4 Stunden Vorlesung und 2 Stunden Übung, für knapp 15 Wochen)
- ca 120 Stunden eigene Arbeit während der Vorlesungszeit (etwa 8 Stunden wöchentlich, Vor- und Nachbereitung und Hausaufgaben)
- ca 60 Stunden Prüfungsvorbereitung nach der Vorlesungszeit (etwa ein bis zwei Wochen, je nach Bedarf und Intensität)

Diese umfangreiche Bemessung der nötigen *eigenen* Arbeitszeit beruht auf jahrzehntelanger Erfahrung. Individuelle Werte können und werden davon abweichen, nichtsdestotrotz sollen beide Seiten, Lehrende und Lernende, sich ehrlicherweise an dieser Bemessung orientieren.

Gehen Sie den ganzen Weg und planen Sie fest die volle wöchentliche Arbeitszeit ein, bereits während des Semesters parallel zur Vorlesung!

Legende / Leseanleitung: Spieltheorie von A bis P

Die Vortragsfolien sind durch blaue Titelbalken leicht zu erkennen; dies kennzeichnet die Folien, die in der Vorlesung behandelt werden. Dieses Grundgerüst ist eingebettet in ein Lese- und Arbeitsbuch: Ich folge der bewährten Erfahrung, dass die Leserin und der Leser leichter eine vorhandene Übung, Erklärung oder Illustration übergehen kann, als eine fehlende selbst (er)finden. Möge es beiden nützen!

Ich präsentiere hier Ideen, Techniken und Anwendungen, Definitionen und Sätze, Aufgaben und Lösungen. Dabei versuche ich, jedes Thema so einfach wie möglich darzustellen, doch so präzise und ausführlich wie es für ein solides Verständnis nötig ist. Viele Erklärungen und Hinweise, die ich in der Vorlesung mündlich gebe, sind hier schriftlich ausgeführt; sie nützen mir als Erinnerung und den Leser:innen als Erläuterung.

Wir beginnen diese Vorlesung mit einem ersten Kapitel zur Vorschau; dies gibt zunächst eine Übersicht zentraler Themen der Spieltheorie und dient somit zu einer frühen Orientierung, als Ausblick und Motivation. Diese Versprechen werde ich in den nächsten Wochen einlösen.

Kapitel A: Einführung zur Spieltheorie

Kapitel B: Rückwärtsinduktion nach Zermelo

B1 Dynamische Spiele: Zustände und Aktionen
- B1.1 Steuerung und Interaktion in (Computer)Spielen
- B1.2 Graphen als tragende Grundstruktur
- B1.3 Auszahlungen und Bellman–Gleichung

B2 Nutzenmaximierung durch Rückwärtsinduktion
- B2.1 Optimal entscheiden: Work & Travel
- B2.2 Sekretärinnen-Problem und Bruss–Algorithmus
- B2.3 Würfeln bis die Eins kommt

B3 Gegenseitiges Wissen und Vorwärtsinduktion
- B3.1 Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?
- B3.2 Tanz der Vampire: gemeinsames Wissen
- B3.3 Stuttgarter Mathematiker und Abischerz

Kapitel C: Kombinatorische Spieltheorie und der Satz von Sprague–Grundy

C1 Neutrale kombinatorische Spiele
- C1.1 Einzeiliges Nim und dynamische Programmierung
- C1.2 Neutrale Spiele und Rückwärtsinduktion
- C1.3 Das Spiel Nim und Boutons effiziente Lösung
- C1.4 Summen von Spielen und Sprague–Grundy–Satz

C2 Anwendungsbeispiele und weitere Aufgaben
- C2.1 Lasker–Nim, Grundys Spiel, Fliesentetris
- C2.2 Schleifenspiele: Poker-Nim und Northcotts Spiel
- C2.3 Das Spiel Chomp! nach David Gale
- C2.4 Wie viel Rationalität benötigen wir?

C3 Mengen und Logik als Spiele
- C3.1 Schach ist determiniert
- C3.2 Mengen als Spiele
- C3.3 Quantoren-Spiele

Kapitel D: Markov–Spiele und Bellmans Optimalitätsprinzip

Kapitel E: Strategische Spiele und Nash–Gleichgewichte

Kapitel F: Lineare Optimierung und Dantzigs Simplexverfahren

Kapitel G: Soziale Normen und Dilemmata, Koordination und Evolution

Kapitel H: Ponzi–Betrug vs Rentenmodell:
Wie gelingt ein Generationenvertrag?

Kapitel I: Spiele mit unvollständiger Information und
Bayes–Gleichgewichte nach John Harsanyi

Kapitel J: Dynamische Spiele und teilspielperfekte Gleichgewichte nach Reinhard Selten

Kapitel K: Wiederholte Spiele und Nashs Folk Theorem

Kapitel L: Verhandlungstheorie und Nashs Verhandlungslösung

Kapitel M: Koalitionen, Kern und Shapley–Wert

Kapitel N: Kollektive Entscheidungen und Arrows Satz vom Diktator

Kapitel O: Implementierungstheorie und der Satz von Gibbard–Satterthwaite

Kapitel P: Auktionen und Äquivalenzsatz von Vickrey

Kapitel A

Einführung zur Spieltheorie

Das ganze Leben ist ein Spiel,
und wir sind nur die Kandidaten.
Hape Kerkeling (1964–)

Inhalt dieses Kapitels A

Worum geht es in der Spieltheorie?

Spieltheorie versucht, strategisches / ökonomisches / menschliches Verhalten zu beschreiben, zu erklären, vorherzusagen, zu optimieren.

To be literate in the modern age, you need to have a general understanding of game theory.
(Paul Samuelson, 1915–2009, Nobelpreis 1970)

Spiele beschreiben Konflikte, Konkurrenz und Kooperation:

- Mehrere Akteure interagieren (Individuen, Firmen, Staaten, KI).
- Jeder Akteur hat gewisse Handlungsoptionen (Züge, Strategien).
- Aus diesen Möglichkeiten wählt jeder Akteur aus (frei, unabhängig).
- Daraus entsteht für jeden ein Ergebnis (Nutzen, Auszahlung, etc).
- Jeder Spieler versucht, sein eigenes Ergebnis zu maximieren.

If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.
(John von Neumann, 1903–1957)

Worum geht es in der Spieltheorie?

Spieltheorie ist ein (inzwischen sehr) umfangreicher Werkzeugkasten. Das ist das Ziel dieser einführenden Vorlesung: Die Teilnehmer sollen sich befähigen, grundlegende Methoden der Spieltheorie anzuwenden, und zwar selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ.

Die Spieltheorie ist auf wunderbar konkrete Anwendungen ausgerichtet, gerade dazu nutzt sie abstrakte und raffinierte mathematische Modelle. Theorie und Anwendung sind keine Gegensätze, sie ergänzen sich! Diese extreme Spannweite ist faszinierend, für manche abschreckend.

Zahlreiche Beispiele und Anwendungen dienen als leuchtende Vorbilder. Mit Hilfe spieltheoretischer Modelle, Begriffe und Methoden können wir Konflikte besser verstehen, mathematisch beschreiben und analysieren, dazu systematisch mögliche Lösungen finden, konstruieren und prüfen.

Manche Konflikte haben eindeutige Lösungen, die meisten leider nicht. Im ersten Falle kann die Analyse prädiktiv oder normativ genutzt werden, im zweiten Falle ist sie immerhin noch deskriptiv oder explikativ nutzbar. Die Spieltheorie bietet magische Momente, aber keine Wunder.

Was ist ein Spiel allgemein gesehen?

Spiele im engeren Sinne sind Kinderspiele, Geschicklichkeitsspiele, Karten- / Brett- / Rollen- / Gesellschafts- / Rate- / Denkspiele, Computer- / Handyspiele, sportliche Wettkämpfe von Bundesjugendspielen bis zu Olympischen Spielen, darunter Test- / Freundschafts- / Endspiele, etc.

Wir fassen den Begriff des Spiels im Folgenden **im weiteren Sinne** als Interaktion mehrerer Akteure, wobei es zu Konflikten kommen kann. Hierzu betrachten wir konkrete Lehrbeispiele: extrem vereinfacht, doch repräsentativ. Ihre mathematische Untersuchung ist zunächst elementar.

"Elementary" does not mean easy to understand.
"Elementary" means that very little is required
to know ahead of time in order to understand it,
except to have an infinite amount of intelligence.
(Richard P. Feynman, 1918–1988, Nobelpreis 1965)

Ihre Investition in mathematische Grundlagen trägt hier reiche Früchte als „infinite amount of intelligence", zumindest als ein erster Vorschuss. Fixpunktsätze, Integrale, Differentialgleichungen, etc. kommen später.

Warum spielt der Mensch?

Es ist eine bemerkenswerte Grunderfahrung: **Der Mensch spielt**, sogar häufig und gerne! Das unterscheidet ihn von vielen anderen Lebewesen.

Homo ludens, der spielende Mensch: Im Spiel entdeckt und übt der Mensch seine Fähigkeiten, macht Erfahrungen und entwickelt seine Persönlichkeit. Er erprobt Handlungsfreiheit und eigenes Denken. Er erkennt und antizipiert die Konsequenzen seines Handelns.

Warum ist das so? **Alles Leben ist Problemlösen**, schrieb Karl Popper. Und erfahrungsgemäß führt uns das Leben immer wieder in Konflikte. Daher ist es überaus sinnvoll, Probleme vorher „durchzuspielen". Die Evolution hat uns hierzu Neugier und Spielfreude geschenkt.

Die genauere Untersuchung führt uns zur **Spieltheorie**. Dies können wir ebenso gut *Konflikttheorie* nennen, oder *Theorie der strategischen Interaktion* oder *Interaktive Entscheidungstheorie*. Das klingt seriös aber leider auch schwerfällig. Die Bezeichnung *Spieltheorie* hat viele Vorteile: Sie ist kurz und knapp, klingt lustig und positiv, beschreibt die Situation recht treffend und ist seit bald einhundert Jahren traditionell üblich.

Eigenschaften von Spielen

Anzahl der Akteure

- Ein Spieler: . . . Geschicklichkeit, Steuerung, Optimierung
- Zwei Spieler: . . . Tischtennis, Schach, Handel, Vertrag
- Drei und mehr Spieler: . . . Wahlen, Koalitionen, Gesellschaft

Konkurrenz und Kooperation

- Nullsummen vs Win-Win: . . . Marktaufteilung, Absprachen
- kompetitiv vs kooperativ: . . . Verträge, Nebenzahlungen

Zufall und Information

- deterministisch vs stochastisch: . . . Go, Backgammon, Monopoly
- un/vollständige Information: . . . Kniffel, Lotto, Poker, Battleship

Zeitlicher Verlauf

- parallel vs sequentiell: . . . Schere-Stein-Papier, Quizz, Klausur
- diskret vs kontinuierlich: . . . Brettspiele, Onlinespiele, Börse

Weitere Beispiele: Straßenverkehr, Schwarzfahren, Fußball, Elfmeter, Auktion, Schule/Uni, Karriere, Kirche, Kochen, Kindererziehung, etc.

Eigenschaften von Spielen

Spiele mit nur **einem Akteur** können bereits sehr anspruchsvoll sein: Geschick, Steuerung, Kybernetik, Optimierung, Entscheidung, etc.

Sie wollen mit einem Fahrzeug von A nach B kommen (Auto, Fahrrad, Schiff, Flugzeug, Raumsonde etc.). Damit dies überhaupt möglich ist, müssen Sie Ihr Vehikel zunächst steuern können. Zudem wollen Sie den besten Weg finden, Zeit und Aufwand minimieren, Nutzen maximieren.

In der Ökonomie muss jeder Akteur ähnliche Probleme lösen: Was ist möglich? Was ist erstrebenswert? Wie finde ich die beste Möglichkeit? Das führt zu Fragen und Methoden der mathematischen Optimierung.

Bei zwei oder mehr Spielern kommt es zu **Interaktion:** Das Ergebnis jedes Akteurs hängt nicht nur von seinen eigenen Entscheidungen ab, sondern auch von den Aktionen der anderen Akteure. Dabei kann es zu Konflikten kommen, sowohl zu Konkurrenz als auch zu Kooperation.

Die Liste der Beispiele und möglicher Anwendungen ist schier endlos. Die folgende Auswahl gibt hierzu ein paar Denkanstöße, sie sollen Ihre Neugier wecken und einen Ausblick auf weitere Kapitel umreißen.

Erste Bei-Spiele

Beim **Tischtennis** ist eher die physische Geschicklichkeit gefragt, beim **Schach** und ähnlichen Strategiespielen hingegen die mentale. **Handel** zwischen zwei Akteuren oder ein **Vertrag** ist ebenso ein Spiel: Jeder möchte sein Ergebnis maximieren, genau darum wird gerungen.

Wahlen sind ein großes und recht komplexes Spiel. In Deutschland leben etwa 83 Mio Menschen, davon sind etwa 61 Mio wahlberechtigt. Idealerweise sollte jede:r nach eigener ehrlicher Überzeugung stimmen, doch die informierte Einschätzung ist schwierig, zumal bei mehreren Kriterien, die Entscheidung ist komplex, dies kann zu strategischer Wahl führen. Politische Akteure wissen das und handeln ihrerseits strategisch.

Wenn schon die Sachfragen kompliziert sind, dann sollten wenigstens die genutzten **Wahlverfahren** einfach und gerecht sein, nicht wahr? Bei der Wahl zwischen genau zwei Alternativen gelingt dies tatsächlich, doch ab drei Alternativen existiert leider kein perfektes Wahlverfahren. Dieses erstaunliche Ergebnis ist **Arrows Satz vom Diktator** und von Gibbard–Satterthwaite zur Manipulierbarkeit von Wahlverfahren.

Erste Bei-Spiele

Bei einem **Nullsummenspiel** muss der andere verlieren, was der eine gewinnt; wir denken an die Aufteilung eines Marktes konstanter Größe. Solche Spiele heißen etwas allgemeiner auch **strikt kompetitiv**.

Absprachen können zu einer **Win-Win-Situation** genutzt werden, also gegenseitigem Nutzen. Im Sinne eines **Kartells** ist dies illegal, da auf Kosten wehrloser Dritter. Betrachtet man diese als einen weiteren Spieler, so handelt es sich insgesamt wieder um ein Nullsummenspiel.

Fußball ist normalerweise ein Nullsummenspiel: Ein Team gewinnt, das andere verliert. Turniere zeigen oft Ausnahmen, etwa bei der WM 1982 die **Schande von Gijón**: Deutschland und Österreich trennten sich einvernehmlich 1:0 zu Lasten von Algerien. (`www.shz.de/183769`)

Bei **kooperativen** Spielen sind Absprachen und Verträge zwischen den Akteuren möglich, etwa im Rahmen fest vorgegebener Vertragsgesetze. Bei **nicht-kooperativen** Spielen ist dies nicht möglich oder nicht erlaubt. Vereinbarungen müssen innerhalb des Spiels selbst-stabilisierend sein, etwa durch glaubhafte Drohungen oder allgemein Nash–Gleichgewichte.

Erste Bei-Spiele

Zufall spielt oft eine wesentliche Rolle, allgemein im Leben wie auch in zahlreichen Spielen. Damit eng verknüpft ist die Frage der **Information**: Wer weiß wann was? Auch der **zeitliche Ablauf** des Spiels ist wichtig: Ziehen Spieler gleichzeitig oder immer streng nacheinander? in Runden nach einen vorgegebenen Takt oder jederzeit, kontinuierlich, asynchron?

Bei **Brettspielen** wie Monopoly wird gewürfelt, das Ergebnis ist danach allen Spielern bekannt. Bei **Kartenspielen** wie Poker hat jeder Spieler nur Teilinformation; er kennt seine Karten, aber nicht die der anderen.

Bei **Schere-Stein-Papier** wird gleichzeitig gezogen. Das Spiel ist sinnlos, wenn einer zuerst zieht, und der zweite diesen Zug kennt. Stehen beide Rücken an Rücken, so ist Gleichzeitigkeit entbehrlich.

Eine **Klausur** dient als Stichprobe im Rahmen der vereinbarten Themen: Allzu leichte Vorhersehbarkeit mindert die repräsentative Aussagekraft, daher werden die Aufgaben möglichst zufällig gewählt, meist gewichtet. Ebenso wichtig ist, dass alle Teilnehmer die Klausur parallel schreiben, andernfalls wäre die Informationslage extrem ungleich und ungerecht.

Erste Bei-Spiele

Praktisch alles im Leben ist ein Spiel oder kann so gesehen werden. Die großen Weltreligionen fassen das gesamte Leben in dieser Form: Der Mensch wählt selbst seine Handlungen und wird dafür belohnt oder bestraft: Paradies / Himmel vs Hölle, Nirwana vs Wiedergeburt, usw.

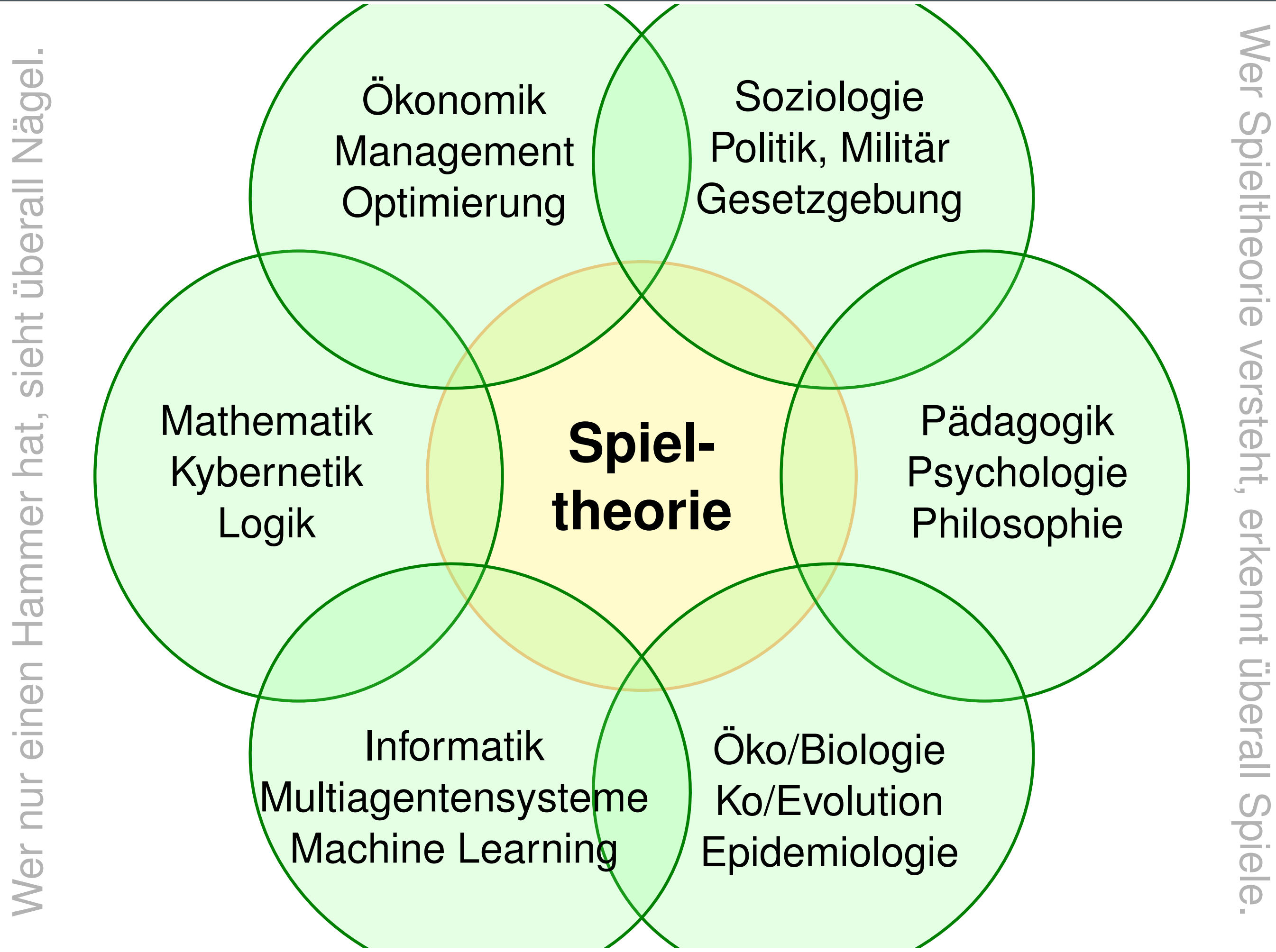
Ist dieser Vergleich provokativ? oder lächerlich? gar blasphemisch? Zu **Bibel und Moral** schrieb 2008 die Päpstliche Bibelkommission:

Die Sehnsucht nach Glück, das Verlangen nach einem erfüllten Leben, ist von jeher tief im menschlichen Herzen verwurzelt. Es hängt großenteils von unserem eigenen Handeln und von den Beziehungen zwischen uns Menschen ab, ob dieser Wunsch verwirklicht wird. Was ist aber dieses Handeln, das die einzelnen Personen, die Gemeinschaften und die Völker zu einem wahrhaft gelungenen Leben, zum Glück führt? Wie kann man es bestimmen?

Ist das nicht eine spieltheoretische Problemstellung par excellence? Anschließend werden mögliche Lösungen theologisch ausgeführt:

Die Christen sind überzeugt, dass sie in der Bibel Hinweise und Normen finden für das rechte Handeln und so den Weg zur Fülle des Lebens.

Wer interessiert sich für Spieltheorie?



Wer interessiert sich für Spiele?

- Kinder und Erwachsene (auch als Eltern: Erziehung ist ein Spiel.)
- Spieledesigner und Programmierer (bis zur künstlichen Intelligenz)
- Mathematiker und Sozialwissenschaftler (menschliches Verhalten)
- Wirtschaftswissenschaftler und Anwender (It's the economy, stupid)
- Politiker, Strategen, Militärs (die dunkle Seite der Spieltheorie)
- Biologen, Mediziner (Evolution, Ökosysteme, Epidemien)

Spiele und Konflikte sind eine uralte menschliche Grunderfahrung. Bemerkenswerterweise gab es hierzu lange keine geeignete Theorie, keine geeignete Sprache zur quantitativen Erfassung und Untersuchung.

Hierzu braucht es raffinierte Mathematik! Erste Untersuchungen unternahm in den 1920er Jahren der Mathematiker Emile Borel.

Der Durchbruch gelang erst 20 Jahre später. Der Mathematiker John von Neumann und der Ökonom Oskar Morgenstern legten hierzu 1944 die Grundlage mit ihrem bahnbrechenden Lehrbuch *Spieltheorie und ökonomisches Verhalten*. Es gilt als Geburtsurkunde der Spieltheorie.

Spieltheorie: Gründungsväter



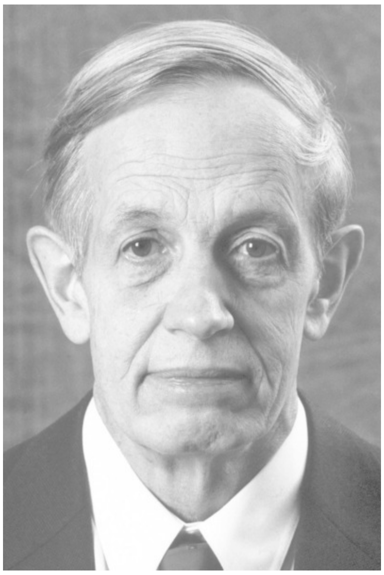
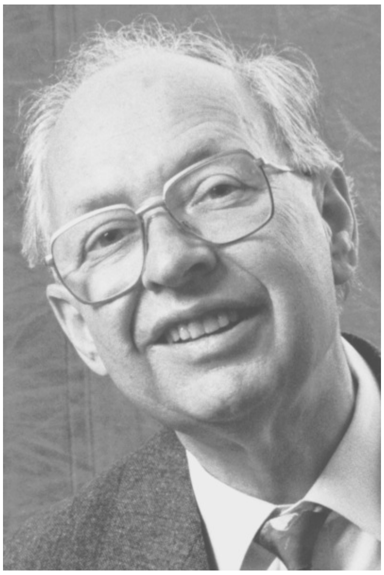
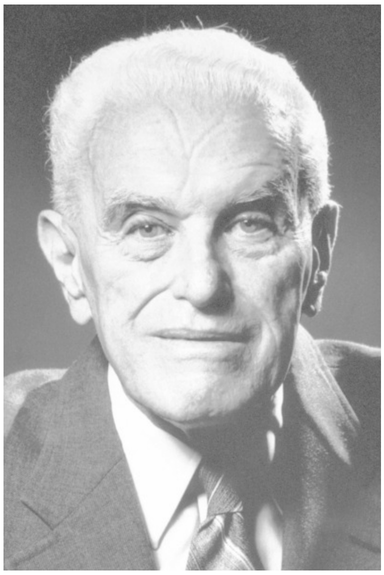
Émile Borel
(Saint-Affrique 1871 –
Paris 1956)

John von Neumann
(Budapest 1903 –
Washington 1957)

Oskar Morgenstern
(Görlitz 1902 –
Princeton 1977)

Borel 1921: *La Theorie du jeux*
Neumann 1928: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*
Neumann-Morgenstern 1944: *Theory of Games and Economic Behavior*

Spieltheorie: zweite Generation

John Nash
(Bluefield/WV 1928 –
Monroe Township/NJ 2015)

Reinhard Selten
(Breslau 1930 –
Posen 2016)

John C. Harsanyi
(Budapest 1920 –
Berkeley/CA 2000)

Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften 1994
für ihre Pionierarbeit zu Gleichgewichten in nicht-kooperativen Spielen.
Mehr unter `www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1994`.

Spieltheorie, Mathematik und Ökonomik

Der Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften wird seit 1969 vergeben, darunter einige Auszeichnungen zur Spieltheorie, siehe `en.wikipedia.org/wiki/Nobel_Prize_in_Economic_Sciences`.

Einige Nobelpreise, deren Themen uns im Folgenden begegnen werden, obgleich wir in jedem Falle nur die Oberfläche anreißen können:

1972: Kenneth Arrow, John Hicks „for pioneering contributions to general economic equilibrium theory and welfare theory“ [Kapitel N]

1975: Leonid Kantorovich, Tjalling Koopmans „for contributions to the theory of optimum allocation of resources“ [F]

1994: John Nash, John Harsanyi, Reinhard Selten „for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games“ [E, I, J]

1996: William Vickrey, James Mirrlees „for fundamental contributions to the economic theory of incentives under asymmetric information“ [P]

Spieltheorie, Mathematik und Ökonomik

2002: Vernon Smith „for having established laboratory experiments as a tool in empirical economics“, Daniel Kahneman „for having integrated insights from psychological research into economic science“

2005: Robert Aumann, Thomas Schelling „for having enhanced our understanding of conflict and cooperation through game-theory“ [I]

2007: Leonid Hurwicz, Eric Maskin, Roger Myerson „for having laid the foundations of mechanism design theory“ [O]

2012: Alvin Roth, Lloyd Shapley „for the theory of stable allocations and the practice of market design“ [M]

2014: Jean Tirole „for his analysis of market power and regulation“

2017: Richard Thaler „for his contributions to behavioural economics“ [Unser wöchentliches Experimentallabor ist das Casino Royal.]

Diese Liste wird in den nächsten Jahren voraussichtlich fortgesetzt.

Spieltheorie gehört zur **Mikroökonomik**, denn sie untersucht das Verhalten einzelner Akteure (Menschen, Haushalte, Unternehmen). Die **Makroökonomik** untersucht übergeordnete Größen (Kennzahlen): Investition & Konsum, Export & Import, staatliche Ausgaben & Steuern, Geldpolitik, etc. Beide Sichtweisen ergänzen sich: Die **Mikrofundierung** versucht, die Makroökonomik durch die Mikroökonomik zu erklären.

Physikalische Analogie sind Wärmelehre und kinetische Gastheorie: Die erste behandelt makroskopische Phänomene (zumeist Mittelwerte), die zweite untersucht mikroskopische Phänomene (einzelne Teilchen). Im thermischen Gleichgewicht entsprechen sich beide Sichtweisen: Das System wird durch einige wenige Zustandsgrößen beschrieben.

Ähnlich verhält es sich beim Übergang von der Mikroökonomie (weniger Akteure) zur Makroökonomie (als Grenzwert unendlich vieler Akteure). León Walras (1834–1910) suchte als erster mit Gleichgewichtsmodellen der Volkswirtschaft eine ökonomisch-mathematische Theorie, analog zu physikalisch-mathematischen Theorien wie Astronomie oder Mechanik.

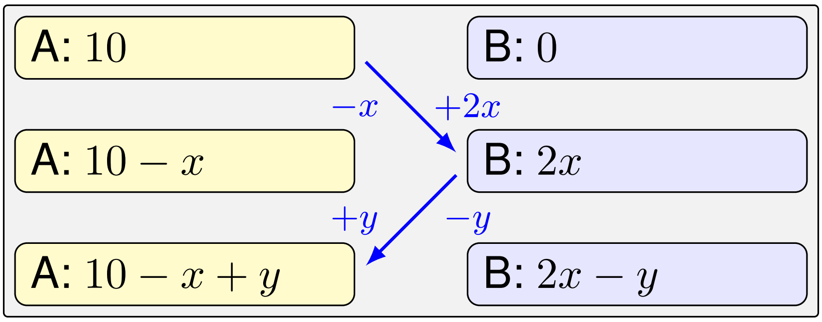
Die Analogie zur Physik ist attraktiv, aber leider nicht sehr tragfähig: Bei rasanter Entwicklung ist die Gesellschaft nicht im **Gleichgewicht**. Zudem fehlt der Ökonomik zumeist eine sichere **experimentelle Basis.** Mit dieser Problematik ringen die Wirtschaftswissenschaften seit jeher. Eine empirische Grundlegung war schon immer ersehnt aber schwierig, manchen erschien dieser Zugang gar aussichtslos und unerreichbar.

Unlike the typical natural science the material to which it is applied is, in too many respects, not homogeneous through time. […] In the second place, […] economics is essentially a moral science and not a natural science.
(John Maynard Keynes, 1883–1946)

Bevor ich Sie mit **Theorie** erleuchte oder verwirre, möchte ich gerne ein **Experiment** durchführen. Damit betone ich das empirische Gegenstück zur **mathematischen Theorie**, nämlich die **experimentelle Ökonomik**. Hier versucht man, konkrete Situationen zu verstehen, reale Daten zu erheben, um daran die Theorie zu testen, zu kalibrieren und zu schärfen.

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Zwei Spieler A und B interagieren anonym über eine Datenleitung.
Sie (er)kennen sich nicht und begegnen sich vermutlich nie wieder.



Zu Beginn erhält Spieler A ein Guthaben von 10€, Spieler B nur 0€.

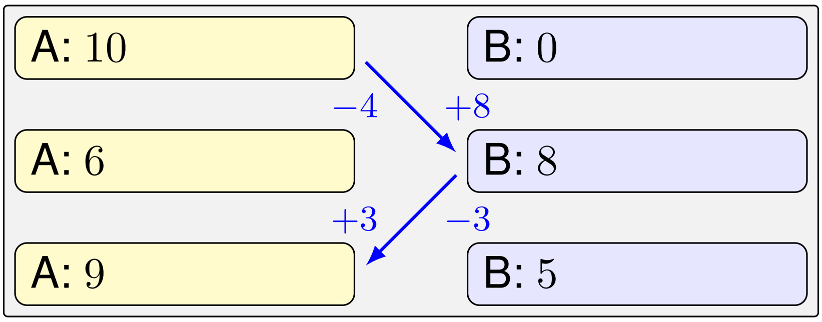
Erster Zug: A schickt an B einen frei gewählten Betrag $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$.
Dieser Betrag x wird bei A abgebucht und bei B doppelt gutgeschrieben.

Zweiter Zug: B schickt an A davon einen Betrag $y \in \{0, 1, \dots, 2x\}$.
Dieser Betrag y wird bei B abgebucht und bei A gutgeschrieben.

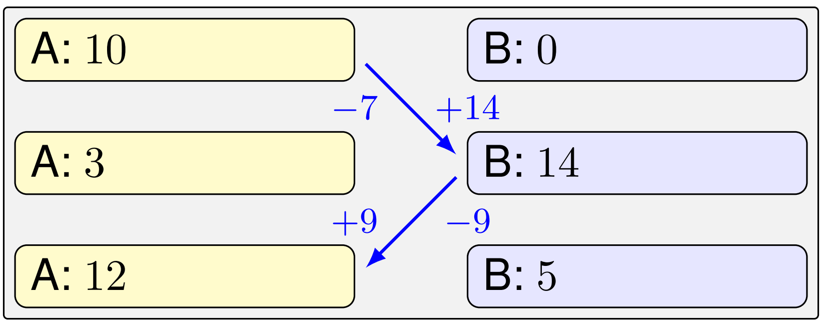
Damit endet das Spiel und jedem wird sein Kontostand ausbezahlt.
Es gelten nur diese einfachen Regeln, und sonst keine weiteren.

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Beispiel 1: A schickt 4€, B schickt 3€ zurück. ☹ A macht Verlust.



Beispiel 2: A schickt 7€, B schickt 9€ zurück. ☺ Beide profitieren.



Beachte: Der zweite Zug ist ein Nullsummenspiel, der erste Zug nicht!

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

Das ist ein einfaches, aber typisches Modell wirtschaftlichen Handelns. Wir können die Interaktion als **Kredit und Rückzahlung** interpretieren: Spieler A verleiht einen Teil seines Geldes, Spieler B erwirtschaftet damit eine Verdopplung und zahlt zurück: Tilgung plus Zinsen? Allerdings gibt es keinen Vertrag und auch keine Strafen!

Ebenso können wir es als **Online-Handel** interpretieren: Spieler A geht in Vorleistung und verschickt die Ware, für Spieler B ist diese doppelt so nützlich / wertvoll, schließlich bezahlt B nach seinem eigenen Ermessen. **Pay what you want** wird genutzt bei Spenden, Trinkgeld, Straßenkunst, manchen Restaurants, Veranstaltung / Theater, Hofverkauf / Blumenfeld.

Zugegeben, dieses Modell ist noch allzu simpel und eher unrealistisch, insbesondere fehlen hier alle üblichen sozialen Kontrollmechanismen. Der Vorteil ist jedoch: Alle Regeln sind besonders klar und einfach. Wir können dieses Spiel vollständig analysieren und verstehen.

Das ist ein stark vereinfachtes Modell, sozusagen ein Laborexperiment. Wir blenden alles andere aus und untersuchen es unter dem Mikroskop.

Ein erstes Experiment: „Hin-und-Rück“

In der Literatur heißt dies **Vertrauensspiel**, engl. *trust game*. Es wirkt zunächst etwas ungewöhnlich, begegnet uns aber im Alltag recht häufig, hier zum Beispiel in Stuttgart-Sonnenberg auf meinem Weg zur Uni:

Stufen der Rationalität

Definition A2A: Stufen der Rationalität

Unter **(unbeschränkter) Rationalität** verstehen wir folgende Axiome:

$\mathscr{R}_0$: Jeder Spieler will sein Ergebnis (Nutzen, Gewinn, ...) maximieren.

$\mathscr{R}_1$: Jeder Spieler versteht zudem alle Spielregeln und Konsequenzen.

$\mathscr{R}_2$: Es gilt die vorige Aussage $\mathscr{R}_1$, und jeder Spieler weiß dies.

$\mathscr{R}_3$: Es gilt die vorige Aussage $\mathscr{R}_2$, und jeder Spieler weiß dies.

etc... Genauer definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Aussage

$\mathscr{R}_n$: Es gilt die Aussage $\mathscr{R}_{n-1}$, und jeder Spieler weiß dies.

$\mathscr{R}_\infty$: Es gilt die Aussage $\mathscr{R}_n$ für jede Stufe $n \in \mathbb{N}$.

Axiome $\mathscr{R}_0$ und $\mathscr{R}_1$ sind extrem wichtige Annahmen für die Spieltheorie: Erst damit können wir das Spielerverhalten mathematisch analysieren. Je nach Spiel nutzen wir auch die Verschärfungen $\mathscr{R}_2, \mathscr{R}_3, \mathscr{R}_4, \dots$ usw.

In Spielanalysen bzw. Beweisen ist es zur Klärung nützlich anzugeben, welche Stufe $\mathscr{R}_n$ der Rationalität wir jeweils benutzen und voraussetzen. Implizite Annahmen formulieren wir damit explizit, präzise und bequem.

Stufen der Rationalität

Diese Axiome sind meist **Grundlage der Spieltheorie**. Wir müssen sie gründlich verstehen und an möglichst zahlreichen Beispielen erproben.

Als Warnung bzw. freundliche Enttäuschung schicke ich gleich vorweg: Diese Idealisierungen gelten in vielen realen Situationen leider nicht! Diese Eigenschaften sind zwar wünschenswert, doch oft nicht erfüllt. Alles hängt von den Akteuren ab: Menschen, Unternehmen, Staaten, KI.

Axiom $\mathscr{R}_0$ bedeutet: Die im Spiel formulierte Nutzenfunktion erfasst das Wesentliche. Wir verkneifen uns danach metaphysische Spekulationen über Moral, Ethik, Gerechtigkeit, Egoismus vs Altruismus, Erziehung, Tradition, Religion, Sünde, Fegefeuer, jüngstes Gericht, Karma, etc...

Damit will ich nicht behaupten, dass diese Fragen unwichtig wären, sie liegen nur außerhalb der Reichweite unseres mathematischen Modells. Sie sind nicht Teil des Spiels; wenn doch, dann in der Nutzenfunktion:

Wenn wir diese Begriffe in der Spieltheorie betrachten wollen, und das sollten wir, dann dürfen wir sie nicht implizit und vage dazufabulieren, sondern müssen sie explizit und präzise im Spiel codieren.

Stufen der Rationalität

Axiom $\mathscr{R}_1$ bedeutet: Jeder Spieler kennt und versteht die Regeln des Spiels, er kennt alle Handlungsoptionen und deren Konsequenzen.

Das ist eine zentrale, aber manchmal allzu starke Annahme: Für das Spiel Schach kenne ich zwar alle Regeln, aber nicht alle Konsequenzen; mir fehlt die Rechenkapazität, ausreichend viele Züge vorauszudenken.

Das gilt selbst für sehr einfache Spiele, wie unsere folgenden Beispiele. Sie erfahren damit ganz konkret, dass Sie zwar die Regeln verstehen, aber nicht sofort alle Konsequenzen erkennen. Wir sehen das daran, dass Sie als Spieler nicht sofort die beste Strategie wählen, sondern noch Fehler machen. Sie beherrschen das Spiel erst nach etwas Übung!

Gerade hierzu ist es wichtig, diesen Vortrag mit konkreten Beispielen aufzubauen, die Sie dann auch ernsthaft bearbeiten und lösen sollen. Andernfalls hören Sie schöne Theorie und glauben, damit sei alles klar.

Die Wirklichkeit ist viel komplizierter. . . und auch viel interessanter! Neben der Spieltheorie lohnt sich immer auch das soziale Experiment. Die tatsächlich beobachtete Rationalität ist allzu oft doch beschränkt.

Stufen der Rationalität

Axiome $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_3$ usw. codieren die **gegenseitigen Einschätzungen**. „Als Spieler verhalte ich mich rational. Dazu muss ich das Verhalten der anderen Spieler vorhersehen, antizipieren, besser gesagt: berechnen. Am besten gelingt mir dies, wenn ich weiß, dass auch alle anderen Spieler sich rational verhalten. Davon will / muss / kann ich ausgehen.“

Wir nennen dies **gemeinsames Wissen**, engl. *common knowledge*. Es genügt nicht, dass etwas wahr ist, es muss auch jeder wissen. Und man muss sich darauf verlassen können, dass es jeder weiß. Und auch darauf, dass jeder weiß, dass jeder es weiß. Usw.

Das ist ein allgemeines und wichtiges Konzept: Das Wissen eines Spielers besteht neben seiner reinen Sachkenntnis auch aus seinem Metawissen über das Wissen der anderen Spieler. „Ich weiß, dass du weißt, dass ich weiß, . . . “. Das klingt vertrackt und ist es meist auch.

In strategischen Situationen sind Wissen und Nichtwissen entscheidend. Für die Analyse von Spielen (und überall sonst) ist daher die Verteilung von Wissen und der Zugang zu Information von zentraler Bedeutung.

In this ocean of madness, an island of reason

Rationalität dient uns als Leuchtturm im Ozean der Unsicherheit.
Sie markiert ein behütetes Eiland sicheren, gefestigten Wissens.
Sie dient uns zur Navigation, selbst in unkartierten Gewässern.
Selbst fern der Rationalität hilft sie uns zur Orientierung.

Ist Rationalität ein geeignetes Fundament?

Manche Zuhörer wehren sich vehement dagegen, den Menschen auf den **Homo oeconomicus** zu reduzieren. Manche sträuben sich auch dagegen, dass ich dafür das hehre Wort „Rationalität“ missbrauche.

Als Mathematiker möchte ich die Gemüter beruhigen und die Wut mäßigen: Zunächst ist die Definition eine ehrliche Klarstellung!

Es ist sehr wichtig, keine unbewiesenen Annahmen zu treffen,
aber noch wichtiger ist es, keine Worte zu benutzen,
hinter denen sich kein klarer Sinn verbirgt.
(William Kingdon Clifford, 1845–1879)

Die obige Definition präzisiert explizit die zu diskutierenden Axiome: Dies sind unsere Annahmen, Voraussetzungen, Arbeitshypothesen. Es sind keineswegs pauschale Behauptungen über die Wirklichkeit.

Wir werden damit einfache Modelle untersuchen und daran viel lernen. Aussagen über das Modell, unsere Annahmen und ihre Folgerungen, lassen sich manchmal in der Wirklichkeit wiederfinden, andermal nicht.

Müssen wir alles so genau nehmen? Ja, sicher!

Auf den ersten Blick scheint es vielen von Ihnen vermutlich übertrieben, dass ich in guter mathematischer Tradition mit einer Definition beginne und den Begriff der „Rationalität“ definiere, zumindest etwas präzisiere. Dies dient als hilfreiche Abkürzung und bequeme Zusammenfassung.

Ist das nicht ohnehin alles klar? Sind Definitionen nicht übertrieben? Ich denke, nein! Gerade der Begriff „Rationalität“ kann sehr verschieden aufgefasst werden, daher möchte ich hier klar und deutlich aussprechen, was ich darunter verstehen will, und wie Sie mich bitte verstehen sollen.

Natürlich können Sie zur Rationalität eine andere Auffassung vertreten, doch wir müssen jeweils eindeutig darlegen, was wir darunter verstehen. Das ist eine Frage guter Kommunikation. Andernfalls provozieren wir nur unnötige Missverständnisse, und unsere Diskussion dreht sich im Kreis.

Die mathematische Vorgehensweise der Spieltheorie ist daher gar nicht überraschend, sondern entspricht dem Vorbild anderer Wissenschaften: Wir wollen ganz konkrete Probleme lösen und Anwendungen verstehen, dazu müssen wir Begriffe klären und tragfähige Argumente entwickeln.

Modell und Wirklichkeit

Zur Illustration gebe ich einfache, konkrete **Anwendungsbeispiele**. Sie sind zwar extrem vereinfacht und etwas fiktiv, aber doch lehrreich: Sie zeigen ganz handfeste Konsequenzen von Ir/Rationalität, und dass wir uns mit dieser Problematik genauer auseinandersetzen müssen.

Das ist die Stärke und zugleich die Begrenzung **abstrakter Modelle**: Sie treffen einen Kern des Problems, sie sind einfach und übersichtlich und leicht zu verstehen, sie taugen wunderbar als erste Näherung. Sie dienen als Ausgangspunkt und Orientierung für Anwendungen.

Wir werden dieses bemerkenswerte Phänomen noch oft beobachten: Selbst einfache Spiele können den wahren Kern eines Konflikts treffen. Physiker sprechen hier traditionell nüchtern von der **ersten Näherung**, die bei Bedarf durch die zweite, dritte, ... Näherung verfeinert wird.

Das **Modell**, das wir von der **Realität** entwerfen, hilft und leitet uns, doch niemals sollten wir naiv das Modell für die Wirklichkeit halten. Von dieser ersten Näherung ausgehend können wir unser Modell je nach Bedarf verfeinern und konkreten Gegebenheiten anpassen.

Beispiel: einen Kuchen teilen

Aufgabe: Zwei Kinder, Alice und Bob, teilen sich einen Schokokuchen. Damit es gerecht zugeht, gibt der Vater vor: Alice teilt, Bob wählt aus. Was wird passieren? rational? irrational? Ist das Ergebnis gerecht?

Lösung: $\mathscr{R}_0$: Jedes Kind will möglichst viel Schokokuchen. Diese Annahme ist grundlegend für unsere Analyse!

$\mathscr{R}_1$: Bob wird das größere Stück erkennen und sich nehmen. Er kann beide Stücke anschauen oder wiegen, um sicher zu gehen.

$\mathscr{R}_2$: Alice weiß, dass sie das kleinere Stück bekommen wird. Daher schneidet Alice zwei möglichst gleich große Stücke.

🙂 Dieses einfache Beispiel illustriert die Stufen der Rationalität. Alle Voraussetzungen sind tatsächlich nötig für unsere Analyse!

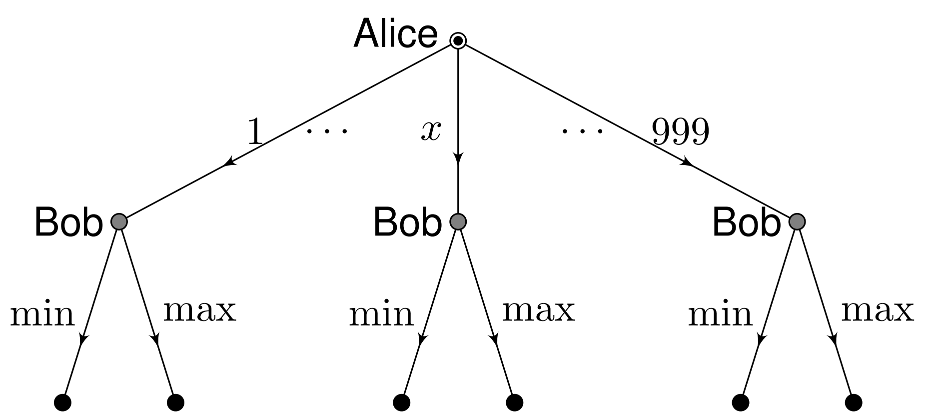
🙂 Wir werden später strategische Spiele in Normalform erklären und diese Lösung als (das einzige) Nash–Gleichgewicht wiedererkennen.

Übung: Sobald Sie die Techniken kennen, führen Sie dies aus!

Beispiel: einen Kuchen teilen

Auszahlungsmatrix (statisch) und Spielbaum (dynamisch) in Gramm:

Bob Alice	wähle Min	wähle Max
$x < 500$	x $1000 - x$	$1000 - x$ x
$x = 500$	500 500	500 500
$x > 500$	$1000 - x$ x	x $1000 - x$



Beispiel: einen Kuchen teilen

⚠ Ohne Rationalität ist eine Analyse / Prognose nahezu unmöglich!
$\mathscr{R}_0$: Wenn Alice oder Bob gar keinen Schokokuchen mag, oder andere Ziele verfolgt, dann können wir kaum vernünftige Vorhersagen machen.

$\mathscr{R}_1$: Vielleicht ist Bob noch jung und unerfahren und kann die Größe von Kuchenstücken nicht treffsicher vergleichen. Die Masse könnte er leicht und zerstörungsfrei wiegen, zum Vergleich genügt eine Balkenwaage. Auch das Volumen könnte er leicht bestimmen, mit dem Archimedischen Prinzip durch Wasserverdrängung. (Das gibt erfahrungsgemäß Sauerei.) Andernfalls täuschen ihn vielleicht komplizierte Formen, etwa fraktale Kuchenstücke, nicht-messbare Mengen etc. Vielleicht möchte Alice genau dies provozieren, falls sie so etwas überhaupt herstellen kann.

$\mathscr{R}_2$: Ist Alice irrational so könnte sie ein großes Stück schneiden und naiv hoffen, Bob nimmt das kleinere. Ist Bob rational, so wird er das nicht tun. Wenn Bob sich leicht täuschen ließe, könnte Alice zwei ungleiche Stücke so schneiden, dass Bob das kleinere und das größere verwechselt. Wenn Bob das jedoch durchschaut, dann steht Alice schlechter da.

Beispiel: einen Kuchen teilen

Ist das Ergebnis „fair“ oder „gerecht“? Nun ja, das kommt darauf an. . . Dies sind zunächst keine klar festgelegten Begriffe. Dazu müssten wir die Ziele „Fairness“ oder „Gerechtigkeit“ erst genauer definieren und dann anhand objektiver und nachvollziehbarer Kriterien prüfen.

Wenn das erklärte Ziel ist, den Kuchen möglichst hälftig aufzuteilen, dann wird dies durch das Spiel „Die eine teilt, der andere wählt“ recht gut implementiert. Dazu müssen beide Spieler „nur“ rational handeln und zudem die Spielaktionen sicher und präzise ausführen können.

- Wenn Bob präzise schätzen kann, aber Alice nur grob schneiden, dann ist Bob im Vorteil, und das Spiel verläuft zu seinen Gunsten.
- Wenn Alice präzise schneiden kann, aber Bob nur grob schätzen, dann ist Alice im Vorteil, und das Spiel verläuft zu ihren Gunsten.

Wenn wir uns Alice und Bob wirklich als kleine Kinder vorstellen, dann hängt die Fairness von ihrem Alter und ihren Fähigkeiten ab. Die Asymmetrie des Spiels könnten wir per Münzwurf beheben, eine eventuelle Asymmetrie der Fähigkeiten hingegen nicht!

Beispiel: ein Erbe teilen

Aufgabe: Alice und Bob erben $1\,000\,000$€. Das Testament verlangt: Alice nennt dem Notar eine Teilung, x für Bob und $1\,000\,000 - x$ für Alice. Zur Vereinfachung nehmen wir im Folgenden $x \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$ an. Dies kann Bob nun annehmen... oder ablehnen, dann verfällt das Erbe. Was wird passieren? rational? irrational? Ist das Ergebnis gerecht?

Lösung: $\mathscr{R}_0$: Jeder will seine Auszahlung maximieren. Diese Annahme ist grundlegend für unsere Analyse!

$\mathscr{R}_1$: Bob wird jeden Vorschlag $x > 0$ annehmen. Das ist vielleicht wenig, aber besser als nichts.

$\mathscr{R}_2$: Alice weiß dies und schlägt $x = 1$€ vor.

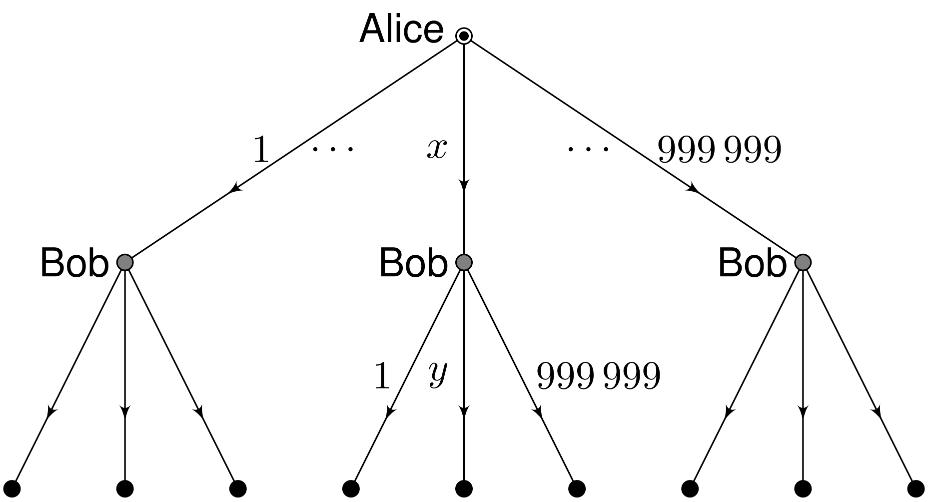
🙂 Dieses einfache Beispiel illustriert die Stufen der Rationalität. Alle Voraussetzungen sind tatsächlich nötig für unsere Analyse!

🙂 Wir werden später dynamische Spiele erklären und diese Lösung als (das einzige) teilspielperfekte Gleichgewicht wiedererkennen.

Übung: Sobald Sie die Techniken kennen, führen Sie dies aus!

Beispiel: ein Erbe teilen

Wir formalisieren folgende Variante: Alice fordert $x \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$. Anschließend fordert Bob $y \in \{1, 2, \dots, 999\,999\}$. Gilt $x + y \leq 1\,000\,000$, so tritt die Aufteilung (x, y) in Kraft, andernfalls verfällt das Erbe.



Hier ist die zeitliche Reihenfolge entscheidend: Alice macht ihr Angebot und kann nicht mehr zurück, Bob ist daher unter Zugzwang. Muss Bob zuerst fordern, so ist es umgekehrt. Als Variante ist auch gleichzeitige verdeckte Abgabe von Alice' Angebot und Bobs Forderung denkbar.

Beispiel: ein Erbe teilen

⚠ Ohne Rationalität ist eine Analyse / Prognose nahezu unmöglich:
$\mathscr{R}_0$: Wenn Alice oder Bob gar kein Geld haben will, oder andere Ziele verfolgt, dann können wir kaum vernünftige Vorhersagen machen.

$\mathscr{R}_1$: Wir gehen hier davon aus, dass Bob streng rational ist. „Wer den Euro nicht ehrt, ist das Erbe nicht wert.“ Ist das zwingend? Vielleicht hat Bob ein extremes Gerechtigkeitsempfinden und wird nur den Vorschlag $x = 500\,000$€ akzeptieren, nicht weniger, aber auch nicht mehr. Das ist irrational, aber möglich. Vielleicht hat Bob $850\,000$€ Schulden und wird von Mafiakillern verfolgt, dann würde er nur $x \ge 850\,000$€ akzeptieren.

$\mathscr{R}_2$: Wenn Alice an Bobs Rationalität zweifelt, dann sollte sie ihre Strategie anpassen. Zum Beispiel könnte Bob drohen: „Alles unter $300\,000$€ werde ich ablehnen.“ Aber ist diese Drohung glaubwürdig? Wird er das wirklich tun, wenn er vor der endgültigen Entscheidung steht? Wenn er rational ist, sicher nicht! Andernfalls vielleicht doch…

Alice muss also die Rationalität von Bob einschätzen. Das ist schwierig. Der Idealfall ist perfekte Rationalität, aber das ist nicht immer realistisch.

Beispiel: ein Erbe teilen

Ist das Ergebnis „fair“ oder „gerecht“? Nun ja, das kommt darauf an… Dies sind zunächst keine klar festgelegten Begriffe. Dazu müssten wir die Ziele „Fairness“ oder „Gerechtigkeit“ erst genauer definieren und dann anhand objektiver und nachvollziehbarer Kriterien prüfen.

- Wenn das erklärte Ziel ist, das Erbe möglichst hälftig aufzuteilen, dann wird es durch das Testament denkbar schlecht implementiert.
- Wenn das Ziel nur ist, das Testament wortgetreu auszuführen, dann erfüllt das beschriebene rationale Verhalten genau dies.

Genauso gut hätte der Erblasser die Aufteilung $999\,999$€ für Alice und 1€ für Bob im Testament festlegen können. Ist diese Festlegung un/fair? Das Testament ist ungewöhnlich, aber nicht zwangsläufig un/gerecht; dazu müssten wir viel mehr Vorgeschichte und Kontext kennen.

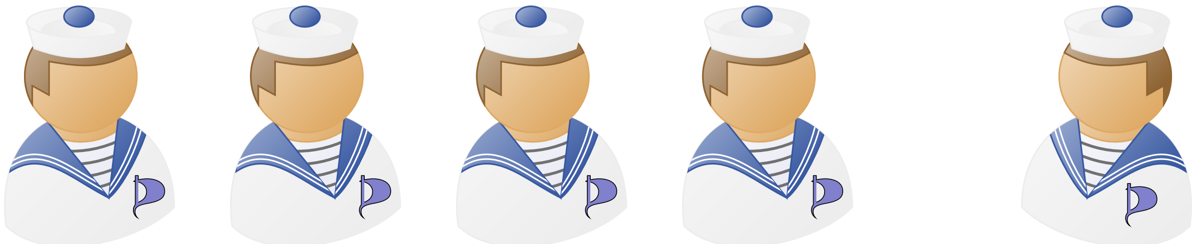
Ist das Erbe ausgleichende Un/Gerechtigkeit für früheres Verhalten? Und was ist mit Chuck, der nicht erwähnt wurde und nichts bekommt? Vielleicht wäre es besser, das Erbe verfällt an wohltätige Zwecke… Vielleicht will der Erblasser Alice und Bob eine Lehre erteilen?

Meuterei auf der Bounty (1935)

Mutiny on the Bounty mit Clark Gable und Charles Laughton unter der Regie von Frank Lloyd. Oscar 1936 als bester Film.

Fünf gierige Piraten [*the pirate game*]

Fünf basisdemokratische Piraten $1, 2, 3, 4, 5$ teilen sich 100 Dukaten. (nach Ian Stewart: *A Puzzle for Pirates.* Scientific American 5/1999)



1 2 3 4 5

Der ranghöchste Pirat 5 schlägt eine Zuteilung zur Abstimmung vor. Stimmt mindestens die Hälfte dafür, so wird diese Zuteilung ausgeführt. Bei Ablehnung wird der Vorschlagende über Bord ins Meer geworfen, und die verbleibenden Piraten beginnen das Spiel von vorn.

Präzisierung: Ein Dukat ist unteilbar. Jeder Pirat will A: selbst überleben, B: möglichst viel Gold, C: bei Indifferenz lieber andere ins Meer werfen, D: lieber rangniedrige bestechen als ranghohe. Jeder Pirat ist rational. Absprachen sind unmöglich, denn jeder misstraut jedem anderen und würde Absprachen brechen. Diese Fakten sind gemeinsames Wissen.

Fünf gierige Piraten [*the pirate game*]

Naiv könnte man vermuten, der ranghöchste Pirat muss um sein Leben fürchten und daher all sein Gold hergeben. Das Gegenteil ist der Fall!

Aufgabe: Lösen Sie das Piratenrätsel für $n = 5$, sowie für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Wir nutzen Induktion über $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ und finden:

	1	2	3	4	5	…	197	198	199	200	201	202
	100	☠	☠	☠	☠	…	☠	☠	☠	☠	☠	☠
$\mathscr{R}_1$	0	100	☠	☠	☠	…	☠	☠	☠	☠	☠	☠
$\mathscr{R}_2$	1	0	99	☠	☠	…	☠	☠	☠	☠	☠	☠
$\mathscr{R}_3$	0	1	0	99	☠	…	☠	☠	☠	☠	☠	☠
$\mathscr{R}_4$	1	0	1	0	98	…	☠	☠	☠	☠	☠	☠
$\vdots$												
$\mathscr{R}_{197}$	0	1	0	1	0	…	0	2	☠	☠	☠	☠
$\mathscr{R}_{198}$	1	0	1	0	1	…	1	0	1	☠	☠	☠
$\mathscr{R}_{199}$	0	1	0	1	0	…	0	1	0	1	☠	☠
$\mathscr{R}_{200}$	1	0	1	0	1	…	1	0	1	0	0	☠
$\mathscr{R}_{201}$	0	1	0	1	0	…	0	1	0	1	0	0

Fünf gierige Piraten [*the pirate game*]

☺ Scharfsinn, Systematik & Induktion liefern die erstaunliche Antwort! Wir nutzen die Prioritäten A–C und strenge Rationalität, insb. Egoismus ohne Kooperation. Real beobachtetes Verhalten kann davon abweichen.

⚠ Im Spiel mit $n \ge 201$ Piraten geht es nur noch ums Überleben!
Der Vorschlagende $n = 201, 202, 204, 208, \dots$ kann überleben,
der Verschlagende $n = 203, 205, 206, 207, \dots$ leider nicht.

Zur Analyse zerlegen wir $n = 200 + 2^k + r$ mit $k, r \in \mathbb{N}$ und $0 \le r < 2^k$.

Im Falle $0 < r < 2^k$ geht Pirat n über die Planke, egal was er vorschlägt: Er kann nur 100 Piraten bestechen. Dazu bekommt er alle r Stimmen der Todgeweihten (inklusive seiner selbst). Das bleibt eine Minderheit.

Im Falle $r = 0$ überlebt Pirat $n = 200 + 2^k$ durch folgende Strategie:

- Falls k gerade ist, gibt er allen Ungeraden $1, 3, \dots, 199$ je ein Dukat.
- Falls k ungerade ist, gibt er allen Geraden $2, 4, \dots, 200$ je ein Dukat.

So bekommt er alle 100 Stimmen der Bestochenen und zusätzlich noch alle $2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$ Stimmen der Geretteten (inklusive seiner selbst).

☺ Prioritäten A–D lösen Indifferenzen und garantieren Eindeutigkeit.

Ein Komitee zur Verbesserung der Hochschullehre

Die chronisch unterfinanzierte Hochschullehre soll mit einer Förderung von 50 k€ exzellent werden. (Das ist aberwitzig, aber besser als nichts.) Ein Komitee von zwölf Professoren teilt die Fördersumme unter sich auf.

Der dienstälteste Professor 12 legt eine Zuteilung zur Abstimmung vor. Bei Ablehnung wird der Vorschlagende als befangen ausgeschlossen, und die verbleibenden Professoren beginnen das Komiteespiel von vorn. Präzisierung: Ein k€ ist unteilbar. Weiter gelten obige Piratenregeln.

Aufgabe: Welcher Professor erhält wie viel von der Fördersumme? Lösen Sie das Komiteespiel mit folgenden Abstimmungsregeln:
(1) Annahme erfordert mehr als die Hälfte der Stimmen.
(2) Annahme erfordert mindestens zwei Drittel der Stimmen.
(3) Annahme gilt erst bei höchstens einer Gegenstimme.

Das Komiteespiel: mehr als die Hälfte

Lösung: (1) Wir nutzen Induktion über $n = 1, 2, \dots, 12$ und finden:

n	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	50	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
2	2	50	0	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
3	2	0	1	49	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
4	3	1	2	0	47	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
5	3	2	0	1	0	47	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
6	4	0	1	2	1	0	46	☠	☠	☠	☠	☠	☠
7	4	1	2	0	0	1	0	46	☠	☠	☠	☠	☠
8	5	2	0	1	1	0	1	0	45	☠	☠	☠	☠
9	5	0	1	2	0	1	0	1	0	45	☠	☠	☠
10	6	1	2	0	1	0	1	0	1	0	44	☠	☠
11	6	2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	44	☠
12	7	0	1	2	1	0	1	0	1	0	1	0	43

Jeder Vorsitzende n kann sich das Quorum $q = 1 + \lfloor n/2 \rfloor$ billig erkaufen und sich selbst den Löwenanteil des zu verteilenden Geldes sichern.

Das Komiteespiel: mindestens zwei Drittel

Lösung: (2) Wir nutzen Induktion über $n = 1, 2, \ldots, 12$ und finden:

n	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	50	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
2	2	50	0	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
3	2	0	1	49	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
4	3	1	2	0	47	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
5	4	2	3	1	0	44	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
6	4	3	0	2	1	0	44	☠	☠	☠	☠	☠	☠
7	5	0	1	3	2	1	0	43	☠	☠	☠	☠	☠
8	6	1	2	0	3	2	1	0	41	☠	☠	☠	☠
9	6	2	3	1	0	0	2	1	0	41	☠	☠	☠
10	7	3	0	2	1	1	0	2	1	0	40	☠	☠
11	8	0	1	3	2	2	1	0	2	1	0	38	☠
12	8	1	2	0	3	0	2	1	0	2	1	0	38

Jeder Vorsitzende n kann sich das Quorum $q = \lfloor 3n/2 \rfloor$ billig erkaufen und sich selbst den Löwenanteil des zu verteilenden Geldes sichern.

Das Komiteespiel: höchstens eine Gegenstimme

Lösung: (3) Wir nutzen Induktion über $n = 1, 2, \ldots, 12$ und finden:

n	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	50	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
2	1	0	50	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
3	2	1	0	49	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
4	3	2	1	0	47	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
5	4	3	2	1	0	44	☠	☠	☠	☠	☠	☠	☠
6	5	4	3	2	1	0	40	☠	☠	☠	☠	☠	☠
7	6	5	4	3	2	1	0	35	☠	☠	☠	☠	☠
8	7	6	5	4	3	2	1	0	29	☠	☠	☠	☠
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	22	☠	☠	☠
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	14	☠	☠
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	5	☠
12	11	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	5	0

Professor 12 kann sich nicht genug Unterstützung erkaufen. Professor 11 hingegen bringt seinen Vorschlag mit überwältigender Mehrheit durch.

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Im **Casino Royal** (25.10.2019) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, unsere mathematische Lösung des Piratenspiels in der Praxis zu testen. Das kostet etwas Zeit, liefert aber eindrückliches Anschauungsmaterial. Genau zu diesem Zweck haben wir das Casino Royal eingerichtet.

Ich empfehle nachdrücklich praktische **Experimente zur Spieltheorie**, denn Theorie und Praxis können erstaunlich weit auseinanderklaffen. Wer das erlebt hat, sieht diesen Themenkomplex mit anderen Augen. Ich halte den konkreten Vergleich für lehrreich, ehrlich und heilsam.

Das gilt insbesondere in **Verhandlungen**, so wie hier: Es genügt nicht, rational zu (ver)handeln und einen möglichst guten Plan zu (er)finden, man muss zudem auch die anderen überzeugen! (hier: mehrheitlich) Dazu muss jeder Spieler genaustens die Ir/Rationalität seiner Mitspieler berücksichtigen, und das macht die Verhandlungen beliebig komplex.

🙂 Wir haben viel gelernt und zudem hat es großen Spaß gemacht: **Konkrete Experimente überraschen und begeistern immer wieder.** Vielen Dank an alle engagierten und spielfreudigen Teilnehmer:innen!

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Auf die Ankündigung, das Piratenspiel experimentell durchzuführen, meldeten sich spontan fünf freiwillig-furchtlose Freibeuter A,B,C,D,E; einige von ihnen kannten die zugehörige Theorie, andere noch nicht. Diesen fünf wurden die fünf Rollen zugelost: 5A, 4B, 3C, 2D, 1E.

Erste Verhandlungsrunde: Zunächst unterbreitet der Capitain 5 einen Vorschlag und untermauert ihn kurz mit seinen weisen Argumenten. Dazu beziehen 4, 3, 2, 1 Stellung. (Man kann zuvor eine maximale Redezeit vereinbaren, etwa $30\mathrm{s}$, aber das war hier gar nicht nötig.)

Zur weiteren Aussprache ist eine zweite Verhandlungsrunde möglich. Dann erst unterbreitet der Capitain seinen endgültigen Vorschlag und alle stimmen gleichzeitig darüber ab (durch Kreidestück in Faust; optional wäre eine geheime Abstimmung, etwa durch Zungestrecken).

⚠ Dies ist kein Laborexperiment unter kontrollierten Bedingungen. Die Regeln waren zunächst lose gefasst. Die Verhandlung vor Publikum und die Interaktion aller Beteiligten waren an kein Protokoll gebunden. Insbesondere habe ich als Moderator oft dazwischengeplappert.

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Hier mein (stark vereinfachtes) Gedächtnisprotokoll der Ereignisse; sie sind jetzt bereits legendär, die Berichte entsprechend schillernd.

Der Capitain 5A kennt die Theorie und schlägt deshalb die Aufteilung $(1, 0, 1, 0, 98)$ vor. „Das ist die rationale Lösung. Liebe Piraten 3C und 1D, Ihr könnt mir ruhig zustimmen, von mir bekommt Ihr immerhin ein Dukat. Seid vorsichtig: Wenn Ihr mich über Bord werft, bekommt Ihr gar nichts.“

Darauf wendet sich Pirat 4B direkt an die Mannschaft und entgegnet: „Männer, merkt Ihr nicht, wie der Capitain uns gegeneinander ausspielen will? Das dürfen wir uns nicht gefallen lassen. Der Capitain muss weg!“

Pirat 3C: „Wo bleibt bei diesem Vorschlag denn die Gerechtigkeit? Wir müssen als Mannschaft zusammenhalten und gerecht teilen. Nur wer gut und gerecht handelt, kommt in den Piratenhimmel.“

Pirat 2D: „Wir haben alle gemeinsam gekämpft und jetzt sollen einige leer ausgehen? Wir sind ein Team, wir müssen zusammenhalten.“

Pirat 1E: „Ich finde den Vorschlag eigentlich ganz in Ordnung, aber ein Dukat ist viel zu wenig. Ich verlange 33 Dukaten!“

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Das Publikum entschied, dass eine weitere Aussprache sinnvoll wäre; nach dieser ersten Verhandlungsrunde folgte also noch eine zweite. Nach Austausch aller Argumente schlug der Capitain 5A endgültig die Verteilung $(26, 0, 26, 0, 48)$ vor. Dieser Vorschlag wurde angenommen.

Eine erste Einschätzung und Einordnung dieser Geschehnisse:

Ein Einfluss der Theorie ist deutlich: Der Capitain 5A konzentrierte sich sofort auf die aus seiner Sicht allein entscheidenden Piraten 3C und 1E. Daran änderte auch die weitere Diskussion nichts. Teile und herrsche!

Diese Koalition $\{5, 3, 1\}$ machte alles weitere unter sich aus, und genau dieses Triumvirat stimmte schließlich für den Vorschlag des Capitains. Die Appelle der gezwungenen Opposition $\{2, 4\}$ verhallten ungehört.

Entgegen der Theorie kam es nicht zu der Aufteilung $(1, 0, 1, 0, 98)$, sondern $(26, 0, 26, 0, 48)$. Die Zahlen scheinen mir zwar willkürlich, doch die Tendenz ist klar: Der Capitain 5A wollte ein deutliches Entgegenkommen zeigen, um beide Stimmen sicher zu erhalten. Diese waren nun bitter nötig, und er wollte kein Risiko eingehen.

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Dieses erste Piratenspiel war bereits sehr lehrreich und unterhaltsam, doch dann kam alles noch besser, noch spannender, noch verrückter.

Nach Beratung beschließen alle Anwesenden, dieselben fünf erneut spielen zu lassen, mit neu zugelosten Rollen: 5C, 4B, 3A, 2E, 1D.

Dies wirft sofort die Frage auf, ob sich die Piraten noch an ihren vorigen Beutezug und an die anschließenden Verhandlungen erinnern können, oder ob die rauschende Feier mit viel Rum ihr Gedächtnis gelöscht hat. Diese interessante spieltheoretische Frage bleibt hier zunächst offen.

Nun nehmen die Geschehnisse ihren sensationellen Verlauf:

Capitain 5C: „In dieser harten Piratenrealität geht es nur ums Gold. Lasst Euch nichts einreden und glaubt nicht an Himmel oder Hölle! Ich schlage deshalb die einzig rationale Verteilung $(1, 0, 1, 0, 98)$ vor.“ Alle lachen verwundert über diese Bekehrung vom Paulus zum Saulus.

Nach einer Verhandlungsrunde bleibt der Capitain bei seinem Vorschlag. In der Abstimmung wird dieser abgelehnt, der Capitain geht über Bord; ein würdevoller Abgang unter dem tosenden Ablaus aller Anwesenden.

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Pirat 4B: „Männer, wir müssen als Mannschaft zusammenhalten, wir brauchen eine möglichst große Crew, wir brauchen jeden Mann, um unsere Gegner besiegen zu können. Ich schlage die Aufteilung $(0, 1, 0, 99)$ vor.“ In der Abstimmung scheitert dieser Vorschlag jedoch. Unter anerkennendem Applaus geht auch der Vizecapitain über Bord.

Pirat 3A: „Lieber Pirat 1D, Du siehst ja, was passieren wird: Wenn ich über Bord gehe, wird Pirat 2E dich über den Tisch ziehen. Also gebe ich Dir ein Dukat, das ist für dich viel besser als nichts.“ Erstaunlicherweise wird auch dieser klare, einfache, wohlbegründete Vorschlag abgelehnt. Nach allzu kurzer Karriere geht Capitain 3A unter Applaus über Bord.

Pirat 2E schlägt 1D großzügig vor: „Machen wir Halbe-Halbe?“ – „Ja.“ Die glücklichen Überlebenden erhalten jeweils beachtliche 50 Dukaten. Die einst so stolze Piratenmannschaft, auf allen Weltmeeren gefürchtet, ist nach diesen harten Verhandlungen allerdings arg reduziert.

A house divided against itself, cannot stand.
(Abraham Lincoln, 1809–1865)

Vielleicht sollten sich die Piraten eine bessere Verfassung geben?

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Dieser Verlauf der Verhandlungen war unerwartet, turbulent, verblüffend und vollkommen entgegen unserer eigenen theoretischen Vorhersage.

Rational lässt sich das hier beobachtete Verhalten nicht erklären! Das ist eine schmetternde Niederlage für die Spieltheoretiker:in, aber zugleich auch ihre beste Verteidigung: Die Spieler waren eben nicht rational.

Damit kann sich die Spieltheoretiker:in elegant aus der Affäre ziehen, oder überhaupt jede Wissenschaftler:in im Zwiespalt zwischen Theorie und Empirie: Die nötigen Voraussetzungen waren eben nicht erfüllt.

Genauer: Nach einem ersten, seriösen Piratenspiel wurden die Spieler im zweiten Durchgang wagemutiger… und verspielter. Es ging ja nicht um viel, jedenfalls nicht um echtes Gold oder gar um Leben und Tod.

Die mögliche Interaktion der Spieler mit dem Publikum betonte zudem den Spaßfaktor, ermutigte das theatralische Schauspiel und schwächte die berechnende Profitmaximierung, also die Grundvoraussetzung $\mathscr{R}_0$: Der Profit bestand nun nicht nur aus den Dukaten, sondern auch und hauptsächlich aus der Interaktion selbst und dem (Schau-)Spielspaß.

Empirie: das Piratenspiel im Praxistest!

Die Rationalität $\mathscr{R}_1$ wächst mit zunehmender Spielerfahrung:
Jeder Spieler versteht die Spielregeln und all ihre Konsequenzen.

Doch wenn bei einigen das Fundament $\mathscr{R}_0$ bröckelt, dann schwindet bei anderen das nötige Vertrauen $\mathscr{R}_2$ in die Rationalität der Gegenspieler. So lässt sich schließlich kaum noch rational planen und (ver)handeln.

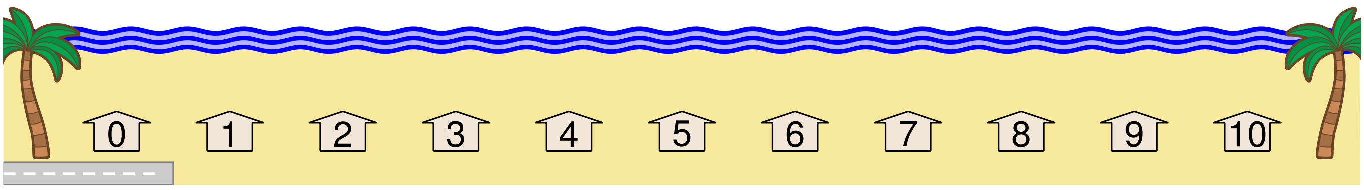
Für Abstimmungen ist das besonders dramatisch: Es genügt nicht, rational zu (ver)handeln und einen möglichst guten Plan zu (er)finden, man muss zudem die (qualifizierte Mehrheit der) anderen überzeugen!

Zwei Dinge sind unendlich, das Universum und die menschliche Dummheit,
aber bei dem Universum bin ich mir noch nicht ganz sicher.
(Albert Einstein zugeschrieben, wohl fälschlicherweise)

If people do not believe that mathematics is simple,
it is only because they do not realize how complicated life is.
(John von Neumann, 1903–1957)

Später untersuchen wir Verhandlungen, Koalitionen, Wahlsysteme, Auktionen, etc. als wichtige Anwendungsgebiete der Spieltheorie.

Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand



Sie eröffnen einen Kiosk, mögliche Positionen sind $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$.
Die Badegäste sind gleichverteilt und gehen immer zum nächsten Kiosk.
Jeder Spieler (Kiosk) maximiert seine Kundenzahl (Umsatz, Marktanteil).
Bei sonst gleichem Anteil sucht jeder die Nähe zur Zufahrtstraße bei 0.

Aufgabe: (1) Sie haben die einzige Lizenz. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
(2) Sie haben die erste von zwei Lizenzen. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
(3) Sie haben die erste von drei Lizenzen. Wo bauen Sie Ihren Kiosk?
Finden Sie zu jedem Zug von A die beste Antwort von B und von C!

Lösung: Bei rationalem Verhalten finden wir folgende Anordnungen:

(1)	A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2)	0	1	2	3	B	A	6	7	8	9	10
(3)	0	1	B	C	4	5	6	7	A	9	10

Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand

Ausführlich: Frage (1) wird gelöst durch die offensichtliche Optimierung.
Bei Frage (2) suchen wir zu jedem Zug von A die beste Antwort von B:

A	B										$1:10$
	A	B									$2:9$
		A	B								$3:8$
			A	B							$4:7$
				A	B						$5:6$
				B	A						$6:5$
					B	A					$5:6$
						B	A				$4:7$
							B	A			$3:8$
								B	A		$2:9$
									B	A	$1:10$

Versuchen Sie, die Lösung sauber aufzuschreiben: Wie organisieren Sie Ihre Notation und Ihre Argumente möglichst klar und nachvollziehbar?

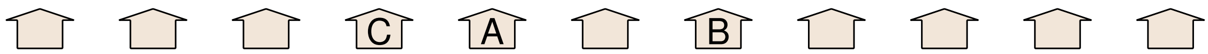
Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand

Antwort (3) ist länger, wir müssen systematisch und sorgfältig vorgehen. Dies ist ein einfach-schönes Beispiel der kombinatorischen Spieltheorie: Wir durchsuchen hier einen endlichen Entscheidungsbaum, zählen alle Möglichkeiten auf und sortieren sie nach den Kriterien der Rationalität.

⚠ Jeder Spieler muss bei seiner Analyse Annahmen machen über die Rationalität seiner Gegenspieler. Ich nenne dazu ein einfaches Beispiel:

Wäre B gierig und dumm, dann wäre Platz 4 für A ein guter Zug:
Spieler B wird kurzsichtig Platz 5 wählen, und Spieler C folgt auf Platz 6.

Sind B und C rational, dann wäre Platz 4 für A ein schlechter Zug:
Spieler B wird schlau Platz 6 wählen, und Spieler C folgt auf Platz 3.



Um unsere Analyse zu vereinfachen, nehmen wir hier vollständige Rationalität an, wie oben erklärt. Damit wird das Kioskproblem stark vereinfacht und lösbar durch eine kombinatorische Optimierung.

Un/Klug positionieren: Kiosk am Strand

Aufgabe: Diskutieren und lösen Sie das Problem für drei Kiosklizenzen. Versuchen Sie, Ihre Lösung sauber aufzuschreiben: Wie organisieren Sie Ihre Notation und Argumente möglichst klar und nachvollziehbar?

Wenn Sie Freude daran haben, diskutieren Sie Erweiterungen:
Was passiert, wenn Kiosk A und C demselben Spieler gehören?
Was passiert, wenn Kiosk B und C demselben Spieler gehören?
Was passiert, wenn Kiosk A und B demselben Spieler gehören?

Aufgabe: Wenn Sie programmieren, dann können Sie die einfachen, aber lästig-länglichen Aufzählungen einem Computer übertragen.

Tipp: Programmieren Sie so am besten gleich das allgemeinere Problem für einen Strand der Länge ℓ und k Kiosklizenzen, wobei $1 \le k \le \ell$ gelte, oder allgemein einen Graphen mit Kantenlängen und Eckengewichten.

Herausforderung: Erweitern Sie dies zu Koalitionen, wobei sich die Kioske in feste Gruppen einteilen, so wie die Filialen einer Kette. Denkbar sind zwei Spieler, die abwechselnd ihre Kioske setzen. Kniffliger: Ein Losverfahren entscheidet, wer als nächster setzt.

Ein Modell, viele Anwendungen

Es geht in der Spieltheorie einerseits um konkrete Spiele und Strategien, um explizite Probleme und präzise Lösungen, um rationales Handeln, empirisch notgedrungen ebenso um begrenzt rationales Verhalten. Auf präzise Fragen erhoffen wir uns ebenso präzise Antworten.

Andererseits geht es auch um gemeinsame Muster und Mechanismen. Wenn Alice und Bob einen Kuchen oder ein Erbe teilen, dann beschreibt das im Prinzip auch allgemeine Teilungs- und Verhandlungsprobleme. Die Details sind verschieden, aber die Mechanismen sind ähnlich.

Die hier untersuchten Spiele sind stark vereinfacht, manchmal lächerlich, oft genug übertrieben simpel, doch sie treffen häufig einen wahren Kern. Solch konkrete Beispiele benennen und repräsentieren typische Muster. Ihre Einfachheit zeigt den Problemkern besonders klar und deutlich.

In konkreten Anwendungen müssen wir genaue Daten berücksichtigen, es gibt viel mehr Wenn-und-Aber, und all das ist auch gut und richtig so. Dennoch: Nach Sichtung und Abwägung aller Details, stellt sich in erster Näherung häufig genug ein einfaches Muster als wesentlich heraus.

Ein Modell, viele Anwendungen

Das Strandkiosk-Problem ist eine schöne kombinatorische Aufgabe. Sie steht hier stellvertretend für ähnliche Spiele, allgemein für Konflikte um eine räumliche Marktaufteilung, Konkurrenz um Marktanteile, etc. Der Kampf um den Strand kann auch noch anderes darstellen!

Denken Sie zum Beispiel an ein politisches Spektrum; die verbreitete Sprechweise von „links“ und „rechts“ ist eine hilfreiche Vereinfachung. Wir gehen davon aus, dass Wähler über das Spektrum verteilt sind und immer genau die Partei wählen, die ihrer Position am nächsten liegt.

Wenn es nur eine Partei A gibt, wie positioniert sie sich im Spektrum? Nun, das ist eigentlich egal, da sie ohnehin alle Wählerstimmen erhält. Genau dies ist in Ein-Parteien-Staaten tatsächlich zu beobachten.

Wenn es aber zwei Parteien A und B gibt, wie positioniert sich die erste? Genau dieses Problem haben wir oben gelöst! Tatsächlich beobachten wir in der politischen Debatte den Kampf um die „Mitte der Gesellschaft“. Gibt es weitere Parteien C,D,. . . , so entflammen zudem Flügelkämpfe. Jetzt wissen Sie genauer, warum das strategisch unvermeidlich ist.

Ein Modell, viele Anwendungen

Moment mal, können wir das banale Strandkiosk-Problem ernsthaft vergleichen mit hochkomplizierten parteipolitischen Strategien? Genau genommen natürlich nicht, aber grob gesagt schon.

Das ist die Stärke und zugleich die Begrenzung abstrakter Modelle: Sie treffen einen Kern des Problems, sie sind einfach und übersichtlich und leicht zu verstehen, sie taugen wunderbar als erste Näherung. Sie dienen als Ausgangspunkt und Orientierung für Anwendungen.

Für eine genauere Analyse im konkreten Einzelfall dürfen wir natürlich nicht stur bei dieser Grundidee verharren, sondern müssen wesentlich weiter gehen und genauer hinschauen. Im obigen Parteienbeispiel:

- Die politische Landschaft ist heute nicht (mehr) eindimensional.
- Das Wählerverhalten ist nicht (mehr) ganz so einfach vorhersehbar.
- Der Kampf um den linken / rechten Rand ist ein heikler Balanceakt.

Daher müssen wir unser Modell weiter verfeinern und kalibrieren durch genauere Daten. Auch begrenzt rationales Verhalten ist zu erwarten, dies untersucht die empirische Spieltheorie und Verhaltensökonomik.

Ein Modell, viele Anwendungen

Ökonomische Modelle können uns gute grundlegende Einsichten über komplizierte Situationen vermitteln, Geschichten erzählen, dafür sind sie großartig. Aber wie benutzt man Modelle richtig?
(John Kay im Interview, Die Zeit 25. Juli 2019)

Wir werden dieses bemerkenswerte Phänomen noch oft beobachten: Selbst einfache Spiele können den wahren Kern eines Konflikts treffen. Physiker sprechen hier traditionell nüchtern von der **ersten Näherung**, die bei Bedarf durch die zweite, dritte, ... Näherung verfeinert wird.

Das **Modell**, das wir von der **Realität** entwerfen, hilft und leitet uns, doch niemals sollten wir naiv das Modell für die Wirklichkeit halten. Von dieser ersten Näherung ausgehend können wir unser Modell je nach Bedarf verfeinern und konkreten Gegebenheiten anpassen.

Die Wirklichkeit ist komplizierter als sie auf den ersten Blick scheint. Dies erfordert intellektuelle Redlichkeit und mathematische Sorgfalt. Das spieltheoretische Modell dient als Grundlage. Selbst wo es versagt, ist es der Maßstab für die Abweichung von Prognose und Beobachtung.

Ir/Rational verhandeln: drohen oder nachgeben?

		USA	EU
0	Start		
1a	USA drohen nicht.	5	9
1b	USA drohen mit Zöllen.		
2a	Europa gibt nach.	6	7
2b	Europa droht ebenfalls.		
3a	USA lenken ein.	4	8
3b	Es kommt zum Handelskrieg.	3	6

$\mathscr{R}_3$ $\mathscr{R}_2$ $\mathscr{R}_1$

Aufgabe: Was wird passieren? rational? irrational? Wie erklären und bewerten Sie Trumps explizite Doktrin: „We have to be unpredictable.“ Kann es helfen, irrational zu *sein*? oder dafür *gehalten* zu werden?

Lösung: $\mathscr{R}_0$: Jeder kennt und maximiert sein Ergebnis (wie gezeigt).
$\mathscr{R}_1$: Vor einem Handelskrieg lenken die USA im 3. Zug ein (vorteilhaft).
$\mathscr{R}_2$: Die EU weiß dies, daher wird sie im 2. Zug drohen (vorteilhaft).
$\mathscr{R}_3$: Die USA wissen dies, also werden sie im 1. Zug nicht drohen.

Ir/Rational verhandeln: drohen oder nachgeben?

Die Zahlen rechts bewerten jeden der möglichen Ausgänge für die USA und die EU auf einer (fiktiven) Werteskala. Wir denken an eine geeignete Gewichtung aus wirtschaftlichem Ertrag, politischem Ansehen, etc.

⚠ Solche Zahlen sind schwer zu ermitteln und sind oft umstritten. Wir nehmen sie für unser Modell als gegeben an und analysieren die Situation auf dieser Grundlage. Andere Kalibrierungen sind möglich.

⚠ Unsere Analyse benötigt alle Voraussetzungen zur Rationalität.

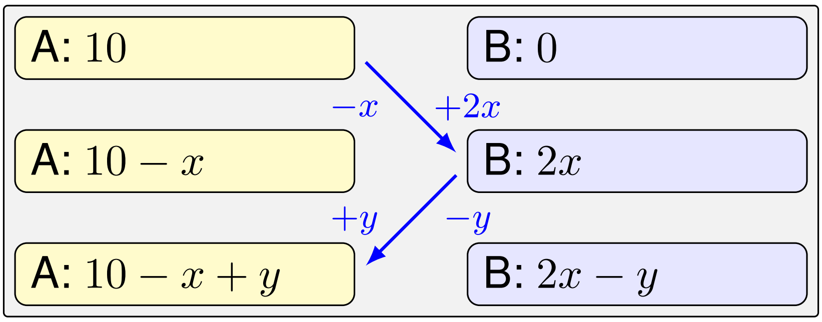
$\mathscr{R}_1$: Sind die USA irrational, so könnten sie sich im 3. Zug für einen Handelskrieg entscheiden, obwohl dies zu ihrem Nachteil wäre. Das kann an einer falschen Einschätzung der Situation liegen, anderen Bewertungen, oder allgemein an mangelnder Rationalität.

$\mathscr{R}_2$: Im 2. Zug muss die EU daher die Rationalität der USA einschätzen. Gegen einen Wahnsinnigen wäre es tatsächlich besser einzulenken!

$\mathscr{R}_3$: Im 1. Zug hätten die USA also Interesse daran, für wahnsinnig gehalten zu werden: Das entspricht einem Bluff. Nur dann wäre es rational, mit einer Drohung die Eskalation überhaupt erst einzuleiten.

Nochmal unser Experiment: „Hin-und-Rück“

Im Lichte dieser Erkenntnisse spielen wir erneut „Hin-und-Rück“.



Aufgabe: Maximieren Sie Ihre Erträge bei diesem Spiel!
Wie gelingt das rational? für Spieler B? für Spieler A?

Sie haben nun Präzisierungen zur Rationalität und **Spielerfahrung**, vor allem wissen Sie jetzt, wie die anderen sich verhalten (haben). Versuchen Sie im zweiten Durchgang, Ihre Erträge zu maximieren!

Verhaltensökonomik [*behavioral economics*] untersucht menschliches Verhalten, speziell die Abweichung zwischen Empirie / Experiment und Theorie / Prognose. (`en.wikipedia.org/wiki/Behavioral_economics`)

Nochmal unser Experiment: „Hin-und-Rück“

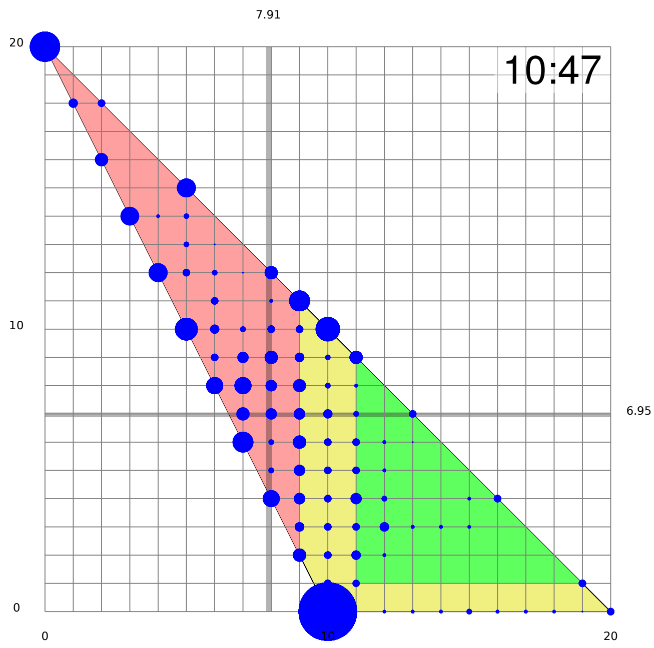
Dieses Experiment ist für alle Teilnehmer zunächst nur ein Spiel. Zugleich ist es auch ein **Messinstrument sozialer Interaktion**. Die empirischen Ergebnisse sind lehrreiche Messwerte: Manche Teilnehmer verhalten sich eher egoistisch, andere eher altruistisch.

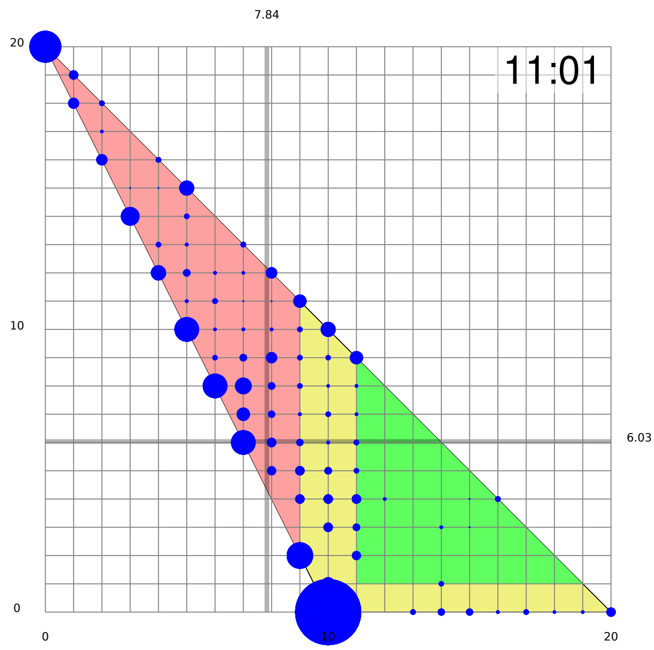
Was genau die Spielerpopulation tun wird, lässt sich kaum vorhersagen, sondern nur experimentell messen. Die Auswertung zeigt ein Abbild unserer (kleinen) Gesellschaft und misst das gegenseitige Vertrauen. Diese Information benötigen / schätzen rationale Spieler bei ihrer Wahl.

Kaum jemand spielt vollkommen rational, und das ist für alle vorteilhaft: Im Durchschnitt zahlt sich das Wagnis der Kooperation tatsächlich aus! Wir werden später für wiederholte Spiele erklären, wie sich kooperatives Verhalten langfristig begründen lässt, siehe Nash Folk Theorem K2E.

Hier jedoch wird das Spiel nur einmal gespielt, oder bei mehrfachem Spiel immer neue Spieler ausgelost. Die beobachtete Kooperation ist hier nicht rational. Sie beruht vermutlich auf begrenzter Rationalität sowie der Trägheit unserer Verhaltensmuster und sozialen Normen.

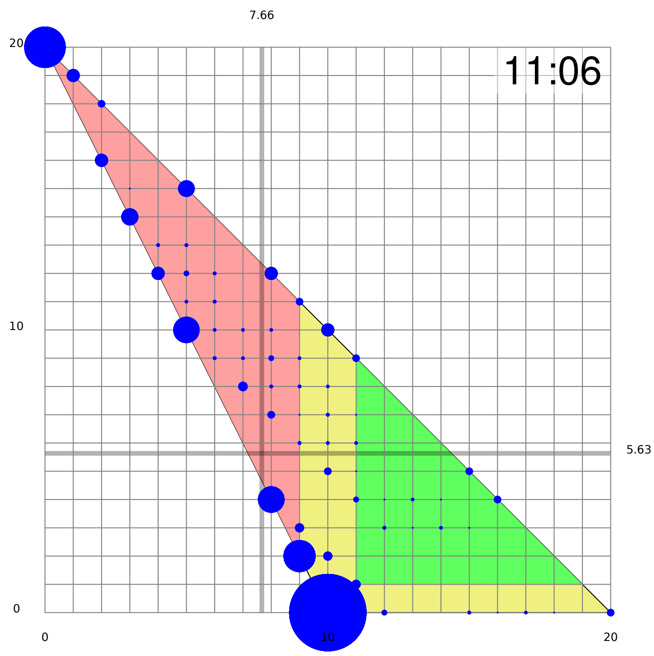
Unser Experiment „Hin-und-Rück“





Momentaufnahmen der Studentenpopulation vom 10. April 2018.
Die Graphiken zeigen alle Spielergebnisse für Spieler A und B.

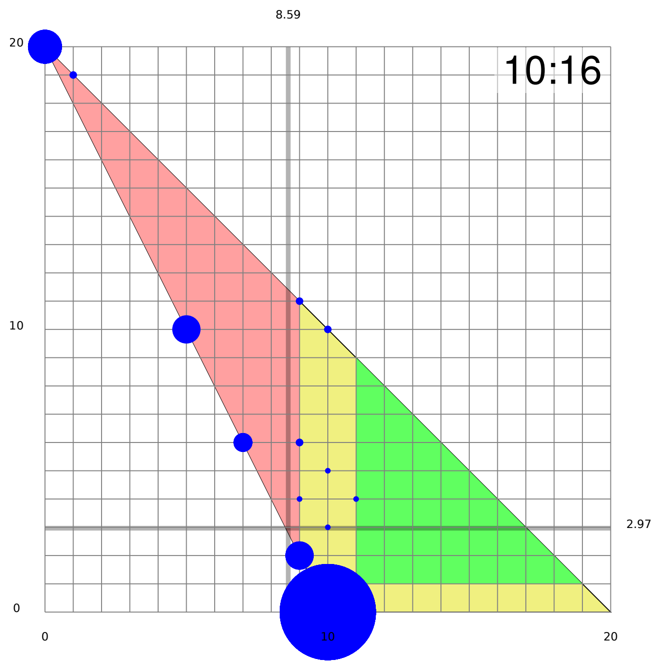
Unser Experiment „Hin-und-Rück“

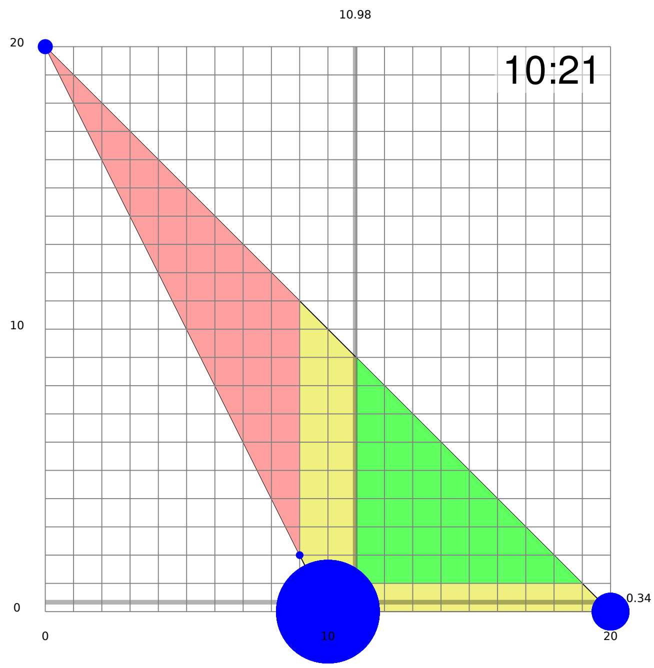


Die Graphiken zeigen deutlich eine Entwicklung, anfangs zaghaft, dann beschleunigt. Die Spieler erkennen schnell (durch empirische Erfahrung oder mathematische Analyse), dass sich Kooperation für B hier nicht lohnt. Im nächsten Schritt erkennen sie, dass sich Kooperation dann auch für A nicht lohnt. Das Spielverhalten durchläuft so eine Evolution und steuert auf ein Gleichgewicht zu.

Momentaufnahmen der Studentenpopulation vom 10. April 2018.
Die Graphiken zeigen alle Spielergebnisse für Spieler A und B.

Unser Experiment „Hin-und-Rück“





Momentaufnahmen der Studentenpopulation vom 24. April 2018.
Durch Erfahrung (und Vorlesung?) ändert sich das Spielverhalten.

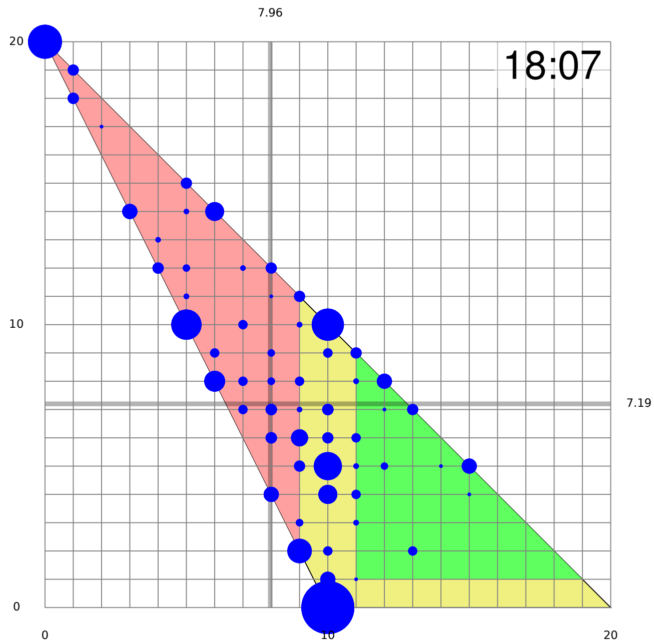
Unser Experiment „Hin-und-Rück“

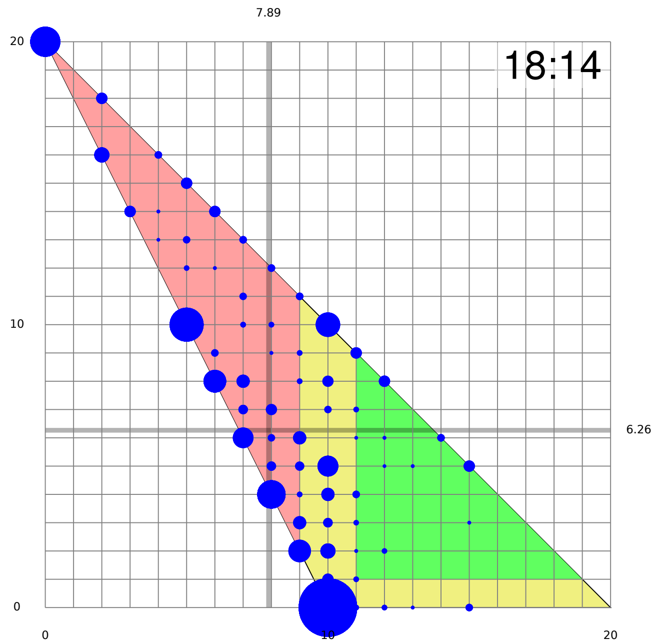
Die Daten wurden nicht unter kontrollierten Laborbedingungen erhoben, dennoch sind sie überaus interessant: Es ist unser eigenes Verhalten! Durch zunehmende praktische Erfahrung und theoretische Kenntnisse verbessert jede Spieler:in ihre individuelle Strategie. Insgesamt nehmen Egoist:innen zu und die Altruist:innen ab, und der Gesamtertrag sinkt!

Die trickreichen Regeln belohnen nicht Kooperation, sondern Egoismus. Dieses Spiel provoziert ein berühmtes Paradox: Jeder einzelne Spieler versucht rational, seinen Profit zu maximieren. Die Gesellschaft wird im Gesamtbild egoistischer, das gegenseitige Vertrauen sinkt, damit auch der Gesamtertrag. Lokale Maximierung führt in ein globales Minimum.

Dem einen oder der anderen wird dieses Ergebnis sehr missfallen, es mag sogar schockieren: Obwohl Kooperation möglich ist und zu beiderseitigem Nutzen wäre, werden die Spieler immer egoistischer. Das liegt daran, dass Egoismus belohnt und Altruismus bestraft wird. Wir werden später für wiederholte Spiele erklären, wie sich kooperatives Verhalten langfristig begründen lässt, siehe Nash Folk Theorem K2E.

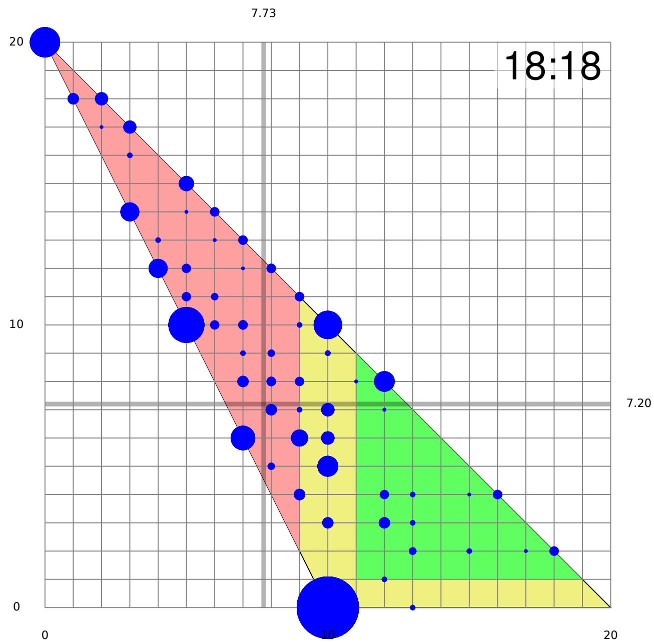
Unser Experiment „Hin-und-Rück“





Momentaufnahmen der Teilnehmerpopulation vom 08. Juli 2019.
Die Graphiken zeigen alle Spielergebnisse für Spieler A und B.

Unser Experiment „Hin-und-Rück“

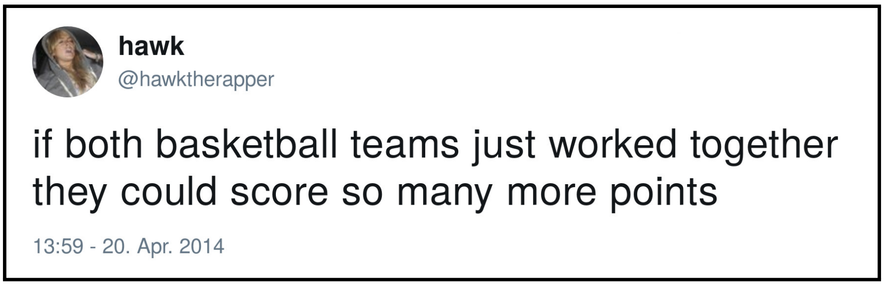


Der zweite Datensatz zeigt eine Abendveranstaltung mit Vortrag und Diskussion der Gruppe reason[Ing.] zum Thema Spieltheorie und Ethik (etwa 50 Anwesende, 40 Spieler). Nach zwei Testrunden wurde in der dritten um echtes Geld gespielt. Die so angekündigte Verschärfung hat das Spielverhalten kaum beeinflusst. Das Verhalten ist ähnlich wie oben, die Entwicklung deutlich langsamer.

Momentaufnahmen der Teilnehmerpopulation vom 08. Juli 2019.
Die Graphiken zeigen alle Spielergebnisse für Spieler A und B.

Ratio vs Moral?

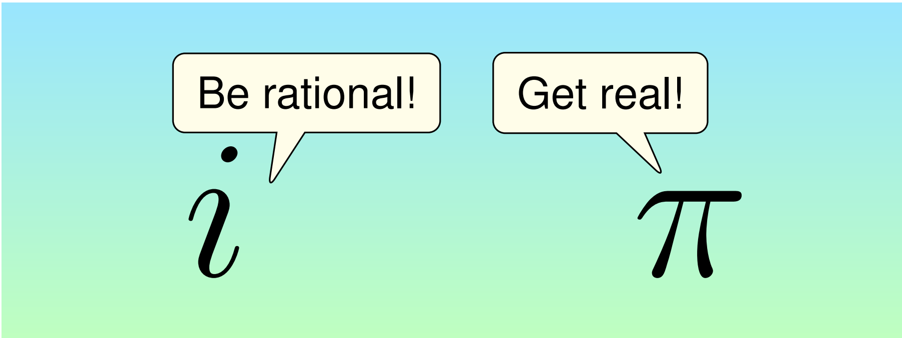
Kooperation ist vielleicht wünschenswert, aber nicht immer möglich.


hawk
@hawktherapper

if both basketball teams just worked together they could score so many more points

13:59 - 20. Apr. 2014

Rationalität ist vielleicht wünschenswert, aber nicht immer möglich.



Schnelles Denken, langsames Denken

Ist moralisches Verhalten naiv? Ist Nutzenmaximierung unmoralisch? Welche Sichtweise beschreibt das beobachtete Verhalten besser? Wer hat denn nun Recht: Instinkt oder Kalkül? Ratio oder Moral?

Beide! Am Anfang sehen wir das empfundene moralische Verhalten, auf lange Sicht setzt sich jedoch das rationale Verhalten durch.

Thinking, fast and slow von Daniel Kahneman, Wirtschaftsnobelpreis 2002, unterscheidet zwei verschiedene Arbeitsweisen unseres Gehirns:

1. Schnell, automatisch, immer aktiv, emotional, stereotyp, unbewusst
2. Langsam, anstrengend, selten aktiv, logisch, berechnend, bewusst

Ihre genetischen Instinkte, soziale Erziehung und eigene Erfahrung sind Ihre ersten und oft einzigen Ratgeber: Sie folgen Ihrem Bauchgefühl, da Sie keine genaue Information haben oder keine Zeit, sie auszuwerten.

Ihr Verstand braucht wesentlich länger, um zu einem Urteil zu kommen. Das lohnt sich, wenn Sie die Muße haben und das Ziel wichtig genug ist. In unserem Experiment sehen wir vermutlich genau diesen Übergang!

Theorie und Experiment

Das Standardmodell der Spieltheorie geht davon aus, dass alle Spieler rational sind. Dies nennt man auch **Homo oeconomicus** und meint damit allgemein einen rationalen Akteur oder Nutzenmaximierer.

Die Vorhersagen der Theorie kann man in Experimenten überprüfen: In einigen Experimenten stellt sich recht genau das prognostizierte Gleichgewicht ein (eventuell erst nach mehreren Wiederholungen), in anderen hingegen nicht (oder noch nicht, allzu langsame Konvergenz).

Es gibt dabei wie in allen Wissenschaften grundsätzlich zwei Arten von Experimenten: passiv-beobachtend und aktiv-kontrollierend.

Feldstudien untersuchen echte Daten aus realen Situationen (etwa Auktionen, Märkte, Verhandlungen). **Vorteile:** Echte Daten aus realen Situationen. Die Erhebung der Daten kann schwierig sein, sie wird vereinfacht, falls die Interaktion ohnehin online stattfindet. **Nachteile:** Die reale Situation ist oft kompliziert und die Struktur des Spiels nicht klar definiert. Viele Einflussgrößen können nicht kontrolliert werden; sie beeinflussen die Ergebnisse, sind aber unbekannt oder unzugänglich.

Theorie und Experiment

Laborexperimente lassen Versuchspersonen im Labor gegeneinander spielen. **Vorteile:** Das Spiel ist genau definiert und kontrolliert (Regeln, Kommunikation, Auszahlungen, Vorwissen, Framing, Randomisierung). Durch geschickt konstruierte Spiele können Fragestellungen gezielt untersucht und Hypothesen getestet werden. **Nachteile:** Die Situation ist künstlich, das beobachtete Verhalten nur eingeschränkt übertragbar. Meist wird nur um kleine Beträge gespielt, die Nutzenoptimierung ist dadurch weniger ausgeprägt, die Skalierung vermutlich problematisch.

Manchmal wollen Teilnehmer nur spielen (sic!), selbst experimentieren oder ihren Spaß haben, den Spielleiter beeindrucken oder vermuteten Erwartungen ent/widersprechen (wie Fairness, Rationalität, etc).

Trotz dieser Schwierigkeiten und methodischen Herausforderungen ist die experimentelle Spieltheorie überaus erfolgreich. Verhaltensökonomik [*behavioural economics*] ist für viele Unternehmen ein zentrales Thema: Wenn sich Kunden schon nicht rational verhalten, so will man dennoch vorhersagen können, wie sie sich verhalten: **predictable irrationality**.

Theorie und Experiment

„Dieser Zustand ist unbefriedigend.“, beklagte eine Studentin enttäuscht. Ja, sicher, wie immer ist die Wirklichkeit komplizierter als die Theorie. Ich sehe diese erste (schockierende) Einsicht als Erfolg: Wir haben den Begriff der Rationalität präzisiert und sogleich experimentell getestet. Wir haben in kurzer Zeit und mit wenig Aufwand bereits viel gelernt.

Rationale Spieler müssen die Irrationalität ihrer Mitspieler einschätzen. Selbst wenn sie selbst vollkommen rational sind, so wählen sie doch Ihre Strategie abhängig davon, ob sie gegen einen unfehlbaren Computer spielen oder eine bunt gemischte Gruppe Ihrer Mitmenschen, wie oben. Es geht hier also um Rationalität zweiter Stufe (im Sinne von A2A).

Ich bemühe mich in meinem Vortrag um eine ehrliche Darstellung, daher präsentiere ich zur Rationalität nicht nur Erklärungen und Anwendungen, sondern skizziere zugleich ihre Grenzen. Diese sind oft eng gesteckt.

Diese Dialektik der Un/Vernunft ist erfahrungsgemäß ein starker Impuls für viele Zuhörer. Mein improvisiertes Experiment dürfen interessierte Teilnehmer gerne verbessern: Das ist ein ehrenwertes, lohnendes Ziel!

Theorie und Experiment

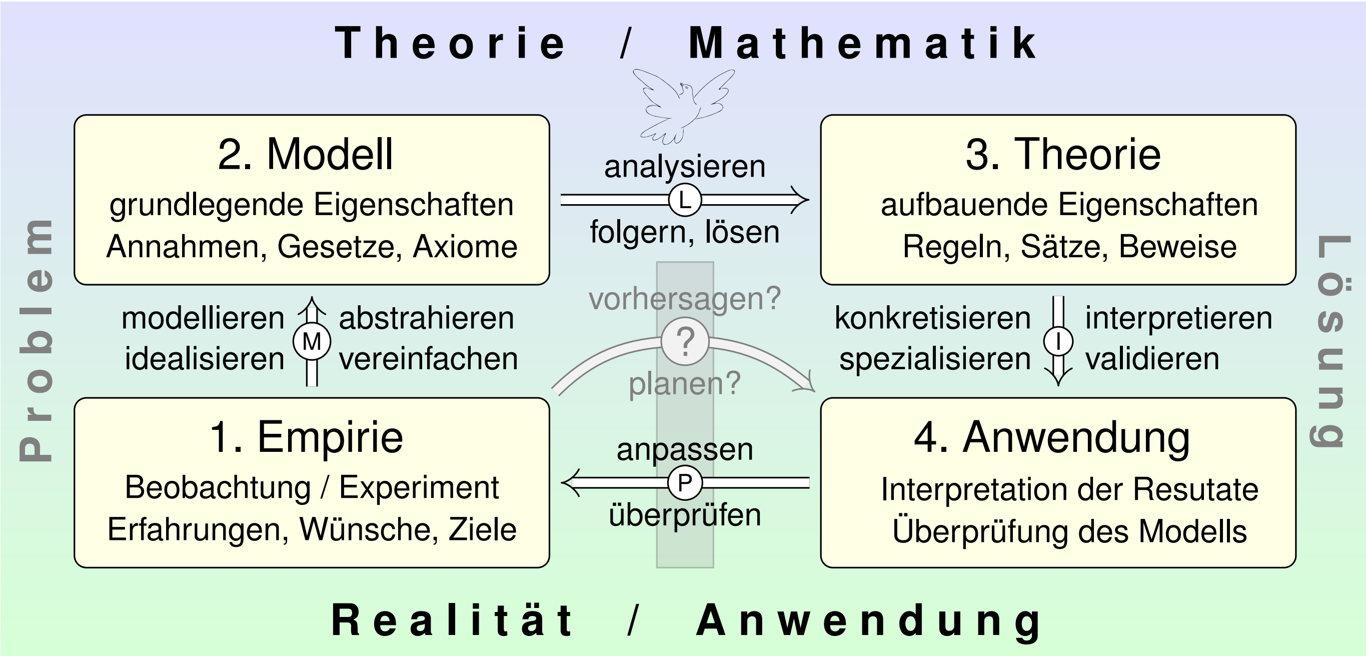
„Das ist unwissenschaftlich.“, kritisierte ein Student meinen Versuch. Ja, zugegeben, es ist eher lustiges Partyspiel als seriöses Experiment. Ich denke, es trifft einen wahren Kern; das ist zunächst nur eine These. Es dient als didaktische Illustration und eindrücklicher Anstoß, nicht als wissenschaftliche Dokumentation und Ergebnis. Sollen wir deshalb auf gemeinsames Spiel und persönliche Erfahrung verzichten? Keinesfalls!

„Der Begriff *Rationalität* wird hier zu eng und einseitig gefasst.“ Ja, auch das ist richtig. Viele Teilnehmer haben zur Rationalität unterschiedliches Vorwissen, Intuition oder Ansichten. Die Definition präzisiert den Begriff als bequeme Zusammenfassung. Das Wort selbst ist nur eine hilfreiche Abkürzung, es ist nur ein Platzhalter und ansonsten willkürlich ersetzbar.

Wichtig ist nicht das Wort, sondern seine Bedeutung: Die Definition präzisiert und fixiert den Sinn, den wir für das Folgende vereinbaren. Sie dürfen gerne anderer Meinung sein, doch zum Zwecke unserer Diskussion müssen wir den Dingen einen eindeutigen Namen geben, um darüber sprechen zu können und uns nicht ewig im Kreise zu drehen.

Wozu dient Mathematik?

Alles Leben ist Problemlösen. (Karl Popper)



Mathematik untersucht sowohl abstrakte Strukturen als auch konkrete Anwendungen. Dies sind keine Gegensätze, sondern sie ergänzen sich!

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant)

Wozu dient Mathematik?

Wir beginnen mit der **Empirie**, also konkreten **Beobachtungen** und praktischen **Erfahrungen**. Hieran erkennen wir erste **Probleme** und formulieren unsere **Ziele**: Wir wollen die vorliegenden Probleme lösen!

Wenn wir bereits eine mögliche Lösung vorliegen haben oder zumindest vermuten, dann können wir sie **überprüfen** und soweit nötig **anpassen**. (Tradition, Erfahrung, Ausbildung, Anleitung, Nachahmung, Erklärvideo)

Meist kennen wir jedoch noch gar keine Lösung. Wir könnten uns durch Versuch-und-Irrtum vortasten, doch blindes Herumprobieren kostet Zeit, oft dauert es zu lange, ist zu aufwändig, gefährlich oder gar unmöglich.

Besser wir gehen **planvoll** vor und suchen **systematisch** nach einer Lösung, oder gar nach allen Lösungen, um dann die beste auszuwählen.

Das ist der **Nutzen der Theorie**: Sie erweitert unseren Werkzeugkasten, wo bloßes Probieren nicht genügt. Theorie und Anwendung ergänzen sich: Proben sind weiterhin gut und richtig, doch erst die Theorie liefert neue Ansätze, die sich lohnen auszuprobieren. Die Trefferquote steigt.

Probieren geht über studieren? **Studieren erweitert probieren!**

Ist Spieltheorie deskriptiv oder normativ?

Modelle können **deskriptiv**, aber auch **normativ** eingesetzt werden. Deskriptiv: beschreibend (Kettenlinie), erklärend (Planetenbewegung), vorhersagend (Wetterprognose). Normativ: vorschreibend (Bauplan), planend (Raumsonde), gesetzgebend (Umwelt- und Klimaschutz).

Das Kiosk-Problem haben wir durch systematische Untersuchung aller Fälle gelöst. Bei drei Spielern erfordert dies $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ Fälle; hier sind Systematik und Sorgfalt unbedingt erforderlich, um keinen Fall zu vergessen oder falsch auszuwerten. Das ist mühsam, aber es lohnt sich!

Diese Genauigkeit ist typisch für wissenschaftliche Vorgehensweise. Logik und Systematik, Ehrlichkeit und Sorgfalt sind die grundlegenden Techniken der Mathematik — und jeder ernsthaften Untersuchung.

Dieses Anwendungsproblem ist vereinfacht, doch halbwegs realistisch. Die Analyse gibt einen klaren Ratschlag, gar eine Handlungsanweisung: Bei drei Lizenzen sollte der erste Platz 8 wählen. Das ist keineswegs offensichtlich, sogar eher überraschend. Hier ist die Theorie normativ. Entspricht dies den Beobachtungen? Hier kommt die Empirie ins Spiel!

Ist Spieltheorie deskriptiv oder normativ?

Spieltheorie kann nicht nur normativ, sondern auch deskriptiv genutzt werden, um beobachtetes Verhalten zu beschreiben und zu erklären. Hier ist unser Experiment „Hin-und-Rück“ lehrreich und überraschend!

Die Theorie untersucht wie immer zunächst das rationale Verhalten. $\mathscr{R}_1$: Spieler B schickt nichts zurück. $\mathscr{R}_2$: Spieler A schickt nichts hin. Das beobachtete Verhalten sieht jedoch ganz anders aus! Hierzu ist entscheidend, ehrliche und ausgeklügelte Experimente durchzuführen.

Wie ist die Abweichung zu erklären? Einerseits gehen die Spieler nicht streng rational vor, etwa weil die Zeit oder der Wille für eine genauere Analyse fehlt, oder weil Überzeugungen von Moral und Gerechtigkeit mitschwingen. Eine verbesserte Theorie sollte dies berücksichtigen!

Andererseits können wir das Experiment verbessern und erweitern. Durch wiederholtes Spielen gewinnen die Teilnehmer an Erfahrung: Probieren ergänzt studieren! Das beobachtete Verhalten nähert sich dann tatsächlich der theoretischen Vorhersage. Unsere Theorie macht also doch zutreffende Vorhersagen, aber auf etwas subtilere Weise.

Wo wird die Spieltheorie genutzt und angewendet?

Die Spieltheorie ist kaum achtzig Jahre alt, sie wächst rasant weiter und entfaltet einen großen Einfluss. Sie wird nahezu überall angewendet, zumeist interdisziplinär, wie unsere ersten Beispiele erahnen lassen.

Besonders naheliegend sind ökonomische Anwendungen:

- Management (Unternehmensstrategien, Optimierung, Anreize)
- Märkte (Konkurrenz, Marktdesign, In/Effizienz, De/Regulierung)
- Auktionen (effiziente Zuteilung von Ressourcen, faire Teilung)
- Kontrollinstanzen (Wettbewerbsschutz, Verbraucherschutz)

Der Übergang zur Politik ist dabei fließend:

- Wirtschaftspolitik (Mechanismen, Kartellgesetze, Oligopoltheorie)
- Wettbewerbspolitik (internationale Handelsbeziehungen, Zölle)
- Geldpolitik (Inflation, Stabilität, Regulation, Finanzkrisen)
- Sozialpolitik (Steuern, Anreize, Ausgleich, Wohlfahrt)

Wo wird die Spieltheorie genutzt und angewendet?

Die Spieltheorie betrifft nahezu alle Bereiche der Politik. . .

- Kollektive Entscheidungen (Wahlsysteme, Abstimmungen)
- Gesetzgebung (kollektives Verhalten, Anreize und Verbote)
- Verhandlungen und Verträge, internationale Beziehungen
- Umweltschutz, ABC-Waffen-Verbot, Abrüstung, Kontrollen
- Internationale Konventionen, Menschenrechte, Kriege

. . . und des Zusammenlebens in unserer Gesellschaft:

- Experimentelle Wirtschaftsforschung (Verhaltensökonomik)
- Soziologie, Psychologie (Interaktion, Kommunikation, Social Media)
- Philosophie (Ir/Rationalität, Moral, Freiheit, Gesellschaftsvertrag)
- Pädagogik (Interaktion, Rahmen, Erziehung, Lerntheorie)
- Justiz (gesellschaftliche Normen, Strafgesetze)

Gesellschaftliche Interaktion ist angewandte Spieltheorie! Entweder direkt: Wie maximiere ich meinen Vorteil? (Optimierung) Oder indirekt: Welche Regeln führen zu welchem Verhalten? (Mechanismendesign)

Wo wird die Spieltheorie genutzt und angewendet?

Die Spieltheorie betrifft ebenso viele Grundlagenwissenschaften:

- Biologie und Medizin (Ko/Evolution von Genen, auch Memen)
- Systemtheorie (Interaktion, Selbstorganisation, Musterbildung)
- Quantenspiele (Spiele auf quantenmechanischen Trägern)
- Komplexitätstheorie (Lösung von Spielen, Gleichgewichte)
- Logik (Mengenlehre, Determiniertheit, Beweistheorie)

Besonders fruchtbar ist die Wechselwirkung mit der Informatik:

- Protokolle für strategische Agenten (Netzwerke, Sicherheit)
- Peer-to-Peer Systeme (Reputation, Feedback, Review)
- Kryptowährungen (gegenseitige Kontrolle, Incentives)
- Data Science, Künstliche Intelligenz, Machine Learning
- Distributed AI, Multiagent-Systems, Robotics, uvm.

Spieltheorie dient als theoretische Grundlage und praktisches Werkzeug, sowohl deskriptiv-erklärend als auch konstruktiv-angewandt.

Wo wird die Spieltheorie genutzt und angewendet?

Die Spieltheorie untersucht Situationen von Konflikt und Kooperation. Sie hilft, strategische Entscheidungssituationen besser zu verstehen.

Sie ist damit extrem vielseitig anwendbar, denn fast alles ist ein Spiel, oder genauer gesagt: Fast alles lässt sich als ein Spiel betrachten.

Sobald mehrere Entscheider (Individuen, Akteure, Spieler) gemeinsam ein Ergebnis erzielen, ist dies ein Anwendungsgebiet der Spieltheorie.

Es ist bemerkenswert, dass sich bei dieser enormen Spannweite der Anwendungen dennoch eine gemeinsame Theorie entwickeln lässt.

Abstraktion ist die Kunst, Wesentliches von Unwesentlichem zu trennen. Denkökonomie: Daten ändern sich, doch Methoden bleiben bestehen.

Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung. Sie ist schön und gut: ästhetische Kunst und nützliches Handwerk.

Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen! Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

Literatur: Einführungen

Es gibt viele gute Lehrbücher zur Spieltheorie. Die ersten bieten eine Einführung und motivieren, illustrieren, erläutern ausführlich. Weitere vertiefen anspruchsvolle Begriffe und mathematische Techniken. Die richtige Balance ist schwer zu finden und hängt vor allem von der Leserin ab!

Zur Orientierung und als Anregung habe ich für Sie einige empfehlenswerte Bücher ausgewählt. Meine Auswahl versucht den überaus vielfältigen Aspekten der Spieltheorie gerecht zu werden und durch Kommentare einzuordnen. Vielleicht kann Sie dies zum Schmökern anregen.

Ken Binmore:
Fun and Games. Heath & Co 1992

Für Freude am Lesen, leicht, klar, mit schönen Illustrationen, dagegen kaum Beweise. Geduld und Beharrlichkeit werden belohnt durch packende Geschichten und reichen Beispielfundus.

Robert Gibbons:
A Primer in Game Theory. Prentice Hall 1992

Knappe und intuitive doch umfassende Einführung, wenig Formalismus und wenig Vertiefung.

Avinash Dixit, Susan Skeath, David Reiley:
Games of Strategy. Norton & Co 2014

Eine freundliche und ausführliche Einführung, wortreich und formelarm.

Literatur: Einführungen

Die folgenden Einführungen sind wesentlich umfangfreicher und ausführlicher. Die Darstellung führt von wortreich-formelarm (für ein allgemeines Publikum und WiWi-Einführungen) hin zur effizienten Nutzung des mathematischen Formalismus (wie im Mathe- und Informatikstudium). Beides hat seine Vorteile, je nach Publikum und Zielsetzung. Dosieren Sie selbst!

David M. Kreps:
A Course in Microeconomic Theory. Princeton University Press 1990

Eine gut motivierte Einführung, wenig Formalismus, dafür sehr ausführliche Erklärungen.

Martin J. Osborne:
An introduction to Game Theory. Oxford University Press 2009

Gut motivierte Einführung, diskutiert viele Beispiele, versucht Präzision mit wenig Mathematik.

Yoav Shoham, Kevin Leyton-Brown: *Multiagent systems: algorithmic, game-theoretic and logical foundation.* Cambridge University Press 2009

Eine Einführung zur Spieltheorie strategischer Agenten: Die Spieltheorie gehört nicht exklusiv den Wirtschaftswissenschaften, in den letzten Jahren boomt sie zunehmend in der Informatik. Die explosionsartige Entwicklung des Internets in den 1990ern erforderte spieltheoretische Methoden in der Informatik und startete eine anhaltende, höchst erfolgreiche Entwicklung.

Literatur: Grundlagen und Vertiefungen

Zielgruppe der folgenden Lehrwerke sind Studierende nach einer ersten Einführung, die ein solides mathematisches Verständnis mitbringen und dies in der Spieltheorie nutzen wollen. Die Darstellung wird dadurch effizienter und dichter: mehr Formeln, weniger Worte.

Steven Tadelis:
Game Theory, an Introduction. Princeton University Press 2013

Ein sehr gut strukturiertes Buch, sorgfältig geschrieben und schön zu lesen. Es eignet sich zum Einstieg und zum Selbststudium, liefert zugleich die mathematische Präzision zur Vertiefung.

Drew Fudenberg, Jean Tirole:
Game Theory. MIT Press 1991

Dieses Lehrbuch bietet eine gute Mischung aus motivierender Erläuterung und mathematischer Ausführung, Fallbeispielen und Übungsaufgaben. Es dient als Referenz und zur Vertiefung.

Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston, Jerry R. Green:
Microeconomic Theory. Oxford University Press 1995

Eine 1000seitige Bibel der Mikroökonomik. Die Theorie wird gründlich und formal dargestellt; dadurch eignet sich das Werk bestens für einen zweiten Durchgang und als Nachschlagewerk. Kapitel 7–9 und 21–23 behandeln Spieltheorie, nahtlos eingebettet in die Mikroökonomik.

Literatur: Grundlagen und Vertiefungen

Roger B. Myerson:
Game Theory, Analysis of Conflict. Harvard University Press 1997

Eine schön geschriebene Einführung, von den mathematischen Grundlagen der Nutzentheorie bis zu fortgeschrittenen Konzepten der Spielteorie. Verbindet Motivation mit Sätzen und Beweisen.

Martin J. Osborne, Ariel Rubinstein:
A Course in Game Theory. MIT Press 1994

Viele Beispiele, bemüht um Gleichgewicht zwischen Intuition und Formalismus. Das Buch fordert Selbständigkeit: Viele Anwendungen und Ausführungen sind als Übungen formuliert.

Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy:
Winning Ways for Your Mathematical Plays. A K Peters 2001–2004
Gewinnen: Strategien für mathematische Spiele. Vieweg 1985–1986

John H. Conway: *On Numbers and Games.* A K Peters 2000

Aaron N. Siegel: *Combinatorial Game Theory.* AMS 2013

Die kombinatorische Spieltheorie ist ein riesiges, faszinierendes Gebiet, das wir hier nur streifen. Wer in diese Richtung abbiegt, findet sein Glück in den epischen Klassikern WW und ONAG. Den aktuellen Stand der Forschung in rigoroser Darstellung bietet Siegels CGT.

Literatur: Klassiker, alt und neu

John von Neumann, Oskar Morgenstern:
Theory of Games and Economic Behavior. Princeton Univ. Press 1944

Dieses Buch begründete die moderne Spieltheorie und ihre mathematische Untersuchung. Es ist immer noch interessant, aber nicht leicht zu lesen und daher nicht zum Einstieg empfohlen.

R. Duncan Luce, Howard Raiffa:
Games and Decisions. Wiley & Sons 1957, Dover Publications 2012

Eine sehr schöne und umsichtige Darstellung der Grundlagen aus den Anfängen der Spieltheorie, wunderbar geschrieben, wenig formal doch kristallklar. Auch heute noch hervorragend lesbar.

Thomas C. Schelling:
The Strategy of Conflict. Harvard University Press 1960

Der spätere Wirtschaftsnobelpreisträger des Jahres 2005 erklärt hier die Grundlagen für (nuklear-)strategisches Verhalten. Sein Buch zählt zu den einflussreichsten des 20. Jahrhunderts.

Daniel Kahneman:
Thinking, Fast and Slow. Farrar, Straus and Giroux 2011

Der Wirtschaftsnobelpreisträger des Jahres 2002 und Mitbegründer der Verhaltensökonomik erklärt seine psychologischen Arbeiten zu Heuristiken und Verzerrungen (*heuristics and biases*).

Literatur: Nachschlagewerke

Die Spieltheorie ist relativ jung, doch extrem vielseitig und interdisziplinär. Ihre Anwendungen und Vertiefungen entwickeln sich explosionsartig. Nachschlagewerke und Handbücher sind daher unverzichtbar für den Überblick. Wenn Sie sich schon etwas auskennen und nach neuen Ideen stöbern wollen, dann kann ich gut geschriebene Übersichtsartikel nur wärmstens empfehlen.

Robert J. Aumann, Sergiu Hart (eds):
Handbook of Game Theory 1–3. North Holland 1992–2002

Kenneth J. Arrow, Michael D. Intriligator (eds):
Handbook of Mathematical Economics 1–4. North Holland 1981–1991

Schließlich liegt der Schritt zur Informatik, Künstlichen Intelligenz und Maschinellem Lernen nahe: Jeder strategische Agent versucht sein Verhalten zu optimieren, also spielend zu lernen. Dieser Ansatz hat in den letzten Jahren zu spektakulären Erfolgen geführt und ist inzwischen in unserem Alltag angekommen. Dieser Trend wird sich in den nächsten Jahren weiter verstärken.

Noam Nisan, Tim Roughgarden, Éva Tardos, Vijay Vazirani (eds):
Algorithmic Game Theory. Cambridge University Press 2007

Stuart Russell, Peter Norvig: *Artificial Intelligence:
A Modern Approach.* Addison Wesley (3rd ed.) 2016

Wie lernen Sie erfolgreich Spieltheorie?

Jede ernsthafte Beschäftigung erfordert zunächst Interesse, Neugier, Offenheit für Probleme und sodann Kreativität, Sorgfalt, Hartnäckigkeit bei deren Lösung. Investieren Sie jede Woche die dafür nötige Zeit.

Arbeiten Sie jede Vorlesung nach. Lesen Sie dazu auch Bücher. Lernen und diskutieren Sie in Gruppen. Und wie immer gilt: Üben! Üben! Üben!

Von Anfang an präsentiere ich zahlreiche Bei-Spiele zur Anschauung; sie sollen zunächst motivieren, illustrieren und als Ausblick skizzieren, wie umfassend die Spieltheorie und ihre Anwendungen sein können.

Die mathematischen Begriffe und Methoden sind zunächst elementar, die ersten Schritte sind bereits mit guten Schulkenntnissen machbar. Wir bauen sie in den folgenden Kapitel schrittweise zu einer Theorie aus, und verwenden dabei zunehmend feinere Werkzeuge der Mathematik.

Wichtig und unverzichtbar ist daher, dass Sie das ganze Semester am Ball bleiben und wöchentlich die Vorlesung und die Übungen bearbeiten. Nur so können Sie Ihr Wissen erwerben und Ihr Können verfestigen, um in jeder Folgewoche darauf aufzubauen. Anders geht es nicht.

Wie lernen Sie erfolgreich Spieltheorie?

Diese Vorlesung Spieltheorie fördert Ihr kontinuierliches Mitdenken: Viele der Bei-Spiele sind so aufeinander aufgebaut, dass sie uns in den folgenden Kapiteln als hilfreiche Leitbilder und Prüfsteine dienen.

Die Phänomene sind zwar allesamt einfach, doch vielschichtig genug, um verschiedene Betrachtungen, Modellierungen und Verfeinerungen zuzulassen: Rationalität, dominante Strategien, Nash–Gleichgewichte, zeitlich-dynamische Struktur, teilspielperfekte Gleichgewichte, usw.

Die Wirklichkeit ist komplizierter als sie auf den ersten Blick scheint. Gerade deshalb lohnen sich mathematische Präzision und Sorgfalt. Das spieltheoretische Modell dient als Grundlage. Selbst wo es versagt, ist es der Maßstab für die Abweichung von Prognose und Beobachtung.

Erfahrungsgemäß provozieren schon erste einfache Versuche einer spieltheoretischen Modellierung lebhafte Diskussionen der Teilnehmer. Diese Auseinandersetzung führt häufig zu lehrreichem Widerspruch und im weiteren Verlauf dann zu einem besseren Verständnis.

Das ist gut und richtig so: Ihr Engagement ist wesentlich!

Kapitel B

Rückwärtsinduktion nach Zermelo

Verstehen kann man das Leben nur rückwärts;
leben muss man es aber vorwärts.
Søren Kierkegaard (1813–1855)

Gespielt wird vorwärts, optimiert wird rückwärts.
frei nach Ernst Zermelo (1871–1953)

Inhalt dieses Kapitels B

Ernst Zermelo (1871–1953)

B003
Hintergrund

Der Mathematiker Ernst Zermelo ist berühmt für seine Beiträge zur Mengenlehre, die Zermelo–Fraenkel–Axiome und insbesondere die Formulierung des Auswahlaxioms (1904).

Er studierte Mathematik, Physik und Philosophie in Berlin, Halle und Freiburg, promovierte 1894 in Berlin bei H.A. Schwarz zur Variationsrechnung und war Assistent von Max Planck.

Ab 1897 habilitierte Zermelo in Göttingen, wurde dort 1905 Professor, ab 1910 in Zürich. Aufgrund von Gesundheitsproblemen gab er schon 1916 seine Professur in Zürich auf.

Von 1926–1935 und 1946–1953 war Zermelo Honorarprofessor an der Universität Freiburg und beschäftigte sich mit angewandter Mathematik, Analysis und Mengenlehre. Er musste diese Stelle 1935 aufgeben, da er sich beharrlich weigerte, seine Vorlesungen mit Hitlergruß zu eröffnen, und von seinem Mathematikkollegen Gustav Doetsch denunziert wurde.

Ernst Zermelo (1871–1953)

B004
Hintergrund

Betrand Russel lud Zermelo ein, 1912 in Cambridge auf dem fünften Internationalen Mathematik-Kongress über Mengenlehre vorzutragen. Zermelo nahm die Einladung an mit einem Vortrag über die Theorie des Schachspiels, auf Drängen Russels einem zweiten über Mengenlehre.

E. Zermelo: *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels.* Proceedings of the Fifth Congress of Mathematics, Vol. II, Cambridge 1913, 501–504. Gesammelte Werke I, 260–273.

H.-D. Ebbinghaus: *Ernst Zermelo: An Approach to His Life and Work.* Springer 2015.

Zermelo bewies, dass jedes endliche Spiel (wie Schach) determiniert ist: Entweder besitzt Weiß eine Gewinnstrategie, oder Schwarz, oder jeder Spieler kann ein Unentschieden erzwingen. Dieses Ergebnis gilt als (ein) Startpunkt der mathematischen Spieltheorie. Zermelos genial-einfache **Rückwärtsinduktion** wurde auf zahlreiche Spiele übertragen und so zu einem Universalwerkzeug der Spieltheorie ausgebaut. Damit beginnen wir in diesem Kapitel; sie wird uns immer wieder gute Dienste leisten.

Historische Entwicklung

Ich folge hier der Tradition, Zermelo die Idee der Rückwärtsinduktion zuzuschreiben. Die historische Entwicklung dieser sehr allgemeinen Methode und auch der sonderbaren Bezeichnung ist kompliziert und verschlungen, daher erlaube ich mir diese Freiheit der Vereinfachung.

Eine detaillierte historische Untersuchung finden Sie in dem Artikel von U. Schwalbe, P. Walker: *Zermelo and the Early History of Game Theory*, Games and Economic Behavior 34 (2001) 123–137. Ich skizziere im Folgenden ganz grob nur einige Stichpunkte zur Orientierung.

Ernst Zermelo hat 1912 die Frage formuliert und die überraschend einfache Antwort gefunden, doch genau genommen hat er seinen Beweis nicht durch Rückwärtsinduktion geführt. Sein Artikel von 1913 enthält die entscheidende Idee, nicht jedoch die formale Ausführung.

Zermelos Arbeit hat weitere Untersuchungen stimuliert, darunter auch solche in der Mengenlehre, die Zermelo hier als Werkzeug nutzte.
In diesem Sinne hat sich die Beziehung als sehr fruchtbar erwiesen, auch wenn dies ursprünglich nicht Zermelos Hauptaugenmerk war.

Historische Entwicklung

Dénes König beweist 1927 folgendes Lemma: Seien $E_0, E_1, E_2, \dots$ endliche, nicht-leere Mengen und darauf R eine Relation, sodass zu jedem $y \in E_{n+1}$ ein $x \in E_n$ mit $(x, y) \in R$ existiert. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $x_n \in E_n$ und $(x_n, x_{n+1}) \in R$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Königs Lemma findet sich in perfektionierter Form in seinem Buch *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (1936). Es lautet:
Sei G ein zusammenhängender Graph, lokal-endlich doch unendlich. Darin existiert ein unendlicher Weg, der keine Ecke zweimal besucht.

Ausgehend von diesem Ergebnis greift König die Frage von Zermelo auf und führt den Beweis mit den Werkzeugen der Mengenlehre aus. Königs Lemma ist ein grundlegendes Werkzeug in der Graphentheorie und spielt eine wichtige Rolle in der Logik und Berechenbarkeitstheorie.

Der Begriff „Rückwärtsinduktion“ und die explizite Methode findet sich zuerst 1928 bei László Kalmár, *On the Theory of Abstract Games*.
Wir werden diese Methode präzise formulieren, elegant beweisen und in zahlreichen Anwendungen erfolgreich nutzen.

Vorgehensweise

Um den extrem weiten Rahmen dynamischer Spiele abzustecken, skizziere ich zunächst informell die Analogie zu (Computer)Spielen. Diese dynamischen Spiele sind bei genauem Hinsehen vollständig formalisiert, denn sie liegen schließlich als Computerprogramm vor.

Darauf aufbauend formalisieren wir dynamische Spiele durch Graphen aus Ecken / Positionen / Zuständen und Kanten / Zügen / Aktionen. Graphen sind ein allgegenwärtiges Konzept, sie begegnen uns überall im Alltag, der Mathematik, der Informatik und auch der Spieltheorie.

Es lohnt sich daher, diese Struktur breit und gründlich anzulegen. Damit können wir Spiele und Strategien präzise und einfach erklären. Zusammen mit Auszahlungen formulieren und lösen wir unsere ersten Probleme zur Optimierung als Markov–Entscheidungsprozess [MDP].

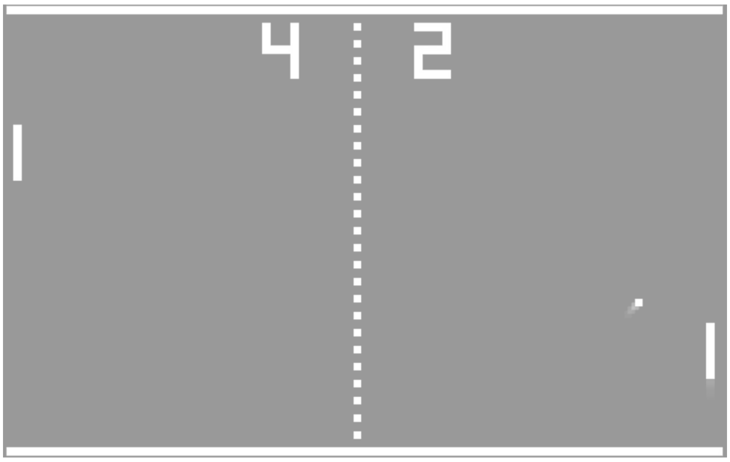
Vorgehensweise

Für die Berechnung durch Rückwärtsinduktion setzen wir voraus, dass unser Spielgraph keinen unendlich langen Weg $x_0 \to x_1 \to \dots$ enthält. Damit können wir rekursiv vorgehen, von den terminalen Zuständen rückwärts zu jedem beliebigen aktiven Zustand.

Nach diesen Motivationen und Illustrationen und ersten Definitionen widmen wir uns im nächsten Kapitel den kombinatorischen Spielen. Zu ihrer Lösung entwickeln wir erste Algorithmen, möglichst effiziente. Hier ist der Sprague–Grundy–Satz ein wirksames Universalwerkzeug.

In den darauf folgenden Kapitel werden wir einzelne Aspekte genauer untersuchen und das Mosaik der Spieltheorie kunstvoll erweitern. Die dabei verwendeten Modelle werden schrittweise verallgemeinert und verfeinert, sodass wir reale Situationen besser modellieren können.

Dynamische Spiele und strategische Interaktion / Konkurrenz



Pong
(Atari 1972)
zwei Spieler
deterministisch

Breakout
(Atari 1976)
ein Spieler
probabilistisch

Dynamische Spiele und strategische Interaktion / Konkurrenz

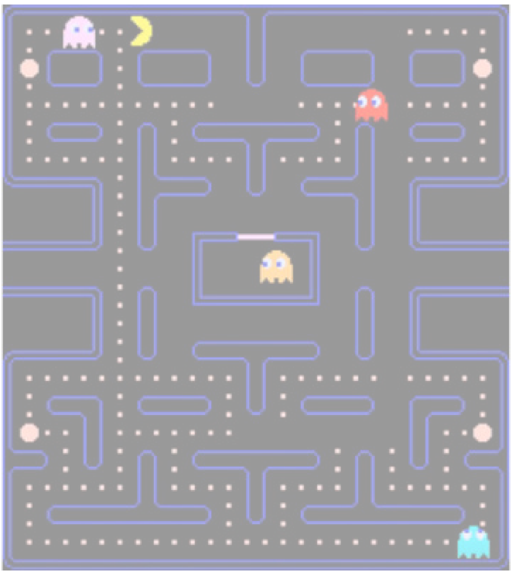
Das Spiel **Pong** hatte technisch bedingt ein minimalistisches Design. Selbst nach Jahrzehnten bereitet es Spielspaß. (Variante: Bier-Pong?)

Fun fact: Der Pong-Automat basierte nicht auf einem programmierten Prozessor, sondern auf einem festverdrahteten Schaltkreis, der teilweise analog arbeitete. Er war in diesem Sinne kein Computer. Pong genießt heute noch Kultstatus: Auf der Consumer Electronics Show (CES 2019) konnte man dank Kickstarter einen **analogen Pong-Tisch** bewundern.

Die **goldene Ära der Arcade-Spiele** von etwa 1978 bis 1983 begann mit Klassikern wie Space Invaders (1978) über Pac-Man (1980) bis zu Galaga (1981) und Donkey Kong (1981). Integrierte Schaltkreise und Mikroprozessoren eröffneten den Spielen weit größere Komplexität.

Die Produktionskosten sanken, die Technologie entwickelte sich rasant und erlaubte bald ansprechende Graphik und Sound. Dennoch waren die technischen Möglichkeiten jedes Spiels jeweils sehr eng gesteckt. Der Erfolg beruhte auf gutem Gameplay: simpel doch unterhaltsam. Dieser Fokus erklärt, warum viele Spiele heute noch Spaß machen.

Dynamische Systeme und optimale Steuerung / Kybernetik



Pac-Man
(Namco / Midway 1980)
ein Spieler
deterministisch

Supertux
(Bill Kendrick et al)
ein Spieler
deterministisch

Dynamische Systeme und optimale Steuerung / Kybernetik

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall eines einzigen Spielers. Die Spielerin, Alice, kennt die Regeln und den Aufbau des Spiels und wählt ihre Aktionen mit dem Ziel, die Gesamtauszahlung zu maximieren. Dies definiert ein Problem der Steuerung (Kybernetik, Kontrolltheorie).

Während des Spiels hat Alice vollständige Information über den Zustand. Die Ausführung ihrer Strategie erfordert vor allem / nur Geschicklichkeit. Nutzt der Computergegner (AI) auch Zufallszüge, so muss Alice jeweils die aktuellen Informationen auswerten und geeignet darauf reagieren.

Je nach möglichen Aktionen, Zufall und Belohnungen ergibt sich ein dynamisches System [*dynamical system*], Markov–Prozess [*Markov process*], Markov–Belohnungsprozess [*Markov reward process*, MRP] oder Markov–Entscheidungsprozess [*Markov decision process*, MDP]: Dynamische Programmierung [DP] und Maschinelles Lernen [ML].

Zur Vereinfachung verlaufe das Spiel zeitdiskret, gemessen durch $t \in \mathbb{N}$. Der kontinuierliche Fall $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist ebenso interessant, aber technisch aufwändiger, und nutzt (stochastische) Differentialgleichungen.

Dynamische Systeme und optimale Steuerung / Kybernetik

Dynamisches System ohne Steuerung: *Markov reward process* (MRP)


Alice

Info x_t ←

kein Einfluss →

Belohnung $r(x_t)$ ←

Umwelt im Zustand x_t

Entwicklung $x_{t+1} = \tau(x_t)$

Ein dynamisches System ist eine Abbildung $\tau : X \to X$, allgemeiner $\tau : X \supset X^\circ \to X$ mit aktiven Zuständen X° und terminalen $\partial X = X \smallsetminus X^\circ$.

Dynamisches System mit Steuerung: *Markov decision process* (MDP)


Alice

Info x_t ←

Aktion a_t →

Belohnung $r(x_t, a_t)$ ←

Umwelt im Zustand x_t

Entwicklung $x_{t+1} = \tau(x_t, a_t)$

Alice wählt zum Zustand $x_t \in X$ ihre Aktion $a_t \in A_{x_t}$, beeinflusst so die Entwicklung $x_{t+1} = \tau(x_t, a_t)$ des Systems und erhält dementsprechend ihre Belohnung $r(x_t, a_t)$.

Alice will ihren Gesamtnutzen $u = (1-\delta)\sum_t \delta^t r(x_t, a_t)$ maximieren!

Dynamische Systeme und optimale Steuerung / Kybernetik

Im ersten Szenario beobachtet / profitiert die Spielerin Alice nur passiv. Mögliche Beispiele: Glückspiel (mit Dauerlos, keine Entscheidung), Sportwette (auf Lieblingsverein), Aktienmarkt (mit festem Portfolio).

Trajektorie $w = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ mit $x_{t+1} = \tau(x_t)$, eventuell für $n \to \infty$. Auszahlung $u(w) = (1-\delta)\sum_{t=0}^{n-1} \delta^t r(x_t)$ mit Diskontfaktor $\delta \in [0,1[$. Zu absoluter Konvergenz dieser Reihe genügt r beschränkt und $\delta < 1$. Für festes n und $\delta \nearrow 1$ wird dies zum arithmetischen Mittel. (Übung!)

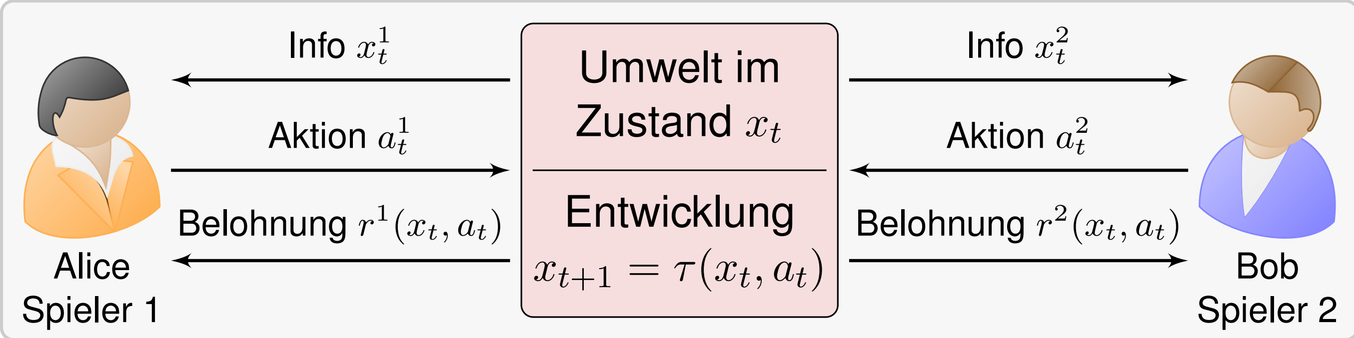
Im zweiten Szenario kann Alice Aktionen wählen und Einfluss nehmen. Dadurch wird die gesamte Situation viel komplizierter und interessanter. Die Optimierung ist Gegenstand der Kybernetik: die Kunst des Steuerns.

Zur Trajektorie $w = (x_0, a_0, x_1, a_1, \dots, a_{n-1}, x_n)$ mit $x_{t+1} = \tau(x_t, a_t)$ ist die kumulierte diskontierte Auszahlung $u(w) = (1-\delta)\sum_{t=0}^{n-1} \delta^t r(x_t, a_t)$. Die Spielerin möchte ihre Gesamtauszahlung $u(w)$ maximieren!

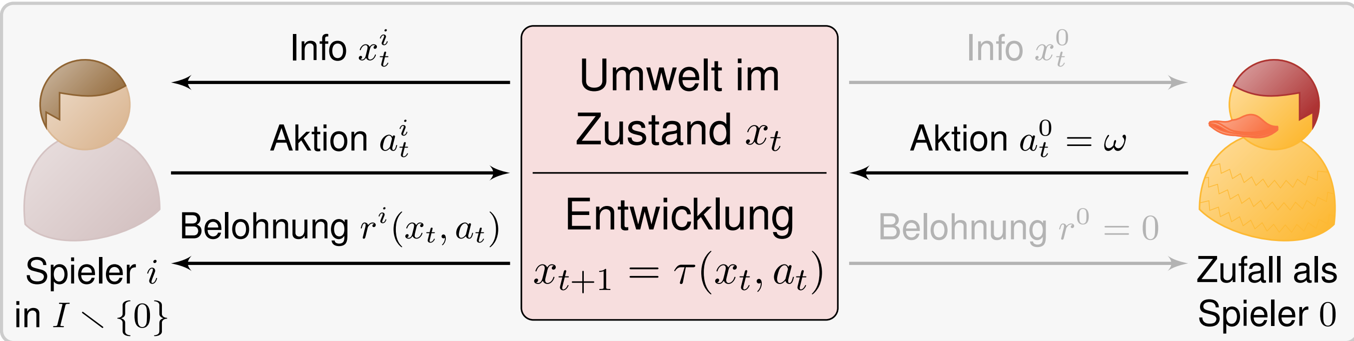
Um solche Aufgaben zu beschreiben und mögliche Lösungen zu finden, entwickeln wir in den folgenden Kapiteln ausreichend umfassende Modelle für Zustände, Aktionen, Transitionen und Belohnungen.

Dynamische Spiele und strategische Interaktion / Konkurrenz

Dynamisches System mit Steuerung durch zwei Spieler: Markov–Spiel



Steuerung durch mehrere Spieler und Zufall: Markov–Spiel (MMDP)



Jeder Spieler will seinen individuellen Gesamtnutzen maximieren.

Dynamische Spiele und strategische Interaktion / Konkurrenz

Die ersten beiden Szenarien zeigen bisher nur eine einzige Spielerin. Im dritten Szenario nehmen zwei Spieler Einfluss auf das Geschehen. Es entsteht Interaktion, eventuell Kooperationen oder auch Konflikte. Jeder möchte dabei seinen individuellen Gesamtnutzen maximieren.

Zum Zeitpunkt t befindet sich das Spiel / die Umwelt im Zustand x_t. Spieler i erhält hierzu die (eventuell nur partielle) Information x_t^i. Daraufhin wählt er seine Aktion a_t^i, zusammengefasst $a_t = (a_t^i)_{i \in I}$, und das Spiel geht über in den neuen Zustand $x_{t+1} = \tau(x_t, a_t)$.

Zur Trajektorie $w = (x_0, a_0, x_1, a_1, \dots, a_{n-1}, x_n)$ mit $x_{t+1} = \tau(x_t, a_t)$ ist die kumulierte diskontierte Auszahlung $u(w) = (1-\delta) \sum_{t=0}^{n-1} \delta^t r(x_t, a_t)$. Jeder Spieler will seinen individuellen Gesamtnutzen $u^i(w)$ maximieren.

Im vierten Szenario berücksichtigen wir zudem den Zufall als Spieler 0, der seine Aktion a_t^0 aus einem Lostopf zieht, also einem WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$. Wie jeder Spieler i beeinflusst auch der Zufall 0 das Spielgeschehen, allerdings nicht umgekehrt: der Zufall lässt sich nicht beeinflussen und ist vollkommen unbestechlich. Das entspricht der Auszahlung $r^0 = 0$.

Spiele auf Graphen

Ein dynamisches Spiel können wir als einen Graphen darstellen:

		USA	EU
0	Start		
$1a$	USA drohen nicht.	5	9
$1b$	USA drohen mit Zöllen.		
$2a$	Europa gibt nach.	6	7
$2b$	Europa droht ebenfalls.		
$3a$	USA lenken ein.	4	8
$3b$	Es kommt zum Handelskrieg.	3	6

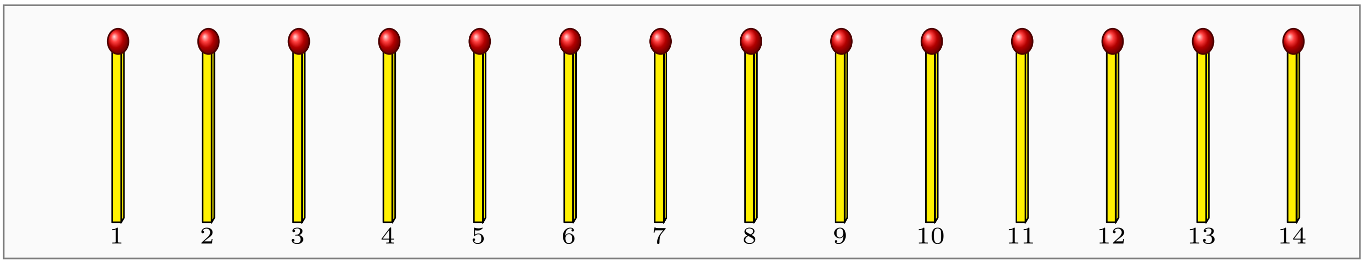
Dynamische Spiele können parallel oder sequentiell gespielt werden:

- Die Spieler ziehen gleichzeitig, parallel, asynchron wie bei Pong.
- Die Spieler ziehen abwechselnd, nacheinander, rundenbasiert.

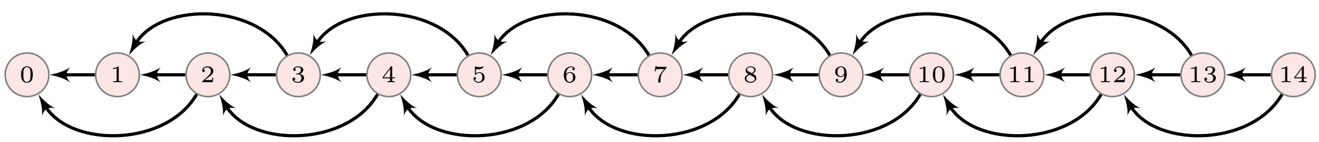
Die Zeit kann kontinuierlich sein oder diskret wie hier. Zur Vereinfachung betrachten wir in dieser Vorlesung meist nur den zeitdiskreten Fall.

Spiele auf Graphen

Oft ist der Spielgraph ein Baum, aber auch ganz allgemeine Graphen treten natürlich auf: Sie erlauben eine bequeme und konzise Darstellung.

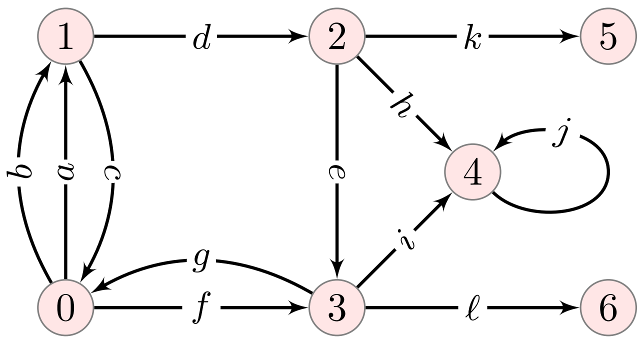


Auf dem Tisch liegen anfangs $x \in \mathbb{N}$ Streichhölzer / Münzen / Steine. Die Spieler ziehen abwechselnd, jeder entfernt ein oder zwei Hölzer. Diese Spielregeln übersetzen sich zu folgendem Spielgraphen:



So können wir jedes Spiel knapp und übersichtlich als Graph codieren! Er beantwortet die grundlegenden Fragen zum Spiel und seinen Regeln: Welche Spielstände x gibt es? Welche Aktionen a sind in x möglich? Zu welchem Spielstand $y = \tau(x, a)$ gelangen wir durch diese Aktion?

Was genau ist ein Graph?



$$X = \{0, 1, \dots, 6\}$$
$$A = \{a, b, \dots, \ell\}$$
$$(\sigma, \tau) : a \mapsto (0, 1)$$
$$b \mapsto (0, 1)$$
$$\dots$$
$$\ell \mapsto (3, 6)$$

Definition B1A: gerichteter Multigraph $\Gamma = \Gamma_1 \rightrightarrows \Gamma_0$, kurz Graph

Ein **Graph** $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ besteht aus einer Eckenmenge $\Gamma_0 = X$ [*vertices*], einer Kantenmenge $\Gamma_1 = A$ [*edges*], mit $X \cap A = \emptyset$, sowie Randabbildungen $\sigma, \tau : A \to X$ [*boundary maps*], die jeder Kante $a \in A$ ihren Start $\sigma(a) \in X$ [*source*] und ihr Ziel $\tau(a) \in X$ [*target*] zuordnen.

Eine Kante $a \in A$ von $\sigma a = x$ nach $\tau a = y$ schreiben wir kurz $a : x \to y$ oder $x \xrightarrow{a} y$ und ebenso Wege $w = (x_0 \xrightarrow{a_1} x_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} x_n) \in \Gamma_n \subseteq \Gamma_*$.

Der Graph Γ heißt **artinsch**, wenn er keine unendlichen Wege enthält, und **lokal-endlich** in $x \in X$, wenn die Menge $\{a : x \to y\}$ endlich ist.

Was genau ist ein Graph?

Als Spiel Γ interpretieren wir jede Ecke $x \in X$ als möglichen **Zustand** oder **Position** und jede Kante $a \in A$ als mögliche **Aktion** oder **Zug**.

Zur Betonung nennen wir (X, A, σ, τ) einen **orientierten Multigraph**:

- Jede Kante $a : x \to y$ ist orientiert von ihrem Start x zu ihrem Ziel y.
- Zwischen je zwei Ecken $x, y \in X$ kann es mehrere Kanten geben.
- Es kann Schleifen $a : x \to x$ geben, also Kanten mit Start gleich Ziel.

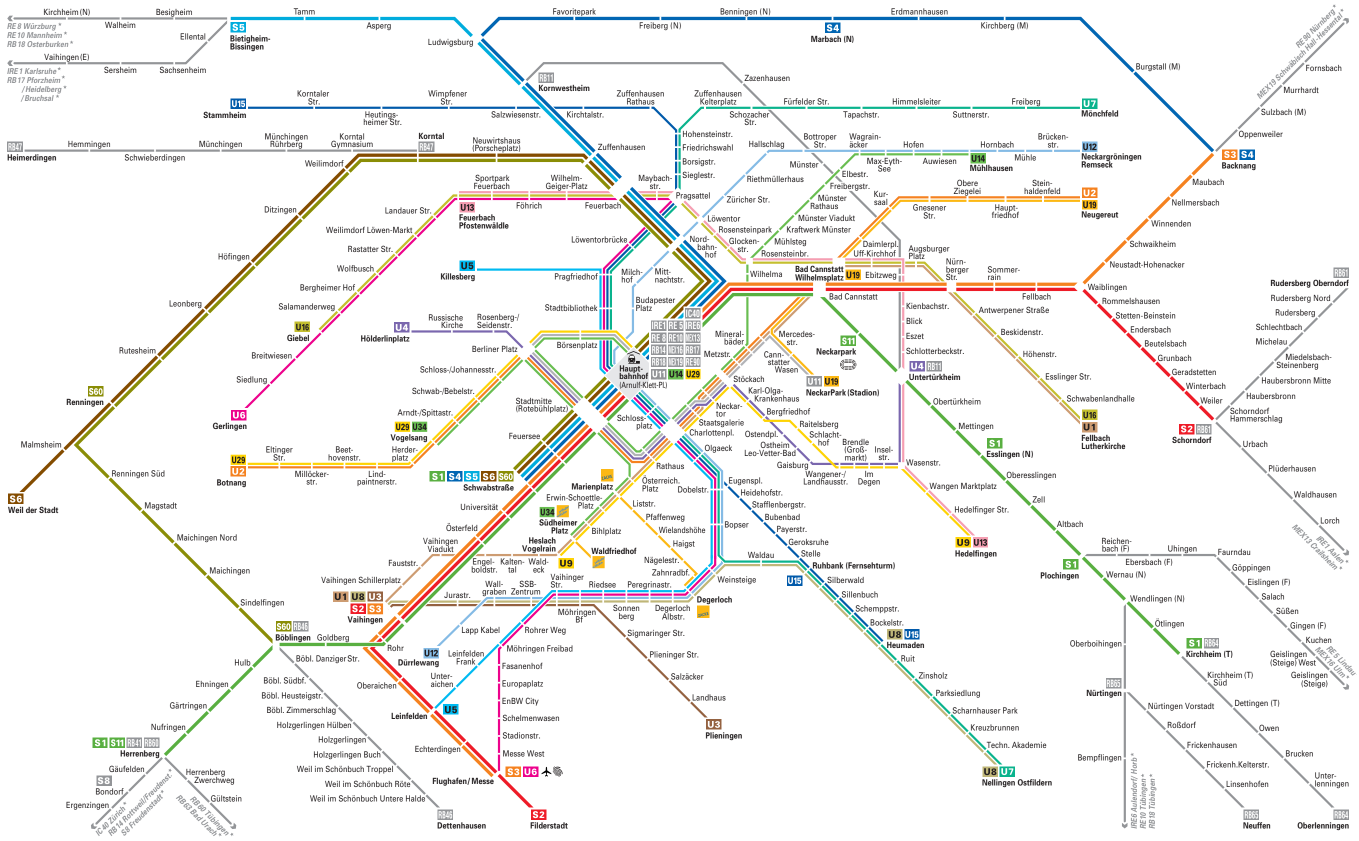
Ecken heißen manchmal auch **Knoten** [*nodes*] oder **Punkte** [*points*], die Randabbildung $\partial = (\sigma, \tau) : A \to X \times X$ auch **Inzidenz** [*incidence*].

Der Graph heißt **einfach** [*simple*], wenn ∂ injektiv ist. Das heißt, von jedem Start $x \in X$ zu jedem Ziel $y \in X$ existiert höchstens eine Kante.

Im einfachen Graphen (X, A, σ, τ) können wir die Kantenmenge A durch ihr Bild $A' = \partial(A) \subseteq X \times X$ ersetzen und erhalten so den isomorphen Graphen (X, A', σ', τ') mit $\sigma' = \mathrm{pr}_1 : (x, y) \mapsto x$ und $\tau' = \mathrm{pr}_2 : (x, y) \mapsto y$.

Wir gelangen zu folgender Vereinfachung: Ein **einfacher Graph** (X, A) besteht aus einer Eckenmenge X und einer Kantenmenge $A \subseteq X \times X$; implizit mitgegegeben sind die Projektionen $\sigma(x, y) = x$ und $\tau(x, y) = y$.

Alltägliche Beispiele für Graphen



Stuttgarter Verbundnetz, `www.vvs.de/karten-plaene/liniennetz`
Fahrgäste spielen „Wie komme ich am besten von A nach B?“

Beispiele für Graphen

Graphen haben zahlreiche Anwendungen in Mathematik und Informatik. Sie dienen häufig zur Modellierung, Abstraktion oder Vereinfachung, z.B. als Datenstruktur, Verkehrsliniennetz, Stammbaum, soziales Netz, etc.

Wir formulieren daher eine möglichst umfassende allgemeine Definition: Ein Graph Γ besteht aus **zwei parallelen Abbildungen** $\sigma, \tau : A \to X$. Alle vier dieser Daten (X, A, σ, τ) zu nennen ist zwar etwas redundant, dient aber zur bequemeren Notation und betont die Mengen X und A.

Alternative Notationen sind $\Gamma = (V, E, \sigma, \tau)$ oder $X = (X_0, X_1, \partial_0, \partial_1)$ oder $G = (S, A, \sigma, \tau)$; das ist eine Frage von Traditionen und Vorlieben. In der Informatik besteht ein **(endlicher) Automat** $(S, A, \tau, \dots)$ aus **Zuständen** S und **Aktionen** A mit Übergangsfunktion $\tau : S \times A \to S$. Dies ist ein Graph mit der Kantenmenge $E = S \times A$, wobei $\sigma(s, a) = s$.

In der Algebra, speziell Darstellungstheorie, besteht ein **Köcher** [*quiver*] $Q = (Q_0, Q_1, \sigma, \tau)$ aus **Ecken** [*vertices*] und **Pfeilen** [*arrows*], und eine Darstellung $V : Q \to \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ ordnet jeder Ecke x einen $\mathbb{K}$–Vektorraum V_x zu und jeder Kante $\alpha : x \to y$ eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung $V_\alpha : V_x \to V_y$.

Wege auf Graphen

Im Graphen $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ ist ein **Weg** eine Ecken-Kanten-Folge

$$w = (x_0, a_1, x_1, a_2, x_2, \dots, a_n, x_n)$$

mit $\sigma(a_k) = x_{k-1}$ und $\tau(a_k) = x_k$ für alle $k = 1, 2, \dots, n$, abgekürzt

$$w = (x_0 \xrightarrow{a_1} x_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} x_n),$$

mit Start $\sigma(w) = x_0$ und Ziel $\tau(w) = x_n$. Die Menge aller Wege w der Länge n vom Start $\sigma(w) = x$ zum Ziel $\tau(w) = y$ schreiben wir $\Gamma_n(x, y)$. Hierbei identifizieren wir $\Gamma_0 = X$ mit Ecken und $\Gamma_1 = A$ mit Kanten. Für beliebige Länge $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $\Gamma_*(x, y) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n(x, y)$.

Verknüpfbare Wege verknüpfen wir durch Aneinanderhängen gemäß

$$\circ \;:\; \Gamma_*(x, y) \times \Gamma_*(y, z) \to \Gamma_*(x, z) \;:\; (w, w') \mapsto w \circ w',$$

$$(x_0, a_1, x_1, \dots, a_m, x_m) \circ (y_0, b_1, y_1, \dots, b_n, y_n)$$
$$:= (x_0, a_1, x_1, \dots, a_m, x_m = y_0, b_1, y_1, \dots, b_n, y_n).$$

Dies definiert die **Wegekategorie** $\Gamma_* = (X, A^*, \sigma, \tau, \circ)$ des Graphen Γ: Die Verknüpfung ist assoziativ. Zu jedem Weg $w \in \Gamma_*(x, y)$ von x nach y ist der konstante Weg $\mathrm{id}_x = (x)$ linksneutral und $\mathrm{id}_y = (y)$ rechtsneutral.

Wege auf Graphen

Neben den endlichen Wegen $w \in \Gamma_*(x, y)$ von x nach y betrachten wir auch unendliche Wege $w = (x_0, a_0, x_1, a_1, x_2, \dots)$ wobei $\sigma(a_k) = x_k$ und $\tau(a_k) = x_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Der Startpunkt ist hierbei $\sigma(w) = x_0$.

Wir können endliche Wege von links anknüpfen und erhalten so

$$\circ \;:\; \Gamma_*(x, y) \times \Gamma_\infty(y) \to \Gamma_\infty(x) \;:\; (w, w') \mapsto w \circ w'.$$

Notation: Es genügt, jeden un/endlichen Weg $w = (x_0; a_0, a_1, a_2, \dots)$ durch seinen Startpunkt x_0 und die Kanten $a_0, a_1, a_2, \dots$ zu notieren.

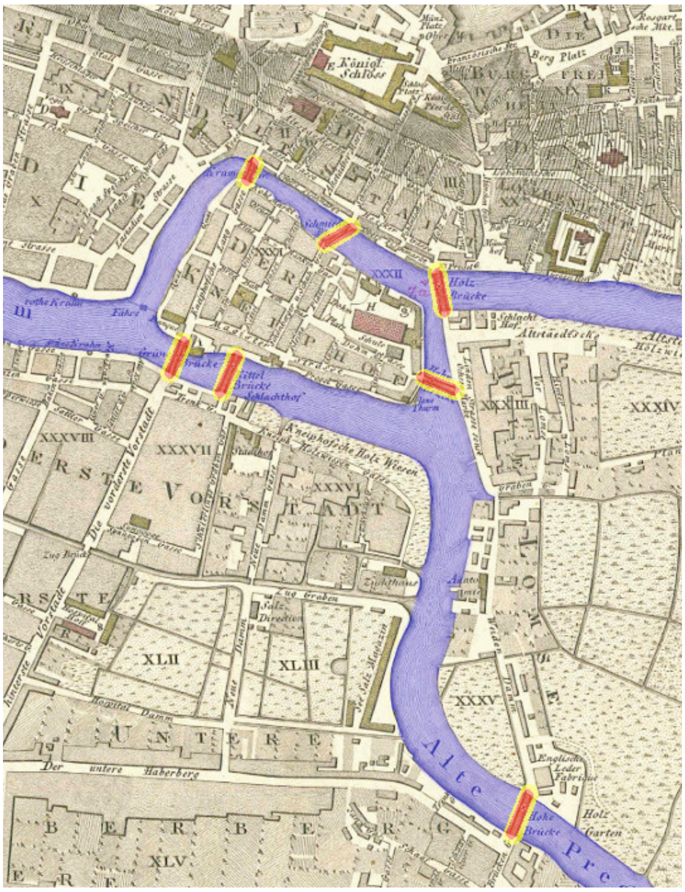
Bei positiver Länge genügen sogar allein die Kanten $(a_0, a_1, a_2, \dots)$, denn hieraus folgen die Ecken $x_0 = \sigma(a_0)$, $x_1 = \tau(a_0) = \sigma(a_1)$, etc.

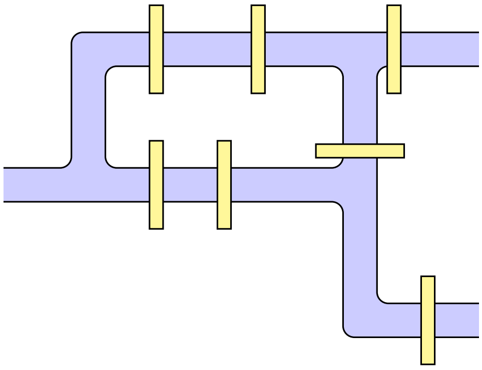
Für einen einfachen Graphen genügen die durchlaufenen Ecken, kurz $w = (x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots)$, denn daraus folgen eindeutig die Kanten.

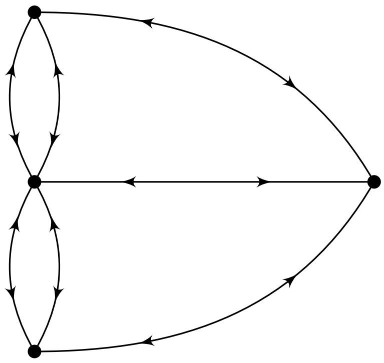
Beispiel: Besteht der Graph $\Gamma = (\{x\}, A, \sigma, \tau)$ nur aus der Ecke x und den Schleifen A, so besteht die Kategorie Γ_* nur aus dem Objekt x, und die Morphismen $(A^*, \circ)$ bilden das freie Monoid über dem Alphabet A, also $\Gamma_*(x, x) = A^* = A^{<\infty} := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$. Die Menge $\Gamma_\infty(x) = A^\infty = A^{\mathbb{N}}$ hingegen besteht aus allen unendlichen Folgen $w : \mathbb{N} \to A : k \mapsto a_k$.

Ursprünge der Graphentheorie

Graphentheorie entsteht 1736 aus dem Königsberger Brückenproblem:







Ursprünge der Graphentheorie

Durch Königsberg fließt der Fluss Pregel, darin zwei Inseln liegen, die durch sieben Brücken zu den Ufern und untereinander verbunden waren. Gibt es einen (Rund-)Weg, der alle sieben Brücken genau einmal quert? Dieses mathematische Rätsel wurde schnell populär und viel diskutiert.

Euler löste das Brückenproblem im Jahre 1736, indem er zunächst die geographischen Daten auf ihren topologischen Kern reduzierte: Nicht die genaue Form der Inseln und der Ufergebiete ist wichtig, ebensowenig der genaue Verlauf der Brücken und Spaziergänge.

Was bleibt als wesentliche Information? Es genügt, die beiden Ufer und die zwei Inseln als vier Ecken zu betrachten mit sieben verbindenden Kanten. Das ist eine naheliegende und doch sehr mutige Vereinfachung. Abstraktion bedeutet, das Wesentliche vom Unwesentlichen zu trennen.

Eulers effiziente Beschreibung algebraisiert und löst das Problem: Da zu jeder der vier Ecken eine ungerade Zahl von Kanten führt, so argumentierte Euler, kann es keinen Weg geben, der alle sieben Brücken genau einmal überquert. Genial einfach, einfach genial!

Definition B1B: unorientierter Multigraph

Ein **unorientierter Multigraph** $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau, -)$ besteht aus einem orientierten Multigraphen (X, A, σ, τ) mit einer fixpunktfreien Involution $- : A \to A$, also $a \ne -a$ und $-(-a) = a$ für alle Kanten $a \in A$, sodass $\sigma(a) = \tau(-a)$ gilt und folglich $\tau(a) = \sigma(-a)$. Die Kante $-a$ heißt die zu a **inverse Kante**, das Paar $\{a, -a\}$ nennen wir eine **unorientierte Kante**.

Wir können σ weglassen und jederzeit durch $\sigma = \tau \circ -$ rekonstruieren. Die Involution $-$ von Γ setzt sich fort auf die Wegekategorie Γ_* gemäß

$$-(x_0 \xrightarrow{a_1} x_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} x_n) = (x_n \xrightarrow{-a_n} \dots \xrightarrow{-a_2} x_1 \xrightarrow{-a_0} x_0)$$

Eine **Orientierung** von Γ ist eine Teilmenge $A^+ \subseteq A$ mit $A^+ \cap -A^+ = \emptyset$ und $A^+ \cup -A^+ = A$, also die Wahl einer Kante aus jedem Paar $\{e, -e\}$. Der zugehörige orientierte Graph ist dann $\Gamma^+ = (X, A^+, \sigma|_{A^+}, \tau|_{A^+})$.

Umgekehrt definiert jeder orientierte Graph $\Gamma = (X, A^+, \sigma, \tau)$ einen unorientierten Graphen $|\Gamma| = (X, A, \sigma, \tau, -)$ mit der Kantenmenge $A = \{\pm\} \times A^+$ sowie $\sigma(-, a) = \tau(+, a) = \tau(a)$ und $-(\pm, a) = (\mp, a)$.

Beispiele wie Netzpläne oder das Königsberger Brückenproblem nutzen statt orientierter Kanten $a : x \to y$ nun unorientierte Kanten $\{\pm a\} : x \leftrightarrow y$; sie dürfen in beide Richtungen genutzt werden, insgesamt nur einmal.

Zu diesem Zweck formalisieren wir auch **unorientierte Multigraphen**:

- Jede unorientierte Kante $\{\pm a\} : x \leftrightarrow y$ verbindet zwei Ecken x, y.
- Zwischen je zwei Ecken $x, y \in X$ kann es mehrere Kanten geben.
- Wir erlauben unorientierte Schleifen $\{\pm a\} : x \leftrightarrow x$ an einer Ecke x.

Wenn wir zudem noch mehrfache Kanten und Schleifen ausschließen, so gelangen wir zu folgender abschließenden Vereinfachung:

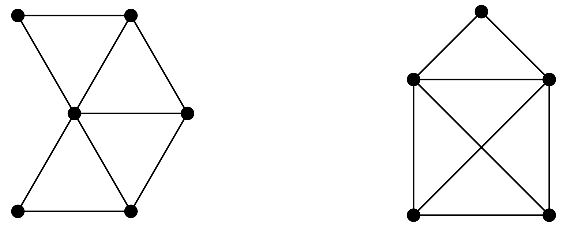
Ein **einfacher unorientierter Graph** (V, E) besteht aus einer Menge V von Ecken und einer Menge $E \subseteq \big\{\{x \ne y\} \subseteq V\big\}$ unorientierter Kanten.

Im Sinne der obigen Definition B1B ist dies ein unorientierter Multigraph $(X, A, \sigma, \tau, -)$ wie folgt: Die Eckenmenge ist $X = V$ wie vorgegeben. Die Kantenmenge $A = \{\, (x, y) \mid \{x, y\} \in E \,\}$ besteht hier aus allen orientierten Kanten (x, y) mit Start $\sigma(x, y) = x$ und Ziel $\tau(x, y) = y$ sowie der orientierungsumkehrenden Involution $-(x, y) = (y, x)$.

Euler–Wege und Euler–Kreise auf Graphen

Das *Königsberger Brückenproblem* ist der Beginn der Graphentheorie und zugleich eine der frühesten topologischen Fragestellungen.

Übung: Erlauben die folgenden Graphen Euler–Wege? Euler–Kreise?



Sei $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ ein Graph. Ein Weg $w = (x_0 \xrightarrow{a_1} x_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} x_n)$ mit $x_n = x_0$ heißt **geschlossen**, manchmal auch **Zykel** oder **Kreis**.

Zum Brückenproblem: Wir nennen w einen **Euler–Weg** im Graphen Γ, wenn jede Kante von Γ entlang w genau einmal besucht wird, wenn also die Abbildung $\hat{w} : \{1, 2, \dots, n\} \to A : i \mapsto a_i$ bijektiv ist. Ein geschlossener Euler–Weg heißt auch kurz **Euler–Kreis**

In unorientierten Graphen $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau, -)$ verlagen wir, dass jede unorientierte Kante des Graphen Γ entlang w genau einmal besucht wird, also dass $\hat{w} : \{\pm\} \times \{1, 2, \dots, n\} \to A : (\pm, i) \mapsto \pm a_i$ bijektiv ist.

Euler–Wege und Euler–Kreise auf Graphen

Das Brückenproblem erlaubt eine einfache und effiziente Lösung!
In jedem orientierten Graphen $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ hat jede Ecke $x \in X$

- einen **Eingangsgrad** $\operatorname{ideg}(x) = \sharp\{\, a : y \to x \,\}$ und
- einen **Ausgangsgrad** $\operatorname{odeg}(x) = \sharp\{\, a : x \to y \,\}$.

In jedem unorientierten Graphen gilt $\operatorname{ideg}(x) = \operatorname{odeg}(x) =: \deg(x)$.
(Eine unorientierte Schleife zählt in dieser Konvention doppelt.)

Satz B1c: Euler 1736

Sei $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau, -)$ ein unorientierter Graph, zudem endlich und zusammenhängend (je zwei Ecken sind durch einen Weg verbindbar).

1. Genau dann existiert ein Euler–Kreis w in Γ, wenn jede Ecke $x \in X$ einen geraden Grad hat.
2. Genau dann existiert ein Euler–Weg w in Γ, wenn höchstens zwei Ecken ungeraden Grad haben.

Aufgabe: Beweisen Sie abschließend Eulers wunderschönen Satz.
Besser noch: Entwickeln Sie einen Algorithmus zur Konstruktion!

Euler–Wege und Euler–Kreise auf Graphen

Lösung: (1) „⇒“ Die Ecke $x \in X$ wird von w genau k–mal durchlaufen. Sie wird k mal betreten und k mal verlassen, also gilt $\deg(x) = 2k$.

„⇐“ Wir konstrieren einen Euler–Kreis durch folgenden Algorithmus: Markiere anfangs alle Kanten als verfügbar, im Verlauf als verwendet.

Solange noch Kanten verfügbar sind, wähle eine davon als $a_1 : x_0 \to x_1$ und setze $\ell = 1$. Solange noch $x_\ell \neq x_1$ gilt, ist in der Ecke x_ℓ mindestens eine Kante verfügbar. Wähle eine davon als $a_{\ell+1}$ und erhöhe $\ell \leftarrow \ell + 1$. So fortfahrend entsteht ein Weg w_1, der jede Kante höchstens einmal besucht. Da Γ endlich ist, muss w_1 sich irgendwann schließen.

Solange noch Kanten verfügbar sind, wiederhole diese Konstruktion. So entstehen nach und nach geschlossene Wege $w_1, \dots, w_m$ in Γ. Jede Kante tritt in genau einem davon auf, und dort genau einmal.

Wenn sich zwei Kreise in einer Ecke x schneiden, so können sie in x aufgeschnitten und zu einem gemeinsamen Kreis verbunden werden. Da Γ zusammenhängend ist, bleibt schließlich ein einziger Euler–Kreis.

(2) „⇐“ Verbinde die zwei Ausnahmeecken und nutze (1). $\boxed{\text{QED}}$

Euler–Kreise sind leicht, Hamilton–Kreise sind schwer!

Sei $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ ein Graph. Ein Weg $w = (x_1 \to x_2 \to \dots \to x_n)$ heißt **Hamilton–Weg**, wenn jede Ecke genau einmal besucht wird, wenn also die Abbildung $\breve{w} : \{1, 2, \dots, n\} \to X : i \mapsto x_i$ bijektiv ist.

Der Weg $(x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots \to x_n)$ heißt **Hamilton–Kreis**, wenn $x_0 = x_n$ gilt, und die Abbildung $\breve{w} : \{1, 2, \dots, n\} \to X : i \mapsto x_i$ bijektiv ist. Jeder Hamilton–Kreis definiert offensichtlich auch einen Hamilton–Weg.

Bei $|X| = n$ Ecken gibt es insgesamt $n!$ Kandidaten für Hamilton–Wege. Die *Brute-Force-Methode* probiert sie alle durch, doch ihr Zeitaufwand ist exponentiell in n. Das ist nur für sehr kleine n realistisch durchführbar.

Dies führt auf ein wichtiges theoretisches und auch praktisches Problem: Vorgelegt sei ein Graph Γ. Bestimme, ob ein Hamilton–Weg existiert! Problem: Lässt sich die Antwort in polynomieller Zeit berechnen?

Wenn Sie dieses „NP-vollständige“ Problem lösen, werden Sie berühmt … und reich: Das Clay Mathematics Institute hat im Jahr 2000 die Frage „P = NP“ als eines der sieben Millenium-Probleme ausgelobt, mit einem Preisgeld von 1 Million Dollar. Der Erkenntniswert ist noch weit größer!

Morphismen zwischen Graphen

Ein **Morphismus** $(\varphi_0, \varphi_1) : (\Gamma_0, \Gamma_1, \sigma, \tau) \to (\Gamma_0', \Gamma_1', \sigma', \tau')$ von Graphen ist ein Paar bestehend aus einer Eckenabbildung $\varphi_0 : \Gamma_0 \to \Gamma_0'$ und einer Kantenabbildung $\varphi_1 : \Gamma_1 \to \Gamma_1'$ mit $\sigma' \circ \varphi_1 = \varphi_0 \circ \sigma$ und $\tau' \circ \varphi_1 = \varphi_0 \circ \tau$. Graphen und ihre Morphismen bilden zusammen die Kategorie $\mathbf{Graph}$.

Jeder Morphismus (φ_0, φ_1) setzt sich auf Wege fort zu $\varphi_n : \Gamma_n \to \Gamma_n'$ mit

$$\varphi_n\big(x_0 \xrightarrow{a_1} x_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} x_n\big) = \big(\varphi_0 x_0 \xrightarrow{\varphi_1 a_1} \varphi_0 x_1 \xrightarrow{\varphi_1 a_2} \dots \xrightarrow{\varphi_1 a_n} \varphi_0 x_n\big)$$

Dies definiert den **Funktor** $\varphi_* : \Gamma_* \to \Gamma_*'$ der beiden Wegekategorien: Er bildet jedet Ecke $x \in \Gamma_0$ auf eine Ecke $\varphi_0(x) \in \Gamma_0'$ ab, ebenso jeden Weg $w \in \Gamma_*$ auf einen Weg $\varphi_*(w) \in \Gamma_*'$, und respektiert dabei Start und Ziel und alle Kompositionen gemäß $\varphi_*(w_1 \circ w_2) = \varphi_*(w_1) \circ \varphi_*(w_2)$.

Für einen Morphismus $(\varphi_0, \varphi_1) : (\Gamma_0, \Gamma_1, \sigma, \tau, -) \to (\Gamma_0', \Gamma_1', \sigma', \tau', -)$ zwischen unorientierten Graphen verlangen wir zudem die Bedingung $\varphi_1(-a) = -\varphi_1(a)$ für jede Kante $a \in \Gamma_1$ (Verträglichkeit, Äquivarianz). Auch unorientierte Graphen bilden eine Kategorie, wie oben erklärt.

Teilgraphen und Isomorphismen

Damit steht uns unmittelbar und ohne weitere Kosten die kategorielle Struktur zur Verfügung, ihre ordnende Sprech- und Denkweise:

Ein **Teilgraph** $\Gamma' = (\Gamma_0', \Gamma_1', \sigma', \tau')$ in $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \sigma, \tau)$ besteht aus Teilmengen $\Gamma_0' \subseteq \Gamma_0$ und $\Gamma_1' \subseteq \Gamma_1'$ mit $\sigma(\Gamma_1') \subseteq \Gamma_0'$ und $\tau(\Gamma_1') \subseteq \Gamma_0'$, sowie den so definierten Einschränkungen $\sigma', \tau' : \Gamma_1' \to \Gamma_0'$ von σ, τ.

Äquivalent hierzu: Die Inklusion $\Gamma' \hookrightarrow \Gamma$ ist ein Morphismus in $\mathbf{Graph}$.

Der **volle Teilgraph** auf der Eckenmenge $\Gamma_0' \subseteq \Gamma_0$ entsteht durch die volle Kantenmenge $\Gamma_1' = \{\, a \in \Gamma_1 \mid \sigma a, \tau a \in \Gamma_0 \,\}$ und $\sigma', \tau' : \Gamma_1' \to \Gamma_0'$

Ein **Isomorphismus** $\varphi : \Gamma \to \Gamma'$ ist ein invertierbarer Morphismus, d.h. es existiert ein Morphismus $\psi : \Gamma' \to \Gamma$ mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_\Gamma$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\Gamma'}$.

Äquivalent hierzu: Sowohl die Eckenabbildung $\varphi_0 : \Gamma_0 \to \Gamma_0'$ als auch die Kantenabbildung $\varphi_1 : \Gamma_1 \to \Gamma_1'$ sind bijektiv. Dann ist automatisch auch $\psi = (\varphi_0^{-1}, \varphi_1^{-1}) : \Gamma' \to \Gamma$ ein Morphismus, denn aus $\sigma' \circ \varphi_1 = \varphi_0 \circ \sigma$ folgt $\varphi_0^{-1} \circ \sigma' = \sigma \circ \varphi_1^{-1}$, und aus $\tau' \circ \varphi_1 = \varphi_0 \circ \tau$ folgt $\varphi_0^{-1} \circ \tau' = \tau \circ \varphi_1^{-1}$.

Diese hilfreiche Äquivalenz zwischen „Isomorphismus“ und „bijektiver Morphismus“ gilt ebenso in der Algebra für Gruppen, Vektorräume, etc.

Wann ist ein Morphismus invertierbar?

Ein Graph heißt **einfach** [*simple*], wenn $(\sigma,\tau): A \to X \times X$ injektiv ist. Damit gelangen wir zu folgender Vereinfachung, die häufig genutzt wird:

Jede Relation $A \subseteq X \times X$ auf einer Menge X ist ein einfacher Graph (X, A), ausführlich (X, A, σ, τ) mit den Projektionen $\sigma, \tau : A \to X$ (B112).

Ein Morphismus $\varphi : (X, A) \to (X', A')$ einfacher Graphen ist eine Abbildung $\varphi : X \to X$ der Eckenmengen mit $\varphi(A) \subseteq A'$.

⚠ In dieser allzu kurzen Vereinfachung gilt die ersehnte Äquivalenz zwischen „Isomorphismus" und „bijektiver Morphismus" nicht mehr!

Zwar existiert die Umkehrabbildung $\psi = \varphi^{-1} : X' \to X$ auf den Ecken, sie ist aber im Allgemeinen kein Morphismus $(X', A') \to (X, A)$.

Einfachste Beispiele ist der diskrete Teilgraph $(X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ oder allgemein $(X, A) \hookrightarrow (X, A')$ mit $A \subsetneq A' \subset X \times X$.

🙂 Diese Problematik ist analog zur Umkehrung stetiger Abbildungen $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ zwischen topologischen Räumen, selbst im $\mathbb{R}^n$: Zum Beispiel ist $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}$ stetig und bijektiv, aber kein Homöomorphismus, denn f^{-1} ist nicht stetig!

Auch Wege sind Morphismen.

Als **Modellgraphen** betrachten wir für $n \in \mathbb{N}$ folgende Graphen:

der Pfad [*path*] $\quad P_n = (0 \to 1 \to 2 \to \dots \to n),\ n \ge 0,$ und

der Zykel [*cycle*] $\quad C_n = (0 \to 1 \to \dots \to (n{-}1) \to 0),\ n \ge 1.$

Kleinste Beispiele sind der Punkt $P_0 = (0)$ und der Pfeil $P_1 = (0 \to 1)$ sowie die Schleife $C_1 = (\circlearrowright)$ und das Zweieck $C_2 = (0 \rightleftarrows 1)$. Allgemein:

Der Graph $P_n = (X_n, A_n, \sigma_n, \tau_n)$ hat Ecken $X_n = \{\, x \in \mathbb{N} \mid 0 \le x \le n \,\}$ und Kanten $A_n = \{\, (x, x+1) \mid 0 \le x < n \,\}$ mit den kanonischen Projektionen $\sigma, \tau : A_n \to X_n$, $\sigma(x, y) = x$, $\tau(x, y) = y$. Für $n = \infty$ erhalten wir den unendlichen Pfad $P_\infty = (0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \dots)$.

Der Graph $C_n = (X'_n, A'_n, \sigma'_n, \tau'_n)$ hat Ecken und Kanten wie P_n mit der Identifizierung $n = 0$. Ausgeschrieben bedeutet das $X'_n = \mathbb{Z}/n$ und $A'_n = \{\, (x, x+1) \mid x \in \mathbb{Z}/n \,\}$ mit den Projektionen σ, τ. Speziell für $n = 0$ erhalten wir $\mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z}$ und $C_\infty = (\dots \to -2 \to -1 \to 0 \to 1 \to 2 \to \dots)$.

Somit ist jeder Weg $w = (x_0 \xrightarrow{a_1} x_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} x_n)$ in einem Graphen Γ ein Morphismus $\varphi : P_n \to \Gamma$. Entsprechend ist jeder geschlossene Weg $w = (x_0 \xrightarrow{a_1} x_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} x_n)$ mit $x_n = x_0$ ein Morphismus $\psi : C_n \to \Gamma$.

Forderungen zur Endlichkeit

Die Informatik verwendet üblicherweise die griffige Abkürzung
DAG = *directed acyclic graph*, gerichteter azyklischer Graph.
Das bedeutet, unser Graph Γ erlaubt keine Morphismen $C_n \to \Gamma$.

Für unsere Spiele ist es bequemer diesen Begriff zu verstärken zu
DAG = *directed artinian graph*, gerichteter artinscher Graph.
Das bedeutet unser Graph Γ erlaubt keine Morphismen $P_\infty \to \Gamma$.

Für viele unserer Induktionsargumente benötigen wir zudem:
LEA = lokal-endlich und artinsch, ALF = *artinian and locally-finite*.

Aufgabe: Die Bedingung ALF / LEA ist äquivalent zur Aussage:

1. Der Graph Γ ist azyklisch, und für jeden Zustand x ist der erreichbare Teilgraph Γ_x endlich. (Für endliche Graphen ist azyklisch dasselbe wir artinsch. Für unendliche Graphen ist die artinsch strikt stärker.)

Finden Sie (einfache / kleine / schöne) Beispiele von Graphen,

2. die weder lokal-endlich noch artinsch sind;
3. die lokal-endlich, aber nicht artinsch sind;
4. die artinsch, aber nicht lokal-endlich sind.

Forderungen zur Endlichkeit

Lösung: Wir schreiben $x \to y$, wenn eine Kante $a \in \Gamma_1(x,y)$ existiert, und allgemeiner $x \xrightarrow{*} y$ falls ein beliebiger Weg $w \in \Gamma_*(x,y)$ existiert. Dies ist die reflexiv-transitive Fortsetzung der Kantenrelation $\to$ auf X und definiert somit eine partielle Ordnung auf der Eckenmenge X.

(1) „$\Leftarrow$“: Lokal-endlich ist klar, und artinsch folgt per Induktion über $\sharp\Gamma_x$.
„$\Rightarrow$“: Azyklisch ist klar. Angenommen, der erreichbare Teilgraph Γ_x wäre unendlich, also mit unendlicher Eckenmenge $\{\, z \in X \mid x \xrightarrow{*} z \,\}$. Unter den endlich vielen Nachfolgern y mit $x \to y$ existiert mindestens einer, für den Γ_y unendlich ist. Dieses Argument können wir nun iterieren. So finden wir einen unendlichen Weg $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots$.
Das widerspricht der Voraussetzung, dass Γ artinsch ist.

(2) Einfache Beispiele sind $X = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ mit $x \to y$ falls $x < y$.

(3) Das minimale Beispiel ist der Pfad $P_\infty = (0 \to 1 \to 2 \to \dots)$.

(4) Ein klassisches Beispiel ist der einfache Graph (X, A, σ, τ) mit der Eckenmenge $X = \mathbb{N}^2$ und als Kantenmenge die lexikographische Ordnung $A = \{\, (x,y) \in X \times X \mid x_1 > y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 > y_2) \,\}$.

Optimierung auf Graphen: allgemeine Fragestellung

Meist betrachtet man zu Graphen weitere Daten und Eigenschaften. Graphen sind daher häufig die gemeinsame, tragende Grundstruktur!

In der Optimierung betrachtet man Gewichte und minimiert die Kosten / maximiert den Gewinn der gestellten Aufgabe, z.B. beste Verbindung:

Eine **(reelle) Gewichtung** der Ecken $v : X \to \mathbb{R}$ bzw. Kanten $r : A \to \mathbb{R}$ interpretieren wir als Kosten / Nutzen für das Erreichen eines Zustands $x \in X$ bzw. das Ausführen einer Aktion $a \in A$. Daraus berechnen wir zu jedem Weg $w = (x_0 \xrightarrow{a_1} x_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} x_n)$ seine Gesamtbewertung

$$w \mapsto u(w) = \textstyle\sum_{k=1}^n r(a_k) + v(x_k).$$

Bei festem Start x und (zumeist auch) Ziel y suchen wir Wege $w : x \to y$, die die Kosten $u(w)$ minimieren bzw. den Nutzen $u(w)$ maximieren.

Für $v = 0$ und $r = 1$ suchen wir den kürzesten Weg von x nach y. Solche Fragen treten in der Informatik und Anwendungen häufig auf: Für $r : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ löst dies der Dijkstra–Algorithmus (1956), für allgemeine Gewichte $r : A \to \mathbb{R}$ der Bellman–Ford–Moore–Algorithmus (1956).

Optimierung auf Graphen: kontinuierliche Analogie

Das ist ein diskretes Analogon zur **Variationsrechnung** der Analysis: Gegeben sei ein Wirkungsfunktional $S : \mathscr{C}^2 = \mathscr{C}^2([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch

$$w \mapsto S(w) := \int_{t=a}^{b} F\big(t, w(t), w'(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

als Integral einer $\mathscr{C}^2$–Funktion $F : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (t,q,p) \mapsto F(t,q,p)$. Wir fixieren Start $w(a) = x$ und Ziel $w(b) = y$. Ist $w \in \mathscr{C}^2$ extremal, also minimal $S(w) \leq S(z)$ für alle $z \in \mathscr{C}^2$ oder maximal $S(w) \geq S(z)$ für alle $z \in \mathscr{C}^2$, dann erfüllt w die **Euler–Lagrange–Differentialgleichung**:

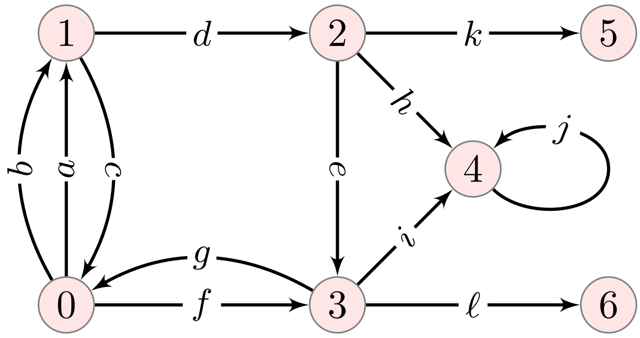
$$\left[\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial p}\right]\big(t, w(t), w'(t)\big) = 0.$$

Ausgeschrieben bedeutet das: Für alle $t \in [a,b]$ gilt die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial q}\big(t, w(t), w'(t)\big) = \frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial p}(\cdots) + \frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial p}(\cdots)\,w'(t) + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(\cdots)\,w''(t).$$

Mit dieser Differentialgleichung können wir $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ berechnen!

Spiele auf Graphen



$$\tau : A \to X : \quad \begin{array}{ll} (0,a) \mapsto 1, & (2,h) \mapsto 4, \\ (0,b) \mapsto 1, & (2,k) \mapsto 5, \\ (0,f) \mapsto 3, & (3,g) \mapsto 0, \\ (1,c) \mapsto 0, & (3,i) \mapsto 4, \\ (1,d) \mapsto 2, & (3,\ell) \mapsto 6, \\ (2,e) \mapsto 3, & (4,j) \mapsto 4. \end{array}$$

Definition B1D: Graph als Spiel: Zustände, Aktionen, Strategien

Im Graphen $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ interpretieren wir die Ecken $x \in X$ als **Zustände** und die Kanten $a \in A$ als **Aktionen**. Zur Vereinfachung gelte $A = \coprod_{x\in X} A_x = \bigcup_{x\in X} \{x\} \times A_x$ mit Start $\sigma = \mathrm{pr}_1 : A \to X : (x,a) \mapsto x$ und der **Transition** $\tau : A \to X : (x,a) \mapsto y$, lokal $\tau_x : A_x \to X : a \mapsto y$.

Für Zustände $x \in X$ schreiben wir auch $x \in \Gamma$. Wir zerlegen diese in
innere Ecken / aktive Zustände $X^\circ = \mathrm{Bild}(\sigma) = \{\, x \in X \mid A_x \ne \emptyset \,\}$
und **Blätter / terminale Zustände** $\partial X = X \smallsetminus X^\circ = \{\, x \in X \mid A_x = \emptyset \,\}$.
Eine **Strategie** ist eine Abbildung $s : X^\circ \to A : x \mapsto a$ mit $\sigma \circ s = \mathrm{id}_{X^\circ}$.
Die Strategiemenge ist $S(\Gamma) = \{\, s : X \to A \mid \sigma \circ s = \mathrm{id}_{X^\circ} \,\} = \prod_{x\in X^\circ} A_x$.

Spiele auf Graphen

Wir sortieren alle **Aktionen** $a : x \to y$ nach ihrem Startzustand $x = \sigma(a)$: Dies erlaubt die bequem-konzise Codierung $A = \bigcup_{x\in X} \{x\} \times A_x$ mit Projektion $\sigma : A \to X : (x,a) \mapsto x$ und Transition $\tau : A \to X : (x,a) \mapsto y$. Für jeden Zustand x benennt die Menge A_x die möglichen Aktionen.

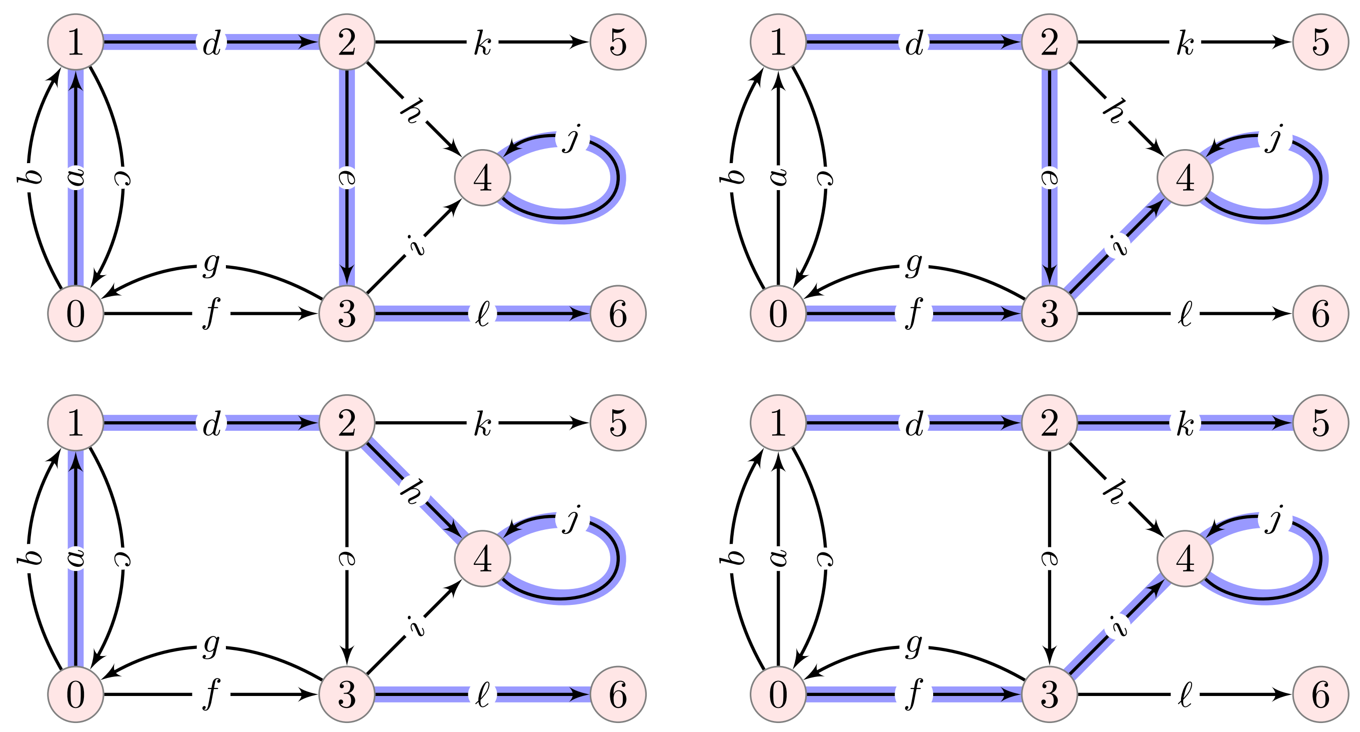
In der Graphentheorie und Informatik nennt man dies die **Adjazenzliste**: Für jeden Knoten $x \in X$ ist dies die Liste A_x aller ausgehenden Kanten $a : x \to y$ zusammen mit der Nachfolgerfunktion $\tau_x : A_x \to X : a \mapsto y$. Datenstrukturen und Algorithmen basieren meist auf Adjazenzlisten.

Als Analogie zur **Differentialtopologie**: Wir interpretieren $a : x \to y$ als einen Tangentialvektor, der im Fußpunkt x verankert ist und auf y zeigt. Die Projektion $\sigma : A \to X : (x,a) \mapsto x$ ist das Tangentialbündel über X, und jede Strategie $s : X^\circ \to A$ mit $\sigma \circ s = \mathrm{id}_{X^\circ}$ ist ein Vektorfeld auf X.

Zu jedem Startpunkt $x_0 \in X$ können wir s **integrieren** zur Trajektorie $w = (x_0, a_0, x_1, a_1, x_2, \dots)$ mit $a_k = s(x_k)$ und $x_{k+1} = \tau(x_k, a_k)$ für alle k. Diese endet entweder im Rand ∂X oder läuft unendlich in X° weiter. Das entspricht recht genau der Situation bei Differentialgleichungen!

Strategien auf Graphen

Vier Beispiele für Strategien auf diesem Graphen:



Aufgabe: Wie viele Strategien gibt es? **Lösung:** $|S| = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 54$.
Zum Vergleich: Insgesamt gibt es $|A| = 3 + 2 + 3 + 3 + 1 = 12$ Kanten.

Strategien auf Graphen

Nochmal zur Betonung: Eine Strategie s ordnet jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ eine Aktion $s(x) = a \in A_x$ zu. Dies schreiben wir als Abbildung $s : X^\circ \to A : x \mapsto a$ mit $\sigma \circ s = \mathrm{id}_{X^\circ}$. So weit, so gut, so klar, so einfach.

Erfahrungsgemäß keimen bald schon Zweifel an dieser Definition auf: Müssen wir wirklich für *jeden* aktiven Zustand eine Aktion vorsehen? Auch für Zustände, in die wir weder kommen wollen noch werden? Die kurze Antwort: Ja, wir müssen; diese Definition ist sinnvoll!

Wir können uns einen Startzustand vorgeben, im obigen Beispiel etwa 0. Wenn wir dann der gegebenen Strategie s folgen, werden wir manchen Zustand x nicht besuchen und seine Aktion $a = s(x)$ nicht ausführen. Dennoch müssen wir für *jeden* aktiven Zustand eine Aktion vorsehen. Der Grund ist einfach: Andere Startwerte benötigen diese Aktionen!

Die schöne Analogie zu Differentialgleichungen ist auch hier hilfreich: Sie geben das Vektorfeld auf dem gesamten Gebiet Ω vor, auch wenn zu einem vorgegebenen Startwert $x_0 \in \Omega$ die Trajektorie nicht alle Punkte $x \in \Omega$ durchläuft und daher nicht alle Vektoren $s(x)$ benutzt werden.

Belohnung: entlang des Wegs oder erst am Ende?

Graphen sind ideal für Spiele: Sie bieten eine universelle Beschreibung! Unser Spielgraph $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ codiert als Ecken alle Positionen / Zustände des Spiels und als Kanten die möglichen Züge / Aktionen.

Ein Spiel bietet zudem Nutzen, Gewinn, Auszahlung, Belohnung, etc. Diese entstehen auf zwei Arten (und Mischungen davon) :

1. Auszahlung $v(x)$ beim Erreichen eines Endzustandes $x \in \partial X$.
„Entscheidend ist, was hinten rauskommt." / Ende gut, alles gut.
Dies codieren wir als **terminale Auszahlung** $v : \partial X \to \mathbb{R}$.
2. Belohnung $r_x(a)$ beim Ausführen einer Aktion $a \in A_x$.
„Der Weg ist das Ziel." / *instant gratification* / zeitnah, verteilt
Dies codieren wir als **sofortige Belohnung** $r : A \to \mathbb{R}$.

Im zweiten Fall müssen wir die Gesamtauszahlung festlegen, etwa

(konvergent) summiert:	$u = \sum_t r(a_t)$,
mit $\delta \in [0, 1]$ diskontiert:	$u = \sum_t \delta^t r(a_t)$,
diskontiert und normiert:	$u = (1 - \delta) \sum_t \delta^t r(a_t)$.

Teilweise können diese Zahlungsarten ineinander umgewandelt werden.

Belohnung: entlang des Wegs oder erst am Ende?

Graphen sind hilfreich für uns, denn **Menschen sind Augenwesen**: Durch einem Spielgraphen können wir die Regeln visualisieren und graphisch darstellen. Das ist komplementär zu wortreichen Erklärungen und oft effizienter. Auch für die anschließende Analyse / Rechnung / Lösung mit Stift und Papier ist diese Darstellung überaus nützlich.

Graphen sind zudem **ideal für Computer** und dienen als universelle Datenstruktur: Um ein Spiel vom Computer berechnen / lösen zu lassen, müssen wir seine Struktur (Zustände, Aktionen, Auszahlungen, etc.) präzise erfassen, formulieren und für den Rechner streng formalisieren. Erst darauf können Algorithmen aufbauen und Lösungen berechnen.

Bei manchen Brettspielen wie **Schach** oder **Go** geht es vor allem darum, wer am Ende gewinnt ($v = 1$) und wer verliert ($v = 0$). Einzelne Züge mögen schön und gut sein, führen aber nicht (allein) zur Auszahlung.

Das trifft auf alle Spiele zu, deren Gewinn sich nicht additiv aus kleinen Beiträgen zusammensetzt, sondern wo erst das große Ganze zählt: Zur Entscheidung der Auszahlungen muss zu Ende gespielt werden!

Belohnung: entlang des Wegs oder erst am Ende?

Bei **Monopoly** und vielen **Computerspielen** entstehen Belohnungen / Gewinne durch einzelne Aktionen und werden sofort gutgeschrieben. Beim Design von Videospielen ist das Gameplay eine zentrale Frage: Zu simples Jump & Run langweilt, zu komplizierte Rätsel frustrieren.

Zum Fußball gibt es beide Meinungen: „Es zählt nur, wer als Sieger vom Platz geht.“ versus „Wir wollen schön spielen und die Fans belohnen / zeigen was wir können / den Zuschauern ein Spektakel bieten / etc.“ Sprichwörtlich: „Der Pokal hat seine eigenen Regeln.“

Aktien verbinden kurzfristige Dividende (z.B. als jährliche Ausschüttung) mit langfristiger Wertsteigerung (allerdings erst realisiert beim Verkauf).

Der (diskontierte) Gesamtnutzen u ist leicht zu verstehen als Summe aller Belohnungen $r(a_t)$. Jede einzelne davon ist unmittelbarer spürbar, das erfordert weniger mentale Leistung und strategische Vorausschau.

Die willkürliche Funktion $v : \partial X \to \mathbb{R}$ hingegen kann die kompliziertesten Regeln und Ausnahmen verbergen... und fällt am Ende vom Himmel. Sprichwörtlich: „Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile.“

Belohnung: entlang des Wegs oder erst am Ende?

Weise Worte: *Quidquid agis, prudenter agas et respice finem!*
(Was immer du tust, handele klug und bedenke das Ende!)

Im **alltäglichen Leben** verhalten sich Menschen sehr unterschiedlich: Manche suchen eher langfristige Strategien, andere kurzfristige Erfolge. In manchen Situationen kann beides zum selben Ergebnis führen, oft sind Ziele und Wege jedoch sehr verschieden. Das entspricht globalen vs lokalen Optimierungsmethoden (*greedy algorithm*, *steepest descent*).

Der **Balanceakt** zwischen kurz- und langfristigem Nutzen begegnet uns überall im Leben. Das gilt auch für **Schule und Studium**. Der Bachelor ist additiv aus Modulen aufgebaut, und Studierende summieren Credits. (Jump & Run?) Sicher, kurzfristige Rückmeldungen helfen und sofortige Belohnungen motivieren, doch wenn zum Schluss das eigentlich erhoffte Gesamtverständnis fehlt, so bleiben nur bedeutungslose Spielpunkte.

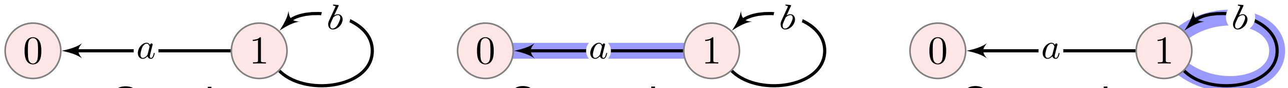
Gegenentwurf wären umfangreiche Abschlussprüfungen (Staatsexamen, Diplom, etc.), die auf das Verständnis größerer Zusammenhänge zielen. Vermutlich wäre eine ausgewogene Mischung das Richtige. ¿Qué sera?

Optimal entscheiden: Welche Strategie ist die beste?

Aufgabe: Sie können Ihre Kuh entweder schlachten zum Marktpreis $M \in [2800, 3200]$€ oder melken für 60€. Sie stirbt friedlich mit Wkt 2%.

Vegane Version: Sie können Ihre Aktien zum Marktpreis M verkaufen oder behalten mit Dividende 60€. Die Inflationsrate sei konstant 2%.

Formulieren Sie dies als Graph. Wo/wie entstehen die Auszahlungen? Welche Strategien gibt es? Welche davon sind optimal profitabel?

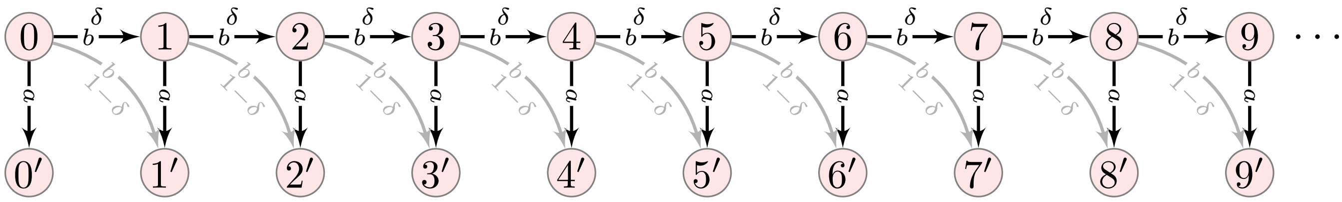


Graph — Strategie s_1 — Strategie s_2

Lösung: Der Gesamtnutzen ist $u(s_1|1) = r(a) = M$ gegenüber

$$u(s_2|1) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t r(b) = \frac{60}{1-\delta} = 3000.$$

Alternativen: Es gibt mehrere Modelle zur gegebenen Fragestellung!



Optimal entscheiden: Welche Strategie ist die beste?

☺ Diese Miniatur ist ein extrem vereinfachtes Beispiel zur Illustration. Die umgangssprachliche Fragestellung ist anschaulich und motivierend, leider auch in wichtigen Details noch allzu vage und nicht recht explizit. Die Ausführung und Präzisierung als Graph lässt keine Fragen offen.

Wir setzen hier 1 als Startzustand voraus, das heißt Sie haben anfangs eine Kuh bzw. das Aktienpaket, andernfalls ist ja nichts zu entscheiden. Bei Start in 1 ist die Trajektorie danach entweder (a) oder $(b, b, b, \dots)$. Hierzu können wir nun die Auszahlungen berechnen und vergleichen:

Im ersten Fall kommt es sofort zur terminalen Auszahlung M.
Im zweiten Fall kommt es zur Auszahlung von 60€, unendlich oft.
An dieser Stelle ist der Diskontfaktor $\delta = 0.98$ in $[0, 1[$ wichtig:
Er garantiert die Konvergenz dieser geometrischen Reihe!

Wir können beide Strategien vergleichen und die beste wählen:
Für $M > 3000$ ist die Strategie s_1 profitabler.
Für $M < 3000$ ist die Strategie s_2 profitabler.
Für $M = 3000$ ergeben beide dieselbe Auszahlung.

Optimal entscheiden: Welche Strategie ist die beste?

Wir vergleichen hier eine einmalige Auszahlung $M \in \mathbb{R}$ mit einem Zahlungsstrom $(r_0, r_1, r_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Zum Vergleich solcher Ströme gibt es verschiedene Möglichkeiten. Einfach und weit verbreitet ist die geometrische Reihe, genauer Potenzreihe $\sum_{t \in \mathbb{N}} \delta^t r_t$ mit $\delta \in [0, 1]$.

Ist die Folge $(r_0, r_1, r_2, \dots)$ beschränkt, so konvergiert diese Reihe für jeden Diskontfaktor $\delta \in [0, 1[$. Es bieten sich zwei Interpretationen:

1. **Inflation** und **Un/Geduld:** Geld morgen ist weniger wert als heute. Dies formalisieren wir als konstanten, vorhersehbaren Wertverlust. Dies führt direkt zu der obigen Formel, als Potentzreihe in δ.
2. **Abbruchwahrscheinlichkeit:** Das Spiel hat in jeder Runde eine gewisse Abbruchwkt $\varepsilon > 0$, also Fortsetzungswkt $\delta = 1 - \varepsilon$. Wir betrachten dann die Erwartung des Nutzens.

Wenn Sie viele Kühe haben, dann ist der Erwartungswert die sinnvolle Vergleichsgröße. Wenn Sie nur eine Kuh haben und risiko-avers sind, dann möchten Sie vielleicht eine Versicherung abschließen, und ihr Risiko (2) umwandeln in einen vorhersehbaren Wertverlust (1).

Optimal entscheiden: Welche Strategie ist die beste?

Übung: Formulierung und berechnen Sie etwas realistischere Graphen! Welche Aktionen und welche Zufallszüge gibt es? Wie bauen Sie daraus den Spielgraphen auf? Erst dadurch vollenden Sie Ihr explizites Modell. Automatisieren Sie dann Ihre Rechnungen mit einer Tabellenkalkulation!

Wir haben zunächst das stationäre Modell gewählt. Alternativ können wir die Zeit $t = 0, 1, 2, \dots$ explizit im Graphen (hier Spielbaum) codieren und jeweils neu entscheiden: Wir geben dem Spieler somit ein Gedächtnis. Die Menge möglicher Strategien ist größer, hier sogar unendlich!

Die unendliche Wiederholung ist am leichtesten zu beschreiben, doch etwas unrealistisch. Zudem wird die Analyse kompliziert, später mehr!

Ich schlage eine realistische Kuh mit endlicher Lebenserwartung vor: Für $t = 0, \dots, 250$ sinkt der Faktor $\delta_t = 1 - t/250$ von $\delta_0 = 1$ auf $\delta_{250} = 0$. Ebenso sollte der Marktpreis M_t fallen, zum Beispiel linear in der Zeit.

🙂 Dies alles können Sie als Spielbaum beschreiben und die optimalen Strategien berechnen; wir führen dies in folgender Aufgabe aus.

Nutzenmaximierung und Bellman–Gleichung

Definition B1E: Spielgraph, Auszahlungen und Bellman–Gleichung

(1) Gegeben sei ein Graph $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ mit terminaler Auszahlung $v : \partial X \to \mathbb{R}$, sofortiger Belohnung $r : A \to \mathbb{R}$ und Diskontfaktor $\delta \in [0, 1]$. Für die Gewinnfunktion $u : X \to \mathbb{R}$ gilt die **Bellman–Gleichung**:

$$u(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } x \in \partial X, \\ \sup\limits_{a : x \to y} \big[r(a) + \delta u(y) \big] & \text{für } x \in X^\circ. \end{cases}$$

(2) Im stochastischen Falle führt die Aktion $a \in A_x$ nicht sicher, sondern mit gewisser Wkt $p(x, a, y)$ zum Zustand y und zur Belohnung $r(x, a, y)$. In der Bellman–Gleichung für $x \in X^\circ$ steht dann der **Erwartungswert**:

$$u(x) = \sup_{a \in A_x} \underbrace{\textstyle\sum_{y \in X} p(x, a, y) \big[r(x, a, y) + \delta u(y) \big]}_{\text{Hamilton–Funktion } H(x, a, u)}$$

☺ Zum Verständnis benötigen Sie die Definition (die Idee, das Ziel), gute Beispiele (konkrete Rechnungen, anschauliche Anwendungen) sowie starke Sätze (passende Werkzeuge, hilfreiche Rechenregeln).

Nutzenmaximierung und Bellman–Gleichung

☺ Oft ist unser Graph $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ **lokal-endlich**, das vereinfacht: Das Supremum über die (endliche!) Menge A_x wird also angenommen. Im allgemeinen Falle steht anstelle des Maximums das Supremum.

☺ Die **Bellman–Gleichung** scheint auf den ersten Blick kompliziert, ist aber recht einfach: In jedem aktiven Zustand $x \in X$ maximieren wir die Auszahlung $H(x, a, u)$ durch die Aktion a mit dem größtem Nutzen.

☺ **Optimale Züge** erkennen Sie an der Gewinnfunktion $u : X \to \mathbb{R}$: Sie liefert uns die optimale Auszahlung $u(x) = \max_{a \in A_x} H(x, a, u)$ und Aktionen $s(x) \in \operatorname{Arg\,max}_{a \in A_x} H(x, a, u)$, also eine optimale Strategie s!

☺ Gewinnoptimierung und Strategieoptimierung gehen Hand in Hand: Wir berechnen in jedem Zustand mit der optimalen Auszahlung zugleich alle optimalen Aktionen, und fassen zu optimalen Strategien zusammen.

☺ Diese allgemeine Methode ist ebenso einfach wie wirkungsvoll. Davon ausgehend können wir effiziente Algorithmen suchen oder geeignete Näherungen oder das Modell nach Bedarf erweitern.

Nutzenmaximierung und Bellman–Gleichung

☺ Wir arbeiten hier mit Zufallszügen, also einem **Markov–Graphen**. Allgemein ersetzen wir die deterministische Transition $\tau : A \to X$ durch $\tau : A \to [X] : a \mapsto \sum_y p(a,y)\, y$ mit $p(a,y) \ge 0$ und $\sum_y p(a,y) = 1$ und die Belohnung $r : A \to \mathbb{R} : a \mapsto r(a)$ durch $r : A \times X \to \mathbb{R} : (a,y) \mapsto r(a,y)$.

☺ Zur Vereinfachung gehen wir von einer endlichen Verteilung aus; die Erwartung ist dann eine endliche Summe (allgemein ein Integral). Zwecks Bequemlichkeit erstreckt sich die Summe über *alle* Zustände $y \in X$; wir setzen $p(a,y) = 0$, falls der Zustand y nicht erreicht wird.

Ausblick und Einordnung: Unser grundlegendes Modell nennt man auch ein **Markov–Entscheidungsproblem** [*markov decision problem*, MDP], seine rekursive Lösung illustriert die **Dynamische Programmierung**.

In der **Finanzmathematik** bewertet man so (amerikanische) Optionen. Ist der Graph zu groß, so nutzt man (Monte-Carlo-)**Simulationen**.

Im kontinuierlichen Falle spricht man auch von **optimaler Steuerung** [*optimal control*]. Die formale Behandlung ist technisch aufwändiger.

Nutzenmaximierung und Bellman–Gleichung

Zusammenfassung: Eingangsdatum ist ein (lokal-endlicher, Markov-) Graph $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ zusammen mit (beschränkten) Auszahlungen $v : \partial X \to \mathbb{R}$ und $r : A \to \mathbb{R}$ sowie einem festen Diskontfaktor $\delta \in [0,1]$. Das ist ein ausreichend flexibles Modell für viele Optimierungsaufgaben.

Die Bellman–Gleichung zu formulieren ist leicht, sie zu lösen aber nicht. Wir diskutieren im Folgenden zwei Ansätze zu ihrer praktischen Lösung:

1. Wir gehen in diesem Kapitel davon aus, dass wir die rechte Seite bereits kennen und so die linke Seite rekursiv berechnen können. Das ist eine typische Problemstellung zur Rückwärtsinduktion. Schon dieser einfachste Fall ist bereits sehr wirkungsvoll.
2. Allgemein steht u auf beiden Seiten der Gleichung und wir suchen Fixpunkte. Banachs Fixpunktsatz liefert Existenz und Eindeutigkeit und zudem ein iteratives Verfahren zur effizienten Berechnung. Wir führen dies in Kapitel D zu Markov–Spielen genauer aus.

Die Bellman–Gleichung ist theoretisch und praktisch relevant, etwa in der dynamischen Programmierung oder im bestärkenden Lernen.

Lösung der Bellman–Gleichung durch Rückwärtsinduktion

Satz B1F: Rückwärtsinduktion

(1) Gegeben sei ein Graph $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ mit terminaler Auszahlung $v : \partial X \to \mathbb{R}$, sofortiger Belohnung $r : A \to \mathbb{R}$ und Diskontfaktor $\delta \in [0, 1]$.

Ist Γ artinsch, so existiert zur Bellman–Gleichung genau eine Lösung $u : X \to \bar{\mathbb{R}}$, und diese können wir durch Rückwärtsinduktion berechnen.

(2) Dasselbe gilt für jeden artinschen Markov–Graphen, im Sinne von B1E, vorausgesetzt alle Erwartungswerte $H(x, a, u)$ sind wohldefiniert.

Hierzu setzen wir $x \to y$, falls $p(x, a, y) > 0$ für eine Aktion $a \in A_x$ gilt, und fordern, dass Γ keine unendlichen Wege $x_0 \to x_1 \to \dots$ enthält.

Die Beweisidee ist anschaulich klar und aus Beispielen vertraut: Wir beweisen Existenz durch Rekursion, Eindeutigkeit durch Induktion. Ist unser artinscher Graph Γ zudem lokal-endlich, so genügt hierzu eine **Höhenfunktion** $h : X \to \mathbb{N}$ mit $h|_{\partial X} = 0$ und $h(x) > h(y)$ für alle $x \to y$. Die kleinste erhalten wir durch $h(x) = \min\{\, \alpha \in \mathbb{N} \mid \forall x \to y : \alpha > h(y) \,\}$. Ist Γ lediglich artinsch, so kann h Werte in Ordinalzahlen annehmen.

Lösung der Bellman–Gleichung durch Rückwärtsinduktion

Beweis: Wir nennen $u : X_u \to \bar{\mathbb{R}}$ definiert auf X_u mit $\partial X \subseteq X_u \subseteq X$ eine **partielle Gewinnfunktion**, falls gilt: (a) Am Rand gilt $u|_{\partial X} = v$. (b) Für alle $x \in X_u^\circ$ gilt $\{\, y \mid x \to y \,\} \subseteq X_u$ und $u(x) = \sup_{a \in A_x} H(x, a, u)$.

(c) Je zwei partielle Gewinnfunktionen $\tilde{u} : X_{\tilde{u}} \to \bar{\mathbb{R}}$ und $\hat{u} : X_{\hat{u}} \to \bar{\mathbb{R}}$ stimmen auf $Y = X_{\tilde{u}} \cap X_{\hat{u}}$ überein: Gäbe es $x_0 \in Y$ mit $\tilde{u}(x_0) \neq \hat{u}(x_0)$, so gilt $x_0 \in Y^\circ$, und es gibt einen Nachfolger $x_0 \to x_1$ mit $\tilde{u}(x_1) \neq \hat{u}(x_1)$. So fortfahrend erhalten wir einen unendlichen Weg $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots$. Das widerspricht unserer Voraussetzung, dass der Graph Γ artinsch ist.

(d) Sei nun $u := \bigcup \tilde{u}$ die Vereinigung aller partiellen Gewinnfunktionen $\tilde{u}$. Dank (c) ist u eine partielle Gewinnfunktion, und zudem maximal.

Wir zeigen $X_u = X$. (e) Angenommen $x \in X$ und $\{\, y \mid x \to y \,\} \subseteq X_u$. Wir können dann $u(x) := \sup_{a \in A_x} H(x, a, u)$ berechnen und u somit fortsetzen falls $x \notin X_u$. Da u jedoch maximal ist, gilt bereits $x \in X_u$.

(f) Gäbe es $x_0 \in X \smallsetminus X_u$, so auch $x_0 \to x_1 \in X \smallsetminus X_u$ wegen (e). So fortfahrend erhalten wir einen unendlichen Weg $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots$. Das widerspricht unserer Voraussetzung, dass der Graph Γ artinsch ist.

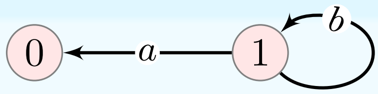
Lösung der Bellman–Gleichung durch Rückwärtsinduktion

Definition B1E erklärt zunächst nur die Gleichung, die wir lösen wollen. Über Existenz und Eindeutigkeit und Lösungsmethoden hingegen macht sie zunächst keine Aussagen. Dazu benötigen wir genauere Information.

Tatsächlich gilt im Allgemeinen weder Existenz noch Eindeutigkeit, und allgemeine Lösungsmethoden haben wir nur in günstigen Situationen. Zur Illustration nochmal unser einfaches, aber eindrückliches Beispiel:

Beispiel B1G: Existenz und Eindeutigkeit

Wir betrachten das obige nicht-artinsche Spiel:



(1) Für $r(b) > 0$ und $\delta = 1$ existiert überhaupt keine Lösung $u : X \to \mathbb{R}$! Für diese gälte nämlich $u(1) \ge r(a) + v(0)$, also $u(1) \ge r(b) + u(1)$, somit $0 \ge r(b)$. (Die Lösung $u(1) = \infty$ schließen wir hier aus.)

(2) Für $r(b) = 0$ und $\delta = 1$ existieren unendlich viele Lösungen! Jede Wahl $u(1) \ge r(a) + v(0)$ ist als Lösung möglich.

(3) Für $\delta \in [0, 1[$ existiert genau eine Lösung $u : X \to \mathbb{R}$, nämlich $u(1) = \max\{\, r(a) + \delta v(0),\ r(b)/(1 - \delta) \,\}$.

Lösung der Bellman–Gleichung durch Rückwärtsinduktion

Dieses Beispiel ist zwar noch lächerlich simpel, doch bereits erhellend: Es ist nicht artinsch, und prompt misslingen Existenz und Eindeutigkeit! Wir sehen hier bereits deutlich, dass der Fall $\delta = 1$ meist knifflig ist, während sich für $\delta \in [0, 1[$ alle Probleme in Wohlgefallen auflösen.

Das gilt allgemein: In Kapitel D nutzen wir Banachs Fixpunktsatz D2A. Satz D2K garantiert: Für $\delta \in [0, 1[$ hat die Bellman–Gleichung genau eine Lösung, und diese lässt sich durch die Fixpunktiteration konstruieren bzw. approximieren. Zudem gilt Bellmans Optimalitätsprinzip (D2N).

In diesem und dem nächsten Kapitel wollen wir zunächst möglichst elementar vorgehen. Wir betrachten daher zuerst Anwendungen, deren Graphen artinsch sind, meist zusätzlich sogar endlich. Damit lassen sich bereits erstaunlich viele Probleme lösen.

Hierzu bereitet die genial-einfache Rückwärtsinduktion die Grundlage: Satz B1F garantiert, dass für artinsche Graphen die Rechnung gelingt! Der folgende Satz erklärt, dass die Bellman–Gleichung tatsächlich tut, was sie soll: Lokale und globale Optimierung stimmen überein!

Sei $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ ein artinscher (Markov–)Graph mit Auszahlungen $v : \partial X \to \mathbb{R}$ terminal und $r : A \to \mathbb{R}$ instantan und Diskontfaktor $\delta \in [0, 1]$.

Sei $u : X \to \mathbb{R}$ die (dank B1F) eindeutige Lösung der Bellman–Gleichung. Wie kann diese Auszahlung u realisiert werden, oder gar noch höhere?

Für jede Strategie $s \in S(\Gamma)$ berechnen wir dazu die Gewinnerwartung $u_s : X \to \mathbb{R}$ durch Rückwärtsinduktion. Sei $u_* := \sup\{\, u_s \mid s \in S(\Gamma) \,\}$. Das ist in jedem Zustand die höchste realisierbare Auszahlung.

Satz B1H: Bellmans Optimalitätsprinzip, hier rekursiv

(1) Es gilt $u_* \le u$: Lokale Optimierung ist mindestens so gut wie globale.

(2) Wird in der Bellman–Gleichung überall das Maximum angenommen, dann existieren optimale Strategien $s \in S(\Gamma)$ mit $u_s = u$: Wir wählen dazu $s(x) \in \operatorname{Arg\,max}_{a \in A_x} H(x, a, u)$ für jeden Zustand $x \in X^\circ$.

☺ Für jeden lokal-endlichen, artinschen (Markov-)Graphen gilt $u = u_*$: Kurz gesagt, lokale und globale Optimierung stimmen hier überein!

Beweis: (1) Wir zeigen $u_* \le u$, also $u_s \le u$ für jede Strategie $s \in S(\Gamma)$. Dies gilt für jeden Endzustand $x \in \partial X$, denn $u_s(x) = u(x) = v(x)$.

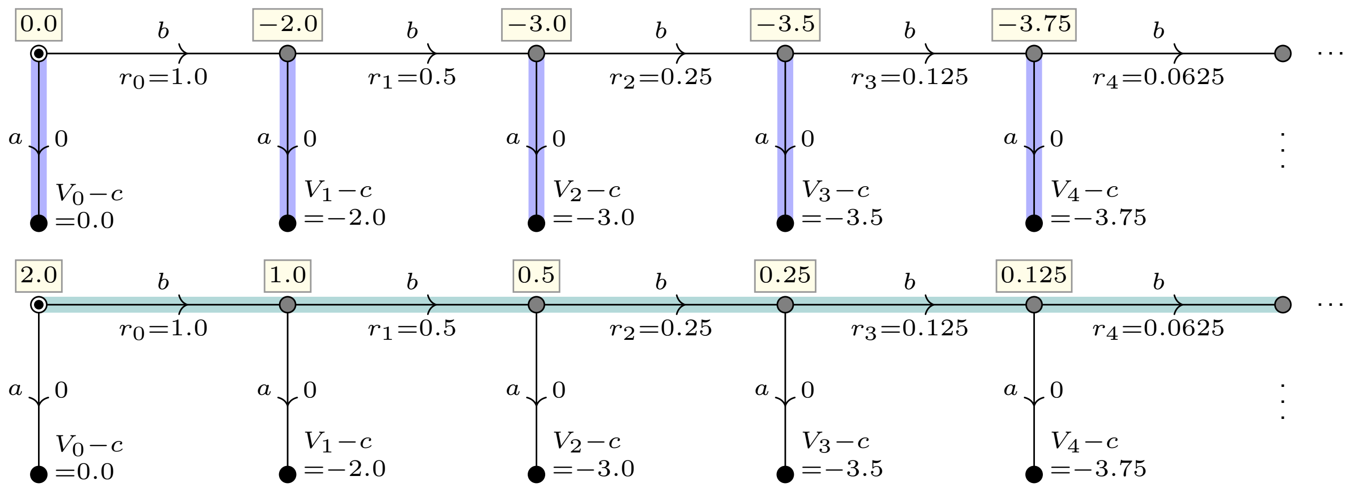
Sei $x \in X^\circ$. Aus $u_s(y) \le u(y)$ für alle $x \to y$ folgt $u_s(x) \le u(x)$, denn $u_s(x) = H(x, s(x), u_s) \le H(x, s(x), u) \le \sup_{a \in A_x} H(x, a, u) = u(x)$.

Existiert $x_0 \in X$ mit $u_s(x_0) > u(x_0)$, so auch $x_0 \to x_1$ mit $u_s(x_1) > u(x_1)$. So fortfahrend erhalten wir einen unendlichen Weg $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots$. Das widerspricht unserer Voraussetzung, dass der Graph Γ artinsch ist.

(2) In jedem terminalen Zustand $x \in \partial X$ gilt $u(x) = u_s(x) = v(x)$. In jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ gilt zudem $u(x) = H(x, s(x), u)$ und $u_s(x) = H(x, s(x), u_s)$. Per Rückwärtsinduktion B1F folgt $u_s = u$. QED

☺ Bellman–Gleichung, Lösungsmethoden und Optimalitätsprinzip sind faszinierende und wichtige Themen der Optimierung. Wir werden dies in Kapitel D fortführen und „analytische“ Werkzeuge zur Verfügung stellen, die die „kombinatorische“ Rückwärtsinduktion wunderbar ergänzen. Beide Sichtweisen und Techniken sind extrem nützlich.

Exotische Lösungen der Bellman–Gleichung



Beispiel B1I: exotische Lösungen der Bellman–Gleichung

Unser Graph Γ habe die aktiven Zustände $x \in X^\circ = \{\, b^k \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ mit Aktionen $A_x = \{a, b\}$ und Belohnungen $r(b^k, a) = 0$ und $r(b^k, b) = r_k$. Terminal sind $\partial X = \{\, b^k a \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ mit Auszahlungen $v(b^k a) = V_k - c$.

Gegeben seien hierzu $0 < r_k < v_k$ in $\mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=0}^\infty v_k < \infty$. Wir setzen $R_k = \sum_{i=k}^\infty r_i$ und $V_k = \sum_{i=k}^\infty v_i$ und wählen $c > V_0 - R_0 > 0$. Die Skizze zeigt $r_k = 2^{-k}$, $R_k = 2^{1-k}$, $v_k = 2^{1-k}$, $V_k = 2^{2-k}$ und $c = -4$.

Exotische Lösungen der Bellman–Gleichung

Übung: Zeigen Sie, dass die abgebildeten Funktionen $u_0, u_1 : X \to \mathbb{R}$ die Bellman–Gleichung lösen: Einerseits die pessimistische Lösung $u_0(b^k) = V_k - c$, andererseits die optimistische Lösung $u_1(b^k) = R_k$.

Hier gilt $u_0 < u_1$; bei **globaler Optimierung** würde man also u_1 wählen. Bei **lokaler Optimierung** erlaubt s_0 keine Möglicheit der Verbesserung.

⚠ In Fällen wie diesem gilt Bellmans Optimalitätsprinzip nicht! Unsere allgemeinen Werkzeuge versagen hier, wir müssen genauer hinschauen.

Bemerkung: Weitere Bellman–Lösungen sind $u(b^k) = R_k + v(b^\infty)$. Die Konstante $v(b^\infty) \in \mathbb{R}$ ist dabei die (fiktive) Auszahlung im „unendlich fernen“ Randpunkt b^∞. Wir vereinbaren hier kurzerhand $v(b^\infty) = 0$.

Das Beispiel B1I ist raffiniert gebaut und notgedrungen nicht-artinsch. Für jeden artinschen Graphen können wir dank Rückwärtsinduktion B1F die Bellman–Gleichung rekursiv lösen, und diese Lösung ist eindeutig!

Ist unser artinscher Graph Γ zudem lokal-endlich, so ist diese Lösung tatsächlich optimal dank B1H. In diesen günstigen Fällen geht alles gut. Kapitel D zeigt einen zweiten Ausweg aus unserer Misslage: Diskont!

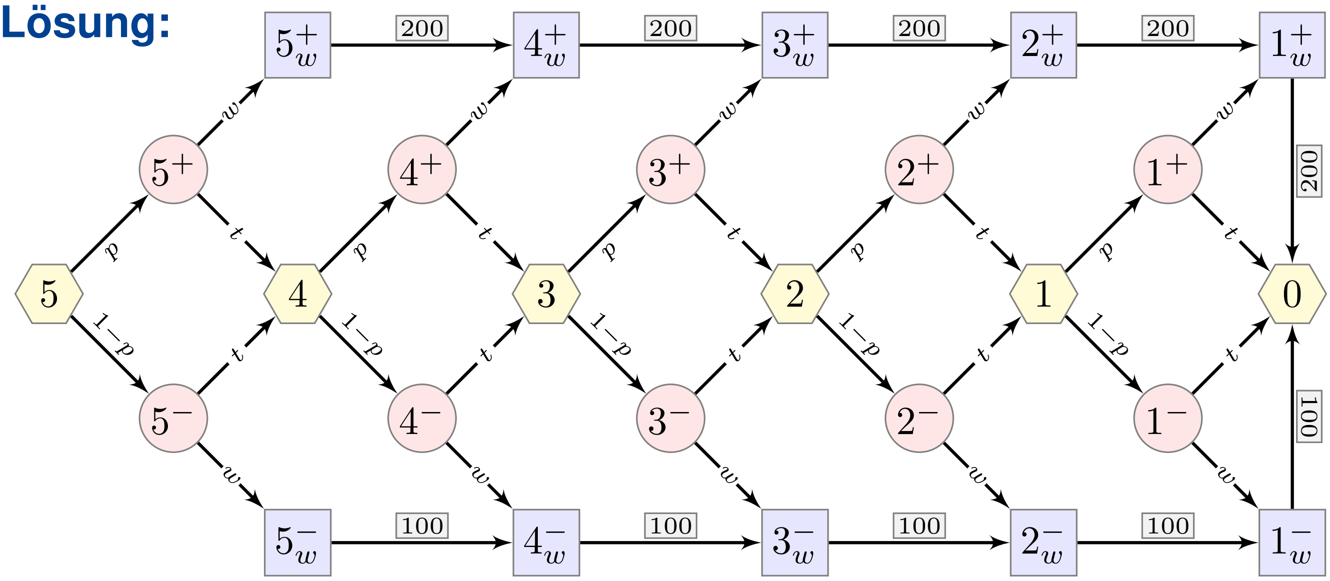
Optimal entscheiden: Work & Travel

B201

Aufgabe: Ihr Work & Travel endet in 5 Wochen. Zu Beginn jeder Woche erhalten Sie ein Jobangebot: mit Wkt $p = 0.4$ ist es gut für 200€, mit Wkt $1 - p = 0.6$ schlecht für 100€. Wenn Sie es annehmen, bleiben Sie für die restliche Zeit dabei. Andernfalls reisen Sie eine Woche umher.

Formulieren Sie dies als Graph. Wie viele Strategien gibt es? Welche davon sind optimal profitabel? Welches Einkommen erwarten Sie?

Lösung:



Optimal entscheiden: Work & Travel

B202
Erläuterung

Sie sehen hier den sorgsamen Übergang von der realen Fragestellung zu einem **mathematischen Modell**. Dies nennen wir **Modellierung**.

Meist gibt es mehrere mögliche Modelle zur gegebenen Fragestellung: Der umgangssprachliche Text ist wunderbar anschaulich und hoffentlich motivierend. Leider ist er in manchen Details noch nicht explizit, sondern appelliert an Weltwissen und Konventionen. Die Übersetzung in einen Graphen ist kurz und zudem präzise: Hier bleiben keine Fragen offen. Zum Beispiel: Reisen und Arbeiten kostet gleich viel Lebensunterhalt. Andernfalls codieren wir Reisekosten und Lebensunterhalt im Graphen.

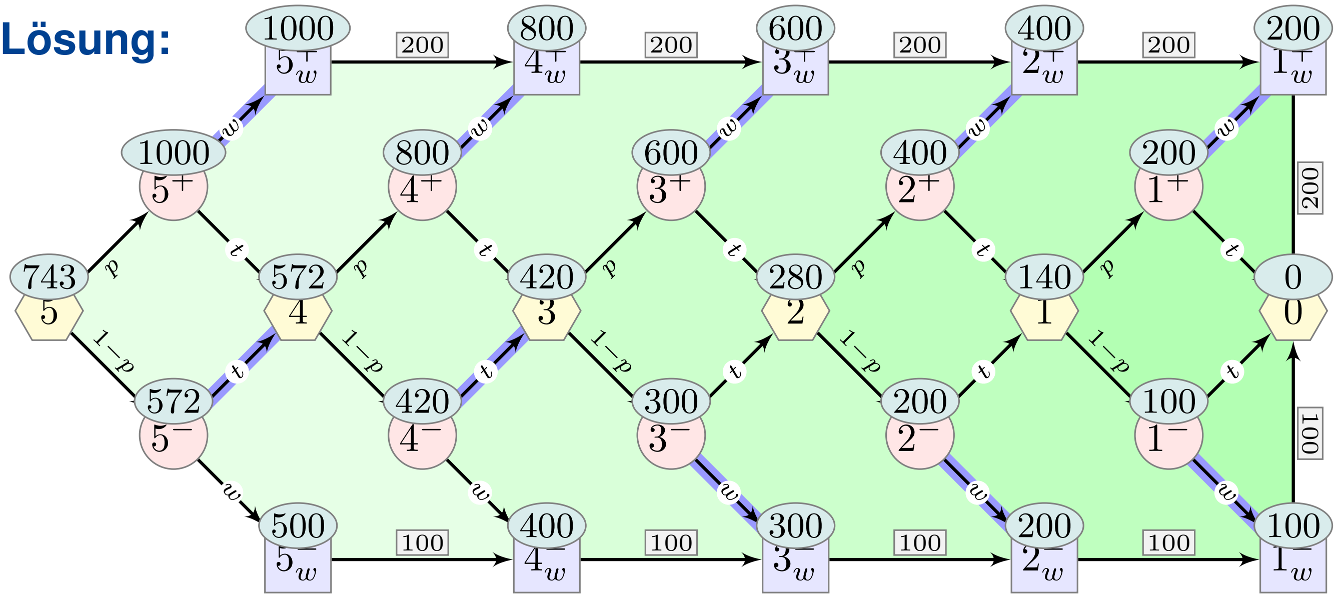
Der hier gezeigte Graph ist ein **Markov–Graph**, denn er enthält neben den Spielzügen als möglichen Aktionen des Spielers realistischerweise auch Zufallszüge, auf die der Spieler keinen Einfluss hat. *That's life.*

In jeder der zehn Entscheidungssituationen $5^\pm, 4^\pm, 3^\pm, 2^\pm, 1^\pm$ muss eine Entscheidung für $w =$ work oder $t =$ travel getroffen werden. Daher gibt es hier $2^{10} = 1024$ Strategien. Die optimale finden Sie durch Rekursion!

🙂 Der Graph ist erfreulich klein; als Baum entfaltet wäre alles breiter.

Optimal entscheiden: Work & Travel

Lösung:



In Worten: Einen guten Job nehmen Sie immer an, einen schlechten nur in den letzten 3 Wochen. Bei ≥ 4 Wochen lohnt sich noch abzuwarten.

Diese quantitative Analyse erfordert vor allem Sorgfalt und Geduld. Die entscheidende Idee ist, vom Ende aus rekursiv vorzugehen.

🙂 Gespielt wird vorwärts, optimiert wird rückwärts: per Induktion!

Optimal entscheiden: Work & Travel

⚠ Wenn Sie diese Art von Problemstellung zum ersten Mal erkunden, sind Sie vermutlich versucht, in der Zeit wie üblich *vorwärts* zu denken.

🙂 Wir lösen das Problem rekursiv, indem wir *rückwärts* argumentieren. Das führt zum Erfolg: Rekursives Denken ist zielgerichtetes Denken!

🙂 Zur Vereinfachung habe ich die Zustände rückwärts nummeriert. Die Rückwärtsinduktion ist somit eine ganz gewöhnliche Induktion.

Das Thema Rekursion ist ebenso wichtig wie sagenumwoben. Dazu gibt es zahlreiche Weisheiten, teils ernst, teils scherzhaft:

Um Rekursion zu verstehen, muss man klein anfangen
und zunächst einmal Rekursion verstehen.

Insbesondere in der Programmierung ist Rekursion allgegenwärtig. Sie ist ein Universalwerkzeug zum Lösen komplexer Probleme.

Recursion makes good programmers better
and bad programmers obvious.

Optimierung durch Rekursion / Induktion

Übung: Probieren Sie einige der anderen 1023 Strategien aus. Gibt es bessere? gleich gute? Die Sachlage erweist sich als knifflig! Ist wenigstens die optimale Gewinnerwartung eindeutig / wohldefiniert? Warum spreche ich dennoch kurzerhand von *der* optimalen Strategie? Ist diese zudem *teilspielperfekt*, also optimal zu jedem Startzustand?

Übung: Vorwärts gelesen scheinen nach den Entscheidungen $2^{\pm} \mapsto w$ alle folgenden Entscheidungen $\{3^{\pm}, 4^{\pm}\} \to \{w, t\}$ ganz überflüssig! Warum müssen Sie sich dennoch ebenso genau damit befassen? Sind diese Züge wichtig für das Spiel? oder für die Analyse?

🙂 Gespielt wird vorwärts, optimiert wird rückwärts: per Induktion!

Die entscheidende Lösungsidee ist hier die **graphische Darstellung**. Unser kunstvoller Graph hilft uns zunächst einmal zur Anschauung, aber dann auch ganz praktisch zur Organisation unserer Rechnung.

Die Rechnung kann automatisiert werden! **Topologische Sortierung** heißt in der Informatik jede geschickte Reihenfolge der Positionen, so dass jedes Teilproblem nur kleinere nutzt, die bereits berechnet wurden.

Optimierung durch Rekursion / Induktion

Übung: Implementieren Sie die Rechnung in einer Tabellenkalkulation. Sie finden eine einfache Lösung in der Datei `Work-and-Travel.ods`.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Work and Travel**		Week -5		Week -4		Week -3		Week -2		Week -1
2			1000,00		800,00		600,00		400,00		200,00
3	0,400	1000,00	0,400	800,00	0,400	600,00	0,400	400,00	0,400	200,00	
4	743,20	maximize	572,00	maximize	420,00	maximize	280,00	maximize	140,00	maximize	0,00
5	0,600	572,00	0,600	420,00	0,600	300,00	0,600	200,00	0,600	100,00	
6			500,00		400,00		300,00		200,00		100,00

Wegen $\delta = 1$ gibt es im Beispiel keinen Diskont / Wertverlust / Inflation. Wir haben hier die Auszahlungen auf einige Kanten verteilt; alternativ können wir $n_w^{\pm}$ zu terminalen Zuständen mit Auszahlungen machen.

Übung: Variieren Sie die Konstanten, berechnen Sie weitere Beispiele. Durch solche *Erfahrung* entwickeln Sie ein *Gefühl* für das Problem.

Verfeinerungen: (a) Mit Wkt $q^{\pm}$ wird Ihnen zu Wochenbeginn gekündigt.
(b) Reisen / Arbeiten kostet Geld, zur Vereinfachung einen festen Betrag.
(c) Sie benötigen mindestens $400€$, ansonsten maximieren Sie.
Das erweitert den Graphen, die Lösungsmethode bleibt gleich.

Optimierung durch Rekursion / Induktion

🙂 Der Mensch ist fähig, meist jedoch widerwillig, komplexe logische Zusammenhänge zu durchdringen, insbesondere Rekursion / Induktion.

Thinking fast and slow von Daniel Kahneman, Wirtschaftsnobelpreis 2002, unterscheidet zwei verschiedene Arbeitsweisen unseres Gehirns:

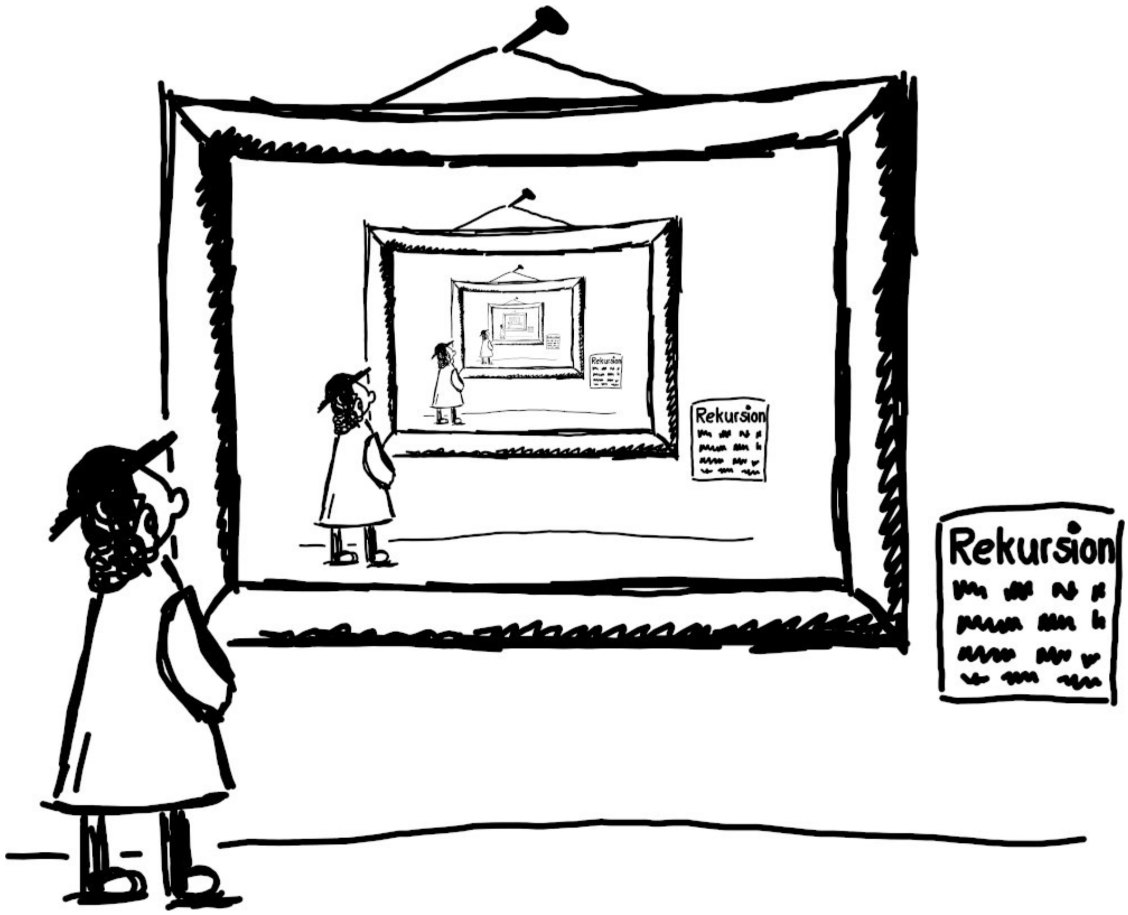
1. Schnell, automatisch, immer aktiv, emotional, stereotyp, unbewusst
2. Langsam, anstrengend, selten aktiv, logisch, berechnend, bewusst

Unsere mentalen Fähigkeiten sind Ergebnis einer langen Evolution, und unter diesen Bedingungen eine näherungsweise Optimierung: Viele Entscheidungen müssen schnell und energiesparend getroffen werden; nur wenige verlangen eine genauere, aufwändigere Analyse.

Sie vertrauen oft Ihrem Instinkt, Bauchgefühl oder Erfahrung, insb. wenn Sie keine genaue Information haben oder keine Zeit, sie auszuwerten. Ihr Verstand braucht wesentlich länger, um zu einem Urteil zu kommen. Das lohnt sich, wenn Sie die Muße haben und das Ziel wichtig genug ist.

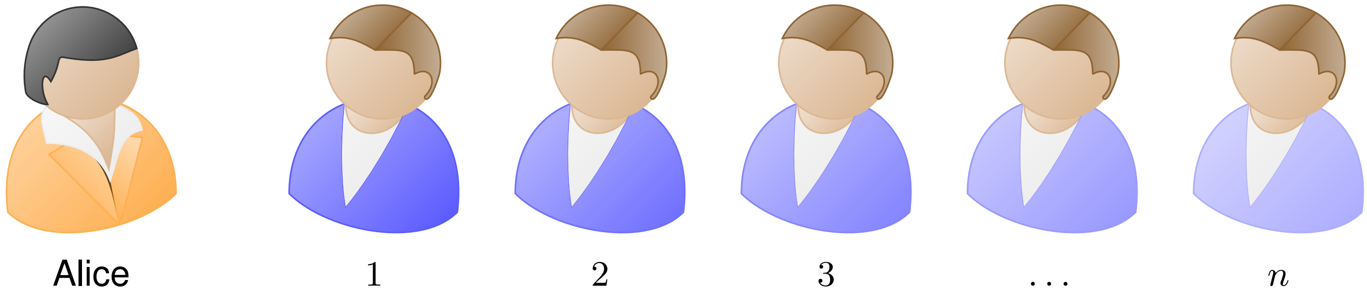
In Ihrem Mathematikstudium lernen Sie diese zweite Vorgehensweise. Dies hilft zu umsichtiger Analyse und vorausschauendem Handeln.

Optimierung durch Rekursion / Induktion



Optimale Partnerwahl: Looking for Mr. Right. . . or Mr. Almost

Marriage problem: When to stop dating and start getting married?



Alice begegnet im Laufe ihres Lebens n potentiellen Ehemännern. Bei Kandidat $k = 1, 2, 3, \dots, n$ stellt sie die Eignung $X_k \in [0, 1]$ fest.

Er verliebt sich in die bezaubernde Alice, sie kann ihn nun heiraten oder zurückweisen. Diese Entscheidung ist in jedem Falle endgültig.

Aufgabe: Wie anspruchsvoll soll Alice sein? Was ist optimal? Welche Eignung ihres Ehepartners kann Alice maximal erwarten?

Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig und gleichverteilt. (Übung für Hartgesottene: Andere Verteilungen sind ebenso möglich.)

⚠ Alice ist vollkommen rational und egoistisch. Warum auch nicht?

Optimale Partnerwahl: Looking for Mr. Right. . . or Mr. Almost

Lösung: Alice ermittelt die optimale Strategie durch Rekursion wie folgt: Sie heiratet den letzten Kandidaten n auf jeden Fall. Erwartete Eignung:

$$\mu_n = \mathbf{E}(X_n) = 1/2$$

Sie heiratet Kandidat $n-1$, falls $X_{n-1} > \mu_n$. Erwartete Eignung:

$$\mu_{n-1} = \mathbf{E}(\max(X_{n-1}, \mu_n)) = 1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 3/4 = 5/8$$

Sie heiratet Kandidat $n-2$, falls $X_{n-2} > \mu_{n-1}$. Erwartete Eignung:

$$\mu_{n-2} = \mathbf{E}(\max(X_{n-2}, \mu_{n-1})) = 5/8 \cdot 5/8 + 3/8 \cdot 13/16 = 89/128$$

☺ Alice’ Ansprüche steigen, je mehr Kandidaten noch warten. Ihre Ansprüche sinken, je weniger Kandidaten noch bleiben.

Das ist anschaulich klar und entspricht der Alltagserfahrung. Nun können wir es begründen und genauer quantifizieren.

Vielleicht klingt das alles recht herzlos und übertrieben formal, aber so ganz unrealistisch ist es dann auch wieder nicht!

Optimale Partnerwahl: Looking for Mr. Right. . . or Mr. Almost

Für den folgenden Satz kehren wir die einfach Nummerierung um:
Die „Rückwärtsinduktion“ ist dann eine ganz normale Induktion!

Satz B2A: optimale Partnerwahl: Looking for Mr. Right

Alice optimiert die Partnerwahl wie folgt. Sie setzt $a_0 = 0$ und rekursiv

$$a_{n+1} = (1 + a_n^2)/2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Warten noch genau $n + 1$ Kandidaten, so heiratet Alice den nächsten Kandidaten genau dann, wenn seine Eignung größer als a_n ist.

Mit dieser optimalen Strategie erwartet Alice die Eignung a_{n+1}.
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wächst streng monoton und konvergiert gegen 1.

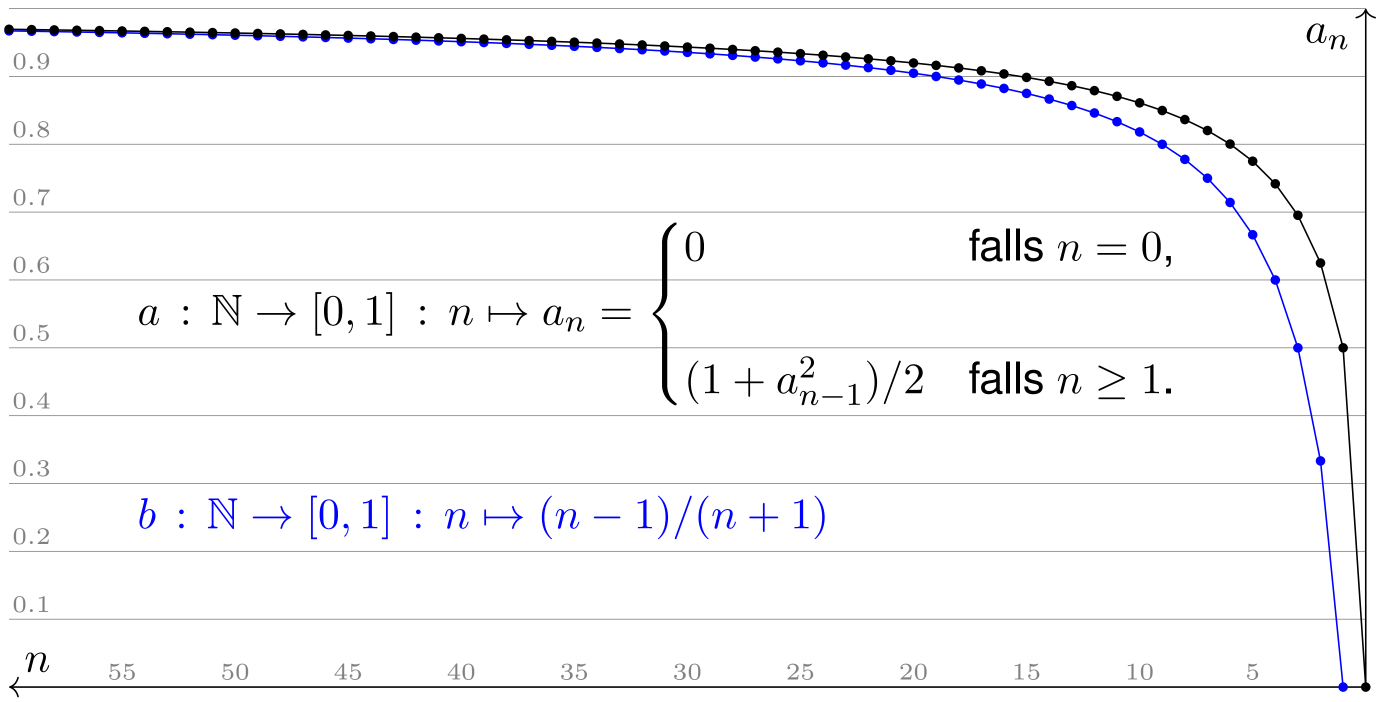
Übung: Beweisen Sie diesen Satz per Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

☺ Die ungefähre Form der Kurve $n \mapsto a_n$ ist anschaulich plausibel.
Die genauen Werte können wir wie oben berechnen – und beweisen.

☺ Steht diese Aussage einmal vor Ihnen, so ist der Nachweis leicht:
Als bewährtes Standardverfahren greift hier die vollständige Induktion!

Optimale Partnerwahl: Looking for Mr. Right. . . or Mr. Almost

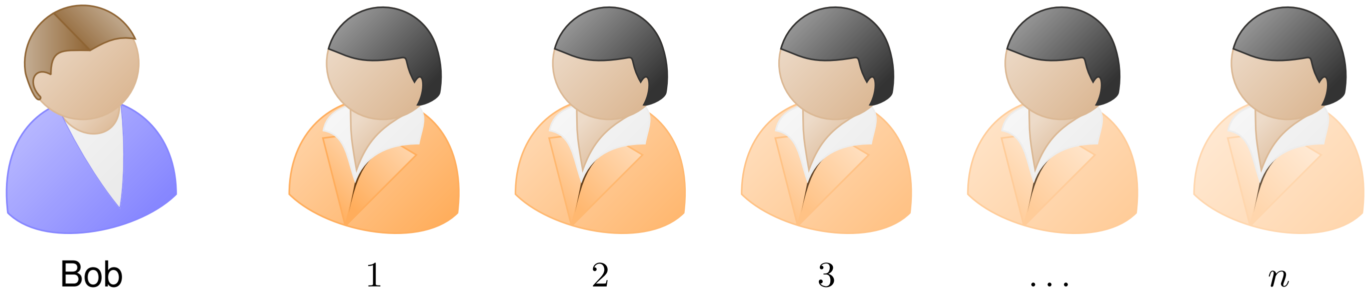
Alice’ Erwartung bzw. Anspruch a_n als Funktion der Kandidatenzahl n:



Fun fact: b_n ist die Erwartung des *zweithöchsten* Wertes in $X_1, \dots, X_n$.
Alice optimiert erfolgreich, doch es bleibt etwas Wehmut: Eines Tages begegnet ihr Mr. Right, doch sie ist schon mit Mr. Almost verheiratet.

Optimales Stoppen: das Sekretärinnen-Problem

Secretary problem: When to stop interviewing and start hiring?



Bob stellt eine Sekretärin (w/m/d) ein. Dazu sind n Bewerberinnen eingeladen, in zufälliger Reihenfolge. Bob sucht die *beste* Kandidatin. Im Interview mit Kandidatin k kann er feststellen, ob sie besser ist als alle vorigen. Er kann sie sofort einstellen oder ihr definitiv absagen.

Aufgabe: Wie soll Bob vorgehen? Wie maximiert er seine Trefferwkt?

Die 37%–Regel: Interviewe zunächst $\lceil n/\mathrm{e} \rceil$ Kandidatinnen mit Absage; dann wähle die nächste Kandidatin, die besser ist als alle vorigen.
Das klingt verrückt? Es ist nachweislich die beste Strategie!
Abwägung zwischen Exploration vs Exploitation.

Optimales Stoppen: das Sekretärinnen-Problem

Problemstellung: Sie bekommen n Angebote zu Zeiten $t = 1, 2, \dots, n$. Wir setzen $X_t{=}1$, falls Angebot t besser ist als alle vorigen, sonst $X_t{=}0$.

Sie können solch ein Angebot entweder annehmen ($s =$ select & stop) oder dieses Angebot ein für alle Mal ablehnen ($r =$ reject & resume).

Sie wollen unter allen Angeboten das *beste* auswählen, also das letzte Angebot t mit $X_t = 1$ annehmen.

Beispiele: Eine optimale Online-Auktion mit sofortiger Zu- oder Absage. Den besten Gebrauchtwagen kaufen. Die beste Tankstelle entlang einer langen Straße auswählen. Die beste Sekretärin einstellen. Heiraten?

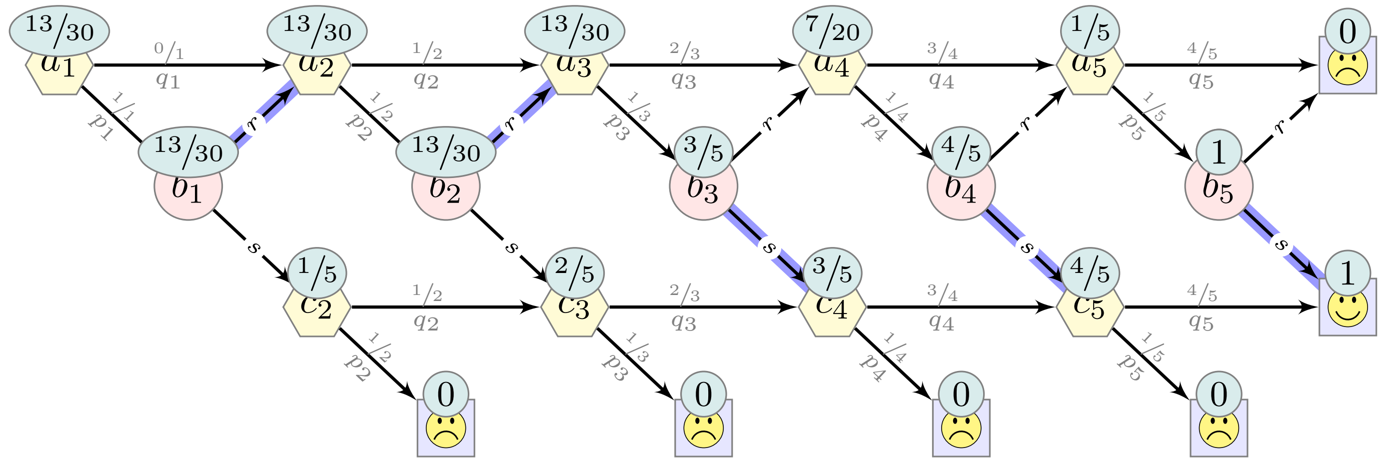
(a) Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots, X_n : \Omega \to \{0, 1\}$ seien unabhängig mit den Wkten $\mathbf{P}(X_t{=}1) = p_t$ und $\mathbf{P}(X_t{=}0) = q_t = 1 - p_t$.

(b) Speziell betrachten wir n unterschiedlich gute Angebote in zufälliger Reihenfolge, mit Gleichverteilung der $n!$ Anordnungen, also $p_t = 1/t$.

Aufgabe: (1) Formulieren Sie dieses Spiel als einen Markov–Graphen. (2) Was ist die beste Strategie? (3) Was ist die optimale Erfolgswkt?

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

Aufgabe: Untersuchen Sie den Fall $n = 5$ mit $p_k = 1/k$ und $q_k = 1 - p_k$.



Aufgabe: Wie gelingt dies allgemein? Beweisen Sie folgenden Satz:

Satz B2B: *Sum the odds to one and stop*, Bruss 2000

Sei $s \in \{1, \dots, n\}$ der größte Index mit $R_s := \sum_{k=s}^{n} p_k/q_k \ge 1$. Dann ist folgende Strategie optimal: Wähle das erste Angebot $k \ge s$ mit $X_k = 1$.

Die optimale Gewinnwkt ist dabei gleich $R_s Q_s$ mit $Q_s = q_s \cdots q_n$.

Die 37%–Regel: Für $p_k = 1/k$ gilt $s \gtrapprox n/\mathrm{e}$ und $R_s Q_s \gtrapprox 1/\mathrm{e} \gtrapprox 0.367$.

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

☺ Dieser Satz ist wunderbar effizient und sein Beweis ebenso elegant. Der Algorithmus stammt aus dem wunderschönen Artikel von F.T. Bruss: *Sum the odds to one and stop.* Ann. of Prob. 28 (2000) 1384–1391.

Beweis: Wir berechnen die Gewinnwkt w in jedem Zustand a_k, b_k, c_k bei optimaler Strategie. Wie immer gehen wir hierzu rekursiv vor:

Im Zustand c_k ist die Gewinnwkt offensichtlich $w(c_k) = Q_k := q_k \cdots q_n$.
Wir setzen $R_k := p_k/q_k + \dots + p_n/q_n$ und finden s mit $R_s \ge 1 > R_{s+1}$.
Terminal, für $k = n + 1$, gilt $w(c_k) = 1 = Q_k$ und $w(a_k) = 0 = R_k Q_k$.

(1) Im Falle $R_k < 1$ gilt $w(a_k) = R_k Q_k$ und $w(a_{k-1}) = R_{k-1} Q_{k-1}$:
Im Zustand b_{k-1} wählen wir zwischen $w(a_k) = R_k Q_k$ und $w(c_k) = Q_k$.
Da wir $R_k < 1$ voraussetzen, entscheiden wir uns optimal für c_k.
Daraufhin gilt $w(a_{k-1}) = p_{k-1} Q_k + q_{k-1} R_k Q_k = R_{k-1} Q_{k-1}$.

(2) Im Falle $R_k \ge 1$ hingegen entscheiden wir uns optimal für a_k.
(Für $R_k = 1$ herrscht Indifferenz, die Wahl c_k wäre genauso gut.)
Die Gewinnwkt ist dann $w(a_{k-1}) = w(a_k)$, wie oben gezeigt.
Für alle $k = 1, \dots, s$ gilt daher $w(a_k) = w(a_s) = R_s Q_s$. $\boxed{\text{QED}}$

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

Die optimale Stoppzeit s_n und die Gewinnwkt w_n für $n = 1, \dots, 40$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s_n	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
w_n	1	$1/2$	$1/2$	$11/24$	$13/30$	$77/180$	$29/70$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\approx$	1.000	0.500	0.500	0.458	0.433	0.428	0.414	0.410	0.406	0.399

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
s_n	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8
w_n	0.398	0.396	0.392	0.392	0.389	0.388	0.387	0.385	0.385	0.384

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
s_n	9	9	9	10	10	10	11	11	11	12
w_n	0.383	0.383	0.382	0.381	0.381	0.380	0.380	0.379	0.379	0.379

n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
s_n	12	13	13	13	14	14	14	15	15	16
w_n	0.378	0.378	0.378	0.377	0.377	0.377	0.376	0.376	0.376	0.376

Optimales Stoppen: der Bruss–Algorithmus

Übung: Wählen Sie einen kleinen Wert n und berechnen Sie das Paar (s_n, w_n) von Hand. Vorbild: Der Fall $n = 5$ ist oben detailliert ausgeführt. Kontrolle: Für $n \le 7$ finden Sie den exakten Wert w_n in obiger Tabelle. Für Werte $n \le 40$ finden Sie zudem eine numerische Näherung.

Aufgabe: Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung von (s_n, w_n). Kontrolle: Vergleichen Sie Ihre Werte mit der obigen Tabelle.

Lösung: In Python sieht eine mögliche Lösung wie folgt aus:

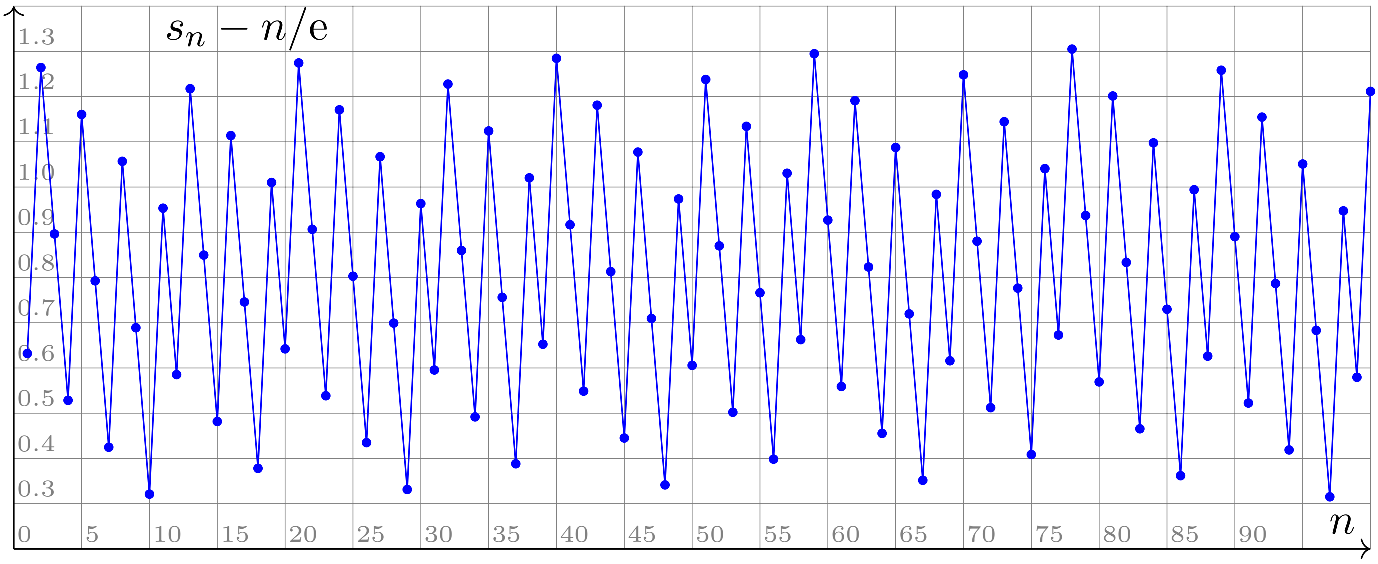
```python
def bruss(n):
    k = n; r = 0
    while r < 1: k -= 1; r += 1/k
    return k+1, r*k/n
```

Der Aufruf `bruss(5)` liefert als Ergebnis das Wertepaar `3, 0.433`. Auf diese Weise wurden die Werte für die obige Tabelle berechnet.

Die Korrektheit dieser Rechnung verdanken wir dem obigen Satz: Grundlagen / Theorie und Programmierung / Anwendung ergänzen sich!

Aufgabe: Vergleichen Sie die Stoppzeit s_n mit der Faustformel n/e.

Lösung: Die Berechnung übernimmt bequem unser obiges Programm. Die folgende Graphik zeigt die Differenz $s_n - n/\mathrm{e}$ für $n = 1, \dots, 100$:



Somit gilt $s_n = \lceil n/\mathrm{e} \rceil$ oder $s_n = \lceil n/\mathrm{e} \rceil + 1$, zumindest für alle $n \le 100$. Das bietet eine einfache, doch recht genaue Näherungsformel für s_n.

☺ Wenn Sie die logische Entwicklung dieser Aufgabe nachvollziehen, werden Sie ein interessantes Wechselspiel erkennen und verstehen:

- Wir beginnen mit einem **konkreten Beispiel**, nämlich der Analyse des Spiels für den Fall $n = 5$.
- Dadurch erkennen wir das **allgemeine Muster** und können dies anschließend als Satz B2B beweisen.
- Mit dem so gewonnenen Algorithmus können wir **weitere Beispiele** lösen und mehr Daten erschließen.
- Daran beobachten wir ein **genaueres Muster**. Dies wollen wir nun als Satz B2C beweisen!

Dieses Wechselspiel von theoretischen Grundlagen und praktischen Anwendungen, von mathematischen Sätze und numerischen Experimenten, ist durchaus typisch und überaus erfolgreich.

☺ So können wir uns langsam auf unbekanntes Terrain vortasten, Muster erkennen, Vermutungen formulieren und Ergebnisse beweisen.

Zu $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ suchen wir die Stoppzeit s_n. Unsere numerischen Experimente lassen uns die folgende einfache Regel vermuten:

Satz B2c: die 37%–Regel

Das Sekretärinnen-Problem wird durch folgende Faustformel gelöst:

(1) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ gilt $s_n = \lceil n/\mathrm{e} \rceil$ oder $s_n = \lceil n/\mathrm{e} \rceil + 1$, kurzum:

$$\boxed{s_n \;\approx\; n/\mathrm{e}}$$

(2) Die Gewinnerwkt ist $w_n = R_s Q_s$ mit $R_s \gtrapprox 1$ und $Q_s = (s-1)/n$, also:

$$\boxed{w_n \;\approx\; 1/\mathrm{e}}$$

Für $n \to \infty$ gilt $s_n/n \to 1/\mathrm{e}$ und $w_n \to 1/\mathrm{e}$. Als numerische Werte haben wir $\mathrm{e} \approx 2.718$ und $1/\mathrm{e} \approx 0.368$, daher der Name „37%–Regel“.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Näherungen. *Tipp:* Approximieren Sie hierzu die Summe durch ein Integral, $\sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k} \gtrapprox \int_s^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(n/s)$.

Lösung: (1) Vorgegeben ist die natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$.
Wir suchen die Lösung $s \in \{1, \dots, n\}$ zu folgender Ungleichung:

$$(*) \qquad \sum_{k=s+1}^{n} \frac{1}{k-1} \;<\; 1 \;\le\; \sum_{k=s}^{n} \frac{1}{k-1}$$

Der Vergleich von Summe und Integral liefert hier:

$$\sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k} \;\ge\; \int_{x=s}^{n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; \ln\Big(\frac{n}{s}\Big)$$

$$\sum_{k=s-1}^{n-1} \frac{1}{k} \;\le\; \int_{x=s-2}^{n-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; \ln\Big(\frac{n-1}{s-2}\Big)$$

Wir setzen dazu stillschweigend $s \ge 3$ voraus, also $n \ge 5$.
Die kleinen Fälle $n \le 4$ lösen wir direkt, wie oben gezeigt.

Wir nutzen nun die Doppelungleichung $(*)$ und schließen:

$$\ln\left(\frac{n}{s}\right) < 1 \quad\Longrightarrow\quad s > n/\mathrm{e}$$

$$\ln\left(\frac{n-1}{s-2}\right) \ge 1 \quad\Longrightarrow\quad s \le n/\mathrm{e} + 2 - 1/\mathrm{e}$$

Da s eine ganze Zahl ist, folgt durch Auf/Abrunden:

$$\lceil n/\mathrm{e} \rceil \le s \le \lfloor n/\mathrm{e} + 2 - 1/\mathrm{e} \rfloor$$

Das bedeutet $s = \lceil n/\mathrm{e} \rceil$ oder $s = \lceil n/\mathrm{e} \rceil + 1$, oder zusammengefasst:

$$\boxed{s \in \lceil n/\mathrm{e} \rceil + \{0, 1\}}$$

Für große n ist die kleine verbleibende Unsicherheit $\{0, 1\}$ unerheblich. Für kleine n können wir mühelos eine Tabelle anlegen, wie oben erklärt. Allgemeiner Satz und numerische Rechnung ergänzen sich wunderbar!

Damit ist das Sekretärinnen-Problem gelöst, theoretisch und praktisch. Es ist ein Paradebeispiel für die rekursive Lösung komplexer Probleme. In der schön konkreten Geschichte steckt abstrakt allgemeine Wahrheit. Solche Modelle werden tatsächlich genutzt für Online-Auktionen u.ä.

Das ist nur die Spitze des Eisbergs, damit beginnt erst das Abenteuer! Fragen des **optimalen Stoppens** finden sich nahezu überall in der Stochastik, insbesondere der Ökonomik und der Finanzmathematik, zum Beispiel beim Börsenhandel mit Aktien oder Optionen.

Die Frage lautet allgemein: Wie wählen wir den optimalen Zeitpunkt für eine Aktion? Unser Ziel ist es, den erwarteten Gewinn zu maximieren oder die erwarteten Kosten zu minimieren. Viele solche Probleme können rekursiv gelöst werden, so wie in unserem Beispiel.

Diese Knobelaufgabe ist also nicht nur lehrreich für den Themenkreis Induktion / Rekursion / Rückwärtsinduktion, sondern zugleich ein erstes Anwendungsbeispiel, ein motivierender Startpunkt für die Optimierung, hier einer Stoppzeit, die weitreichende Anwendungen erschließt.

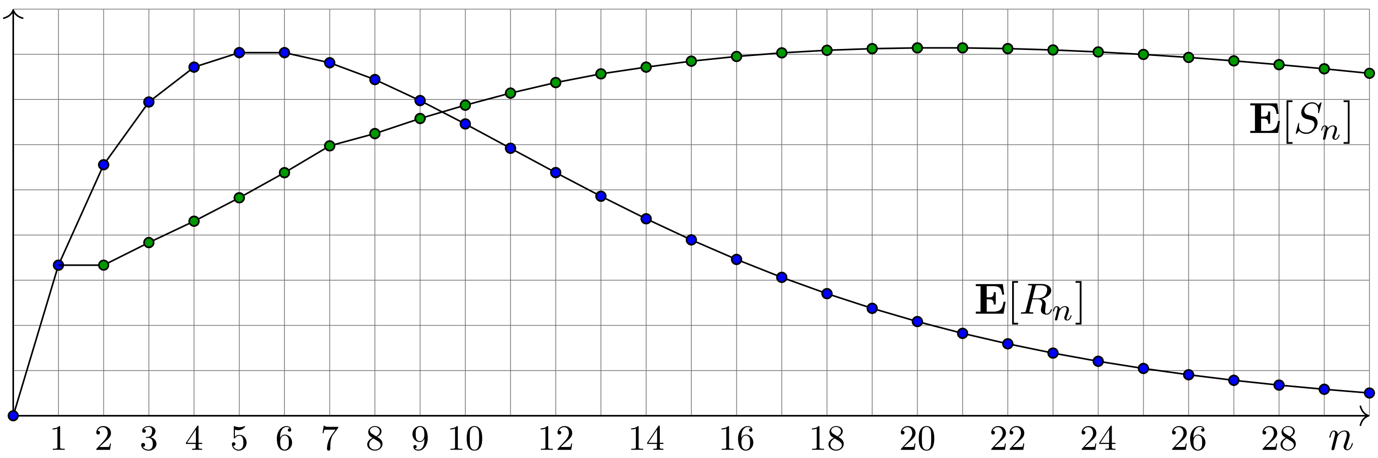
Stoppzeiten: Würfeln bis die Eins kommt

Beim Würfeln werden Augenzahlen addiert bis der Spieler aufhört; würfelt er jedoch eine Eins, so endet sein Spiel mit Totalverlust/Ruin.

Die Spielleiterin zahlt die erreichte Augensumme in Euro, verlangt aber 10€ Einsatz. Wie spielen Sie optimal? Können Sie Profit generieren?

Aufgabe: Sie nutzen die Strategie R_n: „Spiele n Runden (oder Ruin).“
(1) Welchen Gewinn erwarten Sie? Welche n maximieren den Gewinn?

Lösung: (1) Bei n Würfen erwarten wir den Gewinn $\mathbf{E}[R_n] = 4n(\frac{5}{6})^n$.
Bei $n \in \{5, 6\}$ erreichen wir das Maximum $4 \cdot 5(\frac{5}{6})^5 = 4 \cdot 6(\frac{5}{6})^6 \approx 8.038$.



Stoppzeiten: Würfeln bis die Eins kommt

Die Erwartung $\mathbf{E}[R_5] \approx 8$ ist noch zu gering. Gibt es bessere Strategien? Angenommen, im laufenden Spiel beträgt Ihre aktuelle Augensumme s. Sollten Sie noch einen weiteren Zug wagen oder besser jetzt aufhören?

Aufgabe: (2) Bis zu welcher Augensumme s lohnt sich ein weiterer Zug?

Lösung: (2) Nach einem weiteren Zug ist die erwartete Augensumme

$$e(s) = \frac{0 + (s+2) + (s+3) + (s+4) + (s+5) + (s+6)}{6} = \frac{5s + 20}{6}$$

Der nächste Zug ist genau dann profitabel (im Mittel), wenn $e(s) > s$ gilt:

$$s \overset{!}{<} \frac{5s + 20}{6} \quad \iff \quad s < 20$$

Das legt folgende Strategie nahe: Sie würfeln bis Sie Augensumme ≥ 20 erreichen (oder aber eine Eins zuvor Ihr Spiel mit Totalverlust ruiniert.)

Ist diese flexible Strategie wirklich besser als R_n mit fest 5 Runden? Können Sie damit sogar die 10€ Einsatz übertreffen und profitieren? Dazu müssen wir die Erwartungswerte berechnen und vergleichen!

Stoppzeiten: Würfeln bis die Eins kommt

Die Strategie S_n lautet: „Spiele bis mindestens n Punkte (oder Ruin).“
Anders als bei R_n nutzen Sie Informationen des bisherigen Verlaufs!

Aufgabe: (3) Welches Ergebnis liefert die Strategie S_n mit welcher Wkt?
(4) Welche der Strategien in $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erwartet den höchsten Gewinn?

Lösung: (3) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Die Strategie S_n liefert die Ergebnisse $0, n, n{+}1, n{+}2, n{+}3, n{+}4, n{+}5$ mit Wkten $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n \in [0, 1]$.

Für $n = 1$ sind diese Wkten offensichtlich $1/6, 0, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6$.

Rekursiv gilt dann $a_{n+1} = a_n + b_n/6$, $b_{n+1} = c_n$, $c_{n+1} = d_n + b_n/6$, $d_{n+1} = e_n + b_n/6$, $e_{n+1} = f_n + b_n/6$, $f_{n+1} = g_n + b_n/6$, $g_{n+1} = b_n/6$.

Mit einer Tabellenkalkulation erhalten wir mühelos die folgenden Werte; Sie finden dieses Beispiel unter `eiserm.de/lehre/HM3/Wuerfeln.ods`.

(4) Der erwartete Gewinn für die Strategie S_n ist gegeben durch
$\mathbf{E}[S_n] = nb_n + (n{+}1)c_n + (n{+}2)d_n + (n{+}3)e_n + (n{+}4)f_n + (n{+}5)g_n$.

Das Maximum $\mathbf{E}[S_{20}] = \mathbf{E}[S_{21}] \approx 8.142$ liegt nur ein klein Wenig höher als zuvor $\mathbf{E}[R_5] = \mathbf{E}[R_6] \approx 8.038$ bei fester Rundenzahl. Immerhin!
Für 10€ Einsatz genügt das nicht. Können Sie mehr rausholen?

Stoppzeiten: Würfeln bis die Eins kommt

S_n	0	n	$n{+}1$	$n{+}2$	$n{+}3$	$n{+}4$	$n{+}5$	$\mathbf{E}[S_n]$
1	.167	.000	.167	.167	.167	.167	.167	3.333
2	.167	.167	.167	.167	.167	.167	.000	3.333
3	.194	.167	.194	.194	.194	.028	.028	3.833
4	.222	.194	.222	.222	.056	.056	.028	4.306
5	.255	.222	.255	.088	.088	.060	.032	4.824
6	.292	.255	.125	.125	.097	.069	.037	5.380
7	.334	.125	.167	.140	.112	.079	.042	5.974
8	.355	.167	.160	.133	.100	.063	.021	6.245
9	.383	.160	.161	.128	.091	.049	.028	6.579
10	.410	.161	.155	.118	.075	.055	.027	6.874
11	.436	.155	.145	.102	.081	.054	.027	7.141
12	.462	.145	.128	.107	.079	.053	.026	7.374
13	.486	.128	.131	.103	.077	.050	.024	7.567
14	.508	.131	.125	.098	.071	.045	.021	7.716
15	.530	.125	.120	.093	.067	.043	.022	7.848
16	.550	.120	.114	.088	.064	.043	.021	7.952
17	.570	.114	.108	.084	.063	.041	.020	8.032
18	.589	.108	.103	.082	.060	.039	.019	8.089
19	.607	.103	.100	.078	.057	.037	.018	8.125
20	.625	.100	.095	.074	.054	.035	.017	8.142
21	.641	.095	.091	.071	.052	.034	.017	8.142
22	.657	.091	.087	.068	.050	.032	.016	8.126
23	.672	.087	.083	.065	.048	.031	.015	8.096
24	.687	.083	.079	.062	.045	.030	.014	8.052
25	.700	.079	.076	.059	.043	.028	.014	7.997

S_n	0	n	$n{+}1$	$n{+}2$	$n{+}3$	$n{+}4$	$n{+}5$	$\mathbf{E}[S_n]$
26	.714	.076	.072	.057	.041	.027	.013	7.931
27	.726	.072	.069	.054	.040	.026	.013	7.855
28	.738	.069	.066	.052	.038	.025	.012	7.771
29	.750	.066	.063	.049	.036	.024	.012	7.679
30	.761	.063	.060	.047	.035	.023	.011	7.579
31	.771	.060	.058	.045	.033	.022	.011	7.474
32	.781	.058	.055	.043	.032	.021	.010	7.363
33	.791	.055	.053	.041	.030	.020	.010	7.248
34	.800	.053	.050	.039	.029	.019	.009	7.128
35	.809	.050	.048	.038	.028	.018	.009	7.005
36	.818	.048	.046	.036	.026	.017	.008	6.878
37	.826	.046	.044	.034	.025	.016	.008	6.750
38	.833	.044	.042	.033	.024	.016	.008	6.619
39	.841	.042	.040	.031	.023	.015	.007	6.487
40	.848	.040	.039	.030	.022	.014	.007	6.353
41	.854	.039	.037	.029	.021	.014	.007	6.219
42	.861	.037	.035	.028	.020	.013	.006	6.084
43	.867	.035	.034	.026	.019	.013	.006	5.949
44	.873	.034	.032	.025	.018	.012	.006	5.814
45	.878	.032	.031	.024	.018	.011	.006	5.680
46	.884	.031	.029	.023	.017	.011	.005	5.546
47	.889	.029	.028	.022	.016	.010	.005	5.412
48	.894	.028	.027	.021	.015	.010	.005	5.280
49	.898	.027	.026	.020	.015	.010	.005	5.149
50	.903	.026	.025	.019	.014	.009	.004	5.019

Das Runde muss ins Eckige: Bayes beim Tischkicker

Angenommen beim Tischkicker bis 10 zwischen den gleich starken Alice und Bob fallen die Tore zufällig ($50 : 50$) und unabhängig voneinander.

Aufgabe: Wie stehen die Gewinnchancen bei $9 : 8$? bei $4 : 7$?

Lösung: Wahrscheinlichkeitstabelle für den Sieg von Alice beim Stand $a : b$.
Am oberen und linken Rand ist das Spiel beendet und die Wkt ist entweder 0 oder 1.
Im Inneren ist jeder Eintrag der Mittelwert aus dem linken und dem oberen Nachbarn.

$a : b$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
10		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
9	0.000	0.500	0.750	0.875	0.938	0.969	0.984	0.992	0.996	0.998	0.999
8	0.000	0.250	0.500	0.688	0.813	0.891	0.938	0.965	0.980	0.989	0.994
7	0.000	0.125	0.313	0.500	0.656	0.773	0.855	0.910	0.945	0.967	0.981
6	0.000	0.063	0.188	0.344	0.500	0.637	0.746	0.828	0.887	0.927	0.954
5	0.000	0.031	0.109	0.227	0.363	0.500	0.623	0.726	0.806	0.867	0.910
4	0.000	0.016	0.063	0.145	0.254	0.377	0.500	0.613	0.709	0.788	0.849
3	0.000	0.008	0.035	0.090	0.172	0.274	0.387	0.500	0.605	0.696	0.773
2	0.000	0.004	0.020	0.055	0.113	0.194	0.291	0.395	0.500	0.598	0.685
1	0.000	0.002	0.011	0.033	0.073	0.133	0.212	0.304	0.402	0.500	0.593
0	0.000	0.001	0.006	0.019	0.046	0.090	0.151	0.227	0.315	0.407	0.500

Das Runde muss ins Eckige: Bayes beim Tischkicker

Ausführung: Wie kommt diese Rechnung zustande? Ganz einfach durch Rückwärtsinduktion! Beim Stand von $a : b$ gibt es zwei mögliche Fortgänge: Entweder es trifft Alice oder es trifft Bob. Wir entwickeln unsere Rechnung übersichtlich in einer Tabelle. Sei $A[a{:}b]$ das Ereignis „Alice gewinnt nach Stand $a : b$“. Dank dem für die totale Wahrscheinlichkeit gilt:

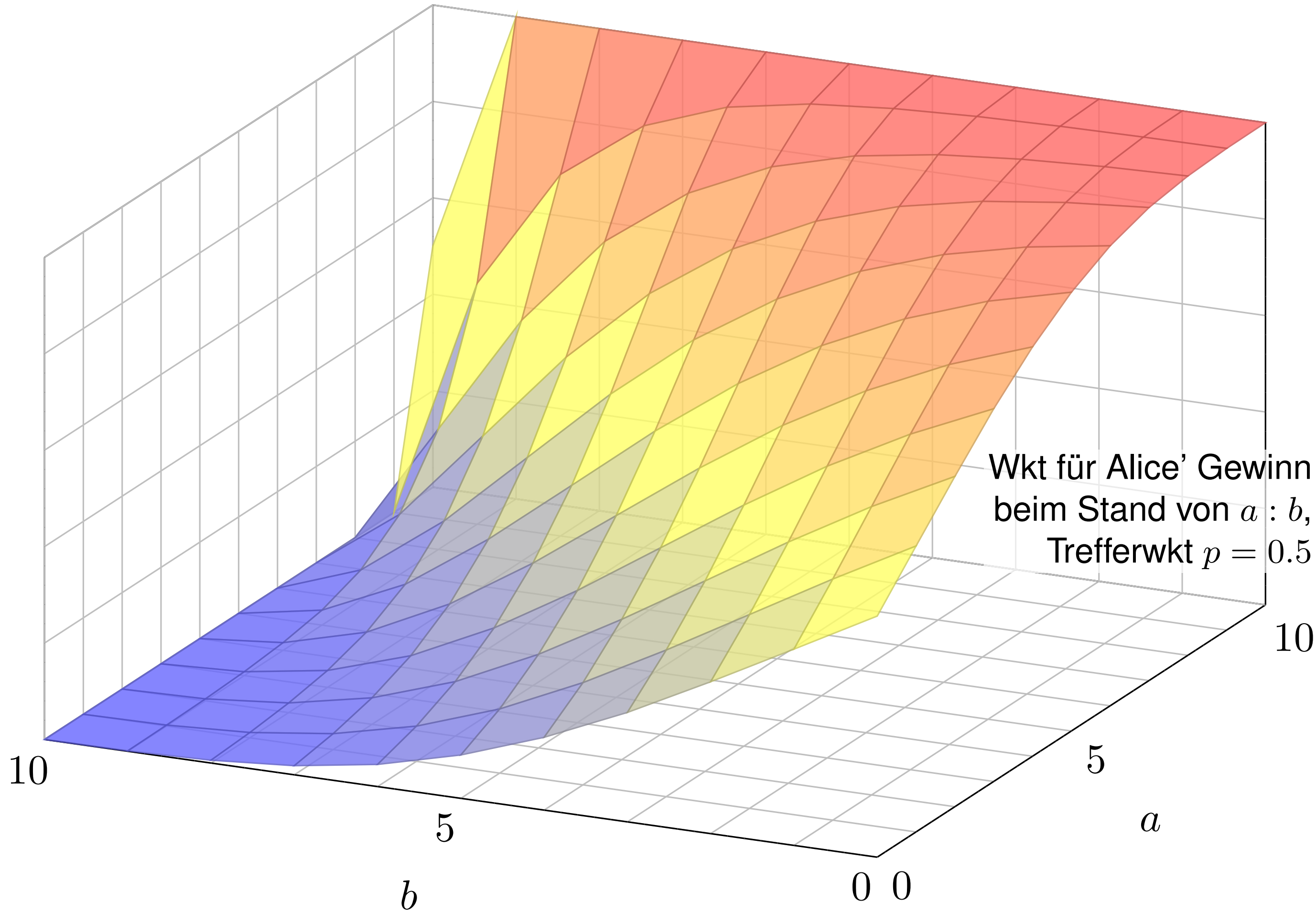
$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big(A[a{:}b]\big) &= \mathbf{P}\big(A[a{:}b] \mid \text{Alice trifft}\big) \cdot \mathbf{P}\big(\text{Alice trifft}\big) + \mathbf{P}\big(A[a{:}b] \mid \text{Bob trifft}\big) \cdot \mathbf{P}\big(\text{Bob trifft}\big) \\ &= \mathbf{P}\big(A[a+1{:}b]\big) \cdot \mathbf{P}\big(\text{Alice trifft}\big) + \mathbf{P}\big(A[a{:}b+1]\big) \cdot \mathbf{P}\big(\text{Bob trifft}\big)\end{aligned}$$

☺ Mit dieser einfachen Rekursionsformel können Sie nun die gesamte Tabelle ausfüllen. Besonders bequem und automatisiert geht's mit einer Tabellenkalkulation, z.B. *LibreOffice*.

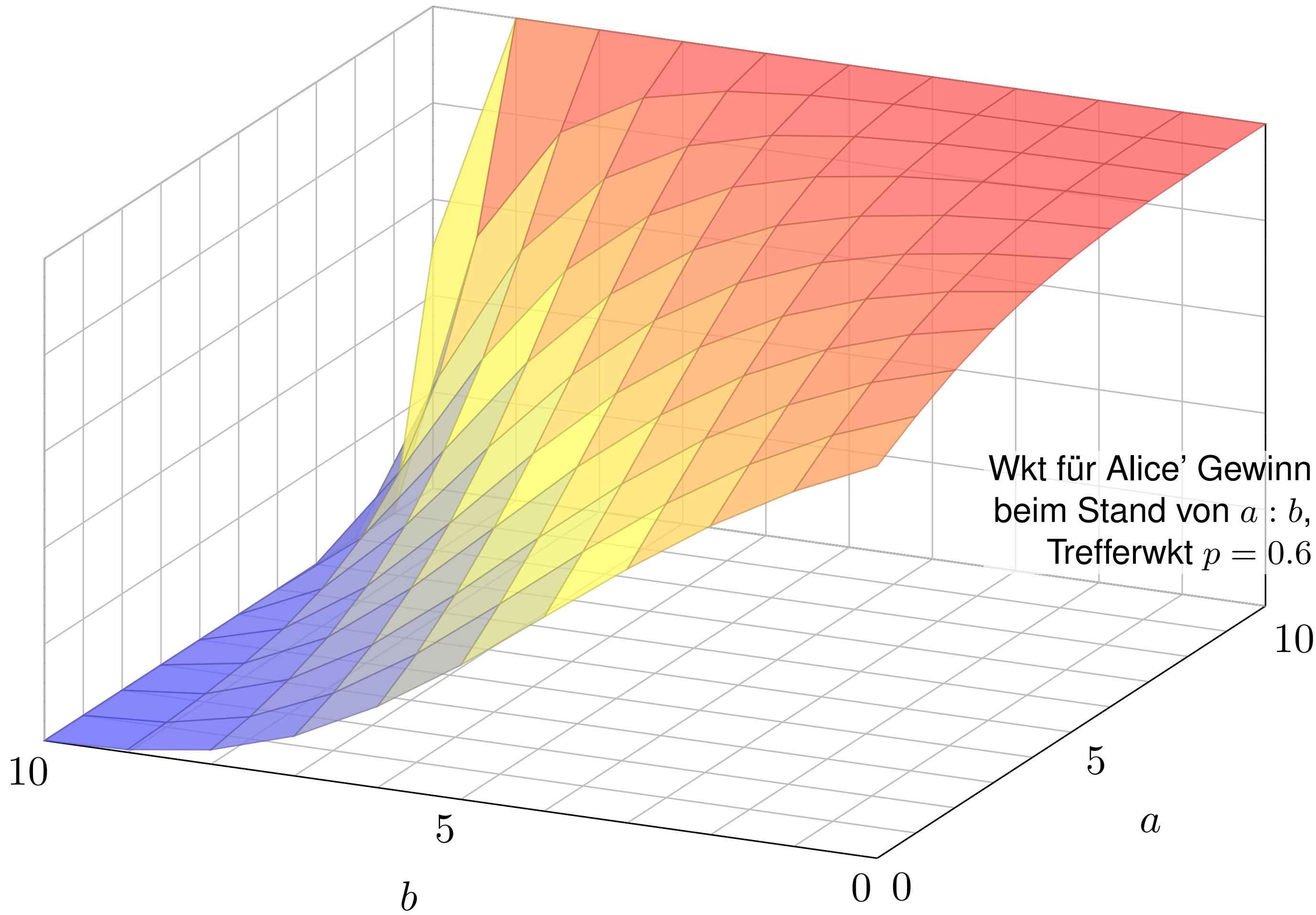
☺ Pascal lässt grüßen: Die $n$te Diagonale der Tabelle entspricht der $n$ten Zeile des Pascalschen Dreiecks (hier kumuliert und normiert). In unserer Tabelle versteckt sich die Binomialverteilung!

Geschichte: Mitte 1654 schrieb Blaise Pascal (1623–1662) an Pierre de Fermat (1607–1665) einen Brief, der berühmt wurde und als Geburtsurkunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt. Pascal löste darin zwei konkrete Probleme zu Glücksspielen, zu denen ein Freund ihn um Rat gebeten hatte, der berufsmäßige Spieler Antoine Gombaud, Chevalier de Méré (1607–1684). Erstens eine Berechnung von Würfelwahrscheinlichkeiten. Zweitens das Problem der gerechten Teilung bei vorzeitigem Spielabbruch. Was heißt hier „gerecht“? Pascal und Fermat wurden sich nach ausführlicher Diskussion einig, dass der Einsatz gemäß den Gewinnwkten aufgeteilt werden sollte. Das ist die unsere obige Tabelle. Pascal konnte diese kombinatorisch berechnen dank dem von ihm zuvor entwickelten Pascalschen Dreieck für die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$.

Das Runde muss ins Eckige: Bayes beim Tischkicker



Das Runde muss ins Eckige: Bayes beim Tischkicker



Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Das folgende Spiel „Kuhhandel“ hat sehr einfache Spielregeln. Gute Strategien sind zunächst nicht offensichtlich, doch es gibt eine erfreulich einfache mathematische Lösung: wie so oft per Rückwärtsinduktion unter der Annahme ausreichender Rationalität. Ohne Rationalität hingegen ist die Realität viel komplizierter. . .

Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Alice und Bob ziehen verdeckt eine Karte aus einem zufällig gemischten Stapel mit den Werten $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$, etwa mit Höchstwert $n = 10$.

Alice kennt ihren Wert $a \in \Omega$, Bob kennt seinen Wert $b \in \Omega$, aber keiner weiß etwas über den Wert des anderen, außer der Tatsache $a \neq b$.

Alice darf einen Tausch vorschlagen, in diesem Falle entscheidet Bob. Falls Alice vorschlägt und Bob annimmt, tauschen beide ihre Karten.

Die höchste Karte gewinnt.

Beispiel: Bevor Sie das Spiel analysieren, antworten Sie intuitiv:
(a) Sie spielen Alice und haben die Karte $a = 4$. Sollten Sie tauschen?
(b) Sie spielen Bob und haben die Karte $b = 3$. Sollten Sie tauschen?

Wenn Sie mutig sind, formulieren Sie intuitiv eine Strategie:
Für welche $a \in \Omega$ soll Alice einen Tausch vorschlagen?
Für welche $b \in \Omega$ soll Bob einen Tausch annehmen?

Welches reale Verhalten vermuten Sie bei Ihren Mitspielern?
Welche Rolle spielen hierbei die Stufen der Rationalität? (A2A)

Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Aufgabe: Formulieren und beweisen Sie optimale Strategien:
Für welche $a \in \Omega$ soll Alice einen Tausch vorschlagen?
Für welche $b \in \Omega$ soll Bob einen Tausch annehmen?

(0) Nutzen Sie zunächst die Annahme ausreichender Rationalität.
Welche Voraussetzungen $\mathscr{R}_0, \mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \dots$ nutzen Sie jeweils?

Lösung: (0) Wir argumentieren rückwärts, das ist klar und leicht:

A_0: Im Falle $a = n$ wird Alice keinen Tausch vorschlagen.
und im Falle $b = n$ wird Bob keinen Tausch annehmen ($\mathscr{R}_1$).

A_1: Im Falle $a = n - 1$ wird Alice keinen Tausch vorschlagen,
und im Falle $b = n - 1$ wird Bob keinen Tausch annehmen:
Jeder kann bestenfalls auf die gegnerische Karte n hoffen, doch
dann würde Bob nicht annehmen bzw. Alice nicht vorschlagen (A_0).
Also wird Alice nicht vorschlagen und Bob nicht annehmen ($\mathscr{R}_2$).

⚠ Dieses Argument benötigt bereits Rationalität zweiter Stufe!
Beide Spieler müssen sich gegenseitig für rational halten.

Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Per Induktion über $k = 0, 1, \dots, n - 2$ beweisen wir ebenso:

A_k: Im Falle $a = n - k$ wird Alice keinen Tausch vorschlagen,
und im Falle $b = n - k$ wird Bob keinen Tausch annehmen:
Jeder kann bestenfalls auf die gegnerische Karte $> n - k$ hoffen, doch
dann würde Bob nicht annehmen bzw. Alice nicht vorschlagen (A_{k-1}).
Also wird Alice nicht vorschlagen und Bob nicht annehmen ($\mathscr{R}_{k+1}$).

Dies gilt für $k = 0, 1, \dots, n - 2$, also für alle $a \ge 2$ und für alle $b \ge 2$.

Folglich schlägt Alice höchstens im Falle $a = 1$ einen Tausch vor,
allerdings ohne jede Hoffnung auf eine Annahme ihres Angebots.
Sie kann daher ihr Tauschangebot auch genauso gut unterlassen.

Ebenso akzeptiert Bob höchstens im Falle $b = 1$ einen Tausch,
allerdings ohne jede Hoffnung, dann je ein Angebot zu erhalten.
Er kann daher seine Annahme auch genauso gut unterlassen.

⚠ Der letzte Punkt ist heikel. Beide Spieler haben nichts zu verlieren,
können also höchstens auf einen seltenen Fehler des Gegners hoffen.

Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Übung: (1) Spielen Sie dies als Experiment mit Ihren Freunden.
(2) Können Sie Theorie (0) und Experiment (1) in Einklang bringen?

Hier sind zwei Varianten denkbar: (a) Sie spielen im „Partymodus“ mit Kartenstapel, Ziehen, Vorschlagen und Annehmen am Spieltisch.

Vorteile: natürliche Spielsituation, Spaß beim Bluffen und Verhandeln.
Nachteile: schwer auszuwerten, zahlreiche Zufälle und Störfaktoren.

(b) Sie spielen im „Labormodus“, beispielsweise an einem Computer: Jeder Spieler wählt seine Strategie, etwa in Form von zwei Intervallen $T = \{1, \dots, t\}$ für „tauschen“ und $N = \{t+1, \dots, n\}$ für „nicht tauschen“. Jeder Spieler gibt seine Grenze t ein, dann spielt der Computer.

Vorteile: mehrfache Wiederholung, aussagekräftige Daten.
Nachteile: eher künstliche und sterile Spielsituation.

Gutes Design von Spielen und Experimenten ist eine hohe Kunst!

Statistische Daten über die Spielerpopulation sind Gold wert!

Verhaltensökonomik: Wenn Spieler irrational sind, dann kommen Sie mit Deduktion allein nicht weiter, sondern benötigen statistische Messwerte.

Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Wir formulieren den Kuhhandel noch etwas allgemeiner und bequemer.

Alice und Bob werden die Karten $(a, b) \in \Omega = \{1, 2, \dots, n\}^2$ zugelost mit Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}$, etwa $n = 10$ und gleichverteilt $\mathbf{P}(\{(a, b)\}) = 1/n^2$. Alice kennt nur ihren Wert $a \in \Omega$, Bob kennt nur seinen Wert $b \in \Omega$. Beide kennen die Wktverteilung $\mathbf{P}$ und somit die bedingten Wkten.

Alice und Bob legen gleichzeitig und verdeckt eine Münze auf den Tisch: $0 =$ Kopf bedeutet „Ich will nicht tauschen“ und $1 =$ Zahl bedeutet „Ich will tauschen“. Der Tausch findet statt, wenn beide tauschen wollen. Die höchste Karte gewinnt.

Hierzu formulieren beide vor dem Spiel ihre Strategie $s, t \in \{1, 2, \dots, n\}$: Alice will/wird tauschen falls $a \leq s$, Bob will/wird tauschen falls $b \leq t$.

Übung: (3) Berechnen Sie die Gewinnwkten für das Paar $(s, t) \in \Omega$. Nehmen Sie zur Vereinfachung Gleichverteilung an, $\mathbf{P}(\{(a, b)\}) = 1/n^2$.

(4) Angenommen, beide Spieler legen ihre Strategien s und t offen. Gibt es ein Strategiepaar (s, t), bei dem keiner mehr wechseln will? (Dies nennen wir ein Nash–Gleichgewicht, dazu später mehr.)

Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Das Gras ist immer grüner auf der anderen Seite.

Wir betrachten nun die Möglichkeit, dass beide Spieler über ihre Umwelt unterschiedliche Überzeugungen haben können, insbesondere über die Wahrscheinlichkeiten der Kartenverteilung zu Beginn dieses Spiels.

Alice glaubt an die Wktsverteilung $\mathbf{P}_1$, Bob glaubt an $\mathbf{P}_2$. Es herrscht Glaubensfreiheit, unabhängig von der tatsächlichen Verteilung $\mathbf{P}$.

Übung: (5) Erklären Sie zu jedem Strategiepaar $(s, t) \in \Omega$ falls möglich ein Glaubenspaar $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$, sodass jeder seine Strategie für optimal hält. Stärker: strikt optimal? Ist dies mit Übereinstimmung $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ möglich?

(6) Angenommen, das Spiel wird sehr oft wiederholt. Ist ein divergentes Glaubenspaar $\mathbf{P}_1 \neq \mathbf{P}_2$ auf Dauer stabil? Oder ergibt sich Konvergenz? Wird man aus Erfahrung klug? Gelingt dies schnell oder langsam?

In unserer Gesellschaft erleben wir alltäglich unterschiedliche Ansichten, auch zu vermeintlich objektiven Sachverhalten können Menschen unterschiedlicher Überzeugung sein.

Kuhhandel: Soll ich tauschen oder nicht?

Menschen sind verschieden: Jeder Jeck ist anders.

Wir betrachten nun die realistische Situation, dass Spieler sich in einer großen Population bewegen und darin Handelspaare zufällig entstehen.

Sei weiterhin $n = 10$ und $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. Der Anteil q_t der Bevölkerung tauscht für $a \le t$. Dabei gilt $q_t \ge 0$ und $q_1 + \dots + q_n = 1$.

Übung: (7) Angenommen, mindestens 30% der Bevölkerung glauben felsenfest, dass es sich für $a \le 5$ lohnt, zu tauschen. Diese Teilnehmer optimieren nicht ihr Verhalten, alle anderen hingegen schon. (Ebenso denkbar ist ein Fließgleichgewicht durch neue, unerfahrene Spieler.) Welches Gleichgewicht stellt sich ein?

Ich führe diese Fragen hier nicht weiter aus, ihre Lösung ist etwas knifflig, aber erhellend. Sie illustrieren eine allgemeine Weisheit:

If people do not believe that mathematics is simple,
it is only because they do not realize how complicated life is.
(John von Neumann, 1903–1957)

Tanz der Vampire: Wissen und gemeinsames Wissen

In Transsylvanien treffen sich einmal jedes Jahr 300 Vampire zum Tanz. Anschließend verharren sie den Rest des Jahres schlafend in der Gruft. Vampire altern nicht, sind untrüglich intelligent und vollkommen rational. Jeder weiß dies. Auch dies weiß jeder. Selbst dies weiß jeder. Usw. usw.

Unter den Vampiren tragen 100 ein Schandmal sichtbar auf der Stirn. Dies weiß keiner von sich selbst, da Vampire kein Spiegelbild werfen. Erführe er es, so suchte er den Freitod im nächsten Sonnenaufgang. (Diese Vampire verbrennen im Sonnenlicht. *Wear sunscreen!*)

Hingegen sieht jeder Vampir das Schandmal bei jedem anderen. Jeder sieht es. Jeder weiß es. Auch dies weiß jeder. Usw. usw. usw. Höfliche Rücksicht gebietet jedoch strenges Stillschweigen darüber. (Tabuisierte Kommunikation der Vampire ist ihre große Schwäche.)

Im Jahr 2001 platzt der Vampirjäger Professor Abronsius in das Fest: „Mindestens einer von Euch trägt ein Schandmal!“ schreit er und flieht. Die Vampire sehen keinen Grund, seiner Aussage zu widersprechen: Er sagt ihnen nur, was ohnehin jeder heimlich weiß. Oder etwa nicht?

Tanz der Vampire: Wissen und gemeinsames Wissen

Vampire werfen bekanntlich kein Spielbild.
Das führt zu komplizierten Verwicklungen.

Aufgabe: Was geschieht? Nichts? Plötzliche Erkenntnis? Wann?

Lösung: Nach dem Fest 2100 sterben 100 Vampire im Sonnenaufgang. Führen Sie sorgfältig einen Beweis per Induktion: Was ist die Aussage? Wie ist das möglich? Welche Neuigkeit hat der Professor verraten?

Tanz der Vampire: Wissen und gemeinsames Wissen

Hier geht es um gemeinsames Wissen / *common knowledge*.
Nur weil eine Aussage wahr ist, weiß dies noch längst nicht jeder!
Nur weil es jeder weiß, ist es noch kein gemeinsames Wissen!

Die untrügliche Intelligenz der Vampire ist gemeinsames Wissen:
$\mathscr{R}_1$: Jeder Vampir ist vollkommen rational und absolut ehrenhaft.
$\mathscr{R}_k$: Es gilt $\mathscr{R}_{k-1}$, und jeder Vampir weiß $\mathscr{R}_{k-1}$. (Stufe $k \in \mathbb{N}_{\ge 2}$)
$\mathscr{R}_\infty$: Es gilt $\mathscr{R}_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\ge 1}$. (gemeinsames Wissen)

Die Anzahl der Schandmale hingegen ist kein gemeinsames Wissen:
$\mathscr{S}_1$: Jeder ehrbare Vampir sieht alle n Schandmale der anderen, jeder Schandmalträger jedoch sieht nur genau $n-1$ Schandmale.
$\mathscr{S}_k$: Es gilt $\mathscr{S}_{k-1}$, und jeder Vampir weiß $\mathscr{S}_{k-1}$. (Stufe $k \in \mathbb{N}_{\ge 2}$)
$\mathscr{S}_\infty$: Es gilt $\mathscr{S}_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\ge 1}$. (gemeinsames Wissen)

Professor Abronsius' Aussage hingegen liefert stärkere Information:
$\mathscr{A}_1$: Jeder Vampir weiß, dass es mindestens ein Schandmal gibt.
$\mathscr{A}_k$: Es gilt $\mathscr{A}_{k-1}$, und jeder Vampir weiß $\mathscr{A}_{k-1}$. (Stufe $k \in \mathbb{N}_{\ge 2}$)
$\mathscr{A}_\infty$: Es gilt $\mathscr{A}_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\ge 1}$. (gemeinsames Wissen)

Tanz der Vampire: Wissen und gemeinsames Wissen

Es lohnt sich, diese berüchtigte Rätsel sorgfältig zu durchleuchten!
Wir nehmen hierzu an, genau n Vampire tragen ein Schandmal, und behaupten: Diese sterben am Morgen nach Fest $2000+n$.

Im Falle $n=1$ ahnt der einzige Träger zunächst nichts vom Schandmal. Durch Abronsius' Aussage erkennt er sofort seine Schande und stirbt bei Sonnenaufgang. (Wir nutzen die Voraussetzungen $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{S}_1$ und $\mathscr{R}_1$.)

Im Falle $n=2$ erwarten die beiden Träger den Freitod des anderen. Beim Fest 2002 treffen sie sich jedoch wieder, völlig unerwartet. Dadurch erkennt jeder der beiden sofort seine Schande und stirbt. (Wir nutzen hierzu die Voraussetzungen $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{S}_2$, $\mathscr{R}_2$ und den Fall 1.)

Per Induktion gilt dieses Argument für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$: Jeder der n Träger sieht genau $n-1$ Schandmale und geht davon aus, dass er keines trägt. Er erwartet daher den Freitod der $n-1$ anderen nach dem Fest $2000+n-1$. Alle treffen sich jedoch beim Fest $2000+n$ unerwartet wieder. Dadurch erkennt jeder zweifelsfrei seine Schande. (Wir nutzen hierzu die Voraussetzungen $\mathscr{A}_n$, $\mathscr{S}_n$, $\mathscr{R}_n$ und den Fall $n-1$.)

Schmutzige Gesichter: eigenes und gegenseitiges Wissen

Hier ein berühmtes Logikrätsel aus der Folklore der Talmudschulen als Zentren jüdischer Gelehrsamkeit (`de.wikipedia.org/wiki/Jeschiwa`). Es handelt von eigenem Wissen und von gegenseitigem Wissen...

(1) Rabbi: „Zwei Männer klettern durch einen Kamin. Der eine kommt mit sauberem Gesicht heraus, der andere mit schmutzigem. Wer von beiden geht sich nun waschen?“ — Schüler: „Na wohl der mit dem schmutzigen Gesicht!“ — „Falsch! Der Schmutzige sieht den Sauberen und denkt, sein Gesicht sei auch sauber. Der Saubere sieht den Schmutzigen und denkt, sein Gesicht sei auch schmutzig, also geht er sich waschen.“

(2) Rabbi: „Zwei Männer klettern durch einen Kamin. Der eine kommt mit sauberem Gesicht heraus, der andere mit schmutzigem. Wer von beiden geht sich nun waschen?“ — Schüler: „Aber wir haben doch eben schon festgestellt: der mit dem sauberen Gesicht!“ — „Falsch: Beide gehen sich waschen. Überlege logisch: Der Saubere sieht den Schmutzigen und geht sich waschen. Der Schmutzige sieht das und versteht, dass sein Gesicht schmutzig ist, also geht auch er sich waschen.“

Schmutzige Gesichter: eigenes und gegenseitiges Wissen

(3) Rabbi: „Zwei Männer klettern durch einen Kamin. Der eine kommt mit sauberem Gesicht heraus, der andere mit schmutzigem. Wer von beiden geht sich nun waschen?“ — Schüler: „Na, beide gehen sich waschen.“ — „Falsch: Keiner von beiden. Der Schmutzige sieht den Sauberen und geht sich nicht waschen. Der Saubere sieht das und versteht, dass sein Gesicht sauber ist, also geht auch er sich nicht waschen.“

(4) „Zwei Männer klettern durch einen Kamin...“ — „Ich weiß, keiner von beiden wird sich waschen.“ — „Falsch! Sage mir: Wie kann es sein, dass zwei Männer durch denselben Kamin klettern, und der eine macht sein Gesicht schmutzig, der andere aber nicht? Die ganze Frage ist unsinnig. Wenn du dein Leben dazu verwendest, sinnlose Fragen zu beantworten, werden auch alle deine Antworten sinnlos sein.“

Aufgabe: Wie lösen Sie den Widerspruch zwischen (2) und (3)?

Lösung: Zur Festlegung dieses Spiels fehlen uns noch Informationen: Wir benötigen die genaue Reihenfolge der Züge / Signale / Folgerungen! Erst zieht Spieler 1, dann Spieler 2 mit dem Wissen des vorigen Zuges.

Schmutzige Gesichter: eigenes und gegenseitiges Wissen

Schmutzige Gesichter gibt es in vielen Rätseln, hier etwa in der Bahn:

Das Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach liegt wunderbar idyllisch mitten im Schwarzwald, etwa zweidrittelwegs von Stuttgart nach Freiburg. Im Zug zu unserem fiktiven Workshop „Mathematical Logic“ sitzen 12 berühmte Logiker, manche davon mit schmutzigem Gesicht. Alle können sich gegenseitig sehen, es gibt jedoch keinen Spiegel, und diese überaus schüchternen Menschen reden nicht miteinander.

Der Schaffner erklärt der Gruppe höflich: „Mindestens zwei von Ihnen haben schmutzige Gesichter. Diese sollten schnellstmöglich aussteigen und sich waschen.“ An den nächsten Bahnhöfen $1, 2, 3, 4, 5$ passiert noch nichts. Erst am sechsten Bahnhof steigen einige der Passagiere aus, um sich das Gesicht zu waschen. Wie viele sind es?

Aufgabe: Lösen Sie dieses Logikrätsel. Präzisieren Sie alle hierzu nötigen Annahmen. Warum ist der Takt der Bahnhöfe wichtig?

Lösung: Genau sieben Personen haben ein schmutziges Gesicht. (Die Zahl 12 ist hier vollkommen beliebig und überflüssig.)

Schmutzige Gesichter: eigenes und gegenseitiges Wissen

Angenommen, es gibt genau $n \in \{2, 3, \dots, 12\}$ schmutzige Gesichter.

Im Falle $n = 2$ wissen die beiden Betroffenen sofort Bescheid: Jeder der beiden sieht nur ein schmutziges Gesicht. Nach Aussage des Schaffners gibt es jedoch mindestens zwei. Daraus schließt jeder Betroffene richtig, das sein Gesicht schmutzig ist, und steigt am 1. Bahnhof aus.

Im Falle $n = 3$ sieht jeder Betroffene genau zwei schmutzige Gesichter und erwartet daher, dass diese am 1. Bahnhof aussteigen werden, wie zuvor im Fall $n = 2$ erklärt. Da dies jedoch nicht geschieht, folgert er richtig, das sein Gesicht schmutzig ist, und steigt am 2. Bahnhof aus.

Das Argument setzt sich per Induktion für alle n fort. Dazu muss gelten:
$\mathscr{R}_2$: Jeder kann richtig sehen und logisch schließen, wie oben erklärt.
$\mathscr{R}_3$: Es gilt $\mathscr{R}_2$, und jeder weiß es. $\mathscr{R}_n$: Es gilt $\mathscr{R}_{n-1}$, und jeder weiß es.

Konkretes Beispiel: Alle Betroffenen steigen am sechsten Bahnhof aus. Demnach gibt es genau sieben Personen mit schmutzigem Gesicht.

Der vorgegebene Takt der Bahnhöfe ist wesentlich, damit allen klar ist, wann eine Aktion ausgeführt werden kann oder unterlassen wurde.

Das Problem der Stuttgarter Mathematiker

Das folgende Rätsel stammt aus *Forschung und Lehre* (5/2019, S.503):

An der Universität Stuttgart gibt es 17 Professoren (m/w) im Fachbereich Mathematik. Sie treffen sich einmal im Monat bei Sitzungen. Bei einer früheren Sitzung haben sie die Regel eingeführt, dass jeder Professor, der von einem Fehler in einer von ihm selbst publizierten Arbeit erfährt, sein Amt bei der nächsten Sitzung niederlegen muss. Noch nie ist ein Professor zurückgetreten. Das bedeutet aber nicht, dass keiner der Professoren je einen Fehler publiziert hat. Im Gegenteil, jeder Professor hat schon Fehler publiziert, und jeder andere hat das bemerkt. Man könnte auch so sagen: Jeder Professor weiß, dass jeder andere Professor schon Fehler gemacht hat, weiß aber nichts von eigenen Fehlern. Eines Tages besucht der Rektor der Universität den Fachbereich und hält eine kleine Ansprache, in der er einen denkwürdigen Satz spricht: „Ich muss Ihnen mitteilen, dass ein Professor unter Ihnen bemerkt hat, dass ein anderer Professor einen Fehler publiziert hat.“ Was passiert als Reaktion auf die Bekanntgabe des Rektors? [. . .] Der Rektor sagt natürlich die Wahrheit. Und alle Professoren sind perfekte Logiker. Sowie absolut fehlerfrei bei der Beurteilung, ob ein anderer einen Fehler begangen hat. Zwei Alternativen möchte ich Ihnen anbieten: Antwort 1: [. . .] Nichts passiert. Antwort 2: Recht lange passiert gar nichts. Aber dann, in der 17-ten Sitzung nach der Rede des Rektors treten alle 17 Professoren zurück.

Das Problem der Stuttgarter Mathematiker

Zur Antwort 2 wird folgende Erklärung geboten (F&L 5/2019, S.471):

Was passiert, wenn es unter den 17 Professoren nur einen gäbe, der einen Fehler publiziert hat? Nennen wir ihn schwarzes Schaf. Da er von keinem schwarzen Schaf weiß, muss er aufgrund der Rede des Rektors schließen, dass er selbst ein schwarzes Schaf ist. Also muss er in der 1. Sitzung nach der Rede zurücktreten.

Wie ist es bei zwei schwarzen Schafen A und B? Beide treten in der 1. Sitzung nicht zurück, da zwar jeder weiß, dass der andere ein schwarzes Schaf ist, aber nichts über sich selbst erschließen kann. Doch da B in der 1. Sitzung nicht zurücktritt, muss A schlussfolgern, dass er selbst ein schwarzes Schaf ist. Denn andernfalls hätte B nach der Rede gewusst, dass er ein schwarzes Schaf ist und wäre in der 1. Sitzung zurückgetreten. Also muss A in der 2. Sitzung zurücktreten. B führt denselben Gedankengang durch, und auch er tritt in der 2. Sitzung zurück. [. . .]

So kann man sich bis zur Situation mit 17 schwarzen Schafen vorarbeiten. Alle werden auf der 17. Sitzung zurücktreten. [. . .] Der Rektor hat den Professoren doch Information vermittelt. Offensichtlich gibt es in einer Gruppe verschiedene Formen des Wissens. Jeder kann eine Tatsache T wissen. Zusätzlich kann jeder wissen, dass jeder andere auch T weiß. Ferner kann jeder wissen, dass jeder weiß, dass jeder T weiß. Usw.

Aufgabe: Lesen Sie aufmerksam das obige Rätsel. Leider gingen bei der Übertragung dieses Rätselklassikers auf Stuttgarter Mathematiker wesentliche Voraussetzungen verloren. Ist Antwort 1 weiterhin möglich?

Lösung: Hier geht es um gemeinsames Wissen / *common knowledge*. Nur weil eine Aussage wahr ist, weiß dies noch längst nicht jeder! Nur weil es jeder weiß, ist es noch kein gemeinsames Wissen!

Die Antwort 2 nutzt Aussage P: *Alle Professoren sind perfekte Logiker und absolut fehlerfrei bei der Beurteilung, ob ein anderer einen Fehler publiziert hat.* Die Gültigkeit der Aussage P allein genügt jedoch nicht, es muss auch jeder wissen, dass P gilt, usw. Denkbar wäre folgendes:

1. Nehmen wir an, jeder Professor ist ein perfekter Logiker und absolut fehlerfrei bei der Beurteilung, ob ein anderer einen Fehler publiziert hat, doch mindestens ein Professor hält manch anderen für fehleranfällig. Die Aussage des Rektors, ein Professor habe eines anderen Fehler entdeckt, lässt ihn daher kalt, denn auf die Meinung dieses Kollegen gibt er nicht viel. Daher scheitert schon der Induktionsanfang.

Zahlreiche weitere Varianten sind denkbar und in der hier angegebenen Formulierung des Rätsels nicht geklärt, weder bejaht noch verneint.

2. Nehmen wir weiterhin P an: Jeder Professor ist ein perfekter Logiker und absolut fehlerfrei bei der Beurteilung, ob ein anderer einen Fehler publiziert hat. Zudem gelte P': Jeder Professor weiß die Tatsache P. Jeder Professor glaubt also an die perfekte Urteilskraft jedes Kollegen. Er weiß allerdings nicht, ob die anderen dies ebenfalls glauben.

Hier gelingt noch der Induktionsanfang: Gibt es nur ein schwarzes Schaf, so erkennt es durch die Aussage des Rektors seinen eigenen Fehler.

Der Schluss von einem auf zwei schwarze Schafe hingegen misslingt. Die beiden schwarzen Schafe A und B treten in der 1. Sitzung nicht zurück. Kann A nun schlussfolgern, dass er ein schwarzes Schaf ist? Leider nein: A kann / muss befürchten, dass B nicht an die perfekte Urteilskraft jedes Kollegen glaubt; die Aussage des Rektors ließe dann B völlig kalt, da B auf die Meinung seiner Kollegen nichts gibt. Daher scheitert hier der Induktionsschritt von 1 auf 2.

Der unerwartete Abischerz: Wie ist das möglich?

Das folgende Paradox existiert in vielen Varianten, etwa als unerwartete Hinrichtung, en.wikipedia.org/wiki/Unexpected_hanging_paradox, Feueralarmübung oder Klassenarbeit, hier umgedreht als Abischerz.

Darum wachet! Denn ihr wisst weder Tag noch Stunde.
(Matthäus 25,13, Lutherbibel 2017)

Nach einer wahren Begebenheit: Die Abiturienten eines Gymnasiums planen ihren Abischerz. Aus Termingründen kommen dafür genau fünf Tage, Montag bis Freitag, in Frage. Die ängstliche Schulleiterin möchte den Termin wissen. Die Schüler verweigern dies mit der Begründung, der Abischerz müsse für die Lehrer vollkommen überraschend sein.

Die Schulleiterin denkt sich daher folgendes: „Der Abischerz kann sicher nicht am Freitag stattfinden, denn das ist der letzte mögliche Termin. Wäre bis Freitag Morgen nichts geschehen, dann wüssten wir, dass der Abischerz an diesem Tag stattfindet. Das wäre nicht überraschend.“

Der unerwartete Abischerz: Wie ist das möglich?

Die Schulleiterin folgert sofort weiter: „Der Abischerz kann auch nicht am Donnerstag stattfinden. Freitag haben wir bereits ausgeschlossen. Wäre bis Donnerstag Morgen nichts geschehen, dann wüssten wir, dass der Abischerz an diesem Tag stattfindet. Das wäre nicht überraschend.“

Ebenso schließt die Schulleiterin Mittwoch, Dienstag und Montag aus und kommt zu dem Schluss: „Es wird gar kein Abischerz stattfinden.“ Alle Lehrer bewundern die logischen Ausführungen der Schulleiterin.

Die Abiturienten veranstalten ihren Abischerz am Mittwoch.
Wie vorhergesagt sind alle Lehrer vollkommen überrascht.

Aufgabe: Alle Argumente scheinen logisch. Was also geht schief?

Lösungsidee: Die Eigenschaft „vollkommen überraschend“ ist kritisch; sie ist nicht präzise definiert und wird daher unterschiedlich interpretiert. Weitere Probleme sind Selbstbezüglichkeit und evtl. Widersprüchlichkeit. Wie das Paradoxon aufzulösen ist, darüber wird anhaltend diskutiert; hierzu gibt es ungefähr so viele Lösungsvorschläge wie Autoren.

Der unerwartete Abischerz: Wie ist das möglich?

*Es ist sehr wichtig, keine unbewiesenen Annahmen zu treffen,
aber noch wichtiger ist es, keine Worte zu benutzen,
hinter denen sich kein klarer Sinn verbirgt.*
(William Kingdon Clifford, 1845–1879)

Lösung: Wir können das Paradoxon auflösen, indem wir der vagen Formulierung „vollkommen überraschend“ einen präzisen Sinn geben. Hierzu betrachten wir wie zuvor verschiedene Stufen des Wissens:

$\mathscr{R}_0$: Der Abischerz findet höchstens an einem der fünf Tage Mo, Di, Mi, Do, Fr statt. Im Falle vertrödelter Planung gibt es keinen Abischerz.

$\mathscr{R}_1$: Es gilt $\mathscr{R}_0$, die Schulleiterin weiß dies, kann aber am Morgen des Abischerzes nicht sicher vorhersagen, dass er an diesem Tag stattfindet.

$\mathscr{R}_2$: Es gilt $\mathscr{R}_1$, die Schulleiterin weiß dies, kann aber am Morgen des Abischerzes nicht sicher vorhersagen, dass er an diesem Tag stattfindet.

$\mathscr{R}_n$: Es gilt $\mathscr{R}_{n-1}$, die Schulleiterin weiß dies, kann aber am Morgen des Abischerzes nicht sicher vorhersagen, dass er an diesem Tag stattfindet.

Der unerwartete Abischerz: Wie ist das möglich?

Dank Aussage $\mathscr{R}_0$ kann die Schulleiterin den Termin des Abischerzes immerhin auf die fünf fraglichen Tage Mo, Di, Mi, Do, Fr eingrenzen.
Mit $\mathscr{R}_1$ kann sie Fr ausschließen, es bleiben nur Mo, Di, Mi, Do.
Mit $\mathscr{R}_2$ kann sie Fr, Do ausschließen, es bleiben nur Mo, Di, Mi.
Mit $\mathscr{R}_3$ kann sie Fr, Do, Mi ausschließen, es bleiben nur Mo, Di.
Mit $\mathscr{R}_4$ kann sie Fr, Do, Mi, Di ausschließen, es bleibt also nur Mo.
Mit $\mathscr{R}_5$ kann sie alle fünf Tage ausschließen: Es gibt keinen Abischerz.

Die Schulleiterin interpretiert die Aussage „vollkommen überraschend“ im stärksten Sinne als $\mathscr{R}_5$ oder noch höher. Aus dieser starken Annahme folgert sie zurecht, dass es dieses Jahr keinen Abischerz geben kann.

Die Abiturienten interpretieren „vollkommen überraschend“ nur als $\mathscr{R}_1$. Ihr Abischerz am Mittwoch ist so gesehen vollkommen überraschend.

⚠ Diese Beispiele zeigen eindringlich: In strategischen Situationen sind Wissen und Nichtwissen oft entscheidend, sowohl eigenes als auch gegenseitiges und gemeinsames. Eine sichere Analyse setzt präzise Formulierung voraus und erfordert mathematische Sorgfalt und Disziplin.

Kapitel C

Kombinatorische Spieltheorie und der Satz von Sprague–Grundy

Teach me how to lose a winning match.
Shakespeare, *Romeo and Juliet* 3.2.12

You got to lose to know how to win.
Aerosmith, *Dream On* (1973)

Inhalt dieses Kapitels C

Dynamische Spiele nutzen Positionen / Zustände und Züge / Aktionen:

- Es gibt verschiedene (meist nur endlich viele) Positionen, oft auch eine bestimmte Startposition zu Beginn des Spiels.
- Die Regeln des Spiels legen für jede Position eindeutig fest, welche Züge möglich sind; diese führen zu neuen Positionen.
- Die Spieler entscheiden sich frei unter den ihnen möglichen Zügen und erhalten Auszahlungen, während des Spiels oder am Ende.

Ausgehend von dieser allgemeinen Beschreibung haben wir im vorigen Kapitel Graphen als tragende Grundstruktur erklärt. Zusammen mit weiteren Daten zur Auszahlung konnten wir die Gewinnfunktion über die Bellman–Gleichung definieren und bestimmen. Dies ist zunächst nur für einen Spieler formuliert, doch erlaubt schon eine erstaunliche Vielfalt an Optimierungsfragen. Wir wollen dies auf mehrere Spieler ausdehnen.

Viele Spiele erfreuen sich zudem **vollständiger Information**:

- Jeder Spieler kennt das gesamte Spiel: alle möglichen Zustände, Aktionen und Auszahlungen. Diese sind *common knowledge*.
- In jedem aktiven Zustand zieht genau einer der Spieler. Es gibt keine Zufallszüge und keine gleichzeitigen Züge.
- Der ziehende Spieler kennt den Startzustand und alle bisherigen Züge und somit den aktuellen Zustand des Spiels. Insbesondere gibt es keine verdeckten Züge oder Vergesslichkeit der Spieler; diese raffinierten Erweiterungen diskutieren wir erst später.

Wir wollen vorerst diese einschränkenden Annahmen machen, denn sie erleichtern sowohl die Beschreibung des Spiels als auch seine Analyse. Später werden auch diese Beschränkungen nach und nach aufgehoben. Es scheint ratsam, zunächst mit einfachen Bei-Spielen zu beginnen.

Für **kombinatorische Spiele** vereinfachen wir noch weiter:

1. Es gibt genau zwei Spieler (Links / Rechts, Alice / Bob, etc).
2. Sie spielen um Gewinn 1 oder Verlust 0, keine anderen Werte.
3. Jede:r der beiden kann beginnen. Gezogen wird abwechselnd.
4. Das Spiel endet, wenn der Ziehende keine Zugmöglichkeit hat.
5. Normale Konvention: Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.
6. Die Spielregeln garantieren, dass jeder Spielverlauf endet.
7. Beide Spieler haben vollständige Information.
8. Es gibt keine Zufallszüge.

Wir betrachten insbesondere **neutrale Spiele** [*impartial games*]:

9. In jeder Position x haben beide Spieler dieselben Zugoptionen.

Das Teilspiel ab x ist daher vollkommen symmetrisch in beiden Spielern. Allein die Unterscheidung in ziehend und wartend bricht die Symmetrie.

⚠ Diese Ideen sind noch allzu vage und müssen präzisiert werden!

Aufgabe: Prüfen Sie diese Eigenschaften für Ihre Lieblingsspiele!

Spiel / Eigenschaft	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nim und Varianten	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Tic-Tac-Toe	✓	✘	✓	✓	✘	✓	✓	✓	✘
Schach	✓	✘	✓	✘	✘	✓	✓	✓	✘
Backgammon	✓	✘	✓	✘	✘	✓	✓	✘	✘
Schiffe versenken	✓	✓	✓	✘	✘	✓	✘	✓	✘
Poker	?✓	✘	✓	✘	✘	✓	✘	✘	✘
Monopoly	?✓	?✓	✓	✘	✘	✘	✘	✘	✘
Schere-Stein-Papier	✓	✘	✘	✘	✘	✓	✘	✓	✓

Auch Fußball, Handball, Basketball, etc. sind Spiele. Vereinfacht sind die Mannschaften hier die beiden Spieler. Man spricht zwar von Positionen und Spielzügen, doch ist es schwierig, sie mathematisch zu präzisieren. Dennoch lohnt es; diese Bemühungen sind zuletzt enorm erfogreich.

Motivation und Überblick

Die wichtigste Frage zu einem kombinatorischen Spiel ist:
Welcher der beiden Spieler hat eine **Gewinnstrategie**?

Das heißt ausführlich: Welcher Spieler kann gewinnen, wenn er nur optimal spielt, egal wie der Gegner vorgeht?

Dabei darf er sich nicht auf Fehler des Gegners verlassen, sondern muss auf alle Gegenstrategien vorbereitet sein.

Eine Position heißt **Gewinnposition**, wenn der ziehende Spieler gewinnt (bei optimalem Spiel). Andernfalls heißt sie **Verlustposition**.

Ein Zug heißt **Gewinnzug**, wenn der ziehende Spieler durch ihn gewinnt (bei weiterhin optimalem Spiel). Andernfalls heißt er **Verlustzug**.

☺ Wir werden in diesem Kapitel Gewinn- und Verlustpositionen erst präzise definieren und anschließend möglichst effizient berechnen.

☺ Damit finden wir auch eine Antwort auf die ganz praktische Frage, wie wir einen Gewinnzug finden, falls es überhaupt einen gibt.

☺ Das Erfolgskriterium für unsere Methoden wird sein:
Können wir damit wirklich besser spielen?

Motivation und Überblick

Die **kombinatorische Spieltheorie** [*combinatorial game theory*, CGT] ist ein umfangreiches und aktives Gebiet der Mathematik und Informatik. Ihre Geschichte beginnt 1901 mit der effizienten Lösung des Spiels Nim:

Charles L. Bouton: *Nim, a game with a complete mathematical theory.* Annals of Mathematics 3 (1901) 35–39

Nim ist der Prototyp für alle Spiele, die in eine Summe unabhängiger Teilspiele zerfallen. Der Satz C1O von Sprague–Grundy überführt dazu jedes neutrale kombinatorische Spiel in ein äquivalentes Nim-Spiel! Damit lassen sich viele Spiele analysieren und effizient lösen.

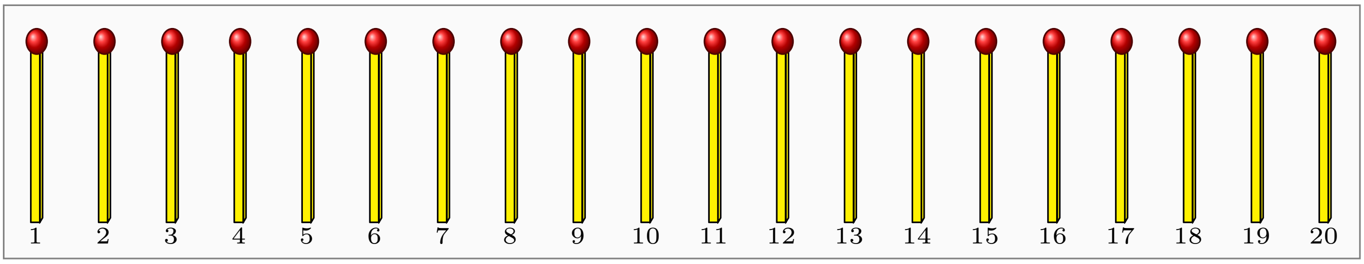
Roland P. Sprague: *Über mathematische Kampfspiele.* Tôhoku Mathematical Journal 41 (1935) 438–444

Roland P. Sprague: *Über zwei Abarten von Nim.* Tôhoku Mathematical Journal 43 (1937) 451–454

Patrick M. Grundy: *Mathematics and Games.* Eureka 2 (1939) 6–8

Einzeiliges Nim und dynamische Programmierung

Auf dem Tisch liegen anfangs $x \in \mathbb{N}$ Streichhölzer / Münzen / Steine. Die Spieler ziehen abwechselnd, jeder entfernt ein oder zwei Hölzer. Dies ist ein einzeiliges Subtraktionsspiel mit Zugoptionen $S = \{1, 2\}$.



Bevor Sie weiterlesen sollten Sie dieses Spiel einige Male durchspielen, am besten zu zweit. In Vorlesung und Übung spielen wir es an der Tafel.

Beobachten Sie dabei ihren Lernprozess vom *Whaaa?* bis zum *Aha!* Anfangs werden Sie vermutlich wenig Struktur erkennen. Mit Erfahrung ahnen Sie gewisse Regelmäßigkeiten. Diese können Sie in folgender Aufgabe ausarbeiten und schließlich die allgemeine Regel formulieren.

Am Ende steht ein mathematischer Satz als Extrakt Ihrer Erfahrungen. Diesen können Sie induktiv beweisen und zukünftig getrost anwenden!

Einzeiliges Nim und dynamische Programmierung

Aufgabe: (0) Formulieren Sie dieses Spiel explizit als einen Graphen. Berechnen Sie alle Gewinnzüge (1) naiv-rekursiv (exponentiell in x), (2) memoisiert-rekursiv (linear in x), (3) effizient (linear in $\log x$).

- **Misèrespiel**, $\mu : X \to \{0, 1\}$: Wer nicht mehr ziehen kann, gewinnt.
- **Normalspiel**, $\nu : X \to \{0, 1\}$: Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.
- Noch informativer als ν ist die **Sprague–Grundy–Funktion**

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma \,:\, X \to \mathbb{N} \,:\, \gamma(x) = \operatorname{mex}\{\, \gamma(y) \mid x \to y \,\}, \\ \operatorname{mex} \,:\, \{\, S \subsetneq \mathbb{N} \,\} \to \mathbb{N} \,:\, S \mapsto \min(\mathbb{N} \smallsetminus S). \end{aligned}}$$

In Worten: Zu jeder Menge $S \subsetneq \mathbb{N}$ definieren wir $\operatorname{mex} S := \min(\mathbb{N} \smallsetminus S)$ als das Minimum des Komplements [engl. *minimal excludant*, kurz *mex*]. Diese Funktion wird sich im Folgenden als überaus nützlich erweisen. Zunächst wollen wir ihre Definition verstehen und konkret anwenden.

Wir werden γ genau so auf jedem Graphen X definieren; dieser muss lokal-endlich sein (das heißt, jede Ecke hat nur endlich viele Nachfolger) und zudem artinsch (das heißt, es gibt keine unendlich langen Wege). Nach den motivierenden Beispielen führen wir diese Definitionen aus.

Einzeiliges Nim und dynamische Programmierung

Lösung: (0) Jede Ecke (Position) ist eine natürliche Zahl $x \in X := \mathbb{N}$. Jede Kante (Zug) $a = (x, s) : x \to y$ erfüllt $y = x - s$ mit $s \in S = \{1, 2\}$.

(1a) Misèrespiel, Gewinnfunktion $\mu : X \to \{0, 1\} : x \mapsto \mu(x)$:

```python
def mu(x):
    if x == 0: return 1   # Wer nicht mehr ziehen kann, gewinnt.
    return 1 - min( mu(y) for y in range(max(0,x-2), x) )
```

(1b) Normalspiel, Gewinnfunktion $\nu : X \to \{0, 1\} : x \mapsto \nu(x)$:

```python
def nu(x):
    if x == 0: return 0   # Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.
    return 1 - min( nu(y) for y in range(max(0,x-2), x) )
```

Was ist schlecht an dieser Implementierung? Exponentieller Aufwand!
Für die Anzahl $f(x)$ der Funktionsaufrufe gilt $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ sowie für alle $x \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ rekursiv $f(x) = f(x-1) + f(x-2)$. Dies ist die Fibonacci–Folge! Sie wächst exponentiell, explizit gilt die Binet–Formel:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right] \gtrapprox 1.618^x$$

Einzeiliges Nim und dynamische Programmierung

Naive Rekursion ist zwar korrekt, aber allzu verschwenderisch!
(1) Bei dieser naiven Methode wächst der Aufwand exponentiell mit x!

Algo C1A: Gewinnzüge $@M : x \mapsto M(x)$ im Misèrespiele

Eingabe: Eine natürliche Zahl $x \in \mathbb{N}$ und die Zugoptionen $S \subseteq \mathbb{N}_{\geq 1}$
Ausgabe: Alle Gewinnzüge $M(x) \subseteq S$ in der gegebenen Position x

1: **if** $x = 0$ **then return** $\{*\}$
2: $M \leftarrow \{\}$
3: **for** $s \in S$ **do if** $s \leq x$ **and** $M(x - s) = \{\}$ **then** $M \leftarrow M \cup \{s\}$
4: **return** M

Im Jobinterview machen Sie damit allein keinen guten Eindruck, egal ob in Python (vorige Folie) oder als Pseudo-Code (diese Folie), denn die Werte $M(y)$ werden unnötig immer wieder neu berechnet. „Never hire a developer who computes the factorial using recursion.“

Aufgabe: (2) Wie kann man die Rekursion effizienter implementieren?

Einzeiliges Nim und dynamische Programmierung

Wir merken uns, was bereits berechnet wurde, und recyclen! Diese genial-einfache Idee heißt **Memoisation**, abgeleitet von lat. **Memorandum**, kurz **Memo**, *das zu Erinnernde*.

Algo C1B: Gewinnzüge $M : x \mapsto M(x)$ im Misèrespiele

Global: Tabelle memo, anfangs initialisiert durch $\mathrm{memo}[0] \leftarrow \{*\}$
Eingabe: Eine natürliche Zahl $x \in \mathbb{N}$ und die Zugoptionen $S \subseteq \mathbb{N}_{\geq 1}$
Ausgabe: Alle Gewinnzüge $M(x) \subseteq S$ in der gegebenen Position x

```
if x not in memo then memo[x] ← @M(x)
return memo[x]
```

Naive Rekursion ist zwar korrekt, aber allzu verschwenderisch!

Geschickte Buchführung reduziert erheblich den Rechenaufwand! In diesem Beispiel ist die Rechenzeit für M nur noch linear in x.

Hier wird $@M$ in eine memoisierende Funktion M eingebettet: Die innere Funktion $@M$ übernimmt dieselbe Rechnung wie zuvor. Die äußere Funktion M kümmert sich um die Buchhaltung.

Einzeiliges Nim und dynamische Programmierung

Auch für das Normalspiel und die Sprague–Grundy–Funktion lohnt sich, die rekursiven Algorithmen explizit auszuschreiben und zu memoisieren. Wenn Sie möchten, sollten Sie unbedingt Beispiele programmieren! Nur so spüren Sie den Unterschied zwischen effektiv und effizient.

In C/C++ muss Memoisation explizit programmiert werden, wie skizziert. Dazu wird die rekursive Funktion in ein Funktionsobjekt eingebettet, das seine eigene Erinnerung memo als Tabelle [*map*] verwaltet.

Python bietet hierfür einen vorgefertigten Decorator `@memoize`. Viele moderne Programmiersprachen unterstützen Memoisation, manche erledigen dies gar im Hintergrund ganz automatisch.

Beim Normalspiel und der Sprague–Grundy–Funktion bemerken wir: Anders als im Misèrespiel ist der Basisfall $x = 0$ gleich eingearbeitet. Er folgt denselben Regeln wie $x \geq 1$ und verzweigt keinen Sonderfall.

Aus diesem und weiteren Gründen ist das Normalspiel „natürlicher“. Das Hauptargument ist schließlich der Sprague–Grundy–Satz C1O, der für das Normalspiel eine elegante und starke Theorie entwickelt.

Einzeiliges Nim und dynamische Programmierung

Algo C1C: Gewinnzüge $@N : x \mapsto N(x)$ im Normalspiel

Eingabe: Eine natürliche Zahl $x \in \mathbb{N}$ und die Zugoptionen $S \subseteq \mathbb{N}_{\geq 1}$
Ausgabe: Alle Gewinnzüge $N(x) \subseteq S$ in der gegebenen Position x

$N \leftarrow \{\}$
for $s \in S$ **do if** $s \leq x$ **and** $N(x-s) = \{\}$ **then** $N \leftarrow N \cup \{s\}$
return N

☺ Beim Normalspiel ist der Basisfall $x = 0$ gleich eingearbeitet.
☹ Naive Rekursion ist zwar korrekt, aber allzu verschwenderisch!
☺ Memoisation reduziert von exponentiellem zu linearem Aufwand:

Algo C1D: Gewinnzüge $N : x \mapsto N(x)$ im Normalspiel

Global: Tabelle memo, anfangs initialisiert als leer
Eingabe: Eine natürliche Zahl $x \in \mathbb{N}$ und die Zugoptionen $S \subseteq \mathbb{N}_{\geq 1}$
Ausgabe: Alle Gewinnzüge $N(x) \subseteq S$ in der gegebenen Position x

if x not in memo **then** $\mathrm{memo}[x] \leftarrow @N(x)$
return $\mathrm{memo}[x]$

Einzeiliges Nim und dynamische Programmierung

Algo C1E: Grundy–Wert $@\gamma : x \mapsto \gamma(x)$

Eingabe: Eine natürliche Zahl $x \in \mathbb{N}$ und die Zugoptionen $S \subseteq \mathbb{N}_{\geq 1}$
Ausgabe: Der Grundy–Wert $\gamma(x) = \operatorname{mex}\{\, \gamma(y) \mid x \to y \,\}$ der Position x

$A \leftarrow \{\}$
for $s \in S$ **do if** $s \leq x$ **then** $A \leftarrow A \cup \{\, \gamma(x-s) \,\}$
return $\operatorname{mex} A$

☺ Beim Grundy–Wert ist der Basisfall $x = 0$ gleich eingearbeitet.
☹ Naive Rekursion ist zwar korrekt, aber allzu verschwenderisch!
☺ Memoisation reduziert von exponentiellem zu linearem Aufwand!

Algo C1F: Grundy–Wert $\gamma : x \mapsto \gamma(x)$

Global: Tabelle memo, anfangs initialisiert als leer
Eingabe: Eine natürliche Zahl $x \in \mathbb{N}$ und die Zugoptionen $S \subseteq \mathbb{N}_{\geq 1}$
Ausgabe: Der Grundy–Wert $\gamma(x) = \operatorname{mex}\{\, \gamma(y) \mid x \to y \,\}$ der Position x

if x not in memo **then** $\mathrm{memo}[x] \leftarrow @\gamma(x)$
return $\mathrm{memo}[x]$

Einzeiliges Nim und dynamische Programmierung

Lösung: (2) Wir berechnen Gewinn und Verlust für das Misèrespiel μ und das Normalspiel ν sowie die Sprague–Grundy–Funktion γ.

$x=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\mu=$	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1
$\nu=$	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
$\gamma=$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Bottom-up sortiert nach Größe: Jedes Teilproblem nutzt nur kleinere. Ebenso gut gelingt der rekursive Ansatz top-down mit Memoisation.

(3) Wie lautet die allgemeine Regel? Wir krönen unsere Bemühungen:

Satz C1G: einzeiliges Nim mit Zugoptionen $S = \{1, 2, \dots, n-1\}$

Misèrespiel: Genau dann ist x eine Verlustposition, wenn $x \bmod n = 1$.
Normalspiel: Genau dann ist x eine Verlustposition, wenn $x \bmod n = 0$.
Die Sprague–Grundy–Funktion des Spiels ist $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto x \bmod n$.

Einzeiliges Nim und dynamische Programmierung

Die **Dynamische Programmierung** [*Dynamic Programming*, DP] ist ein Werkzeugkasten zur Optimierung rekursiver Berechnungen. Siehe Cormen, Stein, Leiserson, Rivest: *Introduction to Algorithms*, §15.

Top-down mit Memoisation: Wir formulieren unsere Funktion rekursiv und speichern das Ergebnis jedes gelösten Teilproblems, etwa in einem assoziativen Array [*map*, *dictionary*] oder einer Tabelle [*hash table*].

Bottom-up topologisch sortiert: Jedes Teilproblem nutzt jeweils nur kleinere, bereits gelöste. Beide Formulierungen leisten meist dasselbe; Ausnahmen entstehen, wenn top-down große Lücken lassen kann.

Idealerweise können Algorithmen mit exponentiellen Aufwand so auf polynomiellen Aufwand reduziert werden, wie in unserem Beispiel: Unsere Lösung ist zunächst exponentiell in x, dann polynomiell in x, hier sogar linear in x, dank Satz C1G schließlich sogar nur logarithmisch in x.

Das natürliche **Komplexitätsmaß** ist hier die Bitlänge $\operatorname{len}(x) \sim \log_2(x)$. Unsere Lösung verbessert sich von doppelt exponentiell zu exponentiell, schließlich zu polynomiell, sogar linear in der Länge $\operatorname{len}(x) \sim \log_2(x)$.

Einzeiliges Nim und dynamische Programmierung

Aufgabe: Untersuchen Sie ebenso einzeiliges Nim mit den Zugoptionen (3) $S = \{1, 2, 4\}$ und (4) $S = \{1, 3, 4\}$ und (5) $S = \{1, 3, 6\}$. **Lösung:**

$x=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\mu=$	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1
$\nu=$	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
$\gamma=$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

$x=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\mu=$	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
$\nu=$	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
$\gamma=$	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0	1	2	3	2

$x=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\mu=$	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
$\nu=$	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
$\gamma=$	0	1	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0

Einzeiliges Nim und dynamische Programmierung

Richard Bellman (1920–1984) war ein US-amerikanischer Mathematiker. Er entwickelte 1953 die Kernidee der **Dynamischen Programmierung**. In „Dynamische Programmierung“ sowie in „Lineare Programmierung“ bedeutet das Wort „Programmierung“ so viel wie „Optimierung“.

Ökonomen bezeichnen die Dynamische Programmierung schlicht als **Rekursionsmethode**. Sie tritt bei zahlreichen Optimierungsproblemen natürlich auf und wird gerne und erfolgreich angewendet. Sie ist daher ein beliebtes Universalwerkzeug der Wirtschaftswissenschaften.

Idealerweise entspringt die Rekursion unmittelbar der ökonomischen / spieltheoretischen Fragestellung. In vereinfachter Form findet sich die Rekursionsmethode daher bereits Ernst Zermelo 1913 sowie später bei John von Neumann und Oskar Morgenstern 1944.

Die Dynamische Programmierung ist in der Informatik eine universelle Strategie, um Probleme rekursiv zu lösen. Zur gewünschten Funktion muss eine geeignete Rekursionsstruktur aber erst gefunden werden. Diese Kunst erfordert sowohl Erfahrung als auch Kreativität.

Neutrale Spiele und Rückwärtsinduktion

Definition C1H: neutrales Spiel

Ein **neutrales Spiel** (G, v) mit konstanter Summe $c \in \mathbb{R}$ besteht aus einem artinschen Graphen $G = (X, A, \sigma, \tau)$ mit Auszahlung $v : \partial X \to \bar{\mathbb{R}}$.

Beide Spieler ziehen abwechselnd gemäß den Kanten A des Graphen. Neutral bedeutet: Beide Spieler haben dieselben Aktionen zur Auswahl; allein die Unterscheidung in ziehend und wartend bricht die Symmetrie.

In jedem terminalen Zustand $x \in \partial X$ erhält der Ziehende schließlich die Auszahlung $v(x)$ und der Wartende das Komplement $c - v(x)$. Was ist die Auszahlung des ziehenden Spielers bei optimalem Spiel?

Satz C1H: Gewinnfunktion durch Rückwärtsinduktion

Dazu existiert genau eine **Gewinnfunktion** $u : X \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $u|_{\partial X} = v$ und

$$\boxed{u(x) \stackrel{!}{=} \sup_{x \to y} \big[c - u(y)\big] = c - \inf_{x \to y} u(y)}$$

Eine **Lösung** oder **optimale Strategie** s ordnet jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ eine optimale Aktion $s(x) = a : x \to y$ mit $u(x) = c - u(y)$ zu.

Neutrale Spiele und Rückwärtsinduktion

Übung: Beweisen Sie Existenz und Eindeutigkeit der Gewinnfunktion u.

☺ Die Beweisidee ist anschaulich klar und aus Beispielen vertraut: Wir beweisen Existenz durch Rekursion, Eindeutigkeit durch Induktion. Allerdings ist nicht offensichtlich, worüber hier induziert werden soll… Versuchen Sie es zunächst selbst als Fingerübung, dann hilft Satz B1F.

Bemerkung: Formal ist die Max-Min-Bedingung die Bellman–Gleichung mit konstanter sofortiger Belohnung $r(a) = c$ und Diskontfaktor $\delta = -1$. Diese Parameterwahl codiert unser Modell der konstanten Summe c.

Der Diskontfaktor $\delta \in [0, 1]$ beschreibt den schrittweisen **Wertverlust**, zum Beispiel durch Inflation, Abbruchrisiko oder allgemein Ungeduld.

Der Faktor $\delta = -1$ codiert die schrittweise **Wertumkehr** wie in C1H: Beide Spieler verfolgen dasselbe Ziel, mit umgekehrten Vorzeichen.

☺ Diese simple Beobachtung ist zunächst nur eine formale Analogie, doch sie dient zur Wiederverwendung der Techniken aus Kapitel B.

Ein **Nullsummenspiel** ist ein Spiel (G, v) mit konstanter Summe $c = 0$. Jeder Spieler versucht, wie immer, seinen Gewinn zu maximieren; hier ist dies äquivalent dazu, den Gewinn seines Gegners zu minimieren. Solche Spiele sind strikt kompetitiv, sie erlauben keine Kooperation.

Spiele mit konstanter Summe $c \in \mathbb{R}$ sind flexibler in der Formulierung. Allgemein: Was der eine Spieler gewinnt, geht dem anderen verloren. Sie sind äquivalent zu Nullsummenspielen durch Translation:

Übung: Sei (G, v) ein neutrales Spiel mit konstanter Summe $c \in \mathbb{R}$ und Gewinnfunktion u. Sei $\tilde{v} = \lambda v + \kappa$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\kappa \in \mathbb{R}$. Dann ist $(G, \tilde{v})$ ebenfalls ein neutrales Spiel mit konstanter Summe $\tilde{c} = \lambda c + 2\kappa$ und Gewinnfunktionen $\tilde{u} = \lambda u + \kappa$. Speziell für $(\lambda, \kappa) = (2, -c)$ folgt $\tilde{c} = 0$.

Beispiele: Bei kombinatorischen Spielen nutzen wir im Folgenden die Auszahlungen $0 =$ *Verlust* und $1 =$ *Gewinn* mit konstanter Summe $c = 1$. Ebenso möglich wäre $-1 =$ *Verlust* und $+1 =$ *Gewinn* mit Summe $c = 0$. In manchen Spielen ist auch ein $0 =$ *Unentschieden* möglich.

Bemerkung: Wir können alle Aktionen mit gemeinsamem Start und Ziel zusammenfassen, da es keine sofortigen Belohnungen gibt, sondern nur die terminale Auszahlung $v : \partial X \to \bar{\mathbb{R}}$, auf die wir alles ausrichten.

Für jedes neutrale Spiel (G, v) genügt also ein **einfacher Graph** G: Von jedem Start $x \in X$ zu jedem Ziel $y \in X$ existiert höchstens eine Kante, die Randabbildung $\partial = (\sigma, \tau) : A \to X \times X$ ist somit injektiv.

Die obige Beweis zeigt Eindeutigkeit und Existenz der Gewinnfunktion $u : X \to \bar{\mathbb{R}}$. In vielen Anwendungen ist der Graph zudem lokal-endlich, das heißt: Jeder Zustand $x \in X$ erlaubt nur endlich viele Aktionen.

Für jeden lokal-endlichen Graphen wird das Maximum/Minimum jeweils angenommen: Es existiert also (mindestens) eine optimale Strategie. Diese explizit zu berechnen, kann jedoch beliebig komplex sein.

Genau darum geht es uns im Folgenden: Wenn wir das Spiel gewinnen wollen, dann müssen wir eine Gewinnstrategie nicht nur prinzipiell berechnen können, sondern möglichst effizient!

Was ist eine effiziente Lösung?

Definition C1I: Lösung, allgemein und polynomiell

Sei (G, v) ein neutrales Spiel mit Summe $c \in \mathbb{R}$ und der Gewinnfunktion $u : X \to \bar{\mathbb{R}}$, also $u|_{\partial X} = v$ und $u(x) = \sup_{x \to y}[c - u(y)]$ für alle $x \in X^\circ$.

Eine **Lösung** oder **optimale Strategie** s ordnet jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ eine optimale Aktion $s(x) = a : x \to y$ mit $u(x) = c - u(y)$ zu.

Unter einer **polynomiellen Lösung** verstehen wir einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit, der eine optimale Aktion $x \mapsto a$ berechnet.

Beispiel: Die Eingabe einer natürlichen Zahl messen wir in Bitlänge:

$$\boxed{\operatorname{len} \,:\, \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,:\, x \mapsto \min\{\, \ell \in \mathbb{N} \mid a < 2^\ell \,\}}$$

Wir betrachten einzeiliges Nim mit Aktionen $a \in S = \{1, 2, \dots, n-1\}$: Zum Zustand $x \in \mathbb{N}$ erfordert die memoisierte Rekursion x Schritte, ist also exponentiell in $\operatorname{len}(x)$. Satz C1G bietet eine polynomielle Lösung: Es genügt $a = x \bmod n$ zu berechnen. **Übung:** Führen Sie dies aus! Warum ist der Zeitaufwand bei festem n höchstens linear in $\operatorname{len}(x)$?

Was ist eine effiziente Lösung?

Ist der Graph G **lokal-endlich und artinsch**, so existiert eine Lösung: Die Rückwärtsinduktion C1H konstruiert eine optimale Strategie $x \mapsto a$. Oft erfordert das exponentiellen Aufwand. *Ain't nobody got time for that!*

Was bedeutet das genau? Wie messen wir Komplexität und Aufwand? Zustände und Aktionen seien codiert durch $X, A \hookrightarrow \{0, 1, |, (,), \dots\}^{(\mathbb{N})}$. Wir messen die Komplexität $\operatorname{len}(x)$ als Länge über diesem Alphabet. Im binären Falle, wie oben erklärt, messen wir die Länge in Bits.

Ein vorgelegter **Algorithmus** zur Berechnung einer Strategie $s : x \mapsto a$ hat zur Eingabe x eine gewisse Laufzeit $T(x) \in \mathbb{R}_{\ge 0}$, etwa gemessen in Sekunden oder Taktzyklen. Gilt $T(x) \le c_0 + c_1 \operatorname{len}(x)^\alpha$ mit Konstanten $c_0, c_1, \alpha \in \mathbb{R}_{\ge 0}$, so ist die Laufzeit (höchstens) polynomiell vom Grad α. Gilt hingegen $T(x) \ge c_0 \exp(c_1 \operatorname{len}(x))$ mit Konstanten $c_0, c_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, so ist die Laufzeit (mindestens) exponentiell, und somit nicht polynomiell.

Unter einer **polynomiellen Lösung** verstehen wir einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit, der jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ eine optimale Aktion $a : x \to y$ zuordnet, sodass $u(x) = c - u(y)$ gilt.

Normalspiel und Sprague–Grundy–Funktion

Wir vereinfachen weiter und erlauben nur zwei mögliche Auszahlungen: entweder 0 für null / falsch / Niederlage oder 1 für eins / wahr / Gewinn. Die konstante Summe sei $c = 1$, also $u \mapsto 1 - u$ die logische Negation. Wir nennen dann (G, v) ein **neutrales kombinatorisches Spiel**.

Satz C1J: Normalspiel und Sprague–Grundy–Funktion

Auf dem artinschen Graphen $G = (X, A, \sigma, \tau)$ betrachten wir:

- Das **Misèrespiel** $(G, 1)$: Wer nicht mehr ziehen kann, gewinnt.
- Das **Normalspiel** $(G, 0)$: Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

Hierzu existieren die eindeutigen Gewinnfunktionen $\mu, \nu : X \to \{0, 1\}$ mit den vorgegebenen konstanten Randwerten $\mu|_{\partial X} = 1$ und $\nu|_{\partial X} = 0$.

Ist G zudem lokal-endlich, so existiert die **Sprague–Grundy–Funktion**

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma &: X \to \mathbb{N} : \gamma(x) = \operatorname{mex}\{\, \gamma(y) \mid x \to y \,\}, \\ \operatorname{mex} &: \{\, S \subsetneq \mathbb{N} \,\} \to \mathbb{N} : S \mapsto \min(\mathbb{N} \smallsetminus S). \end{aligned}}$$

Es gilt $\nu = \gamma \wedge 1$, also $\nu(x) = 0$ gdw $\gamma(x) = 0$ und $\nu(x) = 1$ gdw $\gamma(x) \geq 1$.

Normalspiel und Sprague–Grundy–Funktion

Beweis: Rückwärtsinduktion C1H garantiert Existenz und Eindeutigkeit von $\mu, \nu : X \to \{0, 1\}$, ebenso für $\gamma : X \to \mathbb{N}$ dank lokaler Endlichkeit. (Andernfalls formulieren wir mex und γ für Ordinalzahlen.)

Wir nutzen hier die übliche und bequeme Notation $a \wedge b := \min\{a, b\}$. Wir vergleichen $\nu : X \to \{0, 1\}$ und $\gamma : X \to \mathbb{N}$ und zeigen $\nu = \gamma \wedge 1$:

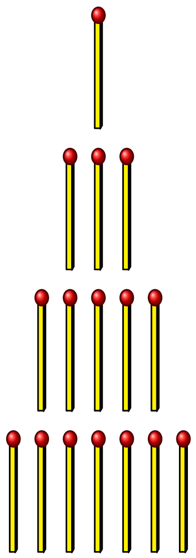
Wir betrachten eine Ecke $x \in X$. Gilt $\nu(y) = \gamma(y) \wedge 1$ für alle $x \to y$, dann folgt $\nu(x) = \gamma(x) \wedge 1$. Hierzu unterscheiden wir die beiden Fälle:

Gewinnposition: Führt ein Zug $x \to y$ zu $\nu(y) = 0$, so gilt $\nu(x) = 1$. In diesem Falle gilt $\gamma(y) = 0$, also $\gamma(x) \geq 1$, und somit $\nu(x) = \gamma(x) \wedge 1$.

Verlustposition: Führen alle Züge $x \to y$ zu $\nu(y) = 1$, so gilt $\nu(x) = 0$. In diesem Falle gilt $\gamma(y) \geq 1$, also $\gamma(x) = 0$, und somit $\nu(x) = \gamma(x) \wedge 1$.

Daraus folgt $\nu = \gamma \wedge 1$: Gäbe es $x_0 \in X$ mit $\nu(x_0) \neq \gamma(x_0) \wedge 1$, so gilt $x_0 \in X^\circ$, und es gibt einen Nachfolger $x_0 \to x_1$ mit $\nu(x_1) \neq \gamma(x_1) \wedge 1$. So fortfahrend erhalten wir einen unendlichen Weg $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots$. Das widerspricht unserer Voraussetzung, dass der Graph G artinsch ist.

Das Spiel Nim: Formalisierung als Graph



$x_4 = 1$

$x_3 = 3$

$x_2 = 5$

$x_1 = 7$

Zustand $x \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$

Aktion (r,s) $\begin{cases} (r,s) \in \mathbb{N}^2 \\ 1 \le s \le x_r \\ y = x - s\, e_r \end{cases}$

Zustand $y \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$

Aufgabe: Formulieren Sie dieses Spiel in Worten und als Graph.

Lösung: Nim ist ein Spiel für zwei Spieler; beide ziehen abwechselnd. Wir betrachten das Normalspiel: Wer nicht mehr ziehen kann, verliert. Die Zustandsmenge ist $X = \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$. Gegeben sei ein Zustand $x \neq 0$. Der ziehende Spieler wählt einen Zug $(r,s) \in \mathbb{N}^2$ mit $1 \le s \le x_r$. Neuer Zustand ist $y = x - s\, e_r$. Nun zieht der andere Spieler.

Das Spiel Nim: Formalisierung als Graph

Dieses Spiel ist sehr einfach, doch wenn Sie es zum ersten Mal sehen, werden Sie anfangs vermutlich wenig oder keine Struktur erkennen. Erinnern Sie sich an Ihre Erfahrung mit einzeiligem Nim!

Zur Demonstration spielen wir dieses Spiel ausgiebig in der Vorlesung, damit Sie das Problem und seine elegante Lösung wirklich spüren. In hoffe diese experimentelle Spielphase ist gut investierte Zeit.

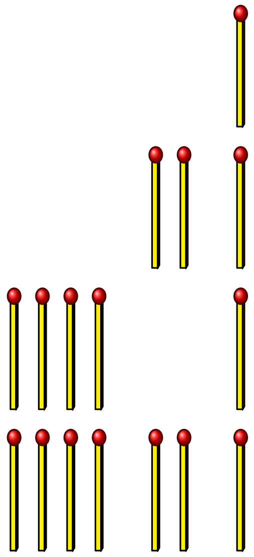
Manche Spezialfälle entdecken und verstehen Sie leicht im Spiel: Zum Beispiel ist $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$ mit $x_1 = x_2$ eine Verlustposition, denn der zweite Spieler kann jeden Zug des ersten spiegeln.

Ein allgemeine Position $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ hingegen ist nicht so einfach zu durchschauen. Das müssen Sie selbst ausprobieren und persönlich erfahren! Erst dann können Sie die geniale Lösung würdigen.

Das Spiel Nim wurde gelöst von Charles L. Bouton: *Nim, a game with a complete mathematical theory*, Annals of Mathematics 3 (1901) 35–39.

Der Satz C1o von Sprague–Grundy (1935–39) überführt allgemein jedes neutrale Spiel in ein Nim-Spiel. Dies ist der Ausgangspunkt der kombinatorischen Spieltheorie, die seit etwa 1970 entwickelt wurde.

Das Spiel Nim: effiziente Lösung nach Charles Bouton 1901



$x_4 = 001$

$x_3 = 011$

$x_2 = 101$

$x_1 = 111$

Wir entwickeln x_i im Binärsystem

$x_i = \sum_{k=0}^{m} \langle x_i \rangle_k \, 2^k$ mit $\langle x_i \rangle_k \in \{0, 1\}$

und bilden die Spaltensumme

$$\langle s \rangle_k = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i \rangle_k \bmod 2.$$

Binäre Summe ohne Übertrag:

$$s = \sum_{k=0}^{m} \langle s \rangle_k \, 2^k =: x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$$

Satz C1K: effiziente Lösung des Nim-Spiels, Bouton 1901

Im Normalspiel sind die Verlustpositionen x genau die Nullpositionen:

(0) Ist $x \in \mathbb{N}^n$ eine Null-Position, also $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$, so führt jeder Zug $x \to y$ in eine Nicht-Null-Position, $y_1 \oplus y_2 \oplus \cdots \oplus y_n \neq 0$.

(1) Ist x eine Nicht-Null-Position, $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \neq 0$, so existiert ein Zug $x \to y$ in eine Null-Position, also $y_1 \oplus y_2 \oplus \cdots \oplus y_n = 0$.

Das Spiel Nim: effiziente Lösung nach Charles Bouton 1901

Den Beweis führen wir allgemein für Satz C1L, noch besser Satz C1O.

☺ Mit diesem simplen Algorithmus können wir die Gewinnfunktion $\nu : X \to \{0, 1\}$ des Normalspiels schnell und einfach berechnen.

Das ist eine effiziente Lösung im Sinne unserer Definition C1I:
Der Zeitaufwand ist linear in der Bitlänge der Eingabe $x \in \mathbb{N}^n$:

$$\begin{aligned} \operatorname{len} &: \mathbb{N} \to \mathbb{N} &&: x \mapsto \min\{\, \ell \in \mathbb{N} \mid a < 2^\ell \,\} \\ \operatorname{len} &: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} &&: x \mapsto \operatorname{len}(x_1) + \cdots + \operatorname{len}(x_n) \end{aligned}$$

Linearer Aufwand ist das Beste, was wir je erwarten können: Die Lösung zu berechnen ist somit nicht aufwändiger, als das Problem zu lesen!

☺ Die Funktion ν liefert uns die optimale Auszahlung $\nu(x)$ und zudem optimale Aktionen $x \mapsto a \in \operatorname{Arg\,max}[\dots]$, also eine optimale Strategie!

Optimale Züge erkennen Sie leicht sobald Sie das Optimum kennen:
Wir haben dies zuvor bereits für die Bellman–Gleichung illustriert.

Für das tatsächliche *Spielen* ist dies der entscheidende Schritt.
Daher führe ich dies im folgenden Satz gebrauchsfertig aus.

Wir nutzen die **Binärentwicklung**: Jede natürliche Zahl $z \in \mathbb{N}$ schreibt sich eindeutig als Summe $z = \sum_{k\in\mathbb{N}} z_k 2^k$ mit Ziffern $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{(\mathbb{N})}$.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{N} & \overset{\langle - \rangle}{\underset{|-|}{\rightleftarrows}}\ \cong & \{0,1\}^{(\mathbb{N})} & \overset{\cong}{\rightleftarrows} & \mathbb{F}_2[T] \\
\sum_{k\in\mathbb{N}} z_k 2^k & \leftrightarrow & (z_k)_{k\in\mathbb{N}} & \leftrightarrow & \sum_{k\in\mathbb{N}} z_k T^k
\end{array}$$

Diese Bijektion $\mathbb{N} \cong \mathbb{F}_2[T]$ ist kein Isomorphismus: $(\mathbb{N},+) \ncong (\mathbb{F}_2[T],+)$.
Algebraisch: $(\mathbb{F}_2[T],+)$ ist eine Gruppe, hingegen $(\mathbb{N},+)$ nur ein Monoid.
Arithmetisch: In $(\mathbb{F}_2[T],+)$ wird ohne, in $(\mathbb{N},+)$ mit Übertrag addiert.

Wir definieren auf $\mathbb{N}$ die **binäre Addition ohne Übertrag** durch

$$\boxed{\oplus : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N} : (x,y) \mapsto |\langle x\rangle + \langle y\rangle|.}$$

Damit ist $(\mathbb{N},\oplus) \cong (\mathbb{F}_2[T],+)$ eine abelsche Gruppe, gar $\mathbb{F}_2$–Vektorraum. Wir definieren $\bigoplus_{i=0}^n x_i = x_0 \oplus x_1 \oplus \dots \oplus x_n$ wie in jedem abelschen Monoid induktiv für $n = 0,1,2,\dots$ und allgemein für $x \in \mathbb{N}^{(I)}$ mit endlichem Träger $J \subseteq I$ ebenso $\bigoplus x := \bigoplus_{i\in I} x_i := \bigoplus_{i\in J} x_i$.

In der Informatik ist dies eine sehr vertraute Operation: bitweises XOR! Sie ist schnell und einfach zu berechnen, für Mensch wie für Computer.

Auch in der Mathematik ist $(\mathbb{N},\oplus) \cong (\mathbb{F}_2[T],+)$ eine vertraute Struktur, nämlich eine abelsche Gruppe, genauer sogar ein $\mathbb{F}_2$–Vektorraum.

Aufgrund von Satz C1K nennen manche Autoren (im Rahmen der Spieltheorie) diese Verknüpfung $\oplus : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ auch **Nim-Summe**.

Fun fact: Die Koeffizienten $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ sind natürliche Zahlen, engl. *natural numbers*. Im Kontext des Nim-Spiels nennen manche Autoren dies auch *nimbers*, als Wortspiel und als Erinnerung.

Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy:
Winning Ways for Your Mathematical Plays. A K Peters 2001-2004
Gewinnen: Strategien für mathematische Spiele. Vieweg 1985-1986

John H. Conway: *On Numbers and Games.* A K Peters 2000

Aaron N. Siegel: *Combinatorial Game Theory.* AMS 2013

Auch die Polynommultiplikation überträgt sich zu $x \odot y = |\langle x\rangle \cdot \langle y\rangle|$.
So wird $(\mathbb{N}, \oplus, \odot)$ eine isomorphe Kopie des Polynomrings $(\mathbb{F}_2[T], +, \cdot)$.

Auf den ersten Blick scheinen Polynomringe vielleicht kompliziert, selbst der einfachsten Vertreter $\mathbb{F}_2[T]$. Das ist keine objektive Schwierigkeit:

Neutral betrachtet ist die Arithmetik in $\mathbb{F}_2[T]$ viel einfacher als in $\mathbb{N}$:
In $\mathbb{F}_2[T]$ wird **ohne Übertrag** addiert und multipliziert.

Aus mathematischer Sicht ist die Definition von $(\mathbb{N}, \oplus)$ nicht tiefsinnig. Überaus bemerkenswert ist hingegen, dass die binäre Addition $(\mathbb{N}, \oplus)$ und die Anordnung $(\mathbb{N}, <)$ für Spiele so trickreich zusammenarbeiten. Für das Produkt $(\mathbb{N}, \odot)$ ist mir keine ähnliche Anwendung bekannt.

L'algèbre est généreuse, elle donne souvent plus qu'on lui demande.
[Die Algebra ist großzügig, sie gibt oft mehr, als wir von ihr verlangen.]
Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783)

Boutons Lösung C1K erklärt Gewinn- und Verlustpositionen für Nim. Als Verfeinerung bestimmen wir nun die Sprague–Grundy–Funktion:

Satz C1L: Sprague–Grundy–Funktion des Nim-Spiels

Wir untersuchen das Nim-Spiel $G = (X, A, \sigma, \tau)$ mit den Zuständen $X = \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ und Aktionen $(r, s) : x \to y$ mit $1 \le s \le x_r$ und $y = x - s\,e_r$.

Für seine Sprague–Grundy–Funktion $\gamma : X \to \mathbb{N}$ gilt:

$$\boxed{\gamma(x) = \bigoplus\nolimits_{i\in\mathbb{N}} x_i = x_0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \dots.}$$

Das löst das Spiel mit polynomiellem Zeitaufwand. Ausführlich gilt:

1. Für jede Aktion $(r, s) : x \to y$ gilt $x_r \ne y_r$, also $\gamma(x) \ne \gamma(y)$.
2. Zu $0 \le n < \gamma(x)$ existiert eine Aktion $(r, s) : x \to y$ mit $\gamma(y) = n$: Wir berechnen $z := \gamma(x) \oplus n = 2^\ell + \sum_{k=0}^{\ell-1} z_k 2^k$ und wählen $r \in \mathbb{N}$ mit $\langle x_r \rangle_\ell = 1$. Somit gilt $y_r := x_r \oplus z < x_r$ und $\gamma(y) = \gamma(x) \oplus z = n$.

Das beschreibt insbesondere alle Gewinnzüge $x \to y$ mit $\gamma(y) = 0$.

🙂 Dieser Satz beinhaltet Boutons Lösung (Satz C1K): Jede Position $x \in X$ mit $\gamma(x) = 0$ ist eine Verlustposition. Jede Position $x \in X$ mit $\gamma(x) \ge 1$ ist eine Gewinnposition.

🙂 Wir werden diese geniale Methode in Satz C1O perfektionieren. Der Beweis ist jeweils leicht und ich formuliere ihn detailliert aus.

☹ Wenn Sie zuerst den Beweis lesen, sagt er Ihnen noch allzu wenig. Der Beweis ist einfach genial und genial einfach: Sie können ihn Schritt für Schritt leicht durcharbeiten, doch dabei besteht die Gefahr, dass der zündende Funke nicht überspringt. Das wäre hier besonders schade!

🙂 Zunächst empfehle ich, den Algorithmus in zahlreichen Bei-Spielen zu erproben. Durch eigenständiges Probieren wird Ihnen schnell klar, wie das Verfahren funktioniert und wie ein Beweis aussehen könnte.

Übung: Experimentieren Sie mit dem genialen Algorithmus des Satzes! Wenden Sie das Verfahren mehrfach an, dann beweisen sie den Satz. So können Sie selbst den Beweis entdecken, entwickeln und verstehen.

Beweis: Die erste Aussage (1) ist klar, da $(\mathbb{N}, \oplus)$ eine Gruppe ist.

(2) Vom Start $m = \gamma(x)$ zum Ziel $n < m$ steht das höchste zu ändernde Bit an der angegebenen Stelle ℓ. Dank $m > n$ gilt $\langle m \rangle_\ell = 1$ und $\langle n \rangle_\ell = 0$.

Demnach existiert mindestens eine Koordinate $r \in \mathbb{N}$ mit $\langle x_r \rangle_\ell = 1$. Genauer existiert eine ungerade Anzahl dieser Wahlmöglichkeiten.

Dies stellt sicher, dass $y_r := x_r \oplus z$ die Ungleichung $y_r < x_r$ erfüllt. Diese Wahl r und $s = x_r - y_r$ definieren die Aktion $(r, s) : x \to y$. Nach Konstruktion gilt $\gamma(y) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} y_i = (\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} x_i) \oplus z = \gamma(x) \oplus z = n$.

Die beiden Eigenschaften (1–2) zeigen, dass die Funktion $\gamma : X \to \mathbb{N}$ tatsächlich die Sprague–Grundy–Funktion des Nim-Spiels G ist. $\boxed{\text{QED}}$

Lemma C1M: Umformulierung der mex–Eigenschaft

Vorgelegt sei ein Graph $G = (X, A, \sigma, \tau)$ mit einer Funktion $\gamma : X \to \mathbb{N}$. Dann sind (1–2) äquivalent zu $\gamma(x) = \operatorname{mex}\{\, \gamma(y) \mid x \to y \,\}$ für alle $x \in X$.

Ist G zudem artinsch und lokal-endlich, so existiert hierzu genau eine Lösung $\gamma : X \to \mathbb{N}$, und dies ist die Sprage–Grundy–Funktion (C1J).

Aufgabe: Vorgelegt sei eine Position $x \in X = \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ im Nim-Spiel.
(1) Wie finden Sie von x aus alle möglichen Gewinnzüge $(r, s) : x \to y$?
(2) Wie finden Sie zu $0 \le n < \gamma(x)$ alle Züge $(r, s) : x \to y$ mit $\gamma(y) = n$?

Lösung: Frage (1) ist ein Spezialfall von (2), nämlich für $n = 0$. Es genügt daher, die allgemeinere Fragestellung (2) zu lösen.

Der Zug $(r, s) : x \to y$ bedeutet $x_r \to y_r = x_r - s e_r$. Somit gilt $\gamma(y) = \gamma(x) \oplus z$ mit $z = \gamma_i(x_i) \oplus \gamma_i(y_i)$. Wir wollen $\gamma(y) = n$.

Wir berechnen also zunächst $z := \gamma(x) \oplus n = 2^\ell + \sum_{k=0}^{\ell-1} z_k 2^k$ und suchen nun alle Züge $x_r \to y_r$ mit $y_r = x_r \oplus z$.

Im Falle $\langle r_r \rangle_\ell = 0$ gilt $x_r \oplus z > x_r$: Das ist im Nim–Spiel nicht erlaubt.

Im Falle $\langle x_r \rangle_\ell = 1$ gilt $x_r \oplus z < x_r$: Diese Verringerung können wir im Nim-Spiel realisieren durch den Zug $(r, s) : x \to y$ mit $s = x_r - (x_r \oplus z)$.

(Dies zeigt, dass es mindestens eine solche Koordinate $r \in \mathbb{N}$ gibt, genauer existiert immer eine ungerade Anzahl solcher Koordinaten.)

Wir finden so alle Züge $(r, s) : x \to y$ mit $y_r = x_r \oplus z$ und somit $\gamma(y) = n$.

Erinnerung: Produkt und Summe von Gruppen

Zu jedem Index $i \in I$ sei $G_i = (X_i, +_i, 0_i, -_i)$ eine abelsche Gruppe mit Grundmenge X_i und darauf der Addition $+_i : X_i \times X_i \to X_i$ mit neutralem Element $0_i \in X_i$ und Negation $-_i : X_i \to X_i$.

Das **Produkt** $P = \prod_{i \in I} G_i := (X, +, 0, -)$ hat als Grundmenge

$$X = \prod_{i \in I} X_i = \left\{ x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i : i \mapsto x_i \;\middle|\; x_i \in X_i \right\}.$$

Hierauf definieren wir koordinatenweise die Addition $x + y = (x_i +_i y_i)_{i \in I}$, das neutrale Element $0 = (0_i)_{i \in I}$ und die Negation $-x = (-_i\, x_i)_{i \in I}$.

Wir definieren den **Träger** $\operatorname{supp} : P \to \mathfrak{P}I : x \mapsto \{ i \in I \mid x_i \neq 0_i \}$.
Wir definieren die **Summe** der Gruppen $(G_i)_{i \in I}$ durch

$$S = \bigoplus_{i \in I} G_i := \left\{ x \in P \;\middle|\; \operatorname{supp}(x) \text{ endlich} \right\}.$$

Übung: Mit dieser Konstruktion ist $(P, +, 0, -)$ eine abelsche Gruppe. Hierin ist die Summe $S \subseteq P$ eine Untergruppe. Dasselbe gilt für darauf aufbauende Strukturen wie R–Moduln, K–Vektorräume, etc., ebenso für Ringe und K–Algebren, nicht jedoch mit Eins, denn für $\sharp I = \infty$ hat das Einselement $1 = (1_i)_{i \in I}$ keinen endlichen Träger, also $1 \in P$, aber $1 \notin S$.

Erinnerung: Produkt und Summe von Gruppen

Diese Konstruktion von Produkt und Summe begegnet uns sehr häufig. Allgemeiner gelingt diese Konstruktion für abelsche Monoide $(X_i, +_i, 0_i)$, noch allgemeiner Tripel aus einer Menge X_i mit innerer Verknüpfung $+_i : X_i \times X_i \to X_i$ und idempotenten Element $0_i \in X_i$, also $0_i +_i 0_i = 0_i$.

Im Falle $G_i = G$ für alle $i \in I$ haben wir Produkt und Summe:

$$\begin{aligned} P = G^I \quad &:= \{ x : I \to G \} \\ S = G^{(I)} &:= \{ x : I \to G \mid \operatorname{supp}(x) \text{ endlich } \} \end{aligned}$$

Nur auf letzterem haben wir die Summenabbildung

$$\sum \;:\; G^{(I)} \to G \;:\; (g_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} g_i.$$

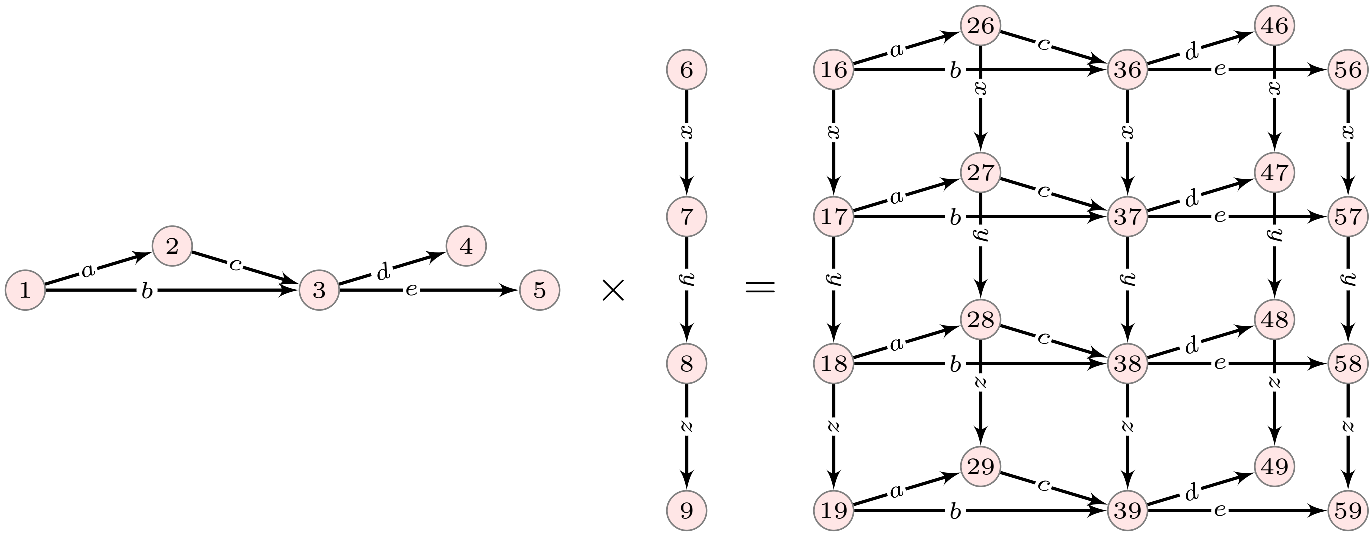
Beispiel: Für den Sprague–Grundy–Satz nutzen wir insbesondere:

Aus der abelschen Gruppe $(\mathbb{N}, \oplus, 0)$ erhalten wir die Gruppe $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ mit koordinatenweiser Addition $\oplus$ und hierauf $\oplus : \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{N}$.

Aus dem abelschen Monoid $(\mathbb{N}, +, 0)$ erhalten wir das Monoid $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ mit koordinatenweiser Addition $+$ und hierauf $\sum : \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{N}$.

Produkt und Summe von Spielen

Wir spielen mehrere Spiele G_i parallel, also gleichzeitig nebeneinander. Der ziehende Spieler darf sich aussuchen, in welchem Spiel G_i er zieht. Der gemeinsame Spielgraph ist somit das Produkt bzw. die Summe:



Seien $G_1 = (X_1, A_1, \sigma_1, \tau_1)$ und $G_2 = (X_2, A_2, \sigma_2, \tau_2)$ zwei Graphen. Ihr Produkt $G = G_1 \times G_2$ hat die Eckenmenge $X = X_1 \times X_2$. Eine Kante $(i, a_i) : (x_1, x_2) \to (y_1, y_2)$ ist entweder von der Form $a_1 : x_1 \to y_1$ mit $x_2 = y_2$ oder von der Form $a_2 : x_2 \to y_2$ mit $x_1 = y_1$.

Produkt und Summe von Spielen

⚠ Es gibt mehrere Möglichkeiten, Produkte von Graphen zu definieren. Verschiedene Autoren verwenden verschiedene Namen und Notationen. Gegen mögliche Verwirrung hilft nur eine präzise Definition:

Definition C1N: Produkt und Summe von Spielen

Gegeben sei eine Familie $(G_i)_{i \in I}$ von Graphen $G_i = (X_i, A_i, \sigma_i, \tau_i)$.

Ihr **Produkt** ist der Graph $P = \prod_{i \in I} G_i = (X, A, \sigma, \tau)$ mit der Eckenmenge $X = \prod_{i \in I} X_i$ und der Kantenmenge

$$A = \left\{ (x, i, a_i, y) \;\middle|\; x, y \in X,\ i \in I,\ a_i : x_i \to y_i,\ \forall j \neq i : x_j = y_j \right\}$$

sowie den Projektionen $\sigma(x, i, a_i, y) = x$ und $\tau(x, i, a_i, y) = y$.

Die **Summe** $S = \bigoplus_{i \in I} G_i = (X', A', \sigma', \tau')$ ist der volle Teilgraph $S \leq P$ der Zustände $x \in X$ mit endlichem Träger $\operatorname{supp}(x) := \{\, i \in I \mid x_i \in X_i^\circ \,\}$.

Der Träger $\operatorname{supp}(x) \subseteq I$ indiziert aktive Koordinaten $i \in I$ mit $x_i \in X_i^\circ$. Ist I endlich, so ist das Produkt gleich der Summe, doch in unendlichen Summen verlangen wir, dass nur endlich viele Koordinaten aktiv sind.

Der Sprague–Grundy–Satz

Satz C1O: Sprague 1935, Grundy 1939

Gegeben seien lokal-endliche artinsche Graphen $G_i = (X_i, A_i, \sigma_i, \tau_i)$.
Dann ist auch ihre Summe $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ lokal-endlich artinsch,
und für ihre Sprague–Grundy–Funktion gilt $\gamma(x) = \bigoplus_{i \in I} \gamma_i(x_i)$.

Ausführlich folgt $\gamma(x) = \operatorname{mex}\{\, \gamma(y) \mid x \to y \,\}$ aus zwei Eigenschaften:

1. Für jede Aktion $(i, a_i) : x \to y$ gilt $a_i : x_i \to y_i$ im Graphen G_i.
   Für die Grundy–Zahlen folgt $\gamma_i(x_i) \neq \gamma_i(y_i)$, somit $\gamma(x) \neq \gamma(y)$.
2. Zu $0 \le n < \gamma(x)$ existiert eine Aktion $(i, a_i) : x \to y$ mit $\gamma(y) = n$:
   Wir lösen $\gamma(x) \oplus z = n$ durch $z = \gamma(x) \oplus n = 2^\ell + \sum_{k=0}^{\ell-1} z_k 2^k$
   und wählen $i \in I$ mit $\langle \gamma_i(x_i) \rangle_\ell = 1$. Somit gilt $\gamma_i(x_i) \oplus z < \gamma_i(x_i)$.
   In G_i existiert eine Aktion $a_i : x_i \to y_i$ mit $\gamma_i(y_i) = \gamma_i(x_i) \oplus z$.
   In G erhalten wir $(i, a_i) : x \to y$ mit $\gamma(y) = \gamma(x) \oplus z = n$.

Dank (2) finden wir insbesondere Gewinnzüge $x \to y$ mit $\gamma(y) = 0$.

Beispiel: Im Spiel Nim erhalten wir die Nim-Summe aus Satz C1K/C1L.

Der Sprague–Grundy–Satz

☺ Der Satz ist konstruktiv als gebrauchsfertiger Algorithmus formuliert. Sie können dieses Verfahren direkt gewinnbringend anwenden...
und sich dann nachfolgend den allgemeinen Beweis erarbeiten.

☹ Wenn Sie zuerst den Beweis lesen, sagt er Ihnen noch allzu wenig. Der Beweis ist einfach genial und genial einfach: Sie können ihn Schritt für Schritt leicht durcharbeiten, doch dabei besteht die Gefahr, dass der zündende Funke nicht überspringt. Das wäre hier besonders schade!

☺ Zunächst empfehle ich, den Algorithmus in zahlreichen Bei-Spielen zu erproben. Durch eigenständiges Probieren wird Ihnen schnell klar, wie das Verfahren funktioniert und wie ein Beweis aussehen könnte.

☺ Als konkretes Beispiel und methodische Vorarbeit haben wir oben das Nim-Spiel diskutiert. Dieses leuchtende Vorbild hilft Ihnen!

Übung: Experimentieren Sie mit dem genialen Algorithmus des Satzes! Wenden Sie das Verfahren mehrfach an, dann beweisen sie den Satz. So können Sie selbst den Beweis entdecken, entwickeln und verstehen.

Beweis: Zunächst ist G lokal-endlich und artinsch: Gäbe es in G einen unendlichen Weg $x^0 \to x^1 \to x^2 \to \dots$, so ist $J = \operatorname{supp}(x^0)$ endlich, und in mindestens einer Koordinate $i \in J$ finden wir einen unendlichen Weg $x_i^{n_0} \to x_i^{n_1} \to x_i^{n_2} \to \dots$, und somit wäre G_i nicht artinsch. Widerspruch!

Für jeden Zustand $x \in X$ ist $\gamma(x) := \bigoplus_{i \in I} \gamma_i(x_i)$ wohldefiniert, denn für fast alle $i \in I$ gilt $x_i \in \partial X_i$ und somit $\gamma_i(x_i) = 0$.

Die erste Aussage (1) ist klar, da $(\mathbb{N}, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist.

(2) Vom Start $m = \gamma(x)$ zum Ziel $n < m$ steht das höchste zu ändernde Bit an der angegebenen Stelle ℓ. Dank $m > n$ gilt $\langle m \rangle_\ell = 1$ und $\langle n \rangle_\ell = 0$.

Demnach existiert mindestens eine Koordinate $i \in \mathbb{N}$ mit $\langle \gamma_i(x_i) \rangle_\ell = 1$. Genauer existiert eine ungerade Anzahl dieser Wahlmöglichkeiten.

Dies garantiert $\gamma(x_i) \oplus z < \gamma(x_i)$. In G_i existiert demnach eine Aktion $a_i : x_i \to y_i$ mit $\gamma(y_i) = \gamma(x_i) \oplus z$. In G erhalten wir daraus $(i, a_i) : x \to y$. Nach Konstruktion gilt $\gamma(y) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} y_i = (\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} x_i) \oplus z = \gamma(x) \oplus z = n$.

Die beiden Eigenschaften (1–2) zeigen, dass die Funktion $\gamma : X \to \mathbb{N}$ tatsächlich die Sprague–Grundy–Funktion des Spiels G ist (C1M). $\boxed{\text{QED}}$

Aufgabe: Vorgelegt sei eine Position $x \in X$ im Spiel $G = (X, A, \sigma, \tau)$.
(1) Wie finden Sie von x aus alle möglichen Gewinnzüge (x, i, a_i, y)?
(2) Wie finden Sie zu $0 \le n < \gamma(x)$ alle Züge (x, i, a_i, y) mit $\gamma(y) = n$?

Lösung: Frage (1) ist ein Spezialfall von (2), nämlich für $n = 0$. Es genügt daher, die allgemeinere Fragestellung (2) zu lösen.

Der Zug (x, i, a_i, y) im Spiel G bedeutet $a_i : x_i \to y_i$ im Spiel G_i. Somit gilt $\gamma(y) = \gamma(x) \oplus z$ mit $z = \gamma_i(x_i) \oplus \gamma_i(y_i)$. Wir wollen $\gamma(y) = n$.

Wir berechnen also zunächst $z := \gamma(x) \oplus n = 2^\ell + \sum_{k=0}^{\ell-1} z_k 2^k$ und suchen nun alle Züge $a_i : x_i \to y_i$ mit $\gamma_i(y_i) = \gamma_i(x_i) \oplus z$.

Im Falle $\langle \gamma_i(x_i) \rangle_\ell = 0$ gilt $\gamma_i(x_i) \oplus z > \gamma_i(x_i)$: Geeignete Züge $a_i : x_i \to y_i$ können im Spiel G_i existieren, sie sind möglich, aber nicht zwingend.

Im Falle $\langle \gamma_i(x_i) \rangle_\ell = 1$ gilt $\gamma_i(x_i) \oplus z < \gamma_i(x_i)$: Nach Definition der Grundy–Zahl γ_i existiert im Spiel G_i mindestens ein Zug $a_i : x_i \to y_i$.

(Der Beweis zeigt, dass es mindestens eine solche Koordinate $i \in I$ gibt, genauer existiert immer eine ungerade Anzahl solcher Koordinaten.)

Wir finden so alle Züge (x, i, a_i, y) mit $\gamma_i(y_i) = \gamma_i(x_i) \oplus z$, also $\gamma(y) = n$.

Lasker–Nim: Berechnung dank Sprague–Grundy

„Eine interessante Variation entsteht, wenn man die Spielregel wie folgt festsetzt: Der am Zuge Befindliche darf irgendeinen der Haufen in zwei Haufen zerteilen oder aber, nach seinem freien Ermessen, verkleinern.“ Emanuel Lasker: *Brettspiele der Völker.* Scherl Verlag, Berlin 1931.

Aufgabe: Dieses Spiel heißt **Lasker–Nim**. Lösen Sie es!
Berechnen Sie zu jeder Position $x = (x_1, \dots, x_n)$ die Grundy–Zahl $\gamma(x)$.

Lösung: Das Spiel ist eine Summe, dank Sprague–Grundy gilt also

$$\gamma \,:\, \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \,:\, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \gamma(x_1) \oplus \dots \oplus \gamma(x_n).$$

Wir benötigen demnach nur noch $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Laut Spielregel gilt:

$$\gamma(x) = \operatorname{mex}\Big[\big\{\, \gamma(y) \;\big|\; 0 \le y < x \,\big\} \cup \big\{\, \gamma(y) \oplus \gamma(z) \;\big|\; x = y + z,\ 1 \le y \le z \,\big\}\Big]$$

Wir berechnen folgende Tabelle (bottom up / memoisierte Rekursion):

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
γ	0	1	2	4	3	5	6	8	7	9	10	12	11

Lasker–Nim: Berechnung dank Sprague–Grundy

Übung: Rechnen Sie die obigen Fälle $x = 0, 1, 2, \dots, 12$ sorgfältig nach. Formulieren Sie die allgemeine Regel. Beweisen Sie dies per Induktion.

Übung: Welchen Zeitaufwand $T(x)$ haben beide Methoden für $\gamma(x)$?

1. Die memoisierte Rekursion, wie in obiger Tabelle illustriert.
2. Die allgemeine Regel, die Sie soeben bewiesen haben.

Vergleichen Sie dies mit unserer Diskussion zu einzeiligem Nim.

Übung: Denken Sie sich „zufällig“ einige Spielpositionen $x \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ aus. Ist dies eine Gewinn- oder Verlustposition in Lasker–Nim? Wie nutzen Sie hier Ihre Vorarbeit? Finden Sie alle Gewinnzüge in dieser Position.

Ähnliche Formeln gelten für alle **Take-and-Break-Spiele**: Der ziehende Spieler darf Objekte entfernen und/oder einen Haufen teilen, wozu viele verschiedene Regeln denkbar sind. In *Winning Ways*, Kapitel 4 „Taking and Breaking“ wird für die Familie der sogenannten **Octalen Spiele** eine konzise Notation eingeführt. (`en.wikipedia.org/wiki/Octal_game`)

Grundys Spiel: eine ungelöste Vermutung

Das Spiel beginnt mit einem Haufen von $x \in \mathbb{N}$ Objekten. Der ziehende Spieler teilt einen Haufen seiner Wahl in zwei Haufen ungleicher Größe. Wir vereinbaren Normalspiel: Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

Aufgabe: Dieses Spiel heißt **Grundys Spiel**. Lösen Sie es für kleine x! Berechnen Sie zur Position x die Grundy–Zahl $\gamma(x)$, soweit möglich.

Lösung: Die Sprague–Grundy–Funktion $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist gegeben durch:

$$\gamma(x) = \operatorname{mex}\Big[\big\{\, \gamma(y) \oplus \gamma(z) \,\big|\, x = y + z,\ 1 \le y < z \,\big\}\Big]$$

Wir berechnen folgende Tabelle (bottom up / memoisierte Rekursion):

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
γ	0	0	0	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	3	2	1	3	2	4	3	0

⚠ Anders als bei Lasker–Nim erkennen wir hier kein einfaches Muster, das unsere Rekursion zu einer effizienten Lösung abkürzen könnte.

Frage: Ist diese Sprague–Grundy–Funktion $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ periodisch?

Grundys Spiel: eine ungelöste Vermutung

Elwyn Berlekamp, John Horton Conway und Richard Guy vermuten in ihrem Buch *Winning Ways* (1982), dass γ tatsächlich periodisch ist. Richard Guy: *Unsolved Problems in Combinatorial Games* (1996), `library.msri.org/books/Book29/files/unsolved.pdf`

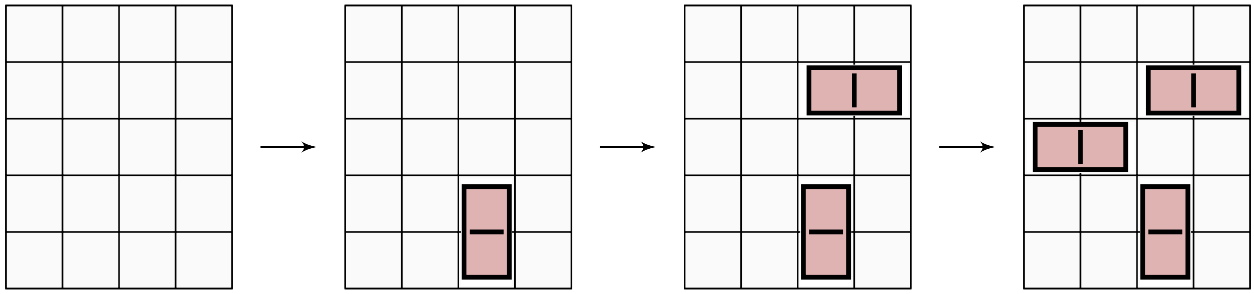
Sie können selbst weitere Werte berechnen, leichter mit Computerhilfe. So hat Achim Flammenkamp die ersten $2^{35} \approx 34 \cdot 10^9$ Werte berechnet, summarisch unter `wwwhomes.uni-bielefeld.de/achim/grundy.html`. Ein periodisches Verhalten konnte allerdings noch niemand entdecken.

Es ist recht erstaunlich, dass eine doch relativ einfache Rekursion ein so kompliziertes Verhalten der Folge nach sich ziehen kann.

Übung: Denken Sie sich „zufällig" einige Spielpositionen $x \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ aus. Ist dies eine Gewinn- oder Verlustposition in Grundys Spiel? Wie nutzen Sie hier Ihre Vorarbeit? Finden Sie alle Gewinnzüge in dieser Position.

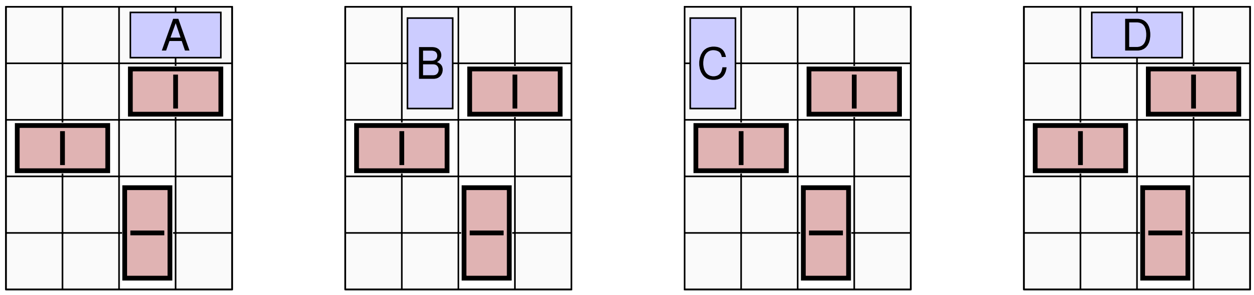
Übung: Spielpositionen $x \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ beschreiben wir am besten sortiert, etwa $(x_1 \ge x_2 \ge \dots \ge x_n)$ wie für Partitionen üblich. Schreiben Sie den Spielgraphen für einige kleine Startwerte (x_1) möglichst explizit aus.

Fliesentetris: Endspiel-Analyse dank Sprague–Grundy



Das Spielfeld besteht aus Quadraten, zum Beispiel rechteckig 4×5. Beide Spieler ziehen abwechselnd, der Ziehende legt ein Domino auf zwei benachbarte freie Quadrate. Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

Aufgabe: Wie lässt sich hier der Sprague–Grundy–Satz anwenden? Im oben skizzierten konkreten Beispiel? Allgemein als Algorithmus? Welcher der folgenden vier Züge A–D führt zum Gewinn?



Fliesentetris: Endspiel-Analyse dank Sprague–Grundy

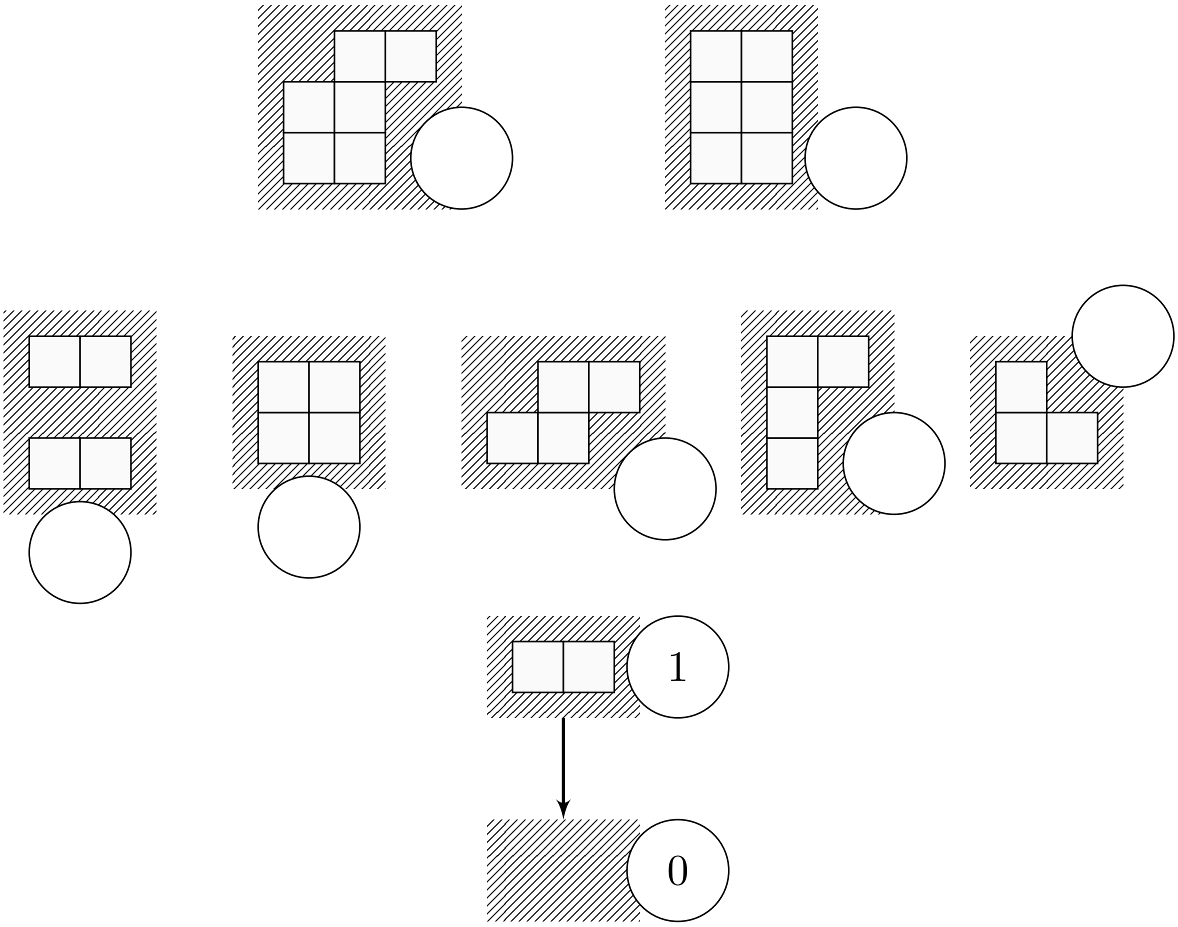
Wir parkettieren hier mit Dominos: Das ist Tetris für Fliesenleger!

Der hier entdeckte Trick gilt ganz allgemein für **Positionsspiele**: Die Spieler erobern Positionen mit Spielsteinen und behalten diese. Im Verlauf entstehen Inseln, also Zusammenhangskomponenten, die sich nicht mehr gegenseitig beeinflussen. Das nutzen wir gerne: Das Spiel zerfällt nachfolgend in die Summe seiner Komponenten!

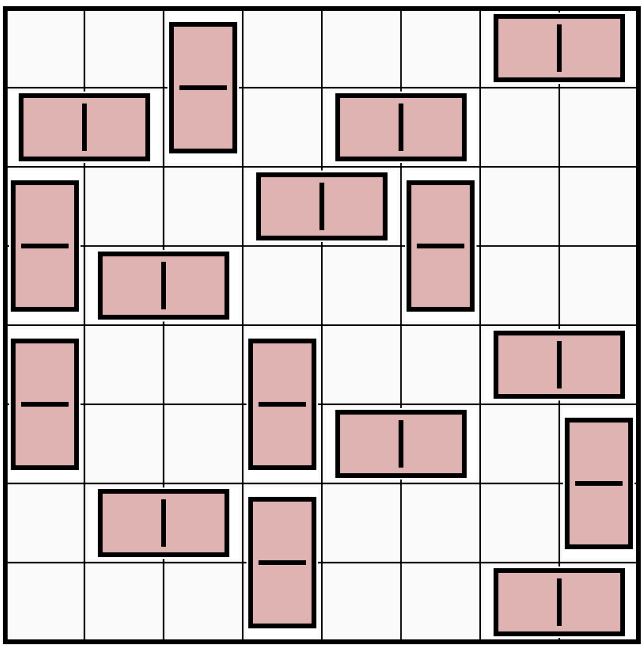
Es genügt daher, jede **Komponente** zu analysieren, den Graphen G_i zu erstellen und seine Sprague–Grundy–Funktion γ_i zu berechnen. Für das gesamte (End-)Spiel gilt dann $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ und $\gamma = \bigoplus_{i \in I} \gamma_i$. Die Berechnung von γ gelingt auf diesem Wege wesentlich effizienter. Anschließend lesen wir aus $x \mapsto \gamma(x)$ alle Gewinnzüge ab. Voilà!

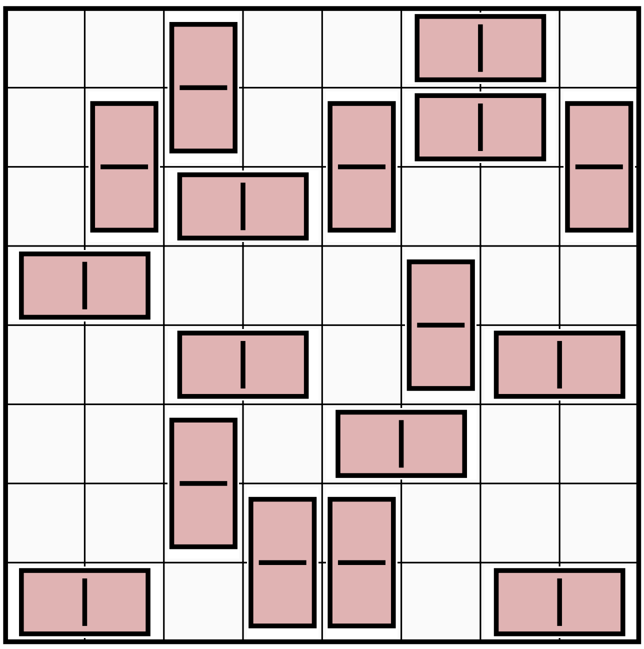
☺ Der Sprague–Grundy–Satz lässt sich überall bei Summen einsetzen. Diese bilden wir willkürlich, indem wir beliebige Spiele parallel spielen. Manchmal entstehen Summen auch von ganz alleine, ohne unser Zutun.

☺ Das entspricht übrigens der **externen** und der **internen** Summe, wie Sie dies von Vektorräumen und ähnlichen Strukturen kennen.



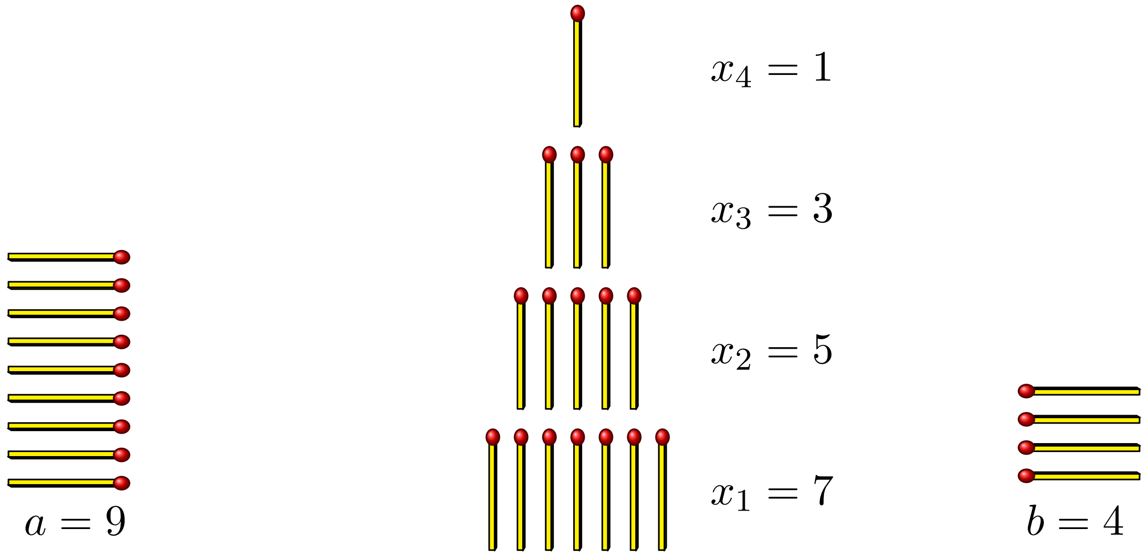
Aufgabe: (1) Bestimmen Sie den Spielgraphen und die Grundy–Zahlen.
(2) Sind die folgenden Spielstände Gewinn- oder Verlustpositionen?
(3) Finden Sie alle Gewinnzüge! Wie viele gibt es?





Links: Grundy–Zahl $\gamma(x) = 0$. Rechts: Grundy–Zahl $\gamma(y) = 1$.

Poker-Nim: Geben ist seliger als Nehmen?



Das Spiel **Poker-Nim** wird gespielt wie Nim mit Spielständen $x \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$: Der ziehende Spieler A nimmt $s \ge 1$ Streichhölzer eines Haufens x_r zu seinem Haufen a, oder legt umgekehrt $s \ge 1$ Streichhölzer von a zu x_r. Entsprechend für Spieler B und seinen Haufen b.

Aufgabe: (1) Formalisieren Sie Poker-Nim als ein neutrales Spiel (G, v).
(2) Ist die oben gezeigte Position eine Gewinn- oder Verlustposition?
Allgemein: Wie erkennen Sie Gewinnpositionen und Gewinnzüge?

Poker-Nim: Geben ist seliger als Nehmen?

Bislang betrachteten wir nur Spiele (G, v) auf artinschen Graphen G, also ohne unendliche Wege $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots$, somit ohne Schleifen. Egal wie gespielt wird, das Spiel endet nach endlich vielen Zügen.

Ausgehend von der terminalen Auszahlung $v : \partial G \to \{0, 1\}$ konstruieren wir per Rückwärtsinduktion (C1H) die **Gewinnfunktion** $u : X \to \{0, 1\}$:

(T) Für jeden terminalen Zustand $x \in \partial X$ gilt $u(x) = v(x)$.
(A) Für jeden aktiven Zustand $x \in X^\circ$ gilt $u(x) = \sup_{x \to y}[1 - u(y)]$.

Das bedeutet ausführlich als Fallunterscheidung:
(A0) Falls $u(x) = 0$: Für jeden Zug $x \to y$ gilt $u(y) = 1$.
(A1) Falls $u(x) = 1$: Es existiert ein Zug $x \to y$ mit $u(y) = 0$.

Poker-Nim und Northcotts Spiel (siehe unten) sind erste Beispiele für **Schleifenspiele** (engl. *loopy games* nach John H. Conway 1978).

A priori ist es hier möglich, unendlich lange zu spielen. Bei optimalem Spiel kann jedoch einer der beiden Spieler seinen Gewinn erzwingen!

🙂 Zur Lösung beschränken wir explizit die Zeit bis zum Spielende.

Poker-Nim: Geben ist seliger als Nehmen?

Definition C2A: erweiterte Gewinnfunktion mit Zeitschranke

Sei $G = (X, A, \sigma, \tau)$ ein Graph mit Auszahlung $v : \partial G \to \{0, 1\}$.

Eine **erweiterte Gewinnfunktion** $(u, w) : X \to \{0, 1\} \times \mathbb{N}$ besteht aus einer Gewinnfunktion $u : X \to \{0, 1\}$ und einer Zeitschranke $w : X \to \mathbb{N}$.

(T) Für jeden terminalen Zustand $x \in \partial X$ gilt $w(x) = 0$ und $u(x) = v(x)$.
(A) Für jeden aktiven Zustand $x \in X^\circ$ gilt $w(x) \geq 1$ und zudem:
(A0) Falls $u(x) = 0$: Für jeden Zug $x \to y$ gilt $u(y) = 1$ und $w(y) \leq w(x)$.
(A1) Falls $u(x) = 1$: Es gibt $x \to y$ mit $u(y) = 0$ und $w(y) < w(x)$.

Lösung: Mit dieser genial-einfachen Technik lösen wir Poker-Nim: Zustand $(x, a, b) \in X := \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \times \mathbb{N}^2$, Zug $(r, s) : (x, a, b) \to (x', a', b')$ mit $r \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Z}, 1 \leq s \leq x_r$ oder $1 \leq -s \leq a, x' = x - s\, e_r, a' = b, b' = a + s$.

Die Gewinnfunktion ist $u : X \to \{0, 1\} : (x, a, b) \mapsto 1 \wedge \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} x_i$, genau wie beim klassischen Nim-Spiel, nun erweitert durch die explizite Zeitschranke $w : X \to \mathbb{N} : (x, a, b) \mapsto [1 - u(x)]a + u(x)b + \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i$. Dieses Paar (u, w) erfüllt alle Forderungen aus Definition C2A.

Poker-Nim: Geben ist seliger als Nehmen?

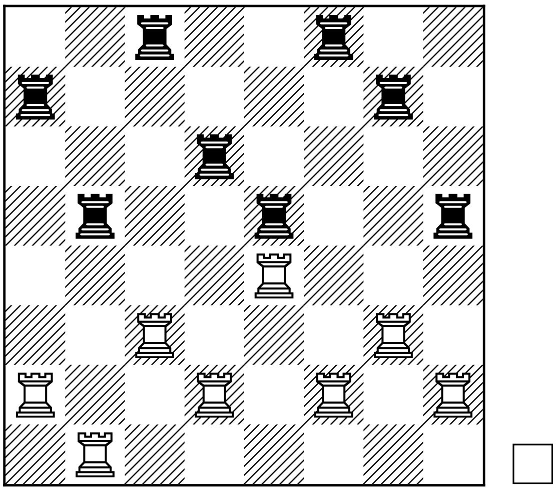
Interpretation: Beim Spielstand $x \in X$ mit $u(x) = 1$ kann der ziehende Spieler seinen Gewinn erzwingen, indem er stets reduzierend zieht (A1); er benötigt dann $\leq w(x)$ Züge bis zum Spielende und seinem Gewinn.

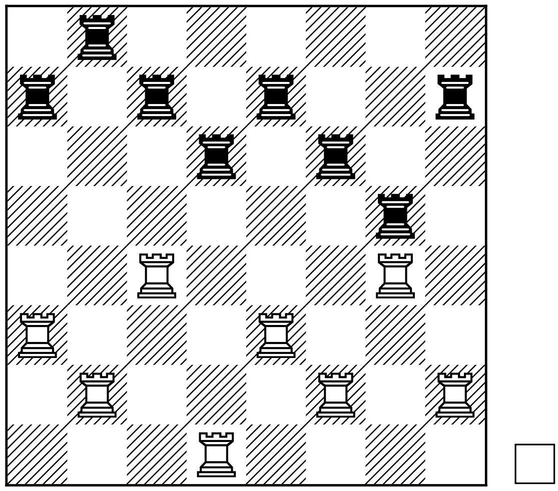
Im Falle $u(x) = 0$ wird der ziehende Spieler verlieren – wie immer bei optimalem Spiel seines Gegners. Der ziehende Spieler kann dies nicht verhindern, sondern höchstens auf $\leq w(x)$ Züge hinauszögern.

Erlaubt unser Spiel (G, v) eine erweiterte Gewinnfunktion (u, w), so ist damit das Spiel gelöst: Jeder optimale Spielverlauf ist endlich, wir erkennen die Gewinnpositionen an der Eigenschaft $u(x) = 1$ und die (reduzierenden) Gewinnzüge $x \to y$ an $u(y) = 0$ und $w(y) < w(x)$.

Für $w : X \to \mathbb{N}$ genügt statt $(\mathbb{N}, <)$ jede wohlgeordnete Menge $(W, <)$. Dies garantiert bei optimalem Spiel ein Ende nach endlich vielen Zügen. Wir werden diese Verallgemeinerung im Folgenden nicht nutzen. Für lokal-endliche Graphen genügen die natürlichen Zahlen.

Northcotts Spiel: Türme ziehen ohne Ende?





Gezogen wird abwechselnd weiß und schwarz (Markierung am Rand).
Der Ziehende bewegt einen Turm nur vertikal und soweit Platz ist.
Wir vereinbaren Normalspiel: Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

Aufgabe: (1) Formalisieren Sie dies als ein neutrales Spiel (G, v).
Ist der Spielgraph G hier endlich? Wie viele Zustände hat er?
Ist der Spielgraph artinsch? Endet jeder (optimale) Spielverlauf?
(2) Sind die beiden obigen Positionen Gewinn- oder Verlustposition?
Allgemein: Wie erkennen Sie Gewinnpositionen und Gewinnzüge?

Northcotts Spiel: Türme ziehen ohne Ende?

Dieses bekannte Beispiel heißt auch **Northcotts Spiel**.
Es ist insofern ungewöhnlich (und interessant!), als die Regeln allein nicht garantieren, dass jeder Spielverlauf wirklich endet.
Es ist hier durchaus möglich, unendlich lange zu spielen!

Überraschend zeigt sich jedoch, dass bei optimalem Spiel einer der beiden Spieler seinen Gewinn erzwingen kann. Sehen Sie wer und wie?
Dahinter versteckt sich eine weitere Variante des obigen Poker-Nim.
Das ist genau das Ziel der obigen Aufgabe. Probieren Sie es!

Übung: Ist dieses Spiel die Summe seiner Spalten? Falls ja, so lässt sich der Sprague–Grundy–Satz C1o direkt anwenden. Falls nein, so lässt sich das Spiel vielleicht umformulieren in eine äquivalente Summe.
Das vereinfacht die Analyse und ermöglicht eine effiziente Lösung!

Übung: Untersuchen Sie folgende Variante: Über bzw. unter jeder Zeile markiert eine Münze, welcher der beiden Türme als nächstes gezogen wird. Nach jedem Zug in dieser Spalte wird die Münze nach unten bzw. oben umgelegt. Ist dieses variierte Spiel die Summe seiner Spalten?

Definition C2B: erweiterte Grundy–Funktion mit Zeitschranke

Sei $G = (X, A, \sigma, \tau)$ ein Graph. Eine **erweiterte Grundy–Funktion** $(\gamma, w) : X \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ besteht aus einer Grundy–Funktion $\gamma : X \to \mathbb{N}$ und einer Zeitschranke $w : X \to \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

(T) Für jeden terminalen Zustand $x \in \partial X$ gilt $w(x) = 0$ und $u(x) = 0$.
(A) Für jeden aktiven Zustand $x \in X^\circ$ gilt $w(x) \geq 1$ und zudem:
(A0) Für jeden Zug $x \to y$ gilt $\gamma(y) \neq \gamma(x)$ und $w(y) \leq w(x)$.
(A1) Zu $0 \leq n < \gamma(x)$ existiert $x \to y$ mit $\gamma(y) = n$ und $w(y) < w(x)$.

Interpretation: Bei $\gamma(x) > 0$ gewinnt der ziehende Spieler das Spiel in $\leq w(x)$ Zügen, wenn er immer reduzierend zieht wie in (A1) erklärt.

☺ Erlaubt unser Spiel $(G, 0)$ eine erweiterte Grundy–Funktion (γ, w), so ist damit das Spiel gelöst: Jeder optimale Spielverlauf ist endlich, wir erkennen die Gewinnpositionen an der Eigenschaft $\gamma(x) \geq 1$ und die (reduzierenden) Gewinnzüge $x \to y$ an $\gamma(y) = 0$ und $w(y) < w(x)$.

Lemma C2C: Existenz und Eindeutigkeit

Sind (u, w) und (u', w') erw. Gewinnfunktionen zu (G, v), so gilt $u = u'$.
Sind (γ, w) und (γ', w') erw. Grundy–Funktionen zu $(G, 0)$, so gilt $\gamma = \gamma'$.

Ist der Graph G artinsch, so existiert zu (G, v) eine erw. Gewinnfunktion (u, w), und zu $(G, 0)$ eine erw. Grundy–Funktion (γ, w).

☺ Für lösbare Schleifenspiele gilt der Satz von Sprague–Grundy C1O:

Satz C2D: Sprague–Grundy für Schleifenspiele

Gegeben sei eine Familie von Graphen G_i indiziert durch $i \in I$, jeder mit einer erweiterten Grundy–Funktion $(\gamma_i, w_i) : X_i \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Dann erlaubt ihre Summe $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ die erweiterte Grundy–Funktion $(\gamma, w) : X \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $\gamma(x) = \bigoplus_{i \in I} \gamma_i(x_i)$ und $w(x) = \sum_{i \in I} w_i(x_i)$.

Aufgabe: Rechnen Sie Satz und Lemma sorgfältig nach!

☺ Damit lösen Sie Summen von Schleifenspielen!

Das Spiel Chomp! nach David Gale

Beim Spiel $\mathrm{Chomp}(m \times n)$ geht es um eine $m \times n$–Tafel Schokolade. Alice und Bob ziehen abwechselnd; die ziehende Spieler:in isst ein Feld $(i, j) \in \{0, \dots, m-1\} \times \{0, \dots, n-1\}$ und alle rechts-oben davon. Das Feld $(0, 0)$ links unten ist jedoch bitter; wer es isst, verliert.

Aufgabe: (1) Welcher der beiden Spieler kann den Gewinn erzwingen? (2) Welche Startzüge sind gewinnend? Finden Sie Gewinnstrategien! Inwiefern können Sie hier die Sprague–Grundy–Theorie anwenden?

Das Spiel Chomp! nach David Gale

Fun fact: „Chomp!“ heißt soviel wie „Mampf!“ oder „Schmatz!“.
Consommer avec modération! (Mit Mäßigung zu genießen!)

Das Spiel Chomp ähnelt Nim, mit einem entscheidenden Unterschied: Beim Nim-Spiel sind die Zeilen unabhängig und werden parallel gespielt. Bei Chomp hingegen sind Zeilen und Spalten miteinander verbunden, das Spiel ist daher keine Summe von Zeilen / Spalten-Teilspielen!

Eine Anwendung von Summen ist, wie wir wissen, die Endspiel-Analyse: Im Spiel Chomp tritt sie nur auf, wenn zwei getrennte Arme übrig sind.

Die geschickte Zerlegung und überaus effiziente Berechnung des Sprague–Grundy–Satzes steht uns hier sonst nicht zur Verfügung. Ohne dieses Werkzeug müssen wir meist mühsam rekursiv rechnen. Das erklärt die erhöhte Komplexität, die wir im Folgenden spüren.

Natürlich können wir dennoch die Sprague–Grundy–Funktion dieses Spiels berechnen: Wir nutzen sie wie nach wie vor zur externen Summe, etwa wenn wir mehrere Chomp-Spiele (oder andere) parallel spielen. Aber sie nützt uns eben leider nicht für eine interne Summenzerlegung.

Satz C2E: Symmetrie und Strategieklau

(0) Das Spiel $\mathrm{Chomp}(1 \times n)$ entspricht einzeiligem Nim, kurz $\mathrm{Nim}(n-1)$.

(1) Beim quadratischen Spiel $\mathrm{Chomp}(n \times n)$ beliebiger Größe $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ hat Alice eine Gewinnstrategie: Sie zieht $(1,1)$ und erhält das Nim-Spiel $\mathrm{Nim}(n-1) \oplus \mathrm{Nim}(n-1)$. Anschließend spiegelt sie jeden Zug von Bob.

(2) Beim rechteckigen Spiel $\mathrm{Chomp}(m \times n)$ mit $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ hat Alice eine Gewinnstrategie, jedoch nur implizit, im Allgemeinen unbekannt.

Beweis: Aussagen (0) und (1) sind klar.

(2) Angenommen, Bob hätte eine Gewinnstrategie $s_B : X^\circ \to A$.
Das gilt insbesondere nach Alice' erstem Zug $(m-1, n-1) : x_0 \to x_1$,
das heißt, Bob hat einen Gewinnzug $s_B(x_1) = (i,j) : x_1 \to x_2$.
Dann hat auch Alice den Gewinnzug $(i,j) : x_0 \to x_2$. $\boxed{\text{QED}}$

⚠ Quadratisches Chomp ist gemäß dieser Lösung trivial, als Spiel somit langweilig. Schon rechteckiges Chomp ist notorisch schwierig!

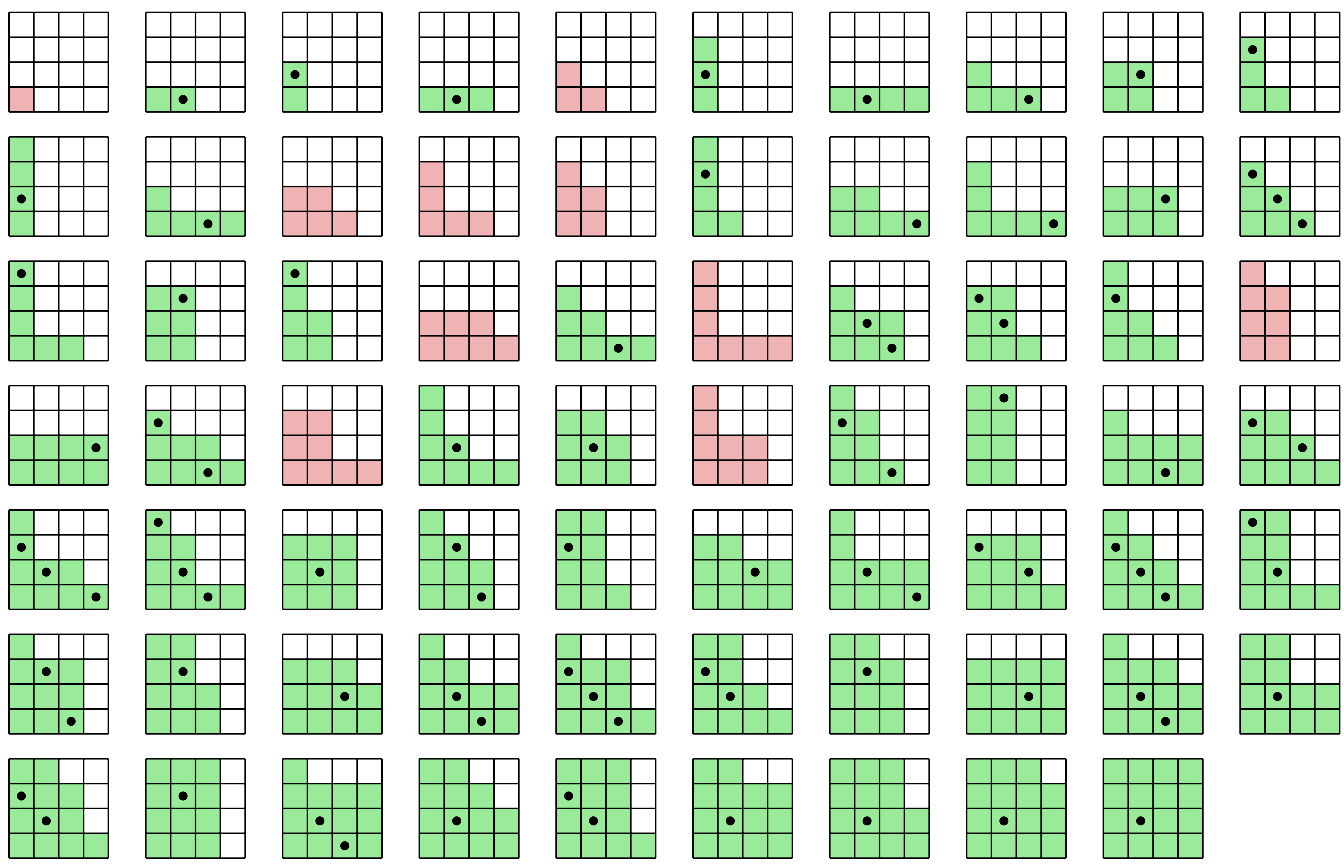
☺ Wir stehen vor einer erstaunlichen Situation: Alice hat nachweislich eine Gewinnstratgie, diese ist im Allgemeinen jedoch unbekannt!

Das Spiel Chomp! nach David Gale

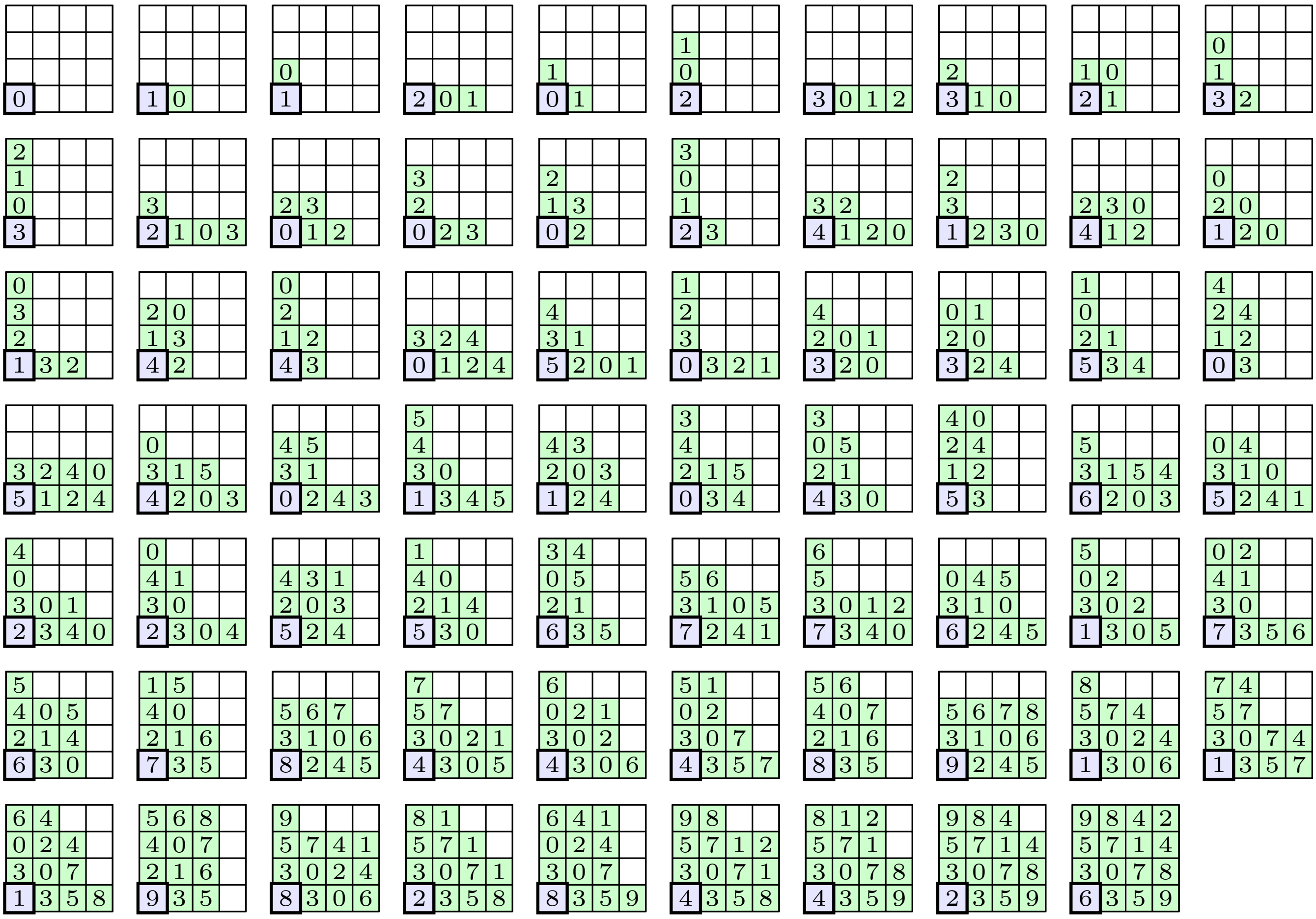
Lösung des Spiels $\mathrm{Chomp}(4 \times 3)$; markiert sind alle Gewinnzüge.

Das Spiel Chomp! nach David Gale

Lösung des Spiels $\mathrm{Chomp}(4 \times 4)$; markiert sind alle Gewinnzüge.



Sprague–Grundy–Zahlen des Spiels $\mathrm{Chomp}(4 \times 4)$



Sprague–Grundy–Zahlen des Spiels $\mathrm{Chomp}(4 \times 4)$

Welche Information beinhalten diese Zahlen? Wozu sind sie gut?

Für jede Position x steht links unten ihre Sprague–Grundy–Zahl $\gamma(x)$. Sie berechnet sich rekursiv wie gewohnt: Für jeden Zug $x \to y$ schauen wir bei der Position y ihren zuvor bereits berechneten Wert $\gamma(y)$ nach. Nach Definition (Satz C1J) finden wir damit $\gamma(x) = \operatorname{mex}\{\, \gamma(y) \mid x \to y \,\}$. Dank $\nu = \gamma \wedge 1$ berechnen wir so zugleich auch alle Gewinnpositionen x mit $\gamma(x) \ge 1$, und auch alle möglichen Gewinnzüge $x \to y$ mit $\gamma(y) = 0$.

Mit Geduld und Sorgfalt können wir also alle Werte $\gamma(x)$ berechnen, wie in obiger Tabelle. Leider erkennen wir hier kein einfaches Muster, das mühsame Rekursion zu einer effizienten Lösung abkürzen könnte.

Nach unserem derzeitigen Erkenntnisstand ist demnach Chomp spürbar komplexer als Nim: Für Nim haben wir eine effiziente Lösung, denn die Rechnung lässt sich in polynomieller Zeit durchführen, sogar linear!

Für Chomp hingegen kommen wir um die rekursive Rechnung nicht herum (soweit wir wissen), daher ist Zeitaufwand zur Berechnung von $x \mapsto \gamma(x)$ exponentiell, und so nur für kleine x realistisch durchführbar.

Das allgemeine Spiel Chomp!

Das Spiel $\mathrm{Chomp}(P, \leq)$ wird gespielt auf einer (partiell) geordneten Menge $(P, \leq)$. Gezogen wird abwechselnd. Die ziehende Spieler:in wählt $a \in P$, neues Teilspiel ist $\mathrm{Chomp}(Q, \leq)$ auf der Restmenge

$$Q = P \smallsetminus P_{\geq a} = \{\, b \in P \mid b \ngeq a \,\}.$$

Misèrespiel: Wir fordern ein kleinstes Element $0 \in P$, also $0 \leq P$. Wer dieses Element 0 zieht (als somit letzten Zug), verliert. Das entspricht dem **Normalspiel** auf $P' = P \smallsetminus \{0\}$.

Beispiel: Das Spiel $\mathrm{Chomp}(n)$ mit $n = \{\, 0 \leq 1 \leq 2 \leq \dots \leq n-1 \,\}$ ist einzeiliges $\mathrm{Nim}(n-1)$. Ebenso für die unendliche Menge $(\mathbb{N}, \leq)$.

Bemerkung: Sei $(P, \leq)$ total geordnet. Dann ist das Spiel $\mathrm{Chomp}(P, \leq)$ genau dann artinsch, wenn die Ordnung artinsch ist, das heißt: In $(P, \leq)$ existiert keine unendliche absteigende Kette $a_0 > a_1 > a_2 > \dots$.

Beispiel: Das Spiel $\mathrm{Chomp}(m \times n)$ mit der Produktordnung entspricht der Schokoladentafel. Ebenso Quader $p \times q \times r$ oder allgemein $(\mathbb{N}, \leq)^n$. Im Produkt $(P, \leq) = \prod_{i \in I}(P_i, \leq_i)$ ist die Ordnung $a \leq b$ erklärt durch $a_i \leq b_i$ für jede Koordinate $i \in I$: punktweiser Vergleich von Funktionen.

Wer gewinnt bei Chomp! und wie?

Für jedes rechteckige Spiel $\mathrm{Chomp}(p \times q)$ existiert eine Gewinnstrategie, sie ist im Allgemeinen jedoch nicht explizit bekannt! Allgemein gilt hierzu:

Satz C2F: Strategieklau im Spiel Chomp

(1) Existiert in $P' = P \smallsetminus \{0\}$ ein Element $m \in P'$, das mit allen $x \in P'$ vergleichbar ist, so hat Bob keine Gewinnstrategie. (2) Ist das Spiel $\mathrm{Chomp}(P, \leq)$ zudem artinsch, so hat Alice eine Gewinnstrategie.

Beweis: (1) Angenommen, Bob hätte eine Gewinnstrategie. Das gilt insbesondere nach Alice' erstem Zug $m : P \to P_1 = P \smallsetminus P_{\geq m}$, das heißt, Bob hat einen Gewinnzug $a : P_1 \to P_2 = P_1 \smallsetminus P_{\geq a}$. Dann hat auch Alice den Gewinnzug $a : P \to P_2$. Das ist ein Widerspruch. $\boxed{\text{QED}}$

Offene Probleme: Für $\mathrm{Chomp}(n \times n \times n)$ ist die Lösung unbekannt.

David Gale bot $\$100$ für eine vollständige Lösung von 3D-Chomp, also allen Spielen $\mathrm{Chomp}(p \times q \times r)$; das beinhaltet 2D-Chomp.

David Gale bot zudem $\$200$ für die Antwort zu folgender Frage: Hat der erste Spieler in $\mathrm{Chomp}(\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ eine Gewinnstrategie?

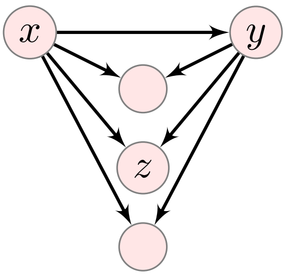
Strategieklau als allgemeine Methode

Diese Beweismethode durch Strategieklau gilt recht allgemein:

Satz C2G: Strategieklau in neutralen Spielen

Sei (G, v) ein neutrales kombinatorisches Spiel auf dem artinschen Graphen $G = (X, A, \sigma, \tau)$ mit terminaler Auszahlung $v : \partial X \to \{0, 1\}$.

Vorgelegt sei $x \in X$. Angenommen, es gibt einen Zug $x \to y$ mit $y \in X^\circ$, sodass für jeden Folgezug $y \to z$ auch $x \to z$ gilt. Dann folgt $u(x) = 1$.



Beweis: Zu (G, v) sei $u : X \to \{0, 1\}$ die Gewinnfunktion. Angenommen, es gälte $u(x) = 0$. Daraus folgt $u(y) = 1$. Somit existiert mindestens ein Zug $y \to z$ mit $u(z) = 0$. Dank $x \to z$ gilt dann $u(x) = 1$. Widerspruch! QED

Für jeden solchen (in y vollen) Teilgraphen ist x eine Gewinnposition.
Übung: Welche weiteren Teilgraphen mit dieser Eigenschaft finden Sie?

🙂 Der Beweis zeigt $u(x) = 1$, denn ein Gewinnzug $x \to ?$ existiert.
☹ Der indirekte Beweis gibt keinen Gewinnzug $x \to ?$ explizit an.

Strategieklau als allgemeine Methode

Übung: (1) Vergleichen Sie die abstrakten Existenzaussagen der beiden Sätze mit explizit-konstruktiven Lösungen. Was nützt wozu?

(2) Warum ist das unendliche Spiel Chomp auf $(\mathbb{N}, \leq)^d$ artinsch? Wir versehen $\mathbb{N}^d$ mit der Produktordnung $x \leq y$ gdw $\forall i : x_i \leq y_i$.

(3) Hat in $\mathrm{Chomp}(\mathbb{N}^2)$ der erste Spieler eine Gewinnstrategie? Beweisen Sie dies konstruktiv-explizit oder abstrakt-existentiell?

Hermann Weyl (1885–1955) formulierte die Problematik sehr treffend: Ein Existenzsatz verkündet „das Vorhandensein eines Schatzes, ohne jedoch zu verraten, an welchem Ort. [...] Nicht das Existenztheorem ist das Wertvolle, sondern die im Beweise geführte Konstruktion.“ (*Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik*, 1921)

Die Existenz einer Lösung ist wichtig, doch meist nur ein erster Schritt. Die explizite Lösung ist eine ungleich schwierigere Frage, doch gerade für Anwendungen unabdingbar. Das gilt insbesondere für Spiele!

Wie viel Rationalität benötigen wir?

Wir erinnern an unsere Annahme unbeschränkter Rationalität (A2A):

$\mathscr{R}_0$: Jeder Spieler will sein Ergebnis (Nutzen, Gewinn, …) maximieren.

$\mathscr{R}_1$: Jeder Spieler versteht zudem alle Spielregeln und Konsequenzen.

$\mathscr{R}_2$: Es gilt die vorige Aussage $\mathscr{R}_1$, und jeder Spieler weiß dies.

Wie viel Rationalität benötigen wir speziell für kombinatorische Spiele?

Angenommen die ziehende Spielerin ist in einer Gewinnposition. Dann genügt ihr eine optimale Strategie, also eigene Rationalität ($\mathscr{R}_1$): Damit kann sie gewinnen, unabhängig davon wie ihr Gegner sich verhält.

Angenommen jedoch der ziehende Spieler ist in einer Verlustposition. Wenn er rational ist ($\mathscr{R}_1$) und dies auch von seiner Gegnerin weiß ($\mathscr{R}_2$), dann kann er das aussichtslose Spiel aufgeben, denn er wird verlieren.

Wenn er hingegen hofft, dass seine Gegnerin Fehler machen könnte, dann lohnt sich erwartungsgemäß weiterhin, geschickt zu spielen ($\mathscr{R}_1$). Sprichwörtlich: *„It ain't over till it's over.“* / *„… till the fat lady sings.“* Optimist: „Wunder geschehen.“ Pessimist: „Die Hoffnung stirbt zuletzt.“

Wie viel Rationalität benötigen wir?

Rationalität ist eine zentrale, aber manchmal allzu starke Annahme: Im Schach kenne ich zwar alle Regeln, aber nicht alle Konsequenzen; mir fehlt die Rechenkapazität, ausreichend viele Züge vorauszudenken. Für Menschen wie für Computer ist die Komplexität entscheidend!

Unsere Vorlesungsexperimente zeigen: Fehler treten tatsächlich auf, selbst in einfachen Spielen wie einzeiligem Nim (vor dessen Lösung). Teilnehmer verstehen vollständig die Regeln und wollen gewinnen ($\mathscr{R}_0$), sie wissen auch, wie die Berechnung prinzipiell durchzuführen wäre…

Doch ohne genügend Rechenzeit, ohne Hilfsmittel wie Stift und Papier, überschreitet der exponentielle Aufwand die verfügbare Kapazität: Schon bei Spielbeginn in Position $x = 20$ scheint der Weg meist lang und schwierig genug, um den einen oder anderen Fehler zu provozieren.

Befindet man sich in einer Verlustposition, so sind zwar in der *Theorie* alle Züge gleich schlecht, aber in der *Praxis* eben nicht! Zum Beispiel lohnen sich Züge, die dem Gegner die Analyse *erschweren*, damit kann man ihn vielleicht *überraschen* und *verwirren* und so Fehler *provozieren*.

Wie viel Rationalität benötigen wir?

Nach der Lösung C1G sollte einzeiliges Nim fehlerfrei gespielt werden. Vernichtet die mathematische Lösung jeglichen Spielspaß? Vielleicht. Sie gewinnen dafür das intellektuelle Vergnügen, ein Problem zu lösen. Zudem gibt es noch viele weitere Spiele, der Spielspaß dauert also an!

Dieselben Beobachtungen wiederholen sich noch dramatischer bei Nim. Anfangs erkennen Sie wenig Struktur. Selbst wenn Sie sehen, dass Ihr Gegenüber über eine Gewinnstrategie verfügt, so können Sie diese schwerlich erraten. Alles ändert sich nach Boutons genialem Satz C1K.

Beobachten Sie dabei ihren Lernprozess vom *Whaaa?* bis zum *Aha!* Diese Interaktion in der Vorlesung kostet enorm viel Zeit und Aufwand. Viel schneller wäre, die Antworten nacheinander paradieren zu lassen, selbst wenn Sie sich zu diesem Zeitpunkt noch gar keine Fragen stellen.

Es fordert eine große Investition für alle Beteiligten, aber es lohnt sich: Sie spüren die Probleme, Sie stellen Fragen, Sie äußern erste Ideen, dafür will ich Ihnen Zeit lassen und genügend Raum für Diskussion. Im Nachgang sollen Sie alles gründlich nacharbeiten und festigen.

Wie viel Rationalität benötigen wir?

Sie verstehen jetzt auch praktisch und anschaulich, warum ich Spiele in der Vorlesung (bzw. begleitend im Casino) tatsächlich spielen will: Sie sammeln dort Erfahrungen, die die rationale Theorie illustrieren, oft genug bestätigen, aber manchmal auch darüber hinausgehen!

Alle Informationen liegen offen, Spielregeln und Zielsetzung sind klar. Um das Verhalten vorherzusagen, benötigen wir weitere Annahmen, vereinfachend setzen wir hierzu unbegrenzte Rationalität voraus. Doch Menschen verhalten sich nicht immer rational, aus diversen Gründen.

Das gilt selbst für sehr einfache Spiele, wie unsere ersten Beispiele: Denken Sie an Ihre eigene Erfahrung und an ihre ersten Versuche! Die Spannung zwischen (rationaler) Theorie und (oft sehr begrenzt rationaler) Praxis ist immer wieder überraschend und faszinierend.

Die große Herausforderung der Spieltheorie ist es, diese Kluft zu verringern, und in günstigen Fällen die Lücke gänzlich zu schließen. Sie sollten beide Sichtweisen verstehen, beurteilen und nutzen lernen. Es gelingt sicher nicht immer, aber es lohnt sich danach zu streben.

Satz C3A: Zermelo 1913

Schach ist determiniert: Entweder besitzt Weiß eine Gewinnstrategie, oder Schwarz, oder jeder Spieler kann ein Unentschieden erzwingen.

Aufgabe: (0) Formalisieren Sie das Spiel Schach als einen Graphen. (1) Ist dieser Graph artinsch? (2) Beweisen Sie damit Zermelos Satz!

Lösung: Es gibt mehrere (äquivalente) Möglichkeiten, ein gegebenes Spiel wie Schach durch einen Graphen $G = (X, A, \sigma, \tau)$ zu codieren. In weiser Voraussicht notieren wir den gesamten Verlauf der Partie:

Wir konstruieren einen **Spielbaum** ausgehend vom Startzustand 0 durch Aufzeichnen aller bisher gespielten Halb/Züge $x = z_1 z_2 \dots z_n$. Jeder nun legale Halb/Zug z ergibt eine Fortsetzung $y = z_1 z_2 \dots z_n z$. (Was wir einen Zug nennen, heißt beim Schach traditionell Halbzug.)

(0) Die Zustandsmenge X besteht aus allen legalen Halb/Zugfolgen. Jeder Halb/Zug ist eine legale Fortsetzung, formal ausgeschrieben $A = X \smallsetminus \{0\}$ mit $\sigma(z_1 \dots z_n) = z_1 \dots z_{n-1}$ und $\tau(z_1 \dots z_n) = z_1 \dots z_n$.

(1) Beim Schach gilt die **50-Züge-Regel**: Die Partie endet remis, wenn in den letzten 100 Halb/Zügen weder ein Stein geschlagen noch ein Bauer gezogen wurde (`de.wikipedia.org/wiki/50-Züge-Regel`).

Genauer: Die Partie endet nach 50 Zügen noch nicht automatisch, sondern das Remis muss von einem der Spieler reklamiert werden. Erst nach 75 Zügen wie in (1) beendet der Schiedsrichter die Partie.

Daraus folgt sofort: Der oben konstruierte Spielgraph G ist artinsch! (Die Stellung genügt dazu nicht, die Regeln benötigen den Verlauf.)

(2) Wir codieren Schach als den Spielgraphen $G = (X, A, \sigma, \tau)$. Die terminalen Zustände bewerten wir mit $v : \partial X \to \{-1, 0, +1\}$ als Verlust, Remis, Gewinn für den gerade ziehenden Spieler, und $-v$ für den Gegner. Dies ist demnach ein Nullsummenspiel.

Dank C1H existiert hierzu genau eine Gewinnfunktion $u : X \to \{\pm 1, 0\}$.
Im Falle $u(0) = +1$ besitzt Weiß eine Gewinnstrategie.
Im Falle $u(0) = -1$ besitzt Schwarz eine Gewinnstrategie.
Im Falle $u(0) = 0$ kann jeder Spieler ein Unentschieden erzwingen.

Zermelos grundlegendes Ergebnis zeigt, dass Schach determiniert ist; es definiert die Funktion u, sagt jedoch nichts über den Wert $u(0)$ aus. Viele haben versucht, diesen Wert zu bestimmen, und erhebliche Mühe investiert. Bis heute ist unbekannt, welcher der drei Fälle tatsächlich gilt.

Im Prinzip können wir die Gewinnfunktion u durch Rückwärtsinduktion berechnen. Der obige Beweis ist *konstruktiv*, das Vorgehen ist *effektiv*, doch die Berechnung nicht ausreichend *effizient*. Dieser Erfolg und die gleichzeitige Enttäuschung hat seit Zermelo viele Menschen fasziniert:

With chess it is possible, in principle, to play a perfect game or construct a machine to do so as follows: One considers in a given position all possible moves, then all moves for the opponent, etc., to the end of the game (in each variation). The end must occur, by the rules of the games after a finite number of moves (remembering the 50 move drawing rule). Each of these variations ends in win, loss or draw. By working backward from the end one can determine whether there is a forced win, the position is a draw or is lost.

Claude Shannon, *Programming a Computer for Playing Chess* (1950)

Shannon schätzte die Größe des Spielbaums G grob ab: Ein typisches Schachspiel dauert etwa 80 Halb/Züge, der ziehende Spieler hat etwa 30 mögliche Halb/Züge zur Auswahl, das ergibt grob $\sharp X \approx 30^{80} \approx 10^{120}$. Genaueres finden Sie unter `en.wikipedia.org/wiki/Shannon_number`.

Das ist eine astronomisch große Zahl, im wahrsten Sinne des Wortes: Die Anzahl aller Atome im beobachtbaren Universum wird auf etwa 10^{80} geschätzt. Shannons Zahl 10^{120} ist noch um 40 Zehnerpotenzen größer. Bei solch großen Zahlen versagt schnell unsere menschliche Intuition.

Die Berechnung von u mit brutaler Gewalt [*brute force*] ist demnach ganz offensichtlich ausgeschlossen. Nichtsdestotrotz ist es denkbar, durch geschickte, tiefsinnige Optimierung eine schnelle Berechnung zu finden und Zermelos Ergebnis C3A schließlich explizit zu berechnen.

Dazu betone ich einen naiv-optimistischen Vergleich: Auch Nim mit 40 Zeilen zu jeweils 1000 Objekten hat etwa $1000^{40} \approx 10^{120}$ Spielzustände. Dennoch können wir dieses Spiel effizient lösen, denn es hat Struktur (als Summe), und wir haben Werkzeuge (Satz C1O). Mathematik hilft!

Jede Menge ist ein kombinatorisches Spiel. . .

Jede Zermelo-Fraenkel-Menge M ist ein kombinatorisches Spiel! Die Spieler, Alice und Bob, ziehen abwechselnd durch Wahl eines Elements $N \in M$ als neuen Zustand. Wer nicht ziehen kann, verliert.

Beispiele: Die leere Menge $\emptyset$ ist terminal, also eine Verlustposition. Somit ist $\{\emptyset\}$ eine Gewinnposition, ebenso jede Menge M mit $\emptyset \in G$.

Nach John von Neumann definieren wir die natürlichen Zahlen durch $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, allgemein $n + 1 = \{0, 1, \dots, n\}$. Das ist Nim!

Satz C3B: Jede Menge definiert einen Graphen.

Jede Menge M definiert einen artinschen Graphen $G = (X, A, \sigma, \tau)$ mit Wurzel M und den Kanten $x \to y$ genau dann wenn $x \ni y$.

Beweis: Warum ist G artinsch? Hier retten uns die ZF-Axiome der Mengenlehre: Sie verbieten unendlich lange Ketten $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$.

. . . und umgekehrt!

Satz C3C: Jeder Graph definiert eine Menge.

Sei $G = (X, A, \sigma, \tau)$ ein artinscher Graph. Rekursiv können wir jedem Zustand $x \in X$ eine Menge $\zeta(x) = \{\, \zeta(y) \mid x \to y \,\}$ zuordnen.

Beweis: Auch dies verdanken wir der Rückwärtsinduktion C1H, leider nicht direkt dem Satz, doch unmittelbar seinem Beweis.

Das Graphenspiel G im Zustand x ist äquivalent zum Mengenspiel $\zeta(x)$:
(1) Jeder Zug $x \to y$ entspricht dem zugehörigen Zug $\zeta(x) \ni \zeta(y)$.
(2) Umgekehrt, zu jedem $\zeta(x) \ni z$ existiert $x \to y$ mit $\zeta(y) = z$.

Übung: Betrachten Sie das Spiel Nim mit (kleinem) Startzustand $x \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ und codieren Sie dies durch die zugehörige Menge $\zeta(x)$.

Übung: Sind die oben erklärten Zuordnungen $\xi : M \mapsto (G, M)$ und $\zeta : (G, x) \mapsto \zeta(x)$ zwischen Mengen und Graphen zueinander invers?

Von Mengen und Spielen. . .

Mit **Mengen** können wir alle mathematischen Objekte formulieren, von den Zahlbereichen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ über Funktionen $f : X \to Y$ hin zu weiteren Strukturen wie zum Beispiel Skalarprodukte, Normen, Metriken, Topologien, σ–Algebren, Wahrscheinlichkeits/Maße, usw.

Der Phantasie sind dabei keine Grenzen gesetzt. Erstaunlicherweise lässt sich all dies dank Mengen präzise formulieren und bequem nutzen. Die Mengenlehre dient so der gesamten Mathematik als Fundament, auch nach über einhundert Jahren erfüllt sie treu ihren Zweck.

Es ist daher zunächst überhaupt nicht verwunderlich, dass wir auch Spiele im bewährten Rahmen der Mengenlehre formulieren können. Genau das haben wir mit Graphen und ggf. weiteren Daten erreicht. Die Sprache der Mengen bewährt sich auch hier erneut wunderbar.

Durchaus überraschend ist jedoch, wie nahe sich die Grundstrukturen stehen: Mengen auf der einen Seite, artinsche Graphen auf der anderen. Hier haben wir eine direkte, einfache Übersetzung in beide Richtungen, die alle wesentlichen Aspekte bewahrt, wie oben skizziert.

. . . zur mathematischen Grundlagenforschung

John H. Conway perfektionierte die enge Verbindung von Spielen und Mengen in seinem berühmten Buch *On Numbers and Games* (1976).

Als sympathisch-spielerische Einführung schrieb Donald E. Knuth 1974 *Surreal Numbers*, ein Dialog zwischen Alice und Bob über die ersten 20 Seiten von *ONAG*. Er richtet sich an Studienanfänger:innen, mit dem Wunsch, ihnen spielerisch mathematische Forschung nahezubringen.

Of course, I wrote this mostly for fun, [. . .] but I must admit that I also had a serious purpose in the back of my mind. Namely, I wanted to provide some material that would help to overcome one of the most serious shortcomings in our present educational system, the lack of training for research work. [. . .] Conway's recent approach to numbers struck me as the perfect vehicle for illustrating the important aspects of mathematical explorations, because it is a rich theory that is almost self-contained, yet with close ties to both algebra and analysis, and because it is still largely unexplored.

Donald E. Knuth, *Surreal Numbers* (1974)

Als schönes Video von Prof. Edmund Weitz, `youtu.be/Q9gGVUiMo04`.

Die Frucht der Erkenntnis. . . von wahr und falsch

$\forall$

$\exists$

Die Frucht der Erkenntnis. . . von wahr und falsch

Dieses Gemälde von Tizian (Tiziano Vecellio, 1488–1576) zeigt den Sündenfall des Menschen. Die Paradieserzählung im Buch Genesis der Bibel spricht vom **Baum der Erkenntnis von Gut und Böse** (Gen 2,9). Ich interpretiere dies hier freizügig als Erkenntnis von **wahr und falsch**.

Im Folgenden spielen ausnahmsweise mal nicht Alice und Bob, sondern zwecks Diversität und Abwechslung nun Eva und Adam, genauer ∃va und ∀dam, denn es geht uns hier um Quantoren. Diese beiden hauchen bewährter Mathematik neues Leben ein!

Das hier vorgestellte Spielprinzip ist eine Interpretation der Logik, und inzwischen gibt es hierzu eine umfangreiche mathematische Literatur, speziell in der (infinitären) Logik und der (deskriptiven) Mengenlehre, siehe `en.wikipedia.org/wiki/Axiom_of_determinacy`.

Erste solche Spiele kennt jede:r Studierende seit dem ersten Semester der Analysis. Wir gehen nun einen mutigen Schritt weiter und wollen diese Quantorenspiele tatsächlich *spielen*, live und interaktiv im Hörsaal. Wie immer machen wir uns auf einige Überraschungen gefasst!

Jede Aussage mit All- und Existenz-Quantoren ist ein Spiel!

∃va spielt die **E**xistenzquantoren und möchte die Behauptung **e**rfüllen.
∀dam spielt die **A**llquantoren und möchte die Behauptung **a**nfechten.

Nulltes Beispiel: Zum Aufwärmen betrachten wir

(1) $\forall q \in \mathbb{Q}_{>0} \ \exists z \in \mathbb{Z} \ : \ 2^z > q$

(2) $\forall q \in \mathbb{Q}_{>0} \ \exists z \in \mathbb{Z} \ : \ 2^{z-1} \le q < 2^z$

Sei $h_n = \sum_{k=1}^n 1/k$ die harmonische Reihe, mit $h_0 = 0$ und $h_{-1} = -\infty$.

(3) $\forall q \in \mathbb{Q} \ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ h_n \ge q$

(4) $\forall q \in \mathbb{Q} \ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ h_{n-1} < q \le h_n$

Je nach Formulierung des Spiels ist die Rechenlast / Beweislast für ∀dam und ∃va und die Spielleitung (!) spürbar verschieden.

Unsere ersten Quantorenspiele sind (theoretisch!) sehr simpel und daher genau richtig um sich (praktisch!) einzugewöhnen.

Sobald alle die Spielregeln verstehen und auch die Schwierigkeiten spüren, können wir schrittweise zu interessanteren Spielen über.

Eventuell müssen weitere Regeln diskutiert und abgestimmt werden. Es ist jedenfalls gut, sich gut einzustimmen, bevor es ernst wird.

Sei $\mathbb{P} = \{p_0 < p_1 < p_2 < \dots\}$ die Menge der Primzahlen und $p_{-1} = 0$.

(5) $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists p \in \mathbb{P} \ : \ p > n$

(6) $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists k \in \mathbb{N} \ : \ p_{k-1} \le n < p_k$

Wir betrachten die Reihe $x_n = \sum_{k=1}^n 1/k^2$.

(7) $\exists q \in \mathbb{Q} \ \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \ \exists m \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}_{\ge m} \ : \ q - \varepsilon < x_n \le q$

(8) $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \ \exists q \in \mathbb{Q} \ \exists m \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}_{\ge m} \ : \ q - \varepsilon < x_n \le q$

Quantoren-Spiele: ∃va gegen ∀dam

Jede Aussage mit All- und Existenz-Quantoren ist ein Spiel!

∃va spielt die **E**xistenzquantoren und möchte die Behauptung **e**rfüllen. ∀dam spielt die **A**llquantoren und möchte die Behauptung **a**nfechten.

Erstes Beispiel: Als Spieldaten betrachten wir die Folge

$$\text{(1)} \quad x_n := \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}.$$

Zwei mögliche Spielregeln sind:

$$\text{(K)} \quad \exists a \in \mathbb{Q} \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \; : \; |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\text{(C)} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \;\; \exists a \in \mathbb{Q} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} \; : \; |x_n - a| < \varepsilon$$

Weitere Spieldaten, für noch mehr Spielspaß:

$$\text{(2)} \quad x_n := \sum_{k=0}^{n} (-2)^k$$

$$\text{(3)} \quad x_n := \sum_{k=0}^{n} 1/k!$$

Quantoren-Spiele: ∃va gegen ∀dam

Die „Epsilontik“ ist eine geniale Errungenschaft der Analysis. Sie hat im 19. Jh. der intuitiven Vorstellung des infinitesimal Kleinen eine tragfähige Grundlage geschaffen und ist seither überall phantastisch erfolgreich. Es lohnt, dieses Juwel menschlicher Erkenntnis zu verstehen.

Egal ob in der Mathematik oder der Informatik, den Natur-, Ingenieur- oder Wirtschaftswissenschaften, die Analysis wird überall gerne genutzt, doch ihr Studium verlangt von Anfänger:innen eine große Investition. Vielleicht hilft es, Quantorenfolgen als Spiele zu begreifen.

Meist spielt leider nur eine Person, in der Vorlesung, beim Rechnen, als Hausaufgabe, in der Klausur, etc. Wir spielen dies im Casino Royal als „Team ∃va“ gegen „Team ∀dam“. Selbst wer theoretisch alles versteht, erlebt interaktiv erfahrungsgemäß neue Aspekte und Aha-Momente.

Was winkt als Bonus? Das Spiel spornt an. Konkrete Zahlen üben das Rechnen. Der Wunsch nach Systematisierung vertieft das Verständnis. Die Schwierigkeiten werden greifbar: schrittweise Lernen und Üben, formales Protokol, rechnerisch-algorithmische Komplexität, usw.

Quantoren-Spiele: ∃va gegen ∀dam

Jede Aussage mit All- und Existenz-Quantoren ist ein Spiel!

∃va spielt die **E**xistenzquantoren und möchte die Behauptung **e**rfüllen.
∀dam spielt die **A**llquantoren und möchte die Behauptung **a**nfechten.

Zweites Beispiel: Als Spieldaten betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : x \mapsto \operatorname{sign}(x^2 - 2) \qquad \text{auf } X = \mathbb{Q}.$$

Zwei mögliche Spielregeln sind:

$$\forall a \in X \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \;\; \exists \delta \in \mathbb{Q}_{>0} \;\; \forall x \in X \;:\; |a - x| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \;\; \exists \delta \in \mathbb{Q}_{>0} \;\; \forall a \in X \;\; \forall x \in X \;:\; |a - x| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon$$

Weitere Spieldaten, für noch mehr Spielspaß:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{sign}(x^2 - 2) \qquad \text{auf } X = \mathbb{R},$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{dist}(x, \tfrac{1}{k!}\mathbb{Z}) \qquad \text{auf } X = \mathbb{R}.$$

Quantoren-Spiele: ∃va gegen ∀dam

Eine bewährte mathematische Weisheit besagt: Wenn wir eine Aussage beweisen wollen, sollten wir zugleich versuchen, unsere Argumente zu widerlegen. Das erzieht uns, ja zwingt uns, zu (selbst)kritischer Prüfung. Wir verteilen nun die Rollen explizit und erleben manche Überraschung!

Was ist nach einer Episode bewiesen? Vermutlich noch nahezu nichts. Nach vielen Episoden wächst die Überzeugung. Gewinnt immer ∃va? Gewinnt immer ∀dam? Können wir eine Gewinnstrategie formulieren? Jede vollständig ausgearbeitete Gewinnstrategie ist ein formaler Beweis!

Die Durchführung des Spiels kann auch als **Null-Wissen-Beweis** [*zero knowledge proof*] dienen: ∃va kann ∀dam überzeugen, dass sie einen Beweis hat, ohne den Beweis preiszugeben; der Nachweis geschieht durch wiederholtes Spiel, bis ∀dam überzeugt ist (oder umgekehrt).

Ich habe oben bewusst auf Stichworte wie „konvergente Folge“ oder „Cauchy–Folge“, „stetige Funktion“ oder „gleichmäßig stetig“ verzichtet. Das ist Teil des Entdeckens, Ausprobierens, Spielens, … Wer sie kennt, genießt gewisse Vorteile, und verspürt doch erneut Anfängerfreuden.

Kapitel D

Markov–Spiele und Bellmans Optimalitätsprinzip

So you're telling me it is a matter of probability and odds;
I was worried there was some chance involved.

Vesper Lynd zu James Bond im Film *Casino Royale* (2006)

While in theory randomness is an intrinsic property,
in practice, randomness is incomplete information.

Nassim Nicholas Taleb (1960–)

Inhalt dieses Kapitels D

Motivation und Überblick

In diesem Kapitel betrachten wir Markov–Spiele, in denen ein Akteur gegen den Zufall spielt und hierzu eine **optimale Strategie** sucht.

Ich beginne simpel und möglichst **problemorientiert** [*problem driven*]: Wie können wir uns in sehr einfachen Bei-Spielen optimal verhalten? Daraus ergeben sich die richtigen Fragen, oft direkt von Studierenden, die wir dann durch Aufbau einer **passenden Theorie** zu lösen suchen [*method driven*]. Beide Arbeitsweisen ergänzen sich bestens.

Je considère comme complètement inutile la lecture de gros traités d'analyse pure: un trop grand nombre de méthodes passent en même temps devant les yeux. C'est dans les travaux d'application qu'on doit les étudier; c'est là qu'on juge leurs capacités et qu'on apprend la manière de les utiliser.

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

Monsieur Cauchy annonce, que, pour se conformer au voeu du Conseil, il ne s'attachera plus à donner, comme il a fait jusqu'à présent, des démonstrations parfaitement rigoureuse.

Conseil d'instruction de l'École Polytechnique (1825)

Motivation und Überblick

In den vorigen Kapiteln haben wir die **Rekursion** / Rückwärtsinduktion kennen und nutzen und schätzen gelernt. In Anwendungen sind die zu lösenden Gleichungen oft nicht rekursiv aufgebaut, also nicht von klein nach groß „topologisch“ sortierbar, sondern selbstbezüglich / zyklisch. Dies sind also allgemeine **Fixpunktgleichungen**. Ihre wunderschöne Theorie und praktische Anwendung sind überall von großer Bedeutung.

Nancy L. Stokey, Robert E. Lucas:
Recursive Methods in Economic Dynamics. Harvard Univ. Press 1989

Lars Ljungqvist, Thomas J. Sargent:
Recursive Macroeconomic Theory. The MIT Press (3rd ed.) 2012

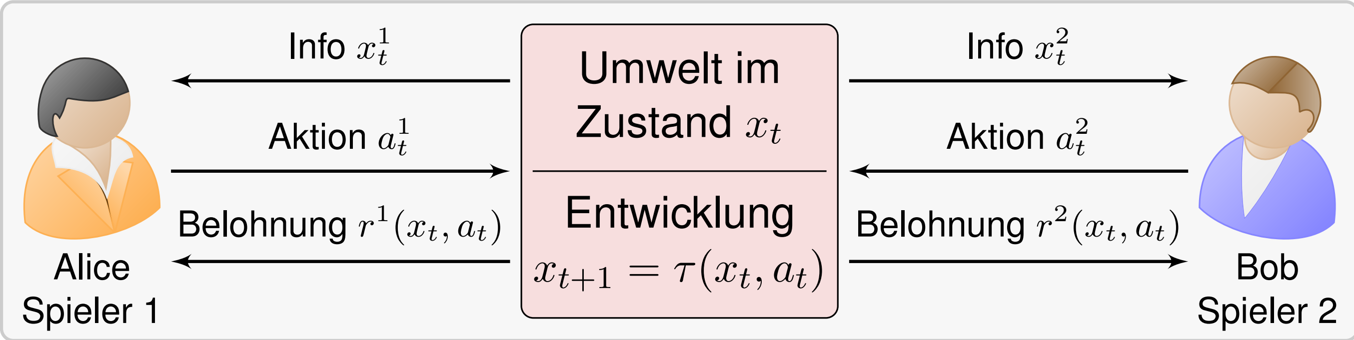
Die hier gesuchte Optimierung des strategischen Handelns führt aus algorithmischer Sicht zum **maschinellen Lernen** [*machine learning*].

Stuart Russell, Peter Norvig: *Artificial Intelligence: A Modern Approach.* Addison Wesley (3rd ed.) 2016 (Kapitel 17: Making complex decisions)

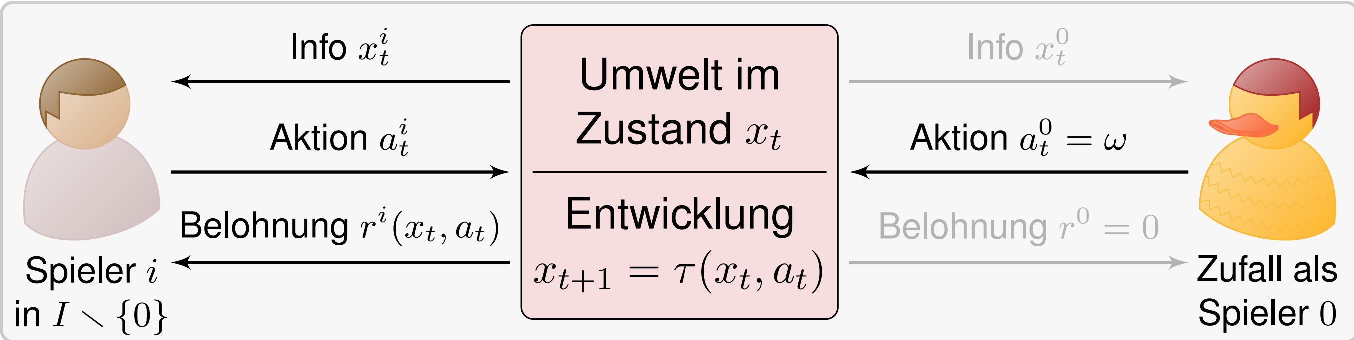
Richard S. Sutton, Andrew G. Barto: *Reinforcement Learning.* The MIT Press (2nd ed.) 2018 (hier speziell §6.5: Q–learning).

Dynamische Spiele und strategische Interaktion

Dynamisches System mit Steuerung durch zwei Spieler: Markov–Spiel



Steuerung durch mehrere Spieler und Zufall: Markov–Spiel (MMDP)



Jeder Spieler will seinen individuellen Gesamtnutzen maximieren.

Dynamische Spiele und strategische Interaktion

In Kapitel C haben wir **neutrale kombinatorische Spiele** betrachtet: Spieler ziehen abwechselnd und haben dieselben Zugmöglichkeiten. Das vereinfacht die Analyse und enthüllt besonders klare Strukturen: Der Satz von Sprague–Grundy überführt jedes neutrale Spiel in ein äquivalentes Nim-Spiel und erlaubt (oft genug) eine effiziente Lösung.

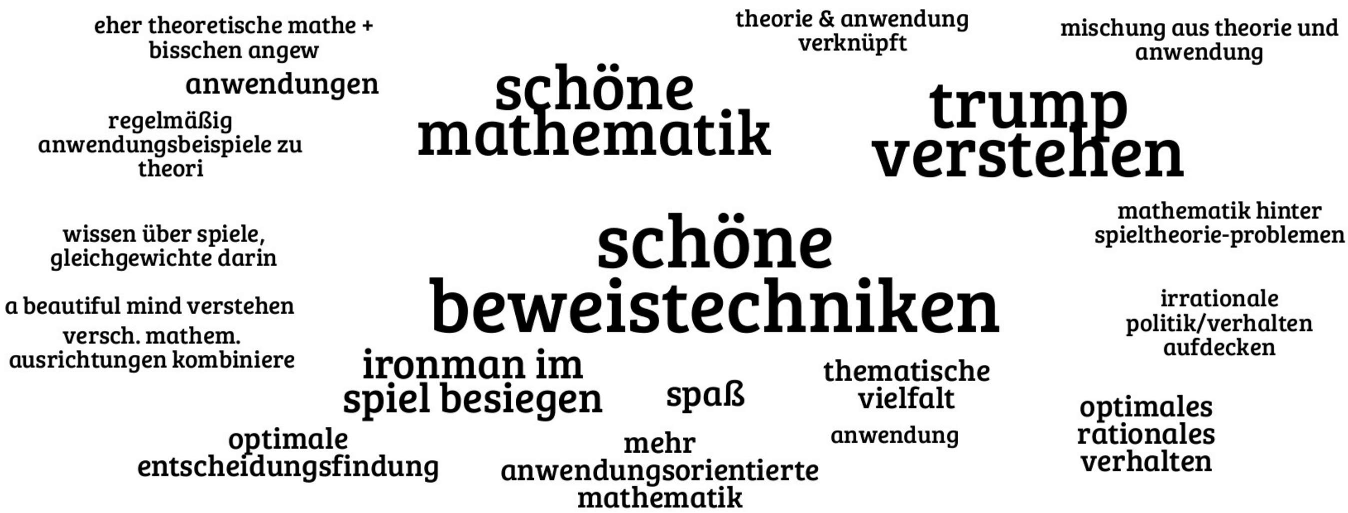
Unser Ziel sind **allgemeine Spiele** für zwei oder mehr Personen, bei denen Personen abwechselnd oder auch gleichzeitig ziehen. Bevor wir solche Spiele erklären und lösen, möchte ich noch etwas genauer einige spezielle und besonders einfache Fälle beleuchten.

In diesem Kapitel untersuchen wir Markov–Spiele, mit nur einem Spieler, aber Zufallszügen. Es handelt sich also um **Spiele gegen den Zufall**. Das Verhalten des Zufalls ist (in unseren Modellen) fest vorgegeben, daher handelt es sich um ein (stochastisches) **Optimierungsproblem**.

Der übliche Name hierfür ist **Markov–Entscheidungsprozess** [*Markov decision process*, MDP], doch auch das ist nichts anderes als ein Spiel. Hierzu erkläre ich erste Beispiele und Lösungsmethoden.

Schnappschuss: Erwartungen der Studierenden

Erwartungen der Studierenden zu Beginn des Semesters (2019):



Schnappschuss: Erwartungen der Studierenden

Erwartungen der Studierenden zu Beginn des Semesters (2022):

Irrfahrt, Gewinnerwartung und optimale Entscheidung

0	1	2	3	4	5	6	7	8
7€								23€

Aufgabe: Ihre Spielfigur startet auf einem gelben Spielfeld im Inneren. In jedem Zug rückt sie auf ein Nachbarfeld, zufällig und gleichverteilt. Das Spiel endet am Rand $\partial X = \{0, 8\}$ mit dem gezeigten Gewinn. Wie viel würden Sie als Teilnehmer zahlen / als Anbieter verlangen?

(0) Was ist die Gewinnerwartung $u(x)$ für jedes Startfeld $x \in X$?
(1) Jeder Zug kostet, $c = -1€$, und Sie müssen zu Ende spielen.
(2) Jeder Zug kostet, $c = -1€$, und Sie dürfen jederzeit aufgeben.

Schätzen Sie zunächst! Wie treffsicher ist Ihre intuitive Erwartung? Formulieren Sie allgemeine Gleichungen und Lösungsmethoden: Wie *prüfen* Sie eine Lösung? Wie *finden* Sie eine/alle Lösungen?

7	9	11	13	15	17	19	21	23

7	2	-1	-2	-1	2	7	14	23

7.00	2.67	0.33	0.00	0.60	3.20	7.80	14.40	23.00

Irrfahrt, Gewinnerwartung und optimale Entscheidung

Hier ist (0) ein extrem einfaches Spiel, schon (1) dürfte überraschen: Ungeschult haben wir herzlich wenig Erfahrung mit zufälligen Irrfahrten. Allgemein fällt Menschen rekursives Denken erfahrungsgemäß schwer, doch gerade dies ist für rationale Entscheidungen (2) wesentlich.

Bevor wir die Lösung diskutieren, schätzen Sie bitte die Erwartung. Ist Ihre Intuition präzise und treffsicher, oder allzu vage und irrig?

Diese quantitativen Schätzfragen sind ein aufschlussreicher Test der vielzitierten Schwarmintelligenz und mahnen zur Vorsicht: Betrügerische Geschäftspraktiken beruhen gerade darauf, dass das Gegenüber die Situation schlecht einschätzen kann und daher Fehlentscheidungen trifft.

Es ist schön und gut, die eigene Intuition zu nutzen und zu entwickeln. Leider hilft es wenig, eine Antwort ohne Begründung anzugeben. Wir wollen begründete, nachvollziehbare, tragfähige Argumente! Auch das ist ein Qualitätsmerkmal rationalen Handelns.

Übung: Angenommen, alle Spieldaten sind rational, in $\mathbb{Q}$, so wie hier. Sind dann ebenfalls auch alle Ergebnisse rational? Hier scheint es so!

0	1	2	3	4	5	6	7	8
7	9	11	13	15	17	19	21	23

Aufgabe: (0) Wie berechnen Sie die Gewinnerwartung?

Lösung: Für $x \in X = \{0, 1, \dots, 8\}$ suchen wir $u_x = u(x)$. Wir haben:

$$\begin{aligned}
u_0 &= 7\\
-\tfrac12 u_0 + u_1 - \tfrac12 u_2 &= 0\\
-\tfrac12 u_1 + u_2 - \tfrac12 u_3 &= 0\\
-\tfrac12 u_2 + u_3 - \tfrac12 u_4 &= 0\\
-\tfrac12 u_3 + u_4 - \tfrac12 u_5 &= 0\\
-\tfrac12 u_4 + u_5 - \tfrac12 u_6 &= 0\\
-\tfrac12 u_5 + u_6 - \tfrac12 u_7 &= 0\\
-\tfrac12 u_6 + u_7 - \tfrac12 u_8 &= 0\\
u_8 &= 23
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten bilden eine Bandmatrix: tridiagonal, dünn besetzt

☺ Lineare Gleichungssysteme können Sie lösen: Gauß gelingt immer! Vereinfachung: Für $d_x = u_x - u_{x-1}$ erhalten wir $d_1 = d_2 = \dots = d_8 = d$ und $8d = 23 - 7 = 16$, also $d = 2$ und $u_x = 7 + d \cdot x$ für alle $x \in X$.

Dies ist ein **lineares Gleichungssystem**, homogen im Inneren X°, inhomogen am Rand ∂X aufgrund der Dirichlet–Randbedingung.

Es ist klein genug, um noch von Hand gelöst zu werden. Versuchen Sie es selbst: Rechnen reinigt die Seele!

Es ist zudem dünn besetzt und hat eine hohe Symmetrie. Das nutzen wir gerne, etwa durch wiederholte Halbierung.

Die hier gezeigte simple Lösung funktioniert ganz allgemein: Die Lösung ist die eindeutige Gerade durch die beiden Randwerte.

Die Gleichung $u_x = \frac12 u_{x-1} + \frac12 u_{x+1}$ nennen wir **Mittelwerteigenschaft**. Eine solche Funktion $u : X \to \mathbb{R}$ heißt **harmonisch**, in Anlehnung an die klassische partielle Differentialgleichung $\Delta u = 0$ auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, wobei $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_n^2$ der Laplace–Operator ist.

Die Differenz $-\frac12 u_{x-1} + u_x - \frac12 u_{x+1}$ entspricht der (negativen) **zweiten Ableitung** an der Stelle x. Ist sie gleich Null, so handelt es sich um eine Gerade. Ist sie negativ, so sehen wir eine nach oben geöffnete Parabel. Die Zugkosten c_x im Punkt x entsprechen der Krümmung im Punkt x!

Irrfahrt, Gewinnerwartung und optimale Entscheidung

0	1	2	3	4	5	6	7	8
7	2	−1	−2	−1	2	7	14	23

Aufgabe: (1) Wie berechnen Sie die Gewinnerwartung bei Zugkosten?

Lösung: Für $x \in X = \{0, 1, \dots, 8\}$ suchen wir $u_x = u(x)$. Wir haben:

$$\begin{aligned}
u_0 &= 7\\
-\tfrac{1}{2}u_0 + u_1 - \tfrac{1}{2}u_2 &= c_1\\
-\tfrac{1}{2}u_1 + u_2 - \tfrac{1}{2}u_3 &= c_2\\
-\tfrac{1}{2}u_2 + u_3 - \tfrac{1}{2}u_4 &= c_3\\
-\tfrac{1}{2}u_3 + u_4 - \tfrac{1}{2}u_5 &= c_4\\
-\tfrac{1}{2}u_4 + u_5 - \tfrac{1}{2}u_6 &= c_5\\
-\tfrac{1}{2}u_5 + u_6 - \tfrac{1}{2}u_7 &= c_6\\
-\tfrac{1}{2}u_6 + u_7 - \tfrac{1}{2}u_8 &= c_7\\
u_8 &= 23
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten bilden eine Bandmatrix: tridiagonal, dünn besetzt

☺ Allgemeine Faustregel: Ausrechnen ist mühsam. Prüfen ist leicht!
Wir vermuten, dass die Lösung eindeutig ist. Gilt das? Satz D1A!
Negative Gewinnerwartung bedeutet: Ab hier besser nicht spielen!

Irrfahrt, Gewinnerwartung und optimale Entscheidung

0	1	2	3	4	5	6	7	8
7.00	2.67	0.33	0.00	0.60	3.20	7.80	14.40	23.00

Aufgabe: (2) Wie berechnen Sie die Gewinnerwartung bei Zugkosten?
Als zusätzliche Option darf der Spieler nun auch aufgeben / abbrechen.

Lösung: Wir suchen $u : X \to \mathbb{R}$. Am Rand gilt $u(0) = 7$ und $u(8) = 23$.
In jedem aktiven Zustand $x \in \{1, 2, \dots, 7\}$ sind zwei Aktionen möglich:

Weiterspielen: $u(x) = c(x) + \frac{1}{2}u(x-1) + \frac{1}{2}u(x+1)$

Aufgeben: $u(x) = 0$

Ein rationaler Spieler wählt jeweils den besten Zug, also das Maximum:

$$\boxed{u(x) = \max\Big\{\ 0,\ c(x) + \tfrac{1}{2}u(x-1) + \tfrac{1}{2}u(x+1)\ \Big\}}$$

Dieses Gleichungssystem ist… nicht-linear… und selbstbezüglich.
Wie immer gilt auch hier: Ausrechnen ist mühsam. Prüfen ist leicht!
Existiert immer eine Lösung u? Gibt es mehrere oder genau eine?
Wie können wir sie berechnen? Zudem möglichst effizient? Übung!

☺ Hier hilft Ihnen ein Python-Skript oder eine Tabellenkalkulation!

Irrfahrt, Gewinnerwartung und optimale Entscheidung

(2) Eine Näherung gelingt einfach und effizient durch Iteration:

$$\boxed{u_{t+1}(x) = \max\{\ 0,\ c(x) + \tfrac{1}{2}u_t(x-1) + \tfrac{1}{2}u_t(x+1)\ \}}$$

t	$u_t(0)$	$u_t(1)$	$u_t(2)$	$u_t(3)$	$u_t(4)$	$u_t(5)$	$u_t(6)$	$u_t(7)$	$u_t(8)$
0	7.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	23.00
1	7.00	2.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	10.50	23.00
2	7.00	2.50	0.25	0.00	0.00	0.00	4.25	10.50	23.00
3	7.00	2.63	0.25	0.00	0.00	1.13	4.25	12.63	23.00
4	7.00	2.63	0.31	0.00	0.00	1.13	5.88	12.63	23.00
5	7.00	2.66	0.31	0.00	0.00	1.94	5.88	13.44	23.00
6	7.00	2.66	0.33	0.00	0.00	1.94	6.69	13.44	23.00
7	7.00	2.66	0.33	0.00	0.00	2.34	6.69	13.84	23.00
8	7.00	2.66	0.33	0.00	0.17	2.34	7.09	13.84	23.00
9	7.00	2.67	0.33	0.00	0.17	2.63	7.09	14.05	23.00
...									
39	7.00	2.67	0.33	0.00	0.60	3.20	7.80	14.40	23.00
40	7.00	2.67	0.33	0.00	0.60	3.20	7.80	14.40	23.00

Irrfahrt, Gewinnerwartung und optimale Entscheidung

☺ Vergleichen Sie die hier berechneten Werte mit Ihren intuitiven Schätzungen bei der ersten, informellen Annäherung an diese Frage. Unser kleines Markov–Spiel ist eine sehr einfache, aber durchaus realistische Illustration für einen Markov–Entscheidungsprozess.

☺ Die Lösung u_0 im linearen Fall, ohne Entscheidung, ist leicht zu berechnen durch das lineare Gleichungssystem, also als Fixpunkt: Wir nutzen auf $E = \{\ u : X \to \mathbb{R} \mid u(0) = 7,\ u(8) = 23\ \}$ den linearen Operator $\Phi_0 : E \to E : u \mapsto \bar{u}$ mit $\bar{u}(x) = c(x) + \frac{1}{2}u(x-1) + \frac{1}{2}u(x+1)$.

⚠ Die Lösung mit Entscheidungsmöglichkeit ist nicht $\max\{0, u_0\}$! Diese naive Fehlannahme führt tatsächlich zu Fehlentscheidungen.

☺ Wir erhalten sie vielmehr als Fixpunkt von $\Phi(u) = \max\{0, \Phi_0(u)\}$. Diesen nicht-linearen Operator können wir zur Iteration nutzen, wie nachfolgend gezeigt. Ist die beobachtete Konvergenz nicht wunderbar?

☺ In der Übung zeigen Sie allgemein, dass $\Phi : E \to E$ kontraktiv ist, so dass Sie Banachs Fixpunktsatz anwenden können. Alles wird gut. Damit können Sie u berechnen und Ihre optimale Strategie ablesen!

Irrfahrt, Gewinnerwartung und optimale Entscheidung

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
100€											...

Aufgabe: Selbes Spiel wie zuvor, aber nach rechts unbegrenzt.
Wie viel würden Sie als Teilnehmer zahlen / als Anbieter verlangen?

(0) Was ist die Gewinnerwartung $u(x)$ für jedes Startfeld $x \in \mathbb{N}$?
(1) Jeder Zug kostet, $c = -1€$, und Sie müssen zu Ende spielen.
(2) Jeder Zug kostet, $c = -1€$, und Sie dürfen jederzeit aufgeben.

Schätzen Sie zunächst! Wie treffsicher ist Ihre intuitive Erwartung?
Formulieren Sie allgemeine Gleichungen und Lösungsmethoden:
Existiert eine Lösung $u : X \to \mathbb{R}$? Gibt es mehrere oder genau eine?
Wie können wir sie berechnen? Zudem möglichst effizient?

100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	...
100	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	...
100	81	64	49	36	25	16	9	4	1	0	...

Irrfahrt, Gewinnerwartung und optimale Entscheidung

Lösung: (0) Die Mittelwerteigenschaft $u(x) = \frac{1}{2}u(x-1) + \frac{1}{2}u(x+1)$ hat als mögliche Lösungen $u_m(x) = 100 + m$ mit $m \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

⚠ Allein der eine Punkt $u(0) = 100$ legt die Gerade noch nicht fest! Die simple Bilanzgleichung allein genügt hier also nicht zur Lösung.

Wir müssen etwas tiefer graben und das zu Grunde liegende **Modell** genauer präzisieren und auswerten: die Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ [*random walk*]. Der Übergang zu einem feineren Modell ähnelt der **Mikrofundierung**, um globale Bilanzgleichungen zu erklären oder notfalls zu ergänzen

☺ Wir vollenden die Rechnung, indem wir **weitere Bedingungen** einführen und nutzen: Der Erwartungswert $u(x) \in \mathbb{R}$ existiert, erfüllt die Bilanzgleichung $u(x) = \frac{1}{2}u(x-1) + \frac{1}{2}u(x+1)$ und ist **beschränkt** durch $u(x) \in [0, 100]$ für alle $x \in \mathbb{N}$. Dann bleibt nur $u(x) = 100$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

⚠ Wir sehen hier im Miniaturbeispiel den entscheidenden Unterschied zwischen einem endlichem und einem unendlichem Spielgraphen, zwischen einem kompakten und einem nicht-kompakten Gebiet.
Im Allgemeinen ist nur der endliche / kompakte Fall gutartig.

(1) Die Lösungen sind $u_m(x) = 100 + mx + x^2$ mit $m \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Jede erfüllt $u_m(x) = \frac{1}{2}u_m(x-1) + \frac{1}{2}u_m(x+1) - 1$ für alle $x \in \mathbb{N}_{>0}$.

⚠ Die Lösung $u_{-\infty}$ ist auch auf $X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ mit $n \ge 3$ möglich. Die Frage ist also: Warum ist dies auf $\mathbb{N}$ die einzig richtige Antwort?

☺ Wir vollenden die Rechnung, indem wir **weitere Bedingungen** einführen und nutzen: Nur $u_{-\infty}$ erfüllt die Beschränkung $u \le 100$.

Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen (in gut gemeinten Anwendungen) bzw. ausbeuten (in betrügerischer Absicht). Letzteres gilt besonders für wenig bekannte Regelmäßigkeiten (Sätze), noch besser eignen sich Unverständnis und weit verbreitete Fehler. Ausgenutzt wird hierbei nicht direkt der mathematische Sachverhalt, sondern vor allem die ungleich verteilte Information darüber.

⚠ Ein Spiel oder Geschäft wie in (1) ist ein **Knebelvertrag** und zielt darauf, eine Vertragspartei möglichst langfristig zu binden und finanziell auszubeuten, meist wie hier durch Kündigungsfristen und -bedingungen. In klaren Fällen sind solche Verträge sittenwidrig und somit ungültig.

(2) Ein rationaler Spieler wählt jeweils den besten Zug:

$$\boxed{u(x) = \max\left\{\ 0,\ \ \tfrac{1}{2}u(x-1) + \tfrac{1}{2}u(x+1) - 1\ \right\}}$$

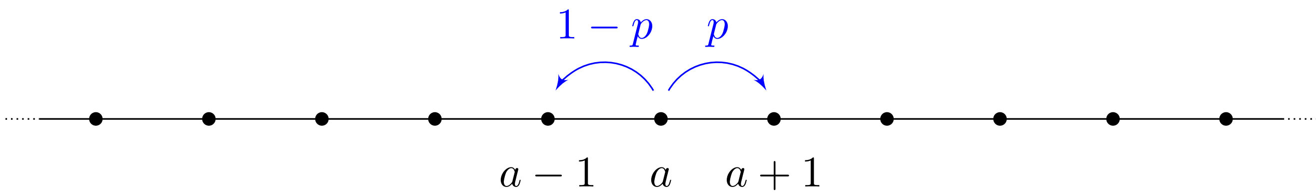
Diese Problemstellung auf $\mathbb{N}$ ist potentiell unendlich, lässt sich aber leicht auf das endliche Problem auf $X = \{0, 1, 2 \dots, n\}$ zurückführen: Wir wählen den rechten Rand n hinreichend groß und setzen $u(n) = 0$. Aufgrund der Beschränkung $u(x) \in [0, 100]$ für $x \ge 0$ und der Zugkosten $c = -1$ finden wir $u(x) \in [0, 99]$ für $x \ge 1$, sodann $u(x) \in [0, 98]$ für $x \ge 2$ und so weiter, bis schließlich $u(x) = 0$ für $x \ge 100$. Also genügt $n = 100$.

Das lineare Gleichungssystem ergibt unsere obigen Quadratzahlen! Wenn wir erst einmal $u(10) = 0$ wissen, dann ist dies leicht zu sehen: Von der Position $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$ bis zum Rand $\{0, 10\}$ ist die lineare Erwartung $100 - 10x$ und zudem die erwartete Reisezeit $x(10 - x)$. Die Gewinnerwartung ist demnach $u(x) = 100 - 20x + x^2 = (10 - x)^2$.

☺ Wie immer gilt auch hier: Ausrechnen ist mühsam. Prüfen ist leicht!

☺ Im Gegensatz zum Knebelvertrag (1) scheint mir dieses Spiel (2) überschaubar und sowohl moralisch wie juristisch akzeptabel.

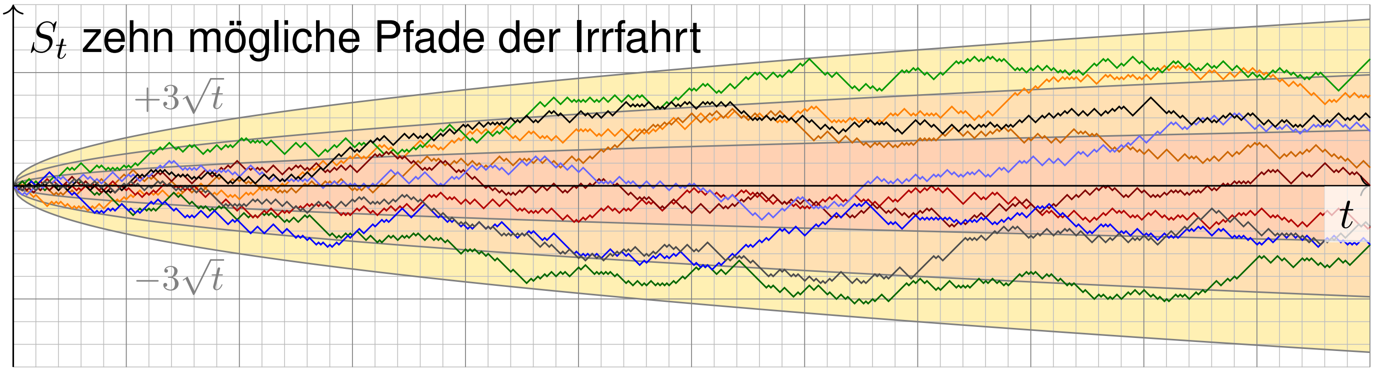
Zufällige Irrfahrt / Random Walk



Zufällige Irrfahrt in $X = \mathbb{Z}$: Zur Zeit $t = 0$ starten Sie im Punkt $S_0 = a$.

Im Schritt von S_t nach S_{t+1} gehen Sie mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ nach rechts und entsprechend mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ nach links.

Das heißt, $S_t : \Omega \to \mathbb{Z}$ ist gegeben durch $S_t = a + X_1 + \dots + X_t$ mit unabhängigen Zuwächsen, $\mathbf{P}_a(X_t{=}{+1}) = p$ und $\mathbf{P}_a(X_t{=}{-1}) = 1-p$.



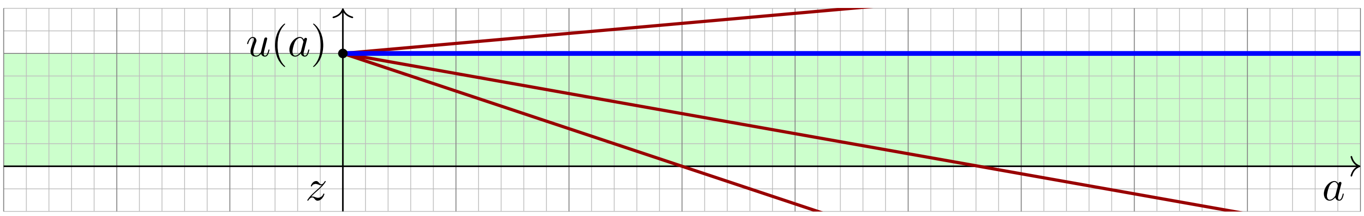
Zufällige Irrfahrt / Random Walk

Aufgabe: (0) Bestimmen Sie zu S_t die Verteilung, Erwartung, Streuung. Wir untersuchen speziell den symmetrischen Fall $p = 1/2$, ohne Drift.

(1) Sie beginnen im Startpunkt $a \in \mathbb{Z}$ und fixieren einen Zielpunkt $z \in \mathbb{Z}$. Wie groß ist die Wkt $u(a) \in [0, 1]$, das Ziel z irgendwann zu erreichen?

(2) Wie groß ist hierbei die erwartete Reisezeit von a nach z?

Lösung: (1) Wir erhalten eine Binomialverteilung, affin transformiert: $\mathbf{P}_a\big(S_t = a + 2k - t\big) = \binom{t}{k} p^k (1-p)^{t-k} = \binom{t}{k} \frac{1}{2^t}$ für $t, k \in \mathbb{N}$ und $p = \frac{1}{2}$. Somit gilt $\mathbf{E}(S_t) = a$ und $\mathbf{V}(S_t) = t$, also $\sigma(S_t) = \sqrt{t}$ und $S_t \approx N(a, t)$.



(1) Offensichtlich gilt $u(z) = 1$, denn hier ist der Start auch das Ziel. Für $a > z$ gilt die Mittelwerteigenschaft $u(a) = \frac{1}{2} u(a+1) + \frac{1}{2} u(a-1)$. Somit ist $u : \mathbb{Z}_{\ge z} \to [0, 1]$ eine Gerade, $u(a) = 1 + m(a - z)$. (Warum?) Zudem ist u beschränkt, $0 \le u \le 1$, daher folgt $m = 0$. Ebenso auf $\mathbb{Z}_{\le z}$.

Zufällige Irrfahrt / Random Walk

(2) Sei $T_z \in \mathbb{N}$ die Zeit des ersten Besuchs im Zielpunkt z und $\mathbf{E}_a(T_z)$ die erwartete Reisezeit vom Startpunkt a zum Zielpunkt z. Dies ist invariant unter Verschiebungen, also $\mathbf{E}_{a+k}(T_{z+k}) = \mathbf{E}_a(T_z)$.

Zunächst gilt $\mathbf{E}_a(T_a) = 0$. Für $a \neq z$ zeigen wir nun $\mathbf{E}_a(T_z) = \infty$:

$$w := \mathbf{E}_0(T_1) \;= 1 + \tfrac{1}{2}\big[\underbrace{\mathbf{E}_1(T_1)}_{=0} + \mathbf{E}_{-1}(T_1)\big]$$

$$\mathbf{E}_{-1}(T_1) = \underbrace{\mathbf{E}_{-1}(T_0)}_{=w} + \underbrace{\mathbf{E}_0(T_1)}_{=w} \;= 2w$$

Hieraus folgt $w = 1 + w$. Das ist für $w \in \mathbb{R}$ unmöglich.
Es bleibt nur $\mathbf{E}_0(T_1) = w = \infty$, also $\mathbf{E}_0(T_z) = \infty$ für alle $z \neq 0$.

☺ Bei einer symmetrischen Irrfahrt ($p = 1/2$, ohne Drift) erreichen wir jeden Punkt mit Wkt 100%, aber die erwartete Reisezeit ist unendlich!

Die Rechnung ist einfach, dank unserer geschickten Formalisierung.
Die Interpretation hingegen muss man erst einmal verarbeiten.
Die naive Anschauung kann einen hier leicht narren.

Zufällige Irrfahrt / Random Walk

Die Irrfahrt ist ein einfaches, aber wichtiges Modell. Mögliche Anwendung: Kontostand bei zufälligen Gewinnen und Verlusten. Daher werden solche Modelle für **Aktienkurse** genutzt.

Ähnlich entsteht die **Brownsche Bewegung** durch Wärmebewegung. Der schottische Botaniker Robert Brown (1773–1858) entdeckte 1827 unter dem Mikroskop das unregelmäßige Zittern von Pollen in Wasser. Anfangs hielt er Pollen für belebt, doch er fand dasselbe bei Staubteilchen.

Albert Einstein erklärte die Zitterbewegung 1905 durch die ungeordnete Wärmebewegung der Wassermoleküle, die aus allen Richtungen in großer Zahl gegen die Pollen stoßen. Quantitativ konnte er so die Größe von Atomen bestimmen und die Anzahl pro Mol, die **Avogadro–Zahl**. Die präzisen quantitativen Vorhersagen wurden in den Folgejahren experimentell bestätigt.

Die Gerade finden wir durch vollständige Induktion: Aus $u(z) = 1$ und $u(z+1) = 1 + m$ folgt $u(a+1) = 2u(a) - u(a-1) = [2 + 2m(a-z)] - [1 + m(a-1-z)] = 1 + m(a+1-z)$.

☺ Bei einer symmetrischen Irrfahrt ($p = 1/2$, ohne Drift) erreichen wir jeden Punkt mit Wkt 1! George Pólya (1887–1985) zeigte 1921: Jeden Punkt in $\mathbb{Z}$ besuchen wir mit Wkt 1 unendlich oft. Dies gilt ebenso in Dimension 2 bei Irrfahrt auf dem ebenen Gitter $\mathbb{Z}^2$. Erstaunlicherweise gilt es nicht mehr in Dimension $n \geq 3$ bei Irrfahrt auf dem Gitter $\mathbb{Z}^n$. Anschaulich bedeutet das: Ein betrunkener Mensch findet sicher irgendwann nach Hause, ein betrunkener Vogel hingegen nicht!

📖 Ausführung bei Feller, *Introduction to Probability*, vol. 1 (1968), §XIV.7: Das Sprichwort „Alle Wege führen nach Rom.“ stimmt zumindest zweidimensional. Dreidimensional ist die Rückkehrwahrscheinlichkeit nur etwa 34%, siehe `en.wikipedia.org/wiki/Random_walk`.

Erwartete Reisezeit bis zum Rand

Aufgabe: Wie lange ist die erwartete Reisezeit bis zum Rand?

0	1	0								
0	2	2	0							
0	3	4	3	0						
0	4	6	6	4	0					
0	5	8	9	8	5	0				
0	6	10	12	12	10	6	0			
0	7	12	15	16	15	12	7	0		
0	8	14	18	20	20	18	14	8	0	
0	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0

Auf $X = \{0, 1, \dots, n\}$ vermuten wir $u(x) = x(n-x)$. Beweisen Sie dies!

Erwartete Reisezeit bis zum Rand

Wir betrachten den Graphen $X = \{0, 1, \dots, n\}$ mit Rand $\partial X = \{0, n\}$ und lösen $u(x) = 1 + \frac{1}{2}u(x-1) + \frac{1}{2}u(x+1)$ mit $u(0) = u(n) = 0$. Wir vermuten, dass die Lösung eindeutig ist. Gilt das? Satz D1A!

☺ Im endlichen Fall genügt unsere einfache Bilanzgleichung.

Wie immer ist es hilfreich, zunächst kleine Beispiele zu betrachten. Die kleinen Fälle für $n = 2, 3, \dots, 10$ lösen Sie leicht per Hand, als lineares Gleichungssystem oder Probieren & Prüfen.

☺ Steht das Ergebnis erst einmal da, so ist es leicht zu prüfen!

Für jedes n beschreiben die Werte $x \mapsto u(x)$ eine Parabel: Dies sehen Sie am leichtesten, wenn sie die Differenzen betrachten (diskrete erste Ableitung) und diese als lineare Funktionen erkennen.

☺ Damit haben Sie die Formel gefunden, die Sie nun beweisen wollen.

Damit lösen Sie die eindimensionalen Spiele auf dem diskreten Intervall $X = \{0, 1, \dots, n\}$: (0) lineare Erwartung plus (1) quadratische Reisezeit.

Beweis: Auf $X = \{0, 1, \dots, n\}$ betrachten wir die Funktion

$$\boxed{u : X \to \mathbb{R} : x \mapsto x(n-x).}$$

Wir finden:

$$u(x-1) = xn - n - x^2 + 2x - 1$$
$$u(x+1) = xn + n - x^2 - 2x - 1$$

Also erfüllt u die geforderte Differenzengleichung:

$$\boxed{u(x) = 1 + \tfrac{1}{2}u(x-1) + \tfrac{1}{2}u(x+1)}$$

Dies ist also *eine* Lösung, und dank Satz D1A zudem die einzige.

Beispiele: Für $r, s \in \mathbb{N}$ und $n = r + s$ gelten folgende schöne Formeln:

☺ Die erwartete Reisezeit von x bis $\{x - r, x + s\}$ beträgt rs.

☺ Diese Formel besteht weiter sogar für $r = \infty$ oder $s = \infty$.

☺ Die erwartete Reisezeit von x bis $\{x - r, x + r\}$ beträgt r^2.

Diese Rechnung liefert uns einen zweiten und unabhängigen Beweis für die erwartete Reisezeit $u(x)$ in $X = \mathbb{N}$ bis zum Rand $\partial X = \{0\}$.

Wir haben $u(x) \ge x(n-x)$ für jedes $n \ge x$, also

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ \infty & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

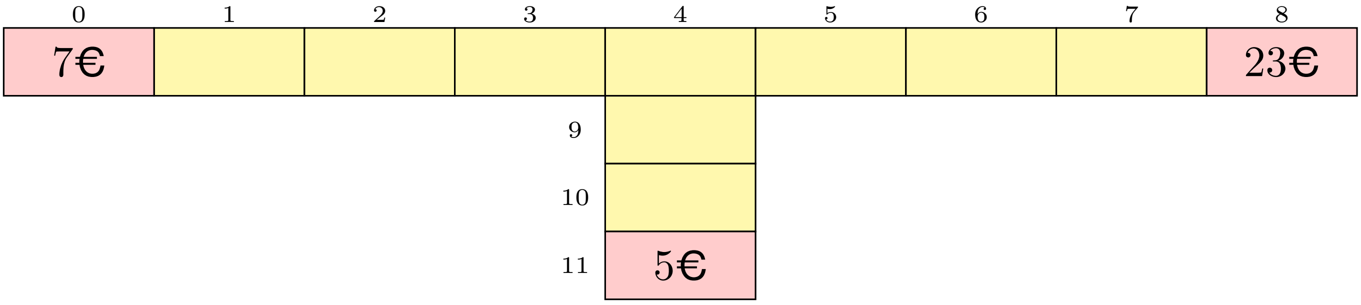
Es ist hilfreich, neben Funktionen $u : X \to \mathbb{R}$ auch $u : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ oder $u : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ zuzulassen. Diese treten natürlich auf, wie hier.

Mittelwertgleichungen wir $u(x) = 1 + \frac{1}{2}u(x-1) + \frac{1}{2}u(x+1)$ bleiben sinnvoll, solange niemals $+\infty$ und $-\infty$ addiert werden müssen.

Die Erweiterung von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ bzw. $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ nützt für monotone Grenzwerte wie $u_0 \le u_1 \le u_2 \le \dots \nearrow u$ oder $u_0 \ge u_1 \ge u_2 \ge \dots \searrow u$, und sei es nur als technisches Hilfsmittel für Zwischenrechnungen.

☺ Bilanzgleichungen funktionieren wunderbar auf *endlichen* Graphen. Auf unendlichen Graphen benötigen wir zusätzliche Bedingungen. Manchmal können wir durch endliche Teilgraphen ausschöpfen.

Irrfahrt, Gewinnerwartung und optimale Entscheidung



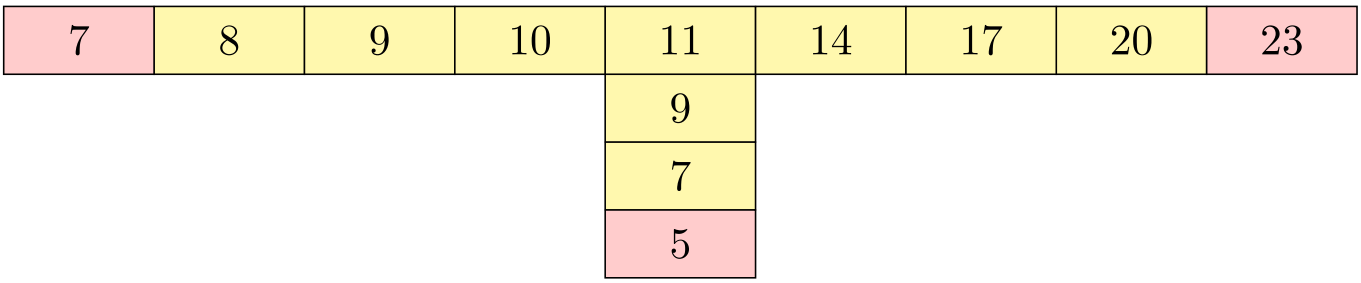
Aufgabe: Selbes Spiel wie zuvor, aber auf einem neuem Spielbrett. Wie viel würden Sie als Teilnehmer zahlen / als Anbieter verlangen?

(0) Was ist die Gewinnerwartung $u(x)$ für jedes Startfeld $x \in X$?
(1) Jeder Zug kostet, $c = -1$€, und Sie müssen zu Ende spielen.
(2) Jeder Zug kostet, $c = -1$€, und Sie dürfen jederzeit aufgeben.

Schätzen Sie zunächst! Wie treffsicher ist Ihre intuitive Erwartung? Formulieren Sie allgemeine Gleichungen und Lösungsmethoden!

Irrfahrt, Gewinnerwartung und optimale Entscheidung

Lösung: (0) Gewinnerwartung ohne Zugkosten:



Wir setzen hierzu $E = \{\, u : X \to \mathbb{R} \mid u(0) = 7,\ u(8) = 23,\ u(11) = 5 \,\}$ und $\Phi_0 : E \to E : u \mapsto \bar{u}$ mit $\bar{u}(x) = \sum_y p(x,y)u(y)$ und Übergangswkt $p(x,y) \in [0,1]$ von Feld x auf das Nachbarfeld y, wobei $\sum_y p(x,y) = 1$.

Die obigen Werte sind der eindeutige Fixpunkt von Φ_0, also die Lösung der Gleichung $\Phi_0(u) = u$. Dieses lineare Gleichungssystem können Sie exakt lösen, mit den Mitteln der Linearen Algebra, oder iterativ annähern durch Banachs Fixpunktsatz, mit den Mitteln der Analysis.

Irrfahrt, Gewinnerwartung und optimale Entscheidung

(1) Erwartete Reisezeit bis zum Rand:

0.00	6.30	10.60	12.90	13.20	12.90	10.60	6.30	0.00
				10.80				
				6.40				
				0.00				

Daraus erhalten wir folgende Gewinnerwartung:

7.00	1.70	−1.60	−2.90	−2.20	1.10	6.40	13.70	23.00
				−1.80				
				0.60				
				5.00				

Wir setzen $E = \{\, u : X \to \mathbb{R} \mid u(0) = 7,\ u(8) = 23,\ u(11) = 5 \,\}$
und $\Phi_0 : E \to E : u \mapsto \bar{u}$ mit $\bar{u}(x) = c(x) + \sum_y p(x,y)u(y)$
und lösen die Fixpunktgleichung $\Phi_0(u_0) = u_0$.

Irrfahrt, Gewinnerwartung und optimale Entscheidung

(2) Gewinnerwartung mit Zugkosten und Abbruchmöglichkeit:

7.00	2.67	0.33	0.00	0.00	2.20	6.40	13.70	23.00
				0.00				
				1.50				
				5.00				

Die Lösung u_0 im linearen Fall, ohne Entscheidung, ist leicht.

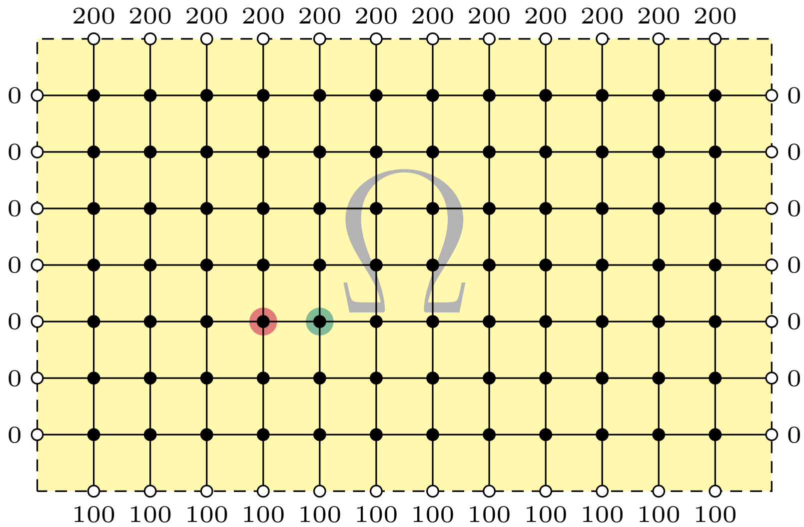
Die Lösung mit Entscheidungsmöglichkeit ist nicht $\max\{0, u_0\}$!
Diese naive Fehlannahme führt tatsächlich zu Fehlentscheidungen.

Wir erhalten sie vielmehr als Fixpunkt von $\Phi(u) = \max\{0, \Phi_0(u)\}$.
Diesen Operator können wir zur Iteration nutzen, wie hier gezeigt.

In der Übung zeigen Sie allgemein, dass $\Phi : E \to E$ kontraktiv ist, so dass Sie Banachs Fixpunktsatz anwenden können. Alles wird gut.
Damit können Sie u berechnen und Ihre optimale Strategie ablesen!

Irrfahrten und Potentiale: das Dirichlet–Problem

Zufällige Irrfahrt auf einem Spielfeld $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$:



Sie ziehen mit Wkt $1/4$ nach links / rechts / oben / unten.

Das Spiel endet am Rand mit dem gezeigten Gewinn.

Für welche Startpunkte würden Sie 100 zahlen?

Aufgabe: (1) Wie groß ist die Gewinnerwartung $u(x,y)$ auf jedem Feld? Wo ist sie maximal? Ist die gesuchte Lösung $u:\Omega\to\mathbb{R}$ eindeutig? Wie berechnet man sie? möglichst effizient? näherungsweise?

🙂 Kontext und Anwendung ändern sich, die Rechnung bleibt dieselbe! (2) Hooke: Netz aus Massen und Federn. (3) Kirchhoff: Spannung einer elektrischen Schaltung. (4) Fourier: diskrete Wärmeleitung / Diffusion.

Irrfahrten und Potentiale: das Dirichlet–Problem

Lösung: (1) Sei $u(x,y)$ die Gewinnerwartung auf dem Feld $(x,y)\in\Omega$. In jedem Randpunkt $(x,y)\in\partial\Omega$ ist der Gewinn $u(x,y)$ fest vorgegeben. In jedem inneren Punkt $(x,y)\in\Omega^\circ$ gilt die **Mittelwerteigenschaft**:

$$\boxed{u(x,y) = \tfrac{1}{4}u(x-1,y) + \tfrac{1}{4}u(x+1,y) + \tfrac{1}{4}u(x,y-1) + \tfrac{1}{4}u(x,y+1)}$$

Eine solche diskrete Funktion $u:\mathbb{Z}^2\supset\Omega\to\mathbb{R}$ nennen wir **harmonisch**.

🙂 Die folgende Tabelle und Graphik zeigen die / eine Lösung u.

Wir betrachten hier das ebene Gitter $\mathbb{Z}^2$ und darin eine Teilmenge $\Omega\subseteq\mathbb{Z}^2$. Innere Punkte $z\in\Omega$ sind solche, deren vier direkte Nachbarn ebenfalls in Ω liegen. Bei einem Randpunkt $z\in\Omega$ liegt mindestens ein Nachbar außerhalb von Ω. **Dirichlet–Problem**: In jedem Randpunkt $z\in\partial\Omega$ ist der Wert $u(z)$ festgelegt durch die vorgegebene Randfunktion $v=u|_{\partial\Omega}:\partial\Omega\to\mathbb{R}$. Gesucht ist eine harmonische Funktion $u:\Omega\to\mathbb{R}$ mit $u|_{\partial\Omega}=v$. Existiert eine Lösung? Ist sie eindeutig? Wie können wir sie berechnen bzw. annähern? Kurzum: Ist das Problem **gut gestellt**?

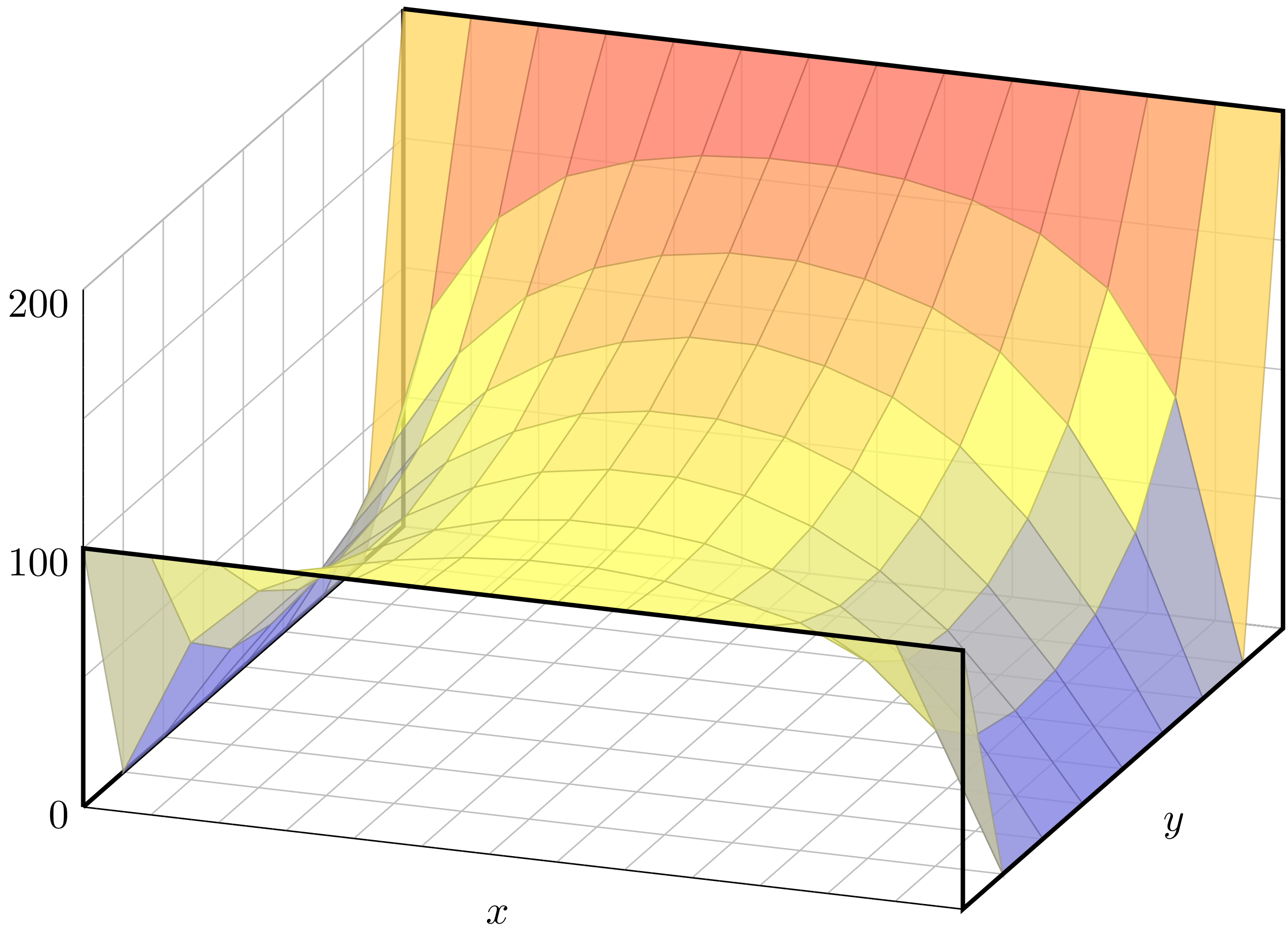
Diese Anwendung ist recht faszinierend: Sie ist physikalisch-anschaulich motiviert und fördert sowohl Intuition als auch Methodik. Hier gilt das Minimum-Maximum-Prinzip (Satz D1A) und daraus können wir nicht nur die Eindeutigkeit, sondern sogar die Existenz einer Lösung ableiten. Diese einfache Differenzengleichung diskretisiert partielle Differentialgleichungen und enthüllt so unerwartete Zusammenhänge, als Modell / Näherung / Anschauung für harmonische Funktionen $\Delta u = 0$ und die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa\,\Delta u$.

Dieses einfache Beispiel illustriert das allgemeine und überall wichtige **Dirichlet–Problem**.

	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	
000	100	139	158	167	172	174	174	172	167	157	139	100	000
000	061	100	125	139	147	151	151	147	139	125	100	061	000
000	043	077	102	118	127	132	132	127	118	102	077	043	000
000	035	065	088	103	113	117	117	113	103	088	065	035	000
000	033	061	081	095	104	108	108	104	095	081	061	033	000
000	037	063	081	092	099	102	102	099	092	081	063	037	000
000	053	076	088	094	098	100	100	098	094	088	076	053	000
	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	

Die Aufgabe führt uns zu einem **linearen Gleichungssystem** mit $7 \times 12 = 84$ Unbekannten. Für diese haben wir genau 84 Gleichungen. Das sieht vernünftig aus, bedeutet aber noch nicht, dass es genau eine Lösung gibt. Hierzu müssen wir genauer hinschauen und präzise begründen!

Meine Tabellenkalkulation *LibreOffice* weigert sich zunächst mit „Fehler 522: zirkulärer Bezug“. Mit Extras > Optionen > Calc > Iterationen rechnet sie dann iterativ obige Näherungslösung aus.

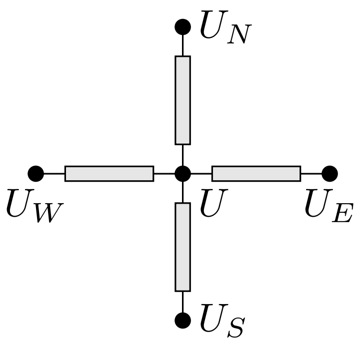


Harmonische Funktionen: Gleichgewicht!

🙂 Kontext und Anwendung ändern sich, die Rechnung bleibt dieselbe!

(2) Wir betrachten Massenpunkte in $(x, y, u(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ in Ruhelage. Jeder ist durch gleich starke Federn mit seinen Nachbarn verbunden. Somit gilt: Ruhelage $=$ Kräftegleichgewicht $\approx$ Mittelwerteigenschaft!

Sie können es nachrechnen! Genauer gesagt ist dies die Näherung bei geringer Krümmung.



(3) Wir betrachten die gezeigte Schaltung mit vier gleichen Widerstände. An den Nachbarpunkten liegen die Potentiale U_E, U_N, U_W, U_S an.

Ohmsches Gesetz und Kirchhoffsche Regel:

$$U = \frac{U_E + U_N + U_W + U_S}{4}$$

Ausführlich: Es gilt das Ohmsche Gesetz $I_E = (U_E - U)/R$. Die Kirchhoffsche Regel besagt hier $I_E + I_N + I_W + I_S = 0$. Einsetzen und Auflösen nach U ergibt die Mittelwerteigenschaft!

🙂 Wir können Ω als Schaltung realisieren und am Rand die genannten Spannungen anlegen. Mit einem Voltmeter messen wir das Potential $u(x, y)$ im Inneren und finden obige Lösung. Physikalische Intuition suggeriert Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, siehe Satz D1A.

Wärmeleitungsgleichung: Alles fließt!

(4) Wir betrachten Ω als ein Bauteil aus wärmeleitendem Material. Am Rand liegen die konstanten Temperaturen $0°\mathrm{C}$, $100°\mathrm{C}$, $200°\mathrm{C}$ an. Wärme fließt von warm nach kalt proportional zur Temperaturdifferenz. Stationäre Verteilung $=$ Fließgleichgewicht $=$ Mittelwerteigenschaft!

🙂 Unser LGS ist die diskrete Version der Potentialgleichung $\Delta u = 0$. Für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar gilt die Taylor–Formel:

$$0 = \underbrace{u(x-1, y) - 2u(x, y) + u(x+1, y)}_{= \partial_x^2 u(x,y) \text{ + h.o.t.}} + \underbrace{u(x, y-1) - 2u(x, y) + u(x, y+1)}_{= \partial_y^2 u(x,y) \text{ + h.o.t.}}$$

Wir diskretisieren die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa\, \Delta u$ für $\kappa = \frac{1}{4}$:

$$u(t+1, x, y) = \frac{u(t, x-1, y) + u(t, x+1, y) + u(t, x, y-1) + u(t, x, y+1)}{4}$$

🙂 Diese Iteration nähert sich der stationären Lösung u mit $\Delta u = 0$.

Diese Beobachtung führt uns schließlich zur Methode der iterativen Näherung. Dieses Verfahren beginnt mit einer (beliebigen!) Startverteilung und konvergiert schnell gegen die (eindeutige!) stationäre Lösung. Das ist für den Computer einfach zu rechnen, siehe obige Tabellenkalkulation.

Harmonische Funktionen: Minimum-Maximum-Prinzip

Wie zuvor sei $\Omega \subset \mathbb{Z}^n$ ein endlicher Graph. Wir zerlegen $\Omega = \Omega^\circ \sqcup \partial\Omega$: Jeder innere Punkt $z \in \Omega^\circ$ hat alle seine $2n$ Nachbarn $z \pm e_k$ in Ω; jeder Randpunkt $z \in \partial\Omega$ hat mindestens einen Nachbarn außerhalb von Ω. Wir nennen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch, wenn die Mittelwerteigenschaft gilt.

Satz D1A: Minimum-Maximum-Prinzip, Eindeutigkeit & Existenz

(1) Jede harmonische Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ nimmt Minimum und Maximum am Rand $\partial\Omega$ an: Es gilt also $\min_\Omega u = \min_{\partial\Omega} u$ und $\max_\Omega u = \max_{\partial\Omega} u$.

Für je zwei harmonische Funktionen $u, \tilde{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt demnach:

(2) Monotonie: Aus $u \le \tilde{u}$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u \le \tilde{u}$ auf ganz Ω.

(3) Eindeutigkeit: Aus $u = \tilde{u}$ auf dem Rand $\partial\Omega$ folgt $u = \tilde{u}$ auf ganz Ω.

Hieraus gewinnen wir die Existenz und sogar eine Konstruktion:

(4) Existenz: Zu jeder vorgegebenen Randfunktion $v : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ existiert genau eine harmonische Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $u|_{\partial\Omega} = v$.

(5) Konstruktion: Die diskrete Wärmeleitung liefert zu v Näherungen $u_0, u_1, u_2, \ldots \to u$, die gegen die eindeutige Lösung u konvergieren.

Harmonische Funktionen: Eindeutigkeit und Existenz

Aufgabe: Beweisen Sie (1-4) mit Linearer Algebra. **Lösung:** Die Mittelwerteigenschaft (MWE) ist ein lineares Gleichungssystem: $u(z) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n u(z+e_k) + u(z-e_k)$ für alle $z \in \Omega^\circ$.

(1) Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Da die Menge Ω endlich ist, existiert eine Minimalstelle $z \in \Omega$, das heißt $u(z) \le u$. Liegt z im Inneren, so sind alle Nachbarn $z \pm e_k$ ebenfalls Minimalstellen. Es gibt einen Weg von z zu einem Randpunkt $z' \in \partial\Omega$, also ist auch dieser eine Minimalstelle.

(2) Die Differenz $v = \tilde{u} - u$ ist harmonisch und erfüllt $v \ge 0$ auf $\partial\Omega$, nach (1) also $v \ge 0$ auf Ω. Daraus folgt sofort (3). Alternativ: $v = \tilde{u} - u$ erfüllt $v = 0$ auf $\partial\Omega$, nach (1) also $v = 0$ auf Ω.

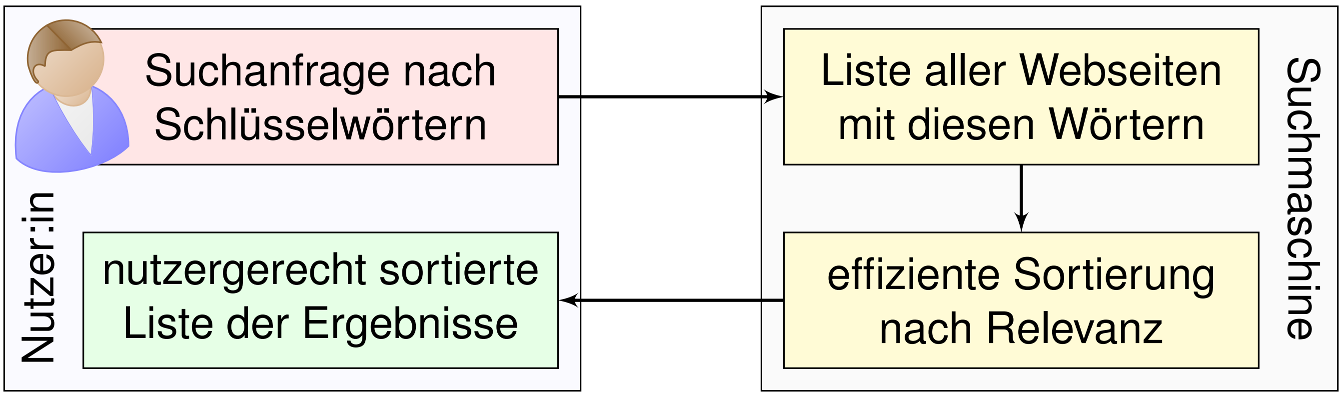
(4) Kurze Antwort: Wir haben ein Gleichungssystem $Sw = b$ mit $N = |\Omega^\circ|$ Unbestimmten und ebenso vielen Gleichungen: Die Matrix S ist quadratisch und dank (3) invertierbar. Ausführlich:

Harmonische Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sind der Kern der linearen Abbildung $\Lambda : \mathbb{R}^\Omega \to \mathbb{R}^{\Omega^\circ}$ mit $\Lambda(u)(x) := u(x) - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n u(x+e_k) + u(x-e_k)$. Vorgegeben ist die Randfunktion $v : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ als Bedingung $u|_{\partial\Omega} = v$. Zu festem v suchen wir alle harmonischen Ergänzungen $w = u|_{\Omega^\circ} : \Omega^\circ \to \mathbb{R}$. Dazu zerlegen wir $\mathbb{R}^\Omega \cong \mathbb{R}^{\partial\Omega} \times \mathbb{R}^{\Omega^\circ} : u \leftrightarrows (v, w)$, also $v = u|_{\partial\Omega}$ und $w = u|_{\Omega^\circ}$ sowie $u = v \sqcup w$, und betrachten $\Lambda(v, w) := \Lambda(v \sqcup w)$. Dank Linearität gilt dann $\Lambda(v, w) = \Lambda(v, 0) + \Lambda(0, w)$. Die Abbildungen $R = \Lambda(-, 0) : \mathbb{R}^{\partial\Omega} \to \mathbb{R}^{\Omega^\circ} : v \mapsto \Lambda(v, 0)$ und $S = \Lambda(0, -) : \mathbb{R}^{\Omega^\circ} \to \mathbb{R}^{\Omega^\circ} : w \mapsto \Lambda(0, w)$ sind linear. Zu $v \in \mathbb{R}^{\partial\Omega}$ suchen wir $w \in \mathbb{R}^{\Omega^\circ}$ mit $Rv + Sw = 0$. Dank (3) ist S injektiv, also bijektiv. Daher gilt $w = -S^{-1} Rv$.

(5) Hierzu liefert die Analysis den Fixpunktsatz von Banach (D2A). All unsere Argumente gelten allgemein für jeden endlichen Graphen mit Übergangswkten auf den Kanten, also eine endliche Markov–Kette. Genau dies nutzt Googles PageRank, wie im Folgenden erläutert.

Die Mathematik hinter Google

*„Wo simmer denn dran? Aha, heute krieje mer de Suchmaschin.
Wat is en Suchmaschin? Da stelle mer uns janz dumm. . . . “*



Mathematik: Wie misst man Relevanz von Informationen?
Artificial Intelligence (AI), Machine Learning (ML), . . .

Informatik: Wie verarbeitet man enorm große Datenmengen?
Big Data, Data Mining, Data Science, . . . „Data is the new oil.“

Finanzstrategie: Wie verdient man Geld mit einem Gratisprodukt?
„If you're not paying for it, you're not the customer, you are the product.“

Die Mathematik hinter Google

Als das World Wide Web Mitte der 1990er noch klein war, da genügte es, zu einer Suchanfrage einfach alle Treffer aufzulisten. Die Liste war noch kurz, jede:r Nutzer:in konnte sie leicht selbst überblicken. Das Internet blieb jedoch nicht lange so überschaubar. . . . Das Volumen explodierte! Als Versuch einer Lösung ging 1998 die Suchmaschine Google in Betrieb und dominiert seither den Markt. Sie wird ständig weiterentwickelt. Die meisten Optimierungen hütet Google streng als Firmengeheimnis, doch das ursprüngliche Grundprinzip ist veröffentlicht und genial einfach:

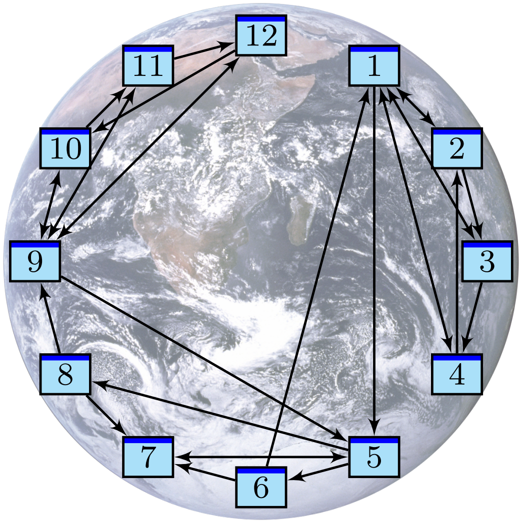
📖 Sergey Brin, Larry Page: *The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine.* Stanford University 1998, `infolab.stanford.edu/pub/papers/google.pdf`

Bei vorherigen Suchmaschinen musste man endlose Trefferlisten durchforsten, bis man auf die ersten interessanten Ergebnisse stieß. Bei Google stehen sie auf wundersame Weise ganz oben. Wie ist das möglich? Die Antwort liegt (zu einem großen Teil) in folgender genial-einfachen Idee. Google misst die Popularität p_i (*PageRank*) jeder Seite i durch folgendes Gleichungssystem:

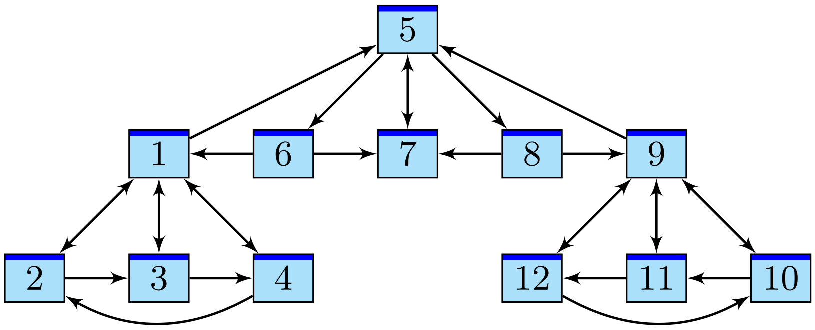
$$\text{PageRank} \qquad p_i = \frac{q}{N} + \sum_{j \to i} \frac{1-q}{\ell_j}\, p_j$$

Keine Angst, die Formel sieht nur auf den ersten Blick kompliziert aus. Ich werde sie anhand von Beispielen Schritt für Schritt erläutern. Wer sowas schon gesehen hat, weiß, dass es sich um eine besonders einfache Formel handelt, nämlich ein *lineares Gleichungssystem*, das keine Quadrate oder komplizierteres enthält. Schon die Formel von Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ ist komplizierter.

Chaos und Struktur im Web



Miniaturbeispiel des Web als ein Graph aus Seiten $i = 1, \dots, N$ und Links $i \to j$.
Versuch einer hierarchischen Anordnung:



Eine Seite ist populär, wenn viele Seiten auf sie verweisen? Zu naiv!
Eine Seite ist populär, wenn viele populäre Seiten auf sie verweisen.

Ein zufälliger Surfer folgt von der aktuellen Seite zufällig einem der Links.

Aufgabe: Berechnen Sie die Aufenthaltswkten. Konvergieren sie gegen ein Gleichgewicht? Wie schnell? Immer dasselbe, d.h. ist es eindeutig?

☺ Im Rückblick ist die abstrakt-mathematische Idee genial einfach.
Wer diese Aufgabe bis 1998 professionell löste, ist heute Milliardär.

Chaos und Struktur im Web

Klassische Texte sind von einer Person geschrieben und linear: Ein Buch hat einen Anfang und ein Ende, typischerweise liest man es von vorne nach hinten in der Reihenfolge der Seiten. Meist gibt es zudem ein Inhaltsverzeichnis oder einen Index zum leichteren Nachschlagen. (Ja, liebe Kinder, unsere Vorfahren konnten Texte mit hunderttausend Buchstaben am Stück lesen, ohne Clicks und ohne Werbung. Man nannte das „Buch“ und speicherte es auf „Papier“. Damals!)

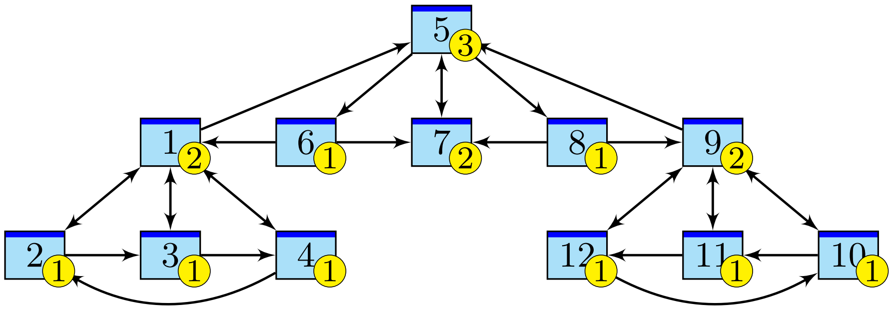
Webseiten bilden hingegen eine gänzlich andere Struktur. Niemand käme auf die Idee, das Internet von Anfang bis Ende durchzulesen: Es hat keine lineare Struktur, keine erste und keine letzte Seite, es ist zudem viel zu groß, und das meiste ist ohnehin uninteressant.

Die Webseiten verweisen gegenseitig aufeinander und bilden einen *Hypertext*. Zur Illustration betrachten wir ein Miniaturbeispiel bestehend aus 12 Webseiten. Unter den Seiten $1, 2, 3, 4$ wird 1 am häufigsten zitiert. Die Seite 1 scheint daher besonders relevant oder populär. Gleiches gilt für $9, 10, 11, 12$ mit 9 an der Spitze. Die Struktur von $5, 6, 7, 8$ ist ähnlich mit 7 an der Spitze. Aber die Seiten $1, 7, 9$, die wir schon als relevant erkannt haben, verweisen alle auf die Seite 5. Diese scheint daher populär / wichtig / zentral und für eine spätere Suche besonders relevant.

Diese Anordnung war Handarbeit. Lässt sie sich automatisieren? Nach welchen Regeln? Erster Versuch einer Bewertung: Eine Seite ist populär, wenn viele Seiten auf sie verweisen. Nachteil: Die simple Linkzählung ist zu naiv und anfällig für Manipulationen! (Linkfarmen)

Zweiter Versuch: Eine Seite ist populär, wenn viele populäre Seiten auf sie verweisen. Das klingt zunächst zirkulär, lässt sich aber in eine einfache Gleichung fassen und lösen. Ich erläutere dazu die besonders anschauliche Betrachtungsweise des zufälligen Surfers.

Irrfahrt eines zufälligen Surfers

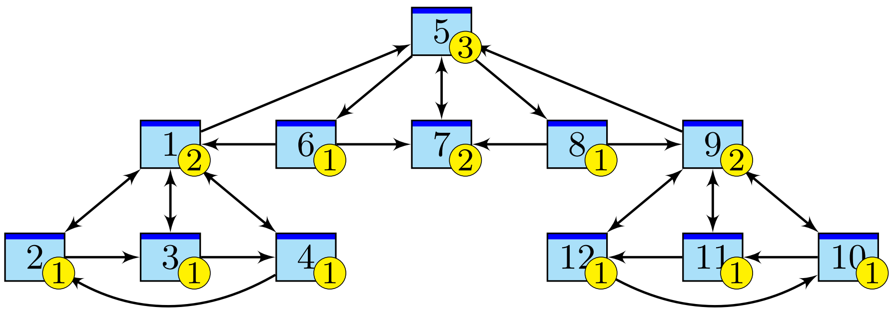


Googles Heuristik: Aufenthaltswkt ∼ Popularität ∼ Relevanz

Aufgabe: Berechnen Sie die Aufenthaltswkten bei Start auf Seite 7.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t=0$	.000	.000	.000	.000	.000	.000	1.00	.000	.000	.000	.000	.000
$t=1$	.000	.000	.000	.000	1.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t=2$	.000	.000	.000	.000	.000	.333	.333	.333	.000	.000	.000	.000
$t=3$	.167	.000	.000	.000	.333	.000	.333	.000	.167	.000	.000	.000
$t=4$	.000	.042	.042	.042	.417	.111	.111	.111	.000	.042	.042	.042
$t=5$	.118	.021	.021	.021	.111	.139	.250	.139	.118	.021	.021	.021
...												
$t=29$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059
$t=30$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059

Irrfahrt eines zufälligen Surfers



Googles Heuristik: Aufenthaltswkt ∼ Popularität ∼ Relevanz

Aufgabe: Berechnen Sie die Aufenthaltswkten bei Start auf Seite 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t=0$	1.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t=1$	.000	.250	.250	.250	.250	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t=2$	.375	.125	.125	.125	.000	.083	.083	.083	.000	.000	.000	.000
$t=3$	.229	.156	.156	.156	.177	.000	.083	.000	.042	.000	.000	.000
$t=4$	.234	.135	.135	.135	.151	.059	.059	.059	.000	.010	.010	.010
$t=5$	.233	.126	.126	.126	.118	.050	.109	.050	.045	.005	.005	.005
...												
$t=69$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059
$t=70$	.117	.059	.059	.059	.177	.059	.117	.059	.117	.059	.059	.059

Zufall und Notwendigkeit: Googles PageRank

Wir beobachten eine Diffusion: Sie konvergiert gegen eine stationäre Gleichgewichtsverteilung! Ebenso beim Start in 1; sie konvergiert langsamer, aber schließlich zum selben Gleichgewicht! Dank dieser Betrachtungsweise löst sich unser LGS sozusagen von allein! Verfeinertes Modell:

Sprung: Mit Wkt q startet unser Surfer neu auf irgendeiner zufälligen Seite $i \in \{1, \dots, N\}$.
Fluss: Mit Wkt $(1-q)$ folgt er von der aktuellen Seite j zufällig irgendeinem der ℓ_j Links.
Dies führt zu folgenden Gleichungen, analog zur Wärmeleitung bzw. Potentialgleichung: D125

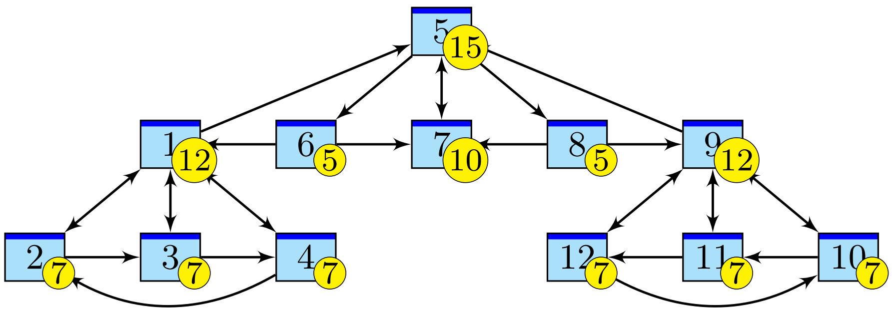
Diffusion
$$p_i(t+1) = \frac{q}{N} + \sum_{j \to i} \frac{1-q}{\ell_j}\, p_j(t)$$

Gleichgewicht
$$p_i = \frac{q}{N} + \sum_{j \to i} \frac{1-q}{\ell_j}\, p_j$$

Dieses verfeinerte Modell mit Teleportation lässt sich ebenso leicht berechnen. Für $q = 0.15$ entspricht es dem typischen Verhalten, sechs bis sieben Links zu folgen, bevor man neu anfängt.
☺ Die Ergebnisse entsprechen der Nutzererwartung und sind recht robust gegen Manipulationen.
☺ Unsere obigen Beobachtungen zur Konvergenz sind nicht bloß zufällig, sondern beruhen auf mathematischen Gesetzmäßigkeiten. Diese kann man beweisen und darf sich darauf verlassen:

Der **Fixpunktsatz von Banach** garantiert bei positiver Sprunghaftigkeit $0 < q \le 1$ Folgendes:
(1) Es gibt genau ein Gleichgewicht p. Dieses erfüllt $p_1, \dots, p_N > 0$ und $p_1 + \dots + p_N = 1$.
(2) Für jede Anfangsverteilung konvergiert die Diffusion gegen die Gleichgewichtsverteilung p.
(3) Die Konvergenz ist mindestens so schnell wie die der geometrischen Folge $(1-q)^n \searrow 0$.

Zufall und Notwendigkeit: Googles PageRank



Googles Heuristik: Aufenthaltswkt ∼ Popularität ∼ Relevanz
Aufgabe: Aufenthaltswkten bei Sprunghaftigkeit $q = 0.15$:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t=0$	1.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
$t=1$	.013	.225	.225	.225	.225	.013	.013	.013	.013	.013	.013	.013
$t=2$	.305	.111	.111	.111	.028	.076	.087	.076	.034	.020	.020	.020
$t=3$	.186	.124	.124	.124	.158	.021	.085	.021	.071	.028	.028	.028
$t=4$	.180	.105	.105	.105	.140	.057	.075	.057	.057	.040	.040	.040
$t=5$	.171	.095	.095	.095	.126	.052	.101	.052	.087	.042	.042	.042
...												
$t=29$	.120	.066	.066	.066	.150	.055	.102	.055	.120	.066	.066	.066
$t=30$	.120	.066	.066	.066	.150	.055	.102	.055	.120	.066	.066	.066

Banachs Fixpunktsatz ist ein universelles Werkzeug.

Aufgabe: (1) Illustrieren Sie Iterationen und Banachs Fixpunktsatz.
(2) Sie kennen bereits spektakuläre Anwendungen: Nennen Sie einige!
(3) Wiederholung: Formulieren und beweisen Sie Banachs Fixpunktsatz.

Lösung: (1) Bildhaftes Beispiel: Wenn Sie von Ihrer geographischen Umgebung X eine Landkarte im Maßstab $k = 1 : n$ (mit $n > 1$) vor sich auf den Tisch legen, dann definiert die Zuordnung jedes realen Punktes zu seinem Bildpunkt eine k–kontraktive Abbildung $f : X \to X$. Genau ein Punkt der Karte liegt auf dem geographischen Punkt, den er bezeichnet.

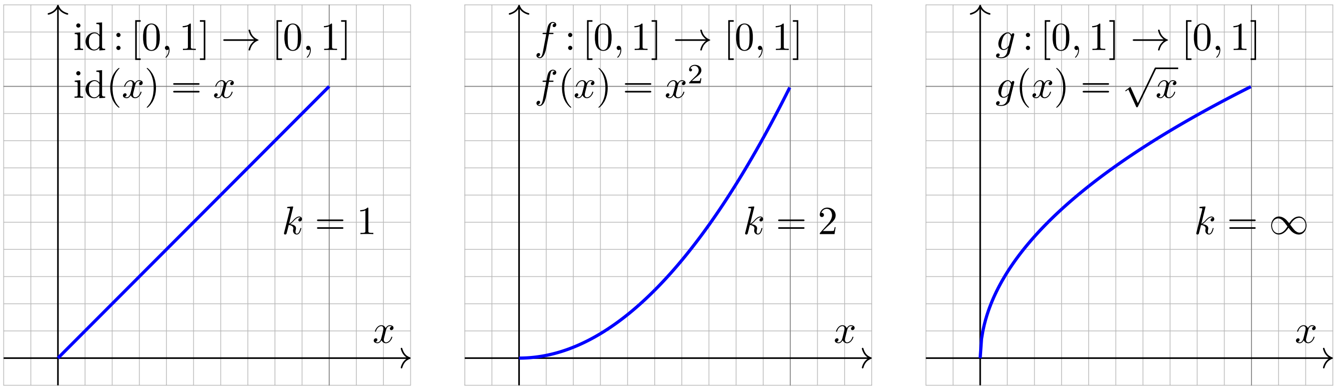
(2) Mit dem Iterationsverfahren können Sie viele Gleichungen numerisch lösen wie $x = \cos(x)$ für $x \in [0, 1]$. Das **Newton–Verfahren** baut darauf auf und verbessert ganz wesentlich die Konvergenzgeschwindigkeit.

Weitere Anwendungen sind der **Satz von Picard–Lindelöf** zur Lösung von Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$ und der **lokale Umkehrsatz** zur Konstruktion lokaler Diffeomorphismen $(f, g) : \mathbb{R}^n \supseteq U \cong V \subseteq \mathbb{R}^n$.

Das ist schon spektakulär – und doch nur die ersten Anwendungen im Grundstudium, als Spitze des Eisbergs! Wir fügen noch weitere hinzu.

Illustration zu Banachs Fixpunktsatz

Dehnungsschranken und Kontraktionen



Gegeben seien metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) und $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Eine Abbildung $f : X \to Y$ nennen wir **k–lipschitz–stetig**, falls gilt:

$$d_Y(f(a), f(b)) \leq k\, d_X(a, b) \qquad \text{für alle } a, b \in X$$

Im Falle $0 \leq k < 1$ nennen wir f **kontraktiv** oder eine **k–Kontraktion**.

Beispiel: Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ gilt $|f(x) - f(y)| = |A(x - y)| \leq \|A\| \cdot |x - y|$ bezüglich der Operatornorm.

Beispiel: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f : X \to \mathbb{R}^m$ diff'bar mit $\|f'\| \leq k$. Für alle $x, y \in X$ existiert $z \in [x, y]$, sodass $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$. Demnach gilt $|f(x) - f(y)| \leq \|f'(z)\| \cdot |x - y| \leq k|x - y|$.

Dehnungsschranken und Kontraktionen

Wir nennen eine solche Funktion f auch **dehnungsbeschränkt**. Der **metrische Differenzenquotient** ist hier beschränkt gemäß

$$\frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a, b)} \leq k \qquad \text{für alle } a \neq b \text{ in } X.$$

Für $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ definieren wir daher die **Lipschitz–Norm**

$$\|f\| = \|f\|_{\mathrm{Lip}} = \mathrm{Lip}(f) := \sup\left\{ \frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a, b)} \;\middle|\; a \neq b \text{ in } X \right\}.$$

Die folgende Formulierung vereinheitlicht Ausnahmen und Sonderfälle:

$$\|f\| := \inf\left\{ k \in \mathbb{R}_{\geq 0} \;\middle|\; \forall a, b \in X \;:\; d_Y(f(a), f(b)) \leq k\, d_X(a, b) \right\}.$$

Dies entspricht der **Operatornorm** von linearen Abbildungen normierter Vektorräume. Genau dann gilt $\|f\| < \infty$, wenn f lipschitz–stetig ist.

Genau dann gilt $\|f\| = 0$, wenn f konstant ist. Speziell für die Identität $\mathrm{id}_X : X \to X$ gilt $\|\mathrm{id}_X\| = 1$, im Sonderfall $X = \{x\}$ jedoch nur $\|f\| = 0$.

Für die Komposition von Abbildungen gilt $\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$.

Banachs Fixpunktsatz

Satz D2A: Fixpunktsatz von Banach, 1922

Sei (X, d) ein metrischer Raum, nicht-leer und vollständig. Hierauf sei $f : X \to X$ eine k–Kontraktion: Wir haben eine Kontraktionskonstante $k \in [0, 1[$, und für alle $x, y \in X$ gilt $d(f(x), f(y)) \le k\, d(x, y)$. Dann folgt:

(1) Zur Abbildung f existiert genau ein Fixpunkt $a \in X$, mit $f(a) = a$.

(2) Jede Iteration mit $x_0 \in X$ und $x_{n+1} = f(x_n)$ konvergiert gegen a.

(3) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ gelten dabei die beiden Fehlerschranken

$$d(a, x_n) \;\le\; \underbrace{\frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1})}_{\text{a posteriori}} \;\le\; \underbrace{\frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)}_{\text{a priori}} \;\searrow\; 0.$$

(4) Allgemeiner genügt $d(f^n(x), f^n(y)) \le k_n\, d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\sum_{n=0}^{\infty} k_n < \infty$. Damit gilt die feinere Fehlerschranke

$$d(a, x_n) \;\le\; d(x_1, x_0) \sum_{j=n}^{\infty} k_j \;\searrow\; 0.$$

Banachs Fixpunktsatz: Erläuterung

📖 S. Banach: *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales.* Fund. Math. 3 (1922) 133–181

Die Aussage (1) garantiert Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunktes. Die Konstruktion (2) liefert zudem eine extrem praktische Approximation.

Gemäß (3) ist die Konvergenz $x_n \to a$ hierbei mindestens so schnell wie die Konvergenz der geometrischen Folge $k^n \searrow 0$: Dies nutzen wir bei iterativen Berechnungen als *a priori* Abschätzung des Zeitaufwandes.

Dieser wunderbare Satz geht auf Stefan Banach (1892–1945) zurück, der nützliche Zusatz (4) stammt von Johannes Weissinger (1913–1995).

Zum Beispiel genügt es, dass eine gewisse Iteration f^m kontraktiv ist, also $d(f^m(x), f^m(y)) \le k\, d(x, y)$ für eine Konstante $k \in [0, 1[$ gilt.

Ebenso kommt es vor, dass höhere Iterationen f^n stärker kontrahieren, und die Reihe $\sum k_n$ somit viel kleiner ausfällt als die geometrische $\sum k^n$.

Für die qualitative Konvergenzaussage ist dies zunächst unwesentlich, doch für die praktische Fehlerabschätzung ist es ungemein hilfreich.

Banachs Fixpunktsatz: Beweis der Konvergenz

Beweis: *Eindeutigkeit:* Für je zwei Fixpunkte $a = f(a)$ und $b = f(b)$ gilt $d(a,b) = d(f(a), f(b)) \le k\,d(a,b)$ mit $k < 1$, also $d(a,b) = 0$, somit $a = b$.

Die *Existenz* beweisen wir durch die iterative Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
Wir wählen $x_0 \in X \ne \emptyset$ und setzen $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Per Induktion gilt $d(x_{n+1}, x_n) \le k^n d(x_1, x_0)$: Für $n = 0$ ist dies trivial, für $n \ge 1$ gilt $d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \le k\,d(x_n, x_{n-1}) \le k^n d(x_1, x_0)$.

Dank Dreiecksungleichung erhalten wir für alle $n \le p < q$:

$$\begin{aligned} d(x_q, x_p) &\le d(x_q, x_{q-1}) + \dots + d(x_{p+2}, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_p) \\ &\le (k^{q-p-1} + \dots + k + 1)\, d(x_{p+1}, x_p) = \frac{1-k^{q-p}}{1-k} d(x_{p+1}, x_p) \\ &\le \frac{k^p - k^q}{1-k} d(x_1, x_0) \le \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \quad\searrow\quad 0 \quad \text{für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Demnach ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge im metrischen Raum (X,d). Da (X,d) vollständig ist, existiert ein Grenzwert $a \in X$ mit $x_n \to a$.

Da f kontraktiv und somit stetig ist, folgt aus $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ per Grenzübergang $a = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(a)$.

Banachs Fixpunktsatz: Beweis der Fehlerschranke

Die Ungleichung für $n = p$ und $q \to \infty$ ergibt die Fehlerabschätzung (3):

$$d(a, x_n) \quad\le\quad \underbrace{\frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1})}_{\text{a posteriori}} \quad\le\quad \underbrace{\frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)}_{\text{a priori}} \quad\searrow\quad 0$$

Aussage (4) beweisen wir genauso: Wegen $\sum_{n=0}^{\infty} k_n < \infty$ gilt $k_n \to 0$ für $n \to \infty$. Insbesondere existiert $m \in \mathbb{N}$ sodass $k_n \le 1/2$ für alle $n \ge m$, das heißt f^n ist kontraktiv für alle $n \ge m$. Sind $a = f(a)$ und $b = f(b)$ Fixpunkte von f, so auch von f^n, also folgt $a = b$ wie oben.

Für jede iterative Folge mit $x_0 \in X$ und $x_{n+1} = f(x_n)$ erhalten wir für $n \le p < q$ wie oben $d(x_q, x_p) \le d(x_1, x_0) \sum_{j=n}^{\infty} k_j$. Somit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in (X,d), also existiert ein Grenzwert $a \in X$ mit $x_n \to a$.

Für $n = p$ und $q \to \infty$ erhalten wir die feinere Fehlerabschätzung

$$d(a, x_n) \le d(x_1, x_0) \sum_{j=n}^{\infty} k_j \quad\searrow\quad 0.$$

Wie immer bei Konvergenz gilt auch hier: Ende gut, alles gut. $\boxed{\text{QED}}$

Erinnerung: normierte Vektorräume

Zur Erinnerung: Auf dem Raum $X = \mathbb{R}^n$ definieren wir für jedes $x \in \mathbb{R}^n$

die euklidische Norm $|x|_2 := \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \dots + {x_n}^2}$,
die Maximumsnorm $|x|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$,
die Taxinorm $|x|_1 := |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$.

Übung: Jede dieser Normen $x \mapsto |x|$ erfreuen sich folgender Eigenschaften für alle Vektoren $x, y \in X$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$:

N0: $|x| \ge 0 = |0|$ (Positivität)
N1: $|x| > 0$ für $x \ne 0$ (Definitheit)
N2: $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$ (Homogenität)
N3: $|x + y| \le |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

Definition D2B: Norm auf einem Vektorram

Eine **Norm** auf einem Vektorraum X ist eine Abbildung $|-| : X \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, die (N0–3) erfüllt. Das Paar $(V, |-|)$ heißt dann **normierter Raum** oder **Prä–Banach–Raum**, und bei Vollständigkeit **Banach–Raum** (D2D).

Erinnerung: metrische Räume

Sei $(X, |-|)$ ein **normierter $\mathbb{R}$–Vektorraum**, etwa $X = \mathbb{R}^n$ mit einer der obigen Normen. Allgemeiner genügt eine **Pseudonorm** $|-| : X \to [0, \infty]$ mit Eigenschaften (N0–3). Die zugehörige **Metrik** misst den Abstand:

$$d : X \times X \to [0, \infty] : (x, y) \mapsto |x - y|$$

Übung: Für alle Punkte $x, y, z \in X$ gilt dann:

M0: $d(x, y) \ge 0 = d(x, x)$ (Positivität)
M1: $d(x, y) > 0$ für $x \ne y$ (Definitheit)
M2: $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
M3: $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Definition D2C: Metrik und metrischer Raum

Eine **Metrik** auf einer Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty]$, die (M0–3) erfüllt. Das Paar (X, d) heißt dann ein **metrischer Raum**.

Für Metriken ist es bequem, die Möglichkeit $d(x, y) = \infty$ zuzulassen. Für Normen hingegen verlangen wir stets Endlichkeit, wie oben erklärt.

Vollständige metrische Räume

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X,d) **konvergiert** gegen einen Punkt $a \in X$, wenn der Abstand $d(x_n, a)$ schließlich beliebig klein wird. Ausführlich:

$$\begin{aligned}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a \text{ in } (X,d) \quad &:\Leftrightarrow \quad d(x_n,a) \to 0 \text{ für } n \to \infty \\ &:\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}_{\ge m} : d(x_n,a) < \varepsilon\end{aligned}$$

Wir nennen dann die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergent** und a ihren **Grenzwert**. Konvergenz in (X,d) ist eine **zweistellige Relation** zwischen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Punkten a in X. Wir schreiben hierfür kurz $x_n \to a$.

Wir nennen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **Cauchy–Folge** in (X,d), wenn der Durchmesser $\delta_n := \sup_{p,q\ge n} d(x_p,x_q)$ eine Nullfolge ist. In Quantorenschreibweise:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall p,q \ge n : d(x_p,x_q) \le \varepsilon$$

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy–Folge, aber nicht umgekehrt.

Definition D2D: vollständiger metrischer Raum

Ein metrischer Raum (X,d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy–Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X,d) konvergiert, also ein Grenzwert $x_n \to a \in X$ existiert.

Vollständige metrische Räume

Beispiel: Im Raum $X = \,]0,1]$ mit euklidischer Metrik ist $x_n = 2^{-n}$ eine Cauchy–Folge, aber nicht konvergent. (Im Raum $[0,1]$ gilt $x_n \to 0$.)

Beispiel: Im Raum $\mathbb{Q}$ mit euklidischer Metrik ist $x_n = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$ eine Cauchy–Folge, hat aber in $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert. (In $\mathbb{R}$ hingegen gilt $x_n \to \mathrm{e} = 2.71828\ldots$, aber dieser Grenzwert liegt nicht in $\mathbb{Q}$.)

Beispiel: Das Newton–Verfahren liefert eine effiziente Approximation von $\sqrt{5}$ durch eine rasch konvergente Folge $x_n \to \sqrt{5}$ *rationaler Zahlen*: Wir definieren $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $x_0 = 3$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 5/x_n)$. Diese Folge ist eine Cauchy–Folge in $\mathbb{Q}$, sie konvergiert aber nicht in $\mathbb{Q}$. (In $\mathbb{R}$ gilt wie gewünscht $x_n \to \sqrt{5}$, aber dieser Wert liegt nicht in $\mathbb{Q}$.)

Der Raum $\mathbb{Q}$ ist unvollständig, hat also ganz anschaulich noch Lücken. Jede Cauchy–Folge möchte konvergieren, doch oft fehlt der Grenzwert. In einem vollständigen Raum kann dieses Problem niemals auftreten!

Beispiel: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind vollständig bezüglich der Metrik $d(x,y) = |x-y|$, ebenso $\mathbb{R}^n$ bezüglich jeder beliebigen Norm und jede abgeschlossene Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ bezüglich der eingeschränkten Metrik.

Vollständigkeit des Raumes $B(X,\mathbb{R})$

Sei X eine Menge. Für $u : X \to \mathbb{R}$ definieren wir die Supremumsnorm:

$$\|u\| = |u|_X := \sup\{\, |u(x)| \;\big|\; x \in X \,\}$$

Dies ist eine Norm auf dem Vektorraum der beschränkten Funktionen:

$$B(X,\mathbb{R}) := \big\{\, u : X \to \mathbb{R} \;\big|\; \|u\| < \infty \,\big\}$$

Hier steht „B“ für beschränkt [engl. *bounded*, frz. *borné*].

Satz D2E: Vollständigkeit von $B(X,\mathbb{R})$

Der $\mathbb{R}$–Vektorraum $B(X,\mathbb{R})$ ist vollständig, also ein Banach–Raum.

Beweis: Gegeben sei eine Cauchy–Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $B(X,\mathbb{R})$:
Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert $m \in \mathbb{N}$ sodass für alle $p,q \ge m$ gilt $\|u_p - u_q\| \le \varepsilon$.
Zu jedem Punkt $x \in X$ ist dann $u_n(x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $\mathbb{R}$.
Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert $u(x) \in \mathbb{R}$ als Grenzwert $u_n(x) \to u(x)$.
Für $p = m$ und $q \to \infty$ folgt $|u_m(x) - u(x)| \le \varepsilon$, somit $\|u_m - u\| \le \varepsilon$.
Also ist u beschränkt, und es gilt $u_n \to u$ in $B(X,\mathbb{R})$. QED

☺ Somit ist jede abgeschlossene Teilmenge $E \subseteq B(X,\mathbb{R})$ vollständig.

Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^n$

Im Spezialfall einer endlichen Menge X, etwa $X = n = \{0,1,\dots,n-1\}$, ist $B(X,\mathbb{R})$ unser Modellraum $\mathbb{R}^n$ mit der Maximumsnorm $\|{-}\| = |{-}|_\infty$.
Zudem haben wir die Norm $|x|_p = \big(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p\big)^{1/p}$ für $1 \le p < \infty$.
Diese Normen sind äquivalent gemäß $|x|_\infty \le |x|_p \le |x|_1 \le n|x|_\infty$, daher definieren sie dieselbe Topologie, Konvergenz, Cauchy–Folgen, etc.

Satz D2F: Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^n$

Auf jedem $\mathbb{R}$–Vektorraum X endlicher Dimension sind je zwei Normen $|{-}|$ und $\|{-}\|$ äquivalent. Ausführlich bedeutet das: Es gibt positive Konstanten $\ell, L \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $\ell\,|x| \le \|x\| \le L\,|x|$ für alle $x \in X$ gilt.

Speziell für unseren Modellraum $X = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Norm $|{-}|$ ist die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1 \,\}$ kompakt, und es genügen

$$\ell = \min\{\, \|x\| \;\big|\; x \in \mathbb{S}^{n-1} \,\} \quad \text{und} \quad L = \max\{\, \|x\| \;\big|\; x \in \mathbb{S}^{n-1} \,\}.$$

Übung: Beweisen Sie diese Schranken zur Wiederholung. Mahnendes Gegenbeispiel: Für die ℓ^p–Normen auf $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subset \ell^p(\mathbb{N},\mathbb{R})$ gilt dies nicht!

☺ Je nach Anwendung wählen wir eine bequem passende Norm.

Blackwells hinreichendes Kriterium

Sei X eine Menge und sowie $E \subseteq B(X, \mathbb{R})$ mit Supremumsnorm $\|{-}\|$.

Für $u, \tilde{u} : X \to \mathbb{R}$ schreiben wir $u \le \tilde{u}$ falls $u(x) \le \tilde{u}(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Ein Operator $\Phi : E \to E$ ist **isoton** falls gilt: Aus $u \le \tilde{u}$ folgt $\Phi(u) \le \Phi(\tilde{u})$.

Sei $\delta \in [0, 1]$. Wir nennen $\Phi : E \to E$ **isoton δ–diskontiert**, falls für alle $u, \tilde{u} \in E$ und $c \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ gilt: Aus $u \le \tilde{u} + c$ folgt $\Phi(u) \le \Phi(\tilde{u}) + \delta c$.

Satz D2G: Blackwells hinreichendes Kriterium

Ist $\Phi : E \to E$ isoton δ–diskontiert, so auch δ–lipschitz–stetig.

Beweis: Für alle $u, \tilde{u} \in E$ gilt $u - \tilde{u} \le \|u - \tilde{u}\|$, also $u \le \tilde{u} + \|u - \tilde{u}\|$. Dank isotoner δ–Diskontierung folgt daraus $\Phi(u) \le \Phi(\tilde{u}) + \delta\|u - \tilde{u}\|$. Wir erhalten $\Phi(u) - \Phi(\tilde{u}) \le \delta\|u - \tilde{u}\|$, ebenso $\Phi(\tilde{u}) - \Phi(u) \le \delta\|u - \tilde{u}\|$. Das bedeutet $\|\Phi(u) - \Phi(\tilde{u})\| \le \delta\|u - \tilde{u}\|$, wie behauptet. QED

🙂 Dieses Kontraktionskriterium ist nicht *notwendig*, aber *hinreichend*: Wir nutzen die partielle Ordnung auf E. Mehr Struktur vereinfacht.

🙂 Ist der betrachtete Teilraum E zudem abgeschlossen in $B(X, \mathbb{R})$, so ist E vollständig, und wir können Banachs Fixpunktsatz anwenden.

Blackwells hinreichendes Kriterium

Jede Grundvorlesung zur Analysis behandelt Banachs Fixpunktsatz im Laufe des ersten Jahres. Dazu notwendig sind Konvergenz von Folgen, Cauchy–Kriterium und Vollständigkeit. Zum allgemeinen Aufbau gehören ebenso Skalarprodukte, Normen, sowie Metriken und Topologien.

Das Kriterium von Blackwell wird in der Analysis meist nicht erwähnt, da es für die dortigen Anwendungen nicht unmittelbar benötigt wird. Im Kontext der Ökonomie und Optimierung hilft es jedoch ungemein, und somit rückt es nun in den Mittelpunkt unseres Interesses.

🙂 Für Blackwell genügt eine beliebige Teilmenge $E \subseteq B(X, \mathbb{R})$. Für Banach sollte E zudem abgeschlossen in $B(X, \mathbb{R})$ sein.

Gegeben sei eine Zerlegung $X = X^\circ \sqcup \partial X$ sowie $v \in B(\partial X, \mathbb{R})$ als Randbedingung. Dies definiert in $B(X, \mathbb{R})$ den affinen Teilraum

$$E_v := \{\, u \in B(X, \mathbb{R}) \mid u|_{\partial X} = v \,\}.$$

🙂 Der $\mathbb{R}$–Vektorraum $B(X, \mathbb{R})$ ist vollständig, also ein Banach–Raum. Hierin ist $E_v \subseteq B(X, \mathbb{R})$ abgeschlossen, also ebenfalls vollständig.

Von Graphen und Markov–Ketten zu Markov–Graphen

Wir betrachten einen **Graphen** $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ wie in B1D erklärt. Vereinfachend gelte $A = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times A_x$ mit $\sigma = \mathrm{pr}_1 : A \to X : (x, a) \mapsto x$ und der **Transition** $\tau : A \to X : (x, a) \mapsto y$ bzw. lokal $\tau_x : A_x \to X : a \mapsto y$.

Diese determinische Sichtweise als Graph verallgemeinern wir nun zu einem stochastischen Modell mit Zufall / Unsicherheit. Zur Erinnerung:

Definition D2H: (diskrete) Markov–Kette

Eine (diskrete) **Markov–Kette** (X, τ) besteht aus einer (abzählbaren) Zustandsmenge X und Transition $\tau : X \to [X] : x \mapsto \sum_{y \in X} p(x, y)\, y$ mit Wkten $p(x, y) \ge 0$ und $\sum_{y \in X} p(x, y) = 1$ für alle $x \in X$.

Dies entspricht einer **stochastischen Matrix** $P = (p(x, y))_{(x,y) \in X \times X}$.
Aus dem Zustand x entsteht mit Übergangswkt $p(x, y)$ der Zustand y.
Die Verteilung $\mu \in [X]$ geht über in die Verteilung $\bar\mu = \mu\, P \in [X]$ mit

$$\bar\mu(y) = \sum_{x \in X} \mu(x)\, p(x, y).$$

Dies entspricht dem **Matrixprodukt**: Zeilenvektor μ mal Matrix P.

Von Graphen und Markov–Ketten zu Markov–Graphen

Angenommen, auf X sind nach dem nächsten Schritt $x \to y$ die **Gewinnerwartungen** gegeben durch $u : X \to \mathbb{R} : y \mapsto u(y)$. Dann ist die Gewinnerwartung vor dem Schritt gegeben durch

$$\bar u(x) = \sum_{y \in X} p(x, y) u(y).$$

Dies entspricht dem **Matrixprodukt**: Matrix P mal Spaltenvektor u.
Die Wkten μ werden nach vorne geschoben gemäß $\mu \mapsto \bar\mu = \mu P$.
Die Erwartungen u werden zurück gezogen gemäß $u \mapsto \bar u = P u$.

Das erinnert uns an das Prinzip der Rekursion / Rückwärtsinduktion: Gespielt wird immer vorwärts, aber optimiert wird leichter rückwärts.

Wir verbinden nun deterministische Spiele (Zustände und Aktionen) mit stochastischen Prozessen (aus Zuständen und Übergangswkten): Der Spieler wählt in jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ eine Aktion $a \in A_x$. Das System geht dann vom Zustand x über nach y mit Wkt $p(x, a, y)$.

Damit gelangen wir also zu den extrem vielseitigen **Markov–Graphen**, die wir schon aus unseren bisherigen Beispielen kennen und schätzen.

Markov–Belohnungsprozess / MRP

Bevor wir Markov–Spiele [*Markov decision processes* / MDP] erklären, ist es als Zwischenschritt vielleicht hilfreich, zunächst vereinfachend Belohnugsprozesse [*Markov reward processes* / MRP] zu betrachten: Wir verfeinern Markov–Ketten durch die Zerlegung in aktive Zustände X° und terminale Zustände ∂X und erklären zudem Belohnungen.

Definition D2I: Markov–Belohnungsprozess / MRP

Ein **Markov–Belohnungsprozess** (X, τ, r, v) besteht aus einer Menge $X = X^\circ \sqcup \partial X$ mit einer Transition $\tau : X^\circ \to [X] : x \mapsto \sum_{y \in X} p(x, y)\, y$ sowie einer sofortigen Belohnung $r : X^\circ \times X \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto r(x, y)$ und einer terminalen Auszahlung $v : \partial X \to \mathbb{R} : x \mapsto v(x)$. Zum Diskontfaktor $\delta \in [0, 1]$ erklären wir die **Erwartungsgleichung** für $u : X \to \mathbb{R}$ durch

$$u(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } x \in \partial X, \\ \sum_{y \in X} p(x, y) \big[r(x, y) + \delta u(y) \big] & \text{für } x \in X^\circ. \end{cases}$$

Wir nennen den Prozess **lösbar**, falls diese Gleichung eine eindeutige Lösung u besitzt. (Insbesondere muss jede Reihe absolut konvergieren.)

Markov–Belohnungsprozess / MRP

Bei einem Belohnungsprozess gibt es noch nichts zu entscheiden: Er beschreibt eine Markov–Kette, eventuell mit terminalen Zuständen, und einen Strom von Zahlungen, die wir diskontiert aufsummieren.

Ist jede Trajektorie endlich, $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$, so führt sie zur endlichen Summe $r(x_0, x_1) + \delta r(x_1, x_2) + \dots + \delta^{n-1} r(x_{n-1}, x_n) + \delta^n v(x_n) \in \mathbb{R}$. Die Berechnung der erwarteten Auszahlung $u : X \to \mathbb{R}$ gelingt dann per Rückwärtsinduktion, wie in B1F erklärt. Wir müssen lediglich absolute Konvergenz sicherstellen, so dass die Erwartung wohldefiniert ist. Dies gilt zum Beispiel, falls $y \mapsto r(x, y) + \delta u(y)$ beschränkt ist.

Im Allgemeinen gibt es unendliche Trajektorien, insbesondere Zykel. Wir interpretieren die Erwartungsgleichung D2I als Fixpunktgleichung und nutzen den Banachschen Fixpunktsatz D2A: Sind $r : X^\circ \times X \to \mathbb{R}$ und $v : \partial X \to \mathbb{R}$ beschränkt und $\delta \in [0, 1[$, so existiert genau eine Lösung $u : X \to \mathbb{R}$, und diese lässt sich iterativ berechnen.

Übung: Formulieren Sie dies als Satz und beweisen Sie ihn. (Wir führen die Rechnungen in Satz D2K allgemein aus.)

Markov–Spiel / MDP und Bellman–Gleichung

Definition D2J: Markov–Spiel und Bellman–Gleichung

Ein **Markov–Graph** $\Gamma = (X, A, \tau)$ besteht aus einer Zustandsmenge X und einer Aktionsmenge $A = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times A_x$ zusammen mit Projektion $\sigma : (x, a) \mapsto x$ und Transition $\tau : A \to [X] : (x, a) \mapsto \sum_{y \in X} p(x, a, y)\, y$.

Für alle $(x, a) \in A$ und $y \in X$ gelte $p(x, a, y) \ge 0$ und $\sum_y p(x, a, y) = 1$. Wie üblich zerlegen wir die Zustandsmenge $X = X^\circ \sqcup \partial X$ in aktive Zustände $X^\circ = \operatorname{Bild}(\sigma)$ und terminale Zustände $\partial X = X \smallsetminus X^\circ$.

Die **Strategiemenge** ist $S = S(\Gamma) := \{\, s : X^\circ \to A \mid \sigma \circ s = \mathrm{id}_{X^\circ} \,\}$. Auszahlungen seien terminal $v : \partial X \to \mathbb{R} : x \mapsto v(x)$ oder instantan $r : A \times X \to \mathbb{R} : (x, a, y) \mapsto r(x, a, y)$ mit dem Diskontfaktor $\delta \in [0, 1]$.

(0) Dieses **Markov–Spiel** (Γ, r, v) definiert die **Bellman–Gleichung**

$$u(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } x \in \partial X, \\ \sup\limits_{a \in A_x} \underbrace{\sum_{y \in X} p(x, a, y) \big[r(x, a, y) + \delta u(y) \big]}_{\text{Hamilton–Funktion } H(x, a, u)} & \text{für } x \in X^\circ. \end{cases}$$

Markov–Spiel / MDP und Bellman–Gleichung

⚠ Für die Reihe über $y \in X$ verlangen wir absolute Konvergenz, etwa $y \mapsto p(x, a, y)$ endlich getragen oder $y \mapsto r(x, a, y) + \delta u(y)$ beschränkt.

☺ Im Folgenden verlangen wir, dass r und v sowie u beschränkt sind. Damit lösen sich alle Fragen zur Konvergenz in Wohlgefallen auf.

☺ Der deterministische Spezialfall entspricht $\tau : (x, a) \mapsto y$ wie zuvor, also $p(x, a, y) = 1$ für das Ziel $y \in X$ und $p(x, a, y') = 0$ für alle $y' \ne y$.

☺ Ist der (deterministische) Graph $\Gamma = (X, A, \tau)$ zudem artinsch, so löst Rekursion / Rückwärtsinduktion B1F die Bellman–Gleichung.

☺ Jede Aktion $a : x \to y$ hat zwei Auswirkungen, die wir ausbalancieren: die sofortige Belohnung $r(x, a, y)$ und der langfristige Nutzen $u(y)$.

☺ Ist Γ lokal-endlich, so wird das Supremum jeweils angenommen. Im lösbaren Falle gilt also $u(x) = \max_{a \in A_x} H(x, a, u)$ für alle $x \in X^\circ$.

☺ Die Funktion u liefert uns die optimale Auszahlung $x \mapsto u(x)$ sowie Aktionen $s(x) \in \operatorname{Arg\,max}_{a \in A_x} H(x, a, u)$, also eine optimale Strategie s!

☺ Optimale Züge erkennen Sie leicht sobald Sie das Optimum kennen.

Bellman–Operator und Erwartungsoperator

Definition D2J: Gewinnerwartung und Optimalität

(1) Sei $E = \{\, u \in B(X,\mathbb{R}) \mid u|_{\partial X} = v \,\}$. Auf diesem affinen Teilraum definieren wir den **Bellman–Operator** $\Phi : E \to E : u \mapsto \bar{u}$ durch

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } x \in \partial X, \\ \sup\limits_{a \in A_x} \underbrace{\sum_{y\in X} p(x,a,y)\big[r(x,a,y) + \delta u(y)\big]}_{\text{Hamilton–Funktion } H(x,\,a,\,u)} & \text{für } x \in X^\circ. \end{cases}$$

Die Fixpunkte von Φ sind genau die Lösungen der Bellman–Gleichung. Wir nennen Φ **eindeutig lösbar**, falls genau ein Fixpunkt $u \in E$ existiert, und **konvergent**, falls zudem $\Phi^n(\tilde{u}) \to u$ für $n \to \infty$ gilt für alle $\tilde{u} \in E$.

(2) Zu $s \in S(\Gamma)$ definieren wir den **Erwartungsoperator** Φ_s durch

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } x \in \partial X, \\ \underbrace{\sum_{y\in X} p(x,s(x),y)\big[r(x,s(x),y) + \delta u(y)\big]}_{\text{Hamilton–Funktion } H(x,\,s(x),\,u)} & \text{für } x \in X^\circ. \end{cases}$$

Fixpunkte $u \in E$ von Φ_s sind Lösungen der **Erwartungsgleichung**.

Bellman–Operator und Erwartungsoperator

Aus unserem Markov–Spiel (Γ, r, v), also den Entscheidungsprozess (X, A, τ, r, v) gemäß D2J, wird durch die Festlegung einer Strategie $s \in S(\Gamma)$ ein Belohnungprozess $(X, \tilde{\tau}, \tilde{r}, v)$ gemäß D2I. Ausführlich:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &: X \to [X] : x \mapsto \textstyle\sum_{y\in X} p(x,s(x),y)\, y \\ \tilde{r} &: X \times X \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto r(x,s(a),y) \end{aligned}$$

Die zugehörige Erwartungsgleichung haben wir in (2) wiederholt, als Fixpunktgleichung für den Erwartungsoperator Φ_s. Umgekehrt ist jeder Belohnungsprozess $(X, \tilde{\tau}, \tilde{r}, v)$ ein Entscheidungsprozess (X, A, τ, r, v) mit $A_x = \{a_x\}$, $p(x,a_x,y) = \tilde{p}(x,y)$, $r(x,a_x,y) = \tilde{r}(x,y)$ für alle $x \in X^\circ$

Um einen direkten, raschen Zugang anzubieten, habe ich hier beide Aspekte in einer gemeinsamen Definition D2J zusammengefasst.

Alternativ kann man die Theorie kleinschrittiger aufbauen und zunächst Markov–Ketten D2H und Belohnugsprozesse D2I als Zwischenetappen untersuchen und ihre Konvergenzfragen klären. Ich formuliere dies hier als Übung und konzentriere mich auf allgemeine Markov–Spiele (D2K).

Aufgabe: Formalisieren Sie das Spiel vom Kapitelanfang explizit als ein Markov–Spiel und lösen Sie es mit Hilfe der Bellman–Gleichung.

7€								23€

Lösung: Die Zustandsmenge ist $X = \{*, 0, 1, \dots, 8\}$ mit $\partial X = \{*, 0, 8\}$ und den Auszahlungen $v(*) = 0$ sowie $v(0) = 7$ und $v(8) = 23$. Jeder aktive Zustand $x \in X^\circ = \{1, 2, \dots, 7\}$ bietet zwei Züge, $A_x = \{\mathrm{go}, \mathrm{stop}\}$, mit Wkten $p(x, \mathrm{go}, x \pm 1) = 1/2$ und Belohnung $r(x, \mathrm{go}, x \pm 1) = c := -1$ sowie den Spielabbruch mit $p(x, \mathrm{stop}, *) = 1$ und $r(x, \mathrm{stop}, *) = 0$.

(1) Die Strategie $s' : x \mapsto \mathrm{go}$ für alle $x \in X^\circ$ ergibt $u_{s'} = \Phi_{s'}(u_{s'})$ wie folgt:

7	2	-1	-2	-1	2	7	14	23

(2) Wechsel zur Strategie s mit $s(3) = \mathrm{stop}$ ergibt $u = \Phi_s(u)$ wie folgt:

7	$8/3$	$1/3$	0	$3/5$	$16/5$	$39/5$	$72/5$	23

☺ Diese Funktion u erfüllt zugleich die Bellman–Gleichung $u = \Phi(u)$. Dank Bellmans Optimalitätsprinzip D2M ist dies die optimale Strategie!

☺ Markov–Spiele und Bellman–Gleichung sind natürlich und einfach. Das erste Anwendungsbeispiel zeigt: Unser Modell passt wunderbar!

☺ Die gezeigten Funktionen sind jeweils die einzigen Lösungen. Jede Strategie $s \in S$ ist randverbunden und somit Φ_s kontraktiv. (D2L)

Insgesamt gibt es $|S| = 2^7 = 128$ Strategien, also exponentiell in $|X^\circ|$. Wir können jede dieser 128 Strategien $s \in S$ untersuchen und jeweils die Gewinnerwartung $u_s : X \to \mathbb{R}$ berechnen. Dann können wir daraus die optimale Strategie auswählen, genauer die optimale Gewinnerwartung $u_* = \max u_s$ und dazu eine optimale Strategie $s \in S$, sodass $u_* = u_s$.

☹ Diese *globale* Optimierung durch *brute force* ist jedoch aufwändig, da die Strategiemenge $S = S(\Gamma)$ sehr groß und unübersichtlich ist.

☺ Die Bellman–Gleichung bietet dagegen eine *lokale* Optimierung, und diese gelingt wesentlich effizienter: Das ist ihr großer Nutzen! Dass beide Rechenwege zum selben Ergebnis führen, ist die Aussage von Bellmans Optimalitätsprinzip D2M, das wir als nächstes beweisen.

Gewinnerwartung und Optimalität

Definition D2J erklärt das grundlegende Modell und alle relevanten Daten: der Markov–Graph $\Gamma = (X, A, \tau)$, das Markov–Spiel (Γ, r, v), die Strategiemenge $S(\Gamma)$ und die Bellman–Gleichung für $u : X \to \mathbb{R}$.

Darauf bauend erklären wir in Definition D2J die Operatoren Φ und Φ_s. Wir wünschen uns, dass sie kontrahieren, oder wenigstens konvergieren, oder jeder einen eindeutigen Fixpunkt hat: $u = \Phi(u)$ bzw. $u_s = \Phi_s(u_s)$.

Das sind zunächst einmal Hoffnungen / Wünsche / Annahmen / Axiome. Für praktische Anwendungen benötigen wir jeweils handfeste Kriterien. Immerhin können wir mit den Begriffen Phänomene präzise benennen.

Der Operator Φ_s beschreibt die **Erwartung** der Strategie $s \in S(\Gamma)$, die zugehörige Fixpunktgleichung $u_s = \Phi_s(u_s)$ heißt dementsprechend **Erwartungsgleichung**. Ihre (hoffentlich eindeutige) Lösung $u_s : X \to \mathbb{R}$ heißt **Erwartungsfunktion** der hier vorgegebenen Strategie $s \in S(\Gamma)$: Vom Zustand $x \in X$ erwarten wir mit Strategie s den Gewinn $u_s(x)$.

Die **Erwartungsoperatoren** Φ_s sind affin-linear, haben bessere Eigenschaften, die stärkere Theorie und sind leichter zu behandeln.

Gewinnerwartung und Optimalität

Die Abbildung $\Phi : E \to E$ heißt **Bellman–(Optimalitäts–)Operator**, die Fixpunktgleichung $u = \Phi(u)$ heißt **Bellman–(Optimalitäts–)Gleichung**. Ihre (hoffentlich eindeutige) Lösung $u : X \to \mathbb{R}$ heißt **Gewinnfunktion**: Vom Zustand $x \in X$ erwarten wir bei optimalem Spiel den Gewinn $u(x)$.

Die Bellman–Gleichung ist vielseitig einsetzbar und daher berühmt. Sie ist eine Funktionalgleichung, denn die hierbei gesuchte Größe ist eine Funktion $u : X \to \mathbb{R}$. (Nun ja, eigentlich ist u auch nur ein Vektor, doch wir erlauben vorsorglich auch unendliche Zustandsmengen X.)

Hierzu ist noch keine Strategie vorgegeben. Im Gegenteil nutzen wir die Funktion u, um daraus schließlich eine optimale Strategie abzulesen!

Zur Berechnung bzw. Approximation der Funktion u wurden Dutzende Verfahren vorschlagen; uns geht es hier zunächst um ihre Definition, dann um grundlegende Eigenschaften und schließlich die Berechnung.

Anders als Φ_s ist der Operator Φ nicht-linear und daher schwieriger. Zur Definition der Funktion u nutzen wir zunächst die Fixpunktgleichung $u = \Phi(u)$; anschließend zeigen wir das Optimalitätsprinzip $u = \sup_s u_s$.

Iteration für Gewinnerwartung und Optimalität

Sei (Γ, r, v) ein Markov–Spiel mit beschränkten Belohnungen r und v. Letzteres gilt automatisch auf jedem endlichen Markov–Graphen Γ.

Auf $E = E_v = \{\, u \in B(X, \mathbb{R}) \mid u|_{\partial X} = v \,\}$ nutzen wir die Operatoren

$$\Phi \;:\; u \mapsto \bar{u} \;:\; \bar{u}(x) = \sup_{a \in A_x} \underbrace{\textstyle\sum_{y \in X} p(x,a,y)\big[r(x,a,y) + \delta u(y)\big]}_{\text{Hamilton–Funktion } H(x,\,a,\,u)} \quad \text{und}$$

$$\Phi_s \;:\; u \mapsto \bar{u} \;:\; \bar{u}(x) = H(x, s(x), u) \quad \text{für jede Strategie } s \in S(\Gamma).$$

Satz D2K: Kontraktion, somit Existenz und Eindeutigkeit

Für jeden Diskontfaktor $\delta \in [0,1]$ gilt: Alle Erwartungsoperatoren Φ_s und der Bellman–Operator Φ sind isoton δ–diskontiert, somit δ–lipschitz.

Speziell für $\delta \in [0,1[$ können wir Banachs Fixpunktsatz D2A anwenden, wie in unseren Beispielen motiviert: Es gibt genau einen Fixpunkt und diesen können wir durch das Iterationsverfahren effizient annähern.

Beweis: Dies folgt aus den Definitionen durch geduldiges Nachrechnen. Führen Sie dies sorgsam aus, es ist eine gute Übung zur Wiederholung!

Iteration für Gewinnerwartung und Optimalität

Ausführlich: Sei $u \le \tilde{u} + c$. Für alle $x \in X^\circ$, $a \in A_x$ und $y \in X$ gilt:

$$\begin{aligned}
u(y) &\le & \tilde{u}(y) + c \\
r(x,a,y) + \delta u(y) &\le & r(x,a,y) + \delta\tilde{u}(y) + \delta c \\
p(x,a,y)\big[r(x,a,y) + \delta u(y)\big] &\le & p(x,a,y)\big[r(x,a,y) + \delta\tilde{u}(y) + \delta c\big] \\
\textstyle\sum_y p(x,a,y)\big[r(x,a,y) + \delta u(y)\big] &\le & \textstyle\sum_y p(x,a,y)\big[r(x,a,y) + \delta\tilde{u}(y)\big] + \delta c \\
H(x,a,u) &\le & H(x,a,\tilde{u}) + \delta c
\end{aligned}$$

Zur Definition der Erwartung $H(x,a,u)$ fordern wir absolute Konvergenz. Das ist garantiert, falls neben u und $\tilde{u}$ auch $y \mapsto r(x,a,y)$ beschränkt ist.

Ist die Strategie $s \in S(\Gamma)$ vorgegeben, so wählen wir im Zustand $x \in X^\circ$ die Aktion $a = s(x)$. Obige Rechnung garantiert $\Phi_s(u) \le \Phi_s(\tilde{u}) + \delta c$.

Für den Operator Φ wird optimiert: Wir bilden das Supremum über alle Aktionen $a \in A_x$, erst rechts dann links, und erhalten $\Phi(u) \le \Phi(\tilde{u}) + \delta c$.

Endlichkeit ist garantiert, falls neben u und $\tilde{u}$ auch für jeden Zustand x die Funktion $a \mapsto \sum_{y \in X} p(x,a,y) r(x,a,y)$ beschränkt ist. Ist zudem A_x endlich, so wird das Supremum angenommen, ist also ein Maximum.

Iteration für Gewinnerwartung und Optimalität

Sei (Γ, r, v) ein Markov–Spiel mit r, v beschränkt und $\delta = 1$. Wir fixieren $s \in S(\Gamma)$ mit Übergangswkten $p : X^\circ \times X \to [0,1] : (x,y) \mapsto p(x, s(x), y)$. Wir schreiben $x \to y$ falls $p(x,y) > 0$. Für $x \in \partial X$ setzen wir $p(x,x) = 1$. Somit ist (X, p) eine Markov–Kette mit endlichem Zustandsraum X.

Wir nennen s **randverbunden**, wenn es zu jedem $x_0 \in X$ einen Weg $x_0 \to x_1 \to \dots \to x_\ell$ mit $x_\ell \in \partial X$ gibt. Falls X endlich ist, so ist s sogar **stark (ℓ, ε)–randverbunden** für ein geeignetes Paar $(\ell, \varepsilon) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_{>0}$: Jeder Startzustand führt nach ℓ Schritten mit Wkt $\geq \varepsilon$ in den Rand ∂X.

Anschaulich: Die Wkt diffundiert in den Rand, langsam aber sicher. Nach ℓ Schritten ist die Gesamtwkt aller aktiven Zustände $\leq k = 1 - \varepsilon$. Auch für $\delta = 1$ kann also Kontraktion vorliegen; wir müssen hinschauen:

Satz D2L: randverbunden impliziert konvergent

Sei (Γ, r, v) ein Markov–Spiel und $\delta = 1$. Die Strategie $s \in S(\Gamma)$ sei stark (ℓ, ε)–randverbunden. Dann ist Φ_s^ℓ kontraktiv mit Konstante $k = 1 - \varepsilon$.

Somit ist $\Phi_s : E \to E$ konvergent: Es existiert genau ein Fixpunkt $u_s \in E$ und zudem konvergiert $\Phi_s^n(\tilde{u}) \to u$ für jeden Startwert $\tilde{u} \in E$.

Iteration für Gewinnerwartung und Optimalität

Beweis: Wir untersuchen $\Phi_s(u)(x) = \sum_{y \in X} p(x,y)[r(x,y) + u(y)]$.
Wir betrachten $P = (p(x,y))_{(x,y) \in X \times X}$ als zeilen-stochastische Matrix und $u = (u(y))_{y \in X}$ als Spaltenvektor. Damit gilt $\Phi_s(u) = c + Pu$ mit additiver Belohnung $c = (c(x))_{x \in X}$ und $c(x) = \sum_{y \in X} p(x,y) r(x,y)$.

Per Induktion erhalten wir $\Phi_s^n(u) = c + Pc + P^2 c + \dots P^{n-1} c + P^n u$. Die Potenz $P^n = (p_n(x,y))_{(x,y) \in X \times X}$ berechnet die Wkt $p_n(x,y)$, in n Schritten von x nach y zu gehen, als Summe aller Wege der Länge n.

Für alle $u, \tilde{u} \in E$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt somit $\Phi_s^n(u) - \Phi_s^n(\tilde{u}) = P^n(u - \tilde{u})$. Wir zeigen nun $|P^\ell(u - \tilde{u})| \leq k|u - \tilde{u}|$. Wir untersuchen $\hat{u} = P^\ell(u - \tilde{u})$: Für $x \in \partial X$ gilt $p_\ell(x,x) = 1$, also $\hat{u}(x) = u(x) - \tilde{u}(x) = v(x) - v(x) = 0$. Für jeden aktiven Zustand $x \in X^\circ$ hingegen finden wir:

$$\hat{u}(x) = \sum_{y \in X} p_\ell(x,y) \big[u(y) - \tilde{u}(y) \big] = \sum_{y \in X^\circ} p_\ell(x,y) \big[u(y) - \tilde{u}(y) \big]$$

$$|\hat{u}(x)| \leq \sum_{y \in X^\circ} p_\ell(x,y) \big| u(y) - \tilde{u}(y) \big| \leq \sum_{y \in X^\circ} p_\ell(x,y) \big| u - \tilde{u} \big| \leq k \big| u - \tilde{u} \big|$$

Somit ist Φ_s^ℓ kontraktiv und Banachs Fixpunktsatz D2A anwendbar. $\boxed{\text{QED}}$

Gewinnerwartung auf $\mathbb{N}$ als unendlicher Graph

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
100€											$\dots$

Aufgabe: Wir untersuchen die Irrfahrt auf $X = \mathbb{N}$ mit Rand $\partial X = \{0\}$; mit Wkt $p \in \,]0,1[$ geht es nach rechts, mit Wkt $q = 1 - p$ nach links. Die Belohnung sei $r \in \mathbb{R}$ in jedem Schritt mit Diskontfaktor $\delta \in \,]0,1[$.

(1) Finden Sie alle $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $\Phi(u) = u$. Welche sind beschränkt?
(2) Wie verhalten sich beschränkte Lösungen für $r = 0$ und $\delta \nearrow 1$?
(3) Lösen Sie den Fall $\delta = 1$. (4) Ist Φ kontraktiv? (5) konvergent?

Lösung: (1) Für $x \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ lösen wir die Fixpunktgleichung $u = \Phi(u)$:

$$\boxed{u(x) = r + \delta\big[pu(x+1) + qu(x-1)\big]}$$

Durch $u(0)$ und $u(1)$ sind alle Werte $u(2), u(3), \dots$ rekursiv festgelegt. Der Ansatz $u(x) = ab^x + r/(1-\delta)$ führt zu $b^x = \delta[pb^{x+1} + qb^{x-1}]$, also

$$b \in \{b_1, b_2\} \quad \text{mit} \quad b_{1/2} = \frac{1 \mp \sqrt{1 - 4pq\delta^2}}{2p\delta} \quad \text{und} \quad 0 < b_1 < 1 < b_2.$$

Gewinnerwartung auf $\mathbb{N}$ als unendlicher Graph

Damit erhalten wir alle Lösungen der Erwartungsgleichung $u = \Phi(u)$:

$$u(x) = a_1 b_1^x + a_2 b_2^x + \frac{r}{1-\delta} \qquad \text{mit} \qquad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

Die beschränkten Lösungen sind demnach $u(x) = a_1 b_1^x + r/(1-\delta)$. Der Startwert $u(0) = v(0)$ bestimmt die Konstante $a_1 = u(0) - r/(1-\delta)$.

$$\boxed{u(x) = \left[u(0) - \frac{r}{1-\delta}\right]\left[\frac{1 - \sqrt{1 - 4pq\delta^2}}{2p\delta}\right]^x + \frac{r}{1-\delta}}$$

Dank Diskont $\delta < 1$ erhalten wir in jedem Falle genau eine Lösung! Das entspricht dem Kontraktionssatz D2K, hier nun wunderbar konkret. Obwohl der Graph unendlich ist, greifen unsere Werkzeuge bestens.

Der gegebene Anfangswert klingt exponentiell ab gegen $r/(1-\delta)$. Konkretes Beispiel: Für $p = q = 1/2$ und $\delta = 0.8$ finden wir $b_1 = 1/2$, und somit die Gewinnfunktion $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \mapsto [u(0) - 5r]2^{-x} + 5r$.

(2) Für $r = 0$ finden wir den Grenzwert $\lim_{\delta \nearrow 1} u(x) = u(0)\, b^x$ mit

$$b = \frac{1 \mp \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 \mp \sqrt{(1-2p)^2}}{2p}$$
$$= \frac{1 - |1-2p|}{2p} = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < p \le 1/2, \\ (1-p)/p & \text{für } 1/2 < p < 1. \end{cases}$$

🙂 Das ist tatsächlich eine beschränkte Lösung des Falls $\delta = 1$.
Für $1/2 < p < 1$ gilt $b < 1$ und somit $u(x) \to 0$ für $x \to \infty$.
Unten in (3) finden wir weitere beschränkte Lösungen, die diese beiden Eigenschaften nicht haben.

Nochmal anders gesagt: Für $\delta = 1$ sind selbst beschränkte Lösungen nicht eindeutig. Unter den vielen „mathematischen“ Lösungen finden wir genau eine „natürliche“ oder „physikalisch-plausible“ Lösung wie oben. Allein die Erwartungsgleichung / Bilanzgleichung genügt hier also noch nicht zur Charakterisierung der „richtigen“ Lösung.

Gewinnerwartung auf $\mathbb{N}$ als unendlicher Graph

(3) Wir setzen $\delta = 1$ und lösen die Fixpunktgleichung $u = \Phi(u)$:

$$\boxed{u(x) = r + pu(x+1) + qu(x-1).}$$

Für $p = q = 1/2$ haben wir bereits zuvor alle Lösungen bestimmt: Diese sind Parabeln der Form $u(x) = u(0) + ax - rx^2$ mit $a \in \mathbb{R}$. Im Folgenden sei daher $p \neq 1/2$ und weiterhin $0 < p < 1$.

Der Ansatz $u(x) = ab^x + rx/(1-2p)$ führt zu $b^x = pb^{x+1} + qb^{x-1}$, also

$$b \in \left\{ \frac{1 \mp \sqrt{1-4pq}}{2p} \right\} = \left\{ \frac{1 \mp |1-2p|}{2p} \right\} = \left\{ 1, \frac{1-p}{p} \right\}.$$

Für $b = (1-p)/p$ und $a \in \mathbb{R}$ erhalten wir also die allgemeine Lösung

$$\boxed{u(x) = u(0) - a + ab^x + \frac{rx}{1-2p}}$$

Gewinnerwartung auf $\mathbb{N}$ als unendlicher Graph

Für $0 < p < 1/2$ gilt $b > 1$: Beschränkte Lösungen existieren nur für $a = r = 0$, also nur die konstante Lösung $u(x) = u(0)$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

Für $1/2 < p < 1$ gilt $0 < b < 1$: Beschränkte Lösungen existieren nur für $r = 0$; dann gilt $u(x) = u(0) - a + ab^x$, wobei $a \in \mathbb{R}$ beliebig wählbar ist.

Für $x \to \infty$ erfüllt diese Lösung $u(x) \to u(0) - a$. Nur für $a = u(0)$ erfüllt unsere Lösung $u(x) = u(0)\, b^x$ zudem $u(x) \to 0$ für $x \to \infty$.

🙂 Das ist die „natürliche“ oder „physikalisch-plausible“ Lösung, die wir oben in (2) als den Grenzwert für $\delta \nearrow 1$ gefunden haben. Alle anderen Lösungen erfüllen ebenfalls die Erwartungsgleichung, doch diese alleine genügt hier noch nicht zur Eindeutigkeit.

🙂 Diese schöne Illustration ist ein heilsames Gegenbeispiel: Für $\delta = 1$ ist Eindeutigkeit keinesfalls selbstverständlich!

Gewinnerwartung auf $\mathbb{N}$ als unendlicher Graph

(4) Weiter sei $\delta = 1$ und $r = 0$. Für $0 < p \le 1/2$ hat $\Phi(u) = u$ genau eine beschränkte Lösung $u \in E$, nämlich $u(x) = u(0)$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

Dennoch ist $\Phi : E \to E$ **nicht kontraktiv**, auch keine Potenz Φ^n:
Wir vergleichen $u, \tilde{u} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $u(0) = \tilde{u}(0) = 0$ sowie $u(x) = 0$ und $\tilde{u}(x) = 1$ für $x \in \mathbb{N}_{\ge 1}$. Dann gilt $\Phi^n(u) = u$ und $\Phi^n(\tilde{u})(x) = 1$ für $x > n$.

Dies zeigt, dass $\Phi : E \to E$ **nicht gleichmäßig konvergent** ist, denn es gilt nicht $\Phi^n(\tilde{u}) \to u$ bezüglich der Supremumsnorm auf E.

🙂 Das ist ein weiteres schönes Beispiel für unser Repertoire:
Der Bellman–Operator $\Phi : E \to E$ ist hier nicht kontraktiv, dennoch existiert genau eine Lösung $u = \Phi(u)$.

Die vorsichtige Begriffsbildung in Definition D2J nimmt so langsam konkrete Gestalt an und füllt sich nachträglich mit Leben.

Gewinnerwartung auf $\mathbb{N}$ als unendlicher Graph

(5) Für $0 < p \le 1/2$ ist Φ immerhin noch **punktweise konvergent**:
Es existiert genau ein Fixpunkt $u \in E$ und für jeden Startwert $\tilde{u} \in E$ gilt Konvergenz $\Phi^n(\tilde{u})(x) \to u(x)$ für $n \to \infty$ in jedem Punkt $x \in X$.

Wir zeigen dies für $v(0) = 0$. Sei $u_0 \in E$ gegeben durch $u_0(0) = 0$ und $u_0(x) = 1$ für $x \in \mathbb{N}$. Für $u_n = \Phi^n(u_0)$ gilt $u_0 \ge u_1 \ge u_2 \ge \dots \searrow u \ge 0$. Aus $u_{n+1}(x) = pu_n(x+1) + qu_n(x-1)$ wird $u(x) = pu(x+1) + qu(x-1)$ für $n \to \infty$, also $u = \Phi(u)$. Somit gilt $u = 0$ dank Eindeutigkeit.

Für jeden Startwert $\tilde{u} \in E$ gilt $-cu_0 \le \tilde{u} \le cu_0$ mit $c = |\tilde{u}|$. Daraus folgt $-cu_n \le \Phi^n(\tilde{u}) \le cu_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also punktweise $\Phi^n(\tilde{u})(x) \to 0$.

🙂 Auch dies ist ein weiteres schönes Beispiel für unser Repertoire.
Satz D2O erklärt ein allgemeines Kriterium für punktweise Konvergenz.

Bellmans Optimalitätsprinzip $u_* = u$

Gegeben sei ein Markov–Spiel (Γ, r, v) und $u : X \to \mathbb{R}$ mit $u = \Phi(u)$.
Wie kann die Auszahlung u realisiert werden, oder gar noch höhere?
Wir vergleichen mit $u_* := \sup\{\, u_s \in E \mid s \in S(\Gamma),\ \Phi_s(u_s) = u_s \,\}$.

Satz D2M: Bellmans Optimalitätsprinzip $u_* = u$

(1) Wenn Φ für jeden Startwert gegen u konvergiert, so gilt $u_* \le u$.
Das bedeutet, lokale Optimierung ist mindestens so gut wie globale.
Das gilt insbesondere, wenn Φ isoton δ–diskontiert ist, also δ–kontraktiv.

(2) Wird in der Bellman–Gleichung überall das Supremum angenommen, etwa weil Γ lokal-endlich ist, so existieren optimale Strategien $s \in S(\Gamma)$ mit $s(x) \in \operatorname{Arg\,max}_{a \in A_x} H(x, a, u)$, also $\Phi_s(u) = u$, und es folgt $u_* \ge u$.

Beweis: (1) Für jede Strategie $s \in S$ und jeden Fixpunkt $u_s = \Phi_s(u_s)$ gilt $\Phi(u_s)(x) = \sup_{a \in A_x} H(x, a, u_s) \ge H(x, s(x), u_s) = u_s(x)$ in $x \in X^\circ$.
Zudem ist Φ isoton: $u_s \le \Phi(u_s) \le \Phi^2(u_s) \le \dots \nearrow u$. Somit gilt $u_* \le u$.

(2) Für s gilt $u(x) = H(x, s(x), u)$, also $u = \Phi_s(u)$, somit $u_* \ge u$. $\boxed{\text{QED}}$

Bellmans Optimalitätsprinzip $u_* = u$

Bellmans Optimalitätsprinzip $u_* = u$ kommt recht unscheinbar daher, daher möchte ich seine anschaulich-praktische Bedeutung erläutern.

Lokale Endlichkeit des Markov–Graphen Γ vereinfacht alle Argumente. Den allgemeinen Fall behandeln wir gleich anschließend in Satz D2N.

Rückwärts / lokale Optimierung: Ein rationaler Spieler wählt in jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ eine optimale Aktion $a \in A_x$, die seine erwartete Auszahlung $H(x, a, u)$ maximiert. Dies führt zur Bellman–Gleichung:

$$u(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } x \in \partial X, \\ \max\limits_{a \in A_x} \underbrace{\textstyle\sum_{y \in X} p(x, a, y)\big[r(x, a, y) + \delta u(y)\big]}_{\text{Hamilton–Funktion } H(x,a,u)} & \text{für } x \in X^\circ. \end{cases}$$

In jedem Zustand $x \in X^\circ$ stellen wir uns einen **lokalen Optimierer** vor.
Dieser handelt lokal, kurzsichtig, egoistisch: Jeder optimiert für sich!

Das erinnert uns an das Prinzip der Rekursion / Rückwärtsinduktion:
Optimiert wird rückwärts, aber gespielt wird immer vorwärts.

Vorwärts / globale Optimierung: Jede Strategie $s \in S = S(\Gamma)$ definiert eine Gewinnerwartung $u_s : X \to \mathbb{R}$ durch die Gleichung $u_s = \Phi_s(u_s)$:

$$u_s(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } x \in \partial X, \\ H(x, s(x), u_s) & \text{für } x \in X^\circ. \end{cases}$$

Eine **globale Optimiererin** kann somit zu jeder Strategie $s \in S(\Gamma)$ ihre Auszahlung u_s berechnen und das Supremum $u_* = \sup u_s$ bilden. Dies geschieht global, weitblickend, kooperativ: alle $x \in X^\circ$ gemeinsam!

In jedem Zustand $x \in X$ können wir demnach bestenfalls den Gewinn $u_*(x) = \sup_{s \in S} u_s(x)$ erwarten bzw. als Auszahlung realisieren.

Das Optimalitätsprinzip $u_* = u$ besagt, dass die Bellman–Gleichung tatsächlich tut, was sie soll: Die globale Optimierung u_* und die lokale Optimierung u stimmen überein! Beide Sichtweisen werden versöhnt.

⚠ Das Optimalitätsprinzip $u_* = u$ erfordert gewisse Voraussetzungen; diese versuche ich hier möglichst schwach und allgemein zu halten.

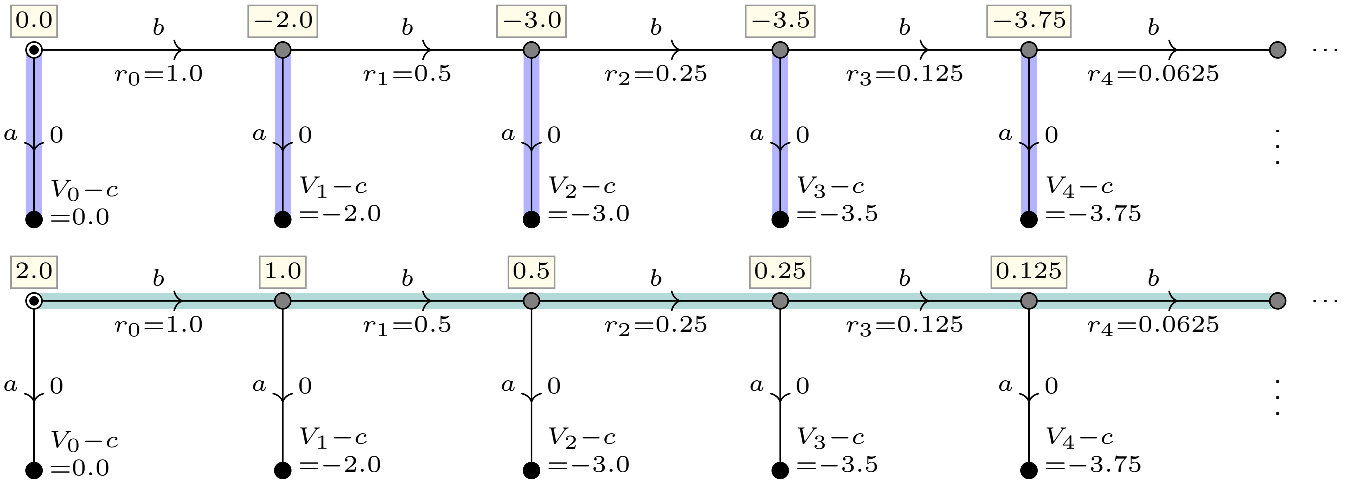
Vielleicht scheint Ihnen auf den ersten Blick das Optimalitätsprinzip $u_* = u$ intuitiv-selbstverständlich und daher kaum der Rede wert. Das wäre ein Jammer und ein Irrtum! Ist hier etwas zu beweisen? Ja, sicher, und zur Illustration helfen Gegenbeispiele wie B1ı.

Drastische Gegenbeispiele wie das folgende sind überaus lehrreich, und ein großes Beispielrepertoire bewahrt Sie vor voreiligen Trugschlüssen. Die gute mathematische Vorgehensweise ist wie immer komplementär: Sätze und Gegen/Beispiele ergänzen und erklären sich gegenseitig.

In §D3 skizzieren wir eine wunderschöne Anwendung aus dem Bereich des Maschinellen Lernens: Robi, der Saugroboter, versucht seine Route optimal zu planen. Meist wählt man dort einen Diskontfaktor $\delta \in [0, 1[$, da die theoretische Grundlage dann besonders einfach und solide ist.

Die Robustheit der Rechnungen ist für die Anwendung extrem wichtig, gerade deshalb diskutieren wir auch den kritischen Randfall $\delta = 1$. Gute Beispiele bewahren Sie vor naivem Irrglauben und illustrieren eindrücklich den Nutzen möglichst starker theoretischer Werkzeuge.

Exotische Lösungen der Bellman–Gleichung



♦ Beispiel B1ı: exotische Lösungen der Bellman–Gleichung

Unser Graph Γ habe die aktiven Zustände $x \in X^\circ = \{\, b^k \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ mit Aktionen $A_x = \{a, b\}$ und Belohnungen $r(b^k, a) = 0$ und $r(b^k, b) = r_k$. Terminal sind $\partial X = \{\, b^k a \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ mit Auszahlungen $v(b^k a) = V_k - c$.

Gegeben seien hierzu $0 < r_k < v_k$ in $\mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} v_k < \infty$. Wir setzen $R_k = \sum_{i=k}^{\infty} r_i$ und $V_k = \sum_{i=k}^{\infty} v_i$ und wählen $c > V_0 - R_0 > 0$. Die Skizze zeigt $r_k = 2^{-k}$, $R_k = 2^{1-k}$, $v_k = 2^{1-k}$, $V_k = 2^{2-k}$ und $c = -4$.

Exotische Lösungen der Bellman–Gleichung

Aufgabe: Zeigen Sie, dass die abgebildeten Funktionen $u_0, u_1 : X \to \mathbb{R}$ die Bellman–Gleichung lösen: Einerseits die pessimistische Lösung $u_0(b^k) = V_k - c$, andererseits die optimistische Lösung $u_1(b^k) = R_k$.

Lösung: Jede der beiden gezeigten Strategien ist lokal optimal:
(1) Für u_0 wird immer $s_0(x) = a$ gespielt, und dies ist lokal optimal.
(2) Für u_1 wird immer $s_1(x) = b$ gespielt, und dies ist lokal optimal.

Sie kennen das Problem *lokale vs globale Optimierung* aus der Analysis: Hier gilt $u_0 < u_1$; bei **globaler Optimierung** würde man also u_1 wählen. Bei **lokaler Optimierung** erlaubt s_0 keine Möglicheit der Verbesserung: Dies geschieht lokal, kurzsichtig, egoistisch: Jeder optimiert für sich! Das globale Optimum erreichen wir hier nur weitblickend, kooperativ.

⚠ In Fällen wie diesem gilt Bellmans Optimalitätsprinzip nicht! Unsere allgemeinen Werkzeuge versagen hier, wir müssen genauer hinschauen.

Frustration: Das obige Beispiel kennen Sie aus dem Alltag: „Ich würde gerne etwas verbessern, doch alleine kann ich gar nichts ausrichten.“ So auch hier, wenn jeder lokale Optimierer in $x \in X^\circ$ allein handelt.

Bemerkung: Weitere Bellman–Lösungen sind $u(b^k) = R_k + v(b^\infty)$. Die Konstante $v(b^\infty) \in \mathbb{R}$ ist dabei die (fiktive) Auszahlung im „unendlich fernen" Randpunkt b^∞. Wir vereinbaren hier kurzerhand $v(b^\infty) = 0$.

Aufgabe: Gibt es weitere Lösungen neben (u_0, s_0) und (u_1, s_1)?

Lösung: Nein. Sei $u : X \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Bellman–Gleichung und $s : X^\circ \to \{a, b\}$ eine (lokal-optimale) Strategie mit $u(x) = H(x, s(x), u)$. Gilt $s(b^j) = a$, so folgt $s(b^i) = a$ für alle $i \le j$. Somit wird entweder $s = s_0$ gespielt oder es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $s(b^i) = a$ für $i < k$ und $s(b^i) = b$ für alle $i \ge k$. Der Fall $k > 0$ ist nicht lokal-optimal, da die Alternative $s(b^{k-1}) = b$ lukrativer ist. Also muss $k = 0$ gelten und somit $s = s_1$.

Das Beispiel B1I ist raffiniert gebaut und notgedrungen nicht-artinsch. Für jeden artinschen Graphen können wir dank Rückwärtsinduktion B1F die Bellman–Gleichung rekursiv lösen, und diese Lösung ist eindeutig! Ist unser artinscher Graph Γ zudem lokal-endlich, so ist diese Lösung tatsächlich optimal dank B1H. In diesen günstigen Fällen geht alles gut. Es gibt einen zweiten Ausweg aus unserer Misslage: Diskontierung!

Aufgabe: Analysieren Sie das obige Beispiel B1I mit Diskont $\delta \in [0, 1[$. Bestimmen Sie die (dank Satz D2K) eindeutige beschränkte Lösung $u_\delta : X \to \mathbb{R}$ der Bellman–Gleichung $u_\delta = \Phi_\delta(u_\delta)$. Was gilt für $\delta \nearrow 1$?

Lösung: (1) Ist die Strategie $s_0(b^k) = a$ weiterhin lokal optimal? Nein! Wir vergleichen die Auszahlung $\alpha_k := r(b^k, a) + \delta v(b^k a) = \delta(V_k - c)$ mit $\beta_k := r(b^k, b) + \delta[r(b^{k+1}, a) + \delta v(b^{k+1} a)] = r_k + \delta^2(V_{k+1} - c)$. Die Differenz $\beta_k - \alpha_k = r_k + \delta(1 - \delta)c - \delta(V_k - \delta V_{k+1})$ ist positiv für hinreichend große $k \in \mathbb{N}$, denn $r_k, c > 0$ und $V_k - \delta V_{k+1} \searrow 0$. Es lohnt sich also (lokal!), von $s_0(b^k) = a$ auf b zu wechseln.

Im Extremfall $\delta = 1$ gilt $\beta_k - \alpha_k = r_k - v_k < 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, daher ist ausgehend von der Strategie s_0 keine lokale Verbesserung möglich.

(2) Ist die Strategie $s_1(b^k) = b$ weiterhin lokal optimal? Ja! Das Argument ist für alle Diskontfaktoren $\delta \in [0, 1]$ gleich: Jede lokale Abweichung verschlechtert die Auszahlung. Für alle $\delta \in [0, 1[$ erhalten wir also dieselbe Strategie $s_\delta = s_1$ mit der optimistischen Gewinnfunktion $u_\delta \nearrow u_1$ für $\delta \nearrow 1$.

🙂 Bei Diskontierung $\delta < 1$ gilt das Optimalitätsprinzip ganz allgemein für alle beschränkten Markov–Spiele auf beliebigen Markov–Graphen:

Satz D2N: Optimalitätsprinzip, allgemeiner diskontierter Fall

Sei (Γ, r, v) ein Markov–Spiel mit r, v beschränkt und $0 \le \delta < 1$.

Auf $E = E_v = \{\, u \in B(X, \mathbb{R}) \mid u|_{\partial X} = v \,\}$ nutzen wir die Operatoren $\Phi(u)(x) = \sup_{a \in A_x} H(x, a, u)$ und $\Phi_s(u)(x) = H(x, s(x), u)$ für $x \in X^\circ$.

Diese konvergieren gegen $u = \Phi(u)$ bzw. $u_s = \Phi_s(u_s)$ für $s \in S(\Gamma)$. Wir setzen punktweise $u_*(x) = \sup_{s \in S} u_s(x)$. Dann gilt $u_* = u$.

Beweis: (1) Wie in Satz D2M gilt $u_* \le u$. (2) Wir zeigen noch $u \le u_*$:

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ vorgegeben. Zu jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ wählen wir eine ε–optimale Aktion $s(x) \in A_x$, sodass $H(x, s(x), u) \ge u(x) - \varepsilon$ gilt.

Das bedeutet $u \le \Phi_s(u) + \varepsilon$, dank Diskontierung $\Phi_s(u) \le \Phi_s^2(u) + \delta\varepsilon$, per Induktion $u \le \Phi_s^n(u) + \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \delta^k = \Phi_s^n(u) + \varepsilon(1 - \delta^n)/(1 - \delta)$.

Für $n \to \infty$ erhalten wir $u \le u_s + \varepsilon/(1 - \delta) \le u_* + \varepsilon/(1 - \delta)$. Letzteres gilt für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Daraus folgt $u \le u_*$ $\boxed{\text{QED}}$

Im diskontierten Fall $0 \le \delta < 1$ sind alle Operatoren Φ_s und Φ kontraktiv. Für jede Strategie $s \in S = S(\Gamma)$ können wir Φ_s iterieren und erhalten:

$$\Phi_s^n(\tilde{u}) \to u_s$$

Dies können wir anschließend global optimieren und gewinnen so:

$$u_* = \sup_{s \in S} u_s$$

Umgekehrt können wir auch erst lokal optimieren und dann iterieren. Nach Definition gilt $\Phi = \sup_{s \in S} \Phi_s$, das heißt punktweise für alle $x \in X$:

$$\Phi(\tilde{u})(x) = \sup_{s \in S} \Phi_s(\tilde{u})(x) \overset{x \in X^\circ}{=} \sup_{a \in A_x} H(x, a, \tilde{u})$$

Wenn wir nun diesen Bellman–Operator Φ iterieren, so erhalten wir:

$$\Phi^n(\tilde{u}) \to u$$

Bellmans Optimalitätsprinzip besagt, unter der Voraussetzung $0 \le \delta < 1$, dass wir auf beiden Wegen dasselbe Ergebnis erhalten, kurz $u_* = u$.

Zusammenfassung zum Optimalitätsprinzip

Bellmans Optimalitätsprinzip betrachten wir rückblickend als

0 Vertauschung von Iteration/Kontraktion und Maximum/Supremum.

Aus der Analysis kennen Sie viele wichtige Sätze zur Vertauschung:

1 Folgengrenzwerte $\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{k,n} \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty} a_{k,n}$
2 Vertauschung von Ableitungen $\partial_x\partial_y f(x,y) \stackrel{?}{=} \partial_y\partial_x f(x,y)$
3 Ableitung und Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\partial_x f_n(x) \stackrel{?}{=} \partial_x \lim_{n\to\infty} f_n(x)$
4 Vertauschung von Reihen $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n} \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n}$
5 Reihen und Grenzwert $\lim_k \sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n} \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\lim_k a_{k,n}$
6 Reihen und Ableitung $\partial_x \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\partial_x f_n(x)$
7 Integrale $\int_{x\in X}\int_{y\in Y} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \stackrel{?}{=} \int_{y\in Y}\int_{x\in X} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
8 Integral und Ableitung $\partial_x \int_{y\in Y} f(x,y)\,\mathrm{d}y \stackrel{?}{=} \int_{y\in Y}\partial_x f(x,y)\,\mathrm{d}y$
9 Integral und Grenzwert $\lim_n \int_{x\in X} f_n(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{?}{=} \int_{x\in X}\lim_n f_n(x)\,\mathrm{d}x$

Übung: Geben Sie jeweils zwei interessante Gegenbeispiele. Anschließend wiederholen Sie Voraussetzungen, Satz und Beweis.

Konvergenz des Bellman–Operators

Wir nutzen hier möglichst einfache, zumeist hinreichende Bedingungen: r, v beschränkt und $\delta \in [0,1[$. Für $\delta = 1$ müssen wir genauer hinschauen!

Die Übungen geben konkretes und motivierendes Anschauungsmaterial. Dort können Sie in konkreten Beispielen auch $\delta = 1$ durchrechnen. Auch der folgende Satz D2o kann im Falle $\delta = 1$ genutzt werden.

Die Konvergenzfrage ist ähnlich zur Theorie komplexer **Potenzreihen**: Für jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ definieren wir den **Konvergenzradius**

$$\boxed{\rho := 1/\limsup \sqrt[n]{|a_n|}.}$$

Für $|z| < \rho$ konvergiert die Reihe absolut, für $|z| > \rho$ divergiert sie. Auf dem Rand $|z| = \rho$ ist alles möglich; dazu gibt es keine allgemeine Aussage. Antworten über das subtile Verhalten auf dem Kreisrand gibt die Theorie der Fourier–Reihen. Allgemein gehört die Konvergenz solcher Reihen zu den schwierigsten Fragen der Analysis.

Auf hoher See und am Konvergenzkreisrand sind wir alle in Gottes Hand.

Satz D2O: punktweise Konvergenz des Bellman–Operators

Sei (Γ, r, v) ein Markov–Spiel, Γ lokal-endlich, r, v beschränkt und $r \le 0$.

(1) Sei $F = \{\, u_s \in E \mid s \in S,\ \Phi_s(u_s) = u_s \,\}$. Ist $u_* = \sup F$ beschränkt, dann ist u_* der größte Fixpunkt des Bellman–Operators $\Phi : E \to E$.

(2) Sei $s \in S(\Gamma)$ eine Strategie mit $\Phi_s(u_*) = u_*$. Konvergiert $\Phi_s^n(u) \to u_*$ für jeden Startwert $u \in E$, dann konvergiert auch Φ gegen u_*.

☺ Anders als im vorigen Satz D2N verlangen wir keine Diskontierung mit $\delta \in [0, 1[$. Der Satz D2O behandelt vielmehr den Randfall $\delta = 1$.

☺ Aussage (1) ist eine schwache Fassung des Optimalitätsprinzips. Hat der Operator $\Phi : E \to E$ zudem nur einen Fixpunkt u, so gilt $u = u_*$.

☺ Aussage (2) ist eine starke Fassung analog zum obigen Satz D2M: Φ konvergiert für jeden Startwert gegen den einzigen Fixpunkt u_*.

☺ Die Einschränkung $r \le 0$ scheint zunächst nicht besonders elegant, doch in manchen Anwendungen wie §D3 ist sie recht natürlich.

Beweis: (0) Zu jedem Fixpunkt $u = \Phi(u)$ in E existiert eine Strategie $s \in S = S(\Gamma)$ mit $\Phi_s(u) = u$. Demnach gilt $u \in F$ und somit $u \le u_*$

(1) Für jedes $u_s \in F$ gilt $u_* \ge u_s$, also $\Phi(u_*) \ge \Phi(u_s) \ge \Phi_s(u_s) = u_s$. Daraus folgt $\Phi(u_*) \ge u_*$, also $u_* \le \Phi(u_*) \le \Phi^2(u_*) \le \dots \nearrow u : X \to \bar{\mathbb{R}}$. Wir zeigen nun, dass $u : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ beschränkt ist, also $u \in E$ gilt.

Für $c \ge \max u_*$ und $\hat{u} = v\,\mathbf{I}_{\partial X} + c\,\mathbf{I}_{X^\circ}$ gilt $u_* \le \hat{u}$, also $\Phi(u_*) \le \Phi(\hat{u}) \le \hat{u}$, letzteres dank $r \le 0$. Per Induktion erhalten wir $\Phi^n(u_*) \le \hat{u}$, also $u \le \hat{u}$. Dank Stetigkeit folgt $\Phi(u) = u$. Dank (0) gilt $u \le u_*$, also $u = u_* = \Phi(u_*)$.

(2a) Aus $\hat{u} \ge \Phi(\hat{u}) \ge \Phi(u_*) = u_*$ folgt $\hat{u} \ge \Phi(\hat{u}) \ge \Phi^2(\hat{u}) \ge \dots \searrow \bar{u} \ge u_*$. Dank Stetigkeit folgt $\Phi(\bar{u}) = \bar{u}$. Dank (1) folgt $\bar{u} = u_*$.

(2b) Gegeben sei $u \in E$. Wir wählen $\hat{u} = v\,\mathbf{I}_{\partial X} + c\,\mathbf{I}_{X^\circ} \ge u, u_*$ wie oben. Dann gilt $\Phi_s(u) \le \Phi(u) \le \Phi(\hat{u})$, per Induktion $\Phi_s^n(u) \le \Phi^n(u) \le \Phi^n(\hat{u})$. Nach Voraussetzung gilt $\Phi_s^n(u) \to u_*$. Dank (2a) gilt auch $\Phi^n(\hat{u}) \to u_*$. Daraus folgt die behauptete Konvergenz $\Phi^n(u) \to u_*$. $\boxed{\text{QED}}$

Punktweise Konvergenz des Bellman–Operators

Der Fixpunktsatz von Banach fordert eine δ–Kontraktion, also eine starke Voraussetzung, garantiert dafür aber gleichmäßige Konvergenz mit expliziter Fehlerschranke als extrem nützliche Schlussfolgerung. Das ist der Idealfall, an dem wir uns orientieren möchten.

Bellmans Optimalitätsprinzip formulieren wir entsprechend, je nach Anwendung, unter stärkeren und schwächeren Voraussetzungen. Der bequemste Fall ist die Diskontierung mit $\delta \in [0, 1[$ (Satz D2N). Diese strenge Voraussetzung ist leider nicht immer gegeben.

Für Bellmans Optimalitätsprinzip D2M, genauer für die Ungleichung $u_* \le u$, genügt uns bescheidener bereits die punktweise Konvergenz $\Phi^n(\tilde{u}) \to u$. Genau hierfür bietet Satz D2O ein hinreichendes Kriterium. Das kann in Anwendungen mit $\delta = 1$ ein praktisches Hilfsmittel sein.

Aus Erfahrung empfehle ich, diese schönen Sätze zunächst einmal zur Kenntnis zu nehmen und dann konkrete Anwendungen zu untersuchen. In einem zweiten Durchgang möchten Sie dann stärkere Werkzeuge und werden gerne auf hilfreiche Sätze und Beweise zurückkommen.

Ausblick auf erfolgreiche Anwendungen

In Markov–Spielen steckt viel schöne Mathematik!
Sie sind sehr einfach gebaut und doch vielseitig einsetzbar.
Zur Programmierung nutzen wir vor allem endliche Markov–Graphen, doch auch der unendliche Fall ist mathematisch reizvoll und nützlich.

Markov–Spiele (aka Markov–Entscheidungsprozesse) finden Sie daher in zahlreichen Anwendungen der Ökonomik und Finanzmathematik:

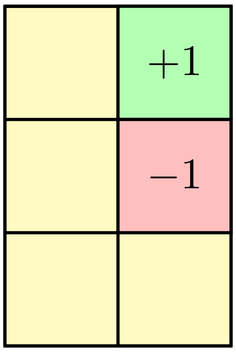
Investition vs Konsum optimieren: Geld sparen oder ausgeben?
Anbau vs Abbau optimieren: Bäume pflanzen oder fällen?
Anlage optimieren: Aktienportfolio optimal steuern?
Allgemein: kurzfristiger oder langfristiger Nutzen?

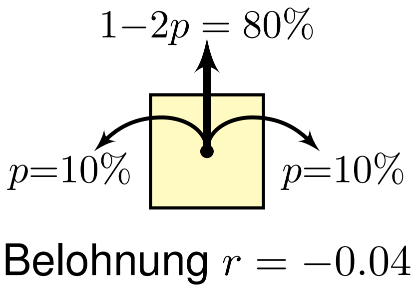
Markov–Spiele finden Sie ebenso in der künstlichen Intelligenz, insbesondere maschinellem Lernen, etwa bestärkendem Lernen:

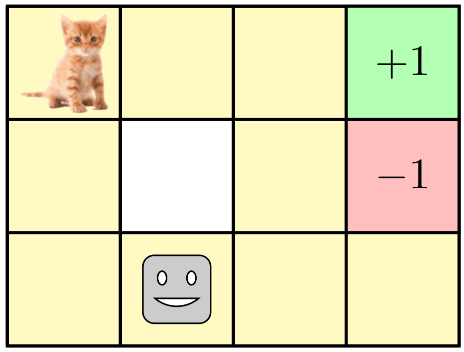
Logistik / Routenplanung: Wege minimieren, Nutzen maximieren.
Strategischer Akteur / autonomes Fahrzeug in stochastischer Umwelt:
Aus Erfahrung lernen, Strategie optimieren, Exploration vs Exploitation.
Aufzugsteuerung: Ja, es soll auch intelligente Aufzüge geben!

Robi the Robot und Machine Learning

Robi, der Saugroboter, lebt in einer 2×3–Wohnung (links), später in einer 4×3–Wohnung mit einem Rundgang (rechts).







Nutzen $\sum_{t=0}^{T-1} \delta^t r_t + \delta^T v(x_T)$ mit $x_T \in \partial X$ und Diskont $\delta \in [0,1]$.

In jedem Zeitschritt wählt Robi eine Richtung; diese fährt er mit Wkt 80%, mit Wkt $p = 10\%$ links oder rechts dazu, weil z.B. die Katze ihn schubst. Falls sich in Fahrtrichtung eine Wand befindet, bleibt er einfach stehen.

Jeder Zeitschritt bringt eine Belohnung $r \in \mathbb{R}$, etwa $r < 0$ für Verbrauch, egal ob oder wohin er fährt. Wenn er die Ladestation oder die Treppe erreicht, endet seine Fahrt mit der Auszahlung $+1$ bzw. -1.

Robi the Robot und Machine Learning

Dieses beliebte Lehrbeispiel des maschinellen Lernens stammt aus
📖 S. Russell, P. Norvig: *Artificial Intelligence: A Modern Approach.* Addison Wesley (3rd ed.) 2016 (Kapitel 17: Making complex decisions)

In den letzten Jahren hat dieser Ansatz großen Zulauf erhalten: Es gibt einen Massenmarkt, denn Geräte sind preiswert und alltagstauglich. Zudem genügen in vielen einfachen Projekten bereits die Grundlagen der Theorie für beachtliche Anwendungserfolge. Dank Softwarepaketen ist auch die Hürde in der Programmierung inzwischen recht gering.

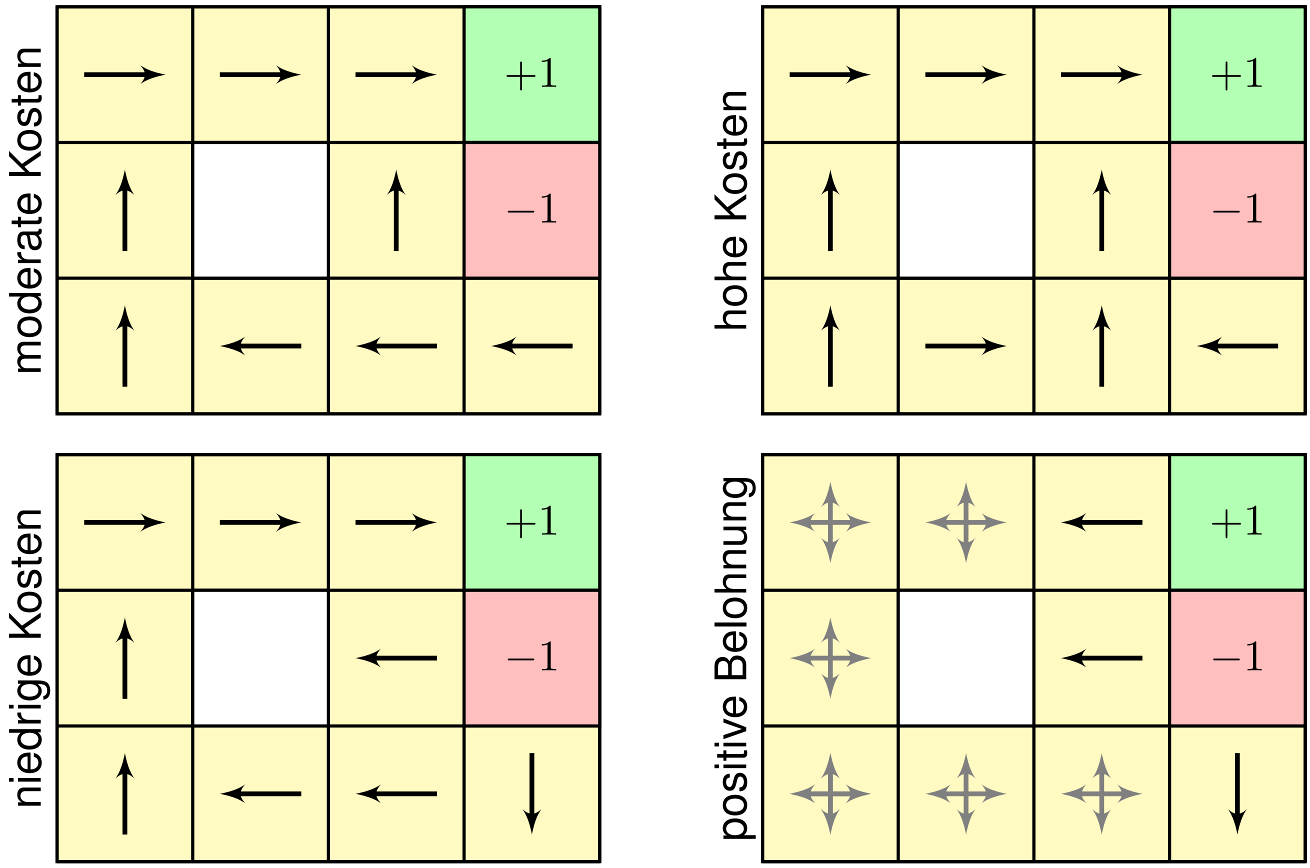
🙂 Sie können und sollen mit diesem Übungsbeispiel konkret rechnen und numerische Erfahrungen sammeln: Sie finden eine Umsetzung als Tabellenkalkulation unter `eiserm.de/lehre/Spieltheorie/Robi.ods`.

Selbst in diesem einfachen Beispiel sind die Strategien überraschend. Spielen Sie etwas mit den Parametern, Belohnung und Auszahlungen! Wie ändert das Robis Verhalten? Begründung? Interpretation? Wann und warum konvergiert der Bellman–Operator?

Übung: Berechnen / implementieren Sie ebenso die 4×3–Wohnung.

Robi the Robot und Machine Learning

Robis Verhalten ist erstaunlich komplex, abhängig von den Kosten r:



Robi the Robot und Machine Learning

🙂 Robi handelt strategisch, er sucht die Balance zwischen Belohnung und Risiko. Das ist durchaus typisch für viele realistische Anwendungen.

Bei moderaten Kosten lohnt sich für Robi der Umweg des Rundgangs. Bei hohen Kosten ist der direkte Weg besser. Probieren Sie es aus!

Bei geringen Kosten, r knapp unter Null, kann Robi sogar garantieren, nie die Treppe hinunterzufallen: Er kann ihr ganz vorsichtig ausweichen, auch wenn er sich öfter die Nase an der Wand stößt und länger fährt.

Der Fall $r = 0$ bietet die ersten Überraschungen: Probieren Sie es!

Bei positiver Belohnung $r > 0$ will Robi nie aufhören, auch nie aufladen, da er beliebig Nutzen generieren kann, indem er fröhlich umherfährt. Er ist wie auf Drogen, *high on reward*, als gäbe es kein morgen mehr.

Bei zu hohen Kosten jedoch ist Robis Leben so miserabel, dass er stets den nächsten Ausgang wählt, notfalls stürzt er sich die Treppe hinunter. Das ist zwar traurig, aber unter diesen Bedingungen das beste für ihn.

⚠ Die Wahl des Belohnugssystems entscheidet über das Verhalten. Alle Trainer / Lehrer / Eltern wissen das: *Choose rewards wisely!*

Gewinniteration / *value iteration*

Zu (Γ, r, v) betrachten wir $\Phi : E \to E$ sowie $\Phi_s : E \to E$ für $s \in S(\Gamma)$.
Wir nehmen an, dass wir zu Φ eine Kontraktionskonstante k kennen.

Algo D3A: Gewinniteration / *value iteration*

Global: Markov–Spiel (Γ, r, v), Kontraktionskonstante $k \in [0, 1[$
Eingabe: Eine initiale Erwartung $u \in E$ und eine Toleranz $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$
Ausgabe: Eine ε–optimale Erwartung $u \in E$ und Strategie $s \in S(\Gamma)$

```
repeat
    kopiere u' ← u und aktualisiere u ← Φ(u)
until k/(1−k) |u − u'| ≤ ε
for x ∈ X° do wähle s(x) ∈ Arg max_{a∈A_x} H(x, a, u)
return (u, s)
```

Aufgabe: Warum endet dieser Algorithmus und ist korrekt?

Lösung: Beides verdanken wir Banachs Fixpunktsatz D2A!

⚠ Die abgelesene Strategie s ist im Allgemeinen noch nicht optimal!
Um dies zu garantieren, muss die Näherung hinreichend gut sein.

Strategie vs Gewinniteration

Aufgabe: Wie klein sollten wir $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ wählen, damit wir aus jeder ε–Näherung $\tilde{u}$ alle optimalen Strategien $s \in S(\Gamma)$ ablesen können?

Lösung: Sei $u = \Phi(u)$ die exakte Lösung. Gegeben ist $|\tilde{u} - u| \le \varepsilon$.
Zu $x \in X^\circ$ sei $\{\, u(x) - H(x, a, u) \mid a \in A_x \,\} = \{0 = \lambda_x^0 < \lambda_x^1 < \dots\}$.
Wir nennen $\lambda := \min\{\, \lambda_x^1 \mid x \in X^\circ \,\}$ die **Spektrallücke** von (Γ, r, v).
Für jede Aktion $a \in A_x$ ist $\tilde{u}(x) - H(x, a, \tilde{u})$ gegeben durch

$$\big[\tilde{u}(x) - u(x)\big] + \big[u(x) - H(x, a, u)\big] + \big[H(x, a, u) - H(x, a, \tilde{u})\big]$$

Für $a \in A_x$ sub/optimal gilt $\tilde{u}(x) - H(x, a, \tilde{u}) \ge \lambda - 2\varepsilon$ bzw. $\le 2\varepsilon$.
Für $4\varepsilon < \lambda$ können wir so aus $\tilde{u}$ alle optimalen Strategien s ablesen.

Aufgabe: Die Schranke λ nutzt die exakte, unbekannte Lösung u.
Können Sie eine Schranke finden, die nur die Näherung $\tilde{u}$ nutzt?

Lösung: Zu $x \in X^\circ$ und $A_x = \{a_0, \dots, a_\ell\}$ sei $\mu_x^i = \tilde{u}(x) - H(x, a_i, \tilde{u})$ sortiert gemäß $\mu_x^0 \le \mu_x^1 \le \dots \le \mu_x^\ell$. Wir setzen $\mu := \min\{\, \mu_x^1 \mid x \in X^\circ \,\}$.
Gilt $2\varepsilon < \mu$, so können wir die optimale Strategie s aus $\tilde{u}$ ablesen:
Für $a \in A_x$ sub/optimal gilt $\tilde{u}(x) - H(x, a, \tilde{u}) \ge \mu > 2\varepsilon$ bzw. $\le 2\varepsilon$.

Strategieiteration / *policy iteration*

Algo D3B: Strategieiteration / *policy iteration*

Global: Das endliche Markov–Spiel (Γ, r, v)
Eingabe: Eine initiale Strategie $s \in S(\Gamma)$
Ausgabe: Eine optimale Strategie $s \in S(\Gamma)$ und ihre Erwartung $u \in E$

---

repeat
  löse $u = \Phi_s(u)$ und setze $\mathrm{done} \leftarrow \mathrm{true}$
  for $x \in X^\circ$ do
    if $\max_{a \in A_x} H(x, a, u) > H(x, s(x), u)$ then
      wähle $s(x) \in \operatorname{Arg\,max}_{a \in A_x} H(x, a, u)$ und setze $\mathrm{done} \leftarrow \mathrm{false}$
until done
return (s, u)

Aufgabe: Warum endet dieser Algorithmus und ist korrekt?

Lösung: Die Strategiemenge $S = S(\Gamma)$ ist endlich, und es gilt $u_0 \lneqq u_1 \lneqq u_2 \lneqq u_3 \lneqq \dots$ bis schließlich $u = \Phi_s(u) = \Phi(u)$.

Ist Φ zudem kontraktiv, so ist u die eindeutige Lösung.

kombinierte Strategie-und-Gewinniteration

Oft kombiniert man die Strategieiteration mit der Gewinniteration:

Algo D3C: kombinierte Strategie-und-Gewinniteration

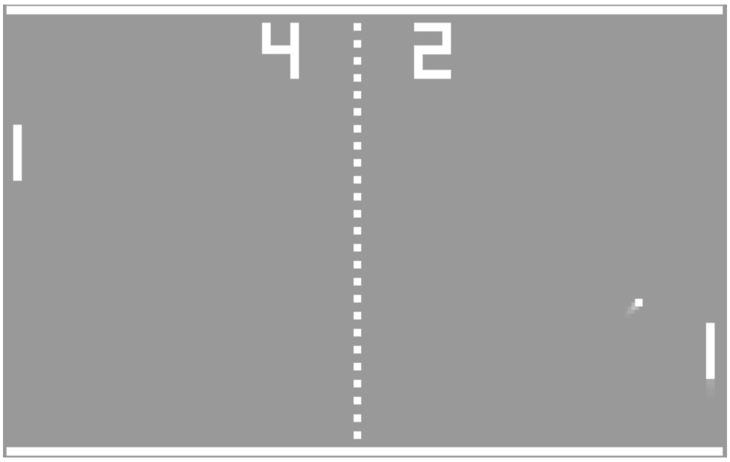
Global: Das Markov–Spiel (Γ, r, v)
Eingabe: Initiale Strategie $s \in S(\Gamma)$ und Erwartung $u \in E$
Ausgabe: Eine verbesserte Strategie s und aktualisierte Erwartung u

---

repeat
  setze $u \leftarrow \Phi_s^m(u)$ und $\mathrm{done} \leftarrow \mathrm{true}$
  for $x \in X^\circ$ do
    if $\max_{a \in A_x} H(x, a, u) > H(x, s(x), u)$ then
      wähle $s(x) \in \operatorname{Arg\,max}_{a \in A_x} H(x, a, u)$; setze $\mathrm{done} \leftarrow \mathrm{false}$
until done
return (s, u)

Übung: Wenn Sie möchten, können Sie diese Methode (und Varianten) mathematisch untersuchen, implementieren und experimentell erproben. Wird die Theorie schwächer, so muss eben die Erfahrung ausgleichen.

Pinball Wizard (frei nach *The Who*, 1969)



Pong
(Atari 1972)

zwei Spieler
deterministisch

Breakout
(Atari 1976)

ein Spieler
probabilistisch

Pinball Wizard (frei nach *The Who*, 1969)

Die **Künstliche Intelligenz** feiert inzwischen beachtliche Erfolge in Alltagsprodukten, von Spracherkennung bis autonomen Fahrzeugen.

Durch **bestärkendes Lernen** [*reinforcement learning*] und ähnlichen Algorithmen kann ein strategischer Akteur (Agent, Computer, Roboter) selbständig aus Erfahrung lernen und immer bessere Strategien finden.

Ein amüsant-spektakuläres Beispiel sind Arcade-Spiele: Das Startup **DeepMind** (`en.wikipedia.org/wiki/DeepMind`) gehört inzwischen zu Google und hat diese grundlegende Idee sehr erfolgreich umgesetzt.

Mnih et al: *Human-level control through deep reinforcement learning.* Nature 518 (2015) 529–533, `www.nature.com/articles/nature14236`

Als zweiminütiges Video `youtu.be/V1eYniJ0Rnk` oder ausführlicher als schön geschriebener Artikel `www.sciencemag.org/news/2015/02/artificial-intelligence-bests-humans-classic-arcade-games`

Arcade-Spiele sind ein gutes Testfeld: weder zu einfach noch zu schwer. Die Belohnungen sind zumeist dicht genug, um das Lernen zu fördern.

Einige Besonderheiten des **bestärkenden Lernens**:

- **Unsupervised:** Es gibt keine Anleitung und keinen Trainer
  Der Spieler lernt nur aus den Signalen seiner Belohnungen.
- **Exploration:** Aktionen beeinflussen zukünftige Informationen.
  Der Spieler muss aktiv interagieren und erforschen.
- **Delayed Feedback:** Aktionen bewirken spätere Belohnungen.
  Der Zeitablauf des Spiels ist ein wesentlicher Faktor.

Der Spieler muss seine Aktionen wählen und hierzu einen Kompromiss finden zwischen der **Erkundung** [*exploration*] neuer Möglichkeiten und der **Nutzung** [*exploitation*] bewährter Wege. Wie im richtigen Leben!

Die **sofortigen Belohnungen** leiten den Spieler in seinem Lernprozess: Er sucht die Balance zwischen kurzfristigem und langfristigem Nutzen. Nur mit gutem **Belohnungssignal** macht das Lernen Fortschritte.

Bei **allzu seltenen Belohnung** r oder endlastigen Auszahlungen v sind die Fortschritte recht langsam. In großen Umgebungen (Spielgraphen) müssen die Zustände geeignet zusammengefasst / abstrahiert werden.

Das grundlegende Lehrbuch zu bestärkendem Lernen:

Richard S. Sutton, Andrew G. Barto: *Reinforcement Learning.*
The MIT Press (2nd ed.) 2018 (hier speziell §6.5: Q–learning),
online verfügbar unter `incompleteideas.net/book/RLbook2018.pdf`

Das folgende Vorlesungsskript ist deutlich kürzer und knapper:

Csaba Szepesvári: *Algorithms for Reinforcement Learning*, online
`sites.ualberta.ca/~szepesva/papers/RLAlgsInMDPs-lecture.pdf`

Es gibt exzellente Online-Kurse zu diesem Thema, zum Beispiel von David Silver: *Intro to Reinforcement Learning*, `youtu.be/2pWv7GOvuf0`.

Ich kann der Versuchung nicht widerstehen und will Ihnen einen ganz kurzen Ausblick dieses aktuellen und faszinierenden Gebiets skizzieren: Es verbindet Informatik und Mathematik, Lerntheorie und Spieltheorie, und ist im Ingenieurwesen und seinen Anwendungen angekommen.

🙂 Angenommen, wir kennen zu (Γ, r, v) die Gewinnfunktion $u = \Phi(u)$. Im Zustand $x \in X^\circ$ bewerten wir die Qualität jeder Aktion $a \in A_x$ durch

$$q(x,a) = H(x,a,u) := \sum_{y \in X} p(x,a,y)\big[r(x,a,y) + \delta u(y)\big].$$

Optimalitätsprinzip: Jede optimale Aktion $a \in A_x$ maximiert $q(x,a)$.

Angenommen, der Spieler kennt anfangs nur den Markov–Graphen Γ. Wie kann er die Bewertungen q und u spielend-explorativ erlernen?

🙂 Als Näherung für q nutzt er sein bisheriges **Erfahrungswissen**:

$$Q \,:\, A \to \mathbb{R} \,:\, (x,a) \mapsto Q(x,a)$$

Jeden aktiven Zustand $x \in X^\circ$ bewertet er näherungsweise durch

$$U \,:\, X \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto U(x) = \max_{a \in A_x} Q(x,a).$$

Im aktiven Zustand $x \in X^\circ$ wählt der Spieler eine Aktion $a \in A_x$ und gelangt zum Zustand y mit Belohnung $R = r(x,a,y)$. Er aktualisiert

$$Q(x,a) \leftarrow (1-\alpha)\underbrace{Q(x,a)}_{\text{alte}} + \alpha \underbrace{\big[R + \delta U(y)\big]}_{\text{neue Erfahrung}} \quad \text{und} \quad U(x) \leftarrow \max_{a \in A_x} Q(x,a).$$

Der Spieler lernt durch seine Erfahrung mit der **Lernrate** $\alpha \in \,]0,1[$. Sein **Erfahrungswissen** Q und U wird dabei wie folgt aktualisiert:

Algo D3D: Aktualisierung von Q und U

Global: Die Bewertungen $Q : A \to \mathbb{R}$ und $U : X \to \mathbb{R}$
Eingabe: Die Aktion $a : x \to y$ mit Belohnung $R \in \mathbb{R}$.

1: Aktualisiere $Q(x,a) \leftarrow (1-\alpha)Q(x,a) + \alpha\big[R + \delta U(y)\big]$
2: Aktualisiere $U(x) \leftarrow \max\{U(x), Q(x,a)\}$

Ist y terminal, so erhält er zudem $V = v(y)$ und aktualisiert $U(y) \leftarrow V$. Damit endet diese **Episode**, die Trajektorie dieses Spieldurchgangs. Zur weiteren Verbesserung werden noch weitere Episoden gespielt.

Der hier beschriebene Algorithmus heißt **Q–Lernen** [*Q–learning*]. Der Buchstabe „Q“ steht für die Funktion $Q : A \to \mathbb{R}$, die die Qualität der Aktionen bewertet und in diesem Algorithmus die Hauptrolle spielt.

🙂 Erhofft ist die rasche **Konvergenz** $Q_t \to q$ und $U_t \to u$ für $t \to \infty$. Dazu gibt es mathematische Sätze und eindrückliche praktische Erfolge.

Bestärkendes Lernen / *reinforcement learning*

Maschinelles Lernen nutzt Algorithmen, die aus Erfahrungen lernen, mit Hilfe statistischer Methoden auf Trainingsdaten, hier Spieldaten.

Zwei grundlegende Algorithmen sind **Gewinniteration** [*value iteration*] und **Strategieiteration** [*policy iteration*], wie oben zusammengefasst. Sie setzen allerdings voraus, dass das ganze Spiel (Γ, r, v) bekannt ist; dann stehen alle genannten mathematischen Werkzeuge zur Verfügung.

Beim **bestärkenden Lernen** [*reinforcement learning*] erlernt der Agent selbständig eine Strategie. Ihm wird anfangs nur der Graph Γ gegeben, aber keine Hinweise, welche Aktion in welcher Situation die beste wäre. Noch realistischer: Er muss auch den Graphen Γ erst selbst erkunden!

Reines Beobachten genügt in diesem Lernprozess nicht, Informationen gewinnt der Spieler nur durch **Interaktion**. Alle seine Aktionen $a : x \to y$ führen zu Belohnungen, aus diesen approximiert er die Qualität $Q(x, a)$ der Aktion und den Nutzen $U(x) = \max_{a \in A_x} Q(x, a)$ des Zustands x.

Der **Algorithmus** stammt von Watkins (1989) und Bozinovski (1981). Seine **Konvergenz** wurde bewiesen von Watkins und Dayan (1992).

Bestärkendes Lernen / *reinforcement learning*

Die Grundidee stammt aus der **Psychologie** und wurde bereits seit den Anfängen der Kybernetik verwendet, so etwa von Marvin Minsky in seiner Dissertation: *Neural Nets and the Brain Model Problem.* (1954)

Bestärkendes Lernen ist inzwischen ein großes interdisziplinäres Gebiet und verbindet Informatik, Optimierung und Ökonomik mit Psychologie und Neurowissenschaften. Verfolgt werden dabei zwei Ziele:

(1) Bei realen Lebewesen soll das beobachtete (Lern)Verhalten durch geeignete Modelle möglichst gut erklärt werden (deskriptiv, explikativ).

(2) Künstliche Agenten sollen mit ihrer Umwelt strategisch interagieren und daraus möglichst effizient lernen (normativ, konstruktiv).

Übung: Wenn Sie gerne programmieren, dann können Sie unsere Miniaturbeispiele implementieren und durch bestärkendes Lernen lösen.

Allgemein lohnt sich hierbei eine möglichst generische Problemlösung, die allgemein Markov–Spiele behandelt. Sie können dabei viel lernen!

Wenn Sie mit den Grundideen (und auch Problemen) vertraut sind, dann lohnt sich ein Blick auf die umfangreichen Softwarepakete.

Kapitel E

Strategische Spiele und Nash–Gleichgewichte

L'enfer, c'est les autres.

[Die Hölle, das sind die anderen.]

Jean-Paul Sartre (1905-1980), *Huis Clos*

Inhalt dieses Kapitels E

Motivation und Überblick

Im letzten Kapitel D über Markov–Spiele ging es nur um einen Akteur, der sein strategisches Handeln optimiert. In diesem Kapitel beginnen wir die Modellierung und systematische Untersuchung von Spielen mit zwei oder mehr Spielern. Das offenbart völlig neue Phänomene.

Wir definieren hierzu zunächst **strategische Spiele** in Normalform und erklären den Begriff des **Nash–Gleichgewichts**. Solche Gleichgewichte beschreiben **mögliches rationales Verhalten**. Die Definition ist einfach, aber die Interpretation bedarf einiger Übung und zahlreicher Beispiele.

Im Allgemeinen hat ein gegebenes Spiel keine Nash–Gleichgewichte. Dies ändert sich durch seine Fortsetzung zu **gemischten Strategien**. Der **Satz von Nash** (E1F) garantiert: Jedes endliche reelle Spiel hat mindestens ein Nash–Gleichgewicht in gemischten Strategien.

Hieraus erhalten wir unmittelbar John von Neumanns **Hauptsatz für Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele**: Die Nash–Gleichgewichte entsprechen hier den Min-Maximierern und den Max-Minimierern. Die **eindeutige Gleichgewichtsauszahlung** definiert den Wert des Spiels.

Motivation und Überblick

Die **Berechnung** gelingt ad hoc in einigen Spezialfällen und allgemein dank Linearer Programmierung, die wir im nächsten Kapitel erklären.

Eine weitere nützliche Berechnungsmethode ist das Erkennen und Eliminieren von (strikt) **dominierten Strategien**. Die Idee ist leicht, doch die Feinheiten sind subtil und müssen sauber ausgeführt werden. Ich betone dies, weil es erfahrungsgemäß oft falsch angewendet wird.

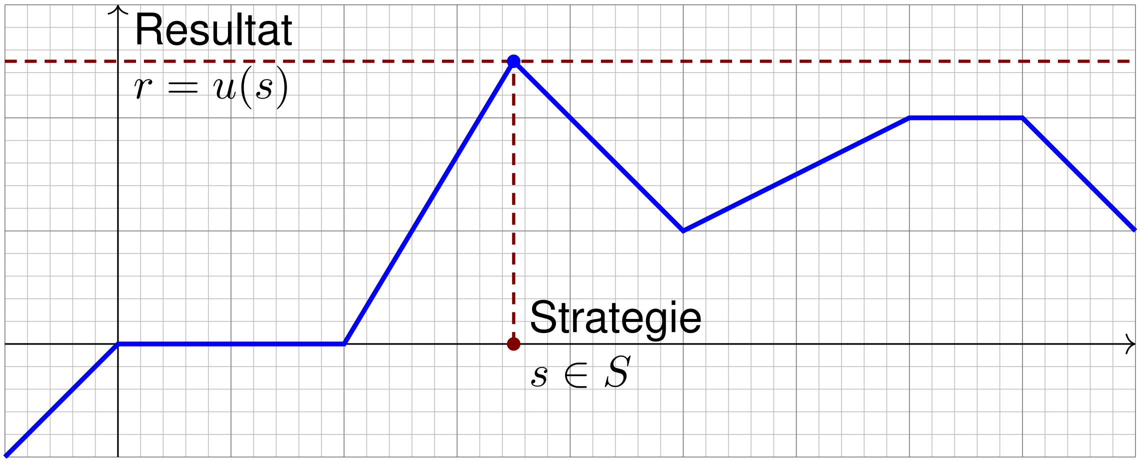
Ein vorrangiges Ziel dieses Kapitels ist daher, eine saubere und tragfähige **Notation** einzuführen. Über viele der beobachteten Phänomene können wir nur damit überhaupt erst sprechen.

Anschließend wollen wir die grundlegenden **Sätze** präzise formulieren und beweisen und als **Rechenregeln** gebrauchsfertig bereitstellen. Das ist manchmal mühsam, aber immer lohnend. In der Literatur wird dies unterschiedlich streng gehandhabt. Wir versuchen unser bestes.

Mit dieser Grundausstattung an **Werkzeug** gerüstet untersuchen wir zahlreiche Anwendungen in diesem und allen folgenden Kapiteln und vor allem in den Gruppenübungen. Üben Sie sich daran!

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

Ein **Spiel** mit nur einem Spieler ist eine Funktion $u : S \to R : s \mapsto u(s)$.



Hierbei ist S die Menge der **Strategien**, die der Spieler wählen kann, und R ist die Menge möglicher **Resultate**, linear geordnet durch $\leq$.

Wir nennen u die **Nutzenfunktion**. Meist sind R die reellen Zahlen, ebenso möglich ist jede linear (prä)geordnete Menge $(R, \leq)$.

Der Spieler sucht seine Strategie $s \in S$ so, dass sein Resultat $r = u(s)$ maximal ist, also $u(a) \leq u(s)$ für alle alternativen Strategien $a \in S$ gilt.

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall eines einzigen Spielers. Gegeben ist die Menge S der möglichen Strategien und hierauf die Nutzenfunktion $u : S \to R$. Der Spieler will nun $s \mapsto u(s)$ maximieren. Wenn die Menge S klein ist, dann genügt ausprobieren. Ist die Menge S hingegen groß und unübersichtlich, dann kann die Optimierung beliebig schwierig werden, siehe das Problem des Handlungsreisenden oder Machine Learning.

Sie kennen einfache Beispiele aus der Schule und lernen Optimierung durch Kurvendiskussion. Als Kontrast hierzu: Unser Kiosk-Beispiel ist ein kombinatorisches Optimierungsproblem; bei einer Lizenz ist es klar und langweilig, bei zweien leicht, bei dreien bereits knifflig und überraschend. Optimiert wurde dort übrigens keine reelle Zahl, sondern das Ergebnis (Marktanteil, Nähe zur Straße) in lexikographischer Ordnung.

Allgemein kann u alles mögliche messen: Geld, Gewinn maximieren, Kosten minimieren, aber auch Einfluss, Ansehen, soziale Stellung, Gerechtigkeit, Umweltschutz, Tierschutz, Glück, Zufriedenheit, etc. Nahezu jede menschliche Aktivität lässt sich so betrachten!

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

$s_2 \in S_2 =$

A \ B	Schere	Stein	Papier
Schere	0 / 0	-1 / $+1$	$+1$ / -1
Stein	$+1$ / -1	0 / 0	-1 / $+1$
Papier	-1 / $+1$	$+1$ / -1	0 / 0

$s_1 \in S_1 =$

$u_2(s_1, s_2)$
$u_1(s_1, s_2)$

Definition E1A: strategisches Spiel (statisch, in Normalform)

Ein **strategisches Spiel** mit n Spielern ist eine Funktion

$$u : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \to R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$$
$$s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \mapsto (u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)) = u(s).$$

Hierbei ist S_i die Menge der **Strategien**, die Spieler i wählen kann, und R_i ist die Menge seiner **Resultate**, linear geordnet durch $\leq_i$.

Was ist ein Spiel mathematisch gesehen?

Wir wollen Spiele darstellen: einheitlich, übersichtlich, knapp, präzise. Jeder Spieler wählt seine Strategie $s_i \in S_i$ unabhängig von den anderen. Sein Gewinn ist $u_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$, diesen versucht er zu maximieren. Meist sind R_i die reellen Zahlen, und wir nennen u_i die **Nutzenfunktion** für Spieler i. Allerdings kontrolliert der Spieler i nur seine Strategie s_i, nicht jedoch die Strategien $s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n$ der Gegenspieler!

Als konkretes, einfaches Beispiel betrachten wir *Schere-Stein-Papier*. Dies ist ein **Nullsummenspiel**, d.h. stets gilt $u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0$. Es ist zudem **symmetrisch**, d.h. $S_1 = S_2$ und $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$.

Vorteile dieses Modells: Unsere Definition fasst alle zuvor betrachteten Spiele zusammen. Wir haben nun einen gemeinsamen Rahmen, um allgemeine Begriffe und Werkzeuge zu entwickeln! Gewisse Argumente, Rechnungen und Tricks treten immer wieder auf. Wir können sie nun allgemein erklären, präzise formulieren, und ihre Gültigkeit beweisen.

Einschränkungen: Unsere Definition berücksichtigt noch nicht den zeitlichen Verlauf, zufällige Einflüsse oder unvollständige Information.

Was ist ein Nash–Gleichgewicht?

Das Spiel „Straßenverkehr“

A \ B	links	rechts
links	$+1$, $+1$	-8, -8
rechts	-8, -8	$+1$, $+1$

Feiglingspiel / *chicken game*

A \ B	einlenken	gradaus
einlenken	2, 2	1, 5
gradaus	5, 1	-9, -9

Ein Strategiepaar (s_1, s_2) ist **instabil** für Spieler i, falls er sein Ergebnis $u_i(s_1, s_2)$ verbessern kann, indem er einseitig seine Strategie s_i ändert.

Definition E1B: Nash–Gleichgewichte

Wir nennen (s_1, s_2) **Nash–Gleichgewicht**, falls kein Spieler aus eigener Kraft sein Ergebnis verbessern kann, indem er seine Strategie ändert.

Nash–Gleichgewichte erklären zunächst nur, was **rational möglich** ist. Manch Spiel hat mehrere Gleichgewichte, erfordert also Koordinierung. Tradition / Konvention / Erziehung / Moral können eine Auswahl treffen.

Was ist ein Nash–Gleichgewicht?

Spiele sind im Allgemeinen sehr komplex. Zur Vereinfachung betrachten wir zunächst die allereinfachsten: **strategische Spiele in Normalform**. Wir können jedes Spiel in diese Grundform bringen; dabei geht meist Information verloren. Wir betrachten anschließend Verfeinerungen.

Grundlegend für Spiele ist der Begriff des **Nash–Gleichgewichts**. Für seine bahnbrechenden Arbeiten hierzu aus den 1950er Jahren bekam John Nash 1994 den Wirtschafts-Nobelpreis zusammen mit Reinhard Selten (1930–2016) und John Harsanyi (1920–2000).

Anschauliche Beschreibung: Bob fixiert seine Spalte s_2, Alice wählt ihre Zeile s_1 mit maximalem Ergebnis $s_1 \mapsto u_1(s_1, s_2)$. Alice fixiert ihre Zeile s_1, Bob wählt seine Spalte s_2 mit maximalem Ergebnis $s_2 \mapsto u_2(s_1, s_2)$. Gelingt beides zugleich, so haben wir ein Nash–Gleichgewicht.

Das erklärt auch einen einfachen **Algorithmus**, wie wir in einem endlichen Bimatrixspiel alle (reinen) Nash–Gleichgewichte finden: Finde die Maxima in jeder Zeile. Finde die Maxima in jeder Spalte. Wo beides zutrifft, liegt ein Nash–Gleichgewicht.

Was ist ein Nash–Gleichgewicht?

Vorgelegt sei ein Spiel $u : S_1 \times \cdots \times S_n \to R_1 \times \cdots \times R_n$ in Normalform. Wir nennen $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n := S$ einen **Strategievektor**. Spieler i kann sich aus eigener Kraft verbessern, falls für ein $a \in S_i$ gilt:

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, \boldsymbol{a}, s_{i+1}, \ldots, s_n) \ > \ u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

Andernfalls ist $u_i(s)$ ein **Maximum** bezüglich aller Alternativen $a \in S_i$:

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, \boldsymbol{a}, s_{i+1}, \ldots, s_n) \ \le \ u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

Somit ist s_i eine **beste Antwort** auf $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$.

Definition E1C: Nash–Gleichgewichte eines Spiels

Der Strategievektor $s \in S$ ist im **Gleichgewicht für Spieler i**, wenn gilt:

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, \boldsymbol{s_i}, s_{i+1}, \ldots, s_n) \ = \ \max_{a \in S_i} u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, \boldsymbol{a}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

Hierfür schreiben wir $\mathrm{NE}_i(u) := \{\, s \in S \mid s_i \text{ ist beste Antwort auf } s_{-i} \,\}$.

Gilt dies für jeden Spieler i, so nennen wir s ein **Nash–Gleichgewicht**: $\mathrm{NE}(u) := \bigcap_i \mathrm{NE}_i(u) = \{\, s \in S \mid s \text{ ist ein Nash–Gleichgewicht von } u \,\}$.

Was ist ein Nash–Gleichgewicht?

Zunächst ist ein Nash–Gleichgewicht genau das, was die Definition sagt: Für jeden Spieler $i = 1, \ldots, n$ ist seine Strategie s_i eine beste Antwort auf die gegnerischen Strategien $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$. Anders gesagt: Kein Spieler hat Anreiz, seine Strategie zu ändern.

Umgekehrt erwarten wir rational gesehen, dass ein Ungleichgewicht nicht gespielt wird, zumindest nicht auf Dauer, denn mindestens ein Spieler wird wechseln. Dies interpretieren wir normativ oder deskriptiv:

(1) Gibt es nur genau ein Nash–Gleichgewicht, so wird dieses gespielt. Rationale Interpretation: Sind alle Spieler rational, so werden sie ihr Verhalten auf dieses einzige Nash–Gleichgewicht koordinieren.

(2) Die Nash–Gleichgewichte erklären das beobachtete Spielerverhalten. Evolutionäre Interpretation bei wiederholten Spielen, Schwarmintelligenz bei großen Populationen: Ungleichgewichte bleiben nicht bestehen.

In allen Fällen sind die Nash–Gleichgewichte eines Spiels besondere Strategievektoren, die zur weiteren Analyse dienen: Mögliche rationale Lösungen, beobachtetes Spielverhalten, evolutionäre Entwicklung, etc.

Beispiel: ein Erbe teilen

Aufgabe: Alice und Bob erben 10 Dukaten. Das Testament verlangt: Alice wünscht sich $x \in \{1, \dots, 9\}$ und Bob wünscht sich $y \in \{1, \dots, 9\}$, gleichzeitig per Brief an den Notar. Gilt $x + y > 10$, so verfällt das Erbe. Gilt $x + y \le 10$, so werden beide Wünsche erfüllt, etwaiger Rest verfällt.

Aufgabe: (1) Formalisieren Sie dies als ein strategisches Spiel u.
(2) Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte dieses Spiels u.

Lösung: (1) Die Regeln definieren das folgende strategische Spiel:

$$u \,:\, \{1, \dots, 9\}^2 \to \mathbb{R}^2 \,:\, (x, y) \mapsto \begin{cases} (x, y) & \text{falls } x + y \le 10, \\ (0, 0) & \text{falls } x + y > 10. \end{cases}$$

(2) Kein Gleichgewicht ist (x, y) mit $x + y < n$, ebensowenig (x, y) mit $x + y > n$. Somit bleiben nur noch neun Kandidaten:

$$\mathrm{NE}(u) \subseteq \{\, (1,9),\ (2,8),\ (3,7),\ (4,6),\ (5,5),\ (6,4),\ (7,3),\ (8,2),\ (9,1) \,\}$$

Jedes dieser Paare ist tatsächlich ein Nash–Gleichgewicht. Also gilt:

$$\mathrm{NE}(u) = \{\, (1,9),\ (2,8),\ (3,7),\ (4,6),\ (5,5),\ (6,4),\ (7,3),\ (8,2),\ (9,1) \,\}$$

Beispiel: ein Erbe teilen

Wenn der Anwalt das Paar (x, y) verkündet, könnte er Alice dann Bob separat fragen, ob sie ihren Wunsch ändern möchten. Falls (x, y) kein Gleichgewicht ist, so will mindestens eine:r wechseln. Ist (x, y) hingegen ein Gleichgewicht, so besteht für keine:n irgendein Anlass zu wechseln.

Wenn sich Alice und Bob absprechen können, so können sie jedes der neun Gleichgewichte $(x, y) \in \mathrm{NE}(u)$ auswählen und als gemeinsames Vorgehen vereinbaren. Keine:r hätte anschließend Anlass, abzuweichen. Welches sie auswählen ist frei verhandelbar, siehe Kapitel L.

Aufgabe: Diskutieren Sie die folgende, recht naheliegende Variante: Alice wünscht sich $x \in \{0, \dots, 9\}$ und Bob wünscht sich $y \in \{0, \dots, 9\}$.

Lösung: Die Menge der Nash–Gleichgewichte ändert sich nicht! Alice' Strategie 0 ist strikt dominiert durch 1: Egal, welche Strategie $y \in \{0, \dots, 9\}$ Bob wählt, für Alice ist 1 immer strikt besser als 0.

Ebenso wird Bobs Strategie 0 strikt dominiert durch die Strategie 1. Die beiden zusätzlichen Optionen werden also rational nie genutzt. Das ändert sich in der folgenden Aufgabe mit $x, y \in \{0, \dots, 10\}$.

Beispiel: ein Erbe teilen

Aufgabe: Alice und Bob erben 10 Dukaten. Das Testament verlangt: Alice wünscht sich $x \in \{0, \dots, 10\}$, Bob wünscht sich $y \in \{0, \dots, 10\}$, gleichzeitig per Brief an den Notar. Gilt $x + y > 10$, so verfällt das Erbe. Gilt $x + y \le 10$, so werden beide Wünsche erfüllt, etwaiger Rest verfällt.

Aufgabe: (1) Formalisieren Sie dies als ein strategisches Spiel u.
(2) Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte dieses Spiels u.

Lösung: (1) Die Regeln definieren das folgende strategische Spiel:

$$u : \{0, \dots, 10\}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \begin{cases} (x, y) & \text{falls } x + y \le 10, \\ (0, 0) & \text{falls } x + y > 10. \end{cases}$$

(2) Eine sorgfältige Analyse, wie in der vorigen Aufgabe, ergibt:

$$\begin{aligned} \mathrm{NE}(u) = \{\, & (0, 10),\ (1, 9),\ (2, 8),\ (3, 7),\ (4, 6),\ (5, 5), \\ & (6, 4),\ (7, 3),\ (8, 2),\ (9, 1),\ (10, 0),\ (10, 10) \,\} \end{aligned}$$

Nash–Gleichgewichte erklären zunächst nur, was **rational möglich** ist. Manch Spiel hat mehrere Gleichgewichte, erfordert also Koordinierung!

Beispiel: ein Erbe teilen

⚠ In diesem Spiel kann man das letzte Gleichgewicht $(10, 10)$ leicht übersehen; es ist nicht intuitiv, aber dennoch ein Nash–Gleichgewicht! Nash–Gleichgewichte zu prüfen ist leicht, eins/alle zu finden ist schwer. Da hilft nur genau lesen, scharf nachdenken, sorgsam ausführen.

Angenommen, Alice und Bob können sich absprechen – vor Einreichung ihrer Wünsche. Jedes Nicht-Gleichgewicht $(x, y) \in S \smallsetminus \mathrm{NE}(u)$ ist eine unsinnige Vereinbarung, denn mindestens eine:r hat Anlass, die gerade getroffene Absprache sofort zu brechen. Jede Absprache $(x, y) \in \mathrm{NE}(u)$ hingegen ist rational möglich, denn sie ist selbststabilisierend!

Übung: Diskutieren Sie das entsprechende Spiel mit drei Erben Alice, Bob und Chuck, ebenso mit vier Erben, fünf Erben, sechs Erben, etc.

Wenn Sie genauer hinschauen, dann entdecken Sie einige interessante Phänomene. Zum Beispiel sind bei drei Erben manche Gleichgewichte wie $(5, 5, 5)$ nur stabil unter individueller Maximierung, doch eine/jede Zweier-Koalition könnte und würde koordiniert davon abweichen. Was sind hier die koalitions-stabilen Gleichgewichte?

Empirie: Piraten teilen im Praxistest

Im **Casino Royal** (22.04.2022) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, unsere ersten Überlegungen zu Gleichgewichten in der Praxis zu testen. Ich empfehle nachdrücklich praktische **Experimente zur Spieltheorie**, denn Theorie und Praxis ergänzen und inspirieren sich gegenseitig! Hier mein (stark vereinfachtes) Gedächtnisprotokoll der Ereignisse.

Wir haben zunächst das Piratenspiel mit fünf Piraten gespielt, viermal in jeweils wechselnden Rollen. Vorschläge und Argumente gingen bunt durcheinander, und die Ergebnisse waren wieder erstaunlich (A225). Die Capitaine verteilten großzügig, doch zwei gingen über die Planke.

Erstes Spiel: Auf Vorschlag aus dem Publikum haben wir folgende Spielregeln vereinbart: Vier Piraten A, B, C, D teilen sich 100 Dukaten. Jeder schreibt seinen Wunsch $a, b, c, d \in \{0, \dots, 100\}$ auf einen Zettel. Im Falle $a + b + c + d \leq 100$ wird jeder Wunsch ausgezahlt, sonst nichts.

Gespielt wurde zunächst *ohne* vorige Absprache. Die Wünsche waren dann $(25, 20, 20, 25)$. Zwei waren vorsichtig! Es wurden daher nur 90 Dukaten ausgezahlt und 10 Dukaten als Opfergabe ins Meer geworfen.

Empirie: Piraten teilen im Praxistest

Zweites Spiel: Selbe Spielregeln, doch nun durfte zuvor verhandelt werden. Spieler A nutzte die Gelegenheit, um seinen Zettel sofort und endgültig und für alle sichtbar mit 80 zu beschriften (*burning bridges*).

Seine dreiste Strategie schlug jedoch fehl: Die anderen wollten dies nicht hinnehmen und schrieben ebenso überzogene Forderungen auf. So wurden alle 100 Dukaten ins Meer geworfen! Tja, dumm gelaufen.

Rational war das sicher nicht. Der fiese Trick, sich früh festzulegen und damit die anderen zu erpressen, hätte (rational) funktionieren müssen, misslang aber dennoch. Vielleicht wäre die Forderung nach 30 Dukaten noch durchgegangen, oder 40, aber eben nicht 80. Versuch macht kluch.

Drittes Spiel: Selbe Spielregeln, mit Verhandlung. Alle trauerten den vergeudeten 100 Dukaten nach. Sie einigten sich auf $(25, 25, 25, 25)$, so hat es dann jeder aufgeschrieben, und so wurde es ausgezahlt. „Nach den Erfahrungen von eben, macht alles andere keinen Sinn.“

Das ist ein striktes Nash–Gleichgewicht, Abweichen schadet! Nach leidvollen Fehlschlägen hat sich dieses Ergebnis eingependelt.

Empirie: Piraten teilen im Praxistest

Viertes Spiel: Um die Symmetrie zu brechen werden die 100 Dukaten vorneweg in vier Haufen zu $10, 20, 30, 40$ Dukaten aufgeteilt. Jeder Pirat darf sich einen Haufen aussuchen, gleichzeitig per Zettel. Beanspruchen dabei zwei Piraten denselben Haufen, so wird *alles* ins Meer geworfen.

Unsere vier leidgeprüften Piraten wollten rasch zu einem Ergebnis kommen, doch keinerlei Risiko eingehen und haben daher… gelost! Per Schnick-Schnack-Schnuck haben Sie die vier Haufen zugeteilt. Beim Ausfüllen der Zettel ist anschließend keiner (!) davon abgewichen.

🙂 Nicht das Ergebnis ist symmetrisch-gerecht, sondern das Verfahren. Es gibt $4! = 24$ solcher Nash–Gleichgewichte. Jedes ist auf seine Weise ungerecht, genau dies haben unsere Piraten durch das Losverfahren „symmetrisiert“, und anschließend das Ergebnis klaglos akzeptiert.

🙂 Jede Zuteilung ist ein striktes Gleichgewicht, Abweichen schadet! Wurde erst einmal eines der 24 Gleichgewichte willkürlich ausgewäht, so ist diese Vereinbarung selbst-stabilisierend. Damit haben unsere Piraten nebenbei **korrelierte Gleichgewichte** entdeckt (siehe §I3).

Empirie: Piraten teilen im Praxistest

Zwei Varianten kamen uns noch in den Sinn, die wir aber nicht spielten:

Fünftes Spiel: Selbe Spielregeln, aber ohne die Möglichkeit der vorigen Absprache. Wie sollte jeder Pirat nun vorgehen? Jeder möchte einen großen Haufen, aber gleichzeitig Kollisionen verhindern. Knifflig! Übung: Wie wahrscheinlich sind Kollisionen bei zufälliger Wahl?

Wie gelingt eine möglichst kollisionsfreie Zuteilung, ein gemeinsamer Symmetriebruch, ohne Gedächtnis, Tradition, vorige Absprache, etc.? Willkürlich, z.B. nach Alter? Nähe zur Tür? Oder eine andere Größe, die allen zugänglich ist und allgemein als Arbiter anerkannt wird.

Sechstes Spiel: Fünf Piraten verteilen die Haufen $0, 10, 20, 30, 40$. Wie kann oder soll zugeteilt werden? Willkürlich nach Losverfahren? Wie können unsere besorgten Piraten sicherstellen, dass die getroffene Vereinbarung auch wirklich eingehalten wird? „Wer nichts mehr zu verlieren hat, fühlt sich an Abmachungen vielleicht nicht gebunden.“

🙁 Jede Zuteilung ist hier ein Gleichgewicht, aber nicht mehr strikt. Abweichung lohnt zwar nicht, ist aber für einen Spieler dennoch denkbar.

Das Gefangenendilemma / *prisoner's dilemma*

Dieses Spiel ist berühmt für seinen vermeintlich paradoxen Ausgang. Es wurde 1950 von Albert Tucker (1905–1995) vorgestellt und popularisiert.

Clyde / Bonnie	schweigen	gestehen
schweigen	-1 -1	0 -5
gestehen	-5 0	-4 -4

Als Funktion $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bedeutet das ausgeschrieben:

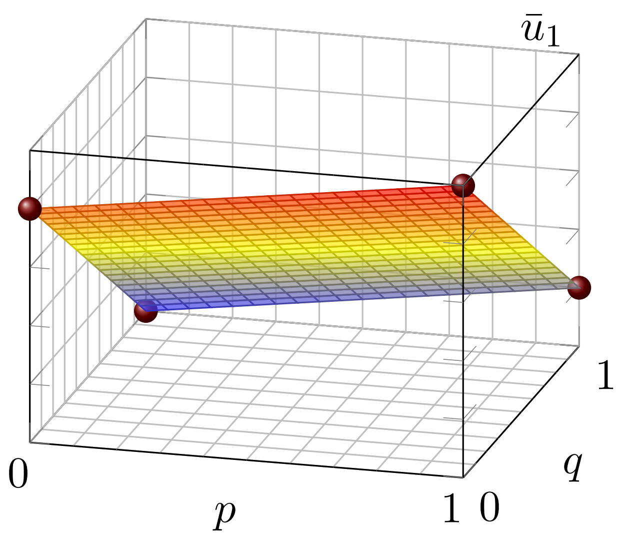
$$\begin{aligned}
(\text{schweigen}, \text{schweigen}) &\quad\mapsto\quad (-1, -1) \\
(\text{schweigen}, \text{gestehen}) &\quad\mapsto\quad (-5, \quad 0) \\
(\text{gestehen}, \text{schweigen}) &\quad\mapsto\quad (\quad 0, -5) \\
(\text{gestehen}, \text{gestehen}) &\quad\mapsto\quad (-4, -4)
\end{aligned}$$

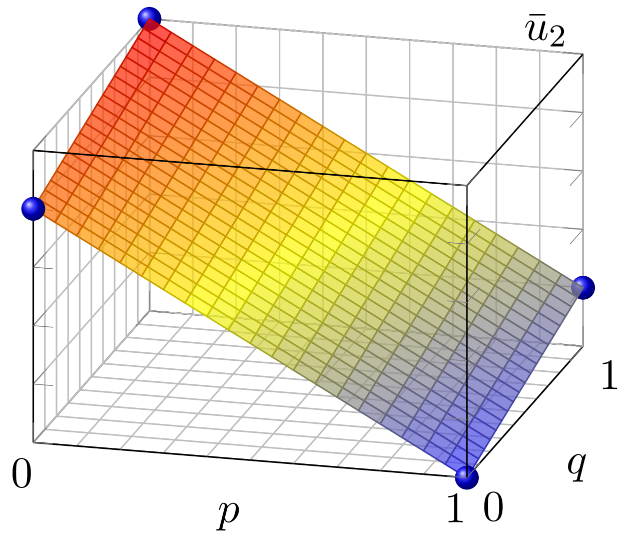
Nash–Gleichgewicht ist hier einzig $(\text{gestehen}, \text{gestehen})$.

Das Gefangenendilemma / *prisoner's dilemma*

Zwei Komplizen werden geschnappt und in getrennten Zellen verhört. Wenn beide schweigen, dann genügen die wenigen Beweise vor Gericht vermutlich zur Verurteilung für ein Jahr Gefängnis. Wenn einer gesteht, so wird ihm die Strafe erlassen, aber der andere wird zu fünf Jahren verurteilt. Gestehen beide, so drohen jedem vier Jahre Gefängnis.

Zur Illustration eine graphische Darstellung der beiden Auszahlungen: Bonnie wählt $p \in \{0, 1\}$ und Clyde wählt $q \in \{0, 1\}$.





Das Feiglingspiel / *chicken game*

Auch dieses berühmte Spiel wird oft in Konfliktsituationen beobachtet:

A \ B	einlenken	gradaus
einlenken	A: 2, B: 2	A: 1, B: 5
gradaus	A: 5, B: 1	A: -9, B: -9

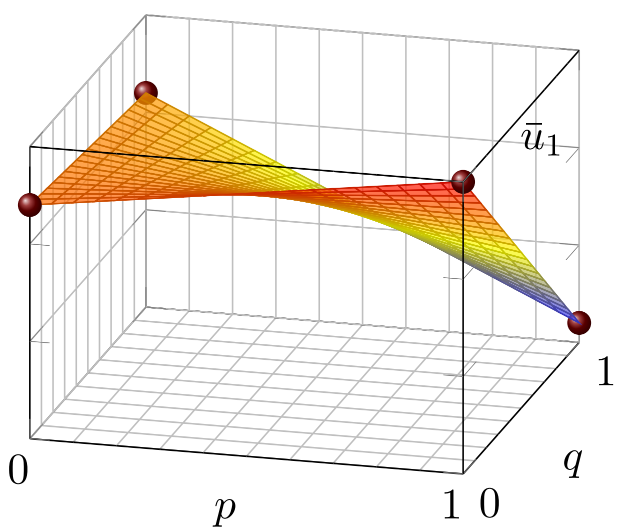
Hier gibt es zwei Nash–Gleichgewichte, aber diese sind asymmetrisch. Beide wollen geradaus. Wer gibt zuerst nach? Bricht die Symmetrie?

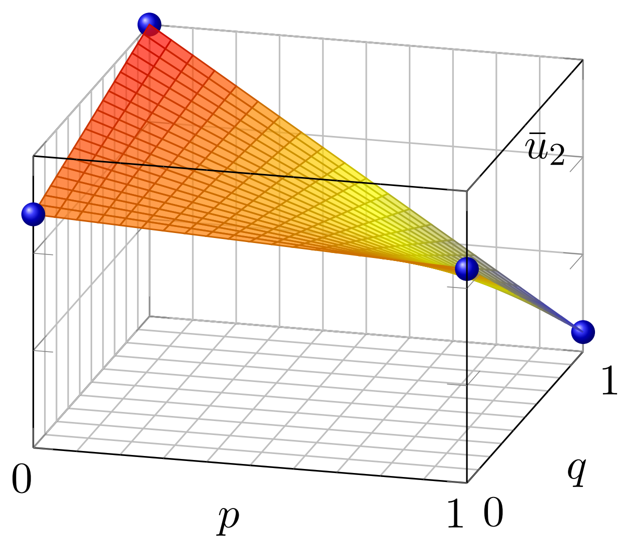
Natürlich ist (gradaus, gradaus) kein Gleichgewicht: Ein Spieler muss ausweichen, beide wissen es, doch keiner will sich als erster bewegen. Auch (einlenken, einlenken) ist hier kein Gleichgewicht: Jeder einzelne könnte dies ausnutzen und gradaus fahren. Die beiden Gleichgewichte sind asymmetrisch. Das macht die Koordinierung schwierig. „Soll doch der andere einlenken!“, sagt jeder. Manchmal kommt es zum Crash.

Das Feiglingspiel / *chicken game*

Das Feiglingspiel beschreibt eine Mutprobe oder gegenseitige Drohung: Zwei Autos rasen aufeinander zu. Wer einlenkt, zeigt Angst und verliert. Weicht keiner aus, beweisen beide Spieler zwar Mut und Durchsetzung, aber durch den Zusammenprall entsteht allseits ein großer Schaden. Dieses Drohszenario findet sich häufig bei Verhandlungen.

Zur Illustration eine graphische Darstellung der beiden Auszahlungen: Spielerin A wählt $p \in \{0,1\}$ und Spieler B wählt $q \in \{0,1\}$.



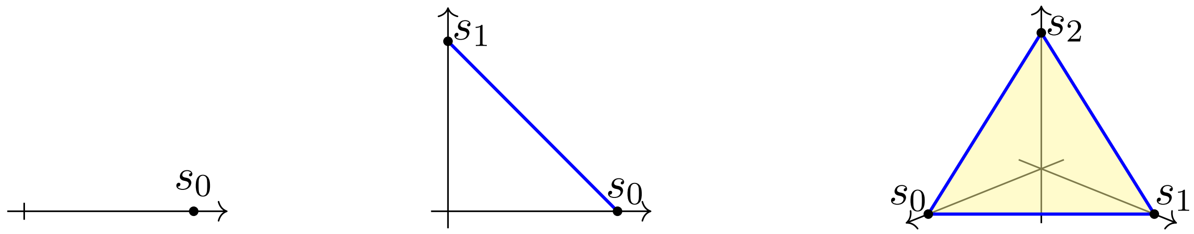


Fortsetzung von reinen auf gemischte Strategien

Beim Spiel *Schere-Stein-Papier* ist es nicht sinnvoll, sich auf eine der drei **reinen Strategien** festzulegen. Besser ist, eine zufällig zu wählen:

$$s = \frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Stein} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier}$$

Wir schreiben diese **gemischte Strategie** $s = \sum_k p_k s_k$ bequem und übersichtlich als Konvexkombination der reinen Strategien $s_1, \dots, s_\ell$. Interpretation: Die Strategie $s_k \in S_i$ wird mit Wkt $p_k \in [0,1]$ ausgewählt.



☺ Eine gute Notation ist zugleich präzise und bequem, notiert alle wesentlichen Daten, doch meidet übermäßige Redundanz, erleichtert das Lesen und das Rechnen und hilft, Missverständnisse zu vermeiden.

Fortsetzung von reinen auf gemischte Strategien

Definition E1D: gemischte Strategie, Borel 1921

Sei $S_i = \{s_0, s_1, \dots, s_\ell\}$ die (endliche) Strategiemenge des Spielers i. Eine **gemischte Strategie** ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf S_i:

$$s = p_0 \cdot s_0 + p_1 \cdot s_1 + \dots + p_\ell \cdot s_\ell$$

mit Wahrscheinlichkeiten $p_0, p_1, \dots, p_\ell \geq 0$ und $p_0 + p_1 + \dots + p_\ell = 1$. Aus der Menge S_i entsteht so die **Menge aller gemischten Strategien**

$$\bar{S}_i = [S_i] = [s_0, s_1, \dots, s_\ell] := \left\{ \sum_{k=0}^{\ell} p_k s_k \;\middle|\; p_k \geq 0,\ \sum_{k=0}^{\ell} p_k = 1 \right\}.$$

Die Nutzenfunktion $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ setzen wir auf gemischte Strategien fort zu $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \mathbb{R}^n$ mit $\bar{u}|_S = u|_S$. Dies geschieht **linear in jeder Koordinate**, entsprechend dem **Erwartungswert**:

$$\bar{u}\Big(\dots, \sum_{k=0}^{\ell} p_k s_k, \dots\Big) = \sum_{k=0}^{\ell} p_k \bar{u}(\dots, s_k, \dots)$$

Wir nennen $\bar{u}$ die affine **Fortsetzung** von u auf gemischte Strategien. Dies ist eine n–lineare Abbildung, eingeschränkt auf $\bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$.

Fortsetzung von reinen auf gemischte Strategien

Wir nennen S_i die Menge der **reinen Strategien** für Spieler i und entsprechend $[S_i] \supseteq S_i$ die Menge seiner **gemischten Strategien**.

Wir betrachten hier S_i als Basis des $\mathbb{R}$–Vektorraums $\mathbb{R}S_i$ und schreiben Wahrscheinlichkeitsverteilungen als Konvexkombination $s = \sum_k p_k s_k$.

Der **Träger** von $s \in [S_i]$ ist die Menge $\operatorname{supp}(s) := \{ s_k \mid p_k > 0 \} \subseteq S_i$ aller reinen Stratgien, die in s tatsächlich vorkommen (mit positiver Wkt).

Demnach ist die gemischte Strategie $s \in [S_i]$ genau dann rein, $s \in S_i$, wenn der Träger einpunktig ist, also $\operatorname{supp}(s) = \{s\} \subseteq S_i$. Andernfalls ist s **echt gemischt**, oder im Falle $\operatorname{supp}(s) = S_i$ sogar **voll gemischt**.

Geometrisch ist s eine Konvexkombination der Punkte $s_0, s_1, \dots, s_\ell$. Somit ist $[S_i]$ die konvexe Hülle der Eckpunkte $s_0, s_1, \dots, s_\ell$, also eine Strecke ($\ell = 1$) oder ein Dreieck ($\ell = 2$) oder ein Tetraeder ($\ell = 3$) oder allgemein ein ℓ–dimensionales **Simplex** mit $\ell + 1$ Eckpunkten.

🙂 Die genannte Schreibweise nutzt Analogien und hat sich bewährt. Das ist in erster Linie nicht nur eine mathematische Frage, sondern vor allem eine der Klarheit, der Bequemlichkeit und der jeweiligen Tradition.

Fortsetzung von reinen auf gemischte Strategien

Dual hierzu können wir s als Abbildung $p : S_i \to \mathbb{R} : s_k \mapsto p_k$ betrachten, mit Wahrscheinlichkeiten $p_0, p_1, \dots, p_\ell \ge 0$ und $p_0 + p_1 + \dots + p_\ell = 1$.

Interpretation: Die Strategie $s_k \in S_i$ wird mit Wkt $p_k \in [0,1]$ ausgewählt. Das definiert das zugehörige WMaß $P : \mathfrak{P}(S_i) \to [0,1] : A \mapsto \sum_{s_k \in A} p_k$.

Für endliche (oder allgemeiner: diskrete) Wahrscheinlichkeitsräume sind alle drei Beschreibungen äquivalent: Konvexkombination, Punktmassen, oder Maß. In jedem Falle genügt es, Punktmassen zu summieren.

Für allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume $(S, \mathscr{A}, P)$ nutzen wir später dankend die bewährten Werkzeuge der Maß- und Integrationstheorie. Diese technische Vervollkommnung ist hier zunächst noch nicht nötig.

Die Fortsetzung von den reinen auf die gemischten Strategien haben wir in den vorigen einfachen Spielen bereits durch Graphiken illustriert. Die folgenden Beispiele zeigen dies nochmal ausführlich.

Übung: Sei $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$ ein Nullsummenspiel, also $u_1 + u_2 = 0$. Ist dann die affine Fortsetzung $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \to \mathbb{R}^2$ ein Nullsummenspiel?

Bimatrix-Schreibweise für Zwei-Personen-Spiele

Wir betrachten ein Zwei-Personen-Spiel in strategischer Normalform

$$u \,:\, S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, (s_1, s_2) \mapsto \big(u_1(s_1, s_2),\, u_2(s_1, s_2) \big)$$

mit Strategiemengen $S_1 = \{s_1^0, s_1^1, \dots, s_1^m\}$ und $S_2 = \{s_2^0, s_2^1, \dots, s_2^n\}$.
Die Auszahlungen (u_1, u_2) entsprechen zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{S_1 \times S_2}$.

$$s_1 = \sum_{i=0}^{m} x_i s_1^i \in \bar{S}_1, \quad x \in \Delta^m = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1} \;\middle|\; x_i \ge 0,\ \sum_{i=0}^{m} x_i = 1 \right\}$$

$$s_2 = \sum_{j=0}^{n} y_j s_2^j \in \bar{S}_2, \quad y \in \Delta^n = \left\{ \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; y_j \ge 0,\ \sum_{j=0}^{n} y_j = 1 \right\}$$

$$\bar{u}_1(s_1, s_2) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_i\, y_j\, \underbrace{u_1(s_1^i, s_2^j)}_{=:\, a_{ij}} = x^\intercal A\, y, \qquad A \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1)}$$

$$\bar{u}_2(s_1, s_2) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_i\, y_j\, \underbrace{u_2(s_1^i, s_2^j)}_{=:\, b_{ij}} = x^\intercal B\, y, \qquad B \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1)}$$

Kurzschreibweise $\tilde{u} \,:\, \Delta^m \times \Delta^n \to \mathbb{R}^2 \,:\, (x, y) \mapsto \big(x^\intercal A\, y,\, x^\intercal B\, y \big)$.

Bimatrix-Schreibweise für Zwei-Personen-Spiele

Die Grundideen der Spieltheorie sind bis hierher noch recht einfach, bedürfen aber bereits präziser Formulierungen und geeigneter Notation. Diese soll klar sein, zudem einfach und bequem, andernfalls verkommen unsere Definitionen und Rechnungen leicht zu Indexschlachten.

Für **endliche reelle Zwei-Personen-Spiele** kennen Sie Matrizen als besonders bequeme und effiziente Notation aus der Linearen Algebra.

Die Menge $\Delta^m = [e_0, e_1, \dots, e_m] \subset \mathbb{R}^{m+1}$ ist der **Standardsimplex**, also die konvexe Hülle der Standardbasis $e_0, e_1, \dots, e_m \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Diese **baryzentrischen Koordinaten** nutzen wir zur Parametrisierung für jeden Simplex mit beliebiger Eckenmenge $s_0, s_1, \dots, s_m$ vermöge $h : \Delta^m \to [s_0, s_1, \dots, s_m] : (x_0, x_1, \dots, x_m) \mapsto x_0 s_0 + x_1 s_1 + \dots + x_m s_m$.
Wir erhalten so $\tilde{u} = \bar{u} \circ (h_1 \times \dots \times h_n) : \Delta^{m_1} \times \dots \times \Delta^{m_n} \to \mathbb{R}^n$.

Simplizes sind geometrisch-topologisch besonders einfache Räume, daher auch der Name. Sie sind konvex und kompakt und homöomorph zum Ball $\mathbb{D}^m$ gleicher Dimension (E1G). Genau diese Eigenschaften werden wir im folgenden Existenzsatz von Nash (E1F) ausnutzen!

Kriterium für gemischte Nash–Gleichgewichte

Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel, wie oben erklärt, und $\bar u : \bar S_1 \times \dots \times \bar S_n \to \mathbb{R}^n$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien. Der Strategievektor $s \in \bar S$ ist im Gleichgewicht für Spieler i, wenn gilt:

$$\bar u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{a \in \bar S_i} \bar u_i(a; s_{-i})$$

Lemma E1E: Kriterium für gemischte Nash–Gleichgewichte

Dank Linearität von $\bar u$ wird das Maximum in den Ecken angenommen:

$$\max_{a \in [S_i]} \bar u_i(a; s_{-i}) = \max_{e \in S_i} \bar u_i(e; s_{-i})$$

Genau dann ist s für Spieler i im Gleichgewicht, $s \in \mathrm{NE}_i(\bar u)$, wenn gilt:

$$\operatorname{supp}(s_i) \subseteq \operatorname{Arg\,max}_{e \in S_i} \bar u_i(e; s_{-i})$$

Wir erhalten somit ein einfaches Kriterium:

$$\mathrm{NE}_i(\bar u) = \left\{ s \in \bar S \;\middle|\; \operatorname{supp}(s_i) \subseteq \operatorname{Arg\,max}_{e \in S_i} \bar u_i(e; s_{-i}) \right\}$$

Gilt dies für alle i, so ist s ein Nash–Gleichgewicht: $\mathrm{NE}(u) := \bigcap_i \mathrm{NE}_i(u)$.

Kriterium für gemischte Nash–Gleichgewichte

🙂 Dieses einfache Kriterium ist notwendig und hinreichend, also eine Charakterisierung aller Nash–Gleichgewichte. Es nutzt ganz wesentlich die Linearität von $\bar u$.

Gegeben sei $s \in \bar S$. Das Kriterium für $s \in \mathrm{NE}(\bar u)$ ist einfach und direkt: Es genügt, s einzusetzen und endlich viele Ungleichungen zu prüfen!

Für jeden Spieler i prüfen wir folgende Bedingung: Jede reine Strategie im Träger von s_i ist eine beste Antwort auf die Gegenstrategie s_{-i}.

Ausführlich: Das Maximum $\max_{e \in S_i} \bar u_i(e; s_{-i})$ finden wir leicht, da die reine Strategiemenge S_i endlich ist. Im selben Durchgang konstruieren wir die Teilmenge $M_i = \operatorname{Arg\,max}_{e \in S_i} \bar u_i(e; s_{-i}) \subseteq S_i$ aller Maximierer. Es bleibt schließlich nur noch $\operatorname{supp}(s_i) \subseteq M_i$ zu prüfen.

Bitte beachten Sie: „supp“ steht hier für den **Träger** [engl./frz. *support*]. Dies ist nicht zu verwechseln mit dem **Supremum** „$\sup$“. Beides sind völlig verschiedene Dinge. Die sprachliche Nähe ist unglücklich.

⚠ Das sagt uns noch nicht, wie wir Nash–Gleichgewichte finden! Nash–Gleichgewichte zu prüfen ist leicht, eins/alle zu finden ist schwer.

Beispiel: Bach oder Strawinsky?

Ein Paar möchte ein Konzert besuchen: Alice mag lieber Strawinsky, Bob mag lieber Bach. Gar kein Konzert wäre für beide enttäuschend.

B / A	Bach	Strawinsky
Bach	2 / 1	0 / 0
Strawinsky	0 / 0	1 / 2

In diesem Spiel gibt es genau zwei reine Nash–Gleichgewichte: Einerseits $(\text{Bach}, \text{Bach})$ und andererseits $(\text{Strawinsky}, \text{Strawinsky})$.

Die Ungleichgewichte $(\text{Bach}, \text{Strawinsky})$ und $(\text{Strawinsky}, \text{Bach})$ wären nicht rational, sie werden erwartungsgemäß nicht gespielt, oder nur selten, vorübergehend als Ausrutscher, und dann alsbald korrigiert.

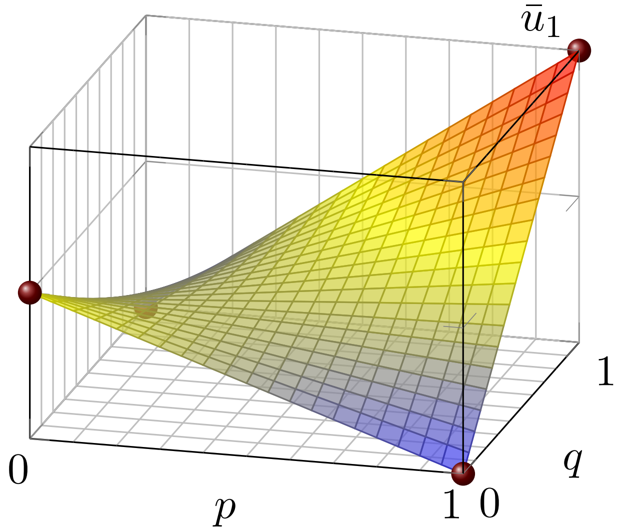
Hingegen können beide Nash–Gleichgewichte gleichermaßen gespielt werden, hier ist keines bevorzugt. Das Spiel ist hierin symmetrisch.

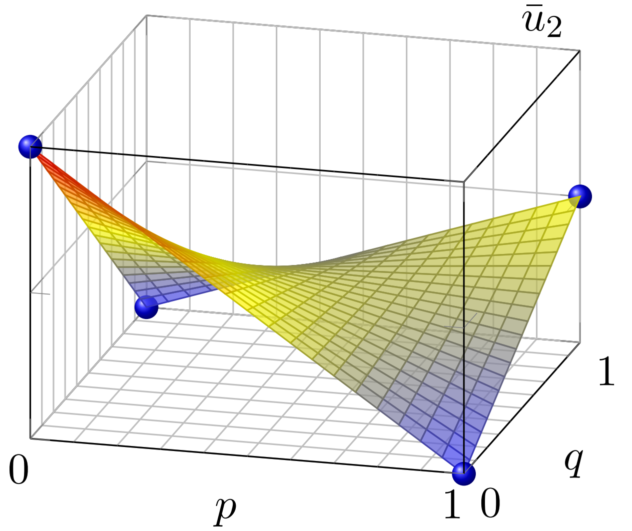
Beispiel: Bach oder Strawinsky?

Wir denken an folgendes Szenario: Alice und Bob haben sich vage für das Bach–Konzert verabredet. Sie können nun nicht mehr miteinander kommunizieren, doch jeder muss individuell seine Karte kaufen.

Bob will nicht wechseln, er ist wunschlos glücklich. Alice möchte zwar lieber in das Strawinsky–Konzert, aber alleine wird sie nicht wechseln. (Die umgekehrte Situation ist natürlich genauso gut vorstellbar.)

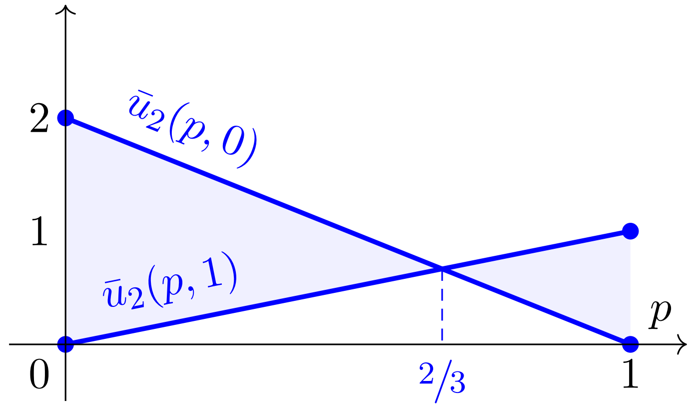
Sobald beide eine Einigung erzielt haben, sind sie daran gebunden!

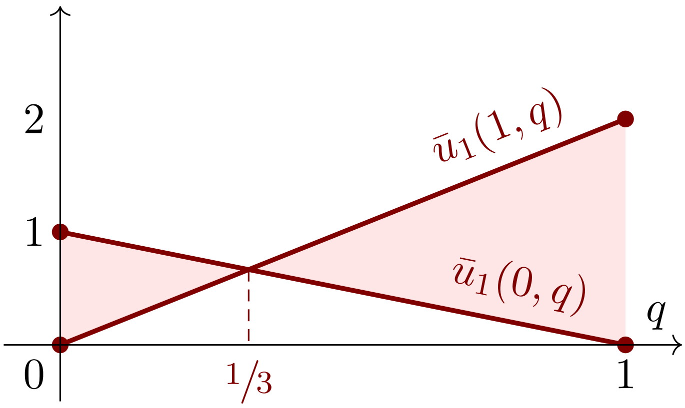


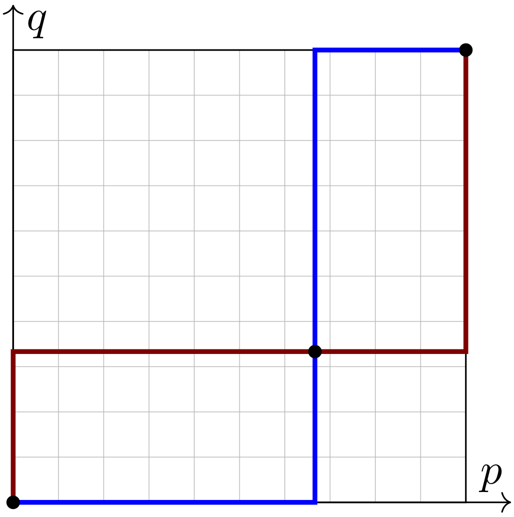


Beispiel: Bach oder Strawinsky?

A \ B	0	1
0	1 / 2	0 / 0
1	0 / 0	2 / 1







Beispiel: Bach oder Strawinsky?

Die beiden reinen Strategien bezeichnen wir hier mit $S_1 = S_2 = \{0, 1\}$. Als Erweiterung zu gemischten Strategien nutzen wir dann die beiden Einheitsintervalle $[S_1] = [S_2] = [0, 1]$ und erhalten das Bimatrixspiel

$$\bar{u} \;:\; [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2 \;:\; (p,q) \mapsto (\,\bar{u}_1(p,q),\, \bar{u}_2(p,q)\,).$$

Die Graphik für $\bar{u}_1(0,q)$ und $\bar{u}_1(1,q)$ zeigt die Fläche $\bar{u}_1$ von der Seite. Für jede von Bobs Strategien $q \in [0,1]$ liest Alice ihre beste Antwort ab: $p = 0$ für $q < 1/3$ und $p = 1$ für $q > 1/3$ sowie $p \in [0,1]$ für $q = 1/3$.

Die Graphik für $\bar{u}_2(p,0)$ und $\bar{u}_2(p,1)$ zeigt die Fläche $\bar{u}_2$ von der Seite. Für jede von Alice' Strategien $p \in [0,1]$ liest Bob seine beste Antwort ab: $q = 0$ für $p < 2/3$ und $q = 1$ für $p > 2/3$ sowie $q \in [0,1]$ für $p = 2/3$.

Im Diagramm unten rechts tragen wir beide Reaktions-„Funktionen“ ein:

$$\mathrm{NE}_1(\bar{u}) = \left\{\, (p,q) \in [0,1]^2 \;\middle|\; p \text{ ist eine beste Antwort auf } q \,\right\}$$
$$\mathrm{NE}_2(\bar{u}) = \left\{\, (p,q) \in [0,1]^2 \;\middle|\; q \text{ ist eine beste Antwort auf } p \,\right\}$$

Genauer gesagt sind dies eigentlich nur Relationen / Korrespondenzen. Ihre Schnittpunkte sind die Nash–Gleichgewichte: $\mathrm{NE} = \mathrm{NE}_1 \cap \mathrm{NE}_2$.

Beispiel: bleiben oder gehen?

Sie hören einen schrecklich langweiligen Vortrag zur Spieltheorie und möchten lieber gehen, aber alleine aufzustehen wäre peinlich. Wenn Sie zu zweit aufstehen und gehen, dann wäre alles gut. Leider können Sie sich unter dem strengen Blick des Vortragenden nicht absprechen.

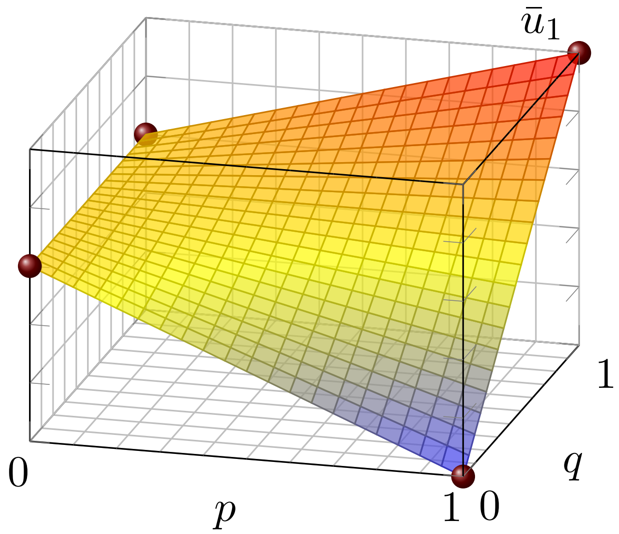
A \ B	bleiben	gehen
bleiben	A: -2, B: -2	A: -2, B: -5
gehen	A: -5, B: -2	A: 0, B: 0

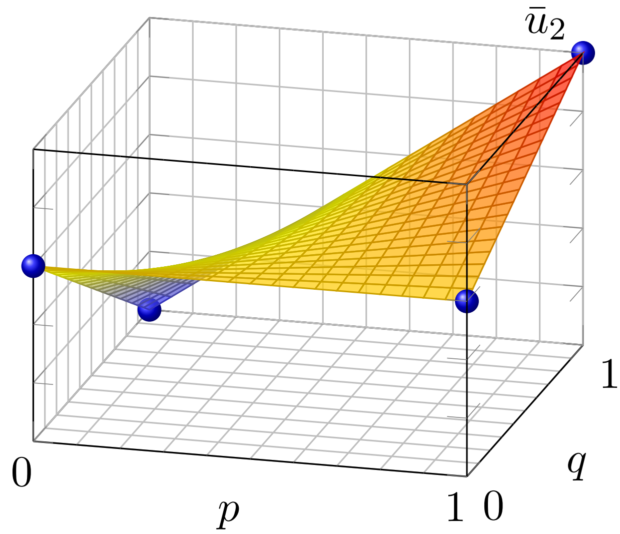
In diesem Spiel gibt es genau zwei reine Nash–Gleichgewichte: Einerseits $(\text{bleiben}, \text{bleiben})$ und andererseits $(\text{gehen}, \text{gehen})$.

Ihre gute Erziehung versetzt beide Spieler zunächst in die Ausgangslage $(\text{bleiben}, \text{bleiben})$. Beide möchten eigentlich lieber gehen, aber ohne Absprache wird keiner den ersten Zug wagen. *Teile und herrsche!*

Beispiel: bleiben oder gehen?

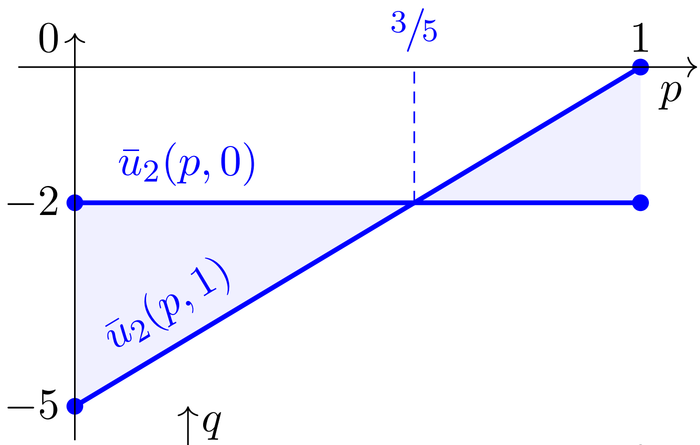
Alternatives Verhalten, je nach Tradition: Als erfahrene Studenten haben Sie zahllose schlechte Vorträge erlitten und gelernt, sich zu wehren. Sie wissen: Die Höflichkeit gebietet, zunächst zehn Minuten zu bleiben; wenn der Vortrag grottenschlecht ist, sollte man sofort danach gehen. Sie wissen das, und Sie wissen, dass alle anderen es auch wissen. In diesem Falle ersetzt das gemeinsame Wissen (*common knowledge*) die explizite Absprache: Nach genau zehn Minuten (gefühlte Ewigkeit) stehen alle gemeinsam auf und gehen. *Einigkeit macht stark!*

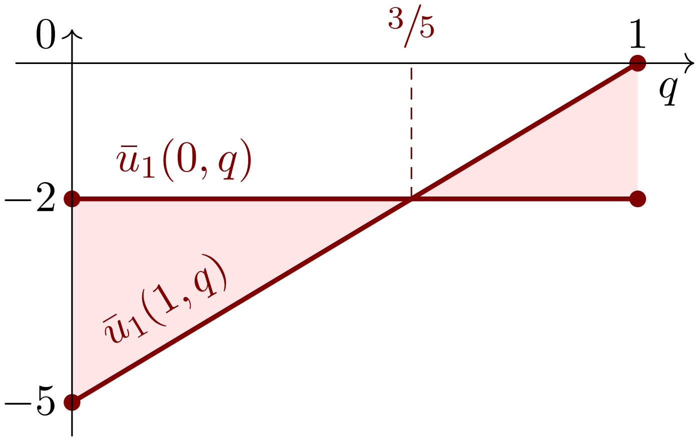


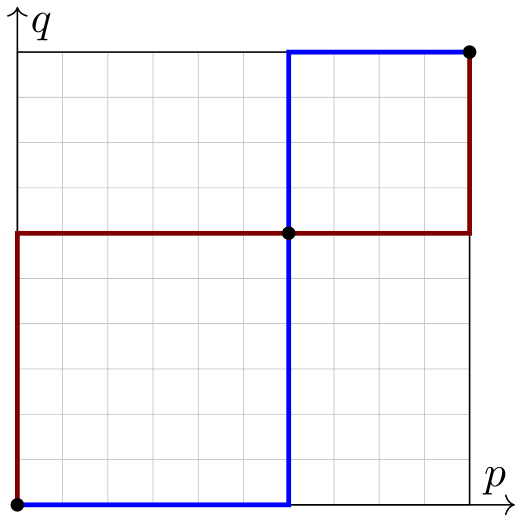


Beispiel: bleiben oder gehen?

A \ B	0	1
0	-2 / -2	-5 / -2
1	-2 / -5	0 / 0







Beispiel: bleiben oder gehen?

Die Graphik für $\bar u_1(0,q)$ und $\bar u_1(1,q)$ zeigt die Fläche $\bar u_1$ von der Seite. Für jede von Bobs Strategien $q \in [0,1]$ liest Alice ihre beste Antwort ab: $p = 0$ für $q < 3/5$ und $p = 1$ für $q > 3/5$ sowie $p \in [0,1]$ für $q = 3/5$.

Die Graphik für $\bar u_2(p,0)$ und $\bar u_2(p,1)$ zeigt die Fläche $\bar u_2$ von der Seite. Für jede von Alice' Strategien $p \in [0,1]$ liest Bob seine beste Antwort ab: $q = 0$ für $p < 3/5$ und $q = 1$ für $p > 3/5$ sowie $q \in [0,1]$ für $p = 3/5$.

Im Diagramm unten rechts tragen wir beide Reaktions-„Funktionen“ ein:

$$\mathrm{NE}_1(\bar u) = \left\{\, (p,q) \in [0,1]^2 \;\middle|\; p \text{ ist eine beste Antwort auf } q \,\right\}$$
$$\mathrm{NE}_2(\bar u) = \left\{\, (p,q) \in [0,1]^2 \;\middle|\; q \text{ ist eine beste Antwort auf } p \,\right\}$$

Ihre Schnittpunkte sind die Nash–Gleichgewichte: $\mathrm{NE} = \mathrm{NE}_1 \cap \mathrm{NE}_2$.

☺ So können Sie graphisch jedes 2×2–Spiel lösen, ebenso $2 \times n$.

☺ Die reinen Nash–Gleichgewichte sind meist recht offensichtlich. Für die gemischten Gleichgewichte müssen Sie sorgfältig rechnen.

☺ Beachten Sie, wie die Symmetrie der Spiele in die Lösung eingeht. Diese Beobachtung illustriert ein allgemeines Prinzip, siehe Satz E2N.

Beispiel: Matching Pennies

Alice und Bob legen jeder verdeckt eine Münze auf den Tisch, dann wird aufgedeckt: Bei Gleichheit gewinnt Bob, bei Ungleichheit gewinnt Alice. (Das ähnelt dem Spiel *Schere-Stein-Papier*, ist aber noch simpler.)

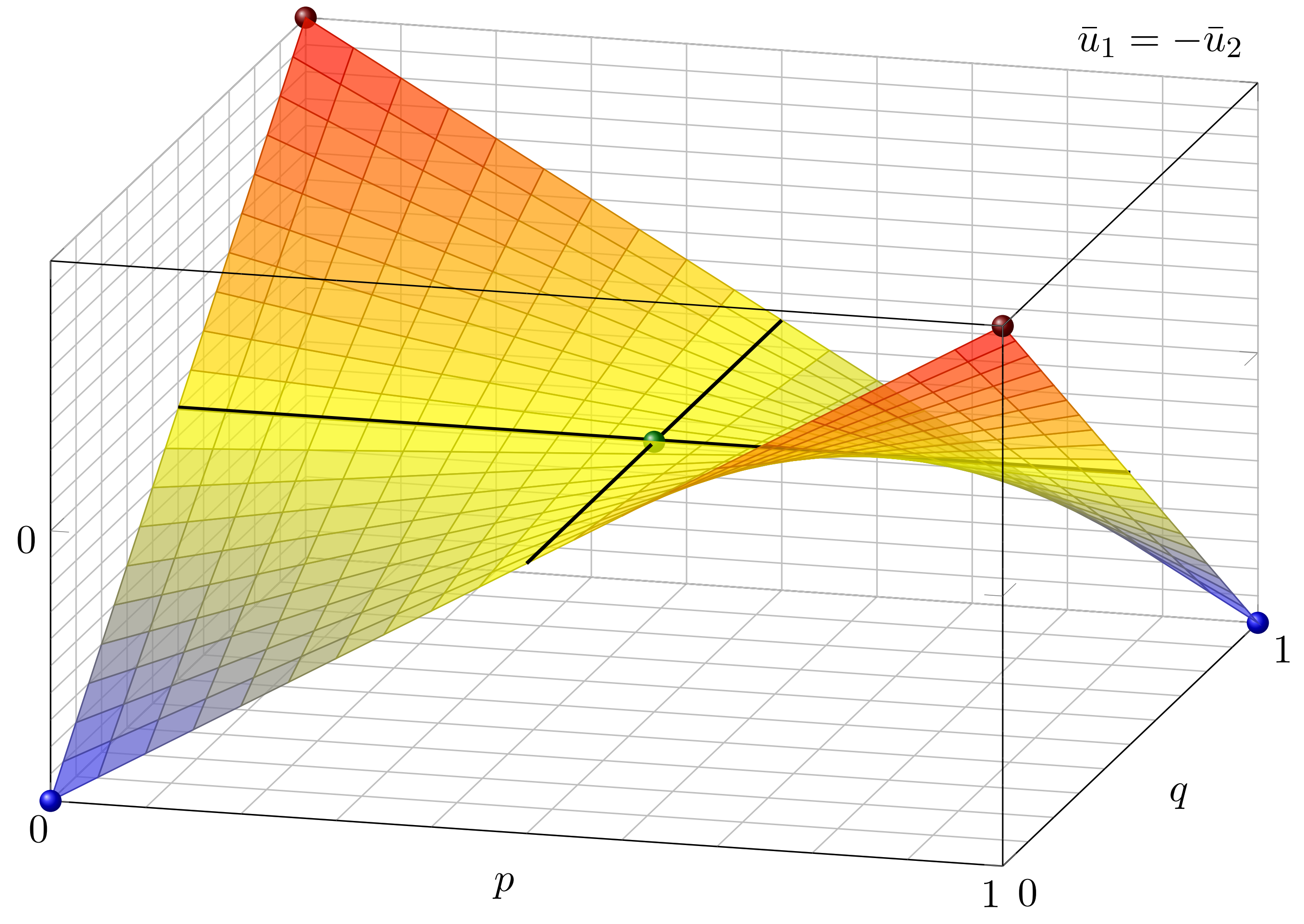
B A	Kopf	Zahl
Kopf	$+1$ -1	-1 $+1$
Zahl	-1 $+1$	$+1$ -1

In diesem Spiel gibt es kein reines Nash–Gleichgewicht!
Erweiterung: Beide Spieler dürfen nun gemischte Strategien wählen!

$$\begin{array}{llll} \text{Spieler A:} & [0,1] \ni p & \mapsto & s_p = (1-p)\cdot\text{Kopf} + p\cdot\text{Zahl} \\ \text{Spieler B:} & [0,1] \ni q & \mapsto & s_q = (1-q)\cdot\text{Kopf} + q\cdot\text{Zahl} \end{array}$$

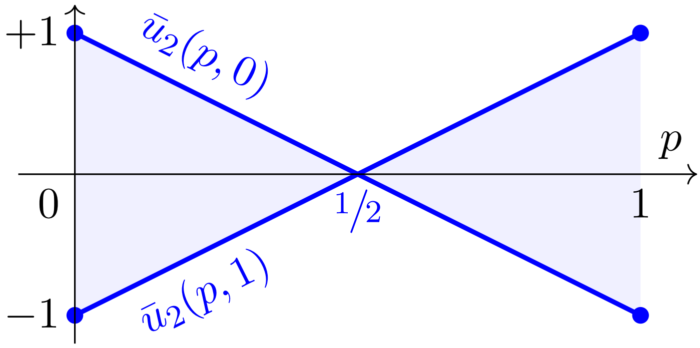
Die Nutzenfunktionen $u_1 = -u_2$ sind bilinear, ihr Graph ist eine Quadrik.

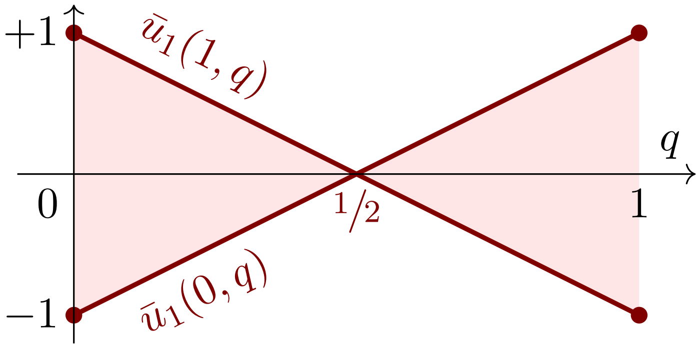
Beispiel: Matching Pennies

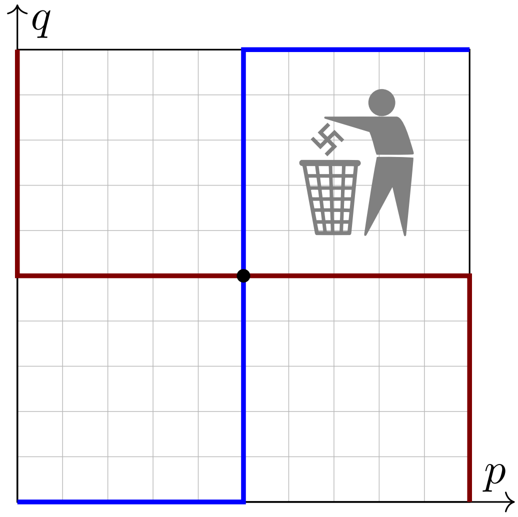


Beispiel: Matching Pennies

A \ B	0	1
0	B: $+1$, A: -1	B: -1, A: $+1$
1	B: -1, A: $+1$	B: $+1$, A: -1







Beispiel: Matching Pennies

Wir betrachten hier ein Nullsummenspiel, denn es gilt $u_1 + u_2 = 0$.

Für jede von Bobs Strategien $q \in [0,1]$ liest Alice ihre beste Antwort ab: $p = 1$ für $q < 1/2$ und $p = 0$ für $q > 1/2$ sowie $p \in [0,1]$ für $q = 1/2$.

Für jede von Alice' Strategien $p \in [0,1]$ liest Bob seine beste Antwort ab: $q = 0$ für $p < 1/2$ und $q = 1$ für $p > 1/2$ sowie $q \in [0,1]$ für $p = 1/2$.

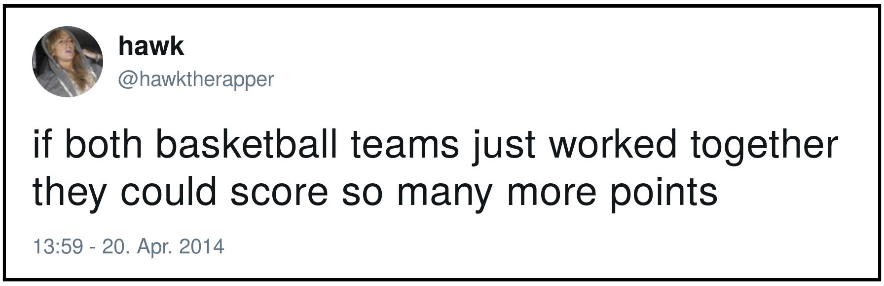
☺ Bob trachtet nach Gleichheit, Alice hingegen wünscht Ungleichheit. Das überträgt sich von reinen auf gemischte Strategien, wie gezeigt.

Im Diagramm unten rechts tragen wir beide Reaktions-„Funktionen“ ein und lesen daran das einzige, hier gemischte Nash–Gleichgewicht ab.

Es ist unglücklich, dass in diesem Beispiel ein Hakenkreuz entsteht, aber diese geometrische Figur tritt hier nun einmal unvermeidlich auf. Nach der Vorlesung wird es ordnungsgemäß entsorgt. (siehe §86 StGB Verbreiten von Propagandamitteln verfassungswidriger Organisationen)

Das ist nur ein Miniatur(bei)spiel, aber durchaus häufig zu beobachten, etwa im Sport, wenn Angreifer und Verteidiger ihre Strategien wählen: Elfmeter im Fußball, koordinierte Spielzüge in allen Teamsportarten, etc.

Anwendung: Basketball Endgame nach Ruminski



In den letzten 20 Sekunden liegt das ballführende Team 2 Punkte hinten. Der Coach nimmt eine Auszeit und legt die Strategie für sein Team fest. Sie spielen ihre Zeit zu Ende und lancieren noch genau einen Versuch. Riskant: 3 Punkte werfen und damit sofort gewinnen. Sicher: 2 Punkte werfen und die Verlängerung erzwingen, mit 50-50-Gewinnchance.

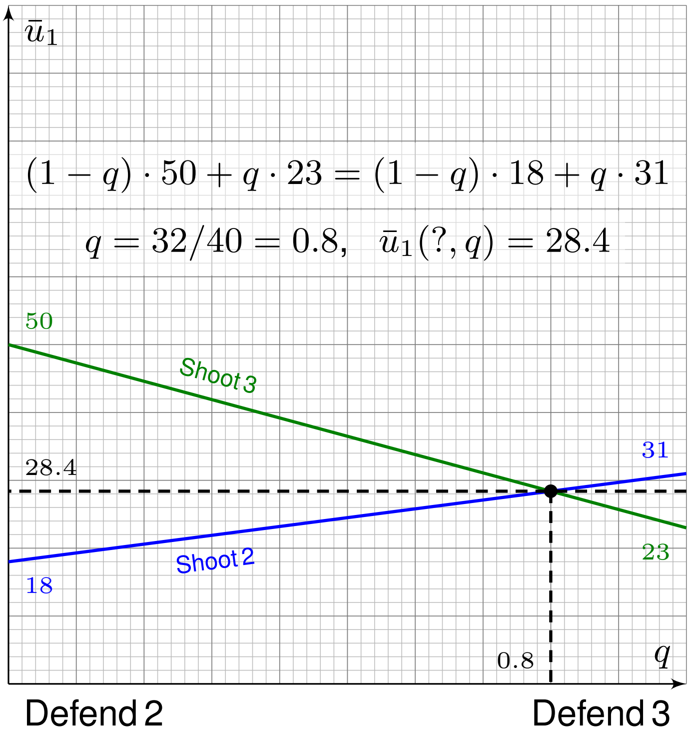
Erfolgstatistik (gerundet):

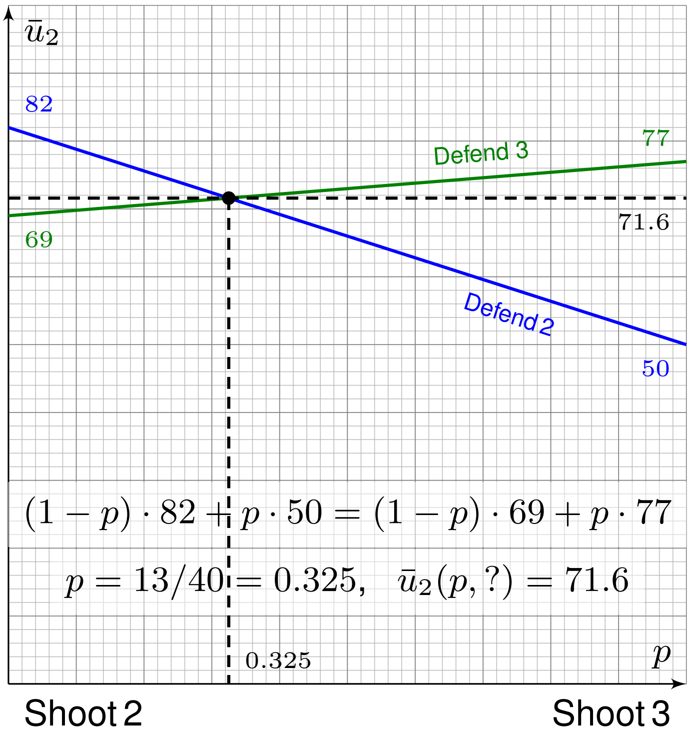
offen 62%, bedrängt 36%

offen 50%, bedrängt 23%

A \ B	Defend 2	Defend 3
Shoot 2	18 / 82	31 / 69
Shoot 3	50 / 50	23 / 77

Anwendung: Basketball Endgame nach Ruminski





Verteidigt Team B mehr als 80% auf 3er, sollte Team A auf 2er spielen. Verteidigt B hingegen weniger als 80% auf 3er, sollte A auf 3er spielen.

Spielt Team A mehr als 32.5% auf 3er, sollte Team B auf 3er verteidigen. Spielt A hingegen weniger als 32.5% auf 3er, sollte B auf 2er verteidigen.

Anwendung: Basketball Endgame nach Ruminski

Diese Endspielanalyse ist stark vereinfacht, aber doch realistisch genug. Sie trifft den Kern des Problems und wird tatsächlich ernsthaft diskutiert, siehe etwa `mindyourdecisions.com/blog/2012/06/19/game-theory`.

Naiv scheint es für das angreifende Team A besser, auf 3er zu spielen, doch die Erfolgschancen hängen stark von Team Bs Verteidigung ab.

Spielte Team A allzu oft und damit vorhersehbar auf den 3er, so würde eine entsprechende 3er-Abwehr die Erfolgschancen stark reduzieren. Spielte Team A hingegen allzu oft und damit vorhersehbar auf den 2er, so würde eine entsprechende 2er-Abwehr die Chancen reduzieren.

Die Gleichgewichtsstrategie $p = 32.5\%$ für Team A lässt idealerweise das Team B im Ungewissen, ob sie 2er oder 3er verteidigen sollen.

Für das verteidigende Team B scheint vorrangig, den 3er zu verhindern, doch damit geben sie Team A mehr Raum unterm Korb für den 2er. Verteidigt Team B zu oft 2er, so geben sie A zu viel Raum für 3er. Die Gleichgewichtsstrategie $q = 80\%$ für Team B lässt idealerweise das Team A im Ungewissen, ob sie auf 2er oder 3er spielen sollen.

Anwendung: Basketball Endgame nach Ruminski

Die Beschreibung des Endspiels in Normalform scheint hier angebracht: Beide Coaches (bzw. Teams) entscheiden in der letzten Auszeit simultan und unabhängig über die zu spielende Strategie. Jedes Team wird sich an diese Absprache halten, kein Spieler sollte egoistisch improvisieren.

Spiele in Normalform, speziell der einfachste Fall einer 2×2–Bimatrix, sind zugegeben extrem vereinfachte Lehrbeispiele. Doch sie illustrieren bereits eine erstaunliche Vielfalt an Phänomenen und erklären typische Muster der Spieltheorie, manchmal auch in ihren realen Anwendungen.

Das Basketball-Endspiel kommt oft genug vor, um interessant zu sein. Die vereinfachte Situation reduziert die relevanten Strategien auf zwei. Hierzu liegen im Basketball umfangreiche Statistiken vor, sodass wir realistische Daten einsetzen können und nicht mutmaßen müssen.

Unser Ergebnis ist intuitiv plausibel. Die Rechnung gibt zudem eine recht präzise Handlungsanweisung an den Trainerstab um das Team. In den letzten Jahren hat die mathematische Analyse im Basketball stark an Akzeptanz gewonnen. Sie kann den Unterschied machen.

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

Schere-Stein-Papier hat kein Gleichgewicht in reinen Strategien.

Hingegen gibt es ein Gleichgewicht (s_1, s_2) in gemischten Strategien:

$$s_1 = s_2 = \frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Stein} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier}$$

Gleiches gilt für Matching Pennies und das Basketball Endgame!
In der Fortsetzung auf gemischte Strategien haben die Spieler mehr Möglichkeiten. Wir würden hoffen, so auch Gleichgewichte zu finden.
Der Satz von Nash besagt genau das und garantiert Gleichgewichte:

Satz E1F: Existenzsatz für Gleichgewichte, John Nash 1950

Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel, wie oben erklärt, und $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \mathbb{R}^n$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.

Dann besitzt das Spiel $\bar{u}$ mindestens ein Nash–Gleichgewicht.

Für jedes endliche Spiel ist vernünftiges Verhalten immer möglich.

Allgemeine Strukturaussage, darauf können wir weiter aufbauen.

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

Der Existenzsatz von Nash erfüllt zwei wesentliche Aufgaben:

(1) Der Satz garantiert, dass jedes endliche Spiel vernünftiges Verhalten ermöglicht. In jedem konkreten Einzelfall kann man dies überprüfen und (mühsam) lösen. Die allgemeine Aussage ist bequem und beruhigend: Wir können durch den Satz Rechenzeit sparen, wo sie nicht nötig ist.

Die *Existenz* einer Lösung ist oft der entscheidende erste Schritt. Wir können sicher sein, dass unsere Suche erfolgreich sein wird. Unsere Mühe wird belohnt. Unsere Hoffnung wird erfüllt.

(2) Darauf aufbauend können wir allgemeine Aussagen ableiten. Das prominenteste Beispiel ist von Neumanns Minimax-Satz E2D, der Hauptsatz für Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele.

Manchmal genügt uns zu wissen, dass Gleichgewichte existieren. Dies gelingt *ohne* jedesmal mühsam explizit rechnen zu müssen. Wir müssen nicht befürchten, über die leere Menge zu sprechen: Wir haben eine gemeinsame *Strukturaussage* für all dieser Spiele!

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

Nashs Existenzsatz besticht durch Eleganz und Allgemeinheit. Dieses Ergebnis ist ein grundlegender erster Schritt der Theorie, er ist gewissermaßen der Ausgangspunkt der modernen Spieltheorie. Für diese und weitere Arbeiten bekam Nash 1994 den Nobelpreis, genauer: Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften.

Umgekehrt gibt es natürlich viele Situationen, in denen wir schließlich explizit rechnen wollen oder müssen. Nashs Satz ist zunächst eine reine Existenzaussage und für die konkrete Rechnung leider wenig hilfreich. Immerhin garantiert der Satz, dass sich unsere Mühe lohnen wird!

Wir wollen rechnen! Für $2 \times n$–Spiele gelingt dies wie in §E3 erklärt. Speziell für Nullsummenspiele werden wir weitere Techniken entwickeln: Von Neumanns Hauptsatz E2D charakterisiert Nash–Gleichgewichte als Min-Maximierer und Max-Minimierer. Wir haben nun Werkzeuge.

Die explizite Berechnung ist ebenfalls ein extrem spannendes Thema: Es mündet in die Lineare Optimierung, alias Lineare Programmierung, und wird uns viel Freude bereiten. Das alles ist schöne Mathematik!

Der Satz von Nash: Existenz von Gleichgewichten

Der Mathematiker John von Neumann und der Wirtschaftswissenschaftler Oskar Morgenstern veröffentlichten 1944 ihr Buch *Theory of Games and Economic Behavior*. Damit legten sie das Fundament der Spieltheorie, insbesondere für den Spezialfall der Nullsummenspiele aufbauend auf von Neumanns Minimax-Satz E2D.

I thought there was nothing worth publishing until the Minimax Theorem was proved. As far as I can see, there could be no theory of games without that theorem. (John von Neumann, 1953)

Das ist ein wichtiger Spezialfall, aber bei weitem nicht ausreichend, denn die meisten realen Spiele haben nicht konstante Summe. Für den allgemeinen Fall fehlten daher zunächst die Werkzeuge.

Definition und Existenz von Nash–Gleichgewichten stammen aus Nashs Dissertation *Non-cooperative Games* von 1950. Dieses Konzept geht weit über Nullsummenspiele hinaus und ist bis heute grundlegend für die erfolgreiche Weiterentwicklung der Spieltheorie.

Brouwers Fixpunktsatz

🙂 Die Spieltheorie mobilisiert und nutzt nahezu alle mathematischen Teildisziplinen. Hier benötigen wir folgende Ergebnisse der Topologie:

Proposition E1G: Homöomorphie der konvexen Körper

Jede kompakte konvexe Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ mit nicht-leerem Inneren ist homöomorph zum Einheitsball $\mathbb{D}^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \le 1 \}$.
Für $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex kompakt gilt $X = \emptyset$ oder $X \cong \mathbb{D}^m$ mit $0 \le m \le n$.

Satz E1H: Fixpunktsatz von Brouwer, 1909

Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ hat mindestens einen Fixpunkt, das heißt, es existiert ein Punkt $a \in \mathbb{D}^n$ mit der Eigenschaft $f(a) = a$.

Für $\mathbb{D}^1 = [-1, 1]$ genügt Zwischenwertsatz. (Übung! Erstes Semester)
Allgemein $n \in \mathbb{N}$: Sperners Lemma (Topologie, viertes Semester), Abbildungsgrad (Algebraische Topologie, fünftes Semester)

🙂 Jedes konvexe Kompaktum $\emptyset \ne X \subset \mathbb{R}^n$ hat die Fixpunkteigenschaft!
Nicht konvex: $X = \mathbb{S}^n$, $f(x) = -x$. Nicht kompakt: $X = \mathbb{R}^n$, $f(x) = x + v$.

Brouwers Fixpunktsatz

Homöomorphie $X \cong \mathbb{D}^n$ bedeutet, es gibt zueinander inverse stetige Abbildungen $g : X \to \mathbb{D}^n$ und $h : \mathbb{D}^n \to X$ mit $h \circ g = \mathrm{id}_X$ und $g \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{D}^n}$.

Können Sie eine Tasse Kaffee so gründlich umrühren, dass kein Punkt bleibt wo er war? Erstaunlich aber wahr: Das ist unmöglich!

Fixpunktsätze wie dieser sind wichtige Werkzeuge der Mathematik. Sie kennen Banachs Fixpunktsatz D2A für kontraktive Abbildungen. Er garantiert Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunkts, zudem bietet er eine effiziente Approximation mit expliziter Fehlerschranke.

Der Fixpunktsatz von Brouwer hingegen ist leider nicht konstruktiv: Er garantiert die Existenz eines Fixpunkts, verrät uns aber nicht wo. (Brouwer war ein vehementer Verfechter konstruktiver Prinzipien; sein berühmtestes Resultat ist tragischerweise nicht konstruktiv.)

Bitte beachten Sie, dass es durchaus mehrere Fixpunkte geben kann, extrem für $\mathrm{id} : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$. Der Ball $\mathbb{D}^n$ als Start und Ziel ist wesentlich: Nicht jeder Raum hat die Fixpunkteigenschaft. Hingegen ist der Satz bei der Funktion $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ sehr großzügig: sie muss nur stetig sein.

Definition E1I: konvex und sternförmig

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Die **Verbindungsstrecke** zwischen Punkten $a, b \in V$ ist die Teilmenge $[a,b] = \{\,(1-t)a + tb \mid t \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le 1\,\} \subseteq V$.

Eine Teilmenge $X \subseteq V$ heißt **konvex**, falls gilt: $\forall a, b \in X : [a,b] \subseteq X$, und **sternförmig** zum Zentrum $a \in X$, falls gilt: $\forall b \in X : [a,b] \subseteq X$.

Satz E1J: Zentralprojektion

(0) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sternförmig zum Zentrum $a \in X^\circ$. Für jeden Randpunkt $b \in \partial X$ gelte Sichtbarkeit $[a,b] \cap \partial X = \{b\}$. Dann existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(X) = \mathbb{D}^n$.

(1) Verschärfung zu bilipschitz: Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sternförmig bezüglich jedes Punktes $a \in B(a_0, \varepsilon)$ für ein $a_0 \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so existiert $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ bilipschitz mit $h(X) = \mathbb{D}^n$.

(2) Jeder konvexe Körper $X \subset \mathbb{R}^n$, das heißt konvex, kompakt mit nicht-leerem Inneren $X^\circ \ne \emptyset$, ist bilipschitz-homöomorph zu $\mathbb{D}^n$.

Beweis: (0) Nach Translation können wir $a = 0$ annehmen. Wir haben $B(0,\varepsilon) \subset X \subseteq \bar{B}(0,R)$ für geeignete Konstanten $0 < \varepsilon \le R$ und somit $\rho : \mathbb{S}^{n-1} \to [\varepsilon, R] : s \mapsto \sup\{\, r \in \mathbb{R}_{\ge 0} \mid rs \in X \,\}$, $\delta X \cap \mathbb{R}_{\ge 0} \cdot s = \{\rho(s) \cdot s\}$.

Die Zentralprojektion $f : \partial X \to \mathbb{S}^{n-1} : x \mapsto x/|x|$ ist wohldefiniert dank $0 \notin \partial X$, zudem stetig, bijektiv dank $f^{-1}(s) = \rho(s) \cdot s$, dank Kompaktheit also ein Homöomorphismus. Insbesondere ist $\rho : s \mapsto |f^{-1}(s)|$ stetig.

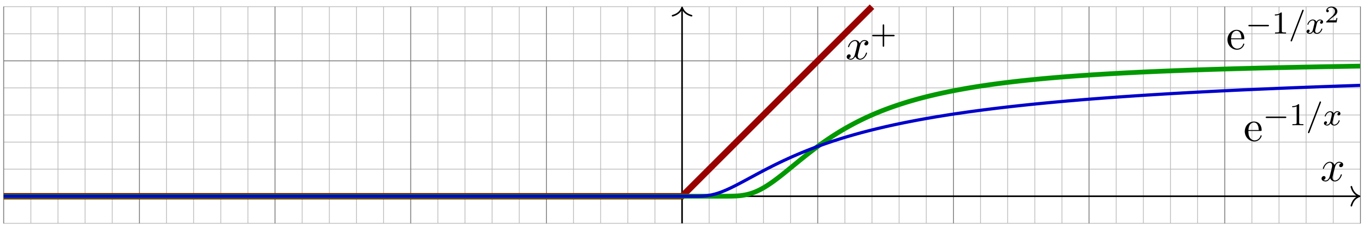
Wir erhalten daraus zueinander inverse Bijektionen

$$h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} x/\rho(x/|x|) & \text{für } x \ne 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

$$k : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} x \cdot \rho(x/|x|) & \text{für } x \ne 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Beide sind stetig in $x \ne 0$, als Komposition stetiger Abbildungen. Stetigkeit im Punkt 0 gilt dank $|h(x)| \le |x|/\varepsilon$ und $|k(x)| \le |x| \cdot R$. Demnach ist $(h,k) : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ ein (Auto-)Homöomorphismus. Zudem gilt $h(X) \subseteq \mathbb{D}^n$ und $k(\mathbb{D}^n) \subseteq X$, also $(h,k) : X \cong \mathbb{D}^n$. $\boxed{\text{QED}}$

Hilfsfunktion zum stetigen Abschneiden [*cutoff*]



Sei $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig mit $h(x)=0$ für $x\le 0$ und $h(x)>0$ für $x>0$. Jede solche Funktion nennen wir **Abschneidung** [*cutoff function*].

Der **Positivteil** von $x\in\mathbb{R}$ ist $x^+=x$ für $x\ge 0$ und $x^+=0$ für $x\le 0$. Mit dem **Negativteil** $x^-=(-x)^+$ gilt $|x|=x^++x^-$ und $x=x^+-x^-$.

Die Funktion $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto x^+$ ist stetig. Ebenso genügt die Funktion $h(x)=(x^+)^\alpha$ mit $\alpha\in\mathbb{R}_{>0}$; sie ist n-fach stetig differenzierbar für $\alpha>n$.

Zu jedem $\alpha\in\mathbb{R}_{>0}$ haben wir die bemerkenswerte **glatte Funktion**

$$h_\alpha : \mathbb{R}\to\mathbb{R} : x\mapsto \begin{cases} e^{-1/x^\alpha} & \text{für } x>0,\\ 0 & \text{für } x\le 0.\end{cases}$$

☺ Diese ist nicht nur stetig oder $1,2,3,\dots$ mal stetig differenzierbar, sondern tatsächlich beliebig oft differenzierbar, also $\mathscr{C}^\infty$–glatt.

Hilfsfunktion zum glatten Abschneiden [*cutoff*]

Diese bemerkenswerte Funktion h_α hat erstaunliche Eigenschaften:

☺ Sie ist überall auf $\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$ analytisch, also lokal um jeden Punkt durch eine Potenzreihe darstellbar. Auf $\mathbb{R}_{<0}$ ist dies trivial, auf $\mathbb{R}_{>0}$ gilt es dank Komposition analytischer Funktionen. An der Klebestelle 0 ist die Funktion h_α immerhin noch $\mathscr{C}^\infty$–glatt, aber nicht mehr analytisch.

Diese berühmten Funktionen dienen oft als mahnendes Gegenbeispiel:

⚠ Nicht jede $\mathscr{C}^\infty$–Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lässt sich in eine Potenzreihe $f(x)=\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ entwickeln: Die zu f gehörige Taylor–Reihe kann divergieren! Selbst wenn sie konvergiert, so nicht unbedingt gegen f!

☺ Die Analysis nutzt die Funktion h_α auch konstruktiv als Werkzeug, etwa zur Konstruktion exotischer Lösungen der Wärmeleitungsgleichung (Andrei Tychonov 1935). Aus h_α konstruieren wir $\mathscr{C}^\infty$–glatte Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto h_\alpha(x-a)\cdot h_\alpha(b-x)$ mit kompaktem Träger $[a,b]$. Diese Testfunktionen dienen als Grundlage für die Theorie der Distributionen. Hierfür erhielt Laurent Schwartz 1950 die Fields-Medaille.

Ist diese Funktion wirklich glatt?

☺ Die Funktion h_α ist schön und wichtig und verdient eine Würdigung:

Aufgabe: Sei $g:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}:x\mapsto g(x):=c_1x^{e_1}+c_1x^{e_2}+\dots+c_nx^{e_n}$, mit Koeffizienten $c_1,c_2,\dots,c_n\in\mathbb{R}$ und Exponenten $e_1,e_2,\dots,e_n\in\mathbb{R}$, und

$$f\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,:\,x\mapsto f(x):=\begin{cases} g(x)\,\mathrm{e}^{-1/x^\alpha} & \text{für } x>0,\\ 0 & \text{für } x\le 0.\end{cases}$$

(1) Ist f stetig? in $x\ne 0$? in $x=0$? differenzierbar? in $x\ne 0$? in $x=0$? Wie rechnet man die Ableitung aus? in $x\ne 0$? in $x=0$? Zeigen Sie:

$$f'(x)=\begin{cases} \left[g'(x)+g(x)\cdot\alpha/x^{\alpha+1}\right]\mathrm{e}^{-1/x^\alpha} & \text{für } x>0,\\ 0 & \text{für } x\le 0.\end{cases}$$

(2) Ist f stetig diff'bar? zweimal? beliebig oft? also $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

(3) Berechnen Sie die Taylor–Reihe der Funktion f um $x=0$. Konvergiert die Taylor–Reihe? Konvergiert sie gegen f? Ist die Funktion f analytisch? in $x\ne 0$? in $x=0$?

Ist diese Funktion wirklich glatt?

Lösung: (1) In jedem Punkt $x\ne 0$ ist f stetig / glatt / analytisch, denn dort ist f eine Komposition stetiger / glatter / analytischer Funktionen. Die angegebene Ableitung $f'(x)$ folgt aus Produkt- und Kettenregel. Es bleibt nur noch das Verhalten in $x=0$ zu klären. Für $x\searrow 0$ gilt:

$$f(x)=g(x)\Big/\left(1+\frac{1}{x^\alpha}+\frac{1}{2!x^{2\alpha}}+\frac{1}{3!x^{3\alpha}}+\frac{1}{4!x^{4\alpha}}+\dots\right)\;\to\;0$$

Für $x\nearrow 0$ gilt $f(x)=0\to 0$. Somit ist f stetig in 0. Für $x\searrow 0$ gilt:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=\frac{g(x)}{x}\Big/\left(1+\frac{1}{x^\alpha}+\frac{1}{2!x^{2\alpha}}+\dots\right)\;\to\;0$$

Rechtsseitig gilt $f'(0+)=0$. Linksseitig gilt trivialerweise $f'(0-)=0$. Also ist f tatsächlich differenzierbar in 0, und die Ableitung ist $f'(0)=0$.

(2) Die Ableitung f' ist von derselben Form, dank (1) also differenzierbar. Per Induktion ist f somit beliebig oft differenzierbar, kurz $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(3) Für $k\in\mathbb{N}$ gilt $f^{(k)}(0)=0$. Die Taylor–Reihe in 0 ist also $T(x)=0$. Sie konvergiert, aber nicht gegen $f\ne 0$! Somit ist f in 0 nicht analytisch.

Konstruktion der Nash–Funktion

Zum Strategievektor $s = (s_1, \dots, s_n) \in \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ sei $\bar{u}_i^s : \bar{S}_i \to \mathbb{R} : x \mapsto \bar{u}_i(s_1, \dots, s_{i-1}, x, s_{i+1}, \dots, s_n)$ und weiter

$$S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell\}, \quad s_i = \sum\nolimits_k p_i^k s_i^k, \quad \delta_i^k := h\big[\bar{u}_i^s(s_i^k) - \bar{u}_i^s(s_i)\big] \ge 0,$$

$$\check{s}_i := \sum\nolimits_k \check{p}_i^k s_i^k \text{ mit } \check{p}_i^k := \frac{p_i^k + \delta_i^k}{1 + \sum_j \delta_i^j}, \quad \text{also } \check{p}_i^k \ge 0 \text{ und } \sum\nolimits_k \check{p}_i^k = 1.$$

Lemma E1K: Gleichgewichte als Fixpunkte

Zum Spiel u bzw. $\bar{u}$ konstruieren wir so die stetige **Nash–Funktion**
$f : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n : s = (s_1, \dots, s_n) \mapsto \check{s} = (\check{s}_1, \dots, \check{s}_n)$.
Fixpunkte von f sind Nash–Gleichgewichte von $\bar{u}$, also $\operatorname{fix}(f) = \operatorname{NE}(\bar{u})$.

Beweis: „$\supseteq$“: Klar nach Konstruktion. „$\subseteq$“: Sei $s = f(s)$ ein Fixpunkt.
Für $s_i = \sum_k p_i^k s_i^k$ gilt $\bar{u}_i^s(s_i) = \sum_k p_i^k \bar{u}_i^s(s_i^k)$ nach Definition von $\bar{u}$.
Es gibt einen Index k mit $p_i^k > 0$ und $\bar{u}_i^s(s_i^k) \le \bar{u}_i^s(s_i)$, somit $\delta_i^k = 0$.
Aus $\check{p}_i^k = p_i^k$ folgt $\delta_i^j = 0$ für alle $j = 0, 1, \dots, \ell$, also $\bar{u}_i^s(s_i^j) \le \bar{u}_i^s(s_i)$.
Demnach gilt $\bar{u}_i^s(s_i) = \max \bar{u}_i^s$; jede Strategie s_i ist beste Antwort. $\boxed{\text{QED}}$

Konstruktion der Nash–Funktion

Dieses Lemma beweist Nashs Existenzsatz E1F für Gleichgewichte!

☺ Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel. Zur affinen Fortsetzung $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \mathbb{R}^n$ suchen wir Nash–Gleichgewichte. Die Nash–Funktion $f : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$ ist stetig und ihre Fixpunkte sind genau die ersehnten Nash–Gleichgewichte. Dank Brouwers Fixpunktsatz E1H existiert ein Fixpunkt.

☺ Warum können wir den Fixpunktsatz von Brouwer auf f anwenden? Wir setzen hier voraus, dass jede reine Strategiemenge S_i endlich ist, geschrieben $S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell\}$. Die Menge $\bar{S}_i = [s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^\ell] \cong \mathbb{D}^\ell$ der gemischten Strategien ist ein Simplex, also konvex und kompakt, somit homöomorph zu einem Ball. Das Produkt $\bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$ ebenso.

☺ Dieser geniale Beweis ist in wenigen Zeilen hingeschrieben und so gesehen leicht, ich finde ihn dennoch extrem raffiniert. Wenn Sie länger darüber nachdenken, werden Sie ihn schließlich recht natürlich finden: Die Nash–Funktion f beschreibt eine Optimierung durch *Trial and Error*, die wir in unseren Experimenten beobachten bzw. intuitiv anwenden.

Konstruktion der Nash–Funktion

☺ Was bedeutet diese geschickt konstruierte Nash–Funktion f? Glücklicherweise können wir die Funktion verstehen und so merken:

Die Größe $\delta_i^k \ge 0$ gibt an, um wie viel sich Spieler i verbessern kann, wenn er seine gemischte Strategie s_i durch die reine Strategie s_i^k ersetzt. Dies entspricht einer der Ecken des Simplex $\bar{S}_i$; im Falle $\delta_i^k > 0$ ist die Ecke s_i^k attraktiv. Die verbesserte Strategie $s \mapsto \check{s}$ wird neu gemischt: attraktive Ecken werden stärker gewichtet, unattraktive schwächer.

☺ Falls gewünscht können wir die Nash–Funktionen f sogar glätten.

Statt $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^+$ ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x^+)^2$ stetig differenzierbar. Wir können sogar eine beliebig oft differenzierbare Funktion wählen, etwa $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \exp(-1/x^\alpha)$ für $x > 0$ und $x \mapsto 0$ für $x \le 0$. Damit wird unsere Nash–Funktion f sogar $\mathscr{C}^\infty$–glatt!

☺ Dieser schöne Beweis ist **instruktiv**, aber leider nicht **konstruktiv**. Er garantiert die Existenz von Lösungen, liefert uns aber keine Methode, diese zu finden oder zu approximieren (wie etwa Banachs Fixpunktsatz). Effiziente Algorithmen sind daher ein eigenes Thema für sich.

Illustration der Nash–Funktion

Wir illustrieren die Nash–Funktion f aus dem Beweis im kleinsten Fall: zwei Spieler mit je zwei reinen Strategien, $S_1 = \{s_1^0, s_1^1\}$, $S_2 = \{s_2^0, s_2^1\}$. Die gemischten Strategien $s_1 = (1-p)s_1^0 + ps_1^1$ und $s_2 = (1-q)s_2^0 + qs_2^1$ parametrisieren wir hierbei durch die beiden Parameter $(p, q) \in [0, 1]^2$. Die Auszahlungsfunktion $\tilde{u} : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}^2$ ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_1(p, q) &= a_{00}(1-p)(1-q) + a_{10}p(1-q) + a_{01}(1-p)q + a_{11}pq \\
\tilde{u}_2(p, q) &= b_{00}(1-p)(1-q) + b_{10}p(1-q) + b_{01}(1-p)q + b_{11}pq
\end{aligned}$$

Die Nash–Funktion $f : [0, 1]^2 \to [0, 1]^2$ aus dem Beweis ist dann:

$$\check{p} = f_1(p, q) = \frac{p + [\tilde{u}_1(1, q) - \tilde{u}_1(p, q)]^+}{1 + [\tilde{u}_1(0, q) - \tilde{u}_1(p, q)]^+ + [\tilde{u}_1(1, q) - \tilde{u}_1(p, q)]^+} \in [0, 1]$$

$$\check{q} = f_2(p, q) = \frac{q + [\tilde{u}_2(p, 1) - \tilde{u}_2(p, q)]^+}{1 + [\tilde{u}_2(p, 0) - \tilde{u}_2(p, q)]^+ + [\tilde{u}_2(p, 1) - \tilde{u}_2(p, q)]^+} \in [0, 1]$$

Als Komposition stetiger Funktionen ist f offensichtlich stetig.

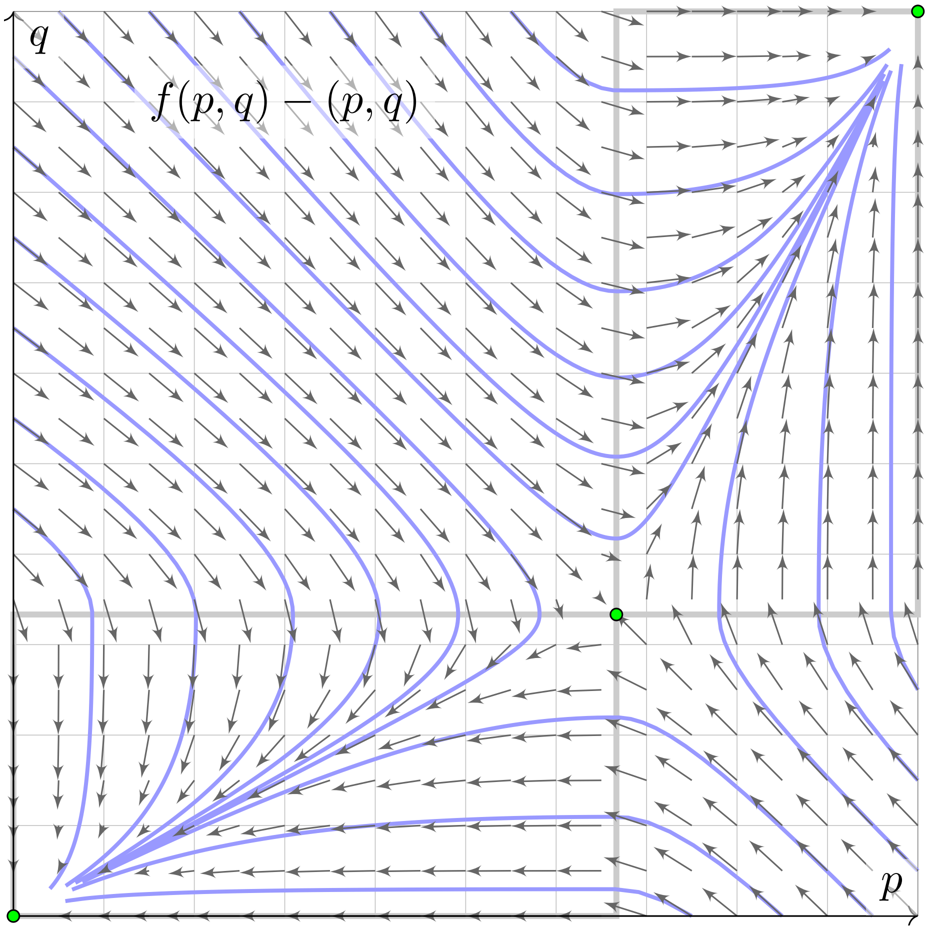
Nash–Funktion zu Bach oder Strawinsky

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Bach oder Strawinsky* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

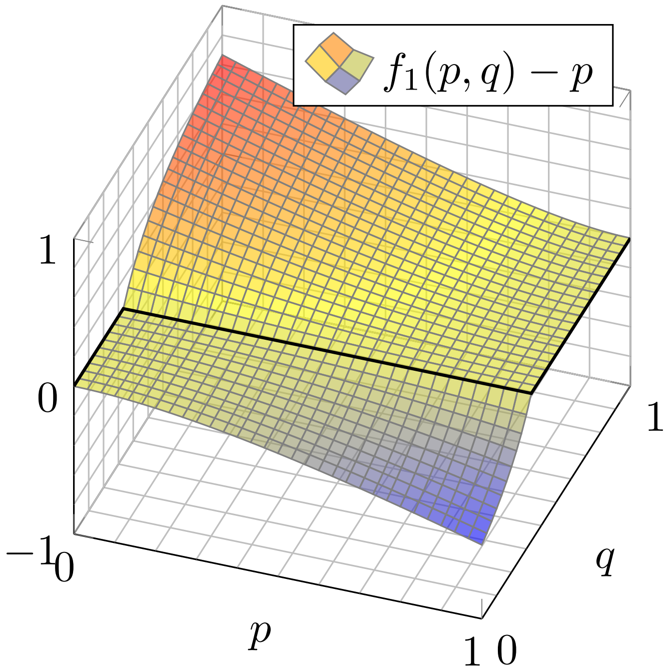
A \ B	Bach	Strawinsky
Bach	1, 2	0, 0
Strawinsky	0, 0	2, 1

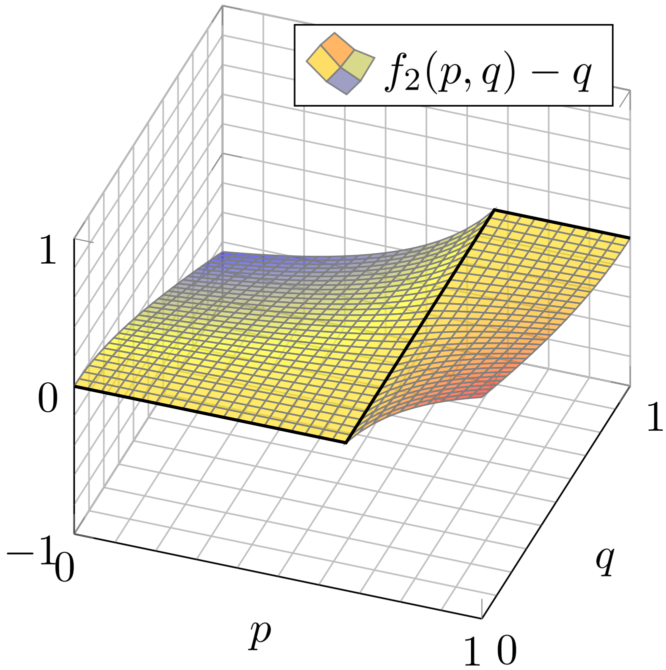
Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.

Wir sehen wunderbar die drei Fixpunkte des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ sind dies die drei Nash–Gleichgewichte. Zur Anregung Ihrer Phantasie zeige ich typische Flusslinien.



Nash–Funktion zu Bach oder Strawinsky





Wir zeigen das Vektorfeld $(u,v) = f(p,q) - (p,q)$ und die Komponenten.
Die Nullstellenmengen von u und v sind jeweils die Reaktionsfunktionen.
Jede Nullstelle $u(p,q) = 0$ bedeutet: p ist eine beste Antwort auf q.
Jede Nullstelle $v(p,q) = 0$ bedeutet: q ist eine beste Antwort auf p.
Die Gleichgewichte $(0,0)$ und $(1,1)$ sind stabil, aber $(2/3, 1/3)$ instabil.

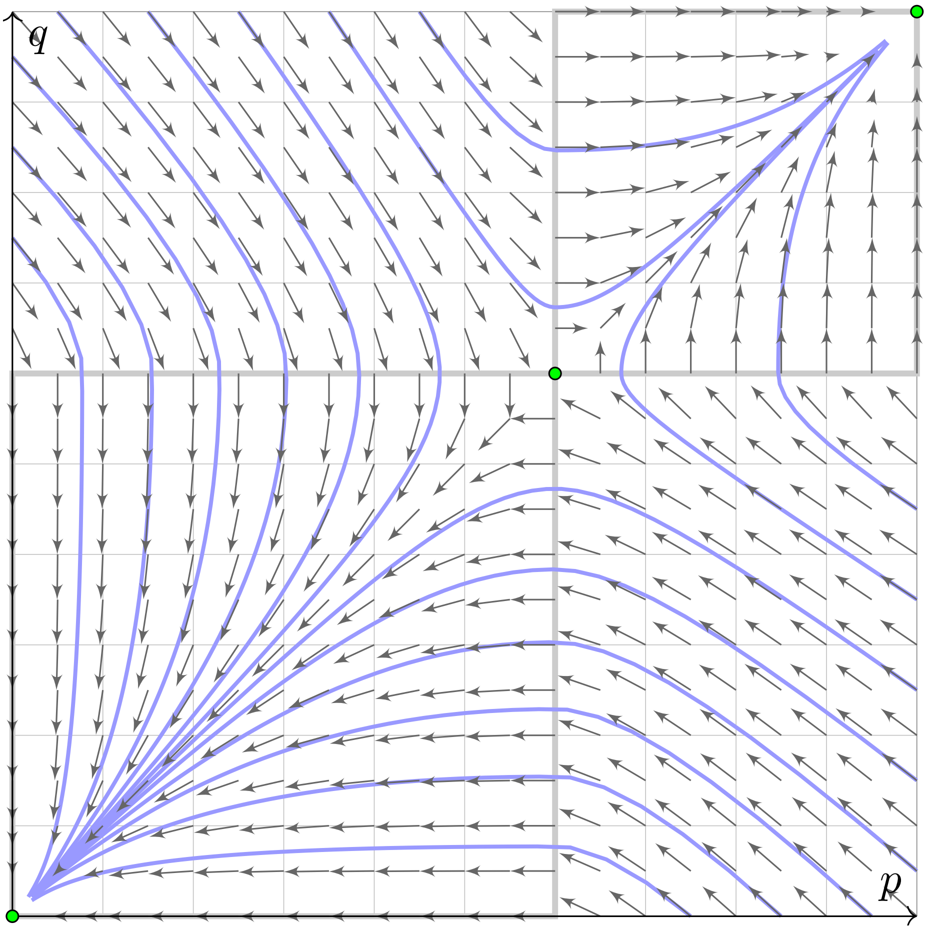
Nash–Funktion zu Bleiben-oder-Gehen

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Bleiben-oder-Gehen* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

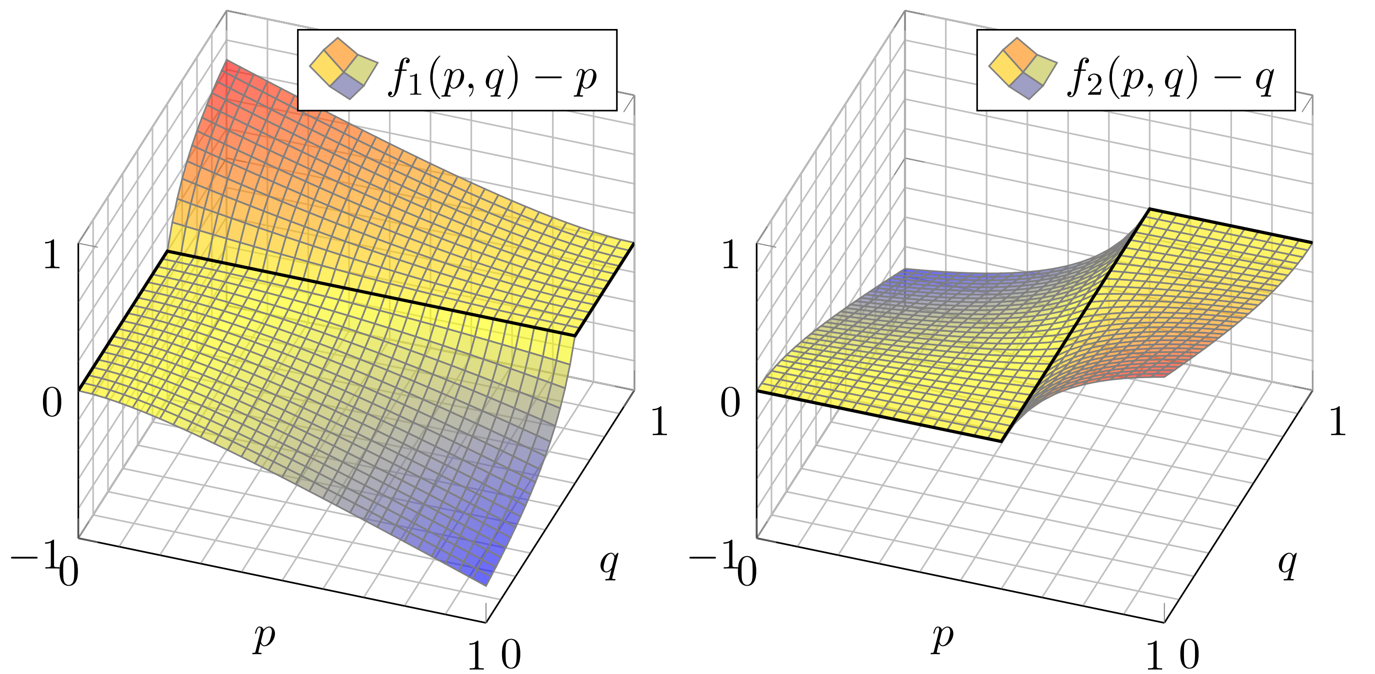
A \ B	bleiben	gehen
bleiben	-2 / -2	-2 / -5
gehen	-5 / -2	0 / 0

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.

Wir sehen wunderbar die drei Fixpunkte des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ sind dies die drei Nash–Gleichgewichte.



Nash–Funktion zu Bleiben-oder-Gehen



Wir zeigen das Vektorfeld $(u, v) = f(p, q) - (p, q)$ und die Komponenten.
Die Nullstellenmengen von u und v sind jeweils die Reaktionsfunktionen.
Jede Nullstelle $u(p, q) = 0$ bedeutet: p ist eine beste Antwort auf q.
Jede Nullstelle $v(p, q) = 0$ bedeutet: q ist eine beste Antwort auf p.
Die Gleichgewichte $(0, 0)$ und $(1, 1)$ sind stabil, aber $(0.6, 0.6)$ instabil.

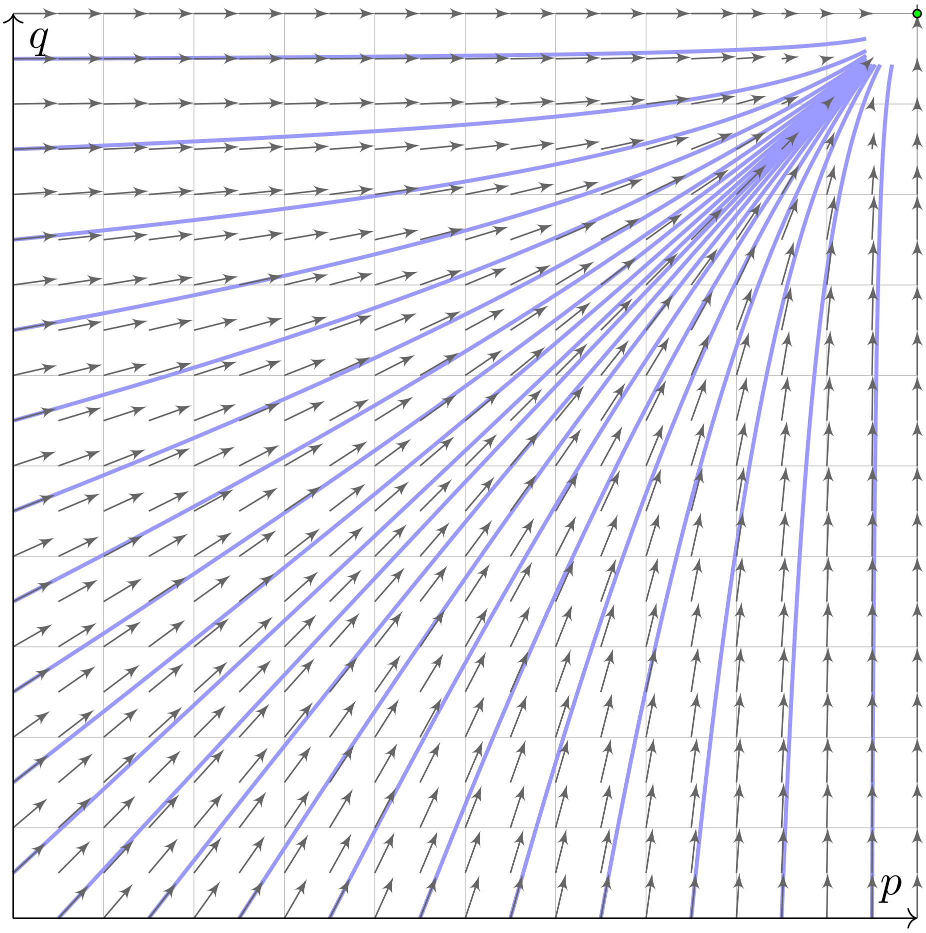
Nash–Funktion zum Gefangenendilemma

Zur Erinnerung die Daten des *Gefangenendilemmas* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

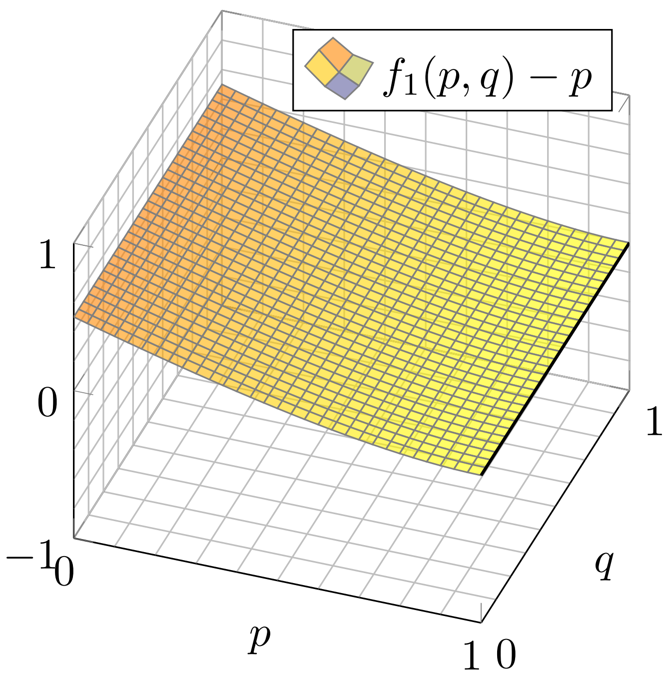
A \ B	schweigen	gestehen
schweigen	A: -1, B: -1	A: -5, B: 0
gestehen	A: 0, B: -5	A: -4, B: -4

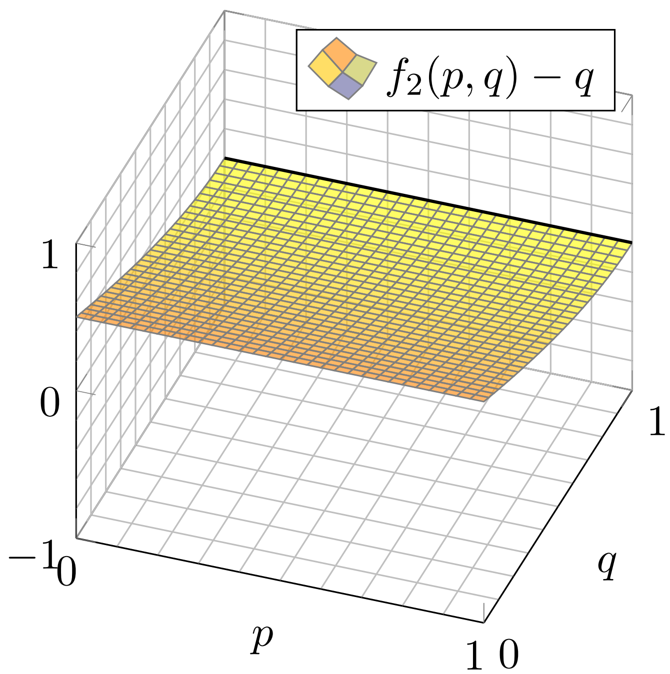
Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.

Wir sehen wunderbar den einzigen Fixpunkt des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ ist dies das einzige Nash–Gleichgewicht.



Nash–Funktion zum Gefangenendilemma





Wir zeigen das Vektorfeld $(u,v) = f(p,q) - (p,q)$ und die Komponenten. Die Nullstellenmengen von u und v sind jeweils die Reaktionsfunktionen. Jede Nullstelle $u(p,q) = 0$ bedeutet: p ist eine beste Antwort auf q. Jede Nullstelle $v(p,q) = 0$ bedeutet: q ist eine beste Antwort auf p. Das Gleichgewicht $(0,0)$ ist hier stabil.

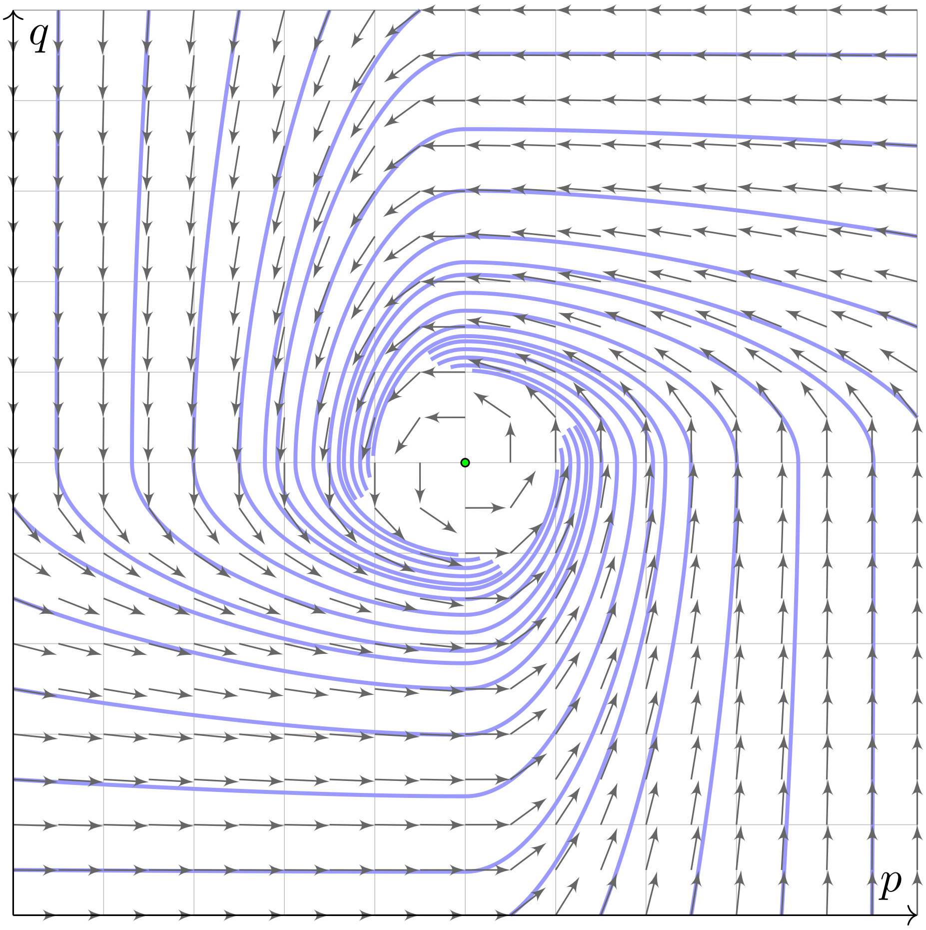
Nash–Funktion zu Matching Pennies

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Matching Pennies* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

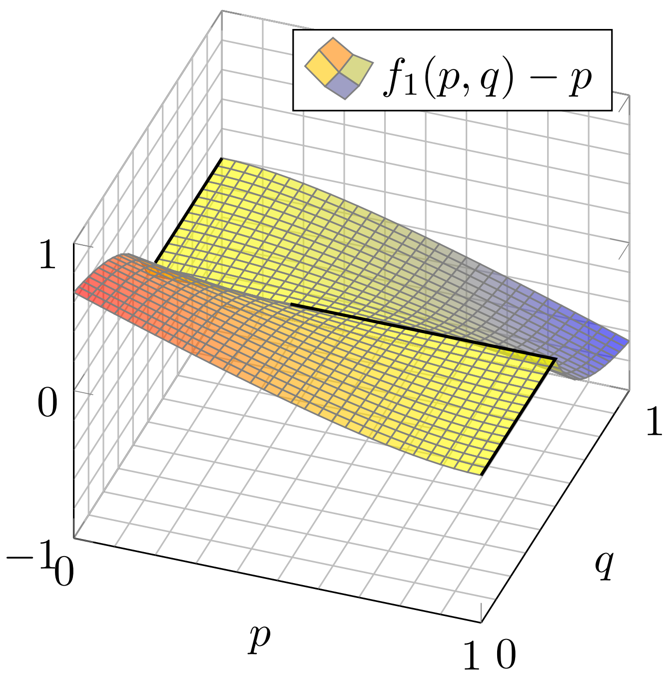
A \ B	Kopf	Zahl
Kopf	-1, $+1$	$+1$, -1
Zahl	$+1$, -1	-1, $+1$

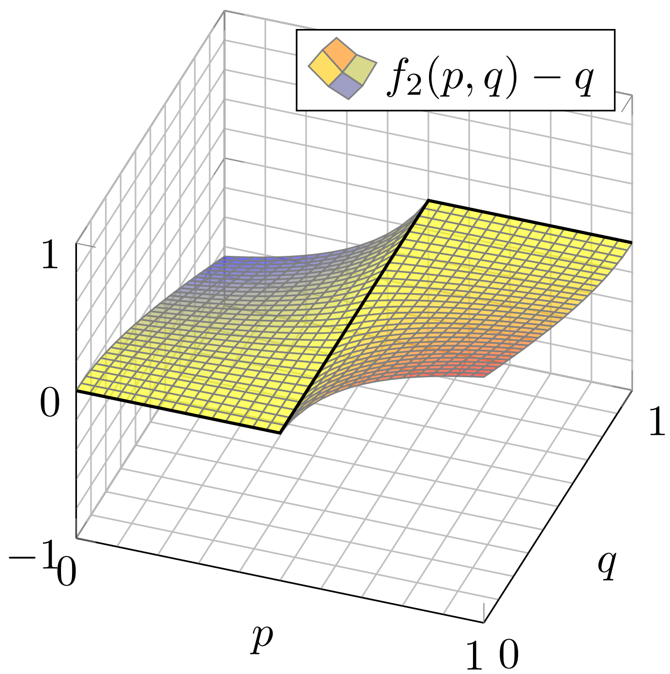
Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.

Wir sehen wunderbar den einzigen Fixpunkt des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ ist dies das einzige Nash–Gleichgewicht.



Nash–Funktion zu Matching Pennies





Wir zeigen das Vektorfeld $(u,v) = f(p,q) - (p,q)$ und die Komponenten. Die Nullstellenmengen von u und v sind jeweils die Reaktionsfunktionen. Jede Nullstelle $u(p,q) = 0$ bedeutet: p ist eine beste Antwort auf q. Jede Nullstelle $v(p,q) = 0$ bedeutet: q ist eine beste Antwort auf p. Das Gleichgewicht $(1/2, 1/2)$ ist ein stabiler Strudelpunkt.

Was lehren uns die Nash–Funktion und diese schönen Illustrationen? Eine interessante Interpretation der Gleichgewichte ist die folgende: Die Spieler **wiederholen** immer wieder dasselbe Spiel u und **lernen**.

Sie starten in einem Zustand $x(t_0) = (p, q) \in [0, 1]^2$, beobachten jeweils das Ergebnis und aktualisieren ihre Strategien in kleinen Schritten: Sie spielen erneut und beobachten und aktualisieren, usw.

☺ Das ist im Wesentlichen das hier naheliegende **Euler–Verfahren** zur Konstruktion eines Polygonzuges $x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots$ in $[0, 1]^2$. Die Zeitschritte $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ können wir dabei vorgeben.

☺ Im Grenzübergang zu beliebig kleinen Schritten erhalten wir die **Differentialgleichung** $\dot{x} = g(x)$ zum oben gezeigten Vektorfeld $g(x) = f(x) - x$. Hierzu habe ich die Flusslinien gezeichnet.

☺ Das bietet uns konkrete Anschauung und wunderbare Einsichten: Wir haben nicht nur die Gleichgewichte als Fixpunkte, sondern gewinnen zudem einen ersten qualitativen Eindruck außerhalb der Gleichgewichte!

Aufgabe: Wie glatt ist das Vektorfeld g in der Gleichung $\dot{x} = g(x)$? Garantiert das Existenz, Eindeutigkeit und Glattheit von Lösungen?

Lösung: Die Funktion $h(x) = x^+$ ist lipschitz-stetig, ebenso f. Wir können also den Satz von Picard–Lindelöf anwenden! Übung: Schreiben Sie die Dehnungsschranken sorgfältig aus.

☺ Bei der Definition der Nash–Funktion $f : \bar{S} \to \bar{S}$ haben wir mit der Hilfsfunktion h noch einige Freiheiten, wie oben erwähnt. Insbesondere können wir f nicht nur als stetig konstruieren, sondern auch stetig differenzierbar, sogar **beliebig glatt**.

☺ Wir nutzen dankend alle Werkzeuge der **autonomen dynamischen Systeme**, also der gewöhnlichen Differentialgleichungssysteme im $\mathbb{R}^n$. Insbesondere können wir Klassifikation der **lokalen Dynamik** um einen Fixpunkt nutzen, hier allerdings eher topologisch, da die Jacobi–Matrix mangels Differenzierbarkeit nicht definiert ist oder Null nach Glättung.

Hatte ich es schon erwähnt: Das alles ist wunderschöne Mathematik!

Nash–Funktion und Populationsdynamik

Wir sehen in den obigen Beispielen **stabile und instabile Fixpunkte**. Das hat unmittelbare Auswirkungen in der Populationsdynamik.

Statt zweier Spieler können wir uns auch zwei **Populationen** A und B vorstellen. In der ersten ist die Mischung der Strategien $1-p$ und p, in der zweiten $1-q$ und q. Jedes Individuum aus Population A spielt gegen zahlreiche Gegner aus Population B und aktualisiert aufgrund dieser Erfahrung seine Strategie, falls ihm das profitabel erscheint.

☺ Jedes Individuum spielt in diesem Modell seine fest gewählte **reine** Strategie, randomisiert also nicht! Doch als Mittelwert über die gesamte Population erhalten wir die lineare Fortsetzung $\bar{u}$ gemäß der Erwartung.

☺ Individuen beider Populationen optimieren ihr Verhalten nicht aktiv, diese Aufgabe übernimmt die **Selektion** von ganz allein: Erfolgreiche Strategien vermehren sich schneller, weniger erfolgreiche langsamer.

☺ Somit beobachten wir im Populationsmittel die obige Dynamik. Bei der Gestaltung der Funktion f haben wir noch einige Freiheiten, aber das qualitative Verhalten ist bereits sehr aufschlussreich!

Nash–Funktion und Populationsdynamik

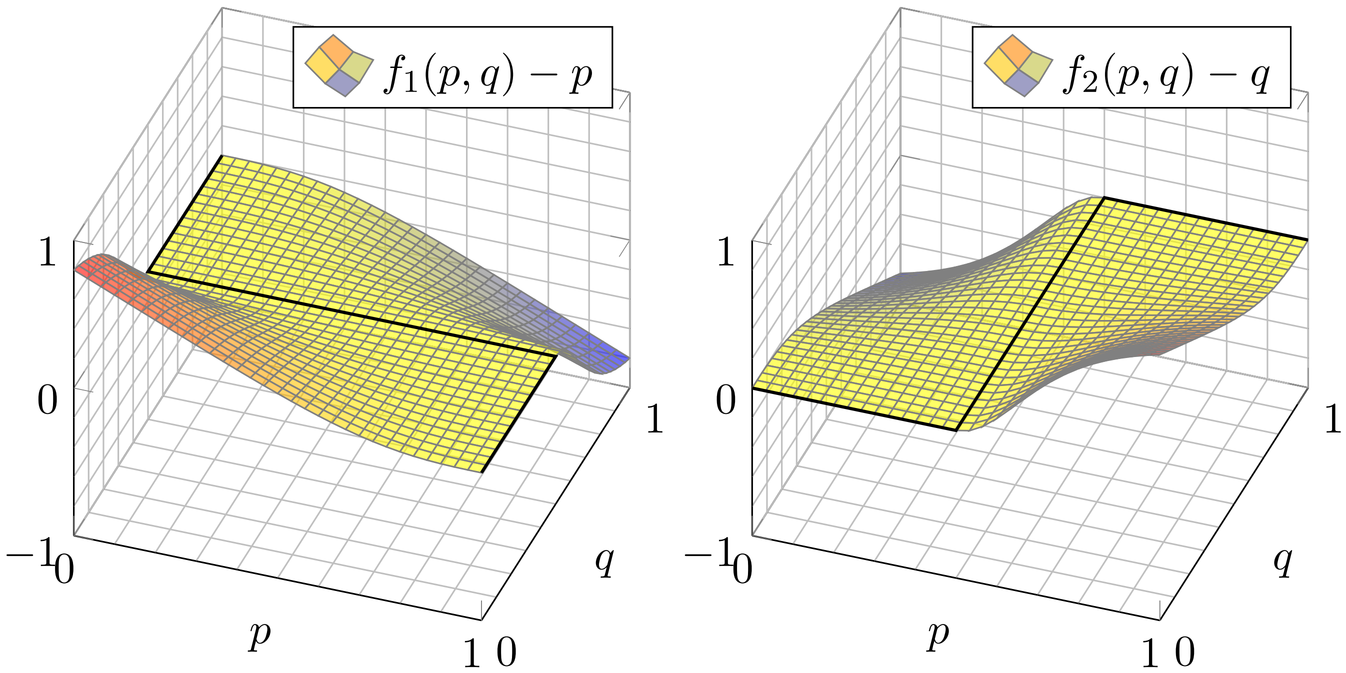
Der Vorteil dieser Sichtweise ist, dass die mentalen Anforderungen an die Individuen sehr gering sind. Dieses Modell lässt sich daher auch in der **Evolutionsbiologie** gut anwenden, sogar auf das Verhalten von einfachen Lebewesen, etwa Insekten, die nur geringe Rechenkapazität und keinerlei spieltheoretische Kenntnisse haben (soweit ich weiß).

☺ Im Mittel beobachten wir die gerade erklärte **Populationsdynamik**. Sie wird angetrieben durch den Selektionsdruck. Die Dynamik unterliegt im Kleinen zwar erheblichen stochastischen Störungen, doch bei großen Populationen ist die Differentialgleichung eine recht gute Näherung.

☺ Anschaulich strebt sie einem stabilen Fixpunkt zu oder ruht in einem. Instabile Fixpunkte hingegen werden nicht dauerhaft beobachtet: Jede noch so kleine zufällige Abweichung führt uns fort.

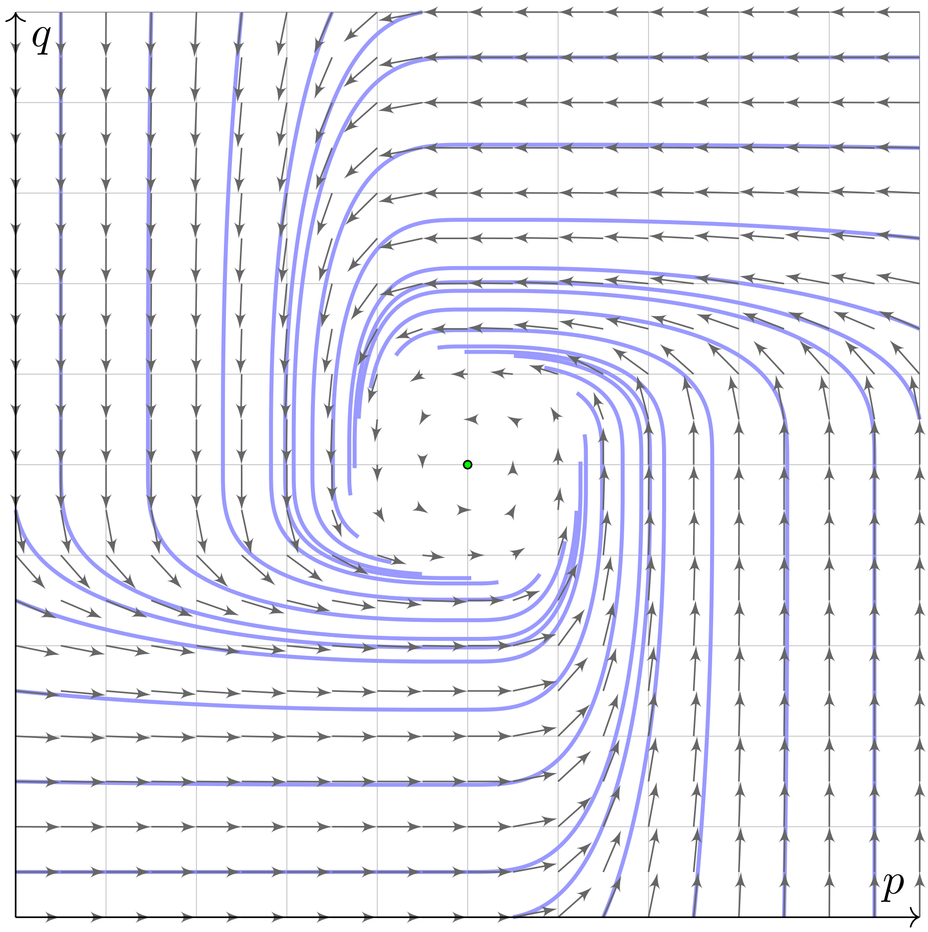
☺ Genauer betrachtet sind die Nash–Gleichgewichte nicht alle gleich, sie haben eine Mikrostruktur (analytisch, geometrisch, topologisch), sie haben lokale Eigenschaften bezüglich der evolutionären Dynamik.

Variante: differenzierbare Nash–Funktion

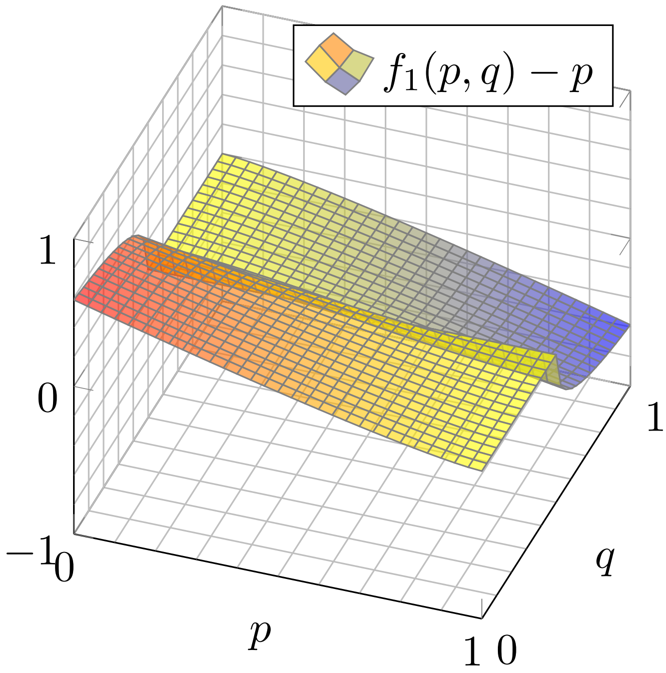


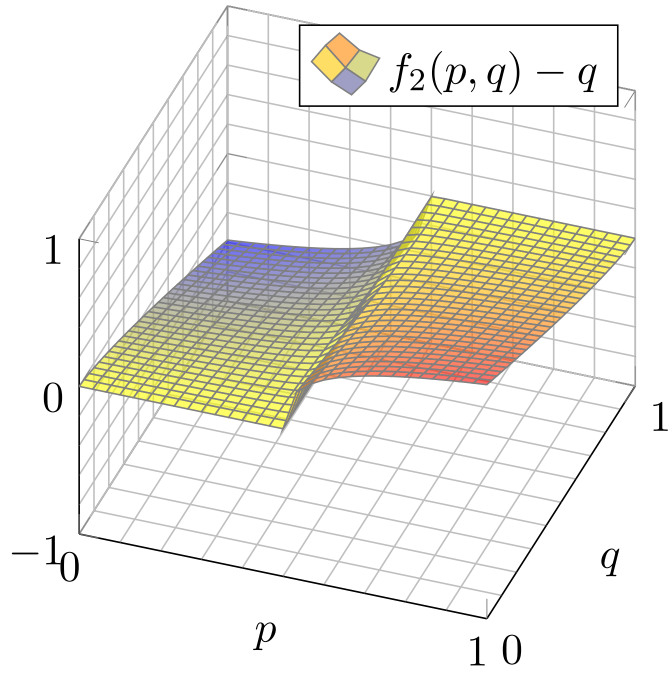
Die Funktion $x \mapsto x^+$ ist stetig, aber in $x = 0$ nicht differenzierbar, also $\mathscr{C}^0$, aber nicht $\mathscr{C}^1$. Ich ersetze sie hier durch die Funktion $x \mapsto (x^+)^2$, diese ist $\mathscr{C}^1$, aber nicht $\mathscr{C}^2$. Die Graphik ist erwartungsgemäß glatter, allerdings sehen wir die Nullstellen nicht mehr so markant als Knicke.

Variante: differenzierbare Nash–Funktion



Variante: hölder–stetige Nash–Funktion

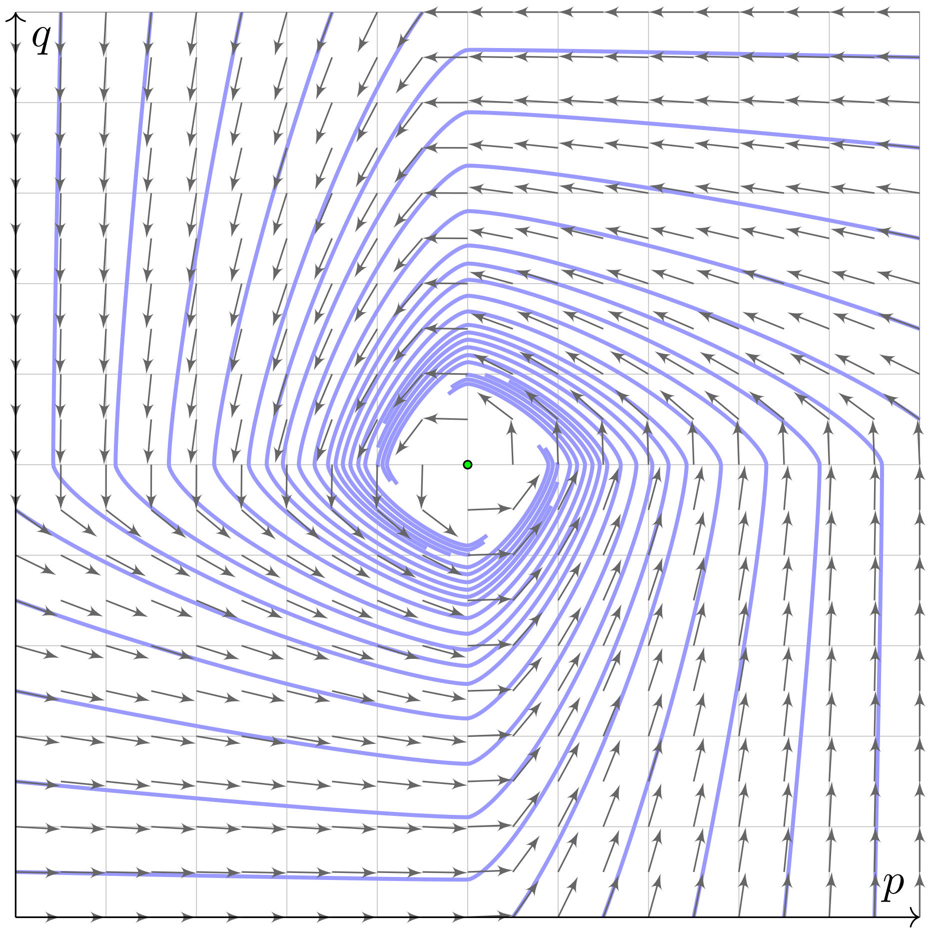




Die Funktion $x \mapsto x^+$ ist lipschitz-stetig mit Steigung ≤ 1. Ich ersetze sie hier durch die Funktion $x \mapsto \sqrt{x^+}$, diese ist immerhin noch hölder–stetig zum Exponenten $1/2$. Die Knicke sind erwartungsgemäß noch markanter.

Zur Modellierung der Populationsdynamik bestehen viele Möglichkeiten! Die numerischen Parameter passen wir den empirischen Daten an.

Variante: hölder-stetige Nash–Funktion



Rückblick und Zwischenbilanz

Was ist ein strategisches Spiel in Normalform? Eine Abbildung

$$u : S_1 \times \cdots \times S_n \to R_1 \times \cdots \times R_n.$$

Was ist hierzu ein Nash–Gleichgewicht $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$? Für jeden Spieler i ist die von ihm gewählte Strategie s_i eine beste Antwort auf die Gegenstrategien $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$. Kein Spieler i hat einen Anreiz, seine Strategie s_i zu ändern.

Hat jedes Spiel solche Gleichgewichte? Nein, es gibt Gegenbeispiele. Der Satz E1F von Nash garantiert für jedes endliche reelle Spiel u die Existenz gemischter Nash–Gleichgewichte, kurz $\mathrm{NE}(\bar{u}) \neq \emptyset$.

Interpretation und Anwendung: Wie und warum kommen Spieler dazu, tatsächlich ein solches Nash–Gleichgewicht zu spielen? Denkbar sind:

- Rationale Analyse des Spiels (*rational reasoning*)
- Kommunikation vor dem Spiel (*pre-play communication*)
- Evolution durch Versuch und Irrtum (*trial-and-error adjustment*)

Rückblick und Zwischenbilanz

Hier ist S_i die Menge der **Strategien**, die Spieler i wählen kann, und R_i ist die Menge seiner **Resultate**, linear geordnet durch $\le_i$. Wir nennen $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to R_i$ die **Nutzenfunktion** für Spieler i. Meist sind R_i die reellen Zahlen, wir nennen u dann ein **reelles Spiel**.

Jeder Spieler i versucht seinen Gewinn $u_i(s) \in R_i$ zu maximieren. Allerdings kontrolliert jeder Spieler i nur seine eigene Strategie $s_i \in S_i$, nicht jedoch die Strategien $s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n$ der anderen Spieler! So können wir alle Spiele darstellen: einheitlich, übersichtlich, präzise.

Zur Analyse solcher Konfliksituationen dienen **Nash–Gleichgewichte**. Dies ist ein zentral wichtiges, nützliches und bewährtes Werkzeug. Hierzu beginnen wir, die mathematischen Grundlagen zu legen, in Form von tragfähigen Definitionen, sodann Sätzen und Beweisen.

Dies sind zunächst mathematische Konzepte. Wir wollen sie schließlich auf Anwendungen übertragen. Dabei stellt sich die kritische Frage, ob Nash–Gleichgewichte tatsächlich gespielt werden: wann? wie? warum? Hierzu möchte ich drei mögliche Begründungen darlegen.

Rückblick und Zwischenbilanz

Rationale Analyse des Spiels. In manchen Anwendungen ist es plausibel anzunehmen, dass alle Spieler hinreichend rational sind.

Das gilt insbesondere, wenn das Spiel einfach zu analysieren ist und die Spieler ausreichend Zeit dazu haben. Oder wenn das Spiel so wichtig ist, dass alle Spieler die notwendigen Analysen durchführen (müssen).

🙂 Gibt es nur ein Nash–Gleichgewicht, so wird genau dieses gespielt. Dank hinreichender Rationalität kennt jeder Spieler das Gleichgewicht, und kein Spieler hat einen Anreiz, davon abzuweichen.

☹ Dieses Argument gilt nur bei einem eindeutigen Gleichgewicht. Gibt es mehrere, wie bei Bach-oder-Strawinsky, so ist die Wahl offen.

Kommunikation vor dem Spiel. In manchen Anwendungen ist es möglich, dass alle Spieler vor dem Spiel kommunizieren. Sie können dies nutzen und einen Strategievektor $(s_1, \dots, s_n)$ verabreden.

☹ Diese Verabredung ist allerdings nicht bindend oder einklagbar.

🙂 Ist $(s_1, \dots, s_n)$ ein Nash–Gleichgewicht, so ist diese Vereinbarung selbst-stabilisierend: Kein Spieler hat einen Anreiz, davon abzuweichen.

Rückblick und Zwischenbilanz

Evolution durch Versuch und Irrtum. Wir betrachten ein endliches reelles Spiel $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$. Dieses wird nun häufig wiederholt. Jeder Spieler i beginnt mit einer gemischten Strategie $s_i \in \bar{S}_i$ und passt sie nach jedem Spieldurchgang an, etwa vermöge der Nash–Funktion.

🙂 Günstigenfalls konvergiert dieser Prozess gegen ein Gleichgewicht: Die Gleichgewichte sind Fixpunkte der Nash–Funktion, und Konvergenz liegt vor, wenn wir im Attraktionsbecken eines Fixpunktes starten.

Der Vorteil dieser Sichtweise ist, dass die mentalen Anforderungen an die Individuen sehr gering sind. Dieses Modell lässt sich daher auch in der **Evolutionsbiologie** gut anwenden. Hier spielen **Populationen** gegeneinander. Die Individuen optimieren ihr Verhalten nicht aktiv, diese Aufgabe übernimmt die **Selektion** von ganz allein: Erfolgreiche Strategien vermehren sich schneller, weniger erfolgreiche langsamer. Im Mittel beobachten wir die oben erklärte **Populationsdynamik**.

🙂 Die **evolutionäre Spieltheorie** arbeitet diese Ideen aus und untersucht evolutionäre Phänomene mit spieltheoretischen Methoden.

Strategische Spiele in Normalform

Definition E1L: strategisches Spiel in Normalform

Ein **strategisches Spiel in Normalform** über I ist eine Abbildung

$$\boxed{u \;:\; S = \prod\nolimits_{i\in I} S_i \to R = \prod\nolimits_{i\in I} R_i \;:\; s = (s_i)_{i\in I} \mapsto r = (r_i)_{i\in I}.}$$

Formal ist dieses Spiel (I, S, R, u) durch folgende Daten definiert:

1. eine Menge I von **Spielern** sowie für jeden Spieler $i \in I$
2. eine Menge $S_i \neq \emptyset$, deren Elemente wir **Strategien** nennen,
3. eine linear geordnete Menge $(R_i, \le_i)$ der möglichen **Resultate**,
4. eine Abbildung $u_i : S \to R_i : s \mapsto r_i$, genannt **Nutzenfunktion**.

Wir zerlegen $S := \prod_{i\in I} S_i$ in die Faktoren S_i und $S_{-i} := \prod_{j\in I\smallsetminus\{i\}} S_j$:

$$S \xrightarrow{\sim} S_i \times S_{-i} \;:\; s \mapsto (s_i; s_{-i})$$

Die Nutzenfunktion $u_i : S \to R_i$ schreiben wir damit bequem:

$$u_i \;:\; S_i \times S_{-i} \xrightarrow{\sim} S \to R_i \;:\; (s_i; s_{-i}) \mapsto u_i(s_i; s_{-i})$$

Strategische Spiele in Normalform

Jeder Spieler $i \in I$ kann seine Strategie $s_i \in S_i$ frei wählen, unabhängig von allen anderen Spielern, und er hat auch nur auf s_i direkten Einfluss.

Jedes Element $s \in \prod_{i\in I} S_i$ heißt **Strategievektor**: $s = (i \mapsto s_i)_{i\in I}$.
Es ordnet jedem Spieler $i \in I$ eine seiner Strategien $s_i \in S_i$ zu.

Wir zerlegen $S := \prod_{i\in I} S_i$ in die Faktoren S_i und $S_{-i} := \prod_{j\in I\smallsetminus\{i\}} S_j$:

$$S \xrightarrow{\sim} S_i \times S_{-i} \;:\; s \mapsto (s_i; s_{-i})$$

Wir schreiben hier $s_{-i} = s|_{I\smallsetminus\{i\}}$ für die **Einschränkung** auf $I \smallsetminus \{i\}$
und $s = (s_i; s_{-i}) = \{i \mapsto s_i\} \cup s_{-i}$ für die **Ergänzung** um $i \mapsto s_i$.
Das entspricht der Umsortierung, die den Faktor S_i vorzieht.

Besser und konfliktfrei wäre statt s_{-i} die Notation $s_{\smallsetminus i} = s|_{I\smallsetminus\{i\}} \in S_{\smallsetminus i}$.
Ich folge hier der üblichen und verbreiteten Schreibweise $s_{-i} \in S_{-i}$.
Die Nutzenfunktion $u_i : S \to R_i$ schreiben wir damit bequem:

$$u_i \;:\; S_i \times S_{-i} \xrightarrow{\sim} S \to R_i \;:\; (s_i; s_{-i}) \mapsto u_i(s_i; s_{-i})$$

Die explizite Nennung der Bijektion $S \xrightarrow{\sim} S_i \times S_{-i} : s \mapsto (s_i; s_{-i})$ unterdrücken wir hierbei und benennen beide Funktionen mit u_i.

Strategische Spiele in Normalform

Für ein **endliches Spiel** fordern wir I und S_i endlich für jedes $i \in I$.
Im Falle eines **reellen Spiels** fordern wir zudem $R_i = \mathbb{R}$ für alle $i \in I$.
Das Spiel ist die **Auszahlungsfunktion** $u : \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} \mathbb{R} = \mathbb{R}^I$.
Die Funktion $u_i : \prod_{i\in I} S_i \to \mathbb{R}$ ist die **Auszahlung** für Spieler i.

Bislang genügte uns die Spielermenge $I = \{1,2\}$ oder $I = \{1,2,\dots,n\}$. Wir definieren Spiele nun allgemein für eine beliebige Spielermenge I. Auf den ersten Blick mag diese Allgemeinheit verwundern; wir können uns ein Spiel mit unendlich vielen Spielern nur schwer vorstellen.

Dies tritt jedoch tatsächlich natürlich auf, etwa wenn wir Modelle mit zeitlichem Verlauf und mehreren Spielergenerationen untersuchen. Wir wollen daher die nötigen Begriffe und Definitionen vorbereiten, auch wenn unsere Sätze oft endliche Spiele voraussetzen.

Dasselbe gilt für allgemeine Definition der Ergebnismenge $(R_i, \le)$. Wir nehmen im Folgenden meist $(R_i, \le)$ als Teilmenge von $(\mathbb{R}, \le)$ an. Es schadet nicht, sich zunächst klar zu machen, was minimal benötigt wird. Wir nutzen dankbar weitere Struktur, wo immer sie verfügbar ist!

Strategische Spiele in Normalform

Formal könnten wir unser Spiel als Quadrupel (I, S, R, u) definieren. Das ist wunderbar explizit und ausführlich, scheint mir aber für den praktischen Gebrauch unnötig länglich und übertrieben pedantisch. Implizit enthält die Abbildung $u : \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R_i$ all diese Daten:

Bei Bedarf können wir von der Abbildung u alle Informationen erfragen bzw. rekonstruieren: Was ist deine Definitionsmenge? S! Was ist deine Zielmenge? R! Ebenso können wir S fragen: Bist du ein Produkt? Ja! Über welcher Menge? I! Was ist für $i \in I$ dein Faktor? S_i! Ebenso R: Bist du ein Produkt? Ja! Über welcher Menge? I! Was ist für $i \in I$ dein Faktor? R_i! Darunter verstehen wir hier die geordnete Menge $(R_i, \le)$.

🙂 Ich schreibe implizit u oder explizit $u : \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R_i$, je nach Bedarf. Das entspricht dem Quadrupel (I, S, R, u), ist aber flüssiger.

Die Indizes schreiben wir später auch oben: Die Strategiemenge S^i und die Ergebnismenge R^i für Spieler $i \in I$ führen zu den Produkten $S^I := \prod_{i\in I} S^i$ und $R^I := \prod_{i\in I} R^i$, hier besonders raffiniert abgekürzt. Spiele sind dann Abbildungen $u : S^I \to R^I$, reelle Spiele $u : S^I \to \mathbb{R}^I$.

Definition E1M: Nash–Geichgewicht

Vorgelegt sei das Spiel $u : \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R_i$ über der Spielermenge I. Sei $s \in S = \prod_{i\in I} S_i$ ein Strategievektor. Bezüglich Spieler $i \in I$ heißt s

strikt stabil: $\forall a \in S_i \setminus \{s_i\} : u_i(s_i; s_{-i}) > u_i(a; s_{-i}) \quad :\Leftrightarrow: s \in \mathrm{NE}^!_i(u)$

stabil: $\forall a \in S_i \setminus \{s_i\} : u_i(s_i; s_{-i}) \geq u_i(a; s_{-i}) \quad :\Leftrightarrow: s \in \mathrm{NE}_i(u)$

Gilt dies für alle $i \in I$ so heißt s ein **(striktes) Nash–Gleichgewicht**, geschrieben $\mathrm{NE}^!(u) := \bigcap_{i\in I} \mathrm{NE}^!_i(u)$ und $\mathrm{NE}(u) := \bigcap_{i\in I} \mathrm{NE}_i(u)$.
Sei u reell und eine Toleranz $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ vorgegeben. Wir nennen s

ε–stabil: $\forall a \in S_i \setminus \{s_i\} : u_i(s_i; s_{-i}) \geq u_i(a; s_{-i}) - \varepsilon \quad :\Leftrightarrow: s \in \mathrm{NE}^\varepsilon_i(u)$

Gilt Letzteres für alle $i \in I$ so heißt s ein **ε–Nash–Gleichgewicht**.
Allgemein setzen wir $\mathrm{NE}^\varepsilon(u) := \bigcap_{i\in I} \mathrm{NE}^{\varepsilon_i}_i(u)$ für $\varepsilon : I \to \mathbb{R}_{\geq 0} : i \mapsto \varepsilon_i$.

🙂 Zur Approximation gilt somit $\mathrm{NE}(u) = \mathrm{NE}^0(u) = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathrm{NE}^\varepsilon(u)$.
🙂 Für endliche Spiele erhalten wir formal $\mathrm{NE}^!(u) = \bigcup_{\varepsilon<0} \mathrm{NE}^\varepsilon(u)$.

Die **unmittelbare Bedeutung** dieser Definition ist folgende:

(1) Der Spieler i hat einen Nachteil davon, seine Strategie s_i zu ändern.

(2) Der Spieler i hat keinen Vorteil / Anreiz, einseitig von s_i abzuweichen.

(3) Der Spieler i hat bestenfalls einen ε–kleinen Vorteil. Dieser kann zum Beispiel unterhalb der Wahrnehmungsschwelle / vernachlässigbar sein.

Die Strategien s_{-i} aller anderen Spieler werden als konstant betrachtet. Ich erinnere an die Motivation hinter diesem Modell: Spieler i kontrolliert nur seine Strategie $s_i \in S_i$. Er hat auf s_{-i} keinen direkten Einfluss, etwa durch Absprachen, Verträge, Drohungen, o.ä. außerhalb des Spiels.

Gilt dies für jeden Spieler i, so nennen wir den Strategievektor s ein striktes Gleichgewicht / Gleichgewicht / ε–Gleichgewicht.

Solche Gleichgewichte beschreiben **mögliches rationales Verhalten**. Die Definition ist einfach, aber die Interpretation bedarf einiger Übung. Hierzu haben wir oben die ersten von zahlreichen Beispielen angeführt. Erweitern und pflegen Sie Ihren Beispielfundus!

Der Satz von Nash garantiert die Existenz von Gleichgewichten.
Über strikte Gleichgewichte macht er wohlweislich keine Aussage.
Sie sind vielleicht einfacher zu verstehen, aber leider oft zu streng.
Insbesondere gibt es keine allgemeine Garantie für ihre Existenz.

Übung: Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel und $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n \to \mathbb{R}^n$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.

(1) Gilt $\mathrm{NE}^!(u) \subseteq \mathrm{NE}^!(\bar{u})$? und umgekehrt $\mathrm{NE}^!(u) \supseteq \mathrm{NE}^!(\bar{u})$?

(2) Gilt $\mathrm{NE}(u) \subseteq \mathrm{NE}(\bar{u})$? und umgekehrt $\mathrm{NE}(u) \supseteq \mathrm{NE}(\bar{u})$?

Übung: Sei $u : S_1 \to S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein endliches Zwei–Personen–Spiel.

(1) Wenn ein striktes Gleichgewicht existiert, ist es dann eindeutig? Wie viele strikte Gleichgewichte kann u haben? und $\bar{u}$?

(2) Was gilt, wenn u zudem konstante Summe hat? Oder allgemeiner: wenn u strikt kompetitiv ist?

Im Satz von Nash (E1F) wurde das Spiel u als endlich vorausgesetzt:
Die Spielermenge I und jede Strategiemenge S_i müssen endlich sein.

Übung: In den Übungen nutzen Sie den Fixpunktsatz von Kakutani, um den Satz von Nash erneut zu beweisen und zu verallgemeinern.

Übung: Sei $I = \{1, 2\}$ sowie $S_i = \{ s_i^k \mid k \in \mathbb{N} \}$ abzählbar unendlich.
Gibt es zu jedem Spiel $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$ ein Nash–Gleichgewicht?
Gilt dies für die Fortsetzung $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \to \mathbb{R}^2$ auf gemischte Strategien?
Diskutieren Sie endliche Konvexkombinationen und dann auch Reihen.

Übung: Sei $I = \mathbb{N}$ sowie $S_i = \{0, 1\}$ für alle $i \in I$, also $\bar{S}_i \cong [0, 1]$.
Gibt es zu jedem Spiel $u : \prod_{i \in I} S_i \to \mathbb{R}^I$ ein Nash–Gleichgewicht?
Gilt dies für die Fortsetzung $\bar{u} : \prod_{i \in I} \bar{S}_i \to \mathbb{R}^I$ auf gemischte Strategien?

Hier ist Stetigkeit / Konvergenz zu klären. Fun fact: Der Hilbert–Würfel $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ ist kompakt nach dem Satz von Tychonov. Zudem ist er ein wichtiger Modellraum, etwa beim Metrisierungssatz von Urysohn.

Nashs Satz lässt sich in verschiedene Richtungen verallgemeinern, etwa auf spieltheoretische Modelle überlappender Generationen (Kapitel H). Hier sind tatsächlich unendlich viele Spieler realistisch. Vereinfachend interagiere dabei jeder Spieler $i \in I$ nur mit endlich vielen Nachbarn: $u_i : \prod_{j \in I} S_j \to \mathbb{R}$ hängt nur von endlich vielen Koordinaten $j \in I$ ab. Insbesondere ist u_i dann stetig bezüglich der Produkttopologie.

Allgemein formulieren wir hierzu folgendes Ergebnis:

Satz E1N: Satz von Nash für lokal-endliche Spiele

Sei $I = \mathbb{N}$. Für jeden Spieler $i \in I$ sei die Strategiemenge $S_i \neq \emptyset$ endlich und die Nutzenfunktion $u_i : \prod_{j \in I} S_j \to \mathbb{R}$ stetig in der Produkttopologie.

Dann lässt sich $u : \prod_{i \in I} S_i \to \mathbb{R}^I$ stetig fortsetzen zu $\bar{u} : \prod_{i \in I} \bar{S}_i \to \mathbb{R}^I$, und das Spiel $\bar{u}$ erlaubt mindestens ein Nash–Gleichgewicht.

Aufgabe: Versuchen Sie, diesen Verallgemeinerung zu beweisen (wenn Sie mutig sind für eine beliebige Spielermenge I).

Lösung: Wir setzen $u_i : \prod_{j \in I} S_j \to \mathbb{R}$ affin fort zu $\bar{u}_i : \bar{S} = \prod_{j \in I} \bar{S}_j \to \mathbb{R}$. Man rechnet sorgsam nach, dass mit u_i auch $\bar{u}_i$ stetig ist bezüglich der punktweisen Konvergenz, also der Produkttopologie. (Übung!)

Wir wählen $s^0 \in \bar{S} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \bar{S}_i$ willkürlich. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ variieren wir $(s_0, \dots, s_{k-1}) \in \prod_{i<k} \bar{S}_i$ und halten s_i für $i \geq k$ fest. Dank Nash E1F existiert ein Strategievektor $s^k \in \bar{S}$, der für alle Spieler $i < k$ stabil ist.

Dank Kompaktheit des Produktraums $\bar{S}$ existiert eine konvergente Teilfolge $(s^{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$. Nach Umnummerierung schreiben wir kurz $s^k \to s$. Weiterhin gilt Eigenschaft (a): $s^k \in \bar{S}$ ist stabil für alle Spieler $i < k$.

Mit diesem Grenzwert haben wir ein Strategiebündel $s \in \bar{S}$ konstruiert. Wir zeigen nun: s ist ein Nash–Gleichgewicht für das Spiel $\bar{u} : \bar{S} \to \mathbb{R}^I$.

Hierzu nutzen wir, dass die Abbildung $\bar{u} : \bar{S} \to \mathbb{R}^I$ stetig ist.
Für jedes $i \in I$ gilt also (b) $\bar{u}_i(s^k) \to \bar{u}_i(s)$ für $k \to \infty$.

Sei $i \in I$ und $\tilde{s}_i \in \bar{S}_i$ eine alternative Strategie für Spieler i.
Sei $\varepsilon > 0$. Für jeden hinreichend großen Index $k > i$ gilt:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) &\overset{\text{(b)}}{\geq} \bar{u}_i(s_i^k; s_{-i}^k) - \varepsilon \\
&\overset{\text{(a)}}{\geq} \bar{u}_i(\tilde{s}_i; s_{-i}^k) - \varepsilon \\
&\overset{\text{(b)}}{\geq} \bar{u}_i(\tilde{s}_i; s_{-i}) - 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Wir haben also $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) \geq \bar{u}_i(\tilde{s}_i; s_{-i}) - 2\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$.
Das bedeutet $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) \geq \bar{u}_i(\tilde{s}_i; s_{-i})$. Dies gilt für alle $\tilde{s}_i \in \bar{S}_i$.
Demnach ist s ein Nash–Gleichgewicht, wie behauptet,
kurz $s \in \mathrm{NE}(\bar{u})$ und somit insbesondere $\mathrm{NE}(\bar{u}) \neq \emptyset$.

Bemerkung: Ist I eine beliebige (überabzählbare) Menge, so gelingt der Beweis wörtlich genauso, allerdings müssen wir Folgen durch Filter ersetzen. Der Satz von Tychonov garantiert die Kompaktheit von $\bar{S}$. (Die Ausformulierung ist eine Fingerübung in technischer Virtuosität.)

Sicherheitsstrategie und Sicherweitswert

Definition E2A: Sicherheitswert und Sicherheitsstrategie

Sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to R_1 \times \dots \times R_n$ ein endliches Spiel, oder allgemeiner ein reelles Spiel mit $S_1 \times \dots \times S_n$ kompakt und u stetig.

Spieler i kann mindestens folgende Auszahlung für sich garantieren:

$$\operatorname{val}_i(u) := \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i; s_{-i}) = \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i^*, s_{-i})$$

Wir nennen $\operatorname{val}_i(u)$ den **Sicherheitswert** des Spiels u für Spieler i. Hierzu wählt er als **Sicherheitsstrategie** $s_i^* \in S_i$ einen Min-Maximierer.

Mögliche Interpretation: Spieler i zieht zuerst, öffentlich und endgültig.

⚠ Spieler i maximiert hier seinen Mindestgewinn. Im Allgemeinen bilden Sicherheitsstrategien $(s_i^*)_{i \in I}$ kein Nash–Gleichgewicht!

☹ Das gilt selbst für Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele: Manchmal bleibt eine Lücke zwischen Maximin und Minimax.

☺ Diese verschwindet genau für Nash–Gleichgewichte: Das ist der Inhalt von Neumanns Minimax-Satz E2D.

Basketball Endgame als Spiel mit konstanter Summe

A \ B	Defend 2	Defend 3
Shoot 2	18 / 82	31 / 69
Shoot 3	50 / 50	23 / 77

Aufgabe: Bestimmen und interpretieren Sie die Sicherheitsstrategien:

$$\max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x, y) = 23 \qquad \text{vs} \qquad \max_{y \in S_2} \min_{x \in S_1} u_2(x, y) = 69$$

☹ Es gilt die Summe $u_1 + u_2 = 100$, aber nur $23 + 69 = 92 < 100$.

☹ Die Sicherheitsstrategien $(s_i^*)_{i \in I}$ bilden kein Nash–Gleichgewicht.

Was gilt für die Fortsetzung $\bar{u}$ auf gemischte Strategien?

$$\max_{x \in [S_1]} \min_{y \in [S_2]} \bar{u}_1(x, y) = 28.4 \qquad \text{vs} \qquad \max_{y \in [S_2]} \min_{x \in [S_1]} \bar{u}_2(x, y) = 71.6$$

☺ Dahinter stecken allgemeine Regeln und der Minimax-Satz.

☺ Die Lücke verschwindet genau für Nash–Gleichgewichte!

Matching Pennies ist ein Nullsummenspiel.

A \ B	Kopf	Zahl
Kopf	$+1$ / -1	-1 / $+1$
Zahl	-1 / $+1$	$+1$ / -1

Aufgabe: Bestimmen und interpretieren Sie die Sicherheitsstrategien:

$$\max_{x\in S_1}\min_{y\in S_2} u_1(x,y) = -1 \qquad \text{vs} \qquad \max_{y\in S_2}\min_{x\in S_1} u_2(x,y) = -1$$

☹ Es gilt die Summe $u_1 + u_2 = 0$, doch nur $(-1) + (-1) = -2 < 0$.
☹ Die Sicherheitsstrategien $(s_i^*)_{i\in I}$ bilden kein Nash–Gleichgewicht.

Was gilt für die Fortsetzung $\bar u$ auf gemischte Strategien?

$$\max_{x\in[S_1]}\min_{y\in[S_2]} \bar u_1(x,y) = 0 \qquad \text{vs} \qquad \max_{y\in[S_2]}\min_{x\in[S_1]} \bar u_2(x,y) = 0$$

☺ Dahinter stecken allgemeine Regeln und der Minimax-Satz.
☺ Das Spiel $\bar u$ hat ein Nash–Gleichgewicht, u hingegen nicht.

Schere-Stein-Papier ist ein Nullsummenspiel.

A \ B	Schere	Stein	Papier
Schere	0 / 0	$+1$ / -1	-1 / $+1$
Stein	-1 / $+1$	0 / 0	$+1$ / -1
Papier	$+1$ / -1	-1 / $+1$	0 / 0

Aufgabe: Bestimmen und interpretieren Sie die Sicherheitsstrategien:

$$\max_{x\in S_1}\min_{y\in S_2} u_1(x,y) = -1 \qquad \text{vs} \qquad \max_{y\in S_2}\min_{x\in S_1} u_2(x,y) = -1$$

☹ Es gilt die Summe $u_1 + u_2 = 0$, doch nur $(-1) + (-1) = -2 < 0$.

$$\max_{x\in[S_1]}\min_{y\in[S_2]} \bar u_1(x,y) = 0 \qquad \text{vs} \qquad \max_{y\in[S_2]}\min_{x\in[S_1]} \bar u_2(x,y) = 0$$

☺ Das Spiel $\bar u$ hat ein Nash–Gleichgewicht, u hingegen nicht.

Gleichgewichte und Minimax $=$ Maximin

Lemma E2B: Gleichgewichte und Minimax $=$ Maximin

Sei $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Nullsummenspiel, also $u_1 + u_2 = 0$.
Zudem sei das Spiel endlich oder $S_1 \times S_2$ kompakt und u stetig.

(0) Allgemein gilt „Maximin $\le$ Minimax", also ausgeschrieben:

$$\max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x,y) \le \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x,y)$$

(1) Ist $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ein Nash–Gleichgewicht, so gilt Gleichheit:

$$u_1(s_1,s_2) = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x,y) = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x,y)$$

(2) Angenommen, es gilt die ersehnte Gleichheit „Maximin $=$ Minimax".
Wir wählen einen Min-Maximierer $s_1 \in S_1$ und Max-Minimierer $s_2 \in S_2$:

$$v = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x,y) = \min_{y \in S_2} u_1(s_1,y),$$
$$v = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x,y) = \max_{x \in S_1} u_1(x,s_2).$$

Dann ist das Paar $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ein Nash–Gleichgewicht.

Gleichgewichte und Minimax $=$ Maximin

Beweis: (0) Für alle $x \in S_1$ und $y \in S_2$ gilt:

$$\begin{aligned}
u_1(x,y) &\overset{\text{(a)}}{\le} u_1(x,y) \\
u_1(x,y) &\overset{\text{(b)}}{\le} \max_{x \in S_1} u_1(x,y) \\
\min_{y \in S_2} u_1(x,y) &\overset{\text{(c)}}{\le} \max_{x \in S_1} u_1(x,y) \\
\min_{y \in S_2} u_1(x,y) &\overset{\text{(d)}}{\le} \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x,y) \\
\max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} u_1(x,y) &\overset{\text{(e)}}{\le} \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} u_1(x,y)
\end{aligned}$$

Die Ungleichung (a) ist trivial. Wir nehmen rechts das Maximum über x, damit wird die rechte Seite höchstens größer, also gilt (b). Wir nehmen links das Minimum über y, damit wird die linke Seite höchstens kleiner, also gilt (c). Die Ungleichung (c) gilt somit für alle $x \in S_1$ und $y \in S_2$; dabei hängt allerdings die linke Seite nur noch von x ab und die rechte Seite nur noch von y. Hieraus folgen sofort (d) und (e).

Gleichgewichte und Minimax = Maximin

(1) Für jedes Nash–Gleichgewicht $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ gilt:

$$\left\{\begin{aligned} u_1(s_1,s_2) &= \max_{x\in S_1} u_1(x,s_2) && \ge \min_{y\in S_2}\max_{x\in S_1} u_1(x,y) \\ u_1(s_1,s_2) &= \min_{y\in S_2} u_1(s_1,y) && \le \max_{x\in S_1}\min_{y\in S_2} u_1(x,y) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\min_{y\in S_2}\max_{x\in S_1} u_1(x,y) \;\le\; u_1(s_1,s_2) \;\le\; \max_{x\in S_1}\min_{y\in S_2} u_1(x,y)$$

Dank (0) gilt auch die umgekehrte Ungleichung, hieraus folgt Gleichheit.

(2) Dank der genannten Voraussetzungen gilt:

$$\left\{\begin{aligned} u_1(s_1,s_2) &\le \max_{x\in S_1} u_1(x,s_2) = \min_{y\in S_2}\max_{x\in S_1} u_1(x,y) = v \\ u_1(s_1,s_2) &\ge \min_{y\in S_2} u_1(s_1,y) = \max_{x\in S_1}\min_{y\in S_2} u_1(x,y) = v \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$u_1(s_1,s_2) = \max_{x\in S_1} u_1(x,s_2) = \min_{y\in S_2} u_1(s_1,y)$$

Demnach ist $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ ein Nash–Gleichgewicht. $\boxed{\text{QED}}$

Austauschregel für Nullsummenspiele

Hieraus folgen grundlegende Rechenregeln für Nullsummenspiele:

Satz E2C: Austauschregel für Nullsummenspiele

(1) Genau dann erfüllt unser Nullsummenspiel $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$ die Gleichung „Minimax = Maximin“, wenn Nash–Gleichgewichte existieren.

(2) Alle Nash–Gleichgewichte führen zum selben Ergebnis: Sind (s_1, s_2) und (s_1^*, s_2^*) Nash–Gleichgewichte, dann gilt $u_1(s_1, s_2) = u_1(s_1^*, s_2^*)$.

(3) Alle Nash–Gleichgewichte sind austauschbar: Sind (s_1, s_2) und (s_1^*, s_2^*) Nash–Gleichgewichte, dann auch (s_1, s_2^*) und (s_1^*, s_2).

(4) Sind S_1, S_2 konvex und u affin-linear, so ist $\mathrm{NE}(u) = K_1 \times K_2$ das Produkt zweier konvexer Mengen $K_1 \subseteq S_1$ und $K_2 \subseteq S_2$.

🙂 Die Aussagen (2) und (3) gelten für *alle* Nash–Gleichgewichte. Das ist eine nützliche Besonderheit von Nullsummenspielen.

Es gibt Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele ohne Gleichgewichte, etwa Matching Pennies und Schere-Stein-Papier und viele weitere. Auch für diese sind die Aussagen (2) und (3) wahr, aber eben *leer*.

Die Sätze von Nash und von Neumann

Gleichgewichte sind grundlegend. Gibt es sie immer? Ja, oft genug: Dies verdanken wir dem Existenzsatz E1F für Nash–Gleichgewichte. Hieraus folgt der Hauptsatz für Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele:

Satz E2D: Minimax-Satz, John von Neumann 1928

Sei $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$ ein endliches Nullsummenspiel, also $u_1 + u_2 = 0$, und $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \to \mathbb{R}^2$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.

Dank E1F existiert ein Gleichgewicht $(s_1^*, s_2^*) \in \bar{S}_1 \times \bar{S}_2$, und somit gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{val}_1(\bar{u}) &:= \max_{x \in \bar{S}_1} \min_{y \in \bar{S}_2} \bar{u}_1(x, y) &= u_1(s_1^*, s_2^*) &= \min_{y \in \bar{S}_2} \max_{x \in \bar{S}_1} \bar{u}_1(x, y), \\
\operatorname{val}_2(\bar{u}) &:= \max_{y \in \bar{S}_2} \min_{x \in \bar{S}_1} \bar{u}_2(x, y) &= u_2(s_1^*, s_2^*) &= \min_{x \in \bar{S}_1} \max_{y \in \bar{S}_2} \bar{u}_2(x, y).
\end{aligned}$$

Das ist der **Wert** des Spiels $\bar{u}$ für Spieler i. Es gilt $\operatorname{val}_1(\bar{u}) + \operatorname{val}_2(\bar{u}) = 0$.

Die Sätze von Nash und von Neumann

Diese Vereinfachung ist eine Besonderheit für Nullsummenspiele, oder allgemein Zwei-Personen-Spiele mit konstanter Summe:

Sicherheitsstrategien sind optimal, sobald sich die Lücke schließt, also Min-Maximierer und Max-Minimierer denselben Wert ergeben.

Dieser Wert ist das erwartete Ergebnis bei rationaler Spielweise.

Mit diesem Satz begann die Theorie, als erstes substantielles Ergebnis: Jedem Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel wird so ein Wert zugeordnet. Von Neumann bewies diesen Satz 1928 zunächst auf andere Weise. Nashs allgemeiner Existenzsatz eröffnete 1951 einen kürzeren Weg.

Von Neumanns Ideen beeinflussten maßgeblich die Entdeckung der ersten Dualitätsprinzipien in der Linearen Optimierung. Wir werden dies im nächsten Kapitel genauer untersuchen.

Definition E2E: konstante Summe und strikt kompetitiv

Ein Spiel $u : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ hat **konstante Summe (Null)**, wenn es die Bedingung $u_1 + \cdots + u_n = \mathrm{const}$ (bzw. $= 0$) erfüllt.

Ein Zwei-Personen-Spiel $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$ ist **strikt kompetitiv**, wenn für alle $s, s' \in S$ die Äquivalenz $u_1(s) < u_1(s') \iff u_2(s) > u_2(s')$ gilt.

Für **kompetitive Spiele** verlangen wir diese Äquivalenz nur für alle Strategievektoren $s, s' \in S$, die sich in einer Koordinate unterscheiden.

Übung: Konstante Summe $\overset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ strikt kompetitiv $\overset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ kompetitiv.
Gilt das Minimax-Lemma E2B für kompetitive Spiele $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$?
Wenn u kompetitiv ist, gilt dies dann auch für die Fortsetzung $\bar{u}$?
Hat u konstante Summe, dann auch $\bar{u}$. (Dies nutzen wir in E2D.)

Kompetitive Spiele sind ein sehr spezieller aber durchaus wichtiger Fall. Es lohnt sich daher, hierzu spezielle Sätze und Techniken zu entwickeln. In vielen realistischen Situationen haben Spiele nicht konstante Summe und sind auch nicht kompetitiv. Nash–Gleichgewichte helfen allgemein!

Beispiel: Das Spiel *Schere-Stein-Papier* hat kein Gleichgewicht in reinen Strategien. Auch der Minimax-Satz gilt nicht in reinen Strategien. In gemischten Strategien haben die Spieler viel mehr Möglichkeiten. Der Satz von Nash sagt die Existenz von Gleichgewichten voraus. Hier ist $\frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Stein} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier}$ das einzige Gleichgewicht.

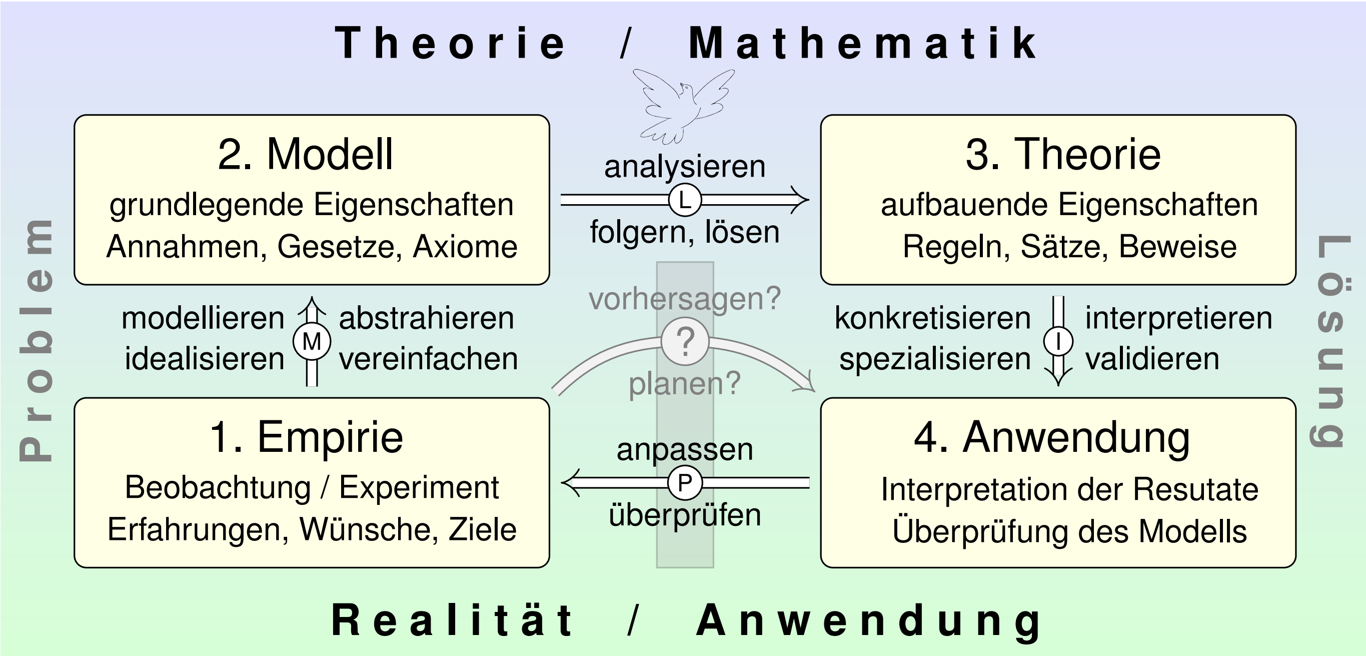
Aufgabe: Prüfen Sie sorgfältig nach, dass dies ein Gleichgewicht ist. Wie zeigen Sie geschickt, dass dies das einzige Gleichgewicht ist? Hierbei hilft Ihnen die Austauschregel E2C für Nullsummenspiele.

Aufgabe: Untersuchen Sie ebenso alle bisher vorgestellten Spiele. Welche haben konstante Summe, welche sind (strikt) kompetitiv?

Finden Sie alle Nash–Gleichgewichte und vergleichen Sie diese beiderseitig mit Sicherheitsstrategien (also Min-Maximierern).

Wozu dient Mathematik?

Alles Leben ist Problemlösen. (Karl Popper)



Mathematik untersucht sowohl abstrakte Strukturen als auch konkrete Anwendungen. Dies sind keine Gegensätze, sondern sie ergänzen sich!

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant)

Wozu dient Mathematik?

Beispiel: Schere-Stein-Papier mit Brunnen

Wir erweitern das Spiel Schere-Stein-Papier.
Beide Spieler haben zusätzlich die Strategie „Brunnen“:

A \ B	Schere	Stein	Papier	Brunnen
Schere	0, 0	-1, $+1$	$+1$, -1	-1, $+1$
Stein	$+1$, -1	0, 0	-1, $+1$	-1, $+1$
Papier	-1, $+1$	$+1$, -1	0, 0	$+1$, -1
Brunnen	$+1$, -1	$+1$, -1	-1, $+1$	0, 0

Aufgabe: Ist dies ein Nullsummenspiel? Was ist sein Wert?
Sehen Sie ein Nash–Gleichgewicht dieses Spiels? gar alle?

Beispiel: Schere-Stein-Papier mit Brunnen

Lösung: Die Strategie Brunnen dominiert schwach Stein. Wir streichen daher Stein und erhalten $u' : S' \times S' \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der reduzierten Strategiemenge $S' = \{\text{Schere}, \text{Papier}, \text{Brunnen}\}$. Dieses Spiel Schere-Papier-Brunnen ist **isomorph** zu Schere-Stein-Papier.

⚠ Isomorphie und Symmetrie vereinfachen unsere Analyse!

Wir kennen daher das Gleichgewicht $(s', s') \in \mathrm{NE}(\bar{u}')$ mit

$$s' = \frac{1}{3} \cdot \text{Schere} + \frac{1}{3} \cdot \text{Papier} + \frac{1}{3} \cdot \text{Brunnen}$$

Dank Satz E2H wissen wir $\mathrm{NE}(\bar{u}') \subseteq \mathrm{NE}(\bar{u})$, also ist (s', s') auch ein Nash–Gleichgewicht für Schere-Stein-Papier-Brunnen.

⚠ Das Spiel u könnte durchaus noch weitere Gleichgewichte haben. Das muss man jeweils genauer nachrechnen. Versuchen Sie es! Hierbei hilft Ihnen die Austauschregel E2C für Nullsummenspiele.

☺ Dies ist ein symmetrisches Nullsummenspiel, der Wert ist also 0. Zur Berechnung des Wertes genügt uns ein einziges Gleichgewicht, hier (s', s'). Alternativ impliziert bereits die Symmetrie den Wert 0.

Definition E2F: dominierte Strategien

Sei $u : \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R_i$ ein strategisches Spiel und $i \in I$ ein Spieler. Für je zwei seiner Strategien $x, y \in S_i$ vergleichen wir die Funktionen

$$u_i(x; -), u_i(y; -) : S_{-i} \to R_i.$$

Schwache Dominanz $x \le_i^u y$ bedeutet $u_i(x; s_{-i}) \le u_i(y; s_{-i})$,
starke Dominanz $x <_i^u y$ bedeutet $u_i(x; s_{-i}) < u_i(y; s_{-i})$
jeweils für alle möglichen Gegenstrategien $s_{-i} \in S_{-i}$.

Für Teilmengen $X, Y \subseteq S_i$ bedeutet Dominanz $X \le_i^u Y$ bzw. $X <_i^u Y$: Zu jedem $x \in X$ existiert ein $y \in Y$ mit $x \le_i^u y$ bzw. $x <_i^u y$.

Wir nennen $x \in S_i$ **dominiert in** u, falls $x \le_i^u y$ für ein $y \in S_i \setminus \{x\}$ gilt.
Wir nennen $y \in S_i$ **dominant in** u, falls $x \le_i^u y$ für alle $x \in S_i \setminus \{y\}$ gilt.

Wir schreiben $\mathrm{D}_i(u) := \{\, y \in S_i \mid S_i \le_i^u y \,\}$ und $\mathrm{DNE}(u) := \prod_{i\in I} \mathrm{D}_i(u)$.
Ebenso für starke Dominanz und $\mathrm{D}_i^!(u) := \{\, y \in S_i \mid S_i \setminus \{y\} <_i^u y \,\}$

⚠ Es gilt $\mathrm{DNE}(u) \subseteq \mathrm{NE}(u)$, oft $\mathrm{DNE}(u) = \emptyset$, selten $\mathrm{DNE}(u) = \mathrm{NE}(u)$.

Schwache und starke Dominanz sind häufig nützlich; dazwischen liegt:
Halbstarke Dominanz $x \lneq_i^u y$ bedeutet $u_i(x; s_{-i}) \le u_i(y; s_{-i})$ für alle und $u_i(x; s_{-i}) < u_i(y; s_{-i})$ für mindest eine Gegenstrategie $s_{-i} \in S_{-i}$.

Bei Mengen bedeutet Dominanz $X \le_i^u Y$ bzw. $X <_i^u Y$: Es existiert eine Abbildung $f : X \to Y$ mit $x \le_i^u f(x)$ bzw. $x <_i^u f(x)$ für alle $x \in X$.

Die (schwach) dominanten Strategien $s_i \in \mathrm{D}_i(u)$ bedeuten:
s_i ist immer eine beste Antwort, gegen alle $s_{-i} \in S_{-i}$.

Eine stark dominante Strategie $s_i \in \mathrm{D}_i^!(u)$ bedeutet:
s_i ist die eindeutige beste Antwort, gegen alle $s_{-i} \in S_{-i}$.

☺ Schwache Dominanz $x \le_i^u y$ bedeutet: Ein rationaler Spieler **kann** seine Strategie x jederzeit ersetzen durch eine mindestens ebenso gute Alternative, etwa y. Er kann x spielen, er kann es aber auch vermeiden.

☺ Starke Dominanz $x <_i^u y$ bedeutet: Ein rationaler Spieler **muss** seine Strategie x jederzeit ersetzen durch eine strikt bessere Alternative, etwa y. Er kann nicht x spielen, er wird dies in jedem Falle vermeiden.

Streichung dominierter Strategien

Satz E2G: Streichung dominierter Strategien: reiner Fall

Gegeben sei ein Spiel $u : \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R_i$ und $S_i = S_i' \sqcup D_i$ für $i \in I$. Löschung der D_i ergibt die Einschränkung $u' : \prod_{i\in I} S_i' \to \prod_{i\in I} R_i$:

(1) Aus starker Dominanz $S_i' >_i^u D_i$ folgt $\mathrm{NE}(u') = \mathrm{NE}(u)$.

(2) Aus schwacher Dominanz $S_i' \ge_i^u D_i$ folgt $\mathrm{NE}(u') \subseteq \mathrm{NE}(u)$.

Beweis: (2) Sei $s \in \mathrm{NE}(u')$, also $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x'\in S_i'} u_i(x'; s_{-i})$. Dies ist gleich $\max_{x\in S_i} u_i(x; s_{-i})$ dank $S_i' \ge_i^u D_i'$, also $s \in \mathrm{NE}(u)$.

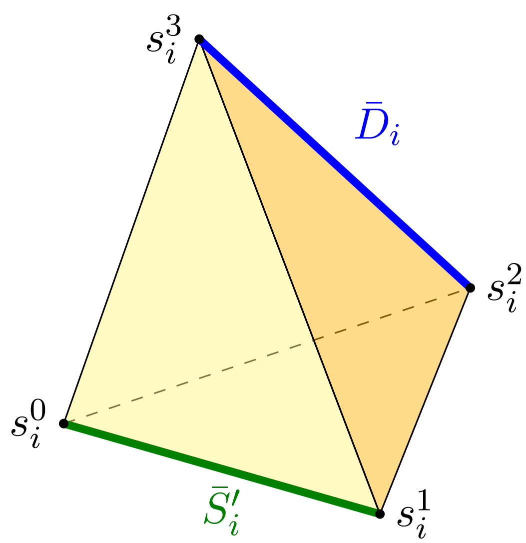
(1) Sei $s \in \mathrm{NE}(u)$, also $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x\in S_i} u_i(x; s_{-i})$. Aus $S_i' >_i^u D_i'$ folgt $s_i \in S_i'$. Also $s \in S'$ und $s \in \mathrm{NE}(u')$. $\boxed{\text{QED}}$

Zu jedem endlichen reellen Spiel $u : \prod_{i\in I} S_i \to \mathbb{R}^I$ betrachten wir auch seine Fortsetzung $\bar u : \prod_{i\in I} \bar S_i \to \mathbb{R}^I$ auf gemischte Strategien. Gilt (starke bzw. schwache) Dominanz E2F bezüglich aller reinen Gegenstrategien $s_{-i} \in S_{-i}$, so auch für alle gemischten $\bar s_{-i} \in \bar S_{-i}$.

Aus $x_0 \le_i^u y_0, \dots, x_n \le_i^u y_n$ folgt $\sum_k p_k x_k \le_i^u \sum_k p_k y_k$ für alle $p \in \Delta^n$. Gilt für ein k zudem $x_k <_i^u y_k$ und $p_k > 0$, so folgt $\sum_k p_k x_k <_i^u \sum_k p_k y_k$.

Streichung dominierter Strategien

Geometrisch sieht die Löschung gemischter Strategien etwa so aus:



In diesem Beispiel sei $S_i' = \{s_i^0, s_i^1\}$ und $D_i = \{s_i^2, s_i^3\}$. Wir können nicht nur die Ecken s_i^2 und s_i^3 löschen, sondern müssen auch alle gemischten Strategien löschen, die diese Ecken in ihrem Träger nutzen, also $\bar S_i \smallsetminus \bar S_i'$.

Streichung dominierter Strategien

Satz E2H: Streichung dominierter Strategien: gemischter Fall

Sei $u : \prod_{i \in I} S_i \to \mathbb{R}^I$ und $u' : \prod_{i \in I} S'_i \to \mathbb{R}^I$ mit $S_i = S'_i \sqcup D_i$. Dann gilt

$$\bar{S}_i = \bar{S}'_i * \bar{D}_i = \left\{ (1-t)x + ty \;\middle|\; t \in [0,1],\ x \in \bar{S}'_i,\ y \in \bar{D}_i \right\}.$$

Die Differenz der gemischten Strategiemengen ist demnach

$$\bar{S}_i \smallsetminus \bar{S}'_i = \left\{ (1-t)x + ty \;\middle|\; t \in]0,1],\ x \in \bar{S}'_i,\ y \in \bar{D}_i \right\}.$$

(1) Aus $\bar{S}'_i >^u_i D_i$ folgt $\bar{S}'_i >^u_i \bar{S}_i \smallsetminus \bar{S}'_i$ wie zuvor erklärt.

Das bedeutet: Stark dominierte Strategien von u kommen in keinem Nash–Gleichgewicht von $\bar{u}$ vor. Bei ihrer Streichung gilt $\mathrm{NE}(\bar{u}') = \mathrm{NE}(\bar{u})$.

(2) Aus $\bar{S}'_i \ge^u_i D_i$ folgt $\bar{S}'_i \ge^u_i \bar{S}_i \smallsetminus \bar{S}'_i$ wie zuvor erklärt.

Bei Streichung schwach dominierter Strategien gilt $\mathrm{NE}(\bar{u}') \subseteq \mathrm{NE}(\bar{u})$. Im Allgemeinen können dabei Nash–Gleichgewichte verloren gehen.

Streichung dominierter Strategien

Aufgabe: Rechnen Sie diese Aussagen zur Übung sorgfältig nach!

Beweis: (2) Sei $s \in \mathrm{NE}(\bar{u}')$, also $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x' \in \bar{S}'_i} u_i(x'; s_{-i})$. Für jedes $x \in \bar{S}_i$ gilt $x = (1-t)s'_i + ts$ mit $t \in [0,1]$, $s'_i \in \bar{S}'_i$ und $s \in \bar{D}_i$. Es existiert $s' \in \bar{S}'_i$ mit $s' \ge^u_i s$, also $x \le^u_i x' := (1-t)s'_i + ts' \in \bar{S}'_i$. Hieraus folgt $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x \in \bar{S}_i} u_i(x; s_{-i})$, also $s \in \mathrm{NE}(\bar{u})$.

(1) Sei $s \in \mathrm{NE}(\bar{u})$, also $u_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x \in \bar{S}_i} u_i(x; s_{-i})$ für jedes $i \in I$. Wir haben $s_i = (1-t)s'_i + ts$ mit $t \in [0,1]$, $s'_i \in \bar{S}'_i$ und $s \in \bar{D}_i$. Es existiert $s' \in \bar{S}'_i$ mit $s' >^u_i s$. Für $x' = (1-t)s'_i + ts'$ wäre $x' >^u_i s_i$ oder $t = 0$. Also gilt $t = 0$ und somit $s_i = s'_i \in \bar{S}'_i$. Das zeigt $s \in \mathrm{NE}(\bar{u}')$.

☺ Die Sachlage ist einfach. Warum ist die Notation so detailverliebt? Damit alles klar und einfach wird, müssen wir sorgsam argumentieren!

☺ Das Erkennen und Streichen von (strikt) dominierten Strategien vereinfacht die Spielanalyse. Das ist überaus nützlich und meist leicht, doch die Feinheiten sind subtil und müssen sauber ausgeführt werden. Ich betone dies, weil es erfahrungsgemäß oft falsch angewendet wird.

Stark und schwach dominierte Strategien

☺ Anschaulich gesagt: (2) Beim Erweitern von u' zu u nehmen wir schwach dominierte Strategien hinzu. Diese erhöhen offensichtlich nicht das Maximum für den Spieler $i \in I$, also bleiben Gleichgewichte des kleinen Spiels u' auch Gleichgewichte des großen Spiels u.

(1) Stark dominierte Strategien kommen in keinem Gleichgewicht vor. Wir können sie getrost streichen oder hinzufügen, auch hinzumischen.

☺ Streichung dominierter Strategien vereinfacht das Spiel u zu u'. Das hilft bei der Suche nach einem bzw. allen Gleichgewichten:

(2) Die Streichung schwach dominierter Strategien löscht vielleicht Gleichgewichte. Die Inklusion $\mathrm{NE}(u') \subseteq \mathrm{NE}(u)$ hingegen gilt immer: Haben wir also ein Gleichgewicht für u' gefunden, so bleibt dies für u. Das genügt, wenn wir nur *irgendein* Gleichgewicht von u finden wollen.

(1) Die Streichung stark dominierter Strategien ändert nichts an den Gleichgewichten: Genau das garantiert unsere obige Rechnung.

☺ Dies können wir iterieren, bis keine Streichungen mehr möglich sind. Hierzu benötigen wir (wie immer) Rationalität entsprechend hoher Stufe!

Erinnerung: Stufen der Rationalität

$\mathscr{R}_1$: Wer von Ihnen weiß, was „Stufen der Rationalität“ bedeutet?
$\mathscr{R}_2$: Wer von Ihnen weiß, dass alle anderen das ebenfalls wissen?
$\mathscr{R}_3$: Wer von Ihnen weiß, dass alle wissen, dass alle das wissen? …

♦ Definition A2A: Stufen der Rationalität

Unter **(unbeschränkter) Rationalität** verstehen wir folgende Axiome:

$\mathscr{R}_0$: Jeder Spieler will sein Ergebnis (Nutzen, Gewinn, …) maximieren.

$\mathscr{R}_1$: Jeder Spieler versteht zudem alle Spielregeln und Konsequenzen.

$\mathscr{R}_2$: Es gilt die vorige Aussage $\mathscr{R}_1$, und jeder Spieler weiß dies.

$\mathscr{R}_3$: Es gilt die vorige Aussage $\mathscr{R}_2$, und jeder Spieler weiß dies.

etc… Genauer definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Aussage

$\mathscr{R}_n$: Es gilt die Aussage $\mathscr{R}_{n-1}$, und jeder Spieler weiß dies.

$\mathscr{R}_\infty$: Es gilt die Aussage $\mathscr{R}_n$ für jede Stufe $n \in \mathbb{N}$.

☺ Wir nennen dies *gemeinsames Wissen*, engl. *common knowledge*. Beantworten Sie erneut die obigen Fragen: haben wir $\mathscr{R}_\infty$ hergestellt?

Beispiel zu schwach dominierten Strategien

Aufgabe: Konstruieren Sie ein Spiel, bei dem die Streichung einer schwach dominierten Strategie *alle* Nash–Gleichgewichte vernichtet.

Lösung: Wir beginnen mit einem Spiel u', etwa *Matching Pennies*:

A \ B	b_0	b_1	b_2
a_0	$+1$ / -1	-1 / $+1$	-2 / 0
a_1	-1 / $+1$	$+1$ / -1	$+1$ / $+2$

Die Strategie b_1 dominiert schwach die neue Strategie b_2 von Spieler B. Die Auszahlungen für Spieler A sind beliebig, wir wählen sie geschickt.

Die Strategie (a_1, b_2) ist ein Nash–Gleichgewicht des Spiels u. Beim Streichen der dominierten Strategie b_2 wird es vernichtet. Das Spiel u' hat gar keine Gleichgewichte mehr, $\bar{u}'$ hingegen schon.

Beispiel zu stark dominierten Strategien

Aufgabe: Finden Sie alle reinen Gleichgewichte, dann alle gemischten.

A \ B	b_0	b_1	b_2
a_0	1 / 4	3 / 3	2 / 1
a_1	2 / 3	1 / 2	0 / 3

Lösung: Die reinen Gleichgewichte finden wir durch Hinsehen: Hier ist nur (a_0, b_1) ein Nash–Gleichgewicht, es ist sogar strikt.

Die Strategie b_1 dominiert stark b_2. Im Teilspiel u' dominiert a_0 stark a_1. Im Teilspiel u'' dominiert b_1 stark b_0. Schließlich bleibt nur das triviale Teilspiel u''' bestehend aus (a_0, b_1). Das ist das einzige Gleichgewicht!

⚠ Es ist eine recht seltene Ausnahme, dass sich Spiele so einfach lösen lassen durch iterierte Löschung (stark) dominierter Strategien. Meist lassen sich nur wenige oder gar keine Strategien ausschließen. Wenn es jedoch möglich ist, bietet dies eine nützliche Vereinfachung.

Dominierte Strategien in der affinen Fortsetzung

Aufgabe: Gibt es Spiele $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit einer Strategie $s_2 \in S_2$, die im Spiel u nicht dominiert wird, wohl aber in $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

Lösung: Ja, das ist möglich. Wir konstruieren ein einfaches Beispiel:

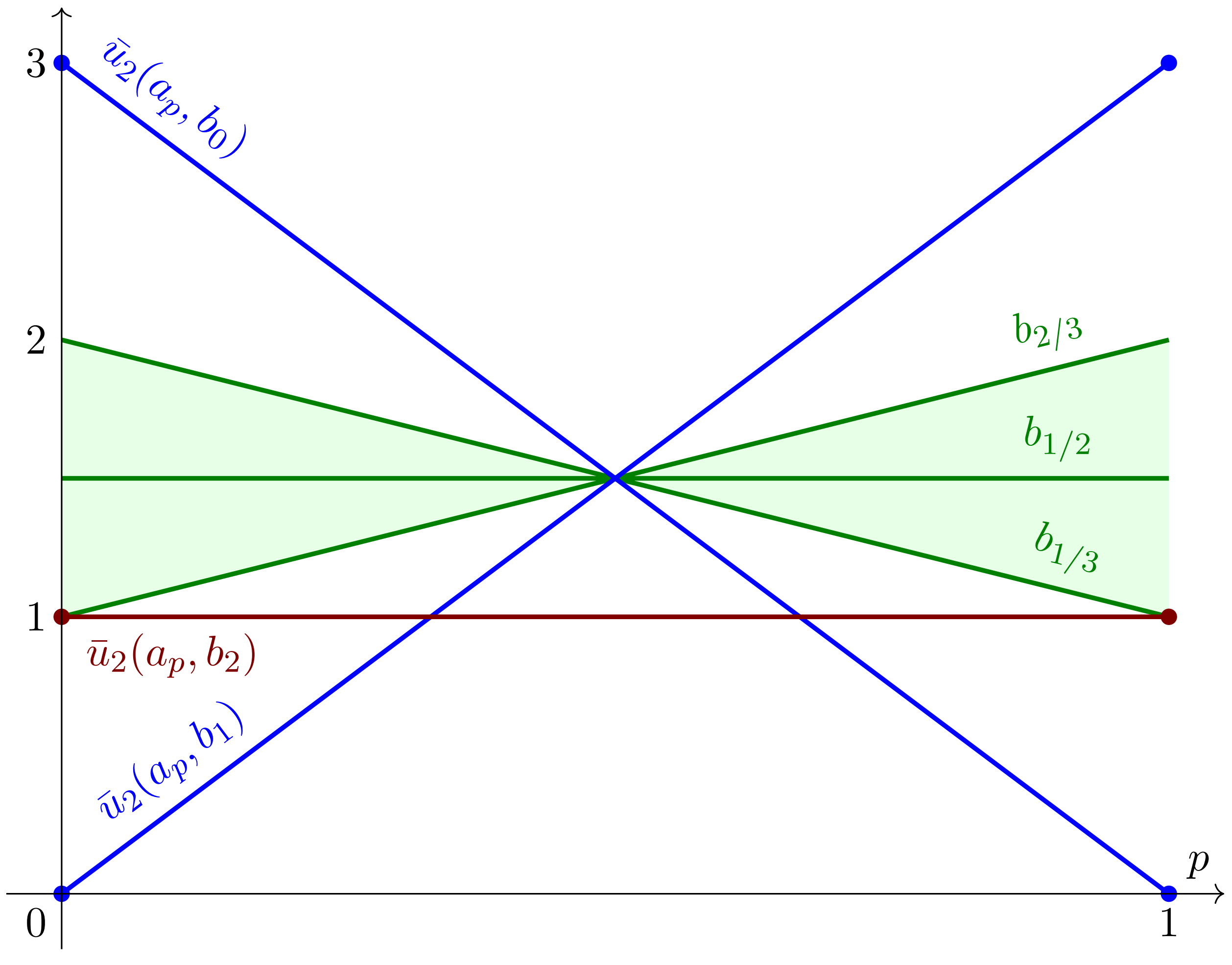
A \ B	b_0	b_1	b_2
a_0	$*$ / 3	$*$ / 0	$*$ / 1
a_1	$*$ / 0	$*$ / 3	$*$ / 1

Die Strategie b_2 wird von keiner reinen Strategie dominiert: weder b_0 noch b_1. Dies gelingt jedoch der gemischten Strategie $\frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{2}b_1 >_2^u b_2$. (Die Auszahlungen für Spieler 1 sind unerheblich und nicht gezeigt.)

Starke Dominanz $b_t := (1-t)b_0 + tb_1 >_2^u b_2$ gilt für alle $1/3 < t < 2/3$, und immerhin noch schwache Dominanz in den Fällen $t \in \{1/3, 2/3\}$.

🙂 Das Phänomen tritt im obigen Kartenduell auf, allerdings schwächer.

Dominierte Strategien in der affinen Fortsetzung



Rationalisierbare Strategien

Rationalität: Eine stark dominierte Strategie sollte nie gespielt werden. Ebensowenig eine Strategie, die nie beste Antwort ist. Wie ist hier der logische Zusammenhang? Es besteht eine bemerkenswerte Dualität!

Definition E2I: Rationalisierbarkeit

Die Strategie $s_i \in S_i$ heißt **rationalisierbar** oder **mindestens einmal beste Antwort**, wenn sie beste Antwort ist auf mind. eine (korrelierte) Gegenstrategie $s_{-i} \in [S_{-i}]$, also $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) = \max_{x \in \bar{S}_i} \bar{u}_i(x; s_{-i})$ erfüllt.

Jedes Nash–Gleichgewicht $s \in S$ besteht aus rationalisierbaren $s_i \in S_i$.

Satz E2J: Rationalisierbar ist das Gegenteil von stark dominiert.

Genau dann ist s_i^* stark dominiert, wenn s_i^* nie beste Antwort ist.

Beweis: Die Implikation „⇒“ ist klar: Dominiert $s_i \in \bar{S}_i$ stark $s_i^* \in S_i$, so gilt $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) > \bar{u}_i(s_i^*; s_{-i})$ für alle Gegenstrategien $s_{-i} \in [S_{-i}]$.
Die Implikation „⇐“ ist bemerkenswert: Zu jedem $s_{-i} \in [S_{-i}]$ existiert ein geeignetes $s_i \in \bar{S}_i$, das die Ungleichung $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) > \bar{u}_i(s_i^*; s_{-i})$ erfüllt. Wir suchen stärker ein $s_i \in \bar{S}_i$ für alle $s_{-i} \in [S_{-i}]$. „Einer für alle!“

Rationalisierbare Strategien

Wir konstruieren hierzu aus u ein Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel $v : S_1^* \times S_2^* \to \mathbb{R}^2$ mit Strategiemengen $S_1^* = S_i \smallsetminus \{s_i^*\}$ und $S_2^* = S_{-i}$ und der Auszahlungsfunktion $v_1(s_i, s_{-i}) = u_i(s_i; s_{-i}) - u_i(s_i^*; s_{-i})$.
Sei $\bar{v} : \bar{S}_1^* \times \bar{S}_2^* \to \mathbb{R}^2$ die Fortsetzung auf gemischte Strategien.
Im Spiel u ist s_i^* keine beste Antwort auf s_{-i}, wenn

$$\max_{s_i \in \bar{S}_1^*} \bar{v}_1(s_i, s_{-i}) > 0.$$

Im Spiel u ist s_i^* demnach nie beste Antwort, wenn

$$\min_{s_{-i} \in \bar{S}_2^*} \max_{s_i \in \bar{S}_1^*} \bar{v}_1(s_i, s_{-i}) > 0.$$

Nach dem Hauptsatz E2D gilt Minimax = Maximin, also

$$\max_{s_i \in \bar{S}_1^*} \min_{s_{-i} \in \bar{S}_2^*} \bar{v}_1(s_i, s_{-i}) > 0.$$

Es existiert demnach ein $s_i \in \bar{S}_1^*$ mit $\min_{s_{-i} \in \bar{S}_2^*} \bar{v}_1(s_i, s_{-i}) > 0$.
Das bedeutet $\bar{u}_i(s_i; s_{-i}) > \bar{u}_i(s_i^*; s_{-i})$ für alle $s_{-i} \in \bar{S}_{-i}$. $\boxed{\text{QED}}$

Rationalisierbare Strategien

Für Spiele mit nur zwei Spielern ist die Konstruktion klar und natürlich. Ab drei Spielern müssen wir genauer hinsehen: Jeder Spieler kann (optimistisch-naiv) all seine Gegenspieler als unabhängig annehmen, oder aber (pessimistisch-paranoid) all seine Gegenspieler als „Achse des Bösen“ zusammenfassen. Für die Strategiemengen bedeutet das:

$$\begin{aligned} [S_{-i}] &= [S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n] \\ \supsetneq \bar{S}_{-i} &= [S_1] \times \dots \times [S_{i-1}] \times [S_{i+1}] \times \dots \times [S_n] \end{aligned}$$

Wir gehen in Definition E2I und Satz E2J vom *worst case* aus, dass sich alle Gegenspieler zu einer Koalition gegen Spieler i verbünden können.

Sind alle Gegenspieler unabhängig, so ersetzen wir die konvexe Menge $[S_{-i}]$ durch die nicht-konvexe Menge $\bar{S}_{-i} \subsetneq [S_{-i}]$; die oben bewiesene Implikation gilt dann im Allgemeinen nicht mehr (siehe Übungen).

Rekursiv können wir nun die iterierte Löschung (stark) dominierter Strategien erklären, und ebenso Rationalisierbarkeit der Stufe $1, 2, 3, \dots$. Das ist wie oben gesehen oft nützlich zur Vereinfachung / Reduktion.

Quantorentausch

Satz und Beweis erinnern uns an das Problem des Quantorentauschs:

$$\begin{array}{ccc} \exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} : x \le y & \Longrightarrow & \forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N} : x \le y \\ & \not\Longleftarrow & \\ \exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} : x \ge y & \Longrightarrow & \forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N} : x \ge y \end{array}$$

Sei $P : X \times Y \to \{0,1\} : (x,y) \mapsto P(x,y)$ eine Aussageform.
Die Quantoren $\forall$ und $\exists$ entsprechen $\min$ und $\max$:

$$\begin{array}{rcl} x \mapsto \forall y : P(x,y) & \text{entspricht} & x \mapsto \min_{y \in Y} P(x,y) \\ \exists x\ \forall y : P(x,y) & \text{entspricht} & \max_{x \in X} \min_{y \in Y} P(x,y) \\ y \mapsto \exists x : P(x,y) & \text{entspricht} & y \mapsto \max_{x \in X} P(x,y) \\ \forall y\ \exists x : P(x,y) & \text{entspricht} & \min_{y \in Y} \max_{x \in X} P(x,y) \end{array}$$

Je zwei Allquantoren vertauschen, ebenso je zwei Existenzquantoren. Wir dürfen Allquantoren vorziehen (E2B), aber nicht Existenzquantoren:

$$\begin{array}{ccc} \exists x\ \forall y : P(x,y) & \Longrightarrow & \forall y\ \exists x : P(x,y) \\ \max_{x \in X} \min_{y \in Y} P(x,y) & \le & \min_{y \in Y} \max_{x \in X} P(x,y) \end{array}$$

Symmetrien von Spielen

Aufgabe: Bestimmen Sie die Symmetriegruppen der folgenden Spiele!

A \ u^1 \ B	bleiben	gehen
bleiben	-2 / -2	-5 / -2
gehen	-2 / -5	0 / 0

A \ u^2 \ B	B	S
B	2 / 1	0 / 0
S	0 / 0	1 / 2

U \ u^3 \ G	0	1
0	$+1$ / -1	-1 / $+1$
1	-1 / $+1$	$+1$ / -1

C \ u^4 \ D	K	L
K	0 / 0	2 / 1
L	1 / 2	0 / 0

🙂 Wir permutieren hier kohärent Spieler, Strategien und Ergebnisse. Welche dieser Spiele sind zueinander isomorph? Auf wie viele Weisen?

Symmetrien von Spielen

Wir notieren jede Symmetrie $(\tau, \sigma_1, \sigma_2)$ als Bijektion der Spielermenge $\tau : I \xrightarrow{\sim} I$ sowie der Strategiemengen $\sigma_1 : S_1 \xrightarrow{\sim} S_{\tau 1}$ und $\sigma_2 : S_2 \xrightarrow{\sim} S_{\tau 2}$.

🙂 Das erste Spiel *Bleiben-oder-Gehen* hat genau zwei Symmetrien: Die Identität $g_0 = (\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ und den Spielertausch $g_1 = ((\mathsf{A}\,\mathsf{B}), \mathrm{id}, \mathrm{id})$.

🙂 Das zweite Spiel *Bach oder Strawinsky* hat genau zwei Symmetrien: Die Identität $g_0 = (\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ und den Tausch $g_1 = ((\mathsf{A}\,\mathsf{B}), (B\,S), (B\,S))$. Wir tauschen nicht nur die Spieler, sondern zwingend auch Strategien.

🙂 Das dritte Spiel *Matching Pennies* hat genau vier Symmetrien: Die Identität $g_0 = (\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ und die Drehung $g_1 = (\mathrm{id}, (0\,1), (0\,1))$, Spielerflip $g_2 = ((\mathsf{U}\,\mathsf{G}), \mathrm{id}, (0\,1))$ und Spielerflop $g_3 = ((\mathsf{U}\,\mathsf{G}), (0\,1), \mathrm{id})$. Die Gruppe $G = \{g_0, g_1, g_2, g_3\}$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, nicht $\mathbb{Z}/4$.

🙂 Das vierte Spiel hat ebenfalls genau zwei Symmetrien: Die Identität $g_0 = (\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ und den Tausch $g_1 = ((\mathsf{C}\,\mathsf{D}), \mathrm{id}, \mathrm{id})$. Das zweite und vierte Spiel sind isomorph, sonst keine weiteren.
$\tau : \mathsf{C} \mapsto \mathsf{A}, \mathsf{D} \mapsto \mathsf{B}$ sowie $\sigma_1 : K \mapsto B, L \mapsto S$ und $\sigma_2 : K \mapsto S, L \mapsto B$.
$\tau' : \mathsf{C} \mapsto \mathsf{B}, \mathsf{D} \mapsto \mathsf{A}$ sowie $\sigma_1' : K \mapsto S, L \mapsto B$ und $\sigma_2' : K \mapsto B, L \mapsto S$.

Isomorphismen von Spielen

Aufgabe: In welchem Sinne sind die folgenden Spiele isomorph?

u^1: A \ B	0	1
0	-1, -1	-5, 0
1	0, -5	-4, -4

u^2: A \ B	0	1
0	4, 1	0, 3
1	5, -7	1, -5

u^3: A \ B	0	1
0	2, 2	0, 3
1	3, 0	1, 1

u^4: A \ B	0	1
0	0, 1	1, 2
1	3, 0	2, 3

Lösung: $u^1 \cong u^2$: Spieler und Strategien bleiben fix, die Ergebnisse werden affin-linear transformiert durch $r_1 \mapsto r_1 + 5$ bzw. $r_2 \mapsto 2r_2 + 3$. $u^1 \cong u^3$: nicht affin, nur monoton. $u^1 \cong u^4$: nur schwach monoton.

Isomorphismen von Spielen

Isomorphismen von Spielen sind mathematisch naheliegend. John Nash hat sie 1951 eingeführt und genutzt (auf Anregung von David Gale), später Harsanyi und Selten: *A general theory of equilibrium selection in games*, MIT 1988. In Kapitel 3 erklären sie affine Isomorphismen:

> *A reasonable solution concept should neither be influenced by positive linear payoff transformations nor by renamings of players, agents, and choices. The notion of an isomorphism combines both kinds of operations. We look at invariance with respect to isomorphisms as an indispensable requirement.*

In 2×2–Spielen hat jeder Spieler vier Auszahlungen. Bei Ausschluss von Gleichständen gibt es $4! = 24$ Anordnungen, dies führt zu $24^2 = 576$ Spielklassen. Permutation der Strategien reduziert dies auf $12^2 = 144$. Alle Spielklassen wurden geduldig aufgelistet von Goforth, Robinson: *The Topology of 2×2 Games. A new periodic table*, Routledge 2005.

Unter schwacher Monotonie bleiben sogar nur $2^4 = 16$ Klassen. Selbst wenn wir Gleichstände erlauben, sind es nur $3^4 = 81$ Klassen. Nash–Gleichgewichte bleiben unter all diesen Isomorphismen erhalten.

Symmetrien unter Spielern

Jede Permutation $\tau \in \mathrm{Sym}(I)$ operiert durch Umordnung $u \mapsto \tau \circ u \circ \tau^-$:

$$
\begin{tikzcd}
S := S_1 \times \dots \times S_n \arrow[rrr, "u"] \arrow[ddd, "\sigma"', "\cong"] & & & R_1 \times \dots \times R_n =: R \arrow[ddd, "\rho"', "\cong"] \\
& (s_1, \dots, s_n) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "s'_{\tau i}=s_i"', "s'_j=s_{\tau^- j}"] & (r_1, \dots, r_n) \arrow[d, mapsto, "r'_{\tau i}=r_i"', "r'_j=r_{\tau^- j}"] & \\
& (s'_1, \dots, s'_n) \arrow[r, mapsto] & (r'_1, \dots, r'_n) & \\
S' := S'_1 \times \dots \times S'_n \arrow[rrr, "u'=\rho\circ u\circ\sigma^-"] & & & R'_1 \times \dots \times R'_n =: R'
\end{tikzcd}
$$

Definition E2K: Spieler–Symmetrie

Ein Spiel u ist **spieler-symmetrisch** unter der Permutation $\tau : I \xrightarrow{\sim} I$, wenn $u = \tau \circ u \circ \tau^-$ gilt, also $S_i = S_{\tau i}$ und $R_i = R_{\tau i}$ für alle $i \in I$ sowie $u_i(s_1, \dots, s_n) = u_{\tau i}(s_{\tau^- 1}, \dots, s_{\tau^- n})$ für alle $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$.

Die Spieler-Symmetrien von u bilden die Gruppe $\mathrm{Sym}(u) \le \mathrm{Sym}(I)$. Das Spiel u heißt **spieler-symmetrisch**, falls $\mathrm{Sym}(u) = \mathrm{Sym}(I)$ gilt.

Symmetrien unter Spielern

Sei $I = \{1, 2, \dots, n\}$ die Spielermenge. Jede Permutation $\tau : I \xrightarrow{\sim} I$ definiert Permutationen $\sigma : S_1 \times \dots \times S_n \to S'_1 \times \dots \times S'_n$ mit $S'_{\tau i} = S_i$ und $\rho : R_1 \times \dots \times R_n \to R'_1 \times \dots \times R'_n$ mit $R'_{\tau i} = R_i$ wie üblich auf n–Tupeln.

Wir erhalten das Spiel $u' = \rho \circ u \circ \sigma^-$ durch **Umordnung der Spieler**. So operiert die symmetrische Gruppe $\mathrm{Sym}(I)$ auf den Spielern über I.

Allgemein seien I, J Spielermengen und $\tau : I \xrightarrow{\sim} J$ eine Bijektion.

Für jedes $i \in I$ sei $\sigma_i : S_i \xrightarrow{\sim} S'_{\tau i}$ eine Bijektion der Strategiemengen. Dies definiert $\sigma : \prod_{i \in I} S_i \to \prod_{j \in J} S'_j$ durch $(s_i)_{i \in I} \mapsto (\sigma_{\tau^- j} s_{\tau^- j})_{j \in J}$. Im einfachsten Falle denken wir an $S_i = S'_{\tau i}$ und $\sigma_i = \mathrm{id}_{S_i}$ für alle $i \in I$.

Für jedes $i \in I$ sei $\rho_i : (R_i, \le) \xrightarrow{\sim} (R'_{\tau i}, \le)$ eine monotone Bijektion. Dies definiert $\rho : \prod_{i \in I} R_i \to \prod_{j \in J} R'_j$ durch $(r_i)_{i \in I} \mapsto (\rho_{\tau^- j} r_{\tau^- j})_{j \in J}$. Im strikten Fall verlangen wir $R_i = R'_{\tau i}$ und $\rho_i = \mathrm{id}_{R_i}$ für alle $i \in I$.

Kurzum: Wir permutieren kohärent Spieler, Strategien und Ergebnisse. Das Spiel $u : S \to R$ permutieren wir zum Spiel $u' = \rho \circ u \circ \sigma^- : S' \to R'$.

Die folgende Definition präzisiert diese Idee für fünf Szenarien und erklärt strikte, (schwach) monotone, (schwach) affine Isomorphismen.

Isomorphismen von Spielen

Definition E2L: Isomorphismus von Spielen

Vorgelegt seien zwei strategische Spiele in Normalform

$$u : \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R_i \quad \text{und} \quad u' : \prod_{j\in J} S'_j \to \prod_{j\in J} R'_j$$

sowie hierzu Bijektionen $\tau : I \xrightarrow{\sim} J$ und $\sigma_i : S_i \xrightarrow{\sim} S'_{\tau i}$ für jedes $i \in I$.
Das definiert die **Produktbijektion** $\sigma : S \xrightarrow{\sim} S' : (s_i)_{i\in I} \mapsto (\sigma_{\tau^-j} s_{\tau^-j})_{j\in J}$.

Wir nennen (τ, σ) oder kurz $\sigma : u \to u'$ einen **Isomorphismus**, wenn gilt:

Strikt: Für alle $i \in I$ und $s \in S$ gilt $R_i = R_{\tau i}$ und $u'_{\tau i}(\sigma s) = u_i(s)$.

Monoton: Für alle Spieler $i \in I$ und alle Strategievektoren $s, s^* \in S$ gilt die Äquivalenz $u_i(s) \le u_i(s^*) \iff u'_{\tau i}(\sigma s) \le u'_{\tau i}(\sigma s^*)$.

Schwach monoton: Wir verlangen Monotonie nur falls $s_{-i} = s^*_{-i}$.

Affin: Beide Spiele sind reell, also $R_i = R_j = \mathbb{R}$ für alle $i \in I$ und $j \in J$, und es gilt $u'_{\tau i}(\sigma s) = a_i u_i(s) + b_i$ mit Konstanten $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $a_i > 0$.

Schwach affin: Es gilt $u'_{\tau i}(\sigma s) = a_i u_i(s) + b_i(s_{-i})$ mit $b_i : S_{-i} \to \mathbb{R}$.

Isomorphismen von Spielen

Schwach fordern wir Monotonie / Affinität für jeden Spieler $i \in I$ und $s_i \in S_i$ jeweils separat bei festgehaltener Gegenstrategie $s_{-i} \in S_{-i}$.

Proposition E2M: Abstrakter Nonsense wirkt konkret.

Strategische Spiele und ihre Isomorphismen bilden eine **Kategorie**:

$$\mathbf{Game} = \mathbf{Game}_{\mathrm{s}}, \quad \mathbf{Game}_{\mathrm{m}}, \quad \mathbf{Game}_{\mathrm{wm}}, \quad \mathbf{Game}_{\mathrm{a}}, \quad \mathbf{Game}_{\mathrm{wa}}.$$

Diese ist jeweils ein **Gruppoid**, denn jeder Morphismus ist invertierbar, Isomorphie erklärt strikte, (schwach) monotone / affine **Äquivalenz**.

Jeder Isomorphismus $\sigma : u \xrightarrow{\sim} u'$ bewahrt **Gleichgewichte**: Wir erhalten Bijektionen $\mathrm{NE}(u) \xrightarrow{\sim} \mathrm{NE}(u')$ und $\mathrm{NE}^!(u) \xrightarrow{\sim} \mathrm{NE}^!(u')$ vermöge $s \mapsto \sigma(s)$.

Zum Spiel $u \in \mathbf{Game}_*$ bilden die Automorphismen die **Gruppe** $\mathrm{Aut}_*(u)$. Diese Gruppe **operiert** demnach auf den Mengen $\mathrm{NE}(u)$ und $\mathrm{NE}^!(u)$.

Aufgabe: Prüfen Sie die behaupteten Eigenschaften sorgfältig nach! Bestimmen Sie diese Gruppen für möglichst viele unserer Beispiele! Symmetrien sind nützlich und geben Auskunft über Gleichgewichte!

Existenz symmetrischer Gleichgewichte

Aufgabe: (0) Seien u, u' endliche reelle Spiele. Jede Produktbijektion $\sigma : u \xrightarrow{\sim} u'$ setzt sich eindeutig affin fort zur Produktbijektion $\bar\sigma : \bar u \xrightarrow{\sim} \bar u'$.

(1) Die Fortsetzung $\sigma \mapsto \bar\sigma$ erhält i.A. nicht (schwache) Monotonie!

(2) Ist $\sigma : u \xrightarrow{\sim} u'$ strikt oder (schwach) affin, so auch $\bar\sigma : \bar u \xrightarrow{\sim} \bar u'$.
Wir erhalten also $\operatorname{Aut}_*(u) \hookrightarrow \operatorname{Aut}_*(\bar u) : \sigma \mapsto \bar\sigma$ für $* \in \{\mathrm{s}, \mathrm{a}, \mathrm{wa}\}$.

(3) Sei $G \le \operatorname{Aut}_*(u)$. Ist $s \in \bar S$ ein Nash–Gleichgewicht, so auch $\bar\sigma(s)$ für alle $\sigma \in G$, aber i.A. nicht die Symmetrisierung $\bar s := \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \bar\sigma(s)$.

(4) Nash bewies 1951 folgende Verschärfung seines Existenzsatzes:

Satz E2N: Existenzsatz für symmetrische Gleichgewichte

Sei $u : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel, wie oben erklärt, und $\bar u : \bar S_1 \times \cdots \times \bar S_n \to \mathbb{R}^n$ seine Fortsetzung auf gemischte Strategien.

Sei $G \le \operatorname{Aut}_*(u)$ eine Symmetriegruppe mit $* \in \{\mathrm{s}, \mathrm{a}, \mathrm{wa}\}$ wie oben.
Dann besitzt $\bar u$ mindestens ein G–invariantes Nash–Gleichgewicht:

Die Menge $\operatorname{NE}(\bar u)^G := \{\, s \in \operatorname{NE}(\bar u) \mid \forall \sigma \in G : \bar\sigma(s) = s \,\}$ ist nicht leer.

Folgern Sie dies aus der natürlichen Äquivarianz der Nash–Funktion.

Existenz symmetrischer Gleichgewichte

☺ Dieses schöne Argument führen Sie in unserer Übung aus!

Anleitung: Wiederholen Sie den Beweis von Nashs Existenzsatz E1F, insbesondere die Konstruktion der Nash–Funktion für Lemma E1K.

Beweisen Sie genauso (!) den stärkeren Satz E2N, zunächst für strikte Symmetrien $G \le \operatorname{Aut}_{\mathrm{s}}(u)$, indem Sie folgende Fragen beantworten:

(4a) Ist die Teilmenge $\bar S^G = \{\, s \in \bar S \mid \forall \sigma \in G : \bar\sigma(s) = s \,\} \subseteq \bar S$ der G–invarianten Strategievektoren nicht leer? konvex? kompakt?

(4b) Ist die Nash–Funktion $f : \bar S \to \bar S$ äquivariant unter G, gilt also $f(\bar\sigma(s)) = \bar\sigma(f(s))$ für alle $\sigma \in G$ und $s \in \bar S$?

(4c) Wie folgt hieraus die ersehnte Existenzaussage?

☺ Für schwach affine Symmetrien behelfen wir uns mit einem Trick. Durch einen schwach affinen Isomorphismus normieren wir u so, dass für jeden Spieler $i \in I$ bei fester Gegenstrategie $s_{-i} \in S_{-i}$ gilt: $\min_{s_i \in S_i} u_i(s_i; s_{-i}) = 0$ und $\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i; s_{-i}) \in \{0, 1\}$. Das vereinfacht unsere Argumente erheblich, da für jedes normierte Spiel u schwach affine Symmetrien dasselbe sind wie strikte Symmetrien. Voilà!

Für die Untersuchung von Spielen sind die Nash–Gleichgewichte fundamental und haben sich als wesentliches Werkzeug bewährt. Es ist daher interessant, die Menge $\mathrm{NE}(u) \subseteq S$ bzw. $\mathrm{NE}(\bar{u}) \subseteq \bar{S}$ aller Nash–Gleichgewichte möglichst explizit zu bestimmen.

In realistischen Fällen ist dies aufwändig. Selbst wenn es theoretisch möglich ist, so ist es doch praktisch oft außerhalb unserer Reichweite. Wir wollen die Menge $\mathrm{NE}(\bar{u}) \subseteq \bar{S}$ der Gleichgewichte dann wenigstens qualitativ beschreiben (analytisch, geometrisch, topologisch). Sind hier beliebig komplizierte Räume möglich oder gibt es Einschränkungen?

Der Existenzsatz für Nash–Gleichgewichte ist ein erster wichtiger Schritt. Er garantiert allgemein: Für jedes endliche reelle Spiel u gilt $\mathrm{NE}(\bar{u}) \neq \emptyset$. Der obige Satz verallgemeinert dies schmerzfrei zu $\mathrm{NE}(\bar{u})^G \neq \emptyset$.

Solcherart Struktursätze sind durchaus auch praktisch relevant, da sie Rechnungen vereinfachen können oder überprüfen helfen. Weitere Fixpunktsätze, etwa von Kakutani oder Glicksberg, liefern Existenzaussagen für Gleichgewichte in allgemeineren Spielen u.

Hier ist Platz für Ihre Notizen, Beweise bzw. Gegenbeispiele.

Reguläre Bimatrixspiele

Wir betrachten ein Zwei-Personen-Spiel in strategischer Normalform

$$u \,:\, S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, (s_1, s_2) \mapsto \big(u_1(s_1, s_2),\, u_2(s_1, s_2) \big).$$

Dabei seien $S_1 = \{s_1^0 < s_1^1 < \dots < s_1^m\}$ und $S_2 = \{s_2^0 < s_2^1 < \dots < s_2^n\}$.
Die Auszahlungen (u_1, u_2) entsprechen zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{S_1 \times S_2}$.
Wir betrachten Untermatrizen zu $I \subseteq S_1$ und $J \subseteq S_2$ mit $\sharp I = \sharp J + 1$
und ergänzen zu einer quadratischen $(I \times J^*)$–Matrix mit $J^* = J \sqcup \{*\}$:

$$A^*_{I\times J} := \begin{pmatrix} & & 1 \\ & A_{I\times J} & \vdots \\ & & 1 \end{pmatrix} \,:\, (i,j) \mapsto \begin{cases} a_{i,j} & \text{für } i \in I \text{ und } j \in J, \\ 1 & \text{für } i \in I \text{ und } j = *. \end{cases}$$

Definition E2o: reguläre Spiele

Die Auszahlungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{S_1 \times S_2}$ nennen wir (affin) **regulär**,
falls $\det(A^*_{I\times J}) \neq 0$ gilt für alle $I \subseteq S_1$ und $J \subseteq S_2$ mit $\sharp I = \sharp J + 1$.
Das Spiel $u = (A, B)$ heißt **regulär**, wenn A und $B^\intercal$ regulär sind.

🙂 Das ist generisch erfüllt: Fast alle Bimatrixspiele sind regulär!

Reguläre Bimatrixspiele

Kleinstes Beispiel: Sei $I = \{i < i'\}$ und $J = \{j\}$.

$$A^*_{I\times J} := \begin{pmatrix} a_{i,j} & 1 \\ a_{i',j} & 1 \end{pmatrix}$$

Regularität bedeutet hier $\det A^*_{I\times J} = a_{i,j} - a_{i',j} \neq 0$.
In der $j$ten Spalte von A stehen lauter verschiedene Zahlen.

Die Ordnung auf I und J klärt die Reihenfolge der Zeilen und Spalten.
Alternativ können wir nur $|\det(A^*_{I\times J})| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ betrachten und $\neq 0$ fordern.

🙂 Entsprechendes gilt für alle höheren Regularitätsbedingungen:
Die Bedingung $\det A^*_{I\times J} \neq 0$ besagt, die Zeilen der Matrix $A^*_{I\times J}$ sind
linear unabhängig, die Zeilen der Matrix $A_{I\times J}$ also affin unabhängig.
Das vereinfacht Rechnungen, da alle lästigen Ausnahmen wegfallen.

🙂 Generisch bedeutet: Regularität gilt für fast alle Bimatrixspiele,
genauer gilt sie für eine offene dichte Teilmenge aller Bimatrixspiele.

Die Menge der singulären Matrizen ist abgeschlossen, nirgends dicht,
und hat das Lebesgue–Maß Null. Wenn Sie also zufällig (stetig verteilt)
ein Bimatrixspiel auswählen, so ist es fast sicher (mit Wkt 1) regulär.

Reguläre Bimatrixspiele

Satz E2R: reguläre $2 \times n$–Bimatrixspiele

Jedes reguläre $2 \times n$–Spiel hat höchstens $1 + n$ Nash–Gleichgewichte, und ihre ist Anzahl ungerade. Jede dieser Möglichkeiten wird realisiert.

Satz E2S: reguläre $m \times n$–Bimatrixspiele

Sei $2 \le m \le n$ und $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein reguläres $m \times n$–Spiel. Dann hat $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ weniger als $\binom{m+n}{m}$ Nash–Gleichgewichte:

(1) Jedes Nash–Gleichgewicht $(s_1, s_2) \in \bar{S}_1 \times \bar{S}_2$ hat quadratischen Träger, das heißt $\operatorname{supp}(s_1) = I \subseteq S_1$ und $\operatorname{supp}(s_2) = J \subseteq S_2$ mit $\sharp I = \sharp J$.

(2) Jedes solche Quadrat $I \times J$ trägt höchstens ein Nash–Gleichgewicht. Jedes ist lokal eine rationale Funktion der Koeffizienten.

Satz E2T: Wilson 1971

Fast alle endlichen reellen Spiele $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ haben endlich viele Nash–Gleichgewichte, und ist ihre Anzahl $\sharp \operatorname{NE}(\bar{u})$ ist ungerade.

Reguläre Bimatrixspiele

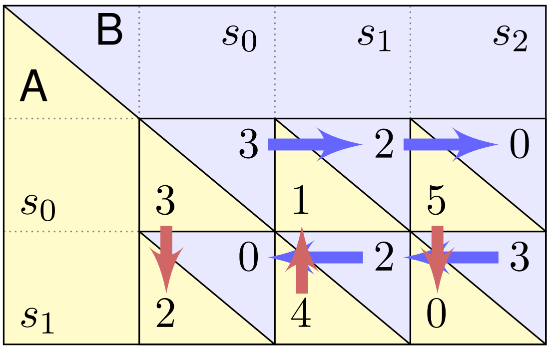
Satz E2R ist eine schöne Übung, die wir nachfolgend lösen. Damit lernen Sie insbesondere, alle kleinen Spiele zu lösen. Auch Satz E2S können Sie mit den elementaren Mitteln der Linearen Algebra direkt nachrechnen. Ich empfehle dies als ambitionierte Übung.

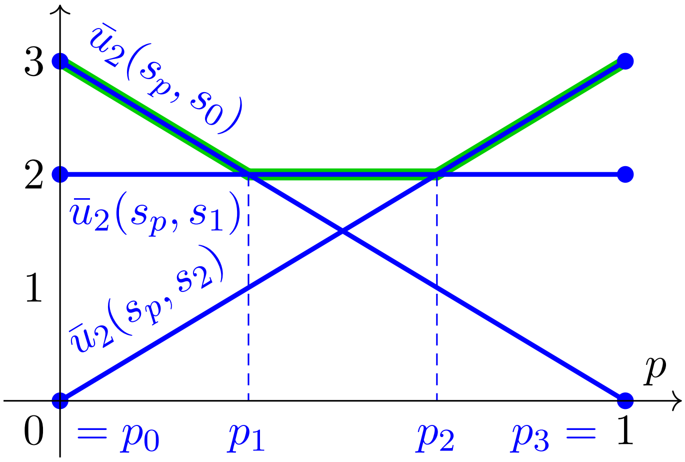
Der Satz E2T von Wilson gilt für jede beliebige Anzahl n von Spielern und jede beliebige Größe ihrer Strategiemengen $S_1, \dots, S_n$. Dieser Satz ist daher wesentlich allgemeiner und leider auch schwerer zu beweisen. Er ist eine idealtypische Anwendung der algebraischen Topologie.

📖 Robert Wilson: *Computing equilibria of n-person games.* Siam Journal on Applied Mathematics (1971) 80–87.

Eine elegante topologische Erklärung stammt von Elon Kohlberg und Jean-Francois Mertens: *On the strategic stability of equilibria.* Econometrica (1986) 1003–1037. (Satz und Beweis in §3.2 benötigen etwa eine Seite, müssen aber erst einmal sorgsam entpackt werden.)

Lösung regulärer $2 \times n$–Bimatrix-Spiele





Strategiemengen seien $S_1 = \{s_0, s_1\}$ für Alice und $S_2 = \{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ für Bob mit Auszahlungen $u(s_i, s_j) = (a_{ij}, b_{ij}) \in \mathbb{R}^2$ für $(s_i, s_j) \in S_1 \times S_2$.

Durch Umsortieren der Menge S_2 erreichen wir $b_{00} \ge b_{01} \ge \dots \ge b_{0n}$. Regulär sind Gleichheiten ausgeschlossen, also $b_{00} > b_{01} > \dots > b_{0n}$.

In der zweiten Zeile können wir zudem $b_{10} < b_{11} < \dots < b_{1n}$ annehmen: Gilt $b_{0i} > b_{0j}$ und $b_{1i} > b_{1j}$, so dominiert s_i strikt s_j, und wir löschen s_j.

Wir finden $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_n = 1$, sodass gilt: Auf Alice' Strategie $s_p = (1-p)s_0 + p s_1$ mit $p \in [p_j, p_{j+1}]$ ist Bobs Strategie s_j beste Antwort.

Lösung regulärer $2 \times n$–Bimatrix-Spiele

In der Übung gehen Sie folgenden Fragen auf den Grund:
Warum kann es hier keine Tripelpunkte geben? Regularität hilft!
Wie rechnen Sie alle Nash–Gleichgewichte explizit aus?
Warum ist ihre Anzahl bei Regularität immer ungerade?

Skizze zur ungeraden Anzahl: Wir können $b_{00} > b_{01} > \dots > b_{0n}$ und $b_{10} < b_{11} < \dots < b_{1n}$ annehmen, dank Umsortieren und Regularität. Der linke Rand $p = 0$ gibt ein (reines) NE genau dann, wenn $a_{01} > a_{11}$. Der rechte Rand $p = 1$ gibt ein (reines) NE genau dann, wenn $a_{0n} < a_{1n}$. Jede Ordnungsumkehr dazwischen liefert ein gemischtes NE $p \in\,]0,1[$.

Nehmen wir beide reinen NE links und rechts an oder keines davon, dann gibt es dazwischen eine ungerade Anzahl von Umkehrungen. Nehmen wir hingegen entweder links oder rechts ein reines NE an, so gibt es dazwischen immer eine gerade Zahl von Umkehrungen. In jedem Falle ist die Anzahl der Nash-Gleichgewichte ungerade.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2020)

E301
Übung

Aufgabe: Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S \times T \to \mathbb{R}^2$ und seine Fortsetzung $\bar{g} : [S] \times [T] \to \mathbb{R}^2$ auf gemischte Strategien.

Alice \ Bob	t_0	t_1	t_2	t_3
s_0	5 3	1 1	1 3	2 2
s_1	3 3	3 6	3 0	5 4

(1) Nennen Sie alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s, t) \in \mathrm{NE}(g)$.

(2) Angenommen Alice spielt die Strategie $s_p = (1 - p)s_0 + ps_1$ für ein $p \in [0, 1]$. Zeichnen Sie die Auszahlung $f_i(p) := \bar{g}_B(s_p, t_i)$ zu Bobs Strategie t_i für $i = 0, 1, 2, 3$.

Eine von Bobs reinen Strategien $x \in T$ ist nie beste Antwort; nennen Sie x und eine gemischte Strategie $y \in [T \smallsetminus \{x\}]$, die x strikt dominiert.

(3) Nennen Sie zu jeder Strategie s_p Bobs beste Antworten.

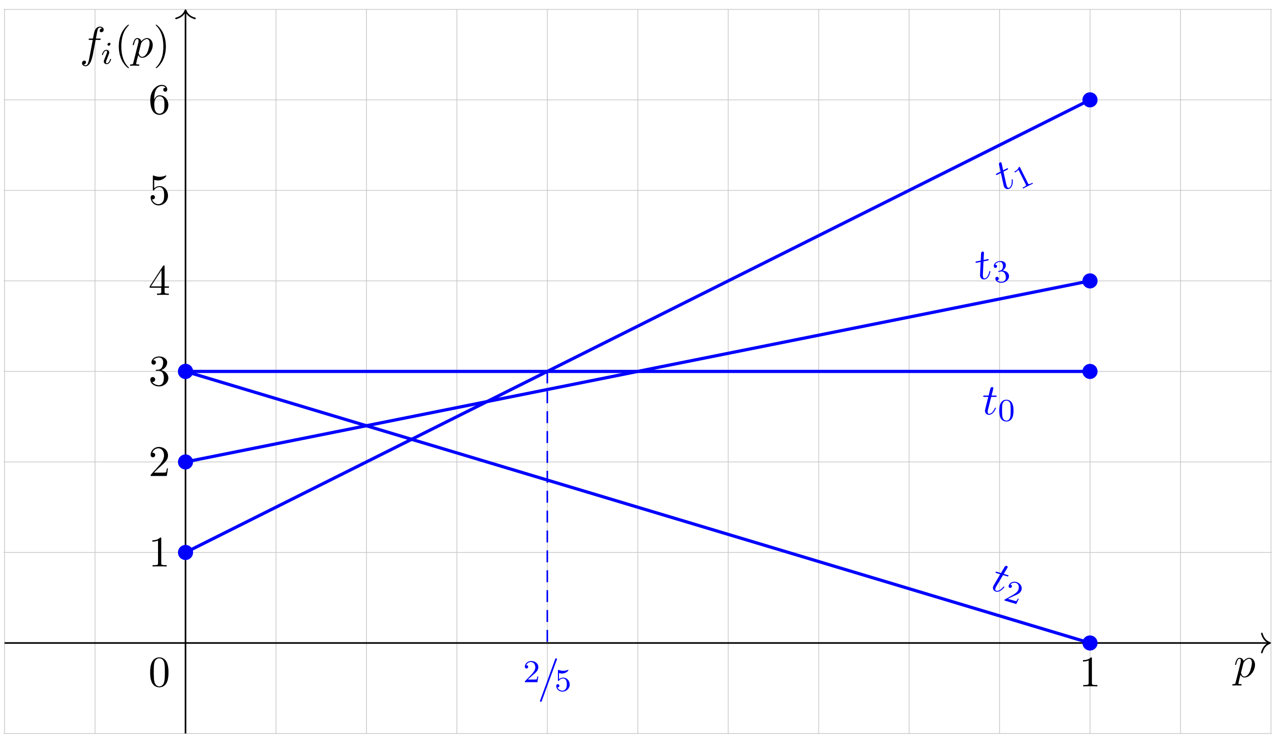
(4) Bestimmen Sie damit alle Nash–Gleichgewichte $(s, t) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2020)

E302
Übung

Lösung: (1) Die reinen Gleichgewichte sind $\mathrm{NE}(g) = \{\, (s_0, t_0),\ (s_1, t_1)\, \}$.

(2) Wir skizzieren die Auszahlungen $f_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ für Bob:



Demnach ist t_3 nie beste Antwort. Sie wird dominiert von $y = \frac{3}{5}t_0 + \frac{2}{5}t_1$.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2020)

(3) Graphisch lesen wir zu s_p jeweils Bobs beste Antworten ab:

Intervall	$p=0$	$0<p<2/5$	$p=2/5$	$2/5<p\le 1$
Antwort	$[t_0,t_2]$	$\{t_0\}$	$[t_0,t_1]$	$\{t_1\}$

(4) Alice spielt $s_p=(1-p)s_0+ps_1$ mit $p\in[0,1]$. Fallunterscheidung:

1. Fall: Hier gilt $p=0$. Bob spielt $t=(1-q)t_0+qt_2$. Alice bekommt $g_A(s_0,t)=(1-q)\cdot 5+q\cdot 1$, abweichend $g_A(s_1,t)=(1-q)\cdot 3+q\cdot 3$. Es muss $g_A(s_0,t)\ge g_A(s_1,t)$ gelten, also $2(1-q)\ge 2q$, somit $q\ge 1/2$.

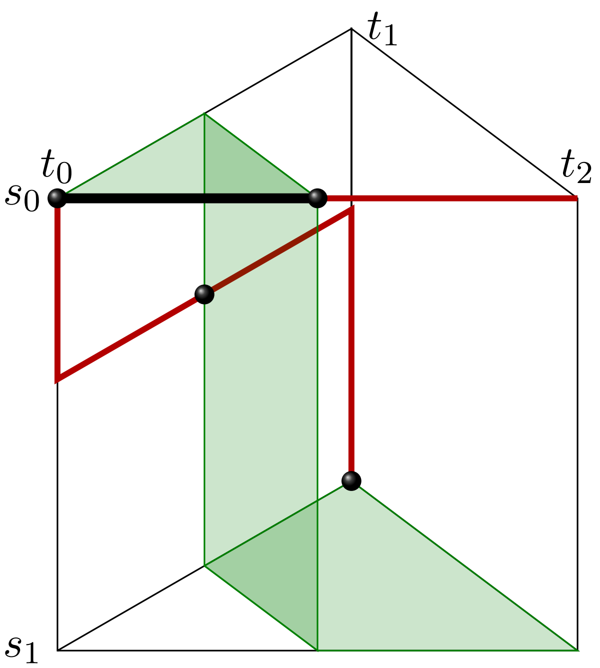
2. Fall: Hier gilt $0<p<2/5$. Bob spielt $t=t_0$.
Wegen $g_A(s_0,t_0)=5>3=g_A(s_1,t_0)$ entsteht hier kein Gleichgewicht.

3. Fall: Hier gilt $p=2/5$. Bob spielt $t=(1-q)t_0+qt_1$. Alice bekommt $g_A(s_0,t)=(1-q)\cdot 5+q\cdot 1$ bzw. $g_A(s_1,t)=(1-q)\cdot 3+q\cdot 3$.
Es muss $g_A(s_0,t)=g_A(s_1,t)$ gelten, also $2(1-q)=2q$, somit $q=1/2$.

4. Fall: Hier gilt $2/5<p\le 1$. Bob spielt $t=t_1$.
Wegen $g_A(s_0,t_0)=1<3=g_A(s_1,t_0)$ muss Alice s_1 spielen.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2020)

Zusammenfassung: Nash–Gleichgewichte sind die beiden isolierten Punkte (s_1,t_1) und (s,t) mit $s=3/5\,s_0+2/5\,s_1$ und $t=1/2\,t_0+1/2\,t_1$ sowie das Intervall aller Punkte (s_0,t) mit $t=(1-q)t_0+qt_2$ und $q\in[0,1/2]$.



Die rote Reaktionskurve für Bob erhalten wir aus (3). Spielt Bob die Strategie $t=q_0t_0+q_1t_1+q_2t_2$, dann erhält Alice die Auszahlung $5q_0+1q_1+1q_2$, wenn sie s_0 spielt, und $3q_0+3q_1+3q_2$, wenn sie s_1 spielt. Demnach ist s_0 die beste Antwort, falls $q_0>1/2$, und s_1 ist die beste Antwort, falls $q_0<1/2$. Im Fall $q_0=1/2$ ist jede Konvexkombination von s_0 und s_1 eine beste Antwort; dies ist die grüne Reaktionsfläche.

Die Schnittmenge der beiden Reaktionsrelationen (Kurve / Fläche) ist die Menge der Nash–Gleichgewichte, hier schwarz eingezeichnet.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2019)

Aufgabe: Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S_A \times S_B \to \mathbb{R}^2$ und seine Fortsetzung $\bar{g} : [S_A] \times [S_B] \to \mathbb{R}^2$ auf gemischte Strategien.

Alice \ Bob	s_2	s_3	s_4	s_5
s_0	1, 3	3, 6	5, 5	4, 4
s_1	3, 5	3, 0	6, 1	2, 4

(1) Nennen Sie alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(g)$.

(2) Angenommen Alice spielt die gemischte Strategie $s_t = (1-t)s_0 + ts_1$ für ein $t \in [0,1]$. Zeichnen Sie die Auszahlung $f_a(t) := \bar{g}_B(s_t, a)$ zu Bobs reinen Antworten $a \in \{s_2, s_3, s_4, s_5\}$.

Eine von Bobs reinen Strategien $x \in S_B$ ist nie beste Antwort; nennen Sie x und eine gemischte Strategie $y \in [S_B \setminus \{x\}]$, die x strikt dominiert.

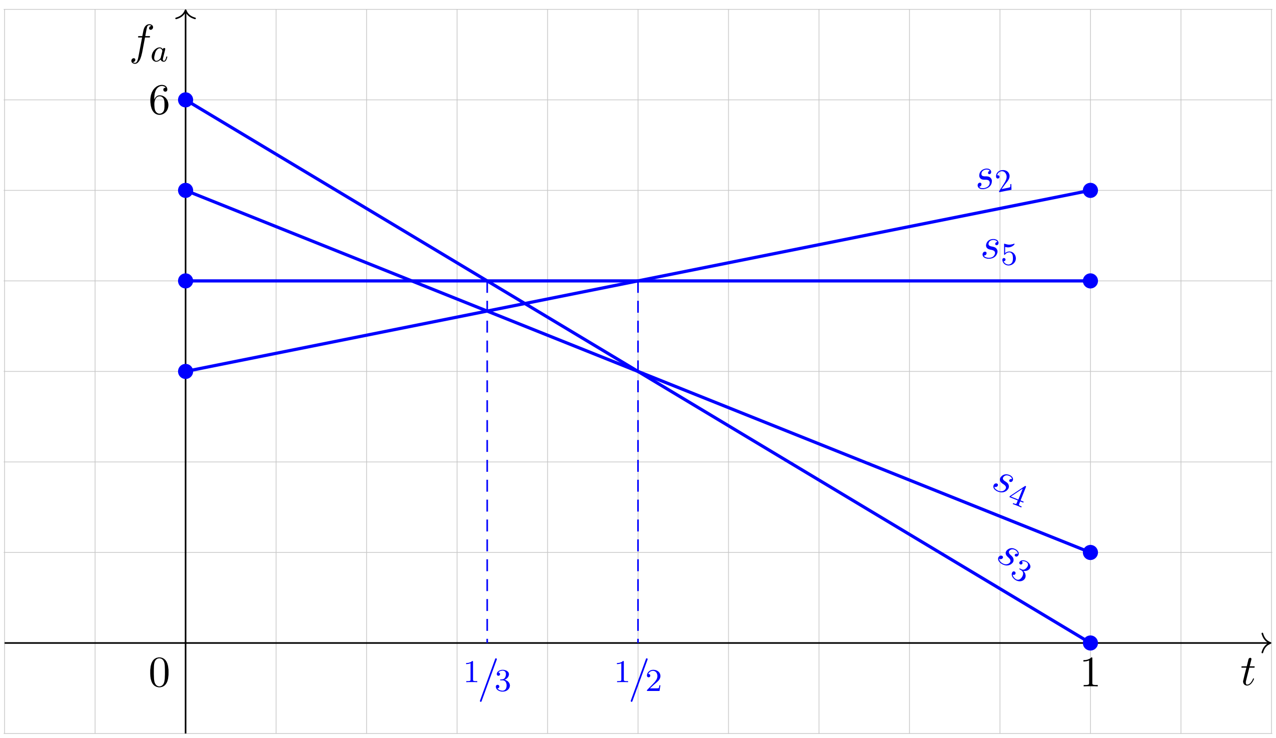
(3) Nennen Sie zu jeder Strategie s_t Bobs beste Antworten.

(4) Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2019)

(1) Die reinen Gleichgewichte sind $\mathrm{NE}(g) = \{\ (s_0, s_3),\ (s_1, s_2)\ \}$.

(2) Wir skizzieren die Auszahlungen $f_a : [0,1] \to \mathbb{R}$ für Bob:



Demnach ist s_4 nie beste Antwort. Sie wird dominiert von $y = \frac{2}{3}s_3 + \frac{1}{3}s_5$.

(3) Graphisch lesen wir zu s_t jeweils Bobs beste Antworten ab:

Intervall	$0 \le t <$	$1/3$	$< t <$	$1/2$	$< t \le 1$
Antwort	$\{s_3\}$	$[s_3, s_5]$	$\{s_5\}$	$[s_5, s_2]$	$\{s_2\}$

(4) Alice spielt $s_A = s_t = (1-t)s_0 + ts_1$ mit $t \in [0,1]$. Fallunterscheidung:

1. Fall: $0 \le t < \frac{1}{3}$. Bob spielt $s_B = s_3$. Darauf ist $s_A \in [s_0, s_1]$ Alice' beste Antwort. Wir finden so die Nash–Gleichgewichte (s_t, s_3) für $0 \le t < \frac{1}{3}$.

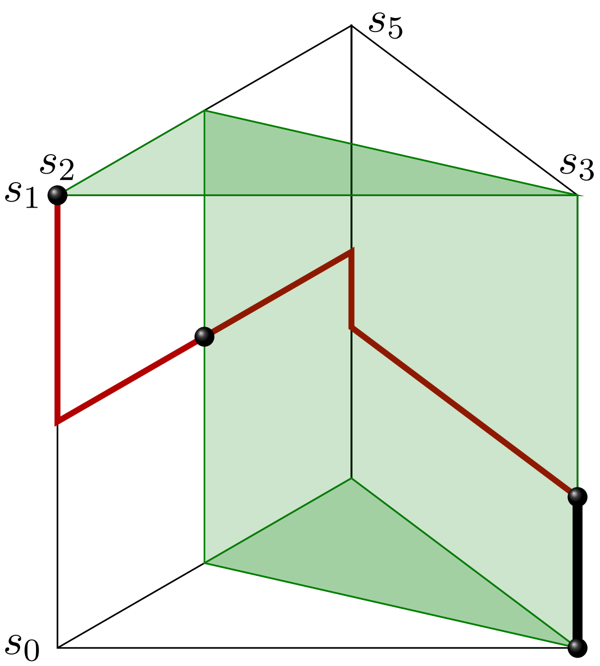
2. Fall: $t = \frac{1}{3}$. Bob spielt $s_B \in [s_3, s_5]$. Nur auf $s_B = s_3$ ist $s_A = s_t$ Alice' beste Antwort. Wir finden so das Nash–Gleichgewicht (s_t, s_3) für $t = \frac{1}{3}$.

3. Fall: $\frac{1}{3} < t < \frac{1}{2}$. Bob spielt $s_B = s_5$. Darauf ist $s_A = s_0$ Alice' beste Antwort. Wir finden in diesem Intervall keine weiteren Gleichgewichte.

4. Fall: $t = \frac{1}{2}$. Bob spielt $s_B \in [s_2, s_5]$. Nur auf $s_B = \frac{1}{2}s_2 + \frac{1}{2}s_5$ ist $s_A = s_t$ Alice' beste Antwort. Wir finden so das Gleichgewicht (s_t, s_B) für $t = \frac{1}{2}$.

5. Fall: $\frac{1}{2} < t \le 1$: Bob spielt $s_B = s_2$. Darauf ist $s_A = s_1$ Alice' beste Antwort. Wir finden so das letzte Nash–Gleichgewicht (s_1, s_2).

Zusammenfassung: Nash–Gleichgewichte sind die isolierten Punkte (s_1, s_2) und (s_A, s_B) mit $s_A = {}^1\!/\!_2\, s_0 + {}^1\!/\!_2\, s_1$ und $s_B = {}^1\!/\!_2\, s_2 + {}^1\!/\!_2\, s_5$ sowie das Intervall aller Punkte (s_t, s_3) mit $t \in [0, {}^1\!/\!_3]$.



Die rote Reaktionskurve für Bob erhalten wir aus (3). Spielt Bob die Strategie $s_B = p_2 s_2 + p_3 s_3 + p_5 s_5$, dann erhält Alice die Auszahlung $p_2 + 3p_3 + 4p_5$, wenn sie s_0 spielt, und $3p_2 + 3p_3 + 2p_5$, wenn sie s_1 spielt. Also ist s_0 die beste Antwort falls $p_2 < p_5$, und s_1 ist die beste Antwort falls $p_2 > p_5$. Im Fall $p_2 = p_5$ ist jede Konvexkombination von s_0 und s_1 beste Antwort. So erhalten wir die grüne Reaktionsfläche für Alice.

Die Schnittmenge der beiden Reaktionsrelationen (Kurve / Fläche) ist die Menge der Nash–Gleichgewichte, hier schwarz eingezeichnet.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2018)

Aufgabe: Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S_A \times S_B \to \mathbb{R}^2$ und seine Fortsetzung $\bar{g} : [S_A] \times [S_B] \to \mathbb{R}^2$ auf gemischte Strategien.

Alice \ Bob	a	b	c
s_0	7 / 5	7 / 10	3 / 8
s_1	1 / 10	4 / 0	9 / 8

(1) Nennen Sie alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(g)$.

(2) Angenommen Alice spielt die gemischte Strategie $s_t = (1-t)s_0 + ts_1$ für ein $t \in [0,1]$. Zeichnen Sie die Auszahlung $f_a(t) := \bar{g}_B(s_t, a)$ zu Bobs Strategie a, ebenso f_b und f_c.

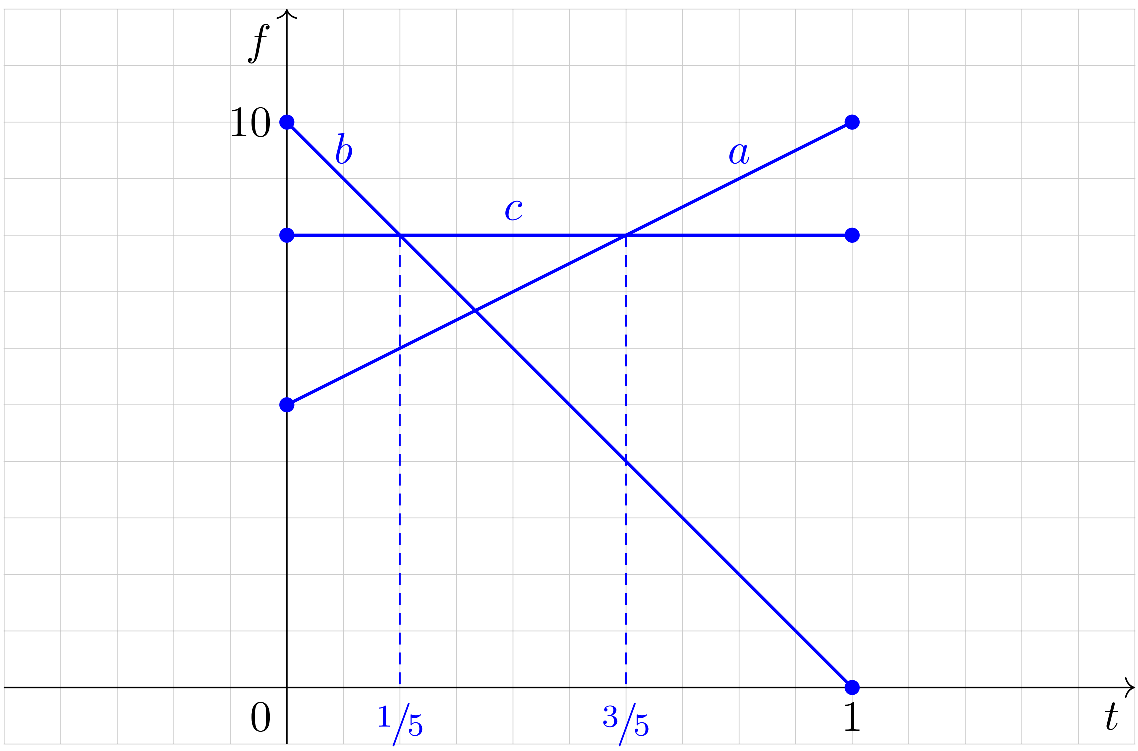
(3) Nennen Sie zu jeder Strategie s_t Bobs beste Antworten.

(4) Bestimmen Sie damit alle Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Nash–Gleichgewichte (Klausur 2018)

Lösung: (1) Das einzige reine Gleichgewicht ist $(s_A, s_B) = (s_0, b)$.

(2) Wir skizzieren die Auszahlungen $f_a, f_b, f_c : [0,1] \to \mathbb{R}$ für Bob:



Nash–Gleichgewichte (Klausur 2018)

(3) Graphisch lesen wir zu s_t jeweils Bobs beste Antworten ab:

Intervall	$0 \le t <$	$1/5$	$< t <$	$3/5$	$< t \le 1$
Antwort	$\{b\}$	$[b, c]$	$\{c\}$	$[a, c]$	$\{a\}$

(4) Neben dem reinen Gleichgewicht (s_0, b) finden wir die gemischten

$$\left(\, s_{\frac{1}{5}},\ \tfrac{2}{3}b + \tfrac{1}{3}c \,\right) \quad \text{und} \quad \left(\, s_{\frac{3}{5}},\ \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}c \,\right).$$

☺ Dies sind *gegenseitig* beste Antworten, wie die Definition es verlangt. Hierzu ist eine kleine Rechnung notwendig: Versuchen Sie es als Übung! (Anleitung: Die beiden vorigen Aufgaben führen dies genauer aus.)

☺ Mit dieser Methode können Sie alle $2 \times n$–Spiele lösen.

Wiederholen / entwickeln Sie den Algorithmus, der zu jedem Spiel $g : \{0, 1\} \times \{0, 1, \dots, n\} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ alle Nash–Gleichgewichte bestimmt.

Der generische Fall ist leichter. Wie lösen Sie den allgemeinen Fall? Wenn Sie möchten, können Sie Ihr Lösungsverfahren programmieren!

Verständnisfragen (Klausur 2018)

Aufgabe: Hat jedes endliche Spiel $g : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(1) mindestens ein *reines* Nash–Gleichgewicht? (2) ein gemischtes?

(3) Hat jedes unendliche Spiel, etwa von der Form $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mindestens ein *gemischtes* Nash–Gleichgewicht?

Lösung: (1) Nein! Ein minimales Gegenbeispiel ist *Matching Pennies*. Etwas größer, dafür aber bekannter ist natürlich *Schere-Stein-Papier*. Diese Spiele erlauben keine reinen Nash–Gleichgewichte.

(2) Ja! Genau das garantiert der Existenzsatz E1F von Nash.

(3) Nein! Ein mögliches Gegenbeispiel ist *Die höchste Zahl gewinnt*, wobei $g(s_1, s_2) = (+1, -1)$ falls $s_1 > s_2$ und $g(s_1, s_2) = (-1, +1)$ falls $s_1 < s_2$ sowie $g(s_1, s_2) = (0, 0)$ falls $s_1 = s_2$. Offensichtlich gibt es kein reines Nash–Gleichgewicht, denn jede Strategie kann vom Gegner übertrumpft werden. Ebensowenig gibt es gemischte Gleichgewichte. Das gilt selbst dann, wenn wir unendliche Konvexkombinationen / diskrete WMaße zulassen, also $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} s(n) = 1$.

Aufgabe: Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf der Strategiemenge $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ und seine affine Fortsetzung $\bar{g} : [S] \times [S] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf dem Simplex $[S] = [s_1, s_2, \dots, s_n]$.

Alice \ Bob	s_1	s_2	$\dots$	s_n
s_1	1 / 1	0 / 0		0 / 0
s_2	0 / 0	1 / 1		0 / 0
$\dots$				0 / 0
s_n	0 / 0	0 / 0	0 / 0	1 / 1

Formal haben wir also

$$g \;:\; S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; g(s_k, s_\ell) = \begin{cases} (1,1) & \text{falls } k = \ell, \\ (0,0) & \text{falls } k \neq \ell. \end{cases}$$

(1) Nennen Sie alle *reinen* Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(g)$.
(2) Alice spielt $s_A = \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2$. Nennen Sie Bobs beste Antworten.
(3) Bob spielt $s_B = \frac{2}{5}s_1 + \frac{2}{5}s_2 + \frac{1}{5}s_3$. Nennen Sie Alice' beste Antworten.
(4) Nennen Sie alle gemischten Nash–Gleichgewichte $(s_A, s_B) \in \mathrm{NE}(\bar{g})$.

Lösung: (1) Wir sehen sofort $\mathrm{NE}(g) = \{\, (s_k, s_k) \mid k = 1, 2, \dots, n \,\}$, denn zu jedem s_k gibt es genau eine beste Antwort, nämlich s_k.

(2) Die besten Antworten auf s_A sind rein $\{s_1, s_2\}$ und gemischt $[s_1, s_2]$.

(3) Die besten Antworten auf s_B sind rein $\{s_1, s_2\}$ und gemischt $[s_1, s_2]$.

(4) Wir finden hier genau $2^n - 1$ Nash–Gleichgewichte:

$$\mathrm{NE}(\bar{g}) = \left\{ \, (s_A^X, s_B^X) \;\middle|\; \emptyset \neq X \subseteq \{1, 2, \dots, n\},\; s_A^X = s_B^X = \frac{1}{|X|} \sum_{k \in X} s_k \, \right\}.$$

☺ Jedes dieser Strategiepaare (s_A^X, s_B^X) ist ein Gleichgewicht. Umgekehrt ist jedes Gleichgewicht (s_A, s_B) von dieser Form.

Der Beweis ist nicht schwer, aber etwas länglich, deshalb genügte in der Klausur die Nennung der Lösung. Versuchen Sie den Beweis als Übung!

Diagonalspiele und ihre Nash–Gleichgewichte

Generisch ist die Anzahl der Nash–Gleichgewichte endlich (für eine offene dichte Teilmenge solcher Spiele). Die Anzahl der Nash–Gleichgewichte kann exponentiell wachsen, wie wir hier sehen.

Aufgabe: Wir untersuchen das folgende Spiel $g : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

Alice \ Bob	s_1	s_2	$\dots$	s_n
s_1	a_1, b_1	0, 0		0, 0
s_2	0, 0	a_2, b_2		0, 0
$\dots$				0, 0
s_n	0, 0	0, 0	0, 0	a_n, b_n

Die Konstanten $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}_{>0}$ seien strikt positiv. Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte, rein und gemischt!

Diagonalspiele und ihre Nash–Gleichgewichte

Lösung: (1) Reine Gleichgewichte sind

$$\mathrm{NE}(g) = \left\{ (s_k, s_k) \;\middle|\; k = 1, 2, \dots, n \right\},$$

denn zu jedem s_k gibt es genau eine beste Antwort, nämlich s_k.

(2) Wie zuvor finden wir genau $2^n - 1$ gemischte Nash–Gleichgewichte,

$$\mathrm{NE}(\bar{g}) = \left\{ \left(s_A^X, s_B^X\right) \;\middle|\; \emptyset \neq X \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \right\}.$$

Konstruktion: Zu X sei $s_A^X = \sum_{k \in X} p_k s_k$ und $s_B^X = \sum_{k \in X} q_k s_k$ mit $p_k = c_B^X / b_k$ und $\sum_k p_k = 1$ sowie $q_k = c_A^X / a_k$ und $\sum_k q_k = 1$.

Alice' Wkten sind reziprok zu Bobs Gewinnen, und umgekehrt. Nur so ist Bobs Gewinnerwartung c_B^X konstant für alle s_k mit $k \in X$. Ebenso ist Alice' Gewinnerwartung c_A^X konstant für alle s_k mit $k \in X$.

Jedes dieser Strategiepaare (s_A^X, s_B^X) ist ein Gleichgewicht. Umgekehrt ist jedes Gleichgewicht (s_A, s_B) von dieser Form.

Der Beweis ist nicht schwer, erfordert aber etwas Geduld und Sorgfalt. Wenn Sie möchten, führen Sie als Übung den Beweis sorgsam aus!

Aufgabe: Die Universitäten $i \in I = \{1, 2, \dots, 9\}$ leiden unter Geldnot. Ein Wohltäter schreibt 100 Mio Euro aus nach folgendem Verfahren: Jede Universität $i \in I$ verpflichtet sich ihm gegenüber zu Leistungen im Wert von $b_i \in \{0, 1, \dots, 100\}$ Mio Euro. Diese Gebote sind gleichzeitig, verdeckt und unwiderruflich. Das höchste Gebot b_i gewinnt die 100 Mio Euro, genauer: Die Universitäten in der so definierten Gewinnermenge $M = \{\, i \in I \mid b_i = \max_{j \in I} b_j \,\}$ teilen sich die 100 Mio Euro gleich auf:

$$u_i \,:\, \{0, 1, \dots, 100\}^9 \to \mathbb{R} \,:\, b \mapsto u_i(b) = \begin{cases} -b_i & \text{falls } i \notin M, \\ \frac{100}{|M|} - b_i & \text{falls } i \in M. \end{cases}$$

Das entspricht einer perfiden Auktion, bei der jeder Bieter zahlt (P205). Das klingt zunächst verrückt, kommt aber in der Realität öfters vor.

(1) Sie spielen die Universität $i \in I$. Sei $c_i := \max_{j \neq i} b_j$ das höchste Konkurrenzgebot. Angenommen, es gilt (a) $c_i \in \{0, 1, \dots, 98\}$ oder (b) $c_i = 99$ oder (c) $c_i = 100$. Was wären dazu Ihre besten Antworten?

(2) Bestimmen Sie alle (reinen) Nash–Gleichgewichte dieses Spiels.

Lösung: (1) Wir gehen die drei Szenarien sorgfältig durch:

(1a) Die beste Antwort ist $b_i = c_i + 1$ mit Gewinn $100 - b_i = 99 - c_i > 0$.

Begründung durch sorgsame Fallunterscheidung aller Alternativen:
Für $b_i \geq c_i + 2$ ist der Gewinn $100 - b_i \leq 98 - c_i \leq 0$, also kleiner.
Für $b_i = c_i$ ist der Gewinn $100/|M| - b_i \leq 50 - c_i$, also kleiner.
Für $b_i < c_i$ ist der Gewinn $-b_i \leq 0$, also kleiner.

(1b) Die besten Antworten sind $b_i = 0$ oder $b_i = 100$ mit Gewinn 0.

Begründung durch sorgsame Fallunterscheidung aller Alternativen:
Für $b_i = 99$ ist der Gewinn $100/|M| - b_i \leq 50 - 99 < 0$, also kleiner.
Für $1 \leq b_i \leq 98$ ist der Gewinn $-b_1 < 0$, also kleiner.

(1c) Die beste Antwort ist $b_i = 0$ mit Gewinn 0.

Begründung durch sorgsame Fallunterscheidung aller Alternativen:
Für $b_i = 100$ ist der Gewinn $100/|M| - b_i \leq 50 - 100 < 0$, also kleiner.
Für $1 \leq b_i \leq 99$ ist der Gewinn $-b_i < 0$, also kleiner.

(2) Dieses Spiel hat keine (reinen) Nash–Gleichgewichte! Wir betrachten

$$u : \{0, 1, \ldots, 100\}^9 \to \mathbb{R}^9.$$

Angenommen $b \in \{0, 1, \ldots, 100\}^9$ wäre ein Nash–Gleichgewicht. Wir betrachten die erste Universität $i \in I$ mit dem maximalen Betrag $b_i = \max_j b_j$. Nach obigem Muster unterscheiden wir drei Fälle (1–3):

(2a) Gilt $b_i \le 98$, dann kann sich jede andere Universität $j \in I \smallsetminus \{i\}$ verbessern. Also ist b, entgegen unserer Annahme, kein Gleichgewicht.

(2b) Gilt $b_i = 99$, dann wählen alle anderen 0 oder 100, hier also 0. Somit kann i sich verbessern, und b ist keine Gleichgewicht.

(2c) Gilt $b_i = 100$, dann wählen alle anderen Universitäten 0. Somit kann i sich verbessern, und b ist keine Gleichgewicht.

Dieses negative Ergebnis ist bemerkenswert, gar erschütternd. Dank guter Notation ist alles klar und präzise nachzurechnen.

Interpretation: Da es kein Gleichgewicht gibt, ist das Verhalten schwer vorhersehbar. Die Initiative des „Wohltäters“ zielt vielleicht sogar genau darauf ab, die Universitäten in verlustreiche Bietergefechte zu verwickeln, bei dem er mehr gewinnt als der ausgelobte Preis kostet. Umgekehrt ist nach dem Verfahren der Katzenjammer groß: „Hätte ich gewusst. . . , dann hätte ich. . . “. Bei Nash–Gleichgewichten passiert das nicht!

Auktionen: Unser Beispiel zeigt eine perfide Auktion, bei der jeder Bieter bezahlt, selbst wenn er dafür nichts bekommt, engl. *all pay auction*, siehe P205. Zu einer ersten Analyse genügen uns bereits der Begriff des Nash–Gleichgewichts und sorgsame Fallunterscheidungen.

Kapitel P behandelt Auktionen noch allgemeiner und ausführlicher. Der grundlegende Satz P2C der Auktionstheorie, Vickreys berühmte Erlösäquivalenz, hilft hier leider nicht, denn er setzt die Existenz eines Gleichgewichts voraus! Überhaupt helfen hier keine allgemeinen Sätze, sondern nur präzise Definitionen und sorgfältiges Ausarbeiten.

Kapitel F

Lineare Optimierung und Dantzigs Simplexverfahren

We are all familiar with methods for solving linear equation systems [...] On the other hand, the study of linear inequality systems excited virtually no interest until the advent of game theory in 1944 and linear programming in 1947.

George Bernard Dantzig (1914–2005)

Inhalt dieses Kapitels F

Motivation und Überblick

Dieses Kapitel widmet sich dem Problem der **linearen Optimierung**. Diese Technik ist extrem vielseitig und zentral für viele Anwendungen.

Das von George Bernard Dantzig entwickelte **Simplexverfahren** gehört zweifellos zu den Top-Ten der wichtigsten Algorithmen. Gute Nachricht: Er ist nicht schwieriger als der Gauß–Algorithmus der linearen Algebra; allein Terminierung und Laufzeit sind schwieriger – und interessanter.

Ich möchte Ihnen hier dieses wunderbare Verfahren näher bringen, soweit möglich sogar dafür begeistern. Vor allem jedoch möchte ich, dass Sie es praktisch nutzen können, um konkrete Probleme zu lösen.

Zugegeben, der erste Zugang ist nicht ganz leicht. Aber es lohnt sich! Harmonisch wie selten vereinen sich schöne Aspekte der Mathematik: Lineare Algebra (Gauß), Geometrie (Polytope), Analysis (Kompaktheit), Numerik (Optimierung), Wahrscheinlichkeit (Gleichgewichte), usw.

Unser Plan war es, schon in den vorangegangenen Übungsaufgaben Ihre Neugier zu wecken und Ihr Verlangen nach besseren Methoden. Nun ist der Moment gekommen, die entfachte Sehnsucht zu stillen.

Motivation und Überblick

Viele Hörer:innen der Spieltheorie haben das Simplexverfahren schon einmal gesehen, einige bereits mehrfach, etwa in Veranstaltungen zur

- Numerik / (Numerische) Lineare Algebra,
- Informatik / Algorithmische Geometrie,
- Optimierung / Lineare Optimierung.

Anders als bei anderen, vergleichbar fundamentalen Resultaten hält sich ihr Enthusiasmus jedoch in Grenzen: „Wollen Sie das wirklich tun?“ fragten mich Studierende, als ich begeistert von Linearer Optimierung fabulierte und verkündete, dies in die Spieltheorie einzubauen.

Ja, ich will! Das Simplexverfahren hat seinen historischen Ursprung in der Spieltheorie, und es löst auch heute noch als braves Arbeitspferd eine phantastische Vielfalt von Problemen, hier und überall sonst.

Wann, wenn nicht jetzt?
Wo, wenn nicht hier?
Wer, wenn nicht wir?
John F. Kennedy (1917–1963)

Motivation: Nash–Gleichgewichte

Endliche reelle Zwei-Personen-Spiele führen zu **Bimatrixspielen**:

$$\begin{aligned} &u \,:\, \Delta^m \times \Delta^n \to \mathbb{R}^2 \,:\, (x,y) \mapsto \big(x^\intercal A\, y,\; x^\intercal B\, y \big) \\ &\Delta^m = \big\{ (x_0, x_1, \dots, x_m)^\intercal \;\big|\; x_i \ge 0,\; \textstyle\sum_{i=0}^m x_i = 1 \big\} \\ &\Delta^n \;= \big\{ (y_0, y_1, \dots, y_n)^\intercal \;\big|\; y_j \ge 0,\; \textstyle\sum_{j=0}^n y_j = 1 \big\} \end{aligned}$$

Wir suchen **Nash–Gleichgewichte** $(x,y) \in \Delta^m \times \Delta^n$, verlangen also:

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &\ge u_1(\tilde{x},y) && \text{für alle } \tilde{x} \in \Delta^m \\ u_2(x,y) &\ge u_2(x,\tilde{y}) && \text{für alle } \tilde{y} \in \Delta^n \end{aligned}$$

Dank Linearität genügt es, diese Ungleichungen für die **Ecken** zu testen:

$$\begin{aligned} x^\intercal A\, y &\ge e_i^\intercal A\, y && \text{für alle } i = 0, \dots, m \\ x^\intercal B\, y &\ge x^\intercal B\, e_j && \text{für alle } j = 0, \dots, n \end{aligned}$$

Nash–Gleichgewichte entsprechen multilinearen Un/Gleichungen. Für Nullsummenspiele reduzieren wir dies auf lineare Un/Gleichungen.

Motivation: Nash–Gleichgewichte

Aus Kapitel E kennen wir strategische Spiele $u : \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R_i$ in Normalform (E1L) und den Begriff des Nash–Gleichgewichts (E1M).

Nashs Existenzsatz (E1F) garantiert: Zu jedem endlichen reellen Spiel $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ existieren Nash–Gleichgewichte, wenn schon nicht in reinen, so doch in gemischten Strategien, kurz $\mathrm{NE}(\bar{u}) \ne \emptyset$.

Das führt zur offensichtlichen Frage: Wie berechnen wir Gleichgewichte? Nashs Satz gibt hierzu leider keinerlei Auskunft, er ist nicht konstruktiv.

Zur Illustration habe ich das Problem hier für zwei Spieler ausformuliert. Die Un/Gleichungen sind algebraisch, leider nicht linear, sondern nur bilinear in x und y, bei n Spielern entsprechend multilinear. Das macht es kompliziert. Die Lösungsmenge ist immerhin semi-algebraisch.

Für Zwei-Personen-Nullsummenspiele wissen wir noch mehr (E2D): Hier entsprechen die Nash–Gleichgewichte genau den Min-Maximierern und den Max-Minimierern. Dank dieser Eigenschaft können wir die Gleichgewichtsbedingungen zu linearen Un/Gleichungen vereinfachen. Letztere können wir dann mit dem Simplexverfahren lösen, siehe F209.

Motivation: korrelierte Gleichgewichte

Sei $u : S = S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein endliches reelles Spiel.

Eine **korrelierte Strategie** ist ein WMaß $\mathbf{P} \in [S]$ auf der Menge S, also $\mathbf{P} : S \to \mathbb{R} : s \mapsto \mathbf{P}(s) = \mathbf{P}(\{s\})$ mit $\mathbf{P}(s) \ge 0$ und $\sum_{s \in S} \mathbf{P}(s) = 1$.

Diese ist ein **korreliertes Gleichgewicht** des Spiels u, wenn gilt:

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i; s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i}) \ge \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s'_i; s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i})$$

für jeden Spieler i und alle Strategien $s_i, s'_i \in S_i$ und $s_{-i} \in S_{-i}$.

Praktisch: Ein **Signalgeber** lost die Empfehlung $s \in S$ aus mit Wkt $\mathbf{P}$ und teilt jedem Spieler $i \in I$ nur seine individuelle Strategie s_i mit. Gleichgewicht: Für keinen Spieler lohnt sich eine Abweichung.

🙂 Dies sind lineare Un/Gleichungen in den gesuchten Wkten $\mathbf{P}(s)$:

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \left[u_i(s_i; s_{-i}) - u_i(s'_i; s_{-i}) \right] \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i}) \ge 0$$

Wäre es nicht wunderbar, solche Probleme routiniert lösen zu können? Hierfür gibt es eine starke Theorie und effiziente Lösungsverfahren!

Motivation: korrelierte Gleichgewichte

Kapitel I behandelt den Begriff des korrelierten Gleichgewichts als Spezialfall von Bayes–Spielen mit unvollständiger Information.

Die Idee eines Signalgebers ist genial einfach und einfach genial: Die Spieler können damit faire und stabile Absprachen konstruieren.

Gleichgewichte sind durch ein System linearer Un/Gleichungen definiert: Unter seiner partiellen Information folgt jeder Spieler seiner Empfehlung.

Dies führt sofort zu der Frage: Wie berechnen wir Gleichgewichte? Für solche Probleme ist die lineare Optimierung maßgeschneidert!

Als erste Motivation zur linearen Optimierung in der Spieltheorie mögen diese beiden Anwendungen zu Gleichgewichten vorläufig genügen.

Die lineare Optimierung hat darüber hinaus zahlreiche weitere Anwendungsgebiete, sie ist wahrhaft ein Universalwerkzeug.

Ich behandle im Folgenden zunächst die allgemeine Problemstellung. Anschließend kehren wir zu den motivierenden Eingangsfragen zurück.

Panorama: Einige der wichtigsten Algorithmen

Welche Algorithmen scheinen Ihnen die wichtigsten? Einige Vorschläge:
(Diese Liste können Sie durch viele würdige Kandidaten fortsetzen.)

Euklidischer Algorithmus zur Berechnung des ggT
Gröbner–Basen zur Lösung polynomieller Gleichungssysteme
Schnelle Primzahltests und Public Key Cryptography (PKC)

Newtons Methode zur iterativen Nullstellennäherung
Matrixzerlegung, Gauß (LU), Householder-Givens (QR), Cholesky
Lineare Optimierung, Simplexverfahren, Innere-Punkt-Methode

Schnelles Suchen und Sortieren, Quick-/Merge-/Heap-sort
Schnelle Fourier–Transformation (FFT) zur Signalverarbeitung
Datenkompression mittels JPEG, MPEG, MP3, Wavelets, etc.

Monte-Carlo-Methode zur Erwartungsschätzung durch Sampling
Kalman–Filter zur Zeitreihenanalyse und Zustandsschätzung
Googles PageRank zur Popularitätswertung von Internetseiten

Panorama: Einige der wichtigsten Algorithmen

Die Informatik steht in regem Austausch mit allen Wissenschaften, ganz besonders intensiv mit der Mathematik, einer ihrer historischen Wurzeln. Neben den klassischen Bereichen der **angewandten Mathematik** und **Numerik** erblühen so neue Gebiete der **Computational Mathematics**:

Computer Algebra Systems (CAS), Computational Group Theory (CGT), Computational Number Theory (CNT), Computational Geometry (CG), Computational Statistics, Data Science und Machine Learning (ML), Algorithmic Game Theory (AGT), Mathematical Economics, etc.

Meine obige Liste ist nicht ganz willkürlich, doch naturgemäß subjektiv; sie reflektiert persönliche Vorlieben in Algebra, Numerik und Stochastik.

Inspiriert wurde sie von einer ähnlichen Top-10-Liste in *Computing in Science and Engineering* (2000), dem *Princeton Companion to Applied Mathematics* (2016) und dem Buch *Modern Computer Algebra* (2013).

Natürlich hängt das Ranking von der Präzisierung der Frage ab:
Was gilt als ein Algorithmus? Wie bewerten wir seine Wichtigkeit?
Ich würdige hier grundlegende Bedeutung und häufige Anwendung.

Panorama: Einige der wichtigsten Algorithmen

Zwei dieser Algorithmen sind (vereinfacht) seit der Antike bekannt; ihre andauernde Aktualität und Entwicklungsfähigkeit ist bemerkenswert. Euklid (um 300 v.Chr.) nutzte seinen Algorithmus für natürliche Zahlen, er gilt ebenso für Polynome und allgemein in jedem euklidischen Ring. Die Methode von Newton (1643–1727) zur Nullstellennäherung nutzte bereits Heron von Alexandria (10–70 n.Chr.) in einfachen Spezialfällen.

Alle weiteren Algorithmen sind Entdeckungen des 20. Jahrhunderts und boomen seit Entwicklung und durch Einsatz elektronischer Computer. Einige lohnen sich bereits deutlich spürbar für größere Handrechnungen, meist jedoch trumpfen sie für ernsthaft große Probleme erst richtig auf. Sie sind nicht mehr wegzudenken aus realistisch-großen Anwendungen in Natur- und Ingenieurwissenschaften, Industrie, Ökonomie, Militär, ...

Kryptographie, Datenkompression, PageRank und Data Mining erblühen insbesondere durch die rasante Popularisierung des Internets seit 1990. In diesen Bereichen ist die Mathematik auch im Alltag direkt spürbar und deutlich sichtbar für alle, die unter die Oberfläche schauen.

Panorama: Einige der wichtigsten Algorithmen

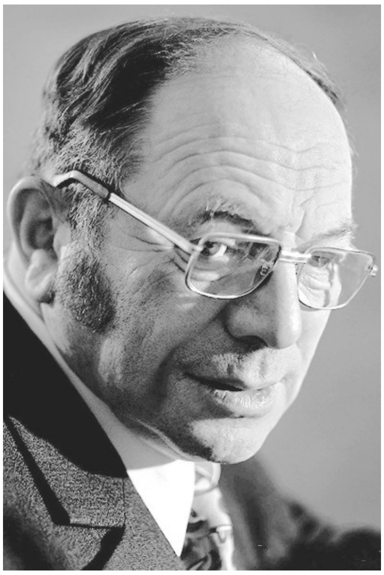
Jede große Entwicklung des 20. Jahrhunderts, etwa die Raumfahrt, benötigte diese algorithmischen Grundlagen – und noch viele weitere. Zu Beginn des 21. Jahrhunderts ist absehbar, dass auch die nächsten großen Entwicklungen darauf aufbauen und die Werkzeuge erweitern. Durch Data Science und Machine Learning werden die algorithmischen Grundlagen nicht ersetzt oder überflüssig, sondern weiter ausgebaut.

Schon heute ist es kaum möglich, sich auf eine „Top-Ten“ zu einigen. In Zukunft wird dies noch schwieriger, da die diversen Teilgebiete der Computational Mathematics weiter gedeihen und expandieren werden. Vielleicht sollte ich daher besser von der „Top-one-hundred“ sprechen, noch fairer von Top-Algorithmen je nach Gebiet und Problemstellung. Differenzierung und Spezialisierung werden weiter fortschreiten.

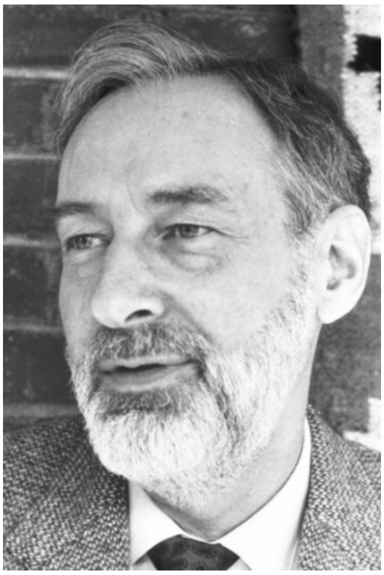
In diesem Kapitel geht es um Optimierung, speziell lineare Optimierung, vor allem um Dantzigs Simplexverfahren zur Lösung linearer Probleme. Dies gehört zweifellos zu den Top-Ten der wichtigsten Algorithmen. Zur würdigen Einordnung habe ich das Gesamtpanorama skizziert.

Lineare Optimierung: historischer Überblick

Lineare Optimierung ist Lineare Algebra über $\mathbb{R}$ mit Variablen in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Erste Untersuchungen beginnen mit Fouriers Eliminationsmethode zur Projektion von Polytopen (1827), wiederentdeckt von Motzkin (1936).



Leonid V. Kantorovich
(St. Petersburg 1912 – Moskau 1986)



Tjalling C. Koopmans
(Wijdemeren 1910 – New Haven/CT 1985)

George B. Dantzig
(Portland/OR 1914 – Stanford/CA 2005)

Lineare Optimierung: historischer Überblick

Lineare Probleme treten in vielen Anwendungen auf, insbesondere zur Optimierung. Sie sind extrem ausdrucksstarke und vielseitige Modelle und zeigen faszinierende, sehr enge Verbindungen zwischen vielen verschiedenen Gebieten der angewandten und der reinen Mathematik.

Die Forschung intensiviert sich zu Beginn des zweiten Weltkrieges. Um 1939–1941 untersuchen der sowjetische Mathematiker Leonid Kantorovich (1912–1986) und der niederländisch-amerikanische Ökonom Tjalling Koopmans (1910–1985) Optimierungsverfahren. Für ihre Arbeiten erhielten sie 1975 den Wirtschaftsnobelpreis, siehe `www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1975`.

Als Dritter im Bunde zusammen mit Kantorovich und Koopmans gilt der US-amerikanische Mathematiker George Bernard Dantzig (1914–2005) als Begründer der Linearen Optimierung. Berühmt wurde Dantzig durch das von ihm entwickelte Simplexverfahren von 1947. Zusammen mit John von Neumann und Oskar Morgenstern baute er die Beziehungen zur Spieltheorie aus. Er erhielt 1976 die National Medal of Science.

Lineare Optimierung: historischer Überblick

George Dantzig studierte Mathematik an der University of Maryland (Bachelor) und an der University of Michigan (Master). Allerdings fand er dieses Studium zu abstrakt und mochte lediglich Statistik. Daher ging er 1939 nach Berkeley um bei Jerzy Neyman (1894–1981) zu promovieren. Um Neyman entstand eine führende Schule mathematischer Statistik.

George Dantzig ist der Held einer *urbanen Legende*. Als er einmal zu spät zur Vorlesung von Professor Neyman kam, standen an der Tafel zwei bislang unbewiesene Vermutungen aus der Statistik. Dantzig hielt sie versehentlich für eine Hausaufgabe und löste sie in den folgenden Tagen. Auf Vorschlag Neymans wurde dies zu Dantzigs Doktorarbeit.

Diese Geschichte kursiert in vielen Varianten, im Laufe der Zeit wurden Namen geändert und Details ausgeschmückt. Sie wurde zur Erbauungsgeschichte in diversen Predigten und zum Sinnbild für *positives Denken*. Anders als die meisten Legenden lässt sich ihr Ursprung gut belegen, siehe `www.snopes.com/fact-check/the-unsolvable-math-problem`. Diese unglaubliche Geschichte ist tatsächlich eine wahre Begebenheit!

Literatur zur linearen Optimierung

Lehrbücher speziell zur linearen Optimierung und ihren Grundlagen:

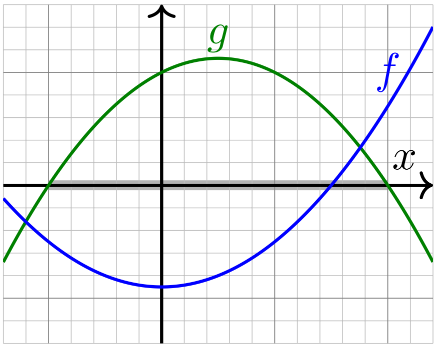
- J. Matoušek, B. Gärtner: *Understanding and Using Linear Programming*, Springer 2006. (wunderbare Einführung)
- R.J. Vanderbei: *Linear Programming* (4th ed.), Springer 2014.
- V. Chvátal: *Linear Programming.* Freeman and Company 1983.
- G.B. Dantzig: *Linear Programming and Extensions*, RAND 1963.

Lehrbücher allgemein zur Optimierung und numerischen Aspekten:

- C. Geiger, C. Kanzow: *Numerische Verfahren zur Lösung unrestringierter Optimierungsaufgaben*, Springer 1999.
- C. Geiger, C. Kanzow: *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*, Springer 2002.
- S. Boyd, L. Vandenberghe: *Convex optimization*, Cambridge University Press 2004.
- F. Jarre, J. Stoer: *Optimierung*, Springer 2004.

Software: `en.wikipedia.org/wiki/List_of_optimization_software`

Optimierung: allgemeine Problemstellung



Beispiele aus der Schule (Mittel/Oberstufe):

Max/Minimiere $f(x) = ax^2 + bx + c$ unter der Nebenbedingung $g(x) = sx^2 + px + q \geq 0$.

Allgemeine Aufgabe der Kurvendiskussion: Finde alle Extremstellen von $f : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$.

☺ Dieselbe Frage nun mehrdimensional!

Die mathematische **Optimierung** untersucht Probleme folgender Art:

Maximiere die Zielfunktion	$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$
unter den Nebenbedingungen	$g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0$

Diese Problemstellung tritt in Anwendungen extrem häufig auf, speziell:
Lineare Optimierung (LP): Hier sind $f, g_1, \dots, g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affin-linear.
Quadratische Optimierung (QP): Hier ist $f(x) = \frac{1}{2} x^\intercal Q x + cx + d$.
Konvexe Optimierung (CP): Hier sind $f, g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex.

Ebenso: Die Minimierung von f entspricht der Maximierung von $-f$.
Auch Gleichungen $g_i(x) = 0$ kommen vor, also $g_i(x) \geq 0$ und $g_i(x) \leq 0$.

Optimierung: allgemeine Problemstellung

Oft müssen wir zwischen mehreren Alternativen $x \in X$ entscheiden. Ziel der **Optimierung** [*optimization* oder *operations research*] ist es, unter allen möglichen / zulässigen Optionen die beste(n) zu finden.

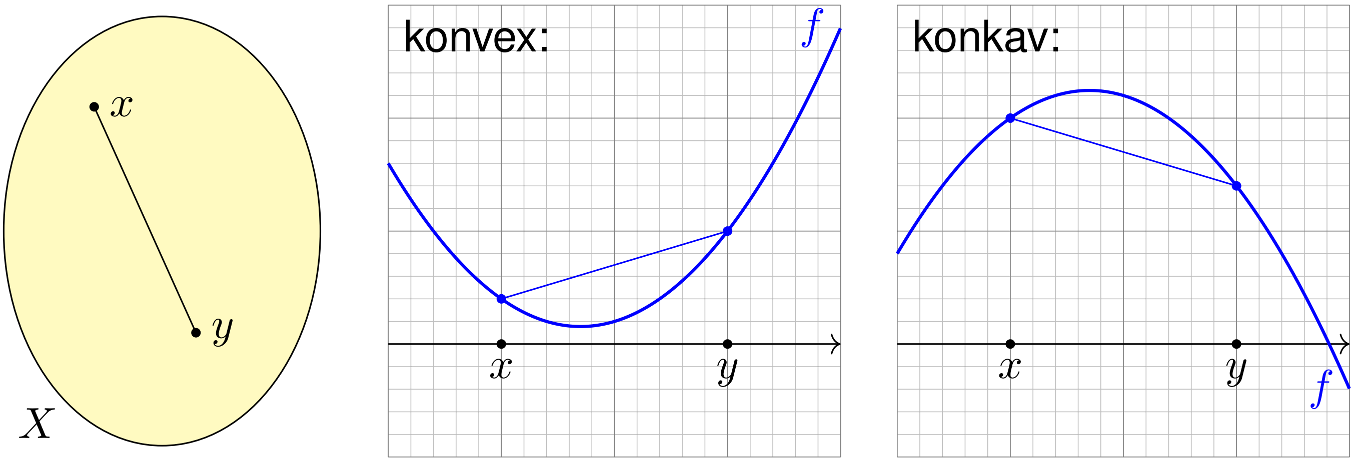
Hierbei kann die Menge X endlich / diskret sein (diskrete Optimierung), etwa $X = \{ x \in \mathbb{Z}^n \mid g_1(x), \dots, g_m(x) \geq 0 \}$ (ganzzahlige Optimierung), oder kontinuerlich, speziell etwa $X = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x), \dots, g_m(x) \geq 0 \}$.

Gegeben ist die **Zielfunktion** $f : X \to \mathbb{R}$, etwa Kosten oder Ertrag. Gesucht ist $\inf f$, und wenn möglich ein/alle $x \in X$ mit $f(x) = \min f$; entsprechend $\sup f$, und wenn möglich ein/alle $x \in X$ mit $f(x) = \max f$.

Die Elemente $x \in X$ heißen **zulässig**; sie erfüllen alle erforderlichen Nebenbedingungen. Die Menge X heißt daher auch **Erfüllungsmenge**. Im Falle $X = \emptyset$ heißt das Problem **unerfüllbar**. Wird das Infimum bzw. Supremum von f nicht angenommen, so heißt das Problem **unlösbar**.

Neben **Optimierung** ist auch der traditionelle Begriff **Programmierung** gebräuchlich. Die Bezeichnung „Programm“ bedeutet schlicht „Planung“, also ausnahmsweise nicht die Erstellung eines Computerprogramms.

Optimierung: allgemeine Problemstellung



Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn für alle Punkte $x, y \in X$ und $t \in [0,1]$ auch der Zwischenpunkt $z = (1-t)x + ty$ in der Menge X liegt.
Wir nennen $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ **konvex**, wenn zudem auf ganz X gilt:

$$f((1-t)x + ty) \;\le\; (1-t)f(x) + tf(y)$$

Im Falle „<" für alle $x \neq y$ in X und $t \in \,]0,1[$ heißt f **strikt konvex**.
Entsprechend nennen wir f **(strikt) konkav**, wenn $-f$ (strikt) konvex ist.

Optimierung: allgemeine Problemstellung

Fingerübungen zur Wiederholung und zur Festigung der Begriffe:

Aufgabe: Jede affin-lineare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto bx + c$ ist konvex und konkav. Die quadratische Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto x^\intercal Ax + bx + c$ mit symmetrischer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann (strikt) konvex / konkav, wenn A positiv / negativ semidefinit ist (bzw. strikt definit).

Aufgabe: Sei $f : \mathbb{R} \supset [a,b] \to \mathbb{R}$ einmal bzw. zweimal differenzierbar. Genau dann ist f (strikt) konvex / konkav, wenn f' (strikt) wächst / fällt, also $f'' \ge 0$ / $f'' \le 0$ gilt (bzw. im strikten Falle $f'' > 0$ / $f'' < 0$).
Wie lauten die Kriterien für $\mathscr{C}^2$–Funktionen $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$?

Aufgabe: Jeder Durchschnitt $X = \bigcap_{i\in I} X_i$ konvexer Mengen ist konvex.
Jede Positivkombination $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$ konvexer Funktionen ist konvex.
Ist $f : \mathbb{R}^n \supseteq X \to \mathbb{R}$ konvex, so auch die Menge $\{\, x \in X \mid f(x) \le c \,\}$.
Ist $f_i : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konvex für jedes $i \in I$, so auch $f = \sup_{i\in I} f_i$.

Aufgabe: Für jedes konvexe Problem gilt: Jedes lokale Minimum ist ein globales Minimum. Die Menge aller optimalen Punkte ist konvex. Ist die Zielfunktion strikt konvex, so ist die Optimalstelle eindeutig.

Erstes Beispiel: eindimensionale Optimierung

Aufgabe: Maximieren Sie die Zielfunktion $z(x) = 3x + 5$ unter den Nebenbedingungen $\quad x \ge 0, \quad x + 2 \ge 0, \quad -2x + 3 \ge 0, \quad -3x + 4 \ge 0.$

Lösung: Der Ursprung $x = 0$ ist zulässig. Also gilt $\max z \ge z(0) = 5$.

Die Funktion $z(x) = 3x + 5$ wächst monoton mit x: Steigung $+3 > 0$. Ausgehend von $x = 0$ wollen wir daher x möglichst weit erhöhen.

$$\begin{aligned}
& & x \ge 0 &\quad\Longrightarrow\quad \text{keine Einschränkung} \\
y_1 &:= & x + 2 \ge 0 &\quad\Longrightarrow\quad \text{keine Einschränkung} \\
y_2 &:= & -2x + 3 \ge 0 &\quad\Longrightarrow\quad \text{Einschränkung } x \le 3/2 \\
y_3 &:= & -3x + 4 \ge 0 &\quad\Longrightarrow\quad \text{Einschränkung } x \le 4/3
\end{aligned}$$

Der Engpass entsteht demnach in der letzten Bedingung $y_3 \ge 0$. Somit maximiert $x = 4/3$, und wir erhalten $\max z = z(4/3) = 9$.

☺ Das ist eine schöne Anwendung solider schulischer Ausbildung: Es genügen eine gute Notation und sorgfältige Fallunterscheidungen.

⚠ Ersetzen wir $x + 2 \ge 0$ durch $x - 2 \ge 0$, so werden die NB unerfüllbar!

Erstes Beispiel: eindimensionale Optimierung

Unser Ziel ist im Folgenden, solche Probleme der linearen Optimierung in höheren Dimensionen zu lösen. Das Simplexverfahren nutzt dabei die eindimensionale Optimierung auf der Suche nach Engpässen.

Da wir nun mehrere Variablen $x_1, \dots, x_n \ge 0$ haben und auch mehrere Nebenbedingungen $y_1, \dots, y_m \ge 0$, benötigen wir eine übersichtliche und effiziente Buchhaltung. Dies erreichen wir durch die Schreibweise als Vektoren und Matrizen: $x \ge 0$ und $y = Ax + b \ge 0$ und $z(x) = cx + d$.

Die geniale Idee von Dantzig (1947) war es, das Problem zu lösen mit Zeilenoperationen wie im Gauß–Algorithmus. Hurra, lineare Algebra!

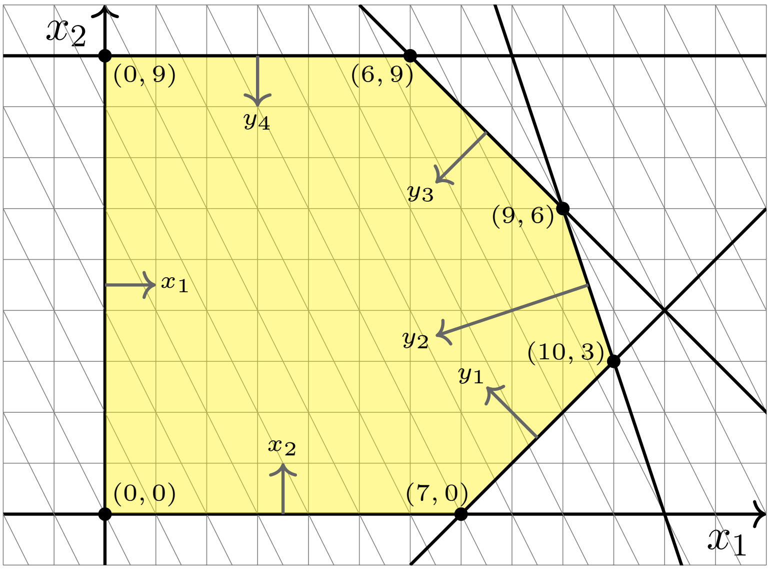
Ich führe dieses Verfahren an einem repräsentativen Beispiel aus. Passen Sie genau auf, danach sollen Sie es selbst können.

Wie schon beim Gauß–Algorithmus bieten sich beim Simplexverfahren mehrere Wege, die Methode zu erfahren, zu begreifen und zu erlernen: (1) durch zahlreiche, gut gewählte Beispiele, (2) durch Formulierung des allgemeinen Verfahrens, (3) durch sorgsame Programmierung und Tests, (4) durch formalen Beweis der Richtigkeit des Verfahrens.

Zweites Beispiel: zweidimensionale Optimierung

F023

Aufgabe: Maximieren Sie die Zielfunktion $z(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - 4$.



Nichtnegativität:

$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

Nebenbedingungen:

$$y_1 := 7 - x_1 + x_2 \ge 0$$
$$y_2 := 33 - 3x_1 - x_2 \ge 0$$
$$y_3 := 15 - x_1 - x_2 \ge 0$$
$$y_4 := 9 - x_2 \ge 0$$

☺ Zweidimensionale Optimierung können wir graphisch lösen. Hierzu genügt Sorgfalt und etwas Schulmathematik der Mittelstufe.

☺ Für beliebige Dimension entwickeln wir ein algebraisches Verfahren. Das erfordert Sicherheit im Umgang mit Un/Gleichungssystemen.

Zweites Beispiel: zweidimensionale Optimierung

F024
Erläuterung

Sie verkaufen zwei Produkte mit Gewinn 2€ bzw. 1€ bei 4€ Fixkosten. Bei der Produktion müssen Sie gewisse Nebenbedingungen einhalten.

y_1: Sie haben 7 Teile vom Typ 1, Produkt 1 verbraucht eines, Produkt 2 setzt eines frei. (Das ist zwar ungewöhnlich, aber durchaus denkbar.)
y_2: Sie haben 33 Teile vom Typ 2, jedes Produkt benötigt davon 3 bzw. 1.
y_3: Sie haben 15 Teile vom Typ 3, jedes Produkt benötigt davon genau 1.
y_4: Sie haben 9 Teile vom Typ 4, nur Produkt 2 benötigt davon eines.

Jede unserer sechs Bedingungen $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$ definiert eine abgeschlossene Halbebene. Diese sind in obiger Graphik eingetragen.

Alle Bedingungen sollen gelten, das entspricht dem logischen Und: Der Durchschnitt unserer sechs Halbebenen ist ein abgeschlossenes Polygon $P \subset \mathbb{R}^2$. Allgemein erhalten wir ein n–dimensionales Polytop.

In unserem Fall ist die Erfüllungsmenge P beschränkt, somit kompakt. Die Zielfunktion $z : P \to \mathbb{R}$ ist affin-linear, somit stetig, nimmt also ein Maximum an. Unserer Graphik entnehmen wir $\max z = z(9,6) = 20$.

☺ Das folgende Simplexverfahren löst das Problem algebraisch.

Lineare Optimierung durch das Simplexverfahren

F101

Anfangs betrachten wir $x_1, x_2 \geq 0$ als **freie Variablen**. Hiervon abhängig sind die **Schlupfvariablen** $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$ sowie die **Zielfunktion** z.

	x_1	x_2	1
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
z	2	1	-4

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	1	-1	0	0	0	7
-3	-1	0	-1	0	0	33
-1	-1	0	0	-1	0	15
0	-1	0	0	0	-1	9
2	1	0	0	0	0	-4

Der Ursprung $x_1 = x_2 = 0$ ist zulässig: $y_1 = 7$, $y_2 = 33$, $y_3 = 15$, $y_4 = 9$. Wir maximieren $x_1 \geq 0$, bis zum Engpass $y_1 \geq 0$. Basiswechsel $x_1 \leftrightarrow y_1$:

	y_1	x_2	1
x_1	-1	1	7
y_2	3	-4	12
y_3	1	-2	8
y_4	0	-1	9
z	-2	3	10

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	1	-1	0	0	0	7
0	-4	3	-1	0	0	12
0	-2	1	0	-1	0	8
0	-1	0	0	0	-1	9
0	3	-2	0	0	0	10

Lineare Optimierung durch das Simplexverfahren

F102

Nun sind die Variablen $y_1, x_2 \geq 0$ frei, und $x_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$ sind Schlupf. Wir notieren links die Kurzfassung und rechts das erweiterte Tableau.

	y_1	x_2	1
x_1	-1	1	7
y_2	3	-4	12
y_3	1	-2	8
y_4	0	-1	9
z	-2	3	10

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	1	-1	0	0	0	7
0	-4	3	-1	0	0	12
0	-2	1	0	-1	0	8
0	-1	0	0	0	-1	9
0	3	-2	0	0	0	10

Der Ursprung $y_1 = x_2 = 0$ ist zulässig; wir haben Engpässe beachtet. Wir maximieren $x_2 \geq 0$, bis zum Engpass $y_2 \geq 0$. Basiswechsel $x_2 \leftrightarrow y_2$:

	y_1	y_2	1
x_1	$-1/4$	$-1/4$	10
x_2	$3/4$	$-1/4$	3
y_3	$-1/2$	$1/2$	2
y_4	$-3/4$	$1/4$	6
z	$1/4$	$-3/4$	19

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	0	$-1/4$	$-1/4$	0	0	10
0	-1	$3/4$	$-1/4$	0	0	3
0	0	$-1/2$	$1/2$	-1	0	2
0	0	$-3/4$	$1/4$	0	-1	6
0	0	$1/4$	$-3/4$	0	0	19

Lineare Optimierung durch das Simplexverfahren

	y_1	y_2	1
x_1	$-1/4$	$-1/4$	10
x_2	$3/4$	$-1/4$	3
y_3	$-1/2$	$1/2$	2
y_4	$-3/4$	$1/4$	6
z	$1/4$	$-3/4$	19

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	0	$-1/4$	$-1/4$	0	0	10
0	-1	$3/4$	$-1/4$	0	0	3
0	0	$-1/2$	$1/2$	-1	0	2
0	0	$-3/4$	$1/4$	0	-1	6
0	0	$1/4$	$-3/4$	0	0	19

Der Ursprung $y_1 = y_2 = 0$ ist zulässig; wir haben Engpässe beachtet. Wir maximieren $y_1 \geq 0$, bis zum Engpass $y_3 \geq 0$. Basiswechsel $y_1 \leftrightarrow y_3$:

	y_3	y_2	1
x_1	$1/2$	$-1/2$	9
x_2	$-3/2$	$1/2$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$3/2$	$-1/2$	3
z	$-1/2$	$-1/2$	20

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	0	0	$-1/2$	$1/2$	0	9
0	-1	0	$1/2$	$-3/2$	0	6
0	0	-1	1	-2	0	4
0	0	0	$-1/2$	$3/2$	-1	3
0	0	0	$-1/2$	$-1/2$	0	20

Diese LP sind äquivalent, das letzte ist optimal: Wir lesen $\max z = 20$ ab. Probe durch Einsetzen: Wir haben $z = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_2 + 20 = 2x_1 + x_2 - 4$.

Lineare Optimierung durch das Simplexverfahren

☺ Unsere Aufgabe lösen wir durch drei elementare Basiswechsel. Jeder ist offensichtlich eine Äquivalenzumformung: Das Problem wird umformuliert von $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ und $z(x) = cx + d \to \max!$ zu $x' \geq 0$ und $A'x' + b' \geq 0$ und $z'(x') = c'x' + d' \to \max!$ und zurück.

Dabei geht keine Information verloren: Beide Formulierungen haben dieselben Lösungen und lassen sich leicht ineinander umrechnen.

☺ Geometrisch entspricht dies einer affin-linearen Transformation: Wir wechseln vom Koordinatensystem (x_1, x_2) zu (y_1, x_2) zu (y_1, y_2) zu (y_3, y_2). In Letzterem können wir die Lösung direkt ablesen!

Der Ursprung unseres jeweiligen Koordinatensystems wandert von Ecke zu Ecke in unserem Polytop. Wir laufen jeweils entlang einer Kante, zum Beispiel in Richtung des stärksten Anstiegs von z.

Daher hat das Verfahren seinen Namen: Wir bewegen uns entlang von Kanten, also 1–Simplizes im Rand des Polytops. Alternativ könnten wir auch durchs Innere laufen, diese Idee nutzen „Innere-Punkt-Methoden".

Projekt: Erproben Sie möglichst viele Varianten dieser Umformungen.

Elementarer Basiswechsel zur Umformung

	x_1	x_2
y_1	a	b
y_2	c	d

$\overset{\text{Basis-}}{\underset{\text{wechsel}}{\Longleftrightarrow}}$

	y_1	x_2
x_1	$\dfrac{1}{a}$	$-\dfrac{b}{a}$
y_2	$\dfrac{c}{a}$	$d-\dfrac{bc}{a}$

$$y_1 = ax_1 + bx_2$$

$$y_2 = cx_1 + dx_2$$

$$x_1 = \frac{1}{a}y_1 - \frac{b}{a}x_2$$

$$y_2 = \frac{c}{a}y_1 + \left[d - \frac{bc}{a}\right]x_2$$

☺ Erfüllbarkeit und Lösbarkeit und Maximalwert bleiben dabei erhalten. Außerhalb des Kreuzes sehen wir genau den Gauß–Algorithmus.

☺ Freie Variablen / Spalten transformieren sich genauso wie abhängige Variablen / Nebenbedingungen / Zeilen, bis auf ein negatives Vorzeichen.

☺ Das Tableau betont die Dualität der Linearen Optimierung.

Elementarer Basiswechsel und Dualität

	x_1	x_2
y_1	a	b
y_2	c	d

$\overset{\text{Basis-}}{\underset{\text{wechsel}}{\Longleftrightarrow}}$

	y_1	x_2
x_1	$\dfrac{1}{a}$	$-\dfrac{b}{a}$
y_2	$\dfrac{c}{a}$	$d-\dfrac{bc}{a}$

$\Updownarrow$ trans-negieren

$\Updownarrow$ trans-negieren

	y_1^*	y_2^*
x_1^*	$-a$	$-c$
x_2^*	$-b$	$-d$

$\overset{\text{Basis-}}{\underset{\text{wechsel}}{\Longleftrightarrow}}$

	x_1^*	y_2^*
y_1^*	$-\dfrac{1}{a}$	$-\dfrac{c}{a}$
x_2^*	$\dfrac{b}{a}$	$-d+\dfrac{bc}{a}$

Lineare Optimierung durch das Simplexverfahren

	x_1	x_2	
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
z	2	1	-4

Der Ursprung $x_1 = x_2 = 0$ ist zulässig,
denn $y_1 = 7$, $y_2 = 33$, $y_3 = 15$, $y_4 = 9$.
Wir wollen x_1 möglichst weit erhöhen.
Der Engpass entsteht durch $y_1 \geq 0$.
Wir ersetzen $y_1 = -x_1 + x_2 + 7$
durch $x_1 = -y_1 + x_2 + 7$.

$$\begin{aligned} y_2 &= -3x_1 - 1x_2 + 33 = +3y_1 - 4x_2 + 12 \\ y_3 &= -1x_1 - 1x_2 + 15 = +1y_1 - 2x_2 + 8 \\ y_4 &= +0x_1 - 1x_2 + 9 \quad = +0y_1 - 1x_2 + 9 \\ z &= +2x_1 + 1x_2 - 4 \quad = -2y_1 + 3x_2 + 10 \end{aligned}$$

$$x_1 \Updownarrow y_1$$

	y_1	x_2	
x_1	-1	1	7
y_2	3	-4	12
y_3	1	-2	8
y_4	0	-1	9
z	-2	3	10

Der Ursprung $y_1 = x_2 = 0$ ist zulässig;
er entspricht der Ecke $(x_1, x_2) = (7, 0)$.
Wir wollen x_2 möglichst weit erhöhen.
Der Engpass entsteht durch $y_2 \geq 0$.
Wir ersetzen $y_2 = 3y_1 - 4x_2 + 12$
durch $x_2 = \frac{3}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + 3$.

Lineare Optimierung durch das Simplexverfahren

$$x_2 \Updownarrow y_2$$

... Basiswechsel ...

	y_1	y_2	
x_1	$-1/4$	$-1/4$	10
x_2	$3/4$	$-1/4$	3
y_3	$-1/2$	$1/2$	2
y_4	$-3/4$	$1/4$	6
z	$1/4$	$-3/4$	19

Der Ursprung $y_1 = y_2 = 0$ ist zulässig;
er entspricht der Ecke $(x_1, x_2) = (10, 3)$.
Wir wollen y_1 möglichst weit erhöhen.
Der Engpass entsteht durch $y_3 \geq 0$.
Wir ersetzen $y_3 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + 2$
durch $y_1 = -2y_3 + y_2 + 4$.

$$y_1 \Updownarrow y_3$$

... Basiswechsel ...

	y_3	y_2	
x_1	$1/2$	$-1/2$	9
x_2	$-3/2$	$1/2$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$3/2$	$-1/2$	3
z	$-1/2$	$-1/2$	20

Der Ursprung $y_3 = y_2 = 0$ ist zulässig;
er entspricht der Ecke $(x_1, x_2) = (9, 6)$.
Die Zielfunktion ist hier maximal!
Wir erhalten das Ergebnis: $\max z = 20$.
Probe: Wir haben $z = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_2 + 20$,
und Einsetzen ergibt $z = 2x_1 + x_2 - 4$.

Lineare Optimierung / Programmierung

Definition F1A: lineare Optimierung / Programmierung

Ein **lineares Programm** (LP, lineare Optimierung) hat die Normalform

$$\boxed{x \ge 0, \quad Ax + b \ge 0, \quad z(x) = cx + d \to \max!, \quad \text{kurz} \quad z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}$$

mit Daten $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $d \in \mathbb{R}$; gesucht ist $x \in \mathbb{R}^n$.
Das LP ist **optimal**, wenn $c \le 0 \le b$ gilt; dann löst $x = 0$ das Problem.

(NN) **Nichtnegativität** $x \ge 0$, ausgeschrieben: $x_1 \ge 0, \ \ldots, \ x_n \ge 0$.
(NB) **Nebenbedingungen** $y := Ax + b \ge 0$, ausgeschrieben:

$$\begin{array}{rcccccccccc} y_1 := & a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & + & b_1 & \ge & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m := & a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & + & b_m & \ge & 0 \end{array}$$

Dies definiert das **Polytop** $P(A,b) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \ge 0, \ Ax + b \ge 0 \}$.
Punkte $x \in P(A,b)$ heißen **zulässig**, die NB heißen dann **erfüllbar**.

(Z) Die **Zielfunktion** ist $z : P(A,b) \to \mathbb{R} : z(x) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + d$.
Ist $P(A,b) \ne \emptyset$ und z nach oben **beschränkt**, so heißt das LP **lösbar**.

Lineare Optimierung / Programmierung

Die Daten $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ definieren die **Problemstellung** wie oben erklärt.
Zwei Ausnahmen können vorkommen und führen zur Unlösbarkeit:

1. Die Bedingungen $x \ge 0$ und $Ax + b \ge 0$ sind **nicht erfüllbar**:
   Das Polytop ist in diesem Falle leer, also $P(A,b) = \emptyset$.
2. Die Funktion $z : P(A,b) \to \mathbb{R} : x \mapsto cx + d$ **wächst unbeschränkt**.
   In diesem Falle wird das Supremum nicht angenommen.

Günstigenfalls ist das Polytop $P(A,b)$ nicht-leer und z beschränkt,
etwa $P(A,b) \ne \emptyset$ kompakt: Wir suchen $x \in P(A,b)$ mit $z(x) = \max z$.

Von einem Lösungsalgorithmus erwarten wir, dass er die Ausnahmen (1) und (2) ordnungsgemäß meldet, ansonsten die Optimierung korrekt löst.

Es ist vorteilhaft, die Ungleichungen $Ax + b \ge 0$ in zwei zu teilen:
Wir definieren die **Schlupfvariablen** $y := Ax + b$ und fordern $y \ge 0$.
Wir können dann Basiswechsel durchführen wie oben erklärt;
dies werden wir nun zum Simplexverfahren ausbauen.

⚠ Konventionen und Schreibweisen variieren etwas in der Literatur.

Lineare Optimierung / Programmierung

Die lineare Optimierung gehört zu den Top-Ten aller Algorithmen, besser gesagt: zu den Top-Ten aller algorithmischen Problemstellungen. Viele Eigenschaften linearer Programme entsprechen Eigenschaften von Polytopen und lassen sich so geometrisch interpretieren und beweisen. So verbinden sich numerische, algebraische und geometrische Aspekte.

Die Abkürzung „LP“ können Sie auch als „Lineares Problem“ lesen. Die traditionelle Bezeichnung „Programm“ bedeutet schlicht „Planung“, also ausnahmsweise nicht die Erstellung eines Computerprogramms. Der Begriff wurde Mitte der 1940er Jahre von George Dantzig geprägt noch bevor Computer zur Lösung solcher Probleme eingesetzt wurden.

Die lineare Optimierung ist ein Spezialfall der konvexen Optimierung und zentrale Technik vieler Anwendungen, etwa des Operations Research. Häufig lassen sich Optimierungsprobleme auf diese Form zurückführen und so mit Standardtechniken lösen. Das ist insbesondere interessant, wenn (noch) keine maßgeschneiderten Lösungsverfahren bekannt sind.

Lineare Optimierung / Programmierung

Lineare Ungleichungssysteme wurden schon 1827 von Fourier gelöst und seine Methode später zur Fourier–Motzkin–Elimination entwickelt. Zur linearen Optimierung wurde dies 1939 von Leonid Kantorovich ausgebaut, der hierzu auch erste Lösungsmethoden entwickelte.

Das **Simplexverfahren** wurde 1947 von George Dantzig angegeben. In der Praxis hat sich dies als eines der schnellsten Verfahren erwiesen, zumindest für generische Problemstellungen. Im schlechtesten Fall erfordert es exponentielle Laufzeit, wie der Klee–Minty–Würfel zeigt.

Das klassische Simplexverfahren ist immerhin **polynomial im Mittel**. Zur Verfeinerung wurden seither mehrere Pivotstrategien vorgeschlagen. Weiterhin offen ist die grundlegende Frage: Gibt es eine Pivotstrategie für das Simplexverfahren, die immer polynomiale Laufzeit garantiert?

Die lineare Optimierung lässt sich nachweislich **in polynomialer Zeit** lösen, wie Leonid Khachiyan (Ellipsoidverfahren, 1979) und Narendra Karmarkar (Innere-Punkte-Verfahren, 1984) zeigen konnten. Ob dies auch mit einer Pivotstrategie gelingt, bleibt eine Herausforderung.

Optimierung durch Basiswechsel

Aufgabe: Schreiben Sie den elementaren Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$ aus.

Lösung: Der Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$ ist nur möglich, falls $a_{\ell k} \neq 0$:

$$y_\ell = a_{\ell k} x_k + \sum_{i \neq k} a_{\ell i} x_i + b_\ell \quad \Longleftrightarrow \quad x_k = \frac{1}{a_{\ell k}} y_\ell - \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_{\ell k}} a_{\ell i} x_i - \frac{1}{a_{\ell k}} b_\ell$$

Wir ersetzen überall die alte Variable x_k durch die neue Variable y_ℓ:

$$\begin{aligned} y_j &= a_{jk} x_k + \sum_{i \neq k} a_{ji} x_i + b_j = \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}} y_\ell + \sum_{i \neq k} \left[a_{ji} - \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}} a_{\ell i} \right] x_i + \left[b_j - \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}} b_\ell \right] \\ z &= c_k x_k + \sum_{i \neq k} c_i x_i + d = \frac{c_k}{a_{\ell k}} y_\ell + \sum_{i \neq k} \left[c_i - \frac{c_k}{a_{\ell k}} a_{\ell i} \right] x_i + \left[d - \frac{c_k}{a_{\ell k}} b_\ell \right] \end{aligned}$$

Im **Tausch** wird $y_\ell \geq 0$ zur Variablen und $x_k \geq 0$ zur Nebenbedingung.

Invarianz: Das alte LP $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und das neue LP $\left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ sind äquivalent; sie stimmen überein in Erfüllbarkeit und Lösbarkeit und Maximalwert.

Umkehrung: Erneuter Basiswechsel $y_\ell \leftrightarrow x_k$ macht alles rückgängig.

🙂 Alle Basiswechsel sind in diesem Sinne Äquivalenzumformungen.

Optimierung durch Basiswechsel

Satz F1B: Jedes lösbare LP ist elementar optimierbar.

Jedes lösbare LP $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist optimierbar durch Basiswechsel:
Wir können $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ transformieren in ein optimales LP $z' : \left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ mit $c' \leq 0 \leq b'$, somit lösen durch $x' = 0$ und $\max z = \max z' = z'(0) = d'$.

Beweis: Das Maximum wird in einer Ecke $x^* \in P(A, b)$ angenommen. Zu dieser gelangen wir durch Basiswechsel (entlang von Kanten). $\boxed{\text{QED}}$

Genauer: Unter den Bedingungen $x_1, \dots, x_n \geq 0$ und $y_1, \dots, y_m \geq 0$ gibt es n linear unabhängige, die im Punkt x^* aktiv sind, also zu Gleichungen werden, und deren Richtungsvektoren der Funktion z entgegenlaufen. Diese (zunächst abhängigen) Variablen können wir durch Basiswechsel zu freien Variablen machen, und das LP $z' : \left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ ist optimal.

🙂 Dieses geometrische Argument zeigt, *dass* eine Lösung möglich ist.
☹️ Es erklärt leider nicht, *wie* wir eine Lösung konkret finden können.
🙂 Die explizite Berechnung ist Ziel des Simplexalgorithmus (§F3).

Optimierung durch Basiswechsel

Der geometrische Beweis von Satz F1B zeigt zunächst nur, *dass* eine Lösung prinzipiell möglich ist, er erklärt aber leider nicht, *wie* wir eine Lösung konkret finden können. Dies leistet Dantzigs Pivotstrategie: Wir hangeln uns von Ecke zu Ecke „immer an der Wand entlang".

Hermann Weyl schrieb hierzu in seinem Artikel *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik* 1921 die weisen Worte:

Ein Existenzsatz verkündet
„das Vorhandensein eines Schatzes,
ohne jedoch zu verraten, an welchem Ort. [...]
Nicht das Existenztheorem ist das Wertvolle,
sondern die im Beweise geführte Konstruktion."

Erst der Simplexalgorithmus erlaubt uns, den Schatz zu heben! Dazu ist noch deutlich mehr Arbeit nötig: Wir müssen jeden Schritt, also den jeweils vorzunehmenden Basiswechsel explizit festlegen, und dann nachweisen, dass die Methode immer zum Ziel führt.

Optimierung durch Basiswechsel

Zur Klärung möglicher Missverständnisse betone ich den Dreischritt:

1. Die Daten $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ definieren zunächst die **Problemstellung**. Damit legen wir präzise fest, was wir als **Lösung** akzeptieren.
2. Jeder Basiswechsel ermöglicht eine **elementare Umformung**. Das Problem geht über in ein **äquivalentes Problem** $z' : \left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$.
3. Erst die genaue Schrittfolge definiert damit einen **Algorithmus**. Hierzu dient die explizite Formulierung einer **Pivotstrategie** (§F3).

Anders als im Gauß–Algorithmus ist die Laufzeit schwer zu beschränken. Schlimmstenfalls ist sie exponentiell, etwa für den Klee–Minty–Würfel. Daher wurden zahlreiche weitere Pivotstrategien vorgeschlagen, oder auch grundsätzlich neue Zugänge wie etwa Innere-Punkte-Methoden.

Für einen ersten Durchgang möchte ich diese anspruchsvolleren Fragen vermeiden, genauer gesagt auf einen zweiten Durchgang verschieben. Erst wenn Sie genug eigene Erfahrung mit dem Verfahren gesammelt haben, sind Sie bereit und motiviert für eine genauere Untersuchung.

Dualität für lineare Programme (nach John von Neumann)

Beispiel: Zur Illustration untersuchen wir erneut unsere Rechnung.

	x_1	x_2	
u_1	-1	1	7
u_2	-3	-1	33
u_3	-1	-1	15
u_4	0	-1	9
u_0	2	1	-4

Ausgeschrieben: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

$$u_1 = -1x_1 + 1x_2 + 7 \ge 0$$
$$u_2 = -3x_1 - 1x_2 + 33 \ge 0$$
$$u_3 = -1x_1 - 1x_2 + 15 \ge 0$$
$$u_4 = +0x_1 - 1x_2 + 9 \ge 0$$
$$u_0 = +2x_1 + 1x_2 - 4 \ge 0$$

Wir wollen u_0 maximieren. Wir finden leicht eine grobe obere Schranke:

$$u_0 \le u_0 + u_2 = -1x_1 - 0x_2 + 29 \le 29$$

Mit etwas Glück und Geschick finden wir eine kleinere obere Schranke:

$$u_0 \le u_0 + \tfrac{1}{2}u_2 + \tfrac{1}{2}u_3 = -0x_1 - 0x_2 + 20 \le 20$$

Jede solche Positivkombination liefert uns eine obere Schranke für u_0. Was ist die kleinste obere Schranke? Dies definiert das duale Problem!

Dualität für lineare Programme (nach John von Neumann)

Allgemein suchen wir geeignete Multiplikatoren $y_1, \dots, y_m \ge 0$:

$$u_0 \le u_0 + y_1 u_1 + \dots + y_m u_m = \underbrace{(yA + c)}_{\le 0}\, x + \underbrace{yb + d}_{\to \min!}$$

Die Bedingungen $y_j, u_j \ge 0$ garantieren die behauptete Ungleichung. Wir verlangen $yA + c \le 0$, denn dadurch wird der Punkt $x = 0$ optimal. Wir wollen $yb + d$ minimieren, als möglichst kleine obere Schranke. Aus dem primalen Problem erhalten wir so das duale Problem:

primales LP: $x \ge 0, \quad Ax + b \ge 0, \quad u_0(x) = cx + d \to \max!$

duales LP: $y \ge 0, \quad yA + c \le 0, \quad v_0(y) = yb + d \to \min!$

Dualität ist eine wichtige Methode und ein grundlegendes Ergebnis der Linearen Optimierung, sowohl theoretisch als auch praktisch.

🙂 Das duale Problem ist erneut linear, hat also dieselbe Struktur. Das primale und das duale Problem beschränken sich gegenseitig.

🙂 Die lineare Optimierung erfreut sich zudem der **starken Dualität**: Hier gilt $\max u_0 = \min v_0$. Es besteht keine Dualitätslücke!

Dualität für lineare Programme (nach John von Neumann)

Jedes lineare Programm kommt als **duales Paar**:

primales LP:	$x \geq 0,$	$Ax + b \geq 0,$	$u(x) = cx + d \to \max!$
duales LP:	$y \geq 0,$	$yA + c \leq 0,$	$v(y) = yb + d \to \min!$

Das entspricht der Transnegation von $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ zu $-v : -\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{\intercal}$.

Für jedes optimale LP, also $c \leq 0 \leq b$, ist die Lösung offensichtlich:

$x = 0$ ist zulässig $\iff$ $b \geq 0$ $\implies$ $y = 0$ minimiert $v(y) = yb + d$

$y = 0$ ist zulässig $\iff$ $c \leq 0$ $\implies$ $x = 0$ maximiert $u(x) = cx + d$

Satz F1C: Dualität der linearen Optimierung

Schwache Dualität: Für jeden zulässigen Punkt $x \geq 0$ mit $Ax + b \geq 0$ und dual jeden zulässigen Punkt $y \geq 0$ mit $yA + c \leq 0$ gilt $u(x) \leq v(y)$.

Sind also simultan beide LP erfüllbar, so sind auch beide lösbar.

Starke Dualität: Ist das primale LP lösbar, so auch das duale LP, und es gilt die Gleichheit $\max u = \min v$, also keine Dualitätslücke.

Ist das primale LP erfüllbar, aber nicht das duale, so ist u unbeschränkt.
Ist das duale LP erfüllbar, aber nicht das primale, so ist v unbeschränkt.

Dualität für lineare Programme (nach John von Neumann)

Aufgabe: (1) Beweisen Sie die schwache Dualität durch Einsetzen.

(2) Folgern Sie die starke Dualität (F1C) aus der Optimierbarkeit (F1B).
Hinweis: Gilt Dualität für optimale LP? optimierbare LP? lösbare LP?

Lösung: (1) Wir nutzen die Zulässigkeit $x \geq 0$ und $b \geq -Ax$ sowie dual $y \geq 0$ und $c \leq -yA$. Positivkombinationen erhalten alle Ungleichungen:

$$u(x) \;=\; cx + d \;\leq\; (-yA)x + d \;=\; y(-Ax) + d \;\leq\; yb + d \;=\; v(x)$$

☺ Schwache Dualität erhalten wir direkt durch geschickten Vergleich.

(2) Starke Dualität ist klar für jedes optimale LP, mit $c \leq 0 \leq b$: Hier löst $x = 0$ das primale LP und $y = 0$ das duale LP, also $\max u = d = \min v$.

Dank Basiswechsel gilt Dualität dann auch für jedes optimierbare LP. Dies wirkt auf beide Probleme, primal und dual, auf dieselbe Weise.

Dank Optimierbarkeit F1B gilt starke Dualität für jedes lösbare LP. QED

☺ Das ist ein bemerkenswerter „Beweis durch Rechnung“ oder eine „Konstruktion durch Algorithmus“. Diesen Idealfall haben wir nicht oft.

Die Ergänzung zu unbeschränkten Problemen führe ich hier nicht aus.

Dualität für lineare Programme (nach John von Neumann)

Für ein lineares Problem $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ gibt es genau drei Möglichkeiten: lösbar, unerfüllbar (somit beschränkt), unbeschränkt (somit erfüllbar). Für zwei beliebige Probleme ergeben sich demnach 9 Kombinationen.

Aufgabe: Sei $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und $-v : -\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^\intercal$ ein duales Problempaar. Welche der neun Kombinationen sind hier tatsächlich möglich?

Lösung: Für ein duales Problempaar gibt es genau vier Möglichkeiten:

primal \ dual	unerfüllbar (somit beschränkt)	lösbar (erfüllbar und beschränkt)	unbeschränkt (somit erfüllbar)
unerfüllbar (somit beschränkt)	✓ möglich	✗ starke Dualität	✓ möglich
lösbar (erfüllbar und beschränkt)	✗ starke Dualität	✓ möglich	✗ schwache Dualität
unbeschränkt (somit erfüllbar)	✓ möglich	✗ schwache Dualität	✗ schwache Dualität

Dualität für lineare Programme (nach John von Neumann)

Wir fassen diese nützlichen Beobachtungen als Korollar zusammen:

Korollar F1D: Erfüllbarkeit und Lösbarkeit

Vorgelegt sei ein lineares Problem $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit Dual $-v : -\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^\intercal$. Genau einer der folgenden vier Fälle tritt ein:

1. Das primale und das duale Problem sind beide unerfüllbar.
2. Das primale ist unbeschränkt und das duale ist unerfüllbar.
3. Das duale ist unbeschränkt und das primale ist unerfüllbar.
4. Das primale und das duale Problem sind beide erfüllbar. Dann sind beide lösbar, und es gilt Gleichheit $\max u = \min v$.

Der Dualitätssatz erscheint nur auf den ersten Blick kompliziert. Beim zweiten Hinschauen erweist er sich als einfach und elegant. Nehmen Sie sich die Zeit, diese Entwicklung gründlich zu verstehen:

Übung: Wiederholen Sie sorgsam alle Argumente zur Dualität. Beweisen Sie die schwache und starke Dualität und obiges Korollar. Jeder einzelne Schritt ist leicht; fügen Sie alle Teile zusammen!

Dualität für lineare Programme (nach John von Neumann)

Beispiel: Zur Illustration betrachten wir erneut unser voriges Beispiel:

primal	x_1	x_2	
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
u	2	1	-4

$\Longleftrightarrow$

primal	y_3	y_2	
x_1	$1/2$	$-1/2$	9
x_2	$-3/2$	$1/2$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$3/2$	$-1/2$	3
u	$-1/2$	$-1/2$	20

Der Punkt $x = (9,6)^\intercal$ ist zulässig, dank $Ax + b = (4,0,0,3)^\intercal \ge 0$. Demnach gilt $\max u \ge u(x) = 20$. Das zweite Tableau zeigt zudem $u = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_2 + 20 \le 20$. Beide zusammen beweisen $\max u = 20$.

☺ Die Richtigkeit dieser zweiten Aussage können wir auch unabhängig nachprüfen, genau dazu dienen zertifizierte Lösungen: Sehen Sie wie?

Aufgabe: Dualisieren Sie dieses Problem und und lösen Sie dies. Müssen Sie zur Lösung erneut Basiswechsel durchführen? Wie nutzen Sie die Äquivarianz unter Transnegation? Woran erkennen Sie die Eindeutigkeit der Lösung?

Dualität für lineare Programme (nach John von Neumann)

Lösung: Dualisieren ist äquivalent zur Transnegation:

dual	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	-1	-3	-1	0	2
x_2	1	-1	-1	-1	1
v	7	33	15	9	-4

Transposition:
NN: $y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$
NB: $x_1, x_2 \le 0$ bzw. $-x_1, -x_2 \ge 0$
Ziel: $v \to \min!$ bzw. $-v \to \max!$

Das duale Problem bringen wir somit ebenfalls auf Normalform und lösen es durch eine geeignete Folge von Basiswechseln:

	y_1	y_2	y_3	y_4	
$-x_1$	1	3	1	0	-2
$-x_2$	-1	1	1	1	-1
$-v$	-7	-33	-15	-9	4

$\Longleftrightarrow$

	$-x_1$	$-x_2$	y_1	y_4	
y_3	$-1/2$	$3/2$	2	$-3/2$	$1/2$
y_2	$1/2$	$-1/2$	-1	$1/2$	$1/2$
$-v$	-9	-6	-4	-3	-20

Der Punkt $y = (0, 1/2, 1/2, 0)$ ist zulässig, also $\min v \le v(y) = 20$. Wir finden $v = 9(-x_1) + 6(-x_2) + 4y_1 + 3y_4 + 20$, also $\min v = 20$.

☺ Das beweist die starke Dualität in unserem konkreten Beispiel. Allgemein gelingt dies ebenso, wie in der vorigen Aufgabe erklärt.

Zertifizierte Lösung einer linearen Optimierung

Aufgabe: Anwender Bob will $u(x) = cx + d$ maximieren, wobei $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ gelte. Mit $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ beauftragt er Spezialistin Alice.

(1) In welcher Form sollte Alice ihre Lösung an Bob übergeben?
(2) Wie kann Bob leicht prüfen, ob sie zulässig ist? zudem optimal?
(3) Wie kann Alice Optimalität zertifizieren und Bob dies effizient prüfen?

Lösung: (1) Alice kann Bob einen Lösungsvektor $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ schicken.

(2) Bob kann $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ durch Einsetzen direkt prüfen.

☺ In diesem Falle ist der Punkt x zulässig und $\max u \geq u(x)$ garantiert.
☹ Die Gleichung $\max u = u(x)$ ist zunächst schwieriger zu beweisen!
☺ Glücklicherweise gibt es eine simple Lösung. Dualität wirkt Wunder:

(3) Zum Beweis der Optimalität von $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ schickt Alice ein $y \in \mathbb{R}^{1\times m}$ mit $y \geq 0$ und $yA + c \leq 0$ sowie $u(x) = v(y)$. Das kann Bob leicht prüfen!

☺ Bereits schwache Dualität garantiert $\max u = u(x) = v(y) = \min v$.
☺ Starke Dualität garantiert zuvor, dass zu x ein Zertifikat y existiert!
☺ Lösungen sollten immer als duales Paar (x, y) angegeben werden.

Zertifizierte Lösung einer linearen Optimierung

Um diese Aufgabenstellung etwas dramatischer zu betonen, biete ich Ihnen drei Hintergrundgeschichten zur Anregung Ihrer Phantasie:

Persönliche Sorgfalt: Sie möchten Ihre eigene Rechnung effizient und sicher überprüfen, natürlich ohne alles erneut durchrechnen zu müssen. Sie suchen hierzu einen einfachen und automatisch ausführbaren Test.

Nutzen in einer Klausur: Sie schreiben eine Klausur und wollen sich Ihres Ergebnisses absolut sicher sein. Das Klausurenteam will diese Sorgfalt gezielt fördern und fragt daher explizit nach einem Zertifikat.

Vertrag zwischen unabhängigen Kontrahenden: Die Rechnung, hier eine lineare Optimierung, ist lang und aufwändig. Sie erfordert Spezialsoftware und immense Rechenzeit, die Sie nicht kaufen oder mieten wollen; Sie benötigen nur das Ergebnis. Hierzu beauftragen Sie eine externe Firma, die sich auf diese Art Rechnung spezialisiert hat.

Bei Lieferung der Ware (berechnetes Ergebnis) können Sie der Firma vertrauen, noch besser ist jedoch ein Zertifikat: Dies wird mitgeliefert, und bei Wareneingang können Sie alles schnell und sicher prüfen.

Zertifizierte Lösung einer linearen Optimierung

Definition F1E: zertifizierte Lösung einer linearen Optimierung

Eine **zertifizierte Lösung** zum LP $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist ein duales Paar (x, y) mit $x \ge 0$ und $Ax + b \ge 0$ sowie $y \ge 0$ und $yA + c \le 0$, sodass $cx = yb$ gilt. Das garantiert: x löst das primale LP und y löst das duale LP.

Beispiel: Vorgelegt sei das Ergebnis mehrerer Basiswechsel:

primal	x_1	x_2	
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
u	2	1	-4

$\Longleftrightarrow$

primal	y_3	y_2	
x_1	$1/2$	$-1/2$	9
x_2	$-3/2$	$1/2$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$3/2$	$-1/2$	3
u	$-1/2$	$-1/2$	20

Aufgabe: Ist die Lösung korrekt? Finden Sie ein Zertifikat!

Lösung: Wir sehen das duale Paar $x = (9, 6)^\intercal$ und $y = (0, 1/2, 1/2, 0)$. Die Probe gelingt dann leicht, direkt und effizient durch Einsetzen: Es gilt $x \ge 0$ und $Ax + b \ge 0$ sowie $y \ge 0$ und $yA + c \le 0$ mit $cx = yb$.

Zertifizierte Lösung einer linearen Optimierung

☺ Jedes Zertifikat (x, y) garantiert: Der Spaltenvektor $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ löst das primale LP, und der Zeilenvektor $y \in \mathbb{R}^{1\times m}$ löst das duale LP. Das ist ein wunderbares Beispiel einer Zertifizierung, denn es vereint alle wünschenswerten Eigenschaften:

☺ Wenn wir die Lösung x mit dem Simplexverfahren berechnen, dann kostet die Konstruktion des Zertifikats y nahezu nichts extra: Mit dem eigentlichen (primalen) Problem löst das Simplexverfahren zusätzlich und gratis auch das duale Problem. *Solve one, get one free!*

☺ Dies nutzen wir dankend zur Zertifizierung, ganz ohne Mehraufwand. Wir extrahieren das duale Paar (x, y) als *konzise Lösung mit Beweis*. Die zertifizierte Lösung (x, y) lässt sich schnell und sicher prüfen: Zur direkten Probe genügen allein die Grundrechenarten.

☺ Zur Prüfung von (x, y) genügt bereits die schwache Dualität. Die starke Dualität garantiert, dass zu x ein Zertifikat y existiert! So prüfen Sie Ihre eigene Rechnung: *Jeder Irrtum wird erkannt!* So überzeugt Ihre Lösung, unabhängig vom (langen) Rechenweg.

Zertifizierte Lösungen: Analogien in der Algebra

☺ Sie kennen ähnliche Situationen aus der (linearen) Algebra:
Auch hier ist ein Zertifikat eine *konzise Lösung mit Beweis*.

Invertierbarkeit einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über einem Körper $\mathbb{K}$:
Ist A invertierbar, so genügt $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $AB = BA = 1_{n\times n}$.
Ist A nicht invertierbar, so genügt $v \in \mathbb{K}^n \smallsetminus \{0\}$ mit $Av = 0$.

Diagonalisierbarkeit einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über einem Körper $\mathbb{K}$:
Ist A diagonalisierbar, so genügt eine Basis $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ und Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $Av_k = \lambda_k v_k$ für alle $k = 1, \dots, n$.

Übung: Wie zertifizieren Sie die Nicht-Diagonalisierbarkeit von A?

Lösung: (1) Erstes Hindernis ist das Zerfallen des char. Polynoms P_A. Über $\mathbb{C}$ ist die Antwort klar, über $\mathbb{R}$ ist sie leicht. Über $\mathbb{Q}$ können Sie alle Kandidaten für Nullstellen von P_A aufzählen, prüfen und abspalten.

(2) Angenommen, P_A zerfällt über $\mathbb{K}$. Dann genügt ein Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ mit einem Hauptvektor $v \in \mathbb{K}^n$, sodass $(A-\lambda)v \neq 0$ und $(A-\lambda)^2 v = 0$. Das Paar (λ, v) zertifiziert, dass A nicht diagonalisiert werden kann.

Zertifizierte Lösungen: Analogien in der Algebra

Bild und Kern einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ über einem Körper $\mathbb{K}$:
Naiv würden wir eine Basis von Bild und Kern fordern. Zum Nachweis muss lineare Unabhängigkeit geprüft werden. Wie können wir sicher stellen, dass das Bild bzw. der Kern nicht noch größer ist?

Mit dem Gauß–Algorithmus konstruieren wir Matrizen $S, S' \in \mathbb{K}^{m\times m}$ mit $SS' = S'S = 1_{m\times m}$ und $T, T' \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $TT' = T'T = 1_{n\times n}$ sodass $S'AT = D$ gilt, wobei mit $d_{ii} = 1$ für $i = 1, \dots, r$ und $d_{ij} = 0$ sonst.
Es gilt $AT = SD$: Das Bild $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(AT) = \operatorname{Im}(SD)$ hat demnach als eine Basis die ersten r Spalten von S, also $Se_1, \dots, Se_r \in \mathbb{K}^m$.
Der Kern $\ker(A)$ hat als eine Basis die letzten $n-r$ Spalten von T, also $Te_{r+1}, \dots, Te_n \in \mathbb{K}^n$. Zertifizierte Lösung ist hier (S, S', T, T').

Größter gemeinsamer Teiler (ggT) d von a, b in $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{K}[X]$ oder $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.
Mit $d \mid a$ und $d \mid b$ wissen wir nur, dass d ein gemeinsamer Teiler ist.
Gilt zudem $d = au + bv$, so ist d garantiert größter gemeinsamer Teiler:
Für jeden gemeinsamen Teiler d' mit $d' \mid a$ und $d' \mid b$ folgt $d' \mid au + bv$.
Zertifizierter ggT ist (d, a', b', u, v) mit $a = a'd$, $b = b'd$, $d = au + bv$.

Zertifizierte Lösungen: Analogien in der Algebra

Nicht immer ist eine Zertifizierung so offensichtlich, umso mehr lohnt sich die mathematische Fragestellung! Hier eine schöne Illustration:

Übung: Eine Firma / Software / Cloud bietet zu jeder noch so großen natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Faktorisierung in ihre Primfaktoren an. Wie würden Sie einen Vertrag mit dieser Firma aushandeln? Wie können Sie bei Lieferung die Qualität der Ware schnell und sicher prüfen?

Lösungsidee: Der kritische Punkt ist, die Primalität eines jeden Faktors $p \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ zu zertifizieren. Dies ist für den Kunden schwierig und sollte daher vom Anbieter geleistet werden. Hierzu genügt eine primitive Einheitswurzel $w \in \mathbb{Z}_p$, also ein Element maximaler Ordnung $p-1$ in der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}_p^\times, \cdot)$. Zum effizienten Nachweis der Ordnung genügt eine Primfaktorisierung $p - 1 = q_1^{e_1} \cdots q_\ell^{e_\ell}$ mit $q_1 < \cdots < q_\ell$. Rekursiv erfordert dies Zertifikate kleinerer Primzahlen.

Übung: Sehen Sie ein einfaches Zertifikat für einen optimalen Rundweg beim Problem des Handlungsreisenden [*travelling salesman problem*]?

Zertifizierte Lösungen: Analogien in der Analysis

Übung: Eine Firma / Software / Cloud bietet zu jeder Kontraktion $f : (X, d) \to (X, d)$ die näherungsweise Berechnung des Fixpunkts an. Wie würden Sie einen Vertrag mit dieser Firma aushandeln? Wie können Sie bei Lieferung die Qualität der Ware schnell und sicher prüfen?

Lösungsidee: Fixpunktsatz von Banach mit Fehlerschranke. Der tolerierte Fehler $\varepsilon > 0$ muss im Vertrag festgelegt werden.

Übung: Eine Firma / Software / Cloud bietet zu jedem Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\operatorname{ggT}(P, P') = 1$ die näherungsweise Berechnung aller Nullstellen an. Wie gestalten Sie Ihren Vertrag mit dieser Firma? Wie prüfen Sie bei Lieferung schnell und sicher die Qualität?

Lösungsidee: Newton–Verfahren und Satz von Kantorovich, siehe `de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Kantorowitsch`.

Übung: Sehen Sie ein mögliches Zertifikat für eine numerische Näherungslösung einer Differentialgleichung (gewöhnlich oder partiell)?

Beispiel zum Simplexverfahren (Klausur 2018)

Aufgabe: Gegeben ist das lineare Programm $x \ge 0$, $Ax + b \ge 0$, $u(x) = cx + d \to \max!$, kurz $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ wie in folgendem Tableau.

	x_1	x_2	v
y_1	-1	0	3
y_2	-1	-1	5
y_3	1	-2	4
u	$\alpha{=}2$	1	1

$\Longleftrightarrow$

	y_1	x_2	v
x_1	-1	0	3
y_2	1	-1	2
y_3	-1	-2	7
u	-2	1	7

(1) Führen Sie den letzten Basiswechsel zur optimalen Form aus.

(2) Bestimmen Sie eine zertifizierte Lösung (x, y) und das Maximum u. Prüfen Sie explizit jede der hierfür relevanten Un/Gleichungen.

(3) Zeichnen Sie zur Kontrolle die Erfüllungsmenge $P(A, b)$. Welche Teile der Lösung (2) können Sie daran ablesen?

(4) Wir ersetzen im ursprünglichen LP den Koeffizienten 2 durch $\alpha \in \mathbb{R}$. Nennen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das LP *unendlich viele* Lösungen hat.

(5) Wie verläuft das Simplexverfahren in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$?

Beispiel zum Simplexverfahren (Klausur 2018)

Lösung: (1) Es genügt ein letzter Basiswechsel zur optimalen Form:

	y_1	x_2	v
x_1	-1	0	3
y_2	1	-1	2
y_3	-1	-2	7
u	-2	1	7

$\Longleftrightarrow$

	y_1	y_2	v
x_1	-1	0	3
x_2	1	-1	2
y_3	-3	2	3
u	-1	-1	9

(2) Wir lesen die zertifizierte Lösung $x = (3, 2)^\intercal$ und $y = (1, 1, 0)$ ab.

Probe: Der Punkt $x = (3, 2)^\intercal$ erfüllt $x \ge 0$ und $Ax + b = (0, 0, 3)^\intercal \ge 0$, ist also primal zulässig. Der Punkt $y = (1, 1, 0)$ erfüllt $y \ge 0$ und $yA + c = (0, 0) \le 0$, ist also dual zulässig.

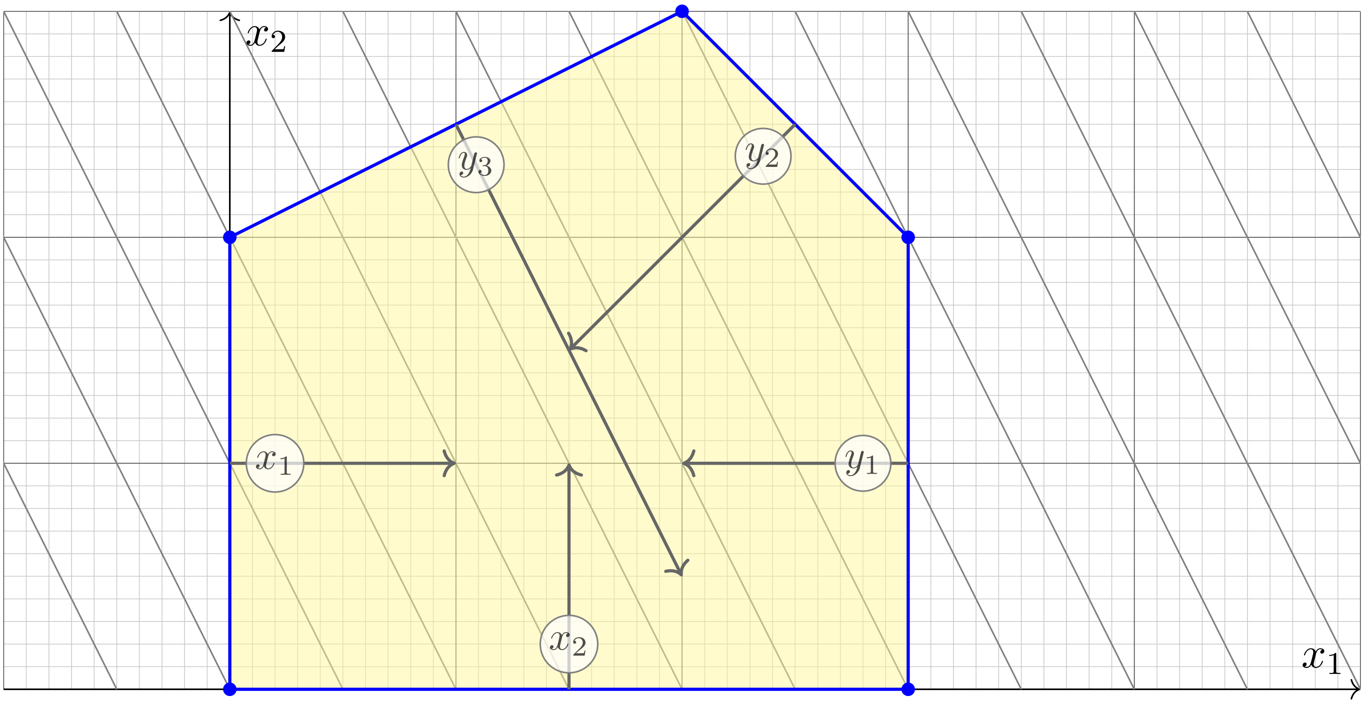
Die untere Schranke $u(x) = cx + d = 9$ und die obere Schranke $v(y) = yb + d = 9$ stimmen überein. Das beweist Optimalität!

🙂 Somit ist (x, y) eine zertifizierte Lösung und $\max u = \min v = 9$.

Mit dem eigentlichen (primalen) Problem löst das Simplexverfahren zugleich und gratis auch das duale Problem: *Solve one, get one free!*

Beispiel zum Simplexverfahren (Klausur 2018)

(3) Die Erfüllungsmenge $P(A,b) = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0,\ Ax + b \ge 0 \,\}$:



🙂 Mit nur zwei freien Variablen x_1, x_2 erhalten wir ein ebenes Problem. In diesem glücklichen Spezialfall können wir das LP graphisch lösen. Die duale Lösung y ist schwerer zu sehen, bestenfalls zu erahnen.

Beispiel zum Simplexverfahren (Klausur 2018)

(4) Der Skizze entnehmen wir $\alpha = 1$ und $\alpha = -1/2$. Weitere gibt es nicht.

🙂 Das können Sie graphisch leicht ablesen. Ebenso algebraisch, aber subtiler, indem Sie auf lineare Abhängigkeit prüfen. Sehen Sie wie?

(5a) Die Graphik erklärt sehr eindrücklich die Rechnung: Für $\alpha > 1$ führen die Basiswechsel $x_1 \leftrightarrow y_1$ und $x_2 \leftrightarrow y_2$ zur optimalen Form.

(5b) Für $-1/2 < \alpha < 1$ genügen die Basiswechsel $x_2 \leftrightarrow y_3$ und $x_1 \leftrightarrow y_2$.

(5c) Für $\alpha < -1/2$ genügt bereits der Basiswechsel $x_2 \leftrightarrow y_3$.

(5ab) Im Grenzfall $\alpha = 1$ sind beide Wege (a) und (b) möglich.

(5bc) Im Grenzfall $\alpha = -1/2$ sind beide Wege (b) und (c) möglich.

🙂 Führen Sie die expliziten Rechnungen als Übung aus! So erfahren Sie die Methode. *Rechnen reinigt die Seele.*

Beispiel zum Simplexverfahren (Klausur 2019)

Aufgabe: Gegeben ist das lineare Programm $x \ge 0$, $Ax + b \ge 0$, $u(x) = cx + d \to \max!$, kurz $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ wie in folgendem Tableau.

	x_1	x_2	v
y_1	-2	1	6
y_2	-1	-2	8
u	2	1	3

(1) Führen Sie zwei Basiswechsel zur optimalen Form aus.

(2) Bestimmen Sie hieraus eine zertifizierte Lösung (x, y) und das so erzielte Maximum u, mit Probe.

(3) Zeichnen Sie zur graphischen Kontrolle der Lösung die Erfüllungsmenge $P(A, b) = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0,\ Ax + b \ge 0 \,\}$.

Beispiel zum Simplexverfahren (Klausur 2019)

Lösung: (1) Zwei Basiswechsel genügen zur optimalen Form:

	x_1	x_2	v
y_1	-2	1	6
y_2	-1	-2	8
u	2	1	3

$\Longleftrightarrow$

	y_1	x_2	v
x_1	$-1/2$	$1/2$	3
y_2	$1/2$	$-5/2$	5
u	-1	2	9

$\Longleftrightarrow$

	y_1	y_2	v
x_1	$-2/5$	$-1/5$	4
x_2	$1/5$	$-2/5$	2
u	$-3/5$	$-4/5$	13

Beispiel zum Simplexverfahren (Klausur 2019)

(2) Wir lesen die zertifizierte Lösung $x = (4,2)^\intercal$ und $y = (3/5, 4/5)$ ab.

Probe: Der Punkt $x = (4,2)^\intercal$ erfüllt $x \ge 0$ und $Ax + b = (0,0)^\intercal \ge 0$, ist also primal zulässig. Der Punkt $y = (3/5, 4/5)$ erfüllt $y \ge 0$ und $yA + c = (0,0) \le 0$, ist also dual zulässig.

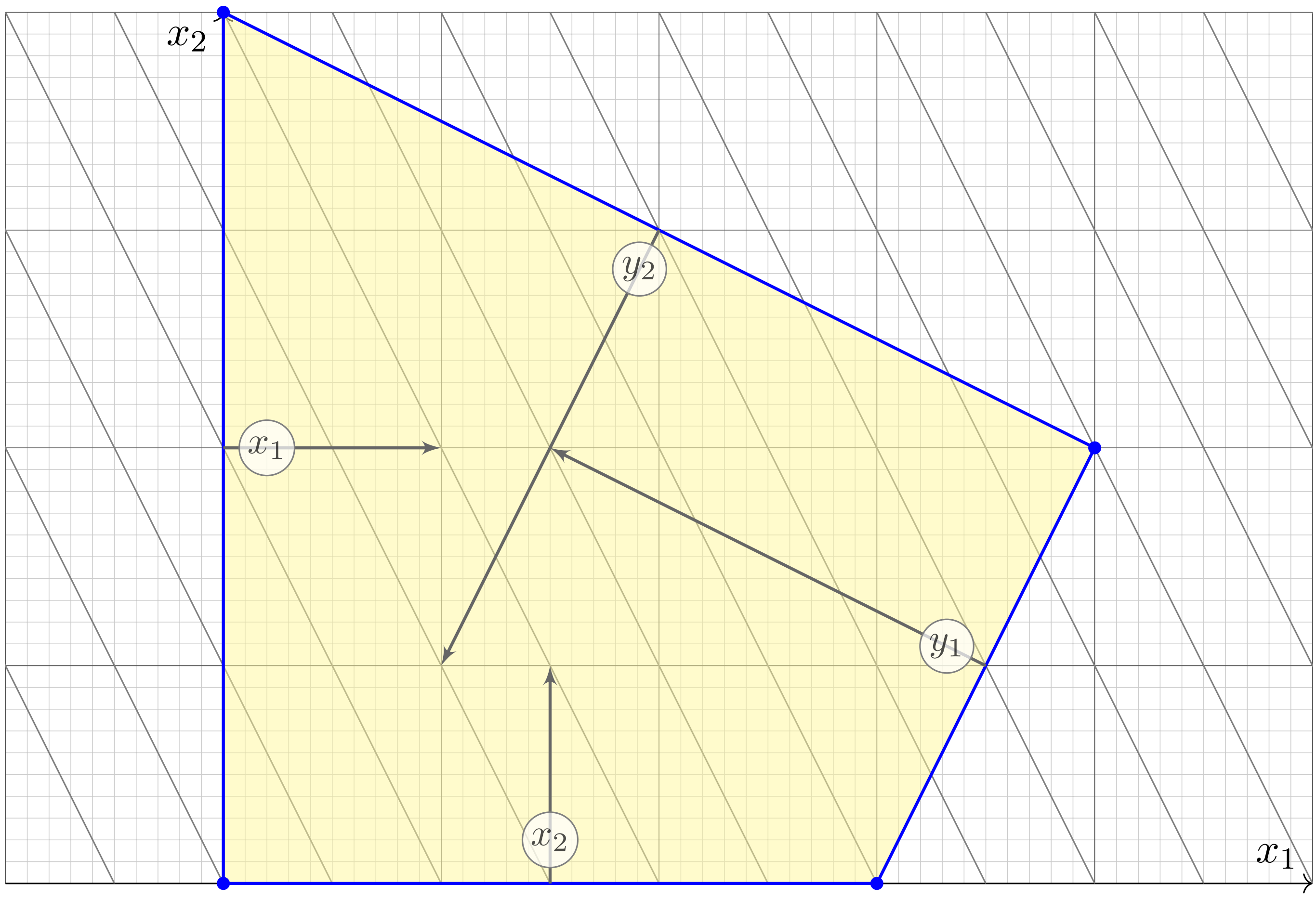
Die untere Schranke $u(x) = cx + d = 13$ und die obere Schranke $v(y) = yb + d = 13$ stimmen überein. Das beweist Optimalität!

🙂 Somit ist (x,y) eine zertifizierte Lösung und $\max u = \min v = 9$.

Mit dem eigentlichen (primalen) Problem löst das Simplexverfahren zugleich und gratis auch das duale Problem: *Solve one, get one free!* Dies nutzen wir dankend zur Zertifizierung, ohne Mehraufwand. So prüfen Sie Ihre eigene Rechnung: *Jeder Irrtum wird erkannt!*

Zugegeben, das vorgelegte lineare Programm ist geradezu winzig, um den Rechenaufwand in einer Klausur noch erträglich zu halten. Auch sind alle Ungleichungen hier straff, das ist etwas unrealistisch. Die Übungen bieten Ihnen etwas realistischere Anwendungsbeispiele.

Beispiel zum Simplexverfahren (Klausur 2019)



Vom Nullsummenspiel zum linearen Programm

Aufgabe: Untersuchen Sie nochmals das Spiel *Schere-Stein-Papier:*

	Schere	Stein	Papier
Schere	0 \ 0	-1 \ $+1$	$+1$ \ -1
Stein	$+1$ \ -1	0 \ 0	-1 \ $+1$
Papier	-1 \ $+1$	$+1$ \ -1	0 \ 0

$$A = -B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finden Sie ein Nash–Gleichgewicht und die Auszahlung für Spieler 1:
(1) Schreiben Sie das Problem explizit als ein lineares Programm.
(2) Finden Sie eine Lösung. Ist sie eindeutig? Finden Sie ein Zertifikat!

Dieses Nullsummenspiel dient hier zur Illustration. Sie kennen bereits die Lösung: Es gibt genau ein Nash–Gleichgewicht, nämlich $(1/3, 1/3, 1/3)$, und der Wert des Spiels ist 0, auch schon aus Symmetriegründen.

Vom Nullsummenspiel zum linearen Programm

Lösung: Wir schreiben Schere-Stein-Papier als Bimatrixspiel

$$u : \Delta^2 \times \Delta^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \big(x^\intercal A\, y,\ -x^\intercal A\, y \big).$$

Hierbei ist $\Delta^2 = [e_0, e_1, e_2] \subset \mathbb{R}^3$ und $e_0, e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$ die Standardbasis.
Der Spielwert / die Gleichgewichtsauszahlung für Spieler 1 ist:

$$z = \max_{x \in [e_0,e_1,e_2]} \min_{y \in [e_0,e_1,e_2]} x^\intercal A\, y = \max_{x \in [e_0,e_1,e_2]} \min_{y \in \{e_0,e_1,e_2\}} x^\intercal A\, y$$

Wir erhalten ein endliches System linearer Un/Gleichungen:

$$\begin{aligned} z \to \max!, \qquad & z \le x^\intercal A\, e_0, & x_0 \ge 0, \\ & z \le x^\intercal A\, e_1, & x_1 \ge 0, \\ & z \le x^\intercal A\, e_2, & x_2 \ge 0, \\ & 1 = x_0 + x_1 + x_2, & z \ge 0. \end{aligned}$$

Trick: $A' = A + \begin{pmatrix} 2&2&2 \\ 2&2&2 \\ 2&2&2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2&1&3 \\ 3&2&1 \\ 1&3&2 \end{pmatrix}$ erfüllt $A' > 0$ und $z' = z + 2 > 0$.
Bonus: Statt $x_0 + x_1 + x_2 = 1$ genügt die Ungleichung $x_0 + x_1 + x_2 \le 1$.

Vom Nullsummenspiel zum linearen Programm

(1) Durch diese Umformulierung erhalten wir unser lineares Programm:

$$\begin{array}{lll} z \to \max!, & x_0 \ge 0, & s_0 = x^\intercal A\, e_0 - z \quad \ge 0,\\ & x_1 \ge 0, & s_1 = x^\intercal A\, e_1 - z \quad \ge 0,\\ & x_2 \ge 0, & s_2 = x^\intercal A\, e_2 - z \quad \ge 0,\\ & z \ge 0, & s_3 = 1 - x_0 - x_1 - x_2 \ge 0. \end{array}$$

(2) Wir schreiben dies als Tableau und lösen das LP:

	x_0	x_1	x_2	z	
s_0	2	3	1	-1	0
s_1	1	2	3	-1	0
s_2	3	1	2	-1	0
s_3	-1	-1	-1	0	1
z	0	0	0	1	0

Damit haben wir unser Problem in Normalform und können es lösen. Etwas ungewöhnlich ist, dass die Zielfunktion z auch als Variable auftritt. Wer das nicht mag, schreibt lieber $z = t \to \max!$ mit der Variablen t.

Vom Nullsummenspiel zum linearen Programm

	x_0	x_1	x_2	s_0	
z	2	3	1	-1	0
s_1	-1	-1	2	1	0
s_2	1	-2	1	1	0
s_3	-1	-1	-1	0	1
z	2	3	1	-1	0

	x_0	s_1	x_2	s_0	
z	-1	-3	7	2	0
x_1	-1	-1	2	1	0
s_2	3	2	-3	-1	0
s_3	0	1	-3	-1	1
z	-1	-3	7	2	0

	x_0	s_1	s_2	s_0	
z	6	$5/3$	$-7/3$	$-1/3$	0
x_1	1	$1/3$	$-2/3$	$1/3$	0
x_2	1	$2/3$	$-1/3$	$-1/3$	0
s_3	-3	-1	1	0	1
z	6	$5/3$	$-7/3$	$-1/3$	0

	s_3	s_1	s_2	s_0	
z	-2	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	2
x_1	$-1/3$	0	$-1/3$	$1/3$	$1/3$
x_2	$-1/3$	$1/3$	0	$-1/3$	$1/3$
x_0	$-1/3$	$-1/3$	$1/3$	0	$1/3$
z	-2	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	2

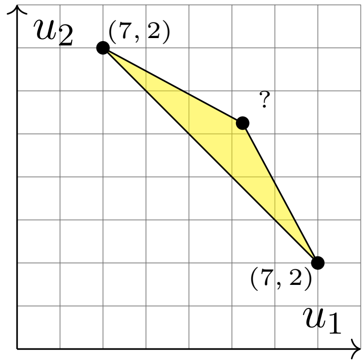
Eine Lösung ist $x^\intercal = (x_0, x_1, x_2, z) = (1/3, 1/3, 1/3, 2)$. Sie ist eindeutig.

Wurde richtig gerechnet? Zertifikat $y = (s_0, s_1, s_2, s_3) = (1/3, 1/3, 1/3, 2)$.
Es gilt $x \ge 0$ und $Ax + b \ge 0$ sowie $y \ge 0$ und $yA + c \le 0$ mit $cx = yb$.

Berechnung von korrelierten Gleichgewichten

Aufgabe: Analysieren Sie das *Chicken-Game* / *Feige-oder-mutig*.
Korrelierte Gleichgewichte wurden eingangs auf Seite F007 motiviert.

A \ B	feige	mutig
feige	6, 6 (x_0)	2, 7 (x_1)
mutig	7, 2 (x_2)	0, 0



Welche korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^2$ maximieren $u_1 + u_2$?
(1) Schreiben Sie das Problem explizit als ein lineares Programm.
(2) Finden Sie eine Lösung. Ist sie eindeutig? Finden Sie ein Zertifikat!

Ziel in (1) ist, die Ungleichungen der Definition I3C auszuschreiben, so wie wir dies bereits zu Beginn dieses Kapitels eingeführt haben. Wir haben nun alle Techniken, dies anschließend in Teil (2) zu lösen: Der Simplexalgorithmus ist unser Universalwerkzeug.

Berechnung von korrelierten Gleichgewichten

(1) Wir erhalten folgendes System linearer Ungleichungen:

$$\begin{aligned} u = 12x_0 + 9x_1 + 9x_2 \to \max!, \quad & x_0 \ge 0, \quad y_0 = -x_0 + 2x_1 \ge 0,\\ & x_1 \ge 0, \quad y_1 = -x_0 + 2x_2 \ge 0,\\ & x_2 \ge 0, \quad y_2 = 1 - x_0 - x_1 - x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

(2) Wir schreiben dies als Tableau $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und lösen das LP:

	x_0	x_1	x_2	
y_0	-1	2	0	0
y_1	-1	0	2	0
y_2	-1	-1	-1	1
u	12	9	9	0

$\Longleftrightarrow$

	y_0	x_1	x_2	
x_0	-1	2	0	0
y_1	1	-2	2	0
y_2	1	-3	-1	1
u	-12	33	9	0

$\Longleftrightarrow$

	y_0	y_1	x_2	
x_0	0	-1	2	0
x_1	$1/2$	$-1/2$	1	0
y_2	$-1/2$	$3/2$	-4	1
u	$9/2$	$-33/2$	42	0

$\Longleftrightarrow$

	y_0	y_1	y_2	
x_0	$-1/4$	$-1/4$	$-1/2$	$1/2$
x_1	$3/8$	$-1/8$	$-1/4$	$1/4$
x_2	$-1/8$	$3/8$	$-1/4$	$1/4$
u	$-3/4$	$-3/4$	$-21/2$	$21/2$

Berechnung von korrelierten Gleichgewichten

Eine Lösung ist $x = (x_0, x_1, x_2)^\intercal = (1/2, 1/4, 1/4)^\intercal$. Sie ist eindeutig. Beides können wir bequem am letzten Tableau ablesen: Es ist optimal.

Wurde richtig gerechnet? Zertifikat $y = (y_0, y_1, y_2) = (3/4, 3/4, 21/2)$. Es gilt $x \ge 0$ und $Ax + b \ge 0$ sowie $y \ge 0$ und $yA + c \le 0$ mit $cx = yb$.

☺ Auch hier können wir das Ergebnis schnell und sicher überprüfen. Das ist mehr als ein einfacher Plausibilitätscheck, es ist ein Beweis! Die ausführliche Rechnung benötigen wir, um die Lösung zu *finden*. Anschließend können wir die Rechnung vergessen, das ist vielleicht schade, aber sie ist entbehrlich: Das Ergebnis ist nachweislich richtig!

Aufgabe: Lösen Sie ebenso folgende Varianten dieses Problems:
(3) Welche korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^2$ minimieren $u_1 + u_2$?
(4) Welche korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^2$ max/minimieren u_1?
(5) Welche korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^2$ max/minimieren u_2?
Finden Sie eine Lösung. Ist sie eindeutig? Finden Sie ein Zertifikat!

Lösung: Die obige Graphik suggeriert Ihnen jeweils die Lösung(en). Wirkliche Sicherheit erlangen Sie nur durch eigenes Rechnen.

Berechnung von korrelierten Gleichgewichten

Wir variieren die vorige Aufgabe, indem wir die Vereinfachung $x_3 = 0$ fallen lassen und das allgemeine Problem untersuchen:

A \ B	feige	mutig
feige	6, x_0, 6	2, x_1, 7
mutig	7, x_2, 2	0, x_3, 0

Übung: Finden Sie alle korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^3$, die (1) $u_1 + u_2$ max/minimieren, ebenso (2) u_1 und symmetrisch (3) u_2.

Schreiben Sie das Problem explizit als ein lineares Programm. Finden Sie eine Lösung. Ist sie eindeutig? Finden Sie ein Zertifikat!

Übung: Wir vereinfachen die vorige Aufgabe, indem wir aus Symmetrie $x_1 = x_2$ und weiterhin $x_3 = 0$ setzen. Lösen das vereinfachte Problem.

Lineare Approximation mit kleinstem Fehler

Gegeben sind **Datenpunkte** $(p_1, q_1), \dots, (p_m, q_m) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Gesucht ist eine **lineare Prognose** $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto a^\intercal x + b$ mit dem Ziel $h(p_i) \approx q_i$. Was ist die beste Prognose? Der Fehler im $i$ten Datenpunkt (p_i, q_i) ist:

$$E_i := h(p_i) - q_i = a^\intercal p_i + b - q_i$$

Der L^1–Gesamtfehler ist die Absolutsumme. Damit minimieren wir:

$$F_1 \,:\, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \,:\, (a, b) \mapsto \textstyle\sum_{i=1}^m |E_i|^1 = \sum_{i=1}^m |a^\intercal p_i + b - q_i|^1$$

Der L^2–Gesamtfehler ist die Quadratsumme. Damit minimieren wir:

$$F_2 \,:\, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \,:\, (a, b) \mapsto \textstyle\sum_{i=1}^m |E_i|^2 = \sum_{i=1}^m |a^\intercal p_i + b - q_i|^2$$

Die Statistik nennt das **lineare Regression**. Beim maschinellen Lernen ist es ein erstes Beispiel für **angeleitetes Lernen** [*supervised learning*]. Der Exponent $\alpha \in [1, \infty]$ sorgt für geeignete **Gewichtung** großer Fehler.

Aufgabe: (1) Schreiben Sie die L^1–Minimierung als lineare Optimierung. (2) Lösen Sie die L^2–Minimierung (im eindimensionalen Fall $n = 1$).

Lineare Approximation mit kleinstem L^1–Fehler

Lösung: (1) Wir minimieren die Absolutsumme der punktweisen Fehler:

$$F_1 \,:\, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \,:\, (a, b) \mapsto \textstyle\sum_{i=1}^m |E_i| = \sum_{i=1}^m |a^\intercal p_i + b - q_i|.$$

Diese Problemstellung ist nicht linear aufgrund der Absolutbeträge! Wir wollen die Beträge auflösen. Hierzu nutzen wir $|E_i| = \max\{\pm E_i\}$. Wir führen zusätzliche Variablen $e_1, \dots, e_m$ ein mit Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} e_i &\ge +(a^\intercal p_i + b - q_i), \\ e_i &\ge -(a^\intercal p_i + b - q_i), \end{aligned}$$

und minimieren damit die neue Zielfunktion

$$f \,:\, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \,:\, (a, b, e) \mapsto e_1 + \dots + e_m.$$

In jedem Optimalpunkt (a, b, e) gilt dann $e_i = |E_i|$, wie erhofft. Somit minimiert (a, b) die Absolutsumme $F_1(a, b) = \sum_{i=1}^m |E_i|$.

🙂 Dieser Trick funktioniert allgemein: Jede Zielfunktion der Form $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto E_0(x) + \sum_{i=1}^m |E_i(x)|$ können wir umformulieren zur Zielfunktion $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} : (x, e) \mapsto E_0(x) + \sum_{i=1}^m e_i$ mit $e_i \ge \pm E_i(x)$.

Lineare Approximation mit kleinstem L^2–Fehler

Lösung: (2) Wir minimieren die Quadratsumme der punktweisen Fehler:

$$F_2 \,:\, \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \,:\, (a,b) \mapsto \sum_{i=1}^m E_i^2 = \sum_{i=1}^m (ap_i + b - q_i)^2.$$

Das ist eine positive quadratische Funktion in a und b. Minimum:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial a} &= \sum_{i=1}^m 2(ap_i + b - q_i)\cdot p_i &&\overset{!}{=} 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial b} &= \sum_{i=1}^m 2(ap_i + b - q_i) &&\overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem wird gelöst durch

$$a = \frac{\sum(p_i-\bar p)(q_i-\bar q)}{\sum(p_i-\bar p)^2} = \frac{\sum p_i q_i - m\bar p\bar q}{\sum p_i^2 - m\bar p^2}, \qquad b = \bar q - a\bar p.$$

Wir nutzen hierbei die Mittelwerte $\bar p = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m p_i$ und $\bar q = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m q_i$. Selbstverständlich nehmen wir $m \ge 2$ an und $i \mapsto p_i$ nicht konstant.

🙂 Geometrisch: Für die zentrierten Vektoren $\vec p_i = p_i - \bar p$ und $\vec q_i = q_i - \bar q$ berechnet sich $a = \langle \vec p \mid \vec q\rangle / \langle \vec p \mid \vec p\rangle$ durch zwei Skalarprodukte in $\mathbb{R}^m$! Die Kleinste-Quadrate-Schätzung ist eine orthogonale Projektion.

Lineare Approximation mit kleinstem L^2–Fehler

Wir nennen $y = ax + b$ die **Kleinste-Quadrate-Gerade** (KQ-Gerade). Der Wert $\hat q_i = ap_i + b$ heißt der **KQ-gefittete Wert** und entsprechend die Abweichung $f_i = \hat q_i - q_i = ap_i + b - q_i$ der **KQ-gefittete Fehler**.

Eigenschaften: Die Summe aller Fehler $f_i = \hat q_i - q_i = ap_i + b - q_i$ ist Null. Liegen alle Datenpunkte (p_i, q_i) auf einer Geraden, so ist dies unsere KQ-Gerade mit perfektem Fit: Überall gilt $\hat q_i = q_i$ und somit $f_i = 0$.

Wie gut beschreibt die Gerade die Daten? **Korrelationskoeffizient**

$$r(p,q) := \frac{\sum(p_i-\bar p)(q_i-\bar q)}{\sqrt{\sum(p_i-\bar p)^2}\sqrt{\sum(q_i-\bar q)^2}} = \frac{\langle \vec p \mid \vec q\rangle}{\sqrt{\langle \vec p \mid \vec p\rangle}\sqrt{\langle \vec q \mid \vec q\rangle}}$$

Für das Skalarprodukt $\langle \vec p \mid \vec q\rangle$ gilt die Cauchy–Schwarz–Ungleichung: Es gilt $-1 \le r \le 1$, mit $r = \pm 1$ genau dann, wenn alle Daten auf einer Geraden liegen: gleichsinnig für $r = +1$ und gegensinnig für $r = -1$.

Die Linearisierung ist gut für große Werte von r^2, schlecht für kleine. Geometrisch bedeutet $r = 0$: Die Vektoren $\vec p, \vec q$ stehen **senkrecht**. Stochastisch: Die Zufallsvariablen p, q sind **linear unkorreliert**.

Weitere schöne Anwendung:
Lineare Klassifizierer (aka *perceptron*)
Photos von Katzen und Hunden unterscheiden
Email filtern in Spam und Nicht-Spam
Machine Learning, Training / Validierung / Test

Lineare Klassifizierer (aka *perceptron*)

Lineare Klassifizierer (aka *perceptron*)

Vom heuristischen Verfahren zum Algorithmus

Vorgelegt sei ein lineares Programm $u: \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, ausgeschrieben

$$\boxed{x \ge 0, \quad Ax + b \ge 0, \quad u(x) = cx + d \to \max!}$$

Als Umformungen nutzen wir ausschließlich Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$:

	x_k	x_i
y_ℓ	α	β
y_j	γ	δ

$\xleftrightarrow[\text{wechsel}]{\text{Basis-}}$

	y_ℓ	x_i
x_k	$1/\alpha$	$-\beta/\alpha$
y_j	γ/α	$\delta - \beta\gamma/\alpha$

Wie wird daraus ein Algorithmus? Welche Pivotstrategie wählen wir? Wie garantieren wir Terminierung und Korrektheit?

Phase 1: Durch Basiswechsel überführen wir das LP in die Form $b \ge 0$. Gelingt dies, so ist $x = 0$ zulässig. Andernfalls ist das LP unerfüllbar.

Phase 2: Wir behalten $b \ge 0$ und überführen das LP in die Form $c \le 0$. Gelingt dies, so ist $x = 0$ optimal. Andernfalls ist das LP unbeschränkt.

Vom heuristischen Verfahren zum Algorithmus

Wenn Sie das Kapitel bis hier durchgearbeitet haben, dann kennen Sie das Simplexverfahren und bereits erste schöne Anwendungen. Da Sie nun über eigene Erfahrung mit dem Verfahren verfügen, sind Sie bereit und motiviert für eine genauere Untersuchung.

Auf der vorigen Folie habe ich dazu die beiden Phasen 1 & 2 erklärt. Interessanterweise ist zunächst Phase 2 deutlich leichter zugänglich. Dank Dualisierung können wir damit anschließend Phase 1 lösen. Wir beginnen daher, wie allgemein üblich, mit Phase 2.

Bislang haben wir in unseren Rechnungen immer $b \ge 0$ vorausgesetzt und sind sofort in Phase 2 eingestiegen. In der bisherigen Diskussion habe ich vorsichtig von dem / einem „Simplexverfahren“ gesprochen, noch nicht von einem Algorithmus, denn die Schrittfolge ist noch vage:

- Die Pivotwahl (Spalte k, Zeile ℓ) lässt noch viele Freiheiten.
- Die Terminierung nach endlich vielen Schritten ist nicht garantiert.

Dies wollen wir im Folgenden genauer erklären und begründen.

Phase 2 des Simplexalgorithmus: Pivotstrategie

Gegeben sei ein lineares Programm $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $b \ge 0$.

1. Wähle eine **Pivotspalte** $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $c_k > 0$.
   Gilt $c_k \le 0$ für alle k, dann wird u durch $x = 0$ maximiert. $\Rightarrow$ Ende
   Dantzigs **Pivotregel**: Wähle $c_k > 0$ maximal, darunter k minimal.
2. Wähle eine **Pivotzeile** $\ell \in \{1, \dots, m\}$ mit $a_{\ell k} < 0$.
   Gilt $c_k > 0$ und $a_{\ell k} \ge 0$ für alle ℓ, dann ist u unbeschränkt. $\Rightarrow$ Ende
   Engpass: Unter diesen wähle ℓ so, dass $b_\ell / |a_{\ell k}| \ge 0$ minimal ist.
3. **Basiswechsel:** Tausche $x_k \leftrightarrow y_\ell$ zum neue LP $u' : \left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$.
   Es gilt $b_j - \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}} b_\ell \ge 0$ dank (2) und $d' = d - \frac{c_k}{a_{\ell k}} b_\ell \ge d$ dank (1).

☺ **Generisch** gilt $b_\ell > 0$ und somit $d' > 0$, das garantiert Fortschritt. Da nur endlich viele Basiswechsel möglich sind, endet dieses Verfahren.

☹ In (seltenen) **Ausnahmen** kann das Verfahren stagnieren, $d' = d$. Bei ungeschickter Pivotwahl kann das Verfahren dann Zykel bilden.

☺ **Perturbation:** Ergänze $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ um eine Spalte. Statt mit $b_j, d \in \mathbb{R}^1$ rechnen wir mit $b_j, d \in \mathbb{R}^2$ und vergleichen lexikographisch. So können wir $b_\ell > 0$ und $d' > d$ garantieren. Notfalls wiederholen wir den Trick.

Phase 2 des Simplexalgorithmus: Pivotstrategie

Phase 2 spielt vollständig in der Menge aller erfüllbaren Tableaux

$$\mathscr{T} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1)} \;\middle|\; b \ge 0 \right\}.$$

Generisch heißt: Die Menge gutartiger Tableaux in $\mathscr{T}$ ist offen und dicht, und das Komplement der bösartigen Tableaux hat Lebesgue–Maß 0.

☺ Anschaulich: Wenn wir unser Tableau stetig verteilt zufällig wählen, dann kommen die befürchteten Ausnahmen mit Wkt 0 vor, also fast nie.

☺ Die Perturbation hilft, Zykel zu vermeiden. Hilfskomponenten können wir wieder löschen, sobald $b > 0$ in den vorderen Komponenten gilt.

☺ Das Element $(b_0, b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ entspricht $b_0 + \varepsilon b_1 + \dots + \varepsilon^k b_k$. Der lexikographische Vergleich sortiert somit nach Größenordnung.

Satz F3A: Terminierung und Korrektheit der Phase 2

Der angegebene Algorithmus für Phase 2 terminiert zu jeder Eingabe nach endlich vielen Schritten und liefert stets ein korrektes Ergebnis: entweder ein optimales Tableau oder ein unbeschränktes Tableau.

Phase 1 des Simplexalgorithmus: Dualisierung

Gegeben sei ein lineares Programm $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Wir wollen $b \geq 0$ erreichen. Wir transnegieren zu $\left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) = -\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{\intercal}$, nun wollen wir $c' \leq 0$ erreichen.

Wir erweitern zu $\left(\begin{smallmatrix} A' & b^* & b' \\ c' & d^* & d' \end{smallmatrix}\right)$ durch eine willkürliche Hilfsspalte $b^* > 0$. Hier können wir Phase 2 anwenden, wobei wir die Spalte b' mitführen. Wir erreichen $c' \leq 0$, löschen die Hilfsspalte und transnegieren zurück.

Gelingt dies nicht, so erreichen wir ein unbeschränktes Tableau $\left(\begin{smallmatrix} A' & b^* & b' \\ c' & d^* & d' \end{smallmatrix}\right)$. Wir löschen die Hilfsspalte und transnegieren zurück. Unser Tableau $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist dann offensichtlich nicht erfüllbar.

Satz F3B: Terminierung und Korrektheit der Phase 1

Dieser Algorithmus für Phase 1 terminiert nach endlich vielen Schritten und liefert stets ein korrektes Ergebnis: entweder ein erfüllbares Tableau mit $b \geq 0$ oder ein unbeschränktes Tableau des dualen Problems.

Übung: Prüfen Sie die Methode und die beiden Sätze sorgsam nach. Parallel hierzu können Sie dies an konkreten Beispielen ausprobieren dank unserem interaktiven Optimierungs-Tool `eiserm.de/lehre/Pivot`.

Der Simplexalgorithmus: Zusammenfassung

Nach Klärung aller Details verfügen wir nun über die Einzelteile, um den vollständigen Simplexalgorithmus zu formulieren:

Algo F3C: Simplexalgorithmus

Eingabe: ein lineares Programm als Tableau $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$
Ausgabe: ein dazu äquivalentes, optimales Tableau $u' : \left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ mit $c' \leq 0 \leq b'$ oder „unerfüllbar“ oder „unbeschränkt“

1: Durch Basiswechsel überführen wir das LP in die Form $b \geq 0$.
Gelingt dies, so ist der Ursprung $x = 0$ zulässig.
Andernfalls ist das LP unerfüllbar.
2: Wir behalten $b \geq 0$ und überführen das LP in die Form $c \leq 0$.
Gelingt dies, so ist der Ursprung $x = 0$ optimal.
Andernfalls ist das LP unbeschränkt.

Laufzeit des Simplexalgorithmus

Zur Erinnerung, für lineare Gleichungssysteme ist die Komplexität klar: Der Gauß–Algorithmus bringt jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ über dem Körper $\mathbb{K}$ in die reduzierte Zeilenstufenform (*reduced row echelon form*, kurz *rref*). Dazu benötigt er höchstens mr Zeilenoperationen, wobei $r \le \min\{m, n\}$ der Rang ist, und somit höchstens mnr arithmetische Operationen in $\mathbb{K}$.

Wiederholung: Erklären Sie den Algorithmus und seine Komplexität. (Operationen in $\mathbb{K}$ werden dabei mit konstanten Kosten veranschlagt. Das ist realistisch für endliche Körper, doch grob vereinfacht für $\mathbb{Q}$.)

Die lineare Optimierung zeigt gewisse Ähnlichkeiten zwischen Systemen von Gleichungen und Ungleichungen, allein die Laufzeit ist schwieriger. Schlimmstenfalls ist sie exponentiell: Mit Dantzigs Pivotregel besucht der Simplexalgorithmus alle 2^n Ecken des Klee–Minty–Würfels, siehe `en.wikipedia.org/wiki/Klee-Minty_cube`.

Übung: Für n Variablen und m Bedingungen gibt es $\binom{m+n}{n}$ Tableaux. Die Brute-Force-Methode, alle Basiswechsel durchzuprobieren, ist also höchstens exponentiell, dank der Abschätzung $\binom{2n}{n} < 4^n/\sqrt{\pi n}$.

Laufzeit des Simplexalgorithmus

Neben Dantzigs wurden zahlreiche weitere Pivotstrategien entwickelt. Es gibt daher nicht nur *den* einen Simplexalgorithmus, sondern mehrere.

$$\boxed{\text{Simplexalgorithmus} = \text{Simplexverfahren} + \text{Pivotstrategie}}$$

Zu den meisten Pivotstrategien wurden ebenfalls Beispiele gefunden, die exponentielle Laufzeit erfordern. Diese Fälle treten jedoch in der Praxis selten auf. Deshalb ist das Simplexverfahren sehr erfolgreich, obwohl es exponentiellen Aufwand verursachen kann.

Der Druchbruch hierzu gelang Daniel Spielman und Shang-Hua Teng: *Smoothed analysis of algorithms: Why the simplex algorithm usually takes polynomial time.* Journal of the ACM 51 (2004) 385–463.
Für zufällige Perturbationen ist die erwartete Laufzeit polynomiell!

Anschaulich gesagt: Das Simplexverfahren löst effizient nahezu jedes Problem, zumindest jedoch fast alle nahegelegenen Perturbationen. Das erklärt die empirische Beobachtung und bestärkt das über fünfzig Jahre gewachsene Vertrauen in das Simplexverfahren.

Kapitel G

Soziale Normen und Dilemmata, Koordination und Evolution

Dem Anwenden muss das Erkennen vorausgehen.

Max Planck (1858–1947)

Evolutionary game theory deploys the Darwinian notion that good strategies diffuse across populations of players rather than being learned by rational agents.

Herbert Gintis, *Game Theory Evolving* (2009)

Inhalt dieses Kapitels G

Motivation und Überblick

Im Kapitel E haben wir **strategische Spiele in Normalform** definiert und dazu den zentralen Begriff des Nash–Gleichgewichts eingeführt. In diesem und den folgenden Kapiteln diskutieren wir erste einfache Anwendungen, Verfeinerungen und Erweiterungen dieser Konzepte.

Dazu untersuchen wir diverse Situationen von Konflikt und Kooperation, etwa ökonomische Konkurrenz, mit unseren spieltheoretischen Mitteln. Unsere ersten Modelle sind meist beschämend simpel, doch sie zeigen bereits interessante Phänomene und illustrieren immerhin das Prinzip.

Reale Anwendungen, in denen etwas Wichtiges auf dem Spiel steht, würde man noch wesentlich genauer und aufwändiger untersuchen. Die erste Aufgabe ist dabei immer die Formulierung eines Modells. Die Begriffe und Methoden dazu führe ich hier exemplarisch vor.

In diesem Kapitel geht es zunächst um soziale Dilemmata, in denen individuelle Nutzenmaximierung und gesellschaftliche Moral kollidieren. Im zweiten Teil untersuchen wir evolutionäre Modelle, in denen Spieler bzw. Populationen ihr Spielverhalten über die Zeit schrittweise ändern.

Motivation und Überblick

Die Untersuchung konkreter Beispiele nutzt praktisch und theoretisch: In günstigen Fällen verstehen wir dadurch die betrachtete Anwendung. Meist erkennen wir dabei auch Möglichkeiten und Einschränkungen unseres mathematischen Modells und unserer Methoden.

Daraus ergeben sich Verallgemeinerungen und Verfeinerungen, die wiederum für die Weiterentwicklung der Theorie zuträglich sind. Wie immer gehört die ehrliche Ausführung praktischer Anwendungen untrennbar zusammen mit der sorgfältigen Entwicklung der Theorie.

Dies sind Instanzen des zuvor erklärten Modellierungskreislaufs (A301).

📖 Als Literatur nenne ich drei Klassiker zur evolutionären Spieltheorie:

Robert Axelrod: *The Evolution of Cooperation.* Basic Books 1984, 2006; *The Complexity of Cooperation.* Princeton University Press 1997

Jörgen Weibull: *Evolutionary Game Theory.* MIT Press 1995; auch online unter `www.ifn.se/en/publications/working-papers/1990-1999/347`

Als spielerisch-interaktive Webseite empfehle ich `ncase.me/trust`.

Koordination: links oder rechts?

Das Spiel „Straßenverkehr“

A \ B	links	rechts
links	1, 1	0, 0
rechts	0, 0	1, 1

Warum fährt man auf den britischen Inseln auf der linken Straßenseite, im restlichen Kontinentaleuropa hingegen auf der rechten Straßenseite?

Beides sind gesellschaftliche Konventionen und weitgehend willkürlich. Die getroffene Wahl ist allein durch Tradition begründet. Klar ist jedoch: Jede der beiden Festlegungen ist besser als keine Übereinkunft!

Ebenso: Schreibrichtung, Händeschütteln, Umarmung, etc.
Solcherart soziale Vereinbarungen umgeben uns überall!

Koordination: links oder rechts?

Heutzutage überwiegt weltweit der Rechtsverkehr, und Linksverkehr gilt hauptsächlich in früheren britischen Kolonien. Historisch scheint jedoch der Linksverkehr vorherrschend gewesen zu sein. Erklärungen gründen meist darauf, dass Menschen mehrheitlich Rechtshänder:innen sind, und dies die Normen für den Straßenverkehr irgendwie beeinflusst.

Im Zuge der Französischen Revolution und der Napoleonischen Kriege stellten Frankreich und besiegte Länder Europas auf Rechtsverkehr um. Durch gegenseitige Verträge wurde dies bis 1927 weiter vereinheitlicht. Ausnahmen bildeten einige Nachfolgestaaten Österreich-Ungarns, die bis 1941 auf Rechtsverkehr umstellten, sowie und Schweden bis 1967.

Fun fact: Fußgänger, Radler, Roller, Skater, etc. wenden die Konvention nicht streng an. Das führt manchmal zu Koordinierungsschwierigkeiten.

Fun fact: Das Gegenstück im Schienenverkehr ist die sog. *Fahrordnung*; sie entspricht in vielen Ländern nicht der Ordnung des Straßenverkehrs. Auch beliebige Mischungen verschiedener Konventionen sind denkbar. Einfache und allgemeine Lösungen sind jedoch fehlerresistenter.

Koordination: links oder rechts?

Die meisten Schriftsysteme haben eine bevorzugte Schreibrichtung. Das ist nicht zwingend erforderlich, doch eine Konvention vereinfacht! *Fun fact:* In den ältesten lateinischen Schriften ist die Schreibrichtung noch nicht festgelegt. So ist der *Lapis Niger* aus dem 6. Jh. v. Chr. noch *bustrophedonal*, das heißt wörtlich ‘ochsenwendig’, also ‘hin und her wie ein Ochse beim Pflügen’, mit zeilenweise wechselnder Schreibrichtung.

In Kulturen, in denen sich Menschen zur Begrüßung die Hand reichen, bestimmt ganz genau solch eine soziale Norm die dazu gewählte Hand. Eine Kollision der gleichzeitig (!) ausgeführten Bewegung ist auch hier irritierend, wenn auch viel weniger dramatisch als im Straßenverkehr. Für Kinder ist die Konvention zunächst fremd, dann schnell erlernt.

Hierbei ist die vorherrschende Konvention, die rechte Hand zu geben. Eine Erklärung besagt, dass man durch Händeschütteln früher seine friedlichen Absichten bekundete: man kommt unbewaffnet. Etwa 85% bis 90% der Menschen sind Rechtshänder:innen und würden eine Waffe in der rechten Hand führen. Diese wurde also zur Begrüßungshand.

Koordination: links oder rechts?

Aus Sicht der Spieltheorie wählt eine gesellschaftliche Norm eines von mehreren Nash–Gleichgewichten und legt es als Standard fest. Kein Akteur hat daraufhin einen Anreiz, einseitig davon abzuweichen, im Falle eines strikten Nach–Gleichgewichts sogar nur Nachteile.

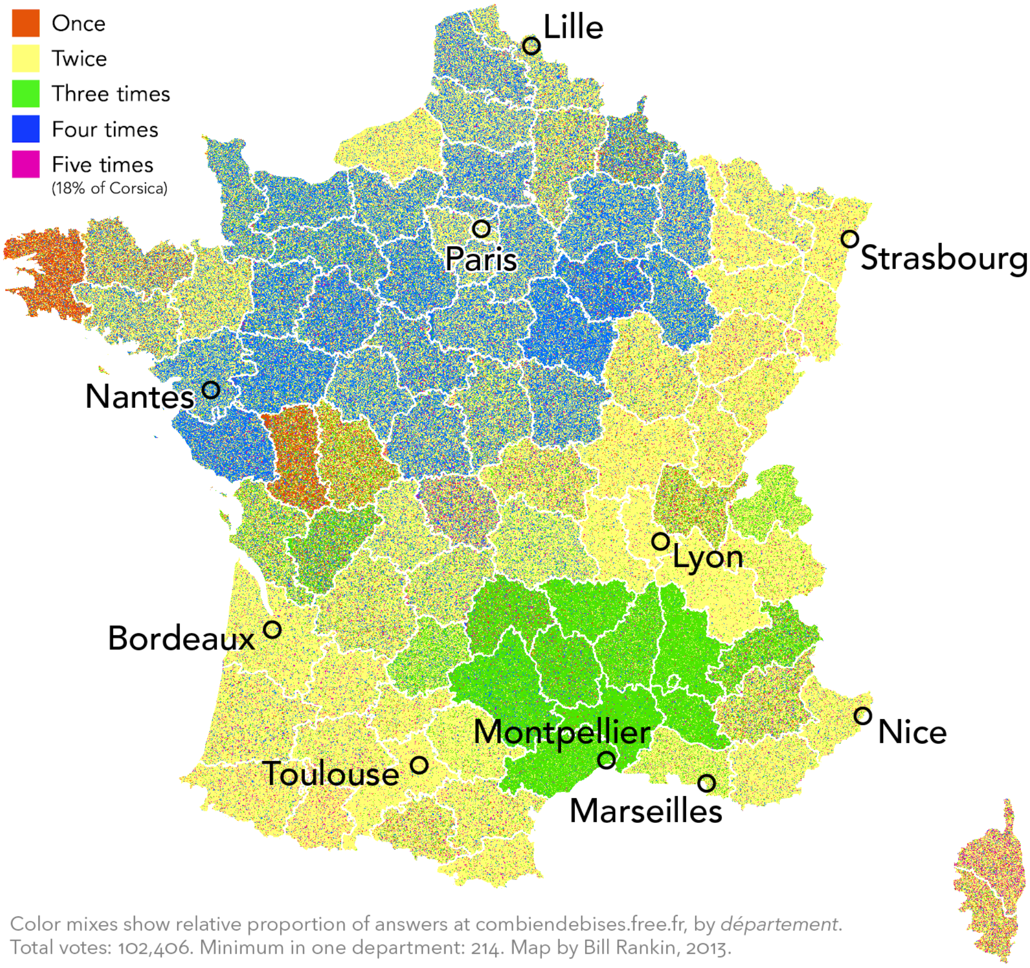
Sobald eine solche Norm in Kraft ist, stabilisiert sie sich von selbst. Extrinsische, übergeordnete Sanktionen sind dazu nicht nötig, da sich jeder Akteur durch Abweichung selbst benachteiligt. Das ist der Zauber von (strikten) Nash–Gleichgewichten.

Abweichungen entstehen höchstens sporadisch durch Fehler: „Mein Rechts oder dein Rechts?“, ebenso „Das andere Links!“ Das erinnert uns daran, dass die Sprache selbst eine Konvention ist, insbesondere auch die willkürliche Zuordnung ihrer Bezeichnungen.

Fun Fact: Einige Menschen haben eine Links-Rechts-Schwäche. Ich kenne jedoch niemanden mit einer Oben-Unten-Schwäche. *Oben* und *unten* sind keine intersubjektiv sozialen Konventionen, sondern hier auf Erden eine objektiv physikalische Wirklichkeit.

Wie viele Küsschen zur Begrüßung? / *Combien de bises?*

G105



Daten der Erhebung von combiendebises.free.fr
www.economist.com/gulliver/2014/10/24/x-xxx-or-xxxxx

Wie viele Küsschen zur Begrüßung? / *Combien de bises?*

G106
Erläuterung

Diese detaillierten Umfragedaten wurden seit 2007 online erhoben unter `combiendebises.free.fr` mit inzwischen über $200\,000$ Stimmen. Es handelt sich um ein schönes Beispiel von **Bürgerwissenschaft** / Citizen Science, `de.wikipedia.org/wiki/Citizen_Science`.

Wendet man sich dabei zuerst nach links oder zuerst nach rechts? Ungefähr eine Zwei-Drittel-Mehrheit dreht sich zuerst nach rechts. Das scheint also nicht so stark normiert, wie zu erwarten wäre. Die Lateralität kann wohl leicht spontan koordiniert werden.

Wenn Sie also im nächsten Semester als Erasmus-Student:in nach Toulouse oder Nantes gehen, dann wissen Sie, welche Konventionen Sie dort erwarten. Aktuell stimmt dies leider nicht mehr, denn unser gesellschaftliches Zusammenleben befindet sich in schnellem Wandel:

Diese Daten wurden lange vor der Covid19-Pandemie erhoben. Derzeit müssen viele traditionelle Rituale der Begrüßung pausieren. Es wird interessant zu sehen, wie diese wiederaufgegriffen werden und sich eventuell mit der Zeit weiterentwickeln und verschieben.

Wie viele Küsschen zur Begrüßung? / *Combien de bises?*

A \ B	1	2	3	4	5
1	1, 1	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0
2	0, 0	1, 1	0, 0	0, 0	0, 0
3	0, 0	0, 0	1, 1	0, 0	0, 0
4	0, 0	0, 0	0, 0	1, 1	0, 0
5	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	1, 1

Dies ist nur eines von vielen spieltheoretischen Modellen zur Erklärung. Hier kommt es uns nur auf die (strikten) Nash–Gleichgewichte an. Die soziale Konvention wählt (willkürlich) eines davon aus.

Wie viele Küsschen zur Begrüßung? / *Combien de bises?*

Dieses übertrieben einfache Modell erklärt die Beobachtung recht gut. Vorsicht: Gemessen / beobachtet / abgestimmt wurde das Verhalten, nicht die zugrundeliegende Gewinnfunktion des gezeigten Modells. Die konkreten Zahlen dieses Bimatrixspiels sind reine Spekulation.

Skurrile regionale Konventionen gibt es häufig, auch in Deutschland. *Anekdote:* An der Uni Stuttgart müssen die Leistungspunkte jedes Moduls durch 3 teilbar sein. Das ist so selbstverständlich, als hätte es Moses vom Berg heruntergebracht, auf der Rückseite der Zehn Gebote.

Das ist zugegeben keine soziale Übereinkunft, sondern wurde verordnet. Dass es eine willkürliche Konvention (zur Vereinfachung?) ist, zeigt ein Blick über den Tellerrand nach Karlsruhe: Dort ist diese Einschränkung unbekannt, und die Bemessung von Leistungspunkten flexibler.

Auch deshalb ist es gut, dass Sie verschiedene Unis und andere Länder kennenlernen. Erasmus und ähnliche Programme unterstützen Sie dazu nach Kräften. Was Sie im Ländle noch für naturgegeben hielten, erweist sich als menschengemacht und willkürlich – und geht auch anders!

Soziale Konventionen und interkulturelle Kompetenz

Auf Deutsch sagen wir sowohl *Händedruck* als auch *Händeschütteln*, auf Französich nur *se serrer la main*, auf Englisch nur *to shake hands*. Übersetzt wird nicht nur sprachlich, sondern immer auch interkulturell.

Soziale Konventionen und interkulturelle Kompetenz

Auf Französisch klingt „secouons-nous les mains“ vollkommen absurd. Das kann die deutsche Übersetzung nicht widergeben.

Auf English hingegen klingt „shake me by the hand“ irre. Auch „Let's squeeze hands“ wäre lustig, läuft hier aber der Handlungslogik zuwider.

Soziale Konventionen und interkulturelle Kompetenz

Learning another language is not only
learning different words for the same things,
but learning another way to think about things.
Flora Lewis (1922–2002)

„Die spinnen, die Römer!“, urteilt Obelix und wiegt sich in der zutiefst gallischen Gewissheit, im Mittelpunkt der Welt zu stehen. Welch Cliché! Ironisch überspitzt zeichnen die Comics stereotype kulturelle Eigenarten, die humorvolle Darstellung fördert Reflektion und Selbst/Erkenntnis.

Die Bildungspläne der Länder formulieren explizit die interkulturelle Kompetenz als eines der Lernziele, insbesondere in den Sprachen, aber auch darüber hinaus im Gesamtkonzept schulischer Bildung. Interkulturelle Erziehung > Lernen > Kompetenz > Kommunikation

Wie beginnt und beendet man einen Brief? eine Email? eine digitale Kurznachricht wie WhatsApp oder ähnliche? Nach Eingewöhnung finden Sie das vielleicht selbstverständlich, doch das ist es ganz und gar nicht, insbesondere in ungewohnten Kontexten und fremden Sprachen!

Soziale Konventionen und interkulturelle Kompetenz

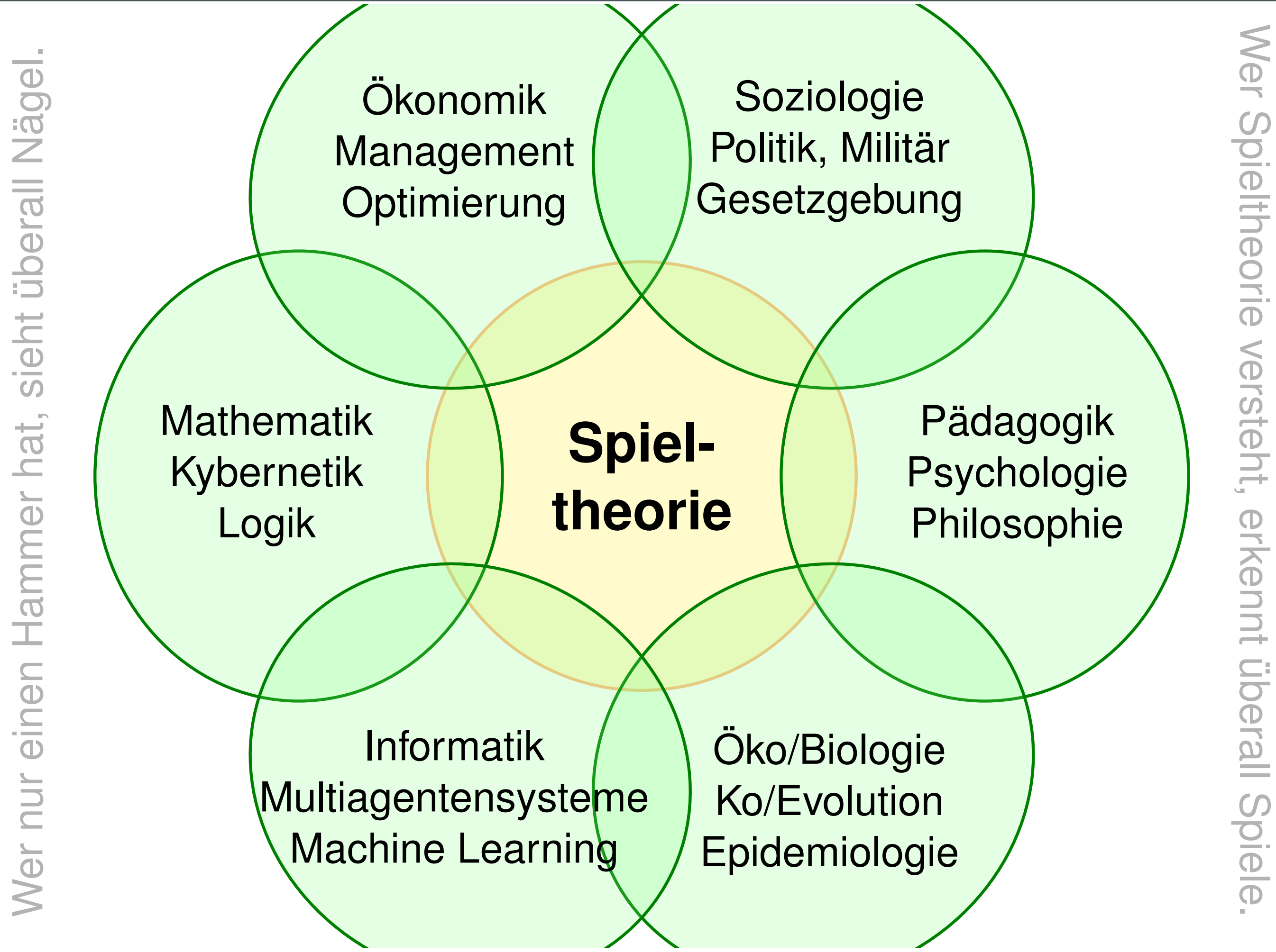
Das Spiel „Wie geht’s?“

A \ B	kurz	lang
kurz	A: 1, B: 1	A: 0, B: 0
lang	A: 0, B: 0	A: 1, B: 1

Die alltägliche Begrüßung kennt eine weitere erstaunliche Konvention:
Deutsch: „Wie geht’s?“ – „Gut, danke. Und selbst?“ – „Gut, muss ja.“
Englisch: „How are you?“ – „Fine, thanks. And you?“ – „I’m fine.“
Französisch: „Ça va?“ – „Oui, ça va. Et toi?“ – „Ça va, merci.“

Die konventionelle Höflichkeit sieht vor, sich nach dem Befinden des Gegenübers zu erkundigen, doch im Gegenzug nicht unangemessen ausführlich auf die offene Frage einzugehen. Selbst wo mehr zu sagen wäre, wird das Protokoll dazu nicht genutzt. Es ginge auch anders.

Wer interessiert sich für Spieltheorie?



Wer interessiert sich für Spieltheorie?

Diese Graphik macht vollmundige Ankündigungen und große Worte: Spieltheorie steht prominent in der Mitte und kommuniziert mit allem! Das ist nicht nur so dahergesagt, sondern soll auch erfüllt werden. Die versprochenen Querbezüge will ich nach und nach einlösen.

Auf der linken Seite dieser Graphik kennen wir bereits erste Beispiele, etwa aus Ökonomik, Mathematik, Informatik und ihren Teilgebieten. In diesem und im nächsten Kapitel möchte ich mir etwas Zeit nehmen und einige Illustrationen auf der rechten Seite wenigstens skizzieren.

Zielkonflikte: Nash oder Pareto?

Das Gefangenendilemma

Clyde Bonnie	schweigen	gestehen
schweigen	-1 -1	0 -5
gestehen	-5 0	-4 -4

Dieses Spiel ist berühmt für seinen vermeintlich paradoxen Ausgang.
Es illustriert das Grundproblem „Kooperation versus Egoismus“.
Nash–Gleichgewichte können das Pareto–Optimum verfehlen.
Gut gewählte Mechanismen versuchen, beides zu versöhnen.

Dieses Beispiel reduziert den Konflikt auf das Wesentliche.
In vielen realen Situationen steckt eine Variante davon!

Zielkonflikte: Nash oder Pareto?

Als erste Illustration nenne ich Beobachtungen, die zunächst paradox erscheinen: Was nützen dem Pfau seine Federn? Kann ein unnützer Doktortitel dennoch nützlich sein? Auf eine naiv-pessimistische Weise betrachtet handelt es sich um Inkarnationen des Gefangenendilemmas.

Besonders eindrücklich ist die Beobachtung bei Pfauen und hat Charles Darwin lange umgetrieben. Seine Erklärung ist die **sexuelle Selektion!** Hähne und Hennen befinden sich in einem gegenseitigen Dilemma. Keine:r kann einseitig das Verhalten ändern, denn dies wäre nachteilig.

Bei der jährlichen Pfauen-Konferenz zu Tolerenz und Antidiskriminierung beschließen alle einstimmig, Hähne nicht auf ihr Äußeres zu reduzieren. Das nützt herzlich wenig: Zur nächsten Paarungszeit sind alle guten Vorsätze schnell vergessen und Hennen denken nur an das Eine.

Pfauen handeln nicht bewusst-planend, sondern genetisch festgelegt. Meine verzerrte Darstellung dient nur der dramatischen Zuspitzung. Zum lehrreichen Kontrast schlage ich Bewerbung und Doktortitel vor. Die Struktur ist genau dieselbe. Unser Lachen verstummt.

Was nützen dem Pfau seine Federn?

Pfauen-Männchen haben ein prachtvolles Gefieder. Für das Überleben ist es leider hinderlich: Tarnung, Flucht, Energie, ... Warum lohnen sich dennoch lange Federn? Wozu dienen sie? Angenommen, es gebe „fitte" und „unfitte" Pfauen-Männchen. Letztere werden öfter von Raubtieren gefressen etc. Sowohl fitte als auch unfitte können kurze oder lange Federn haben. Die mit langen Federn werden aufgrund der genannten Nachteile jedenfalls öfter gefressen.

Eine Population von Pfauen-Männchen könnte etwa so aussehen:

Pfauen	fit	unfit
kurze Federn	40%	20%
lange Federn	30%	10%

Das Pfauen-Weibchen sieht nicht die Fitness, sondern nur die Federn!

Aufgabe: Welche Strategie der Partnerwahl ist für sie vorteilhaft?

- Federlänge ignorieren: Trefferquote $70 : 30$ (möglich)
- Kurze Federn bevorzugen: Trefferquote $40 : 20$ (schlechter)
- Lange Federn bevorzugen: Trefferquote $30 : 10$ (besser!)

☺ Trotz aller Nachteile zahlen sich lange Federn doch aus!

Visuelles Ornament und sexuelle Selektion

Das auffällige Gefieder der Pfauen-Männchen wird als *visuelles Ornament* bezeichnet. Die lange Schleppe ist zwar hinderlich und vermindert das Flugvermögen, paradoxerweise kann es dennoch ein Indikator für genetische Fitness sein und Pfauen-Weibchen als Indiz für gesunden Nachwuchs dienen. (Siehe unser Zahlenbeispiel.) Wäre es nicht effizienter, Pfauen würden diesen Aufwand sparen und die Energie in bessere Überlebensstrategien stecken? Auf den ersten Blick besehen ja. Aber für ein Weibchen gibt es keine bessere Wahl: Es sieht nicht die tatsächliche Fitness, sondern nur das *Signal* der Federn. Auf Grundlage dieser unvollständigen Information muss es sich für die langen Federn entscheiden, selbst wenn das Überlebensnachteile mit sich bringt, auch für seinen eigenen Nachwuchs! Damit bleibt auch den Männchen keine Wahl, lange Federn werden zum Must-Have. Diese *sexuelle Selektion* ist der Schlussstein in Darwins Evolutionstheorie.

Auch Menschen ist dieses Phänomen vertraut: Manche Männer beeindrucken Frauen, indem sie Geld verschwenden oder andere verrückte Dinge tun. Wäre dieses Verhalten insgesamt nachteilig, so würde man vermuten, dass es auf lange Sicht ausstirbt. Das ist jedoch nicht der Fall, da Frauen dieses Verhalten als Indikator für (gesellschaftlichen) Erfolg interpretieren können und eventuell bei der Partnerwahl belohnen. (All das funktioniert selbstverständlich auch umgekehrt...)

Dieses Phänomen wird *Handicap-Prinzip* genannt. Beispiele gibt es viele: Produktwerbung verschwendet Geld, wird aber vom Käufer belohnt. Manch akademischer Titel ist scheinbar Zeitverschwendung, wird aber vom Arbeitgeber honoriert. Auch Ihr Studium ist nur teilweise für Ihren späteren Beruf relevant, und dennoch wird diese Anstrengung meist belohnt. Zum Beispiel gelten Leistungen in Mathematik als zuverlässiger Indikator für intellektuelle Leistungsfähigkeit. Dazu diskutieren wir den Arbeitsmarkt, extrem vereinfacht, in folgendem Gedankenexperiment.

Kann ein unnützer Doktortitel doch nützlich sein?

Eine Personalchefin sucht für eine Stelle einen Ingenieur (m/w/d).
Aus Erfahrung schätzt sie die allgemeine Bewerberlage wie folgt:

Bewerber	geeignet	ungeeignet
Diplom/Master	50%	25%
Promotion	20%	5%

Als individuelle Information hat sie zunächst nur den *Abschluss* laut Bewerbungsunterlagen.
Die eigentlich interessante Zielgröße der *tatsächlichen Eignung* kennt sie hingegen nicht.
Eine Promotion kostet Zeit und Mühe, bringt aber für *diese* Stelle keinen direkten Nutzen.

Aufgabe: Welche Strategie ist bei ihrer Auswahl vorteilhaft?

- Abschluss ignorieren: Trefferquote $70 : 30$ (möglich)
- Master einstellen: Trefferquote $50 : 25$ (schlechter)
- Doktor einstellen: Trefferquote $20 : 5$ (besser!)

☺ Trotz aller Nachteile kann sich eine Promotion also auszahlen
… selbst wenn sie für die eigentliche Tätigkeit nicht relevant ist!

⚠ Ineffizienz ist der Preis für unvollständige Information.

Bedingte Wkt: Vorurteil oder Gerechtigkeit?

Wir untersuchen hier zwei simple, aber frappierende Beispiele: Federn und Doktortitel.
Beide sind durchaus realistisch und handfeste Illustrationen für das Konzept der *bedingten Wahrscheinlichkeit*: Diese ist nicht nur eine schöne Theorie, sondern überall tägliche Praxis.

Die Argumente in unserer fiktiven Bewerbungssituation mögen manche für ungerecht halten.
In der Tat basieren Sie auf *Vorurteilen* der Arbeitgeberin – ein eher negativ besetzter Ausdruck, aber inhaltlich bedeutet es dasselbe wie bedingte Wahrscheinlichkeit: Sie nutzt ihre Erfahrung.
Unter den gegebenen spärlichen Informationen ist das Vorurteil nützlicher als gar kein Urteil.

Das Grundproblem: Die primäre Zielgröße „Eignung“ ist nicht direkt zugänglich.
Der sekundäre Faktor „Ornament“ ist eigentlich unwichtig, dafür aber leicht sichtbar.
In Ermangelung primärer Information muss man sich mit sekundärer Information begnügen.
Diese erhält dadurch eine größere Bedeutung als sie eigentlich haben sollte, und das wird als ineffizient oder ungerecht empfunden. Das ist der Preis für unvollständige Information!

Zur Beruhigung der Gemüter: Nichts hält die Arbeitgeberseite davon ab, über die erste grobe Vorinformation hinaus genauere Information zu gewinnen, zum Beispiel durch Gespräche, Tests, Assessment oder eine Probezeit. Genau das wird in der Praxis auch erfolgreich genutzt. Das ist der Vorteil, wenn man Information nicht nur *passiv* beobachtet, sondern *aktiv* herstellen kann.

Schließlich zur Ehrenrettung der Promotion, auch aus persönlicher Erfahrung: Viele Studierende empfinden große Begeisterung für ihr Fach. Dies kann sogar dazu führen, dass sie aus ehrlichem intrinsischem Interesse einer Frage auf den Grund gehen wollen und darüber sogar promovieren. Das wird durch die obigen, allzu kühl berechnenden Argumente nicht in Zweifel gezogen!

Was bedeuten „Moral“ und „Ethik“?

Eine **Moral** ist (1) ein Normensystem für das rechte Handeln von (2) vernunftbegabten Wesen mit (3) Anspruch auf Allgemeingültigkeit. Hierzu ist die **Ethik** die wissenschaftliche Beschäftigung mit der Moral.

Praxis, konkret	Theorie, abstrakt
Performanz	Kompetenz
(recht) erziehen	Pädagogik
(gut) unterrichten	Didaktik
(sozial) interagieren	Soziologie
(richtig) formulieren	Grammatik
(richtig) rechnen	Mathematik
(gut) wirtschaften	Ökonomik
(moralisch) handeln	Ethik

The aim of theory really is, to a great extent, that of systematically organizing past experience in such a way that the next generation [. . .] will be able to absorb the essential aspects in as painless a way as possible.
(Michael F. Atiyah, 1929–2019, *How research is carried out*)

Was bedeuten „Moral“ und „Ethik“?

„Moralisch“ bedeutet demnach so viel wie „sittlich“ oder „anständig“, jeweils relativ zu der zugrundeliegenden gesellschaftlichen Norm, und „ethisch“ bedeutet so viel wie „sittenwissenschaftlich“.

Moralen sind Normensysteme, Ethik ist die Wissenschaft hiervon, griech. ἔθος [éthos]: Charakter, Wesen, Eigenheit, Sitte, Gewohnheit.

Wir sehen hier die allgegenwärtige Dualität von Praxis und Theorie. Beide ergänzen sich und arbeiten zusammen wie linke und rechte Hand. πρᾶγμα [pragma], πρᾶξις [praxis]: Tat, Handlung, Verfahren, Umtriebe. θεωρίᾱ [theoria]: Betrachtung, Überlegung, Untersuchung, Erkenntnis.

Meine Liste ist eine praktische Sammlung von Theorien: Theorienpraxis. Ich denke nun über Theorien und ihre Analogien nach: Theorientheorie. Ich erinnere an einen frechen Sinnspruch zu Praxis – Theorie – Lehre:

Wer etwas kann, der tut es.
Wer es nicht kann, der erforscht es.
Wer auch das nicht kann, der lehrt es.
(anonyme Weisheit, eigene Interpretation)

Was bedeuten „Moral“ und „Ethik“?

Es ist sinnvoll, den Gegenstand und die Untersuchung desselben zu unterscheiden, und genau dazu verhelfen uns präzise Bezeichnungen. In der Umgangssprache geraten diese Begriffspaare oft durcheinander. Hier ein paar einfache doch eindrückliche Beispiele zur Illustration:

Ein moralisches Problem haben Sie, wenn Sie sich um die Richtigkeit Ihres Handelns sorgen. Ethische Probleme hingegen beschäftigen Sie, wenn Sie z.B. versuchen, Kant oder andere Moralphilosophen zu lesen.

Sie haben ein psychisches Problem, wenn Sie unter einer Phobie leiden. Hingegen untersuchen Sie ein psychologisches Problem, wenn Sie sich fragen, wie Phobien mit Kindheitserfahrungen zusammenhängen.

Sie haben ein soziales Problem, wenn Sie sich ausgegrenzt fühlen. Hingegen studieren Sie ein soziologisches Problem, wenn Sie versuchen, Ausgrenzung gesellschaftswissenschaftlich zu erklären.

Sie haben ein rechnerisches Problem, wenn Ihre konkret vorliegende Rechnung nicht aufgeht. Hingegen haben Sie ein mathematisches Problem, wenn Sie Mathematik und ihre Anwendungen erforschen.

Was bedeuten „Moral“ und „Ethik“?

Die Moral, also rechtes Handeln, basiert auf einem Menschenbild.

Vertrauen ist gut, Kontrolle ist besser.
Wladimir Iljitsch Lenin (1870–1924)

Engagement, Kooperation, Ehrlichkeit, Sorgfalt, etc.
erfordern Mut und müssen belohnt werden.

Hier hilft individuelle oder gesellschaftliche Erfahrung.

An expert is a person who has made all the mistakes
that can be made in a very narrow field.
Niels Bohr (1885–1962)

An expert is someone who knows some of the worst mistakes
that can be made in his subject, and how to avoid them.
Werner Heisenberg (1901–1976)

Wie verhalten sich Ratio und Moral?

⚠ Rationales / ökonomisches / nutzenmaximierendes Verhalten kann moralisch oder unmoralisch sein, das hängt von den (Spiel-)Regeln ab und von den (gesellschaftlich vereinbarten) moralischen Normen.

Handle nur nach derjenigen Maxime, durch die du zugleich wollen kannst, dass sie ein allgemeines Gesetz werde.
Immanuel Kant (1724-1804), *Kritik der praktischen Vernunft* (1788)

Erst kommt das Fressen, dann die Moral.
Bertolt Brecht (1898-1956), *Dreigroschenoper* (1928)

☺ Gleichsinnige, günstige Ausrichtung [*alignment*]: Ratio $=$ Moral

☹ Gegensinnige Ausrichtung [*misalignment*, Dilemma]: Ratio $\neq$ Moral

⚠ Unsere Gesellschaft braucht Nachhaltigkeit und Kooperation. Wir wollen und müssen solche Dilemmata erkennen und lösen.

Mechanismendesign: Individuelles Verhalten können wir nicht ändern, aber wir können versuchen, gute (Spiel-)Regeln zu implementieren.

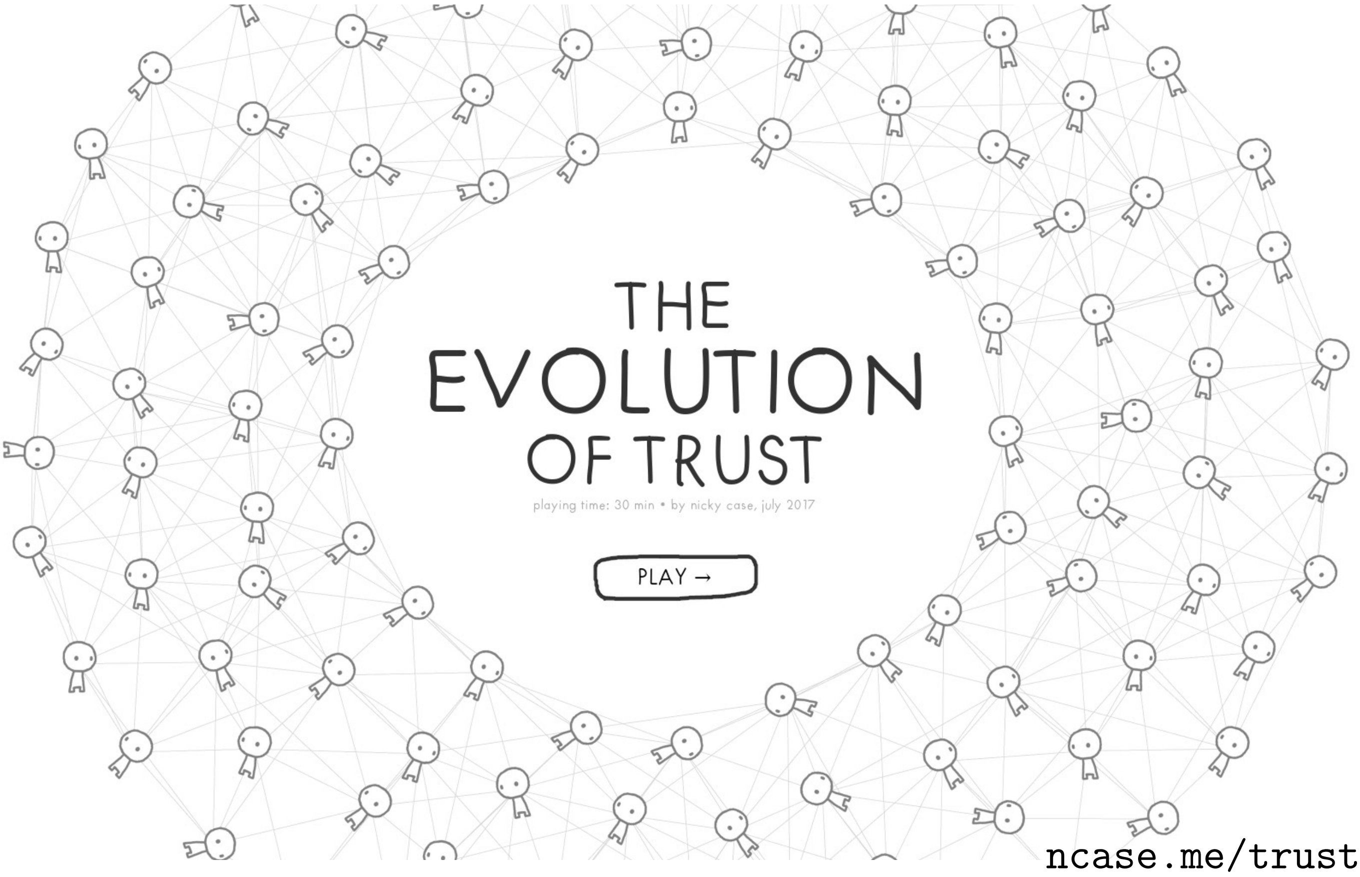
Wie verhalten sich Ratio und Moral?

Wie können wir soziale Dilemmata erkennen und eventuell auflösen? Zunächst einmal müssen wir Spiele verstehen und Muster erkennen: Die Spielregeln sind vorgegeben, welches Verhalten folgt daraus? Ist dieses Verhalten gesellschaftlich günstig / erwünscht / moralisch?

Sodann wollen wir geeignete Mechanismen / Spielregeln konstruieren. Das klingt zunächst abstrakt, ist aber absolut konkret. Wir tun es täglich: Wenn wir Prüfungen organisieren, wollen wir Ehrlichkeit belohnen und Betrug bestrafen. Ja, wir müssen dies geradezu, denn alles andere wäre naiv und bald zum Scheitern verurteilt. Das gilt allgemein, nicht nur für Prüfungsordnungen, sondern für alle Gesetze, Kontrollen, Anreize, etc.

Diese Überlegungen führen uns von simplen Spielen zu komplexeren Konflikten, von einfachen Modellen zu gesellschaftlichem Verhalten. Daher betone ich hier das Grundprinzip des Mechanismendesign: Individuelles Verhalten können wir nicht direkt ändern oder vorschreiben, aber wir können versuchen, gute (Spiel-)Regeln zu implementieren, die das gewünschte Verhalten ermöglichen, nicht hindern, sondern fördern.

Wie verhalten sich Ratio und Moral?



Wie verhalten sich Ratio und Moral?

The Evolution of Trust bietet hierzu eine wunderbare Illustration.
Was ich Ihnen hier erzähle, können Sie dort spielerisch ausprobieren.

Es verbindet wunderschön die beiden Themen dieses Kapitels:
soziale Dilemmata und die Evolution gesellschaftlichen Verhaltens.

Das Spiel basiert auf Robert Axelrods berühmten Büchern zum Thema:
The Evolution of Cooperation (Basic Books 1984, revised 2006) und
The Complexity of Cooperation (Princeton University Press 1997).

Untersucht wird die mögliche Kooperation im **Gefangenendilemma**.
Bei einmaligem Spiel ist hier *rational* keine Kooperation möglich.
Bei wiederholtem Spiel jedoch kann sich Kooperation lohnen.

Ob sich Kooperationsbereitschaft wirklich auszahlt und durchsetzt,
hängt vom gesellschaftlichen Kontext ab, und dieser entwickelt sich.
Daher der Titel dieser lehrreichen Simulation: *The Evolution of Trust*.

Wir werden die Frage in Kapitel K zu **wiederholten Spielen** erneut
aufgreifen und mit verfeinerten Werkzeugen genauer untersuchen.

Das Restaurant-Paradox

Aufgabe: (0) Ein Ensemble von 20 Personen besucht ein Restaurant. Jede darf wählen: ein gutes Menu für 30€ oder ein exzellentes für 50€. Jede zahlt ihre eigene Rechnung und denkt: „10€ mehr wäre es mir wert, aber nicht 20€.“ Daher entscheidet sie sich für das Menu zu 30€.

(1) Das Ensemble beschließt *vor* dem Restaurant, eine gemeinsame Rechnung zu verlangen und alles durch 20 zu teilen. Was passiert?

Lösung: (1) Jede einzelne Person kostet ihr Upgrade nur noch 1€. Sie wählt also für sich das teurere Menu. Am Ende zahlt jede 50€.

Das Ergebnis ist anschaulich klar. Wir üben nochmal den Formalismus und all unsere Begriffe an diesem schönen übersichtlichen Beispiel.

Bistromathics: Numbers written on restaurant checks within the confines of restaurants do not follow the same mathematical laws as numbers written on any other pieces of paper in any other parts of the Universe.
Douglas Adams (1952–2001), *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*

Das Restaurant-Paradox

Aufgabe: Formulieren Sie explizit beide Spiele $u, u' : S \to \mathbb{R}^{20}$. Finden Sie alle Gleichgewichte, Dominanzen und Symmetrien.

Lösung: (0) Die Spielermenge ist $I = \{1, 2, \dots, 20\}$. Jeder Spieler $i \in I$ hat die Strategiemenge $S_i = \{0 = \text{gut}, 1 = \text{exzellent}\}$, gemeinsam also $S = \prod_{i \in I} S_i = \{0, 1\}^I$. Die Nutzenfunktion ist laut Aufgabenstellung

$$u_i \,:\, S \to \mathbb{R} \,:\, s \mapsto 10 s_i - 20 s_i = -10 s_i.$$

Für jeden Spieler ist die Strategie 0 strikt dominant. Somit ist $s = (0, 0, \dots, 0)$ das einzige Nash–Gleichgewicht (und zudem strikt).

(1) Im zweiten Fall kommt es zur Kopplung durch die Nutzenfunktion

$$u'_i \,:\, S \to \mathbb{R} \,:\, s \mapsto 10 s_i - \tfrac{1}{20} \sum_{j=1}^{20} 20 s_j = 10 s_i - \sum_{j=1}^{20} s_j.$$

Für jeden Spieler ist die Strategie 1 strikt dominant. Somit ist $s = (1, 1, \dots, 1)$ das einzige Nash–Gleichgewicht (und zudem strikt).

Beide Spiele sind symmetrisch, also $\mathrm{Sym}(u) = \mathrm{Sym}(u') = \mathrm{Sym}(I)$. Das zweite ähnelt dem **Gefangenendilemma**, hier für n Spieler.

Soziales Dilemma

Ein **soziales Dilemma** liegt vor, wenn individuell rationales Verhalten ein suboptimales / ineffizientes Gesamtergebnis erzeugt, also die Akteure insgesamt schlechter dastehen als durch Absprache möglich wäre, etwa durch sozial kontrollierte Übereinkunft oder einen einklagbaren Vertrag.

Häufig ist ein **Vertrag** zu aufwändig oder schlicht gänzlich unmöglich. Zudem müssten Verstöße kontrolliert und sanktioniert werden können. Auch das liegt oft außerhalb der Reichweite der einzelnen Akteure; hierzu wird eine übergeordnete (z.B. staatliche) Struktur benötigt.

Solidarität versus Unvernunft. Gegenseitige Hilfe ist nicht nur eine urmenschliche Regung, sondern kann durchaus individuell rational sein, zum eigenen Vorteil, etwa bei Versicherungen oder Katastrophenhilfe. Meist geht dies über die spontane Hilfe im konkreten Einzelfall hinaus, dazu soll sie als verlässliche, allgemeine Zusicherung formuliert werden.

Bei **Fehlkonstruktion** kann Solidarität jedoch falsche Anreize setzen, im Extremfall fördert sie (global gesehen) unvernünftiges Verhalten: Tendenz zu unnötigen Risiken oder achtloser Verschwendung.

Soziales Dilemma

Der schottische Ökonom **Adam Smith** (1723–1790) prägte in seinem Hauptwerk *Der Wohlstand der Nationen* (1776) die vielzitierte Idee der „unsichtbaren Hand des Marktes“: Sie sorge dafür, so seine Hoffnung, dass individueller Egoismus automatisch zu kollektiver Wohlfahrt führe.

Bei einem **sozialen Dilemma** jedoch wirkt Egoismus genau umgekehrt: Individuell rationales Verhalten führt für alle zu einer Verschlechterung. Das widerlegt allzu naive Hoffnungen oder kühne Verallgemeinerungen: Die „unsichtbare Hand“ mag manchmal wirken, aber keineswegs immer.

Soziologen sprechen von **sozialen Fallen** oder **paradoxen Effekten**: Individuell rationales Verhalten kann zu irrationalen Ergebnissen führen. Naive Analysen verfallen häufig dem Irrtum, unvernünftige Ergebnisse auf unvernünftiges Handeln zurückzuführen. Das Gegenteil ist der Fall.

Das Ziel des **Mechanismendesign** (engl. *mechanism design*) ist die Schaffung eines Rahmens, der das gewünschte Verhalten ermöglicht. Die invidivuelle Entscheidungsfreiheit kann / soll / darf dabei nicht direkt eingeschränkt werden, allein der gemeinsame Rahmen wird gestaltet.

Aufgabe: Nennen, formalisieren und analysieren Sie weitere Beispiele, die ähnlich strukturiert sind und zu sozialen Dilemmata führen können: (1) zunächst auf lokaler Ebene, etwa in einer Wohngemeinschaft, (2) auf nationaler bzw. europäischer Ebene, (3) schließlich global. Welche Mechanismen wären jeweils denkbar, hilfreich, praktikabel? Das führt schnell zu aktuellen und brisanten politischen Fragen!

Skizze: Hier eine Auswahl möglicher Beispiele, die Liste ist endlos.

(1) Sollte eine WG einen gemeinsamen Getränkekühlschrank haben? Ist die WG-Regel „Jeder spült den Abwasch nach Bedarf“ sinnvoll? Wie bezahlt die WG Strom, Wasser, etc. bei gemeinsamem Zähler? Sollte der öffentliche Personennahverkehr (ÖPNV) gratis sein?

⚠ Solche Fragen werden meist nur qualitiativ-vage diskutiert. Wenn Sie dies genauer ausführen wollen, quantitativ als mathematisches Modell, so müssen Sie zuerst die zu Grunde gelegte Nutzenfunktion klären. Beim ÖPNV können zwar höhere Kosten entstehen, doch dafür die Umwelt geschont werden. Die genaue Zielfunktion ist entscheidend!

(2) Sollte das Studium (vollkommen oder weitgehend) gratis sein? Sollten wir unsere Finanzämter mit mehr Personal ausstatten? Wem nützt eine private Kranken- oder eine Bürgerversicherung? Schafft die Währungsunion Anreize zu achtloser Haushaltsführung? Gilt dies ebenso für den innerdeutschen Länderfinanzausgleich?

(3) Wie können wir den menschengemachten Klimawandel bremsen? Wie kann bzw. sollte Emissionsrechtehandel institutionalisiert werden? Wie können wir Rodung und Abholzung der Urwälder verhindern? Wie können wir die Überfischung der Weltmeere verhindern? Wie können wir die Ressourcen der Menschheit schützen?

⚠ Damit zielen wir auf aktuelle, zentrale Probleme der Menschheit. Eine mathematische Analyse scheint möglich, etwa durch Entwicklung geeigneter Mechanismen, eine praktikable Lösung ist hingegen schwer. Es genügt leider nicht, eine vernünftige Lösung auszuklügeln, sie muss auch akzeptiert und umgesetzt werden. Gute Ideen scheitern leider oft. Das von allen gemeinsam gewünschte Ziel wird dem Egoismus geopfert.

Die Tragik des Gemeinguts / *tragedy of the commons*

Nach obigem Muster funktionieren viele soziale **Konfliktsituationen** wie Schwarzfahren, Versicherungs-/Sozialbetrug, Steuerhinterziehung.

Der individuelle Nutzen ist klein, der allgemeine Schaden ist groß, doch durch die große Zahl der Betroffenen wird der Schaden verteilt und dem einzelnen nur zu einem kleinen Bruchteil in Rechnung gestellt.

Das zynische Motto: **Gewinne privatisieren, Verluste sozialisieren.** Das ist insbesondere bei Bankenkrisen und -rettungen hochaktuell. Auch die wiederkehrenden Eurokrisen folgen einer ähnlichen Struktur.

Die **Politik der hohen Schornsteine** verteilt Abgase möglichst weit, die Emissionen insgesamt werden jedoch nicht reduziert, im Gegenteil! Jeder Akteur zielt nicht auf das Gesamtergebnis, sondern seinen Vorteil.

Dagegen scheint kein Kraut gewachsen, oft versagen die Mechanismen der sozialen Kontrolle, Religion, Moral, Ethik. Genau hierzu formulierte Immanuel Kant in seiner Ethik den **kategorischen Imperativ**:
„Handle nur nach derjenigen Maxime, durch die du zugleich wollen kannst, dass sie ein allgemeines Gesetz werde.“

Die Tragik des Gemeinguts / *tragedy of the commons*

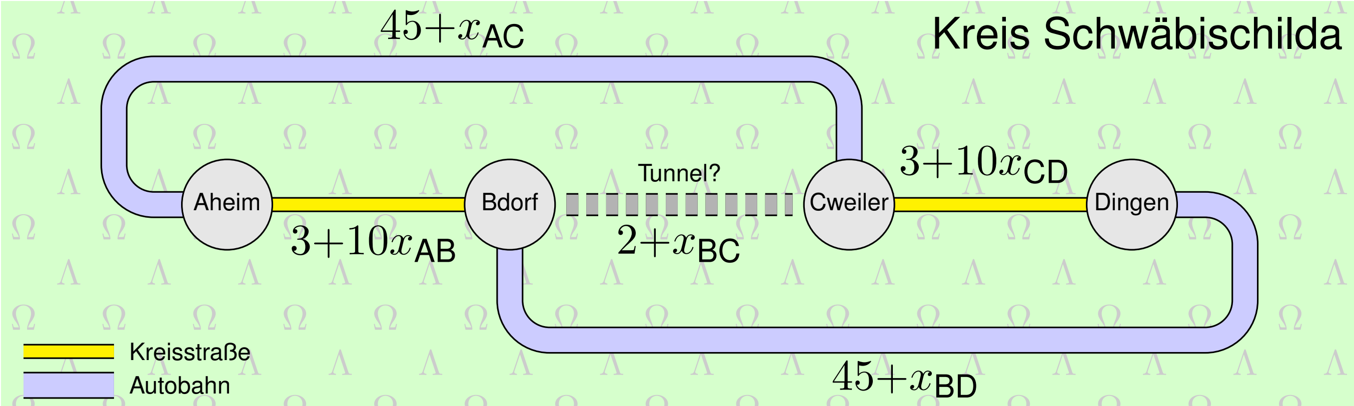
Das Problem heißt **Tragik der Allmende** [*tragedy of the commons*]. Eine *Allmende* ist gemeinschaftlich genutztes Eigentum, zum Beispiel landwirtschaftliche Nutzfläche oder Weidefläche. Allmenden sind heute noch beispielsweise im Schwarzwald und im Alpenraum verbreitet.

Commoners sind Bauern oder Hirten, die gemeinsam Kroneigentum als Allmende bewirtschaften. Der Begriff *tragedy of the commons* wurde 1833 geprägt vom Ökonomen William Forster Lloyd (1794–1852) und 1968 vom Ökologen Garrett Hardin (1915–2003) in *Science* ausgeführt.

Akute Beispiele für die **Ausbeutung natürlicher Ressourcen** sind: Überfischung der Weltmeere, Raubbau an Regenwäldern, Plünderung von Wildtierbeständen, Verschmutzung der Atmosphäre, anthropogene Klimaveränderung. Gemeines Muster: Individueller kurzfristiger Vorteil (Gier) schlägt gemeinsamen langfristigen Nutzen (Nachhaltigkeit).

Die **Spieltheorie** kann solche Mechanismen zunächst nur *erklären*, immerhin. Voraussetzung ist eine ehrliche, kritische, detaillierte Analyse. Die Menschheit wird beweisen müssen, ob sie diesen unvermeidlichen Konflikten gewachsen ist und rechtzeitig wirksame *Lösungen* findet.

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess



Täglich pendeln 6000 Autofahrer von Aheim nach Dingen, entweder über Bdorf (ABD) oder über Cweiler (ACD). Angegeben sind die Fahrzeiten in Minuten, wobei $x_{ij} \in [0, 6]$ jeweils die Autozahl in Tausend ist. **Aufgabe:**

(0) Erklären Sie dies explizit als strategisches Spiel mit 6000 Spielern.
(1) Finden Sie alle Gleichgewichte: Welcher Verkehrsfluss stellt sich ein?
Lösung: Aufteilung $3000 : 3000$, Fahrzeit jeweils 81 Minuten.

(2) Zur Verkürzung der Fahrzeit plant der Landkreis einen Autobahntunnel von Bdorf nach Cweiler. Hilft das oder nicht? Rechnen Sie es aus!
Lösung: Aufteilung $2000 : 2000 : 2000$, Fahrzeit jeweils 90 Minuten!

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

Oft hört man pauschal: „Mehr Straßen garantieren schneller ankommen.“ Das kann helfen, aber keineswegs immer: „Zusätzliche Straßen können Staus verstärken.“ Auch das hört man so pauschal. Schauen wir hin!

Unser Beispiel ist zugegeben konstruiert, dafür ist es besonders einfach. Es soll zunächst illustrieren, dass das Phänomen wirklich möglich ist. Echte Problemfälle muss man wesentlich genauer untersuchen.

Die Zahlen sind so angelegt, dass wir die Lösungen leicht überblicken: In beiden Fällen teilen sich die Verkehrsströme jeweils in gleiche Teile.

Unglaublich: Der Tunnel erhöht die Fahrzeit von 81 auf 90 Minuten! Ohne Absprache gibt es kein Zurück: Nur wenn sich genügend Fahrer für die beiden alten Strecken ABD und ACD entschließen, verringert sich der Stau auf den Landstraßen, und alle sind insgesamt schneller.

Könnten die Pendler nicht ihren alten Strecken folgen und den Tunnel ignorieren? Sicher, doch jeden lockt die Abkürzung mit 68 Minuten. Das Verrückte ist: Jeder einzelne handelt rational! So stellt sich ein neues Gleichgewicht ein, das paradoxerweise für alle schlechter ist.

Lösung: (0) Spielermenge sei $I = \{1, 2, \dots, 6000\}$. Die Strategiemenge für Fahrer $i \in I$ ist $S_i = \{\text{ABD}, \text{ACD}\}$ bzw. mit Tunnel $S'_i = S_i \cup \{\text{ABCD}\}$. Die Verkehrszählung (in Tsd) ergibt $x_{\text{AC}}, x_{\text{BD}}, x_{\text{BC}}, x_{\text{AB}}, x_{\text{CD}} : S \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
x_{\text{AC}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i = \text{ACD} \,\} &&= x_1\\
x_{\text{BD}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i = \text{ABD} \,\} &&= x_2\\
x_{\text{BC}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i = \text{ABCD} \,\} &&= x_3\\
x_{\text{AB}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i \in \{\text{ABD}, \text{ABCD}\} \,\} &&= x_2 + x_3\\
x_{\text{CD}}(s) &:= 10^{-3} \cdot \sharp\{\, i \in I \mid s_i \in \{\text{ACD}, \text{ABCD}\} \,\} &&= x_1 + x_3
\end{aligned}$$

Hieraus berechnen wie die Fahrzeiten, und diese sind zu minimieren:

$$-u_i : S \to \mathbb{R} : s \mapsto \begin{cases} 48 + x_{\text{AC}}(s) + 10x_{\text{CD}}(s) & \text{für } s_i = \text{ACD},\\ 48 + 10x_{\text{AB}}(s) + x_{\text{BD}}(s) & \text{für } s_i = \text{ABD},\\ 8 + 10x_{\text{AB}}(s) + x_{\text{BC}}(s) + 10x_{\text{CD}}(s) & \text{für } s_i = \text{ABCD}. \end{cases}$$

☹ Die Strategiemenge $S = S_1 \times \dots \times S_{6000}$ ist astronomisch groß!
☺ Das Spiel u ist spieler-symmetrisch: $\operatorname{Sym}(u) = \operatorname{Sym}(I)$. Statt des Strategievektors $s \in S$ genügen uns die Häufigkeiten der Strategien!

(1) Angenommen, x_1 Tsd wählen ACD, x_2 Tsd wählen ABD.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 = 6, \quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\\
z_1(x_1, x_2) = \big[45 + x_1\big] + \big[3 + 10x_1\big]\\
z_2(x_1, x_2) = \big[3 + 10x_2\big] + \big[45 + x_2\big]
\end{aligned}$$

Gleichgewicht herrscht für $z_1 = z_2$, also $x_1 = x_2 = 3$ (LGS, Symmetrie). In der Ausgangssituation ist die Fahrzeit somit $z_1 = z_2 = 81$ Minuten.

(2) Angenommen, x_3 Tsd fahren ABCD durch den neu eröffneten Tunnel.

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 6, \quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0\\
&z_1(x_1, x_2, x_3) = \big[45 + x_1\big] + \big[3 + 10(x_1 + x_3)\big]\\
&z_2(x_1, x_2, x_3) = \big[3 + 10(x_2 + x_3)\big] + \big[45 + x_2\big]\\
&z_3(x_1, x_2, x_3) = \big[3 + 10(x_2 + x_3)\big] + \big[2 + x_3\big] + \big[3 + 10(x_1 + x_3)\big]
\end{aligned}$$

Gleichgewicht herrscht für $z_1 = z_2 = z_3$, also $x_1 = x_2 = x_3 = 2$ (LGS). Mit Tunnel erhöht sich die Fahrzeit auf $z_1 = z_2 = z_3 = 90$ Minuten!

☺ Spieler-Symmetrie hilft! Die Nash–Gleichgewichte sind strikt!
Zur Vereinfachung betrachten wir x_i als kontinuierlich (*non-atomic*).

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

Das erstaunliche Ergebnis wird als **Braess–Paradox** bezeichnet: Eine zusätzliche Handlungsoption kann die Situation für alle verschlechtern. Es wurde 1968 von dem Mathematiker Dietrich Braess veröffentlicht: *Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung*, Unternehmensforschung Operations Research 12 (1968), 258–268, online verfügbar unter `homepage.ruhr-uni-bochum.de/Dietrich.Braess/paradox.pdf`.

Die Rechnung illustriert wunderbar die Idee des Nash–Gleichgewichts! Die Definition ist einfach, aber die Interpretation bedarf einiger Übung und zahlreicher Beispiele, darunter auch solch verblüffende Paradoxien. Die genaue Analyse löst dieses Scheinparadox allerdings schnell auf. Bei genauerem Hinsehen ähnelt auch dies dem Gefangenendilemma.

Ist es nur eine psychologische Falle? Eine Charakterschwäche im Sinne von Gier schlägt Geist? Nicht nur, jeder einzelne handelt, wie gesagt, vollkommen rational. Dabei optimieren alle Teilnehmer rein individuell. Die vertrackte Situation provoziert dieses Verhalten, es ist das Resultat individueller Optimierung ohne bindende Absprache oder Koordinierung.

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

Es gibt **physikalische Entsprechungen** mit Federn in der Mechanik oder elektrischen Strömen in einer Schaltung, siehe Cohen, Horowitz: *Paradoxical behaviour of mechanical and electrical networks*, Nature 352 (1991), 699–701, online `www.nature.com/articles/352699a0`.

Das Phänomen ist also kein psychologischer Taschenspielertrick. Kommt das Paradox auch in realen Verkehrssituationen vor? Ja!

Die Süddeutsche Zeitung schreibt in ihrer Ausgabe vom 19. Mai 2010: „So waren die Verkehrsplaner in Stuttgart 1969 überrascht, als nach großen Investitionen ins Straßennetz rund um den Schlossplatz der Verkehrsfluss ins Stocken kam. Die Situation besserte sich erst, nachdem ein Teil der Königsstraße zur Fußgängerzone erklärt wurde.“

Weitere solche Beispiele werden aus New York und Seoul berichtet; das Problem sei unter Experten inzwischen hinlänglich bekannt, so heißt es. Straßenplaner nutzen geeignete Messdaten und Simulationssoftware zur Optimierung, insbesondere zur frühzeitigen Erkennung und Vermeidung paradoxer Verkehrsflüsse. Mathematik wirkt!

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

Aufgabe: Entwickeln Sie ein Verkehrsleitsystem, das jedem Fahrer am Ortsausgang von Aheim und Bdorf zufällig eine Route zuweist, sodass die erwartete Fahrzeit für alle gleich ist. Welches Minimum können Sie so erreichen? Hierzu braucht es eine unabhängige Instanz! Muss dieses System Strafen androhen? Erreicht es ein korreliertes Gleichgewicht?

Mehr Straßen erhöhen automatisch den Verkehrsfluss? Nicht immer! Die Planung vor dem Straßenbau ist wichtig, wie oben gesehen, und manchmal erfordert optimaler Betrieb eine aktive zentrale Steuerung

Ähnlich drastisches Beispiel: In manchen Städten ignorieren Fahrer die Ampeln, um sich „eben noch schnell“ über die Kreuzung zu schummeln. In der Rushhour führt dies zum katastrophalen Gegenteil: Stau!

Das kann übrigens auch für Geschwindigkeitsbeschränkungen gelten: Individuelle Disziplin kann allseitigen Nutzen erzeugen. So weit, so klar. Das ist allerdings unpopulär und schwer zu vermitteln: Preis der Freiheit.

Freie Fahrt für freie Bürger! forderte der ADAC 1974 zu Zeiten der Ölpreiskrise, und später die Leipziger Montagsdemonstration 1989.

Paradoxer Verkehrsfluss nach Braess

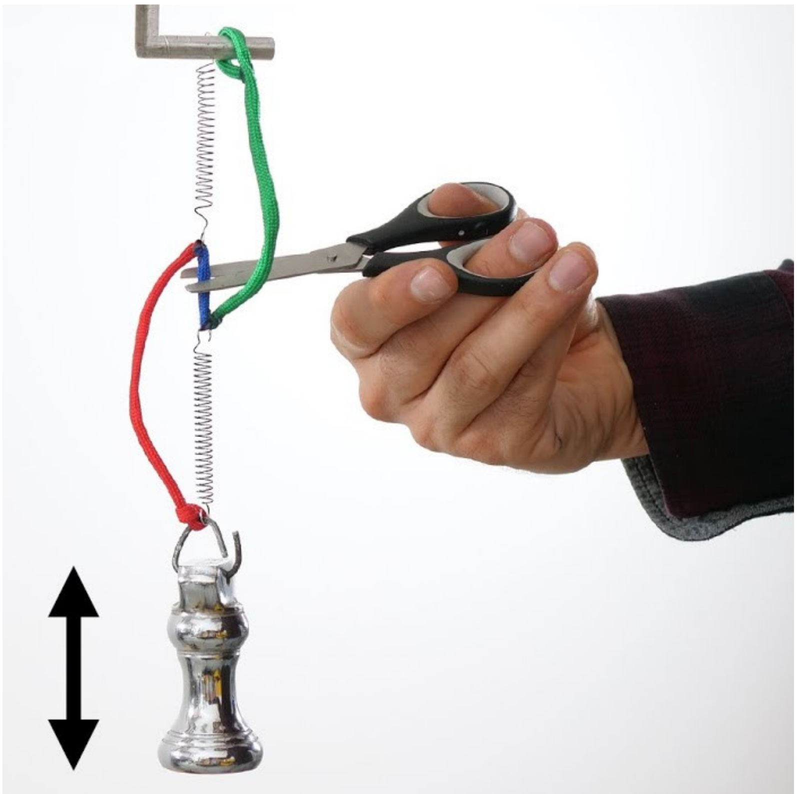
Die **Verkehrsströmungslehre** (engl. *traffic flow theory and control*) ist ein ausgedehntes Gebiet und alltäglich nahezu überall relevant.

Je nach Trägersystem (Straße, Bahn, Flugzeug, etc) nutzt sie spezielle mathematische Modelle und Methoden: Optimierung (kombinatorisch, numerisch, Simulation) und Stochastik (Warteschlangentheorie) und schließlich Spieltheorie (individuell vs zentral gesteuert).

Den Straßenverkehr kann man dabei kontinuierlich modellieren analog zur Fluiddynamik mit Differentialgleichungen, oder auch mit zellulären Automaten wie im Nagel–Schreckenberg–(NaSch–)Modell, siehe `de.wikipedia.org/wiki/Nagel-Schreckenberg-Modell`.

Seit den 1990er Jahren entwickeln sich spieltheoretische Ansätze zu Psychologie und Rationalität, ökonomischen Anreizen, usw.
Die Computersimulation wird ergänzt durch Experimente mit menschlichen Teilnehmern wie in der experimentellen Ökonomik.
Einen Querschnitt zeigt der Symposiumsband von Schreckenberg, Selten: *Human Behaviour and Traffic Networks*, Springer 2004.
Aktuell stellen Elektromobilität und ÖPNV neue Herausforderungen.

Paradoxe Systeme in der Physik



Steve Mould: *The Spring Paradox*, `youtu.be/Cg73j3QYRJc`
Up and Atom: *Braess's Paradox*, `youtu.be/cALezV_Fwi0`

Paradoxe Systeme in der Physik

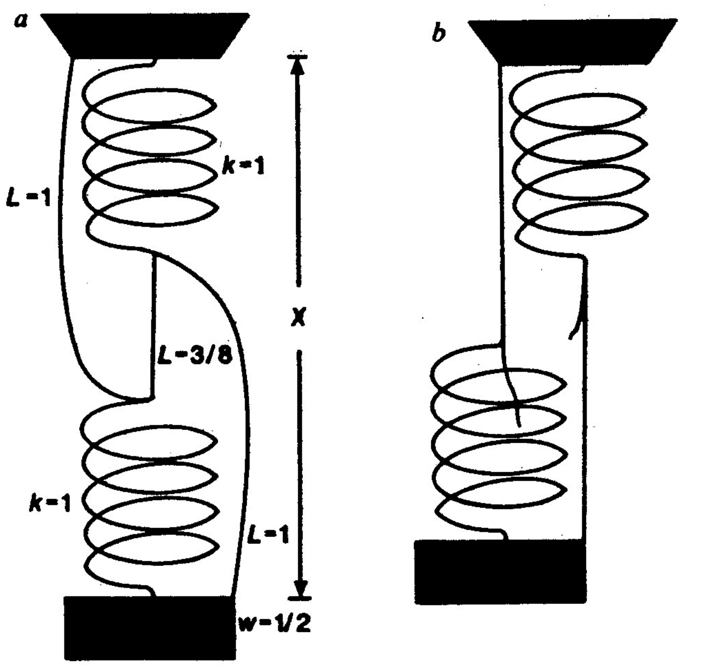


FIG. 1 Mechanical network. Springs have zero unstretched length and spring constant $k=1$. Strings are inelastic. The string that links the two springs has length $\frac{3}{8}$ m. Both safety strings have length 1 m. The weight exerts a force of $\frac{1}{2}$ N. *a*, In the initial network, both safety strings are limp, and the distance X from support to weight is $1\frac{3}{8}$ m. *b*, After the linking string is cut, the weight is higher at equilibrium; the new distance from support to weight is $1\frac{1}{4}$ m.

Nature 352 (1991), 699–701, `www.nature.com/articles/352699a0`

Paradoxe Systeme in der Physik

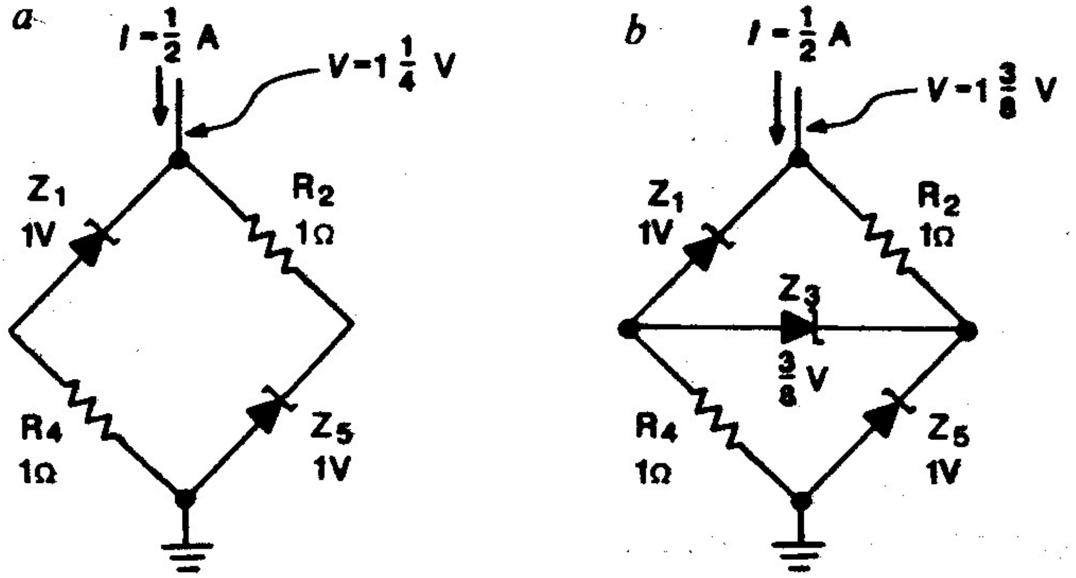


FIG. 3 Electrical network of ideal components. *a*, Initially, current flows symmetrically through left and right branches, and the voltage drop from source to ground is $1\frac{1}{4}$ V. *b*, When a $\frac{3}{8}$-V Zener diode is introduced across the network, the current through the 1-V Zener diodes drops to zero and all current flows through the 1-Ω resistors and the $\frac{3}{8}$-V Zener diode, producing a larger voltage drop from source to ground of $1\frac{3}{8}$ V.

Nature 352 (1991), 699–701, `www.nature.com/articles/352699a0`

Paradoxe Systeme in der Physik

Aufgabe: Führen Sie das oben skizzierte mechanische System aus und rechnen Sie das behauptete paradoxe Verhalten sorgfältig nach! Wenn Sie es praktisch-konkret mögen, können Sie es sogar bauen.

Projekt: Wie können Sie dies für Wasser realisieren? oder Wärme? Lässt sich dies ebenso einfach im Experiment demonstrieren?

Projekt: Er/Finden Sie (potentiell) paradoxe Systeme in Ihrem Alltag:

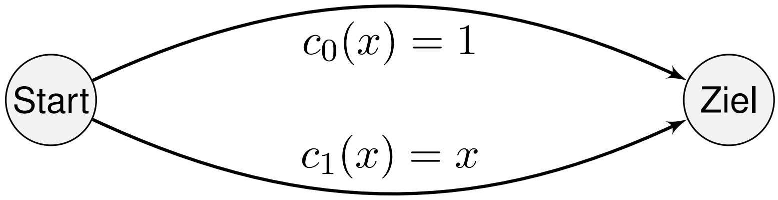
- Nutzung von Aufzügen und Treppen: Warteschlangen?
- In der Mensa: Essensausgabe? Geschirrrückgabe?
- Anmeldung zu Übungsgruppen, Seminaren, etc.

Vermutlich müssen Sie hier geeignete Annahmen / Parameter wählen. Selbst wenn die so konstruierten Beispiele etwas unrealistisch anmuten, so illustrieren sie doch immerhin die Möglichkeit paradoxen Verhaltens.

Pigous Beispiel: schockierend einfach

⚠ *Selfish behavior need not produce a socially optimal outcome.*

Extremes Beispiel von A. C. Pigou, *The Economics of Welfare*, 1920:



Zwei Routen stehen zur Verfügung: Auf der oberen ist die Fahrzeit immer 1 Stunde, auf der unteren x Stunden bei Auslastung $x \in [0, 1]$.

Aufgabe: Was ist das Gleichgewicht bei (1) individueller Optimierung vs (2) zentraler Optimierung durch ein verbindliches Verkehrsleitsystem?

Lösung: (1) Alle wählen den unteren Weg, die Fahrzeit ist 1 Stunde.
(2) Jeweils die Hälfte wird (zufällig) nach oben oder unten geleitet.
Niemand ist schlechter dran als in (1). Die Hälfte der Fahrer benötigt nur noch $1/2$ Stunde. Die mittlere Fahrzeit sinkt von 1 auf $3/4$ Stunde!

Pigous Beispiel: schockierend einfach

Erfahrungsgemäß akzeptieren Autofahrer:innen nur widerwillig etwaige Eingriffe in ihre Entscheidungsfreiheit, siehe *Freie Fahrt für freie Bürger!* Dennoch kann eine zentrale Koordinierung – mit bindender Wirkung! – die Effizienz für alle steigern, in günstigen Fällen wie oben skizziert.

Solche Fragen stellen sich zum Beispiel auch in digitalen Netzwerken: Datenpakete werden von ihrem Start zum gewünschten Ziel geleitet, und auch hier entstehen Kosten und Wartezeiten. Die Koordination kann zentral organisiert werden, oder aber den Akteuren überlassen werden.

Somit erweisen sich diese paradoxen Beispiele nicht als exotisch, wie es zunächst scheinen mag, sondern eröffnen ein faszinierendes Thema. Sowohl auf unseren „Datenautobahnen“ als auch auf realen Straßen lohnt es, effiziente Mechanismen zu suchen und zu implementieren.

Zum Vergleich und als Kontrast: In der klassischen Logistik transportiert ein Unternehmen die Waren und optimiert dazu zentral alle Abläufe. Das ist bereits eine hohe (mathematische) Kunst. Durch dezentral und egoistisch handelnde Akteure entstehen völlig neue Herausforderungen!

Wie hoch ist der Preis der Anarchie?

Im obigen Braess–Beispiel wächst die Fahrzeit von 81 auf 90 Minuten, im viel einfacheren Pigou–Beispiel von $3/4$ auf 1 Stunde. Gibt es noch schlimmere Beispiele? Wie groß kann die Ineffizienz maximal werden?

Gefragt und beantwortet wurde dies von T. Roughgarden, E. Tardos: *How bad is selfish routing?* Journal of the ACM 49 (2002) 236-259.

Satz G2A: Preis der Anarchie, Roughgarden–Tardos 2002

Gegeben sei ein Straßennetz. Die Fahrzeit für jede einzelne Strecke e sei affin-linear, also von der Form $c_e(x) = a_e + b_e x_e$ bei Auslastung x_e.

Sei C^* die Fahrzeit bei kollektiver Optimierung und C die Fahrzeit bei individueller Optimierung. Dann gilt die Schranke $C/C^* \le 4/3$.

Bestenfalls gibt es keine Diskrepanz, schlimmstensfalls führt Egoismus zu 33% Ineffizienz. Diese Schranke hängt von den Kostenfunktionen ab, siehe *Routing Games*, Kapitel 18 in *Algorithmic Game Theory*, CUP 2007; online frei zugänglich unter `www.timroughgarden.org`.

Wie hoch ist der Preis der Anarchie?

Es ist erstaunlich, dass es hier eine universelle Schranke gibt! Ebenso erstaunlich ist es, dass dies nahezu einhundert Jahre lang niemandem aufgefallen ist, ja dass nicht einmal die Frage gestellt wurde. Dementsprechend hat das Ergebnis eines neues Gebiet eröffnet.

Individuelles versus zentrales Routing ist ein aktuelles Forschungsthema in der Schnittmenge zwischen Spieltheorie und Algorithmik. Zu diesem Themenkomplex gibt es ein unterhaltsam-informatives Interview mit Tim Roughgarden, `youtu.be/w7ddIRFfqM` (80min).

Among many recognitions, Tim has received the Gödel Prize for his research in computational game theory, a field that resides in the intersection of two disciplines: economics and computer science. We talk to Tim about one of the central insights of that work: the Prize of Anarchy, which quantifies the loss in efficiency of a system due to selfish behaviour of its agents.

Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra

Räuber-Beute-Modell: $\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 & =: f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2 & =: f_2(x_1, x_2) \end{cases}$

Größe	Bedeutung	Beispiel
$t \geq 0$	Zeit	Jahre
$x_1(t) \geq 0$	Anzahl der Beutetiere	Hasen/Mio
$x_2(t) \geq 0$	Anzahl der Raubtiere	Luchse/Tsd
$\alpha_1 > 0$	Reproduktionsrate der Beute (ohne Räuber)	0.8/Jahr
$\beta_1 > 0$	Sterberate der Beute pro Räuber	0.4/Jahr
$\alpha_2 > 0$	Sterberate der Räuber (ohne Beute)	0.6/Jahr
$\beta_2 > 0$	Reproduktionsrate der Räuber pro Beute	0.2/Jahr

Dieses DGSystem beschreibt die Entwicklung großer Räube-Beute-Populationen. Beispiel: Fangaufzeichnungen der Hudson Bay Company zeigten über 90 Jahre einen 9jährigen Zyklus. Formuliert und untersucht wurde dieses Modell 1925 von Alfred Lotka und unabhängig 1926 von Vito Volterra, seither ist es das Paradebeispiel einer Populationsdynamik in der Biologie. Die quadratischen Terme entsprechen dem Massenwirkungsgesetz chemischer Reaktionen. Epidemien folgen einer ähnlichen Dynamik, man untersucht und nutzt dies für Maßnahmen. Mechanische Systeme mit nicht-linearen Rückkopplungen gehorchen ähnlichen Gleichungen.

Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra

Räuber-Beute-Modell: $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0.8\, x_1 - 0.4\, x_1 x_2 & =: f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -0.6\, x_2 + 0.2\, x_1 x_2 & =: f_2(x_1, x_2) \end{cases}$

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie den Zustandsraum und das Vektorfeld. Existiert zu jedem Startwert $x(0) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung $t \mapsto x(t)$? eindeutig?

(2) Was folgt aus $x_2(0) = 0$? aus $x_1(0) = 0$? Wo liegen Fixpunkte? Skizzieren Sie Lösungen zu $x_1(0) = 3$ und $x_2(0) = 2.0, 1.8, \ldots, 0.0$.

(3) Ist das System linear? Wie / Können Sie Lösungen berechnen?

(4) Linearisieren & lösen Sie für kleine Störungen des Gleichgewichts. Wie lange dauert eine Periode? Wie verlässlich ist das lineare Modell?

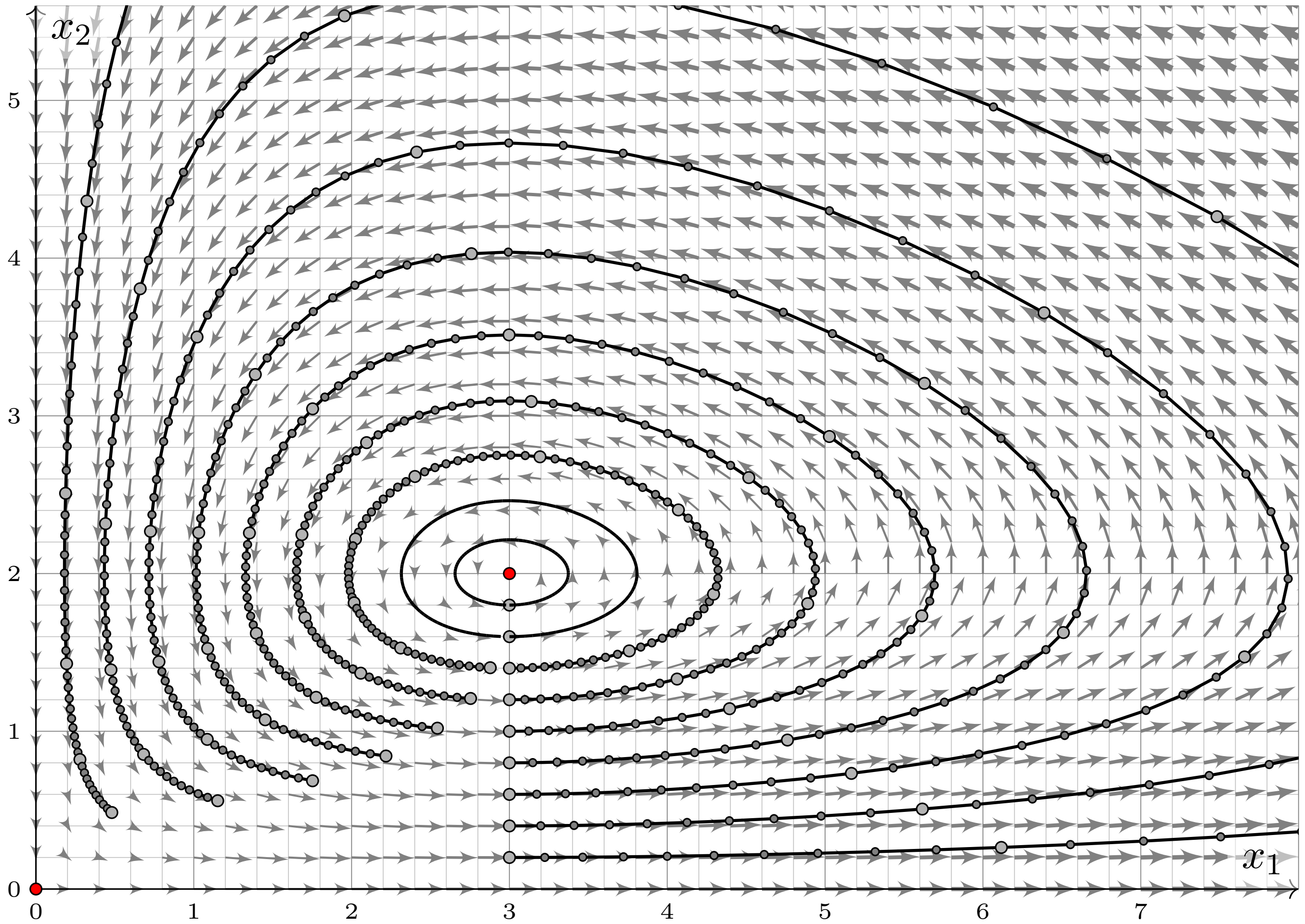
(5) Das Potential $\Phi := \beta_2 x_1 - \alpha_2 \ln x_1 + \beta_1 x_2 - \alpha_1 \ln x_2$ erfüllt $\dot{\Phi} = 0$.

(6) Erste Lotka–Volterra–Regel, Periodizität der Lösungen:
Beide Populationensgrößen entwickeln sich periodisch.

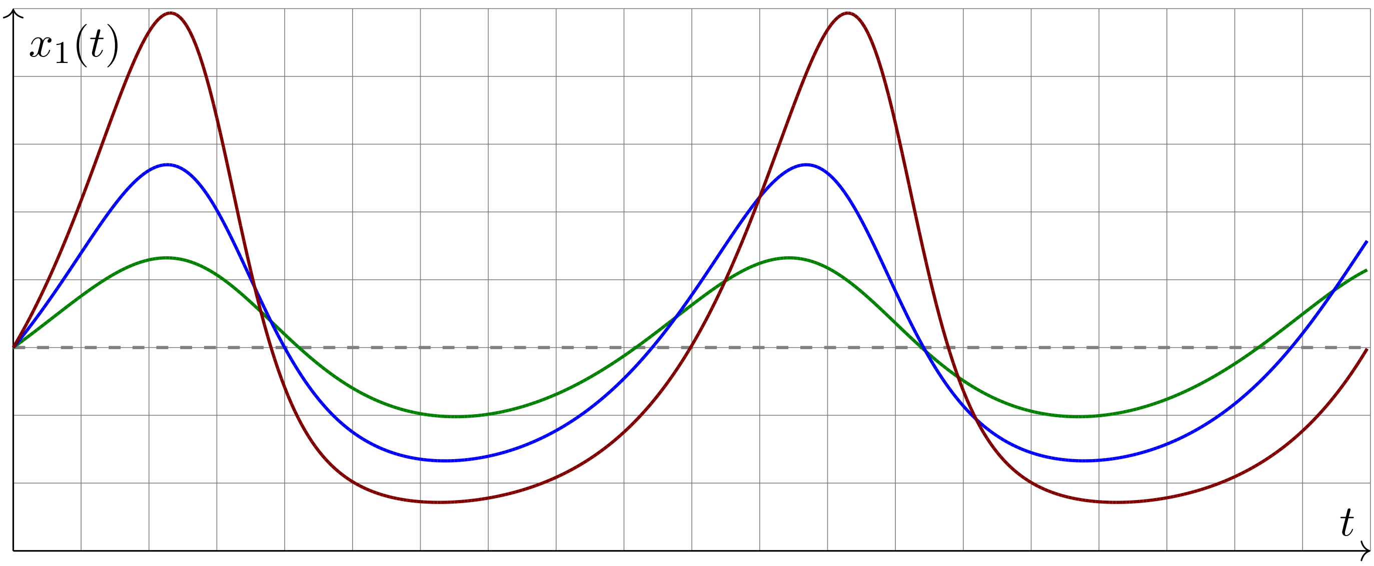
(7) Zweite Lotka–Volterra–Regel, Konstanz der Mittelwerte:
Die zeitlichen Mittelwerte sind $\overline{x_1} = \alpha_2/\beta_2$ *und* $\overline{x_2} = \alpha_1/\beta_1$.

(8) Angenommen, der Mensch hält die Beutetiere für Schädlinge.
Im Zustand $(3, 1)$ werden sie gejagt und auf $(1, 1)$ reduziert. Erfolg?

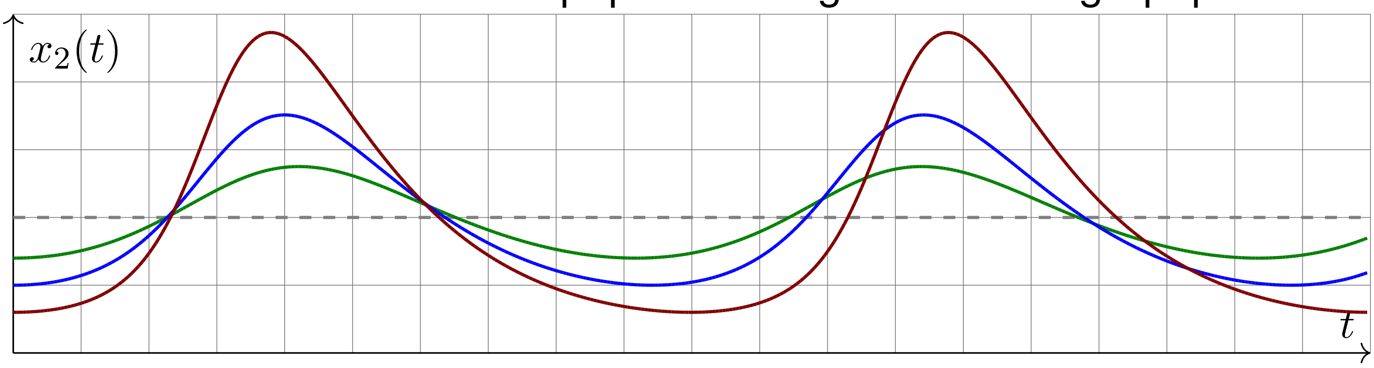
Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra



Räuber-Beute-Modell nach Lotka–Volterra



Jedem Maximum der Beutepopulation folgt eins der Jägerpopulation.



Räuber-Beute-Modell: Linearisierung

Lösung: (1) Wir nutzen den ∃&E-Satz: f ist stetig differenzierbar.

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 \\ -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad f'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 x_2 & -\beta_1 x_1 \\ \beta_2 x_2 & -\alpha_2 + \beta_2 x_1 \end{pmatrix}$$

☺ Zu jedem $x(0) \in \mathbb{R}^2$ existiert genau eine Lösung mit $\dot{x}(t) = f(x(t))$.

(2) Aus $x_2(0) = 0$ folgt $x_2(t) = 0$ und $x_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha_1 t} x_1(0)$ für alle $t \ge 0$.
Aus $x_1(0) = 0$ folgt $x_1(t) = 0$ und $x_2(t) = \mathrm{e}^{-\alpha_2 t} x_2(0)$ für alle $t \ge 0$.
Die Fixpunkte $\dot{x} = f(x) \stackrel{!}{=} 0$ sind $(0, 0)$ und $(\alpha_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1) = (3, 2)$.

(3) Dieses System ist nicht linear! Lösungen können wir (hier wie meist) nur numerisch berechnen. Wie skizziert, Runge–Kutta sei Dank!

(4) Wir linearisieren um $x_0 = (\alpha_2/\beta_2, \alpha_1/\beta_1)$. Für $x(t) = x_0 + u(t)$ gilt:

$$\dot{u} = \dot{x} = f(x) = f(x_0 + u) \approx f(x_0) + f'(x_0)\, u = A\, u$$

☺ Die Jacobi–Matrix beschreibt das Verhalten um den Fixpunkt:

$$A = f'(x_0) = f'\begin{pmatrix} \alpha_2/\beta_2 \\ \alpha_1/\beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_2\beta_1/\beta_2 \\ \alpha_1\beta_2/\beta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Räuber-Beute-Modell: Linearisierung

Nicht-linear ist schwierig, doch **lineare Systeme** lösen wir leicht:

$$p_A(x) = \det(A - xE) = \det\begin{pmatrix} -x & -\alpha_2\beta_1/\beta_2 \\ \alpha_1\beta_2/\beta_1 & -x \end{pmatrix} = x^2 + \alpha_1\alpha_2$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = +\mathrm{i}\sqrt{\alpha_1\alpha_2} = +\mathrm{i}\omega$, $\lambda_2 = -\mathrm{i}\sqrt{\alpha_1\alpha_2} = -\mathrm{i}\omega$

Eigenvektoren: $v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_2\beta_1/\beta_2} \\ -\mathrm{i}\sqrt{\alpha_1\beta_2/\beta_1} \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_2\beta_1/\beta_2} \\ +\mathrm{i}\sqrt{\alpha_1\beta_2/\beta_1} \end{pmatrix}$

Eigenfunktionen: $u_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_1$, $u_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} v_2$

Für unser reelles System verlangen wir **reelle Lösungen**:

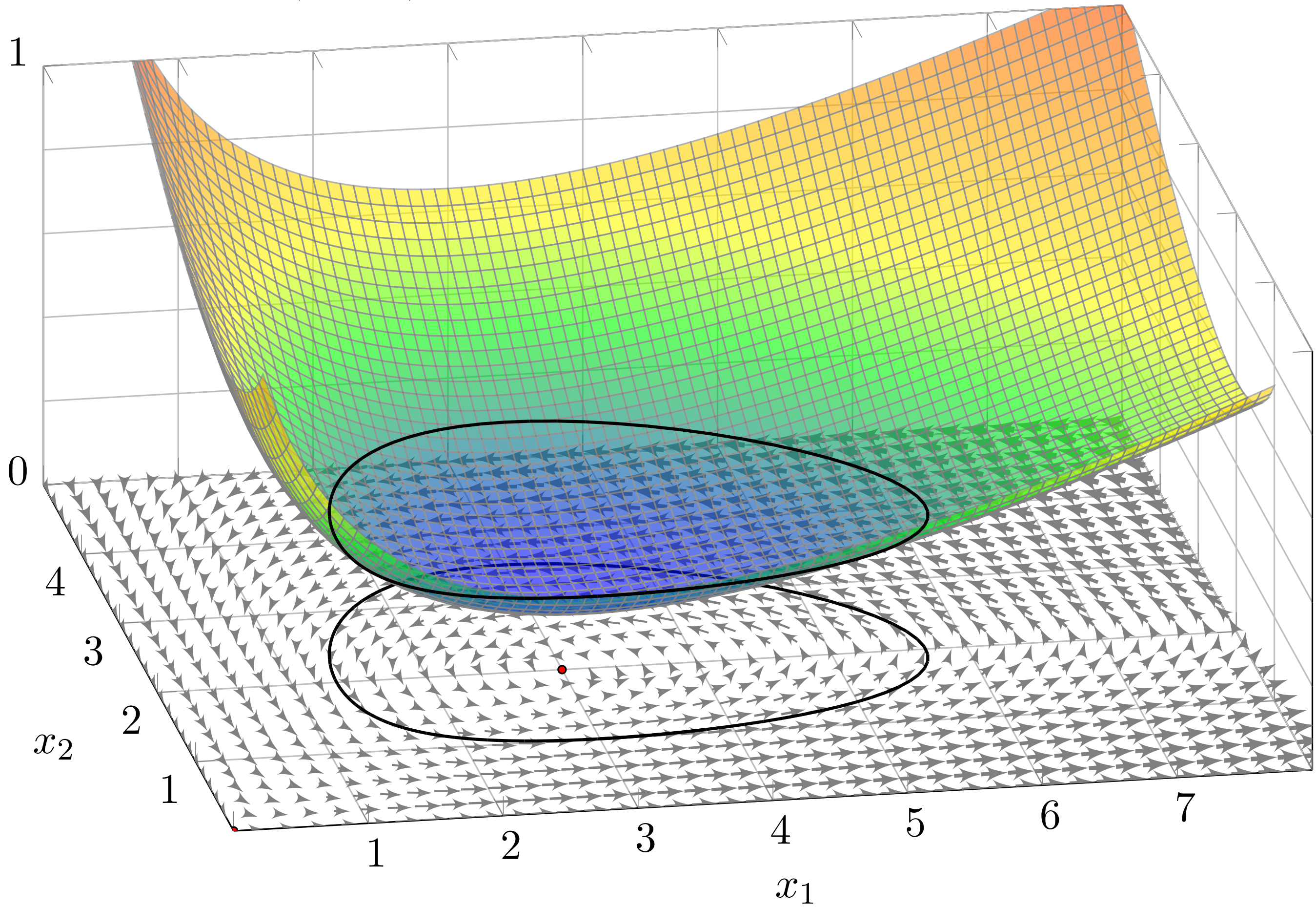
$$\operatorname{Re} u_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t)\sqrt{\alpha_2\beta_1/\beta_2} \\ \sin(\omega t)\sqrt{\alpha_1\beta_2/\beta_1} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im} u_1(t) = \begin{pmatrix} \sin(\omega t)\sqrt{\alpha_2\beta_1/\beta_2} \\ -\cos(\omega t)\sqrt{\alpha_1\beta_2/\beta_1} \end{pmatrix}$$

Die Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ bedeutet Periodendauer $T = 2\pi/\omega$.
Im Beispiel ist $\alpha_1 = 0.8$ und $\alpha_2 = 0.6$, also $\omega \approx 0.69$ und $T \approx 9.07$.

☺ Plausibel: Für kleine Störungen deckt sich das mit obigen Skizzen. Große Störungen und Langzeitverhalten erfordern weitere Argumente!

Räuber-Beute-Modell: Potentialfläche

Das Potential $\Phi(x_1, x_2) = \beta_2 x_1 - \alpha_2 \ln x_1 + \beta_1 x_2 - \alpha_1 \ln x_2$ erfüllt $\dot\Phi = 0$.



Räuber-Beute-Modell: Periodizität

(5) Für das Potential $\Phi(x_1, x_2) := \beta_2 x_1 - \alpha_2 \ln x_1 + \beta_1 x_2 - \alpha_1 \ln x_2$ gilt

$$\begin{aligned}\dot\Phi &= \beta_2 \dot x_1 - \alpha_2 \dot x_1/x_1 + \beta_1 \dot x_2 - \alpha_1 \dot x_2/x_2 \\ &= (\beta_2 - \alpha_2/x_1)(\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 x_2) + (\beta_1 - \alpha_1/x_2)(-\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 x_2) = 0.\end{aligned}$$

(6) Jede Lösung in $\mathbb{R}^2_{>0}$ schließt sich deshalb nach endlicher Zeit $T > 0$:

(7) Die zeitlichen Mittelwerte der Populationsgrößen sind

$$\overline{x_1} := \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} x_1(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad \overline{x_2} := \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} x_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Aus den beiden Differentialgleichungen folgt:

$$\beta_2\overline{x_1} - \alpha_2 = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \beta_2 x_1(t) - \alpha_2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \frac{\dot x_2(t)}{x_2(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln x_2(t)}{T}\right]_{t=0}^{T} = 0$$

$$\alpha_1 - \beta_1\overline{x_2} = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \alpha_1 - \beta_1 x_2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \frac{\dot x_1(t)}{x_1(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln x_1(t)}{T}\right]_{t=0}^{T} = 0$$

Das bedeutet $\overline{x_1} = \alpha_2/\beta_2$ und $\overline{x_2} = \alpha_1/\beta_1$. Erstaunlich: Der Mittelwert $\overline{x_1}$ der Beutepopulation hängt nicht von deren Reproduktionsrate ab!

Was ist evolutionäre Spieltheorie?

Die **evolutionäre Spieltheorie** untersucht die soziale Interaktion in großen Populationen von Spielern. Sie verbindet damit Biologie und Ökonomie auf überraschende Weise und zu beiderseitigem Nutzen.

In den Wirtschaftswissenschaften ist dies ein sehr erfolgreicher Ansatz der **Mikrofundierung**, zur Erklärung und Prognose von sozialen und ökonomischen Phänomenen durch die Interaktion von Individuen.

Die klassische Spieltheorie betrachtet die strategische Analyse durch (idealisiert vollkommen) rationale Spieler, von denen jeder durch planvolles Handeln sein individuelles Ergebnis optimieren will.

Die evolutionäre Spieltheorie verbindet dies mit der zweiten, ebenso einfachen wie grundlegenden Sichtweise der Populationsdynamik: Erfolgreiche Strategien vermehren sich schneller als andere.

Was ist evolutionäre Spieltheorie?

Der **evolutionäre Ansatz** lässt sich auch dann noch sinnvoll anwenden, wenn die betrachteten Akteure nur über begrenzte Rationalität verfügen, oder im Extremfall überhaupt gar keine individuellen strategischen Entscheidungen treffen können (wie etwa Mikroorganismen).

Zur Erklärung und Deutung von Gleichgewichten nutzen Ökonomen seit jeher Ideen der Evolutionsbiologie: Das gesellschaftlich beobachtete Verhalten pendelt sich durch **trial and error** auf gewisse Fixpunkte ein. In diesem Sinne stützt die biologische Sichtweise die ökonomischen.

Die evolutionäre Spieltheorie nimmt diese Deutung ernst und untersucht damit nicht nur die Fixpunkte, sondern auch die Dynamik drumherum und sogar fernab dieser Gleichgewichtslagen. Damit lassen sich auch Bewegungen abseits der Rationalität erklären, zumindest qualitativ.

Was ist evolutionäre Spieltheorie?

Die mathematische Untersuchung evolutionärer Vorgänge erfordert als Grundlage immer ein **Bewegungsgesetz**, um die Dynamik präzise formulieren zu können, etwa diskret als Rekursionsgleichung oder meist kontinuierlich in Form einer Differentialgleichung.

Denken Sie als berühmte **Analogien in der Physik** etwa an Newtons Bewegungsgleichung der Mechanik, an Maxwells Gleichungen der Elektrodynamik, oder an Fouriers Wärmeleitungsgleichung, an die Schrödinger– oder Dirac–Gleichung der Quantenmechanik, etc.

Für die evolutionäre Spieltheorie dient meist die Replikatorgleichung als das grundlegende Modell für die Dynamik. Es gibt weitere Möglichkeiten, wie die Nash–Funktion aus dem Existenzsatz E1F für Gleichgewichte: Diese beschreibt weniger natürliche Selektion als rationale Planung.

Was ist evolutionäre Spieltheorie?

Dazu setzen wir im Folgenden voraus, dass die Population so groß ist, dass wir das eigentlich diskrete Modell ohne allzu große Fehler durch ein einfaches, kontinuierlich-differentielles Modell ersetzen können. Wir ignorieren also jedwede mikroskopische Körnigkeit oder Zufälle.

Denselben Grenzübergang haben wir übrigens bereits im obigen Räuber-Beute-Modell von Lotka-Volterra stillschweigend vollzogen: Hasen und Luchse sind diskrete Einheiten, nicht kontinuierlich, doch das kontinuierliche Modell ist nah genug an der Realität.

Physikalische Analogie sind Wärmelehre und kinetische Gastheorie: Die erste behandelt makroskopische Phänomene (zumeist Mittelwerte), die zweite untersucht mikroskopische Phänomene (einzelne Teilchen). Im Grenzübergang führt das mikro- zum makroskopischen Modell.

Die Replikatorgleichung

Die Differentialgleichung $\dot{x} = \lambda x$ beschreibt exponentielles Wachstum: Zum Startwert $x(0)$ ist $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto x(0)\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ die eindeutige Lösung.

Für gemischte Strategien nutzen wir baryzentrische Koordinaten:

$$s_i \in \bar{S}_i \quad : \quad s_i = \sum_k x_i^k s_i^k, \quad x_i^k \ge 0, \quad \sum_k x_i^k = 1$$

Unsere vorigen Beispiele motivieren folgende Differentialgleichung:

$$\boxed{\dot{x}_i^k = x_i^k \left[\bar{u}_i(s_i^k; s_{-i}) - \bar{u}_i(s_i; s_{-i})\right]}$$

Gilt $[\dots] \gtrless 0$, so hat s_i^k gegenüber s_i einen Fitnessvorteil/nachteil, also wächst/sinkt der Anteil x_i^k dieser Strategie an der Gesamtpopulation.

Aufgabe: (0) Wie glatt ist das Vektorfeld f auf der rechten Seite? Garantiert das Existenz, Eindeutigkeit und Glattheit von Lösungen?

(1) Als Startwert geben wir $x_i^k(t_0) \ge 0$ und $\sum_k x_i^k(t_0) = 1$ vor. Bleiben diese Normierungsbedingungen für alle $t \in \mathbb{R}$ erhalten?

(2) Wie verhalten sich Fixpunkte zu Nash–Gleichgewichten? Lässt sich damit die Existenz von Nash–Gleichgewichten zeigen?

Die Replikatorgleichung

Lösung: (0) Für Bimatrixspiele $\Delta^m \times \Delta^n \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (x^\intercal A\,y, x^\intercal B\,y)$:

$$\dot{x}_i = x_i\big[e_i^\intercal A\,y - x^\intercal A\,y\big], \qquad \dot{y}_j = y_j\big[x^\intercal B\,e_j - x^\intercal B\,y\big].$$

Allgemein sei $u : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ ein Spiel mit $S_i = \{s_i^0, s_i^1, \dots, s_i^{\ell_i}\}$. Wir setzen u in jeder Koordinate linear fort zu $\bar{u} : \mathbb{R}^{S_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{S_n} \to \mathbb{R}^n$,

$$\bar{u}\big(\dots, \textstyle\sum_{k=0}^{\ell_i} x_i^k s_i^k, \dots\big) = \textstyle\sum_{k=0}^{\ell_i} x_i^k u(\dots, s_i^k, \dots).$$

Das Vektorfeld auf der rechten Seite unserer Gleichung $\dot{x} = f(x)$ ist

$$f : \mathbb{R}^{\ell_1+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{\ell_n+1} \to \mathbb{R}^{\ell_1+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{\ell_n+1},$$
$$f_i^k(x) = x_i^k \left[\bar{u}_i(s_i^k; s_{-i}) - \bar{u}_i(s_i; s_{-i})\right].$$

Jede Koordinate $f_i^k(x)$ ist polynomiell in den Variablen $x = (x_1, \dots, x_n)$, genauer vom Grad 2 in x_i^k und vom Grad 1 in allen anderen Variablen.

🙂 Zu jedem Startpunkt $x(t_0)$ garantiert der Satz von Picard–Lindelöf lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung, mit (1) sogar global.

🙂 Da f glatt ist, gilt dies auch für jede Lösung $t \mapsto x(t)$ von $\dot{x} = f(x)$.

🙂 Der Satz von Cauchy–Kowalewskaja garantiert, dass jede Lösung $t \mapsto x(t)$ sogar analytisch ist, also lokal eine konvergente Potenzreihe.

Die Replikatorgleichung

(1) Sei $x : I \to \mathbb{R}^N$ eine Lösung auf einem Intervall I mit $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$.
Wir zeigen: Gilt $x_i^k(t) \ge 0$ und $\sum_k x_i^k(t) = 1$ für $t = t_0$, so für alle $t \in I$.

Geometrisch: Auf $X = \Delta^{\ell_1} \times \dots \times \Delta^{\ell_n}$ zeigt das Vektorfeld f nirgends nach außen. Jede Lösung, die in X startet, verbleibt in X. Ausführlich:

(1a) Behauptung: Gilt $x_i^k(t) = 0$ für ein (i,k) und $t = t_0$, so für alle $t \in I$.

Dank Existenzsatz gibt es eine Lösung $\tilde{x} : J \to \mathbb{R}^N$ mit $\tilde{x}(t_0) = x(t_0)$, wobei wir den Funktionswert $\tilde{x}_i^k(t) = 0$ für alle $t \in J$ fest vorgeben.
Automatisch gilt dann $\partial_t \tilde{x}_i^k(t) = 0 = f_i^k(\tilde{x}(t))$ für alle $t \in J$.
Dank Eindeutigkeitssatz folgt $x_i^k(t) = 0$ für alle $t \in I \cap J$.

(1b) Behauptung: Gilt $\sum_k x_i^k(t) = 1$ für ein i und $t = t_0$, so für alle $t \in I$.

Dank Existenzsatz gibt es eine Lösung $\tilde{x} : J \to \mathbb{R}^N$ mit $\tilde{x}(t_0) = x(t_0)$, wobei wir $\tilde{x}_i^0(t) = 1 - \sum_{k=1}^{\ell_i} \tilde{x}_i^k(t)$ für alle $t \in J$ fest vorgeben.
Automatisch gilt dann $\partial_t \tilde{x}_i^0(t) = f_i^0(\tilde{x}(t))$ für alle $t \in J$, denn

$$f_i^0(\tilde{x}(t)) - \partial_t \tilde{x}_i^0 = \sum_{k=0}^{\ell_i} x_i^k \big[\bar{u}_i(s_i^k; s_{-i}) - \bar{u}_i(s_i; s_{-i}) \big] = 0.$$

Dank Eindeutigkeitssatz folgt $\sum_k x_i^k(t) = 1$ für alle $t \in I \cap J$.

Die Replikatorgleichung

Die behauptete Gleichung gilt lokal um jeden Zeitpunkt $t_0 \in I$.
Dank Zusammenhang gilt sie somit auf dem gesamten Intervall I.

Für jede Auswahl von (abgeschlossenen oder offenen) Teilsimplizes $\Delta_1 \subseteq \Delta^{\ell_1}, \dots, \Delta_n \subseteq \Delta^{\ell_n}$ ist die Menge $\Delta_1 \times \dots \times \Delta_n \subset \mathbb{R}^N$ invariant.

Wir müssen hier sorgfältig mit dem Eindeutigkeitssatz argumentieren.
Ein klassisches Gegenbeispiel ist die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ mit rechter Seite $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$. Zum Startwert $x(0) = 0$ existieren neben der Lösung $t \mapsto 0$ noch unendlich viele weitere, etwa $t \mapsto t^3/27$.
Die Mengen der Zerlegung $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{<0} \sqcup \{0\} \sqcup \mathbb{R}_{>0}$ sind hier nicht invariant!

(2) Jedes Nash–Gleichgewicht ist eine Nullstelle des Vektorfeldes, aber nicht jede Nullstelle des Vektorfeldes ist ein Nash–Gleichgewicht:
Diese Äquivalenz gilt nur im Inneren, mit $x_i^k > 0$ für alle i und k.
Z.B. ist jede Ecke eine Nullstelle, aber nicht immer ein Gleichgewicht.

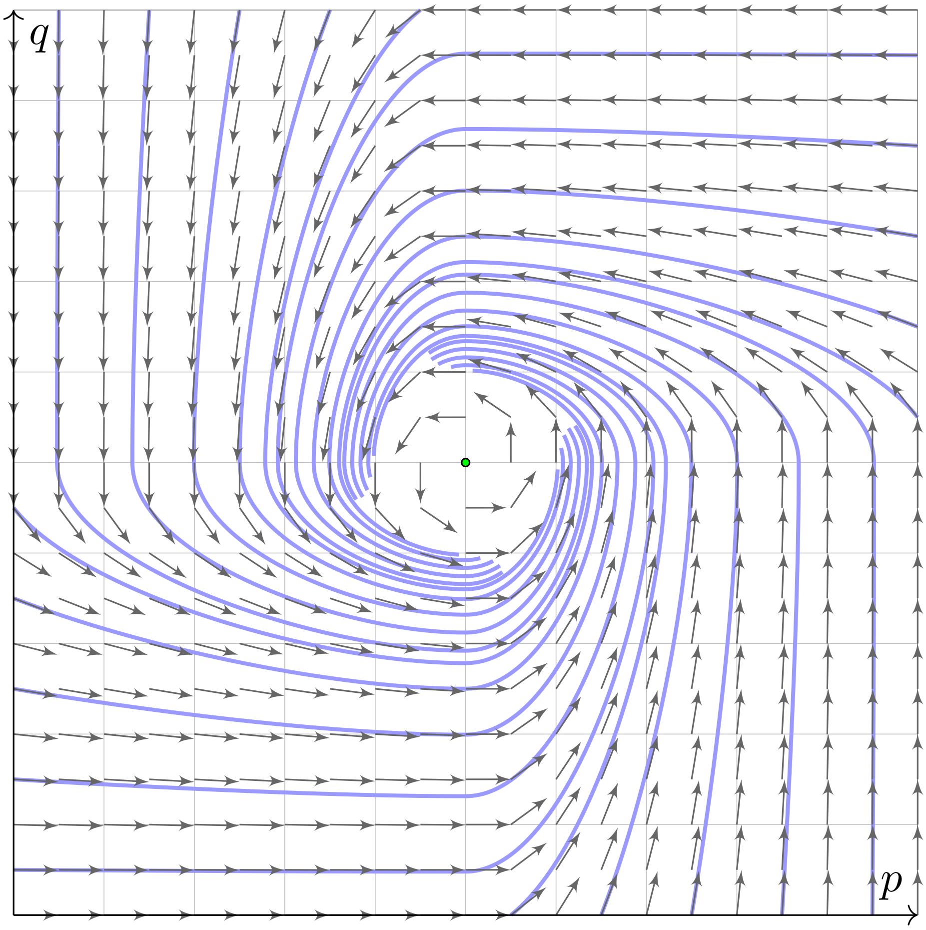
Daher lässt sich die Replikatorgleichung nicht zum Beweis nutzen.
Der Beweis von Satz E1F konstruiert dazu geschickt die Nash–Funktion; dank Lemma E1K sind ihre Fixpunkte genau die Nash–Gleichgewichte.

Nash–Dynamik zu Matching Pennies

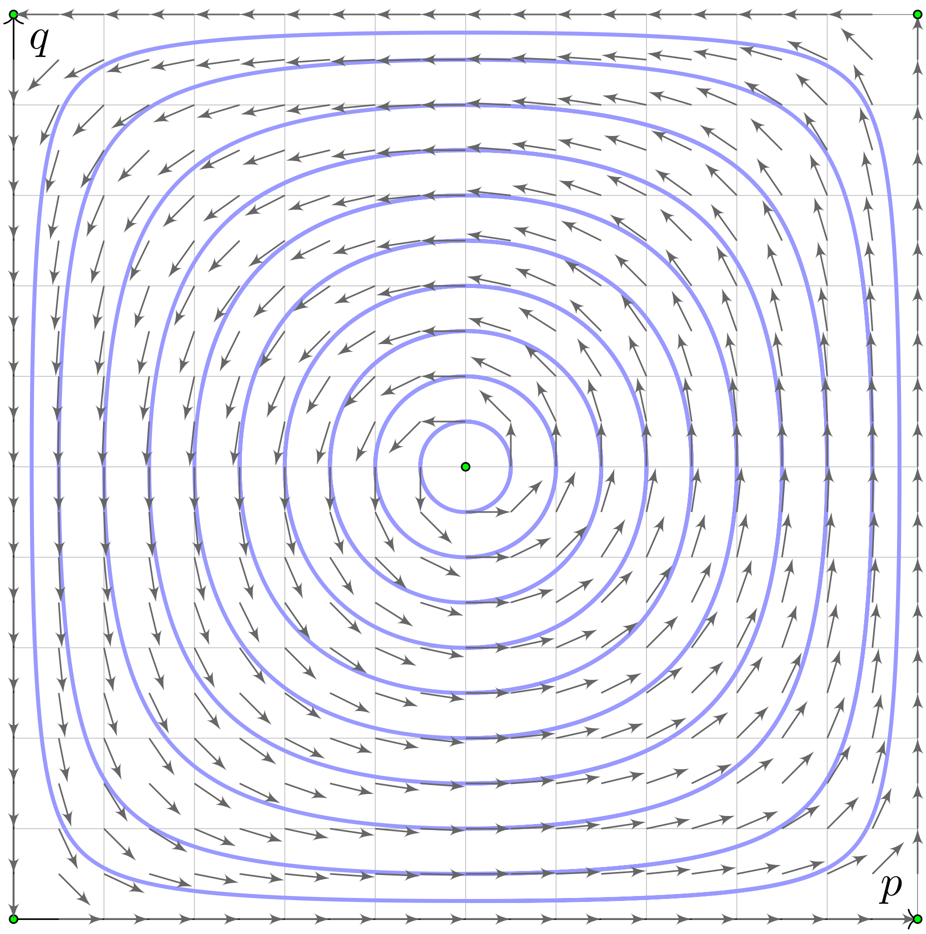
B / A	Kopf	Zahl
Kopf	$+1$ / -1	-1 / $+1$
Zahl	-1 / $+1$	$+1$ / -1

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f:[0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q)-(p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.

Wir sehen wunderbar den einzigen Fixpunkt des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ ist dies das einzige Nash–Gleichgewicht.



Replikator-Dynamik zu Matching Pennies



Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Matching Pennies* $u: S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

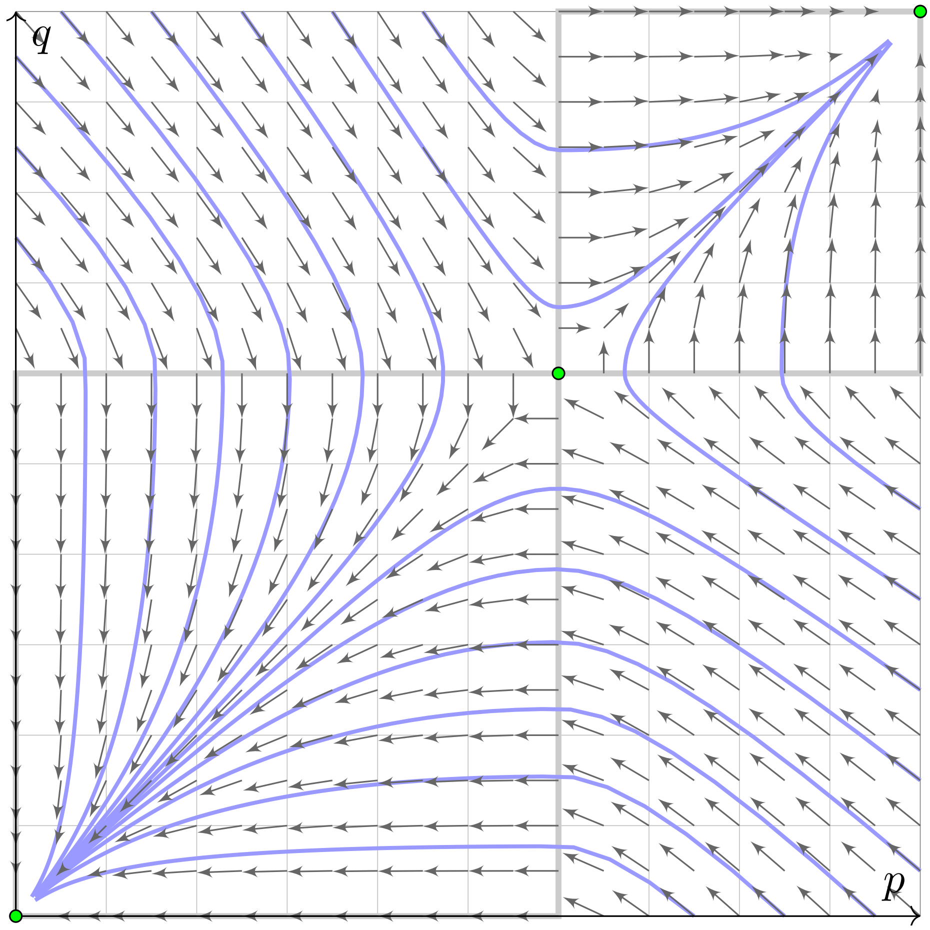
B / A	Kopf	Zahl
Kopf	$+1$ / -1	-1 / $+1$
Zahl	-1 / $+1$	$+1$ / -1

Nash–Dynamik zu Bleiben-oder-Gehen

A \ B	bleiben	gehen
bleiben	-2 / -2	-2 / -5
gehen	-5 / -2	0 / 0

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f:[0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q)-(p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.

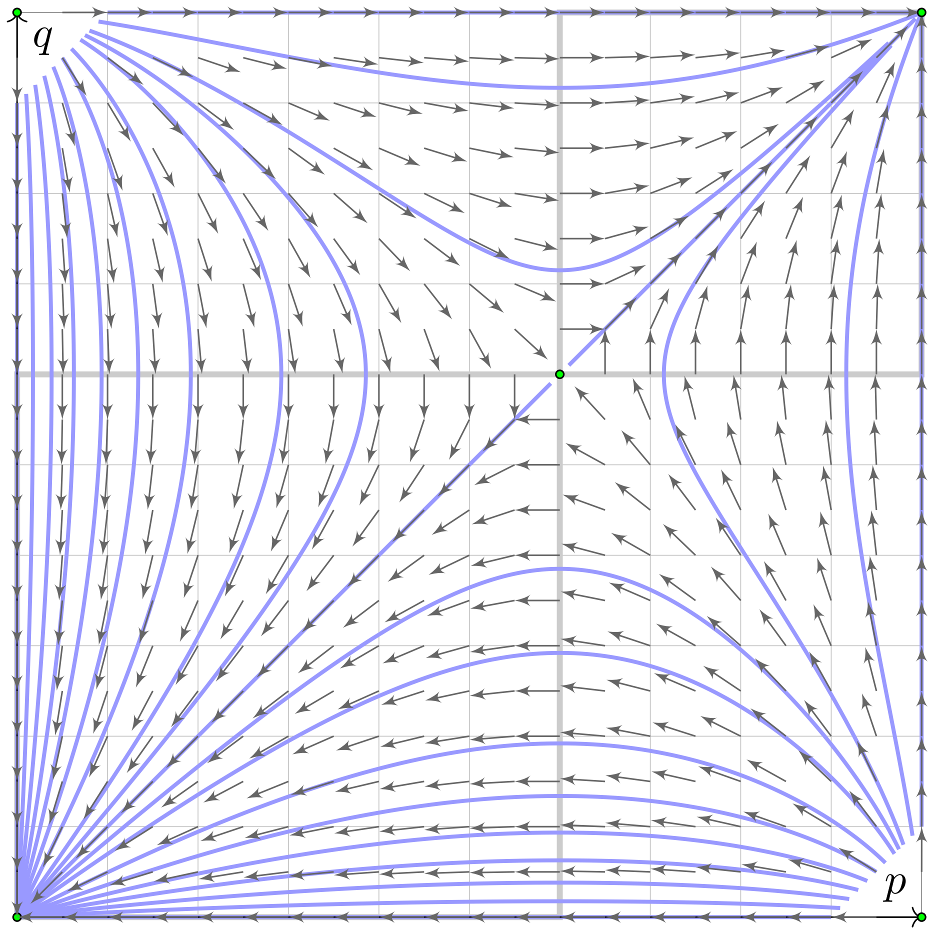
Wir sehen wunderbar die drei Fixpunkte des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ sind dies die drei Nash–Gleichgewichte.



Replikator-Dynamik zu Bleiben-oder-Gehen

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Bleiben-oder-Gehen* $u: S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

A \ B	bleiben	gehen
bleiben	-2 / -2	-2 / -5
gehen	-5 / -2	0 / 0

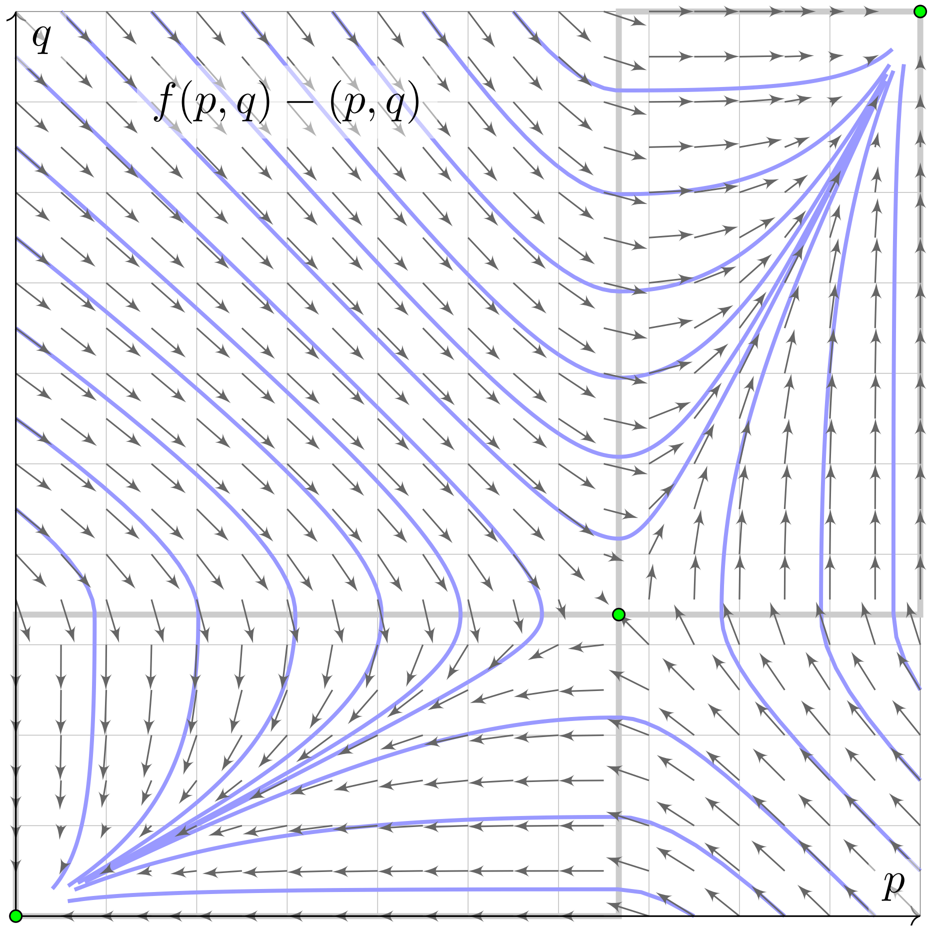


Nash–Dynamik zu Bach oder Strawinsky

B / A	Bach	Strawinsky
Bach	2 1	0 0
Strawinsky	0 0	1 2

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f:[0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q)-(p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.

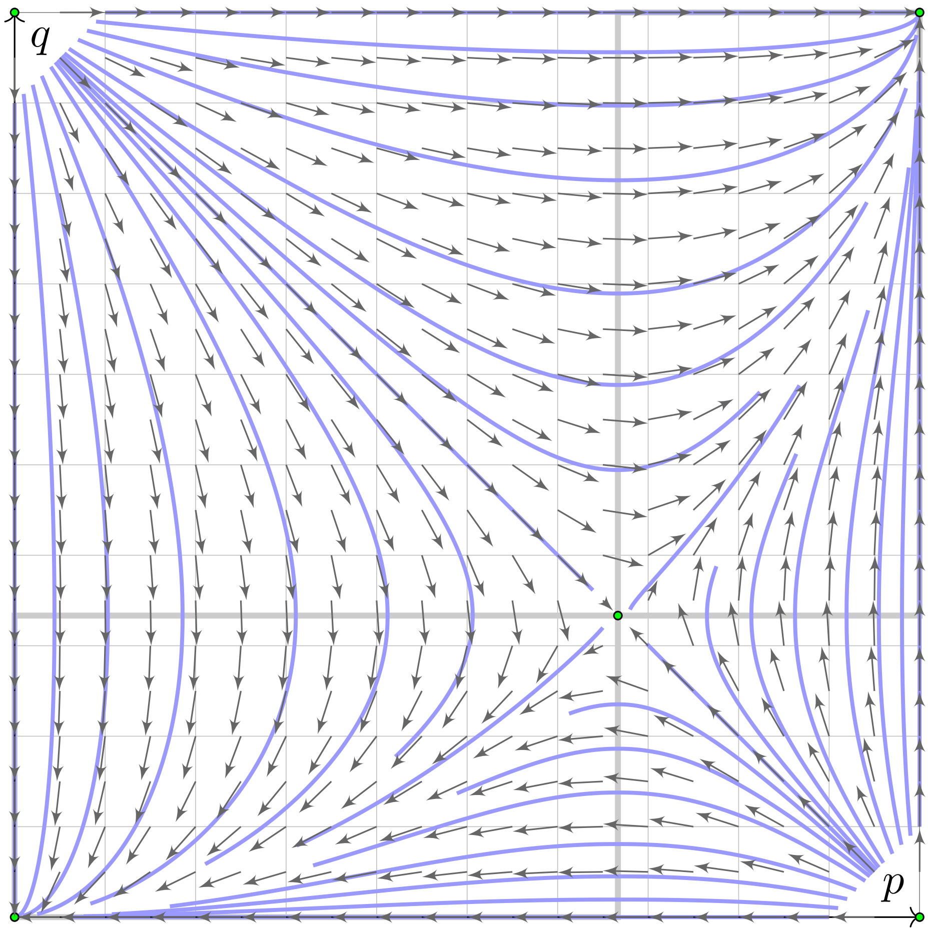
Wir sehen wunderbar die drei Fixpunkte des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ sind dies die drei Nash–Gleichgewichte. Zur Anregung Ihrer Phantasie zeige ich typische Flusslinien.



Replikator-Dynamik zu Bach oder Strawinsky

Zur Erinnerung die Daten des Spiels *Bach oder Strawinsky* $u: S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

B / A	Bach	Strawinsky
Bach	2 1	0 0
Strawinsky	0 0	1 2

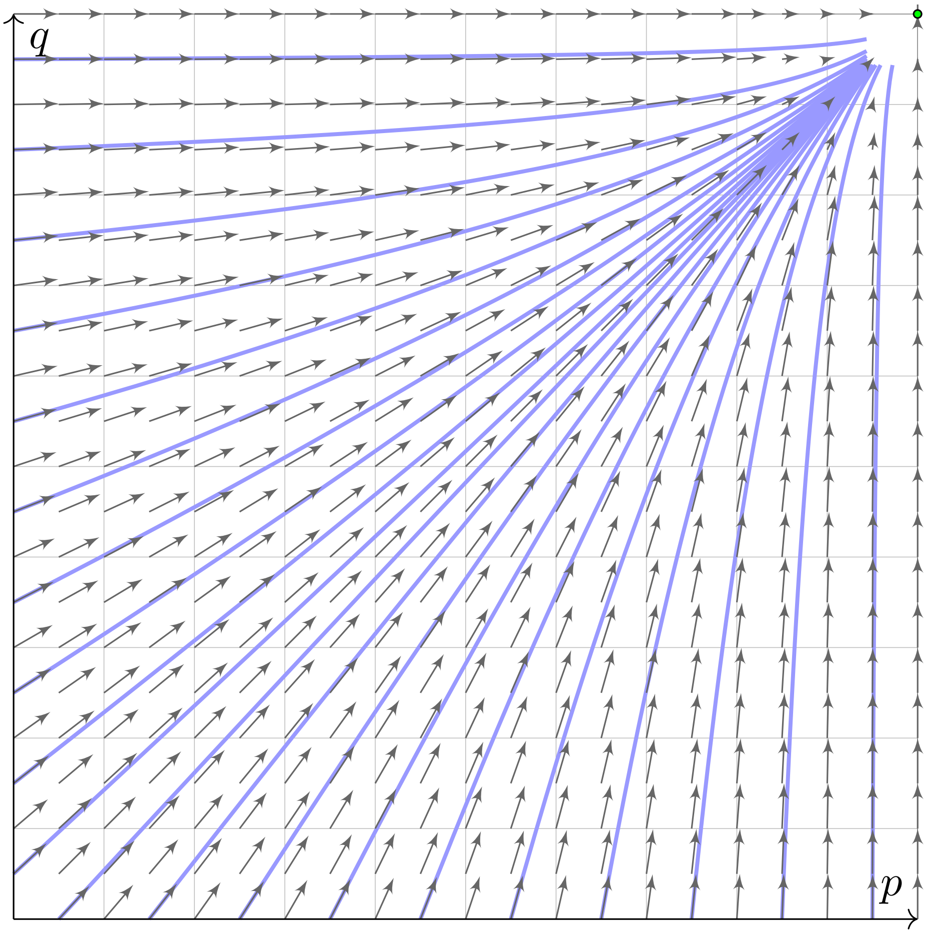


Nash–Dynamik zum Gefangenendilemma

B / A	schweigen	gestehen
schweigen	A: -1, B: -1	A: -5, B: 0
gestehen	A: 0, B: -5	A: -4, B: -4

Zur Illustration skizzieren wir hierzu die Nash–Funktion $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ als Vektorfeld $f(p,q) - (p,q)$, zur schöneren Darstellung in der Länge beschränkt.

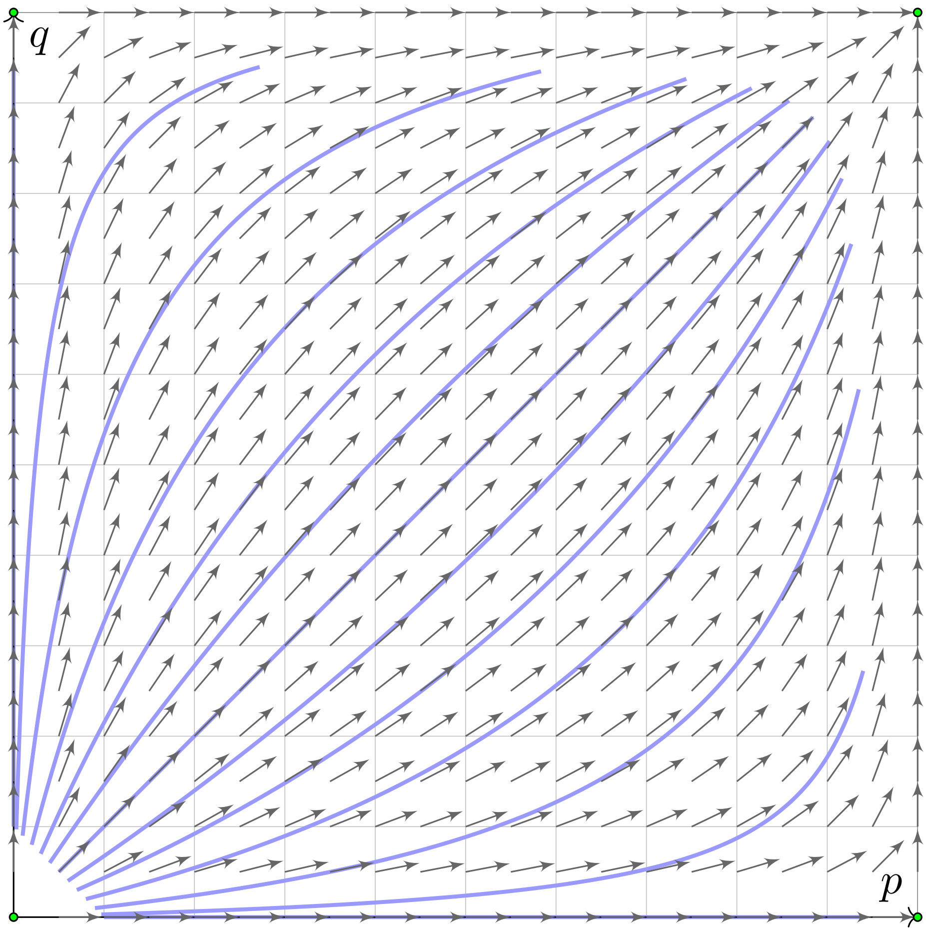
Wir sehen wunderbar den einzigen Fixpunkt des Vektorfeldes. Für das Spiel $\bar{u}$ ist dies das einzige Nash–Gleichgewicht.



Replikator-Dynamik zu Gefangenendilemma

Zur Erinnerung die Daten des *Gefangenendilemmas* $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

B / A	schweigen	gestehen
schweigen	A: -1, B: -1	A: -5, B: 0
gestehen	A: 0, B: -5	A: -4, B: -4



Evolutionär stabile Strategien

Gegeben sei ein endliches reelles Spiel $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}^2$. Seine affine Fortsetzung $\bar{u} : \bar{S}_1 \times \bar{S}_2 \to \mathbb{R}^2$ interpretieren wir als Populationsmodell.

Zudem sei u symmetrisch, also $S_1 = S_2 = S$ und $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$, und somit $\bar{S}_1 = \bar{S}_2 =: \bar{S}$ und $\bar{u}_1(s_1, s_2) = \bar{u}_2(s_2, s_1) =: v(s_1, s_2)$.

Dank E1F existieren symmetrische Nash–Gleichgewichte $(s, s) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$. Das bedeutet, die Strategie $s \in \bar{S}$ erfüllt $v(s, s) \ge v(\tilde{s}, s)$ für alle $\tilde{s} \in \bar{S}$.

Zur Strategie $s \in \bar{S}$ tritt nun eine Mutation $\tilde{s} \in \bar{S}$ mit kleiner Wkt $\varepsilon > 0$. Die Gesamtpopulation verschiebt sich somit von s zu $s' = (1 - \varepsilon)s + \varepsilon\tilde{s}$.

Vor diesem Hintergrund s' vergleichen wir die Fitness von s bzw. $\tilde{s}$:

$$\begin{aligned} f(s) &= v(s, s') = (1-\varepsilon)v(s,s) + \varepsilon v(s,\tilde{s}) \\ f(\tilde{s}) &= v(\tilde{s}, s') = \underbrace{(1-\varepsilon)v(\tilde{s},s)}_{\text{nullte Ordnung}} + \underbrace{\varepsilon v(\tilde{s},\tilde{s})}_{\text{erste Ordnung}} \end{aligned}$$

Dabei soll $f(s) > f(\tilde{s})$ gelten für alle $\varepsilon \in \,]0, \delta[$ und ein festes $\delta > 0$. Das führt uns unmittelbar zu der folgenden praktischen Definition.

Evolutionär stabile Strategien

Gegeben sei ein endliches symmetrisches Spiel $u : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mit $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$, und seine Fortsetzung auf gemischte Strategien

$$\bar{u} \;:\; \bar{S} \times \bar{S} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; (s_1, s_2) \mapsto \big(v(s_1, s_2),\, v(s_2, s_1) \big).$$

Definition G3A: evolutionär stabile Strategien

Die Strategie $s \in \bar{S}$ heißt **evolutionär stabil** gegen $\tilde{s} \in \bar{S}$, wenn gilt:

- entweder strikt $v(s, s) > v(\tilde{s}, s)$
- oder schwach $v(s, s) = v(\tilde{s}, s)$, aber $v(s, \tilde{s}) > v(\tilde{s}, \tilde{s})$.

Gilt dies für alle $\tilde{s} \in \bar{S} \setminus \{s\}$, so heißt s **evolutionär stabil**, kurz:

$$\mathrm{ESS}(\bar{u}) := \{\, s \in \bar{S} \mid s \text{ ist evolutionär stabil} \,\}$$

Aufgabe: Für jedes reelle symmetrische Spiel u gilt:

$$(s, s) \in \mathrm{NE}^!(\bar{u}) \quad\Longrightarrow\quad s \in \mathrm{ESS}(\bar{u}) \quad\Longrightarrow\quad (s, s) \in \mathrm{NE}(\bar{u})$$

Die Umkehrungen gelten i.A. nicht, wie Gegenbeispiele zeigen.

Evolutionär stabile Strategien

Wir wollen die Formel ausführlicher herleiten und diskutieren.

Sei $S = S_1 = S_2 = \{s_0, s_1, \dots, s_\ell\}$ die Strategiemenge. Im Kontext der Evolutionstheorie können wir uns jedes s_k als einen Genotyp vorstellen.

Die aktuelle Population besteht aus einer Mischung $s = \sum_{j=0}^{\ell} p_j s_j$, wobei wie immer $p_0, p_1, \dots, p_\ell \ge 0$ und $p_0 + p_1 + \dots + p_\ell = 1$ gilt.

Das vorgegebene Spiel $u : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (s_i, s_j) \mapsto (v(s_i, s_j), v(s_j, s_i))$ beschreibt die Interaktion zweier Individuen vom Genotyp s_i und s_j.

Die Spielersymmetrie bedeutet, dass keiner als „erster“ oder „zweiter“ Spieler ausgezeichnet wird. Die Paarungen werden zufällig ausgelost gemäß der in der Population $s = \sum_{j=0}^{\ell} p_j s_j$ vorliegenden Häufigkeiten.

Bezüglich der aktuellen Population $s \in \bar{S}$ hat jede reine Strategie $s_i \in S$ die Fitness $f(s_i) = v(s_i, s) = \sum_{j=0}^{\ell} p_j v(s_i, s_j)$, denn s_i spielt gegen s.

Die durchschnittliche Fitness in der Population s ist daher

$$f(s) = v(s, s) = \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell} p_i p_j v(s_i, s_j).$$

Evolutionär stabile Strategien

Die Mutation $\tilde{s}$ tritt mit einer kleinen Wkt $\varepsilon > 0$ auf. Dies verschiebt die bisherige Population s zur veränderten Mischung $s' = (1-\varepsilon)s + \varepsilon\tilde{s}$.

Bezüglich dieser neuen Gesamtpopulation s' vergleichen wir die durchschnittliche Fitness der alten Population s mit der Mutation $\tilde{s}$:

$$f(s) = v(s, s') = (1-\varepsilon)v(s, s) + \varepsilon v(s, \tilde{s})$$
$$f(\tilde{s}) = v(\tilde{s}, s') = (1-\varepsilon)v(\tilde{s}, s) + \varepsilon v(\tilde{s}, \tilde{s})$$

☺ Entscheidend ist diese vereinfachende Annahme unseres Modells: Die Paarungen werden zufällig ausgelost gemäß der in der Population s' vorliegenden Häufigkeiten. Keiner kann sich sein Gegenüber aussuchen. Das ist realistisch, wenn die Individuen (nahezu) ununterscheidbar sind.

Wir nutzen die Linearität von v im zweiten Parameter $s' = (1-\varepsilon)s + \varepsilon\tilde{s}$. Der termweise Vergleich führt zu den oben genannten Ungleichungen.

⚠ Wir vereinfachen hier radikal. Die Analyse ist komplizierter und verläuft anders, wenn sich die Teilpopulationen nicht zufällig mischen, sondern meiden oder suchen, oder räumlich inhomogen verteilt sind.

Fishers Erklärung der Geschlechterverteilung

Warum ist das beobachtete Geschlechterverhältnis recht stabil $1:1$? Diese wichtige Feststellung lässt sich spieltheoretisch erklären siehe `en.wikipedia.org/wiki/Fisher's_principle`. Hier die Kurzfassung:

Angenommen, Männchen würden seltener geboren als Weibchen. Dann hat im Durchschnitt jedes neugeborene Männchen mehr Nachkommen als ein neugeborenes Weibchen. Eltern mit Disposition zu männlichem Nachwuchs haben daher mehr Enkel. Die Gene hierfür verbreiten sich daher etwas schneller und korrigieren so das Geschlechterverhältnis in Richtung $1:1$, wobei der genannte Vorteil langsam verschwindet. Dasselbe gilt, wenn mehr Weibchen als Männchen geboren werden. Mit anderen Worten: Das $1:1$ Verhältnis ist evolutionär stabil (ESS).

Probably the most celebrated argument in evolutionary biology.

Heutzutage wird die spieltheoretische Beschreibung selbstverständlich als grundlegendes quantitatives Modell in der Biologie angewendet. Umgekehrt ist die evolutionäre Sichtweise in der Spieltheorie fest verankert, als nützliche Deutung und als Untersuchungsgegenstand.

Evolutionär stabile Strategien

Übung: Formulieren Sie hierzu ein quantitatives Modell.

Übung: Manche Autoren definieren stabile Gleichgewichte $s \in \bar{S}$ durch leicht abweichende Bedingungen, etwa eines der folgenden:

$$
\begin{array}{llll}
(1) & v(s,s) > v(\tilde{s},s) & \text{oder} & \big[v(s,s) = v(\tilde{s},s) \quad \text{und} \quad v(s,\tilde{s}) > v(\tilde{s},\tilde{s})\big] \\
(2) & v(s,s) \ge v(\tilde{s},s) & \text{und} & v(\tilde{s},s) > v(\tilde{s},\tilde{s}) \\
(3) & v(s,s) \ge v(\tilde{s},s) & \text{und} & v(s,s) > v(\tilde{s},\tilde{s})
\end{array}
$$

für alle Alternativen $\tilde{s} \in \bar{S} \smallsetminus \{s\}$. Welche Implikationen gelten zwischen diesen drei Definitionen und (strikten) Nash–Gleichgewichten?

Übung: Wir nutzen evolutionäre Stabilität für paarweise Interaktion in einem symmetrischen Zwei-Personen-Spiel. Wie sieht die Bedingung für symmetrische Drei-Personen-Spiele aus? und n–Personen-Spiele?

Übung: Sei $u : S \times S \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein endliches symmetrisches Spiel.
(1) Sei $\sharp S = 2$. Hat $\bar{u}$ immer ein evolutionär stabiles Gleichgewicht?
(2) Sei $\sharp S = 3$. Hat $\bar{u}$ immer ein evolutionär stabiles Gleichgewicht?

Evolutionär stabile Strategien

NATURE VOL. 246 NOVEMBER 2 1973

The Logic of Animal Conflict

J. MAYNARD SMITH
G. R. PRICE

Conflicts between animals of the same species usually are of "limited war" type, not causing serious injury. This is often explained as due to group or species selection for behaviour benefiting the species rather than individuals. Game theory and computer simulation analyses show, however, that a "limited war" strategy benefits individual animals as well as the species.

Evolutionär stabile Strategien

Spieltheorie wird erfolgreich in der theoretischen Biologie angewendet, insbesondere der Evolutionstheorie. Hier ist der Hauptmechanismus nicht individuelle Rationalität, sondern die Evolution der Population. Diese wird angetrieben durch Vererbung, Mutation und Selektion.

Evolutionär stabile Strategien (ESS) wurden 1973 eingeführt von John Maynard Smith and George Robert Price: *The logic of animal conflict*, Nature 246 (1973) 15–18. Seither gehören sie zu den allgegenwärtigen Werkzeugen der Spieltheorie, insbesondere in ihren Anwendungen auf evolutionäre Modelle, sowohl in der Biologie als auch in der Ökonomie. Dieses Konzept kann zahlreiche biologische Phänomene beschreiben und logisch begründen: Es bietet rationale Erklärungen für empirische Beobachtungen, die sonst kaum theoretisch zugänglich wären.

Die mathematische Formulierung dieses Konzepts und das Verständnis seiner zahlreichen Anwendungen war ein Meilenstein der theoretischen Biologie und wurde vielfach mit Preisen ausgezeichnet. Im Rückblick ist kaum vorstellbar, wie lang und mühsam der Kristallisationsprozess war.

Taube oder Falke?

Gelegentlich kämpfen zwei Individuen einer Population um eine Beute, vom Wert 2. Jedes agiert als Taube (defensiv) oder als Falke (offensiv). Der Ausdruck *hawk or dove* bezeichnet allgemein solches Verhalten.

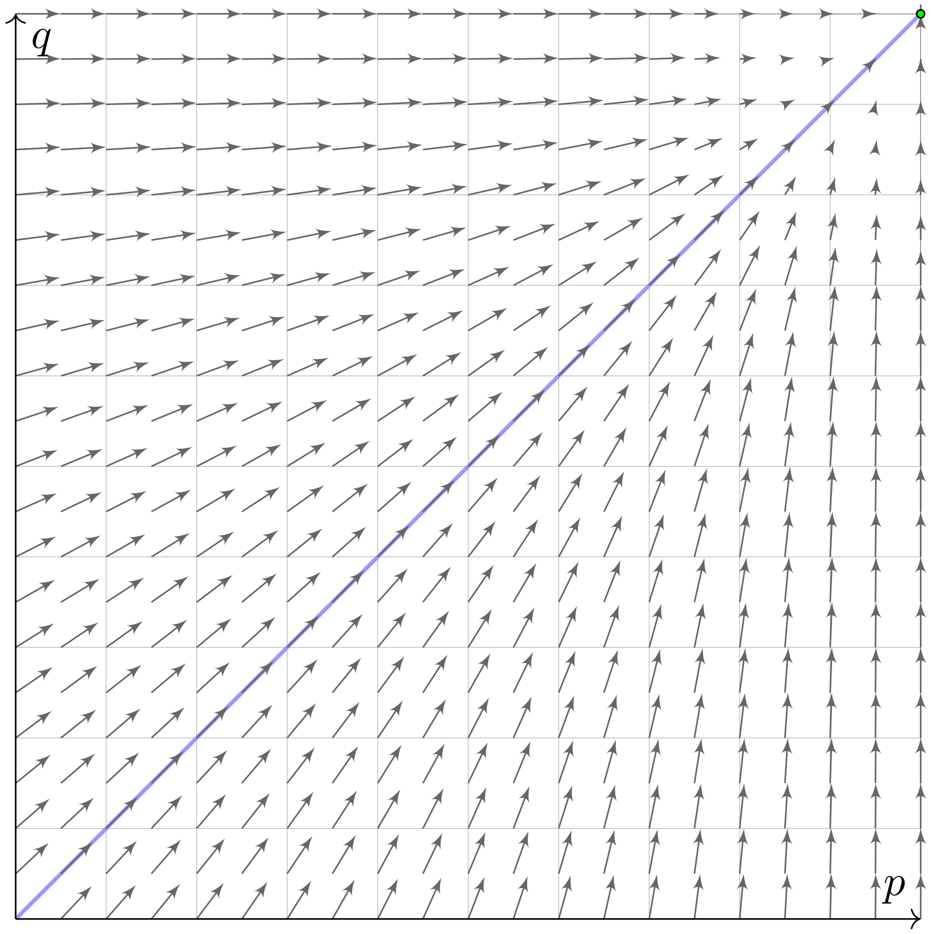
Spielen beide Taube, so teilen sie sich die Beute. Spielt nur einer Falke, so bekommt er die gesamte Beute. Spielen beide Falke, so kämpfen sie, der Wert wird reduziert und geteilt. Das entspricht folgender Normalform:

A \ B	Taube	Falke
Taube	1 / 1	0 / 2
Falke	2 / 0	$1-a$ / $1-a$

Aufgabe: Finden Sie zu $a \in \mathbb{R}$ alle (symmetrischen) Gleichgewichte in gemischten Strategien. Welche davon sind evolutionär stabil?

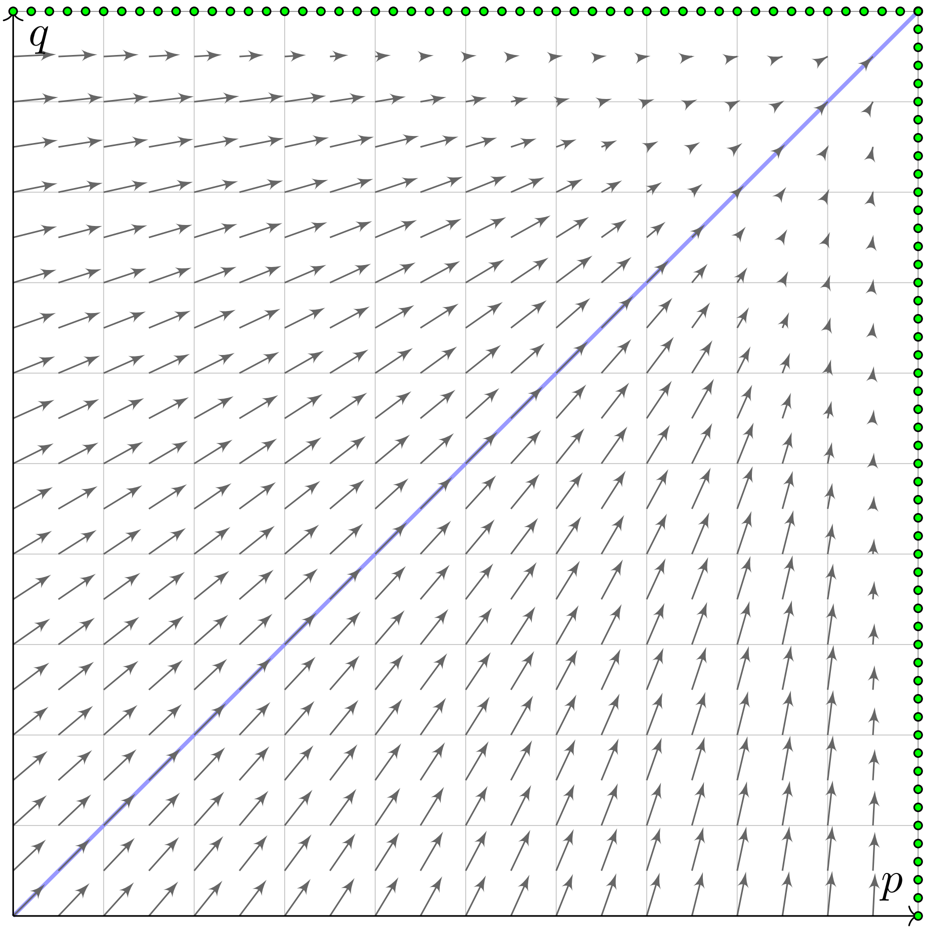
Taube oder Falke?

$a = {}^{1}\!/_{2}$



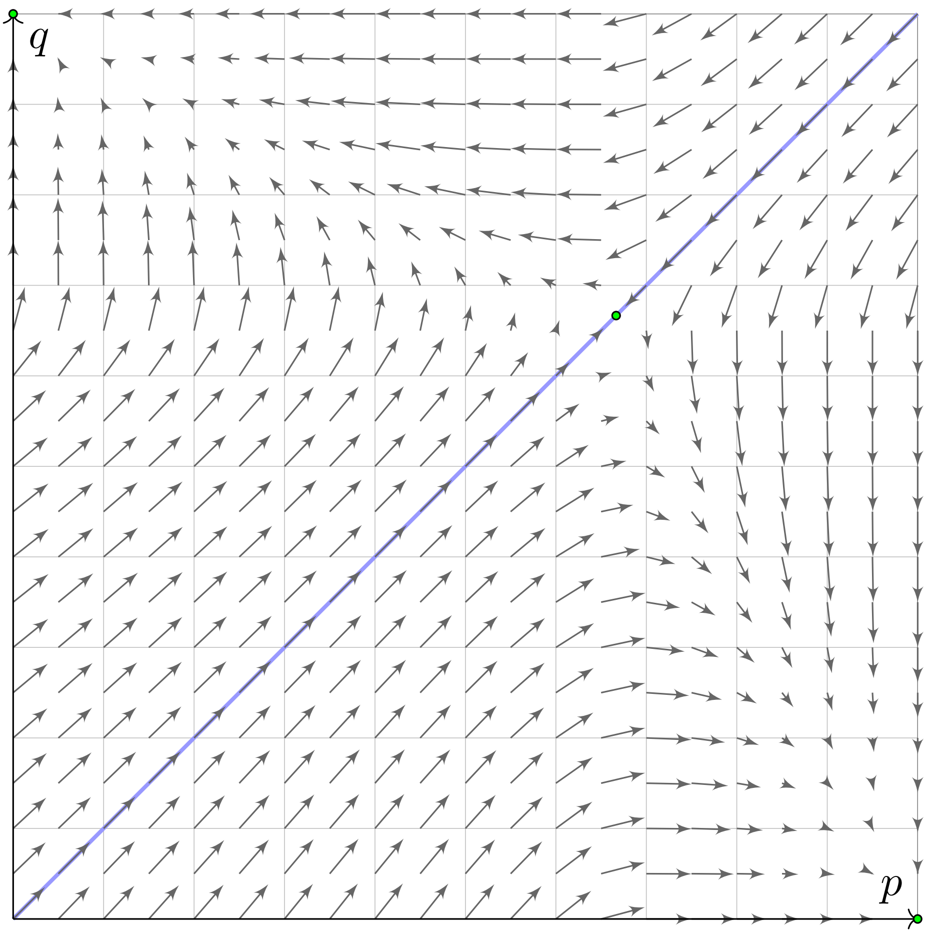
Taube oder Falke?

$a = 1$



Taube oder Falke?

$a = 3/2$



Taube oder Falke?

Lösung: Für $a < 1$ existiert genau ein Gleichgewicht, $(\mathrm{Falke}, \mathrm{Falke})$, denn die Strategie Taube wird strikt dominiert durch die Strategie Falke. Eine Mutation Taube kann sich in dieser reinen Falken–Population nicht durchsetzen, da sie offensichtlich Fitnessnachteile hat.

Im Sonderfall $a = 1$ gibt es unendlich viele gemischte Gleichgewichte, nämlich (s, Falke) und (Falke, s) für jede gemischte Strategie $s \in \bar{S}$.

Für $a > 1$ hat das Spiel die beiden reinen Gleichgewichte $(\mathrm{Taube}, \mathrm{Falke})$ und $(\mathrm{Falke}, \mathrm{Taube})$, beide sind strikt, und zudem noch genau ein gemischtes Gleichgewicht (s, s) wie nachfolgend angegeben.

Für $a \ge 1$ hat das Spiel genau ein symmetrisches Gleichgewicht:

$$s = \tfrac{a-1}{a} \cdot \mathrm{Taube} + \tfrac{1}{a} \cdot \mathrm{Falke}.$$

Die folgende Rechnung bestätigt, dass dies ein Gleichgewicht ist. Ist diese Strategie evolutionär stabil? Wir wenden die Definition an!

Taube oder Falke?

Wir vergleichen das Gleichgewicht s mit einer alternativen Strategie

$$\tilde{s} = (1-p) \cdot \mathrm{Taube} + p \cdot \mathrm{Falke}.$$

Wir finden durch geduldiges Ausrechnen:

$$\begin{aligned}
v(\mathrm{Taube}, s) &= \tfrac{a-1}{a}, & v(s, \mathrm{Taube}) &= \tfrac{a+1}{a}, & v(\mathrm{Taube}, \tilde{s}) &= 1-p,\\
v(\mathrm{Falke}, s) &= \tfrac{a-1}{a}, & v(s, \mathrm{Falke}) &= \tfrac{1-a}{a}, & v(\mathrm{Falke}, \tilde{s}) &= 2-p-ap,\\
v(\tilde{s}, s) &= \tfrac{a-1}{a}, & v(s, \tilde{s}) &= \tfrac{a+1-2ap}{a}, & v(\tilde{s}, \tilde{s}) &= 1-ap^2.
\end{aligned}$$

Hier gilt $v(s,s) = v(\tilde{s}, s) = (a-1)/a$ und $v(s,\tilde{s}) > v(\tilde{s},\tilde{s})$ für $p \ne {}^1/_a$:

$$v(s,\tilde{s}) - v(\tilde{s},\tilde{s}) = \tfrac{a+1-2ap}{a} - (1-ap^2) = a\big(p - \tfrac{1}{a}\big)^2 \ge 0$$

🙂 Die Strategie s ist somit evolutionär stabil gegen alle $\tilde{s} \in \bar{S} \smallsetminus \{s\}$.

⚠ Eine Population nur aus Falken ist instabil, ebenso nur aus Tauben. Nur eine Population in der richtigen Mischung $s = \frac{a-1}{a} \cdot \mathrm{Taube} + \frac{1}{a} \cdot \mathrm{Falke}$ ist im Nash–Gleichgewicht. Sie ist zudem sogar evolutionär stabil gegen *alle* Eindringlinge / Mutanten $\tilde{s} \in \bar{S} \smallsetminus \{s\}$, egal ob rein oder gemischt.

Taube oder Falke?

⚠ Ich betone nochmals, dass wir hier nur symmetrische Spiele und symmetrische Strategien betrachten: Die gesamte Population spielt gegen sich selbst, das ist eine besondere Situation. In den Graphiken bedeutet das: Wir bewegen uns ausschließlich auf der Diagonalen!

⚠ Erlauben wir auch asymmetrische Strategiepaare $(s_1, s_2) \in \bar{S} \times \bar{S}$, so ist das obige Gleichgewicht (s, s) nicht stabil, wie die Graphik zeigt:

Wir betrachten stetig verteilte zufällige Abweichung (s_1, s_2) von (s, s). Fast jede entwickelt sich unter der Dynamik des Nash–Vektorfeldes zu einem der beiden Gleichgewichte $(\mathrm{Taube}, \mathrm{Falke})$ oder $(\mathrm{Falke}, \mathrm{Taube})$.

Diese beiden Nash–Gleichgewichte sind strikt, in diesem Sinne stabil. Die beiden Attraktionsbecken werden durch die Diagonale getrennt.

⚠ Ob ein Nash–Gleichgewicht (s, s) evolutionär stabil ist oder nicht, lässt sich am Nash–Vektorfeld erahnen, aber nicht sicher ablesen. Hierzu benötigen wir die Definition und eine sorgfältige Rechnung! Die vorige Aufgabe führt diese Untersuchung exemplarisch aus.

Taube oder Falke?

☺ Einen guten Überblick gibt die Klassifikation aller 2×2–Spiele bis auf schwach monotone Isomorphie. Der Parameter a definiert eine Homotopie von Spielen, wobei wir die Isomorphieklasse wechseln!

Kommt die Strategie Falke in einem evolutionär stabilen Gleichgewicht vor, dann zwingend auch die verlustreiche Konfrontation $(\mathrm{Falke}, \mathrm{Falke})$.

Mit **korrelierten Gleichgewichten** lässt sich dies vermeiden! Hierzu benötigen beide ein einfach zu beobachtendes Signal.

Die **Bourgeois-Strategie** bricht die Symmetrie wie folgt:
Spieler A ist derjenige, der die Beute zuerst besitzt / erjagt / findet.
Spieler B ist derjenige, der als zweites bei der Beute ankommt.

Dann ist die reine Strategie $(\mathrm{Falke}, \mathrm{Taube})$ ein Nash–Gleichgewicht. Es ist statistisch weniger verlustreich als gemischte Gleichgewichte. Dies erklärt zugleich das häufig beobachtete **Revierverhalten**.

Ebenso ist $(\mathrm{Taube}, \mathrm{Falke})$ ein Nash–Gleichgewicht, aber unsinnig. Praktisch hieße das nämlich: Der aktuelle Besitzer gibt bei jedem drohenden Konflikt freiwillig seine Beute auf. Das wäre höchst instabil.

Dynamik von Rock-Paper-Lizards

Wir untersuchen noch einmal das Spiel *Schere-Stein-Papier*, diesmal modifiziert durch die Auszahlung $a \in \mathbb{R}$ bei Gleichstand.

	s_1	s_2	s_3
s_1	a / a	-1 / $+1$	$+1$ / -1
s_2	$+1$ / -1	a / a	-1 / $+1$
s_3	-1 / $+1$	$+1$ / -1	a / a

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & +1 \\ +1 & a & -1 \\ -1 & +1 & a \end{pmatrix}$$

Aufgabe: (1) Finden Sie hier alle (symmetrischen) Gleichgewichte in gemischten Strategien. Welche davon sind evolutionär stabil?

(2) Formulieren Sie die Populationsdynamik $\dot{x} = f(x)$ auf $\Delta^2 \subset \mathbb{R}^3$ (a) gemäß dem Nash–Feld und (b) gemäß der Replikatorgleichung.

Dynamik von Rock-Paper-Lizards

Lösung: (2a) Das Nash–Feld $f : \Delta^2 \to \mathbb{R}^2$ ist

$$f_i(x) = \frac{x_i + [e_i^\intercal A\,x - x^\intercal A\,x]^+}{1 + \sum_{j=0}^{2} [e_j^\intercal A\,x - x^\intercal A\,x]^+} - x_i$$

(2b) Die Repliktorgleichung ist gegeben durch $f : \Delta^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

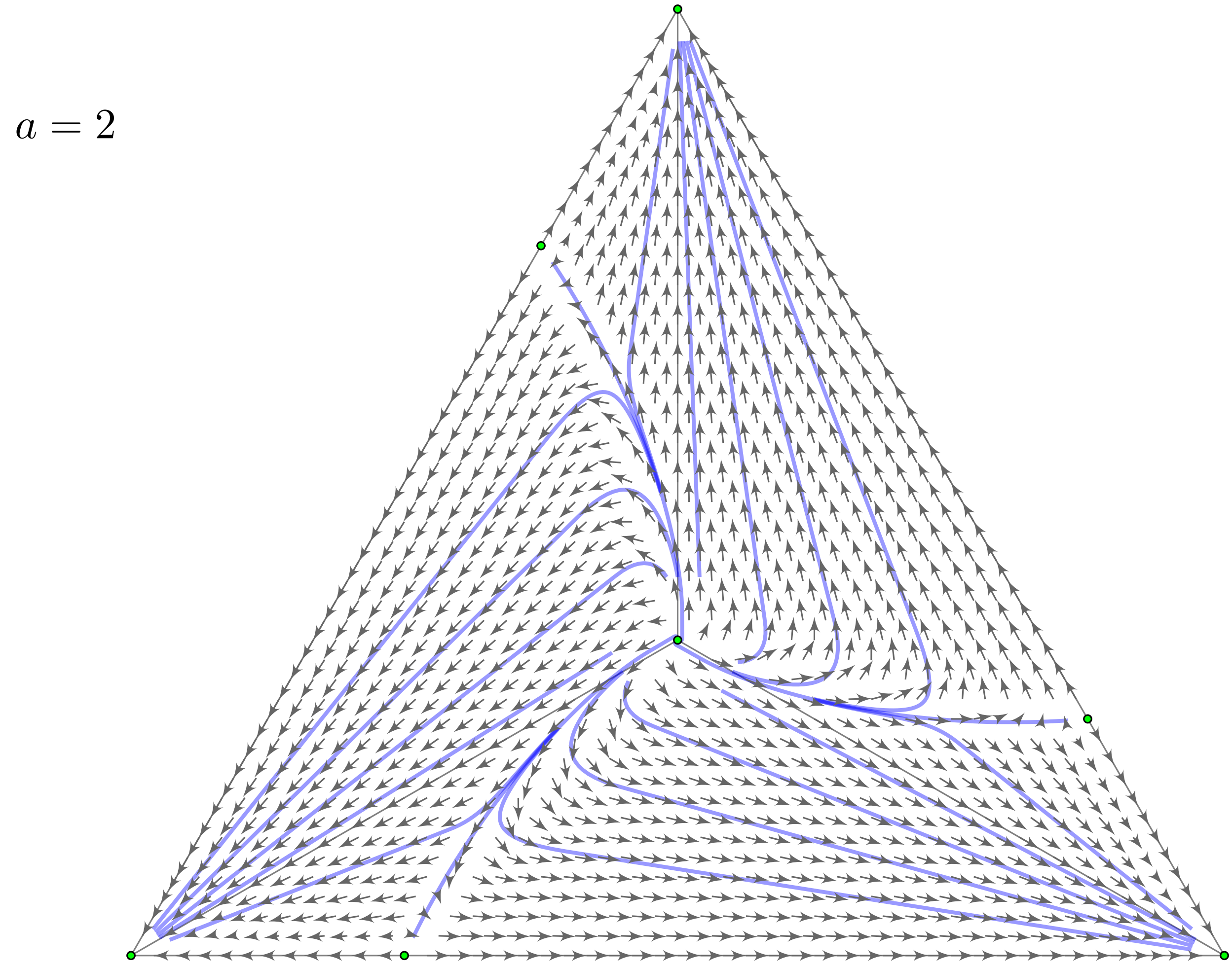
$$f_i(x) = x_i [e_i^\intercal A\,x - x^\intercal A\,x]$$

Die folgenden Skizzen zeigen die Populationsdynamik für verschiedene Parameterwerte $a \in \mathbb{R}$ sowie einige Flusslinien dieser beiden Felder.

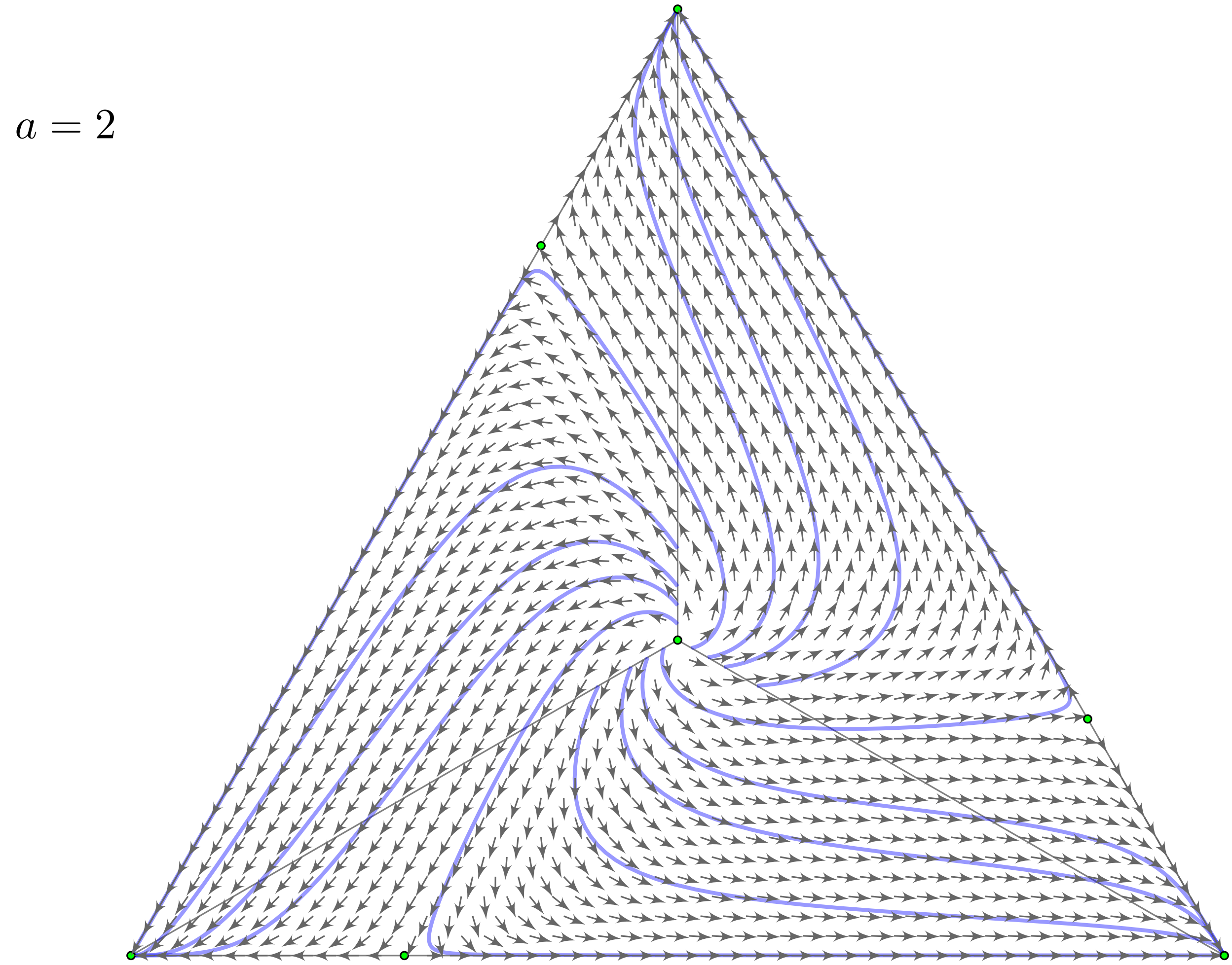
Zu jedem Startpunkt $x(t_0)$ garantiert der Satz von Picard–Lindelöf lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $x : \mathbb{R} \supset I \to \Delta^2$. Dies gilt sogar global, für maximale Lösungen $x : \mathbb{R} \to \Delta^2$: Alle Flusslinien verlaufen im Simplex Δ^2, denn das Vektorfeld f zeigt nirgends nach außen.

☺ Die zyklische Dynamik für $a = 0$ lässt sich in der Natur beobachten! Der Seitenfleckenleguan [*side-blotched lizard*] tritt in drei Varianten auf, deren Häufigkeit wie bei Schere-Stein-Papier zyklisch wechselt, siehe `en.wikipedia.org/wiki/Side-blotched_lizard`.

Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards

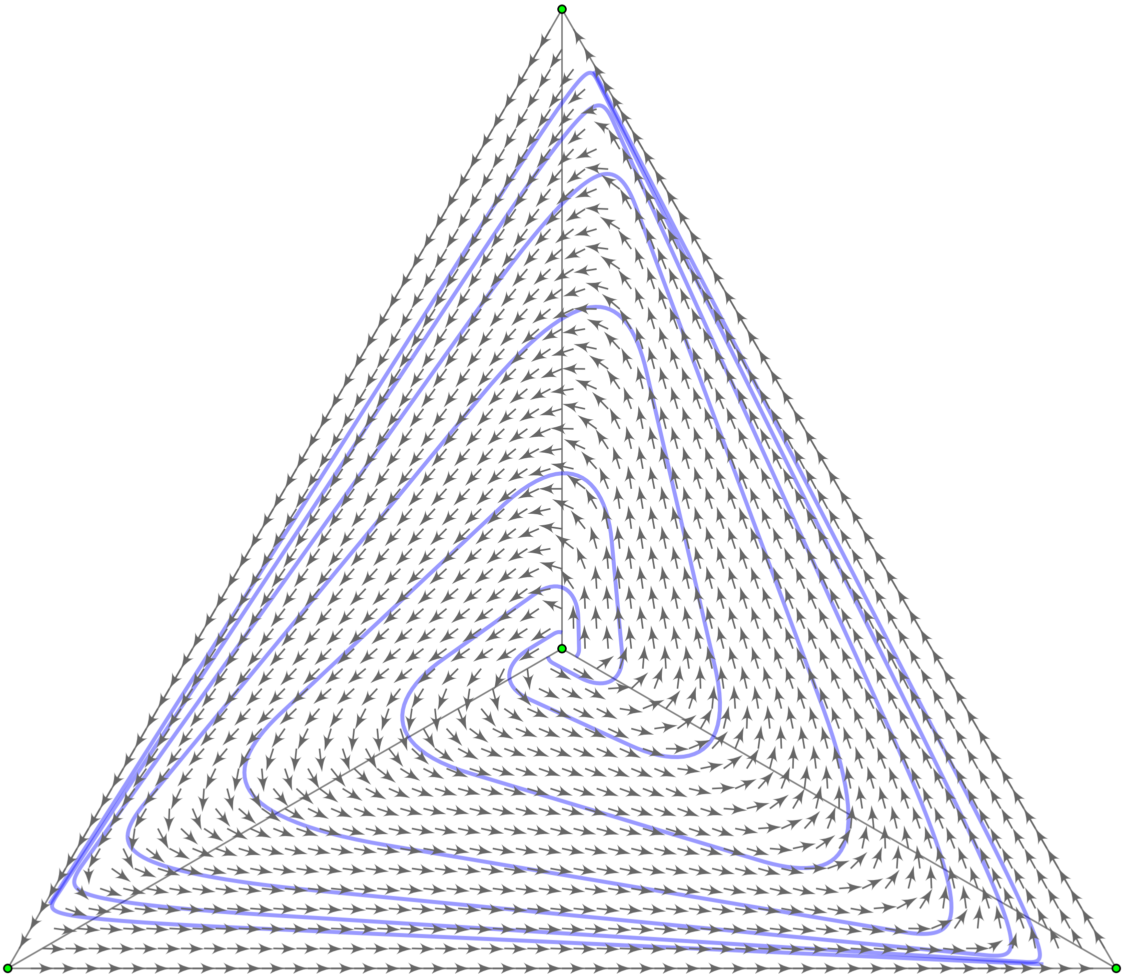


Replikator-Dynamik von Rock-Paper-Lizards



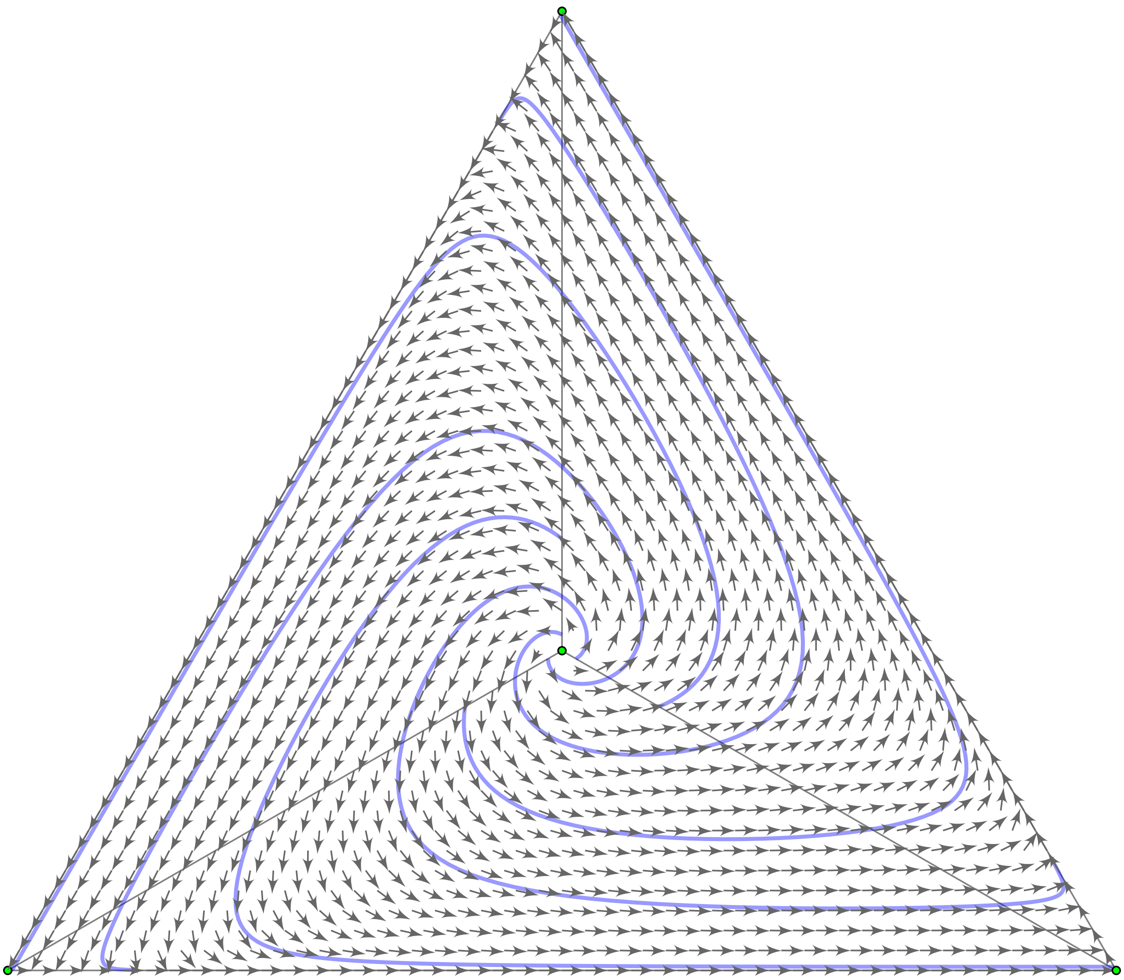
Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards

$a = 1$



Replikator-Dynamik von Rock-Paper-Lizards

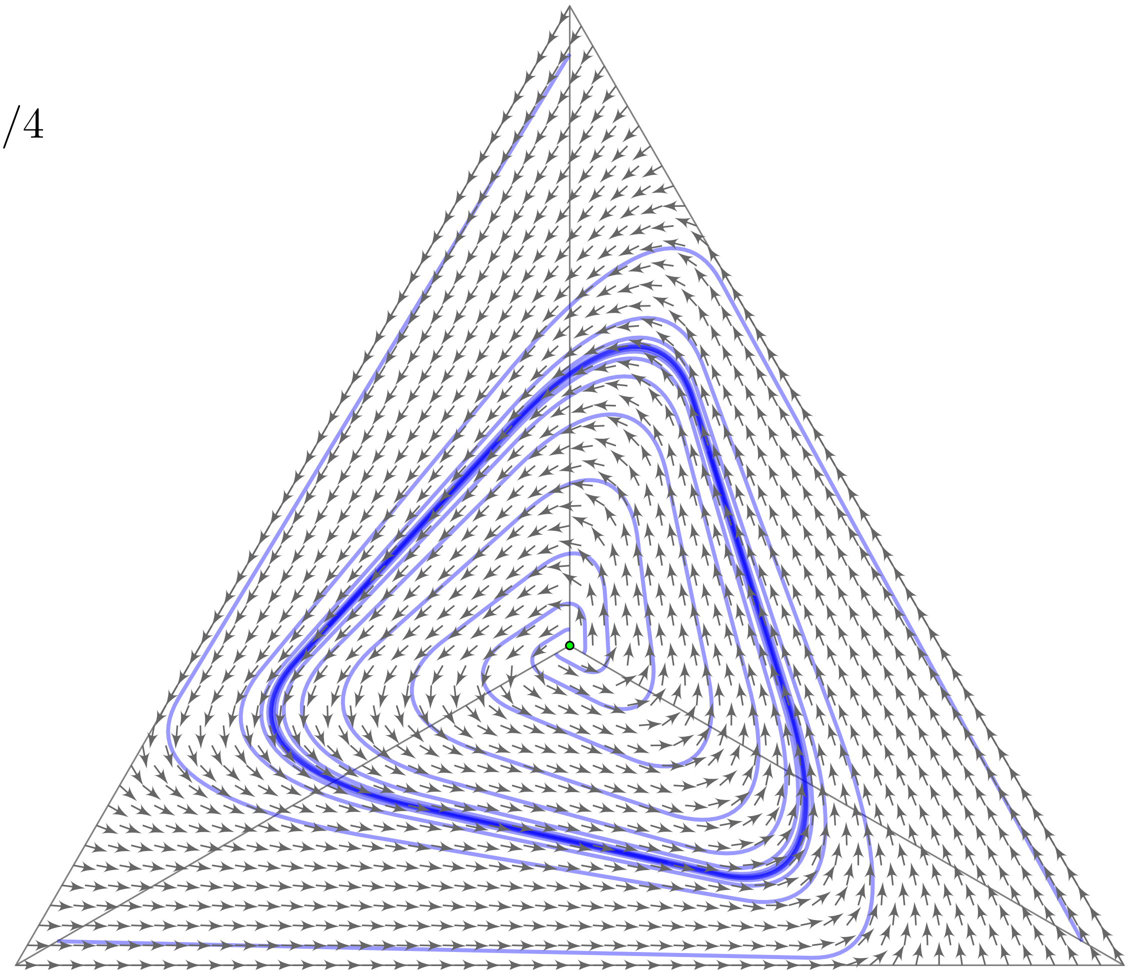
$a = 1$



Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards

G347

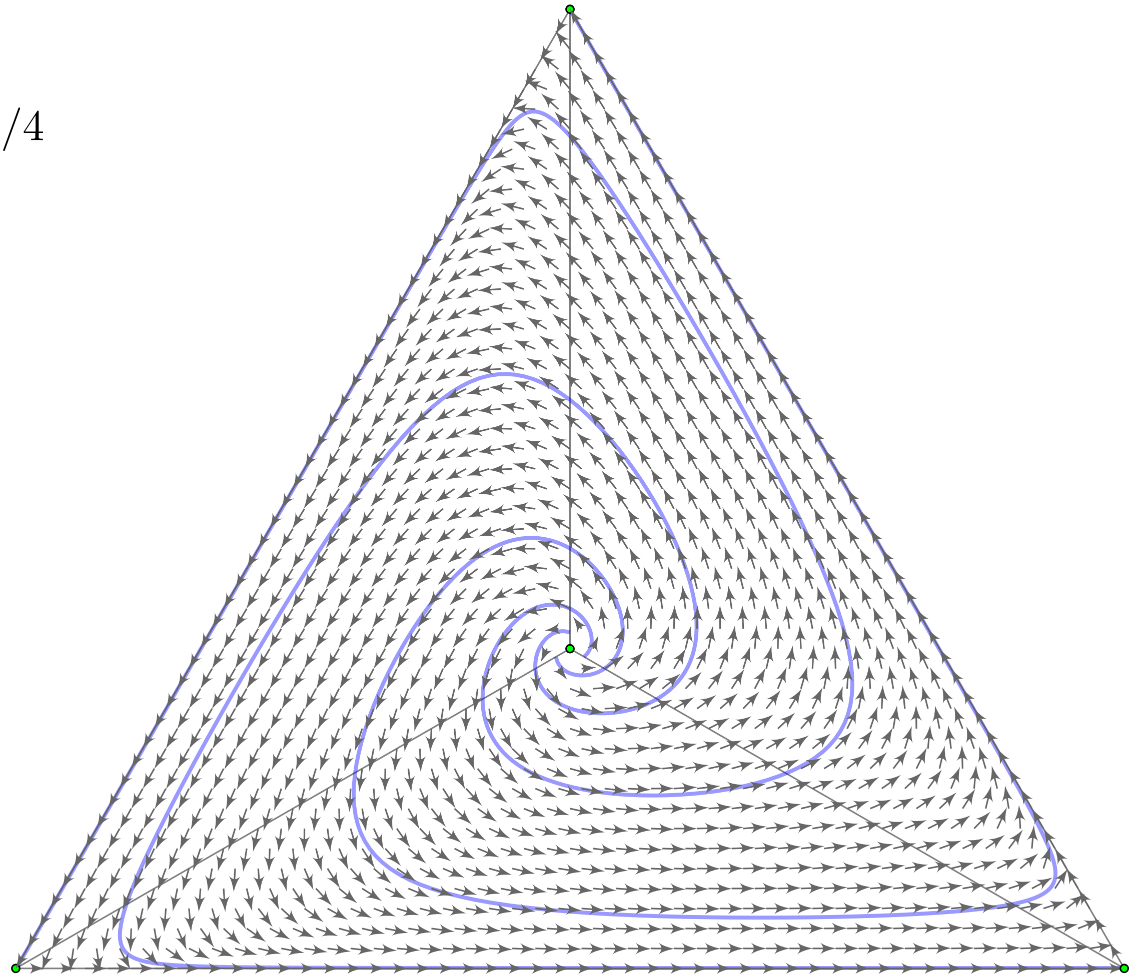
$a = 3/4$



Replikator-Dynamik von Rock-Paper-Lizards

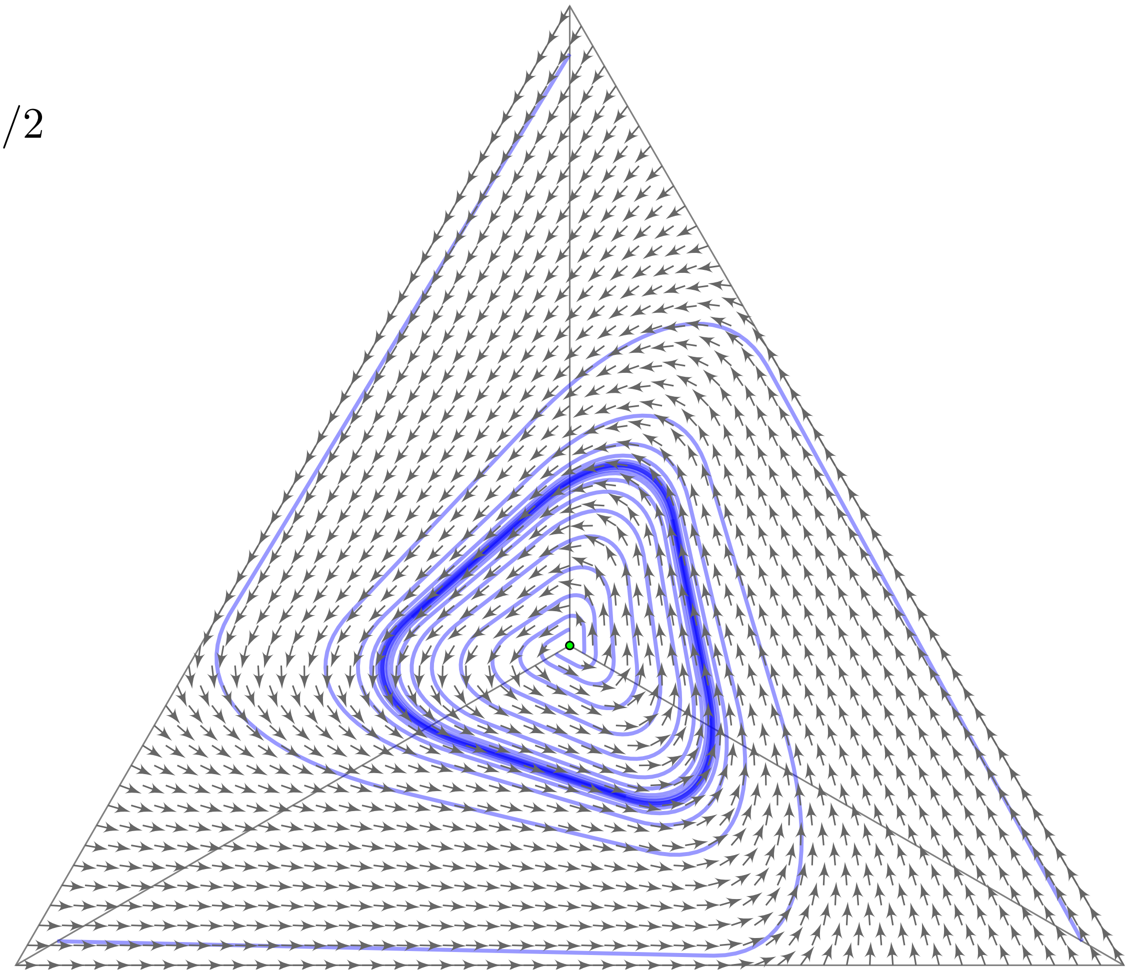
G348

$a = 3/4$



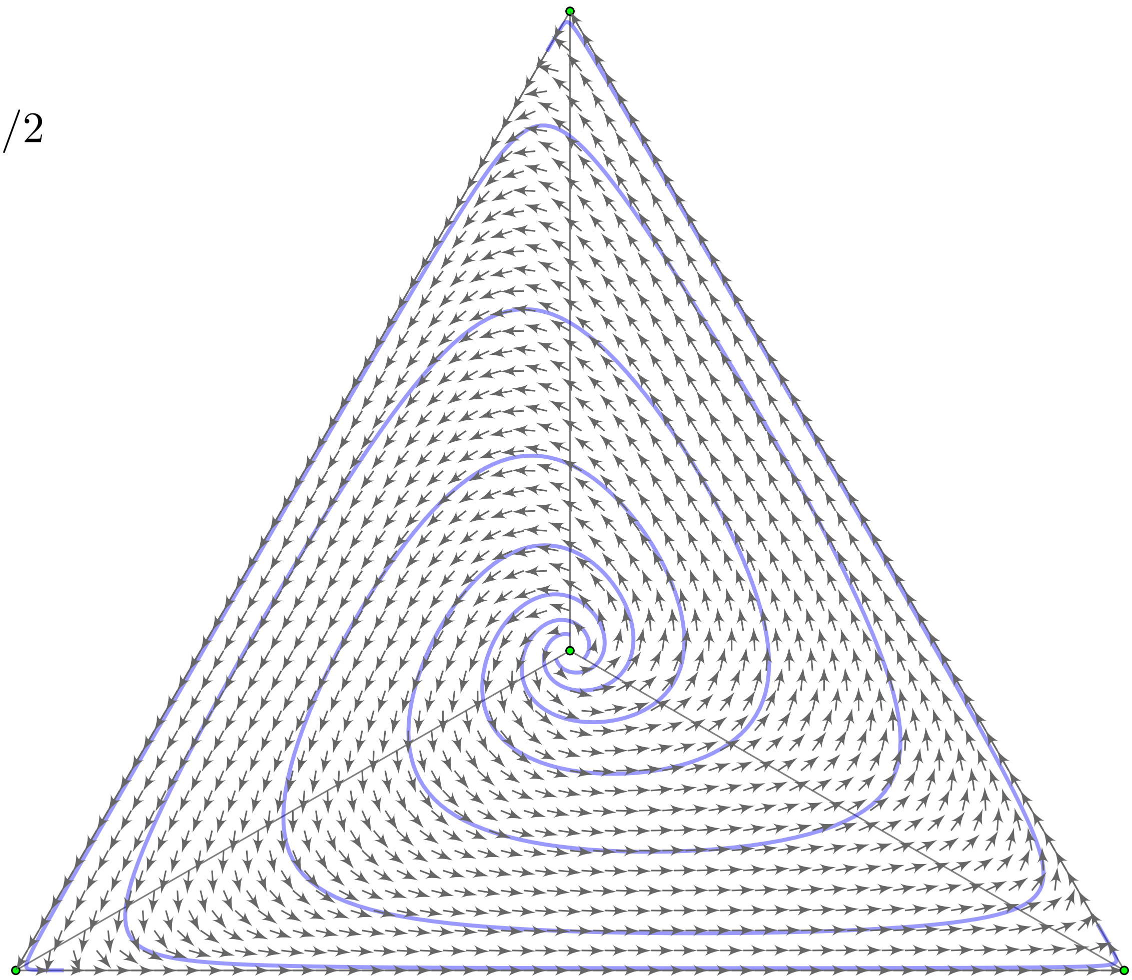
Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards

$a = 1/2$



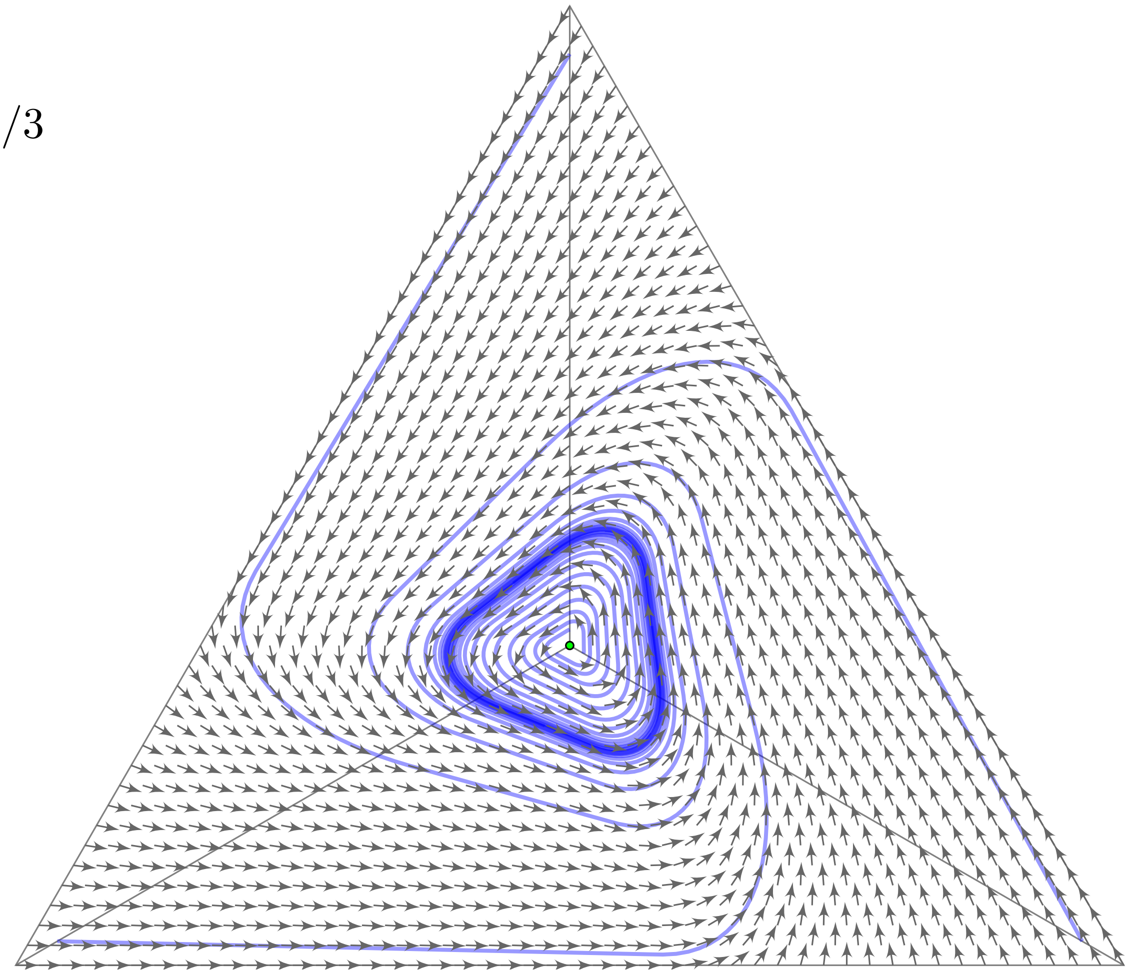
Replikator-Dynamik von Rock-Paper-Lizards

$a = 1/2$



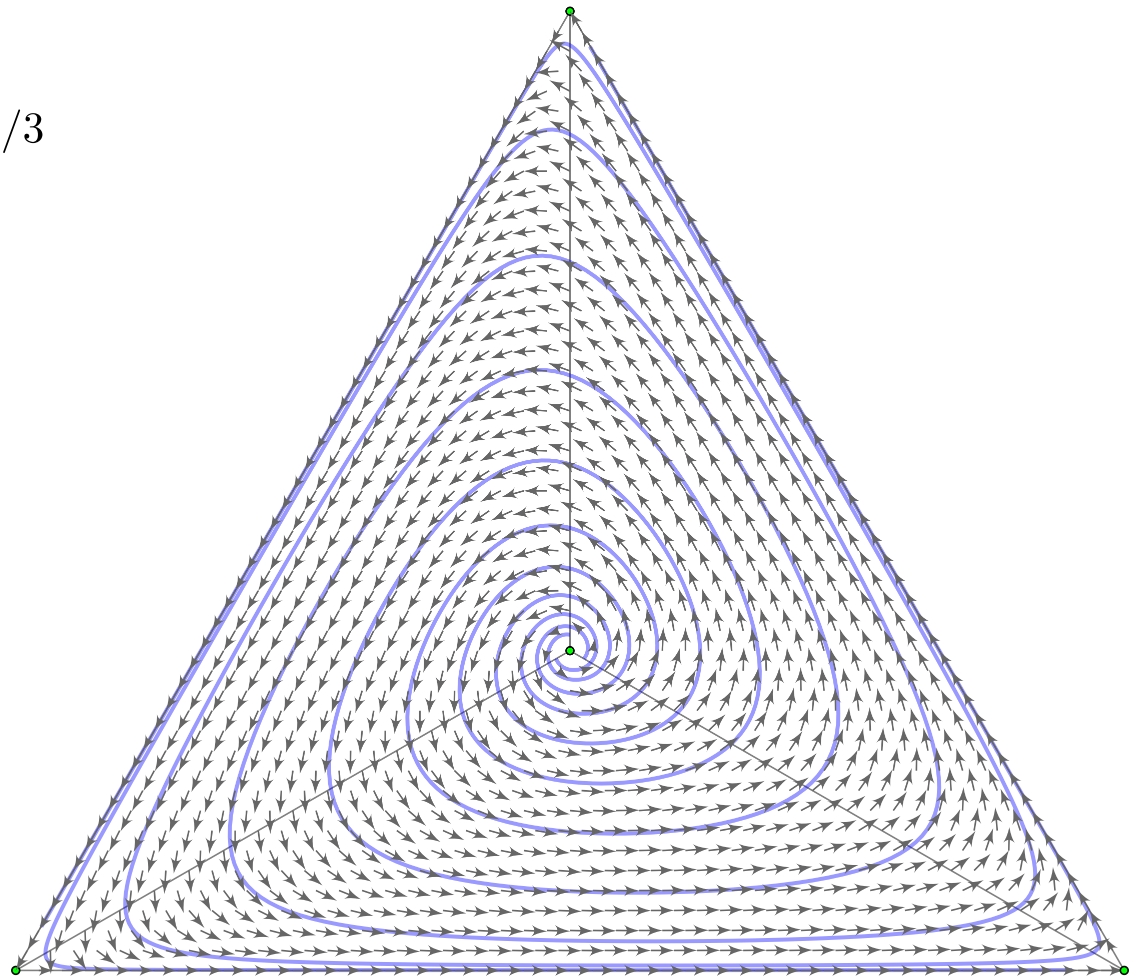
Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards

$a = 1/3$

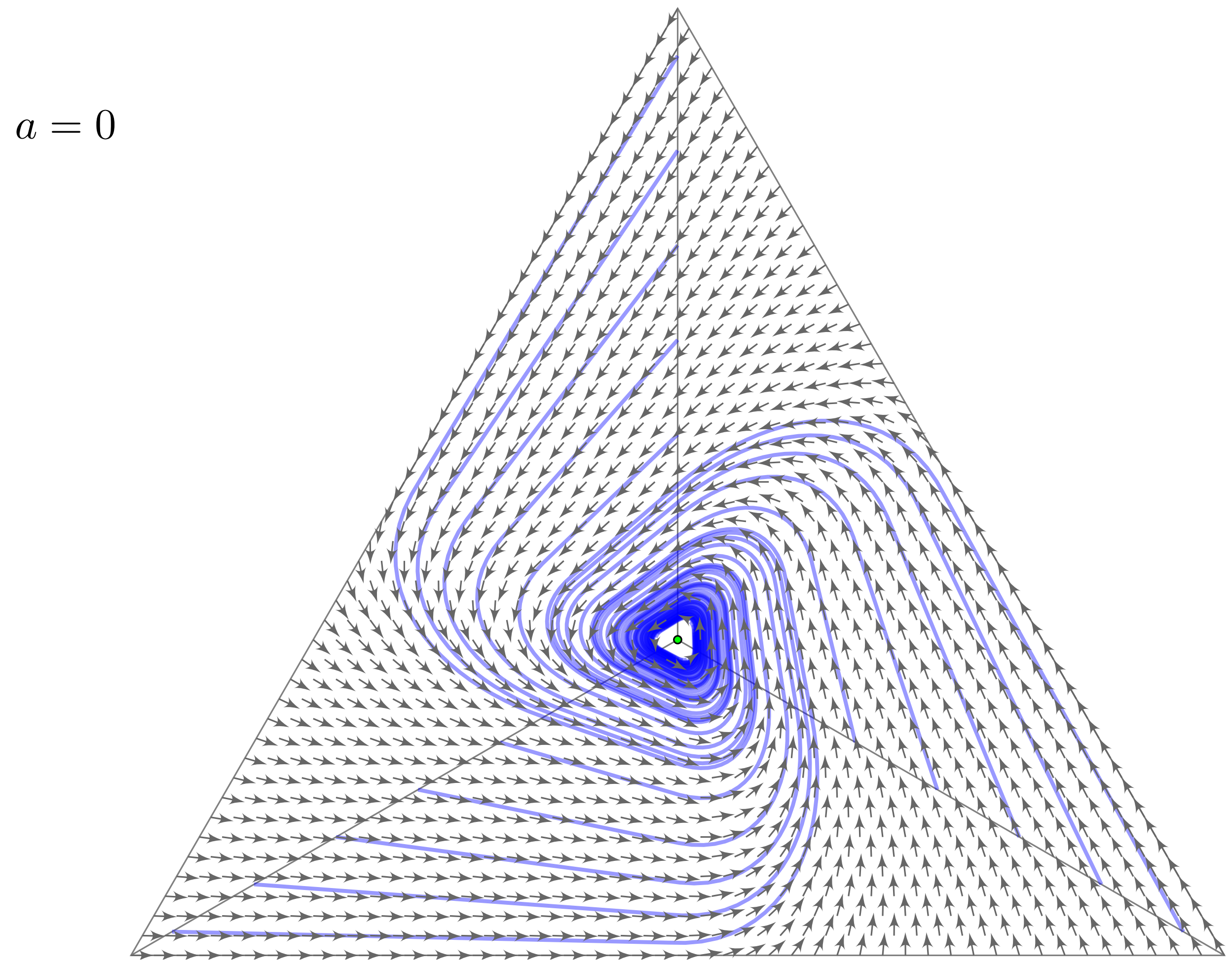


Replikator-Dynamik von Rock-Paper-Lizards

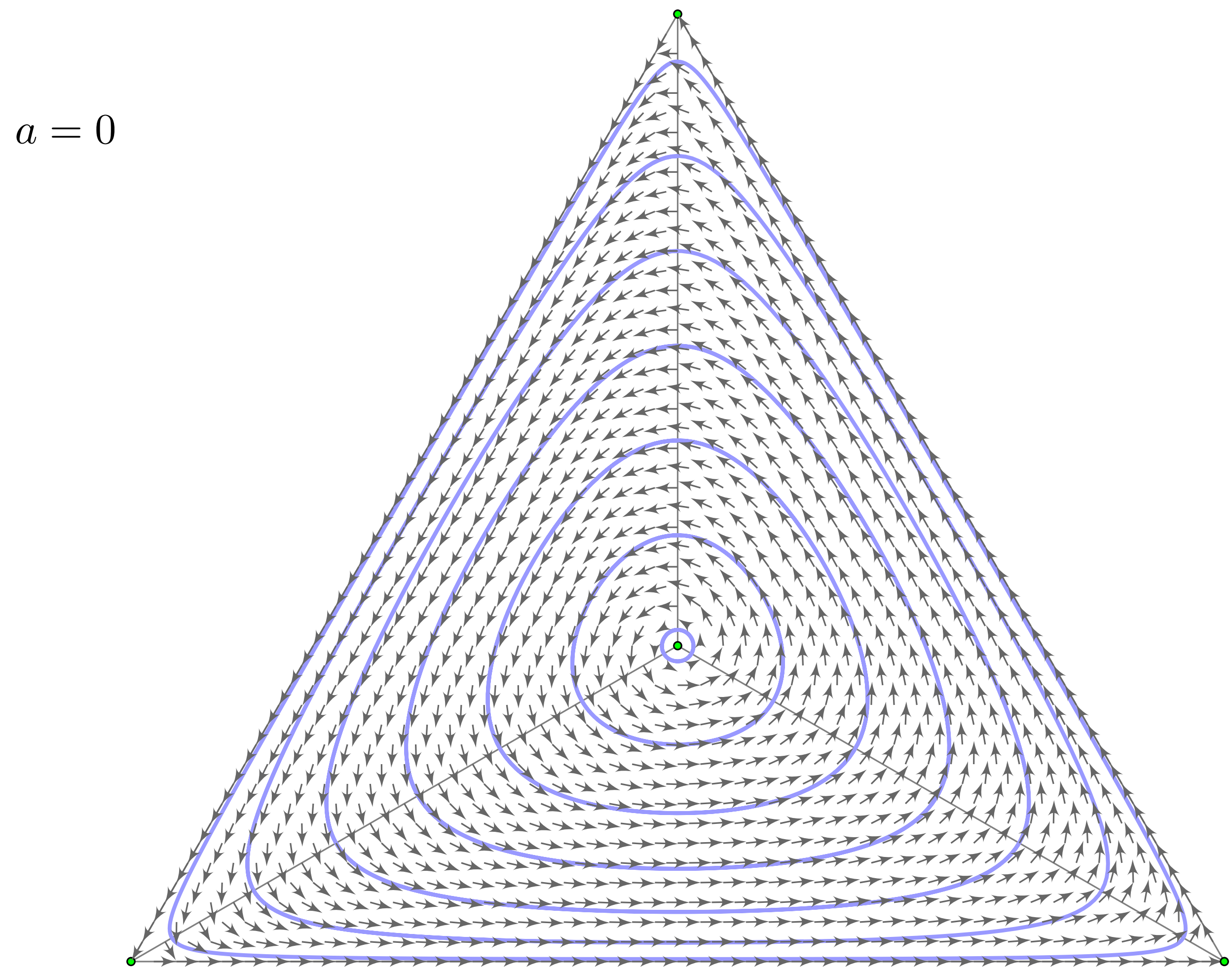
$a = 1/3$



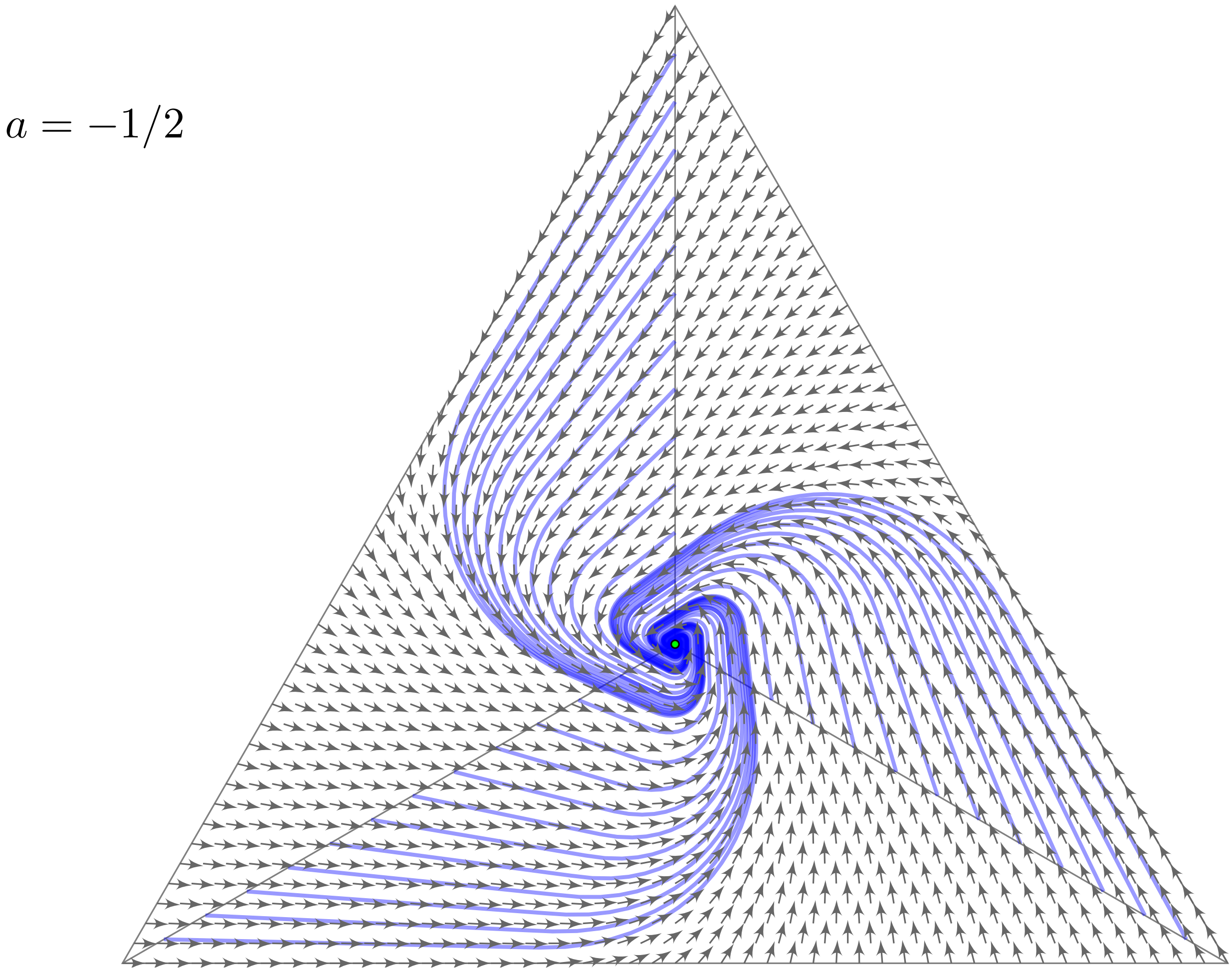
Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards



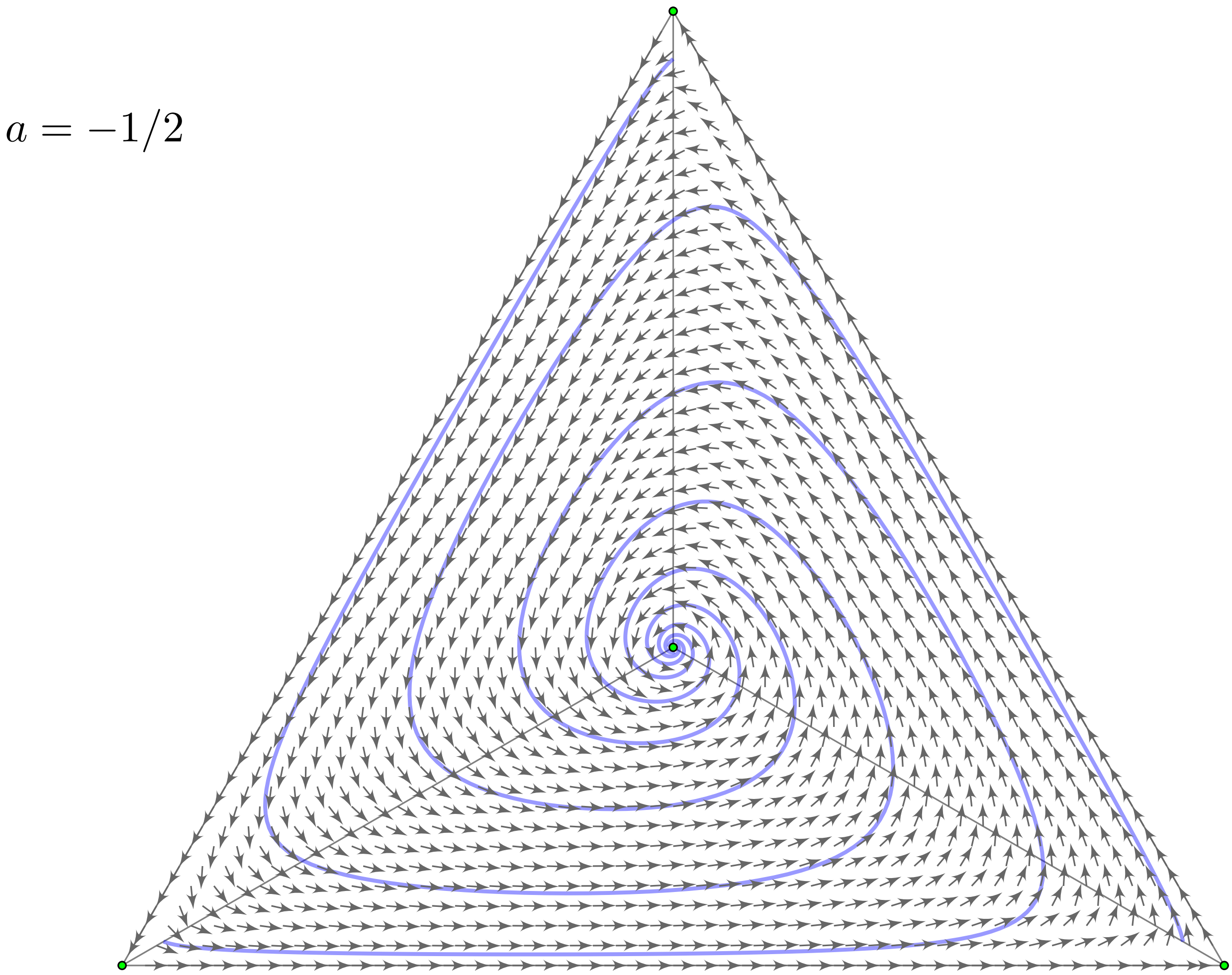
Replikator-Dynamik von Rock-Paper-Lizards



Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards



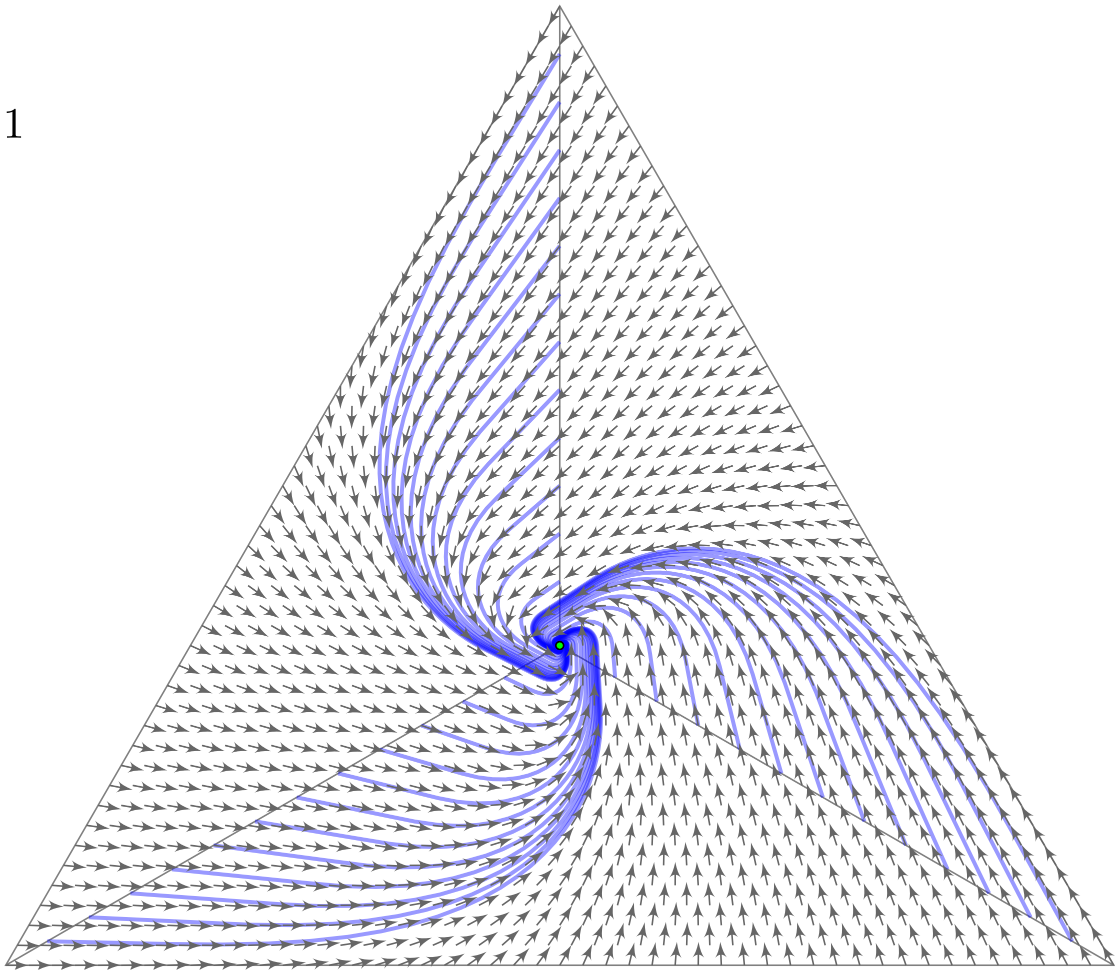
Replikator-Dynamik von Rock-Paper-Lizards



G357

Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards

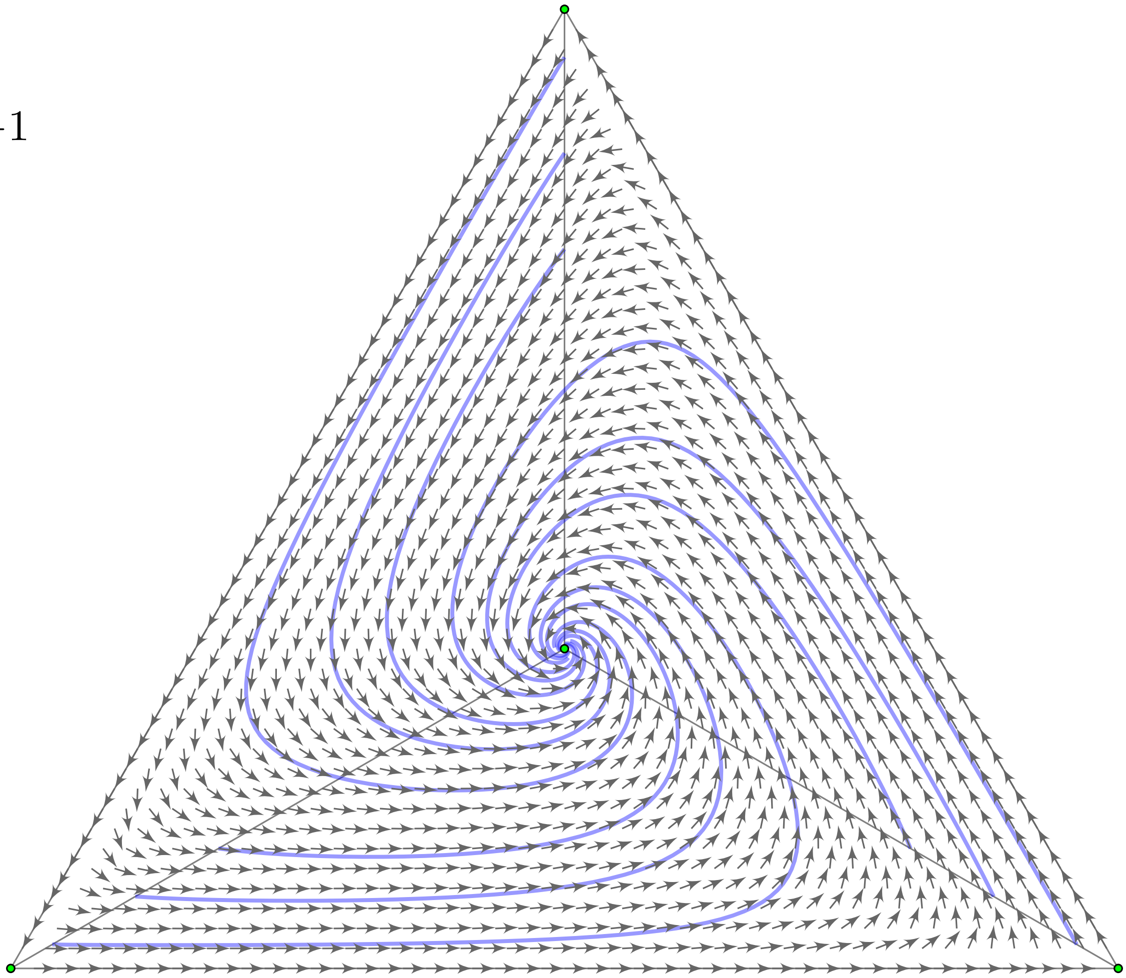
$a = -1$



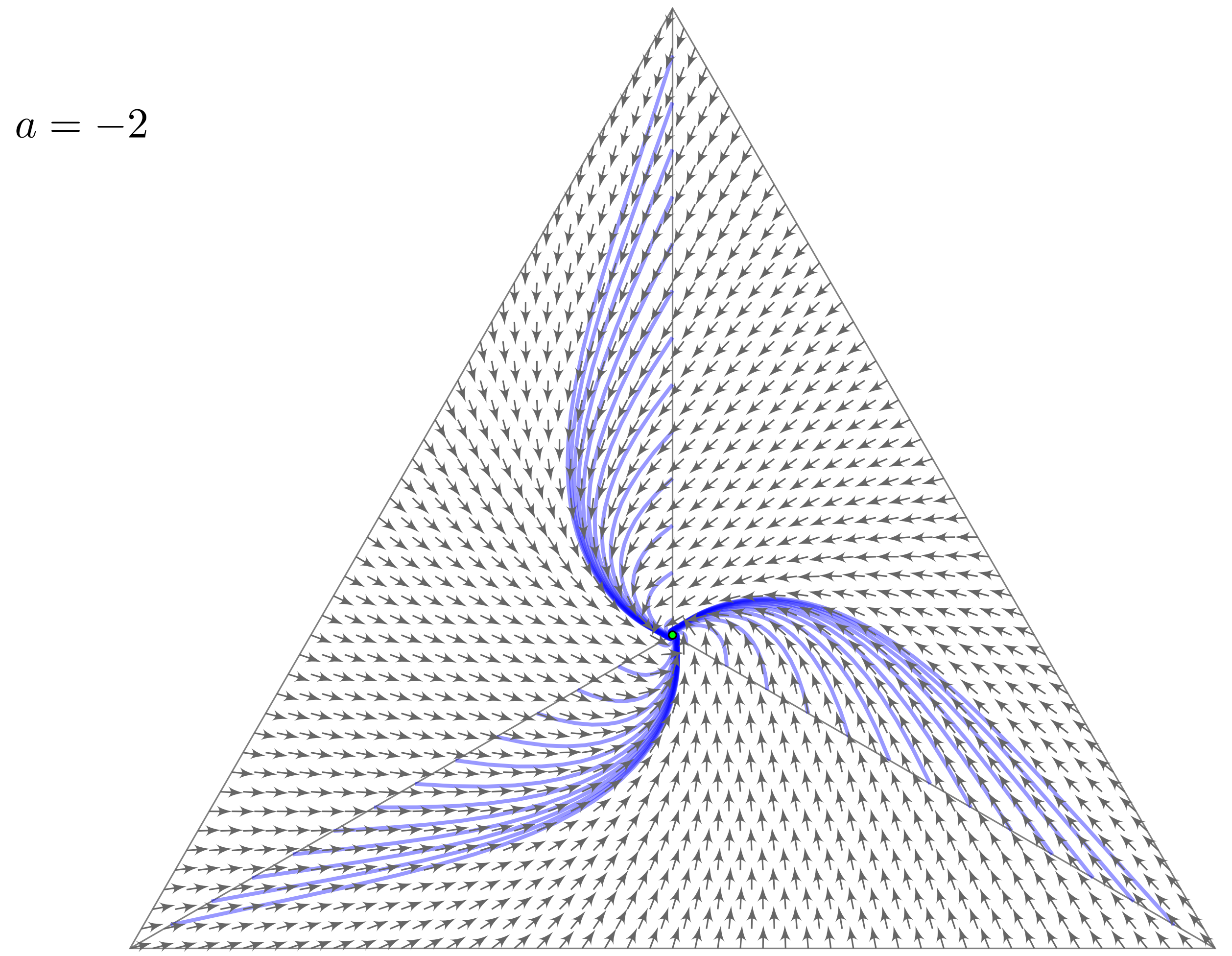
G358

Replikator-Dynamik von Rock-Paper-Lizards

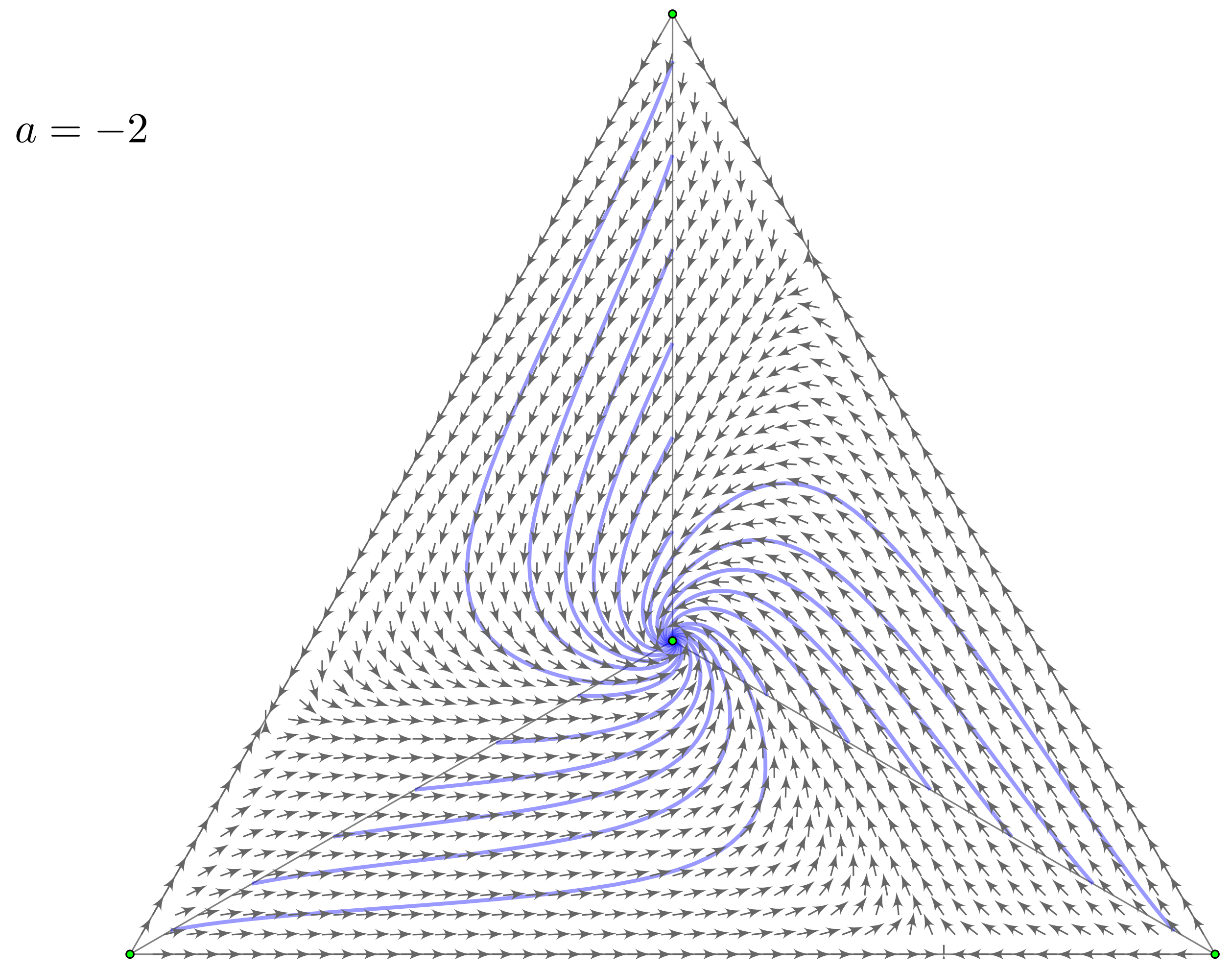
$a = -1$



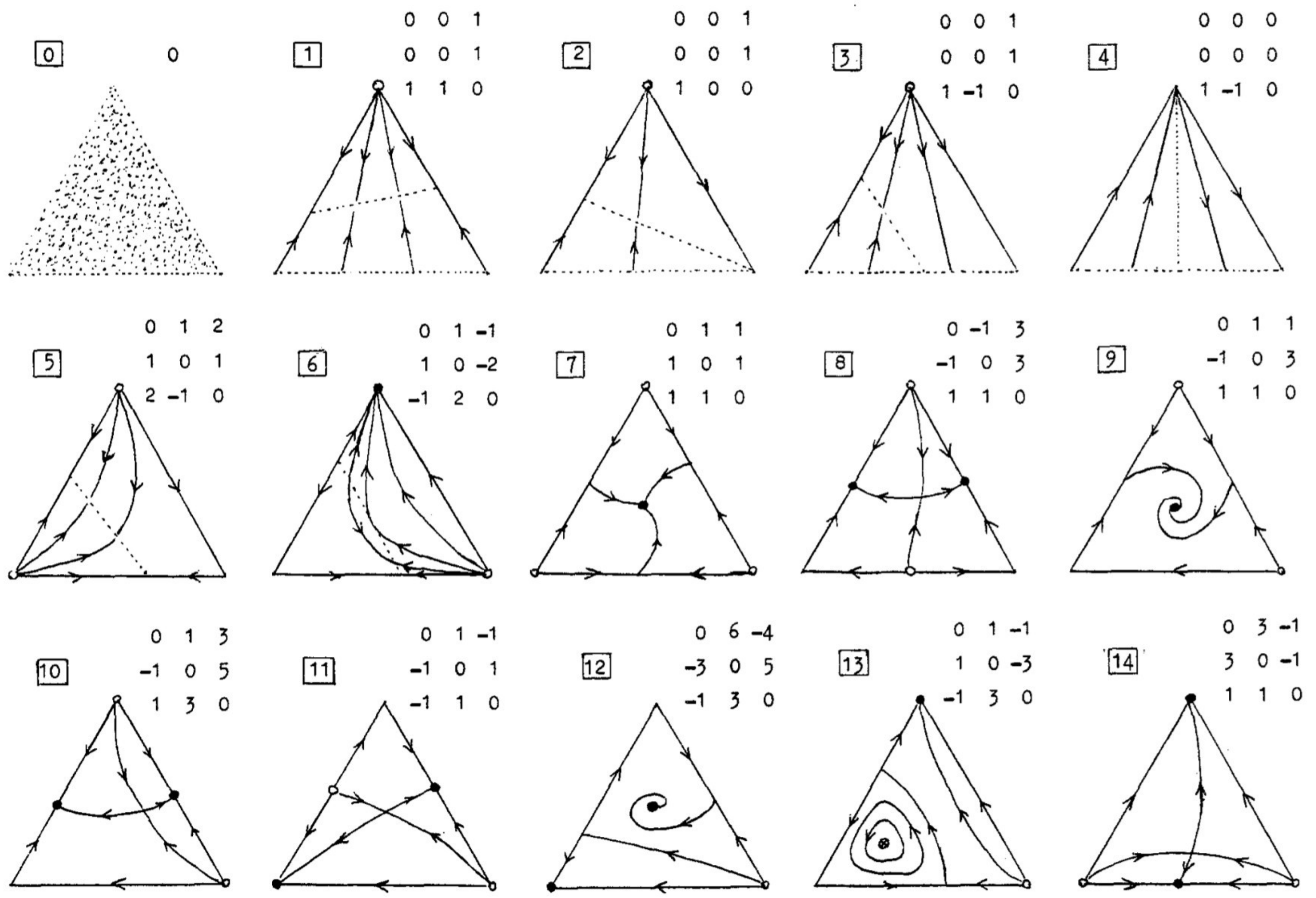
Nash–Dynamik von Rock-Paper-Lizards



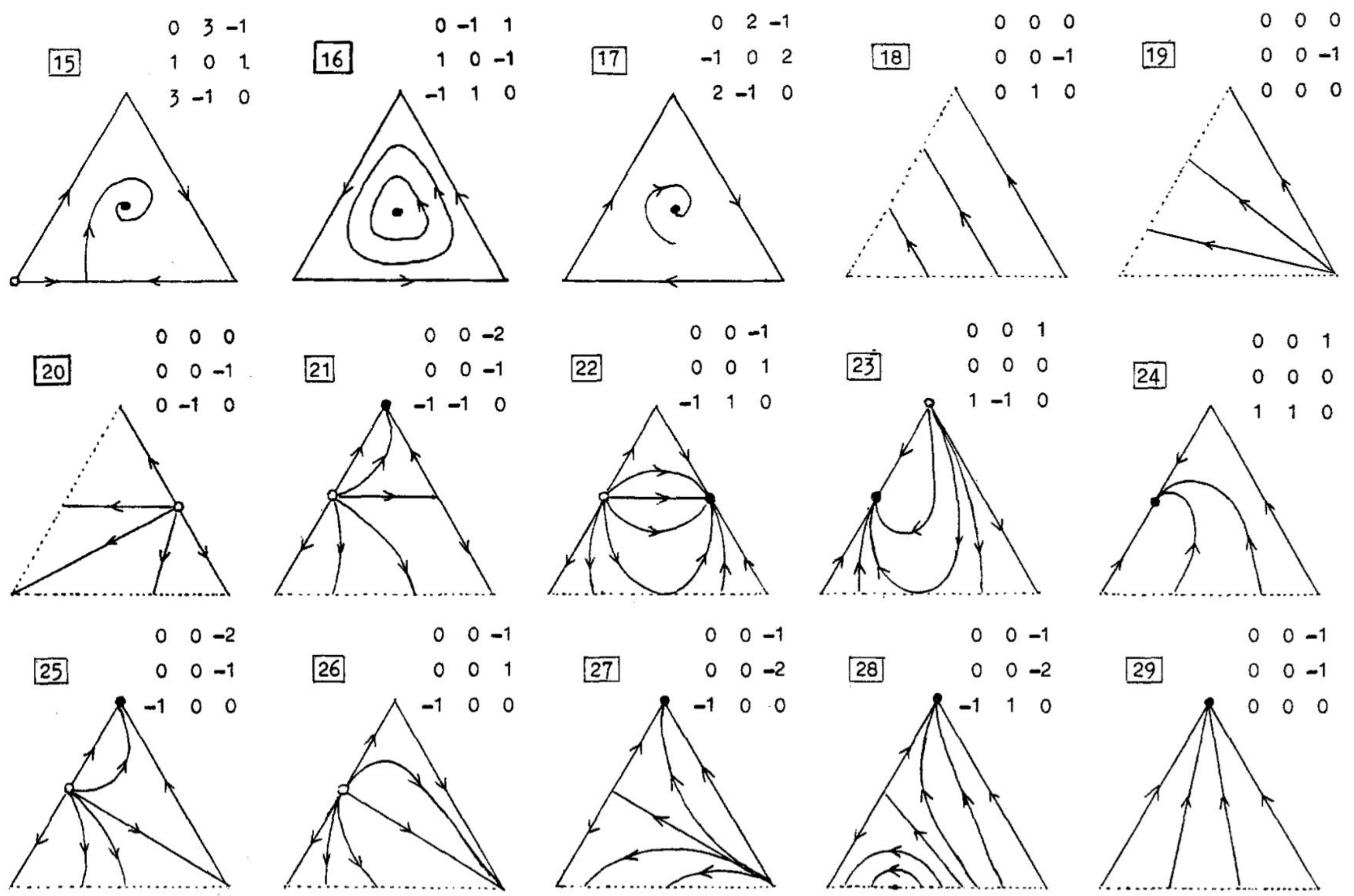
Replikator-Dynamik von Rock-Paper-Lizards



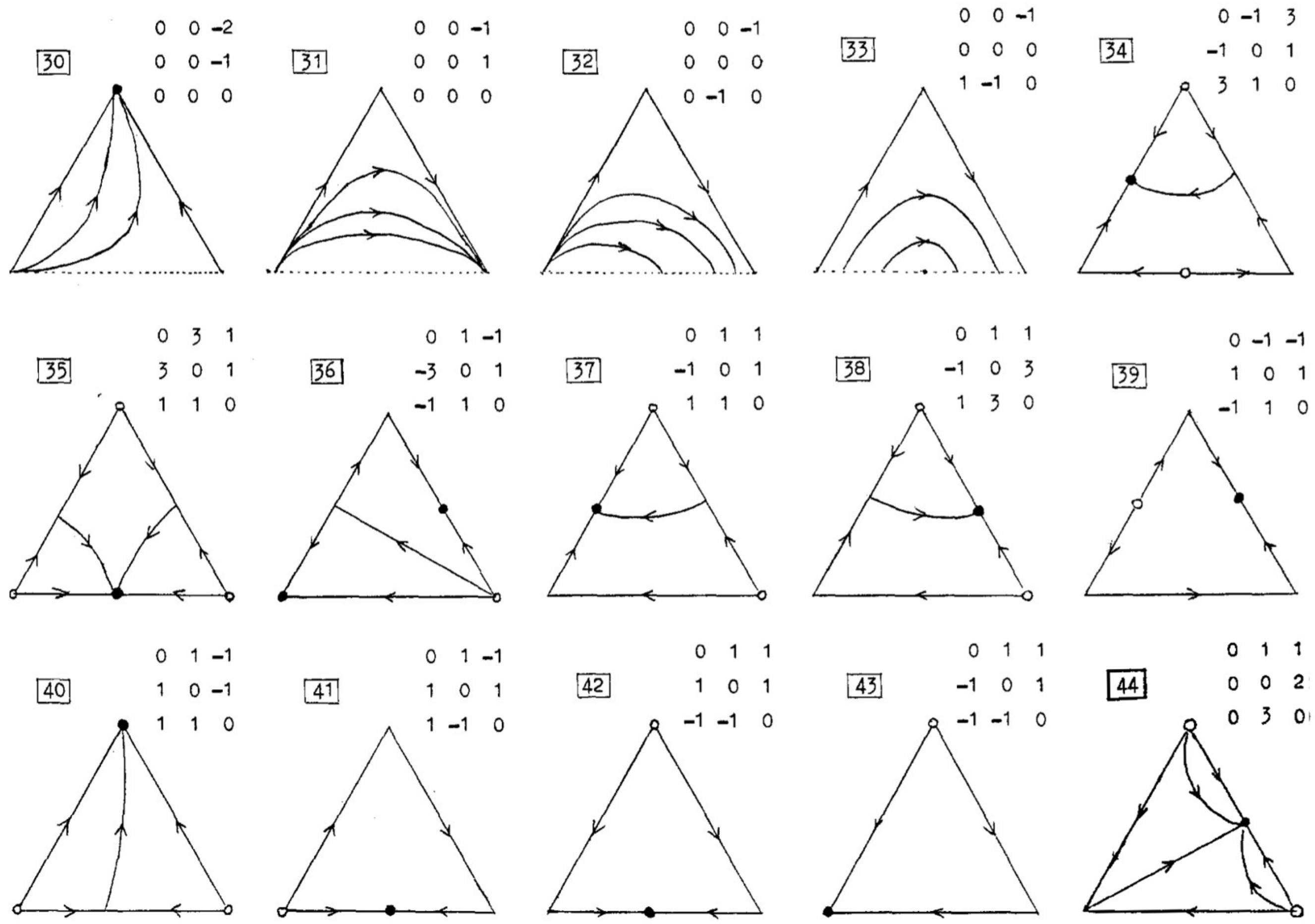
Dynamik der Replikatorgleichung



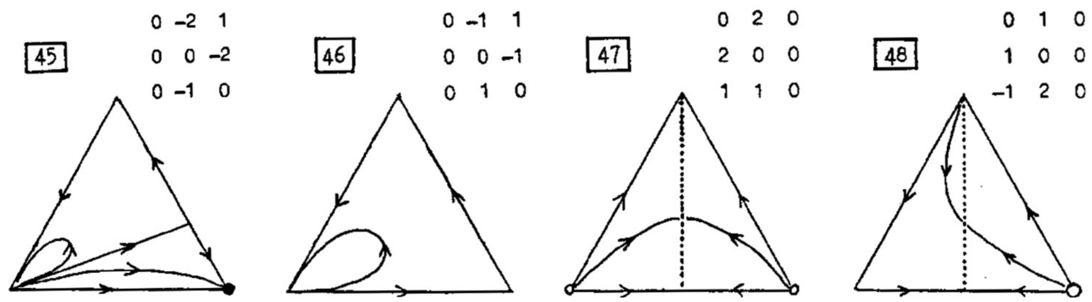
Dynamik der Replikatorgleichung



Dynamik der Replikatorgleichung



Dynamik der Replikatorgleichung



Diese Graphiken zeigen die mögliche Dynamik der Replikatorgleichung nach I.M. Bomze: *Lotka–Volterra equation and replicator dynamics: a two-dimensional classification.* Biological Cybernetics 48 (1983), 201–211, mit Korrekturen und Ergänzungen zu den Fällen 16, 20, 44–48 aus I.M. Bomze: *Lotka–Volterra equation and replicator dynamics: new issues in classification.* Biological Cybernetics 72 (1995), 447–453.

Projekt: Was wird hier klassifiziert? modulo welcher Äquivalenz? Wie ist demnach die Aussage des hier zu formulierenden Satzes? Wie lässt sich das möglichst übersichtlich organisieren und beweisen?

Kapitel H

Ponzi–Betrug vs Rentenmodell: Wie gelingt ein Generationenvertrag?

A man only begins to grasp the true meaning of life when he plants a tree under whose shade he knows he will never sit.

Elton Trueblood (1900–1994)

Das Geld ist nicht da. Wir leihen es uns aus der Zukunft.

Christian Lindner (1979–) zu Schulden 2022

Inhalt dieses Kapitels H

Motivation und Überblick

In diesem Kapitel geht es um einige große Fragen der Menschheit, für die ich einige (zunächst sehr kleine) Antworten skizzieren möchte. Wir wollen anhand einfacher spieltheoretischer Modelle Gut von Böse unterscheiden, Gleichgewicht von Betrug, Nachhaltigkeit von Illusion.

Wie / Können Sie aus nichts Geld machen? Sie ahnen es bereits, das wird legal wohl nicht möglich sein, dennoch werden solch windige Projekte oft versucht und als bequeme Einkommensquelle angepriesen. Das Internet ist für solche Betrügereien leider ein idealer Nährboden.

In diesem Kapitel werden wir uns solche Modelle genauer anschauen. Sie sind meist nach dem ewig selben, sehr einfachen Muster gebaut, doch dank phantasievoller Verkleidung erkennt man sie nicht sofort. Ich beginne daher mit ein paar lächerlich simplen Illustrationen.

Natürlich will ich Sie nicht zu solchen Aktivitäten anstiften, im Gegenteil! Ich möchte, dass Sie illegale Tricks leichter als solche durchschauen und sich möglichst dauerhaft dagegen immunisieren. Die Erfahrung zeigt, dass dies leider nicht so einfach ist, wie man zunächst hoffen könnte.

Motivation und Überblick

Warum sollten Sie meine Rente zahlen? Diese Frage liegt mir ganz persönlich am Herzen, und ich gebe zu: aus egoistischen Gründen. Aus ebenso egoistischen Gründen wollen Sie das vielleicht nicht. *Full Disclosure.* Soweit die erschütternd ehrliche Ausgangslage.

Ich möchte Sie in diesem Kapitel davon überzeugen, dass es auch für Sie lohnend sein kann, meine Rente zu zahlen! Das glauben Sie nicht? Dann lesen und prüfen Sie alles kritisch und lernen Sie staunend dazu! Sie müssen es demnächst nämlich Ihren Kindern erklären.

Warum sollte Ihre Generation meine Generation verklagen? So ein Generationenvertrag, hier im Beispiel zur Altersversorgung, ist eine feine Sache. Zum Kontrast und als Steigerung möchte ich auf ein grundlegendes Problem eingehen: Was tun, wenn eine Generation Raubbau betreibt und die Lebensgrundlage zukünftiger Generationen vernichtet? Dazu müssten zukünftige Generationen ihre Rechte bereits heute einklagen! Das klingt unmöglich. Gibt es dennoch eine Lösung? *Spoiler:* Ja, das geht, wird aber wohl nicht genutzt. Wir werden sehen.

Tabellenkalkulation und Umordnungsschwindel

Kann man aus nichts Geld machen dank kreativer Tabellenkalkulation?
Behauptung: Es ist egal, ob wir erst Zeilen oder erst Spalten summieren.
Klar, bei endlichen Tabellen! Für unendliche gibt es Überraschungen:
Sei $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $a(i,i) = +1$ und $a(i+1,i) = -1$ und sonst $= 0$.

	j					
$\vdots$	0	0	0	0	0	$\iddots$
0	0	0	0	0	+1	$\iddots$
0	0	0	0	+1	−1	0
0	0	0	+1	−1	0	0
0	0	+1	−1	0	0	0
0	+1	−1	0	0	0	0 i
	+1	0	0	0	0	$\cdots$

Zeilen zuerst:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a(i,j) = 0$$

Spalten zuerst:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a(i,j) = 1$$

⚠ Umordnung verlangt absolute Summierbarkeit!

Integrale und Vertauschungsschwindel

Aufgabe: Man skizziere die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\mathbf{I}_{[k,k+1[\times[k,k+1[} - \mathbf{I}_{[k+1,k+2[\times[k,k+1[} \Big).$$

Man berechne und vergleiche und bestaune die Doppelintegrale

$$\int_{y\in\mathbb{R}} \int_{x\in\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \stackrel{?}{=} \quad \int_{x\in\mathbb{R}} \int_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Widerspricht das Fubini? Was erhält man für f^+ und f^- sowie $|f|$?

Lösung: Zeilen zuerst, d.h. erst nach x und dann nach y integrieren:

$$\int_{y\in\mathbb{R}} \int_{x\in\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y\in\mathbb{R}} 0\,\mathrm{d}y = 0$$

Spalten zuerst, d.h. erst nach y und dann nach x integrieren:

$$\int_{x\in\mathbb{R}} \int_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{x\in\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[0,1[}(x)\,\mathrm{d}x = +1$$

⚠ Das zeigt, dass wir nicht blind drauflosrechnen dürfen!

Umordnung absolut summierbarer Reihen

Wir erinnern an folgenden wichtigen Umordnungssatz der Analysis 1.

Cauchy–Umordnungssatz: Für jede Doppelfolge $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{i+j=k} |a_{ij}|.$$

Ist dieser Wert endlich, so ist (a_{ij}) absolut summierbar, und dann gilt

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{i+j=k} a_{ij}.$$

☺ Diese nützliche Rechenregel hat zahlreiche Anwendungen, zum Beispiel die Multiplikation von Reihen, insbesondere Potenzreihen.

⚠ Unser obiges Beispiel ist nicht absolut summierbar, und die Umordnung der Reihe schlägt tatsächlich fehl!

☺ Dasselbe gilt für die Integration und den Satz von Fubini: Absolute Integrierbarkeit ist unsere verlässliche Verbündete!

⚠ Kreativität ist schön, Korrektheit ist unverzichtbar!

Umordnung absolut summierbarer Reihen

☺ Die Umordnung von (Potenz-)Reihen wird überall genutzt!

Aufgabe: Aus der Exponentialreihe folgt die **Funktionalgleichung**

$$\boxed{\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) \quad \text{für alle} \quad z,w\in\mathbb{C}.}$$

Nachrechnen: Dank Umordnungssatz und binomischer Formel gilt:

$$\begin{aligned}\exp(z)\exp(w) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{w^\ell}{\ell!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k+\ell=n}\frac{z^k}{k!}\frac{w^\ell}{\ell!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w).\end{aligned}$$

☺ Dies entspricht dem **Potenzgesetz**, daher die Kurzschreibweise

$$\mathrm{e}^z := \exp(z) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^w.$$

Zusammen mit der wichtigen **Euler–Formel** $\exp(\mathrm{i}z) = \cos z + \mathrm{i}\sin z$ erhalten wir hieraus sofort **Additionstheoreme** für $\sin$ und $\cos$.

Kreative Summation nach Guido Grandi

These: Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen.
Ziel: Ich will aus nichts Geld machen. Hier mein genialer Businessplan:

$$\begin{array}{rccccccccc}
& 0 \\
\overset{(a)}{=} & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots \\
\overset{(b)}{=} & (1-1) & + & (1-1) & + & (1-1) & + & (1-1) & + & \dots \\
\overset{(c)}{=} & 1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & \mp & \dots \\
\overset{(d)}{=} & 1 & + & (-1+1) & + & (-1+1) & + & (-1+1) & + & \dots \\
\overset{(e)}{=} & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots \\
\overset{(f)}{=} & 1
\end{array}$$

Der italienische Mönch und Mathematiker Guido Grandi erklärte damit 1703 wie Gott das Universum aus dem Nichts erschaffen haben könnte. Warum sollen wir diesen göttlichen Trick nicht auch ökonomisch nutzen?

Kreative Summation nach Guido Grandi

Aufgabe: Sie misstrauen der Rechnung? Wo genau steckt der Fehler?

Lösung: Bei jeder Gleichung „$A = B$“ müssen wir *drei* Fragen klären: Sind die linke Seite A und die rechte Seite B wohldefinierte Objekte? Erst dann können wir die Gleichheit beider Objekte untersuchen! Meistens beachten wir nur letzteres, doch das scheitert hier.

Die ersten Gleichheitszeichen (a,b) und die letzten (e,f) sind korrekt, doch die mittleren (c,d) haben überhaupt keinen Sinn: Die Summe $S := 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ definiert keinen Wert! Diese Reihe konvergiert nicht. Dennoch verspüren viele Menschen das unbändige Verlangen, auch solchen Reihen irgendwelche Werte zuzuweisen.

Welche Zahl soll S sein? Selbst wenn wir phantasievoll irgendeinen Wert zuweisen / erfinden / definieren, etwa $1/2$, mindestens eine der beiden mittleren Gleichungen (c,d) wird falsch, in den meisten Fällen beide. Zu solch hoffnungslosem Unsinn sagt man auch *not even wrong*.

Dennoch ist dies eine beliebte Betrugsmasche, nach dem Muster „heute arm = ... schwurbel schwurbel schwurbel ... = morgen reich“.

Kreative Summation nach Guido Grandi

Fun fact: Die möglichen Werte $S = 0$ und $S = 1$ wurden oben „erklärt". Wenn S einen Wert hat, dann gilt $S = 1 - S$, also $2S = 1$, somit $S = 1/2$.

Den Wert $1/2$ erhalten wir auch, wenn wir naiv die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1/(1-z)$ bei $z = -1$ auswerten (unseriös), oder raffiniert die Konvergenz erzwingen, etwa durch Cesàro–Summation (seriös).

Damit noch nicht genug! Wir könnten auch folgende Reihe nutzen:

$$\frac{1+z}{1+z+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{3k} - z^{3k+2} = 1 - z^2 + z^3 - z^5 + z^6 - z^8 + \dots$$

Ausgewertet bei $z = 1$ erhalten wir den Wert $S = 2/3$. Die Analysis bietet alle nötigen Grundlagen, um genau diesem Schlamassel zu entgehen.

Reihen sind ein wunderbares Werkzeug, sie sind schön und nützlich. Nur konvergent sollten Sie sein, sonst haben sie keinen Wert!

Zur Konvergenz von Reihen bietet die Analysis wirksame Kriterien. Für konvergente Reihen gelten dann überaus nützliche Rechenregeln.

Kreative Summation nach Guido Grandi

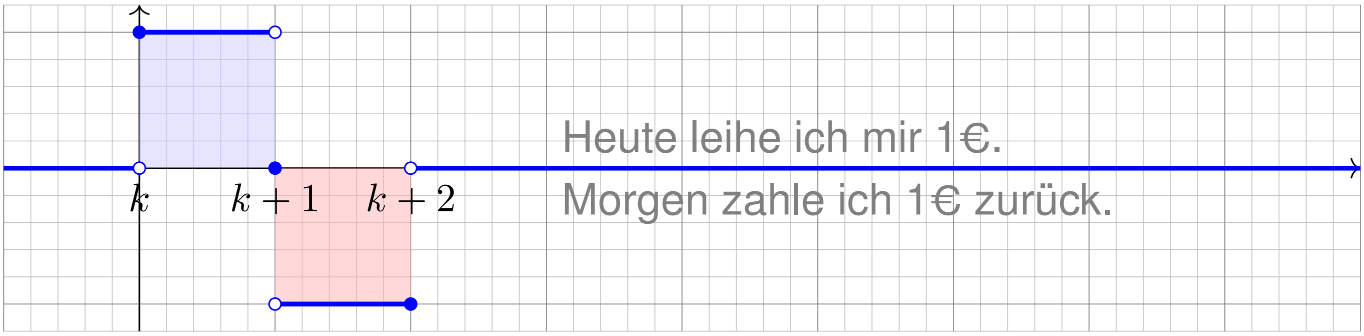
Doch genug von mühsamer Mathematik, von seriösen Rechenregeln, von langweiliger und unnützer Haarspalterei. Wer braucht Korrektheit, wenn Kreativität lockt? Also zurück zu meinem genialen Businessplan! Ist Wissenschaft nicht nur dann gut, wenn sie Profit generiert? Oder wenigstens den oberflächlichen Anschein davon?

Bisher war natürlich alles Schwindel! Hier ist mein verbesserter Plan: Am Tag 1 leihe ich mir 1 Euro, den ich dann am Tag 2 zurückzahle. Auch am Tag 2 leihe ich mir 1 Euro, den ich am Tag 3 zurückzahle. Dies setze ich nun unbegrenzt fort. Was ich leihe, zahle ich zurück... dennoch verschafft mir diese Reihe 1 Euro, den ich nie zurückzahle!

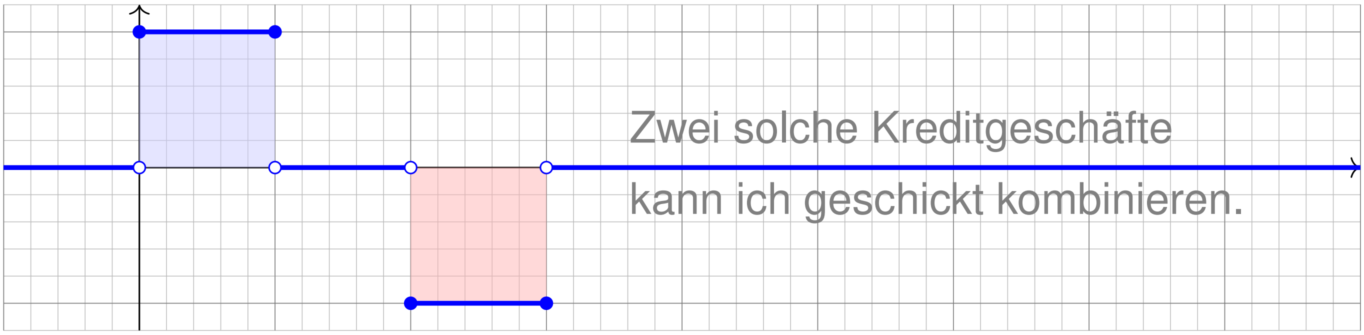
Anschaulich: Die Schulden werden nach Unendlich verschoben. Für manche Menschen bedeutet $t = \infty$ einfach alles nach ihnen. Wie bitte, Sie halten das für unrealistisch, gar verrückt? Ja, sicher. Dennoch wird diese Methode erstaunlich häufig angewendet. Diese Masche gelingt, solange sie akzeptiert wird.

Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

Kredit und Tilgung: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k = \mathbf{I}_{[k,k+1]} - \mathbf{I}_{[k+1,k+2]}$.



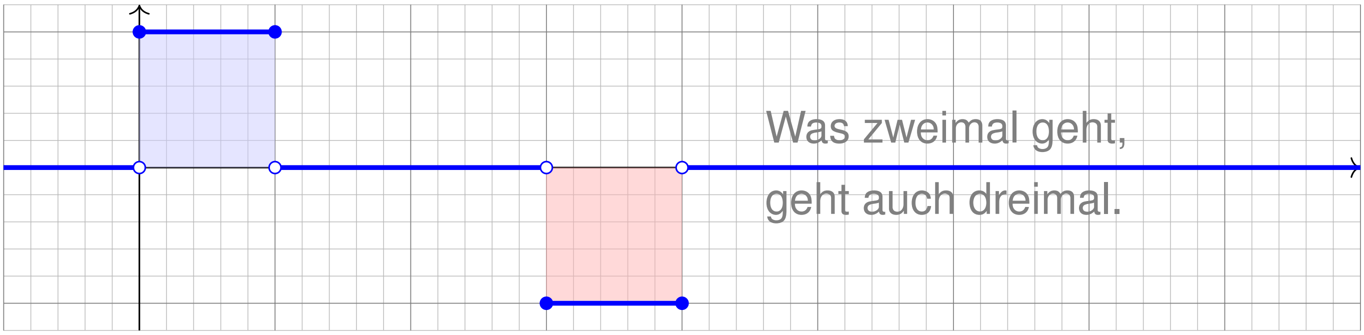
Offensichtlich gilt $\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0$.



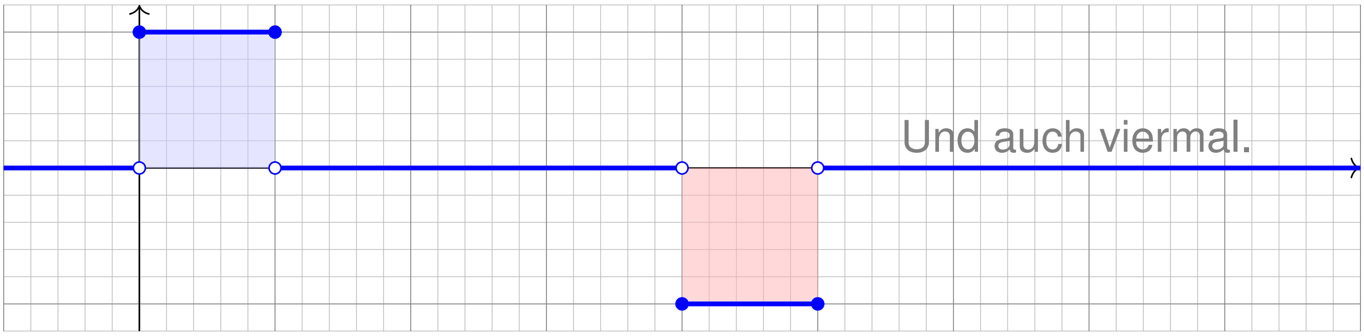
Auch für $g_1 = f_0 + f_1$ ist das Integral Null.

Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

Graph zu $g_2 = f_0 + f_1 + f_2$:



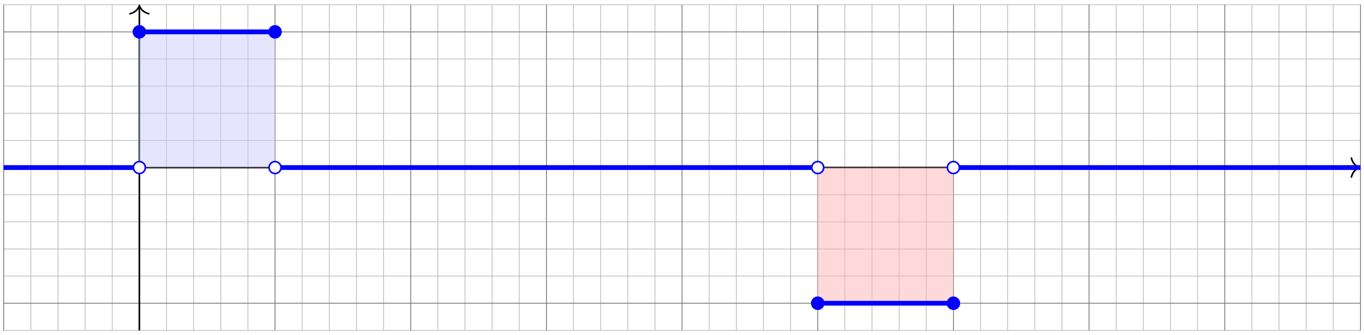
Graph zu $g_3 = f_0 + f_1 + f_2 + f_3$:



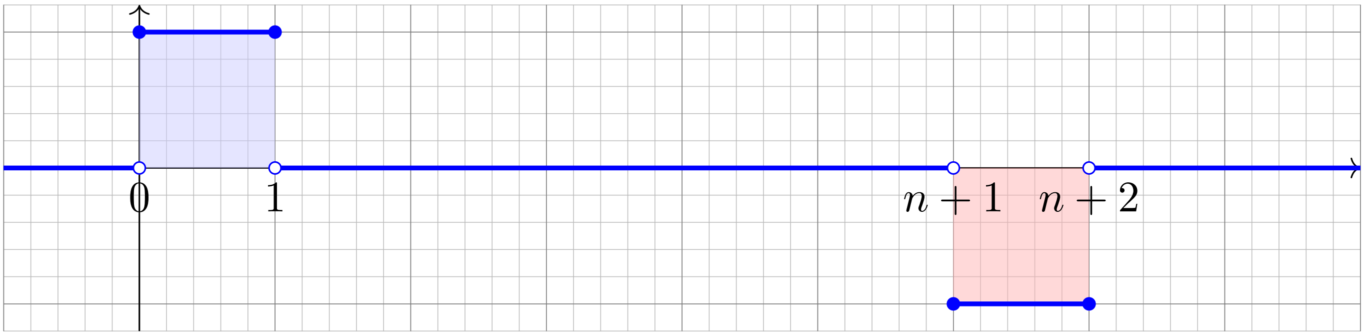
Das Integral ist jeweils Null.

Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

Graph zu $g_4 = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4$:



Graph zur Teleskopsumme $g_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n$:



Das Integral $\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,\mathrm{d}x$ ist jeweils Null. Was passiert für $n \to \infty$?

Kreative Kreditrechnung und Umordnungsschwindel

Aufgabe: Man berechne und vergleiche und bestaune:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x\right) \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right)\mathrm{d}x$$

Lösung: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sehen wir (rechnerisch oder graphisch):

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0$$

Andererseits kennen wir für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Teleskopsumme

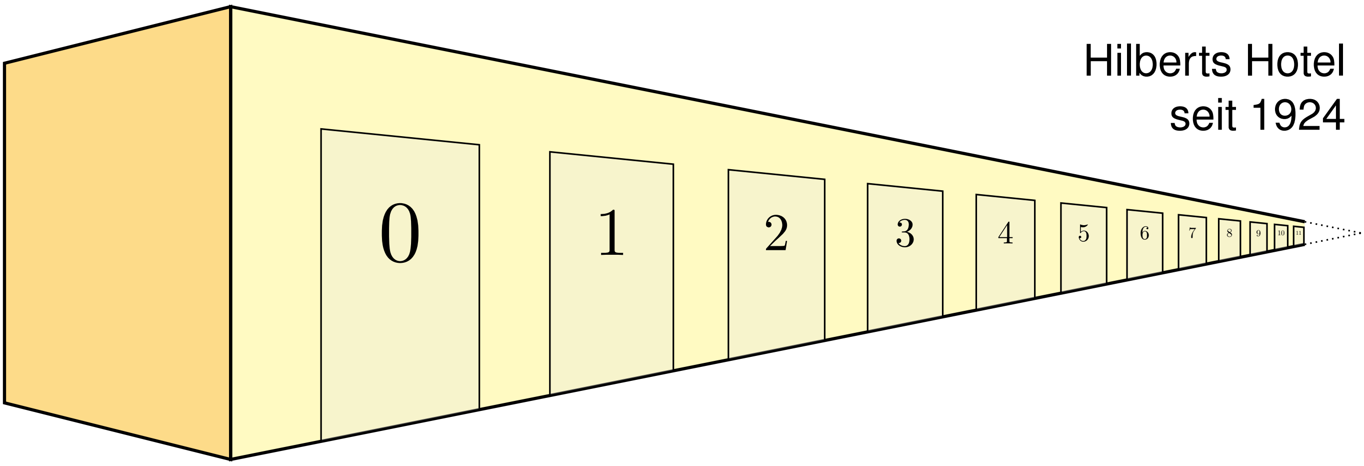
$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \mathbf{I}_{[0,1]}(x) - \mathbf{I}_{[n+1,n+2]}(x) \quad \to \quad \mathbf{I}_{[0,1]}(x).$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $n \to \infty$ gilt daher punktweise Konvergenz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \mathbf{I}_{[0,1]}(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right)\mathrm{d}x = 1.$$

⚠ Anschauliche Ursache: „Masse verschwindet nach Unendlich“.

Von Hilberts Hotel zu Hilberts Spielbank



Hilberts Hotel
seit 1924

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen,
soll uns niemand vertreiben können.
David Hilbert (1862–1943)

Über das Unendliche, Mathematische Annalen 95 (1926), 161–190. Diesen Lobpreis der Cantorschen Mengenlehre gegenüber endlicher Arithmetik schrieb Hilbert im Grundlagenstreit mit Brouwer, siehe `de.wikipedia.org/wiki/Grundlagenkrise_der_Mathematik`.

Von Hilberts Hotel zu Hilberts Spielbank

Sie kennen diese wundersame Geschichte aus Ihrem ersten Semester: Wenn in einem **endlichen Hotel** alle Zimmer belegt sind, dann kann kein Gast mehr aufgenommen werden. Das gilt selbst dann noch, wenn die Managerin die Gäste neu auf die Zimmer verteilt. Es hilft alles nichts!

Anders in **Hilberts Hotel** mit unendlich vielen Zimmern $0, 1, 2, 3, \dots$: Sind alle Zimmer belegt, so kann immer noch ein Gast aufgenommen werden: Der Gast aus Zimmer 0 zieht nach 1, der von 1 nach 2, der von 2 nach 3, usw. Wir nutzen hierzu die Bijektion $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}_{\ge 1} : n \mapsto n+1$.

Ebenso zwei Gäste, oder drei, oder vier… Nun kommt ein Hilbert–Bus mit unendlich vielen neuen Gästen. Die Managerin quartiert die alten Gäste um vermöge der Bijektion $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} 2\mathbb{N} : n \mapsto 2n$. Die neuen Gäste beziehen ihre Zimmer vermöge $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} 2\mathbb{N}+1 : n \mapsto 2n+1$. Zusammen erhalten wir so die Bijektion $\{0,1\} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} : (i,n) \mapsto 2n+i$.

Schließlich kommen unendliche viele Busse jeweils mit unendlich vielen Gästen. Kein Problem, hierzu finden wir eine Bijektion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$.
Übung: Explizieren Sie eine solche Bijektion! Wer geht wohin?

Von Hilberts Hotel zu Hilberts Spielbank

HOTEL INFINITY, lyrics © 2000 by Lawrence Mark Lesser

On a dark desert highway — not much scenery
Except this long hotel stretchin' far as I could see.
Neon sign in front read "No Vacancy,"
But it was late and I was tired, so I went inside to plea.

The clerk said, "No problem. Here's what can be done —
We'll move those in a room to the next higher one.
That will free up the first room and that's where you can stay."
I tried understanding that as I heard him say:

[CHORUS] *"Welcome to the Hotel called Infinity —*
Where every room is full (every room is full)
Yet there's room for more.
Yeah, plenty of room at the Hotel called Infinity —
Move 'em down the floor (move 'em down the floor)
To make room for more."

Von Hilberts Hotel zu Hilberts Spielbank

I'd just gotten settled, I'd finally unpacked
When I saw 8 more cars pull into the back.
I had to move to room 9; others moved up 8 rooms as well.
Never more will I confuse a Hilton with a Hilbert Hotel!

My mind got more twisted when I saw a bus without end
With an infinite number of riders coming up to check in.
"Relax," said the nightman. "Here's what we'll do:
Move to the double of your room number:
that frees the odd-numbered rooms." [CHORUS]

Last thing I remember at the end of my stay —
It was time to pay the bill but I had no means to pay.
The man in 19 smiled, "Your bill is on me.
20 pays mine, and so on, so you get yours for free!"

(`www.math.utep.edu/Faculty/lesser/GreatestLesserHits`)

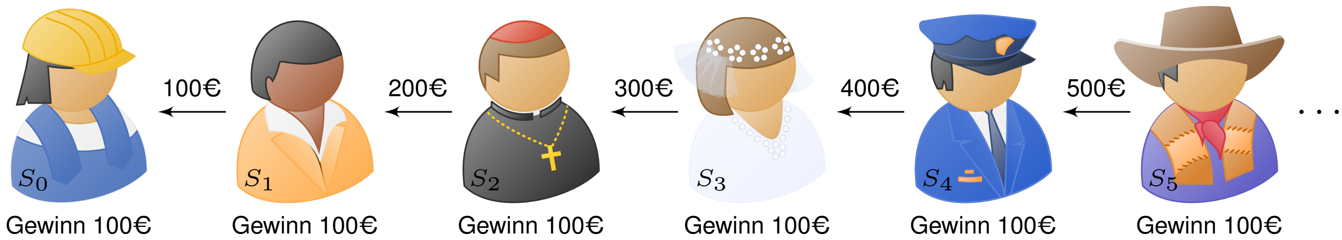
Schneeballsystem und Ponzi–Betrug

Charles Ponzi: „Investieren Sie jetzt, alle werden gewinnen!“

Absolut verlässliche Garantie

Ich bin ein grundehrlicher Garantieschein und immer verlässlich.
Wer mich für n Euro kauft, darf mich für $n + 100$ Euro verkaufen.
Dank dieser Eigenschaft bringe ich allen Wohlstand und Glück.

These: Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen.



Wundersame Vermehrung des Geldes: *Everyone’s a winner?*
Sie glauben, so naiv kann doch niemand sein? **Greater Fool Theory**:
Denken Sie an Cryptos oder NFTs! J. Geuter, `youtu.be/8ciirqCCqd0`

Schneeballsystem und Ponzi–Betrug

Metamathematische Erfahrung führt zur folgenden provokanten These: Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen (in gut gemeinten Anwendungen) bzw. ausbeuten (in betrügerischer Absicht).

Letzteres gilt besonders für wenig bekannte Regelmäßigkeiten (Sätze), noch besser eignen sich Unverständnis und weit verbreitete Fehler. Ausgenutzt wird hierbei nicht direkt der mathematische Sachverhalt, sondern vor allem die ungleich verteilte Information darüber.

Einige Indizien sprechen für die häufige Richtigkeit der Vermutung. Glücksspiele, auch und besonders unsere staatlichen Lotterien, verdienen Geld mit der Risikoliebe — und irrationalem Handeln, vermutlich Unwissen. Daher heißen sie auch *Steuer auf Dummheit*.

Neben legaler Ausnutzung mathematisch-logischen Unwissens gibt es auch die illegale, kriminelle Seite: Das nennen wir Betrug. Hier blühen die erstaunlichsten Schöpfungen menschlicher Dreistigkeit, gefördert durch die erstaunlichsten Auswüchse menschlicher Dummheit. Dumm-dreist versprochen wird: *Everyone’s a winner, baby, that’s no lie!*

Wir machen folgendes **Finanzexperiment** – bitte nur in Gedanken!

„Ich darf mich vorstellen, mein Name ist Charles Ponzi, Finanzgenie. Bitte passen Sie gut auf und machen Sie mit, alle werden gewinnen! Ich bin Spieler 0, Sie sind Spieler 1, Ihr Nachbar ist Spieler 2, usw. Spieler 1: Sie geben mir 100€, Ihr Nachbar gibt Ihnen dann 200€, Ihnen bleiben 100€ Gewinn. Spieler 2: Sie haben gerade 200€ gegeben, Ihr Nachbar gibt Ihnen jedoch 300€, also bleiben auch Ihnen 100€ Gewinn. Und so weiter, und so weiter. Jeder Teilnehmer macht so 100€ Gewinn."

Wo genau liegt das Problem? Nicht alle durchschauen es sofort... Als Grundregel helfen **Erhaltungssätze**: Werte kann man nicht mühelos vermehren, das sollte jeden warnen: *There are no free lunches!*

Eine genauere Analyse offenbart das **Problem der Endlichkeit**. $\mathscr{R}_1$: Der letzte Spieler S_n bleibt auf seinen Schulden sitzen. Ist er rational, wird er schon zuvor nichts zahlen. $\mathscr{R}_2$: Ist S_{n-1} rational zweiter Stufe, so sieht er den Zusammenbruch kommen und wird zuvor nichts zahlen... Die frühen Spieler benötigen jedoch Rationalität sehr hoher Stufe!

Schneeballsystem nennt man ein betrügerisches Geschäftsmodell, das zu seinem Betrieb immer neue Teilnehmer benötigt: Es gibt kein profitables Produkt, sondern Gewinne entstehen hauptsächlich oder ausschließlich durch das frisch zufließende Kapitel neuer Teilnehmer.

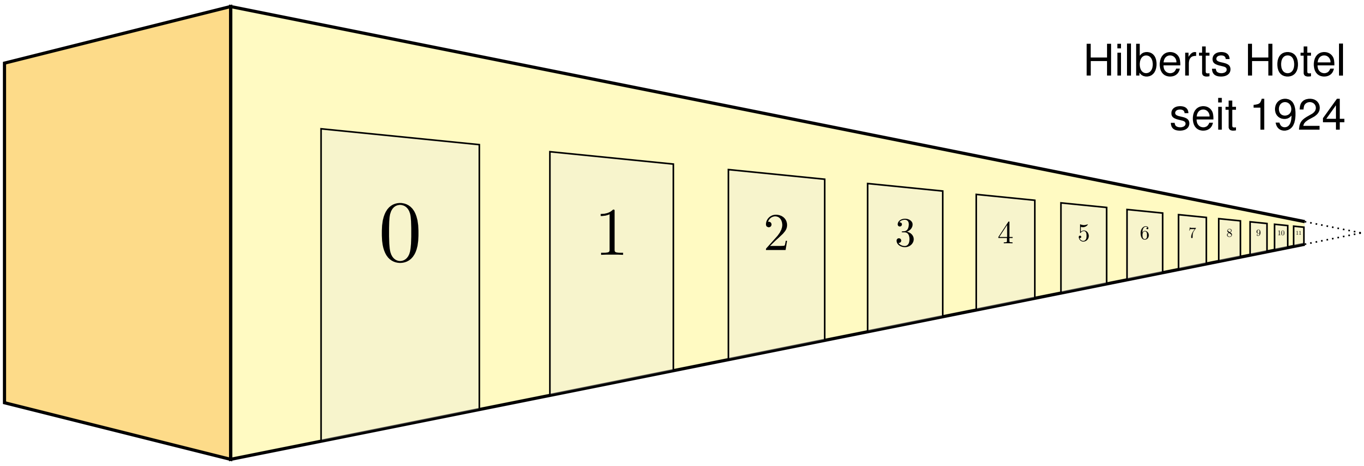
Dies heißt auch **Ponzi–Betrug**, engl. *Ponzi scheme*: Beiträge neuer Teilnehmer bezahlen die Ausschüttungen der vorgehenden Teilnehmer.

Berühmt-berüchtigt wurde diese Betrugsmasche durch **Charles Ponzi**, der in den 1920er Jahren Anleger in den USA um 20Mio Dollar prellte. Er versprach phantastische Renditen und lockte immer neue Investoren. Seine Methode **robbing Peter to pay Paul** flog nach acht Monaten auf.

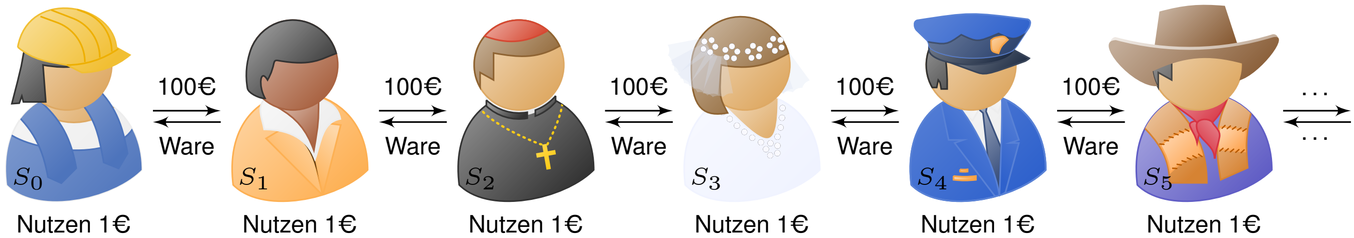
Aktuelles Beispiel eines baugleichen Systems ist der Betrugsskandal des Investmentunternehmens von **Bernard Madoff**. Es brach 2008 in der Bankenkrise zusammen, Investoren verloren etwa 18Mrd Dollar.

Ähnlich funktionieren **Kettenbriefe** und **Pyramidensysteme**, die heute im Internet kursieren: *Make Money Fast*, siehe `youtu.be/VNieth9wBTQ`. Dieser Schwindel versucht, Schulden nach Unendlich zu verschieben.

Wie und warum funktioniert Geld?



These: Jedes mathematische Phänomen lässt sich finanziell ausnutzen.



Wundersamer Nutzen des Geldes: *Everyone's a winner!* Ponzi–Betrug? Kann Geld aus dem Nichts entstehen? Arte: 42, `youtu.be/NMUFAzV6C5M`

Wie und warum funktioniert Geld?

Als erstes möchte ich ehrlich zugeben: Das gezeigte Modell ist zwar leicht verständlich, aber leider auch extrem vereinfacht und allzu simpel. Komplizierte Geldsysteme versteht vermutlich kaum jemand so recht, oder bestenfalls nur in Analogie zu simplen Fällen wie diesem.

Spieler 0 bekommt Ware, die er nützlich findet und haben möchte. Spieler 1 bekommt im Gegenzug 100€; sie selbst sind für ihn unnütz, aber sie dienen ihm als Platzhalter. Spieler 1 weiß, oder besser: hofft, dass er damit Spieler 2 bezahlen kann. Und tatsächlich:

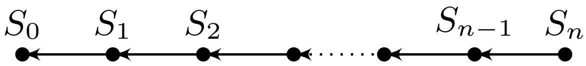
Spieler 1 bekommt Ware, die er nützlich findet und haben möchte. Spieler 2 bekommt im Gegenzug 100€; sie selbst sind für ihn unnütz, aber sie dienen ihm als Platzhalter. Spieler 2 weiß, oder besser: hofft, dass er damit Spieler 3 bezahlen kann. Und tatsächlich: ...

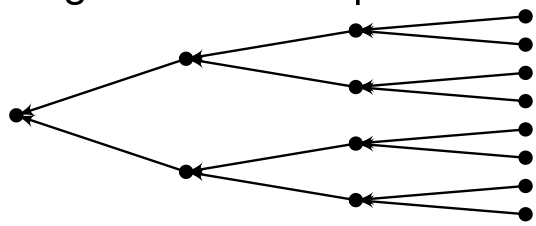
Jeder Spieler S_n weiß, mit einer kleinen Wkt $\varepsilon_n \in [0, \varepsilon]$ kann das System im nächsten Schritt zusammenbrechen. Der erwartete Verlust $\varepsilon_n \cdot$ 100€ ist jedoch geringer als der erwartete Nutzen, hier beispielhaft 1€. Daher ist es für jeden Spieler lukrativ, dieses Risiko einzugehen.

Wie und warum funktioniert Geld?

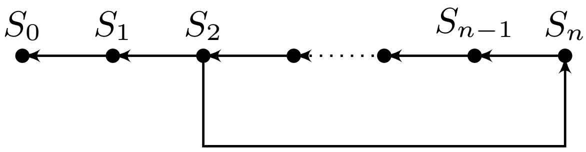
H123

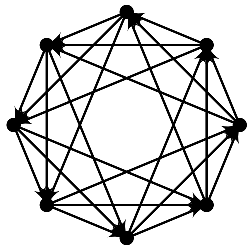
Nutzentransfer in einfachen Beispielen dargestellt als Graph:



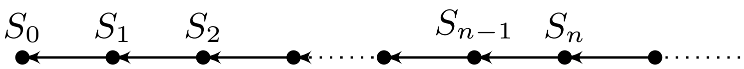


☹ Gleichgewicht unmöglich: Ponzi–Betrug, Schneeballsystem





☺ Gleichgewicht möglich: Geldzirkulation, evtl. Abfluss, Steuern, etc.



(potentiell) unendlich viele Spieler

☺ Gleichgewicht möglich: Generationenvertrag, Rentensystem, etc.
Anders als beim Ponzi–Betrug kann Geldzirkulation überall positiven Nutzen erzeugen. Das sagt noch nichts über un/gerechte Verteilung!

Wie und warum funktioniert Geld?

H124
Erläuterung

In unserem simplen Beispiel hat jeder denselben Nutzen / Gewinn 1€. Zur Rationalität genügt, dass jeder positiven Nutzen hat; dieser kann unterschiedlich verteilt sein, gar extrem ungerecht. Solche Phänomene beobachten wir tatsächlich deutlich in der uns umgebenden Ökonomie.

Das herrschende Geldsystem ist das Geldsystem der Herrschenden. Es wird verteidigt mit dem ideologischen Anspruch der Gerechtigkeit. In der Praxis kann es dies oft nicht einlösen. Liegt das am Geldsystem selbst oder an anderen Faktoren? Darüber lohnt es sich zu streiten.

Geld ist eine neue Form der Sklaverei, die sich von der alten nur unterscheidet, indem sie unpersönlich ist, dass es keine direkte Beziehung zwischen Herren und Sklaven gibt.
Leo Tolstoi (1828–1910)

Insgesamt wird der Kapitalismus kritisiert als Variante des Ponzi-Betrugs: Aus marxistischer Sicht zerstört er seine gesellschaftlichen Grundlagen. Aus ökologischer Sicht zerstören wir so unsere natürlichen Ressourcen. Ist die fehlende Nachhaltigkeit korrigierbar oder systematisch?

Wie und warum funktioniert Geld?

Jedes Tauschmittel muss gewisse Bedingungen erfüllen: (0) Es muss praktikabel und haltbar sein, aber nur schwer vermehrbar oder fälschbar. (1) Ausreichend viele Akteure akzeptieren es als Zahlungsmittel: Sie vertrauen darauf, dass ausreichend viele es akzeptieren, usw.

Aufgabe: Wir untersuchen eine einfache Gesellschaft $I = \{1, 2, \dots, N\}$. Spieler handeln mit gewisser Wkt miteinander, etwa gleichverteilt.

A \ B	M	V
M	A: 0, B: 0	A: 0, B: $-a$
V	A: $-a$, B: 0	A: b, B: b

Geldnutzen zwischen Tauschpartnern: Verlust a, Nutzen b, etwa $a = b = 1$.

M: misstraut dem Tauschmittel / Geld und lehnt jeden Handel damit ab.

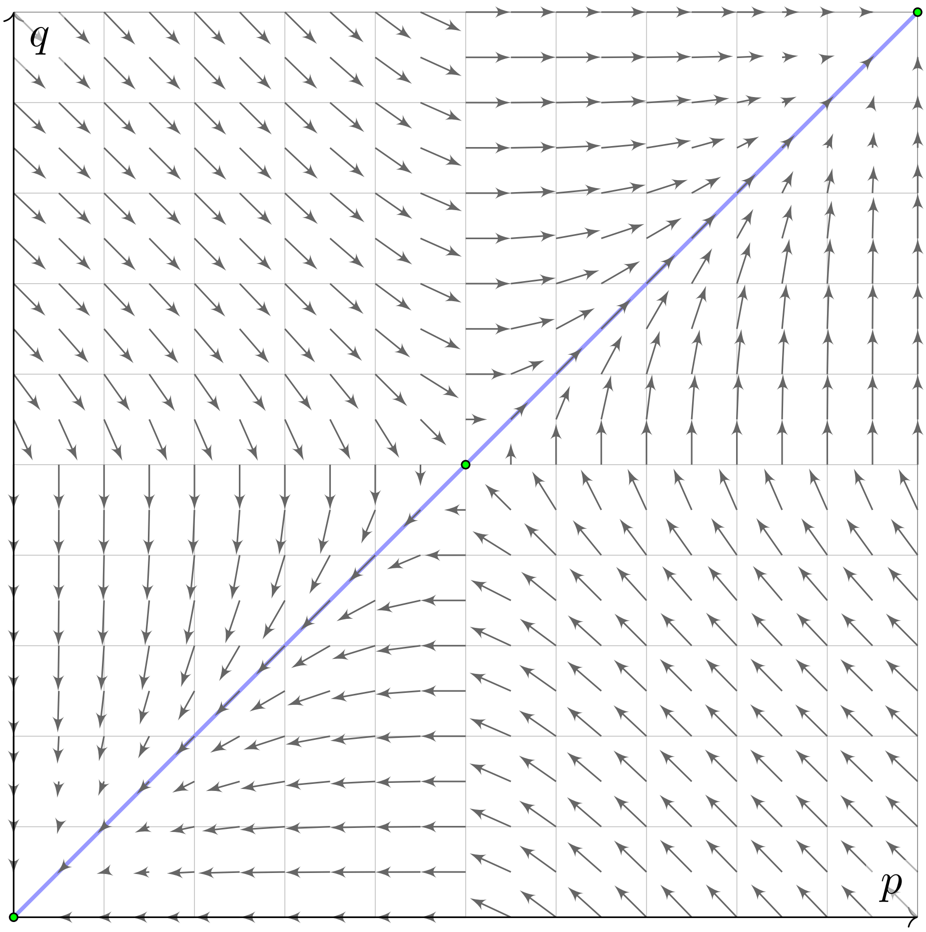
V: vertraut dem Tauschmittel / Geld und akzeptiert jeden Handel damit.

Ab welcher Akzeptanzrate $q \in [0, 1]$ setzt sich das Tauschmittel durch?

Lösung: Der erwartete Nutzen für M-Spieler ist Null. Der erwartete Nutzen für V-Spieler ist $qb - (1 - q)a$, also positiv für $q > a/(a + b)$.

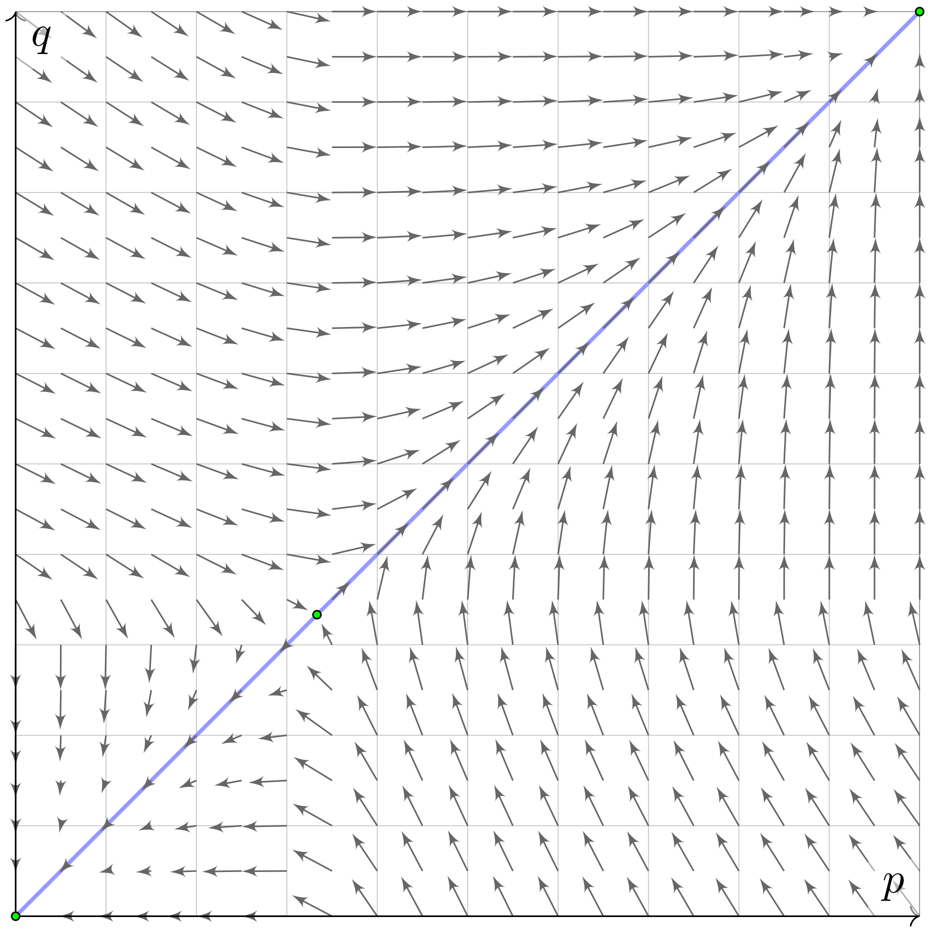
Wie und warum funktioniert Geld?

$a = 1$
$b = 1$



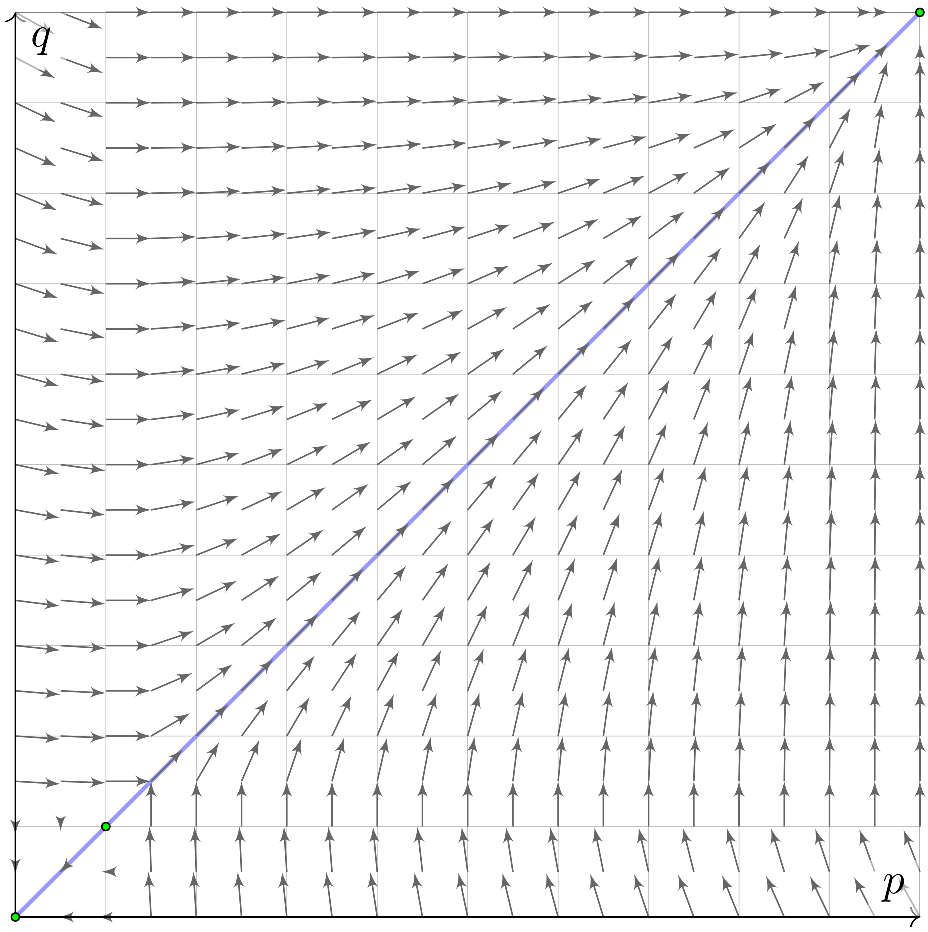
Wie und warum funktioniert Geld?

$a = 1$
$b = 2$



Wie und warum funktioniert Geld?

$a = 1$
$b = 9$



Wie und warum funktioniert Geld?

Jedes Geldsystem beruht auf **Vertrauen**, es ist eine stillschweigende **Vereinbarung** per Tradition oder ein **Gesellschaftsvertrag** per Gesetz. In unserem stark vereinfachten Modellbeispiel entsprechen allseitiges Misstrauen bzw. Vertrauen den beiden stabilen Nash–Gleichgewichten.

Ein Geldsystem funktioniert, solange ausreichend viele Teilnehmer dem System vertrauen und sich ein Nutzengleichgewicht einstellt, also Akzeptanz durch strikt positiven Nutzen für jeden Teilnehmer. Die oben Graphiken zeigen hierzu die Nash–Dynamik.

In schweren **Krisen** (Hyperinflation, Staatsbankrott, Bankenkollaps) übersteigt das Misstrauen (geschätzte Abbruchwkt) den Geldnutzen. Dann bricht das Geldsystem zusammen, und die Akteure flüchten sich in **Sachwerte**, etwa Rohstoffe, Edelmetalle, Immobilien, Aktien, usw. . .

Dies ist ein sich selbst verstärkender (autokatalytischer) Vorgang. Im positiven Falle ist es eine Aufwärtsspirale, die zu einem stabilen Geldsystem führt. Im negativen Falle ist es eine Abwärtsspirale, die alle Geldwerte vernichtet. Beides kommt tatsächlich vor.

Wie und warum funktioniert Geld?

Im **Tauschhandel** entwickeln sich meist bestimmte Güter zur Referenz, etwa nützliche (Getreide, Vieh) oder seltene (Muscheln, Edelmetalle): Sie werden allgemein als wertvoll anerkannt, existieren in ausreichender aber beschränkter Menge, sind praktikabel und haltbar. Sie können als **Tauschmittel** und **Wertspeicher** dienen und erhalten so Geldfunktion.

Anekdote: Auch **Zigaretten** dienten als Währung auf Schwarzmärkten. Warum akzeptiert ein Nichtraucher dieses Zahlungsmittel? Er vertraut auf viele Raucher. . . und auf Nichtraucher, die darauf vertrauen. . . usw. Viele Güter sind dazu geeignet. Der Kernpunkt ist immer das Vertrauen! Eigenschaft (0) ist gegeben, (1) wird gesellschaftlich hergestellt.

Als **Zahlungsmittel** dienen ganz allgemein übertragbare, einheitliche Wertträger. Molluskengeld (Muschelgeld) ist eine vormünzliche Geldform und wird teilweise heute noch als Kleingeld verwendet. **Kaurigeld** aus den Gehäusen von Kaurischnecken war das erste allgemeingültige Geld und förderte maßgeblich den überregionalen Handel. Hier gibt es keine Kontrolle über die Geldmenge, diese wird der Natur überlassen.

Die Übertragung dieser Funktion auf **Münzen** (China, Indien, Ägäis um 700 v.Chr.) und **Papiergeld** (China um 1000 n.Chr.) ist eine erstaunliche Errungenschaft. Das nötige Vertrauen muss zunächst aufgebaut werden, als Garant dienten meist zentrale Institutionen (König, Staat, Bank).

Sprichwörtlich ist hier König Krösus (ca. 590–541 v.Chr.): Als König von Lydien in Vorderasien prägte er als erster Münzen und verhalf so einer der nachhaltigsten Erfindungen der Geschichte zum Durchbruch. Er überführte die Gesellschaft in ein neues Gleichgewicht.

Seit jeher müssen diese Institutionen auch **Falschgeld** bekämpfen. In Deutschland wird bestraft (§146 StGB), wer Geld nachmacht oder verfälscht, sich Falschgeld verschafft und in Verkehr bringt, auch wer gutgläubig Falschgeld erwirbt und wissentlich weitergibt (§147 StGB).

Falschgeld wird staatlicherseits eingezogen und nicht erstattet; solange jedoch niemand die Echtheit prüft, wirkt falsches genau wie echtes Geld. Alles beruht auf diesem Gleichgewicht, **Misstrauen gegen Vertrauen!** Staatliche Institutionen versuchen es zu schützen und zu fördern.

Der Blick auf die Geschichte zeigt eine Abstraktion vom Tauschhandel über prämonetäre Zahlungsmittel erst zu Münzen, dann Geldscheinen, Plastikgeld, Kryptowährungen, usw. Der Abstraktion scheinen dabei keine Grenzen gesetzt, wir erleben dies gerade in unserem Zeitalter:

Papiergeld wurde lange Zeit mit Gold gedeckt, um das Vertrauen zu stärken. Später stellte sich heraus, dass dieser **Goldstandard** nicht (mehr) nötig war, und so wurde er erst gelockert, dann aufgegeben. **Buchgeld** stand früher im *Bankbuch*, heute wird es auf Girokonten *gebucht*. Es heißt auch **Bankengeld** oder **Giralgeld** (it. *giro*, gr. γυρός [gyrós], ‘Kreis, Umlauf’). Es ist zunächst nur ein **Zahlungsversprechen** oder umgekehrt eine **Geldforderung**, kein gesetzliches Zahlungsmittel. Solange ihm alle Beteiligten vertrauen, übernimmt es Geldfunktion.

Ich betone erneut die unabdingbare Voraussetzung des Vertrauens: Ein Geldsystem funktioniert, solange ausreichend viele Teilnehmer dem System vertrauen und sich ein Nutzengleichgewicht einstellt, also Akzeptanz durch strikt positiven Nutzen für jeden Teilnehmer.

Wie und warum funktioniert Geld?

Ähnlich verlief seit den 1960er Jahren die Einführung und Akzeptanz von **Kreditkarten** (Plastikgeld). Die Situation ist nicht symmetrisch, der Mechanismus aber ähnlich: Ausreichend viele Händler müssen diese Karte akzeptieren und zugleich müssen ausreichend viele Kunden sie nutzen wollen. In unserem obigen Modell entspräche dies einem Spiel zwischen zwei Populationen $I = \{1, 2, \dots, M\}$ und $J = \{1, 2, \dots, N\}$. Mit genügend Anstrengung kann man ein neues System etablieren. Schwindet das Vertrauen, so kollabiert das System (auf ein voriges).

Wir beobachten parallel, wenn auch in sehr beschränktem Umfang, den umgekehrten Trend zu **Regionalwährungen** und **Tauschringen**. Das funktioniert nur, wenn genügend Leute vertrauensvoll mitmachen, andernfalls bricht diese Form des Tausches wieder zusammen.

Manche:r mag kritisch einwenden, hier wird das **Geld neu erfunden**. Dennoch sind solche lebensgroßen Experimente oft erstaunlich und aufschlussreich, sowohl in ihren Erfolgen wie in ihren Schwierigkeiten. Man versteht etwas erst dann, wenn man es selbst herstellen kann.

Wie und warum funktioniert Geld?

Wir erleben die jüngsten Entwicklungen dieser **Abstraktion** nahezu live: vom einst direkten Warentausch über Tauschmittel, Münzen, Scheine, Buchgeld zum elektronischen Geld und zuletzt **Kryptowährungen**. Ist dies nachhaltig oder ein Ponzi–Betrug? Wie werden sehen.

Auch Kryptowährungen leben vom Vertrauen, von allseitiger Akzeptanz, und benötigen zu diesem Zweck sichernde Institutionen, also eine geeignete und vertrauenswürdige Infrastruktur. Hier ist die dezentral organisierte **Blockchain** eine wesentliche technologische Neuerung.

Der Wert entsteht durch Aushandlung und gegenseitiges Vertrauen, hier gestützt durch technische Vorkehrungen. Die enorme Wertsteigerung entsteht durch spekulative Hoffnungen auf zukünftige Interessenten. Die Grenze zum Ponzi–Betrug ist daher nicht einfach zu ziehen.

In Deutschland sind Kryptowährungen (noch) kein Zahlungsmittel. Die BaFin sieht Bitcoin als Rechnungseinheit, eine Art Privatgeld. El Salvador experimentiert seit Sep. 2021 damit, trotz aller Risiken. *Sind Kryptowährungen das bessere Geld?* `youtu.be/v0LZzlM_pG8`

Wie und warum funktioniert Geld?

Das Spiel *Misstrauen-gegen-Vertrauen* hat drei Gleichgewichte:
Die beiden reinen Gleichgewichte (Misstrauen,Misstrauen) und (Vertrauen,Vertrauen) sind stabil, das gemischte Gleichgewicht dazwischen ist instabil. Wie gelingt der Übergang vom einen (Misstrauen,Misstrauen) zum anderen (Vertrauen,Vertrauen)?
Genau diese Hürde muss jedes Zahlungsmittel überwinden.

Zunächst einmal hilft es, wenn das Zahlungsmittel Vorteile b hat, zudem möglichst große gegenüber den möglichen Nachteilen a.
Genau dies beobachten wir historisch: „Die Vorteile überwiegen.“
Das ist notwendig, genügt aber noch nicht für den Übergang!

Weiterhin ist es anfangs günstig, eine korrelierte Strategie zu verfolgen. In der Praxis kann dies geschehen, indem ein speziell ausgewiesener Markt für die Benutzung des neuen Zahlungsmittels eingerichtet wird. Jeder Teilnehmer entscheidet sich, ob er daran teilnimmt (Vertrauen) oder nicht (Misstrauen). Dadurch werden die beiden Teilpopulationen weitgehend getrennt und verlustreiche Konflikte vermieden.

Was lernen wir aus Modellen?

Wie verhalten sich unsere spieltheoretischen Modelle zur Wirklichkeit?

Good modeling requires a judicious balance between detail and abstraction, between “realism and relevance”, between simplification and tractability.

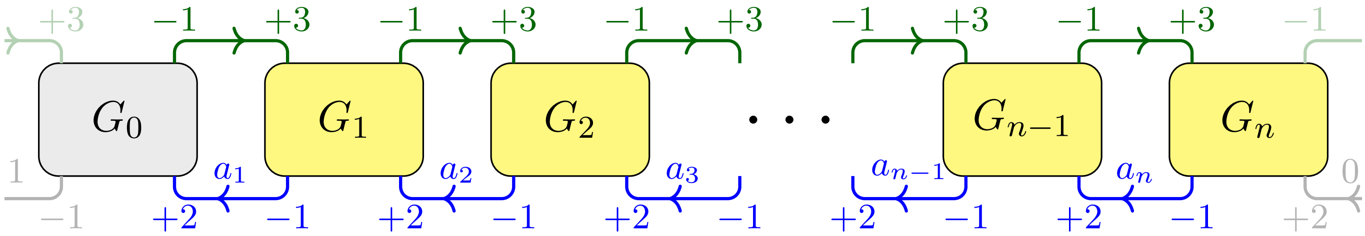
Models should not only be sufficiently well defined to be mathematically analyzable but they should be playable as games (and possibly used as experimental games). This additional gaming criterion provides a “debugging device” and serves as a check on the complexity and ease or difficulty with which the mechanism is run. […]

Critics will feel that the simplifications are gross distortions of “the real world”, while the mathematically oriented theorist may feel that the models are too cluttered up with unnecessary detail. It is possibly helpful to look at the models as playable games which can be analyzed rather than stress immediate realism.

Martin Shubik (1926–2018), *Theory of Money and Institutions*
(in *Handbook of Monetary Economics*, vol. 1, chap. 5, p. 179)

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge

Die Generationen $G_0, G_1, \dots, G_n$ interagieren nach folgendem Muster:



Jede Generation G_i kennt nur die Aktion $a_{i-1} \in \{0,1\}$ ihrer Eltern G_{i-1}. Sie entscheidet sich daraufhin entweder für Egoismus ($a_i = 0$) oder Altersversorgung ($a_i = 1$). Ihre Auszahlung ist $u_i = 2 - 1a_i + 2a_{i+1}$. Wie skizziert gelten die Randbedingungen $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = 0$.

Jede Generation G_i hat demnach vier mögliche Strategien:

Egoist	$E = \left[\begin{smallmatrix} 0\mapsto 0 \\ 1\mapsto 0 \end{smallmatrix}\right]$,	Altruist	$A = \left[\begin{smallmatrix} 0\mapsto 1 \\ 1\mapsto 1 \end{smallmatrix}\right]$,
Kontra	$K = \left[\begin{smallmatrix} 0\mapsto 1 \\ 1\mapsto 0 \end{smallmatrix}\right]$,	Nachmacher	$N = \left[\begin{smallmatrix} 0\mapsto 0 \\ 1\mapsto 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Aufgabe: Untersuchen Sie zunächst den endlichen Fall $n < \infty$. Was sind hier Gleichgewichte? Kann Altersversorgung rational sein?

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge

☺ Unser Modell ist extrem vereinfacht, aber es illustriert das Prinzip. Es ist ein Gleichnis, ein einfaches Lehrbeispiel und leicht zu verstehen. Wir suchen alle stabilen Lösungen, also **Nash–Gleichgewichte**.

Zur Vereinfachung nehmen wir hier an, jede Generation G_i investiert automatisch in ihre Kinder G_{i+1}. Auch dies könnten wir als strategische Option untersuchen, ich gehe auf diese Verfeinerung nicht weiter ein.

Konrad Adenauer wird in dieser Frage der Ausspruch zugeschrieben: „Kinder bekommen die Leute immer.“ — Aus heutiger Sicht ein Irrtum.

Die Werteskalen und konkret angesetzten Zahlen sind etwas willkürlich. Uns geht es um die Frage, ob und wie Gleichgewichte möglich sind.

Die Frage mag überraschen: Jeder Akteur, die Generation G_i, trifft nur eine Entscheidung, nämlich die Zuwendung a_i an ihre Elterngeneration G_{i-1}, jedoch **ohne irgendeine Gegenleistung** erhoffen zu können.

Ist diese Zuwendung also irrational im Sinne individueller Maximierung? Oder gibt es doch Mechanismen, die sie materiell belohnen könnten? Genau diesen Fragen gehen wir in den nächsten Aufgaben nach!

Aufgabe: (0) Formulieren Sie dies sorgfältig als strategisches Spiel

$$u \,:\, \prod_{i\in I} S_i \to \mathbb{R}^I \,:\, s \mapsto u(s).$$

Lösung: (0) Die Spielermenge ist $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Jede Generation G_i kennt nur die Aktion $a_{i-1} \in \{0, 1\}$ ihrer Eltern und muss daraufhin ihre Aktion $a_i \in \{0, 1\}$ wählen. Somit hat sie die vier möglichen Strategien

Egoist	$E = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 0\\ 1\mapsto 0\end{smallmatrix}\right]$,	Altruist	$A = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 1\\ 1\mapsto 1\end{smallmatrix}\right]$,
Kontra	$K = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 1\\ 1\mapsto 0\end{smallmatrix}\right]$,	Nachmacher	$N = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 0\\ 1\mapsto 1\end{smallmatrix}\right]$.

Jeder Spieler $i \in I$ hat also die Strategiemenge $S_i = \{E, A, K, N\}$. Der Strategievektor $s \in S := \prod_{i\in I} S_i$ bestimmt den Aktionsvektor $a \in \{0, 1\}^I$: Wir setzen $a_0 = 1$ und rekursiv $a_i = s_i(a_{i-1})$ für $i \in I$ sowie $a_{n+1} = 0$.

Die Auszahlung $u : S \to \mathbb{R}^I$ ist in diesem Modell $u_i(s) = 2 - 1a_i + 2a_{i+1}$. Für Generation G_1 sind die Strategien $E \equiv K$ und $A \equiv K$ äquivalent, denn jedes Paar führt jeweils zu derselben Aktion a_1 und Auszahlung.

Die Randbedingungen, hier $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = 0$, sind etwas willkürlich, aber notwendig. Anschaulich können wir $s_0 = A$ und $s_{n+1} = E$ setzen.

Beobachtbar sind in diesem Spiel nur die Aktionen $a_i \in \{0, 1\}$. Diese allein bestimmen bereits alle Auszahlung $u_i = 2 - 1a_i + 2a_{i+1}$. Sprichwörtlich sagt hierzu der Volksmund: „Nur die Taten zählen.“ Biblisch: „An ihren Früchten sollt ihr sie erkennen.“ (Matthäus 7,20)

Die **Strategie** s_i ist hier jedoch nicht die Aktion a_i selbst, sondern die Methode (Funktion, Handlungsanweisung), um diese Aktion zu ermitteln. Die auszuführende Aktion a_i ist nämlich nicht konstant vorgeschrieben, sondern hängt ab von der vom Spieler i beobachteten Vorgeschichte.

Dieses raffinierte Modell unterscheidet auf genial-einfache Weise zwischen **Genotyp** $s_i \in \{E, A, K, N\}$, den individuellen Strategien, und **Phänotyp** $a_i \in \{0, 1\}$, den ausgespielten Aktionen abhängig von der Vorgeschichte. Der Phänotyp entsteht aus Genotyp und Umwelt.

Ebenso können wir uns die Strategie s_i von Spieler i als seine **Moral** vorstellen, also seine (explizite) Vorschrift für das „rechte Handeln“. Die Handlung $a_i = s_i(a_{i-1})$ ist seine Reaktion auf die Handlungen anderer, also auf die in der Gesellschaft vorgefundenen Umstände.

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge

Aufgabe: (1) Finden Sie alle Gleichgewichtsauszahlungen $u(s) \in \mathbb{R}^I$!
(2) Genauer gefragt: Welche Gleichgewichte $s \in \mathrm{NE}(u)$ liegen dahinter?

Lösung: (1) Der konstante Strategievektor $s = (E, E, \dots, E)$ führt zu den Aktionen $a = (0, 0, \dots, 0)$ mit den Auszahlungen $u(s) = (2, 2, \dots, 2)$. Hier ist s ein Nash–Gleichgewicht: Kein Spieler kann sich verbessern.

Jedes Nash–Gleichgewicht $s \in S$ führt zu genau demselben Ergebnis: Rückwärtsinduktion: Wäre $a \neq (0, 0, \dots, 0)$, dann existierte ein letzter Spieler $i \in I$ mit $a_i = 1$, also $a_{i+1} = \dots = a_{n+1} = 0$, und i könnte sich aus eigener Kraft verbessern. Somit wäre s kein Gleichgewicht.

🙂 Damit kennen wir alle Gleichgewichtsauszahlungen $u(s) \in \mathbb{R}^I$!

(2) Sei $s \in \mathrm{NE}(u)$. Aus (1) wissen wir bereits $a_i(s) = 0$ für alle $i \in I$. Aufgrund der vorgegebenen Randbedingung $a_0 = 1$ gilt $s_1 \in \{E, K\}$. Für $i \geq 2$ gilt $a_{i-1} = a_i = 0$, also $s_i \in \{E, N\}$. Wäre $s_i = N$, so könnte Spieler $i - 1$ sich aus eigener Kraft verbessern. Also bleibt nur $s_i = E$.

🙂 Damit kennen wir alle Nash–Gleichgewichte $s \in \mathrm{NE}(u)$!

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge

Bei nur **endlich vielen Generationen** ist dies ein Ponzi–Betrug: Dieses Umverteilungssystem muss irgendwann zusammenbrechen!

$\mathscr{R}_1$: Die letzte Generation G_n hat kein Interesse an einer Zuwendung an ihre Elterngeneration G_{n-1}. Im Gegenteil schadet sich G_n damit. Bei rationalem Verhalten wird die Generation G_n also $a_n = 0$ wählen.

$\mathscr{R}_2$: Die vorletzte Generation G_{n-1} sieht dies kommen, Rationalität zweiter Stufe vorausgesetzt. Daher wird auch sie $a_{n-1} = 0$ wählen.

So geht es weiter: $a_n = 0$ führt zu $a_{n-1} = 0$ bis schließlich $a_1 = 0$. Bei rationaler Spielweise entstehen hier also keinerlei Zuwendungen.

Diese raffinierte Schlussweise kennen wir als **Rückwärtsinduktion**. Wir eliminieren hierbei schrittweise alle strikt dominierten Strategien

Zu beachten ist hierbei jedoch, dass die Generation G_i Rationalität der Stufe $n - i + 1$ benötigt. Die frühen Generationen benötigen demnach Rationalität sehr hoher Stufe! Das entspricht genau dem Ponzi–Betrug.

Die Schlussweise gilt nicht mehr im Falle unendlich vieler Generationen. Tatsächlich finden wir im unendlichen Falle völlig neue Gleichgewichte.

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge

Unser Argument beruht auf Rationalität im Sinne der Definition A2A. Dies wird klarer, wenn wir zum Kontrast folgende Alternative betrachten: Generation G_n möchte zwar ihren Nutzen maximieren (Axiom $\mathscr{R}_0$ gilt), ignoriert aber, dass sie die letzte Generation ist (Axiom $\mathscr{R}_1$ ist verletzt).

Aufgabe: Was passiert, wenn die letzte Generation irrational handelt? Im Angesicht des Weltuntergangs verfolgt sie vielleicht andere Ziele und könnte sich für irgendeine Strategie $s_n \in \{E, A, K, N\}$ entscheiden.

Lösung: (3) Wir fixieren $s_n = E$. Das ist die dominante Strategie. Es gelten dieselben Argumente und Ergebnisse wie zuvor in (1,2).

(4) Wir fixieren $s_n = A$. Für alle vorigen Spieler $i = n-1, \dots, 1$ gelten dieselben Argumente wie zuvor: Wir finden $s_i = E$ und $s_1 \in \{E, K\}$.

(5) Wir fixieren $s_n = K$. Für alle vorigen Spieler $i = n-1, \dots, 1$ gelten dieselben Argumente wie zuvor: Wir finden $s_i = E$ und $s_1 \in \{E, K\}$.

(6) Wir fixieren $s_n = N$. Für Spieler $n-1$ ist nun $s_{n-1} = A$ dominant. Für alle Spieler $i = n-2, \dots, 1$ finden wir per Rückwärtsinduktion $s_i = E$ und schließlich $s_1 \in \{E, K\}$. (Siehe unten, das Experiment im Casino.)

Überlappende Generationen: endliche Generationenfolge

Bei endlich vielen Generationen gibt es nur ein Gleichgewicht (1). Selbst bei irrationalem Verhalten bricht das System irgendwann ein. Selbst wenn die frühen Spieler von diesem System profitieren sollten, so ist doch klar: irgendein späterer Spieler muss die Zeche zahlen.

In der Realität treten Betrugssysteme mit diesem Muster tatsächlich auf. Warum fallen Spieler darauf herein? Mehrere Erklärungen sind denkbar:

Die frühen Spieler können irrational handeln, weil sie das Spielsystem nicht durchschauen oder analysieren können. (Annahme $\mathscr{R}_1$ ist verletzt.)

Es könnte auch sein, dass frühe Spieler durchaus das Spielsystem durchschauen, also für sie die Annahme $\mathscr{R}_1$ gilt, sie aber umgekehrt auf die Naivität späterer Spieler hoffen. (Annahme $\mathscr{R}_2$ ist verletzt.)

Bei beschränkter Rationalität gibt es genug Möglichkeiten, auf solche Betrugssysteme hereinzufallen. Erfahrung lehrt, dass dies geschieht. Das gilt insbesondere, wenn sich Details und Darstellung ändern, und so die erneute Analyse die Kapazitäten der Spieler übersteigt. Zudem ist das Internet ideal zur Verbreitung von Betrügereien.

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Im **Casino Royal** (13.05.2022) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, die Kooperation überlappender Generationen als Spiel zu erproben. Experimente helfen uns zur Schärfung und Überprüfung der Theorie, getreu den obigen weisen Worten von Martin Shubik auf Seite H136.

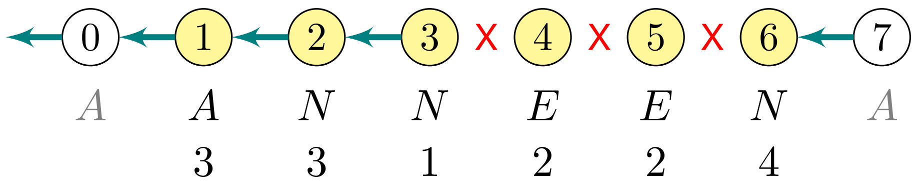
Zur Einleitung habe ich die Spielregeln anhand der Folie H201 erklärt sowie die Modalitäten unserer Umsetzung im Hörsaal, siehe unten. Anfangs spielten sechs Studierende, dann sieben und schließlich neun. Einige Casino-Teilnehmer:innen besuchen die Vorlesung, andere nicht.

Zu diesem Zeitpunkt stand die Vorlesung genau *vor* dem Abschnitt zu überlappenden Generationen. Die Teilnehmer:innen hatten das Spiel – zumindest in der Vorlesung – noch nicht gesehen oder analysiert. Auch im Casino fand die Diskussion erst zwischen den Runden statt.

Als Randbedingungungen wurden $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = 1$ festgelegt. Der Unterschied von $a_{n+1} = 1$ zu $a_{n+1} = 0$ ist nur psychologisch: Für Spieler n addiert sich eine Konstante zur seiner Auszahlung. Ab dem vierten Spiel haben wir Randeffekte spielerisch getestet.

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Erstes Spiel: Sechs Studierende spielten die Generationen $G_1, \dots, G_6$. Dazu bekam jede:r Spieler:in zufällig ihre Generation G_i zugewiesen und notierte dazu ihre Strategie $s_i \in \{E, A, K, N\}$ auf einem Zettel. Die Zettel wurden eingesammelt und an der Tafel ausgewertet:

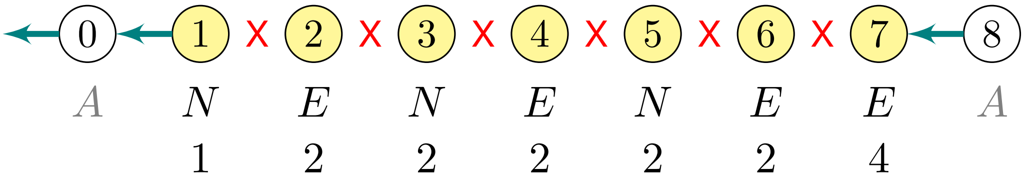


Wie immer gilt Vorsicht: Dies ist kein kontrolliertes Laborexperiment. Wir baten alle, bei der Auswahl ihrer Strategien nicht zu spicken und sich nicht abzusprechen. Strikt durchgesetzt haben wir dies jedoch nicht.

Natürlich nahmen alle diese Bitte sehr ernst, schon aus Eigeninteresse, denn jede:r weiß natürlich: Manipulationen des Raum-Zeit-Kontinuums führen zu unkalkulierbaren Risiken … und meist zu Kino-Blockbustern.

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Zweites Spiel: Selbe Spielregeln wie zuvor. Inzwischen spielten sieben Studierende mit. Jede:r Spieler:in kannte die ihr zugeloste Generation $i \in \{1, \dots, 7\}$ und wählte daraufhin ihre Strategie $s_i \in \{E, A, K, N\}$. Die Zettel wurden eingesammelt und an der Tafel ausgewertet:

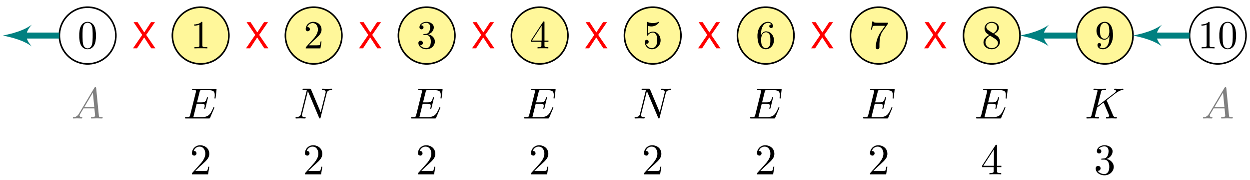


Nach den vorigen Erfahrungen bewegt sich die Gesellschaft in Richtung Egoismus. In einem Kontext von Egoisten fallen die Nachmacher nicht weiter auf, und die Gesellschaft verhält sich insgesamt egoistisch.

Das theoretisch erwartete Nash–Gleichgewicht wird nicht so schnell erreicht. In einer überwiegend egoistischen Gesellschaft ist der Druck gering, von N nach E zu wechseln, siehe G_1 gegenüber G_3, G_5, G_6, G_7.

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Drittes Spiel: Selbe Spielregeln wie zuvor. Inzwischen spielten neun Studierende mit. Jede:r Spieler:in kannte die ihr zugeloste Generation $i \in \{1, \dots, 9\}$ und wählte daraufhin ihre Strategie $s_i \in \{E, A, K, N\}$. Die Zettel wurden eingesammelt und an der Tafel ausgewertet:



Wir sind nahe am Nash–Gleichgewicht, doch nicht ganz. Die Strategie K ist überraschend. Nehmen die Spieler:innen das Spiel ernst genug? Manche wollten vielleicht zur Abwechslung etwas neues ausprobieren.

Zudem kamen einige Teilnehmer:innen verspätet hinzu und lernten das Spiel nun erst durch *trial and error* und durch Imitation. Das war zwar so nicht geplant, entspricht aber durchaus dem wahren Leben.

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Viertes Spiel: Selbe Spielregeln wie zuvor. Als Neuerung haben wir auf Vorschlag der Teilnehmer:innen beschlossen, der Generation G_{n+1} die Strategie N zuzuweisen. Jede:r Spieler:in kannte die ihr zugeloste Generation $i \in \{1, \dots, 9\}$ und wählte ihre Strategie $s_i \in \{E, A, K, N\}$.

$$\leftarrow (0) \times (1) \times (2) \times (3) \times (4) \times (5) \times (6) \times (7) \times (8) \leftarrow (9) \leftarrow (10)$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	E	N	N	E	N	N	E	E	A	N
	2	2	2	2	2	2	2	4	3	

Hier wären $n + 1$ verschiedene, profitable Nash–Gleichgewichte möglich, nämlich $s^k = (E, \dots, E, A, N, \dots, N)$, also $s_k^k = A$ und $s_i^k = E$ für $i < k$ und $s_i^k = N$ für $i > k$. Wir sehen oben (fast) den einfachsten Fall $k = n$.

Warum wurden weiterreichende Nash–Gleichgewichte s^k nicht gespielt? Sie benötigen Absprachen, doch die Generation $n - 1$ hat kein Interesse daran, da ihre Auszahlung dann von 4 auf 3 sinken würde.

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Fünftes Spiel: Ab jetzt gab jede Spieler:in *zuerst* ihre Strategie an, *danach* wurde ihr eine Generation per Los zugewiesen. Symmetrie! Auf Vorschlag der Teilnehmer:innen blieb Generation G_{n+1} bei Strategie N, zudem wurde eine mittlere Generation fest auf N gesetzt, hier G_6.

$$\leftarrow (0) \times (1) \times (2) \times (3) \times (4) \times (5) \times (6) \times (7) \times (8) \leftarrow (9) \leftarrow (10) \leftarrow (11)$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	E	N	N	E	N	N	E	E	A	A	N
	2	2	2	2	2		2	4	3	3	

Die Gesellschaft blieb vorwiegend egoistisch geprägt, die einzigen zwei Altruisten fanden sich zufällig am Ende, die Nachmacher schlossen sich daher den Egoisten an. Insgesamt blieb es bei geringer Kooperation.

Die Symmetrie hilft, doch noch wurde kein Gleichgewicht erreicht. Kann eine konzertierte Aktion erfolgreich sein? Das erfordert eine Absprache vor dem Spiel! Jedes Nash–Gleichgewicht ist dann selbst-stabilisierend.

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Sechstes Spiel: Selbe Spielregeln wie zuvor im fünften Spiel. Weiterhin wurde unter den Spieler:innen keine gemeinsame Absprache getroffen. Das hätte die Strategien koordinieren können, wurde aber weder von der Spielleitung initiiert noch von den Teilnehmer:innen gefordert.

$$\leftarrow 0 \leftarrow 1 \times 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	A	E	A	A	E	N	N	N	N	N	N
	1	4	3	1	2		2	2	2	2	

Wir nähern uns, wenn auch weiterhin nur langsam, dem erwarteten Nash–Gleichgewicht $s^0 = (N, N, \dots, N)$. Die Symmetrie hilft, da keine Spieler:in vorweg ihre Generation weiß, doch das genügt noch nicht.

Leider haben wir hier aufgehört und so die Gelegenheit verpasst, noch einmal mit vorheriger Absprache zu spielen. Kann eine ausgiebige Diskussion zum Nash–Gleichgewicht führen? Es bleibt spannend!

Empirie: der lange Weg zur intergenerationellen Kooperation

Übung: Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte $s \in \mathrm{NE}(u)$ zu den Randbedingungen $s_0 \in \{A, E\}$ und $s_{n+1} \in \{A, E, K, N\}$ Interessant ist insbesondere der obige Fall $s_0 = A$ und $s_{n+1} = N$.

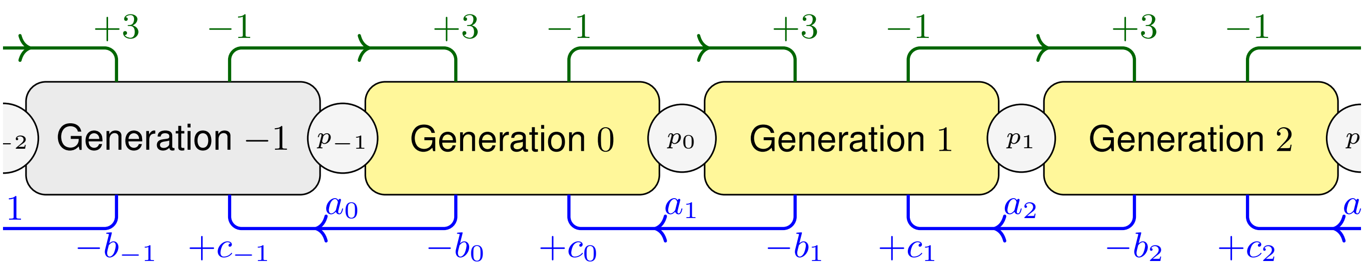
Übung: Überlegen Sie in praktischen Situationen, etwa im obigen Spiel, wie ein solches Gleichgewicht ausgewählt / angesteuert / gefunden werden kann. Versuch und Irrtum? Verhandlung und Absprache?

Übung: Die symmetrisierte Fassung ist ein anderes Spiel $\tilde{u} : S^I \to \mathbb{R}^I$. Formulieren Sie dies aus und bestimmen Sie die Nash–Gleichgewichte. Das beschreibt (und erklärt?) obige Durchgänge vier, fünf und sechs.

Übung: Mischung als Variante: Einige Spieler:innen kennen vorneweg Ihre Generation $i \in I$, andere bekommen nur $*$ als Info und werden erst nach ihrer Strategiewahl zugelost. Das Sein bestimmt das Bewusstsein?

Es ist nicht das Bewusstsein der Menschen, das ihr Sein, sondern umgekehrt ihr gesellschaftliches Sein, das ihr Bewusstsein bestimmt.
Karl Marx und Friedrich Engels, *Kritik der politischen Ökonomie* (1859)

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell



Die Generationen $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ interagieren wie gezeigt, mit Kosten $b_i \in \mathbb{R}_{>0}$ und Nutzen $c_i \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie den Fortsetzungswkten $p_i \in [0,1]$ für $i \in \mathbb{N}$.

Jede Generation G_i kennt nur die Aktion $a_{i-1} \in \{0,1\}$ ihrer Eltern G_{i-1}. Sie entscheidet sich daraufhin entweder für Egoismus ($a_i = 0$) oder Altersversorgung ($a_i = 1$). Ihre Auszahlung ist $u_i = 2 - b_i a_i + p_i c_i a_{i+1}$.

Aufgabe: Was sind hier Gleichgewichte? Ist Altersversorgung rational?

Lösung: Notwendig ist, dass sich Altersversorgung individuell lohnt:

(0) Gilt $p_m c_m < b_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so ist $a_m = 0$ strikt dominant für G_m. Per Rückwärtsinduktion folgt dann $a_i = 0$ für alle vorigen $i = 0, 1, \dots, m$.

(1) Gilt hingegen $p_i c_i > b_i$ für alle $i \geq m$, so erscheint Altersversorgung tatsächlich als ein weiteres mögliches Gleichgewicht.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

Die graphische Darstellung unseres Modells bedeutet folgendes: Jede Generation G_i wählt ihre Aktion $a_i \in \{0,1\}$: Sie kann ihre Eltern vernachlässigen ($a_i = 0$) oder versorgen ($a_i = 1$). Letzteres kostet b_i, nutzt aber den Eltern c_{i-1}. Mit Wkt $p_i \in [0,1]$ geht alles weiter.

Jede Generation G_i kennt nur die Aktion $a_{i-1} \in \{0,1\}$ ihrer Eltern. Sie hat demnach die Strategiemenge $S_i = \{E, A, K, N\}$ mit

Egoist	$E = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 0\\ 1\mapsto 0\end{smallmatrix}\right]$,	Altruist	$A = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 1\\ 1\mapsto 1\end{smallmatrix}\right]$,
Kontra	$K = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 1\\ 1\mapsto 0\end{smallmatrix}\right]$,	Nachmacher	$N = \left[\begin{smallmatrix}0\mapsto 0\\ 1\mapsto 1\end{smallmatrix}\right]$.

Der Strategievektor $s \in S$ bestimmt den Aktionsvektor $a : \mathbb{Z} \to \{0,1\}$: Wir setzen $a_i = 1$ für $i \in \mathbb{Z}_{<0}$ und rekursiv $a_i = s_i(a_{i-1})$ für $i \in \mathbb{N}$. (Randbedingungen sind willkürlich, aber zur Rechnung notwendig.)

Die Auszahlung $u : S \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist dann $u_i(s) = 2 - b_i a_i + p_i c_i a_{i+1}$. Hier wird der Nutzen c_i diskontiert durch die Fortsetzungswkt p_i. Das oben ausgeführte konkrete Basismodell entspricht der Wahl der Modellparameter $b_i = 1$ und $c_i = 2$ sowie $p_i = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

☺ Die Altersversorgung ähnelt oberflächlich einem **Ponzi–Betrug**, führt uns aber tatsächlich zu nicht-trivialen Nash–Gleichgewichten! Das ist der Nutzen konkreter Modelle: Wir können alles ausrechnen.

Der endliche und unendliche Fall werden wunderbar zusammengefasst, verallgemeinert und interpoliert durch die Abbruchwkten $1 - p_i \in [0, 1]$. Der Fall $p_n = 0$ entspricht sicherem Abbruch, also dem endlichen Fall.

Diese Erweiterung unseres Generationenmodells ist mathematisch gesehen eine Verallgemeinerung, vor allem aber eine Vereinfachung! Das erweiterte Modell ist zudem auch wesentlich realistischer.

Die Wkten haben hier keine Erinnerung, somit ist für jede Generation G_i der Vergleich sehr einfach: Den Kosten b_i gegenüber steht die erwartete Altersversorgung $p_i c_i$, also der Nutzen c_i diskontiert durch die Wkt p_i.

Im Falle $p_i c_i < b_i$ ist für G_i nur das egoistische Verhalten stabil / rational. Im Falle $p_i c_i > b_i$ *kann* das altruistische Verhalten für G_i rational sein, *wenn* G_{i+1} und alle nachfolgenden Generationen dies belohnen.

☺ Nash–Gleichgewichte zeigen mögliches, rationales Verhalten.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

⚠ Das Modell erklärt nicht, was eine **gerechte Altersversorgung** ist. Insbesondere erklärt es noch nicht, *welches* Gleichgewicht gespielt wird. Es zeigt jedoch, dass eine Altersversorgung der Eltern nicht altruistisch begründet sein muss, sondern durchaus egoistisch vorteilhaft sein kann.

Es gibt Menschen, die diesem System **misstrauen**, es ablehnen und seine Wirksamkeit abstreiten. In unserem Modell ist die von ihnen zugrundegelegte Wkt Null oder zu klein, um ein Nash–Gleichgewicht tragen zu können. Auch dieses Misstrauen ist also im Modell abbildbar.

Unsere Modelle sind einfache Beispiele zum **Mechanismen-Design** (engl. *mechanism design*). Das Ziel ist die Schaffung eines Rahmens (als Spiel, Anreiz, Gesetz, etc.), der gewünschtes Verhalten ermöglicht, fördert oder gar erzwingt. Die inviduelle Entscheidungsfreiheit kann / soll / darf dabei nicht direkt eingeschränkt werden, allein der Rahmen wird so gestaltet, dass rationale Spieler das gewünschte Verhalten wählen.

Die Spieltheorie ist daher logische Grundlage für jeden **Gesetzgeber**, oder allgemein für jede Gestaltung von Regeln des Zusammenlebens.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

(1) Sei $p_i c_i > b_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, etwa $b_i = 1$ sowie $c_i = 2$ und $p_i = 1$. Zu $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ betrachten wir folgenden Strategievektor $s^n \in S$:

$$\begin{array}{rccccccccccc} i = & 0, & 1, & \dots, & & & n, & \dots & & & & \\ s^n = (& E, & E, & \dots, & E, & E, & A, & N, & N, & N, & \dots &) \\ a^n = (& 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 1, & 1, & 1, & 1, & \dots &) \\ u(s^n) = (& 2, & 2, & \dots, & 2, & 4, & 3, & 3, & 3, & 3, & \dots &) \end{array}$$

Ausgeschrieben gilt $s_i^n = E$ für $i < n$ und $s_n^n = A$ und $s_i^n = N$ für $i > n$. Dies führt zu $a_i^n = 0$ für $i < n$ und $a_i^n = 1$ für $i \ge n$, also $u(s^n)$ wie oben.

Kann sich irgendein Akteur $i \in \mathbb{N}$ aus eigener Kraft verbessern? Nein!
Also ist der Strategievektor s^n tatsächlich ein Nash–Gleichgewicht!

Sei $s \in S$ ein beliebiges Nash–Gleichgewicht mit Aktionen $a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und Auszahlungen $u(s) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Gälte $a_i = 1$ und $a_{i+1} = 0$, so könnte i sich aus eigener Kraft verbessern. Also gilt $a = a^n$ für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Anders gesagt, a kann steigen oder bleiben, aber nicht fallen. Damit kennen wir bereits alle Gleichgewichtsauszahlungen!

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

Übung: Finden Sie alle dahinter liegenden Gleichgewichte $s \in \mathrm{NE}(u)$.
Rückwärtsinduktion gilt nicht im Falle unendlich vieler Generationen: Es gibt keine letzte Generation, mit der die Induktion beginnen könnte. Tatsächlich finden wir im unendlichen Falle völlig neue Gleichgewichte.

Das Generationenmodell unterscheidet auf raffinierte Weise zwischen dem **Genotyp** $s_i \in \{E, A, K, N\}$ (Veranlagung, Überzeugung, Moral) und dem **Phänotyp** $a_i \in \{0, 1\}$ (Ausprägung, Erscheinung). Letztere sind die ausgespielten Aktionen, abhängig von der **Vorgeschichte**.

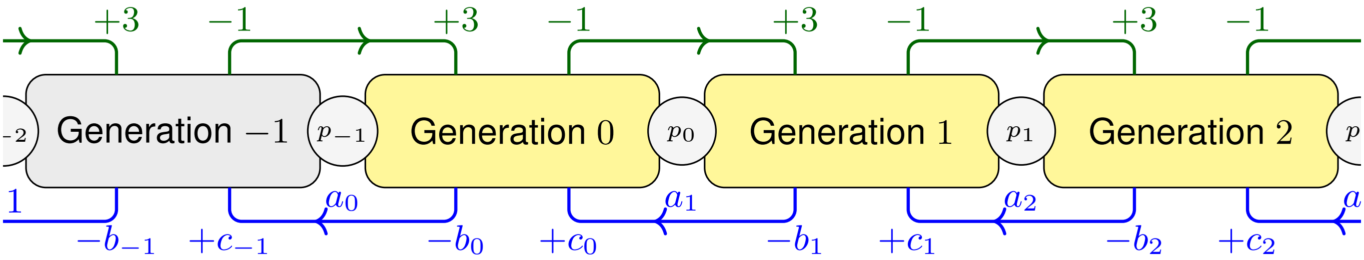
Die Generation G_0 hat nur zwei phänotypisch verschiedene Wahlen: $E \equiv N$ oder $A \equiv K$. Jede Generation G_i für $i \ge 1$ hat vier Strategien.

Jede Generation G_i trifft eine einzige Entscheidung, die Zuwendung a_i an ihre Elterngeneration G_{i-1}. Die Elterngeneration G_{i-1} hat keinerlei Rückwirkung auf G_i, also kein echtes Druckmittel (allenfalls moralische Appelle oder leere Drohungen, die wir in unserem Modell ignorieren).

Allein die Kindergeneration G_{i+1} hat ein mögliches Druckmittel auf G_i. Bemerkenswerterweise genügt schon dieser schwächere Mechanismus.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

Zusammenfassung unserer Ergebnisse zum Rentenmodell:



Satz H2A: Gleichgewichte im Rentenmodell

Die Generationen $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ interagieren wie gezeigt, mit Kosten $b_i \in \mathbb{R}_{>0}$ und Nutzen $c_i \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie den Fortsetzungswkten $p_i \in [0,1]$ für $i \in \mathbb{N}$.

(1) Ist $s \in \prod_{i\in\mathbb{N}} S_i$ ein Nash–Gleichgewicht, so ist der Aktionsvektor $a = a(s) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ wachsend, also $a = a^n := \mathbf{I}_{\mathbb{N}_{\geq n}}$ für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(2) Gilt $p_m c_m < b_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so ist $a_m = 0$ strikt dominant für G_m, per Rückwärtsinduktion folgt $a_i = 0$ für alle $i = 0, 1, \dots, m$, also $n > m$.

(3) Gilt $p_i c_i > b_i$ für alle $i \geq m$, so lässt sich jeder Aktionsvektor $a = a^n$ mit $n \geq m$ durch ein Nash–Gleichgewicht $s = s^n \in \prod_{i\in\mathbb{N}} S_i$ realisieren.

Altersversorgung als spieltheoretisches Modell

Damit dieses filigrane Gleichgewicht bestehen kann, muss es unendlich viele Generationen geben. Der endliche Fall verläuft völlig konträr!

Genauer: Es muss *potentiell* unendlich viele Generationen geben, denn keine Generation darf ernsthaft glauben, die letzte zu sein. Die Maxime „Nach mir die Sintflut!“ führt zu Rücksichtslosigkeit.

Realistischer ist daher folgendes Modell: Jede Generation G_i glaubt, dass die Generationenfolge mit Wkt $p_i \in [0,1]$ weitergeht. Mit Wkt $1 - p_i$ geht die Welt unter, oder Generation G_{i+1} spielt einfach nicht mehr mit.

Im Beispiel vergleicht G_i die Aktion $a_i = 0$ und die Auszahlung $u_i = 2$ mit ihrer Alternative $a_i = 1$ und der Auszahlung $u_i = 1 + 2p_i > 2$. Für $p_i > 1/2$ fällt der Vergleich weiterhin zugunsten der Aktion $a_i = 1$ aus.

Bei Fortsetzungswkt von $p_i = 2/3$ erwarten wir nur drei Generationen. Dennoch lohnt zu jedem Zeitpunkt immer noch der Generationenvertrag!

Fazit: Jede Generation muss ausreichend sicher an den Fortbestand weiterer Generationen glauben und so auf die Fortsetzung des Systems vertrauen. Dann und nur dann sind nicht-triviale Gleichgewichte möglich.

Empirie: It’s a long way to the top… und zum Gleichgewicht!

Im **Casino Royal** (20.05.2022) wollte ich die Erfahrungen der Vorwoche zu einem würdigen Abschluss bringen. Die positive Entwicklung stimmte optimistisch, es fehlte nicht viel. In der Vorlesung am Mittwoch hatten wir das Generationenmodell diskutiert und alle Gleichgewichte bestimmt. Das Kapitel war abgeschlossen. In diesem Sinne schien alles gelöst.

Meine Hoffnung war, das höherwertige Gleichgewicht in einem letzten, kurzen Experiment zu erproben, auch empirisch als „die beste Lösung“ zu etablieren, damit die schöne Theorie zu bestätigen und zu krönen. Allein, es kam alles anders. Jedes Casino ist lehrreich, und manchmal geschieht Spektakuläres, Geschichte wird geschrieben. Dieses Casino lief weitgehend konträr zur Intuition und hat das Zeug zur Legende.

Es kamen 15 Teilnehmer:innen, $1/3$ war schon letzte Woche im Casino, für $2/3$ war das Generationenspiel neu. Eine Teilnehmerin der Vorwoche stellte die Regeln für alle nochmals vor, anhand der obigen Folie H201, so entstand ein hinreißendes Beamer-Karaoke. (Notiz an mich selbst: Ich sollte auch meine Vorlesungen generell auf Karaoke umstellen!)

Empirie: It’s a long way to the top… und zum Gleichgewicht!

Erstes Spiel: Jede:r Spieler:in bekommt eine Generation $G_1, \dots, G_{15}$ zugelost und notiert ihre Strategie $s_i \in \{E, A, K, N\}$ auf einem Zettel. Alle Zettel werden eingesammelt und an der Tafel ausgewertet:

$$\leftarrow 0 \leftarrow 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \leftarrow 8 \leftarrow 9 \leftarrow 10 \times 11 \times 12 \times 13 \leftarrow 14 \leftarrow 15 \leftarrow 16$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	E	N	E	N	N	N	A	N	A	E	E	N	A	A	N
	1	2	2	2	2	2	4	3	3	1	2	2	4	3	3	

Die Randbedingungen $s_0 = A$ und $s_{16} = N$ sind fix und allen bekannt. Das Ende $\dots, A, A, N$ ist daher unerwartet, rational wäre $\dots, E, A, N$. Andererseits sind viele Spieler:innen noch unerfahren, probieren aus und experimentieren. Gut, dass wir mit dieser Proberunde beginnen!

In diesem Testlauf ohne vorige Aussprache zählen wir 6 Nachmacher, 5 Altruisten, 4 Egoisten. Das ist die nüchterne Ausgangslage, nun sind alle hochmotiviert und bereit zu zivilisatorischen Höchstleistungen. Können unsere wackeren Held:innen die Welt verbessern?

Empirie: It’s a long way to the top… und zum Gleichgewicht!

Nach dem Probelauf kommt der Vorschlag, zur symmetrischen Form überzugehen. Alle stimmen zu. Zudem wünschen die Teilnehmer:innen dringend eine ausführliche Aussprache mit dem Ziel und in der Hoffnung, ein gemeinsames Vorgehen abzustimmen. Das hatte bislang gefehlt!

In flammender Rede erklärt Frau H. ihre Vision, ich paraphrasiere: „Ich war in der Vorlesung und habe zu diesem Spiel alles verstanden. Das Beste ist, wenn wir alle Nachmacher spielen, dann bekommt jede:r von uns die Auszahlung 3. Das ist viel besser als eben und zudem ein Gleichgewicht: Wer davon abweicht, und zum Beispiel E oder K spielt, schadet sich selbst, denn dann bekommt er/sie statt 3 nur 2.“

Ich versuche zu polemisieren: „Ganz egoistisch gesehen wäre es am lukrativsten, altruistische Kinder zu haben und selbst Egoist zu spielen.“ Dieses Störmanöver wird abgeschmettert mit dem Argument, dass noch keine ihre Position kennt, und die anderen ja doch Nachmacher spielen (sollen). Es werden noch Details zu diesem Vorschlag erörtert und an die Autorität appelliert, erstaunlicherweise diesmal nicht an die Moral.

Empirie: It’s a long way to the top… und zum Gleichgewicht!

Zweites Spiel: Die visionäre Rede von Frau H. zeigt Wirkung, fast alle folgen der überzeugend vorgebrachten Argumentation, doch nicht ganz: Neben elf (!) Nachmachern gibt es zwei Altruisten, einen Egoisten und einen Kontraspieler. Die zufällige Zulosung der Generationen ergibt:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	N	N	N	A	N	N	K	N	N	N	N	N	A	N	E	N
	3	3	3	3	3	1	2	2	2	2	2	4	3	1	2	

Beim Auslosen von links nach rechts beginnt alles so vielversprechend! Auch hier ist das Ende unglücklich. Da die Generation zugelost wurde, liegt es diesmal nicht an unkluger Strategie, sondern ist einfach Pech.

Noch tragischer ist die Kontra-Generation 7: Sie schadet nicht nur sich selbst, sondern reißt vier wohlmeinende Nachmacher-Generationen mit ins Verderben. Erst die fünfte hat großes Glück und altruistische Kinder.

Die altruistische Generation 4 hingegen fällt phänotypisch gar nicht auf. Kontrovers: Soll man Altruisten rügen oder loben, bremsen oder fördern?

Empirie: It’s a long way to the top. . . und zum Gleichgewicht!

Die Enttäuschung ist groß, und manche machen ihrer Wut sofort Luft: „Hätte Generation 7 nicht Kontra gespielt, sondern Nachmacher wie zuvor vereinbart, dann wäre unser Plan wunderbar aufgegangen.“ Hätte, hätte, Generationenkette. *You can’t make this stuff up!*

Herr S. ergreift das Wort: „Ich stimme meiner Vorrednerin voll und ganz zu: Wir sollten alle Nachmacher spielen. Leider sind manche nicht fähig oder nicht willens dazu. Um das auszugleichen, sollten ein paar von uns Altruist spielen, sagen wir mit Wkt $1/4$. Das durchbricht Negativsträhnen.“

Als Advocatus Diaboli versuche ich erneut zu polemisieren. Vorneweg *ad hominem*: „Herr S. hat eben noch Geld verloren, nun spielt er sich als Experte auf.“ Dann populistisch: „Ich als einfacher Mann auf der Straße finde das zu kompliziert. Die Studenten lernen so einen theoretischen Quatsch an der Uni, in der Praxis funktioniert das nie und nimmer!“. – „Doch, man kann es leicht nachrechnen.“ – „Nein, ich nicht.“

Ich zweifle, ob Anleitung und Begründung wirklich verstanden werden. Allen anderen scheint es klar genug, ihnen genügt die Aussprache.

Empirie: It’s a long way to the top. . . und zum Gleichgewicht!

Drittes Spiel: Die Ansprache von Herrn S. hat wohl Eindruck gemacht. Neben zehn (!) Nachmachern gibt es einen Altruisten und vier Egoisten. Der gesellschaftliche Zusammenhalt hat sich somit leicht verschlechtert. Die zufällige Zulosung der Generationen ergibt:

← 0 ← 1 ← 2 X 3 X 4 ← 5 X 6 X 7 X 8 X 9 X 10 X 11 X 12 X 13 X 14 X 15 X 16

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	N	N	E	N	A	E	N	E	E	N	N	N	N	N	N	N
	3	1	2	4	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	

Herr S. ist sichtlich geknickt und sagt später: „Ich frage mich, ob mein Vorschlag nicht mehr geschadet als genutzt hat. Vielleicht haben einige Spieler auf einen ausreichend hohen Anteil von Altruisten spekuliert, und deshalb Egoist gespielt?“ Gelohnt hat sich das jedenfalls nicht!

Der Vorschlag ist gewitzt. Doch als jahrelang erfahrener Spieltheoretiker weiß Herr S. natürlich, dass sein Strategiebündel kein Gleichgewicht ist, also nicht selbst-stabilisierend. Im Gegenteil verlockt es zur Spekulation. Wo kein Gleichgewicht ist, helfen auch keine frommen (Experten-)Worte.

Empirie: It’s a long way to the top… und zum Gleichgewicht!

Wieder ist die Enttäuschung groß. Wie kann das sein? Wer ist schuld?

Herr S. improvisiert eine kreative Erklärung: „Manche von uns sind neu, andere haben schon Spielgeld aus den Vorwochen. Sie möchten nicht, dass mehr Spielgeld in Umlauf kommt und sabotieren vielleicht unsere Bemühungen.“ Es ist nur ein kleiner Schritt zum Verschwörungsmythos.

Herr M. proklamiert: „Wir sollten endlich alle zusammenhalten und Prof. Eisermann möglichst viel Geld aus der Tasche ziehen!“ Wo der innere Zusammenhalt fehlt, eint vielleicht ein gemeinsamer äußerer Feind? Das klappt immer. Als zusätzliche Motivation schadet es nie.

Herr A. unterbreitet seine Troll-Vermutung: „Einige Teilnehmer:innen nehmen das Spiel nicht ernst. Statt der Auszahlung in €i$to maximieren sie ihren Spaß am allgemeinen Chaos und an dem Ärger der anderen. Daher sollten wir nicht Spielgeld auszahlen, sondern echtes Geld!“

Nach Rat unserer Rechtsabteilung („Nein!“) willige ich ein, echtes Geld auszuzahlen. Umrechnungskurs $1 \mapsto -50¢$, $2 \mapsto 0¢$, $3 \mapsto 50¢$, $4 \mapsto 100¢$.

Empirie: It’s a long way to the top… und zum Gleichgewicht!

Alle Teilnehmer:innen werden über Chancen und Risiken aufgeklärt und ausdrücklich darauf hingewiesen, dass sie bei diesem Durchgang zwar Geld gewinnen, aber auch Geld verlieren können. Frau Stoll erläutert ausführlich, dass man sicherheitshalber Egoist spielen kann.

Viertes Spiel: Es geht um Geld, sonst echte €i$to, jetzt echte Euro! Ich konferiere mit meiner Bank und hole Bargeld, daher verpasse ich den Großteil der lebhaften Debatte. Das Ergebnis spricht für sich:

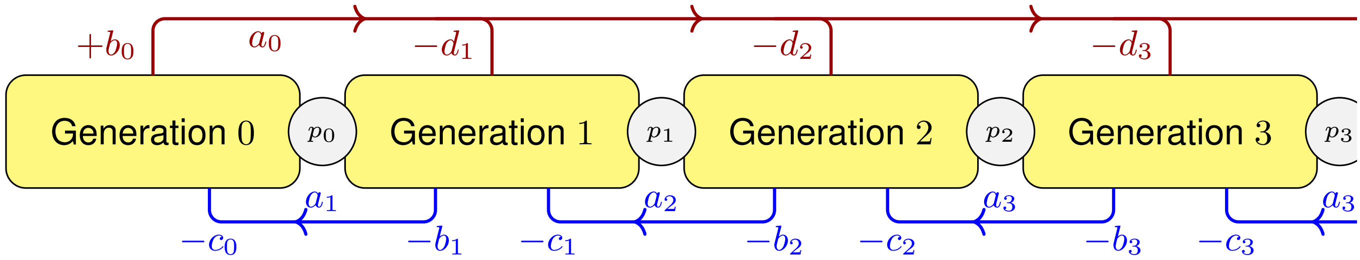
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	N	N	N	N	N	N	N	N	N	A	N	A	N	N	N	N
	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	

Yes! Nach intensiven Verhandlungen ist die von allen so lang ersehnte Lösung endlich erreicht, ich um 7.50€ ärmer, alle an Erfahrung reicher.

Wir werden hingewiesen auf StGB §284 *Unerlaubte Veranstaltung eines Glücksspiels*. Ich halte dagegen GG Art. 5.3.1 *Kunst und Wissenschaft, Forschung und Lehre sind frei.* What happens in Vegas, stays in Vegas.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Können zukünftige Generationen ihre Rechte schon heute einklagen?



Nach uns die Sintflut!
Wo kein Kläger, da kein Richter!

Wir haben die Erde nicht von unseren Eltern geerbt,
sondern von unseren Kindern nur geliehen.

Akteure sind die Generationen G_i für $i \in \mathbb{N}$. Die Generation G_0 wählt ihre Aktion / Strategie $a_0 \in A_0 = \{0 = \text{Nachhaltigkeit}, 1 = \text{Raubbau}\}$.

Jede Generation G_i mit $i \geq 1$ kennt die gesamte Vorgeschichte und folgert daraus ihre Aktion $a_i \in A_i = \{0 = \text{schweigen}, 1 = \text{anklagen}\}$.

Letzteres kostet sie selbst $b_i > 0$ und ihre Elterngeneration $c_{i-1} > 0$. Generation G_i hat somit die Strategiemenge $S_i = \{\, s_i : \{0,1\}^i \to \{0,1\} \,\}$.

Mit Wkt $p_i \in [0,1]$ setzt sich das System von Generation G_i zu G_{i+1} fort. Auszahlungen sind $u_0 = b_0 a_0 - p_0 c_0 a_1$ und $u_i = -b_i a_i - p_i c_i a_{i+1} - d_i a_0$.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

„Nach uns die Sintflut!“ Was tun, wenn eine Generation durchdreht? Kommt sie immer straflos davon? „Wo kein Kläger, da kein Richter!“ Oder können wir **intergenerationelle Schutzmechanismen** entwickeln für den Erhalt der Umwelt und die Rechte zukünftiger Generationen?

Wir haben die Erde nicht von unseren Eltern geerbt,
sondern von unseren Kindern nur geliehen.

Der Autor dieses Sinnspruchs ist unbekannt. Eine frühe Verwendung geht zurück auf Moses Henry Cass, 1974 Autraliens Umweltminister:

We have not inherited this earth from our parents to do with it what we will.
We have borrowed it from our children and we must be careful
to use it in their interests as well as our own.

Die **Generationengerechtigkeit** leidet an ihrer inhärenten Asymmetrie: Zukünftige Generationen können ihre Interessen aktuell nicht vertreten. Gewaltenteilung beruht prinzipiell auf **Checks and Balances**, und diese erfordern gleichzeitige Existenz, Kommunikation und Einflussnahme.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Wir, die aktuelle Generation G_0, sind jetzt verantwortlich für diese Welt. Wenn unser Handeln sich in Generation G_n niederschlägt, kann sie sich nicht wehren: Wir sind lange tot, alle Appelle und Anklagen sind nutzlos. Heute sind wir zwar noch lebendig und belangbar, doch Generation G_n lebt noch nicht und kann uns daher nicht zur Verantwortung ziehen.

Nur Sie, die direkt nachfolgende Generation G_1, könnten uns belangen. Sie stehen also vor Ihrer Entscheidung: schweigen oder anklagen? Sie können unser Verschulden nicht mehr heilen, nur noch ertragen. Anklage kostet Sie Ressourcen: Zeit, Energie, Mühe, Überwindung. Rational würden Sie also die Situation zähneknirschend akzeptieren. Sie werden sich beruhigend einreden, es sei noch nicht so schlimm. Wir, G_0, kommen straflos davon. „Wo kein Kläger, da kein Richter.“

Was werden später Ihre Kinder, die Generation G_2 tun? Sie können uns, die Großeltern G_0 und eigentlichen Verursacher, nicht mehr belangen. Generation G_2 kann nur Sie, die eigene Elterngeneration G_1, anklagen. Werden Ihre Kinder das tun? Vermutlich nicht. Sie werden schweigen, so wie Sie geschwiegen haben. So geht es Generation um Generation.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Ist diese Entwicklung unausweichlich? Oder gibt es Alternativen? **Nachhaltigkeit** ist die Nutzung und Bewahrung von Ressourcen; sie garantiert die Stabilität und die natürliche Regenerationsfähigkeit. Deutschland hat die Ressourcen für 2022 bereits am 4. Mai verbraucht.

Die **Ethnologie** untersucht hierzu traditionell-nachhaltiges Wirtschaften in indigenen Kulturen. Ein typisches Muster: Stabile Systeme verfügen über stabilisierende Mechanismen durch ethisch-moralische Prinzipien. Diese sind meist nicht rational, sondern animistisch-religiös begründet durch Mythen, Rituale, Tabus, etc. Das erschwert die Übertragung auf unsere aktuelle Gesellschaft. Ist hier Rationalität überhaupt möglich?

Hierzu untersuchen wir die Situation spieltheoretisch. Das obige Modell ist wie immer beschämend simpel, aber es illustriert doch das Prinzip. Selbstverständlich können Fehlentscheidungen nicht gänzlich verhindert werden. Aber wir suchen ein ausgewogenes System von *Checks and Balances*, das **erkennbare Fehlentscheidungen** angreifbar macht: Sie können angeklagt werden, ja sie müssen angeklagt werden!

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Aufgabe: Was sind hier Gleichgewichte? Ist Nachhaltigkeit rational? Können Sie ein System von **Checks and Balances** implementieren? Was wird hier kontrolliert? Und wer kontrolliert die Kontrolleure?

We will have to repent in this generation not merely for
the vitriolic words and the violent actions of the bad people,
but for the appalling silence and indifference of the good people.
Martin Luther King (1929–1968)

Gesetz zur Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen (GzG):

§0: Jede Generation muss nach ihrem bestem Wissen und Gewissen die berechtigten Interessen aller zukünftigen Generationen wahren.

§1: Jede Generation muss §0 von ihren Eltern einfordern.

§2: Jede Generation muss §1 von ihren Eltern einfordern.

§3: Jede Generation muss §2 von ihren Eltern einfordern.

usw. . . Jede Generation muss diese Prinzipien strengstens einhalten, Forderungen unverzüglich einklagen und jede Säumnis bestrafen.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Lösung: Wann kann sich Nachhaltigkeit individuell lohnen?

(0) Gilt $p_n c_n < b_n$ für ein $n \ge 1$, so ist $a_n = 0$ strikt dominant für G_n, und per Rückwärtsinduktion folgt $a_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$ und $a_0 = 1$.

(1) Gilt $p_i c_i > b_i$ für alle $i \ge 1$, dann bilden nachhaltiges Verhalten und strenge Kontrolle ein weiteres mögliches Gleichgewicht.

Wie kann das funktionieren? Wird Information von der Zukunft in die Gegenwart übertragen? Nein, natürlich nicht! Aber die gegenwärtige Information wird generationenübergreifend bewertet und vertreten.

Kurz gesagt: Das Anklagerecht wird zur Anklagepflicht aufgewertet. Auch diese Pflicht muss überwacht werden, und das Anklagerecht hierzu zur Anklagepflicht aufgewertet werden, usw. Das erklärt die spezielle rekursive Form des oben skizzierten Gesetzes (GzG).

Die gesamte Konstruktion ist subtil und nicht einfach realisierbar. Aber seien wir ehrlich: Wer erwartet denn hier einfache Lösungen? Die Sachlage ist so verzwickt, dass wir erstaunt und glücklich sind, wenn sich überhaupt eine Lösung abzeichnet. Denken hilft!

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Das Modell erklärt nicht explizit, was **Generationengerechtigkeit** ist, es versucht lediglich, einen **Kontrollmechanismus** zu implementieren. Das ist generationenübergreifend keineswegs trivial, wie wir wissen.

Unser Modell ist ein einfaches Beispiel von **Mechanismendesign** (engl. *mechanism design*). Das Ziel ist die Schaffung eines Rahmens (als Spiel, Anreiz, Gesetz, etc.), der gewünschtes Verhalten ermöglicht, fördert oder gar erzwingt. Die individuelle Entscheidungsfreiheit kann / soll / darf nicht direkt eingeschränkt werden, allein der Rahmen wird so gestaltet, dass rationale Spieler das gewünschte Verhalten wählen.

Die Spieltheorie ist daher logische Grundlage für jeden **Gesetzgeber**, oder allgemein für jede Gestaltung von Regeln des Zusammenlebens.

Unsere Modelle sind simpel, aber die Fragen sind ernst. Seit Jahren wird darüber gestritten, in welchem Umfang die menschliche Aktivität das Klima beeinflusst oder gar eine Klimakatastrophe auslösen kann. Das ist nicht nur eine wissenschaftliche, sondern eine politische Frage. Daher müssen wir auch soziale Regeln und Kontrollen bedenken.

Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen

Unser Modell versucht, Nachhaltigkeit mit Rationalität zu vereinen. Wem das zu theoretisch ist, der fragt nach praktischen Anwendungen: Lassen sich solche Prinzipien wirklich nutzen oder schon beobachten?

Die **Ethnologie** untersucht hierzu traditionell-nachhaltiges Wirtschaften in indigenen Kulturen. Rekordhalter sind die Ureinwohner Australiens (Aborigines) mit etwa 40 000 Jahren erfolgreicher Anpassung.

Manche Ethnologen interpretieren **Mythen und Riten** derart, dass sie genau diese stabilisierende Aufgabe erfüllen und den Gemeinschaften ermöglichen, sich Umweltveränderungen so weit wie nötig anzupassen und zugleich ihr Ökosystem so wenig wie möglich zu belasten.

Negativbeispiele sind (soweit wir es verstehen) die Bewohner der Osterinseln, die zwischen 1300 und 1700 n.Chr. durch systematische Abholzung ihre eigenen Lebensgrundlagen zerstörten. Gleiches gilt vermutlich für den Untergang der Maya-Kultur in Mittelamerika zwischen 750 und 950 n.Chr. durch natürliche und anthropogene Klimaänderung. Nochmal: Unsere Modelle sind simpel, aber die Fragen sind ernst.

Nachhaltigkeit als spieltheoretisches Modell

Aufgabe: (0) Formulieren Sie dies als Spiel $u : \prod_{i\in\mathbb{N}} S_i \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
(1) Ist Raubbau $(b_0, -d_1, -d_2, \dots)$ eine Gleichgewichtsauszahlung?
(2) Ist Nachhaltigkeit $(0, 0, 0, \dots)$ eine Gleichgewichtsauszahlung?
(3) Wenn sich $G_0, \dots, G_n$ gegen alle nachfolgenden verbünden?

Lösung: (0) Die Konfliktsituation wurde vollständig als Spiel formalisiert: Auszahlungen sind $u_0 = b_0 a_0 - p_0 c_0 a_1$ und $u_i = -b_i a_i - p_i c_i a_{i+1} - d_i a_0$. Dies entspricht der obigen Graphik mit den Konstanten $b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}_{>0}$.

Generation G_i hat die Strategiemenge $S_i = \{\, s_i : \{0,1\}^i \to \{0,1\} \,\}$.
Beispiel: Die konstante Abbildung $s_i = 0$ bedeutet „immer schweigen".
Rekursiv erhalten wir die Aktion $a_i = s_i(a_0, a_1, \dots, a_{i-1})$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.

(1) Der Strategievektor $s = (1, 0, 0, 0, \dots)$ führt zu den Aktionen $a = (1, 0, 0, 0, \dots)$ und den Auszahlungen $u = (b_0, -d_1, -d_2, -d_3, \dots)$.

Dieser Strategievektor s ist tatsächlich ein Nash–Gleichgewicht.
Keiner der Akteure G_i kann sich aus eigener Kraft verbessern.
Das ist zwar traurig, aber ein mögliches Gleichgewicht.

Nachhaltigkeit als spieltheoretisches Modell

Für die Modellparameter setzen wir $0 < b_i < p_i c_i$ voraus für alle $i \ge 1$.
Der angerichtete Schaden $d_i > 0$ spielt dagegen keine weitere Rolle.

(2) Jede Generation G_i prüft §0–§∞ GzG, bis §$(i-1)$ genügt: Hat ihre Elterngeneration G_{i-1} die Rechte zukünftiger Generationen gewahrt?

Falls ja, so schweigt sie: $a_i = 0$. Falls nein, so klagt sie an: $a_i = 1$.
Formel $s_i : \{0,1\}^i \to \{0,1\} : (a_0, \dots, a_{i-1}) \mapsto a_0 + \dots + a_{i-1} \bmod 2$.

Dieser spezielle Strategievektor $s = (s_0, s_1, s_2, s_3, \dots)$ führt zu den Aktionen $a = (0, 0, 0, 0, \dots)$ und den Auszahlungen $u = (0, 0, 0, 0, \dots)$.

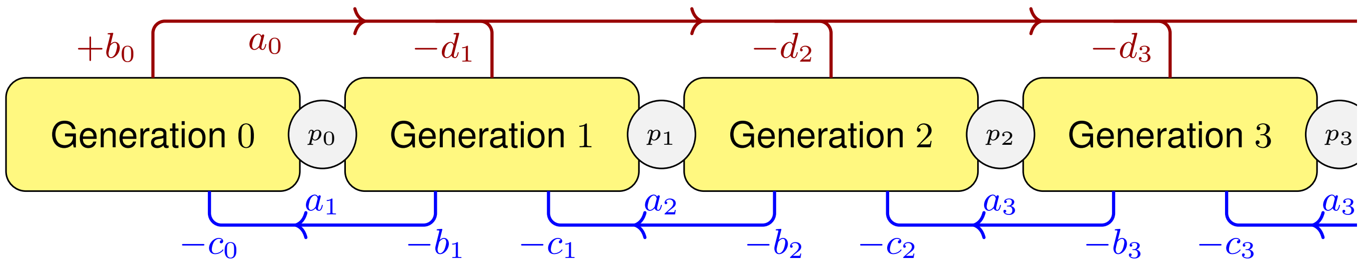
Dieser Strategievektor s ist tatsächlich ein Nash–Gleichgewicht.
Keiner der Akteure G_i kann sich aus eigener Kraft verbessern.

(3) Das gilt selbst, wenn sich $G_0, G_1, \dots, G_n$ verbünden sollten.
Rückwärtsinduktion: Schließlich wird G_n einlenken müssen.
Daher lenken vorsorglich auch $G_{n-1}, G_{n-2}, \dots, G_0$ ein.

⚠ Wir haben hier starke Voraussetzungen, insbesondere Kenntnis der gesamten Vergangenheit und so umfangreiche Strategiemöglichkeiten.

Nachhaltigkeit als spieltheoretisches Modell

Zusammenfassung unserer Ergebnisse zum Nachhaltigkeitsmodell:



Satz H2B: Gleichgewichte im Nachhaltigkeitsmodell

Die Generationen $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ interagieren wie oben erklärt.

(0) Raubbau $s_0 = 1$ und Schweigen $s_i = 0$ für alle $i \geq 1$ bilden ein Gleichgewicht dieses Spiels. (Das ist zwar traurig, aber wahr.)

(1) Gilt $p_n c_n < b_n$ für ein $n \geq 1$, so ist $a_n = 0$ strikt dominant für G_n, und per Rückwärtsinduktion folgt $a_i = 0$ für $i = 1, 2, \dots, n$ und $a_0 = 1$.

(2) Gilt $p_n c_n > b_n$ für alle $n \geq 1$, dann bilden nachhaltiges Verhalten und strenge Kontrolle ein Gleichgewicht. Explizit als Formel ausgeschrieben:

$$s_i \;:\; \{0,1\}^i \to \{0,1\} \;:\; (a_0, \dots, a_{i-1}) \mapsto a_0 + \dots + a_{i-1} \bmod 2$$

Nachhaltigkeit als spieltheoretisches Modell

Dieses Modell ist interessant unter mindestens zwei Blickwinkeln: Als mathematische Miniatur zur spieltheoretischen Modellierung sowie darüber hinaus als Gleichnis, vielleicht Denkanstoß für die Wirklichkeit. Kann es Beobachtungen erklären oder gar unser Verhalten verbessern?

Zunächst die mathematische Seite: Das Modell und der Satz scheinen Ihnen vielleicht bei einer ersten Begegnung noch recht kompliziert. Bei der zweiten Betrachtung erweist es sich jedoch als recht simpel: Mit wenig Aufwand können wir eine komplexe Situation beschreiben.

Die Formel $s_i : \{0,1\}^i \to \{0,1\} : (a_0, \dots, a_{i-1}) \mapsto a_0 + \dots + a_{i-1} \bmod 2$ mag Sie überraschen und Ihnen übertrieben pedantisch vorkommen. Andererseits ist sie wunderbar explizit, einfach, präzise, narrensicher. Damit haben wir etwas in der Hand und können mathematisch arbeiten.

Sie sehen hier, wie gut gebaute Modelle mathematische Eleganz und argumentative Kraft entfalten können. Sie können uns informieren und vielleicht sogar unser Handeln leiten. Falls Sie noch nicht überzeugt sind, dürfen Sie gerne selbst noch bessere Modelle entwickeln!

Modell und Wirklichkeit

Können zukünftige Generationen ihre Rechte schon heute einklagen? Das war unsere Ausgangsfrage. Die Antwort lautet zusammengefasst: Ja, doch dazu brauchen sie einen Anwalt! Das können nur heutige Generationen leisten, in unserem Modell die heutige Jugend G_1.

Die Wirklichkeit ist natürlich viel komplexer als unser simples Modell; nie sollten wir unsere vereinfachte Abstraktion mit der Realität verwechseln. Dennoch kann unser Modell Strukturen und Mechanismen erklären, es kann als lehrreiches Gleichnis verstanden und genutzt werden.

Die aktuelle Jugend G_1 handelt nicht aus eigennützigen Motiven, im Gegenteil für sie selbst wären Schweigen und Erdulden einfacher. Doch sie ist in der Pflicht, die folgenden Generationen zu vertreten. Genau dies verleiht ihrem Protest Nachdruck und Legitimität.

Wann, wenn nicht jetzt?
Wo, wenn nicht hier?
Wer, wenn nicht wir?
John F. Kennedy (1917–1963)

Modell und Wirklichkeit

Unser Modell vereinfacht jede Generation G_i zu einem einzigen Akteur. Übertragen auf die Menschheit ist das recht unrealistisch: Einerseits ist diese Einteilung willkürlich. Andererseits gibt es Divergenzen innerhalb jeder Generation. Damit wird auch die Schuldfrage juristisch schwierig:

Wer sind hier die handelnden (juristischen) Personen? Zählt nur die Individualschuld? Gibt es Kollektivschuld? Verantwortliche können sich in einer Gruppe verstecken, es droht das Restaurant-Paradox (G209). Reales Handeln erfordert begriffliche Klarheit und Entschlossenheit.

Die gesamte Konstruktion ist subtil und nicht einfach realisierbar. Aber seien wir ehrlich: Wer erwartet denn hier einfache Lösungen? Die Sachlage ist so verzwickt, dass wir erstaunt und glücklich sind, wenn sich überhaupt Lösungen abzeichnen. Denken hilft!

Alternative: Schlägt hier der **großе Filter** zu? (engl. *the great filter*) Das Universum ist groß, doch wir kennen bislang keine Zivilisationen außer unserer. Daher dürfen wir spekulieren: warum? Ist das Zufall oder Notwendigkeit? Zerbrechen Zivilisationen systematisch an ihrem Erfolg?

Modell und Wirklichkeit

Ist die Menschheit noch zu retten? Diese Frage ist brisanter denn je! Im SoSe 2018 haben wir erstmals unsere Veranstaltung zur Spieltheorie und ökonomischem Verhalten angeboten und dabei insbesondere auch Generationenmodelle diskutiert. Am 20.08.2018 demonstrierte Greta Thunberg zum ersten Mal für Klimaschutz, damals noch alleine, und begann die Bewegung **Fridays For Future.** Zufall? Ich glaube nicht!

Meine zugespitzte Darstellung suggeriert eine kausale Verbindung, die sicher nicht besteht, auf die ich aber zugegeben sehr stolz wäre. Die wahre Kausalität ist ganz einfach das drängende reale Problem, das Menschen weltweit und auch unsere kleine Vorlesung beeinflusst. Hören Sie vor diesem Hintergrund die verzweifelte Anklage **How dare you?** vom UN-Klimagipfel am 23.09.2019 (`youtu.be/TMrtLsQbaok`).

Der Beitrag spieltheoretischer Modelle bleibt vermutlich unbedeutend, doch immerhin taugen sie als Gleichnisse und vielleicht Denkanstöße. Es lohnt allemal, darüber nachzudenken, daran zu lernen und die Wirklichkeit etwas besser zu verstehen. Es geht um alles.

Modell und Wirklichkeit

Im WiSe 2019 durften wir unsere Veranstaltung erneut anbieten. Darauf haben sich Aktivist:innen in Deutschland und Österreich zum Bündnis **Letzte Generation** zusammengefunden, um durch zivilen Ungehorsam ein entschlosseneres Handeln gegen die Klimakrise zu erzwingen.

Dieser **Aufstand der Letzten Generation** entspringt der Befürchtung, dass im Erdklima kritische Grenzen (sog. Kippelemente) irreversibel überschritten werden und die Erde unbewohnbar machen; dabei sei diese Generation die letzte, die diese Katastrophe abwenden könne.

Relevant ist für unsere Diskussion vor allem die explizit vorgebrachte **Legitimation**, als die letzte Generation die Welt vor dem Untergang bewahren zu können. Von Kritikern wird dieser Anspruch scharf als **Selbstermächtigung** gegeißelt. Das ist die entscheidende Frage!

Jede Demokratie muss angemessen mit zivilem Ungehorsam umgehen, aber Verfassungsfeinde abwehren, soviel ist klar. Zugleich wollen wir rational entscheiden, daher verdienen berechtigte Argumente Gehör. Deshalb nochmal: Wer vertritt die Rechte zukünftiger Generationen?

Egonomics nach Thomas Schelling

Das **Rentenmodell** zur Altersversorgung ist raffiniert, aber noch leicht. Gleichgewichte mussten wir erst suchen und dann sorgsam nachweisen, auch im Experiment erreichen wir das Ziel erst nach mehreren Anläufen. Doch alles in allem ist die Situation noch recht übersichtlich.

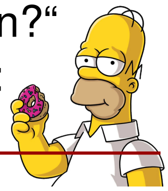
Unser **Nachhaltigkeitsmodell** zur Wahrung der Rechte zukünftiger Generationen ist naturgemäß etwas schwieriger, sowohl im logischen Aufbau als auch in der praktischen Umsetzung. Die Frage ist überaus wichtig, unsere Verantwortung ist groß, doch unsere Erfahrung gering.

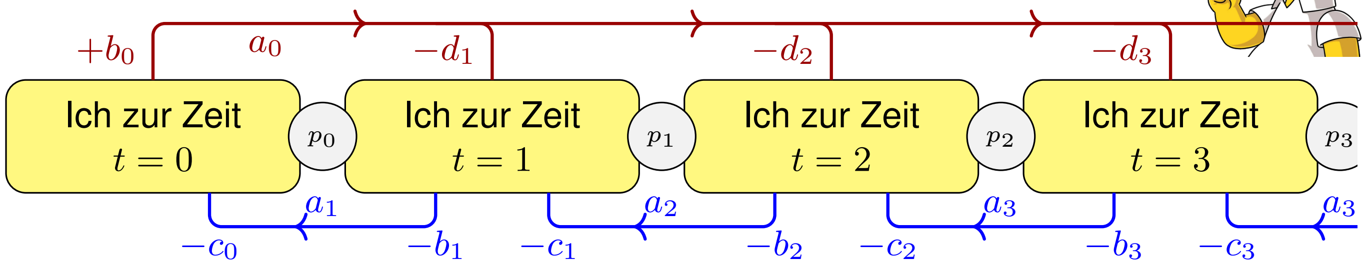
Wenn Ihnen das zu anwendungsfern oder allzu langfristig gedacht ist: Betrachten Sie doch einmal Ihr eigenes Leben als Aneinandereihung von Generationen Ihres Ichs. Das ist eine überaus interessante und sinnvolle Betrachtungsweise, denn nicht alle verfolgen dasselbe Ziel!

Quid rides? Mutato nomine de te fabula narratur.
[Was lachst du? Mit anderem Namen handelt die Geschichte von dir.]
Horaz, Sermones I. 1. 69.

Egonomics nach Thomas Schelling

Manche:r kämpft bei Entscheidungen mit dem inneren Schweinehund:
„Soll ich die Gegenwart genießen oder für die Zukunft vorsorgen?“
Für diesen Balanceakt kennen wir bereits ein einfaches Modell:





Viele Menschen kennen solche **Selbst-Konflikte**: Einerseits möchte ich heute Eis / Schokolade / Chips / Nachtisch essen. Andererseits werde ich mich morgen dafür verfluchen, denn ich will eigentlich abnehmen.

Ähnlich ist es mit der Entscheidung, Geld auszugeben oder zu sparen. Manche:r möchte Geld lieber heute verjubeln als für eine ferne Rente zurücklegen. Die Rollen können aber auch umgekehrt verteilt sein: Manche:r zwingt sich durch Sparpläne zu einem langfristigen Handeln. Genauer gesagt: Das heutige Ich zwingt das zukünftige Ich dazu.

Egonomics nach Thomas Schelling

Diese Idee geht zurück auf Thomas Schelling: *Egonomics, or the art of self-management*, American Economic Review 68 (1978) 290–294. Ihr „gegenwärtiges Ich“ spielt gegen Ihr „zukünftiges Ich“.

Bei der Entscheidung kommunizieren glücklicherweise nicht *alle* Generationen zugleich, sondern nur *zwei*: Das heutige Ich, als aktuell handelnde Instanz, und das morgige Ich, als Kontrollinstanz und Anwalt für die Zukunft. Dieser Konflikt wird sinnbildlich oft durch Engelchen und Teufelchen dargestellt.

Das Studentenleben ist geprägt von **Freiheiten und Entscheidungen**. Die Übungen / Hausarbeit / Klausurvorbereitung rechtzeitig anfangen oder doch lieber auf morgen verschieben und heute zur Party gehen?

Was du heute kannst besorgen, das verschiebe nicht auf morgen.

Die alternative Sichtweise lautet, von unbekümmert bis fatalistisch:

Was du morgen kannst besorgen, das kannst du auch noch übermorgen.

Egonomics nach Thomas Schelling

Prokrastination / Aufschieberitis bezeichnet ein extremes Vertagen bzw. häufiges Unterbrechen unangenehmer Arbeiten. Es verursacht meist starken Leidensdruck. Manche:r setzt sich daher selbst Deadlines, um so für planvolle Struktur und Interessenausgleich zu sorgen.

Weitere Selbst-Konflikte sind zum Beispiel die Lust zu rauchen gegen den Wunsch gesund zu bleiben. Manche:r vermeidet, Zigaretten auf Vorrat zu kaufen, um dem zukünftigen Ich den Zugang zu erschweren. Manchmal gelingt es, so „sich selbst auszutricksen“.

Allgemein führt Suchtverhalten zu extremen Selbst-Konflikten dieser Art und ebenso radikalen Versuchen, die Selbst-Kontrolle zurückzuerlangen. Aber auch simple Angewohnheiten folgen oft einem ähnlichen Muster: angenehmes lieber sofort, unangenehmes lieber später. Ist das rational?

Ein mögliches Mittel ist **Selbstbindung**. Ein Beispiel für Sportmuffel ist die Jahresmitgliedschaft im Fitnessstudio oder ein Vertrag mit einem Personal Trainer: Es war teuer, also muss ich jetzt Sport machen. Auch Studiengebühren können diesen positiven Effekt zeitigen.

Odysseus widersteht den Sirenenklängen.

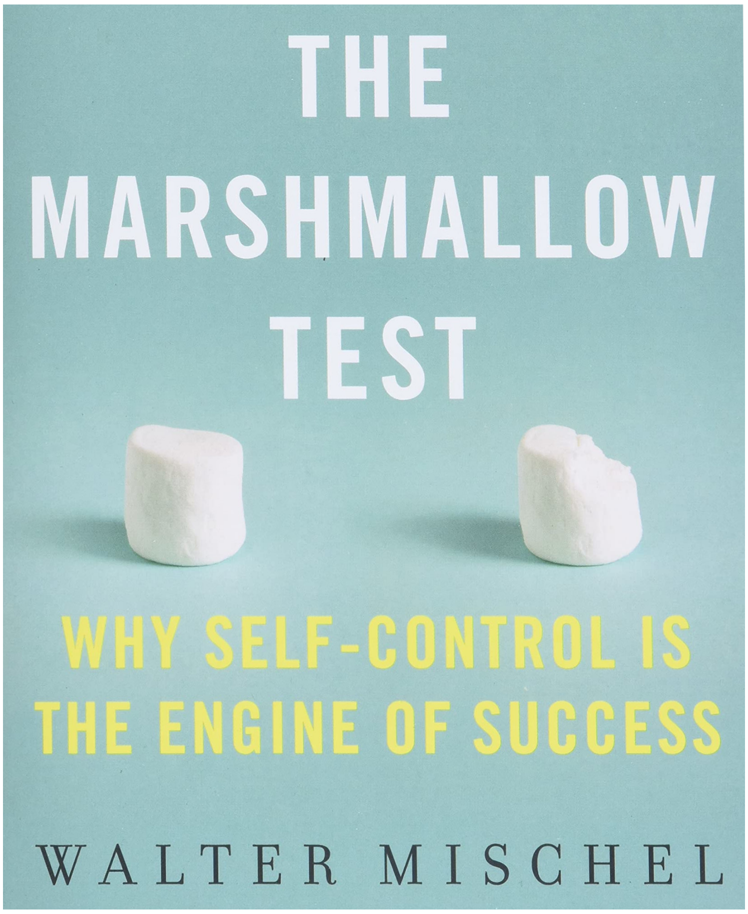
Odysseus und die Sirenen, attische Vasenmalerei, ca. 480–470 v.Chr.

Odysseus widersteht den Sirenenklängen.

Das klassische Beispiel einer Selbstbindung, im ganz wörtlichen Sinne, ist Odysseus, der sich an den Mast binden lässt, um dem betörenden Gesang der Sirenen lauschen und ihnen doch widerstehen zu können.

Homers *Odyssee* (8.Jh.v.Chr.) erzählt wortgewaltig von Irrfahrten und Abenteuern des Odysseus, darunter seine Begegnung mit den Sirenen. „Dieses sind sangreiche Nymphen, die jedermann bezaubern, der auf ihr Lied horcht. [. . .] Ich aber gedachte an das Wort, das Circe, die mir dieses Alles voraussagte, gesprochen hatte. [. . .] Das weiche Wachs strich ich sodann meinen Reisegenossen in die Ohren. Sie aber banden mich auf mein Geheiß aufrecht unten an den Mast; dann setzten sie sich wieder an die Ruder und trieben das Fahrzeug getrost vorwärts. [. . .] Erst als wir glücklich vorübergesteuert und ganz aus dem Bereich der Sirenenstimmen waren, nahmen meine Freunde sich selbst das Wachs aus den Ohren, und mir lösten sie die Fesseln wieder. Ich aber dankte ihnen herzlich für ihre Beharrlichkeit.“ (Zitiert aus Gustav Schwab, *Die schönsten Sagen des klassischen Altertums*, Band 3, Stuttgart 1840, `www.deutschestextarchiv.de/schwab_sagen03_1840?p=182`)

Mischels Marshmallow-Experiment



Mischels Marshmallow-Experiment

Das berühmte **Marshmallow-Experiment** wurde von Walter Mischel in den Jahren 1968 bis 1974 in Stanford durchgeführt. Vierjährige Kinder mussten wählen zwischen einem Marshmallow sofort oder zwei in etwa 15 Minuten, also kleine sofortige Belohnung gegen größere später.

Die Fähigkeit zur Selbstbeherrschung hat wichtige Konsequenzen. Kinder, die länger warten konnten, waren statistisch gesehen auch später als Erwachsene kontrollierter, zudem beruflich erfolgreicher, sie waren seltener übergewichtig und wurden seltener drogensüchtig.

W. Mischel, Y. Shoda, M.L. Rodriguez: *Delay of gratification in children.* Science 244 (1989) 933–938. Dieser und weitere Artikel sind online verfügbar unter `bingschool.stanford.edu/research/publications`.

Wohl kaum ein Experiment der Psychologie ist so bekannt wie dieses. Die faszinierende Geschichte wird wunderbar erzählt von Jonah Lehrer: *DON'T! The secret of self-control*, in The New Yorker vom 18. Mai 2009, online verfügbar `www.newyorker.com/magazine/2009/05/18/dont-2`.

Mischels Marshmallow-Experiment

Wie jedes Experiment sollten wir auch dieses kritisch betrachten; da es besonders berühmt ist, nenne ich einige Warnungen und Hinweise.

Die Versuchsgruppe war klein und selektiv: Sie bestand aus Kindern der Bing Nursery School an der Stanford University, und die meisten hatten dementsprechend gut ausgebildete Eltern. Solche sozialen Faktoren beeinflussen das Verhalten. Es ist daher denkbar, dass hier gefundende Zusammenhänge wenig repräsentativ für die Gesamtbevölkerung sind.

In der Längsstudie der Folgejahre konnten erwartungsgemäß immer weniger Studienteilnehmer erreicht und befragt werden, was die Fallzahl weiter verringerte und statistisch verlässliche Aussagen erschwerte.

Eine kritische Studie finden Sie in T.W. Watts, G.J. Duncan, H. Quan: *Revisiting the Marshmallow Test*, Psychological Science (2018) 1–19, `journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/0956797618761661`.
Auch diese neue Studie sollten wir kritisch abwägen.

Mischels Marshmallow-Experiment

Belohnungsaufschub (*deferred gratification*) erfordert Selbstdisziplin und Impulskontrolle. Dies ist notwendig für langfristiges planvolles Handeln und ein wichtiger Aspekt der Selbstkontrolle.

Konrad Adenauer wird (sinngemäß) folgender Ausruf zugeschrieben:

Was interessiert mich mein Geschwätz von gestern?

Im Sinne von Gratifikationsaufschub vs sofortiger Belohnung oder Selbstkontrolle vs Prokrastination formulieren wir die Umkehrung:

Was interessiert mich mein Gejammer von morgen?

Wir werden in spieltheoretischen Modellen die zeitliche Struktur noch wesentlich genauer untersuchen, indem wir dynamische Spiele erklären. Die Lösungskonzepte werden ausgehend von Nash–Gleichgewichten noch weiter verfeinert, etwa zu teilspielperfekten Gleichgewichten. Erste wichtige Aspekte und Anwendungen erkennen wir schon hier.

Studium als Investition und als Konsum

Das Leben ist, soweit ich es sagen kann, ein fragiles Gleichgewicht von **Konsum und Investition**. Das gilt insbesondere für ein Studium:

Sie investieren lange Jahre in Ihre Ausbildung. Da ist viel schönes dabei, das kann als sofortige Belohnung dienen, aber auch viel harte Arbeit, die Sie vielleicht gerne vermeiden oder zumindest aufschieben möchten.

Natürlich lohnt sich ein Studium, sowohl kurz- als auch mittel- und langfristig, aber es erfordert doch ein hohes Maß an Selbstdisziplin. Diese Disziplin zu beweisen ist bereits eine beachtliche Leistung.

Bekanntlich brechen einige ihr Studium ab, und das hat viele Gründe. Ein Grund sind mangelnde Information und falsche Vorstellungen: „Das Studium im Fach X habe ich mir ganz anders vorgestellt.“

Seit Jahrzehnten versuchen wir daher, junge Menschen zu informieren. Dazu gehören neben den schönen Ziele auch die Schwierigkeiten, kurzfristig und langfristig. Es ist eine komplexe Entscheidung!

Ich denke, wir müssen grundsätzlich anerkennen, dass die Wahl eines Studiums eine schwierige Herausforderung ist und auch misslingen darf.

Studium als Investition und als Konsum

Vielleicht ist Ihr Studium ja eine Art Marshmellow-Experiment, bei dem Sie unter Beweis stellen, wie viel Selbstdisziplin Sie aufbringen können. Tatsächlich ist es – über die eigentlichen Inhalte, speziellen Fähigkeiten und allerlei Kompetenzen hinaus – ganz allgemein ein **guter Prädiktor**:

Wer erfolgreich Mathematik studiert hat, den haut so schnell nichts um. Sie beweisen damit neben mathematischen Fähigkeiten ein hohes Maß an Selbstdisziplin, Frustrationstoleranz und Durchhaltevermögen.

Ganz nebenbei lernen Sie auch noch, mathematische Methoden selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ anzuwenden.
Für manche steht dies im Vordergrund, für andere eher nicht.

Dasselbe gilt sinngemäß genauso für jeden anderen Studiengang.
In hochqualifizierten Berufen benötigen Sie nicht gedrillte Handgriffe, sondern allgemeine Methoden und ein hohes Maß an Lernfähigkeit.

Wir haben dieses scheinbare Paradox bereits in Kapitel G diskutiert:
Kann ein Studium auch ein Signal persönlicher Eigenschaften sein?
Kann ein unnützer Doktortitel doch nützlich sein? Ja, durchaus!

Studium als Investition und als Konsum

Lohnt sich die Büffelei? (FAZ, Studenten-Spezial, 20.05.2015)

Studium als Investition und als Konsum

Lohnt sich die Büffelei? (FAZ, Studenten-Spezial, 20.05.2015)

„Studium oder Ausbildung — wer vor dieser Wahl steht, macht folgende Rechnung auf: Eine Lehre ist der erste Schritt in Richtung finanzieller Unabhängigkeit. Zwar ist die Vergütung nicht opulent, doch in Kombination mit Hotel Mama winkt ein bescheidener Luxus. Und nach zwei oder drei Jahren lässt sich mit dem Abschluss in der Tasche richtig Geld verdienen.

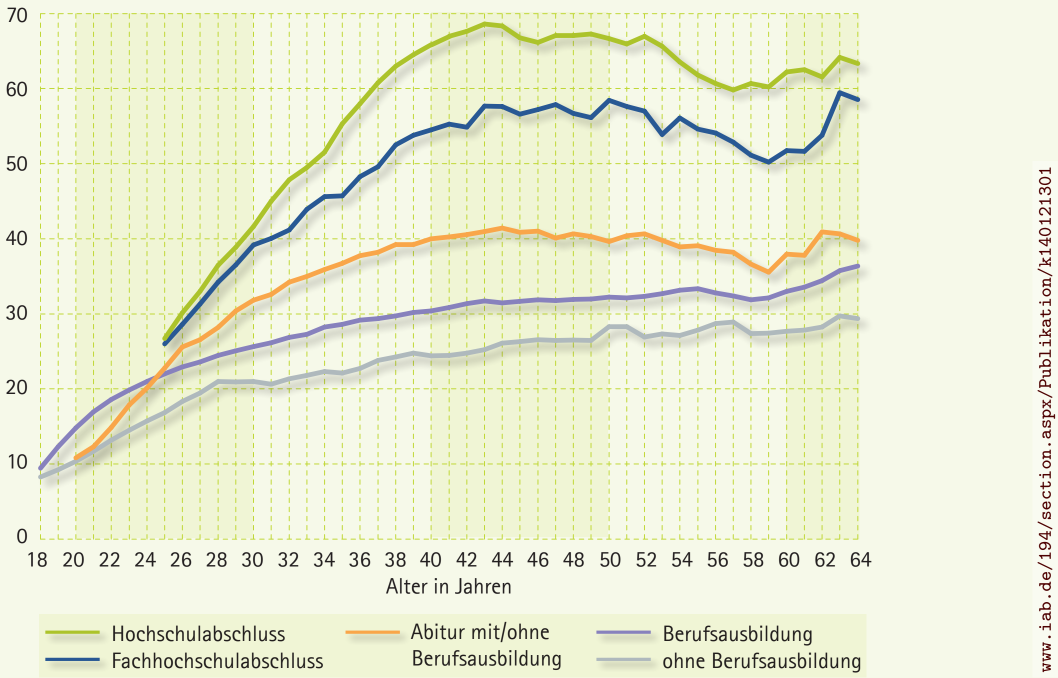
Anders beim Studium: Wer nach akademischen Weihen strebt, muss erst einmal investieren. Wenn ein Umzug nötig ist, kann Bildung richtig teuer werden. Bis der Hochschulabsolvent sein erstes Geld verdient, hat die Fachkraft oft schon die ersten Stufen auf der Karriere- und Gehaltsleiter genommen. Lässt sich das im Laufe eines Berufslebens noch aufholen?“

Die folgenden Daten und Graphiken (Stand 2014) stammen vom Institut für Arbeitsmarkt- und Berufsforschung der Bundesagentur für Arbeit, online verfügbar unter `doku.iab.de/kurzber/2014/kb0114.pdf`. Gruppiert nach Bildungsabschluss zeigen sie die Entgelte jetziger Arbeitnehmer, die in den letzten 40 Jahren ihre Abschlüsse erwarben.

Studium als Investition und als Konsum

Durchschnittliche Brutto-Jahresentgelte nach Lebensalter und höchstem Bildungsabschluss

in 1.000 Euro

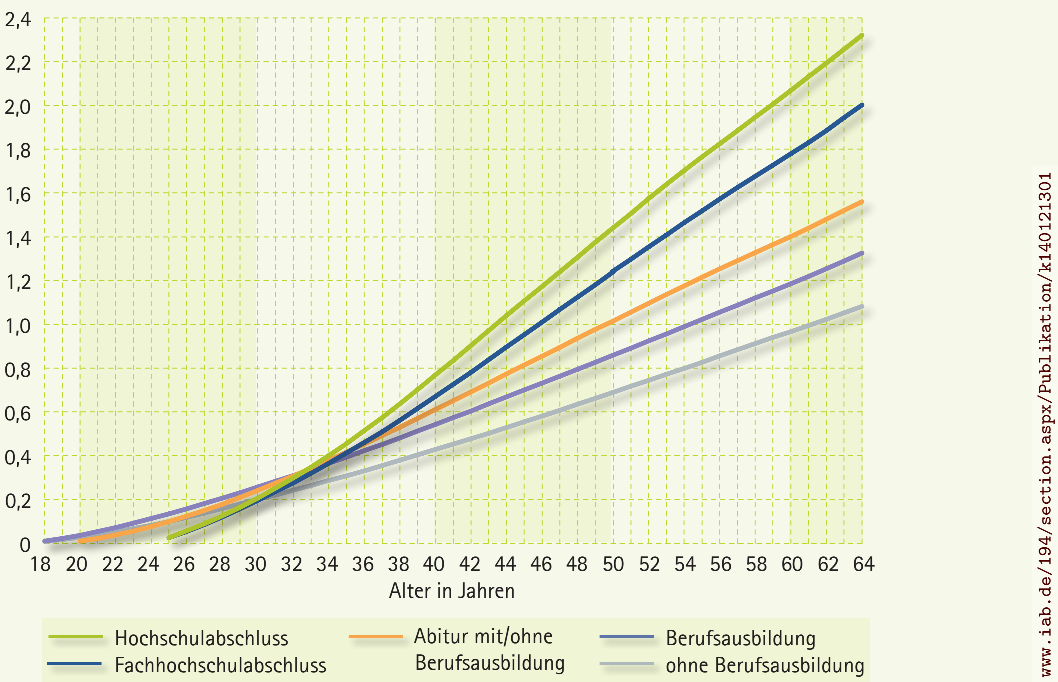


Quelle: IAB-Berechnungen auf Basis der Stichprobe der Integrierten Arbeitsmarktbiografien (SIAB). © IAB

Studium als Investition und als Konsum

Kumulierte durchschnittliche Brutto-Jahresentgelte im Verlauf des Erwerbslebens nach dem höchsten Bildungsabschluss

in Mio. Euro



Quelle: IAB-Berechnungen auf Basis der Stichprobe der Integrierten Arbeitsmarktbiografien (SIAB). © IAB

Kapitel I

Spiele mit unvollständiger Information und Bayes–Gleichgewichte nach John Harsanyi

So that would be what you call bluffing?
— You know the term. Then you may have also heard that
in poker you don't play your hand,
you play the man across from you.

Vesper Lynd und James Bond im Film *Casino Royale* (2006)

Inhalt dieses Kapitels I

Motivation und Überblick

Bei Spielen ist **Information** wesentlich: Wer weiß wann was?

- Perfekte Information [*perfect information*]:
  Alle Züge der Spieler sind allgemein sichtbar.
- Imperfekte Information [*imperfect information*]:
  Manche Züge sind verdeckt oder gleichzeitig.

Wir betrachten nun eine wichtige Erweiterung:

- Vollständige Information [*complete information*]:
  Alle Strategien und alle Auszahlungen sind bekannt.
- Unvollständige Information [*incomplete information*]:
  Manche dieser Daten sind nur private Informationen.

Meist haben die Spieler immerhin statistische Information übereinander:
Wir sprechen von einem **Bayesianischen Spiel** oder **Bayes–Spiel**.

📖 Tadelis: *Game Theory* (2013), Chapter 12: Bayesian Games.
Osborne: *Introduction to Game Theory* (2009), Chapter 9.

Motivation und Überblick

Bisher haben wir Spiele mit vollständiger Information betrachtet:
$u : \prod_{i \in I} S_i \to \prod_{i \in I} R_i$ ist allgemein bekannt [*common knowledge*].
Jeder Spieler kennt die Mitspieler $i \in I$, alle möglichen Aktionen $s_i \in S_i$ und die zugehörigen Auszahlungen $u_i(s)$. Alles ist allgemein bekannt.

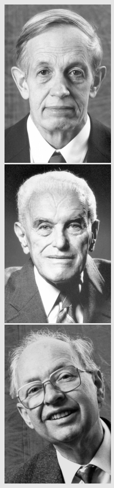
Als Lösungskonzepte kennen wir vor allem Nash–Gleichgewichte, stärker noch Gleichgewichte in dominanten Strategien, daneben iterierte Eliminierung von strikt / schwach dominierten Strategien. Hierzu gibt es zahlreiche verfeinerte Lösungskonzepte.

Bei manchen Spielen ist vollständige Information nicht realistisch. Zum Beispiel beim Preiswettbewerb zweier Firmen kennt jede Firma vermutlich ihre eigenen Daten, aber nicht die des Kontrahenten. Sie kann und wird jedoch (Wahrscheinlichkeits-)Annahmen treffen.

In diesem Kapitel erklären wir die Harsanyi–Transformation:
Wir transformieren ein Spiel mit unvollständiger Informationen in ein Spiel mit vollständiger (aber imperfekter) Informationen.
Darauf können wir die obigen Lösungskonzepte anwenden.

Vier Grundtypen von Spielen

Zeit \ Info	vollständige Info, deterministisch	unvollständige Info, probabilistisch
statisch, Normalform	Nash, $\mathrm{NE} \supseteq \mathrm{DNE}$	Harsanyi, $\mathrm{BE} \supseteq \mathrm{DBE}$
dynamisch, Extensivform	Selten, $\mathrm{PNE} \supseteq \mathrm{PDNE}$	Selten, $\mathrm{PBE} \supseteq \mathrm{PDBE}$



Nash, Harsanyi und Selten erhielten 1994 den Wirtschafts-Nobelpreis für ihre Pionierarbeit zu Gleichgewichten in nicht-kooperativen Spielen.

Das Kürzel NE steht für Nash–Gleichgewicht / *Nash equilibrium*, entsprechend BE für Bayes–Gleichgewicht / *Bayes equilibrium*. Das Präfix D steht für (schwach) dominant / *(weakly) dominant*, und P steht abkürzend für (teilspiel-)perfekt / *(subgame) perfect*.

Vier Grundtypen von Spielen

In strategischen Situationen sind Wissen und Nichtwissen entscheidend. Für die Analyse von Spielen (und überall sonst) ist daher die Verteilung von Wissen und der Zugang zu Informationen von zentraler Bedeutung. Dazu liefert diese Tabelle einen ersten ordnenden Überblick

Bei vielen Spielen ist zudem der zeitliche Ablauf eine wichtige Struktur. Wir haben uns bislang auf statische / strategische Spiele konzentriert. In den folgenden Kapiteln entwickeln wir mathematische Werkzeuge für dynamische / sequentielle / wiederholte Spiele (in extensiver Form).

In diesem Kapitel verbinden wir statische Spiele mit Zufallszügen. Damit wird die mathematisch präzise Beschreibung unserer Spiele und möglicher Lösungen zwar etwas komplexer, dafür aber auch wesentlich flexibler, realistischer und allgemeiner anwendbar.

Jeder Spieler i nimmt hierzu eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbf{P}_i$ an und optimiert seine erwartete Auszahlung. Durch diese Harsanyi–Transformation überführen wir jedes statische Spiel mit unvollständiger Information in ein strategisches Spiel mit vollständiger Information.

Im/perfekte vs un/vollständige Information

Aufgabe: Geben Sie möglichst vielfältige Illustrationen für Spiele mit im/perfekter und un/vollständiger Information in allen Kombinationen.

Auszahlungen / Aktionen	vollständige Info	unvollständige Info
perfekte Info	(1) kombinatorische Spiele, z.B. Schach	(2) Schach mit verdeckten Zielen
imperfekte Info	(3) strategische Spiele in Normalform	(4) Simultan-Poker in Normalform

Im/perfekte vs un/vollständige Information

(1) Bei kombinatorischen Spielen wie Schach oder Go (Kapitel C) gibt es keine Zufallszüge und auch keine verdeckten Züge. Alle Strategien und alle Auszahlungen sind bekannt.

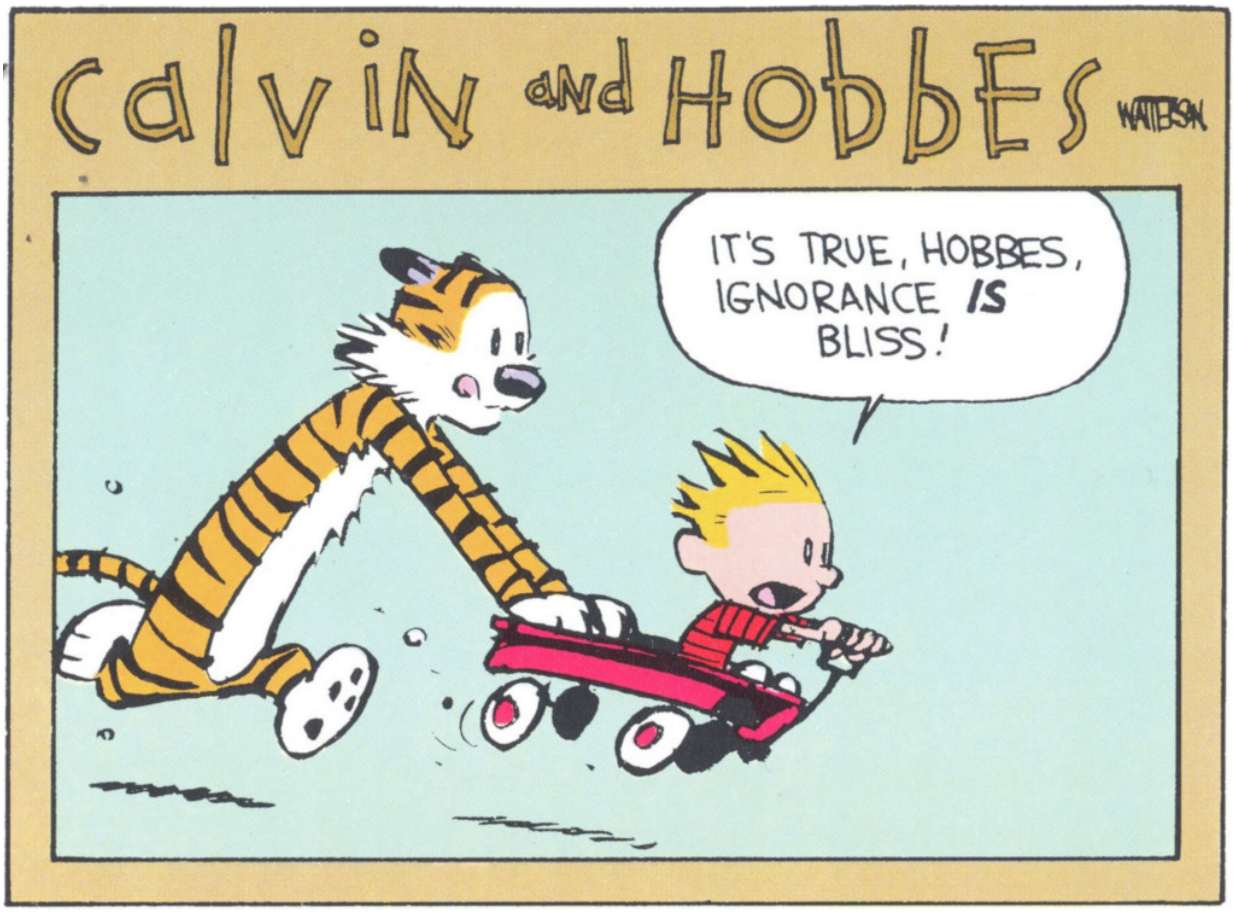
(2) Sie spielen Schach. Ihr Gegner bekommt vor dem Spiel (zufällig ausgewählt und verdeckt) folgenden Geheimauftrag: (a) Gegen Sie gewinnen oder (b) Ihre Königin erobern. Alle Züge sind sichtbar, aber seine Zielsetzung / Auszahlung ist Ihnen unbekannt.

(3) In strategischen Spielen in Normalform ziehen Spieler gleichzeitig. All ihre Strategien und Auszahlungen sind bekannt, die Züge nicht.

(4) Beim Poker sind die Karten verdeckt, es herrscht also unvollständige Information. Werden zudem Züge verdeckt oder gleichzeitig ausgeführt, so herrscht zudem imperfekte Information.

Wie ordnen Sie folgende Spiele ein? Nim, Tic-Tac-Toe, Backgammon, Schiffe versenken, Monopoly, Schere-Stein-Papier, . . .

Ist Un/Wissen schädlich oder hilfreich?



Ist Un/Wissen schädlich oder hilfreich?

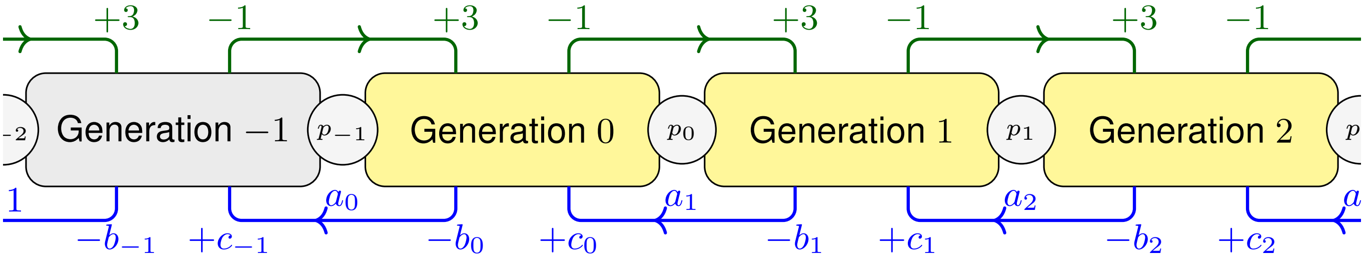
Im Folgenden untersuchen wir Spiele mit unvollständiger Information. Zuvor möchte ich kurz für Unwissen werben. Es ist nicht immer hilfreich, aber manchmal eben doch. In einer Klausur ist Wissen im Allgemeinen gut und nützlich, aber zuviel kann manchmal leider auch schaden, wenn man es zu kompliziert macht und nicht das Offensichtliche antwortet.

Calvin und Hobbes ist ein Comicstrip von Bill Watterson aus den Jahren 1985–1995. Calvin ist ein sechsjähriger Junge. In Calvins Phantasie ist sein Stofftiger Hobbes lebendig, kann sprechen und handelt selbständig. Gemeinsam unternehmen Calvin und Hobbes waghalsige Abenteuer und führen dabei philosophische Zwiegespräche, so wie hier über die Vorzüge der Unwissenheit. Darum geht es in diesem Kapitel.

Auch die Bibel setzt sich mit kindlicher Ehrfurcht, Respekt und Vertrauen auseinander, die Interpretationen sind allerdings recht weit dehnbar: „Wahrlich, ich sage euch: Wenn ihr nicht umkehrt und werdet wie die Kinder, so werdet ihr nicht ins Himmelreich kommen.“ (Mt 18:3)
Zum Thema *Spielen* passt das ganz wunderbar.

Ist Un/Wissen schädlich oder hilfreich?

In vielen Anwendungen ist mehr Wissen besser als weniger Wissen. In manchen Situationen kann Unwissenheit / Unsicherheit allen helfen!



Zu $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ betrachten wir folgenden Strategievektor $s^n \in S$:

$$\begin{array}{rlllllllllll}
i = & 0, & 1, & \dots, & & & n, & \dots & & & & \\
s^n = (& E, & E, & \dots, & E, & E, & A, & N, & N, & N, & \dots &) \\
a^n = (& 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 1, & 1, & 1, & 1, & \dots &)
\end{array}$$

Gilt $p_i c_i > b_i$ für alle $i \ge n$, so ist s^n tatsächlich ein Nash–Gleichgewicht.

Beispiel $b_i = 1$ und $c_i = 2$ sowie $p_i = 2/3$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir erwarten nur drei Generationen. Dennoch lohnt immer noch der Generationenvertrag!

Ist Un/Wissen schädlich oder hilfreich?

Jede Generation muss ausreichend sicher an den Fortbestand glauben; dann und nur dann sind nicht-triviale Gleichgewichte überhaupt möglich.

Der Fall von $n < \infty$ Generationen entspricht einem Ponzi–Betrug: Wenn alle die Zahl n kennen, kommt kein Gleichgewicht zustande, denn dies ist nicht rational vereinbar mit dem Wissen.

Dieses Beispiel und die genaueren Untersuchungen des letzten Kapitels sind mathematisch und gesellschaftlich relevant. Sie illustrieren einen einfachen aber zentralen Aspekt zum Thema Unsicherheit.

Übung: Wenn Sie Knobelaufgaben mögen:

(1) Was passiert, wenn jede Generation weiß, dass es nur endlich viele Generationen gibt, aber keine kennt die genaue Zahl?

(2) Was passiert, wenn jede Generation weiß, dass es nur endlich viele Generationen gibt, aber nur die letzte kennt die genaue Zahl?

(3) Was passiert, wenn jede Generation weiß, dass es nur endlich viele Generationen gibt, aber nur die vorletzte kennt die genaue Zahl?

Das Ende ist nah! Aber wie nah?

Das allgemeine Gefangenendilemma, affin normiert:

A \ B	0	1
0	0, 0	α_1, β_2
1	β_1, α_2	1, 1

mit Konstanten
$\alpha_1 > 1 > 0 > \beta_1$
$\alpha_2 > 1 > 0 > \beta_2$

etwa $\alpha_1 = \alpha_2 = 3/2$
und $\beta_1 = \beta_2 = -1/2$

Aufgabe: Vor dem Spiel vereinbaren Alice und Bob zu kooperieren und $(1, 1)$ zu spielen, und im Betrugsfall dauerhaft auf $(0, 0)$ zurückzufallen.

Ist das rational? (1) Bei einmaligem Spiel? (2) Bei zweimaligem Spiel? Bei n–maligem Spiel, wobei die Anzahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ beiden bekannt ist?

Die Spielleiterin legt anfangs die Anzahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ der Spielrunden fest, etwa geometrisch verteilt gemäß $\mathbf{P}_i(n) = \delta_i^{n-1}(1 - \delta_i)$ mit $\delta_i \in [0, 1[$. Sie verrät n an (3) niemanden, (4) Alice allein, (5) Bob allein, (6) beide.

Das Ende ist nah! Aber wie nah?

Lösung: (1) Rational ist hier das (einzige) Nash–Gleichgewicht $(0, 0)$. Alice und Bob mögen sich hoch und heilig Kooperation $(1, 1)$ zusichern, doch die (profitablere!) Kooperation wird durch das Spiel nicht gestützt, im Gegenteil: Zur individuellen Nutzenmaximierung wird jeder 0 spielen.

⚠ Die folgende Diskussion ist vorläufig noch verbal und informell. In späteren Kapiteln entwickeln wir die mathematischen Werkzeuge für sequentielle / wiederholte Spiele wie dieses. Dies dient als Ausblick:

(2) Per Rückwärtsinduktion gilt: In der letzten Runde n werden beide 0 spielen, wie in (1) erklärt. Somit werden beide auch in der vorletzten Runde 0 spielen, usw. Kooperation ist hier somit rational unmöglich.

(3) Weder Alice noch Bob kennt n. Ihre (subjektive) Gewinnerwartung bei Kooperation ist die erwartete Rundenzahl, also jeweils $1/(1 - \delta_i)$. Betrug bringt kurzfristig den Gewinn α_i, danach aber nichts mehr. Im Falle $1/(1 - \delta_i) > \alpha_i$ hat Spieler i Interesse an der Kooperation.

🙂 Gilt $1/(1 - \delta_i) > \alpha_i$ für beide Spieler, so untersuchen wir später Kooperation und Kontrolle als teilspielperfektes Gleichgewicht.

Das Ende ist nah! Aber wie nah?

Wir diskutieren nur (4); mit vertauschten Rollen verläuft (5) genauso. Wir nehmen an, Alice kennt Bobs Überzeugung $\mathbf{P}_2$, also $\delta_2 \in [0, 1[$.

(4a) Angenommen, Alice kennt die Rundenzahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, doch Bob weiß davon nichts, er weiß nicht einmal, dass Alice die Rundenzahl kennt.

Da Bob sich in Fall (3) wähnt, erwartet er $1/(1 - \delta_2)$ bei Kooperation. Im Falle $1/(1 - \delta_2) < \alpha_2$ wird Bob versuchen, Alice zu betrügen. Alice sieht das voraus, also spielen beide von Anfang an $(0, 0)$.

Im Falle $1/(1 - \delta_2) > \alpha_2$ wird Bob kooperieren. Alice weiß dies und spielt $1, 1, \dots, 1, 0$. Auszahlungen sind also $u = (\, n - 1 + \alpha_1,\ n - 1 + \beta_2\,)$.

(4b) Angenommen, Bob weiß, dass Alice die Rundenzahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ kennt. Bei Kooperation erhält er $n - 1 + \beta_2$, erwartet also $1/(1 - \delta_2) - 1 + \beta_2$.

Im Falle $1/(1 - \delta_2) - 1 + \beta_2 < \alpha_2$ wird Bob versuchen, Alice zu betrügen. Alice sieht das voraus, also spielen beide von Anfang an $(0, 0)$.

Im Falle $1/(1 - \delta_2) - 1 + \beta_2 > \alpha_2$ wird Bob kooperieren. Alice weiß dies und spielt $1, 1, \dots, 1, 0$. Auszahlungen sind $u = (\, n - 1 + \alpha_1,\ n - 1 + \beta_2\,)$.

Das Ende ist nah! Aber wie nah?

(6) Beide Spieler kennen n. Aber weiß Alice, dass Bob n kennt? Und weiß Bob, dass Alice n kennt? Wir unterscheiden mehrere Fälle:

(6a) Beide kennen n und wissen, dass der andere auch n kennt. Dieses Spiel unterscheidet sich nicht wesentlich von Fall (2): Kooperation ist hier somit rational unmöglich.

⚠ Ob und wem die Spielleiterin die Zahl n verrät, sollte durch Los entschieden werden. Dann können die Spieler hierüber optimieren.

Eventuell benötigen die Spieler nicht nur Annahmen $\mathbf{P}_i$ über n, sondern zudem Annahmen über die Annahmen des Gegners, etc.

Übung: Diskutieren Sie alle verbleibenden, kniffligen Fälle. Hierzu müssen Sie evtl. die Daten noch weiter präzisieren.

Sie werden merken, dass Sie über die verbale Beschreibung hinaus eine präzise Formalisierung für eine detaillierte Analyse benötigen. In späteren Kapiteln entwickeln wir die mathematischen Werkzeuge.

Empirie: iteriertes Gefangenendilemma

Im **Casino Royal** (13.12.2019) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, unsere rechnerische Lösung dieser Spielvarianten praktisch zu testen. Das kostet etwas Zeit, liefert aber eindrückliches Anschauungsmaterial. Genau zu diesem Zweck haben wir das Casino Royal eingerichtet.

Alice \ Bob	0	1
0	0 / 0	3 / -1
1	-1 / 3	2 / 2

Ich empfehle nachdrücklich praktische **Experimente zur Spieltheorie**, denn Theorie und Praxis können weit auseinanderklaffen, siehe A225. Wer das erlebt hat, sieht diesen Themenkomplex mit anderen Augen. Ich halte den konkreten Vergleich für lehrreich, ehrlich und heilsam.

Empirie: iteriertes Gefangenendilemma

Ich schreibe hier mein Gedächtnisprotokoll der erhellenden Ereignisse. Acht Teilnehmer spielten in Vierergruppen: Team Alice und Team Bob. Ich habe Fragen geklärt, die Verhandlungen moderiert und kommentiert, von zurückhaltend beobachtend bis provokativ als Stimme der Vernunft.

Jede Vierergruppe stimmte sich vertraulich innerhalb ihres Teams ab. Ebenso konnten die beiden Teams in Verhandlungen treten, um vor dem Spiel ein gemeinsames Vorgehen auszuhandeln. Das war jedoch nicht bindend: Im eigentlichen Spiel handelt jeder, wie sie/er es für richtig hält.

Anfangs bat ich alle Teilnehmer: „Versuchen Sie, rationale Lösungen zu finden, überzeugend zu erklären und als Plan auszuhandeln. Appellieren Sie lieber an den Verstand als die Moral. Seien Sie nicht nachtragend: Neues Spiel, neues Glück. *What happens in Vegas, stays in Vegas.*“

Zudem wollte ich die Spiele separieren und nachtragenden Groll mildern durch „Blitzdingsen“ (frei nach *Men in Black*): Die Teams wurden bei Bedarf neu gemischt, also eine neue Alice und ein neuer Bob erschaffen, so dass Erinnerungen an vergangene Spiele weniger Gewicht hatten.

Empirie: iteriertes Gefangenendilemma

(1) Beim Spiel mit **einer Runde** geschah, was geschehen musste: Beide versprachen sich Kooperation, hielten sich aber nicht daran.

(2) Beim Spiel mit genau **zwei Runden** geschah exakt dasselbe. Alle Spieler waren erstaunlich gelassen und wenig nachtragend. Allein die Auszahlungen blieben traurig: Nullkommanichts für jeden. Die Erweiterung auf drei Runden wurde dankend abgelehnt.

Im Vergleich zu vorigen Spielexperimenten ging es recht rational und abgeklärt zu. Das lag vielleicht an meiner Vorrede, sicher auch an der Gruppenstruktur: Die Abstimmung in jedem Team fördert vermutlich sachliche, vorausschauende Argumente: Rationalität erster Stufe! (Existiert doch Schwarmintelligenz? Zumindest in kleinen Teams?)

Förderlich ist auch, dass man das gegnerische Team für rational hält, und so seine eigenen Aktionen gut darauf abstimmen muss und kann: Rationalität zweiter Stufe! Genaue Gründe sind schwer nachzuweisen, doch es lohnt, darüber nachzudenken und Erfahrungen zu sammeln. (Oft genug passiert auch unvorhersehbares und schwer erklärliches.)

Empirie: iteriertes Gefangenendilemma

Bindende Vereinbarungen / *commitment*: Jedes Team zeigt seine Aktion $0/1$ durch eine Karte, die nur die Spielleitung sehen kann. Um sich aus dem frustrierenden Gefangenendilemma zu befreien, schlug ein Teilnehmer vor Spielbeginn vor: „Jedes Team legt seine 0–Karte auf den Tisch in der Mitte, dann weiß jeder, dass der andere die 1–Karte spielen muss.“ Geniale Idee! Das wäre eine bindende Vereinbarung. Dies heißt auch „Brücken verbrennen“, um sich selbst Handlungsoptionen zu nehmen, als Drohung oder als Garantie.

Ich wies darauf hin, dass sich jedes Team bei Bedarf neue Karten basteln kann. Der clevere Vorschlag wurde daraufhin aufgegeben. Das Problem von *cheap talk* und *commitment* war inzwischen klar.

Nebenzahlungen: Ein weiterer Teilnehmer schlug vor: Wird $(0,1)$ oder $(1,0)$ gespielt, dann ersetzt der Gewinner dem Verlierer den Schaden. Das fordert eine bindende Vereinbarung mit Nebenzahlungen. Manche Spiele erlauben das, in anderen ist es illegal (Kartell, Preisabsprachen, Bestechung, etc.) Als Erweiterung unseres Spiels wäre es interessant.

Empirie: iteriertes Gefangenendilemma

(3) Zufällige Rundenzahl: Nach jeder Runde entscheidet ein Münzwurf mit Wkt $\delta = 1/2$, ob eine weitere Runde stattfindet oder das Spiel endet.

Team Alice schlug wohlüberlegt und eloquent vor: „Also, Bob, pass auf: Lass uns immer kooperieren, dann erwartet jeder von uns $2/(1-\delta) = 4$. Sobald einer betrügt, fallen wir dauerhaft auf Null zurück, das heißt: Betrug bringt nur 3, lohnt sich also nicht. Bist du einverstanden?“

Bob schien dieses kluge Argument nachzuvollziehen und stimmte zu. Im Spiel wurde dies dann auch genauso umgesetzt: Das Spiel endete (zufällig) nach der zweiten Runde, beide kooperierten und waren mit ihrer stattlichen Auszahlung $(2,2) + (2,2) = (4,4)$ sehr zufrieden!

Alice benötigt **Rationalität zweiter Stufe**: Sie muss darauf vertrauen, dass Bob ihr gutes Argument versteht und zu seinem eigenen Vorteil umsetzt (Rationalität erster Stufe). Daher ihr Bemühen, verständlich zu erklären und sich über die gemeinsame Abmachung zu vergewissern.

Das gilt allgemein bei **Verhandlungen**: Es genügt nicht, einen guten Plan zu (er)finden, man muss zudem auch die anderen überzeugen!

Empirie: iteriertes Gefangenendilemma

(4) Einseitig bekannte Rundenzahl: Wir spielten zwei getrennte Spiele. Die zufällige Rundenzahl ist jeweils geometrisch verteilt. Im ersten bekam nur Alice die Rundenzahl schriftlich mitgeteilt, anschließend in einem zweiten unabhängigen Spiel nur Bob. Das schien allen gerecht.

Team Alice erklärte: "Lass uns immer kooperieren, dann erwartet jeder $2/(1-\delta) = 4$ wie zuvor.“ – „Einverstanden.“ Das Argument ist noch nicht schlüssig; ich wollte zuerst spontan nachfragen, hielt mich aber zurück.

Vielleicht war beiden Teams heimlich sofort klar, dass das Argument fadenscheinig war, und beide wollten zu ihrem Vorteil schauspielern? Eine **nachhaltig tragfähige Abmachung** sieht sicher anders aus. . .

Das erste Spiel hatte zufällig Rundenzahl $n = 2$. Gespielt wurde $(1,1)$ und $(0,0)$. Das ist nicht schlüssig, dennoch waren alle recht zufrieden. Vielleicht hätten beide Teams vor dem Spiel die Vorschläge gründlicher ausdiskutieren müssen, ich hätte als Moderator darauf drängen können.

Das zweite Spiel hatte zufällig Rundenzahl $n = 1$. Gespielt wurde $(1,0)$. Alice war nicht unglücklich, diese mögliche Panne war zuvor mitbedacht.

Empirie: iteriertes Gefangenendilemma

Zitternde Hand: Auf Vorschlag der Teilnehmer wurde das Konzept der „zitternden Hand“ in das Spiel eingebaut, zur Vereinfachung wie folgt:

Jedes Team übermittelt seine Aktion $0/1$ wie zuvor an die Spielleitung. Durch Würfeln mit Wkt $1/6$ wird dann jede Aktion $0 \leftrightarrow 1$ umgedreht. Die Spieler sehen nur das Endergebnis, nicht die Zwischenschritte! Somit ist während des Spielverlaufs für niemanden sicher erkennbar, ob ein absichtlicher Betrug oder zufälliger Übertragungsfehler vorliegt. (Nach dem Spiel wollten die Teilnehmer den wahren Verlauf wissen.)

Team Alice schlug vor: „Bob, lass uns wie zuvor immer kooperieren. Wir verzeihen auch Fehler/Betrug, solange es nicht zu oft vorkommt.“ Bob stimmte zu. Auf meine Nachfrage wollte niemand präzisieren, was „nicht zu oft“ genau bedeutet; beiden Teams genügte eine vage Formulierung. Zu recht? Naiv? Bluff? Das ist schwer einzuschätzen.

Das Spiel dauerte zufällig $n = 5$ Runden, also ungewöhnlich lang. Es wurde sowohl zufällig als auch absichtlich betrogen, insgesamt aber auch viel verziehen und überwiegend kooperiert. Faszinierend!

Empirie: iteriertes Gefangenendilemma

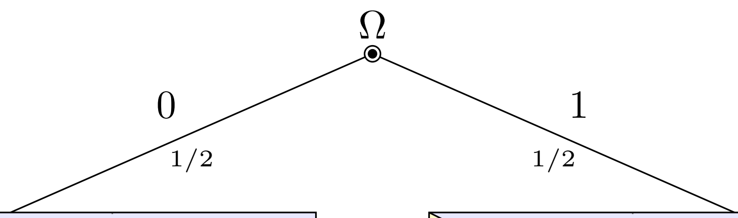
Abschließende Gedanken: Was ist und was soll unser **Casino Royal?** Es gibt **Laborexperimente** (streng kontrolliert, dadurch reproduzierbar) und **Feldversuche** (sehr realitätsnah, aber leider kaum reproduzierbar). Unser Casino Royal ist etwas drittes: **moderiertes Experimentieren**.

Es ist weder durch strenge Protokolle kontrolliert noch ein realistischer Feldversuch, sondern eher eine spielerisch-didaktische Inszenierung: Lernen durch Spielen / *learning by playing*. Wir sammeln eindrückliche Erfahrungen durch Spielen, Verhandeln, Diskutieren, Reflektieren.

Die Rolle des Moderators ist noch frei improvisiert, aber ausbaufähig. Als (Sport-)Kommentator kann er Situationen sachkundig einordnen, belustigen oder versachlichen. Als Stimme der Vernunft kann er auf sorgfältiges Formulieren hinwirken und zu mehr Verlässlichkeit führen.

Das alles ist teilweise wohlüberlegt und kontrolliert, teilweise improvisiert und dadurch immer wieder überraschend. Im Rückblick ist das gut so: Es entstehen immer wieder neue Ideen, ausgeklügelte Strategien und verrückte Versuche, die sich zuvor wohl kaum jemand ausgedacht hätte.

Unwissen kann schaden. Wissen leider auch.



Alice \ Bob	L	R
O	3α, 0	3, 3
M	2α, 2α	2, 0
U	0, 0	0, 3

Alice \ Bob	L	R
O	0, 0	0, 3
M	2α, 2α	2, 0
U	3α, 0	3, 3

Aufgabe: Bestimmen Sie alle Gleichgewichte! Hierbei sei $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Der Münzwurf $\omega \in \Omega$ wird (1) beiden Spielern mitgeteilt, (2) nur Alice, (3) nur Bob, (4) keinem Spieler. Beide Spieler kennen diese Spielregeln.

Lösung: (1,2) $\mathrm{NE} = \{(O/U, R)\}$ mit Auszahlung $u(O/U, R) = (3, 3)$.
(3,4) $\mathrm{BE} = \{(M, L)\}$ mit $u(M, L) = (2\alpha, 2\alpha)$. Interpretation?

Unwissen kann schaden. Wissen leider auch.

Bitte rechnen Sie dies sorgfältig nach! Hier die anschauliche Erklärung: Der Wurf $\omega \in \Omega = \{0, 1\}$ einer fairen Münze mit $\mathbf{P}(\{0\}) = \mathbf{P}(\{1\}) = {}^1\!/\!_2$ entscheidet zwischen den beiden Auszahlungsmatrizen links & rechts.

(1,2) Alice kennt den Zustand ω. Sie kann / muss / wird dies nutzen.
Zustand $\omega = 0$: Für Alice ist O strikt dominant. Daraufhin spielt Bob R.
Zustand $\omega = 1$: Für Alice ist U strikt dominant. Daraufhin spielt Bob R.

Sobald Bob weiß, dass Alice O/U spielt, ist R für ihn strikt dominant. Dazu muss Bob nicht ω kennen! Ihm genügt, dass Alice ω kennt.

Das einzige Nash–Gleichgewicht ist demnach (O, R) bzw. (U, R).
Die Auszahlung ist in beiden Fällen $u(O/U, R) = (3, 3)$.

(3,4) Alice kennt den Zustand ω nicht. Als Auszahlung nimmt sie daher den Mittelwert aus linker und rechter Tabelle. Für Alice ist die Strategie M strikt dominant über O und U. Bob weiß das und spielt deshalb L.

Das einzige Bayes–Nash–Gleichgewicht ist demnach (M, L).
Die zugehörige Auszahlung ist $u(M, L) = (2\alpha, 2\alpha)$.

Unwissen kann schaden. Wissen leider auch.

⚠ Wir nehmen stillschweigend an, dass Alice sich risikoneutral verhält und daher am Mittelwert orientiert. Sehr risikoaffin würde Sie vielleicht immer O oder immer U spielen: Lotterie, Nervenkitzel, Höchstgewinne.

Dieses Spiel ist raffiniert konstruiert, aber sein Analyse ist noch leicht. Die erstaunliche Interpretation muss man jedoch erst einmal verarbeiten! Unsere Analyse gilt für alle Parameter $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$! Das hat Konsequenzen:

⚠ Bei $\alpha = 1$ ist es für beide Spieler besser, den Zustand zu kennen. Das gilt allgemein für $2\alpha < 3$, also für kleine Parameter $0 < \alpha < 3/2$.

Das ist die Situation, die Sie vermutlich aus vielen Spielen kennen: Meist ist es vorteilhaft, möglichst viel Informationen zu bekommen, um daraus den besten Zug ableiten zu können. So weit, so klar.

Solche Erfahrungen verleiten uns, fahrlässig zu verallgemeinern, so im Slogan: „Mehr Wissen ist *immer* besser als weniger Wissen."

Dies gilt tatsächlich in Entscheidungsproblemen für eine Person. Bei mehreren Spielern ist dies jedoch keineswegs immer der Fall!

Unwissen kann schaden. Wissen leider auch.

⚠ Bei $\alpha = 2$ ist es für beide besser, den Zustand nicht zu kennen. Das gilt allgemein für $2\alpha > 3$, also für große Parameter $\alpha > 3/2$.

Könnte Alice nicht einfach ihre Information vergessen? Nein! Alice kann natürlich M spielen, doch sie verbessert ihr Ergebnis, indem sie ihre Kenntnis des Münzwurfs ausnutzt und O bzw. U spielt. Bob weiß, dass Alice den Münzwurf kennt, und muss daher rational annehmen, dass sie ihr Wissen nutzt. Also wird Bob R spielen.

⚠ Wenn Alice ihre Information vergessen wollte, müsste sie auch Bob überzeugen, dass sie wirklich alles vergessen hat. Wie soll das gehen? Das scheint paradox. Vielleicht finden Sie dazu eine kluge Anwendung, etwa mit Hilfe ähnlich paradoxer quantenmechanischer Systeme.

Das ist überaus erstaunlich und erinnert an paradoxe Sinnsprüche wie „Selig sind die Unwissenden, denn sie wissen nicht, was sie tun." oder „Selig sind Armen im Geiste, denn ihrer ist das Himmelreich." (Mt 5:3)

Auf Englisch: *Ignorance is bliss.* „Unwissenheit ist Glückseligkeit."
Als Sponti-Spruch: „Wissen ist Macht. Wir wissen nichts. Macht nichts."

Zufallszüge und Signalgeber

Wie können wir Spiele wie das vorige mathematisch präzise fassen? Die Strategiemengen sind $S_1 = \{O, M, U\}$ und $S_2 = \{L, R\}$ im Spiel $u : \Omega \times S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (\omega, s_1, s_2) \mapsto (\, u_1(\omega, s_1, s_2),\ u_2(\omega, s_1, s_2)\,)$. Hierzu wird $\omega \in \Omega := \{0, 1\}$ ausgelost gemäß einem WMaß $\mathbf{P}_0 \in [\Omega]$.

Jeder Spieler i erhält zu ω sein Signal ω_i gemäß $T_i : \Omega \twoheadrightarrow \Omega_i : \omega \mapsto \omega_i$. Im Beispiel ist $T_1 : \{0, 1\} \to \{0, 1\} : \omega \mapsto \omega$ und $T_2 : \{0, 1\} \to \{*\} : \omega \mapsto *$. Jeder Spieler i wählt seine Aktion $s_i = \hat{s}_i(\omega_i) \in S_i$ nach diesem Signal. Seine erweiterte Strategiemenge ist somit $\hat{S}_i := S_i^{\Omega_i} = \{\, \hat{s}_i : \Omega_i \to S_i \,\}$.

Spieler i glaubt an die Verteilung $\mathbf{P}_i \in [\Omega]$, zum Beispiel $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_0$. Spieler i erwartet demnach die Auszahlung $\hat{u}_i : \hat{S}_1 \times \hat{S}_2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}\hat{u}_i(\hat{s}_1, \hat{s}_2) &:= \mathbf{E}_i\big[\omega \mapsto u_i(\omega, \hat{s}_1(\omega_1), \hat{s}_2(\omega_2)\big] \\ &= \textstyle\sum_{\omega \in \Omega} u_i(\omega, \hat{s}_1(\omega_1), \hat{s}_2(\omega_2)) \cdot \mathbf{P}_i(\omega)\end{aligned}$$

Im Beispiel betrachten wir $\hat{s}_1 : (0 \mapsto O, 1 \mapsto U)$ und $\hat{s}_2 : (* \mapsto R)$. Dieses Paar $(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$ ist ein Nash–Gleichgewicht für das Spiel $\hat{u}$.

Zufallszüge und Signalgeber

Wir betrachten hier ein statisches Spiel mit einem Zufallszug $\omega \in \Omega$. Jeder Spieler i nimmt hierzu eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbf{P}_i$ an und optimiert seine erwartete Auszahlung $\hat{u}_i$, subjektiv bezüglich $\mathbf{P}_i$.

Allgemein sei Ω eine Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ eine σ–Algebra auf Ω. Oft ist die Menge Ω endlich oder höchstens abzählbar und $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$. Zur Vereinfachung nehme ich im Folgenden meist Ω als endlich an.

Wir schreiben $[\Omega]$ bzw. $[\Omega, \mathcal{A}]$ für die Menge aller WMaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Das entspricht den gemischten Strategien für den Zufall als Spieler 0. Der Zufall agiert hier als Spieler 0, erhält aber keine Auszahlung.

Das Nash–Gleichgewicht $(\hat{s}_1, \hat{s}_2) \in \hat{S}_1 \times \hat{S}_2$ für das Spiel $\hat{u}$ bedeutet: Jeder Spieler i nutzt seine Information / sein Signal $\omega_i \in \Omega_i$ optimal. Er hat keinen Anlass, seine Reaktion $\hat{s}_i \in \hat{S}_i$ zu ändern.

Das ist der entscheidende Trick dieser **Harsanyi–Transformation**: Wir transformieren ein Spiel $(u, \mathbf{P})$ mit unvollständiger Informationen in ein Spiel $\hat{u}$ mit vollständiger (weiterhin imperfekter) Informationen. Darauf können wir unsere bewährten Lösungskonzepte anwenden!

Zufallszüge und Signalgeber

Die Auszahlung $u : \Omega \times S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ hängt meist vom Zufall Ω ab; andernfalls untersuchen wir anschließend korrelierte Gleichgewichte.

Das Tripel $(\Omega, \mathbf{P}_\bullet, T_\bullet : \Omega \twoheadrightarrow \Omega_\bullet)$ ist für jeden Spieler $i \in I$ ein (endlicher) WRaum $(\Omega, \mathbf{P}_i)$ mit der Zufallsvariablen $T_i : \Omega \twoheadrightarrow \Omega_i : \omega \mapsto \omega_i = T_i(\omega)$, also einer messbaren Surjektion $T_i : (\Omega, \mathcal{A}) \twoheadrightarrow (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$.

Das universelle Modell hierfür ist das Paar $(\Omega, \mathbf{P})$ aus der Produktmenge $\Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i$ und einem WMaß $\mathbf{P}_i \in [\Omega]$ für jedes $i \in I$. Die kanonischen Zufallsvariablen sind hier die Projektionen $T_i : \Omega \twoheadrightarrow \Omega_i : \omega \mapsto \omega_i$.

Als Signalgeber dient oft $(\Omega, \mathbf{P}_0, T_\bullet : \Omega \twoheadrightarrow \Omega_\bullet)$ mit einem objektiven / intersubjektiven WMaß $\mathbf{P}_0 \in [\Omega]$. Bei verschiedenen Überzeugungen hat jeder Spieler $i \in I$ sein individuelles, subjektives WMaß $\mathbf{P}_i \in [\Omega]$: Jeder Spieler $i \in I$ hat seine eigene Erfahrung, seine Überzeugung, seine Annahme, seinen Glauben, etc. In günstigen Fällen haben alle Spieler i eine gemeinsame Überzeugung $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_0$ [*common prior*]. Dies gilt zum Beispiel, wenn der Signalgeber ein allgemein gleich verstandenes physikalisches Gerät ist [*signalling device*].

Zufallszüge und Signalgeber

Wie kann es sein, dass mehrere rationale Spieler unterschiedliche Überzeugungen, Annahmen, Glauben haben? Ist das nicht irrational?

Beispiel 1: Eine Illustration zum Münzwurf aus unserem obigen Spiel. Geworfen wird eine Münze, und diese ist eventuell unfair. Alice und Bob bekommen diese Münze jeweils für 20 Probewürfe zum Test. Diese führt jeder separat aus und bildet sich daraufhin seine Meinung über die für ihn plausible Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse. Obwohl beide rational vorgehen, wird sich bei geringer Testgröße eine Diskrepanz einstellen.

Beispiel 2: Alice verkauft Bob einen gebrauchten Gegenstand (Auto). Beide haben dazu verschiedene Einschätzungen, evtl. Erfahrungen.

Beispiel 3: Alice und Bob ersteigern Schürfrechte für ein Stück Land. Zuvor entnehmen und untersuchen sie Proben. Jeder bildet sich seine (private) Meinung zu den (geschätzen) Ertragsaussichten des Landes. Beide sind rational, kommen aber zu verschiedenen Überzeugungen.

Dasselbe gilt sinngemäß für alle fehlerbehafteten Messungen oder unterschiedlichen Erfahrungen oder divergenten Überzeugungen.

Bayes–Spiele und Bayes–Gleichgewichte

Gegeben sei die Spielermenge I, typischerweise $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

Definition I2A: Bayes–Spiel und Bayes–Gleichgewichte

Ein **Bayes–Spiel** $\Gamma = (u, T, \mathbf{P})$ über I besteht aus einem Spiel

$$u \,:\, \Omega \times \prod_{i \in I} S_i \to \mathbb{R}^I$$

mit Signal $T_i : \Omega \twoheadrightarrow \Omega_i : \omega \mapsto \omega_i$ und WMaß $\mathbf{P}_i \in [\Omega]$ für jeden Spieler i.
Wir schreiben $(u, \mathbf{P})$ im universellen Falle $\Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i$ und $T_i = \mathrm{pr}_i$.
Gemeinsame Überzeugung liegen vor, falls $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_k$ für alle $i, k \in I$.

Die **Harsanyi–Transformierte** von Γ ist das strategische Spiel

$$\hat{u} \,:\, \prod_{i \in I} \hat{S}_i \to \mathbb{R}^I$$

mit den Strategiemengen $\hat{S}_i := \{\, \hat{s}_i : \Omega_i \to S_i \,\}$ und den Auszahlungen $\hat{u}_i((\hat{s}_k)_{k \in I}) := \mathbf{E}_i[\omega \mapsto u_i(\omega, (\hat{s}_k(\omega_k))_{k \in I})]$ als Erwartung bezüglich $\mathbf{P}_i$.

Bayes–Gleichgewichte von Γ sind Nash–Gleichgewichte von $\hat{u}$:

$$\boxed{\mathrm{BE}(u, T, \mathbf{P}) := \mathrm{NE}(\hat{u})}$$

Bayes–Spiele und Bayes–Gleichgewichte

Erinnerung: Ein reelles Spiel über $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ist eine Funktion

$$u \,:\, S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$$

Wir betrachten hier zusätzlich ein Zufallselement $\omega \in \Omega$:

$$u \,:\, \Omega \times S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$$

Die raffinierte Definition I2A destillieren wir aus den vorigen Beispielen.
Ein Bayes–Spiel $\Gamma = (u, T, \mathbf{P})$ über I codiert folgende **Interaktion**:

Die Aktion $\omega \in \Omega$ ist der **Zufallszug**. Wir betrachten hier die Natur als weiteren Akteur (Spieler 0, ohne Auszahlung, daher unbeeinflussbar).

Spieler $i \in I$ kennt von ω nur $\omega_i = T_i(\omega)$ als **Signal** / Information / Typ.
Darauf wählt er seine Aktion $s_i \in S_i$. Seine Auszahlung $u_i(\omega, (s_k)_{k \in I})$ ist abhängig vom Zufallszug ω und den Aktionen $(s_k)_{k \in I}$ aller Spieler.

Wir nutzen daher die **erweiterte Strategiemenge** $\hat{S}_i := \{\, \hat{s}_i : \Omega_i \to S_i \,\}$.
Jede solche Abbildung $\hat{s}_i : \Omega_i \to S_i$ legt fest, wie der Spieler i das von ihm empfangene Signal $\omega_i \in \Omega_i$ in eine Strategie $\hat{s}_i(\omega_i) \in S_i$ übersetzt.
Für jeden Zufallszug $\omega \in \Omega$ ist damit der Verlauf des Spiels festgelegt.

Bayes–Spiele und Bayes–Gleichgewichte

Allgemeine Signalgeber sind Zufallsvariablen $(T_i : \Omega \to \Omega_i)_{i \in I}$.
Jeder Spieler $i \in I$ empfängt sein Signal $T_i : \Omega \to \Omega_i : \omega \mapsto \omega_i = T_i(\omega)$.

Universeller Signalgeber ist das Produkt $\Omega' = \prod_{i \in I} \Omega_i$ mit $T'_i = \mathrm{pr}_i$.
Übersetzung des allgemeinen Falls durch $T : \Omega \to \Omega' : \omega \mapsto (T_i(\omega))_{i \in I}$.

$$
\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[rr, "T"] \arrow[d, "T_1"'] \arrow[drr, "T_n" near end] & & \Omega' \arrow[d, "\mathrm{pr}_n"] \arrow[dll, "\mathrm{pr}_1"' near end] \\
\Omega_1 & \dots & \Omega_n
\end{tikzcd}
$$

Das WMaß $\mathbf{P}_i \in [\Omega]$ transportieren wir auf das WMaß $\mathbf{P}'_i \in [\Omega']$
durch Vorschieben mittels T gemäß $\mathbf{P}'_i := T_* \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i \circ T^{-1}$.

Trimmen: Angenommen, alle Spieler $i \in I$ haben eine gemeinsame Überzeugung $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}$ und der WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$ ist diskret. Dann können wir Ω trimmen zu $\Omega^* = \{\, \omega \in \Omega \mid \mathbf{P}(\{\omega\}) > 0 \,\}$ und die Signalmengen Ω_i zu $\Omega_i^* = T_i(\Omega^*)$. Damit haben alle Signale positive Wkt $\mathbf{P}(T_i{=}\omega_i) > 0$.

Bayes–Spiele und Bayes–Gleichgewichte

Zur Berechnung der **erwarteten Auszahlung** fixiert jeder Spieler $i \in I$ seine Annahmen über den Zufallszug $\omega \in \Omega$ als ein WMaß $\mathbf{P}_i \in [\Omega]$.
Dies nennen wir seine **Überzeugung** oder seinen **Glauben** / *belief*.

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_i(\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_n) &:= \mathbf{E}_i\big[\omega \mapsto u_i(\omega, \hat{s}_1(\omega_1), \dots, \hat{s}_n(\omega_n))\big] \\
&= \sum\nolimits_{\omega \in \Omega} u_i(\omega, \hat{s}_1(T_1(\omega)), \dots, \hat{s}_n(T_n(\omega))) \cdot \mathbf{P}_i(\omega)
\end{aligned}
$$

Hierbei herrscht **Glaubensfreiheit**: Jeder darf glauben, was er will.
Insbesondere dürfen die WMaße $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ auch verschieden sein.
Im Allgemeinen kennt kein Spieler das „wahre“ WMaß $\mathbf{P}_0$ auf Ω.

Als **gemeinsame Überzeugung** / *common prior* bezeichnet man die Eigenschaft $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_k$ für alle $i, k \in I$. Wir schreiben dann kurz $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_0$.
In diesem Fall haben alle Spieler denselben Glauben zu den Wkten.

Aus dem gegebenen Bayes–Spiel $\Gamma = (u, T, \mathbf{P})$ gewinnen wir so das transformierte Spiel $\hat{u}$. Der Übergang heißt **Harsanyi–Transformation**.

Die Abkürzung NE steht für Nash–Gleichgewicht / *Nash equilibrium* und BE für Bayes–(Nash–)Gleichgewicht / *bayesian (Nash) equilibrium*.

Typenmodell verfeinert Harsanyi–Transformierte.

Gegeben sei ein **Bayes–Spiel** $\Gamma = (u, T, \mathbf{P})$ mit $u : \Omega \times \prod_{i\in I} S_i \to \mathbb{R}^I$ sowie den individuellen Signalen $T_i : \Omega \twoheadrightarrow \Omega_i$ und WMaßen $\mathbf{P}_i \in [\Omega]$.

Wir setzen $J := \bigcup_{i\in I}\{i\} \times \Omega_i$: Ein Spielertyp $j = (i, \theta) \in J$ ist ein Spieler $i \in I$ zusammen mit seinem zugewiesenen Signal / Info $\theta = T_i(\omega) \in \Omega_i$.

Sei $\mathbf{P}_j \in [\Omega]$ mit $\mathbf{P}_j(T_i{=}\theta) = 1$ und $\mathbf{P}_j(A) \cdot \mathbf{P}_i(T_i{=}\theta) = \mathbf{P}_i(A \cap \{T_i{=}\theta\})$. Im Falle $\mathbf{P}_i(T_i{=}\theta) > 0$ ist dies die bedingte Wkt $\mathbf{P}_j(A) = \mathbf{P}_i(A \mid T_i{=}\theta)$. Allgemein sei $(\mathbf{P}_{(i,\theta)})_{\theta\in\Omega_i}$ eine **Disintegration** von $\mathbf{P}_i$ über $T_i : \Omega \twoheadrightarrow \Omega_i$.

Die Strategiemenge des Spielertyps $j = (i, \theta)$ ist $S_j := S_i$ wie zuvor. Wir identifizieren $\prod_{j\in J} S_j \cong \prod_{i\in I} \hat{S}_i : \check{s} \leftrightarrow \hat{s}$ vermöge $\check{s}_{i,\theta} = \hat{s}_i(\theta)$.

Bezüglich $\mathbf{P}_j$ ist seine **Gewinnerwartung** $\check{u}_j : \prod_{k\in J} S_k \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\check{s} \mapsto \check{u}_j(\check{s}) &= \mathbf{E}_j\big[\omega \mapsto u_i(\omega, (\check{s}_{(k,\omega_k)})_{k\in I})\big].\\ &= \textstyle\sum_{\omega\in\Omega} u_i(\omega, (\check{s}_{(k,\omega_k)})_{k\in I}) \cdot \mathbf{P}_j(\omega)\end{aligned}$$

Satz I2B: Typenmodell verfeinert Harsanyi–Transformierte.

Es gilt $\mathrm{NE}(\check{u}) \subseteq \mathrm{NE}(\hat{u})$. Die umgekehrte Inklusion „$\supseteq$“ gilt unter der Positivitätsbedingung $\mathbf{P}_i(T_i{=}\theta) > 0$ für alle $i \in I$ und $\theta \in \Omega_i$.

Typenmodell verfeinert Harsanyi–Transformierte.

Die Harsanyi–Transformation belässt die Spielermenge I, aber erweitert jede Strategiemenge S_i zu $\hat{S}_i = S_i^{\Omega_i}$. Das Typenmodell dagegen belässt S_i, aber erweitert die Spielermenge I zu Spielertypen $J := \bigcup_{i\in I}\{i\} \times \Omega_i$: Jeder Spieler $i \in I$ vervielfältigt sich in Clone $j = (i, \theta)$ mit Info $\theta \in \Omega_i$. Diese Geschwister maximieren unabhängig jedes seine Auszahlung.

Die Bedingungen $\mathbf{P}_j(T_i{=}\theta) = 1$ und $\mathbf{P}_j(A) \cdot \mathbf{P}_i(T_i{=}\theta) = \mathbf{P}_i(A \cap \{T_i{=}\theta\})$ sind naheliegende Minimalforderungen der **Kohärenz**. Im einfachsten Falle gilt $\mathbf{P}_i(T_i{=}\theta) > 0$ für jeden Spieler $i \in I$ und jede Info $\theta \in \Omega_i$. Dann erhalten wir für jeden Spielertyp $j = (i, \theta)$ die bedingte Wkt

$$\boxed{\mathbf{P}_j(A) = \mathbf{P}_i(A \mid T_i{=}\theta) = \frac{\mathbf{P}_i(A \cap \{T_i{=}\theta\})}{\mathbf{P}_i(T_i{=}\theta)}.}$$

Im Falle $\mathbf{P}_i(T_i{=}\theta) = 0$ ist $\mathbf{P}_j$ beliebig, getragen von $\{T_i{=}\theta\} = T_i^{-1}(\{\theta\})$. Für die Bayes–Gleichgewichte spielt dieser Fall keine weitere Rolle, wohl aber im Typenmodell, da *jeder* Spielertyp $j = (i, \theta) \in J$ seine erwartete Auszahlung $\check{u}_j$ optimieren will/muss, auch Typen mit Wkt $\mathbf{P}_i(T_i{=}\theta) = 0$.

Typenmodell verfeinert Harsanyi–Transformierte.

Aufgabe: Rechnen Sie den Satz im diskreten Fall explizit nach!

Lösung: Wir vergleichen Harsanyi $\hat{u}_i(\hat{s})$ und Typenmodell $\check{u}_{(i,\theta)}(\check{s})$.
Dank $\mathbf{P}_i(A \cap \{T_i{=}\theta\}) = \mathbf{P}_j(A) \cdot \mathbf{P}_i(T_i{=}\theta)$ und $\mathbf{P}_j(T_i{=}\theta) = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{u}_i(\hat{s}) &\stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{\omega\in\Omega} u_i(\omega, (\hat{s}_k(\omega_k))_{k\in I})\, \mathbf{P}_i(\omega) \quad \text{mit } \Omega = \textstyle\bigsqcup_{\theta\in\Omega_i} T_i^{-1}(\theta) \\
&\stackrel{\text{Dis}}{=} \sum_{\theta\in\Omega_i} \Big[\sum_{\omega\in T_i^{-1}(\theta)} u_i(\omega, (\hat{s}_k(\omega_k))_{k\in I})\, \mathbf{P}_i(\omega)\Big] \\
&\stackrel{\text{Dis}}{=} \sum_{\theta\in\Omega_i} \Big[\sum_{\omega\in T_i^{-1}(\theta)} u_i(\omega, (\check{s}_{(k,\omega_k)})_{k\in I})\, \mathbf{P}_{(i,\theta)}(\omega)\Big]\, \mathbf{P}_i(T_i{=}\theta) \\
&\stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{\theta\in\Omega_i} \Big[\sum_{\omega\in\Omega} u_i(\omega, (\check{s}_{(k,\omega_k)})_{k\in I})\, \mathbf{P}_{(i,\theta)}(\omega)\Big]\, \mathbf{P}_i(T_i{=}\theta) \\
&\stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{\theta\in\Omega_i} \check{u}_{(i,\theta)}(\check{s})\, \mathbf{P}_i(T_i{=}\theta)
\end{aligned}$$

„$\subseteq$“: Angenommen, $\hat{u}_i(\hat{s}_i; \hat{s}_{-i}) < \hat{u}_i(\hat{s}'_i; \hat{s}_{-i})$ für eine Alternative $\hat{s}'_i \in \hat{S}_i$.
Dann existiert (mindestens) ein Spielertyp $j = (i, \theta)$ mit $\theta \in \Omega_i$
und $\mathbf{P}_i(T_i{=}\theta) > 0$, sodass $\check{u}_j(\check{s}_j; \check{s}_{-j}) < \check{u}_j(\check{s}'_j; \check{s}_{-j})$ gilt.

„$\supseteq$“: Angenommen, $\check{u}_j(\check{s}_j; \check{s}_{-j}) < \check{u}_j(\check{s}'_j; \check{s}_{-j})$ für eine Alternative $\check{s}'_j \in S_j$.
Zusammen mit $\mathbf{P}_i(T_i{=}\theta) > 0$ folgt $u_i(\hat{s}_i; \hat{s}_{-i}) < u_i(\hat{s}'_i; \hat{s}_{-i})$, wobei wir $\hat{s}_i$
zu $\hat{s}'_i$ abändern durch den neuen Wert $\hat{s}'_i(\theta) = \check{s}'_{(i,\theta)}$. $\boxed{\text{QED}}$

Typenmodell verfeinert Harsanyi–Transformierte.

Im **Bayes–Gleichgewicht** optimieren genau die Spielertypen (i, θ) mit positiver Wkt $\mathbf{P}_i(T_i{=}\theta) > 0$, die anderen zählen nicht. Im Typenmodell hingegen optimiert jeder Spielertyp (i, θ), auch solche mit $\mathbf{P}_i(T_i{=}\theta) = 0$.

Das Typenmodell stellt also weitere, genauere, feinere Bedingungen.
Slogan: Das Typenmodell verfeinert die Harsanyi–Transformierte.

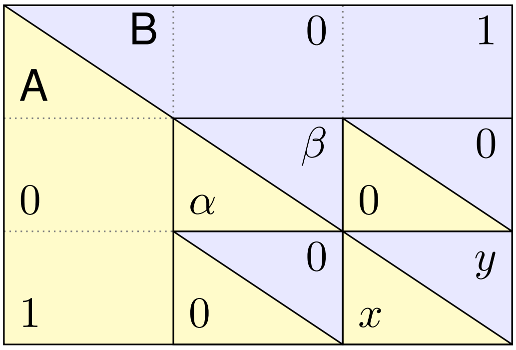
In jeder Grundvorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie lernen Sie bedingte Wkten durch die Definition $\mathbf{P}(A|B) := \mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B)$.
Der Sonderfall $\mathbf{P}(B) = 0$ wird verboten oder ad hoc repariert.

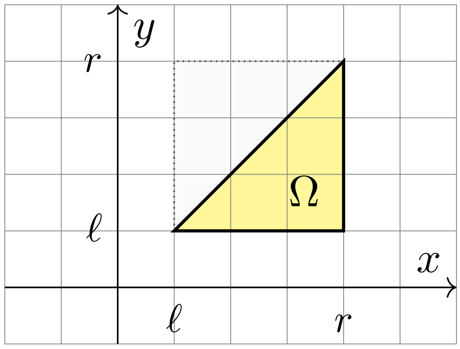
Dramatisch wird dies für kontinuierliche Wkten, siehe Übungen:
Hier hat jedes Signal / jeder Typ die punktuelle Wkt $\mathbf{P}_i(T_i{=}\theta) = 0$.
Auch diese Situation kommt natürlich vor, und wir wollen sie lösen!

Die Umformung der Erwartung als Summe $\sum_{\omega\in\Omega}$ in die Doppelsumme $\sum_{\theta\in\Omega_i} \sum_{\omega\in T_i^{-1}(\theta)}$ erinnert an Fubini. Dies nutzen wir nun zur Definition.

Die bedingten Wkten $\mathbf{P}_{(i,\theta)}$ werden daher als **Disintegration** definiert, wie nachfolgend skizziert. Das beantwortet unsere Grundlagenfrage.

Anwendungsbeispiel mit kontinuierlicher Wahrscheinlichkeit





Als konkrete Daten betrachten wir $\alpha = \beta = 2$ sowie $\ell = 1$ und $r = 4$.
Sei $\mathbf{P}$ die Gleichverteilung auf $\Omega = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ell \le y \le x \le r \,\}$.
Das heißt $\mathbf{P}(A) = \operatorname{vol}_2(A \cap \Omega)/\operatorname{vol}_2(\Omega)$ dank Lebesgue–Maß vol_2.
Die Signale $T_i : \Omega \to \Omega_i = [\ell, r]$ sind $T_1(x,y) = y$ und $T_2(x,y) = x$.

Aufgabe: (0) Können Sie anschaulich rationale Strategien erkennen?
(1) Finden Sie die Bayes–Gleichgewichte, zur Vereinfachung nur auf

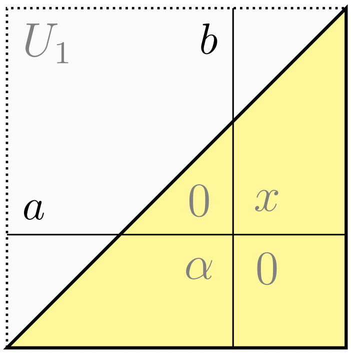
$$\hat{S}_1^* = \{\, s_a = \mathbf{I}_{[a,r]} \mid a \in [\ell, r] \,\} \quad \text{und} \quad \hat{S}_2^* = \{\, s_b = \mathbf{I}_{[b,r]} \mid b \in [\ell, r] \,\}.$$

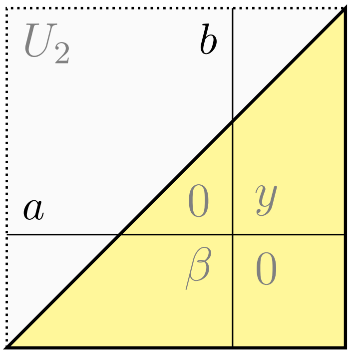
Wir schränken also die erweiterte Strategiemenge $\hat{S}_i = \{\, \hat{s}_i : \Omega_i \to S_i \,\}$ ein zu der viel übersichtlicheren Menge $\hat{S}_i^* \subseteq \hat{S}_i$ monotoner Strategien.

Anwendungsbeispiel mit kontinuierlicher Wahrscheinlichkeit

Alice und Bob wählen ihre Strategien $(s_a, s_b) \in \hat{S}_1^* \times \hat{S}_2^* \subseteq \hat{S}_1 \times \hat{S}_2$.
Die Auszahlung ist demnach die Zufallsvariable $U : \Omega \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\omega = (x,y) \mapsto u\big(\omega, s_a(y), s_b(x)\big) = \begin{cases} (\alpha, \beta) & \text{falls } y < a \text{ und } x < b, \\ (x,y) & \text{falls } y \ge a \text{ und } x \ge b, \\ (0,0) & \text{sonst.} \end{cases}$$





Bezüglich $\mathbf{P}$ ist die Erwartung $\mathbf{E}(U) = v(a,b)/\operatorname{vol}_2(\Omega)$ gegeben durch

$$v(a,b) = \int_{(x,y)\in\Omega} u\big((x,y), s_a(y), s_b(x)\big)\, \mathrm{d}(x,y).$$

Anwendungsbeispiel mit kontinuierlicher Wahrscheinlichkeit

Zu Bobs fixierter Wahl b maximiert Alice $a \mapsto v_1(a, b)$.
Zu Alice' fixierter Wahl a maximiert Bob $b \mapsto v_2(a, b)$.
Im Fall $\ell \le a < b \le r$ berechnen wir die Ableitungen:

$$\partial_a v_1(a, b) = \alpha(b - a) - (r^2 - b^2)/2 \quad \stackrel{!}{=} 0$$
$$\partial_b v_2(a, b) = \beta(a - \ell) - (b^2 - a^2)/2 \quad \stackrel{!}{=} 0$$

Auf Bobs Strategie s_b ist Alice' beste Antwort s_a gegeben durch

$$b \mapsto a = \max\{\, \ell,\ b - (r^2 - b^2)/2\alpha \,\}.$$

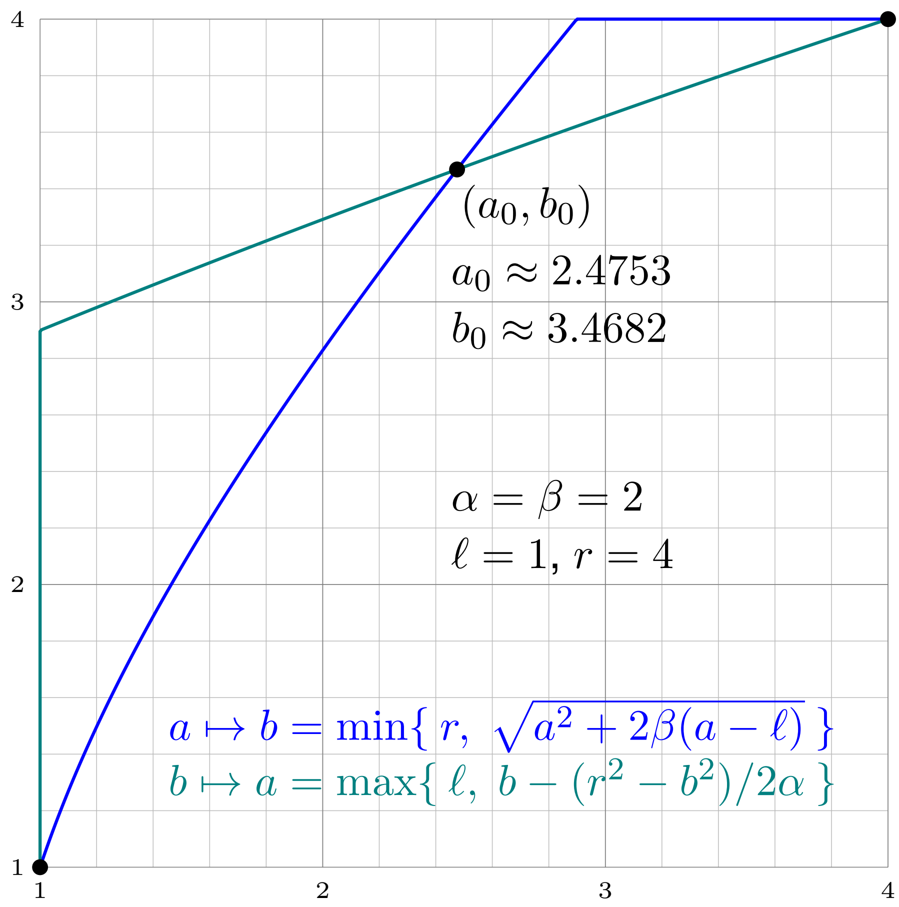
Auf Alice' Strategie s_a ist Bobs beste Antwort s_b gegeben durch

$$a \mapsto b = \min\{\, r,\ \sqrt{a^2 + 2\beta(a - \ell)} \,\}.$$

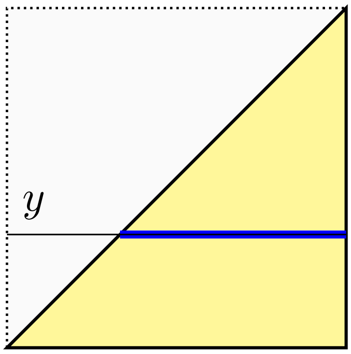
Übung: Führen Sie die Rechnung für alle Fälle sorgsam aus!
Die Diskussion ist elementar, wenn auch leider etwas länglich.

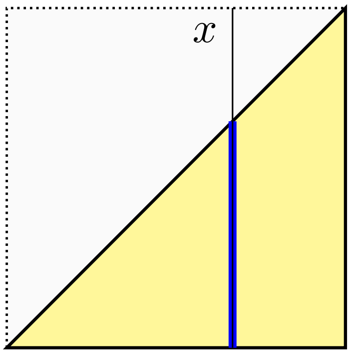
Anwendungsbeispiel mit kontinuierlicher Wahrscheinlichkeit

Die Nash–Gleichgewichte (a, b) finden wir am besten numerisch:



Typenmodell und bedingte Wahrscheinlichkeit





Angenommen, Alice erhält das Signal $T_1(\omega) = y$. Ihre „bedingte Wkt“ $\mathbf{P}_{(1,y)}$ ist dann / sollte sein die eindimensionale Gleichverteilung auf

$$T_1^{-1}(y) = \{\, (x,y) \mid y \le x \le r \,\} \cong [y, r].$$

Angenommen, Bob erhält das Signal $T_2(\omega) = x$. Seine „bedingte Wkt“ $\mathbf{P}_{(2,x)}$ ist dann / sollte sein die eindimensionale Gleichverteilung auf

$$T_2^{-1}(x) = \{\, (x,y) \mid \ell \le y \le x \,\} \cong [\ell, x].$$

⚠ Im traditionellen Sinne sind diese „bedingten Wkten“ nicht definiert! Der Spielertyp (i, θ) benötigt diese Wkt dennoch für seine Entscheidung.

Typenmodell und bedingte Wahrscheinlichkeit

Angenommen, Bob spielt s_b und Alice erhält das Signal $T_1(\omega) = y < b$. Was ist Alice’ beste Antwort? Als Typ $(1, y)$ vergleicht sie Erwartungen:

$$\begin{aligned} w_0(b) &:= \int_{(x,y)\in\Omega} u_1\big((x,y), 0, s_b(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{x=y}^{b} \alpha\,\mathrm{d}x = \alpha(b-y) \\ w_1(b) &:= \int_{(x,y)\in\Omega} u_1\big((x,y), 1, s_b(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{x=b}^{r} x\,\mathrm{d}x = (r^2 - b^2)/2 \end{aligned}$$

Im Falle $w_0(b) > w_1(b)$ spielt sie 0, im Falle $w_0(b) < w_1(b)$ spielt sie 1. Das entspricht $y < a$ und $y > a$ mit der Grenze $a = b - (r^2 - b^2)/(2\alpha)$.

Angenommen, Alice spielt s_a und Bob erhält das Signal $T_2(\omega) = x > a$. Was ist Bobs beste Antwort? Als Typ $(2, x)$ vergleicht er Erwartungen:

$$\begin{aligned} w_0(a) &:= \int_{(x,y)\in\Omega} u_2\big((x,y), s_a(y), 0\big)\,\mathrm{d}y = \int_{y=\ell}^{a} \beta\,\mathrm{d}y = \beta(a-\ell) \\ w_1(a) &:= \int_{(x,y)\in\Omega} u_2\big((x,y), s_a(y), 1\big)\,\mathrm{d}y = \int_{y=a}^{x} y\,\mathrm{d}y = (x^2 - a^2)/2 \end{aligned}$$

Im Falle $w_0(a) > w_1(a)$ spielt er 0, im Falle $w_0(a) < w_1(a)$ spielt er 1. Das entspricht $x < b$ und $x > b$ mit der Grenze $b = \sqrt{a^2 + 2\beta(a-\ell)}$.

☺ Das entspricht unserem vorigen Ergebnis im Harsanyi–Modell.

Unsere spieltheoretische Anwendung erfordert, dass wir bedingte Wkten präzise erklären. Über diese Subtilität möchte man in der Stochastik meist stillschweigend hinweggehen. Hier müssen wir genau hinschauen!

Wie zuvor betrachten wir das Dreieck $\Omega = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ell \le y \le x \le r \,\}$ mit der Borel–Algebra $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Als Bedingungen erlauben wir nun das Mengensystem $\mathscr{B} = \{\, \Omega,\ T_1^{-1}(y),\ T_2^{-1}(x) \mid x,y \in [\ell,r] \,\} \subseteq \mathscr{A}$.

Das WMaß $\mathbf{P}(-|\Omega)$ ist die zweidimensionale Gleichverteilung auf Ω. Das heißt $\mathbf{P}(A|\Omega) = \operatorname{vol}_2(A \cap \Omega)/\operatorname{vol}_2(\Omega)$ dank Lebesgue–Maß vol_2.

Für $B \in \{\, T_1^{-1}(y),\ T_2^{-1}(x) \,\}$ hingegen fixieren wir als WMaß $\mathbf{P}(-|B)$ die eindimensionale Gleichverteilung auf B, wie oben motiviert.

☹ Im traditionellen Sinne sind diese **bedingten Wkten** nicht definiert! Nach Kolmogorov I2F ist die Frage verboten und alle Antworten illegal.

☺ Als Erweiterung betrachten wir daher einen **bedingten WRaum**. Rényis Definition I2G legalisiert die Frage und ermöglicht Antworten.

☺ Damit werden alle nötigen Daten übersichtlich und kohärent codiert.

Projekt: Was gilt, wenn Alice und Bob allgemeine Strategien spielen, also beliebige messbare Funktionen $s_i : \Omega_i \to \{0,1\}$?

Angenommen, Bob spielt s und Alice erhält das Signal $T_1(\omega) = y$.

$$w_0(s) := \int_{(x,y)\in\Omega} u_1\big((x,y),0,s(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{x=y}^{r} \alpha\,[1-s(x)]\,\mathrm{d}x$$
$$w_1(s) := \int_{(x,y)\in\Omega} u_1\big((x,y),1,s(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{x=y}^{r} x\,s(x)\,\mathrm{d}x$$

Im Falle $w_0(s) > w_1(s)$ spielt sie 0, im Falle $w_0(s) < w_1(s)$ spielt sie 1.

Angenommen, Alice spielt s und Bob erhält das Signal $T_2(\omega) = x > a$.

$$w_0(s) := \int_{(x,y)\in\Omega} u_2\big((x,y),s(y),0\big)\,\mathrm{d}y = \int_{y=\ell}^{x} \beta\,[1-s(y)]\,\mathrm{d}y$$
$$w_1(s) := \int_{(x,y)\in\Omega} u_2\big((x,y),s(y),1\big)\,\mathrm{d}y = \int_{y=\ell}^{x} y\,s(y)\,\mathrm{d}y$$

Im Falle $w_0(s) > w_1(s)$ spielt er 0, im Falle $w_0(s) < w_1(s)$ spielt er 1.

Das definiert jeweils eine beste Antwort. Was sind Gleichgewichte? Die obigen Gleichgewichte bleiben bestehen. (Warum?) Gibt es neue?

David Hilbert (1862–1943) war einer der bedeutendsten Mathematiker der Neuzeit und hat die Entwicklung der Mathematik im 20. Jahrhundert maßgeblich geprägt. Am 8. August 1900 sprach er auf dem zweiten Internationalen Mathematikerkongress in Paris und trug die später so genannten **23 Hilbertschen Probleme** vor. Das sechste davon lautet:

6. Mathematische Behandlung der Axiome der Physik

Durch die Untersuchung über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe nahegelegt, nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen Disziplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute die Mathematik eine hervorragende Rolle spielt; dies sind in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik.

Was die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung angeht, so scheint es mir wünschenswert, dass mit der logischen Untersuchung derselben zugleich eine strenge und befriedigende Entwicklung der Methode der mittleren Werte in der mathematischen Physik, speziell der kinetischen Gastheorie Hand in Hand gehe.

David Hilbert (1862–1943), *Mathematische Probleme* (1900)

Hilbert war zu einem Vortrag auf dem zweiten ICM eingeladen worden und beschloss, einen programmatischen Ausblick auf die Mathematik des 20. Jahrhunderts zu wagen: *Wer von uns würde nicht gerne den Schleier lüften, unter dem die Zukunft verborgen liegt, um einen Blick zu werfen auf die bevorstehenden Fortschritte unserer Wissenschaft und in die Geheimnisse ihrer Entwicklung während der künftigen Jahrhunderte!*

Die Mathematik war um 1900 noch wenig formalisiert, die axiomatische Vorgehensweise noch nicht etabliert. Hilbert konnte noch nicht auf die Mengenlehre zurückgreifen, ebensowenig auf Topologie, Maßtheorie oder Funktionalanalysis. Daher sind seine Formulierungen wortreich und bisweilen vage. Dennoch oder gerade deshalb beeinflusste Hilberts Problemliste die Entwicklung der Mathematik im 20. Jahrhundert enorm.

Die unmittelbaren Reaktionen auf dem Kongress waren enttäuschend. Der Konferenzband würdigte 1902 hingegen die Wichtigkeit von Hilberts Vortrag und platzierte ihn an den Anfang, gefolgt von Poincarés Vortrag. Seither haben Hilberts Probleme zahlreiche Forscher:innen inspiriert.

Kolmogorovs Axiomatisierung der WTheorie (Moskau 1933)

Andrei Kolmogorov (1902–1987) war einer der bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts, mit Beiträgen zur Topologie, Fourier–Reihen, Logik und Komplexitätstheorie. Sein bekanntestes Werk war 1933 die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Zweck des vorliegenden Heftes ist eine axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Der leitende Gedanke des Verfassers war dabei, die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche noch unlängst für ganz eigenartig galten, natürlicherweise in die Reihe der allgemeinen Begriffsbildungen der modernen Mathematik einzuordnen.

Vor Entstehung der Lebesgueschen Maß- und Integrationstheorie war diese Aufgabe ziemlich hoffnungslos. Nach den Lebesgueschen Untersuchungen lag die Analogie zwischen dem Maße einer Menge und der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sowie zwischen dem Integral einer Funktion und der mathematischen Erwartung einer zufälligen Größe auf der Hand.

Andrei Kolmogorov (1902–1987),
Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1933)

Kolmogorovs Axiomatisierung der WTheorie (Moskau 1933)

Kolmogorovs Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie durch drei einfache Axiome (Definition I2E) gehört heute zur Allgemeinbildung, nicht nur für Mathematiker:innen, sondern weit darüber hinaus für alle Anwender:innen der Stochastik und allgemein der Maßtheorie.

Kolmogorov antwortete damit auf Hilberts oben genanntes sechstes Problem der „Axiomatisierung der Physik“. Da Hilbert hierbei explizit die Wahrscheinlichkeitstheorie mit einbezog, können Kolmogorovs Axiome als ein Beitrag zu Hilberts Programm angesehen werden.

Hilberts Einordnung der Wahrscheinlichkeit als ein Problem der Physik mag uns Heutige verwundern, da wir alle damit aufgewachsen sind, die Wahrscheinlichkeitstheorie als ein mathematisches Gebiet zu verstehen. Das bezeugt, wie erfolgreich Kolmogorovs Axiomatisierung bis heute ist!

Kolmogov stützte sich dabei auf die von Henri Lebesgue (1875–1941) seit 1901 entwickelte allgemeine Maß- und Integrationstheorie, wie er in der oben zitierten Einleitung klar zum Ausdruck bringt. Die Zeit war reif, Hilbert hatte das Problem formuliert, Kolmogorov nun seine Lösung.

Grundregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wir betrachten die **Ergebnismenge** Ω eines Zufallsexperiments.
Die beobachtbaren **Ereignisse** $A \subseteq \Omega$ bilden eine Familie $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$.
Das **Wahrscheinlichkeitsmaß** ist hierauf eine Abbildung $\mathbf{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$.

Um damit vernünftig rechnen zu können, benötigen wir folgendes:

0 Unmögliches Ereignis: Es gilt $\emptyset \in \mathscr{A}$ und

$$\boxed{\mathbf{P}(\emptyset) = 0.}$$

1 Sicheres Ereignis: Es gilt $\Omega \in \mathscr{A}$ und

$$\boxed{\mathbf{P}(\Omega) = 1.}$$

2 Komplement: Aus $A \in \mathscr{A}$ folgt $(\Omega \smallsetminus A) \in \mathscr{A}$ und

$$\boxed{\mathbf{P}(\Omega \smallsetminus A) = 1 - \mathbf{P}(A).}$$

3 Monotonie: Für alle $A, B \in \mathscr{A}$ gilt

$$\boxed{A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{P}(A) \le \mathbf{P}(B).}$$

Grundregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung

4 Vereinigung: Aus $A, B \in \mathscr{A}$ folgt $(A \cup B), (A \cap B) \in \mathscr{A}$ und

$$\boxed{\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).}$$

5 Paarweise Additivität: Für alle $A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt

$$\boxed{\mathbf{P}(A \sqcup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).}$$

6 Endliche Additivität: Aus $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{A}$ folgt $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathscr{A}$, und bei disjunkter Vereinigung addieren sich die Wkten:

$$\boxed{\mathbf{P}\big(A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n\big) = \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_n).}$$

7 Abzählbare Additivität: Aus $A_0, A_1, A_2, \dots \in \mathscr{A}$ folgt $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$, und bei disjunkter Vereinigung addieren sich die Wkten:

$$\boxed{\mathbf{P}\Big(\bigsqcup_{k=0}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) \quad \text{falls } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.}$$

Diese Wunschliste ist noch redundant: (1,2,7) implizieren alle anderen.
Übung! Wir extrahieren daher nur diese grundlegenden Eigenschaften.

Definition I2C: Algebren und endlich additive Maße

Ein Mengensystem $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt **Algebra** auf Ω, falls gilt:

1. **Leere Menge:** Es gilt $\emptyset \in \mathscr{A}$.
2. **Komplemente:** Aus $A \in \mathscr{A}$ folgt $(\Omega \smallsetminus A) \in \mathscr{A}$.
3. **Endliche Vereinigungen:** Aus $A, B \in \mathscr{A}$ folgt $A \cup B \in \mathscr{A}$.

Eine Abbildung $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt **endlich-additives Maß**, falls gilt: Sind $A, B \in \mathscr{A}$ disjunkt, so folgt $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Für den Aufbau der Maßtheorie benötigen wir abzählbare Additivität:

Definition I2D: σ–Algebren und σ–additive Maße

Wir nennen $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ eine **σ–Algebra**, wenn neben (1–2) zudem gilt:

4. **Abzählbare Vereinigungen:** Aus $A_k \in \mathscr{A}$ folgt $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$.

Eine Abbildung $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt **(σ–additives) Maß**, falls gilt: Ist eine abzählbare Familie $A_0, A_1, A_2, \dots \in \mathscr{A}$ messbarer Mengen paarweise disjunkt, so folgt $\mu\big(\bigsqcup_{k=0}^{\infty} A_k\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$.

Definition I2E: Wahrscheinlichkeitsraum, Kolmogorov 1933

(1) Ein **Maßraum** $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ besteht aus einer Grundmenge Ω, einer σ–Algebra $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ und einem σ–additiven Maß $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$.

(2) Ein **Wahrscheinlichkeitsraum** $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, kurz **WRaum**, ist ein Maßraum mit normierter Gesamtmasse $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Aussage (1) fasst folgende drei Axiome / Rechenregeln zusammen:
(1a) **Leere Menge:** Es gilt $\emptyset \in \mathscr{A}$ und $\mu(\emptyset) = 0$.
(1b) **Komplemente:** Aus $A \in \mathscr{A}$ folgt $(\Omega \smallsetminus A) \in \mathscr{A}$.
(1c) **σ–Additivität:** Aus $A_0, A_1, A_2, \dots \in \mathscr{A}$ folgt $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$, sowie

$$\mu\Big(\bigsqcup_{k=0}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) \quad \text{falls } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

Wir nennen $(\Omega, \mathscr{A})$ einen **Messraum** und μ hierauf ein **Maß**.
Eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ nennen wir **messbar**, falls $A \in \mathscr{A}$ gilt.

Das Maß μ heißt **endlich**, falls $\mu(\Omega) < \infty$ gilt, und **σ–endlich**, falls in $\mathscr{A}$ eine Ausschöpfung $A_k \nearrow \Omega$ existiert mit $\mu(A_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Diskrete Maße und Wahrscheinlichkeiten

Sei Ω eine beliebige Menge. Das **Zählmaß** $\sharp : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ordnet jeder Teilmenge $A \subseteq \Omega$ die Anzahl $\sharp A$ ihrer Elemente zu.

Allgemein sei $m : \Omega \to [0, \infty] : \omega \mapsto m(\omega)$ eine beliebige Funktion, die wir als Massenverteilung interpretieren. Diese definiert das **diskrete Maß**

$$\mu \;:\; \mathfrak{P}(\Omega) \to [0, \infty] \;:\; \mu(A) = \textstyle\sum_{\omega \in A} m(\omega).$$

Für $m = 1$ ist dies das Zählmaß. Für $\mu(\Omega) = 1$ ist dies ein WMaß.

Beispiel: (Laplace) Im Falle $0 < \sharp\Omega < \infty$ können wir $m = 1/\sharp\Omega$ setzen und erhalten die **Gleichverteilung** $\mu : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0, 1]$ mit $\mu(A) = \sharp A/\sharp\Omega$.

Beispiel: Auf der Menge $\Omega = \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen haben wir die **Binomialverteilung** $B(n, t) : k \mapsto \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$ für $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, 1]$, die **Poisson–Verteilung** $P(\lambda) : k \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda^k/k!$ für $\lambda \in \mathbb{R}_{\ge 0}$, sowie die **geometrische Verteilung** $G(q) : k \mapsto (1 - q)q^k$ für $q \in [0, 1[$.

Bemerkung: Mit $[\Omega]$ bezeichnen wir die Menge aller diskreten WMaße auf Ω. Ist Ω eine $(n + 1)$–elementige Menge, so ist $[\Omega]$ ein n–Simplex.

Die Borel–Algebra und das Lebesque–Maß

Zum euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ haben wir die **Borel–Algebra** $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ als kleinste σ–Algebra, die alle Quader $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ enthält.

Hierauf existiert genau ein Maß $\mathrm{vol}_n : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, das auf Quadern normiert ist durch $\mathrm{vol}_n([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$ für alle $a_1 \le b_1, \dots, a_n \le b_n$ in $\mathbb{R}$. Wir nennen dies das **Lebesgue–Maß**.

Dieser Borel–Lebesgue–Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \mathrm{vol}_n)$ ist nicht endlich, aber σ–endlich, denn $\mathbb{R}^n = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} [-r, r]^n$ mit $\mathrm{vol}_n([-r, r]^n) < \infty$.

Beispiel: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und hierauf $\mathscr{B}(\Omega) = \{\, A \in \mathscr{B}_n \mid A \subseteq \Omega \,\}$. Für $0 < \mathrm{vol}_n(\Omega) < \infty$ haben wir die **kontinuierliche Gleichverteilung**

$$\mathbf{P} \;:\; \mathscr{B}(\Omega) \to [0, 1] \;:\; A \mapsto \mathbf{P}(A) = \frac{\mathrm{vol}_n(A)}{\mathrm{vol}_n(\Omega)}.$$

Jedes endliche Maß μ auf $(\Omega, \mathscr{A})$ mit der Eigenschaft $0 < \mu(\Omega) < \infty$ können wir zu einem WMaß $\mathbf{P}$ **normieren** durch $\mathbf{P}(A) = \mu(A)/\mu(\Omega)$ und erhalten so den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Mit $[\Omega, \mathscr{A}]$ bezeichnen wir die Menge aller WMaße $\mathbf{P}$ auf $(\Omega, \mathscr{A})$.

Kontinuierliche Maße und Wahrscheinlichkeiten

Auf der obigen Maßdefinition baut man die Maß- und Integrationstheorie auf; darauf will ich in diesem kurzen Überblick nicht weiter eingehen. Wir werden Integrale im Folgenden selbstverständlich nutzen.

Eine **kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung** oder **WDichte** auf der Ergebnismenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine messbare Funktion

$$f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{mit Gesamtmasse} \quad \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

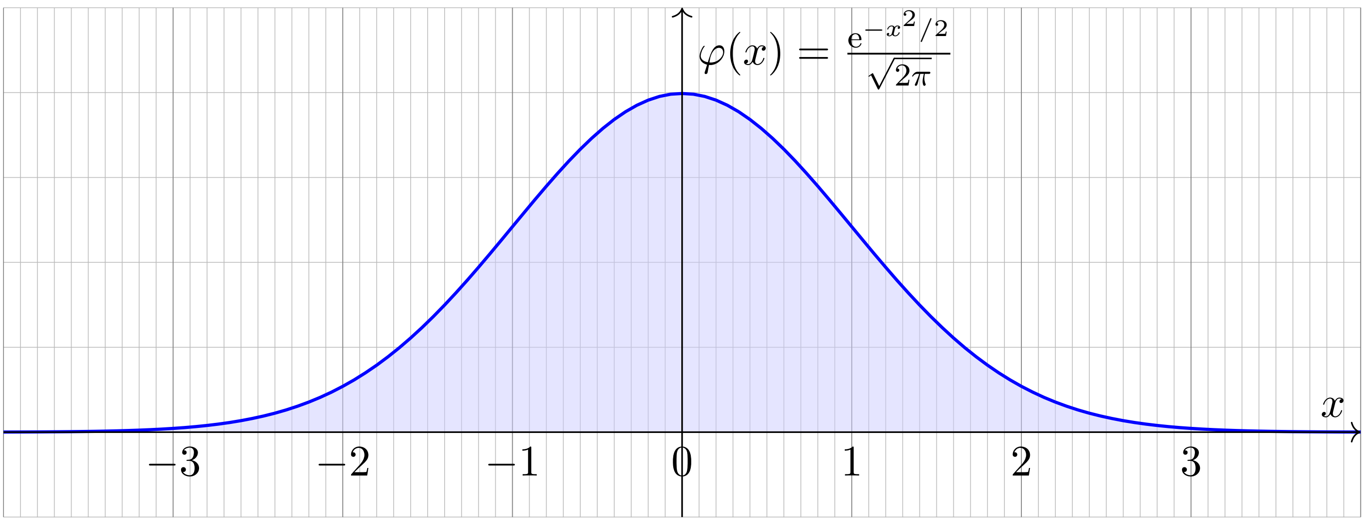
Diese definiert ein **kontinuierliches Wahrscheinlichkeitsmaß**

$$\mathbf{P} \;:\; \mathscr{B}(\Omega) \to [0,1] \;:\; A \mapsto \mathbf{P}(A) := \int_A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Anschaulich misst $\mathbf{P}(A)$, wieviel Wkt auf die Menge A entfällt.

Beispiel: Die kont. Gleichverteilung auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $0 < \operatorname{vol}_n(\Omega) < \infty$ entsteht durch Integration über die konstante Dichte $f = 1/\operatorname{vol}_n(\Omega)$. In diesem Falle gilt einfach $\mathbf{P}(A) = \operatorname{vol}_n(A)/\operatorname{vol}_n(\Omega)$ wie in oben.

Kontinuierliche Maße und Wahrscheinlichkeiten



Zentrales Beispiel ist die **Gaußsche Glockenkurve**

$$\varphi \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \;:\; x \mapsto \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Dies ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte: Es gilt $\varphi \geq 0$ und $\int_\mathbb{R} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Wir nennen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die **Dichte der Standard-Normalverteilung**. Sie hat Erwartung $\int_\mathbb{R} x\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ und Varianz $\int_\mathbb{R} x^2\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Bedingte Wahrscheinlichkeitsräume

Definition I2F: bedingte Wkt, Kolmogorov 1933

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und hierin $\mathscr{B} := \{\, B \in \mathscr{A} \mid 0 < \mu(B) < \infty \,\}$. Für $A \in \mathscr{A}$ und $B \in \mathscr{B}$ definieren wir die **bedingte Wahrscheinlichkeit**

$$\mathbf{P}(A|B) := \mu(A \cap B)/\mu(B).$$

(1) Wir haben $\emptyset \notin \mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ und hierauf die Abbildung $\mathbf{P} : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to [0,1]$.
(2) Für jedes $B \in \mathscr{B}$ ist $\mathbf{P}(-|B)$ ein WMaß auf $(\Omega, \mathscr{A})$ mit $\mathbf{P}(B|B) = 1$.
(3) Für alle $A \in \mathscr{A}$ und $B \subseteq C$ in $\mathscr{B}$ gilt $\mathbf{P}(A|B) \cdot \mathbf{P}(B|C) = \mathbf{P}(A \cap B|C)$.

Zum vorgegebenen Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ nennen wir $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathbf{P})$ den kanonischen **bedingten Wahrscheinlichkeitsraum**, kurz **BWRaum**.

In reality every probability is conditional.
Alfréd Rényi (1921–1970), *Foundations of Probability* (1970)

Definition I2G: bedingter WRaum, Rényi 1954

Allgemein ist ein **bedingter Wahrscheinlichkeitsraum** $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathbf{P})$ ein Messraum $(\Omega, \mathscr{A})$ mit Daten $(\mathscr{B}, \mathbf{P})$ und den Eigenschaften (1–3).

Bedingte Wahrscheinlichkeitsräume

Kolmogorovs Axiome I2E und die darauf aufbauende bedingte Wkt I2F sagen uns nicht, wo die Wkten herkommen oder wie sie zu finden sind, doch sie präzisieren die nötigen Daten und geforderten Eigenschaften.

Rényis Definition I2G ist allgemeiner und flexibler als Kolmogorovs I2F:

Allgemein muss $\mathscr{B}$ nicht jede Menge $B \in \mathscr{A}$ mit $\mathbf{P}_\Omega(B) > 0$ enthalten. Darüber hinaus kann $\mathscr{B}$ auch Mengen $B \in \mathscr{A}$ mit $\mathbf{P}_\Omega(B) = 0$ enthalten.

Für jedes $B \in \mathscr{B}$ haben wir den WRaum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}_B)$ mit $\mathbf{P}_B = \mathbf{P}(-|B)$, und diese Familie von WMaßen ist kohärent gemäß Eigenschaft (3).

Falls dividiert werden kann, so ergibt $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A \cap B|C)/\mathbf{P}(B|C)$ *kanonisch* die bedingte Wkt, sonst ist $\mathbf{P}(A|B)$ ein zusätzliches Datum.

An die Familie $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ stellen wir keine Forderungen außer $\emptyset \notin \mathscr{B}$. In I2F folgt aus $B, C \in \mathscr{B}$ zudem $B \cup C \in \mathscr{B}$. Für jeden σ–endlichen Maßraum existiert eine Familie $B_0, B_1, \ldots \in \mathscr{B}$ mit $\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k = \Omega$. Diese zusätzlichen Eigenschaften betrachten wir später, motiviert durch die Bedürfnisse konkreter Anwendungen und weitreichender Theoreme.

📖 Alfréd Rényi: *Probability Theory.* Dover Publications 1970
Alfréd Rényi: *Foundations of Probability.* Dover Publications 1970
Alfréd Rényi, Maurice Fréchet: *Sur les espaces simples des Probabilités conditionnelles*. Annales de l'Institut Henri Poincaré 1 (1964) 3–21

Kolmogorovs Axiome I2E und seine Formulierung der bedingten Wkt als Quotient I2F sind klar und einfach und als Grundlage bewährt. Mit einer Einschränkung: Niemals können wir durch 0 oder durch ∞ dividieren.

Wir können jedoch mit 0 multiplizieren, daher drehen wir den Spieß um. Rényi kam so zu der grundlegenden und eleganten Erkenntnis, dass die bedingte Wkt das primitive Ausgangsdatum ist, nicht die absolute Wkt.

Philosophisch-ästhetisch möchten wir wir unsere Axiome eleganter und vollständiger formulieren. Pragmatisch-rechnerisch wünschen wir uns eine größere Ausdrucksfähigkeit. Die Wkt 0 kommt tatsächlich vor!

Insbesondere in der Spieltheorie treten diese Probleme regelmäßig auf. Die absolute Wkt impliziert die bedingte Wkt, wie oben gesehen. Es gibt allerdings auch Ausnahmen, und gerade auf die kommt es uns hier an.

Die axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die von A.N. Kolmogorov in seiner 1933 erschienenen Arbeit gegeben wurde, war die Grundlage der großartigen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die in den letzten zwei Jahrzehnten stattgefunden hat. Im Zuge der Entwicklung tauchten aber auch solche Probleme auf, die im Rahmen der Kolmogorovschen Theorie nicht behandelt werden konnten. Wir denken in erster Linie [an Maße in wichtigen Anwendungen…], die nicht normiert werden können […]

So hat es z.B. keinen Sinn, von einer im ganzen n–dimensionalen euklidischen Raum gleichmäßigen Verteilung zu sprechen; ebenso gibt es keine Wahrscheinlichkeitsverteilung, bei der abzählbar unendlich viele Zustände einer Markovschen Kette gleich wahrscheinlich wären. […]

Kolmogorov selbst [hat] die Idee einer solchen Weiterentwicklung […] erwähnt, aber über seine disbezüglichen Gedanken nichts veröffentlicht.

Alfréd Rényi, *Axiomatischer Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (1954)

Ein Beispiel zu endlichen bedingten WRäumen

Wir betrachten $\Omega = \{1, 2, ..., 10\}$ mit Punktmassen $m = \mathbf{I}_{\{1,2,3,4,5,6\}}$.

(0) Das Ereignis Ω tritt ein. Was sind die Wkten $u(x) = \mathbf{P}(\{x\}|\Omega)$? Es gilt $u(x) = 1/6$ für $x \in \{1, \dots, 6\}$ und $m(x) = 0$ sonst.

(1) Angenommen, das Ereignis $B = \{1, \dots, 5\}$ tritt ein. Was sind die Wkten $u(x) = \mathbf{P}(\{x\}|B)$? Es gilt $u(x) = 1/5$ für $x \in B$, sonst $u(x) = 0$.

(2) Angenommen, das Ereignis $C = \{7, 8, 9\}$ tritt ein. Was sind die Wkten $u(x) = \mathbf{P}(\{x\}|C)$? Es gilt $u(x) = 0$ für $x \notin C$. Auf C ist jede WVerteilung möglich, etwa $u(7) = 1/2$, $u(8) = 1/3$, $u(9) = 1/6$.

Ist Frage (2) unsinnig? Das kommt auf den Anwendungskontext an!

Erste Interpretation: Wir werfen einen fairen Würfel $1, 2, 3, 4, 5, 6$. In diesem Modell tritt das Ereignis C niemals ein. Es ist nicht nur „absolut unwahrscheinlich“, sondern strenger „logisch unmöglich“.

Zweite Interpretation: Wir ziehen zufällig eine reelle Zahl $\omega \in [0, 1]$ gemäß kontinuierlicher Gleichverteilung. Im irrationalen Falle $\omega \notin \mathbb{Q}$ werfen wir einen fairen Würfel $1, 2, 3, 4, 5, 6$, andernfalls $7, 7, 7, 8, 8, 9$.

Die Gleichverteilung auf $\mathbb{N}$ und Primzahlsatz

Sei $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$ die Menge der Primzahlen in $\mathbb{N}$.

Aufgabe: Mit welcher Wkt ist eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ prim?
(1) Warum hat die Frage zunächst keinen Sinn? (2) Wie dann doch?

Lösung: (1) Die Gleichverteilung wird realisiert durch das Zählmaß.
☹ Wegen $\sharp\mathbb{N} = \infty$ können wir μ nicht zu einem WMaß normieren.

(2) Wir nutzen die Primzahlfunktion $\pi(x) = \sharp\{\, p \in \mathbb{P} \mid p \le x \,\}$ für $x \in \mathbb{R}$.
☺ Für $B = \{1, \dots, n\}$ haben wir die bedingte Wkt $\mathbf{P}(\mathbb{P}|B) = \pi(n)/n$.

Satz I2H: Primzahlsatz, quantitativ nach Dusart 2010

(0) Asymptotisch gilt $\pi(n) \sim n/\ln n$, das bedeutet ausgeschrieben

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{\pi(n)}{n/\ln n} \right] = 1$$

(1) Für alle $n \ge 60184$ gelten die expliziten Schranken

$$\frac{n}{\ln n - 1.0} \;<\; \pi(n) \;<\; \frac{n}{\ln n - 1.1}$$

Kontinuierliche Gleichverteilung auf dem Raum $\mathbb{R}^n$

Beispiel: Jede messbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ definiert einen Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathscr{A}, \mu)$ mit der Borel–Algebra $\mathscr{A}$ und hierauf dem Maß

$$\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty] : A \mapsto \mu(A) := \int_A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Daraus erhalten wir gemäß I2F den BWRaum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathbf{P})$ mit $\mathscr{B} := \{ B \in \mathscr{A} \mid 0 < \mu(B) < \infty \}$ und $\mathbf{P}(A|B) = \mu(A \cap B)/\mu(B)$.

Die konstante Funktion $f = 1$ beschreibt die Gleichverteilung auf $\mathbb{R}^n$, also das Lebesgue–Maß $\mu = \mathrm{vol}_n$. Es ist nicht endlich, daher existiert auf dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ kein WMaß für die Gleichverteilung. Doch als Ersatz existiert immerhin das oben erkläre BWMaß $\mathbf{P}$.

Der Lebesgue–Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathscr{A}, \mu)$ ist unendlich, doch σ–endlich. Somit geht keine Information verloren, die WMaße $\mathbf{P}(-|B)$ mit $B \in \mathscr{B}$ beschreiben das Gesamtmaß μ bis auf einen konstanten Faktor. Übung: Formulieren Sie dies als Satz und beweisen sie ihn.

Diskrete Gleichverteilung auf einer Menge Ω

Beispiel: Sei Ω eine Menge. Jede Funktion $m : \Omega \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ definiert einen Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ mit der Potenzmenge $\mathscr{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ und dem Maß

$$\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty] : A \mapsto \mu(A) := \sum_{x \in \Omega} m(x).$$

Daraus erhalten wir gemäß I2F den BWRaum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathbf{P})$ mit $\mathscr{B} := \{ B \in \mathscr{A} \mid 0 < \mu(B) < \infty \}$ und $\mathbf{P}(A|B) = \mu(A \cap B)/\mu(B)$.

Die konstante Funktion $m = 1$ beschreibt die Gleichverteilung auf Ω, also das Zählmaß $\mu = \sharp$. Es ist endlich gdw Ω endlich ist. Ist die Menge Ω unendlich, so existiert kein WMaß für die Gleichverteilung auf Ω. Doch als Ersatz existiert immerhin das oben erkläre BWMaß $\mathbf{P}$.

Der Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ist σ–endlich genau dann, wenn der Träger $\mathrm{supp}(m) := \{ x \in \Omega \mid m(x) > 0 \}$ des Maßes abzählbar ist. (Übung!) In diesem Falle geht keine Information verloren, die WMaße $\mathbf{P}(-|B)$ mit $B \in \mathscr{B}$ beschreiben das Gesamtmaß μ bis auf einen konstanten Faktor.

Bedingte Wahrscheinlichkeit dank Disintegration

Sei $T:(X,\mathscr{A},\mu)\to(Y,\mathscr{B},\nu)$ eine messbare Abbildung von Maßräumen. Eine **Disintegration** des Maßes μ bezüglich (T,ν) ist eine Abbildung $\mu':\mathscr{A}\times Y\to[0,\infty]:(A,y)\mapsto\mu'(A\mid y)=\mu'_y(A)$, sodass gilt:

1. Für jedes $y\in Y$ ist $\mu'_y:\mathscr{A}\to[0,\infty]:A\mapsto\mu'_y(A)$ ein Maß getragen auf $T^{-1}(y)$, also $\mu'_y(A)=0$ für $A\subseteq X\smallsetminus T^{-1}(y)$.
2. Für jedes $A\in\mathscr{A}$ ist $Y\to[0,\infty]:y\mapsto\mu'(A\mid y)$ messbar und erfüllt die Disintegrationsformel $\mu(A)=\int_{y\in Y}\mu'(A\mid y)\,\mathrm{d}\nu(y)$.

Ist μ ein WMaß, so auch das Bildmaß $\nu:=\mu\circ T^{-1}$ und μ'_y für (ν–fast) alle $y\in Y$. Wir nennen dann μ' die **bedingte Wkt** von μ bezüglich T.

Für jede messbare Funktion $f:X\to\bar{\mathbb{R}}=[-\infty,+\infty]$ gilt dann

$$\int_{x\in X}\big|f(x)\big|\,\mathrm{d}\mu(x)=\int_{y\in Y}\left[\int_{x\in T^{-1}(y)}\big|f(x)\big|\,\mathrm{d}\mu'(x\mid y)\right]\mathrm{d}\nu(y).$$

Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und dann gilt

$$\boxed{\int_{x\in X}f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\int_{y\in Y}\left[\int_{x\in T^{-1}(y)}f(x)\,\mathrm{d}\mu'(x\mid y)\right]\mathrm{d}\nu(y).}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit dank Disintegration

🙂 Für **endliche / diskrete Maße** ist diese Konstruktion elementar: Die bedingte Wkt μ' ist eine stochastische Matrix wie oben erklärt. Wir wollen allgemein bedingte Wkten und Erwartungen erklären. Es lohnt sich, hier möglichst allgemeine Maße zu behandeln.

Zunächst erlauben wir, zwei **beliebige Maße** μ auf $(X,\mathscr{A})$ und ν auf $(Y,\mathscr{B})$ zu vergleichen mittels einer beliebigen messbaren Abbildung $T:(X,\mathscr{A})\to(Y,\mathscr{B})$; wir verlangen keine WMaße oder $\nu=\mu\circ T^{-1}$. Die Beispiele zeigen vertraute Situationen der Integrationstheorie!

Besonders interessant sind WMaße $\mu\in[X,\mathscr{A}]$. Wir können dann das Bildmaß $\nu:=T_*\mu\in[Y,\mathscr{B}]$ betrachten. Nach Disintegration ist auch μ'_y ein WMaß für ν–fast alle $y\in Y$, nach Korrektur sogar für alle $y\in Y$. Wir nennen dann μ' die **bedingte Wkt** von μ bezüglich T.

Zur Betonung heißt μ' auch der **Erwartungskern** von μ bezüglich T. Dabei ist das WMaß μ'_y eindeutig festgelegt für ν–fast alle $y\in Y$. Disintegrationssatz: Die Existenz von μ' ist gesichert für gutartige Messräume, etwa vollständige metrische Räume mit Borel–σ–Algebra.

Bedingte Wahrscheinlichkeit dank Disintegration

Beispiel: Sei $T = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mu) \to (\mathbb{R}, \nu)$ mit Lebesgue–Maß $\nu = \mathrm{vol}_1$ und $\mu(]a, b]) = F(b) - F(a)$, etwa mit $F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathrm{AC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dann gilt $\mu'_y = f(y) \cdot \delta_y$ mit $f = F'$ für (ν–fast) alle $y \in \mathbb{R}$:

$$\mu(]a, b]) = F(b) - F(a) = \int_{y\in]a,b]} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{y\in]a,b]} \int_x f(y)\,\mathrm{d}\delta_y(x)\,\mathrm{d}y$$

🙂 Das ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI); ebenso für $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolut stetig bezüglich des Lebesgue–Maßes.

Beispiel: Sei $T = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : (\mathbb{R}^n, \mu) \to (\mathbb{R}^n, \nu)$ mit $\nu = \mathrm{vol}_n$ und $\mu = f \cdot \nu$, also $\mu(A) = \int_{x\in A} f(x)\,\mathrm{d}x$, etwa mit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dann gilt $\mu'_y = f(y) \cdot \delta_y$ für (ν–fast) alle $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\mu(A) = \int_{x\in A} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{y\in A} \int_x f(y)\,\mathrm{d}\delta_y(x)\,\mathrm{d}y$$

🙂 Der Satz von Radon–Nikodym klärt den Fall $T = \mathrm{id}$ allgemein; hierzu sei μ absolut stetig bezüglich ν, also $\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$.

Bedingte Wahrscheinlichkeit dank Disintegration

Beispiel: Seien $p, q \in \mathbb{N}$ und $n = p + q$. Wir betrachten die Projektion

$$T \;:\; (\mathbb{R}^n, \mathrm{vol}_n) \to (\mathbb{R}^p, \mathrm{vol}_p) \;:\; (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_p).$$

Dann gilt $\mu'_y = \mathrm{vol}_q$ für (fast) alle $y \in \mathbb{R}^p$.

🙂 Der Satz von Fubini–Tonelli klärt den Produktfall $X \times Y$ allgemein. Bei Abhängigkeit, etwa Markov–Ketten, entsteht ein Erwartungskern.

Beispiel: Wir zerlegen den $\mathbb{R}^n$ in konzentrische Sphären vermöge

$$T \;:\; (\mathbb{R}^n, \mu) \to (\mathbb{R}_{\ge 0}, \nu) \;:\; x \mapsto r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

mit $\mu = \mathrm{vol}_n$ und $\nu = \mathrm{vol}_1$. Dann ist μ'_r das sphärische Maß auf $r\mathbb{S}^{n-1}$.

🙂 Das ist die „Zwiebelintegration“ in sphärischen Koordinaten! Der Transformationssatz klärt $\mathscr{C}^1$–Koordinatenwechsel allgemein. Allgemein gilt hierzu die Coflächen-Formel [*coarea formula*].

🙂 Die Disintegration fasst zahlreiche vertraute Situationen zusammen. Speziell für die WTheorie und Spiele liefert sie uns bedingte Wkten!

Anwendungsbeispiel: Simultan-Poker mit zwei Karten

Zwei Spieler, $I = \{\, 1{=}\text{Alice},\ 2{=}\text{Bob} \,\}$, spielen Poker (stark vereinfacht): Der Geber gibt jedem Spieler i verdeckt eine Karte $\omega_i \in \Omega_i := \{0, 1\}$. Das entspricht dem Zufallszug $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega := \{00, 01, 10, 11\}$.

Der Mindesteinsatz ist α und der Höchsteinsatz β, wobei $0 < \alpha < \beta$. Spieler i spielt $s_i \in S_i := \{\, \mathrm{Lo}{=}\text{Mindesteinsatz}, \mathrm{Hi}{=}\text{Höchsteinsatz} \,\}$. Spielen beide verschieden, so gewinnt der Spieler mit Höchsteinsatz. Spielen beide gleich, so wird aufgedeckt, und die höhere Karte gewinnt.

Aufgabe: Explizieren Sie die Auszahlungen u bzw. $\bar u$ mit Zufallszug.

Lösung: Wir erhalten $u : \Omega \times S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Auszahlungen

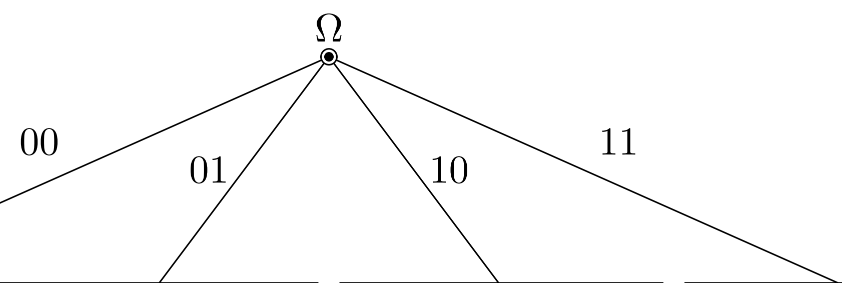
$$u_1(\omega, s_1, s_2) = -u_2(\omega, s_1, s_2) = \begin{cases} +\alpha & \text{falls } (s_1, s_2) = (\mathrm{Hi}, \mathrm{Lo}), \\ -\alpha & \text{falls } (s_1, s_2) = (\mathrm{Lo}, \mathrm{Hi}), \\ (\omega_1 - \omega_2)\alpha & \text{falls } (s_1, s_2) = (\mathrm{Lo}, \mathrm{Lo}), \\ (\omega_1 - \omega_2)\beta & \text{falls } (s_1, s_2) = (\mathrm{Hi}, \mathrm{Hi}). \end{cases}$$

Wenn die Spieler randomisieren dürfen, so wählt jeder $s_i \in \bar S_i = [\mathrm{Lo}, \mathrm{Hi}]$. Wir erhalten wie üblich die affine Fortsetzung $\bar u : \Omega \times \bar S_1 \times \bar S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Anwendungsbeispiel: Simultan-Poker mit zwei Karten

Aufgabe: Schreiben Sie für jede mögliche Kartenverteilung $\omega \in \Omega$ das Spiel $u^\omega : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (s_1, s_2) \mapsto u(\omega, s_1, s_2)$ als Bimatrix.

Lösung:



A \ B	Lo	Hi
Lo	0, 0	$-\alpha$, $+\alpha$
Hi	$+\alpha$, $-\alpha$	0, 0

A \ B	Lo	Hi
Lo	$-\alpha$, $+\alpha$	$-\alpha$, $+\alpha$
Hi	$+\alpha$, $-\alpha$	$-\beta$, $+\beta$

A \ B	Lo	Hi
Lo	$+\alpha$, $-\alpha$	$-\alpha$, $+\alpha$
Hi	$+\alpha$, $-\alpha$	$+\beta$, $-\beta$

A \ B	Lo	Hi
Lo	0, 0	$-\alpha$, $+\alpha$
Hi	$+\alpha$, $-\alpha$	0, 0

Dieses Spiel hat unvollständige Information: Die Auszahlungen sind nicht vollständig bekannt. Die Harsanyi–Transformation macht aus u das Spiel $\hat u$ mit vollständiger (aber weiterhin imperfekter) Information.

Anwendungsbeispiel: Simultan-Poker mit zwei Karten

Jeder Spieler wählt seine Strategie $\hat{s}_i : \Omega_i \to S_i : \omega_i \mapsto \hat{s}_i(\omega_i)$.
Er nutzt also die erweiterte Strategiemenge $\hat{S}_i := S_i^{\Omega_i} = \{ \hat{s}_i : \Omega_i \to S_i \}$.
Jede solche Abbildung $\hat{s}_i : \Omega_i \to S_i$ legt fest, wie der Spieler i die von ihm empfangene Karte $\omega_i \in \Omega_i$ in seine Aktion $\hat{s}_i(\omega_i) \in S_i$ übersetzt.
Für jeden Zufallszug $\omega \in \Omega$ ist damit der Verlauf des Spiels festgelegt.

Aufgabe: Welche Auszahlung $\hat{u}_i(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$ erwarten Alice und Bob?
Was sind demnach Gleichgewichte im so gemittelten Spiel $\hat{u}$?

Lösung: Spieler i fixiert seine Annahmen über die Kartenverteilung als ein WMaß $\mathbf{P}_i$ auf der Menge Ω. Die von i erwartete Auszahlung ist dann

$$\begin{aligned}\hat{u}_i(\hat{s}_1, \hat{s}_2) &:= \mathbf{E}_i\big[\omega \mapsto u_i(\omega, \hat{s}_1(\omega_1), \hat{s}_2(\omega_2)\big]\\ &= \textstyle\sum_{\omega\in\Omega} u_i(\omega, \hat{s}_1(\omega_1), \hat{s}_2(\omega_2)) \cdot \mathbf{P}_i(\omega)\end{aligned}$$

Wir erhalten so aus u und $\mathbf{P}_\bullet = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ das strategische Spiel

$$\hat{u} \;:\; \hat{S}_1 \times \hat{S}_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; (\hat{s}_1, \hat{s}_2) \mapsto \big(\,\hat{u}_1(\hat{s}_1, \hat{s}_2),\ \hat{u}_2(\hat{s}_1, \hat{s}_2)\,\big)$$

☺ Hier können wir unsere erprobten Lösungsmethoden anwenden, insb. dominante / dominierte Strategien und Nash–Gleichgewichte!

Anwendungsbeispiel: Simultan-Poker mit zwei Karten

Das Bayes–Spiel u enthält ein Zufallselement $\omega \in \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$:
Der Zufallszug ω geht entscheidend in die Auszahlungsfunktion u ein.
Daher erweitern wir die Strategiemenge S_i zu $\hat{S}_i := \{ \hat{s}_i : \Omega_i \to S_i \}$.
Durch Mittelwertbildung erhalten wir das deterministische Spiel $\hat{u}$.

Hierzu nutzt und benötigt jeder Spieler $i \in I$ sein WMaß $\mathbf{P}_i \in [\Omega]$.
Zur Vereinfachung der Spieldaten geht man oft von gemeinsamen Überzeugungen aus [*common prior*], also $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$. Das bedeutet anschaulich: Die Spieler sind sich einig, wie die Welt funktioniert.

Das ist jedoch nicht zwingend. Es herrscht Glaubensfreiheit, und ein jeder darf seine Erwartung berechnen wie er will. Wir diskutieren hier nicht, was jeder Spieler glaubt über den Glauben des anderen, etc.
Jedes Spiel u^ω ist ein Nullsummenspiel, $\hat{u}$ hingegen nicht immer!

Nash–Gleichgewicht bedeutet hier wie zuvor: Jeder Spieler kann seine Strategie (und seine Überzeugung) ebenso gut öffentlich bekanntgeben.
Die gegenseitige Kenntnis der Strategien ändert nicht das Verhalten:
Keiner der Spieler hat Anlass, seine Strategie zu ändern.

Anwendungsbeispiel: Simultan-Poker mit zwei Karten

Beispiel: Alice ist optimistisch und glaubt $\mathbf{P}_1(10) = \mathbf{P}_1(11) = 1/2$.
Ebenso ist Bob optimistisch und glaubt $\mathbf{P}_2(01) = \mathbf{P}_2(11) = 1/2$.

Aufgabe: Schreiben Sie hierzu das Spiel $2\hat{u}$ als Bimatrix. **Lösung:**

Alice \ Bob	LoLo	LoHi	HiLo	HiHi
LoLo	$+\alpha$, $+\alpha$	0, $+2\alpha$	$-\alpha$, $+\alpha$	-2α, $+2\alpha$
LoHi	$+2\alpha$, 0	$\boxed{+\alpha,\ +\alpha}$	$\alpha+\beta$, 0	$\boxed{+\beta,\ +\alpha}$
HiLo	$+\alpha$, $-\alpha$	0, $\alpha+\beta$	$-\alpha$, $-\alpha$	-2α, $\alpha+\beta$
HiHi	$+2\alpha$, -2α	$\boxed{+\alpha,\ +\beta}$	$\alpha+\beta$, -2α	$\boxed{+\beta,\ +\beta}$

Keine gemeinsame Überzeugung, kein Nullsummenspiel mehr!

Anwendungsbeispiel: Simultan-Poker mit zwei Karten

Beispiel: Alice hofft und glaubt $\mathbf{P}_1(00) = \mathbf{P}_1(10) = \mathbf{P}_1(11) = 1/3$.
Ebenso hofft Bob und glaubt $\mathbf{P}_2(00) = \mathbf{P}_2(01) = \mathbf{P}_2(11) = 1/3$.

Aufgabe: Schreiben Sie hierzu das Spiel $3\hat{u}$ als Bimatrix. **Lösung:**

Alice \ Bob	LoLo	LoHi	HiLo	HiHi
LoLo	$+\alpha$, $+\alpha$	$\dots$, $\dots$	$\dots$, $\dots$	-3α, $+3\alpha$
LoHi	$\dots$, $\dots$	$\dots$, $\dots$	$\dots$, $\dots$	$\dots$, $\dots$
HiLo	$\dots$, $\dots$	$\dots$, $\dots$	$\dots$, $\dots$	$\dots$, $\dots$
HiHi	$+3\alpha$, -3α	$\dots$, $\dots$	$\dots$, $\dots$	$+\beta$, $+\beta$

Keine gemeinsame Überzeugung, kein Nullsummenspiel mehr!

Anwendungsbeispiel: Simultan-Poker mit zwei Karten

Beispiel: Alice hofft und glaubt $\mathbf{P}_1(00) = \mathbf{P}_1(10) = \mathbf{P}_1(11) = 1/3$.
Bob ist pessimistisch glaubt $\mathbf{P}_2(00) = \mathbf{P}_2(10) = \mathbf{P}_2(11) = 1/3$.

Aufgabe: Schreiben Sie hierzu das Spiel $3\hat{u}$ als Bimatrix. **Lösung:**

Alice \ Bob	LoLo	LoHi	HiLo	HiHi
LoLo	$-\alpha$ / $+\alpha$	… / …	… / …	$+3\alpha$ / -3α
LoHi	… / …	… / …	… / …	… / …
HiLo	… / …	… / …	… / …	… / …
HiHi	-3α / $+3\alpha$	… / …	… / …	$-\beta$ / $+\beta$

Gemeinsame Überzeugung, wieder Nullsummenspiel!

Anwendungsbeispiel: Simultan-Poker mit zwei Karten

Beispiel: Beide Spieler glauben $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 =$ Gleichverteilung auf Ω.
Das präzisiert, was wir unter einer fairen Kartenverteilung verstehen.

Aufgabe: Schreiben Sie $4\hat{u}$ explizit als Bimatrixspiel aus. **Lösung:**

Alice \ Bob	LoLo	LoHi	HiLo	HiHi
LoLo	0 / 0	… / …	… / …	$+4\alpha$ / -4α
LoHi	… / …	… / …	… / …	… / …
HiLo	… / …	… / …	… / …	… / …
HiHi	-4α / $+4\alpha$	… / …	… / …	0 / 0

Gemeinsame Überzeugung, wieder Nullsummenspiel!

Anwendungsbeispiel: Simultan-Poker mit zwei Karten

Aufgabe: Beide Spieler glauben $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 =$ Gleichverteilung auf Ω. Jeder Spielertyp $j = (i, \theta)$ spielt eine gemischte Strategie $s_j \in [S_i]$. Finden Sie alle Nash–Gleichgewichte! Wann / Lohnt sich Bluffen?

Lösung: Wir rechnen im Typenmodell, (A, ω_1) gegen (B, ω_2):

Alice \ Bob	$B0 \mapsto \mathrm{Lo}$	$B0 \mapsto \mathrm{Hi}$	$B1 \mapsto \mathrm{Lo}$	$B1 \mapsto \mathrm{Hi}$
$A0 \mapsto \mathrm{Lo}$	0, 0	$-\alpha$, $+\alpha$	$-\alpha$, $+\alpha$	$-\alpha$, $+\alpha$
$A0 \mapsto \mathrm{Hi}$	$+\alpha$, $-\alpha$	0, 0	$+\alpha$, $-\alpha$	$-\beta$, $+\beta$
$A1 \mapsto \mathrm{Lo}$	$+\alpha$, $-\alpha$	$-\alpha$, $+\alpha$	0, 0	$-\alpha$, $+\alpha$
$A1 \mapsto \mathrm{Hi}$	$+\alpha$, $-\alpha$	$+\beta$, $-\beta$	$+\alpha$, $-\alpha$	0, 0

Jeder Spielertyp $A\theta$ und $B\theta$ kann eine gemischte Strategie spielen, geschrieben $A\theta \mapsto (1 - p_\theta)\mathrm{Lo} + p_\theta \mathrm{Hi}$ und $B\theta \mapsto (1 - q_\theta)\mathrm{Lo} + q_\theta \mathrm{Hi}$.

Anwendungsbeispiel: Simultan-Poker mit zwei Karten

Wir lassen Spielertypen mit ihren Strategien gegeneinander antreten:

- $A0$ vs $B0$ ergibt: $u_1 = -u_2 = +\alpha p_0 - \alpha q_0$
- $A1$ vs $B1$ ergibt: $u_1 = -u_2 = +\alpha p_1 - \alpha q_1$
- $A0$ vs $B1$ ergibt: $u_1 = -u_2 = +2\alpha p_0 - (\alpha + \beta) p_0 q_1 - \alpha$
- $A1$ vs $B0$ ergibt: $u_1 = -u_2 = -2\alpha q_0 + (\alpha + \beta) p_1 q_0 + \alpha$

Jeder Spielertyp nutzt nun seine bedingte Wkt, hier Gleichverteilung:

- $A1$ vs B ergibt: $2u_1 = p_1[\alpha + (\alpha + \beta) q_0] - 2\alpha q_0 - \alpha q_1 + \alpha$
  Spielertyp $A1$ maximiert u_1: Wegen $[\alpha + (\alpha + \beta) q_0] > 0$ gilt $p_1 = 1$.
  Anschaulich: Bei guter Hand ist es strikt dominant, hoch zu pokern.
- $A0$ vs B ergibt: $2u_1 = p_0[3\alpha - (\alpha + \beta) q_1] - \alpha q_0 - \alpha$
  Spielertyp $A0$ maximiert u_1: Wenn $q_1 \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} \dfrac{3\alpha}{\alpha + \beta}$, dann $p_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ ? \\ 1 \end{Bmatrix}$.

Dasselbe gilt mit vertauschten Rollen von p und q.

Anwendungsbeispiel: Simultan-Poker mit zwei Karten

Jeder Spielertyp maximiert seine Auszahlung:

$$\boxed{\frac{p_1}{q_1} = 1 \quad \& \quad \frac{p_1}{q_1} \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} \frac{3\alpha}{\alpha+\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{q_0}{p_0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ ? \\ 1 \end{Bmatrix}}$$

Je nach Parameterlage $0 < \alpha < \beta$ unterscheiden wir drei Fälle:

- Sei $2\alpha < \beta$: Aus $p_1 = 1 > \frac{3\alpha}{\alpha+\beta}$ folgt $q_0 = 0$. Aus $q_1 = 1$ folgt $p_0 = 0$. Einziges Gleichgewicht ist $(p_0, p_1; q_0, q_1) = (0, 1; 0, 1)$. *Alle ehrlich!*
- Sei $\beta < 2\alpha$: Aus $p_1 = 1 < \frac{3\alpha}{\alpha+\beta}$ folgt $q_0 = 1$. Aus $q_1 = 1$ folgt $p_0 = 1$. Einziges Gleichgewicht ist $(p_0, p_1; q_0, q_1) = (1, 1; 1, 1)$. *Always hi!*
- Sei $\beta = 2\alpha$. Aus $p_1 = 1 = \frac{3\alpha}{\alpha+\beta}$ folgt $q_0 = ?$. Aus $q_1 = 1$ folgt $p_0 = ?$. Gleichgewichte sind $(p_0, p_1; q_0, q_1) = (?, 1; ?, 1)$. *Bluff ist möglich!*

☺ Das löst Simultan-Poker für zwei Personen und zwei Karten. Das ist zwar nur der allereinfachste Fall, wahrlich noch zu simpel, doch immerhin kennen wir jetzt genau die optimale Strategie!

Anwendungsbeispiel: Simultan-Poker mit zwei Karten

☺ Die Rechnungen sind etwas länglich, aber vollkommen elementar. Die berechneten Antworten sind vermutlich nicht anschaulich erratbar. Versuchen Sie, alles nachzurechnen und anschaulich zu erklären: Wie begründen Sie den Übergang von $\beta < 2\alpha$ zu $\beta > 2\alpha$?

☺ Das Spiel wird wesentlich interessanter mit drei oder mehr Karten, mit Gleichverteilung auf $\Omega_1 = \Omega_2 = \{1, 2, \dots, k\}$ und $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ oder Ziehung ohne Zurücklegen aus der Kartenmenge $\Omega = \{1, 2, \dots, k\}$. Das Modell ähnelt damit immer besser realen Pokerspielen.

☹ Bei Zwei-Karten-Poker ist Bluffen zwar in Spezialfällen möglich, es bringt aber keinen spürbaren Vorteil. Erst bei drei oder mehr Karten ist Bluffen lukrativ, sogar zwingend erforderlich zur Gewinnmaximierung.

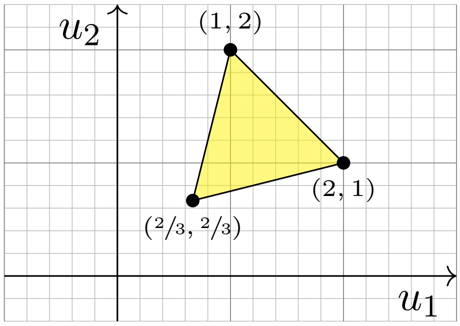
Übung: Formulieren Sie die Ungleichungen für Poker mit k Karten. Rechnen Sie Drei-Karten-Poker ($k = 3$) explizit aus, evtl. numerisch.

Übung: Untersuchen Sie schließlich das kontinuierliche Pokerspiel mit Gleichverteilung auf Intervallen $\Omega_1 = \Omega_2 = [0, 1]$ und $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

Korrelierte Strategien: Bach oder Strawinsky

Bislang nahmen wir an, dass Spieler nicht miteinander kommunizieren dürfen / können / wollen. Nützt Kommunikation vor dem Spiel? Wie?

A \ B	Bach	Straw
Bach	A: 1, B: 2	A: 0, B: 0
Straw	A: 0, B: 0	A: 2, B: 1



A \ B	Bach ($2/3$)	Straw ($1/3$)
Bach ($1/3$)	A: 1, B: 2 ($2/9$)	A: 0, B: 0 ($1/9$)
Straw ($2/3$)	A: 0, B: 0 ($4/9$)	A: 2, B: 1 ($2/9$)

Produktmaß: unabhängig

A \ B	Bach ($1/2$)	Straw ($1/2$)
Bach ($1/2$)	A: 1, B: 2 ($1/2$)	A: 0, B: 0 (0)
Straw ($1/2$)	A: 0, B: 0 (0)	A: 2, B: 1 ($1/2$)

stochastisch abhängig / korreliert

Korrelierte Strategien: Bach oder Strawinsky

Als erstes, sehr einfaches Beispiel betrachten wir Bach-oder-Strawinsky. Gleichgewichte von $\bar{u}$ sind $(\text{Bach}, \text{Bach})$ und $(\text{Strawinsky}, \text{Strawinsky})$ sowie gemischt $\left(\frac{1}{3} \cdot \text{Bach} + \frac{2}{3} \cdot \text{Strawinsky},\ \frac{2}{3} \cdot \text{Bach} + \frac{1}{3} \cdot \text{Strawinsky}\right)$. Jede dieser Vereinbarung ist stabil [*self enforcing*]: Nash–Gleichgewicht!

Für die Kommunikation vor dem Spiel bedeutet das ganz konkret: Wenn die Spieler sich auf eine solche Vorgehensweise absprechen, dann gibt es während des Spiels keinen Anreiz, davon abzuweichen. Stabile Vereinbarungen sind somit vernünftig und realistisch möglich.

Umgekehrt betrachtet: Alle anderen Vereinbarungen sind unrealistisch, denn alle wissen, sobald die Spieler den Verhandlungstisch verlassen, spürt mindestens einer den Anreiz, die Vereinbarung zu brechen. Instabile Vereinbarungen sind nicht glaubwürdig oder diskussionswürdig.

Einzig mögliche Ausnahme wäre, dass der Anreiz mangels Rationalität nicht erkannt wird. Solche Absprachen kommen real immer wieder vor: Kurzfristig Aufschwätzen ist keine nachhaltig tragfähige Abmachung. (Schönreden, über den Tisch ziehen, Haustürgeschäft, Rücktritt)

Korrelierte Strategien: Bach oder Strawinsky

Die Spieler können einen Unparteiischen bitten, eine Münze zu werfen, allgemein eine Zufallsvariable $s : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathrm{NE}(\bar{u}) : \omega \mapsto (s_1(\omega), s_2(\omega))$. Jedes so ausgeloste Strategiepaar ist stabil, da Nash–Gleichgewicht! Damit erreichen die Spieler die **konvexe Hülle** aller NE-Auszahlungen.

Dasselbe Signal $\omega \in \Omega$ muss hierzu beiden Spielern zugänglich sein, um daraus die vereinbarte Strategie $s_1(\omega)$ und $s_2(\omega)$ zu bestimmen. Wenn die Spieler sich auf eine solche Vorgehensweise absprechen, dann gibt es während des Spiels keinen Anreiz, davon abzuweichen.

Hierzu muss ein verlässlicher Signalgeber gefunden werden, dem beide Spieler vertrauen. Das muss vorab schon in den Verhandlungen geklärt werden, denn jede mögliche Auslosung soll anschließend von beiden akzeptiert werden. Im Zweifel können Abmachungen zerbrechen.

Geht vielleicht noch mehr? Geometrisch gesehen passiert folgendes: Die Strategiemenge S_i wird zum Simplex $\bar{S}_i = [S_i]$, also WMaßen auf S_i; $S = S_1 \times \dots \times S_n$ wird zu $\bar{S} = [S_1] \times \dots \times [S_n]$, also Produktmaßen; dank Absprache zu $[S_1 \times \dots \times S_n]$, also beliebigen WMaßen auf S.

Korrelierte Strategien: Bach oder Strawinsky

⚠ Die **Absprache** vor dem Spiel ist während des Spiels nicht bindend. Das Spiel u bleibt unverändert, insbesondere erweitern wir es hier nicht um eine Belohnung / Bestrafung oder Gerichtsbarkeit für Abmachungen. Absprachen müssen im Spiel stabil sein, also ein Nash–Gleichgewicht.

Was interessiert mich mein törichtes Geschwätz von gestern?
Es kann mich doch niemand daran hindern, jeden Tag klüger zu werden.
Konrad Adenauer (1876–1967) zugeschrieben

Lässt sich mehr erreichen als die konvexe Hülle $[\mathrm{NE}(\bar{u})]$? Sicher nicht durch ein einziges Signal $\omega \in \Omega$, das für alle gleichermaßen sichtbar ist. Das kann jedoch gelingen, wenn jeder Spieler sein eigenes Signal $T_i(\omega)$ vom Signalgeber erhält. Diese einfache doch geniale Idee stammt von Robert Aumann 1974 und führt zu **korrelierten Gleichgewichten**.

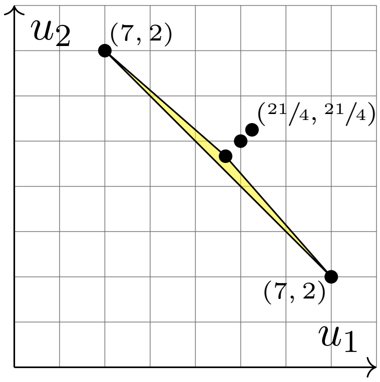
Anschaulich gesagt, besteht Aumanns Idee aus folgendem Trick: Die Spieler können künstlich ein Zufallselement einführen sowie unvollständige Information, und somit neue Gleichgewichte kreieren. Wir zeigen zunächst an Beispielen, dass dies tatsächlich helfen kann!

Korrelierte Strategien: Chicken Game

Aufgabe: Analysieren Sie das *Chicken-Game* / *Feige-oder-mutig*.

A \ B	feige ($2/3$)	mutig ($1/3$)
feige ($2/3$)	6, 6, ($4/9$)	2, 7, ($2/9$)
mutig ($1/3$)	7, 2, ($2/9$)	0, 0, ($1/9$)

Produktmaß: unabhängig



A \ B	feige ($2/3$)	mutig ($1/3$)
feige ($2/3$)	6, 6, ($1/3$)	2, 7, ($1/3$)
mutig ($1/3$)	7, 2, ($1/3$)	0, 0, (0)

stochastisch abhängig / korreliert

A \ B	feige ($3/4$)	mutig ($1/4$)
feige ($3/4$)	6, 6, ($1/2$)	2, 7, ($1/4$)
mutig ($1/4$)	7, 2, ($1/4$)	0, 0, (0)

stochastisch abhängig / korreliert

Korrelierte Strategien: Chicken Game

Lösung: (1) Gleichgewichte von $\bar{u}$ sind $($feige, mutig$)$ und $($mutig, feige$)$ sowie gemischt ($\frac{2}{3}$feige $+$ $\frac{1}{3}$mutig, $\frac{2}{3}$feige $+$ $\frac{1}{3}$mutig) mit Auszahlungen $(2,7)$ und $(7,2)$ sowie $(14/3, 14/3)$. Hier $14/3 \approx 4.66 > 4.5 = (7+2)/2$. Jede dieser Vereinbarung ist selbst-stabilisierend [*self enforcing*], denn keiner hat einen Vorteil davon, einseitig abzuweichen.

(2) Ein unparteiischer Signalgeber [engl. *signalling device*] lost eines von drei Paaren aus gemäß der Gleichverteilung $\frac{1}{3}(\mathrm{f},\mathrm{f}) + \frac{1}{3}(\mathrm{f},\mathrm{m}) + \frac{1}{3}(\mathrm{m},\mathrm{f})$ und empfiehlt jedem Spieler seine Strategie: nur diese, sonst nichts! Jeder Spieler kennt das WMaß vollständig, die Ziehung nur teilweise.

Behauptung: Es lohnt sich für jeden Spieler, der Empfehlung zu folgen. Genauer gesagt: Es lohnt sich nicht, von der Empfehlung abzuweichen.

Wir betrachten Spieler A: Sein Signal „mutig“ bedeutet B bekam „feige“; dies ist ein Nash–Gleichgewicht. Sein Signal „feige“ bedeutet B bekam „feige“ oder „mutig“ mit bedingter Wkt $\frac{1}{2}$feige $+$ $\frac{1}{2}$mutig. Spielt A „feige“, so erwartet er den Gewinn 4, spielt er „mutig“ nur 3.5. Demnach wird A strikt der Empfehlung folgen, genauso auch B. Die Auszahlung ist $(5,5)$.

🙂 Die Spieler überschreiten die konvexe Hülle aller NE-Auszahlungen! Das letzte Beispiel zeigt den Maximalfall mit Auszahlungen $(21/4, 21/4)$. Das werden wir auf Seite I317 mit dem Simplexverfahren nachrechnen.

(3) Ein unparteiischer Signalgeber lost wie zuvor eines von drei Paaren aus, diesmal gemäß der zweiten Verteilung $\frac{1}{2}(\mathsf{f},\mathsf{f}) + \frac{1}{4}(\mathsf{f},\mathsf{m}) + \frac{1}{4}(\mathsf{m},\mathsf{f})$ und empfiehlt jedem Spieler seine Strategie: nur diese, sonst nichts!

Behauptung: Es lohnt sich für jeden Spieler, der Empfehlung zu folgen. Genauer gesagt: Es lohnt sich nicht, von der Empfehlung abzuweichen.

Wir betrachten Spieler A: Sein Signal „mutig“ bedeutet B bekam „feige“; dies ist ein Nash–Gleichgewicht. Sein Signal „feige“ bedeutet B bekam „feige“ oder „mutig“ mit bedingter Wkt $\frac{2}{3}$feige $+$ $\frac{1}{3}$mutig. Spielt A „feige“, so erwartet er den Gewinn $14/3$, spielt er „mutig“ so auch. Demnach kann A der Empfehlung folgen, genauso B. Die Auszahlung ist $(5, 5)$.

🙂 Die Probe ist leicht: Es handelt sich um lineare Ungleichungen!

🙂 Selbst die Konstruktion ist leicht: als lineares Programm! (I317)

Korrelierte Gleichgewichte scheinen zunächst eine bizarre Konstruktion. Das Gegenteil ist der Fall: Wir nutzen sie ständig im Alltag, zum Beispiel um Symmetrien oder Pattsituationen per Losentscheid aufzulösen.

Beispiel: Wenn sich zwei Personen nicht über ihre Restaurantwahl (chinesisch oder italienisch) einigen, so können sie eine Münze werfen. Das entspricht genau der obigen Situation in Bach-oder-Strawinsky.

Beispiel: Wenn sich zwei Autofahrer an einer Kreuzung nicht einigen können, wer Vorfahrt hat, so können sie die Symmetrie / Pattsituation auflösen durch einen unparteiischen Signalgeber: eine Ampel!

Moment mal, sagen Sie, eine Ampel ist doch mehr als eine Empfehlung. Naja, eigentlich schon. Idealerweise ist der Signalgeber so konstruiert, dass die Empfehlung stabil ist [*self enforcing*]. Genau das ist unser Ziel: *„Vernünftige fahren hier nicht über Rot. Allen anderen ist es verboten.“*

🙂 Wir wollen / dürfen / können nicht das Spiel selbst ändern, sondern wir suchen nach Vereinbarungen, die innerhalb des Spiels stabil sind.

Korrelierte Strategien und Gleichgewichte

Gegeben sei ein endliches Spiel $u : S = \prod_{i \in I} S_i \to \mathbb{R}^I$ und $(\Omega, \mathbf{P}, T)$, ein endlicher WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$ mit Zufallsvariablen $T_i : \Omega \to \Omega_i$ für $i \in I$.

Jeder Spieler $i \in I$ beobachtet sein Signal $\omega_i = T_i(\omega) \in \Omega_i$ und wählt seine Aktion $s_i(\omega) = \hat{s}_i(\omega_i) \in S_i$, also $s_i = \hat{s}_i(T_i(\omega))$ mit $\hat{s}_i : \Omega_i \to S_i$.

Definition I3A: korrelierte Strategie über einem Signalgeber

Wir nennen $s : (\Omega, \mathbf{P}, T) \to S$ mit $s_i = \hat{s}_i \circ T_i$ eine **korrelierte Strategie**. Sie ist ein **korreliertes Gleichgewicht**, wenn für jeden Spieler $i \in I$ gilt:

$$\mathbf{E}\big[u_i(s_i; s_{-i})\big] \ge \mathbf{E}\big[u_i(s_i'; s_{-i})\big]$$

für jede Alternative $s_i' = \hat{s}_i' \circ T_i : \Omega \to S_i$, die nur vom Signal T_i abhängt.

Dies sind die Nash–Gleichgewichte in der Harsanyi–Transformierten. Ausgeschrieben vergleichen wir hier die erwarteten Auszahlungen

$$\sum_{\omega \in \Omega} u_i(s_i(\omega); s_{-i}(\omega)) \cdot \mathbf{P}(\omega) \ge \sum_{\omega \in \Omega} u_i(s_i'(\omega); s_{-i}(\omega)) \cdot \mathbf{P}(\omega).$$

Wir gehen dabei von der gemeinsamen Überzeugung $\mathbf{P} \in [\Omega]$ aus.

Korrelierte Strategien und Gleichgewichte

Die hier vorausgesetzte Endlichkeit dient als technische Vereinfachung. Allgemein haben wir einen WRaum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ und für jeden Spieler $i \in I$ eine messbare Abbildung $T_i : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\Omega_i, \mathscr{A}_i)$. Im diskreten Falle, wie hier angenommen, sind $\mathscr{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $\mathscr{A}_i = \mathfrak{P}(\Omega_i)$ die Potenzmengen.

Die Zufallsvariable $T_i : \Omega \to \Omega_i$ codiert die gesamte **Zusatzinformation**, die Spieler i zu Verfügung gestellt wird: Damit und nur damit arbeitet er. Sie definiert die Unteralgebra $\mathscr{B}_i := T_i^* \mathscr{A}_i = \{\, T_i^{-1}(A) \mid A \in \mathscr{A}_i \,\} \subseteq \mathscr{A}$: Wir nennen eine Abbildung $s_i : \Omega \to S_i$ **zulässig** für Spieler i, wenn sie $\mathscr{B}_i$–messbar ist. Dies ist äquivalent zu $s_i = \hat{s}_i \circ T_i$ mit $\hat{s}_i : (\Omega_i, \mathscr{A}_i) \to S_i$.

Gegeben sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}, \mathscr{B})$, also ein WRaum mit Unteralgebren $\mathscr{B}_i$. Wir nennen $s : (\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}, \mathscr{B}) \to S$ eine **korrelierte Strategie**, wenn jede Komponente s_i zulässig ist, also $s_i : (\Omega, \mathscr{B}_i) \to (S_i, \mathfrak{P}(S_i))$ messbar. Sie ist ein **korreliertes Gleichgewicht**, wenn die Ungleichung

$$\mathbf{E}\big[u_i(s_i; s_{-i})\big] \ge \mathbf{E}\big[u_i(s_i'; s_{-i})\big]$$

für jede zulässige Alternative $s_i' : \Omega \to S_i$ gilt. So geht es auch.

Korrelierte Gleichgewichte als Nash–Gleichgewichte

Gegeben sei ein endliches Spiel $u : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}^n$ und $(\Omega, \mathbf{P}, T)$. Wir erweitern jede Strategiemenge S_i zu $\hat{S}_i := S_i^{\Omega_i} = \{ \hat{s}_i : \Omega_i \to S_i \}$. Eine Abbildung $\hat{s}_i : \Omega_i \to S_i$ legt fest, wie der Spieler i jedes von ihm empfangene Signal $\omega_i \in \Omega_i$ in eine Strategie $\hat{s}_i(\omega_i) \in S_i$ übersetzt. Die Auszahlungen sind gegeben durch die obigen Erwartungswerte:

$$\hat{u}_i(\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_n) := \mathbf{E}\big[\omega \mapsto u_i(\hat{s}_1(T_1(\omega)), \dots, \hat{s}_n(T_n(\omega)))\big]$$

Proposition I3B: erweitertes Spiel über einem Signalgeber

Die korrelierten Strategien $s : (\Omega, \mathbf{P}, T) \to S$ des Spiels u entsprechen den Strategievektoren des erweiterten Spiels $\hat{u} : \hat{S} = \hat{S}_1 \times \cdots \times \hat{S}_n \to \mathbb{R}^n$.

Genau dann ist $\hat{s} = (\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_n)$ ein Nash–Gleichgewicht für das Spiel $\hat{u}$, wenn $s = \hat{s} \circ T : (\Omega, \mathbf{P}, T) \to S$ ein korreliertes Gleichgewicht für u ist.

☺ Nash–Gleichgewichte werden also nicht überflüssig, im Gegenteil, sie erscheinen hier in erweiterter Form: Korrelierte Gleichgewichte sind eine natürliche Erweiterung von Nash–Gleichgewichten. Das wird formal übersetzt, indem wir das ursprüngliche Spiel u zum Spiel $\hat{u}$ erweitern.

Korrelierte Gleichgewichte als Nash–Gleichgewichte

Die Spieler dürfen / können / wollen vor dem Spiel **kommunizieren**. Sie vereinbaren hierzu einen gemeinsamen **Signalgeber** $(\Omega, \mathbf{P}, T)$. Jeder Spieler bekommt sein individuelles Signal $T_i : \Omega \to \Omega_i : \omega \mapsto \omega_i$ und übersetzt dies mittels $\hat{s}_i : \Omega_i \to S_i$ in seine Aktion $\hat{s}_i(\omega_i) \in S_i$.

⚠ Während des Spiels bekommt Spieler i nur **seine Information** ω_i. Recht auf Information? nur auf Teilinformation! Frei nach Thomas de Maizière: „Ein Teil der Antwort würde die Bevölkerung verunsichern.“

⚠ Die Spieler wollen zwar kommunizieren und in diesem Rahmen kooperieren, aber sie sind nicht naiv und misstrauen einander weiterhin.

Während des Spiels ist jeder auf sich gestellt, es gibt keine bindenden Verträge oder verpflichtenden Verabredungen außerhalb des Spiels. Das koordinierende Signal ist daher zunächst nur eine **Empfehlung**.

☺ Die **Gleichgewichtsbedingung** stellt sicher, dass jeder Spieler der Empfehlung des Signalgebers wirklich folgen kann, gar muss. Die Ausformulierung dieser Bedingung für $s : (\Omega, \mathbf{P}, T) \to S$ führt uns erneut zu Nash–Gleichgewichten, diesmal für das erweiterte Spiel $\hat{u}$.

Korrelierte Strategien: universeller Signalgeber

Definition I3C: universeller Signalgeber

Wir betrachten weiterhin ein endliches Spiel $u : S = \prod_{i\in I} S_i \to \mathbb{R}^I$.
Das Produkt S kommt mit den Projektionen $\mathrm{pr}_i : S \to S_i : (s_j)_{j\in I} \mapsto s_i$.

Ein **universeller Signalgeber** $(S, \mathbf{P}, \mathrm{pr})$ ist ein WMaß $\mathbf{P} \in [S]$.
Hierzu gehört die korrelierte Strategie $\mathrm{id} : (S, \mathbf{P}, \mathrm{pr}) \to S$.
Sie ist ein **korreliertes Gleichgewicht**, wenn gilt:

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i(s_i; s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i}) \ge \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i(s_i'; s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i})$$

für jeden Spieler i und alle Strategien $s_i, s_i' \in S_i$. Wir schreiben hierfür

$$\boxed{\mathrm{CE}(u) := \left\{ \mathbf{P} \in [S] \;\middle|\; \mathbf{P} \text{ ist ein korreliertes Gleichgewicht von } u \right\}.}$$

☺ Genau so haben wir die eingangs gezeigten Beispiele *ad hoc* gelöst!
Es handelt sich jeweils um ein einfaches System linearer Ungleichungen.
Dividiert durch $\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \mathbf{P}(s_i; s_{-i})$ erhalten wir die bedingte Erwartung.

Korrelierte Strategien: universeller Signalgeber

Aufgabe: Warum ist die universelle Gleichgewichtsdefinition I3C äquivalent zur allgemeinen Gleichgewichtsdefinition I3A, also

$$(2) \qquad \sum\nolimits_{s\in S} u_i(s_i; s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i}) \ge \sum\nolimits_{s\in S} u_i(\alpha(s_i); s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i})$$

für alle Alternativen $\alpha : S_i \to S_i$ neben der Identität $\mathrm{id} : S_i \to S_i$?

Lösung: Es gilt „(1) ⇒ (2)“ dank Addition $\sum_{s_i\in S_i}$ der Ungleichungen

$$(1) \qquad \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i(s_i; s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i}) \ge \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i(\alpha(s_i); s_{-i}) \cdot \mathbf{P}(s_i; s_{-i}).$$

Wir zeigen die Umkehrung „(2) ⇒ (1)“ durch Kontraposition.
Angenommen in I3C gilt „$<$“ für mindestens ein Paar $s_i, s_i' \in S_i$.
Wir definieren $\alpha : S_i \to S_i$ durch $\alpha(s_i) = s_i'$ sowie $\alpha(s_i^*) = s_i^*$ für alle $s_i^* \in S_i \smallsetminus \{s_i\}$. Dann gilt in (2) ebenfalls „$<$“.

☺ Wir vermeiden hier geschickt bedingte Wkten und ersparen uns alle Fallunterscheidungen. Falls dies gewünscht ist, so können wir (1) durch $\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \mathbf{P}(s_i; s_{-i}) > 0$ dividieren und erhalten die bedingte Erwartung.

Korrelierte Strategien: universeller Signalgeber

Proposition I3D: Emulation durch universellen Signalgeber

Sei $u : S = \prod_{i \in I} S_i \to \mathbb{R}^I$ ein endliches Spiel. Jede korrelierte Strategie $s : (\Omega, \mathbf{P}, T) \to S$ können wir emulieren durch die universelle korrelierte Strategie $\mathrm{id} : (S, \mathbf{P}_s, \mathrm{pr}) \to S$ mit dem Bildmaß $\mathbf{P}_s(A) = \mathbf{P}(s^{-1}(A))$.

Ist $s : (\Omega, \mathbf{P}, T) \to S$ ein Gleichgewicht, so auch $\mathrm{id} : (S, \mathbf{P}_s, \mathrm{pr}) \to S$.

Aufgabe: (1) Rechnen Sie diese Aussage sorgfältig nach!
(2) Die Umkehrung gilt nicht. Finden Sie ein Gegenbeispiel!

Lösung: (1) Jede Alternative zu $(\mathrm{pr}_i)_{i \in I}$ liefert eine zu $(s_i)_{i \in I}$.
Ist also $(s_i)_{i \in I}$ ein korreliertes Gleichgewicht, dann auch $(\mathrm{pr}_i)_{i \in I}$.

(2) Wir betrachten $\Omega_i = \Omega$ und $T_i = \mathrm{id}_\Omega$, das heißt, jeder Spieler erhält vollständige Information über die Ziehung. Genau dann ist $s = (s_i)_{i \in I}$ ein korreliertes Gleichgewicht, wenn $s(\omega) \in \mathrm{NE}(u)$ für jedes $\omega \in \Omega$ gilt. Somit ist $\mathbf{P}_s \in [\mathrm{NE}(u)]$ Konvexkombination reiner Nash–Gleichgewichte. Wir haben jedoch oben bereits gesehen: Es gibt durchaus korrelierte Gleichgewichte $\mathrm{id} : (S, \mathbf{P}_s, \mathrm{pr}) \to S$, die darüber hinaus gehen!

Korrelierte Strategien: universeller Signalgeber

Im Vergleich zu einem allgemeinen Signalgeber $(\Omega, \mathbf{P}, T)$ sind im universellen Falle die Ergebnismenge $\Omega = S$ und die Zufallsvariablen $T_i = \mathrm{pr}_i$ festgelegt. Es kommt daher nur noch auf das WMaß $\mathbf{P}$ an. Das vereinfacht die Schreibweise und anschließende Untersuchung. Mit *einer* Rechnung haben wir *alle* erdenklichen Signalgeber abgedeckt.

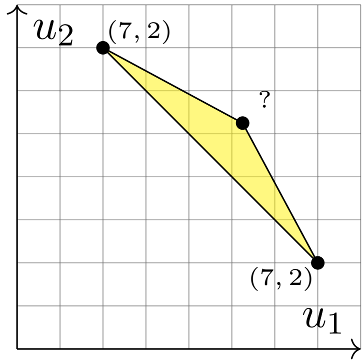
Die universelle Darstellung ist oft einfacher und übersichtlicher. Beliebige Signalgeber scheinen nur auf den ersten Blick allgemeiner: Wir können nämlich jede korrelierte Strategie $s : (\Omega, \mathbf{P}, T) \to S$ verlustfrei ersetzen durch die universelle korrelierte Strategie $\mathrm{id} : (S, \mathbf{P}_s, \mathrm{pr}) \to S$. Dank I3D gehen dabei keine korrelierten Gleichgewichte verloren.

Die allgemeine Formulierung der Signalgeber ist besonders flexibel, daher wollen wir die schöpferische Freiheit nicht unnötig einschränken. Die Umformulierung in das universelle Modell ist dennoch beruhigend, denn sie liefert uns eine klare, einheitliche und effiziente Datenstruktur: Im universellen Modell schreiben wir alle Wkten übersichtlich als Tabelle und überprüfen damit direkt und leicht die Gleichgewichtsbedingungen.

Berechnung von korrelierten Gleichgewichten

Aufgabe: Analysieren Sie das *Chicken-Game* / *Feige-oder-mutig*.

A \ B	feige	mutig
feige	x_0: A: 6, B: 6	x_1: A: 2, B: 7
mutig	x_2: A: 7, B: 2	A: 0, B: 0



Welche korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^2$ maximieren $u_1 + u_2$?
(1) Schreiben Sie das Problem explizit als ein lineares Programm.
(2) Finden Sie eine Lösung. Ist sie eindeutig? Finden Sie ein Zertifikat!

Ziel in (1) ist, die Ungleichungen der Definition I3C auszuschreiben. Anschließend löst der Simplex-Algorithmus routiniert das Problem (2). Dank Symmetrie können wir $x_1 = x_2$ setzen und so vereinfachen.

Die Zielfunktion ist etwas willkürlich, aber durchaus plausibel. Wir können ebenso u_1 maximieren oder u_2 maximieren.

Berechnung von korrelierten Gleichgewichten

(1) Wir erhalten folgendes System linearer Ungleichungen:

$$\begin{aligned} u = 12x_0 + 9x_1 + 9x_2 \to \max!, \quad & x_0 \ge 0, \quad y_0 = -x_0 + 2x_1 && \ge 0,\\ & x_1 \ge 0, \quad y_1 = -x_0 + 2x_2 && \ge 0,\\ & x_2 \ge 0, \quad y_2 = 1 - x_0 - x_1 - x_2 && \ge 0. \end{aligned}$$

(2) Wir schreiben dies als Tableau $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und lösen das LP:

	x_0	x_1	x_2	
y_0	-1	2	0	0
y_1	-1	0	2	0
y_2	-1	-1	-1	1
u	12	9	9	0

$\Longleftrightarrow$

	y_0	x_1	x_2	
x_0	-1	2	0	0
y_1	1	-2	2	0
y_2	1	-3	-1	1
u	-12	33	9	0

$\Longleftrightarrow$

	y_0	y_1	x_2	
x_0	0	-1	2	0
x_1	$1/2$	$-1/2$	1	0
y_2	$-1/2$	$3/2$	-4	1
u	$9/2$	$-33/2$	42	0

$\Longleftrightarrow$

	y_0	y_1	y_2	
x_0	$-1/4$	$-1/4$	$-1/2$	$1/2$
x_1	$3/8$	$-1/8$	$-1/4$	$1/4$
x_2	$-1/8$	$3/8$	$-1/4$	$1/4$
u	$-3/4$	$-3/4$	$-21/2$	$21/2$

Berechnung von korrelierten Gleichgewichten

Eine Lösung ist $x = (x_0, x_1, x_2)^\intercal = (1/2, 1/4, 1/4)^\intercal$. Sie ist eindeutig.
Beides können wir bequem am letzten Tableau ablesen: Es ist optimal.

Wurde richtig gerechnet? Zertifikat $y = (y_0, y_1, y_2) = (3/4, 3/4, 21/2)$.
Es gilt $x \ge 0$ und $Ax + b \ge 0$ sowie $y \ge 0$ und $yA + c \le 0$ mit $cx = yb$.

🙂 Auch hier können wir das Ergebnis schnell und sicher überprüfen.
Das ist mehr als ein einfacher Plausibilitätscheck, es ist ein Beweis!
Die ausführliche Rechnung benötigen wir, um die Lösung zu *finden*.
Anschließend können wir die Rechnung vergessen, das ist vielleicht schade, aber sie ist entbehrlich: Das Ergebnis ist nachweislich richtig!

Aufgabe: Lösen Sie ebenso folgende Varianten dieses Problems:
(3) Welche korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^2$ minimieren $u_1 + u_2$?
(4) Welche korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^2$ max/minimieren u_1?
(5) Welche korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^2$ max/minimieren u_2?
Finden Sie eine Lösung. Ist sie eindeutig? Finden Sie ein Zertifikat!

Lösung: Die obige Graphik suggeriert Ihnen jeweils die Lösung(en).
Wirkliche Sicherheit erlangen Sie nur durch eigenes Rechnen.

Berechnung von korrelierten Gleichgewichten

Wir variieren die vorige Aufgabe, indem wir die Vereinfachung $x_3 = 0$ fallen lassen und das allgemeine Problem untersuchen:

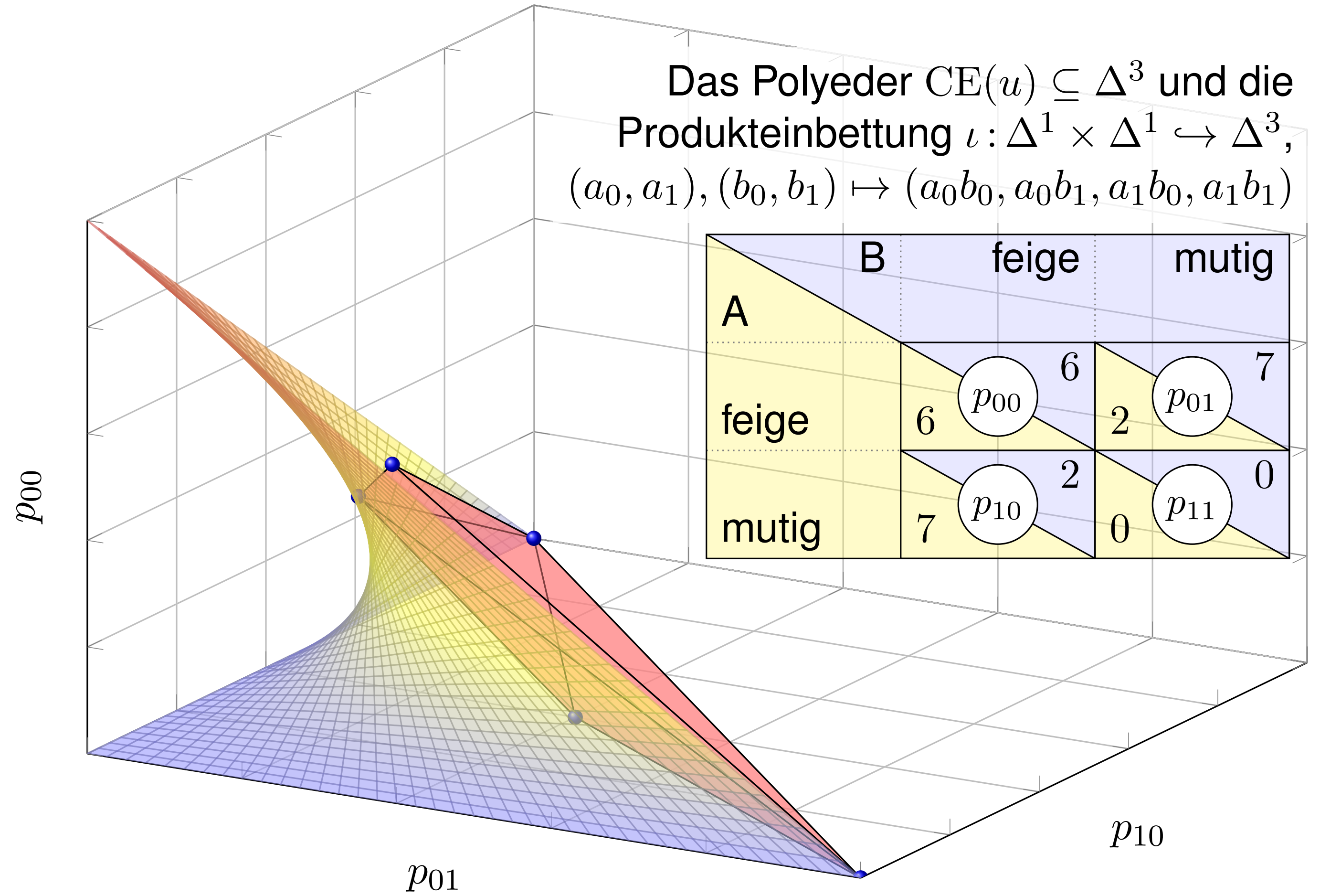
A \ B	feige	mutig
feige	6, x_0, 6	2, x_1, 7
mutig	7, x_2, 2	0, x_3, 0

Übung: Finden Sie alle korrelierten Gleichgewichte $x \in \Delta^3$, die
(1) $u_1 + u_2$ max/minimieren, ebenso (2) u_1 und symmetrisch (3) u_2.

Schreiben Sie das Problem explizit als ein lineares Programm.
Finden Sie eine Lösung. Ist sie eindeutig? Finden Sie ein Zertifikat!

Übung: Die Graphik auf Seite I321 zeigt das Polyeder $\mathrm{CE}(u) \subseteq \Delta^3$.
Bestimmen Sie explizit alle Ecken dieses Polyeders.

Nash–Gleichgewichte sind korrelierte Gleichgewichte.



Das Polyeder $\mathrm{CE}(u) \subseteq \Delta^3$ und die Produkteinbettung $\iota : \Delta^1 \times \Delta^1 \hookrightarrow \Delta^3$,
$(a_0, a_1), (b_0, b_1) \mapsto (a_0 b_0, a_0 b_1, a_1 b_0, a_1 b_1)$

A \ B	feige	mutig
feige	6, p_{00}, 6	2, p_{01}, 7
mutig	7, p_{10}, 2	0, p_{11}, 0

Nash–Gleichgewichte sind korrelierte Gleichgewichte.

Die Produkteinbettung $\iota : [S_1] \times \dots \times [S_n] \hookrightarrow [S_1 \times \dots \times S_n]$ ist n–linear. Speziell für $n = 2$ Spieler ist die Einbettung $\iota : \Delta^k \times \Delta^\ell \hookrightarrow \Delta^m$, genauer $\iota : [\{0, \dots, k\}] \times [\{0, \dots, \ell\}] \hookrightarrow [\{0, \dots, k\} \times \{0, \dots, \ell\}]$, gegeben durch

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_\ell \end{bmatrix} \quad \mapsto \quad p = a \cdot b^\intercal = \begin{bmatrix} a_0 b_0 & \dots & a_0 b_\ell \\ \vdots & & \\ a_k b_0 & \dots & a_k b_\ell \end{bmatrix}.$$

Sind umgekehrt die Wkten p_{ij} gegeben, dann lassen sich diese genau dann als Produktwkten darstellen, wenn die Matrix (p_{ij}) Rang ≤ 1 hat. Die Bildmenge im Simplex Δ^m erfüllt $p_{ii} p_{jj} - p_{ij} p_{ji} = 0$ für alle i, j.

Die obige Graphik zeigt die Bildmenge von ι für die Wkten p_{00}, p_{01}, p_{10}. Dies ist die Quadrik $p_{00} p_{11} - p_{01} p_{10} = 0$ mit $p_{11} = 1 - p_{00} - p_{01} - p_{10}$. Die Eigenwerte der darstellenden Matrix sind $0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, es handelt sich also um ein hyperbolisches Paraboloid. *Hasta la álgebra lineal siempre!*

Random fun fact: Diese Konstruktion entspricht genau der Einbettung $\iota : V_1 \times V_2 \hookrightarrow V_1 \otimes V_2$ von reinen Tensoren in das Tensorprodukt.

Nash–Gleichgewichte sind korrelierte Gleichgewichte.

🙂 Wir suchen korrelierte Gleichgewichte: Existieren Sie immer? Ja: Im folgenden Sinne enthalten die korrelierten alle Nash–Gleichgewichte!

Jeden gemischten Strategievektor $s = (s_1, \dots, s_n) \in \bar{S} = \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_n$ können wir darstellen als (un)korrelierte Strategie $\mathrm{id} : (S, \mathbf{P}_s, T) \to S$:

Jede Familie s gemischter Strategien $s_i = \sum_k p_i^k s_i^k \in \bar{S}_i$ definiert auf S das Produktmaß $\mathbf{P}_s : \mathfrak{P}(S) \to [0,1]$ mit $\{(s_1^{k_1}, \dots, s_n^{k_n})\} \mapsto p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$.

Satz I3E: Nash–Gleichgewichte sind korrelierte Gleichgewichte.

Genau dann ist $s \in \bar{S}$ ein Nash–Gleichgewicht des Spiels $\bar{u}$, wenn $\mathrm{id} : (\Omega, \mathbf{P}_s, T) \to S$ ein korreliertes Gleichgewicht von u ist.

🙂 Für die Einbettung $\iota : \bar{S} \hookrightarrow [S] : s \mapsto \mathbf{P}_s$ gilt also $\iota^{-1}\,\mathrm{CE}(u) = \mathrm{NE}(\bar{u})$.

Satz I3F: Konvexität und Auszahlungen

Die Menge $\mathrm{CE}(u) \subseteq [S]$ ist ein Polyeder und enthält $\iota\,\mathrm{NE}(\bar{u}) \neq \emptyset$. Ihr Bild unter $u : S \to \mathbb{R}^n$ ist das Polyeder $u\,\mathrm{CE}(u) \subset \mathbb{R}^n$ aller CE–Auszahlungen und umfasst alle NE–Auszahlungen.

Nash–Gleichgewichte sind korrelierte Gleichgewichte.

Aufgabe: Rechnen Sie beide Sätze zur Übung sorgfältig nach!

🙂 Korrelierte Gleichgewichte haben technische und praktische Vorteile! Alle Bedingungen sind lineare Un/Gleichungen, sie lassen sich daher durch Lineare Programmierung lösen, etwa per Simplexverfahren.

🙁 Dagegen sind Nash–Gleichgewichte leider recht widerspenstig. Zu lösen sind dort nicht-lineare (genauer n–lineare) Un/Gleichungen; dafür ist dann immerhin die Anzahl der freien Variablen deutlich kleiner.

🙂 Die Menge $\mathrm{NE}(\bar{u})$ der Nash–Gleichgewichte ist nicht-leer nach dem Existenzsatz von Nash (E1F). Sie ist aber im Allgemeinen nicht konvex, wie bereits einfache Beispiele zeigen, oben etwa *Bach oder Strawinsky*.

🙂 Korrelierte Gleichgewichte verhalten sich hier wesentlich besser. Im universellen Modell bilden alle korrelierten Gleichgewichte eine konvexe Menge, somit auch die zugehörigen Auszahlungen (I3F).

Jedes Nash–Gleichgewicht können wir als korreliertes darstellen (I3E). Somit ist auch die Menge der korrelierten Gleichgewichte nicht-leer!

Was lässt sich mit korrelierten Signalgebern erreichen, wenn alle Spieler dasselbe Signal bekommen? Wir nennen dies einen **transparenten Signalgeber** und können $(\Omega, \mathbf{P}, T)$ mit $T_i = \mathrm{id}_\Omega : \Omega \to \Omega$ annehmen.

Satz I3G: transparent korrelierte Gleichgewichte

Die Menge $T \subseteq \mathrm{CE}(u)$ der transparent korrelierten Gleichgewichte ist die konvexe Hülle der reinen Nash–Gleichgewichte, kurz $T = [\mathrm{NE}(u)]$.

Aufgabe: Zeigen Sie beide Inklusionen.

Lösung: „$\supseteq$“: Zu jeder Konvexkombination $t_0 s^0 + \ldots + t_k s^k$ reiner Nash–Gleichgewichte $s^0, \ldots, s^k \in \mathrm{NE}(u)$ konstruieren wir einen transparenten Signalgeber $(\Omega, \mathbf{P}, T)$, der $s^i \in S$ mit Wkt t^i auslost und empfiehlt. Dank $s^i \in \mathrm{NE}(u)$ ist dies ein korreliertes Gleichgewicht.

„$\subseteq$“: Wenn ein transparenter Signalgeber ein Strategiebündel $s \in S$ empfiehlt, so muss dies ein Nash–Gleichgewicht sein, also $s \in \mathrm{NE}(u)$. Andernfalls lohnt sich Abweichen für mindestens einen Spieler.

🙂 Dieser Satz ist wenig überraschend, dennoch lohnt es sich, ihn hier explizit auszuformulieren: Er betont die Wichtigkeit privater Information. Ohne private Information, mit Signalgebern ohne individuelle Signale, erhalten wir nur Konvexkombinationen reiner Nash–Gleichgewichte. Das allein ist schon nützlich, aber wenig bemerkenswert.

Aumanns geniale Idee beruht auf Zufall *und* unvollständiger Information! Erst dadurch erhalten wir eine wesentliche Erweiterung. Wie wir in den Beispielen sehen, ist diese Menge $\mathrm{CE}(u)$ im Allgemeinen echt größer als $[\mathrm{NE}(u)]$, sogar echt größer als $[\mathrm{NE}(\bar{u})]$, und dies schlägt sich auch in den möglichen Gleichgewichtsauszahlungen $u\,\mathrm{CE}(u) \subseteq \mathbb{R}^n$ nieder.

⚠ Echt gemischte Nash–Gleichgewichte $s \in \mathrm{NE}(\bar{u}) \smallsetminus \mathrm{NE}(u)$ können wir durch einen transparenten Signalgeber ebenfalls nicht erreichen: Jeder Spieler randomisiert unabhängig, das ist private Information. Wir denken an Matching Pennies oder Schere-Stein-Papier!

Aufgabe: Was bedeuten korrelierte Gleichgewichte für bedingte Wkten? Warum sollte ein Spieler der ihm signalisierten Empfehlung folgen?

Lösung: Wir betrachten einen universellen Signalgeber $(S, \mathbf{P}, \mathrm{pr})$. Dem Spieler i wird die Strategie $s_i \in S_i$ empfohlen mit der Wkt

$$\mathbf{P}_i(s_i) := \mathbf{P}\big(\{\, s \in S \mid \mathrm{pr}_i(s) = s_i \,\}\big).$$

Falls diese > 0 ausfällt, so erhalten wir auf S_{-i} die bedingte Wkt

$$\mathbf{P}_i^{s_i}(s_{-i}) := \mathbf{P}(s_i; s_{-i}) / \mathbf{P}_i(s_i).$$

Die Gleichgewichtsbedingung fordert für alle Alternativen $s_i' \in S_i$:

$$\mathbf{E}_i^{s_i}\big[u_i(s_i; s_{-i})\big] \ge \mathbf{E}_i^{s_i}\big[u_i(s_i'; s_{-i})\big]$$

Unter der Bedingung, dass Spieler i die Empfehlung $s_i \in S_i$ bekommt, ist es für ihn nicht vorteilhaft, eine andere Strategie $s_i' \in S_i$ zu spielen.

🙂 Diese Umformulierung entspricht dem Typenmodell aus Satz I2B.

Aufgabe: Bleiben korrelierte Gleichgewichte unter Isomorphismen erhalten? strikt? monoton? schwach monoton? affin? schwach affin?

Lösung: Schreiben Sie die geforderten Ungleichungen sorgfältig aus: Schwach affine Isomorphismen erhalten korrelierte Gleichgewichte, somit auch affine Isomorphismen, erst recht strikte Isomorphismen. Monotone Isomorphismen hingegen genügen hierzu nicht!

Aufgabe: Wie korrelieren sich schwach dominierte Strategien?

Lösung: Angenommen, es gilt $s_i' \ge_i^u s_i$ für ein Paar $s_i', s_i \in S_i$, also $u_i(s_i'; s_{-i}) \ge u_i(s_i; s_{-i})$ für alle Gegenstrategien $s_{-i} \in S_{-i}$. Gilt dann für ein $s_{-i} \in S_{-i}$ zudem strikt $u_i(s_i'; s_{-i}) > u_i(s_i; s_{-i})$, so folgt in jedem korrelierten Gleichgewicht $\mathbf{P}(s_i; s_{-i}) = 0$. In Worten: Auf dominierten Strategien liegt kein Gewicht.

Bemerkung: Schlägt der Signalgeber eine strikt dominierte Strategie vor, etwa im Gefangenendilemma, so wird der Spieler/typ zurecht davon abweichen. Die Wkt dieses Signals muss also 0 sein. Um die Diskrepanz zum Typenmodell zu heilen, können wir den Signalgeber trimmen (I203).

Aufgabe: Was ist der (formale / anschauliche) Unterschied zwischen korrelierten Gleichgewichten und Bayes–Gleichgewichten?

Lösung: (1) Ein Bayes–Spiel $\Gamma = (u, T, \mathbf{P})$ besteht aus einem Spiel

$$u \,:\, \Omega \times S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n$$

mit Signal $T_i : \Omega \twoheadrightarrow \Omega_i : \omega \mapsto \omega_i$ und WMaß $\mathbf{P}_i \in [\Omega]$ für jeden Spieler i. Die Harsanyi–Transformierte von Γ ist das strategische Spiel

$$\hat{u} \,:\, \hat{S}_1 \times \dots \times \hat{S}_n \to \mathbb{R}^n$$

mit den Strategiemengen $\hat{S}_i := \{\, \hat{s}_i : \Omega_i \to S_i \,\}$ und den Auszahlungen $\hat{u}_i((\hat{s}_k)_{k\in I}) := \mathbf{E}_i[\omega \mapsto u_i(\omega, (\hat{s}_k(\omega_k))_{k\in I})]$ als Erwartung bezüglich $\mathbf{P}_i$.

Bayes–Gleichgewichte von Γ sind Nash–Gleichgewichte von $\hat{u}$:

$$\boxed{\operatorname{BE}(u, T, \mathbf{P}) := \operatorname{NE}(\hat{u})}$$

In Worten: Unter der ihm zur Verfügung stehenden Information T_i hat kein Spieler $i \in I$ einen Anlass, seine Strategie $\hat{s}_i$ zu ändern.

(2) Für korrelierte Gleichgewichte betrachten wir ein Spiel

$$u \,:\, S = S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}^n.$$

Dies hängt nicht von irgendwelchen Zufallselementen $\omega \in \Omega$ ab, sondern deterministisch nur von den Aktionen der Spieler!

Der Zufall wird künstlich / willkürlich / zusätzlich in das Spiel eingeführt in Form eines Signalgebers. Ab da greift die Harsanyi–Transformierte (1):

Als Ergebnismenge nutzen wir $\Omega = S$ mit Signalen $T_i = \operatorname{pr}_i : S \to S_i$. Als erweiterte Strategie nutzen wir $\operatorname{id}_i : S_i \to S_i$ für $i \in I$. Dann gilt:

$$\boxed{\operatorname{CE}(u) = \left\{\, \mathbf{P} \in [S] \;\middle|\; \operatorname{id} \in \operatorname{BE}(u, \operatorname{pr}, \mathbf{P}) \,\right\}}$$

Slogan: Korrelierte Gleichgewichte sind die Bayes–Gleichgewichte von Spielen, deren Auszahlung u gar nicht vom Zufall abhängt.

Es ist überaus erstaunlich, dass diese Konstruktion etwas neues bringt. Die Beispiele belegen, dass dies tatsächlich spürbar weiterhelfen kann!

Bei korrelierten Gleichgewichten nutzen alle Spieler $i \in I$ gemeinsam einen Signalgeber $(\Omega, \mathbf{P})$ und ihre individuellen Signale $T_i \in \Omega \to \Omega_i$. Dabei gehen wir von einer gemeinsamen Überzeugung $\mathbf{P}$ aus.

Aufgabe: Nennen Sie Argumente (1) dafür und (2) dagegen.

Skizze: (1) Wir können uns vorstellen, dass der Signalgeber $(\Omega, \mathbf{P})$ und die Signale $T_i \in \Omega \to \Omega_i$ in Gesprächen vor dem Spiel sorgsam ausgehandelt werden: ein Unparteiischer, ein Zufallsgenerator oder geeignete Computersoftware. Es besteht zumindest die realistische *Möglichkeit*, dies für alle Spieler fair und transparent zu gestalten.

(2) Setzt der Signalgeber tatsächlich genau das um, was die Spieler zuvor ausgehandelt haben? Ein Unparteiischer kann bestochen werden. Ein Zufallsgenerator kann manipuliert werden. Computersoftware kann modifiziert / gehackt werden. Vertrauliche Signale können abgefangen / modifiziert / belauscht werden. Bei drei oder mehr Spielern können sich zudem Koalitionen bilden: Bündnis, Pakt, Kartell, Verschwörung, etc.

Sobald der Kenntnisstand der Spieler $i \in I$ über den Signalgeber Ω unterschiedlich ist, müssen wir individuelle WMaße $\mathbf{P}_i \in [\Omega]$ nutzen. Wie im ersten Teil dieses Kapitels erklärt: Das ist der allgemeine Rahmen von Bayes–Spielen ohne gemeinsame Überzeugung,

Wenn Alice die vereinbarte Software des Signalgebers hackt, dann hat sie eine genauere / bessere Kenntnis $\mathbf{P}_1$ als Bob mit $\mathbf{P}_2$. Ebenso, wenn Bob den zuvor vereinbarten Unparteiischen besticht, dann hat er eine genauere / bessere Kenntnis $\mathbf{P}_2$ als Alice mit $\mathbf{P}_1$.

Für korrelierte Gleichgewichte wollen wir gemeinsame Überzeugung. Wir müssen dabei wie immer sehr umsichtig unterscheiden zwischen der mathematischen Möglichkeit und der praktischen Umsetzung. Beide stellen hohe Anforderungen, und es lohnt sich!

Korrelierte Gleichgewichte bieten den Spielern in den Vorhandlungen vor dem Spiel neue Möglichkeiten, neue erweiterte Spielräume. Es lohnt sich, diese Möglichkeiten zu kennen und zu nutzen.

Empirie: zahlen oder schnorren?

Im **Casino Royal** (27.05.2022) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, Erfahrungen zu Spielen mit unvollständiger Information zu sammeln.

Elf wissbegierig-wagemutige Teilnehmer:innen trotzten dem Brückentag nach Himmelfahrt und versammelten sich zum wöchentlichen Casino.

Etwa die Hälfte davon hatte theoretisches Vorwissen aus der Vorlesung, das Kapitel zu Bayes–Spielen war vormittags gerade beendet worden.

Die Spieler:innen bilden zwei Teams und geben sich als erstes seriöse, traditionsreiche Firmennamen, A*: Stark Industries* und B*: LexCorp*. (Crossover MCU & DCEU? You saw it first at the Casino Royal!)

Beide Firmen profitieren von einem öffentlichen Gut, hier der Universität Asgard, die spieltheoretisch hochmotivierten Nachwuchs ausbildet. Wer die Weltherrschaft anstrebt, braucht fähige Mitarbeiter:innen!

Das öffentliche Gut bringt für jede der beiden Firmen 1000 €i$to Profit. Er entsteht jedoch nur, wenn mindestens eine zuvor darin investiert. Die Investitionskosten sind gleichverteilt in $\Omega = \{500, 550, \dots, 1000\}^2$. Jede Firma kennt nur ihre eigenen Kosten, als private Information.

Empirie: zahlen oder schnorren?

Zu Beginn jedes Spiels werden die Kosten $(x, y) \in \Omega$ zufällig ausgelost. Jede Firma bekommt geheim ihre Kosten x bzw. y mitgeteilt und wählt ebenso geheim ihre Aktion a bzw. b aus $\{0 = \text{schnorren}, 1 = \text{zahlen}\}$. Die Auszahlungen sind demnach $(\,(a \vee b)1000 - ax,\ (a \vee b)1000 - by\,)$.

Die Anwesenden haben bislang noch wenig Erfahrung in der Führung weltumspannender Firmen, doch die Problemlage ist allen vertraut von gemeinsamen Übungsblättern, allgemein Teamarbeit: Mindestens eine:r muss sich bemühen und Ressourcen investieren, dann profitieren beide.

Wie also soll man sich hier verhalten? Kooperation ist wünschenswert, kostet aber Ressourcen. Wenn die andere zahlt, dann ist es vorteilhaft zu schnorren. Aber es sollten nicht beide schnorren. Die Kosten für die Investition sind unterschiedlich und private Information jeder einzelnen.

Die mathematisch-spieltheoretische Frage wird in einer kommenden Übung analysiert. Zur Zeit des Casinos liegen zu diesem Problem weder theoretische Vorschläge noch empirisch-praktische Erfahrungen vor: ideale Bedingungen zum Experimentieren und Ausprobieren!

Empirie: zahlen oder schnorren?

Die ersten drei Spiele werden ohne gemeinsame Verhandlung gespielt. Jedes Team soll sich intern absprechen, um eine weise und profitable Entscheidung zu treffen, aber noch nicht die beiden Teams miteinander.

Spiel 1	$A:$	$550,$	zahlen	$\longrightarrow$	450
	$B:$	$700,$	schnorren	$\longrightarrow$	1000
Spiel 2	$A:$	$1000,$	schnorren	$\longrightarrow$	1000
	$B:$	$500,$	zahlen	$\longrightarrow$	500
Spiel 3	$A:$	$750,$	schnorren	$\longrightarrow$	0
	$B:$	$750,$	schnorren	$\longrightarrow$	0

Es entbrennt eine Grundsatzdebatte, ob diese Ziehungen zufällig sind. Wie kann man erkennen, ob eine Ziehung zufällig ist? im Nachhinein? Ist die Spielleiterin vertrauenswürdig? Gibt es den Zufall überhaupt?

Das sind sehr gute Fragen zu den Grundlagen der Wahrscheinlichkeit! So leidenschaftlich entflammen sie nur selten in den Vorlesungen zur WTheorie, aber erstaunlich häufig im Casino. Zufall? Ich glaube nicht!

Empirie: zahlen oder schnorren?

Die ersten Spiele bieten hilfreiche Erfahrungen. Insbesondere versagt im dritten Spiel die „unsichtbare Hand des Marktes“ und entfacht den Wunsch nach einer tragfähigen Absprache zum beiderseitigen Vorteil.

Vor jedem der nächsten Spiele dürfen sich die Firmen nun absprechen. Das gilt nicht während des Spiels! Jede Firma ist auf sich selbst gestellt, sobald ihre Kosten übermittelt sind und ihre Aktion entschieden wird.

Die lebhaften Verhandlungen sind ein bemerkenswertes Schauspiel! B: „Wir werden immer schnorren. Wenn ihr etwas verdienen möchtet, dann könnt ihr gerne zahlen.“ Veteranen nutzen ihre Erfahrung. Casino? Vorlesung? Dieses Vorgehen heißt *burning bridges*… oder *Erpressung*.

A: „Wir werden auch immer schnorren. Zudem versprechen wir euch hoch und heilig, am Ende die Einnahmen mit euch zu teilen.“ Raffiniert! Dieser Vorschlag öffnet als weitere Option sogenannte *Nebenzahlungen* [*side payments*] außerhalb des Spiels. Man nennt es auch *Bestechung*. Es ist innerhalb des Spiels nicht vorgesehen, also dort noch nicht formal implementiert, daher wird hier „hoch und heilig“ Ehrlichkeit versprochen.

Empirie: zahlen oder schnorren?

B: „Ich habe heute Morgen in der Vorlesung gelernt, wie es geht: Wir vereinbaren einen Signalgeber! Ich schlage vor, wir lassen einen Münzwurf entscheiden, wer zahlen muss und wer schnorren darf.“ Ich bin erschüttert, dass Vorlesungen tatsächlich *gehört* werden.

Die Verhandlungen bewegen sich rapide, so scheint es, auf eine gerechte und nachhaltige Einigung zu. Die Verhandlungsmacht ist jedoch nicht ganz gleich verteilt. Team A zieht daher einen letzten Trumpf aus dem Ärmel, um sich doch noch Vorteile zu erheischen.

A: „Drei aus eurem Team sind in meiner Übungsgruppe zur Analysis. Es wäre doch jammerschade, wenn unsere Zusammenarbeit leidet.“ Eine interessante Option außerhalb des Spiels... Ist diese Drohung ernst gemeint oder nur scherzhaft? *You can't make this stuff up!*

B: „Gut, wir kommen euch entgegen. Wir arbeiten ohne Signalgeber, sondern zahlen immer abwechselnd.“ A: „Einverstanden. Wir lassen einen Münzwurf entscheiden, wer mit dem Zahlen anfangen muss.“ Chapeau! Die Verhandlungen kommen zügig zu einem Ergebnis.

Empirie: zahlen oder schnorren?

Auch hier entsteht das Grundsatzproblem, wie man ohne gegenseitiges Vertrauen den Zufall entscheiden lassen kann, hier eine Münze werfen. Beide Teams einigen sich schnell auf eine pragmatische Lösung, Team A akzeptiert das (anerkannt zufällige) Ergebnis und geht in Vorleistung.

Spiel 4	$A:$	$900,$	zahlen	$\longrightarrow$	100
	$B:$	$550,$	schnorren	$\longrightarrow$	1000
Spiel 5	$A:$	$900,$	schnorren	$\longrightarrow$	1000
	$B:$	$750,$	zahlen	$\longrightarrow$	250
Spiel 6	$A:$	$550,$	zahlen	$\longrightarrow$	450
	$B:$	$900,$	schnorren	$\longrightarrow$	1000
Spiel 7	$A:$	$700,$	schnorren	$\longrightarrow$	1000
	$B:$	$650,$	zahlen	$\longrightarrow$	350

Die Verhandlungen waren aufschlussreich und erfreulich zielstrebig. Die so gefundene Vereinbarung hat sich anschließend bewährt.

Empirie: zahlen oder schnorren?

Die Zeiten werden härter. Die Investitionskosten sind nun gleichverteilt in $\Omega = \{0, 50, \dots, 2000\}^2$. Mit Wkt $1/2$ gibt es jeweils eine weitere Runde. Beide Teams wollen die bisher erfolgreiche Zusammenarbeit fortführen.

Spiel 8	$A:$	$1550,$	schnorren	$\longrightarrow$	0
	$B:$	$800,$	schnorren	$\longrightarrow$	0

Vertragsbruch! In den Verhandlungen klang alles noch vernünftig, doch als Team A die tatsächlichen Kosten vorliegen, wollen sie nicht zahlen. In Team B kochen die Emotionen hoch, wütende Vorwürfe werden laut: „Unser langjähriges Vertrauen wurde zerstört... Reputation... Moral...“ Ich gebe zu bedenken, dass vielleicht beide Teams gleiche Schuld trifft: Eine schlecht durchdachte Vereinbarung ist leider rational nicht haltbar.

Ein kühler Stratege möchte die Situation retten und schlägt eine weniger ambitionierte Abmachung vor, die dafür einfacher und stabiler sein soll. „Ich habe eben mit Wolfram Alpha die optimale Strategie ausgerechnet. Wer Kosten ≤ 650 hat, der zahlt. Wer Kosten ≥ 700 hat, der schnorrt.“

Empirie: zahlen oder schnorren?

Die Grenzziehung bedarf der Erklärung. Manche möchten die Rechnung selbst nachvollziehen, geben jedoch aus Zeitgründen auf. Nach kurzer Verhandlung vertrauen beide Teams dem Autoritätsargument.

Spiel 9	$A:$	$150,$	zahlen	$\longrightarrow$	850
	$B:$	$1450,$	schnorren	$\longrightarrow$	1000
Spiel 10	$A:$	$1000,$	schnorren	$\longrightarrow$	0
	$B:$	$1750,$	schnorren	$\longrightarrow$	0
Spiel 11	$A:$	$150,$	zahlen	$\longrightarrow$	850
	$B:$	$1050,$	schnorren	$\longrightarrow$	1000

Nach Spiel 11 entscheidet der Münzwurf das Ende. (Und die Zeit ist um.) Die Abmachung scheint praktikabel und stabil anwendbar. Leider bleibt dabei noch unklar, ob die Firmen damit wirklich am meisten rausholen. Ist die hier vorgeschlagene Grenze von 700 wirklich optimal gewählt? Ist es grundsätzlich noch besser, sich gemeinsam zu koordinieren?

Kapitel J

Dynamische Spiele und teilspielperfekte Gleichgewichte nach Reinhard Selten

The great successes of game theory in economics have arisen in large measure because game theory gives us a language for modelling and techniques for analyzing specific dynamic competitive interactions.

David M. Kreps, *Game Theory and Economic Modelling*

Inhalt dieses Kapitels J

Motivation und Überblick

In den vorigen Kapiteln haben wir **statische Spiele** untersucht.
Die strategische Normalform erlaubt eine konzise Beschreibung:

$$u \;:\; \prod_{i\in I} S_i \to \prod_{i\in I} R_i$$

Das entspricht Situationen, in denen die Akteure gleichzeitig handeln, oder zumindest in Unkenntnis des Handelns der anderen Akteure.

Für viele Spiele ist dieses spezielle Modell vollkommen angemessen, etwa Schere-Stein-Papier und viele der zuvor diskutierten Beispiele.

Für andere Spiele wiederum ist diese Beschreibung nicht realistisch: Spiele mit zeitlicher Struktur, in denen Spieler nacheinander ziehen und auf vorige Züge der Gegenspieler reagieren können / wollen / müssen.

Wir wenden uns nun dieser Erweiterung zu **dynamischen Spielen** zu. Ich beginne, wie immer, mit einführenden Beispielen. Diese sind sehr einfach, umreißen aber anschaulich Tragweite und Schwierigkeiten.

Anschließend werden wir diese Spiele formalisieren, dazu geeignete Lösungskonzepte präzisieren und mit ersten Anwendungen illustrieren.

Motivation und Überblick

Es ist keineswegs offensichtlich, wie wir die vielgestaltigen Einzelfälle in geeigneter **Beschreibung** zusammenfassen und formalisieren können.

Wir diskutieren dies anhand von zwei sehr ähnlichen Modellen:

1. Physikalische Vorbilder suggerieren ein dynamisches System unter dem Einfluss von Spieleraktionen und Zufallszügen.
2. Spielbäume führen zu dynamischen Spielen in extensiver Form. Diese Beschreibung ist in der Spieltheorie weit verbreitet.

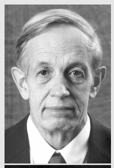
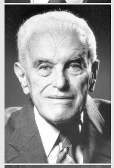
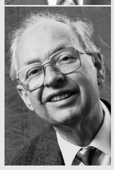
Ein wichtiger Schritt ist die Verfeinerung von Nash–Gleichgewichten zu **teilspielperfekten Gleichgewichten**. Damit können wir viele Konfliktsituationen realistisch modellieren und wesentlich genauer analysieren.

In endlichen Spielen hilft **Rückwärtsinduktion** J1D nach Ernst Zermelo, für unendliche Spiele das **Prinzip der einmaligen Abweichung** J2D.

Häufig haben Spieler nur **unvollständige Information**, und dies ist ein wichtiger Aspekt des Spiels. Hierzu will ich die ersten Begriffe einführen, aber eine genauere Untersuchung auf später verschieben.

Von statischen zu dynamischen Spielen

Info / Zeit	vollständige Info, deterministisch	unvollständige Info, probabilistisch
statisch, Normalform	Nash, $\mathrm{NE} \supseteq \mathrm{DNE}$	Harsanyi, $\mathrm{BE} \supseteq \mathrm{DBE}$
dynamisch, Extensivform	Selten, $\mathrm{PNE} \supseteq \mathrm{PDNE}$	Selten, $\mathrm{PBE} \supseteq \mathrm{PDBE}$

Nash, Harsanyi und Selten erhielten 1994 den Wirtschafts-Nobelpreis für ihre Pionierarbeit zu Gleichgewichten in nicht-kooperativen Spielen.

Das Kürzel NE steht für Nash–Gleichgewicht / *Nash equilibrium*, entsprechend BE für Bayes–Gleichgewicht / *Bayes equilibrium*. Das Präfix D steht für (schwach) dominant / *(weakly) dominant*, und P steht abkürzend für (teilspiel-)perfekt / *(subgame) perfect*.

Von statischen zu dynamischen Spielen

Wir führen in diesem Kapitel bewährte Ideen und Techniken zusammen, die in der Einführung (Kapitel A) bereits an Beispielen illustriert wurden:

In einem kombinatorischen Spiel (Kapitel C) ziehen zwei Spieler immer streng abwechselnd, das vereinfacht die Beschreibung und die Analyse. Wir wollen nun erlauben, dass auch gleichzeitig gezogen werden kann.

In einem Markov–Spiel (Kapitel D) spielt auch der Zufall eine Rolle. Zur Vereinfachung hatten wir zunächst nur einen Spieler zugelassen. Wir wollen nun zu mehreren Spielern übergehen, weiterhin mit Zufall.

Bei statischen Spielen (Kapitel E) haben wir mehrere Spieler, und diese ziehen gleichzeitig, wie in der Normalform $u : \prod_{i\in I} S^i \to \prod_{i\in I} R^i$ codiert. Damit können wir Nash–Gleichgewichte erklären und berechnen. Lineare Ungleichungen löst das Simplexverfahren (Kapitel F).

Unsere Modelle und Methoden sind zwar noch recht eingeschränkt, nichtsdestotrotz können wir sie bereits vielfältig und erfolgreich nutzen, etwa zur Untersuchung sozialer Dilemmata und evolutionärer Prozesse (Kapitel G) oder in Modellen überlappender Generationen (Kapitel H).

Von statischen zu dynamischen Spielen

J007
Erläuterung

Im vorigen Kapitel I haben wir unvollständige Information untersucht: In strategischen Situationen sind Wissen und Nichtwissen entscheidend. Für die Analyse von Spielen (und überall sonst) ist daher die Verteilung von Wissen und der Zugang zu Informationen von zentraler Bedeutung.

Bei vielen Spielen ist zudem der zeitliche Ablauf eine wichtige Struktur. Wir haben uns bislang auf statische / strategische Spiele konzentriert. In diesem und den nächsten Kapiteln entwickeln wir erste Werkzeuge für dynamische / sequentielle / wiederholte Spiele (in extensiver Form).

Es ist dabei ein großer Vorteil, bereits auf obige Erfahrungen zu bauen: Die bewährten Ideen und Techniken leisten uns weiterhin gute Dienste. In den folgenden Kapiteln wird diese Investition reiche Früchte tragen, denn wir können damit vielzählige Situationen beschreiben und lösen.

Dieser stufenweise Aufbau erfordert reichlich Geduld und Sorgfalt, um die nötigen Zutaten zu motivieren und die Techniken zu erklären. Sein großer didaktischer Vorteil ist ein natürliches Fortschreiten der Theorie und ein harmonisches Zusammenfügen ihrer Bausteine.

Von statischen zu dynamischen Spielen

J008
Erläuterung

Um unseren spieltheoretischen Rahmen frühzeitig zu vervollständigen, erkläre ich zum Schluss dieses Kapitels bereits die Grundstruktur und Leitideen zu dynamischen Spielen mit unvollständiger Information.

Die systematische Untersuchung dieser allgemeinen Problemstellung ist sehr viel umfangreicher und wird notgedrungen auf später verschoben. Immerhin können wir solche Situationen jetzt erkennen und benennen!

Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt.
Ludwig Wittgenstein (1889-1951), *Tractatus logico-philosophicus* (1921)

Damit erreichen wir eine einheitliche Darstellung gemäß obiger Tabelle von statischen / dynamischen Spiele mit un/vollständiger Information.

Das zugehörige Analysewerkzeug zur Problemstellung sind geeignete Lösungskonzepte: Nash–Gleichgewichte und ihre Verfeinerungen. Diese werden wir anschließend an Beispielen illustrieren und üben sowie in ersten Anwendungen erproben und weiterentwickeln.

Beispiel: einen Kuchen teilen

Aufgabe: Zwei Kinder, Alice und Bob, teilen sich einen Schokokuchen. Damit es gerecht zugeht, gibt der Vater vor: Alice teilt, Bob wählt aus.

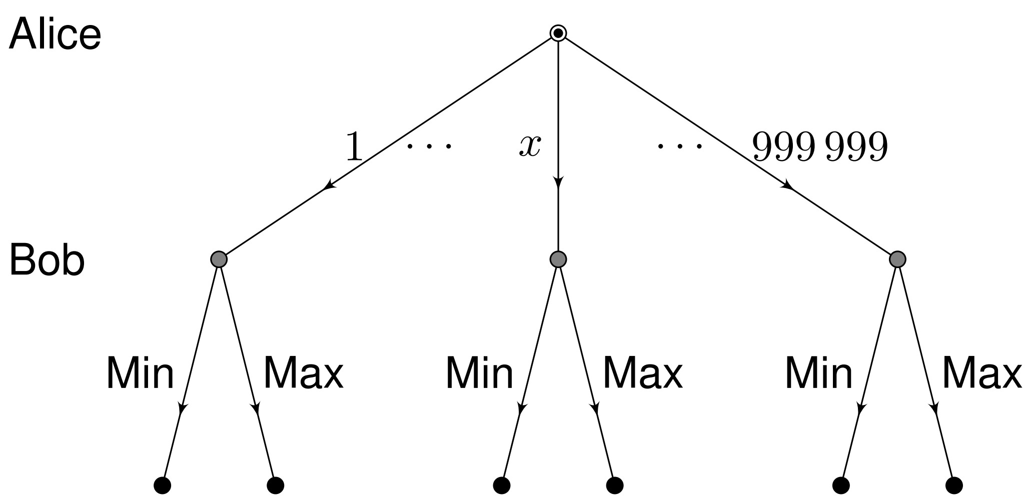
Formalisieren Sie dies als strategisches Spiel mit Strategiemengen $S^1 = \{1, 2, \dots, 999\,999\}$ für die Aufteilung $(1\,000\,000 - x, x)$ in mg und $S^2 = \{\text{wähle Min}, \text{wähle Max}\}$. Finden Sie alle Nash–Gleichgewichte!

Lösung: (1) Wir schreiben die Auszahlungsmatrix explizit aus:

Bob Alice	wähle das Minimum	wähle das Maximum
$x < 500\,000$	x $1\,000\,000 - x$	$1\,000\,000 - x$ x
$x = 500\,000$	$500\,000$ $500\,000$	$\boxed{500\,000}$ $\boxed{500\,000}$
$x > 500\,000$	$1\,000\,000 - x$ x	x $1\,000\,000 - x$

Beispiel: einen Kuchen teilen

(2) Wir können die zeitliche Struktur durch einen Spielbaum darstellen:



Blätter $=$ terminale Zustände $\mapsto$ Auszahlung

Ein Strategiepaar (s^1, s^2) legt für jede Ecke e den nächsten Zug fest. Jede Ecke e dieses Baumes definiert ein Teilspiel $u_e : S^1 \times S^2 \to \mathbb{R}^2$. Teilspielperfekt: Das Paar (s^1, s^2) ist ein Gleichgewicht für jede Ecke e. Das ermöglicht eine feinere Beschreibung, hier mit selbem Ergebnis.

Beispiel: ein Erbe teilen

Aufgabe: Alice und Bob erben $1\,000\,000$€ und müssen teilen. Alice bietet $x \in S^1 := \{1, 2, \dots, 999\,999\}$ für Bob, somit $1\,000\,000 - x$ für sich. Bob fordert $y \in S^2 := \{1, 2, \dots, 999\,999\}$ für sich. Bei Einigung ($x \ge y$) tritt die Aufteilung $(1\,000\,000 - x, x)$ in Kraft, andernfalls verfällt das Erbe.

(1) Formalisieren Sie dies als ein strategisches Spiel in Normalform. Finden Sie alle Nash–Gleichgewichte! Finden Sie alle Dominanzen. Was sind die Sicherheitsstrategien für Bob? für Alice?

Untersuchen Sie anschließend folgende dynamischen Varianten:
(2) Alice bietet zuerst, notariell / öffentlich und unwiderruflich.
(3) Bob fordert zuerst, notariell / öffentlich und unwiderruflich.

Lösung: (1) Die Auszahlung $v : S^1 \times S^2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$v(x, y) = \begin{cases} (1\,000\,000 - x, x) & \text{falls } x \ge y, \\ (0, 0) & \text{falls } x < y. \end{cases}$$

Jedes Paar $(x, y) \in S^1 \times S^2$ mit $x = y$ ist ein Nash–Gleichgewicht. Im Falle $x > y$ kann Alice sich verbessern, im Falle $x < y$ beide.

Beispiel: ein Erbe teilen

(2) Das Modell aus (1) erlaubt weder zeitliche Struktur noch Festlegung. Angenommen, Alice hat sich auf ein Angebot $(1\,000\,000 - x, x)$ festgelegt. Dann ist es für Bob rational, dieses zu akzeptieren, egal wie gering.

(3) Angenommen, Bob hat sich auf eine Forderung $\ge y$ festgelegt. Dann ist es für Alice rational, genau diese zu erfüllen, egal wie hoch. Hier ist die Verhandlungsmacht von Bob größer als die von Alice!

Wir gehen hier davon aus, dass Alice und Bob streng rational sind. Getreu dem Motto: „Wer den Euro nicht ehrt, ist das Erbe nicht wert.“

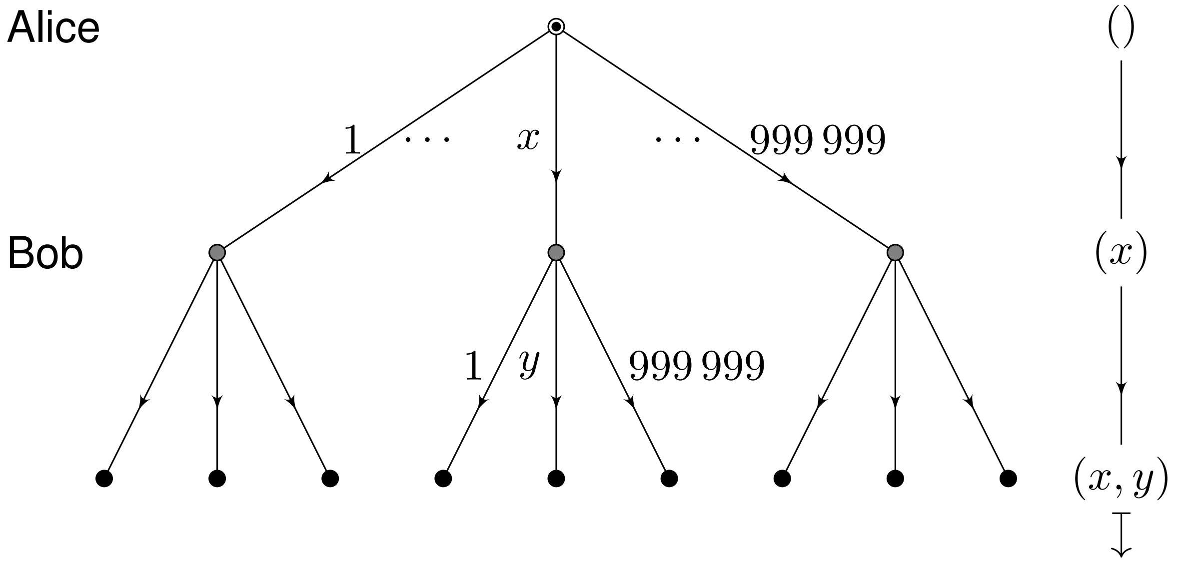
In realen Situationen werden beide verhandeln, appellieren und drohen. Liegen Angebot bzw. Forderung erst einmal fest, dann bleibt als einzige rationale Strategie nur noch, dieses zähneknirschend zu akzeptieren. Selbst ein kleiner Gewinn ist besser als gar kein Gewinn.

⚠ Die Analyse ergibt drei gänzlich unterschiedliche Ergebnisse.

Die zeitliche Struktur ist hier wesentlich. Dies wollen wir nun ebenfalls in unseren Modellen codieren und den Begriff des Nash–Gleichgewichts entsprechend verfeinern zu teilspielperfekten Gleichgewichten.

Beispiel: ein Erbe teilen

(2) Wir können die zeitliche Struktur durch einen Spielbaum darstellen:



Blätter $=$ terminale Zustände $\mapsto$ Auszahlung $\quad v(x,y)$

Ein Strategiepaar (s^1, s^2) legt für jede Ecke e den nächsten Zug fest.
Jede Ecke e dieses Baumes definiert ein Teilspiel $u_e : S^1 \times S^2 \to \mathbb{R}^2$.
Teilspielperfekt: Das Paar (s^1, s^2) ist ein Gleichgewicht für jede Ecke e.

Beispiel: ein Erbe teilen

Alice hat im ersten Zug die Aktionsmenge $A^1_{()} = A^1 = \{1, \dots, 999\,999\}$.
Im zweiten Zug schaut sie nur zu, demnach gilt $A^1_{(x)} = \{*\}$ für alle x.
Bob schaut im ersten Zug nur zu, also $A^2_{()} = \{*\}$. Im zweiten Zug hat Bob in jedem Zustand x die Aktionsmenge $A^2_{(x)} = A^2 = \{1, \dots, 999\,999\}$.

Alice wählt $s^1_{()} \in A^1_{()}$ und anschließend notgedrungen $s^1_{(x)} = * \in A^1_{(x)}$.
Bob wählt notgedrungen $s^2_{()} = * \in A^2_{()}$ und anschließend $s^2_{(x)} \in A^2_{(x)}$.

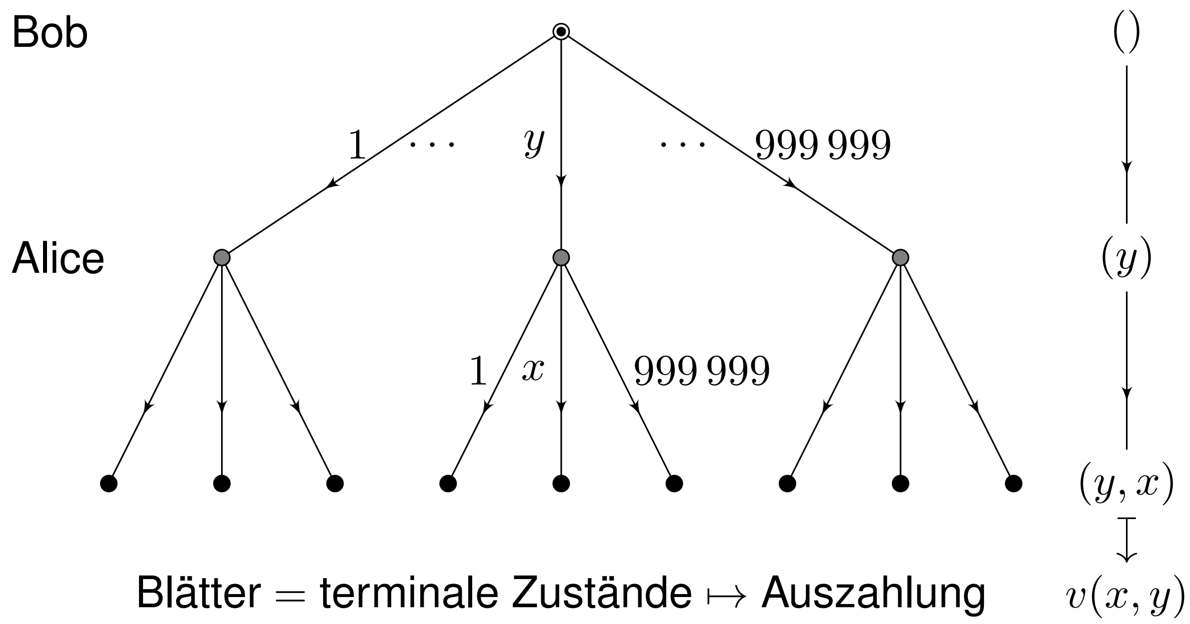
Bobs Strategie ist demnach eine Abbildung $s^2 : A^1 \to A^2 : x \mapsto s^2_{(x)}$.

Das Paar (s^1, s^2) bestimmt den Spielverlauf und die Auszahlung.

1. Was sind die Nash–Gleichgewichte (s^1, s^2) für das Spiel $u_{()}$?
   Alice bietet den kleinsten Betrag x, den Bob noch akzeptiert:
   Für $x = s^1_{()}$ gilt $s^2_{(x)} \le x$, aber für alle $y < x$ gilt $s^2_{(y)} > y$.
2. Was sind die Nash–Gleichgewichte (s^1, s^2) für das Teilspiel $u_{(x)}$?
   Für den vorgegebenen Startzustand (x) muss $s^2_{(x)} \le x$ gelten.
3. Was sind die teilspielperfekten Gleichgewichte (s^1, s^2)?
   Es gilt $s^2_{(x)} \le x$ für alle x und somit $s^1_{()} = 1$.

Beispiel: ein Erbe teilen

(3) Wir können die zeitliche Struktur durch einen Spielbaum darstellen:



Ein Strategiepaar (s^1, s^2) legt für jede Ecke e den nächsten Zug fest. Jede Ecke e dieses Baumes definiert ein Teilspiel $u_e : S^1 \times S^2 \to \mathbb{R}^2$. Teilspielperfekt: Das Paar (s^1, s^2) ist ein Gleichgewicht für jede Ecke e.

Beispiel: ein Erbe teilen

Aufgabe: Untersuchen Sie die drei Varianten des Erbschaftsspiels mit $S^1 = S^2 = \{0, 1, \dots, 1\,000\,000\}$. Die Randfälle sind etwas kniffliger.

Im Beispiel der Erbschaft ist es vorteilhaft, als erster am Zug zu sein: Der erste Spieler kann / muss sich festlegen und dabei frei entscheiden, der zweite kann dann nur noch reagieren und das Ergebnis akzeptieren. Hier ist es vorteilhaft voranzugehen und sich unwiderruflich festzulegen. Man nennt dies Selbstbindung, engl. *commitment* oder *burning bridges*.

Aufgabe: Untersuchen Sie weitere Spiele mit zeitlicher Struktur. Ist es immer vorteilhaft, als erster zu ziehen und sich festzulegen?

Lösung: Keineswegs! Bei *Schere-Stein-Papier* ist es extrem ungünstig, geradezu lächerlich, seine Strategie festzulegen und bekanntzugeben. Hingegen wäre es unproblematisch, wenn der erste Spieler seine Wahl festlegt (auslost), diese aber dem zweiten Spieler nicht bekannt gibt.

Aufgabe: Analysieren Sie die beiden vorigen Spielbäume mit der Variante, dass der zweite Spieler die Aktion des ersten nicht kennt. Anschaulich: Der Brief an den Notar bleibt zunächst geheim.

Beispiel: Investition und Rendite

Wir betrachten eine **Investition**, etwa ein Konto, Kredit, Fonds, o.ä.:

$$\text{Start } x_0, \quad \text{Dynamik } x_{t+1} = \begin{cases} x_t + r_t^+ x_t + a_t & \text{falls } x_t \ge 0, \\ x_t + r_t^- x_t + a_t & \text{falls } x_t \le 0. \end{cases}$$

Zustand: $x_t \in \mathbb{R}$ ist der Kontostand zu Beginn des Tages $t \in \mathbb{N}$.
Dynamik: Zinssatz $r_t^\pm \in \mathbb{R}$ am Tag t für Guthaben / Schulden.
Aktion: $a_t \in \mathbb{R}$ ist die Einzahlung / Abhebung am Tag t.

Allgemein **Differenzengleichung** mit Steuerung a:

$$x_{t+1} - x_t = f(t, x_t, a_t) \quad \overset{\text{Bsp}}{=} \quad r_t^\pm x_t + a_t$$

Zeitkontinuierlich **Differentialgleichung** mit Steuerung a:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), a(t)) \quad \overset{\text{Bsp}}{=} \quad r^\pm(t) x(t) + a(t)$$

Allgemeiner: Steuerung eines Finanzprodukts (Fonds, Aktien, etc.) oder eines Wirtschaftssystems (Firma, Holding, Volkswirtschaft). Meist sind Erstellung und Kalibrierung eines Modells schwierig und die Erhebung ausreichend präziser Daten sehr aufwändig.

Beispiel: Investition und Rendite

Ohne Spieler ist dies ein dynamisches System im klassischen Sinne. Bei nur einem Spieler handelt es sich um ein Optimierungsproblem. Bei mehreren Spielern ist dies die Grundidee der Differentialspiele.

Dieses Modell ist zwar noch allzu einfach, aber durchaus illustrativ. Die Zinsrate $r_t^\pm$ kann konstant sein, oder variabel aber deterministisch (vertraglich oder gesetzlich festgelegt) oder aber zufällig (stochastisch). Sie beeinflussen das System nur über ihren Steuerparameter a_t. Sie kennen nur die bisherige Trajektorie, nicht die Zukunft.

An der Börse begegnen Sie einer naheliegenden Verallgemeinerung: Sie verwalten Fonds $x^1, \dots, x^N$, also $x \in \mathbb{R}^N$. Die Dynamik ist wie zuvor. Der Faktor r_t entspricht den (meist zufälligen) Kursschwankungen. Die Ein- und Auszahlungen a_t entsprechen den An- und Verkäufen. Eine Handelsstrategie gibt zu jedem Zustand x die nächste Aktion vor.

Für die Börse ist das Ein-Spieler-Modell sinnvoll, solange der Markt groß und jeder Spieler klein ist. Ein feineres Modell behandelt alle n Akteure. Diese beeinflussen sich gegenseitig, wie bei n–Personen-Spielen üblich.

Kybernetik: Steuerung eines Systems

Neben finanzmathematischen Anwendungen gibt auch die Steuerung physikalischer Systeme wichtige Beispiele:

Für $n = 1$ denke man (deterministisch oder stochastisch) an die zentrale **Steuerung** eines Autos, Schiffs, Flugzeugs, Raumschiffs, einer Drohne, oder einer Hausheizung, einer Industrieanlage, eines Kraftwerks, etc.

Der **Zustand** $x_t \in \mathbb{R}^N$ beschreibt das System zur Zeit $t \in \mathbb{N}$. Darauf wirken zufällige Einflüsse ω_t und die Steuerparameter a_t^i der Spieler:

$$x_{t+1} - x_t = f(t, x_t, \omega_t, a_t^1, \dots, a_t^n)$$

Bei kontinuierlicher Zeit $t \in \mathbb{R}$ formulieren wir dies als **Differentialspiel**:

$$\dot{x}_t = f(t, x_t, \omega_t, a_t^1, \dots, a_t^n)$$

Sie wollen die Trajektorie in gewissen Grenzen halten oder möglichst schnell ein gewisses Ziel erreichen. Die Erreichung Ihrer Ziele wird gemessen durch kumulierte Belohnungen $u : \{\text{Trajektorien}\} \to \mathbb{R}^n$ oder eine terminale Auszahlung $u : \{\text{Endzustände}\} \to \mathbb{R}^n$.

Kybernetik: Steuerung eines Systems

Die **Kontrolltheorie** untersucht die Steuerung komplexer Systeme. Bei ökonomischen Systemen ist die Modellbildung meist schwer. Physikalische Systeme sind meist besser verstanden; wir verfügen über realitätsnahe, präzise Modelle und mathematische Werkzeuge.

Die Übersetzung aus dem englischen Begriff *control theory* zu deutsch *Kontrolltheorie* ist leider missverständlich und daher etwas unglücklich: Ziel ist nicht Kontrolle als Überwachung, sondern die Einflussnahme. Statt *Kontrolle* spricht man daher von *Steuerung* oder *Regelung*.

Bei mehreren Spielern ($n \ge 2$) denke man an n **autonome Fahrzeuge**: Jedes wird von einem Spieler gesteuert, ihre Aktionen bestimmen den Gesamtzustand, und dieser wirkt auf die einzelnen Akteure zurück. Es entstehen typische Situationen von Konflikt und Kooperation.

Beim **autonomen Fahren** im engeren Sinne wird dies automatisiert, zum Beispiel durch mobile Roboter oder fahrerlose Transportsysteme, die sich weitgehend autonom verhalten und somit auch dezentral. Damit haben wir eine typische Situation der Spieltheorie!

Wie formalisieren wir dynamische Spiele?

Wir suchen eine **einheitliche Beschreibung** (Schablone) für alle Fälle:

- Stochastische Prozesse, finanzmathematische Systeme, etc.
- Physikalische Prozesse, kybernetische Systeme, etc.
- Soziale Prozesse, ökonomisch-politische Systeme, etc.
- Kartenspiele, Brettspiele, Gesellschaftsspiele, etc.

Solch große Allgemeinheit erfordert das rechte Maß an **Abstraktion**. Wenn nicht *alle*, so wollen wir doch möglichst *viele* Probleme abbilden.

Zugleich wollen wir **Lösungskonzepte** präzise formulieren und dann kritisch erproben, hier insbesondere teilspielperfekte Gleichgewichte.

Ich spreche vorsichtig von *Schablone* oder *Vorlage* (engl. *template*). Sie soll zunächst ermöglichen, viele verschiedene Beispiele in einer gemeinsamen Sprech- und Sichtweise zu erfassen. Aufbauend wollen wir dann wiederkehrende Regeln als Sätze formulieren und beweisen.

Zur effizienten Bearbeitung von Beispielen und Aufgaben benötigen wir zudem eine konzise Notation zur Rechnung und zur Kommunikation.

Wie formalisieren wir dynamische Spiele?

Das ist das übliche **axiomatische Vorgehen** in der Mathematik: Wir wollen Beispiele und Einzelfälle möglichst effizient bündeln. Denkökonomie: Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen.

Sie sollen nicht nur **Beispiele** lernen, sondern zugleich **Methoden**! Zum Erfolg benötigen Sie meist beides: sowohl handfeste Beispiele als auch die zugrundeliegende Theorie, wie linke und rechte Hand!

Mathematik ist zugleich abstrakte **Theorie** und konkrete **Anwendung**. Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen! Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

Abstraktion ist die Kunst, Wesentliches von Unwesentlichem zu trennen. Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle.

Soviel zur Motivation und zum Überblick. Das Vorgehen ist damit klar: Wir investieren hier in die mathematisch-theoretischen Grundlagen. Das ist eine längere Durststrecke. Nur wer sät, kann auch ernten.

Wie formalisieren wir dynamische Spiele?

Wir betrachten im Folgenden nur Spiele in diskreter Zeit, kurz $t \in \mathbb{N}$. Auch Spiele in kontinuierlicher Zeit $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sind interessant und für viele Anwendungen relevant, stellen aber höhere technische Anforderungen. Wir halten alles zunächst so einfach wie möglich.

Die **Spielregeln** müssen folgende Fragen beantworten:

- Was sind die möglichen Spielzustände? der Startzustand?
- Wer spielt? Wer hat wann welche möglichen Aktionen?
- Konsequenzen: Wie geht das Spiel dann weiter?
- Terminal: Was wird schließlich ausgezahlt?
- Informationsstruktur: Wer weiß wann was?

Das sind die **Mindestanforderungen** an jede Spielbeschreibung: Sie muss vollständig sein, so dass wir das Spiel durchführen können, ohne jemals weitere Regeln erfragen oder ad hoc erfinden zu müssen. Sie muss vor Spielbeginn vorliegen, so dass jeder Spieler mögliche Ziele und Handlungsoptionen kennt und Strategien analysieren kann.

Wie formalisieren wir dynamische Spiele?

Die Regeln wünschen wir uns möglichst kurz und übersichtlich. Doch wie detailliert und formal müssen sie ausgeführt werden? Einfaches Kriterium: Sie sollten vollkommen klar und eindeutig sein, so dass wir das Spiel auf einem Computer **programmieren** können.

Es bleiben uns dabei noch einige Freiheiten, wie wir das Spiel als Mechanismus **implementieren** und so die Anforderungen erfüllen. Jede Implementierung ist akzeptabel, solange sie das Pflichtenheft erfüllt und die dort erklärten Spielregeln treu umsetzt.

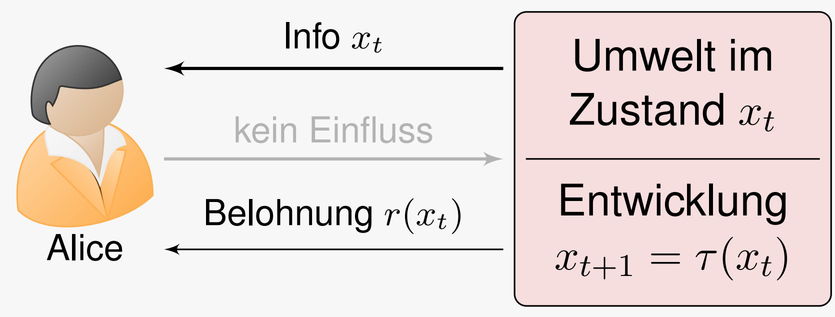
Ich werde die Formalisierung im Folgenden auf zwei Arten durchführen: zunächst mit einem beliebigen Zustandsraum (kybernetische Form J1A), dann besonders effizient mit einem Spielbaum (extensive Form J2A).

Die Sichtweise und Akzentsetzung ist in beiden Fällen etwas anders. Beide sind ähnlich und in gewissem Sinne äquivalent, wie wir sehen. Die Praxis wird Vor- und Nachteile beider Zugänge illustrieren.

Ich halte es daher für sinnvoll, beide Modelle zur Verfügung zu stellen, damit Sie je nach Bedarf ein geeignetes auswählen können.

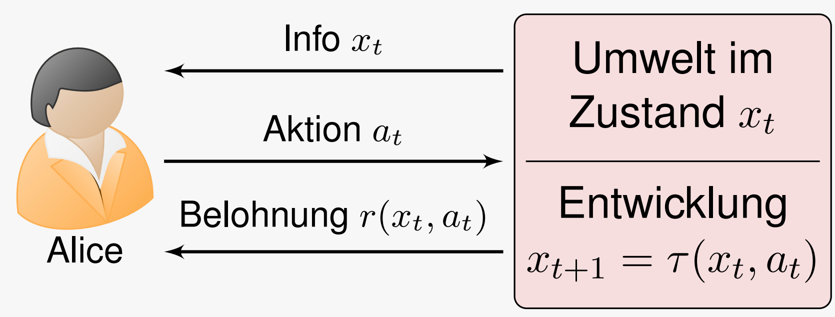
Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Dynamisches System ohne Steuerung: *Markov reward process* (MRP)



Ein dynamisches System ist eine Abbildung $\tau : X \to X$, allgemeiner $\tau : X \supset X^\circ \to X$ mit aktiven Zuständen X° und terminalen $\partial X = X \smallsetminus X^\circ$.

Dynamisches System mit Steuerung: *Markov decision process* (MDP)

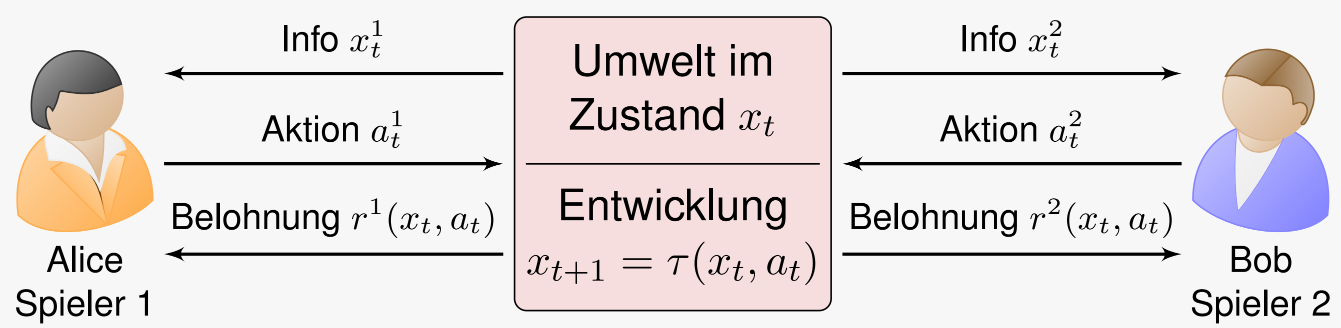


Alice wählt zum Zustand $x_t \in X$ ihre Aktion $a_t \in A_{x_t}$, beeinflusst so die Entwicklung $x_{t+1} = \tau(x_t, a_t)$ des Systems und erhält dementsprechend ihre Belohnung $r(x_t, a_t)$.

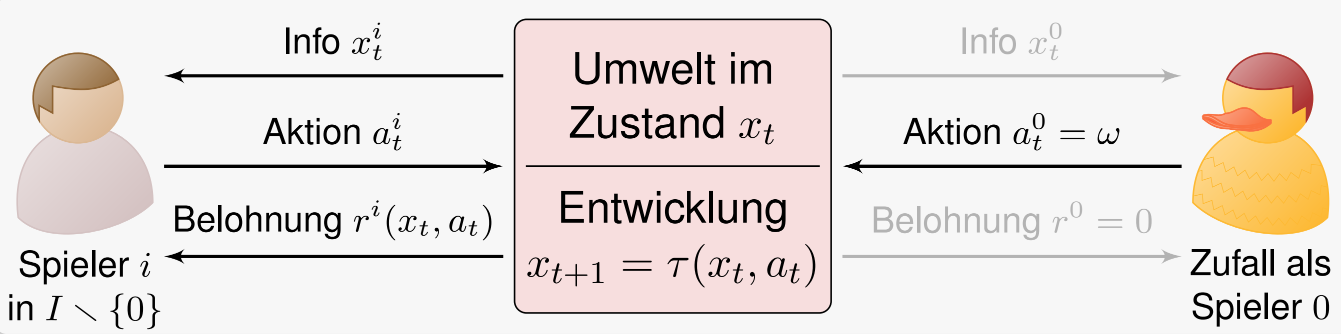
Alice will ihren Gesamtnutzen $u = (1 - \delta) \sum_t \delta^t r(x_t, a_t)$ maximieren!

Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Dynamisches System mit Steuerung durch zwei Spieler: Markov–Spiel



Steuerung durch mehrere Spieler und Zufall: Markov–Spiel (MMDP)



Jeder Spieler will seinen individuellen Gesamtnutzen maximieren.

Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Dynamische Spiele können wir als Graphen darstellen:

	USA	EU
0 Start		
1 USA drohen nicht.	$v(1) = ($ 5 ,	9 $)$
2 USA drohen mit Zöllen.		
3 Europa gibt nach.	$v(3) = ($ 6 ,	7 $)$
4 Europa droht ebenfalls.		
5 USA lenken ein.	$v(5) = ($ 4 ,	8 $)$
6 Es kommt zum Handelskrieg.	$v(6) = ($ 3 ,	6 $)$

Aufgabe: Welches Verhalten ist rational? Wie hilft Rückwärtsinduktion?

Lösung: $\mathscr{R}_0$: Jeder kennt und maximiert sein Ergebnis (wie gezeigt).
$\mathscr{R}_1$: Vor einem Handelskrieg lenken die USA im 3. Zug ein (vorteilhaft).
$\mathscr{R}_2$: Die EU weiß dies, daher wird sie im 2. Zug drohen (vorteilhaft).
$\mathscr{R}_3$: Die USA wissen dies, also werden sie im 1. Zug nicht drohen.

Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Die hier angegebene Lösung und Erklärung rollt das Spiel rückwärts auf. Grundlegend hierzu ist der Begriff der unbeschränkten Rationalität A2A.

Vorsicht: (Scheinbare) Irrationalität kann zum Bluffen genutzt werden. Das Piratenspiel A218 etwa verlockt zu irrationalem Verhalten A225.

Vorwärts betrachtet nutzen wir teilspielperfekte Nash–Gleichgewichte. Rückwärtsinduktion J1D nach Zermelo beweist ihre Äquivalenz.

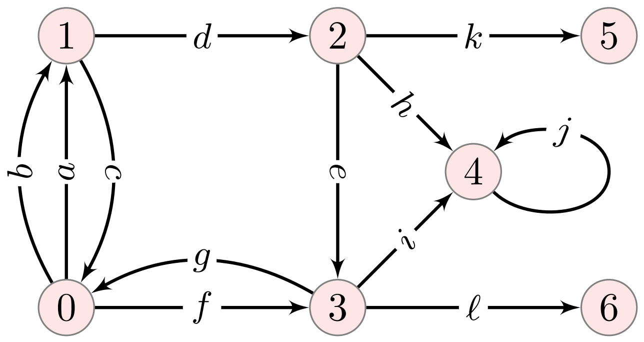
Dynamische Spiele können parallel oder sequentiell gespielt werden:

- Die Spieler ziehen gleichzeitig, parallel, asynchron wie bei Pong.
- Die Spieler ziehen abwechselnd, nacheinander, rundenbasiert.

Die Zeit kann kontinuierlich sein oder diskret wie hier. Zur Vereinfachung betrachten wir in dieser Vorlesung meist nur den zeitdiskreten Fall.

Einige Autoren betonen oder bevorzugen den sequentiellen Fall.
Ich möchte im Folgenden gleichzeitige Züge von Anfang an zulassen.
Wenn Sie diese Freiheit nicht benötigen, geht es auch sequentiell:
Ein momentan inaktiver Spieler hat nur die einzige Aktion „warten“.

Dynamische Spiele in kybernetischer Form



$$\tau : A \to X :$$
$$\begin{array}{ll} (0,a) \mapsto 1, & (2,h) \mapsto 4, \\ (0,b) \mapsto 1, & (2,k) \mapsto 5, \\ (0,f) \mapsto 3, & (3,g) \mapsto 0, \\ (1,c) \mapsto 0, & (3,i) \mapsto 4, \\ (1,d) \mapsto 2, & (3,\ell) \mapsto 6, \\ (2,e) \mapsto 3, & (4,j) \mapsto 4. \end{array}$$

Wir betrachten einen Graphen $\Gamma = (X, A, \sigma, \tau)$ und interpretieren die Ecken $x \in X$ als **Zustände** und die Kanten $a \in A$ als **Aktionen**.

Vereinfachend gelte $A = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times A_x$ mit $\sigma = \mathrm{pr}_1 : A \to X : (x, a) \mapsto x$ und der Transition $\tau : A \to X : (x, a) \mapsto y$ bzw. lokal $\tau_x : A_x \to X : a \mapsto y$.

Innere Ecken / aktive Zustände $\quad X^\circ = \mathrm{Bild}(\sigma) = \{\, x \in X \mid A_x \neq \emptyset \,\}$,
Blätter / terminale Zustände $\quad \partial X = X \smallsetminus X^\circ = \{\, x \in X \mid A_x = \emptyset \,\}$.

Gegeben sei die Spielermenge I, typischerweise $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Wir fordern dann $A_x = \prod_{i \in I} A_x^i$ für jeden aktiven Zustand $x \in X^\circ$.

Individuelle Aktionen $a^i \in A_x^i$ bestimmen gemeinsam $a = (a^i)_{i \in I} \in A_x$. Flexibler genügt $\alpha_x : \prod_{i \in I} A_x^i \twoheadrightarrow A_x$ und $f_x = \tau \circ \alpha_x : \prod_{i \in I} A_x^i \to X$.

Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Wir sortieren alle **Aktionen** $a : x \to y$ nach ihrem Startzustand $x = \sigma(a)$: Dies erlaubt die bequem-kompakte Codierung $A = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times A_x$ mit Projektion $\sigma : A \to X : (x, a) \mapsto x$ und Transition $\tau : A \to X : (x, a) \mapsto y$. Für jeden Zustand x benennt die Menge A_x die möglichen Aktionen.

Als Analogie zur **Differentialtopologie**: Wir interpretieren $a : x \to y$ als einen Tangentialvektor, der im Fußpunkt x verankert ist und auf y zeigt. Die Projektion $\sigma : A \to X : (x, a) \mapsto x$ ist das Tangentialbündel über X, und jede Strategie $s : X^\circ \to A$ mit $\sigma \circ s = \mathrm{id}_{X^\circ}$ ist ein Vektorfeld auf X.

Zu jedem Startpunkt $x_0 \in X$ können wir s **integrieren** zur Trajektorie $w = (x_0, a_0, x_1, a_1, x_2, \dots)$ mit $a_k = s(x_k)$ und $x_{k+1} = \tau(x_k, a_k)$ für alle k. Diese endet entweder im Rand ∂X oder läuft unendlich in X° weiter. Das entspricht recht genau der Situation bei Differentialgleichungen!

Bei mehreren Spielern nutzen wir die **Produktzerlegung** $A_x = \prod_{i \in I} A_x^i$, denn jeder Spieler wählt seine Aktion unabhängig von den anderen. Statt $\alpha_x = \mathrm{id}$ genügt eine Zusammenfassung $\alpha_x : \prod_{i \in I} A_x^i \twoheadrightarrow A_x$, etwa bei geheimer Abstimmung nur das Ergebnis statt der einzelnen Voten.

Graphen sind ideal für Spiele: Sie bieten eine universelle Beschreibung! Ein Spiel bietet zudem Nutzen, Gewinn, Auszahlung, Belohnung, etc. Diese entstehen auf zwei Arten (und Mischungen davon) :

1. Auszahlung $v(x)$ beim Erreichen eines Endzustandes $x \in \partial X$. „Entscheidend ist, was hinten rauskommt.“ / Ende gut, alles gut. Dies codieren wir als **terminale Auszahlung** $v : \partial X \to \mathbb{R}$.
2. Belohnung $r_x(a)$ beim Ausführen einer Aktion $a = (a^i)_{i \in I} \in A_x$. „Der Weg ist das Ziel.“ / *instant gratification* / zeitnah, verteilt Dies codieren wir als **sofortige Belohnung** $r : A \to \mathbb{R}^I$.

Für jeden Zustand $x \in X^\circ$ ist $r_x : \prod_{i \in I} A_x^i \to \mathbb{R}^I$ ein strategisches Spiel. Belohnungen fassen wir zu einer Gesamtauszahlung zusammen, etwa

(konvergent) summiert:	$u^i = \sum_t r^i(a_t)$,
mit $\delta_i \in [0,1]$ diskontiert:	$u^i = \sum_t \delta_i^t r^i(a_t)$,
diskontiert und normiert:	$u^i = (1-\delta_i) \sum_t \delta_i^t r^i(a_t)$.

Teilweise können diese Zahlungsarten ineinander umgewandelt werden.

Ein dynamisches Spiel erfordert den **Balanceakt** zwischen kurz- und langfristigem Nutzen, denn Aktionen beeinflussen den Spielverlauf. Kurzfristige Gewinnmitnahme (*greedy algorithm*, *steepest descent*) ist langfristig nicht immer optimal. Daher der Rat: *Bedenke das Ende!*

Im **alltäglichen Leben** verhalten sich Menschen sehr unterschiedlich: Manche suchen eher langfristige Strategien, andere kurzfristige Erfolge. **Aktien** verbinden kurzfristige Dividende (z.B. als jährliche Ausschüttung) mit langfristiger Wertsteigerung (allerdings erst realisiert beim Verkauf).

Bei **Monopoly** und vielen **Computerspielen** entstehen Belohnungen / Gewinne durch einzelne Aktionen und werden sofort gutgeschrieben. Beim Design von Videospielen ist das Gameplay eine zentrale Frage: Zu simples Jump & Run langweilt, zu komplizierte Rätsel frustrieren.

Wir werden im Folgenden meist terminale Auszahlungen betrachten, das ist technisch leichter. Sofortige Belohnungen sind oft konkreter. Letztere lassen sich kumulieren und beim Spielende auszahlen; meist setzen wir diese Umrechnung stillschweigend voraus.

Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Zu jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ haben wir mögliche Spieleraktionen $a \in A_x = \prod_{i \in I} A_x^i \ne \emptyset$ und die Fortsetzung $f_x : A_x \to X$, global:

$$f \;:\; A = \bigcup_{x \in X^\circ} \{x\} \times A_x \to X \;:\; (x,a) \mapsto f(x,a) = f_x(a)$$

Jeder Spieler i wählt seine Aktion $a^i \in A_x^i$ unabhängig von den anderen. Bei einelementiger Menge $A_x^i = \{*\}$ hat der Spieler i keinen Einfluss.

Eine **Strategie** für Spieler i ist ein Element $s^i \in S^i := \prod_{x \in X^\circ} A_x^i$, also eine Abbildung $s^i : X^\circ \to A^i := \bigcup_{x \in X^\circ} A_x^i$ mit $x \mapsto s_x^i \in A_x^i$.

Ein **Strategievektor** ist demnach $s \in S := \prod_{i \in I} S^i \cong \prod_{x \in X^\circ} A_x$. Jeder Spieler i wählt unabhängig seine Strategie $s^i \in S^i$.

Trajektorien: Aus Startzustand $x_0 \in X$ und Strategievektor $s \in S$ folgt der **Spielverlauf** $x : \{0, 1, \dots, T\} \to X$ gemäß $x_{t+1} = f(x_t, s_{x_t})$.

Die Strategie $s^i \in S^i = \prod_{x \in X^\circ} A_x^i$ legt für jeden Spielstand $x \in X^\circ$ fest, wie Spieler i sich verhalten wird, also welche Aktion s_x^i er spielen wird. Der Spieler entscheidet sich hierbei nicht spontan, sondern im Voraus. Vorteil: Aus $s = (s^i)_{i \in I}$ lässt sich der gesamte Spielverlauf berechnen.

Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Zufallszüge: Wie spielt der Zufall / die Natur / das Schicksal? Wir haben Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega_x, \mathbf{P}_x)$ und die Dynamik

$$f \;:\; A = \bigcup_{x \in X^\circ} \{x\} \times \Omega_x \times A_x \to X \;:\; (x, \omega, a) \mapsto f(x, \omega, a) = f_x(\omega, a).$$

Bei einelementiger Menge $\Omega_x = \{*\}$ hat der Zufall keinen Einfluss. Wir betrachten den Zufall als zusätzlichen Spieler (Natur, Schicksal): Er folgt keiner Gewinnmaximierung, sondern nur der WVerteilung $\mathbf{P}_x$.

In jedem Zustand $x \in X^\circ$ erfolgt eine Ziehung $\omega_x \in \Omega_x$. Diese müssen nicht unabhängig sein, wir betrachten ein WMaß $\mathbf{P}$ auf $\Omega = \prod_{x \in X^\circ} \Omega_x$. Hieraus entsteht die Randverteilung $(\Omega_x, \mathbf{P}_x)$ durch die Projektion pr_x.

Trajektorien: Aus Startzustand $x_0 \in X$, Zufallselement $\omega \in \Omega$ und Strategievektor $s \in S$ folgt der **Spielverlauf** $x : \{0, 1, \dots, T\} \to X$ gemäß $x_{t+1} = f(x_t, \omega_{x_t}, s_{x_t})$. Er ist maximal, falls $x_T \in \partial X$.

Kein Spieler, $I = \emptyset$: dynamisches System, evtl. stochastisch / Markov. Ein Spieler, $I = \{1\}$: Kybernetik, Kontrolltheorie, evtl. stochastisch. Mehrere Spieler, $|I| \ge 2$: dynamisches Spiel, evtl. stochastisch.

Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Die obigen Daten (X, f) definieren die (zeitdiskrete) **Dynamik**

$$F : X^\circ \times \Omega \times S \to X \times \Omega \times S : (x, \omega, s) \mapsto (f(x, \omega_x, s_x), \omega, s).$$

Der Spielgraph sei artinsch, also jede Trajektorie endlich. Jede terminale **Auszahlung** $v : \partial X \to \mathbb{R}^I$ können wir dann rekursiv fortsetzen zu

$$\tilde{u} : X \times \Omega \times S \to \mathbb{R}^I : (x, \omega, s) \mapsto \begin{cases} v(x) & \text{falls } x \in \partial X, \\ \tilde{u}(F(x, \omega, s)) & \text{falls } x \in X^\circ. \end{cases}$$

Gemittelt über $\mathbf{P} \in [\Omega]$ erhalten wir den **erwarteten Gewinn**:

$$u : X \times S \to \mathbb{R}^I : (x, s) \mapsto u(x, s) = \mathbf{E}\big[\omega \mapsto \tilde{u}(x, \omega, s)\big]$$

Hierzu fordern wir absolute Summierbarkeit, etwa v und $\tilde{u}$ beschränkt. Wir können jedem Spieler i seine individuelle Wkt $\mathbf{P}^i \in [\Omega]$ zugestehen. Jeder Startzustand $x \in X$ definiert ein strategisches Spiel $u_x : S \to \mathbb{R}^I$:

$$u_x^i : S = \textstyle\prod_{i \in I} S^i \to \mathbb{R} : s \mapsto u_x^i(s) = \mathbf{E}^i\big[\omega \mapsto \tilde{u}_x^i(\omega, s)\big]$$

Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Wenn wir neben der terminalen Auszahlung $v : \partial X \to \mathbb{R}^I$ allgemein auch sofortige Belohnungen $r : A \to \mathbb{R}^I$ kumulieren wollen, so betrachten wir

$$\tilde{u}^i(x, \omega, s) = \begin{cases} v^i(x) & \text{falls } x \in \partial X, \\ r^i(x, \omega_x, s_x) + \delta_i \tilde{u}^i(f(x, \omega_x, s_x), \omega, s) & \text{falls } x \in X^\circ. \end{cases}$$

Für jeden Spieler $i \in I$ ist hierbei $\delta_i \in [0, 1]$ seine Zuversicht / Geduld. Im Spezialfall $r = 0$ und $\delta_i = 1$ erhalten wir die Formel der vorigen Seite. Im Falle $\delta_i < 1$ werden Auszahlungen t Runden später mit δ_i^t diskontiert.

Die obige Formel definiert $\tilde{u}$ für jedes artinsche Spiel und alle (v, r, δ): Für jede Trajektorie von x_0 über $x_{t+1} = f(x_t, \omega_{x_t}, s_{x_t})$ nach $x_T \in \partial X$ gilt

$$\tilde{u}^i(x_0, \omega, s) = \textstyle\sum_{t=0}^{T-1} \delta_i^t r^i(x_t, \omega_{x_t}, s_{x_t}) + \delta_i^T v^i(x_T).$$

Unendliche Trajektorien oder Zykel müssen wir dazu ausschließen. Diese Einschränkung entfällt für $\delta_i \in [0, 1[$, solange v, r beschränkt sind: Unsere obige Gleichung für $\tilde{u}^i : X \times \Omega \times S \to \mathbb{R}$ hat genau eine Lösung dank Banachs Fixpunktsatz D2A, und die Reihe konvergiert für $T \to \infty$.

Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Gegeben sei die Spielermenge I, typischerweise $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

Definition J1A: dynamisches Spiel in kybernetischer Form

Ein **dynamisches Spiel** $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P})$ über I beinhaltet:

1. Eine Zustandsmenge X, zerlegt in $X = X^\circ \sqcup \partial X$, sowie eine Auszahlung $v : \partial X \to \mathbb{R}^I$ auf den terminalen Zuständen.
2. Eine Übergangsfunktion $f_x : \Omega_x \times A_x \to X$ für jedes $x \in X^\circ$. Hierbei sei $\Omega_x \neq \emptyset$ und $A_x = \prod_{i \in I} A^i_x \neq \emptyset$ ein Produkt über I.
3. Ein WMaß $\mathbf{P}$ auf dem Produktraum $(\Omega, \mathscr{A}) = \prod_{x \in X^\circ} (\Omega_x, \mathscr{A}_x)$.

Spieler $i \in I$ hat die Strategiemenge $S^i := \prod_{x \in X^\circ} A^i_x = \{ s^i : x \mapsto s^i_x \}$. Wir setzen v fort zu $\tilde{u} : X \times \Omega \times S \to \mathbb{R}^I$ und mitteln zu $u : X \times S \to \mathbb{R}^I$.

Ein Strategievektor $s \in S = \prod_{i \in I} S^i$ heißt **Nash–Gleichgewicht** bei Start in $x \in X$, wenn dies für das strategische Spiel $u_x : S \to \mathbb{R}^I$ gilt.

Gilt dies für jeden Start $x \in X$, so nennen wir s **teilspielperfekt**:

$$\boxed{\operatorname{PNE}(\Gamma) = \operatorname{PNE}(\Gamma, S) := \bigcap_{x \in X^\circ} \operatorname{NE}\big(u_x : S \to \mathbb{R}^I\big)}$$

Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Ich bemühe mich im Aufbau, alles möglichst natürlich darzustellen, die nötigen Zutaten zu motivieren und alle Forderungen zu erklären.

Das beantwortet, wie eingangs motiviert, die grundlegende Frage: Welche Daten und Eigenschaften benötigen wir genau zur Definition / vollständigen Beschreibung / Untersuchung eines dynamischen Spiels?

Schließlich passt alles Wesentliche in die recht knappe Definition J1A! Das ist der allgemeine Rahmen und die strukturierende Vorlage für jede konkrete Anwendung. Die konzise Zusammenfassung muss dazu jeweils entpackt werden, hierzu dienen illustrative Beispiele und Übungen.

Formal könnten wir unser Spiel definieren als ein 8–Tupel:

$$(I, \partial X, v, X^\circ, (\Omega_x)_{x \in X^\circ}, \mathbf{P}, (A^i_x)^{i \in I}_{x \in X^\circ}, f)$$

Das ist wunderbar explizit und ausführlich, scheint mir aber für den praktischen Gebrauch unnötig länglich und übertrieben pedantisch. Implizit enthält $(X, v, f, \mathbf{P})$ all diese Daten: Je nach Bedarf können wir daraus alle relevanten Informationen erfragen bzw. rekonstruieren.

Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Für die teilspielperfekten Nash–Gleichgewichte [engl. *subgame perfect Nash–equilibria*] nutze ich durchgängig die bequeme Abkürzung PNE. Die ausführliche Notation SPNE ist vielleicht klarer, leider auch länger. Gebräuchlich ist ebenso SPE. Es besteht kaum Verwechslungsgefahr.

Ich habe in Definition J1A für Spieler $i \in I$ die **reinen Aktionen** $a^i \in A^i_x$ genutzt und damit die **reinen Strategien** $s^i \in S^i = \prod_{x \in X^\circ} A^i_x$ formuliert. Das ist konzeptuell leichter, genügt aber meist nicht, wie Sie wissen.

Eine **gemischte Aktion** $\bar{a}^i \in \bar{A}^i_x = [A^i_x]$ für Spieler i entsteht durch eine Konvexkombination, die wir wie üblich als WVerteilung interpretieren. Eine **(lokal) gemischte Strategie** ist demnach $\bar{s}^i \in \bar{S}^i = \prod_{x \in X^\circ} \bar{A}^i_x$, also eine Abbildung $\bar{s}^i : X^\circ \to \bar{A}^i := \bigcup_{x \in X^\circ} \bar{A}^i_x$ mit $x \mapsto \bar{s}^i_x \in \bar{A}^i_x$.

Durch (lokal) affine Fortsetzung erhalten wir $\tilde{u} : X \times \Omega \times \bar{S} \to \mathbb{R}^I$. Mittelung über $(\Omega, \mathbf{P})$ ergibt $\bar{u} : X \times \bar{S} \to \mathbb{R}^I$. Daraus gewinnen wir die **teilspielperfekten (lokal) gemischten Nash–Gleichgewichte**:

$$\boxed{\mathrm{PNE}(\bar{\Gamma}) = \mathrm{PNE}(\Gamma, \bar{S}) := \bigcap_{x \in X^\circ} \mathrm{NE}\big(\bar{u}_x : \bar{S} \to \mathbb{R}^I\big)}$$

Dynamische Spiele in kybernetischer Form

Ebenso definieren wir gemeinsam **korrelierte Aktionen** $\tilde{a} \in [A_x]$. Eine **(lokal) korrelierte Strategie** ist demnach $\tilde{s} \in \tilde{S} = \prod_{x \in X^\circ} [A_x]$. Die Vorgehensweise ist dann wie in vorigen Kapitel I, und wir gewinnen die **teilspielperfekten (lokal) korrelierten Nash–Gleichgewichte**:

$$\boxed{\mathrm{PCE}(\Gamma) = \mathrm{PCE}(\Gamma, \tilde{S}) := \bigcap_{x \in X^\circ} \mathrm{CE}\big(\tilde{u}_x : \tilde{S} \to \mathbb{R}^I\big)}$$

Ebenso denk- und nutzbar sind **global gemischte Strategien** $s^i \in [S^i]$ oder **global korrelierte Strategien** $s \in [S]$. Das spielt jedoch nur eine untergeordnete Rolle, denn für die meisten Spiele und Anwendungen genügt die lokale Mischung / Korrelation: Sie liegen besonders nahe.

Dieselbe Frage „lokal / global“ stellt sich für $\mathrm{pr}_x : (\Omega, \mathbf{P}) \to (\Omega_x, \mathbf{P}_x)$. Wir erlauben Korrelation: $\mathbf{P}$ muss kein Produktmaß $\otimes_{x \in X^\circ} \mathbf{P}_x$ sein. Bei Bedarf können wir **Glaubensfreiheit** einräumen: Jeder Spieler $i \in I$ fixiert seine Annahmen über den Zufallszug $\omega \in \Omega$ als WMaß $\mathbf{P}^i \in [\Omega]$. Als **gemeinsame Überzeugung** / *common prior* bezeichnet man die Eigenschaft $\mathbf{P}^i = \mathbf{P}^j$ für alle $i, j \in I$. Wir schreiben dann kurz $\mathbf{P}^i = \mathbf{P}$.

Beispiel: drohen oder nachgeben?

		USA		EU	
⓪ Start					
$\xrightarrow{1}$ ① USA drohen nicht.	$v(1) = ($	5	,	9	$)$
$\xrightarrow{2}$ ② USA drohen mit Zöllen.					
$\xrightarrow{1}$ ③ Europa gibt nach.	$v(3) = ($	6	,	7	$)$
$\xrightarrow{2}$ ④ Europa droht ebenfalls.					
$\xrightarrow{1}$ ⑤ USA lenken ein.	$v(5) = ($	4	,	8	$)$
$\xrightarrow{2}$ ⑥ Es kommt zum Handelskrieg.	$v(6) = ($	3	,	6	$)$

Die Zahlen rechts bewerten jeden der möglichen Ausgänge für die USA und die EU auf einer (fiktiven) Werteskala. Wir denken an eine geeignete Gewichtung aus wirtschaftlichem Ertrag und politischem Ansehen.

Aufgabe: (1) Formalisieren Sie die Situation als ein dynamisches Spiel. Erklären Sie explizit und ausführlich alle benötigten Daten (X, v, f).
(2) Finden Sie alle Nash–Gleichgewichte für jedes Teilspiel.
(3) Welche Gleichgewichte sind teilspielperfekt?

Beispiel: drohen oder nachgeben?

Lösung: (1) Gegeben ist die Spielermenge $I = \{\, 1 = \text{USA},\ 2 = \text{EU} \,\}$. Als Zustandsmenge wählen wir $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, terminal ist $\partial X = \{1, 3, 5, 6\}$, mit Auszahlung $v : \partial X \to \mathbb{R}^2$ wie angegeben.

Die Aktionsmengen sind $A_0^1 = A_2^2 = A_4^1 = \{1 = \text{einlenken}, 2 = \text{drohen}\}$ sowie und $A_0^2 = A_2^1 = A_4^2 = \{0 = \text{abwarten}\}$. Die Dynamik ist wie oben festgelegt $f : \bigcup_{x \in X^\circ} \{x\} \times A_x \to X : (\, x;\ a^1, a^2 \,) \mapsto x + a^1 + a^2$.

Die Strategiemenge für Spieler $i \in I$ ist $S^i = A_0^i \times A_2^i \times A_4^i$, kanonisch abkürzbar dank $S^1 \cong A_0^1 \times A_4^1 = \{1, 2\} \times \{1, 2\}$ und $S^2 \cong A_2^2 = \{1, 2\}$. Dies definiert ein Spiel $u_x : S^1 \times S^2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu jedem Start $x \in X$.

(2a) Start in 0 definiert das strategische Spiel $u_0 : S^1 \times S^2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

EU \ USA	$(1, 0, 1)$	$(1, 0, 2)$	$(2, 0, 1)$	$(2, 0, 2)$
$(0, 1, 0)$	5 / 9	5 / 9	6 / 7	$\boxed{6 / 7}$
$(0, 2, 0)$	$\boxed{5 / 9}$	$\boxed{5 / 9}$	4 / 8	3 / 6

Beispiel: drohen oder nachgeben?

(2b) Start in 2 definiert das strategische Spiel $u_2 : S^1 \times S^2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

EU \ USA	$(1,0,1)$	$(1,0,2)$	$(2,0,1)$	$(2,0,2)$
$(0,1,0)$	7, 6	7, 6	7, 6	7, 6
$(0,2,0)$	8, 4	6, 3	8, 4	6, 3

(2c) Start in 4 definiert das strategische Spiel $u_4 : S^1 \times S^2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

EU \ USA	$(1,0,1)$	$(1,0,2)$	$(2,0,1)$	$(2,0,2)$
$(0,1,0)$	8, 4	6, 3	8, 4	6, 3
$(0,2,0)$	8, 4	6, 3	8, 4	6, 3

(3) Teilspielperfekt ist nur (s^1, s^2) mit $s^1 = (1,0,1)$ und $s^2 = (0,2,0)$.

Beispiel: drohen oder nachgeben?

(2) Für das strategische Spiel u_x nutzen wir Nash–Gleichgewichte.

☹ Das strategische Spiel u_0 vergisst jegliche zeitliche Struktur: Wir vergleichen die Strategien nur noch bezüglich des Starts in 0.

☺ Als Verfeinerung haben wir die Teilspielperfektion eingeführt: Diese berücksichtigt die zeitliche Struktur auf entscheidende Weise.

(3) In unserem hier vorliegenden dynamischen Spiel (X, v, f) gibt es nur ein teilspielperfektes Gleichgewicht $(s^1, s^2) \in S^1 \times S^2$: Dieses besteht aus den Strategien $s^1 = (1,0,1)$ und $s^2 = (0,2,0)$.

Wir finden es ebenso durch Rückwärtsinduktion:

- Im Zustand 4 ist $s^1_4 = 1$ strikt dominant: Die USA lenken ein.
- Im Zustand 2 ist $s^2_2 = 2$ strikt dominant: Die EU droht.
- Im Zustand 0 ist $s^1_0 = 1$ strikt dominant: Die USA drohen nicht.

☺ Das entspricht rationalem Verhalten wie in der Einführung erklärt. Diese einfache Überlegung illustriert den allgemeinen Satz J1D von Zermelo zur Rückwärtsinduktion, den wir untenstehend beweisen.

Warum lohnt sich diese pedantische Mühe?

Teilaufgabe (1) fragt nach einer expliziten **Ausformulierung** aller Daten. Das mag zunächst übertrieben pedantisch erscheinen, ist aber hilfreich. Es illustriert unsere Definition J1A eines dynamischen Spiels (X, v, f).

Das sind die **Spielregeln** und definieren die Struktur des Spiels:

- Was sind die möglichen Spielzustände? Hier $X = X^\circ \sqcup \partial X$.
- Wer spielt? Hier I. Was sind die möglichen Aktionen? Hier A^i_x.
- Was sind ihre Konsequenzen? Hier $f : \bigcup_{x \in X^\circ} \{x\} \times A_x \to X$.
- Was wird schließlich ausgezahlt? Hier $v : \partial X \to \mathbb{R}^I$.

Erst damit können wir das Spiel untersuchen, Strategien betrachten und von (teilspielperfekten) Gleichgewichten überhaupt erst sprechen!

Wir alle haben als Kinder Spiele gespielt. Zu jedem neuen, uns noch unbekannten Spiel mussten wir erst einmal die Anleitung durchlesen oder uns von einer bereits kundigen Person geduldig erklären lassen. Warum ist das meist länglich und mühsam? Weil alle Daten des Spiels erklärt werden müssen! Klarheit und Präzision haben ihren Preis.

Warum lohnt sich diese pedantische Mühe?

Für menschliche Leser können wir die Spielstruktur graphisch darstellen, etwa als Spielbaum, und damit alles präzise und vollständig ausführen. Genau hierzu dient unsere formale Beschreibung J1A wie oben erklärt.

Bei der Formulierung fragen wir uns: Ist die Beschreibung eindeutig? Können Sie damit das Spiel sofort auf einem Computer programmieren? Manche vertreten die Überzeugung: Man versteht Mathematik erst dann wirklich, wenn man sie auch auf einem Computer implementieren kann. Das ist ein sehr strenger Maßstab, aber dieser Test hat seine Vorzüge.

Erst wenn das Spiel Γ festgelegt ist, fragen wir nach Strategien $s^i \in S^i$. Es ist wichtig, beide Begriffe fein säuberlich auseinanderzuhalten.

- Das **Spiel** Γ besteht aus der vorgegebenen, formalen Struktur.
- Eine **Strategie** s^i ist ein Handlungsplan für jeden Zustand $x \in X^\circ$.

Diese Definition von Strategie ist sehr umfassend und mag redundant erscheinen. Sie ist technisch notwendig und praktisch gerechtfertigt: Die **Durchführung** des Spiels Γ berechnet sich zu jedem Start $x \in X$ aus dem Strategievektor $s = (s^i)_{i \in I}$ und ggf. dem Zufallselement $\omega \in \Omega$.

Warum lohnt sich diese pedantische Mühe?

Über die Definition einer Strategie als Element $s^i \in \prod_{x\in X^\circ} A^i_x$ wird häufig gestritten. Auch hierzu ist das obige Beispiel bereits hilfreich!

Warum sollte der Spieler $i \in I$ irgendeine Aktion $s^i_x \in A^i_x$ planen für einen Spielstand $x \in X^\circ$, der nie erreicht wird? Ist das nicht absurd? Nein! Wir ahnen bereits, wozu dies gut ist. Ich versuche drei Antworten:

Mentale Planung: Manche Zustände werden nicht erreicht, gerade weil der Spieler diese Zweige mental durchgespielt hat – und dann verwirft.

Technische Vereinfachung: Wir wollen in jedem Zustand $x \in X^\circ$ starten können. Hierzu benötigen wir die gewählte Aktion $s^i_x \in A^i_x$.

Automatisierung: Wir verfolgen den Anspruch der Programmierbarkeit. Das Spiel wird von einem Master geleitet. Er fragt jeweils: „Wir sind im Spielstand $x \in X^\circ$. Spieler i, welche Aktion $s^i_x \in A^i_x$ wählst du hierzu?“

Lazy Evaluation: Die Frage wird erst beantwortet, wenn sie sich stellt. Hierbei sind Master und Spieler „online“. Alternativ gelingt es „offline“:

Eager Evaluation: Die Frage wird vorsorglich für alle x beantwortet. Der Spieler gibt dem Master seine Daten und wird nicht weiter gefragt.

Warum lohnt sich diese pedantische Mühe?

Mit diesen Daten konnten wir das vorgelegte Spiel analysieren. Das war mühsam aber lehrreich. Das Ergebnis ist überzeugend.

Das teilspielperfekte Gleichgewicht entspricht rationalem Verhalten:
$\mathscr{R}_0$: Jeder Spieler maximiert sein Ergebnis (wie angegeben).
$\mathscr{R}_1$: Vor einem Handelskrieg im 3. Zug lenken die USA ein.
$\mathscr{R}_2$: Die EU weiß dies, also wird sie im 2. Zug ebenfalls drohen.
$\mathscr{R}_3$: Die USA wissen dies, also werden sie im 1. Zug nicht drohen.

Alle Voraussetzungen sind tatsächlich nötig für unsere Analyse!

$\mathscr{R}_1$: Sind die USA irrational, so könnten sie sich im 3. Zug für einen Handelskrieg entscheiden, obwohl dies zu ihrem Nachteil wäre. Das wäre irrational, etwa auf Grund einer falschen Einschätzung.

$\mathscr{R}_2$: Im 2. Zug muss die EU daher die Rationalität der USA einschätzen. Gegen einen Wahnsinnigen wäre es tatsächlich besser einzulenken!

$\mathscr{R}_3$: Im 1. Zug hätten die USA also Interesse daran, für wahnsinnig gehalten zu werden: Das entspricht einem Bluff. Nur dann wäre es rational, mit einer ersten Drohung die Eskalation einzuleiten.

Bislang haben wir noch nicht erklärt, was **Teilspiele** von Γ sein sollen. Das ist für die obige Formulierung zunächst auch nicht notwendig. Für die weitere Untersuchung ist dieser Begriff jedoch nützlich, daher führe ich alles nötige nun aus. Die Idee ist denkbar einfach:

Ein dynamisches Spiel besteht aus Zuständen X und Aktionen A. Für ein Teilspiel schränken wir die Zustände oder die Aktionen ein, so dass erneut ein „kleineres“ dynamisches Spiel Γ' entsteht.

Ebenso können wir etwaige Zufallszüge auf $\Omega' \subseteq \Omega$ einschränken. Wird $(\Omega, \mathbf{P})$ durch einen Zufallsgenerator realisiert, so wiederholen wir die Ziehungen so lange, bis schließlich ein Ergebnis $\omega \in \Omega'$ vorliegt.

Wir müssen bei dieser Einschänkung voraussetzen oder garantieren, dass mögliche Folgezustände des Teilspiels wieder im Teilspiel liegen. Diese Überlegungen führen uns zu folgender Definition.

Definition J1B: Teilspiele eines dynamischen Spiels

Gegeben sei ein dynamisches Spiel $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P})$ wie oben erklärt. Die folgenden Daten $\Gamma' = (X', v', f', \mathbf{P}')$ definieren ein **Teilspiel** von Γ:

1. Eine Teilmenge $X' \subseteq X$. Wir setzen $X'^{\circ} = X' \cap X^{\circ}$ als Inneres und $\partial X' = X' \cap \partial X$ als Rand sowie $v' = v|_{\partial X'}$ als Auszahlung.
2. Eine nicht-leere Teilmenge $\Omega'_x \subseteq \Omega_x$ für jedes $x \in X'^{\circ}$. Für das Produkt $\Omega' = \prod_{x \in X^{\circ}} \Omega'_x$ fordern wir $\mathbf{P}(\Omega') > 0$ und definieren $\mathbf{P}' \in [\Omega']$ als bedingte Wkt, $\mathbf{P}'(A) := \mathbf{P}(A \cap \Omega')/\mathbf{P}(\Omega')$.
3. Eine nicht-leere Teilmenge $A'^{i}_x \subseteq A^i_x$ für jedes $x \in X'^{\circ}$ und $i \in I$. Wir schränken f ein zu $f' : A' = \bigcup_{x \in X'^{\circ}} \{x\} \times \Omega'_x \times A'_x \to X'$; hierzu fordern wir $f(A') \subseteq X'$.

Diese Einschränkung auf $X' \subseteq X$ und $A' \subseteq A$ und $\Omega' \subseteq \Omega$ definiert erneut ein dynamisches Spiel $\Gamma' =: \Gamma|_{(X', A', \Omega')}$, geschrieben $\Gamma' \leq \Gamma$.

Was sind Teilspiele?

Wir schränken das Spiel Γ genau so ein, dass Γ' selbst ein Spiel ist. Die Idee ist recht natürlich, ihre Ausformulierung naturgemäß länglich.

Im Falle $X' = X$ nennen wir das Teilspiel $\Gamma' \le \Gamma$ **weit**. Die Zustände des Teilspiels Γ' sind dieselben wie zuvor in Γ, eingeschränkt werden höchstens die Zufallszüge $\Omega' \subseteq \Omega$ und die Spieleraktionen $A'^i_x \subseteq A^i_x$.

Im Falle $A'_x = A_x$ für alle $x \in X'$ nennen wir das Teilspiel $\Gamma' \le \Gamma$ **voll**. Dank $A'^i_x = A^i_x$ kann jeder Spieler in Γ' genauso agieren wir zuvor in Γ.

Im Falle $\Omega' = \Omega$ nennen wir das Teilspiel $\Gamma' \le \Gamma$ **unbedingt**. Das bedeutet, der Zufall spielt in Γ' genauso wie zuvor in Γ. Andernfalls schränken wir auf eine echte Teilmenge $\Omega' \subsetneq \Omega$ ein.

Konvention: Wenn allgemein von Teilspielen die Rede ist, ohne weitere Präzisierung, dann sind meist **volle unbedingte Teilspiele** gemeint, das heißt, nur die Zustände werden beim Teilspiel $\Gamma' \le \Gamma$ eingeschränkt. Wir schließen uns im Folgenden diesem üblichen Sprachgebrauch an.

Was sind Teilspiele?

Definition J1C: Teilmenge als volles unbedingtes Teilspiel

Gegeben sei ein dynamisches Spiel $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P})$ wie oben erklärt.

Eine Teilmenge $X' \subseteq X$ heißt **(volles unbedingtes) Teilspiel** von Γ, kurz $X' \le \Gamma$, wenn $f(\bigcup_{x \in X'^\circ} \{x\} \times \Omega_x \times A_x) \subseteq X'$ gilt. Das bedeutet, zu jedem $x \in X'$ liegen alle gemäß Γ möglichen Folgezustände in X'.

Ist $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von Teilspielen $X_\lambda \le \Gamma$, indiziert durch $\Lambda \ne \emptyset$, dann ist auch ihr Durchschnitt $X' = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ ein Teilspiel, also $X' \le \Gamma$.

Jeder Zustand $x \in X$ **erzeugt** ein kleinstes Teilspiel $\Gamma_x \le \Gamma$, nämlich:

$$\Gamma_x := \bigcap \{\, X' \mid x \in X' \le \Gamma \,\}$$

Konkret besteht dieses Teilspiel aus dem Startzustand x, all seinen Folgezuständen (Kindern), all deren Folgezuständen (Enkeln) usw.

In einem Spielbaum Γ ist somit Γ_x der Teilbaum ab x. Das ist die Intuition hinter den oben erklärten teilspielperfekten Gleichgewichten.

Rückwärtsinduktion und Filtrierungen

Die obigen Daten (X, f) definieren die (zeitdiskrete) **Dynamik**

$$F : X^\circ \times \Omega \times S \to X \times \Omega \times S : (x, \omega, s) \mapsto (f(x, \omega_x, s_x), \omega, s).$$

Wir fordern vereinfachend, dass jede Trajektorie endliche Länge besitzt:

$$X \times \Omega \times S \quad \stackrel{!}{=} \quad \bigcup\nolimits_{n\in\mathbb{N}} F^{-n}\big(\partial X \times \Omega \times S\big)$$

Das bedeutet Endlichkeit für jedes $x \in X$ und $(\omega, s) \in \Omega \times S$:
Für eine **Filtrierung** $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von (X, f) verlangen wir stärker

$$\begin{aligned} &\partial X = X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \subseteq X = \bigcup\nolimits_{n\in\mathbb{N}} X_n \\ &\text{mit} \quad F\big(X_n^\circ \times \Omega \times S\big) \quad \subseteq \quad X_{n-1} \times \Omega \times S. \end{aligned}$$

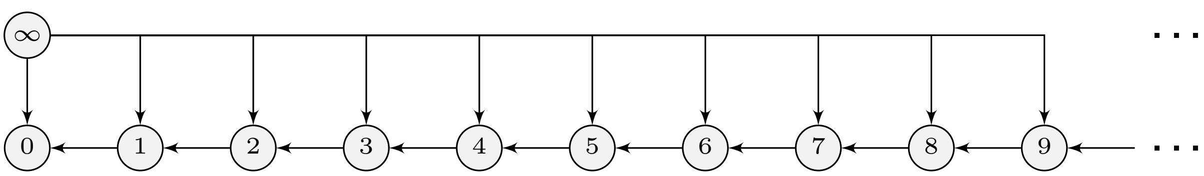
Insbesondere sind damit $X_0 \le X_1 \le X_2 \le \dots \le \Gamma$ Teilspiele (J1c).

Ausschöpfung $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ bedeutet Endlichkeit für jedes $x \in X$, und zwar uniform über $\Omega \times S$: Bei Start im Zustand $x \in X_n$ landen wir in höchstens n Schritten im Rand ∂X, egal bei welchem Spielverlauf.

Rückwärtsinduktion und Filtrierungen

Aufgabe: (1) Gibt es dynamische Spiele ohne unendliche Trajektorien, aber mit beliebig langen Trajektorien? und ohne Filtrierung $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(2) Angenommen, unser Spiel Γ erlaubt keine unendlichen Trajektorien, und für jeden Zustand $x \in X^\circ$ ist die Menge $\Omega_x \times A_x$ der Züge endlich. Dann erlaubt das Spiel Γ eine Filtrierung $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



Lösung: (1) Wie in der Skizze sei der Zustandsraum $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Wir wählen $\Omega = \mathbb{N}$ und $I = \emptyset$. Wir setzen $f(\infty, \omega) = \omega$ für $\omega \in \Omega$ sowie $f(n, \omega) = n - 1$ für $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$. Jede Trajektorie hat hier endliche Länge. Die Länge kann jedoch beliebig groß werden, ist also unbeschränkt.

Jede Filtrierung $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt $X_n \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$, also $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \subsetneq X$. Die Ausschöpfung gelingt erst im nächsten Schritt „unendlich plus eins".

Allgemein benötigen wir transfinite Induktion über Ordinalzahlen.

(2) Wir konstruieren die **kanonische Filtrierung** $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$Y_0 := \partial X \qquad \text{für } n = 0 \text{ und dann für } n = 1, 2, 3, \dots \text{ rekursiv}$$
$$Y_n := Y_{n-1} \cup \left\{ x \in X^\circ \;\middle|\; \forall \omega_x \in \Omega_x \; \forall a_x \in A_x : f(x, \omega_x, a_x) \in Y_{n-1} \right\}.$$

Nach Konstruktion gilt $\partial X = Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \ldots \subseteq X$ und

$$F(Y_n^\circ \times \Omega \times S) \subseteq Y_{n-1} \times \Omega \times S.$$

Wir setzen $Y := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ und beweisen die Ausschöpfung $X = Y$. Indirekter Beweis: Angenommen, es gäbe einen Zustand $x \in X \smallsetminus Y$.

Da wir $\Omega_x \times A_x$ als endlich voraussetzen, hat der Zustand x nur endliche viele Folgezustände, das heißt $f(\{x\} \times \Omega_x \times A_x) = \{x_1, \dots, x_\ell\} \subseteq X$. Gälte hierbei $\{x_1, \dots, x_\ell\} \subseteq Y$, also $x_k \in Y_{n_k}$ für jedes $k = 1, \dots, \ell$, dann folgte $\{x_1, \dots, x_\ell\} \subseteq Y_n$ für $n = \max\{n_1, \dots, n_\ell\}$, also $x \in Y_{n+1}$. Da wir $x \in X \smallsetminus Y$ annehmen, gibt es einen Nachfolger $x' \in X \smallsetminus Y$. So finden wir eine unendliche Trajektorie $x, x', x'', \dots$. Widerspruch!

⚠ Ist $\Omega_x \times A_x$ unendlich, so existieren Gegenbeispiele wie das obige.

🙂 Die kanonische Filtrierung $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wächst am schnellsten:

Aufgabe: Für jede Filtrierung $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $X_n \subseteq Y_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Wir führen Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 0$ gilt $X_0 = Y_0 = \partial X$. Wir zeigen nun den Induktionsschritt: Aus $X_{n-1} \subseteq Y_{n-1}$ folgt $X_n \subseteq Y_n$.

Nach Voraussetzung gilt $F(X_n^\circ \times \Omega \times S) \subseteq X_{n-1} \times \Omega \times S$. Für jedes Element $x \in X_n$ gilt demnach $f(\{x\} \times \Omega_x \times A_x) \subseteq X_{n-1} \subseteq Y_{n-1}$, also $x \in Y_n$ nach Definition der Menge Y_n. Das beweist $X_n \subseteq Y_n$.

Bemerkung: Beim Schritt von Y_{n-1} nach Y_n werden im Allgemeinen mehrere Elemente dazugewonnen. Wir können die Filtrierung strecken, indem wir diese schrittweise hinzufügen, im Extremfall jedes einzeln.

Bemerkung: Es gibt auch Filtrierungen, die beliebig langsam wachsen, da wir Stagnation $X_{n-1} = X_n$ nicht verbieten. Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wachsend und surjektiv, etwa $\varphi(n) = \lfloor \ln(n+1) \rfloor$. Dann ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_n = Y_{\varphi(n)}$ eine Filtrierung mit immer selteneren Zuwächsen. Noch viel langsamer wachsen $\varphi \circ \varphi$ oder $\varphi \circ \varphi \circ \varphi$ oder… Langsamer geht immer.

Rekursive Konstruktion von Gleichgewichten

Was immer du tust, handele klug und bedenke das Ende!
Die langen Vorbereitungen führen endlich zu einem schönen Satz:

Satz J1D: Rückwärtsinduktion nach Ernst Zermelo 1913

Sei $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P})$ ein dynamisches Spiel mit Filtrierung $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) In jedem Zustand $x \in X^\circ$ sei ein einziger Spieler $j = j(x)$ am Zug, also $\mathrm{pr}^j : A_x \xrightarrow{\sim} A_x^j$ bijektiv, und seine Aktionsmenge A_x^j sei endlich. Dann existiert ein teilspielperfektes reines Gleichgewicht $s \in S$.

(2) In jedem Zustand $x \in X^\circ$ sei die Aktionsmenge A_x endlich. Dann existiert ein teilspielperfektes (lokal) gemischtes Gleichgewicht $s \in \bar{S}$. Ausführlich bedeutet das $s \in \bar{S} = \prod_{x\in X^\circ} \bar{A}_x$ mit $\bar{A}_x = \prod_{i\in I}[A_x^i]$.

Genauer: Jedes teilspielperfekte Gleichgewicht $s_n \in \prod_{x\in X_n^\circ} \bar{A}_x$ auf X_n erlaubt auf X_{n+1} eine teilspielperfekte Fortsetzung $s_{n+1} \in \prod_{x\in X_{n+1}^\circ} \bar{A}_x$.

Hierbei kann es mehrere Fortsetzungen geben. Durch die Rekursion können wir jedes teilspielperfekte Gleichgewicht von Γ konstruieren.

Rekursive Konstruktion von Gleichgewichten

Beweis: Sei s_n ein teilspielperfektes Gleichgewicht auf $X_n \subseteq X$.
Wir betrachten $x \in X_{n+1} \smallsetminus X_n$. Alle Folgezustände von x liegen in X_n.
Dies verdanken wir unserer Forderung $F(X_{n+1}^\circ \times \Omega \times S) \subseteq X_n \times \Omega \times S$.

Wir untersuchen das Spiel $v_x : A_x \to \mathbb{R}^I : a_x \mapsto u_x((x \mapsto a_x) \cup s_n)$.
Zur Berechnung von $u_x(s)$ genügen diese Daten $(x \mapsto a_x) \cup s_n \subseteq s$.

(1) Nach Voraussetzung ist $A_x \cong A_x^j$ endlich.
Wir wählen eine Aktion $a_x \in A_x$ so, dass $v_x^j(a_x)$ maximal ist.

(2) Nach Voraussetzung ist A_x endlich. Wir wählen ein Nash–Gleichgewicht $a_x \in \bar{A}_x = \prod_{i\in I}[A_x^i]$ für das Spiel $\bar{v}_x$.

Zu $s_0 = \emptyset$ konstruieren wir rekursiv Fortsetzungen $s_0 \subseteq s_1 \subseteq s_2 \subseteq \dots$
und erhalten das teilspielperfekte Gleichgewicht $s = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} s_n$ auf X.

Hierzu nutzen wir schließlich die Voraussetzung $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Umgekehrt entsteht jedes teilspielperfekte Gleichgewicht
$s \in \mathrm{PNE}(\Gamma, S)$ bzw. $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma, \bar{S})$ auf diese Weise. $\boxed{\text{QED}}$

Aufgabe: Ist die Konstruktion in (1) bzw. in (2) ein Algorithmus?

Lösung: Schritt (1) ist konstruktiv. Manchmal existieren mehrere Maximierer, wir wählen dann willkürlich einen aus. Verfolgen wir systematisch alle Wahlen, so erhalten wir alle Gleichgewichte!

Schritt (2) ist leider (noch) nicht konstruktiv. Für endliche reelle Spiele $u : \prod_{i \in I} S^i \to \mathbb{R}^I$ benötigen wir (vorläufig) ein Orakel $u \mapsto s_u \in \mathrm{NE}(\bar{u})$. Ein Nash–Gleichgewicht zu prüfen ist leicht, eins zu finden ist schwer. Oft hilft iterierte Löschung von strikt / schwach dominierten Strategien.

🙂 Die Rekursion wird in der dynamischen Programmierung verwendet.

Die Existenz einer Filtrierung $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ über der Indexmenge $(\mathbb{N}, <)$ haben wir hier zur technischen Vereinfachung eingeführt. Es genügt, eine Filtrierung $(X_n)_{n \in N}$ über einer wohlgeordneten Menge $(N, <)$. Dies kann notwendig werden, wenn Ω_x unendlich ist, wie oben erklärt.

Aufgabe: (1) Warum existiert immer eine Filtrierung $(X_n)_{n \in N}$ von X? (2) Formulieren und beweisen Sie Satz J1D für diesen allgemeinen Fall.

Aufgabe: Für das Schachspiel gilt eine von drei Alternativen (Satz C3A): (a) Weiß kann einen Gewinn erzwingen. (b) Schwarz kann einen Gewinn erzwingen. (c) Jeder von beiden kann mindestens ein Remis erzwingen. Was bedeutet das genau? Genügen hierzu Nash–Gleichgewichte? Wie können Sie die richtige Alternative finden, zumindest im Prinzip?

Ernst Zermelo ist heutigen Studierenden der Mathematik bekannt durch seine Arbeiten zur Mengenlehre, speziell die Zermelo–Fraenkel–Axiome.

Er war zudem ein begeisterter Schachspieler, und dies führte zu zwei mathematischen Arbeiten. Die erste davon *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels* (1913) war sein Vortrag auf dem 5. Internationalen Mathematikerkongress 1912 in Cambridge. Die Mengenlehre war und ist hierzu ein bequemer formaler Rahmen!

Zermelos Rekursion wurde für die Spieltheorie wiederentdeckt durch Harold Kuhn: *Extensive Games and the Problem of Information* (1953). Daher heißt der obige Satz J1D und das Konstruktionsverfahren in der Literatur nach Zermelo oder Zermelo–Kuhn oder auch nur Kuhn.

Rekursion: Kompakt und stetig genügen nicht!

Der Satz von Zermelo zur rekursiven Konstruktion von Gleichgewichten ist einfach und elegant, zudem naheliegend und leicht zu beweisen. Daher liegt es auf der Hand, nach Verallgemeinerungen zu fragen. Können wir die Voraussetzungen noch weiter abschwächen?

Im einfachsten Fall ist in jedem Zustand $x \in X$ nur ein Spieler $j = j(x)$ am Zug, also $\mathrm{pr}^j : A_x \xrightarrow{\sim} A_x^j$ bijektiv. Die entscheidende Voraussetzung ist dann die Endlichkeit der Aktionsmenge A_x^j. Das stellt sicher, dass im Zustand x ein Maximierer $s_x^j \in A_x^j$ für die Auszahlung v_x^j existiert.

Auf den ersten Blick würde man daher vermuten, Zermelos rekursives Verfahren gelingt ebenso, wenn alle Aktionsmengen A_x kompakt sind, und die terminale Auszahlung $v : \partial X \to \mathbb{R}^I$ stetig in den Aktionen ist.

Das folgende Beispiel ist einfach, aber doch überraschend:
Es zeigt eindrücklich, dass diese Vermutung falsch ist!

Die Rekursion führt nämlich dazu, dass v_x^j im Allgemeinen nicht stetig ist und auch kein Maximum annehmen muss.

Rekursion: Kompakt und stetig genügen nicht!

Ein Beispiel: Alice wählt $s^1 \in S^1 = [-1, 1]$, Bob wählt $s^2 \in S^2 = [-1, 1]$, Auszahlungen sind $v : S^1 \times S^2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (s^1, s^2) \mapsto (\ s^1 - s^2,\ s^1 \cdot s^2\ )$. Das sind kompakte Mengen und stetige Funktionen. Sogar bi/linear!

Aufgabe: (1) Finden Sie alle Nash–Gleichgewichte (s^1, s^2) des Spiels v.
(2) Alice spielt zuerst, öffentlich, dann Bob. Finden Sie alle PNE!
(3) Lässt sich rekursiv jedes PNE fortsetzen?

Lösung: (1) Strikt dominant ist $s^1 = 1$, dann $s^2 = 1$, Auszahlung $(0, 1)$.
(2) Bob kennt Alice' Zug s^1 und reagiert rational / optimiert seine Wahl

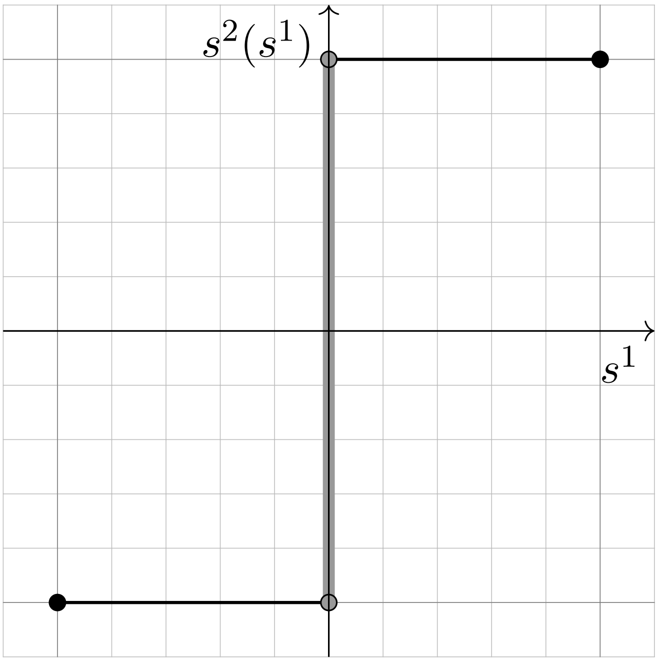
$$s^2 \ :\ S^1 \to S^2 \ :\ s^1 \mapsto \begin{cases} -1 & \text{für } s^1 < 0, \\ +1 & \text{für } s^1 > 0, \\ c & \text{für } s^1 = 0, \end{cases}$$

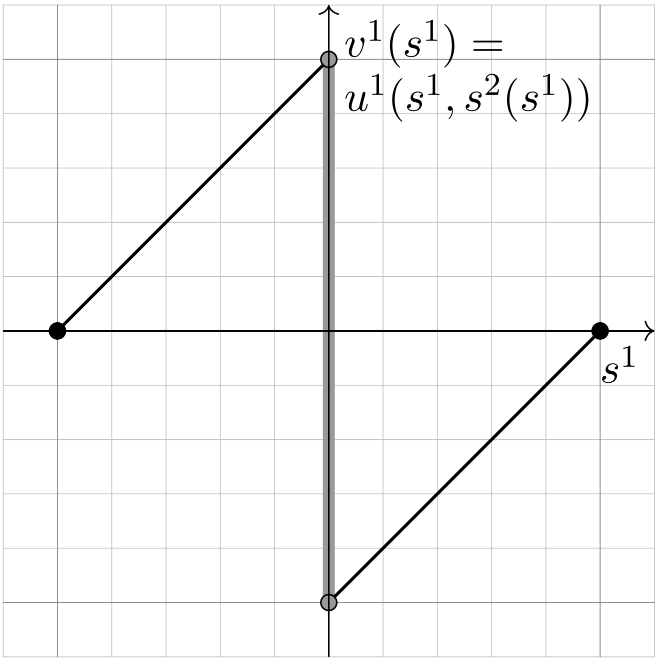
mit $c \in [-1, 1]$. Im Falle $c \in \,]-1, 1]$ hat Alice keine beste Strategie.
Nur im Falle $c = -1$ hat Alice eine beste Strategie, nämlich $s^1 = 0$.

(3) Nein, in diesem Spiel lässt sich nicht jedes teilspielperfekte Gleichgewicht per Rückwärtsinduktion fortsetzen, wie (2) zeigt.

Rekursion: Kompakt und stetig genügen nicht!

Bobs beste Antwort $s^2(s^1) \in [-1, 1]$ auf Alice' Zug $s_1 \in [-1, 1]$:





Die Aktionsmengen $S^1 = S^2 = [-1, 1]$ sind hier kompakt und darauf sind die Auszahlungen $v^1 : (s^1, s^2) \mapsto s^1 - s^2$ und $v^2 : (s^1, s^2) \mapsto s^1 \cdot s^2$ stetig.

⚠ Die Rückwärtsinduktion führt jedoch zu Unstetigkeiten!

Rekursion: Kompakt und stetig genügen nicht!

Moment mal, alles hier ist bilinear in den Strategien $s^1, s^2 \in [-1, 1]$. Das kennen wir doch von Bimatrixspielen. Geht das hier ebenso?

Aufgabe: Schreiben Sie $v : [-1, 1]^2 \to \mathbb{R}^2 : (s^1, s^2) \mapsto (\ s^1 - s^2,\ s^1 \cdot s^2\ )$ (geeignet affin umparametrisiert) als ein Bimatrix-Spiel!

Lösung: Wir setzen $s^1 = 2p - 1$ und $s^2 = 2q - 1$ mit $p, q \in [0, 1]$.

A \ B	0	1
0	A: 0, B: 1	A: -2, B: -1
1	A: 2, B: -1	A: 0, B: 1

$$\begin{aligned}
v^1(p, q) &= 0(1-p)(1-q) + 2p(1-q) - 2(1-p)q + 0pq \\
&= 2p - 2q = s^1 - s^2 \\
v^2(p, q) &= 1(1-p)(1-q) - 1p(1-q) - 1(1-p)q + 1pq \\
&= 4pq - 2p - 2q + 1 = s^1 \cdot s^2
\end{aligned}$$

Aufgabe: (0) Wiederholen Sie aus dem Kapitel C über kombinatorische Spiele die Definition eines neutralen Spiels (G, v) mit Summe $c \in \mathbb{R}$ auf einem Graphen $G = (X, A, \sigma, \tau)$ mit terminaler Auszahlung $v : \partial X \to \bar{\mathbb{R}}$.

(1) Formalisieren Sie dies als ein dynamisches Spiel $\Gamma(G, v)$ über der Spielermenge $I = \{1, 2\}$ (kybernetisch, im Sinne der Definition J1A).

(2) Umgekehrt: Sei $\Gamma = (X, v, f)$ ein deterministisches dynamisches Spiel über $I = \{1, 2\}$. Unter welchen Bedingungen gilt $\Gamma \cong \Gamma(G, v)$?

🙂 Neutrale Spiele sind streng symmetrisch in den beiden Spielern. Diese besondere Struktur erleichtert uns die Beschreibung und Analyse. Insbesondere für neutrale kombinatorische Spiele haben wir starke Werkzeuge wie den Sprague–Grundy–Satz für Summen von Spielen.

Zur Einübung der Notation und der Begriffe wollen wir neutrale Spiele nun in den allgemeineren Rahmen der dynamischen Spiele einbetten.

♦ Definition C1H: neutrales Spiel und Rückwärtsinduktion

Ein **neutrales Spiel** (G, v) mit konstanter Summe $c \in \mathbb{R}$ besteht aus einem artinschen Graphen $G = (X, A, \sigma, \tau)$ mit Auszahlung $v : \partial X \to \bar{\mathbb{R}}$.

Beide Spieler ziehen abwechselnd gemäß den Kanten A des Graphen. In jedem terminalen Zustand $x \in \partial X$ erhält der Ziehende schließlich die Auszahlung $v(x)$ und der Wartende das Komplement $c - v(x)$.

♦ Satz C1H: Gewinnfunktion durch Rückwärtsinduktion

Dazu existiert die eindeutige **Gewinnfunktion** $u : X \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $u|_{\partial X} = v$, die in jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ die Min-Max-Bedingung erfüllt:

$$\boxed{u(x) \stackrel{!}{=} \sup_{x \to y} \Big[c - u(y) \Big] = c - \inf_{x \to y} \Big[u(y) \Big]}$$

Eine **Lösung** oder **optimale Strategie** s ordnet jedem aktiven Zustand $x \in X^\circ$ eine optimale Aktion $s(x) = a : x \to y$ mit $u(x) = c - u(y)$ zu.

Lösung: (1) Sei (G, v) ein neutrales Spiel mit konstanter Summe $c \in \mathbb{R}$ auf dem Graphen $G = (X, A, \sigma, \tau)$ mit der Auszahlung $v : \partial X \to \bar{\mathbb{R}}$.

Wir konstruieren das dynamische Spiel $\Gamma(G, v) = (X', v', f)$ wie folgt:

Zustände: Zum Spielstand $x \in X$ notieren wir, wer zieht und wer wartet. Hierzu setzen wir $X' := X \times \{(1,2),(2,1)\}$ mit der simplen Konvention, dass $x' = (x; i, j) \in X'$ bedeutet, Spieler i zieht und Spieler j wartet.

Auszahlung: Wir zerlegen den Zustandsraum $X' = X'^{\circ} \sqcup \partial X$ gemäß $X'^{\circ} = X^{\circ} \times \{(1,2),(2,1)\}$ und $\partial X' = \partial X \times \{(1,2),(2,1)\}$. Hierauf ist $v' : \partial X' \to \bar{\mathbb{R}}$ gegeben durch $v'^i(x; i, j) = v(x)$ und $v'^j(x; i, j) = c - v(x)$.

Dynamik: Für $x' = (x; i, j) \in X'^{\circ}$ setzen wir $A^i_{x'} = A_x$ und $A^j_{x'} = \{*\}$ sowie $f((x; i, j),(a, *)) = (\tau(x, a); j, i)$ für alle Aktionen $a \in A_x$.

☺ Diese ausführliche Beschreibung ist nicht schwierig, aber länglich. Im Kapitel C haben wir die knappe Beschreibung (G, v) vorgezogen.

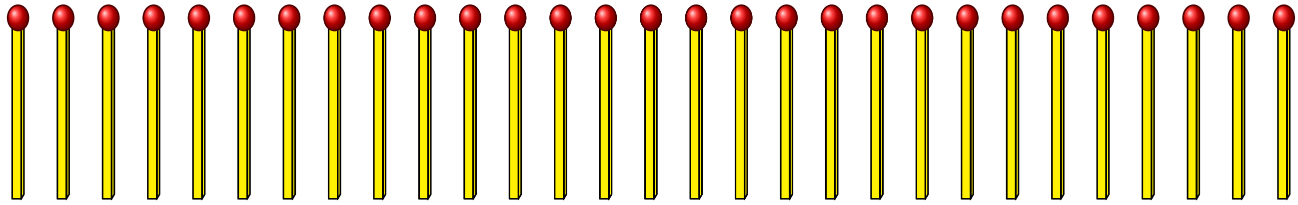
(2) Das so konstruierte dynamische Spiel $\Gamma = \Gamma(G, v) = (X', v', f)$ hat eine besondere Symmetrie: In jedem Zustand $x' \in X'^{\circ}$ zieht nur ein Spieler $i = i(x')$, während der andere Spieler $j = j(x')$ wartet. Bei jedem Zug $(a_1, a_2) : x' \to y'$ gilt $i(y') = j(x')$ und $j(y') = i(x')$.

Zudem existiert ein involutiver Automorphismus $\rho : \Gamma \xrightarrow{\sim} \Gamma$, also $\rho^2 = \mathrm{id}_\Gamma$, der beide Spieler vertauscht:

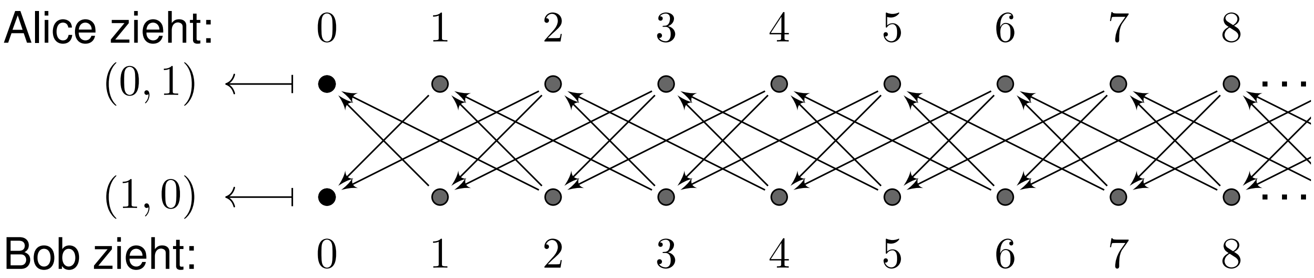
- Spieler: Wir haben $\rho : I \xrightarrow{\sim} I : 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 1$.
- Zustände: Wir haben $\rho : X' \xrightarrow{\sim} X'$ mit $\rho^2 = \mathrm{id}_{X'}$ sowie $\rho(X'^{\circ}) = X'^{\circ}$ und $\rho(\partial X') = \partial X'$.
- Auszahlungen: Wir haben $\rho : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}} : x \mapsto c - x$ sowie $v^1 \circ \rho = \rho \circ v^1 = v^2$ und $v^2 \circ \rho = \rho \circ v^2 = v^1$.
- Dynamik: Wir haben $i \circ \rho = \rho \circ i$ und $j \circ \rho = j \circ \rho$. sowie $\rho((a_1, a_2) : x' \to y') = (a_2, a_1) : \rho(x') \to \rho(y')$.

☺ Jedes dynamische Spiel Γ mit einer solchen Involution ρ können wir als neutrales Spiel $\Gamma = \Gamma(G, v)$ mit konstanter Summe c betrachten.

Einzeiliges Nim dynamisch betrachtet



Auf dem Tisch liegen anfangs $n \in \mathbb{N}$ Streichhölzer / Münzen / Tokens.
Die Spieler ziehen abwechselnd, jeder entfernt ein oder zwei Hölzer.
Normalspiel: Es verliert, wer als erster nicht mehr ziehen kann.
Misèrespiel: Es gewinnt, wer als erster nicht mehr ziehen kann.



Aufgabe:
(1) Formalisieren Sie dies als ein dynamisches Spiel $\Gamma = (X, v, f)$.
(2) Konstruieren Sie rekursiv alle teilspielperfekten Gleichgewichte.

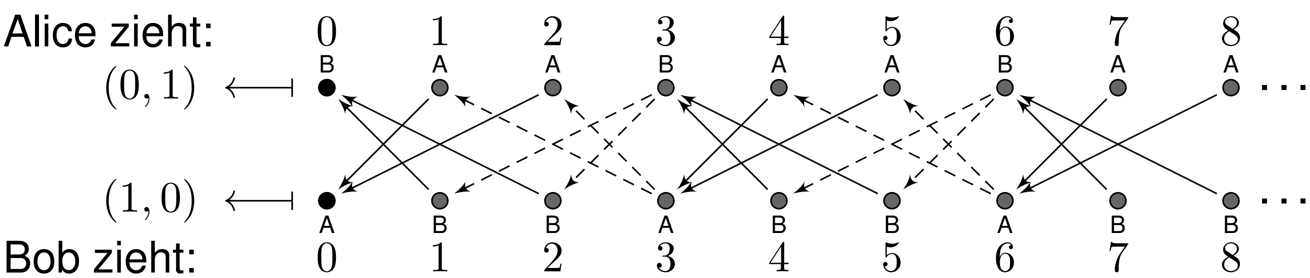
Einzeiliges Nim dynamisch betrachtet

Lösung: (1) Die Spielermenge ist hier $I = \{\, 1{=}\text{Alice},\ 2{=}\text{Bob} \,\}$.
Im Zustand (n, i) liegen noch n Hölzer, und Spieler i ist am Zug.
Als Zustandsraum wählen wir $X = \mathbb{N} \times I$, terminal ist $\partial X = \{0\} \times I$
mit Auszahlung $v : \partial X \to \mathbb{R}^I$ wie oben. Gemäß den Zugregeln gilt

$$\begin{aligned}
A^1_{(n,1)} &= A^2_{(n,2)} = \{1, 2\} && \text{für } n \ge 2,\\
A^1_{(1,1)} &= A^2_{(1,2)} = \{1\} && \text{für } n = 1,\\
A^1_{(n,2)} &= A^2_{(n,1)} = \{0\} && \text{für } n \ge 1.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir $f(\, n, i;\ a^1, a^2 \,) = (\, n - a^1 - a^2,\ i + 1 \bmod 2 \,)$.

(2) Die kanonische Filtrierung ist $X_n = \{0, 1, \dots, n\} \times I$. Rekursion:



Einzeiliges Nim dynamisch betrachtet

Das hier verwendete Modell ist klein aber fein, klar und einfach: In diesem Spiel $\Gamma = (X, v, f)$ ist der Zustandsraum kein Baum! Es gibt noch nicht einmal einen ausgezeichneten Startzustand.

Dieses Beispiel betont die Sichtweise als dynamisches System: Alle Zustände $x \in X$ des Spieles Γ sind zunächst gleichberechtigt. Stärker strukturierte Spielbäume sind erlaubt, aber nicht zwingend.

Die in (2) verwendete Filtrierung ist naheliegend, es gibt viele weitere. Mit jeder können wir wunderbar die Rückwärtsinduktion durchführen!

Als Ergebnis finden wir eine einfache und schöne Paritätsregel:
Gilt $3 \nmid n$, dann hat der ziehende Spieler eine Gewinnstrategie.
Gilt $3 \mid n$, dann hat der Gegenspieler eine Gewinnstrategie.

Wenn Sie diese Regel erst einmal kennen, dann können Sie sie auch leicht unabhängig beweisen durch (Vorwärts-)Induktion. Gefunden haben wir sie durch Zermelos rekursiven Algorithmus.

Diese Rekursion lässt sich auf alle Spiele anwenden, vorausgesetzt die Spieler ziehen jeweils einzeln und haben vollständige Information.

Einzeiliges Nim dynamisch betrachtet

Aufgabe: (3) Erzeugen Sie das Teilspiel Γ_x zum Zustand $x = (n, i)$.
(4) Finden Sie alle Teilspiele $X' \le \Gamma$ und (5) alle Filtrierungen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
(6) Formulieren Sie „Nim mit zufälligem Start“ als Oberspiel $\Gamma' \ge \Gamma$.
(7) Warum erlaubt Γ' keine Filtrierung $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indiziert mit $\mathbb{N}$?

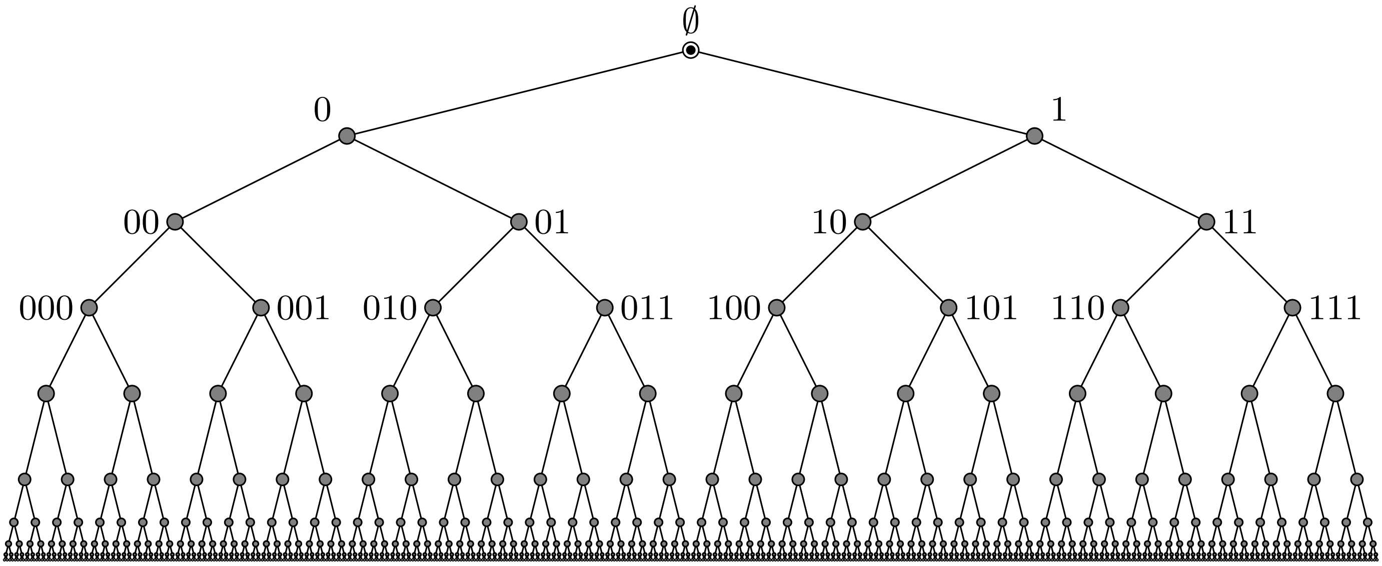
Aufgabe: Was genau bedeutet die Aussage „Alice / Bob hat eine Gewinnstrategie“? Was bedeutet dabei „optimale“ Spielweise? Was passiert, wenn ein Spieler gelegentlich „Fehler“ macht? Genügen für diese Untersuchung bereits Nash–Gleichgewichte?

Aufgabe: Analysieren Sie das Kinderspiel *Tic-Tac-Toe*. Wie groß ist der Spielbaum? Was bedeutet hier „optimale“ Spielweise? Gewinnt Spieler 1 (Kreuze) oder Spieler 2 (Kreise) oder endet es unentschieden?

Aufgabe: Analysieren Sie das Spiel *Strandkiosk* aus der Einleitung. Wie groß ist der Spielbaum? Was bedeutet hier „optimale“ Spielweise? Welcher der drei Spieler A,B,C kann sich welchen Marktanteil sichern?

Trajektorien und Spielbäume

Those who cannot remember the past are condemned to repeat it.
(George Santayana, 1863–1952)



Der **vollständige binäre Baum** besteht aus den Wörten $X = \{0,1\}^{\le\infty}$. Das Alphabet ist $\mathcal{A} = \{0,1\}$. Innere Knoten sind alle endlichen Wörter $x \in X^\circ = \mathcal{A}^*$. Die Kante $x \to x * a$ entspricht der Fortsetzung um den Buchstaben $a \in \mathcal{A}$. Der Rand $\partial X = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ sind alle unendlichen Pfade.

Trajektorien und Spielbäume

Der **Zustandsraum** war bisher beliebig. Das war bequem und flexibel. Wir betrachten nun speziell **Spielbäume**. Das ist bequem und konkret.

☺ Idee: Wir notieren im aktuellen Zustand den bisherigen Spielverlauf. Vollständigkeit: Wir erlauben und bewerten auch unendliche Trajektorien.

☺ Diese Notation vereint algebraische und geometrische Darstellung. Vervollständigung ist die Kompaktifizierung mit idealen Randpunkten.

Beispiel: Beim Schach ist der Zustand genau genommen nicht nur die Stellung der Figuren auf dem Schachbrett, sondern auch das nebenher geführte Protokoll aller bisherigen Züge (z.B. in algebraischer Notation).

Nur so lassen sich manche Regeln überhaupt erst formulieren, etwa: Die Partie endet remis, wenn dreimal dieselbe Stellung erreicht wird, oder 50 Züge lang kein Stein geschlagen und kein Bauer bewegt wird.

Die simple Idee eines Protokolls lässt sich auf jedes Spiel übertragen: Wir codieren den Spielverlauf (bisherige Zustände, Historie, Trajektorie) als endliche Folge, also ein Wort über einem geeigneten Alphabet.

Trajektorien und Spielbäume

Sei $\mathcal{A} \neq \emptyset$ eine Menge von Aktionen, wir betrachten dies als **Alphabet**. Ein **Wort** der Länge n ist ein n–Tupel $w = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1})$ mit $w_i \in \mathcal{A}$.

$$\mathcal{A}^n \;=\; \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A} \;=\; \{\, w : \{0, 1, \dots, n-1\} \to \mathcal{A} \,\}$$

Wir lesen Buchstaben als Wörter vermöge $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^1 : a \mapsto (\{0\} \mapsto a)$. Wir haben die Verknüpfung $* : \mathcal{A}^k \times \mathcal{A}^\ell \to \mathcal{A}^{k+\ell} : (u, v) \mapsto w = uv$ durch Aneinanderhängen (Konkatenation) endlicher Wörter:

$$\underbrace{(u_0, \dots, u_{k-1})}_{= u \,\in\, \mathcal{A}^k} * \underbrace{(v_0, \dots, v_{\ell-1})}_{= v \,\in\, \mathcal{A}^\ell} = \underbrace{(u_0, \dots, u_{k-1}, v_0, \dots, v_{\ell-1})}_{= uv \,=:\, w \,\in\, \mathcal{A}^{k+\ell}}$$

Ausgeschrieben heißt das $w_i = u_i$ für $i < k$ und $w_i = v_{i-k}$ für $i \geq k$. Das leere Wort $e \in \mathcal{A}^0 = \{\emptyset\}$ ist neutral, denn $e * u = u * e = u$. Die Verknüpfung $*$ ist assoziativ, denn $(u * v) * w = u * (v * w)$. Somit erhalten wir das **freie Monoid** $(\mathcal{A}^*, *, e)$ über $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{<\infty} := \textstyle\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^n, \qquad * \,:\, \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^* \,:\, (u, v) \mapsto w = uv$$

Ebenso definieren wir unendliche Wörter $\mathcal{A}^\infty := \mathcal{A}^\mathbb{N} = \{\, w : \mathbb{N} \to \mathcal{A} \,\}$ und die Linksoperation $* : \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^\mathbb{N} \to \mathcal{A}^\mathbb{N} : (u, v) \mapsto w = uv$ wie oben.

Trajektorien und Spielbäume

Wir betrachten die natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ in von Neumanns Modell: $0 = \{\,\}$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, …, $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, … Somit ist $\mathcal{A}^n = \{\, w : n \to \mathcal{A}\}$ die Menge aller Abbildungen $w : n \to \mathcal{A}$. Das einzige Wort der Länge 0 ist demnach das leere Wort $e : \emptyset \to \mathcal{A}$

Die Menge $\mathcal{A}^\mathbb{N} = \{\, w : \mathbb{N} \to \mathcal{A} : k \mapsto w_k \,\}$ besteht entsprechend aus allen unendlichen Wörten, üblicherweise heißen sie Folgen $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Hierauf operiert das freie Monoid $(\mathcal{A}^*, *, e)$ durch Konkatenation von links.

Für $u \in \mathcal{A}^m$ und $w \in \mathcal{A}^{\leq \infty}$ bedeutet die Inklusion $u \subseteq w$: Es gilt $w = uv$ mit Startsegment $u = w|_m$ und eindeutiger Fortsetzung durch $v \in \mathcal{A}^{\leq \infty}$.

Beispiele: Der beliebte euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ beruht auf der Menge aller n–Tupel $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ reeller Zahlen $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$. Die übliche Indizierung $0, 1, \dots, n-1$ in der Informatik und $1, 2, \dots, n$ in der Mathematik sind äquivalent durch die kanonische Umnummerierung.

Den Folgenraum $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ kennen Sie prominent aus der Analysis. Die Räume $\mathbb{R}^\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{C}^\mathbb{Z}$ bestehen aus beidseitig unendlichen Folgen, diese nutzen Sie dankend für Fourier–Reihen und Laurent–Reihen.

Trajektorien und Spielbäume

Die Menge aller (endlichen oder unendlichen) Folgen über $\mathcal{A}$ ist

$$\mathcal{A}^{\le\infty} := \mathcal{A}^0 \sqcup \mathcal{A}^1 \sqcup \mathcal{A}^2 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \mathcal{A}^* \sqcup \mathcal{A}^{\mathbb{N}}.$$

Die **Spielverläufe** sind hierin eine Teilmenge $X \subseteq \mathcal{A}^{\le\infty}$, zerlegt in

$$X = X_0 \sqcup X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_\infty \quad \text{mit} \quad X_n = X \cap \mathcal{A}^n.$$

Wir nennen X **baumförmig** (engl. *arborescent*), wenn gilt:

1. Als Start haben wir $X_\ell = \{\alpha\}$ und zuvor $X_0 = \dots = X_{\ell-1} = \emptyset$.
2. Für jede endliche Folge $x \in X_n$ und $\ell \le m \le n$ gilt $x|_m \in X_m$.
3. Sei $x : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ eine unendliche Folge. Wir schreiben $x = \lim(x|_m)$. Genau dann gilt $x \in X_\infty$, wenn $x|_m \in X_m$ für alle $\ell \le m < \infty$.

Wir zerlegen $X = X^\circ \sqcup \partial X$ mit $\partial X = X_\infty \cup \{\, x \in X_{<\infty} \mid x\mathcal{A} \cap X = \emptyset \,\}$.

Jedes $x \in X$ heißt **Trajektorie**. Sie ist **terminal**, falls sie unendlich ist, $x \in X_\infty$, oder endlich aber nicht fortsetzbar, $x \in X_{<\infty}$ und $x\mathcal{A} \cap X = \emptyset$. Andernfalls ist sie endlich und fortsetzbar, $x \in X_{<\infty}$ und $x\mathcal{A} \cap X \ne \emptyset$.

Trajektorien und Spielbäume

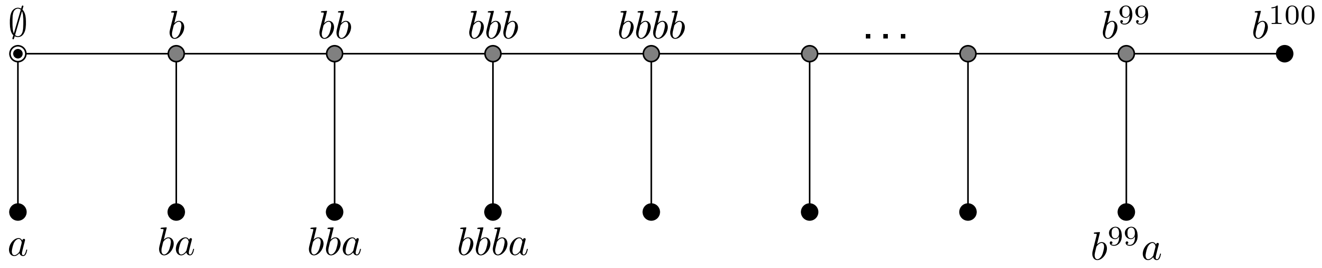
Diese Beschreibung fasst Spielzustände und Spielverläufe zusammen. Für dynamische Spiele in kybernetischer Form sind dies im Allgemeinen zwei verschiedene Dinge: Der Spielverlauf beinhaltet als letzten Eintrag den aktuellen Spielzustand. 🙂 Für Bäume gilt auch die Umkehrung.

Für die Spieltheorie ist diese Eigenschaft wesentlich und nützlich: Jeder Spielzustand $x \in X$ enthält seine gesamte Vorgeschichte! Die extensive Form beschert dem Spiel perfekte Erinnerung.
☹ Der Preis hierfür sind im Allgemeinen sehr große Spielbäume.

Zur Beschreibung benötigen wir nur die baumförmige Menge $X \subseteq \mathcal{A}^{\le\infty}$ von Wörtern über $\mathcal{A}$. Die Mengen $\mathcal{A}$ und X sind ansonsten beliebig. Diese formale Konstruktion ist extrem elegant, raffiniert und kompakt!
🙂 Das topologische Wortspiel ist hier ganz bewusst und beabsichtigt.

Die aktiven Zustände $x \in X^\circ$ sind die Wörter, die sich innerhalb von X noch fortsetzen lassen. Alle anderen Wörter sind terminale Zustände. Somit ist die Zerlegung $X = X^\circ \sqcup \partial X$ bereits in der Menge X codiert, ebenso alle Aktionen $x \to y$ als mögliche Fortsetzung $y \in x\mathcal{A} \cap X$.

Der Hundertfüßler / *centipede*



Aufgabe: Sei speziell $L = 100$ oder allgemein $L \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Formalisieren Sie diesen Baum $X \subset \{a, b\}^{\leq\infty}$ der Länge L. Welche Zustände sind aktiv X°, welche sind terminal ∂X?

Lösung: Für $L \in \mathbb{N}$ haben wir gemäß Skizze

$$X = \left\{ b^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}_{\leq L} \right\} \cup \left\{ b^n a \,\middle|\, n \in \mathbb{N}_{<L} \right\}.$$

Aktive Zustände / innere Knoten sind hier $X^\circ = \{ b^n \mid n \in \mathbb{N}_{<L} \}$. Terminale Zustände / Blätter sind entsprechend $\partial X = X \smallsetminus X^\circ$.

Im Fall $L = \infty$ kommt die konstante Folge $b^\infty = bbbbb\ldots \in \partial X$ hinzu. Dies ist kein endlicher Knoten des Baumes, dient aber als Endzustand.

Somit ist die Zerlegung $X = X^\circ \sqcup \partial X$ bereits in der Menge X codiert, ebenso alle Aktionen $x \to y$ als mögliche Fortsetzung $y \in x\mathcal{A} \cap X$.

Der Hundertfüßler / *centipede*

Der vollständige Binärbaum und der Hundertfüßler sind erste Beispiele, allein darauf lassen sich bereits einige interessante Spiele konstruieren.

Unsere Notation verfolgt zwei Ziele: (1) Wir benötigen einen allgemeinen Rahmen zur Entwicklung der Theorie (Definitionen, Sätze, Beweise).

(2) Wir benötigen eine geeinete Sprache zur bequemen Beschreibung und präzisen Untersuchung konkreter Beispiele und Anwendungen.

Deshalb haben wir ein starkes Interesse an einer guten Notation, die sowohl knapp und bequem als auch expressiv und vielseitig ist.

Die hier dargestelle Baumstruktur findet sich daher in jedem Lehrbuch der Spieltheorie. Ich wähle eine mathematisch elegante Formalisierung. Informatik und Graphentheorie nutzen ähnliche Definitionen zu Bäumen, meist jedoch mit etwas abweichender Zielsetzung und Formalisierung.

Die Formalisierung als Wörter $X \subseteq \mathcal{A}^{\leq\infty}$ nutzt insbesondere in der deskriptiven Mengenlehre und Topologie, siehe A. Kechris: *Classical Descriptive Set Theory.* Springer 1995. Dort wird der bemerkenswerte Zusammenhang zwischen Logik, Mengenlehre und Spielen erklärt.

Dynamische Spiele in extensiver Form

Definition J2A: dynamisches Spiel in extensiver Form

Ein **dynamisches Spiel** $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P})$ über der Spielermenge I in (allgemein / kanonisch) **extensiver Form** beinhaltet folgende Daten:

1. Eine Zustandsmenge $X \subseteq \mathcal{A}^{\le\infty}$ in Baumform, somit $X = X^\circ \sqcup \partial X$, sowie eine Auszahlung $v : \partial X \to \mathbb{R}^I$ auf den terminalen Zuständen.
2. Eine Dynamik $f_x : \Omega_x \times A_x \twoheadrightarrow x\mathcal{A} \cap X$ für aktive Zustände $x \in X^\circ$. Hierbei sei $\Omega_x \neq \emptyset$ und $A_x = \prod_{i \in I} A_x^i \neq \emptyset$ ein Produkt über I.

   Kanonisch ist hier $f_x : \Omega_x \times A_x \xrightarrow{\sim} x\mathcal{A} \cap X : (\omega, a) \mapsto x * (\omega, a)$ durch Aneinanderhängung, also vollständige Niederschrift aller Aktionen.
3. Ein WMaß $\mathbf{P}$ auf dem Produktraum $(\Omega, \mathscr{A}) = \prod_{x \in X^\circ} (\Omega_x, \mathscr{A}_x)$.

Kanonisch genügen die Daten $(X, v, \mathbf{P})$, deterministisch nur (X, v, f), oder (X, v) im Falle einer kanonischen, deterministischen Dynamik.

☺ Als Kollateralnutzen beschert uns die Formalisierung in extensiver Baumform eine konzise Beschreibung: Der Baum X ist groß, doch die Definition ist kurz. Das muss man erst einmal verarbeiten und einüben.

Dynamische Spiele in extensiver Form

Im Produkt $\Omega_x \times A_x$ codieren wir die Zufallszüge und Spieleraktionen:

In jedem Zustand $x \in X^\circ$ erfolgt eine Ziehung $\omega_x \in \Omega_x$. Diese müssen nicht unabhängig sein, daher betrachten wir $\mathrm{pr}_x : (\Omega, \mathbf{P}) \to (\Omega_x, \mathbf{P}_x)$.

Im Zustand $x \in X^\circ$ hat der Spieler $i \in X$ die Aktionsmenge $A_x^i \neq \emptyset$. Bei einelementiger Menge $A_x^i = \{*\}$ hat der Spieler i keinen Einfluss.

Die Dynamik $f_x : \Omega_x \times A_x \twoheadrightarrow x\mathcal{A} \cap X$ setzt den Spielverlauf fort, indem an die bisherige Trajektorie der nächste Schritt angehängt wird.

In der Literatur ist die Bijektion $f_x : (\omega, a) \mapsto x * (\omega, a)$ üblich. Das heißt: Die gesamte Aktion (ω, a) wird in der Trajektorie $x \mapsto x * (\omega, a)$ vermerkt.

Eine Surjektion $f_x : \Omega_x \times A_x \twoheadrightarrow x\mathcal{A} \cap X$ würde genügen. Anschaulich: Nur das als relevant betrachtete Ergebnis der Aktionen wird vermerkt, etwa bei geheimer Abstimmung nur das Ergebnis statt der Einzelvoten.

Äquivalente Aktionen entsprechen dann derselben Kante im Spielbaum. Diese Zusammenfassung ist flexibler und erlaubt kleinere Bäume. Deshalb führen wir dies hier als allgemein extensive Spiele ein.

Definition J2B: Strategien und Spielverlauf

Eine **Strategie** für Spieler $i \in I$ ist ein Element $s^i \in S^i := \prod_{x \in X^\circ} A^i_x$, also eine Aktion $s^i_x \in A^i_x$ für jeden aktiven Zustand $x \in X^\circ$ des Spiels. Dies ist eine Abbildung $s^i : X^\circ \to A^i := \bigcup_{x \in X^\circ} A^i_x$ mit $x \mapsto s^i_x \in A^i_x$.

Ein **Strategievektor** ist demnach $s \in S := \prod_{i \in I} S^i \cong \prod_{x \in X^\circ} A_x$. Jeder Spieler $i \in I$ wählt unabhängig seine Strategie $s^i \in S^i$.

Aus Startzustand $x_m \in X_m$, Zufallselement $\omega \in \Omega$ und Strategievektor $s \in S$ folgt der **Spielverlauf** rekursiv gemäß $x_{t+1} = f(x_t, \omega_{x_t}, s_{x_t})$ und

$$\lim \;:\; X \times \Omega \times S \to \partial X \;:\; \lim(x_m, \omega, s) := \bigcup\nolimits_{t \ge m} x_t.$$

Auch im Spezialfall einer endlichen Trajektorie $x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$ mit terminalem Zustand $x_n \in \partial X$ haben wir $\lim(x_m, \omega, s) = \bigcup_{t \ge m} x_t = x_n$.

🙂 Jede Strategie $s^i \in S^i$ für Spieler $i \in I$ ist ein Handlungsplan. Die Spieler entscheiden sich somit nicht spontan, sondern im Voraus. Vorteil: Damit lassen sich Spielverlauf und Auszahlung berechnen.

In extensiver Form ist es üblich, terminale Auszahlungen zu betrachten. Das ist keine wesentliche Einschränkung: Alle sofortigen Belohnungen werden entlang der Trajektorie kumuliert und erst am Ende ausgezahlt. Dies ist problemlos möglich, da wir die gesamte Trajektorie abbilden.

Die extensive Form ermöglicht zudem, auch unendliche Trajektorien im selben Rahmen zu behandeln: Diese sind immer terminal, liegen also im Rand ∂X, und werden durch die Auszahlung $v : \partial X \to \mathbb{R}^I$ bewertet. Genau zu diesem Zweck haben wir *vollständige* Bäume erklärt.

Die kybernetische Form ist zunächst allgemeiner, da der Zustandsraum X und die Dynamik f nicht immer baumförmig strukturiert sein *müssen*, sondern bei der Wahl des Spiel*graphen* noch mehr Flexibilität lassen. In der extensiven Form legen wir uns auf Spiel*bäume* fest.

Auch in kybernetischer Form sind unendliche Trajektorien durchaus möglich. Im Falle eines Diskontfaktors $\delta \in [0, 1[$ ist hier ihre terminale Auszahlung implizit gleich 0. Es zählt dann allein die diskontierte Summe der sofortigen Belohnungen entlang der Trajektorie.

Definition J2C: teilspielperfekte Gleichgewichte

Die Auszahlung $v : \partial X \to \mathbb{R}^I$ setzen wir fort und mitteln über $(\Omega, \mathbf{P})$:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &: X \times \Omega \times S \to \mathbb{R}^I : (x, \omega, s) \mapsto v\big(\lim(x, \omega, s)\big) \\ u &: X \times S \to \mathbb{R}^I : \qquad (x, s) \mapsto \mathbf{E}\big[\omega \mapsto \tilde{u}(x, \omega, s)\big] \end{aligned}$$

Hierzu fordern wir absolute Summierbarkeit, etwa v und $\tilde{u}$ beschränkt. Zu jedem Startzustand $x \in X$ erhalten wir ein Spiel in Normalform:

$$u_x : S = \prod_{i \in I} S^i \to \mathbb{R}^I : s \mapsto u(x, s) = \mathbf{E}\big[\omega \mapsto \tilde{u}(x, \omega, s)\big]$$

Damit definieren wir die **teilspielperfekten Gleichgewichte** von Γ:

$$\operatorname{PNE}(\Gamma) = \operatorname{PNE}(\Gamma, S) := \bigcap_{x \in X^\circ} \operatorname{NE}\big(u_x : S \to \mathbb{R}^I\big)$$

Ebenso für (lokal) gemischte Strategien $s^i \in \bar{S}^i = \prod_{x \in X^\circ} [A^i_x]$ und (lokal) gemischte teilspielperfekte Nash–Gleichgewichte $\operatorname{PNE}(\bar{\Gamma}) = \operatorname{PNE}(\Gamma, \bar{S})$.

Wir betrachten hier Spiele in extensiver Form mit terminaler Auszahlung. Um diese auf einen aktiven Zustand $x \in X^\circ$ zurückzuziehen, benötigen wir ab dem Start in x die vollständige Trajektorie $\lim(x, \omega, s) \in \partial X$. Diese erhalten wir aus dem Strategiebündel s und den Zufallszügen ω. (Genauer genügt der Teil dieser Information, der von x erreichbar ist.)

Damit können wir $\tilde{u}$ definieren, wie oben erklärt, und zu u mitteln. Für jeden Startzustand $x \in X^\circ$ können wir so Strategien bewerten und somit insbesondere wie gewohnt Nash–Gleichgewichte erklären. Die Definition von teilspielperfekten Nash–Gleichgewichten, also den Mengen $\operatorname{PNE}(\Gamma, S)$ und $\operatorname{PNE}(\Gamma, \bar{S})$, gelingt damit leicht und elegant.

⚠ Das erklärt, was wir *suchen*, aber noch nicht, wie wir es *finden*. Die Bestimmung von teilspielperfekten Gleichgewichten ist schwierig. Dazu dient das folgende *Prinzip der einmaligen Abweichung* J2D.

⚠ Bei unvollständiger Information müssen wir dies noch verfeinern, sowohl das Spiel J3A als auch das Lösungskonzept J3B.

Dynamische Spiele in extensiver Form

Wir nutzen die extensive Form schon lange zur Darstellung von Spielen als Bäume, nun formalisieren und präzisieren wir dieses Vorgehen.

Beispiel: Alice und Bob erben 10 Dukaten. Das Testament verlangt: Alice wünscht sich $x \in \{1,\dots,9\}$ und Bob wünscht sich $y \in \{1,\dots,9\}$, (0) zugleich, (1) erst Alice, (2) erst Bob. Gilt $x+y>10$, so verfällt alles. Gilt $x+y \le 10$, so werden beide Wünsche erfüllt, etwaiger Rest verfällt.

Aufgabe: (a) Formalisieren Sie dies als ein dynamisches Spiel Γ.
(b) Bestimmen Sie alle teilspielperfekten Nash–Gleichgewichte.

Lösung: (0a) Dies ist im Wesentlichen ein statisches Spiel, siehe E109.

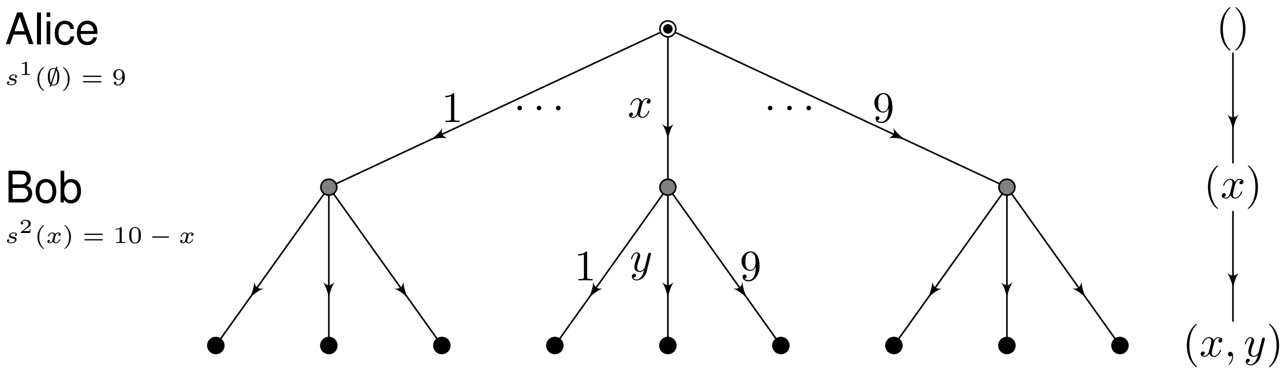
$$u \;:\; \{1,\dots,9\}^2 \to \mathbb{R}^2 \;:\; (x,y) \mapsto \begin{cases} (x,y) & \text{falls } x+y \le 10, \\ (0,0) & \text{falls } x+y > 10. \end{cases}$$

(0b) Wir finden hier genau die folgenden neun Nash–Gleichgewichte:
$\mathrm{NE}(u) \subseteq \{\, (1,9), (2,8), (3,7), (4,6), (5,5), (6,4), (7,3), (8,2), (9,1) \,\}$

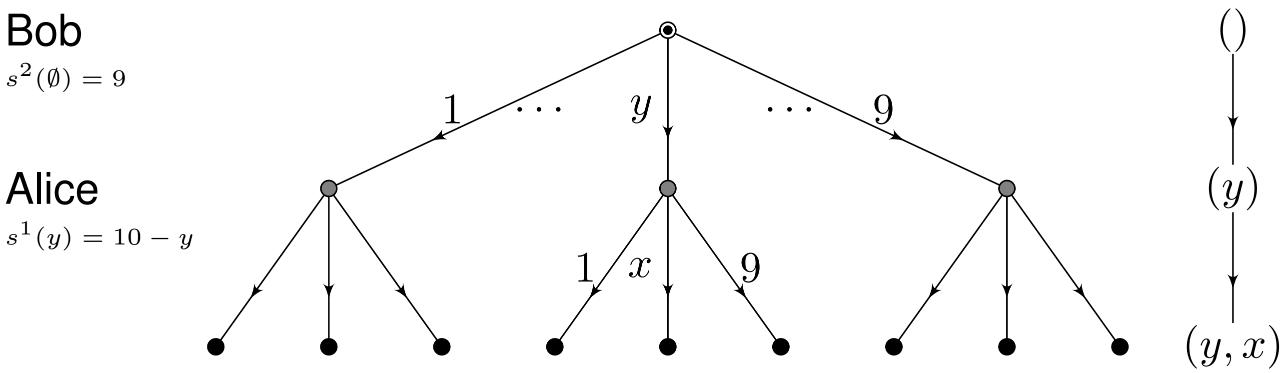
Die zeitliche Struktur in (1) und (2) codieren wir als Spielbaum, die Gleichgewichte finden wir hier leicht per Rückwärtsinduktion.

Dynamische Spiele in extensiver Form

(1) Wir finden (a) den folgenden Spielbaum und (b) $u\,\mathrm{PNE}(\Gamma) = \{(9,1)\}$.



(2) Wir finden (a) den folgenden Spielbaum und (b) $u\,\mathrm{PNE}(\Gamma) = \{(1,9)\}$.



Das Prinzip der einmaligen Abweichung

☺ Das folgende Kriterium heißt *Prinzip der einmaligen Abweichung*, engl. *one-time-deviation principle*. Es erlaubt einen einfachen Test, ob mit $s = (s^i)_{i \in I} \in S$ ein teilspielperfektes Gleichgewicht vorliegt.

Satz J2D: Prinzip der einmaligen Abweichung, allgemein

Sei $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P})$ ein dynamisches Spiel in extensiver Form.

Vorgelegt sei ein Strategievektor $s \in \bar{S} = \prod_{i \in I} \bar{S}^i$ mit $\bar{S}^i = \prod_{x \in X^\circ} [A_x^i]$. Wir wollen prüfen, ob s ein teilspielperfektes Nash–Gleichgewicht ist.

Für den Spieler $i \in I$ sei die terminale Auszahlung $v^i : \partial X \to \mathbb{R}$ stetig bezüglich der Baumtopologie J2E. Dann sind äquivalent:

1. Der Vektor s ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht für Spieler i: Es gilt $\bar{u}_x^i(\tilde{s}^i; s^{-i}) \le \bar{u}_x^i(s^i; s^{-i})$ für alle $x \in X^\circ$ und $\tilde{s}^i \in \bar{S}^i$.
2. Der Vektor s erfüllt das Kriterium der einmaligen Abweichung: Es gilt $\bar{u}_x^i(\hat{s}^i; s^{-i}) \le \bar{u}_x^i(s^i; s^{-i})$ für jeden Zustand $x \in X^\circ$ und jede Alternative $\hat{s}^i \in \bar{S}^i$, die von s^i nur in $\hat{s}_x^i \in A_x^i$ abweicht.

Dieses Lokal-Global-Prinzip entspricht Bellmans Optimalität D2M!

Das Prinzip der einmaligen Abweichung

Abfolge von *future selves*, analog zu Schellings Egonomics (H303).

(1) Spieler i optimiert global jede der Auszahlungen $\bar{u}_x^i$ für $x \in X^\circ$. Zur Auswahl stehen alle alternativen Strategien $\tilde{s}^i \in \bar{S}^i = \prod_{x \in X^\circ} [A_x^i]$.

(2) Spieler $i \in I$ spaltet sich in unabhängige Klone $(i, x) \in I \times X^\circ$: Jeder optimiert lokal seine Auszahlung $\bar{u}_x^i$ durch seine Aktion $\hat{s}_x^i \in A_x^i$.

Das Prinzip der einmaligen Abweichung

🙂 Das Prinzip J2D dient zur **Prüfung**, ob ein vorgelegter Strategievektor $s = (s^i)_{i \in I} \in \bar{S}$ ein Gleichgewicht ist oder nicht. Wenn irgendein Spieler $i \in I$ seine Strategie s^i verbessern kann, dann kann er dies bereits durch Änderung einer einzigen Aktion s^i_x.

Sprichwörtlich: Selbst die längste Reise beginnt mit dem ersten Schritt! Dieses einfache Kriterium strukturiert die Untersuchung von Strategien: Es beschert uns den effizient-einfachen Algorithmus, systematisch jede einzelne Abweichung durchzugehen und auf Verbesserung zu prüfen.

🙂 Das Prinzip J2D ähnelt formal der Rückwärtsinduktion J1D. Diese dient zur **Konstruktion** aller Gleichgewichte; das ist stärker! Im endlichen Falle sind die beiden Sätze J1D und J2D äquivalent: Dann haben wir einen Anfang, nämlich die terminalen Zustände.

Hier haben wir nichts dergleichen und müssen uns anders behelfen. Der Beweis nutzt eine Vorwärtsinduktion und Grenzwertbetrachtung. Wir klären zunächst die zugrundeliegende Topologie auf $X \subseteq \mathcal{A}^{\le\infty}$ und illustrieren an Gegen/Beispielen, wie das Prinzip funktioniert.

Das Prinzip der einmaligen Abweichung

Die wesentliche und einzige Voraussetzung des Satzes ist die **Stetigkeit** der Auszahlung $v^i : \partial X \to \mathbb{R}$. Das müssen wir klären.

Der Rand $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ hat eine natürliche Topologie: die Produkttopologie! Der Teilraum $X_\infty = X \cap \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ erbt diese als Teilraumtopologie. (J2I)

Definition J2E: Baumtopologie auf einem Baum $X \subseteq \mathcal{A}^{\le\infty}$

Sei $X \subseteq \mathcal{A}^{\le\infty}$ baumförmig über dem Alphabet $\mathcal{A}$. Zu jedem endlichen Wort $w \in \mathcal{A}^*$ sei $U_w := \{\, x \in X \mid w \subseteq x \,\}$ die Menge der Fortsetzungen in X. Die Familie $\{\, U_w \mid w \in \mathcal{A}^* \,\}$ bildet eine Basis der Topologie auf X.

Eine Abbildung $v : \partial X \to \mathbb{R}$ ist stetig / unterhalbstetig / oberhalbstetig im Punkt $z \in \partial X$, wenn zu jedem noch so kleinen $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $x \in X$ mit $x|_n = z|_n$ gilt:

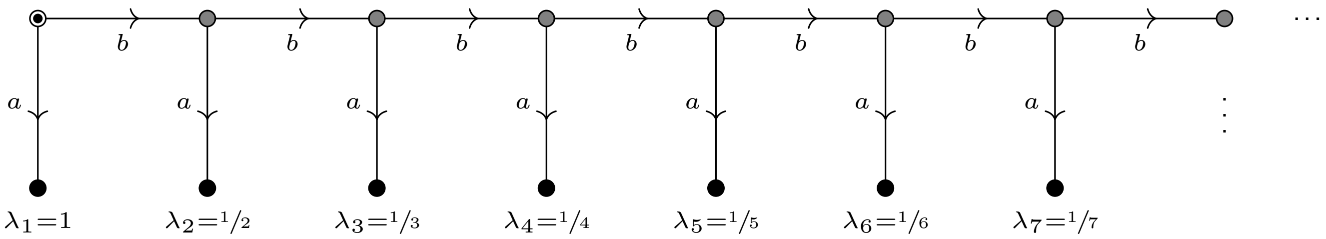
$$\begin{aligned} v(z) - \varepsilon < v(x) < v(z) + \varepsilon \qquad & (v \text{ ist stetig in } z) \\ v(z) - \varepsilon < v(x) \qquad\qquad\qquad & (\text{unterhalbstetig}) \\ v(x) < v(z) + \varepsilon \qquad & (\text{oberhalbstetig}) \end{aligned}$$

Drastisches Gegen/Beispiel zur einmaligen Abweichung

Für endliche Spiele entspricht das Prinzip der einmaligen Abweichung (J2D) genau der Rückwärtsinduktion aus dem Satz von Zermelo (J1D). Für unendliche Spiele ist die Stetigkeit der Auszahlung wesentlich!

Aufgabe: Zur Illustration betrachten wir ein Spiel mit nur einem Spieler. (Wir optimieren nur s^i, die Gegenstrategien s^{-i} werden festgehalten.)

Wir wählen einen besonders einfachen unendlichen Spielbaum:



Allgemein sei $\lambda_n \searrow 0$ eine strikt fallende Nullfolge und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.
(0) Formalisieren Sie das Spiel Γ_λ mit $v(b^\infty) = \lambda$ in extensiver Form.
(1) Finden Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma_\lambda)$.
(2) Finden Sie alle s, die maximieren bezüglich einmaliger Abweichung.
(3) Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt das Prinzip der einmaligen Abweichung?

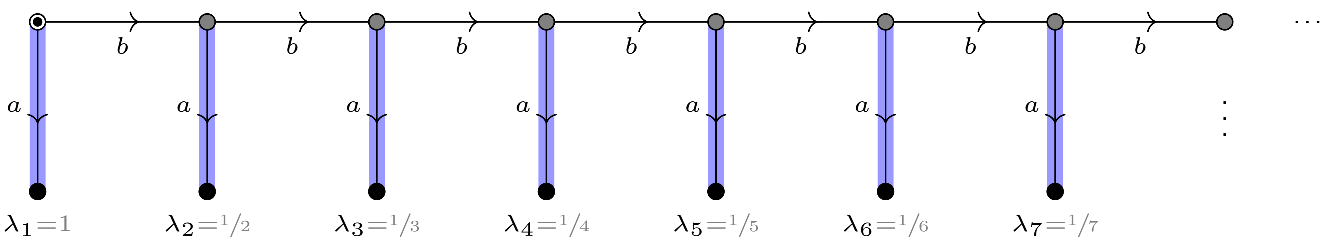
Drastisches Gegen/Beispiel zur einmaligen Abweichung

Lösung: (0) Gemäß der Skizze haben wir den Spielbaum

$$X = \{\, b^n, b^n a \mid n \in \mathbb{N} \,\} \cup \{\, b^\infty = bbbbb\ldots \,\},$$

aktiv $X^\circ = \{\, b^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ und terminal $\partial X = \{\, b^n a \mid n \in \mathbb{N} \,\} \cup \{b^\infty\}$.
Terminale Auszahlungen sind $v(b^{n-1}a) = \lambda_n \searrow 0$ und $v(b^\infty) = \lambda$.

(1) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ unterscheiden wir die beiden Fälle $\lambda \le 0$ und $\lambda > 0$:
(1a) Für $\lambda \le 0$ gilt $\mathrm{PNE}(\Gamma_\lambda) = \{s_\infty\}$ mit $s_\infty(b^n) = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

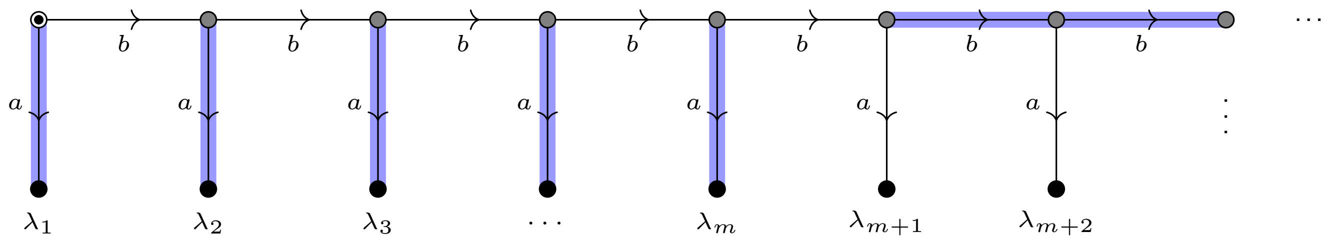


(1b) Für $\lambda > 0$ ist die Strategie s_∞ offensichtlich nicht teilspielperfekt, erfüllt aber immer noch das Prinzip der einmaligen Abweichung!

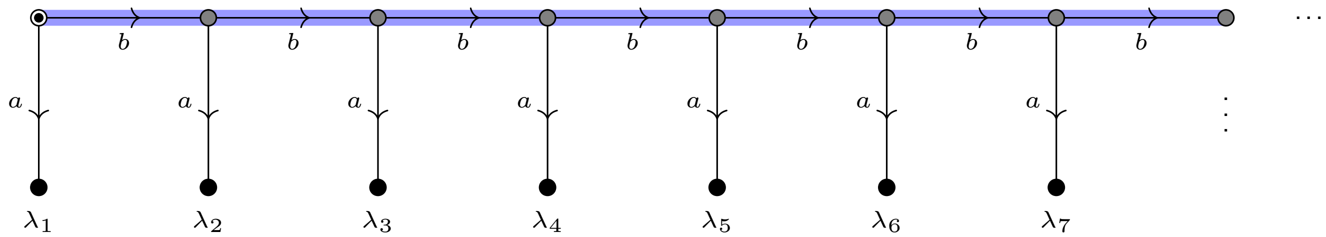
⚠ Das Kriterium ist immer notwendig, hier aber nicht hinreichend. Wesentlich ist die (Unterhalb)Stetigkeit der Auszahlung v wie in (1a).

Drastisches Gegen/Beispiel zur einmaligen Abweichung

Für $\lambda_m > \lambda > \lambda_{m+1}$ mit $m \in \mathbb{N}$ finden wir das einzige teilspielperfekte Gleichgewicht s_m mit $s_m(b^n) = a$ für $n < m$ und $s_m(b^n) = b$ für $n \geq m$.



Speziell für $\lambda > \lambda_1$ haben wir $m = 0$ und $s_0(b^n) = b$ für alle $n \in \mathbb{N}$:



☺ Damit ist die Lösungsmenge $\mathrm{PNE}(\Gamma_\lambda) = \{s_m\}$ ausgeschöpft.

Im Sonderfall $\lambda = \lambda_{m+1}$ mit $m \in \mathbb{N}$ gibt es genau zwei Gleichgewichte, denn $s(b^m) \in \{a, b\}$ ist beliebig. Das bedeutet $\mathrm{PNE}(\Gamma_\lambda) = \{s_m, s_{m+1}\}$.

Drastisches Gegen/Beispiel zur einmaligen Abweichung

(2) Jedes $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma_\lambda)$ ist maximal bezüglich beliebiger Abweichungen. Unabhängig vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Strategie s_∞ immer maximal bezüglich einmaliger Abweichung, sogar bzgl. endlicher Abweichung. Für $\lambda \leq 0$ ist die Strategie s_∞ teilspielperfekt, für $\lambda > 0$ hingegen nicht!

(3) Wir kennen für das Spiel Γ_λ alle Gleichgewichte: Das Prinzip der einmaligen Abweichung gilt hier nur für $\lambda \leq 0$. Es gilt nicht für $\lambda > 0$. Nochmal zur Betonung: Teilspielperfekt sind nur s_m und evtl. s_{m+1}, den Test der einmaligen Abweichung passiert zudem auch s_∞.

☺ Statt einem einzigen Spieler i können wir uns unendlich viele Klone (i, x) vorstellen, je einen Klon für jeden inneren Knoten $x = b^n$, $n \in \mathbb{N}$: Der Klon (i, x) trifft nur seine eigene lokale Entscheidung $s(b^n) \in \{a, b\}$ und maximiert kurzsichtig nur seine individuelle Nutzenfunktion $u_x^i(s)$.

Da jeder Klon nur einmal agiert, optimiert er nur diesen einen Zug. Teilspielperfekt impliziert maximal bezüglich einmaliger Abweichung. Für $\lambda \leq 0$ ist das Klon-Modell äquivalent zum Ein-Spieler-Modell. Für $\lambda > 0$ gibt es im Klon-Modell ein zusätzliches Gleichgewicht!

Dieses drastische Beispiel belegt, dass wirklich etwas zu beweisen ist. Es illustriert zudem sehr anschaulich bereits die Kernidee des Beweises!

Aufgabe: Präzisieren Sie den Satz J2D für deterministische Spiele und reine Strategien; zum Beweis genügt bereits die Unterhalbstetigkeit.

Satz J2F: Prinzip der einmaligen Abweichung, deterministisch

Sei $\Gamma = (X, v, f)$ ein deterministisches Spiel in extensiver Form.

Vorgelegt sei ein Strategievektor $s \in S = \prod_{i \in I} S^i$ mit $S^i = \prod_{x \in X^\circ} A^i_x$.

Für den Spieler $i \in I$ sei die terminale Auszahlung $v^i : \partial X \to \mathbb{R}$ unterhalbstetig bezüglich der Baumtopologie J2E. Dann sind äquivalent:

1. Der Vektor s ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht für Spieler i: Es gilt $u^i_x(\tilde{s}^i; s^{-i}) \le u^i_x(s^i; s^{-i})$ für alle $x \in X^\circ$ und $\tilde{s}^i \in S^i$.
2. Der Vektor s erfüllt das Kriterium der einmaligen Abweichung: Es gilt $u^i_x(\hat{s}^i; s^{-i}) \le u^i_x(s^i; s^{-i})$ für jeden Zustand $x \in X^\circ$ und jede Alternative $\hat{s}^i \in S^i$, die von s^i nur in $\hat{s}^i_x \in A^i_x$ abweicht.

Beweis: Die Implikation „(1) ⇒ (2)“ ist trivial. Wir zeigen „(2) ⇒ (1)“. Vorgelegt sei der Strategievektor $s \in S = \prod_{i \in I} S^i$ mit $S^i = \prod_{x \in X^\circ} A^i_x$. Wir halten s^{-i} fest und schreiben abkürzend $u^i_x(s^i)$ für $u^i_x(s^i; s^{-i})$. Sei $u^i_x(s^i) = a \le b = u^i_x(\tilde{s}^i)$ für $x \in X^\circ_m$ und eine Alternative $\tilde{s}^i \in S^i$.

Wir definieren $\hat{s}^i$ durch $\hat{s}^i_x = \tilde{s}^i_x$ und $\hat{s}^i_y = s^i_y$ für alle $y \in X^\circ \smallsetminus \{x\}$. Dank (2) gilt $u^i_x(\hat{s}^i) \le u^i_x(s^i) \le a$. Sei $x' = f(x, \hat{s}_x)$ der Folgezustand von x gemäß $\hat{s}_x = \tilde{s}_x$. Dann gilt erneut $u^i_{x'}(s^i) \le a \le b = u^i_{x'}(\tilde{s}^i)$. Falls $x' \in \partial X$ gilt, so solgt $u^i_{x'}(s^i) = a = b = u^i_{x'}(\tilde{s}^i)$. Sei also $x' \in X^\circ$.

So fortfahrend erhalten wir Zustände $x_n \in X_n$ für alle $n \ge m$ mit $x_m = x$ und $x_{n+1} = f(x_n, \tilde{s}_{x_n})$, sodass $u^i_{x_n}(s^i) \le a \le b = u^i_{x_n}(\tilde{s}^i)$.

Wir vergleichen $z = \lim(x_m, \tilde{s}) = \bigcup_n x_n$ und $z_n = \lim(x_n, s)$ in ∂X. Nach Konstruktion gilt $v^i(z) = u^i_{x_n}(\tilde{s}^i) = b$. In jeder Umgebung von $z \in \partial X$ liegt ein Punkt $z_n \in \partial X$ mit $v^i(z_n) = u^i_{x_n}(s) \le a$. Dank der Unterhalbstetigkeit von $v^i : \partial X \to \mathbb{R}$ ist dies nur für $a = b$ möglich. $\boxed{\text{QED}}$

🙂 Wir können $\mathbb{R}$ durch jede linear geordnete Menge $(R^i, \le^i)$ ersetzen. Da keine Mittelung nötig ist, übertragen sich alle Argumente wörtlich.

😊 Der hier diskutierte deterministische Fall J2F ist besonders einfach. Sie können jeden Beweisschritt am vorigen Beispiel nachvollziehen! Im deterministischen Fall J2F genügt $v^i : \partial X \to \mathbb{R}$ unterhalbstetig. Im allgemeinen Fall J2D setzen wir stärker die Stetigkeit voraus.

Der allgemeine Fall des Prinzips ist probabilistisch: Im Allgemeinen hat unser Spiel $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P})$ Zufallselemente. Selbst wenn das Spiel $\Gamma = (X, v, f)$ deterministisch ist, so nutzen die Spieler im Allgemeinen (lokal) gemischte Strategien und führen so ein Zufallselement ein.

Vorgelegt sei der Strategievektor $s \in \bar{S} = \prod_{i \in I} \bar{S}^i$ mit $\bar{S}^i = \prod_{x \in X^\circ} [A^i_x]$. Jeder Spieler $i \in I$ optimiert über seine Strategie $s^i \in \bar{S}^i$. Wir halten hier die gegnerischen Strategien $s^{-i} \in \bar{S}^{-i}$ fest. Wir sind also im Rahmen eines Markov–Spiels und suchen nach einem Optimalitätsprinzip.

Die probabilistische Struktur bringt eine kleine technische Schwierigkeit mit sich: Es gibt keinen eindeutigen Folgezustand. Das beste, was wir stattdessen hoffen dürfen, ist die Existenz eines Folgezustandes, der die gewünschte Ungleichung erfüllt. Dies führt uns zu folgendem Beweis.

Lemma J2G: Grenzwertformulierung der Stetigkeit

Sei $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P})$ ein dynamisches Spiel in extensiver Form (J2A).

(1) Für jeden Startzustand $x \in X$ und jeden Strategievektor $s \in \bar{S}$ gilt

$$\begin{aligned} & a(x) \le \bar{u}^i_x(s) \le b(x) \quad \text{mit} \\ & a(x) := \inf\{\, v^i(z) \mid z \in \partial X,\ x \subseteq z \,\}, \\ & b(x) := \sup\{\, v^i(z) \mid z \in \partial X,\ x \subseteq z \,\}. \end{aligned}$$

(2) Genau dann ist $v^i : \partial X \to \mathbb{R}$ stetig bezüglich der Baumtopologie J2E, wenn $a(z|_n) \nearrow v^i(z) \swarrow b(z|_n)$ für jeden Randpunkt $z \in \partial X$ und $n \to \infty$.

Beweis: Aussage (1) folgt durch Mittellung über die Auszahlungen. Aussage (2) folgt unmittelbar aus der Stetigkeit von $v^i : \partial X \to \mathbb{R}$. $\boxed{\text{QED}}$

😊 Das entspricht den beliebten $\liminf$ und $\limsup$ aus der Analysis: $a(z|_n) \nearrow v^i(z)$ für unterhalbstetig und $b(z|_n) \searrow v^i(z)$ für oberhalbstetig.

😊 Anschaulich: Für Zustände $x_n \in X_n$ in ferner Zukunft n hängt die erwartete Auszahlung $\bar{u}^i_x(s)$ beliebig wenig von den Strategien $s \in \bar{S}$ ab.

Beweis des Prinzips der einmaligen Abweichung

♦ Satz J2D: Prinzip der einmaligen Abweichung

Für Spieler $i \in I$ sei $v^i : \partial X \to \mathbb{R}$ stetig. Für $s \in \bar{S}$ sind äquivalent:

1. Es gilt $\bar{u}^i_x(\tilde{s}^i; s^{-i}) \le \bar{u}^i_x(s^i; s^{-i})$ für alle $x \in X^\circ$ und $\tilde{s}^i \in \bar{S}^i$.
2. Es gilt $\bar{u}^i_x(\hat{s}^i; s^{-i}) \le \bar{u}^i_x(s^i; s^{-i})$ für jeden Zustand $x \in X^\circ$ und jede Alternative $\hat{s}^i \in \bar{S}^i$, die von s^i nur in $\hat{s}^i_x \in A^i_x$ abweicht.

Beweis: Die Implikation „(1) ⇒ (2)“ ist trivial. Wir zeigen „(2) ⇒ (1)“. Wir halten s^{-i} fest und schreiben abkürzend $\bar{u}^i_x(s^i)$ für $\bar{u}^i_x(s^i; s^{-i})$. Angenommen, es gäbe eine Verbesserung $\bar{u}^i_x(\tilde{s}^i) - \bar{u}^i_x(s^i) \ge \varepsilon > 0$ für eine alternative Strategie $\tilde{s}^i \in \bar{S}^i$ und einen Zustand $x \in X^\circ_m$.

Wir definieren $\hat{s}^i$ durch $\hat{s}^i_x = \tilde{s}^i_x$ und $\hat{s}^i_y = s^i_y$ für alle $y \in X^\circ \smallsetminus \{x\}$. Dank (2) gilt $\bar{u}^i_x(\hat{s}^i) \le \bar{u}^i_x(s^i) \le \bar{u}^i_x(\tilde{s}^i) - \varepsilon$. Demnach existiert ein Folgezustand $x' \in x\mathcal{A} \cap X_{m+1}$ mit $\bar{u}^i_{x'}(\tilde{s}^i) - \bar{u}^i_{x'}(s^i) \ge \varepsilon > 0$.

So fortfahrend erhalten wir Zustände $x_m \subset x_{m+1} \subset x_{m+2} \subset \dots$ mit $x_n \in X_n$ und $\bar{u}^i_{x_n}(\tilde{s}^i) - \bar{u}^i_{x_n}(s^i) \ge \varepsilon > 0$. Im Randpunkt $x = \lim x_n$ ist die Auszahlung $v^i : \partial X \to \mathbb{R}$ somit unstetig. $\boxed{\text{QED}}$

Das Prinzip der einmaligen Abweichung

Beim ersten Kontakt mit teilspielperfekten Nash–Gleichgewichten wird das Prinzip der einmaligen Abweichung leicht unterschätzt:

- Erstens scheint es mathematisch eher banal, gar offensichtlich. Unser voriges Beispiel zeigt eindrücklich, dass dem nicht so ist. Ein sorgfältiger Beweis erfordert gute Notation und Buchführung.
- Zweitens ist die praktische Tragweite nicht gleich absehbar. Die folgenden Kapitel zeigen mannigfaltige Anwendungen. Erst dadurch wird die grundlegende Bedeutung deutlich.

Beispiel: Eine typische Form terminaler Auszahlungen $v : \partial X \to \mathbb{R}$ ist die diskontierte Summe $v(x) = \sum_n \delta^n r(x_n)$ mit $\delta \in [0, 1[$ und $r : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. Allgemein gilt hierzu folgende beruhigende Zusicherung:

Lemma J2H: Stetigkeit diskontierter Summen

Gegeben sei $X \subseteq \mathcal{A}^{\le\infty}$ und $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{\ge 0}$ mit $\sum_{n=0}^\infty \delta_n < \infty$. Ist $r : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ beschränkt, so ist $v : \partial X \to \mathbb{R} : z \mapsto \sum_n \delta_n r(z_n)$ stetig.

Aufgabe: Führen Sie den Beweis dieses Lemmas sorgfältig aus!

Das Prinzip der einmaligen Abweichung

Lösung: Topologisch liegt jedes endliche terminale Wort z in ∂X isoliert, denn $U_z = \{z\}$. Somit ist die Stetigkeit in z trivialerweise immer erfüllt.

Wir untersuchen nun den eigentlich interessanten Fall $z \in X \cap \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Dank $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < \infty$ erfüllen die Reste $\rho_n := \sum_{k=n}^{\infty} \delta_k \searrow 0$ für $n \to \infty$. Sei $r : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ beschränkt, also $|r| \le M$ für ein $M \in \mathbb{R}_{\ge 0}$. Wir definieren

$$v \;:\; \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \to \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \;:\; x \mapsto v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n r(z_n).$$

Die Reihe konvergiert absolut dank der Abschätzung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big|\delta_n r(z_n)\big| = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \big|r(z_n)\big| \le \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n M \le \rho_0 M < \infty.$$

Zu jedem noch so kleinen $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$, sodass $\rho_n M < \varepsilon/2$ gilt. Für jedes $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ mit $x|_n = z|_n$ folgt

$$v(x) - v(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \delta_k \big[r(x_k) - r(z_k)\big], \quad \text{also}$$
$$\big|v(x) - v(z)\big| \le \sum_{k=n}^{\infty} \delta_k \big|r(x_k) - r(z_k)\big| \le \sum_{k=n}^{\infty} \delta_k \cdot 2M = 2\rho_n M \le \varepsilon.$$

Somit ist $v : \partial X \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt $z \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ stetig, wie behauptet. $\boxed{\text{QED}}$

Das Prinzip der einmaligen Abweichung

Die hier betrachtete Topologie ist auch theoretisch überaus interessant:

Satz J2I: Baumtopologie auf einem Baum $X \subseteq \mathcal{A}^{\le\infty}$

Die Baumtopologie auf $X \subseteq \mathcal{A}^{\le\infty}$ ist vollständig metrisierbar vermöge

$$d \;:\; \mathcal{A}^{\le\infty} \times \mathcal{A}^{\le\infty} \to [0,1] \;:\; (x,y) \mapsto d(x,y) = 2^{-\ell(x,y)}$$
$$\text{mit} \quad \ell(x,y) := \sup\{\, n \in \mathbb{N} \;:\; x|_n = y|_n \,\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Hierin trägt der Teilraum $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ die Produkttopologie und ist somit kompakt.

Beispiele: Für $\mathcal{A} = \emptyset$ gilt $\mathcal{A}^{\le\infty} = \{e\}$. Für $\mathcal{A} = \{a\}$ gilt $\mathcal{A}^{\le\infty} \cong \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Für $\mathcal{A} = \{0,1\}$ ist $\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = 2^{\mathbb{N}}$ homöomorph zur Cantor–Menge $C \subset [0,1]$.

Übung: Wiederholen Sie die nötigen Begriffe aus der Topologie und beweisen Sie sorgfältig die hier behaupteten Eigenschaften! Warum / wo / wie spielt die (metrische) Vollständigkeit von $X \subseteq \mathcal{A}^{\le\mathbb{N}}$ die tragende Rolle im Prinzip der einmaligen Abweichung J2D / J2F?

Lösung: In beiden Fällen benötigen wir den kritischen Limespunkt $z \in \partial X$, um die Stetigkeit von v in diesem Punkt nutzen zu können.

Dynamische Spiele mit unvollständiger Information

Definition J3A: dynamisches Spiel mit unvollständiger Information

Ein **dynamisches Spiel** $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P}, q)$ über der Spielermenge I in extensiver Form mit **unvollständiger Information** (EFII) beinhaltet:

- Ein dynamisches Spiel $(X, v, f, \mathbf{P})$ über I, wie in J2A erklärt,
- ein Signal $q^i : X^\circ \twoheadrightarrow X^i : x \mapsto x^i$ für jeden Spieler $i \in I$; für $q^i(x) = q^i(y)$ schreiben wir $x \overset{i}{\sim} y$ und fordern $A^i_x = A^i_y$.

Die **Informationsmenge** ist die Äquivalenzklasse $[x]_i = q_i^{-1}(q_i(\{x\}))$. Wir definieren $S^i = S^i(X, q^i) := \{\, s^i \in \prod_{x \in X^\circ} A^i_x \mid s^i_x = s^i_y \text{ falls } x \overset{i}{\sim} y \,\}$. Wir setzen v fort zu $\tilde{u} : X \times \Omega \times S \to \mathbb{R}^I$ und mitteln zu $u : X \times S \to \mathbb{R}^I$.

Bei vollständiger Information heißt $s \in S = \prod_{i \in I} S^i$ Nash-Gleichgewicht bei Start in $x \in X$, wenn dies für das Spiel $u_x = u(x, -) : S \to \mathbb{R}^I$ gilt, und teilspielperfekt, wenn dies für alle $x \in X$ gilt, siehe J1A und J2C.

⚠ Bei unvollständiger Information müssen wir dies noch verfeinern! Spieler i kann die Zustände $y \in [x]_i$ in seiner Informationsmenge nicht unterscheiden und so die Aktionen $s^i_y \in A^i_y$ nicht unabhängig wählen.

Dynamische Spiele mit unvollständiger Information

Informationsstruktur: Wer weiß wann was? Im Allgemeinen kennt jeder Spieler $i \in I$ nur einen (kleinen) Teil des Spielzustands $x \in X^\circ$.

Den individuellen Kenntnisstand von Spieler $i \in I$ beschreiben wir wie zuvor als ein Signal $q^i : X^\circ \twoheadrightarrow X^i : x \mapsto x^i$, genannt Auskunft / *query*.

Zum Spielstand $x \in X^\circ$ ist $q^i(x) = x^i \in X^i$ das Wissen von Spieler i: Zustände $x, y \in X^\circ$ mit $q^i(x) = q^i(y)$ sind für ihn ununterscheidbar.

Dies definiert auf X° eine Äquivalenzrelation $x \overset{i}{\sim} y$ durch $q^i(x) = q^i(y)$. Umgekehrt definiert jede Äquivalenzrelation $\overset{i}{\sim}$ auf X° den Quotienten $q^i : X^\circ \twoheadrightarrow X^i := X^\circ/\overset{i}{\sim}$. Beide Sichtweisen sind hier also gleichwertig.

Spieler i entscheidet seine Aktion $s^i_x \in A^i_x$ nur aus seiner Kenntnis x^i: Wir fordern daher $A^i_x = A^i_y$ für alle Zustände $x \overset{i}{\sim} y$ in X°, und setzen

$$S^i = S^i(X, q^i) := \left\{\, s^i \in \textstyle\prod_{x \in X^\circ} A^i_x \;\middle|\; s^i_x = s^i_y \text{ falls } x \overset{i}{\sim} y \,\right\}.$$

Im Falle $q^i = \mathrm{id}_{X^\circ} : X^\circ \to X^\circ$ ist $\overset{i}{\sim}$ trivial, Spieler i hat vollständige Information, und seine Strategien unterliegen keiner Einschränkung.

Kennt jeder Spieler i jederzeit den Gesamtzustand $x \in X$ des Spiels, so sprechen wir von **vollständiger Information** [*complete information*]. Im Allgemeinen kennt Spieler i nur einen kleinen Auszug des gesamten Spielzustands; wir sprechen dann von **unvollständiger Information**.

Bei vielen Spielen macht gerade dieser Umstand den besonderen Reiz: Bei vielen Kartenspielen (Skat, Doppelkopf, Poker, etc.) kennt jeder nur seine eigene Hand, nicht aber die der anderen (Mit-/Gegen-)Spieler. Ebenso verhält es sich bei vielen Gesellschaftsspielen.

Auch für Anwendungen in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften ist die unvollständige Information häufig ein entscheidender Faktor. Jeder Spieler kennt nur einen Teil der Welt, möchte diese Information aber nicht teilen, sondern nach Möglichkeit zu seinem Vorteil nutzen.

Wegen der Wichtigkeit dieses Phänomens führe ich eine Beschreibung hier schon ein. Die genauere Untersuchung wird dadurch aber deutlich schwerer und erst in späteren Kapiteln ernsthaft in Angriff genommen.

Zu **dynamischen Spielen** verfügen wir über zwei Formalisierungen: zunächst mit einem beliebigen Zustandsraum (kybernetische Form J1A), dann besonders effizient mit einem Spielbaum (extensive Form J2A).

Die abschließende Definition J3A erklärt **unvollständige Information**: Das Spiel $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P}, q)$ über I definiert $S = \prod_{i \in I} S^i$, nun jedoch für jeden Spieler $i \in I$ mit der **eingeschränkten Strategiemenge**

$$S^i = S^i(X, q^i) := \left\{ s^i \in \textstyle\prod_{x \in X^\circ} A^i_x \;\middle|\; s^i_x = s^i_y \text{ falls } q^i(x) = q^i(y) \right\}.$$

Damit können damit teilspielperfekte Gleichgewichte formulieren:

$$\mathrm{PNE}(\Gamma) = \mathrm{PNE}(\Gamma, S) := \bigcap\nolimits_{x \in X^\circ} \mathrm{NE}\big(u_x : S \to \mathbb{R}^I\big)$$

Das ist die ideale Gleichgewichtseigenschaft eines Strategiebündels: Im Spielverlauf hat kein Spieler Anlass, seine Strategie zu wechseln.

⚠ Bei unvollständiger Information ist diese Bedingung oft zu streng, da Spieler i nicht alle Aktionen $s^i_x \in A^i_x$ unabhängig wählen kann.

Wir werden das Lösungskonzept daher anschließend noch verfeinern.

Graphische Darstellung von Spielbäumen

Man muss ein Spiel auch lesen können!

⊙ Ω	Startzustand / Wurzel, Zufallszug; Spieler Ω, N, Z oder leer.
$\mid$ $[p]$	die Wahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ für diesen Zufallszug.
● i	aktiver Zustand / innerer Knoten $x \in X^\circ$; Spieler $i \in I$ zieht.
$\mid$ a	mögliche Aktion / Zug $a \in A_x^i$ für den hier aktiven Spieler i.
● (i,j)	aktiver Zustand $x \in X^\circ$; die Spieler i und j ziehen gleichzeitig.
$\mid$ (a_i, a_j)	mögliche Aktionen $a_i \in A_x^i$ und $a_j \in A_x^j$ der aktiven Spieler i, j.
● v	terminaler Zustand $x \in \partial X$ mit Auszahlung $v = v(x) \in \mathbb{R}^I$.
● - - i - - ●	ununterscheidbare Zustände für den ziehenden Spieler i.
[● i ●]	alternative Schreibweise für diese Äquivalenzklasse.

Der Startzustand $\alpha \in X$ des Spiels (falls definiert) heißt **Wurzel**.
Aktive Zustände $x \in X^\circ$ nennt man abkürzend auch **Knoten**.
Endliche terminale Zustände $x \in X_{<\infty} \cap \partial X$ heißen **Blätter**.
Unendliche terminale Zustände $x \in X_\infty$ heißen auch **Enden**.

Graphische Darstellung von Spielbäumen

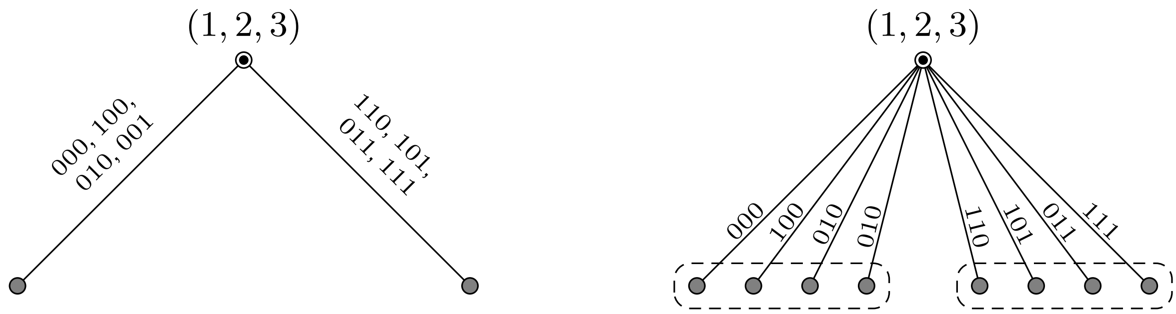
Angenommen, im Zustand $x \in X^\circ$ ist Spieler $i \in I$ allein am Zug, also $\mathrm{pr}^i : A_x \xrightarrow{\sim} A_x^i$. In der Graphik notieren wir dann i am Knoten x und die möglichen Aktionen $a \in A_x^i$ an den zugehörigen ausgehenden Kanten. Ist eine Spielermenge $J \subseteq I$ am Zug, also $\mathrm{pr}^J : A_x \xrightarrow{\sim} A_x^J = \prod_{j \in J} A_x^j$, so notieren wir entsprechend J am Knoten und A_x^J an den Kanten. Diese Beschriftung entspricht einer Bijektion $f_x : A_x \xrightarrow{\sim} x\mathcal{A} \cap X$.

In der Literatur ist die Bijektion $A_x \xrightarrow{\sim} xA_x : a \mapsto x * a$ üblich. Das heißt: Die gesamte Aktion $a \in A_x$ wird in der Trajektorie $x \mapsto x * a$ vermerkt. Eine Surjektion $f_x : A_x \twoheadrightarrow x\mathcal{A} \cap X$ würde genügen. Anschaulich gesagt: Nur das als relevant betrachtete Ergebnis der Aktionen wird vermerkt. Äquivalente Aktionen entsprechen dann derselben Kante im Spielbaum.

Beispiel: Bei einer Abstimmung bedeutet die Bijektion $f_x : A_x \xrightarrow{\sim} x * A_x$, dass die Stimme jedes Spielers protokolliert wird. Hingegen protokolliert die Surjektion $A_x \twoheadrightarrow x * \{\mathrm{Ja}, \mathrm{Nein}\}$ nur das Ergebnis. Die Möglichkeit solcher Zusammenfassungen ist flexibler und erlaubt kleinere Bäume. Daher wollen wir uns diese bequeme Abkürzung nicht verbieten.

Graphische Darstellung von Spielbäumen

Beispiel: Geheime Abstimmung ($0 =$ Nein, $1 =$ Ja) von drei Spielern:



Im ersten Fall wird gleichzeitig abgestimmt und nur das Endergebnis gespeichert. Im zweiten Fall werden die individuellen Stimmabgaben gespeichert, aber nicht preisgegeben. Alternativ wird nacheinander abgestimmt, aber ohne Information über die vorigen Stimmabgaben.

☺ Es ist wie beim Datenschutz: Welche Daten werden gespeichert? Welche werden an die Spieler weitergegeben? Es gibt viele Varianten.

☺ Die Datenschutz-Grundverordnung (DSGVO) bestimmt in Kapitel 3 (Artikel 12 bis 23) persönliche Rechte auf Auskunft, auf Berichtigung und auf Löschung, das sogenannte „Recht auf Vergessenwerden“.

Graphische Darstellung von Spielbäumen

Ein Spiel Γ in extensiver Form ist eine vollständige Beschreibung: Unsere Definition J3A erklärt, welche Daten hierzu benötigt werden. Das ist mühsam, dient aber dazu, alle Unklarheiten zu beseitigen.

In den allermeisten praktischen Anwendungen wird die Beschreibung nicht formal und vollständig ausgeführt. Selbst graphische Darstellung durch Spielbäume wird naturgemäß nur für kleine Illustrationen genutzt.

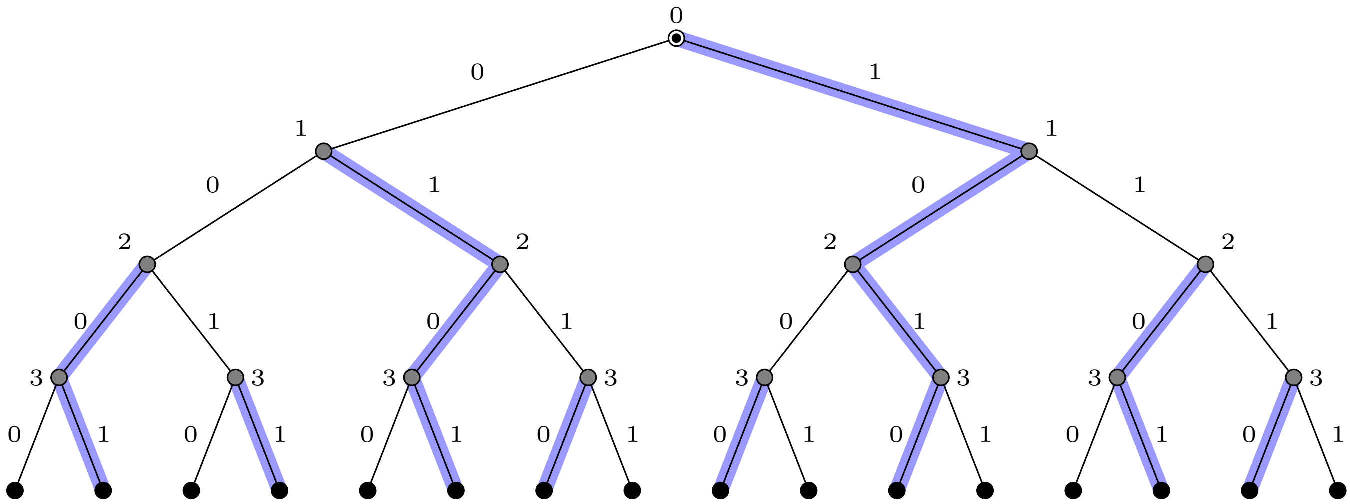
Meist wird eine informelle Beschreibung in zusammenfassenden Worten gegeben. Wann ist eine solche Beschreibung brauchbar? Das Kriterium ist einfach: Die informelle Beschreibung muss genug Information liefern, um die zugehörige extensive Form daraus zu konstruieren.

Um es ganz konkret zu machen, fragen Sie sich ganz einfach: Können Sie das Spiel aufgrund der gegebenen Daten zweifelsfrei implementieren, etwa auf einem Computer programmieren?

Ist die extensive Form aus den gegebenen Informationen noch nicht klar, so ist die Beschreibung unvollständig und das Modell ist nicht definiert. Genau das ist der Nutzen mathematischer Definitionen: Klarheit!

Strategievektoren und Spielverlauf

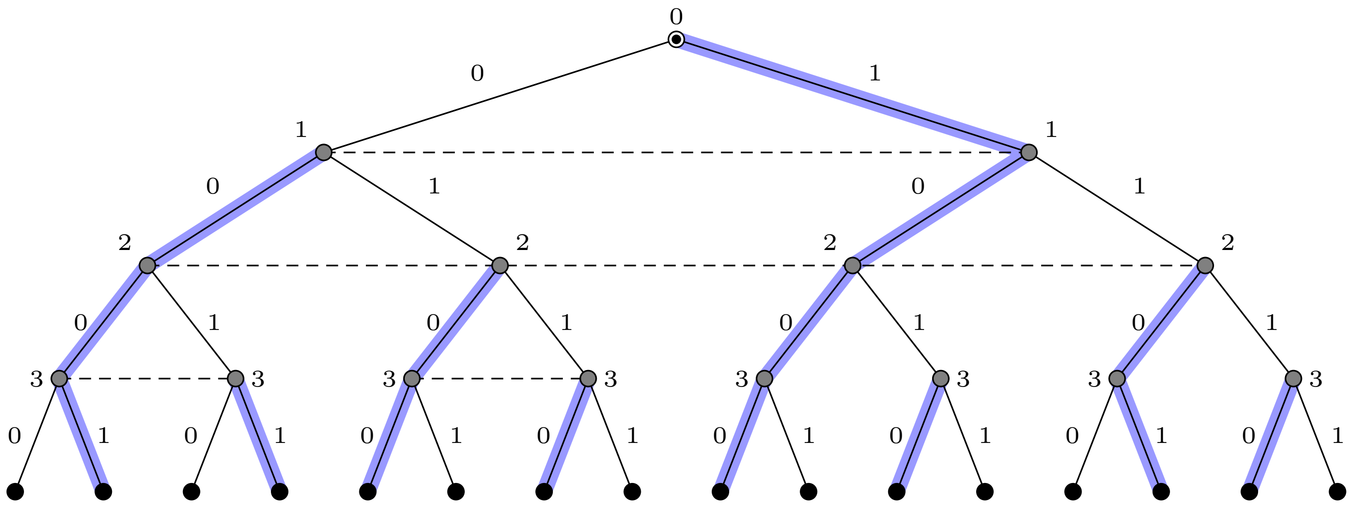
Der Strategievektor $s \in S$ und ggf. $\omega \in \Omega$ bestimmen den Spielverlauf:



Dies gilt nicht nur bei Beginn im Startzustand / der Wurzel $x = \alpha$, sondern bei Beginn in jedem beliebigen Zustand $x \in X$ des Baumes!
Hier spielen nacheinander $0 =$ Zufall, $1 =$ Alice, $2 =$ Bob, $3 =$ Chuck.
Erinnerung: Eine Strategie $s^i \in S^i$ für Spieler i ist ein Handlungsplan, also eine Aktion $s^i_x \in A^i_x$ für jeden aktiven Zustand $x \in X^\circ$ des Spiels.

Strategievektoren und Spielverlauf

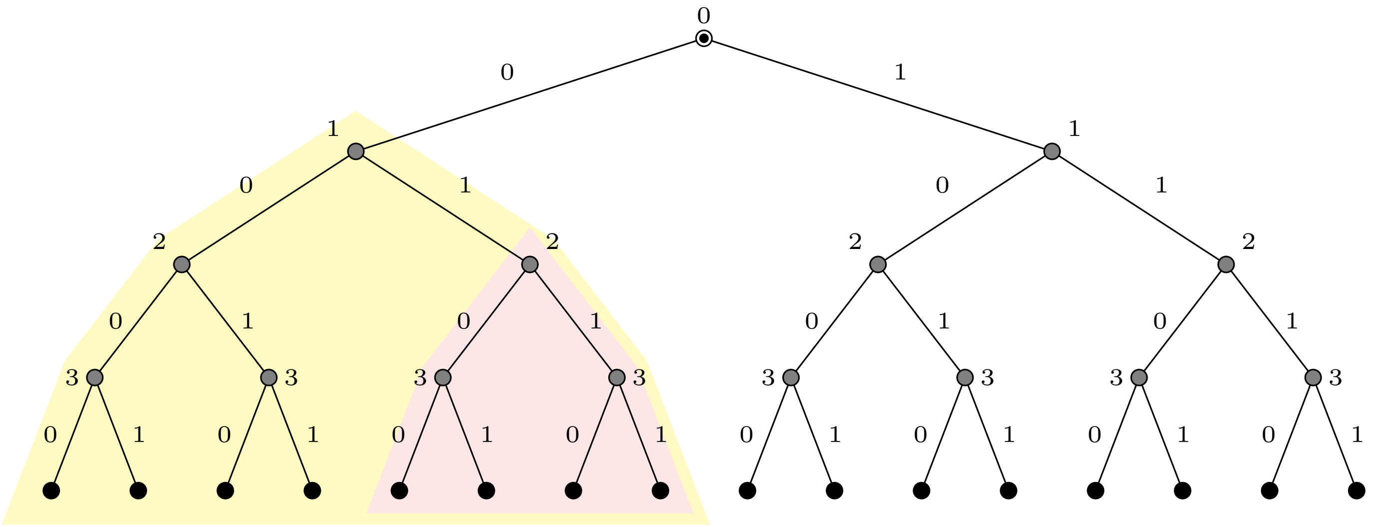
Für ununterscheidbare Zustände sind die Aktionen strikt gekoppelt:



Spieler i kann seine Aktion $s^i_x \in A^i_x$ nur aus seiner Kenntnis x^i ableiten.
Sind also $x \overset{i}{\sim} y$ in X° für i ununterscheidbar, so muss $s^i_x = s^i_y$ gelten.
Genau dies ist der Sinn der Informationsstruktur und der Auskunft q^i:
Strategien von Spieler i beruhen auf seiner beschränkten Kenntnis.
Die Informationsmengen sind durch gestrichelte Linien gezeigt.

Illustration zu Teilspielen und Informationsmengen

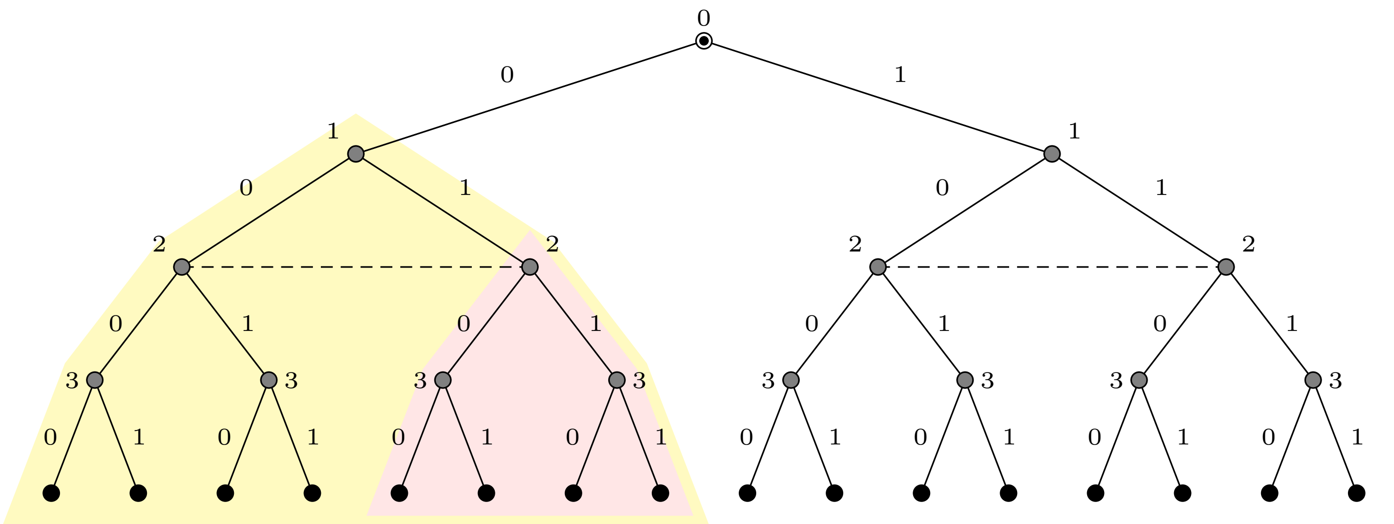
Das Teilspiel Γ_x besteht aus $x \in X$ und all seinen Folgezuständen (J1B):



Zustände von Γ_x sind demnach alle Wörter $x' \in X$, die mit x beginnen. Diese Teilmenge von $\mathcal{A}^{\le\infty}$ ist selbst baumförmig, wie man nachprüft. Aus den ursprünglichen Daten $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P})$ erhalten wir somit durch Einschränkung aller Daten des Teilspiels $\Gamma_x = (X', v', f', \mathbf{P}')$. Wie überträgt sich diese Idee bei unvollständiger Information?

Illustration zu Teilspielen

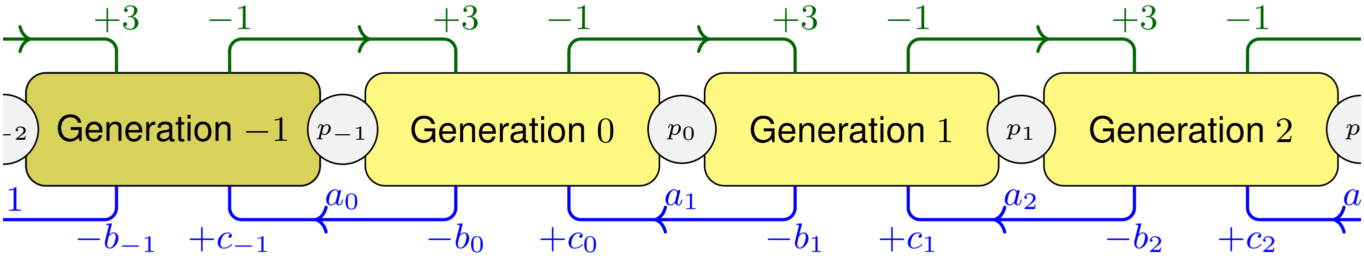
Teilspiele sollten saturiert sein, also keine Informationsmengen zerlegen:



Das Teilspiel $X' \le \Gamma$ nennen wir **saturiert**, wenn für jeden Spieler $i \in I$ und alle Paare $x, y \in X^\circ$ mit $q^i(x) = q^i(y)$ gilt: Aus $x \in X'$ folgt $y \in X'$. Das heißt, kein Spieler $i \in I$ weiß im Teilspiel Γ_x mehr als zuvor in Γ. Bei vollständiger Information ist dies überhaupt keine Einschränkung; bei unvollständiger Information ist die Einschränkung meist zu streng.

Generationenmodell zur Altersversorgung

Wir untersuchen erneut und genauer unser Generationenmodell:



Aufgabe: (1) Formalisieren Sie dies als deterministisches Spiel Γ.
(a) Jede Generation kennt die Geschichte oder (b) nur die Elternaktion.

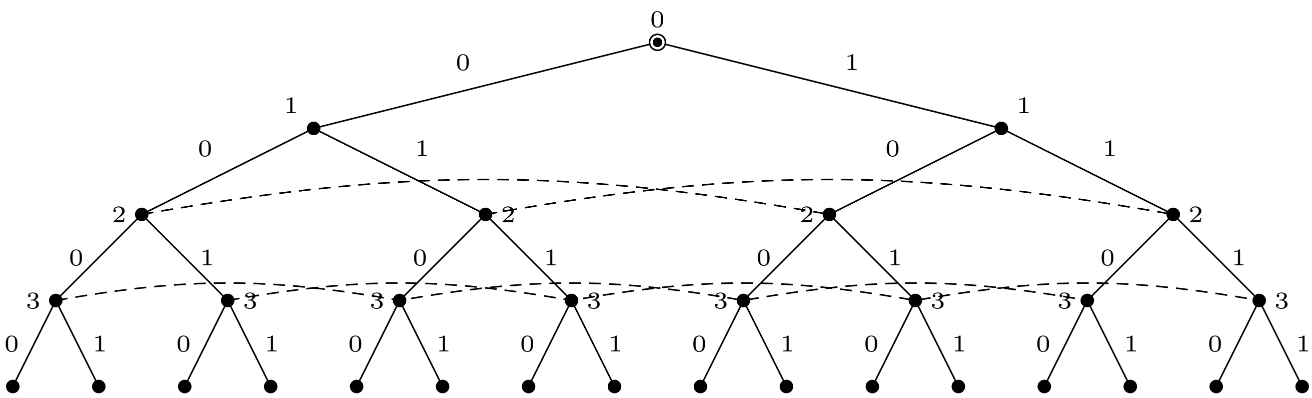
(2) Formalisieren Sie dies ebenso als probabilistisches Spiel Γ.

(3) Finden Sie alle Nash–Gleichgewichte. Welche sind teilspielperfekt?

Dies ist ein erstes, relativ simples Generationenmodell, aber durchaus repräsentativ. Es hat uns bereits gute Dienste geleistet. Daran können wir nun den Formalismus dynamischer Spiele in extensiver Form üben. Nur so erkennen wir Schwierigkeiten und können Feinheiten klären.

Generationenmodell zur Altersversorgung

Lösung: (1) Zunächst deterministisch mit Diskontierungen $p_i \in [0,1]$:



Die Spielermenge ist $I = \mathbb{N}$. Der Zustandsraum ist $X = \{0,1\}^{\leq\infty}$.

Für $i \in \mathbb{N}$ und $x \in X_i$ gilt $A_x \cong A_x^i = \{0,1\}$, also $A_x^j = \{*\}$ für $j \neq i$.

Die Fortsetzung ist kanonisch, also $f_x : A_x \xrightarrow{\sim} x * \{0,1\} : a \mapsto x * a$.

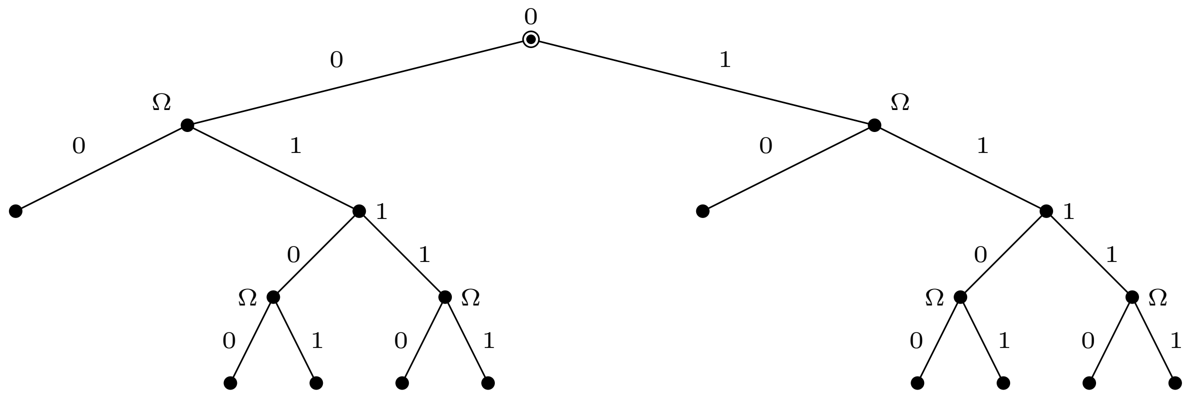
Auszahlung $u^i : \partial X = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R} : x \mapsto p_0 p_1 \cdots p_{i-1}(-b_i x_i + p_i c_i x_{i+1})$.

Auskunft ist (a) $q^i = \mathrm{id}_{X_i}$ bzw. (b) $q^i : X_i \to \{0,1\} : x \mapsto x_{i-1}$.

Daraus folgt die Strategiemenge $S^i = \{\, s^i : \{0,1\} \to \{0,1\} \,\}$.

Generationenmodell zur Altersversorgung

(2) Zum Vergleich die Formalisierung als probabilistisches Spiel:



Der Baum ist $X = \{01, 11\}^\infty \sqcup (\{01, 11\}^{<\infty} * \{00, 10\}) \subset \{0,1\}^{\le\infty}$.

Für $i \in \mathbb{N}$ und $x \in X_{2i}$ gilt $A_x \cong A_x^i = \{0,1\}$, also $A_x^j = \{*\}$ für $j \ne i$.

Für $x \in X_{2i+1}$ wird unabhängig gezogen aus $\Omega_x = \{0,1\}$ mit $\mathbf{P}_x(1) = p_i$.

Auf terminalen Zuständen haben wir die Auszahlung $u^i : \partial X \to \mathbb{R}$

$$u^i(x) = \begin{cases} -b_i x_{2i} & \text{falls } x_1 = x_3 = \dots = x_{2i-1} = 1 \text{ und } x_{2i+1} = 0, \\ -b_i x_{2i} + c_i x_{2i+2} & \text{falls } x_1 = x_3 = \dots = x_{2i-1} = 1 \text{ und } x_{2i+1} = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Generationenmodell zur Altersversorgung

Auskunft ist (a) $q^i = \mathrm{id}_{X_i}$ bzw. (b) $q^i : X_i \to \{0,1\} : x \mapsto x_{i-1}$.

Daraus folgt die Strategiemenge $S^i = \{\ s^i : \{0,1\} \to \{0,1\}\ \}$.

Der Strategievektor $s \in S$ definiert die Aktionen $a_i = s^i(a_{i-1})$.

Zusammen mit $\omega \in \Omega$ folgt der gesamte Spielverlauf $x \in \partial X$.

Die erwartete Auszahlung ist $u^i(s) = p_0 p_1 \cdots p_{i-1}(-b_i a_i + p_i c_i a_{i+1})$.

♦ Satz H2A: Nash–Gleichgewichte im Generationenmodell

Die Generationen $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ interagieren wie gezeigt, mit Kosten $b_i \in \mathbb{R}_{>0}$ und Nutzen $c_i \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie den Fortsetzungswkten $p_i \in [0,1]$ für $i \in \mathbb{N}$.

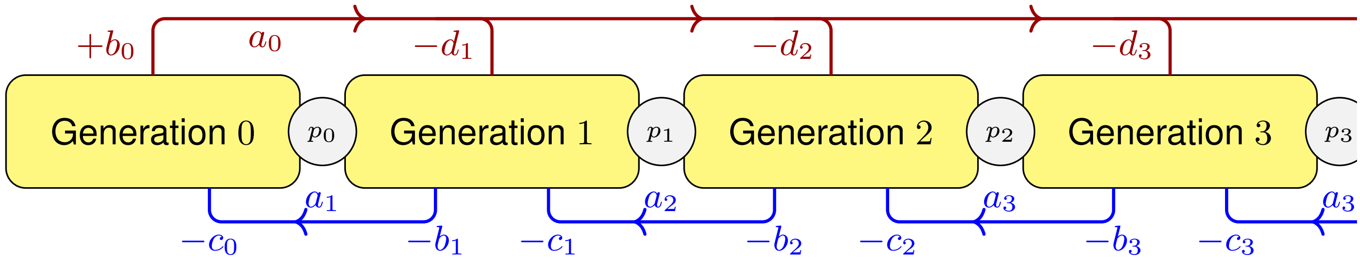
(1) Ist $s \in \prod_{i\in\mathbb{N}} S_i$ ein Nash–Gleichgewicht, so ist der Aktionsvektor $a = a(s) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ wachsend, also $a = a^n := \mathbf{I}_{\mathbb{N}_{\ge n}}$ für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(2) Gilt $p_m c_m < b_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so ist $a_m = 0$ strikt dominant für G_m, per Rückwärtsinduktion folgt $a_i = 0$ für alle $i = 0, 1, \dots, m$, also $n > m$.

(3) Gilt $p_i c_i > b_i$ für alle $i \ge m$, so lässt sich jeder Aktionsvektor $a = a^n$ mit $n \ge m$ durch ein Nash–Gleichgewicht $s \in \prod_{i\in\mathbb{N}} S_i$ realisieren.

Generationenmodell zur Nachhaltigkeit

Wir betrachten erneut und genauer unser Nachhaltigkeitsmodell:

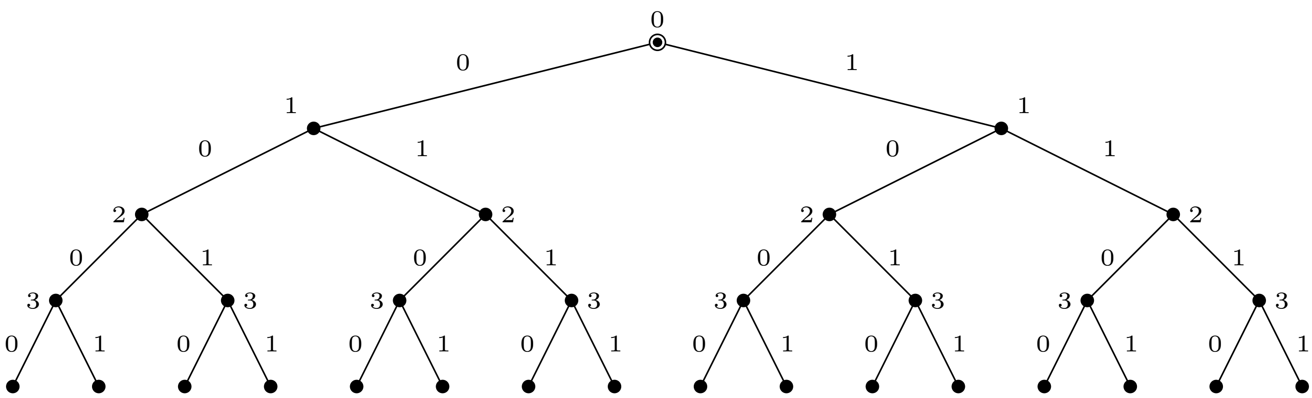


Aufgabe: (1) Formalisieren Sie dies als deterministisches Spiel Γ.
(2) Formalisieren Sie dies ebenso als probabilistisches Spiel Γ.
(3) Finden Sie alle Nash–Gleichgewichte. Welche sind teilspielperfekt?

Akteure sind die Generationen G_i für $i \in \mathbb{N}$. Die Generation G_0 wählt ihre Aktion / Strategie $a_0 \in A_0 = \{0 = \text{Nachhaltigkeit}, 1 = \text{Raubbau}\}$. Jede Generation G_i mit $i \ge 1$ kennt die gesamte Vorgeschichte und folgert daraus ihre Aktion $a_i \in A_i = \{0 = \text{schweigen}, 1 = \text{anklagen}\}$. Auszahlungen sind $u^0 = b_0 a_0 - p_0 c_0 a_1$ und $u^i = -b_i a_i - p_i c_i a_{i+1} - d_i a_0$.

Generationenmodell zur Nachhaltigkeit

Lösung: (1) Zunächst deterministisch mit Diskontierung $p_i \in [0,1]$:



Die Spielermenge ist $I = \mathbb{N}$. Der Zustandsraum ist $X = \{0,1\}^{\le\infty}$.

Für $i \in \mathbb{N}$ und $x \in X_i$ gilt $A_x \cong A_x^i = \{0,1\}$, also $A_x^j = \{*\}$ für $j \ne i$.

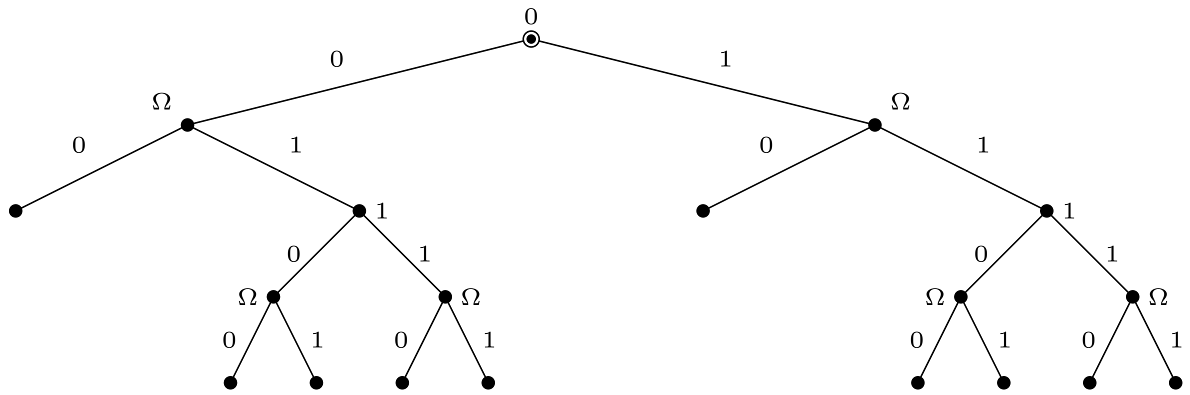
Die Fortsetzung ist kanonisch, also $f_x : A_x \xrightarrow{\sim} x * \{0,1\} : a \mapsto x * a$.

Auszahlungen sind $u^0 = b_0 x_0 - p_0 c_0 x_1$ und $u^i = -b_i x_i - p_i c_i x_{i+1} - d_i x_0$.

Jeder Spieler hat vollständige Information, also $q^i = \mathrm{id}_{X_i} : X_i \to X_i$.

Daraus folgt die Strategiemenge $S^i = \{\, s^i : \{0,1\}^i \to \{0,1\} \,\}$.

(2) Zum Vergleich die Formalisierung als probabilistisches Spiel:



Der Baum ist $X = \{01, 11\}^\infty \sqcup (\{01, 11\}^{<\infty} * \{00, 10\}) \subset \{0, 1\}^{\leq\infty}$.
Für $i \in \mathbb{N}$ und $x \in X_{2i}$ gilt $A_x \cong A_x^i = \{0, 1\}$, also $A_x^j = \{*\}$ für $j \neq i$.
Für $x \in X_{2i+1}$ wird unabhängig gezogen aus $\Omega_x = \{0, 1\}$ mit $\mathbf{P}_x(1) = p_i$.
Auf terminalen Zuständen haben wir die obige Auszahlung $u^i : \partial X \to \mathbb{R}$.
Jeder Spieler hat vollständige Information, also $q^i = \mathrm{id}_{X_i} : X_i \to X_i$.
Daraus folgt die Strategiemenge $S^i \cong \{\ s^i : \{0, 1\}^i \to \{0, 1\}\ \}$.

Der Strategievektor $s \in S$ definiert die Aktionen $a_i = s^i(a_0, a_1, \ldots, a_{i-1})$.
Zusammen mit $\omega \in \Omega$ folgt der gesamte Spielverlauf $x \in \partial X$.
Die erwartete Auszahlung ist $u : S \to \mathbb{R}^I$ ist wie zuvor
$u^0 = b_0 a_0 - p_0 c_0 a_1$ und $u^i = -b_i a_i - p_i c_i a_{i+1} - d_i a_0$.

♦ Satz H2B: Nash–Gleichgewichte im Nachhaltigkeitsmodell

Die Generationen $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ interagieren wie oben erklärt.

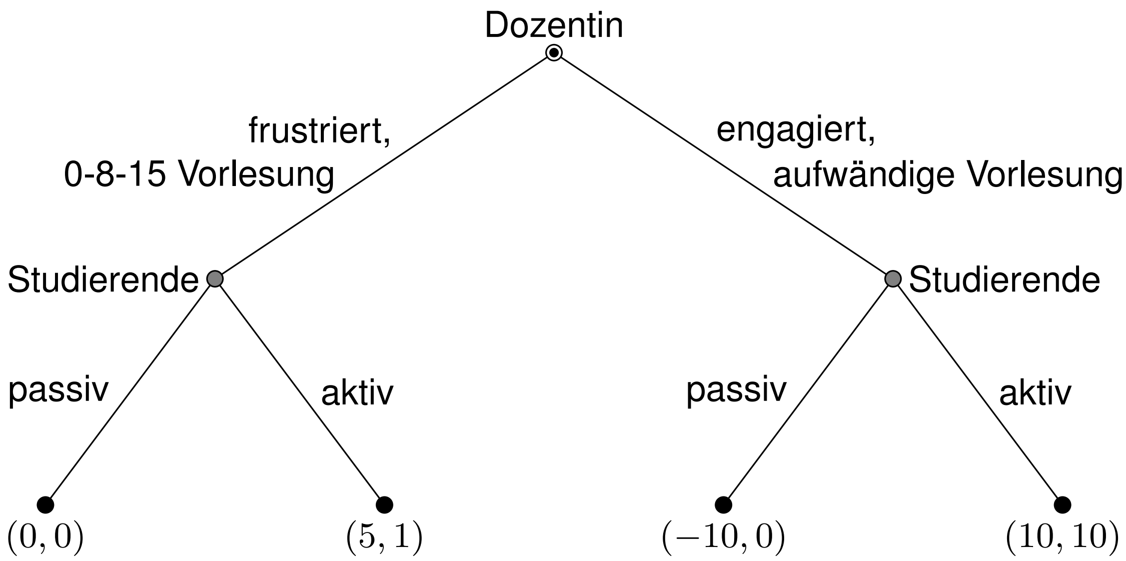
(0) Raubbau $s_0 = 1$ und Schweigen $s_i = 0$ für alle $i \geq 1$
bilden ein teilspielperfektes Gleichgewicht dieses Spiels.

(1) Gilt $p_n c_n < b_n$ für ein $n \geq 1$, so ist $a_n = 0$ strikt dominant für G_n,
und per Rückwärtsinduktion folgt $a_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ und $a_0 = 1$.

(2) Gilt $p_n c_n > b_n$ für alle $n \geq 1$, dann bilden nachhaltiges Verhalten und strenge Kontrolle ein teilspielperfektes Gleichgewicht, ausgeschrieben:

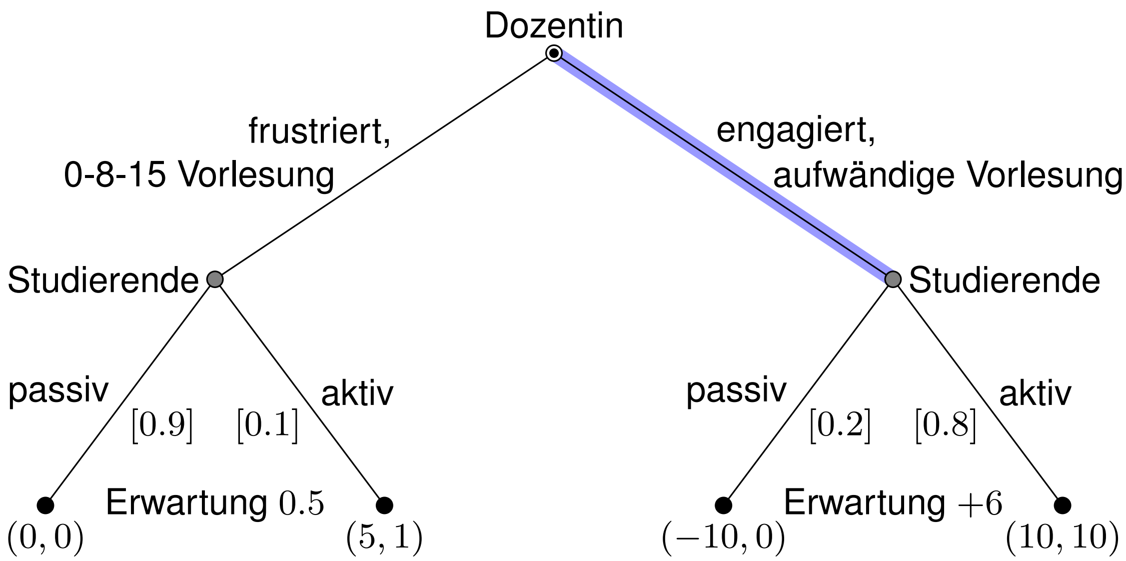
$$s^i \ : \ \{0, 1\}^i \to \{0, 1\} \ : \ (a_0, \ldots, a_{i-1}) \mapsto a_0 + \cdots + a_{i-1} \bmod 2$$

Die universitäre Lehre ist ein Spiel... ein Trauerspiel?



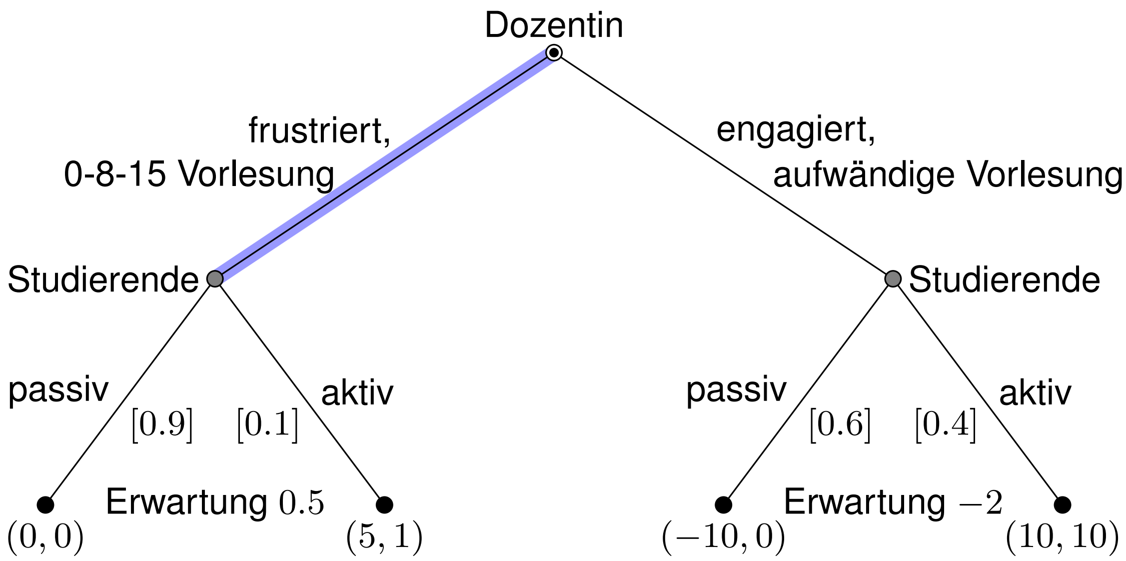
Vor dem Semester muss die Dozentin sich entscheiden und vorbereiten, sagen wir vereinfachend entweder eine langweilige 0-8-15-Vorlesung oder eine engagierte aufwändige Vorlesung. Die Studierenden müssen sich entscheiden, entweder nur passiv mittraben oder aktiv mitarbeiten. Die Zufriedenheit u_1 und der Lernerfolg u_2 sind dann entsprechend. (Die gewählten Zahlen sind etwas willkürlich und diskussionswürdig.)

Das Dilemma der Lehre: optimistisch



Die Dozentin geht in Vorleistung und muss ihre Vorlesung vorbereiten. Leider kennt Sie dabei die Reaktionen der Studierenden noch nicht. Eine junge naive Dozentin glaubt an die gezeigten Wahrscheinlichkeiten. (Die gewählten Zahlen sind etwas willkürlich und diskussionswürdig.) Sie entscheidet sich daraufhin für eine engagierte und aufwändige Vorlesung. Die Wirklichkeit sieht dann allzu oft ganz anders aus...

Das Dilemma der Lehre: pessimistisch



Eine erfahrene Dozentin kennt die obigen realen Wahrscheinlichkeiten: Die Enttäuschungen der Vorjahre hinterlassen eine gewisse Bitternis, ihre Mühe und Engagement wurden von Studierenden nicht erwidert. (Die gewählten Zahlen sind etwas willkürlich und diskussionswürdig.) Sie entscheidet sich folgerichtig für eine langweilige 0-8-15-Vorlesung. Ist sie frustriert und gelangweilt? Ja. Wer ist schuld? Urteilen Sie selbst!

Das Dilemma der universitären Lehre

Quid rides? Mutato nomine de te fabula narratur.
[Was lachst du? Mit anderem Namen handelt die Geschichte von dir.]
Horaz, Sermones I. 1. 69.

Das ist eine Anwendung der Spieltheorie auf eine relevante Situation: nämlich unsere! Die Bilanz des Durchgangs 2018 war eher ernüchternd:

„Wir, das Spieltheorie-Team, investieren jede Woche viel Zeit, Energie und Mühe in die Vorlesungen und Übungen. Einige Studierende nutzen dies und gehen mit und arbeiten fleißig. Über dieses Engagement und den sichtbaren Lernerfolg freuen wir uns. Das war unsere Hoffnung.

Aber eine zu große Zahl der physisch Anwesenden schaut nur passiv zu. Das ist für uns Lehrende persönlich enttäuschend und sehr frustrierend. Wenn Sie diese Klage verstehen können, dann sind Sie vermutlich nicht betroffen, also nichts für ungut. Wenn Sie dies nicht verstehen können, dann sind Sie vermutlich gemeint, aber ignorieren all meine Appelle.“

Beim zweiten Durchgang haben wir die Anforderungen strenger gefasst. Das bedeutet weniger Teilnehmer, diese sind jedoch ernsthaft.

Was nützen dem Pfau seine Federn?

Pfauen-Männchen haben ein prachtvolles Gefieder. Für das Überleben ist es leider hinderlich: Tarnung, Flucht, Energie, … Warum lohnen sich dennoch lange Federn? Wozu dienen sie? Angenommen, es gebe „fitte“ und „unfitte“ Pfauen-Männchen. Letztere werden öfter von Raubtieren gefressen etc. Sowohl fitte als auch unfitte können kurze oder lange Federn haben. Die mit langen Federn werden aufgrund der genannten Nachteile jedenfalls öfter gefressen.

Eine Population von Pfauen-Männchen könnte etwa so aussehen:

Pfauen	fit	unfit
kurze Federn	40%	20%
lange Federn	30%	10%

Das Pfauen-Weibchen sieht nicht die Fitness, sondern nur die Federn!

Aufgabe: Welche Strategie der Partnerwahl ist für sie vorteilhaft?

- Federlänge ignorieren: Trefferquote $70 : 30$ (möglich)
- Kurze Federn bevorzugen: Trefferquote $40 : 20$ (schlechter)
- Lange Federn bevorzugen: Trefferquote $30 : 10$ (besser!)

☺ Trotz aller Nachteile zahlen sich lange Federn doch aus!

Visuelles Ornament und sexuelle Selektion

Das auffällige Gefieder der Pfauen-Männchen wird als *visuelles Ornament* bezeichnet. Die lange Schleppe ist zwar hinderlich und vermindert das Flugvermögen, paradoxerweise kann es dennoch ein Indikator für genetische Fitness sein und Pfauen-Weibchen als Indiz für gesunden Nachwuchs dienen. (Siehe unser Zahlenbeispiel.) Wäre es nicht effizienter, Pfauen würden diesen Aufwand sparen und die Energie in bessere Überlebensstrategien stecken? Auf den ersten Blick besehen ja. Aber für ein Weibchen gibt es keine bessere Wahl: Es sieht nicht die tatsächliche Fitness, sondern nur das *Signal* der Federn. Auf Grundlage dieser unvollständigen Information muss es sich für die langen Federn entscheiden, selbst wenn das Überlebensnachteile mit sich bringt, auch für seinen eigenen Nachwuchs! Damit bleibt auch den Männchen keine Wahl, lange Federn werden zum Must-Have. Diese *sexuelle Selektion* ist der Schlussstein in Darwins Evolutionstheorie.

Auch Menschen ist dieses Phänomen vertraut: Manche Männer beeindrucken Frauen, indem sie Geld verschwenden oder andere verrückte Dinge tun. Wäre dieses Verhalten insgesamt nachteilig, so würde man vermuten, dass es auf lange Sicht ausstirbt. Das ist jedoch nicht der Fall, da Frauen dieses Verhalten als Indikator für (gesellschaftlichen) Erfolg interpretieren können und eventuell bei der Partnerwahl belohnen. (All das funktioniert selbstverständlich auch umgekehrt…)

Dieses Phänomen wird *Handicap-Prinzip* genannt. Beispiele gibt es viele: Produktwerbung verschwendet Geld, wird aber vom Käufer belohnt. Manch akademischer Titel ist scheinbar Zeitverschwendung, wird aber vom Arbeitgeber honoriert. Auch Ihr Studium ist nur teilweise für Ihren späteren Beruf relevant, und dennoch wird diese Anstrengung meist belohnt. Zum Beispiel gelten Leistungen in Mathematik als zuverlässiger Indikator für intellektuelle Leistungsfähigkeit. Dazu diskutieren wir den Arbeitsmarkt, extrem vereinfacht, in folgendem Gedankenexperiment.

Kann ein unnützer Doktortitel doch nützlich sein?

Eine Personalchefin sucht für eine Stelle einen Ingenieur (m/w/d).
Aus Erfahrung schätzt sie die allgemeine Bewerberlage wie folgt:

Bewerber	geeignet	ungeeignet
Diplom/Master	50%	25%
Promotion	20%	5%

Als individuelle Information hat sie zunächst nur den *Abschluss* laut Bewerbungsunterlagen. Die eigentlich interessante Zielgröße der *tatsächlichen Eignung* kennt sie hingegen nicht. Eine Promotion kostet Zeit und Mühe, bringt aber für *diese* Stelle keinen direkten Nutzen.

Aufgabe: Welche Strategie ist bei ihrer Auswahl vorteilhaft?

- Abschluss ignorieren: Trefferquote $70 : 30$ (möglich)
- Master einstellen: Trefferquote $50 : 25$ (schlechter)
- Doktor einstellen: Trefferquote $20 : 5$ (besser!)

☺ Trotz aller Nachteile kann sich eine Promotion also auszahlen
... selbst wenn sie für die eigentliche Tätigkeit nicht relevant ist!

⚠ Ineffizienz ist der Preis für unvollständige Information.

Bedingte Wkt: Vorurteil oder Gerechtigkeit?

Wir untersuchen hier zwei simple, aber frappierende Beispiele: Federn und Doktortitel. Beide sind durchaus realistisch und handfeste Illustrationen für das Konzept der *bedingten Wahrscheinlichkeit*: Diese ist nicht nur eine schöne Theorie, sondern überall tägliche Praxis.

Die Argumente in unserer fiktiven Bewerbungssituation mögen manche für ungerecht halten. In der Tat basieren Sie auf *Vorurteilen* der Arbeitgeberin – ein eher negativ besetzter Ausdruck, aber inhaltlich bedeutet es dasselbe wie bedingte Wahrscheinlichkeit: Sie nutzt ihre Erfahrung. Unter den gegebenen spärlichen Informationen ist das Vorurteil nützlicher als gar kein Urteil.

Das Grundproblem: Die primäre Zielgröße „Eignung“ ist nicht direkt zugänglich. Der sekundäre Faktor „Ornament“ ist eigentlich unwichtig, dafür aber leicht sichtbar. In Ermangelung primärer Information muss man sich mit sekundärer Information begnügen. Diese erhält dadurch eine größere Bedeutung als sie eigentlich haben sollte, und das wird als ineffizient oder ungerecht empfunden. Das ist der Preis für unvollständige Information!

Zur Beruhigung der Gemüter: Nichts hält die Arbeitgeberseite davon ab, über die erste grobe Vorinformation hinaus genauere Information zu gewinnen, zum Beispiel durch Gespräche, Tests, Assessment oder eine Probezeit. Genau das wird in der Praxis auch erfolgreich genutzt. Das ist der Vorteil, wenn man Information nicht nur *passiv* beobachtet, sondern *aktiv* herstellen kann.

Schließlich zur Ehrenrettung der Promotion, auch aus persönlicher Erfahrung: Viele Studierende empfinden große Begeisterung für ihr Fach. Dies kann sogar dazu führen, dass sie aus ehrlichem intrinsischem Interesse einer Frage auf den Grund gehen wollen und darüber sogar promovieren. Das wird durch die obigen, allzu kühl berechnenden Argumente nicht in Zweifel gezogen!

Das vorige Beispiel war noch wenig formal, daher umso wortreicher. Wir können das Problem nun präzisieren als ein dynamisches Spiel mit unvollständiger Information. Die Spieltheorie stellt uns hierzu eine geeignete Sprache zur Verfügung und zudem Werkzeuge zur Analyse.

Beispiel: Personalchefin Alice sucht für ein wichtiges Projekt einen hochtalentierten Mathematiker (m/w/d); nur normaltalentierte Bewerber würde Sie freundlich ablehnen. Der Abschluss (BSc/MSc/PhD) ist eine zusätzliche Qualifikation, aber für dieses Projekt inhaltlich unerheblich.

Für hochtalentierte Studenten ist ein MSc oder PhD eine Freude und Bereicherung, für normaltalentierte eine Pein und Zeitverschwendung. Bob kennt sein Talent und würde daraufhin seinen Abschluss wählen. Er weiß jedoch auch um die Signalwirkung seiner Entscheidung.

Die folgenden Spiele präzisieren die Struktur und fixieren explizite Daten. Die gewählten Zahlen sind etwas willkürlich und diskussionswürdig, doch sie sind ein Anfang und erlauben uns konkrete Rechnungen. Farbig eingezeichnet ist zudem jeweils ein mögliches Gleichgewicht.

Solche Situationen mit asymmetrischer Information sind allgegenwärtig: Nicht nur, wenn Sie Ihre eigene Arbeitskraft zu Markte tragen, sondern immer, wenn der Verkäufer das Objekt besser kennt als der Käufer. Ein typisches Beispiel ist der Ver/Kauf eines Gebrauchtwagens.

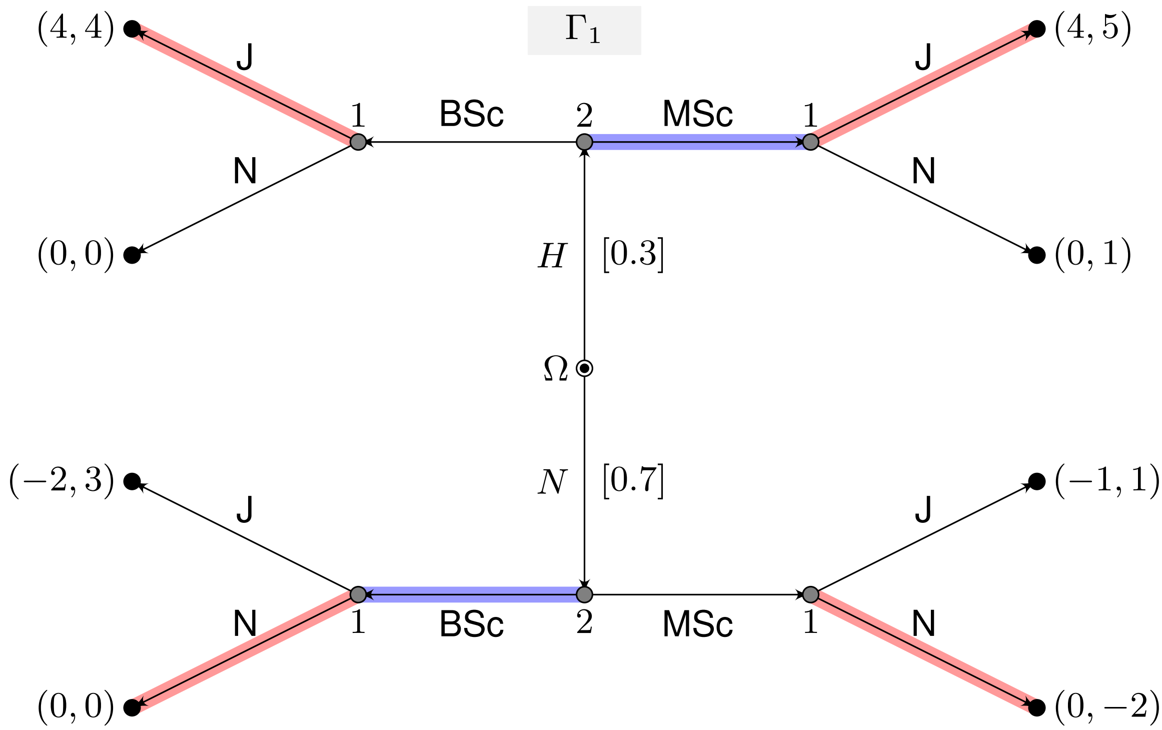
Unsere Beispiele illustrieren zunächst die Ideen und Schreibweisen. Ich hoffe, die Wahl des Universitätsabschlusses ist ausreichend plastisch und motivierend; zahlreiche Konflikte sehen genauso aus, daher stehen unsere simplen Modelle stellvertretend für viele ähnliche.

Allgemein spricht man hier von einem **Signalspiel** / *signaling game*. Auch für solche Situationen wollen wir Lösungskonzepte formulieren. Die unternehmen wir anschließend mit der Definition J3B von perfekten Bayes–Gleichgewichten, nachdem wir etwas Beispielmaterial haben.

Die folgenden drei Spiele $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ sind untereinander eng verwandt. Sie sind einfach genug, um direkt verstanden und gelöst zu werden. Die anschließende Definition codiert das Lösungskonzept allgemein, sie erklärt im größeren Rahmen, was wir als Lösungen suchen.

Spiel mit Signalen: offenbaren oder bluffen?

$1 =$ Alice / Personalchefin, $\quad 2 =$ Bob / Mathematikstudent



Alice erkennt Bobs Talent. Der Abschluss BSc / MSc ist Ihr unwichtig.
Offenbarung: Bob wählt den Abschluss, der seinem Talent entspricht.

Spiel mit Signalen: offenbaren oder bluffen?

Γ_1: Alice erkennt das Talent von Bob und entscheidet entsprechend. Hierzu helfen Bewerbungsgespräche, Assessment Center, Probezeit.

Bob weiß, dass Alice' Entscheidung nicht vom Abschluss abhängt. Bob wählt daraufhin frei den Abschluss, der seinem Talent entspricht.

Wir haben hier ein (sehr simples) Spiel mit vollständiger Information.

🙂 In diesem extensiven Spiel mit vollständiger Information können wir Rückwärtsinduktion anwenden (Satz J1D von Zermelo). Das vereinfacht!

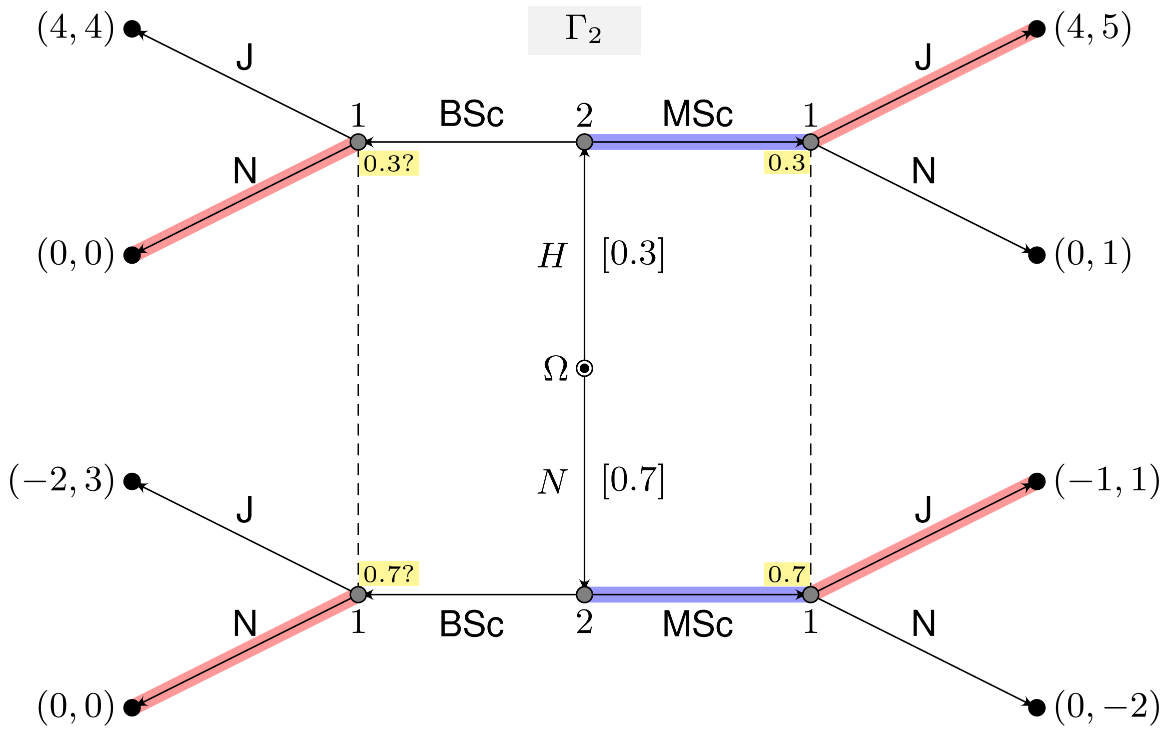
Insbesondere zeigt dies: Wir haben hier nur dieses Gleichgewicht! Bei vollständiger Information sind unsere Methoden brauchbar.

So weit, so gut, so naiv. Erfahrungsgemäß ist die Wirklichkeit jedoch wesentlich komplizierter: Für Arbeitgeber ist es recht schwierig, die Eignung / die Befähigung / das Talent von Bewerbern einzuschätzen.

Wir betrachten daher ein zweites Modell Γ_2, in dem nur der (eigentlich irrelevante) Abschluss zählt. Welches Verhalten ist dann rational? Die möglichen Antworten hängend von der genauen Datenlage ab!

Spiel mit Signalen: offenbaren oder bluffen?

$1 =$ Alice / Personalchefin, $\quad 2 =$ Bob / Mathematikstudent



Alice sieht nicht Bobs Talent, sondern nur sein Signal „BSc“ oder „MSc“. Das sekundäre Merkmal wird nun zur primären Entscheidungsgrundlage.

Spiel mit Signalen: offenbaren oder bluffen?

Γ_2: Alice muss allein aufgrund der Bewerbungsunterlagen entscheiden. Sie sieht nicht Bobs Talent, sondern nur Bobs Signal „BSc“ oder „MSc“. (Die Erhebung genauerer Informationen durch Bewerbungsgespräche, Assessment Center, Probezeit, etc. lassen wir hier außer Acht.)

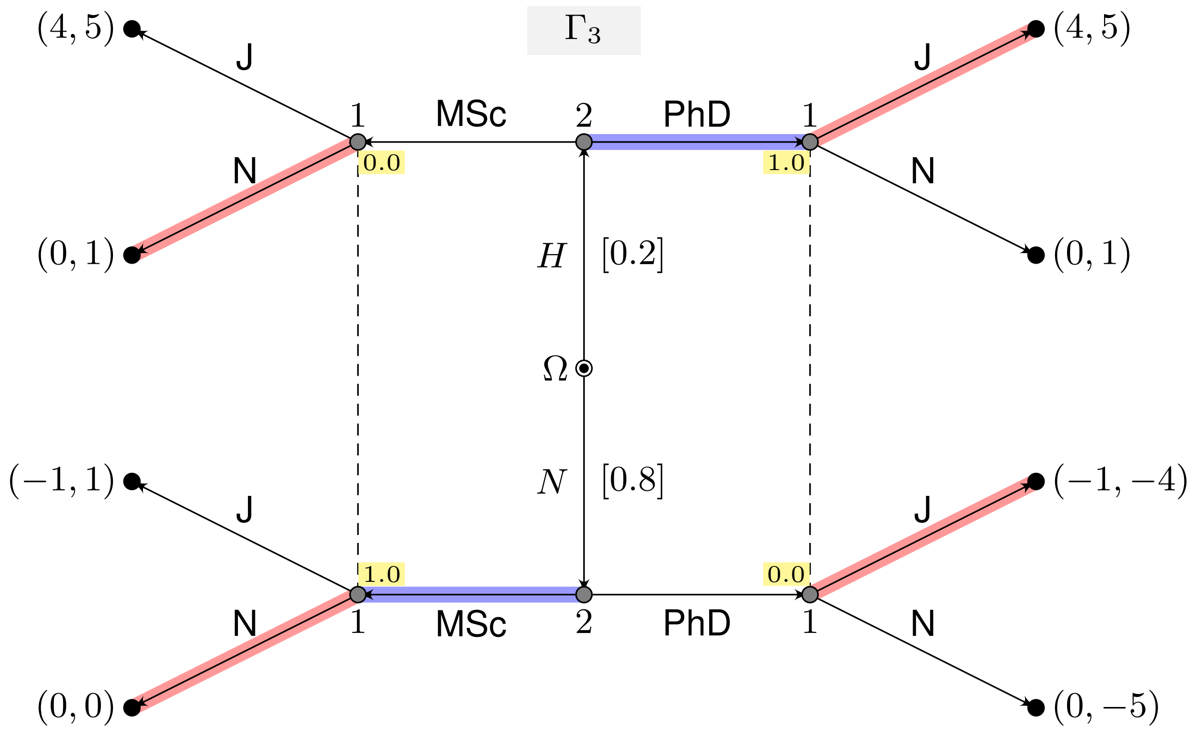
Farbig eingezeichnet ist ein mögliches Gleichgewicht: Hier sind alle Studenten gezwungen, nach dem Bachelor einen Master zu machen. Anschaulich: Nur mit BSc bekommt man keinen (interessanten) Job. Dies ist ein **verschmelzendes Gleichgewicht** / *pooling equilibrium*.

Genauer: Alice hat hier nur vier Strategien $s_1 : \{\text{BSc}, \text{MSc}\} \to \{\text{J}, \text{N}\}$. Auch Bob hat wie zuvor genau vier Strategien $s_2 : \{0, 1\} \to \{\text{BSc}, \text{MSc}\}$. Gezeigt ist ein mögliches Gleichgewicht: Die Zahlen sind so gewählt, dass weder Alice noch Bob sich aus eigener Kraft verbessern kann.

⚠ In diesem extensiven Spiel mit unvollständiger Information können wir Rückwärtsinduktion *nicht* anwenden! Insbesondere wissen wir nicht, wie wir *alle* Gleichgewichte finden. Welche Gleichgewichte suchen wir? Bei unvollständiger Information müssen wir unsere Methoden verfeinern!

Spiel mit Signalen: offenbaren oder bluffen?

$1 =$ Alice / Personalchefin, $2 =$ Bob / Mathematikstudent



Das Signal „PhD“ ist gerade so teuer, dass es zur Differenzierung taugt.
Offenbarung: Bob wählt den Abschluss, der seinem Talent entspricht.

Spiel mit Signalen: offenbaren oder bluffen?

Γ_3: Wir unterscheiden wieder zwei Abschlüsse, diesmal MSc und PhD.
Alice geht es nur um Bobs Talent, der Abschluss ist für sie unwichtig.
Ein PhD ist vielleicht produktiver, bekommt aber ein höheres Gehalt.

Für hochtalentierte Studenten ist ein PhD eine positive Erfahrung,
der hohe Zeitaufwand wird langfristig durch das Gehalt aufgewogen.
Auch sie sind also neutral gegenüber der Wahl MSc oder PhD.

For normaltalentierte Studenten ist ein PhD ein erheblicher Nachteil:
Der Aufwand an Zeit und Mühe ist groß, und Freude bereitet es nicht.
Für Alice macht dies keinen Unterschied, doch für Bob hingegen sehr!

Gegenüber dem Signal „MSc“ ist daher „PhD“ hier so teuer, dass ein
separierendes Gleichgewicht / *separating equilibrium* entsteht.
Die genaue Rechnung hängt von der gegebenen Datenlage ab!

Die Kosten des Signals sind so justiert, dass sich Bluffen nicht lohnt.
Hier gilt das Offenbarungsprinzip, doch das gilt keineswegs immer!
Die Glaubwürdigkeit von Signalen hängt stark von ihren Kosten ab.

Perfektes Bayes–Gleichgewicht / PBE

Definition J3B: perfektes Bayes–Gleichgewicht / PBE

Sei $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P}, q)$ ein dynamisches Spiel mit unvollst. Information. Wir betrachten ein Paar (s, b) aus Strategien s und Überzeugungen b:

1. Für jeden Spieler i ist $s^i \in S^i = S^i(X, q^i)$ bzw. $s \in \bar{S}^i$ eine Strategie.
2. Auf jeder seiner Informationsmengen $[x] = [x]_i$ ist $b^i_{[x]}$ ein WMaß.

Damit kann Spieler i über jede Informationsmenge $[x]$ mitteln:

$$u^i_{[x]}(s) = \sum\nolimits_{y \in [x]} u^i_y(s)\, b^i_{[x]}(\{y\})$$

Wir nennen (s, b) ein **perfektes Bayes–Gleichgewicht**, und schreiben dafür kurz $(s, b) \in \mathrm{PBE}(\Gamma, S)$ bzw. $(s, b) \in \mathrm{PBE}(\Gamma, \bar{S})$, wenn gilt:

3. **Rationalität:** Die Strategie s^i maximiert $u^i_{[x]}(s)$ für jedes $x \in X$.
4. **Konsistenz:** Die WMaße $b^i_{[x]}$ erfüllen die Bayes–Gleichung

$$\mathbf{P}_s([x])\, b^i_{[x]}(\{y\}) = \mathbf{P}_s(\{y\}) \quad \text{für alle } y \in [x].$$

Für $\mathbf{P}_s([x]) > 0$ ausgeschrieben: $b^i_{[x]}(\{y\}) = \mathbf{P}_s(\{y\}) / \sum_{z \in [x]} \mathbf{P}_s(\{z\})$

Perfektes Bayes–Gleichgewicht / PBE

Für ein perfektes Bayes–Gleichgewicht benötigen wir zwei Daten, für jeden Spieler (1) eine **Strategie** s^i und (2) eine **Überzeugung** b^i.

Jeder Spieler i benötigt für jede seiner Informationsmengen $[x] = [x]_i$ ein WMaß $b^i_{[x]}$. Diese Wkten sind seine Einschätzung, in welchem Zustand sich das Spiel tatsächlich befindet. Auf Englisch heißt das *belief*, auf Deutsch sagen wir *Einschätzung* oder *Überzeugung* oder auch *Glauben*, selbst trotz religiöser Anklänge.

Damit kann Spieler i über jede Informationsmenge $[x]$ mitteln und so seine erwartete Auszahlung $u^i_{[x]}(s) = \sum_{y \in [x]} u^i_y(s)\, b^i_{[x]}(\{y\})$ bestimmen.

Die **sequentielle Rationalität** (3) entspricht der Teilspielperfektion in Spielen mit vollständiger Information. Das ist soweit plausibel.

Beispiel: In den obigen Beispielen Γ_2 und Γ_3 sind die Überzeugungen gelb hinterlegt; erst damit rechtfertigen wir die sequentielle Rationalität. Bei vollständiger Information wie in Γ_1 gilt $[x] = \{x\}$ und $b^i_{[x]}(\{x\}) = 1$. Diese Dirac–Maße werden im Folgenden nicht weiter betont.

Perfektes Bayes–Gleichgewicht / PBE

Die Überzeugungen b^i benötigen wir zur Rationalität der Strategien (3). Entscheidend ist nun die Frage: *Welche Überzeugungen sind rational?* Das führt zur obigen Bedingung (4) der **bayesianischen Konsistenz**: Überzeugungen müssen der Regel von Bayes genügen.

Vorgelegt sei das Strategiebündel $s \in \bar{S}$. Zum fixen Startzustand $x_0 \in X$ sei $\mathbf{P}_s(\{z\})$ die Wkt, dass der Zustand $z \in X$ erreicht / durchlaufen wird.

Zur Vereinfachung gehen wir meist davon aus, dass jede Trajektorie jede Informationsmenge $[x]$ höchstens einmal trifft. Dann gilt nämlich:

$$\mathbf{P}_s([x]) = \sum_{z \in [x]} \mathbf{P}_s(\{z\})$$

Bayesianische Konsistenz bedeutet für $\mathbf{P}_s([x]) > 0$ ausgeschrieben:

$$b^i_{[x]}(\{y\}) = \frac{\mathbf{P}_s(\{y\})}{\sum_{z \in [x]} \mathbf{P}_s(\{z\})} \quad \text{für alle } y \in [x]$$

Hierbei ist $\mathbf{P}_s(\{z\})$ die Wkt, im Spielverlauf mit den Strategien s den Zustand $z \in X$ zu erreichen. Das folgende Beispiel illustriert dies.

Perfektes Bayes–Gleichgewicht / PBE

Diese Definition ist plausibel für **vollständig gemischte** Strategien: Jede Aktion wird mit einer (kleinen, aber strikt) positiven Wkt gespielt, jede endliche Trajektorie hat somit eine (kleine, aber strikt) positive Wkt.

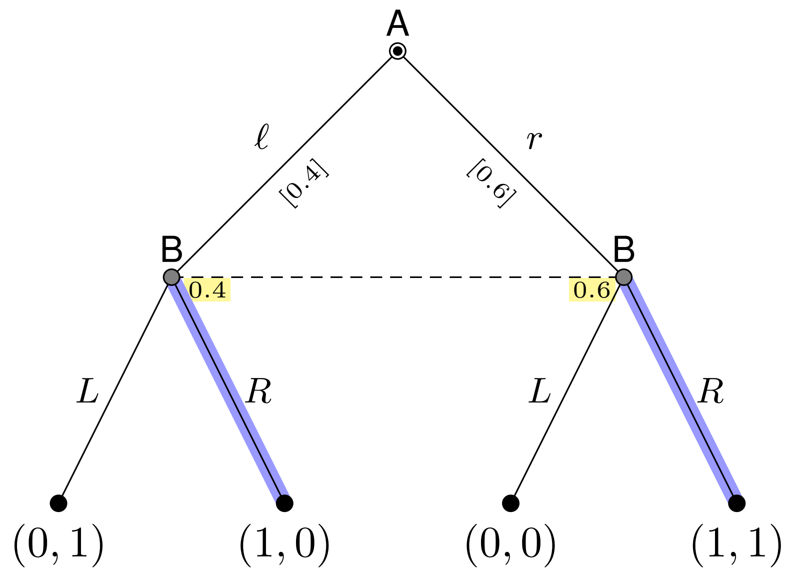
Allgemein können wir uns vorstellen, dass jeder Spieler in jedem Zug (infinitesimal) kleine Fehler machen kann. Die Ausführung dieser Idee verfeinert das Lösungskonzept zum **sequentiellen Gleichgewicht** / *sequential equilibrium* und **Zitternde-Hand-Gleichgewicht** / *trembling hand equilibrium*. Das ersehnte Ziel ist dabei immer die Klärung der zentralen, kniffligen Frage: *Welche Überzeugungen sind rational?*

Rather a lot of bodies are buried in the definition of consistency.
David M. Kreps, *A Course in Microeconomic Theory* (1990)

Wir werden diese Problematik mit zahlreichen Beispielen illustrieren, sodass Sie damit arbeiten können, dann aber nicht weiter vertiefen. Mit ausreichend Gewöhnung werden Sie feststellen, dass es nicht obskur oder kompliziert ist, sondern sehr naheliegend und natürlich.

Unvollständige Information und PBE

Beispiel: Bob sieht nicht den Zug von Alice:



Im Allgemeinen kennt Spieler i nur einen kleinen Auszug des gesamten Spielzustands; wir sprechen dann von **unvollständiger Information**.

Das geschieht etwa, wenn Spieler verdeckt oder gleichzeitig ziehen. Die anderen Spieler sind dann über seinen Zug im Ungewissen.

Unvollständige Information und PBE

Dieses dynamische Spiel entspricht dem folgenden Spiel in Normalform:

Alice \ Bob	L	R
ℓ	0, 1	1, 0
r	0, 0	1, 1

Im Beispiel nehmen wir an, dass Alice sich auf die gemischte Strategie $s = 0.4 \cdot \ell + 0.6 \cdot r$ festlegt; sie spielt ℓ mit Wkt 40% und r mit Wkt 60%.

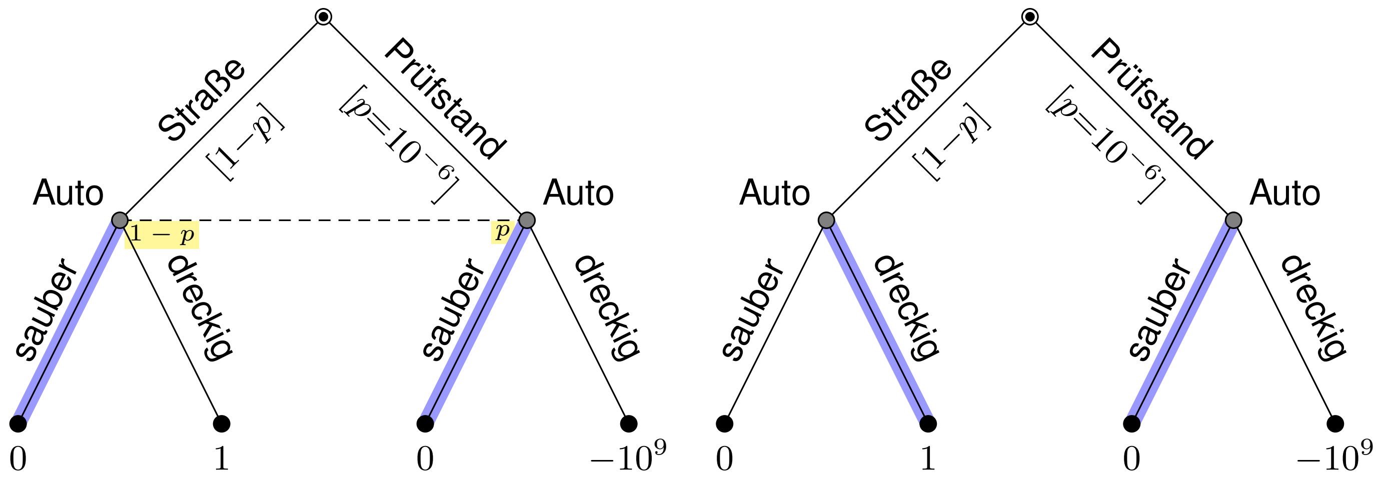
Bob kennt diese Strategie s, sieht jedoch nicht die gespielte Aktion. Das Spiel sagt ihm nur, dass er am Zug ist, nicht in welchem Zustand.

Wenn Bob am Zug ist, benötigt er jedoch eine geeignete Bewertung! Das ist die Rolle der Überzeugung b zu seiner Informationsmenge.

🙂 Hier ist die Regel von Bayes besonders einfach anzuwenden. Jedes PBE entspricht hier einem NE in Normalform und umgekehrt!

Unvollständige Information und PBE

Beispiel: Schadstoffmessung und Abgasskandal / *Dieselgate*:



Kennt jeder Spieler $i \in I$ jederzeit den Zustand $x \in X$ des Spiels, so sprechen wir von **vollständiger Information** / *complete information*.

Diese Maximalforderung ist in vielen Anwendungen zuviel verlangt: Häufig ist **unvollständige Information** wesentlich für das Spiel.

Beim aktuellen Abgasskandal war die Autoelektronik allzu intelligent, so dass sie die Spielregeln leicht umgehen und manipulieren konnte.

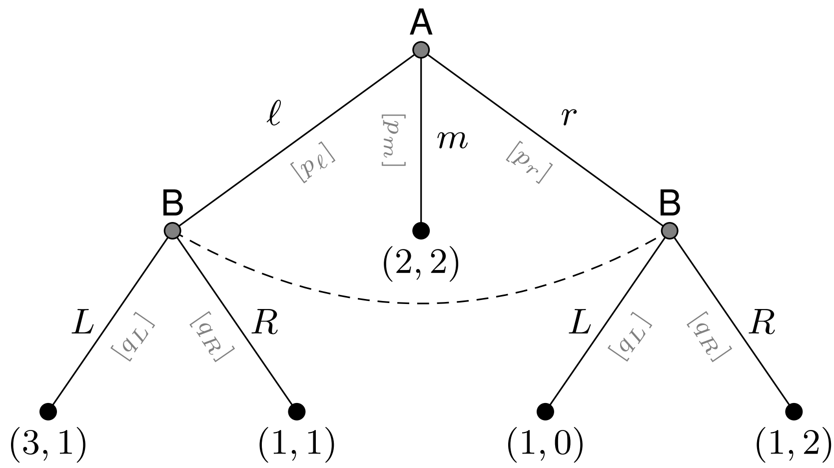
Unvollständige Information und PBE

Die Formulierung als dynamisches Spiel erlaubt uns insbesondere, Information zu modellieren und zu analysieren: Wer weiß wann was? Das vorige Spiel in Normalform kann dies nicht! In extensiver Form hingegen können wir dies durch Informationsmengen formalisieren. Ich illustriere dies mit einem einfachen, aber frappierenden Beispiel:

Als **Abgasskandal** / *Dieselgate* bezeichnet man eine Reihe illegaler Manipulationen verschiedener Autohersteller zur Umgehung gesetzlich vorgegebener Abgasgrenzwerte. VW hatte seine Diesel-Pkw in den USA als besonders saubere „Clean-Diesel“ beworben. Am 18.09.2015 wurde öffentlich, dass die Volkswagen AG illegale Abschaltungen verwendete: Die US-Abgasnormen wurden nur im Prüfstandsmodus eingehalten; im Normalbetrieb dagegen wurde die Abgasreinigung abgeschaltet.

Die ursprüngliche VW-Abgasaffäre löste eine weitreichende Krise der Automobilindustrie aus. Viele Studien stellten Abweichungen zwischen realen und Prüfstandemissionen bei den Modellen deutscher und anderer Hersteller fest. (`de.wikipedia.org/wiki/Abgasskandal`)

Perfekte Bayes–Gleichgewichte vs Nash–Gleichgewichte



A \ B	L	R
ℓ	3, 1	1, 1
m	2, 2	2, 2
r	1, 0	1, 2

Aufgabe: (0) Bestimmen Sie Normalform und Nash–Gleichgewichte (1) sowie zur extensiven Form alle perfekten Bayes–Gleichgewichte $(\ s_A \in [\ell, m, r],\ s_B \in [L, R],\ b \in [\ell, r]\ )$ in $\mathrm{PBE}(\Gamma, \bar{S})$ und in $\mathrm{PBE}(\Gamma, S)$.

Lösung: (1a) Gilt $b(r) > 0$, so folgt $q_R = 1$ und $p_m = 1$.

(1b) Gilt $b(r) = 0$, also $b(\ell) = 1$, so unterscheiden wir drei Fälle:
$q_L > q_R \ \Rightarrow\ p_\ell = 1$, $\quad q_L = q_R \ \Rightarrow\ p_\ell, p_m$ beliebig, $\quad q_L < q_R \ \Rightarrow\ p_m = 1$.
Die reinen PBE sind demnach (2a) (ℓ, L, δ_ℓ) und (2b) (m, R, b).

Perfekte Bayes–Gleichgewichte vs Nash–Gleichgewichte

Alice hat vollständige Information: Sie ist hier genau einmal am Zug, und ihre Informationsmenge ist einelementig. Ihre Überzeugung b^1 ist somit das Dirac–Maß und wird im Folgenden nicht weiter beachtet.

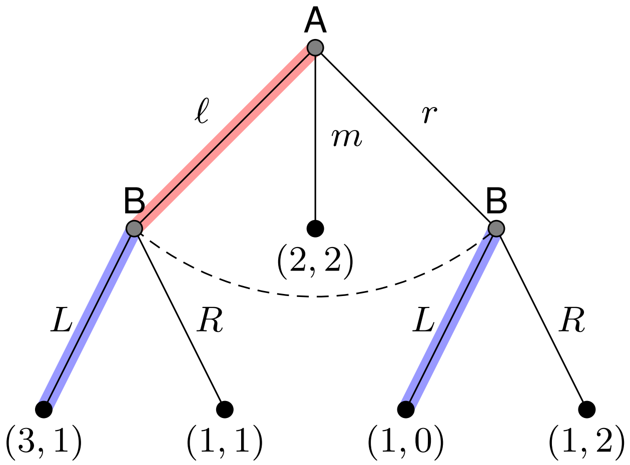
Bob ist höchstens einmal am Zug, und seine Informationsmenge ist zweielementig: Wenn Bob am Zug ist, hat Alice ℓ oder r gespielt, aber nicht m. Seine Überzeugung $b = b^2 \in [\ell, r]$ ist ein WMaß auf $\{\ell, r\}$.

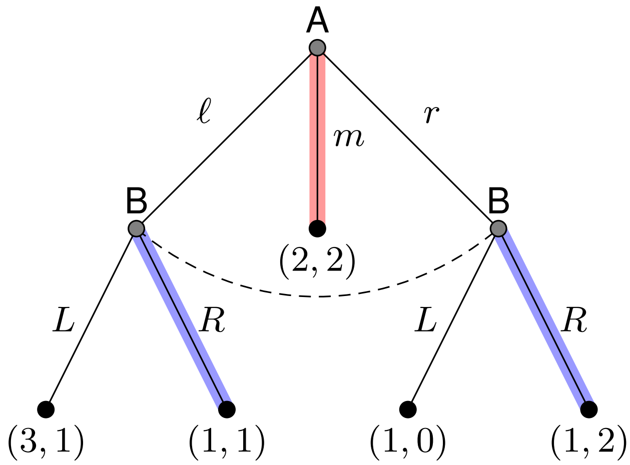
🙂 Wenn Bob am Zug ist, dann weiß er, dass Alice links oder rechts gespielt hat, aber er weiß nicht, ob Alice links oder rechts gespielt hat.

Wir können die perfekten Bayes–Gleichgewichte auf verschiedene Weisen durch Fallunterscheidung finden. Ich beginne hier mit Bobs Überzeugung b. (1a) Im Falle $b(r) > 0$ muss Bob R spielen, denn dies ist strikt dominant. Dann wiederum ist für Alice m strikt dominant.

(1b) Im Falle $b(r) = 0$ gilt $b(\ell) = 1$, und Bob ist indifferent ob L oder R . Je nach $q_L > q_r$ oder $q_L < q_R$ ist für Alice ℓ oder m strikt dominant. Die beiden folgenden Graphiken illustrieren die beiden reinen PBE. Im ersten greift die Bayes–Formel, im zweiten hingegen nicht.

Perfekte Bayes–Gleichgewichte vs Nash–Gleichgewichte





(a) Das reine PBE (ℓ, L, δ_ℓ); Bobs Überzeugung δ_ℓ ist dadurch festgelegt. Bei diesem Strategiebündel wird Bobs Informationsmenge nur links erreicht. Die Regel von Bayes ergibt somit $b(\ell) = 1$ und $b(r) = 0$.

(b) Das reine PBE (m, R, b); Bobs Überzeugung b ist hier völlig beliebig! Bei diesem Strategiebündel wird Bobs Informationsmenge nie erreicht. Die Regel von Bayes ist hier wirkungslos, daher ist b willkürlich.

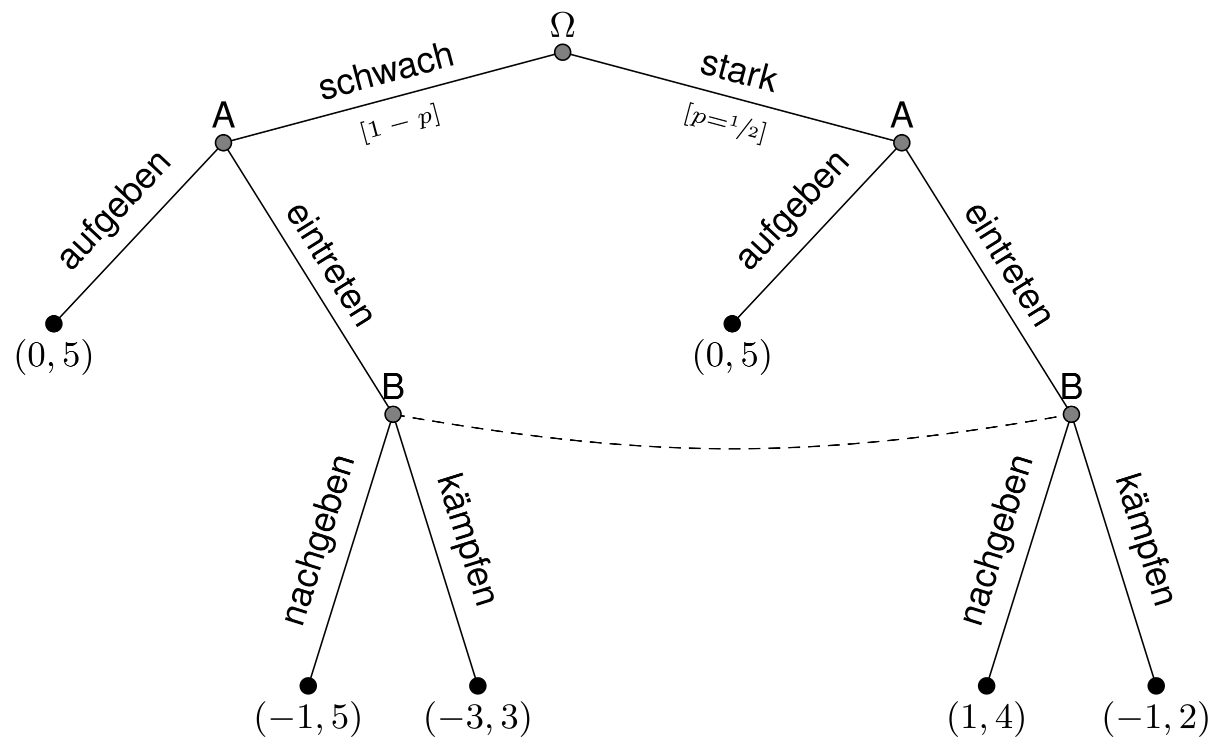
Perfekte Bayes–Gleichgewichte vs Nash–Gleichgewichte

Dieses Spiel hat eine sehr einfache Dynamik und ist nahezu statisch. Die strategische Normalform bildet daher fast die gesamte Information ab, und es ist beruhigend zu erkennen, dass der Begriff des perfekten Bayes–Gleichgewichts hier dem des Nash–Gleichgewichts entspricht.

Unsere Definition J3B ist allgemein gehalten, um auf möglichst viele spieltheoretische Situationen anwendbar zu sein. Einfache Beispiele illustrieren, dass sie vernünftige Ergebnisse liefert, zudem im Einklang mit dem vertrauten Lösungskonzept der Nash–Gleichgewichte.

Das folgende Beispiel ist spürbar realistischer und interessanter. Es zeigt insbesondere, dass die perfekten Bayes–Gleichgewichte eine echte Verfeinerung sind. Für komplexere Anwendungen, wie die folgende, genügen die einfachen Nash–Gleichgewichte nicht mehr.

Markteintritt: kämpfen oder nachgeben?



Markteintritt: kämpfen oder nachgeben?

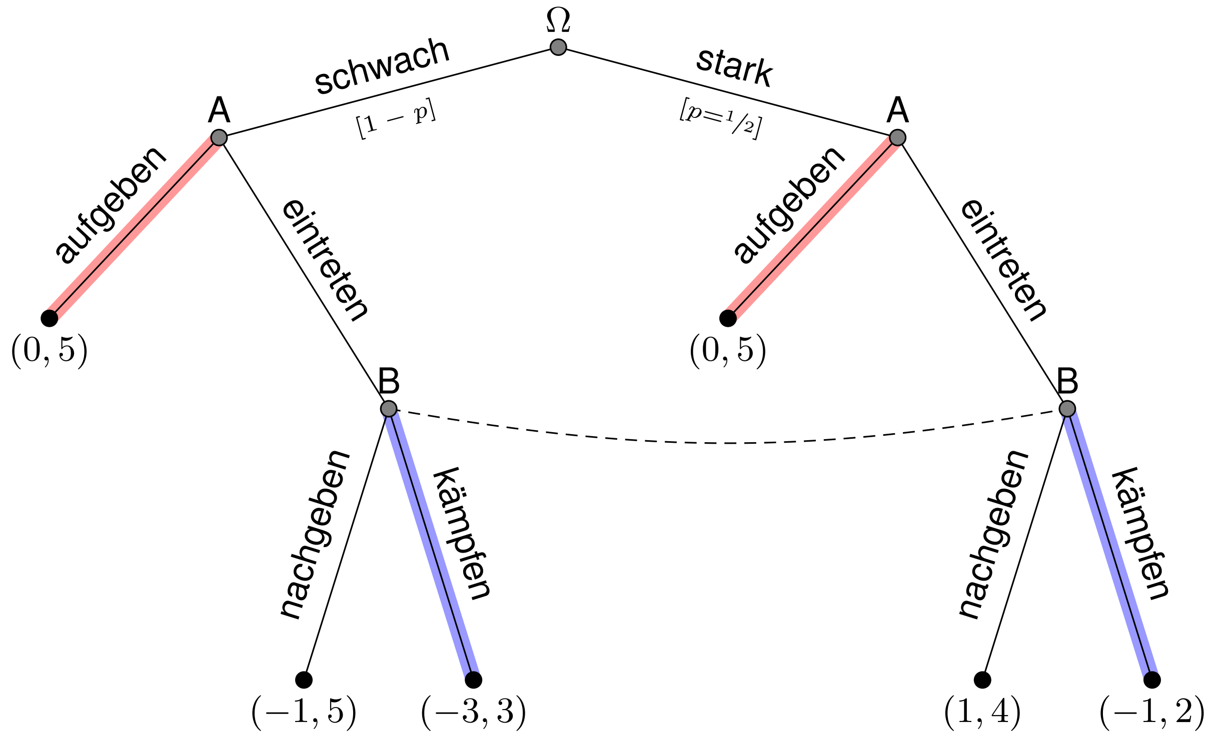
Bei diesem Spiel geht es um den Eintritt in den umkämpften Markt der Coffee-Shops. Spielerin 1, Alice, ist Chefin der Grünschnabel GmbH. Spieler 2, Bob, ist Chefstratege der marktführenden Platzhirsch AG. Das Spiel mit den Auszahlungen ist im obigen Graphen dargestellt.

Zunächst entscheidet der Zufall, wie stark die Herausforderin ist. Alice kennt ihre eigene Stärke, aber Bob ist darüber im Unklaren. Alice muss nun entscheiden, ob sie in den Markt eintritt oder aufgibt. Falls Alice eintritt, muss Bob entscheiden, ob er kämpft oder nachgibt.

☹ Teilspiele helfen uns hier nicht, denn das gesamte Spiel Γ erlaubt keine echten Teilspiele! Unsere bewährten Werkzeuge greifen daher hier nicht: Teilspielperfektion, Rückwärtsinduktion und Prinzip der einmaligen Abweichung lassen sich nicht anwenden.

☺ Dennoch können wir dieses Spiel erfolgreich untersuchen. Wir betrachten zunächst ganz klassisch Nash–Gleichgewichte und verfeinern diese dann zu perfekten Bayes–Gleichgewichten.

Markteintritt: unglaubwürdiges Nash–Gleichgewicht



Markteintritt: unglaubwürdiges Nash–Gleichgewicht

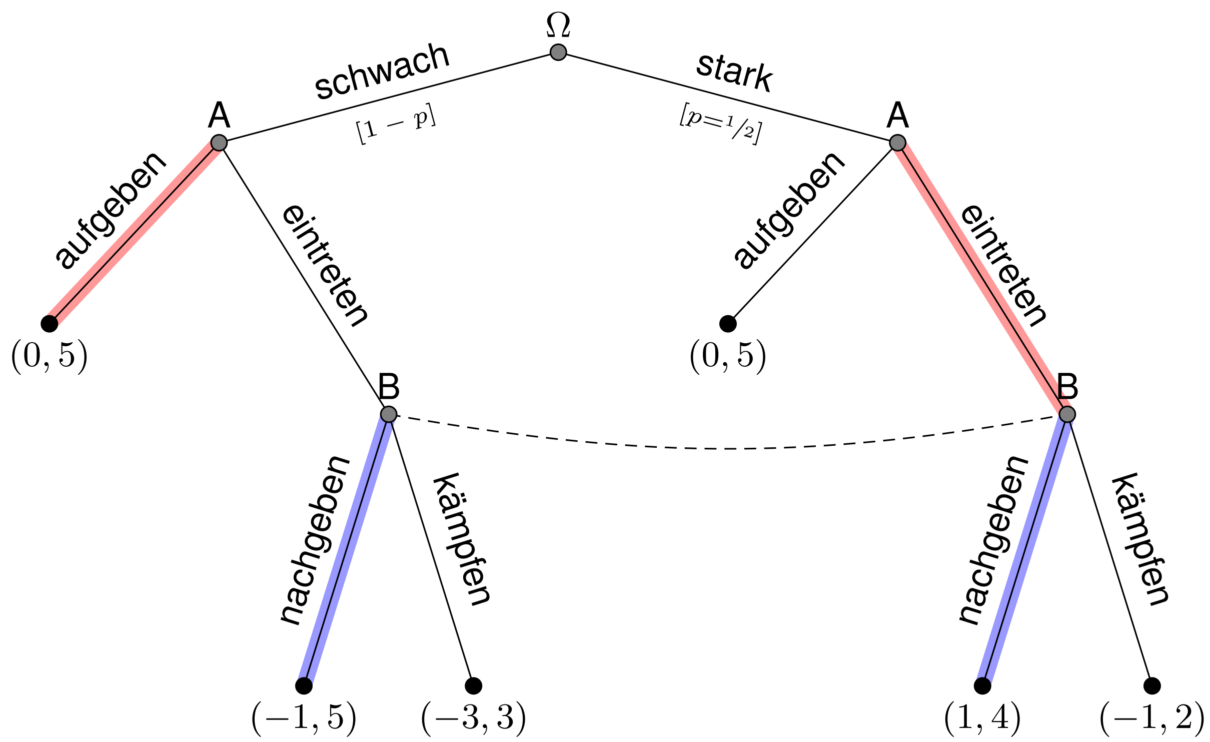
Angenommen, Bob beschließt, jeden Herausforderer zu bekämpfen. Derart eingeschüchtert wird Alice aufgeben, denn ihr Markteintritt führt unweigerlich zu einem für sie verlustreichen Unterbietungswettbewerb. Das ist anschaulich plausibel und auch formal begründbar:

Wir haben also A: schwach $\mapsto$ aufgeben, stark $\mapsto$ aufgeben, B: kämpfen. Dieses Strategiebündel ist hier tatsächlich ein Nash–Gleichgewicht! Weder Alice noch Bob kann sich aus eigener Kraft verbessern. (Übung zur Kontrolle: Schreiben Sie die Spielmatrix aus.)

☹ Dieses Gleichgewicht ist nicht überzeugend. Bobs Drohung ist unglaubwürdig, denn Kämpfen wird strikt dominiert von Nachgeben! Das Konzept des Nash–Gleichgewichts ist dafür jedoch zu grob und kann dieses Argument in diesem Spiel nicht abbilden.

Übung: Es gibt unendliche viele weitere Nash–Gleichgewichte. Finden Sie alle! Welche davon sind glaubwürdig? (J355)

Markteintritt: glaubwürdiges Nash–Gleichgewicht



Markteintritt: glaubwürdiges Nash–Gleichgewicht

Angenommen, Bob sieht ein, dass Nachgeben besser ist als Kämpfen. Das ist hier die einzig vernünftige Strategie, und das weiß auch Alice. Derart ermutigt wird eine starke Alice frohgemut in den Markt eintreten, während sich dies für eine schwache Alice weiterhin nicht lohnt.

Wir haben A: schwach $\mapsto$ aufgeben, stark $\mapsto$ eintreten, B: nachgeben. Auch dieses Strategiebündel ist tatsächlich ein Nash–Gleichgewicht! Weder Alice noch Bob kann sich aus eigener Kraft verbessern. (Übung zur Kontrolle: Schreiben Sie die Spielmatrix aus.)

Aufgabe: Dieses Gleichgewicht ist überzeugend! Es ist ein perfektes Bayes–Gleichgewicht, und zwar das einzige in diesem Spiel.

Lösung: Bob nimmt ein WMaß b auf seiner Informationsmenge an. Da Nachgeben strikt dominant ist, ist dies immer die beste Antwort. Daraufhin beschließt eine starke Alice einzutreten, eine schwache Alice aufzugeben. Nach der Regel von Bayes hat Bob schließlich nur eine konsistente Überzeugung, nämlich $b(\text{schwach}) = 0$ und $b(\text{stark}) = 1$.

☺ In diesem einfachen Beispiel sehen wir bereits, wie das Konzept des perfekten Bayes–Gleichgewichts die Rationalität wiederherstellt. Zwar spielt Bobs konkrete Überzeugung b hier keine größere Rolle, doch sorgt immerhin dafür, dass sich die Dominanz auch auswirkt.

Das ist das allgemeine Prinzip hinter verfeinerten Lösungskonzepten: Wir wollen mögliche *vernünftige* Lösungen möglichst weit eingrenzen. In manchen Fällen, so wie hier, sind Nash–Gleichgewichte zu grob, und geeignete Verfeinerungen erlauben eine genauere Analyse.

Aufgabe: Zum lehrreichen Kontrast, bestimmen Sie alle gemischten Nash–Gleichgewichte dieses Spiels. Welche davon sind glaubwürdig?

Angenommen, Bob spielt zu einem $p \in [0, 1]$ die gemischte Strategie $s = (1 - p) \cdot$ nachgeben $+ p \cdot$ kämpfen. Was ist Alice' beste Antwort?

Lösung: (1) Im Falle $p < 1/2$ lohnt sich der Eintritt für eine starke Alice. Bob muss daraufhin feststellen, dass Kämpfen strikt dominiert wird von Nachgeben, also muss $p = 0$ gelten. Wir finden so das Gleichgewicht A: schwach $\mapsto$ aufgeben, stark $\mapsto$ eintreten, B: nachgeben.

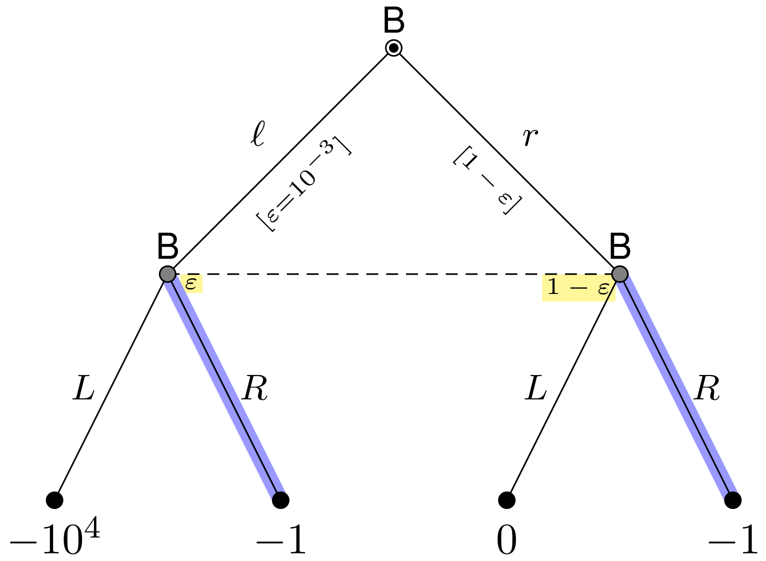
(2) Im Falle $p \geq 1/2$ lohnt sich der Markteintritt selbst für eine starke Alice nicht. Wir haben also A: schwach $\mapsto$ aufgeben, stark $\mapsto$ aufgeben, B: s.

Das ist ein Nash–Gleichgewicht, wenn auch extrem unglaubwürdig. Bob kann leicht und schadlos behaupten, er würde immer kämpfen, denn dieser Fall tritt nie ein und seine Drohung wird nie aktiv.

Sollte Alice jemals, zum Beispiel durch einen kleinen zufälligen Fehler, in den Markt eintreten, so wird sich Bobs Drohung als hohl erweisen. Diese Illusion fliegt hier auf durch perfekte Bayes–Gleichgewichte.

Im/perfekte Erinnerung

Beispiel: Bob vergisst seinen eigenen Zug:



Das scheint auf den ersten Blick verrückt, kommt aber tatsächlich vor, nicht nur aber auch bei Ihren sprichwörtlich zerstreuten Professor:innen.

Alltagsbeispiele: „Habe ich vorhin das Bügeleisen ausgeschaltet?“ Oder: „Eben hatte ich noch mein Handy, habe ich es eingesteckt?“

Im/perfekte Erinnerung

(1) Hier drängt es sich auf, Bob nicht nur als *einen* Spieler zu betrachten, sondern als zeitliche Abfolge unabhängiger Clone seines Ichs. All seine Clone arbeiten zusammen, sie teilen dieselbe Nutzenfunktion, doch sie sind nicht identisch, insbesondere haben sie nicht dieselbe Information.

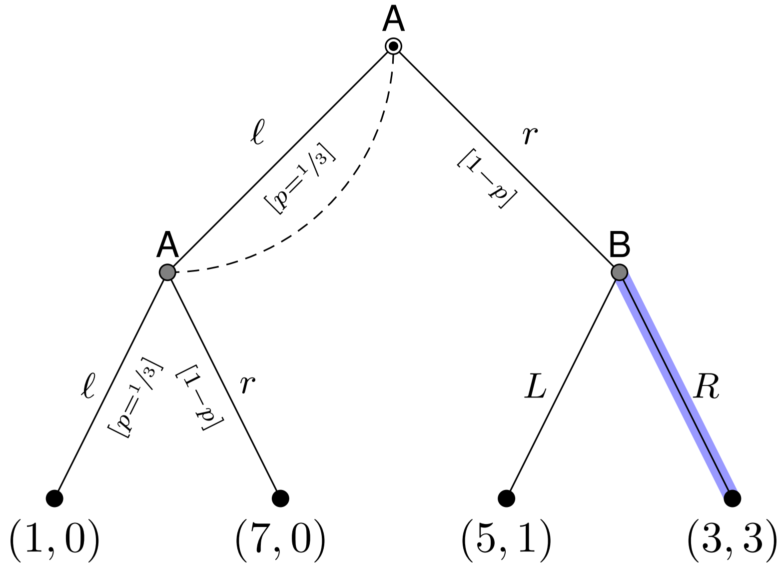
(2) Ebenso realistisch ist die Interpretation als Team: Bob ist nicht eine einzige Person, sondern ein Team von Spieler:innen. Diese teilen sich die Rollen im Spiel und haben daher nicht immer dieselbe Information. Das ist dieselbe Interpretation wie in (1), nur ohne das Wort „Clone".

Im Beispiel spielt Bob die gemischte Strategie $s = \varepsilon \cdot \ell + (1-\varepsilon) \cdot r$: Mit einer kleinen aber positiven Wkt $\varepsilon > 0$ verbummelt er sein Handy. Bob in Runde 2 kennt die Wkt ε, nicht jedoch die gespielte Aktion ℓ, r. Das Risiko für L ist zu groß, also spielt Bob R. *Better safe than sorry.*

🙂 Hier ist die Regel von Bayes besonders einfach anzuwenden. Für solch simple Fälle hätten wir vermutlich noch nichts weiter vereinbaren müssen, aber sie illustrieren immerhin das Prinzip und stärken unser Vertrauen in perfekte Bayes–Gleichgewichte.

Im/perfekte Erinnerung

Beispiel: Alice vergisst, ob sie bereits gezogen hat:



Das scheint auf den ersten Blick verrückt, kommt aber tatsächlich vor, nicht nur aber auch bei Ihren sprichwörtlich zerstreuten Professor:innen.

Alltagsbeispiele: „Habe ich Ihnen schon perfekte Erinnerung erklärt?“ oder extremer: „War ich heute schon in der Mensa oder noch nicht?“

Im/perfekte Erinnerung

⚠ Hier versagt das Konzept der perfekten Bayes–Gleichgewichte! Manche Trajekorien treffen Alice’ Informationsmenge mehr als einmal. Unsere vereinfachende Annahme ist demnach hier nicht erfüllt.

Bob muss R spielen, denn diese Strategie ist für ihn strikt dominant. Spielt Alice ℓ, so erhält sie 1. Spielt Alice hingegen r, so erhält sie 3. Die höhere Auszahlung 7 kann sie mit *reinen* Strategien nie erreichen! Sie ist daher gezwungen, *gegen sich selbst* gemischt zu spielen.

Alice wählt die gemischte Strategie $s = p \cdot \ell + (1-p) \cdot r$ mit $p \in [0,1]$. Wichtig ist, dass dies in jedem Zug unabhängig angewendet wird, genannt *behavioural strategy*. Ihre erwartete Auszahlung ist dann

$$u_1(p) = 1 \cdot p^2 + 7 \cdot p(1-p) + 3 \cdot (1-p) = -6p^2 + 4p + 3.$$

Die Nutzenfunktion ist hier nicht affin-linear in p, sondern quadratisch. Das Maximum wird diesmal nicht im Rand angenommen: Die Ableitung ist $u_1'(p) = -12p + 4 \overset{!}{=} 0$, das Maximum wird also für $p = {}^1/_3$ erreicht. Alice’ so maximierte Auszahlung ist demnach $u({}^1/_3) = (\,3{}^2/_3,\ 2\,)$.

Minimalforderung ist meist **perfekte Erinnerung** (*perfect recall*): Der Spieler $i \in I$ erinnert sich jederzeit an seine bisherigen Aktionen.

Random fun fact: Der Film *Total Recall* von 1990 mit Arnold Schwarzenegger, Rachel Ticotin und Sharon Stone beruht auf der SciFi-Kurzgeschichte *We Can Remember It for You Wholesale* von Philip K. Dick (1928–1982) und handelt von wahren und falschen Erinnerungen. Er gilt als einer von Schwarzeneggers besten Filmen. Auf *Rotten Tomatoes* erreicht das Original stolze 82%, das Remake von 2012 Colin Farrell, Kate Beckinsale und Jessica Biel dümpelt bei 31%.

Formal: Ein **Spielverlauf** oder eine **Historie** $h : \alpha \to x$ ist eine Folge

$$h = (\ x_0, \omega_0, a_0;\ x_1, \omega_1, a_1;\ \dots;\ x_{n-1}, \omega_{n-1}, a_{n-1};\ x_n\ )$$

von Zuständen $x_t \in X$ von $x_0 = \alpha$ nach $x_n = x$ sowie Zufallselementen $\omega_t \in \Omega_{x_t}$ und Aktionen $a_t \in A_{x_t}$, wobei $x_{t+1} = f(x_t, \omega_t, a_t)$ für $0 \le t < n$.

Für Spieler $i \in I$ ist die **persönliche Historie** $h^i : \alpha^i \to x^i$ die Folge

$$h^i = (\ x_0^i, a_0^i;\ x_1^i, a_1^i;\ \dots;\ x_{n-1}^i, a_{n-1}^i;\ x_n^i\ ).$$

Hierbei ist $x_t^i = q^i(x_t)$ seine Auskunft / Kenntnis zum Spielstand x_t und $a_t^i \in A_{x_t}^i$ seine Aktion. Paare (x_t^i, a_t^i) mit $A_{x_t}^i = \{a_t^i\}$ werden gelöscht.

Diese Formulierung ist wohlüberlegt: Knoten, an denen Spieler i nichts zu entscheiden hat, treten in seiner persönlichen Historie h^i nicht auf.

Die Länge n der Historie $h : \alpha \to x$ von $\alpha \in X_\ell$ in $x \in X_m$ ist die Anzahl der durchlaufenen Knoten, also die Höhendifferenz $n = m - \ell$ im Baum.

Aufgrund der Löschung der für ihn inaktiven Knoten kann Spieler i allein aus $h^i : \alpha^i \to x^i$ nicht die Zahl der durchlaufenen Knoten rekonstruieren. Insbesondere hat er somit keinen Zugriff auf die Systemzeit m.

Beispiel: In Anwendungen kann es vorkommen, dass Spieler i an einer Phase des Spiels nicht beteiligt ist, etwa separaten Verhandlungen der anderen Spieler. Dann sollte h^i aus dieser Phase keine Information an Spieler i übertragen, selbst nicht die Länge der Verhandlungen.

Das Grundprinzip ist immer dasselbe und ganz einfach: Die Spielleitung verfügt über vollständige Information. Die Abbildung $q^i : X^\circ \twoheadrightarrow X^i$ codiert genau die Teilinformation, die sie Spieler i zur Verfügung stellt. Dies sollte kompatibel sein mit der persönlichen Spielerhistorie h^i. Genau diese Forderung führt uns nun zur perfekten Erinnerung.

Definition J3c: perfekte Erinnerung

Sei $\Gamma = (X, v, f, \mathbf{P}, q)$ ein dynamisches Spiel.

(1) Spieler $i \in I$ hat **vollständige Information**, wenn seine Auskunft $q^i : X^\circ \twoheadrightarrow X^i$ injektiv ist. Jede Äquivalenzklasse $[x]_i$ ist dann einpunktig. Kanonisch gelingt dies vermöge der identischen Abbildung $q^i = \mathrm{id}_{X^\circ}$. In diesem Falle kann die explizite Angabe von q^i weggelassen werden.

(2) Spieler i hat **perfekte Erinnerung**, wenn für je zwei $x, \tilde{x} \in X^\circ$ und Historien $h : \alpha \to x$ und $\tilde{h} : \alpha \to \tilde{x}$ gilt: Aus $h^i \ne \tilde{h}^i$ folgt $q^i(x) \ne q^i(\tilde{x})$.

Gilt dies für alle $i \in I$, so ist Γ ein Spiel mit **perfekter Erinnerung**.

Das ist eine naheliegende Minimalforderung der logischen Konsistenz: Sind die persönlichen Historien h^i und $\tilde{h}^i$ verschieden, so kann Spieler i die Zustände x und $\tilde{x}$ unterscheiden bereits anhand der Auskunft q^i. Bei imperfekter Erinnerung hätten wir die paradoxe Situation, dass Spieler i seine Kenntnis $q^i(x)$ über den aktuellen Zustand x verfeinert, wenn er zusätzlich sein Protokoll h^i seiner bisherigen Aktionen nutzt.

Information ist ein wertvolles Gut, und dies gilt auch in der Spieltheorie. Im Sinne einer Koalition liegt es nahe, Teilmengen $J \subseteq I$ zu betrachten.

Beispiel: Beim Skatspiel gilt: Selbst wenn sich die beiden Gegenspieler illegalerweise absprechen, haben sie nicht vollständige Information über den Spielzustand: Aus ihren $10 + 10$ Karten leiten sie die verbleibenden 12 der insgesamt 32 Karten ab, kennen aber noch nicht zweifelsfrei die Aufteilung dieser Karten: 2 im Skat und 10 auf der Hand des Spielers. Dasselbe gilt, wenn ein Gegenspieler dem Spieler in die Karten schaut.

Analog formulieren wir für $J \subseteq I$ gemeinsam perfekte Erinnerung. Wir definieren die gemeinsame Historie h^J für $J \subseteq I$ genauso wie die persönliche Historie h^i für einen einzelnen Spieler $i \in I$. Die Koalition J hat gemeinsam perfekte Erinnerung, wenn für je zwei Historien $h : \alpha \to x$ und $\tilde{h} : \alpha \to \tilde{x}$ gilt: Aus $h^J \ne \tilde{h}^J$ folgt $q^J(x) \ne q^J(\tilde{x})$.

Wir werden meist für jeden Spieler $i \in I$ perfekte Erinnerung fordern. Hieraus folgt gemeinsam perfekte Erinnerung für alle $J \subseteq I$, $J \ne \emptyset$.

Aufgabe: Alice und Bob haben je einen Schneeball und stehen anfangs 10 Schritte auseinander. Ihre Trefferwkten sind je nach Entfernung:

Schritte $s =$	3	4	5	6	7	8	9	10
Alice $0.90^{s-1} =$	81%	73%	66%	59%	53%	48%	43%	39%
Bob $0.85^{s-1} =$	72%	61%	52%	44%	38%	32%	27%	23%

Das Duell verläuft wie folgt: Zuerst darf Alice auf Bob werfen: Wenn sie trifft, hat sie gewonnen; wenn sie verfehlt, hat Bob gewonnen. Alternativ kann sie auch nicht werfen, sondern einen Schritt auf Bob zugehen, dann ist Bob an der Reihe. Nun darf Bob auf Alice werfen: Wenn er trifft, hat er gewonnen; wenn er verfehlt, hat Alice gewonnen. Alternativ kann er auch nicht werfen, sondern einen Schritt auf Alice zugehen. So geht es abwechselnd weiter. Bei Abstand 2 endet das Duell unentschieden.

Jede Trefferwkt sei unabhängig von allen anderen Ereignissen.

Jeder Spieler will seine Gewinnwahrscheinlichkeit maximieren.

(1) Zeichnen Sie einen Spielbaum Γ_1 mit allen relevanten Informationen. Die beiden Aktionen bezeichnen wir mit $w =$ werfen und $g =$ gehen.

(2) Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma_1)$. Bei optimaler Spielweise, wer gewinnt mit welcher Wahrscheinlichkeit?

Der Fairness halber bekommt Bob nun zwei Schneebälle zugestanden. Wie zuvor agiert Alice bei geraden Schrittzahlen, Bob bei ungeraden. Verfehlt Bob seinen ersten Wurf, dann bleibt er mit einem Ball am Zug, und das Duell geht weiter wie oben erklärt: Bob darf werfen oder gehen.

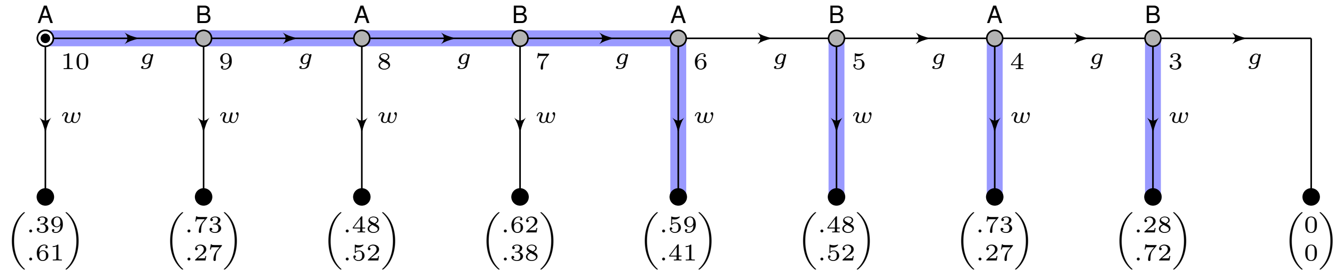
(3) Zeichnen Sie einen Spielbaum Γ_2 mit allen relevanten Informationen.

(4) Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma_2)$. Bei optimaler Spielweise, wer gewinnt mit welcher Wahrscheinlichkeit?

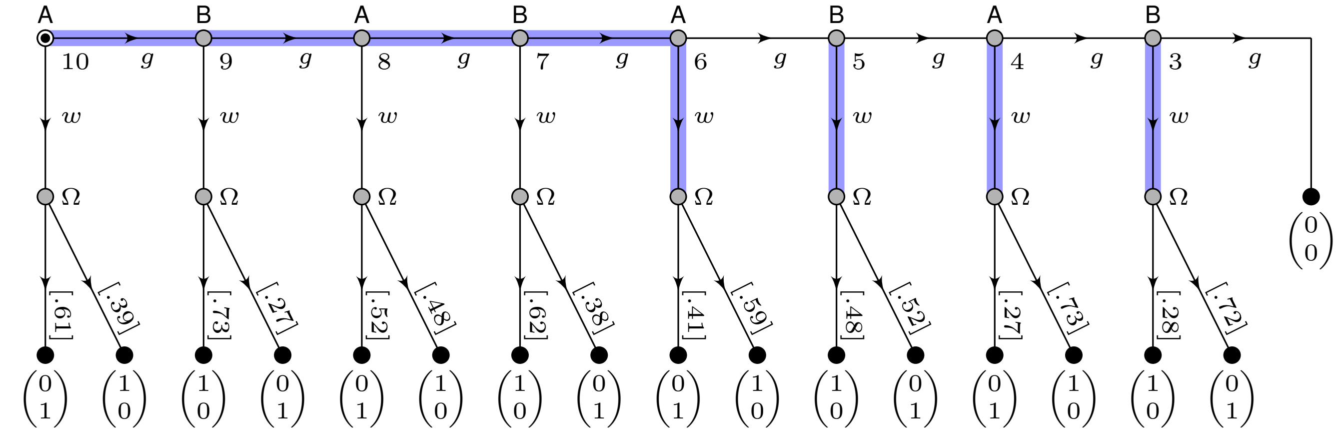
🙂 Zur Darstellung (1,3) gibt es mehrere Möglichkeiten: Probieren Sie es aus! Die Lösung (2,4) ist davon unabhängig und hier sogar eindeutig.

Schneeballduell (Klausur 2020)

Lösung: (1a) Vereinfachter Spielbaum mit Gewinnwkten:



(1b) Ausführlicher Spielbaum mit Zufallszügen:



Schneeballduell (Klausur 2020)

Die Darstellung durch einen Spielbaum lässt noch viele Freiheiten! Das hängt etwas vom persönlichen Geschmack ab, vor allem aber von der Detailtreue und was man als „relevante Informationen“ erachtet.

Variante (1a) zeigt den vereinfachten Spielbaum mit den Gewinnwkten für Alice und Bob, zur Information zudem den Abstand $s = 10, \dots, 3$. Dieser Spielbaum erinnert uns an die bekannten Hundertfüßlerspiele.

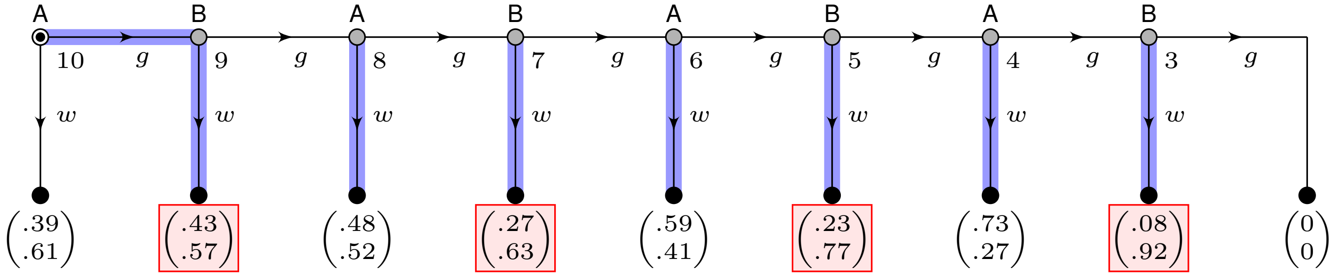
Variante (1b) ist noch ausführlicher: Wir setzen an jedes Bein noch zwei Füße; eine Zufallsverzweigung entscheidet zwischen Alice' Sieg $\binom{1}{0}$ Bobs Sieg $\binom{0}{1}$ mit den angegebenen Wkten. Dies haben wir in (1a) gleich durch die Gewinnerwartung zusammengefasst, das ist kürzer.

Wichtig ist: Beide Spielbäume enthalten genug Information, um mögliche Züge und Auszahlungen festzulegen und somit alle teilspielperfekten Gleichgewichte zu bestimmen. Nur darauf kommt es letztlich an.

(2) Wir nutzen den obigen Spielbaum; per Rückwärtsinduktion finden wir genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht, oben blau eingezeichnet. Schlussfolgerung: Alice gewinnt mit Wkt 59%, Bob mit Wkt 41%.

Schneeballduell (Klausur 2020)

(3a) Bob hat nun zwei Schneebälle. Vereinfachter Spielbaum:



Wir betrachten hier den vereinfachten Spielbaum für Alice' und Bobs *ersten* Wurf. Dieser Baum sieht aus wie zuvor, nur die Auszahlungen / Gewinnwkten ändern sich: Wenn Bob seinen ersten Wurf verfehlt hat, dann kennen wir die Gewinnwkten bereits aus der vorigen Frage (2).

$$0.27 + 0.73 \cdot 0.41 \approx 0.57, \qquad 0.38 + 0.62 \cdot 0.41 \approx 0.63,$$
$$0.52 + 0.48 \cdot 0.52 \approx 0.77, \qquad 0.72 + 0.28 \cdot 0.72 \approx 0.92.$$

(4) Wir nutzen den obigen Spielbaum; per Rückwärtsinduktion finden wir genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht, oben blau eingezeichnet. Diesmal gewinnt Bob mit Wkt 57%, Alice entsprechend mit Wkt 43%.

Schneeballduell (Klausur 2020)

☺ Die Darstellung durch einen Spielbaum lässt noch viele Freiheiten! Wir konstruieren und nutzen zunächst eine vereinfachte Variante.

Der vollständige Spielbaum hat an Stelle der vier roten Boxen jeweils eine Zufallsverzweigung, „verfehlt“ oder „getroffen“, und an ersterem hängt der entsprechende Teilbaum aus der vorigen Frage (1).

Das ist möglich, aber unnötig länglich, insbesondere in einer Klausur! Daher arbeiten wir erst mit obiger Vereinfachung, sie bietet sich an.

Ein guter Kompromiss ist der folgende Spielgraph (kein Baum), der die beiden Bäume zu erstem und zweitem Wurf leiterförmig verbindet. Dieses Recycling hält den Graphen klein, bequem und handlich.

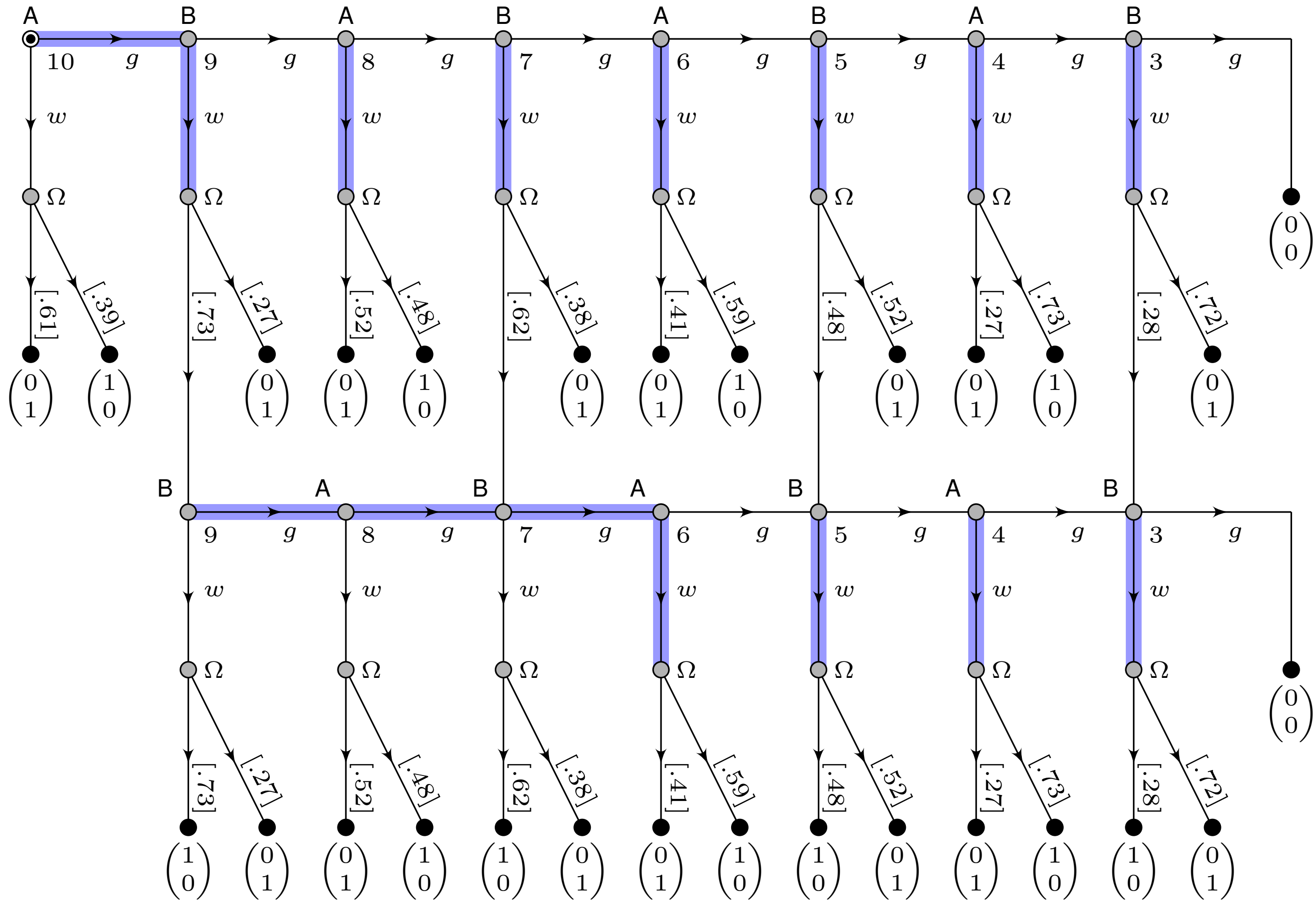
☺ Die Darstellung als Graph codiert alle relevanten Informationen. Damit wird die Lösung recht einfach, übersichtlich und strukturiert.

☺ Per Rückwärtsinduktion finden wir das zuvor erklärte teilspielperfekte Gleichgewicht; dieses habe ich hier nochmal vollständig eingezeichnet.

☺ Der Verlauf des Duells ist erstaunlich und keineswegs intuitiv.

Schneeballduell (Klausur 2020)

(3b) Ausführlicher Spielgraph mit Zufallszügen:



Schneeballduell (Klausur 2020)

Rückwärtsinduktion ist in vielen strategischen Situationen erfolgreich. Sie ist ein sehr einfaches und natürliches Konzept, die systematische Lösung wird effizient strukturiert und im Idealfall sogar trivialisiert.

Ich erinnere daher nochmals an das Eingangszitat:

Quidquid agis, prudenter agas et respice finem!
[Was immer du tust, handele klug und bedenke das Ende!]

Der Satz J1D von Zermelo formalisiert dies für dynamische Spiele in Form eines Spielbaums oder allgemeiner eines Spielgraphen.

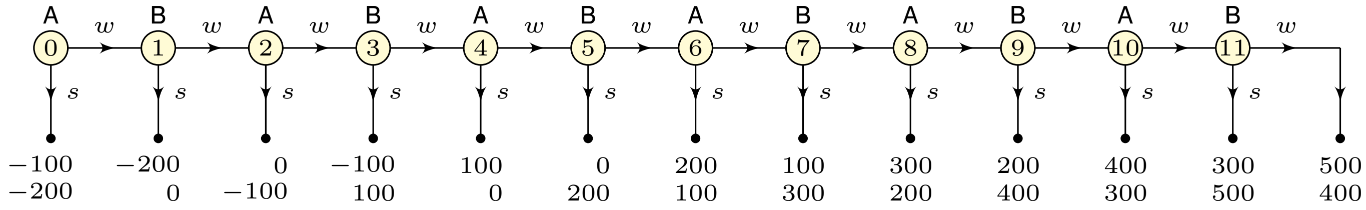
Spielbäume sind manchmal bequem, leider oft umfangreich: Selbst in einem einfachen Spiel wie unserem Schneeballduell wird der vollständige Baum schnell zu groß und unübersichtlich.

Wie wir gesehen haben, lohnen sich daher rekursive Platzhalter und insbesondere auch Graphen zur konzisen Beschreibung.

🙂 Abstraktion hilft, sie strukturiert und vereinfacht. Mathe macht Ah!

Das berüchtigte Hundertfüßlerspiel / *centipede game*

Alice und Bob spielen folgendes Hundertfüßlerspiel / *centipede game*.



Beide Spieler ziehen abwechselnd entweder $s =$ stop oder $w =$ weiter. Die Auszahlungen sind wie angegeben, sie gehen für Alice abwechselnd 100 runter und 200 rauf, für Bob abwechselnd 200 rauf und 100 runter. Langfristig steigen die Auszahlungen somit für beide Spieler linear an, beide haben also Interesse daran, möglichst lange *weiter* zu spielen.

Die Rückwärtsinduktion enthüllt jedoch eine entgegengesetzte Lösung: In jedem Zustand $11, 10, \dots, 0$ ist es strikt dominant, *stop* zu spielen. Die theoretische Lösung ist simpel, setzt jedoch Rationalität der Stufe $1, 2, \dots, 12$ voraus (A2A). Diese starke Annahme ist in realen Situationen aber nur selten erfüllt. Experimente belegen eine deutliche Diskrepanz zwischen theoretischer Vorhersage und beobachtetem Verhalten.

Das berüchtigte Hundertfüßlerspiel / *centipede game*

Das Spiel provoziert den Konflikt zwischen kurzfristigem Egoismus und langfristiger Kooperation, zwischen Gewinnmitnahme und Investititon. Das Hundertfüßlerspiel ist ein berühmtes Paradoxon der Spieltheorie. Es ähnelt dem Gefangenendilemma, ebenso endlich wiederholt.

Eingeführt wurde dieses Spiel 1981 von Robert W. Rosenthal. Die ursprüngliche Version bestand aus 100 Zügen, daher der Name. Es wurde vielfach experimentell untersucht und belegt das Paradox der Ir/Rationalität: irrationale Spieler können erfolgreicher sein als rationale.

Die meisten Versuchsteilnehmer spielen *stop* nicht gleich am Anfang, wie es streng rational wäre, sondern „gefühlt irgendwo in der Mitte“. Eine mögliche Erklärung ist die mangelnde Kapazität oder der Unwille, die nötige Rückwärtsinduktion vollständig und fehlerfrei auszuführen.

Eine andere Erklärung ist die altruistisch-gemeinschaftliche Sichtweise: Diese setzt das Ziel im Spielbaum ganz rechts, Rationalität hingegen ganz links, eine geeignete Mischung führt zu „einer goldenen Mitte“. Leider ist das allzu vage, schwer quantifizierbar und kaum vorhersagbar.

Das berüchtigte Hundertfüßlerspiel / *centipede game*

Im **Casino Royal** (17.06.2022) konnten wir dieses berühmt-berüchtigte Experiment selbst erleben. Am Brückentag nach Fronleichnam kamen diesesmal nur sechs Teilnehmer:innen, alles erfahrene Spieler:innen. Die Anzahl erwies sich als günstig für zwei Teams à drei Personen.

Vorgespräch. Vor der Aufteilung in Teams drängen Teilnehmer:innen auf eine Aussprache. Sie wissen aus ihrer bisherigen Casino-Erfahrung, dass dieser Zeitpunkt wichtig sein kann und daher genutzt werden sollte.

Ohne Mühe analysieren die Anwesenden das Hundertfüßlerspiel und der Konflikt wird klar: Alice und Bob wollen möglichst lange koorperieren, doch Rückwärtsinduktion legt einen möglichst frühen Abbruch nahe.

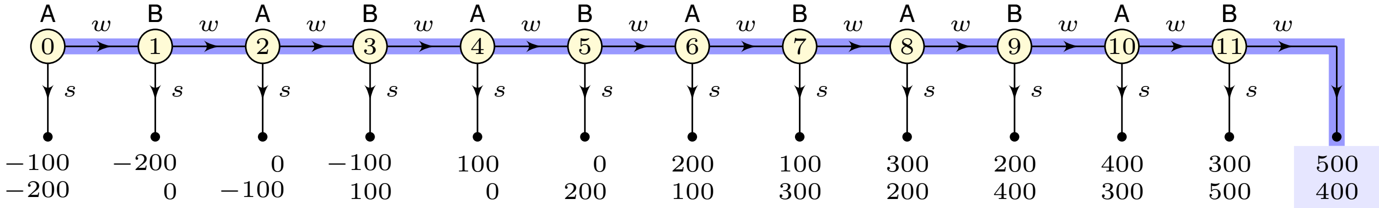
Sofort entsteht der Vorschlag, beide Auszahlungen am Ende zu teilen, um Kooperation zu fördern (Kartell, Nebenzahlungen, Bestechung). Mangels bindender Absprachen wird dieser Vorschlag aufgegeben.

Externalitäten werden benannt, die Spielbank ist der dritte Spieler. Die Verluste am Anfang werden als besonders unangenehm empfunden, alle Teilnehmer:innen möchten mindestens der Verlustzone entkommen.

Das berüchtigte Hundertfüßlerspiel / *centipede game*

Erstes Spiel. Team Alice und Team Bob werden zufällig ausgelost. Beide versichern sich gegenseitig Kooperation. Zwar wissen alle, dass das Ende wohl nicht ganz erreicht wird, aber alle wollen dem negativen Anfang entkommen und hoffen auf ein Wunder „irgendwo in der Mitte“.

Die Teams werden abwechselnd nach ihrem nächsten Zug gefragt. Die interne Absprache wird diesmal kaum genutzt, meist fungiert ein Teammitglied als Sprecher:in und antwortet beherzt „Wir spielen weiter!“ Das Ergebnis ist für alle Beteiligten überraschend:

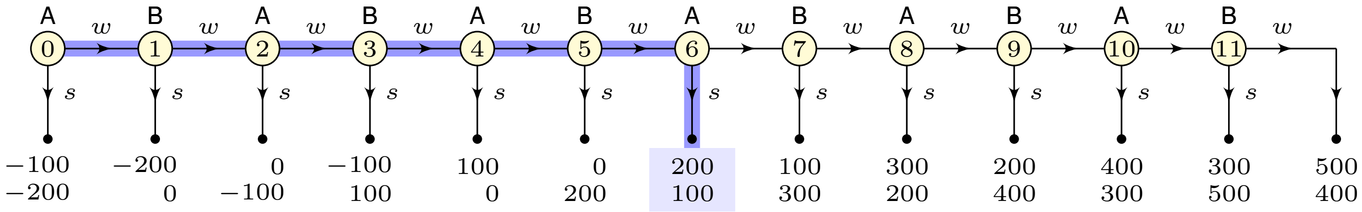


🙂 Ein sensationeller Erfolg: Gemeinsam erreichen beide Teams die maximale Auszahlung, wider ihres besseren Wissens und entgegen jeder Rationalität. Ein Hoch auf das Paradox der Ir/Rationalität! Die Bank zahlt… und schmiedet Pläne für die nächsten Spiele.

Das berüchtigte Hundertfüßlerspiel / *centipede game*

Zweites Spiel. Team Alice und Team Bob werden zufällig ausgelost.

Die Teams werden abwechselnd nach ihrem nächsten Zug gefragt, doch diesmal wird unter den drei Teamer:innen geheim abgestimmt: Zunge rausstrecken heißt Stopp, die Hände dienen als Sichtschutz. Nur die Spielleitung sieht die Abstimmung und nennt das Ergebnis.

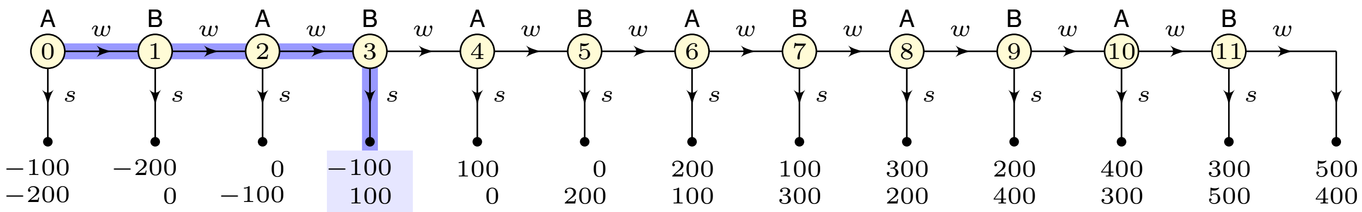


🙂 Mit wachsender Erfahrung und frei von sozialem Druck verschiebt sich der Spielverlauf deutlich. Die anonyme Abstimmung unterbindet moralische Einflussnahme des Gegners oder der Teamkolleg:innen.

Die Zahl drei erweist sich hier aus günstig. Jede:r kann behaupten, weiterhin für Kooperation gestimmt zu haben und hat so eine plausible Erklärung bzw. Ausrede für das beobachtete egoistische Verhalten.

Das berüchtigte Hundertfüßlerspiel / *centipede game*

Drittes Spiel. Die beiden Teams werden diesmal nur vertauscht. Die Teams stimmen wieder geheim ab, wie zuvor im zweiten Spiel.



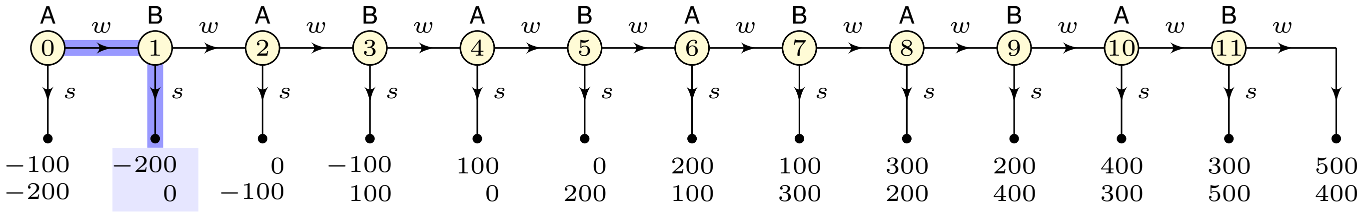
🙂 Der vorige Spielverlauf bietet wichtige Erfahrung und zeigt Wirkung. Die Teilnehmer:innen sind weniger naiv-gutgläubig und vermuten dies auch von ihren Mitspieler:innen. Die Rationalität wächst, das Vertrauen bröckelt, die blauäugige Hoffnung auf ein „Wunder“ schwindet schnell.

Bemerkenswert ist, dass wir im ersten Spiel mit maximaler Irrationalität begonnen haben, doch wenige Iterationen genügen, um eindrückliche Erfahrungen bereitzustellen und das Verhalten grundlegend zu ändern.

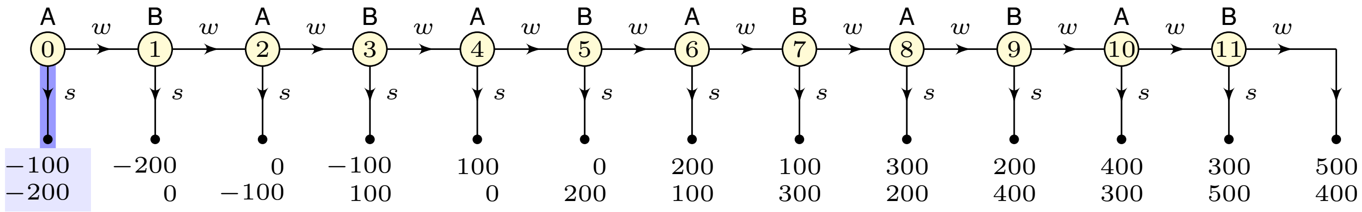
In den nächsten drei Spielen wird jeweils geheim per Zettel abgestimmt, dabei zählt Median / Minimum / Maximum. Dies ist vor der Spiel bekannt.

Das berüchtigte Hundertfüßlerspiel / *centipede game*

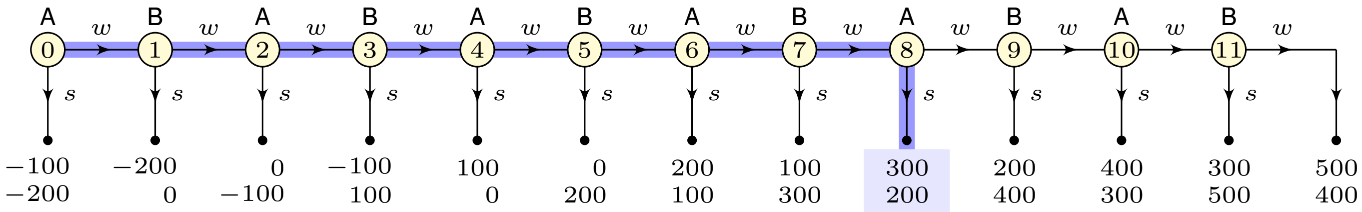
Viertes Spiel. Median von Alice $(2, 6, 10)$ versus Bob $(1, 1, 3)$.



Fünftes Spiel. Minimum von Alice $(0, 0, 10)$ versus Bob $(1, 1, 3)$.

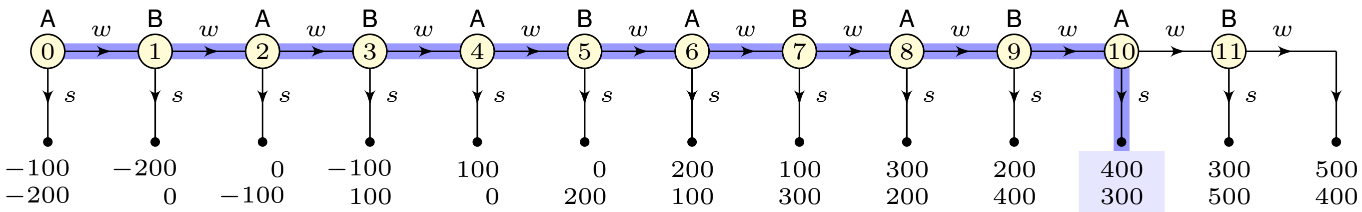


Sechstes Spiel. Maximum von Alice $(0, 0, 8)$ versus Bob $(1, 11, 13)$.



Das berüchtigte Hundertfüßlerspiel / *centipede game*

Siebtes Spiel. In jeder Runde wird zufällig ausgelost, wer Alice/Bob spielt, alle anderen warten passiv als Bob/Alice. Wahl und Entscheidung sind öffentlich, dadurch entsteht erneut ein gewisser sozialer Druck.



🙂 Die Versuchsanordnung hat erheblichen Einfluss auf das Ergebnis. Der individuelle Kompromiss zwischen Egoismus und Kooperation hängt von vielen Einflüssen ab, insbesondere von Öffentlichkeit und sozialem Druck, von moralischen Konventionen versus garantierter Anonymität.

Datengold. Insbesondere geheime Abstimmungen per Zettel liefern alle relevanten Daten, hier auf einer „Vertrauensskala“ von 0 bis $n = 12$. Der Verlauf des Spiels kann daraus zufällig ausgelost werden. Auf einem Computer kann jeder gegen jeden spielen.

Kapitel K

Wiederholte Spiele und Nashs Folk Theorem

Mögen die Spiele beginnen —
und sich unendlich wiederholen!

Inhalt dieses Kapitels K

Motivation und Überblick

Wiederholte Spiele dienen zur Untersuchung langfristiger Interaktion: Spieler beurteilen ihre Aktionen nicht nur nach dem sofortigen Gewinn, sondern auch ihre Auswirkung auf zukünftiges Verhalten der Mitspieler. Dazu müssen sie kurz- gegen langfristige Konsequenzen abwägen.

Das Ziel unserer Untersuchung ist nun, mögliche Verhaltensweisen mathematisch präzise zu beschreiben und spieltheoretisch zu erklären:

- Lohnt sich kurzfristiger Egoismus oder langfristige Kooperation?
- Welche Vereinbarungen sind lukrativ und selbststabilisierend?
- Wie müssen Zurechtweisungen auf Abweichungen reagieren?
- Wann / wie funktioniert Abschreckung durch Strafandrohung?

Viele Strategien sind uns aus dem Alltag intuitiv vertraut und werden hier mathematisch erklärt und quantifiziert. Eine Vereinbarung ist nur dann rational glaubwürdig, wenn sie ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist.

📖 G.J. Mailath, L. Samuelson: *Repeated games and reputations – long-run relationships.* Oxford University Press 2006.

Motivation und Überblick

Wir beginnen mit dem Gefangendilemma als wiederholtes Spiel. Dieses einfache Modell analysieren wir ausführlich und detailliert. Die dabei gemachten Beobachtungen sind recht allgemein gültig und führen uns zu Nashs Folk Theorem: Wir erarbeiten eine vereinfachte, aber quantitativ präzisierte Version aus dieser berühmten Satzfamilie.

Mögliche Anwendungen und Analogien sind überaus vielfältig:

- Langfristige Verträge, etwa Arbeits- oder Kooperationsverträge.
- Teamarbeit, soziale Bindungen, Konventionen und Sanktionen.
- Familiäre Bindungen, etwa Ehe und Kindererziehung.

Der letzte Punkt löst oft Verwunderung und manchmal Ablehung aus: „Hier geht es um Gefühl, nicht um Kalkül!“ Sind hier Rationalität und mathematische Analyse nicht fehl am Platze? Geht es nicht vielmehr um wahre Liebe, Zuneigung, Verantwortung, Verlässlichkeit, usw.? Ja, auch, und gerade diese Emotionen und Normen sind interessant! Sie sind nicht zufällig, sondern Ergebnis unserer Evolution: biologisch, sozial und individuell. Die Spieltheorie bietet mögliche Erklärungen.

Wiederholte Spiele

Sprichwörter bündeln Erfahrungen, besonders auch spieltheoretische. Die folgenden wollen wir mathematisch erklären und nachrechnen.

Fool me once, shame on you!
Fool me twice, shame on me!

[Betrügst du mich einmal, Schande über dich!
Betrügst du mich zweimal, Schande über mich!]

On peut tromper une fois mille personnes,
mais on ne peut pas tromper mille fois une personne.

[Du kannst tausend Personen einmal betrügen,
aber nicht tausendmal dieselbe Person.]

Bei wiederholter Interaktion besteht die Möglichkeit der Kooperation, aber auch des Betrugs. Zusammenarbeit ist nur dann langfristig stabil, wenn Kooperation ausreichend belohnt, Betrug dagegen bestraft wird. Diese qualitative Erkenntnis wollen wir nun quantitativ ausarbeiten.

Wiederholte Spiele

Diese Weisheit wurde in vielen Varianten formuliert und wiederentdeckt. Bei der gegenwärtigen politischen Entwicklung möchte ich hinzufügen:

You can fool all the people some of the time
and some of the people all the time,
but you cannot fool all the people all the time.

Diese englische Version wird Abraham Lincoln zugeschrieben, wohl zu Unrecht, siehe `quoteinvestigator.com/2013/12/11/cannot-fool/`. Aus dem Artikel „Dieu“ der *Encyclopédie* von Diderot und d’Alembert, `enccre.academie-sciences.fr/encyclopedie/article/v4-2500-0/`:

On peut tromper quelques hommes,
ou les tromper tous dans certains lieux et en certains temps,
mais non pas tous les hommes dans tous les lieux et dans tous les siècles.

Diesen Erfahrungen wollen wir nun mathematisch auf den Grund gehen.

Wiederholte Spiele

In vielen Spielen setzt sich der **Egoismus** der Spieler durch.
Das ist rational erklärbar durch individuelle Gewinnmaximierung; genau auf dieser Grundannahme beruht die klassische Spieltheorie. Hierzu kennen und nutzen wir Gleichgewichte als Lösungskonzept.

In vielen Situationen spielen die Spieler jedoch nicht nur einmal, sondern wiederholt gegeneinander, idealisiert gar unendlich oft. In solchen Fällen kann sich das Verhalten grundsätzlich ändern: Kooperation wird lukrativ, da jeder auf den anderen angewiesen ist.

Wir können und wollen fragen, wie **Kooperation** überhaupt entsteht. Hierzu dienen die folgenden Beispiele und Übungen: Wir untersuchen hier Kooperation und Betrug, Treue und Verrat unter dem Mikroskop. Das gipfelt in Nashs Folk Theorem als erstem allgemeinen Ergebnis.

Diese Satzfamilie benennt explizit archetypische Strategien, die ein vorgegebenes Verhalten erzeugen, meist ein gewünschtes Verhalten zum allseitigen Vorteil. Dies interpretieren wir oft als „soziale Norm“. Die Struktur und Funktionsweise dieser Normen ist faszinierend.

Wiederholte Spiele

Wichtig für die Zusammenarbeit sind **Hoffnung** und **Gedächtnis**:
Alle Spieler benötigen ausreichend Hoffnung, noch lange zu spielen, und genug Gedächtnis, um sich an vergangenes Verhalten zu erinnern, um gegenseitig Kooperation belohnen und Betrug bestrafen zu können.

Diese Möglichkeit besteht zum Beispiel nicht, wenn die Gegenspieler jedesmal neu zugelost werden und ihre Identität nicht erkennbar ist. Dann ist eine zukünftige Kooperation oder Bestrafung unmöglich, und es geht nur noch um den einmaligen sofortigen Vorteil.

Wir untersuchen daher Situationen, in denen eine feste Spielermenge I mehrere Spiele hintereinander spielt. Die Aktionen der vorherigen Zügen sind bekannt, daraufhin wählt jeder Spieler seinen aktuell nächsten Zug. So können die Spieler drohen oder locken, belohnen oder bestrafen.

Die Menge $\mathrm{PNE}(\Gamma)$ aller teilspielperfekten Gleichgewichte ist oft riesig, daher bestehen hier phantastisch viele Möglichkeiten. Das bedeutet andererseits, dass meist keine eindeutige Vorhersage ableitbar ist. Es geht uns vorrangig darum, zu konstruieren, was möglich ist.

Das Gefangenendilemma, unendlich wiederholt

Wir iterieren das Spiel $g:\{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit diskontierter Auszahlung:

A \ B	0	1
0	0, 0	2, -1
1	-1, 2	1, 1

Zu $N \in \mathbb{N}$ und $\delta_1, \delta_2 \in\,]0,1[$ sei die Auszahlung gegeben durch

$$u\,:\,\{00,01,10,11\}^N \to \mathbb{R}^2,$$

$$u^i(x) = \frac{1-\delta_i}{1-\delta_i^N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_i^n g^i(x_n)$$

Aufgabe: (0) Formalisieren Sie dies als Spiel Γ in extensiver Form. Wie würden Sie $g:\{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\mathrm{NE}(g) = \{00\}$ parametrisieren? Was erhalten Sie im Grenzfall $\delta_i \nearrow 1$? Was erhalten Sie für $N \nearrow \infty$?

(1) Für $N \in \mathbb{N}$: Finden Sie alle $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$ und Auszahlungen $u(s)$.

(2) Für $N = \infty$: Gibt es ein $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$ mit Auszahlung $u(s) = (1,1)$? Genügt es, dass jeder Spieler sich nur an den letzten Zug erinnert? Was passiert, wenn beide Spieler keinerlei Gedächtnis haben? Was passiert, wenn nur ein Spieler sich erinnert?

Das Gefangenendilemma, unendlich wiederholt

Lösung: (0) Allgemeines Gefangenendilemma, affin normiert:

A \ B	0	1
0	0, 0	α_1, β_2
1	β_1, α_2	1, 1

mit Konstanten	im Beispiel
$\alpha_1 > 1 > 0 > \beta_1$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 2$
$\alpha_2 > 1 > 0 > \beta_2$	$\beta_1 = \beta_2 = -1$

Wir definieren das iterierte Spiel $\Gamma = (X, u, f)$ extensiv wie folgt: Spielermenge $I = \{\,1{=}\mathrm{Alice},\ 2{=}\mathrm{Bob}\,\}$, Alphabet $\mathcal{A} = \{00, 01, 10, 11\}$, Zustände $X = \mathcal{A}^{\le N}$, aktiv $X^\circ = \mathcal{A}^{<N}$, Aktionen $A = A^1 \times A^2 = \{0,1\}^2$. Die Fortsetzung ist kanonisch, also $f: X^\circ \times A \to X : (x,a) \mapsto x * a$. Strategiemengen sind demnach $S^i = \{\, s^i : X^\circ \to A^i \,\}$ für $i \in I$.

Auszahlung $u^i : \partial X \to \mathbb{R} : u^i(x) = \frac{1-\delta_i}{1-\delta_i^N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_i^n g^i(x_n)$. Grenzwerte:

Für $\delta_i \nearrow 1$ wird $u^i(x)$ zum arithmetischen Mittel $u^i(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g^i(x_n)$, für $N \nearrow \infty$ zur geometrischen Reihe $u^i(x) = (1-\delta_i) \sum_{n=0}^{\infty} \delta_i^n g^i(x_n)$.

Das Gefangenendilemma, unendlich wiederholt

(1) Wir untersuchen zuerst endliche Wiederholungen, also $N \in \mathbb{N}$.
Wir suchen alle teilspielperfekten Gleichgewichte $(s^1, s^2) \in S^1 \times S^2$.
Diese konstruieren wir durch Rückwärtsinduktion (Zermelo J1D):

Für $x \in X_{N-1}$ ist $(s^1_x, s^2_x) = (0, 0)$ das einzige Gleichgewicht:
Für jeden Spieler $i \in I$ ist die Strategie $s^i_x = 0$ strikt dominant.
Das gilt induktiv für alle $x \in \mathcal{A}^n$ und $n = N-1, N-2, \dots, 2, 1, 0$.

Das einzige teilspielperfekte Gleichgewicht $(s^1, s^2) \in S^1 \times S^2$
besteht aus den konstanten Abbildungen $s^i : X^\circ \to A^i : x \mapsto 0$.

☺ Satz K1C erklärt dieses Ergebnis allgemein per Rückwärtsinduktion:
Haben die extensiven Spiele $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ keine unendlichen Trajektorien
und jeweils nur ein teilspielperfektes Gleichgewicht, $\mathrm{PNE}(\Gamma_n) = \{s_n\}$,
so auch ihre Verkettung, denn $\mathrm{PNE}(\Gamma_1 * \dots * \Gamma_N) = \{s_1 * \dots * s_N\}$.

⚠ Für unendliche Wiederholungen gilt dieses Argument nicht!
Tatsächlich finden wir hier eine Vielzahl neuer Gleichgewichte.
Hierzu ist die folgende Konstruktion (2) ein erster Schritt.
Wir nutzen das Prinzip J2D der einmaligen Abweichung.

Das Gefangenendilemma, unendlich wiederholt

(2) Wir betrachten die **Grim-Trigger-Strategie** $s^i : X^\circ \to A^i$ für $i \in I$:
Beide Spieler kooperieren solange keiner abweicht, danach nie mehr.

$$s^i : \left\{\begin{array}{r} \emptyset \mapsto 1 \\ v*00 \mapsto 0 \\ v*01 \mapsto 0 \\ v*10 \mapsto 0 \\ v*11 \mapsto 1 \end{array}\right\} = \begin{cases} x \mapsto 1 & \text{für } x \in X_0 = \{\emptyset\}, \\ x \mapsto x^1_{n-1} \cdot x^2_{n-1} & \text{für } x \in X_n,\ n > 0. \end{cases}$$

(2a) Ab Zustand $x \in v * \{00, 01, 10\}$ ist der Verlauf $00\,00\,00\dots$.
Keiner der beiden Spieler kann sich aus eigener Kraft verbessern.

(2b) Ab $x = v * 11$ ist der Verlauf $11\,11\,11\dots$. Weicht Spieler i ab,
so erhöht er seine Auszahlung auf $\alpha_i > 1$, danach sinkt sie auf $0 < 1$.
Ausführlich: Sei $\tilde{s}^i \in S^i$ eine Strategie mit $\tilde{s}^i_x = 0$ statt $s^i_x = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} u^i_x(\tilde{s}^i; s^{-i}) - u^i_x(s^i; s^{-i}) \quad &\le \quad (1-\delta_i)\big[\delta_i^n \alpha_i - \textstyle\sum_{k=n}^{\infty} \delta_i^k 1\big] \\ &= \quad \delta_i^n \big[(1-\delta_i)\alpha_i - 1\big]. \end{aligned}$$

Das ist negativ für $\delta_i > 1 - 1/\alpha_i$. Hier lohnt sich Kooperation!

Iteriertes Gefangenendilemma und Grim Trigger

Satz K1A: iteriertes Gefangenendilemma und Grim Trigger

Wir iterieren das Gefangenendilemma $g : \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch

A \ B	0	1
0	0 / 0	α_1 / β_2
1	β_1 / α_2	1 / 1

mit Konstanten $\alpha_i > 1 > 0 > \beta_i$, und diskontierten Auszahlungen

$$u : \{00, 01, 10, 11\}^N \to \mathbb{R}^2,$$

$$u^i(x) = \frac{1-\delta_i}{1-\delta_i^N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_i^n g^i(x_n).$$

(1) Im endlichen Fall $N < \infty$ gibt es nur ein einziges Gleichgewicht $(s^1, s^2) \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$, und dieses führt zur Auszahlung $u(s^1, s^2) = (0,0)$.

(2) Für $N = \infty$ und $\delta_i \ge 1 - 1/\alpha_i$ ist zudem die Grim-Trigger-Strategie ein Gleichgewicht $(s^1, s^2) \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$ mit Auszahlung $u(s^1, s^2) = (1,1)$.

Die Spieler kooperieren in (1) nie, aber in (2) im gesamten Spielverlauf.

Zusatz: Fall (2) bleibt gültig, solange sich beide Spieler mindestens an die jeweils letzte Runde erinnern können, andernfalls gilt Fall (1).

Iteriertes Gefangenendilemma und Grim Trigger

In (2) wiederholen wir unendlich oft; sehr lange wie in (1) genügt nicht! Unser Modell ist wie immer beschämend simpel, aber es illustriert wohl das Prinzip. Es zeigt insbesondere ein Phänomen, dass Sie aus Ihrer Alltagserfahrung vermutlich kennen: Kooperation braucht Geduld!

Die Diskontierung mit δ_i können wir auf drei Arten interpretieren:

1. **Intersubjektive Inflation:** Geld morgen ist weniger wert als heute. Wertverlust in Form des Faktors $\delta \in \,]0,1[$ ist intersubjektiv, für alle Spieler gleich. Der vermutete Wert δ_i kann jedoch individuell sein.
2. **Individuelle Un/Geduld:** Warten verringert den Nutzen, auch hier ist Geld morgen weniger wert als Geld heute, diesmal aber für jeden Spieler $i \in I$ individuell diskontiert durch den Faktor $\delta_i \in \,]0,1[$.
3. **Abbruchwahrscheinlichkeit:** Zu Recht wenden Sie ein, dass unendliche Wiederholung unrealistisch ist. Viel realistischer sind dagegen wiederholte Spiele mit einer gewissen Abbruchwkt $\varepsilon > 0$. Das führt zu derselben geometrischen Summe mit Fortsetzungswkt $\delta = 1 - \varepsilon$. Auch hier kann der vermutete Wert δ_i individuell sein.

Anschaulich besagt (2): Kooperation lohnt sich! Zwar kann jeder Spieler seinen Gegenspieler jederzeit betrügen, aber das gelingt ihm nur einmal. *Fool me once, shame on you! Fool me twice, shame on me!*

Der kurzfristige Gewinn, den der Betrüger davon trägt, wird sofort und dauerhaft bestraft. Insgesamt lohnt sich der Betrug nicht; hierzu muss nur die Geduld δ_i groß genug sein, nämlich $\delta_i \le 1 - 1/\alpha_i$. Andernfalls, für $\delta_i < 1 - 1/\alpha_i$, obsiegt der kurzfristige Vorteil, kurz gesagt: die Gier.

Der Vorteil eines präzisen Modells ist: Wir können jetzt alles ausrechnen! Insbesondere können wir die Parameter $\alpha_i, \beta_i, \delta_i$ untersuchen und so den kritischen Wert $\delta_i = 1 - 1/\alpha_i$ finden. Das ist anschaulich plausibel:

Für $\delta_i \nearrow 1$ sind jetzige und zukünftige Spiele nahezu gleichgewichtet. Der Spieler ist geduldig, daher lohnt sich die langfristige Kooperation.

Für $\delta_i \searrow 0$ sind zukünftige Spiele nahezu wertlos. Der Spieler ist ungeduldig, daher lohnt sich die kurzfristige Gewinnmitnahme.

Was passiert, wenn ein Spieler geduldig ist und der andere ungeduldig? Die Rechnung gibt Auskunft: Das Gleichgewicht kommt nicht zustande.

Aufgabe: Formalisieren Sie das Modell eines wiederholten Spiels mit einer (konstanten) Abbruchwkt $\varepsilon > 0$ nach jeder Runde. Erklären Sie die Formel $u(x) = (1-\delta)\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n g(x_n)$ für die erwartete Auszahlung.

Skizze: Spielbäume explizit auszuschreiben ist länglich, aber lehrreich. Versuchen Sie es! Die Wkt, in die n–te Runde zu gelangen, ist $(1-\delta)\delta^n$. Die erwartete Auszahlung ist daher genau die obige Diskontierung.

Eine ausführliche Diskussion wiederholter Spiele finden Sie in M.J. Osborne, A. Rubinstein: *A Course in Game Theory*, Kapitel 8 „Repeated Games“. Dort werden neben der diskontierten Auszahlung weitere Bewertungen der Spielverläufe $x, y \in \partial X = \mathcal{A}^\infty$ diskutiert, etwa

$$\begin{aligned} &\text{Summen:} && x \succ y && \iff && \liminf \textstyle\sum_{n=0}^{N-1} [g(x_n) - g(y_n)] > 0, \\ &\text{Mittelwerte:} && x \succ y && \iff && \liminf \tfrac{1}{N} \textstyle\sum_{n=0}^{N-1} [g(x_n) - g(y_n)] > 0. \end{aligned}$$

Diese Kriterien sind ebenso natürlich, manchmal sogar einfacher. Die Verwendung von $\liminf$ bzw. $\limsup$ statt des Grenzwertes $\lim$ ist nötig, da der erhoffte Grenzwert $\lim$ im Allgemeinen nicht existiert.

Neue Spiele aus alten: Hintereinanderausführung

Definition K1B: Verkettung von Spielen und Strategien

(0) Sei $\Gamma = (X, u, f, \mathbf{P})$ ein extensives Spiel. Für jeden Spieler $i \in I$ definieren wir die **Norm** als Supremum $|\Gamma|^i := \sup_{x \in \partial X} |u^i(x)| \in [0, \infty]$. Zu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^I$ definieren wir die **Skalierung** $\alpha\Gamma + \beta := (X, \alpha u + \beta, f, \mathbf{P})$.

(1) Zu extensiven Spielen $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ sei $\Gamma = \prod_{n=1}^N \Gamma_n = \Gamma_1 * \dots * \Gamma_N$ ihre **Hintereinanderausführung** mit Auszahlung $u = u_1 + \dots + u_N$.

(2) Zu jeder Folge $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ extensiver Spiele mit $\sum_{n=0}^\infty |\Gamma_n|^i < \infty$ für jeden Spieler $i \in I$ definieren wir ebenso ihre Hintereinanderausführung

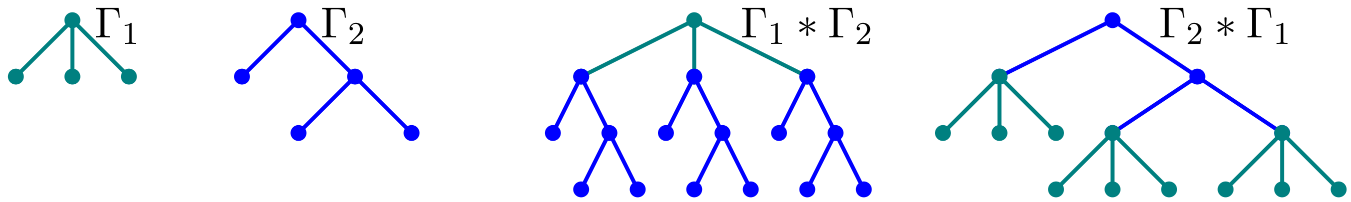
$$\Gamma = \prod_{n=0}^\infty \Gamma_n = \Gamma_0 * \Gamma_1 * \Gamma_2 * \dots .$$

Diskontiert erhalten wir $\Gamma_\delta = (1-\delta) \prod_{n=0}^\infty \delta^n \Gamma_n$ falls $\sum_{n=0}^\infty \delta_i^n |\Gamma_n|^i < \infty$.

(3) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei S_n die Strategiemenge zu Γ_n, ebenso S zu Γ. Die Verkettung $\prod_{n=0}^\infty S_n \to S : (s_0, s_1, s_2, \dots) \mapsto s_0 * s_1 * s_2 * \dots$ von Strategien betrachtet jeweils ohne Erinnerung nur das aktuelle Spiel.

Neue Spiele aus alten: Hintereinanderausführung

Aufgabe: Schreiben Sie alle Daten von Γ und S möglichst explizit aus.



Skizze: Wir setzen alle Spiele über derselben Spielermenge I voraus. Es genügt, gleich Folgen $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ extensiver Spiele zu diskutieren. Jedes Spiel Γ_n starte mit dem leeren Wort $\emptyset$ als Wurzel. Dann gilt:

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{n=0}^\infty \Big[\prod_{m<n} \partial X_{m,<\infty}\Big] * X_n \\ &= X_0 \ \cup \ \partial X_{0,<\infty} * X_1 \ \cup \ \partial X_{0,<\infty} * \partial X_{1,<\infty} * X_2 \ \cup \ \dots \end{aligned}$$

Hierbei besteht $\partial X_{m,<\infty}$ aus den endlichen maximalen Trajektorien. An unendliche Trajektorien können / wollen wir nichts weiter anfügen. Anders gesagt, an jedes Blatt von X_0 heften wir eine Kopie von X_1. An jedes Blatt dieses neuen Baumes heften wir eine Kopie von X_2 usw. Es ist dann klar, wie wir die Daten der einzelnen Spiele Γ_n lokal auf diesen neuen Baum X übertragen. Dies definiert das Spiel Γ.

Neue Spiele aus alten: Hintereinanderausführung

Satz K1c: Gleichgewichte bei Hintereinanderausführung

(1) Für extensive Spiele $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ ohne unendliche Trajektorien gilt

$$\mathrm{PNE}(\Gamma_0 * \Gamma_1 * \dots * \Gamma_N) \supseteq \mathrm{PNE}(\Gamma_0) * \mathrm{PNE}(\Gamma_1) * \dots * \mathrm{PNE}(\Gamma_N).$$

(a) Haben $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ jeweils nur ein teilspielperfektes Gleichgewicht, so gilt Gleichheit. (b) Andernfalls kann die Inklusion „$\supsetneq$“ strikt sein.

(2) Für extensive Spiele $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots$ ohne unendliche Trajektorien gilt

$$\mathrm{PNE}(\Gamma_0 * \Gamma_1 * \dots) \supseteq \mathrm{PNE}(\Gamma_0) * \mathrm{PNE}(\Gamma_1) * \dots.$$

(a) Selbst wenn jedes Spiel Γ_n nur ein einziges teilspielperfektes Gleichgewicht hat, so kann dennoch die Inklusion „$\supsetneq$“ strikt sein (K1a).

⚠ Dieser Satz ist nur ein erster Schritt und noch nicht ausschöpfend. Die Menge $\mathrm{PNE}(\Gamma)$ aller teilspielperfekten Gleichgewichte ist oft riesig!

Aufgabe: Beweisen Sie diesen Satz (1) durch Rückwärtsinduktion J1d und entsprechend (2) mit dem Prinzip J2d der einmaligen Abweichung.

Neue Spiele aus alten: Hintereinanderausführung

Skizze: (1) Für $s_1 \in \mathrm{PNE}(\Gamma_1)$, $s_2 \in \mathrm{PNE}(\Gamma_2)$ gilt $s_1 * s_2 \in \mathrm{PNE}(\Gamma_1 * \Gamma_2)$: Auf jeder Kopie $x * \Gamma_2$ von Γ_2 nutzen wir denselben Strategievektor s_2. Jeder Randpunkt $x \in \partial X_1$ ist ein Blatt, die Auszahlung ist $u_1(x) + u_2(s_2)$. Auf ganz Γ_1 erhalten wir die additive Konstante $\beta = u_2(s_2)$. Somit führt der Strategievektor s_1 auf Γ_1 zu einem Gleichgewicht des Spiels Γ.

(1a) Sei $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma_1 * \Gamma_2)$. Auf jeder Kopie $x * \Gamma_2$ von Γ_2 ist s ein Gleichgewicht, dank der Eindeutigkeit $\mathrm{PNE}(\Gamma_2) = \{s_2\}$ ist dies s_2. Jeder Randpunkt $x \in \partial X_1$ ist ein Blatt, die Auszahlung ist $u_1(x) + u_2(s_2)$. Somit ist s auf Γ_1 ein Gleichgewicht des Spiels $\Gamma_1 + \mathrm{const} \cong \Gamma_1$. Demnach gilt $s = s_1 * s_2$ für ein $s_1 \in \mathrm{PNE}(\Gamma_1)$. Damit erhalten wir $\mathrm{PNE}(\Gamma_1 * \Gamma_2) = \{\, s_1 * s_2 \mid s_1 \in \mathrm{PNE}(\Gamma_1) \,\} = \mathrm{PNE}(\Gamma_1) * \mathrm{PNE}(\Gamma_2)$.

(1b) Gegenbeispiele hierzu finden Sie in den Übungen. K306

(2) Der allgemeine Fall folgt demselben Argument wie Teil (1), diesmal allerdings mit dem Prinzip J2d der einmaligen Abweichung.

(2a) Das Gefangenendilemma K1a ist ein frappierendes Gegenbeispiel. Weitere Gegenbeispiele hierzu finden Sie in den Übungen. K313

Zuckerbrot und Peitsche / *carrot and stick*

Wir iterieren das folgende Spiel $g : \{0,1,2\}^2 \to \mathbb{R}^2$:

A \ B	0	1	2
0	2, 2	2, 1	0, 0
1	1, 2	1, 1	-1, 0
2	0, 0	0, -1	-1, -1

mit diskontierter Auszahlung

$$u : \{00, 01, 10, 11\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^2,$$

$$u(x) = (1-\delta) \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n g(x_n).$$

Aufgabe: (0) Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte des Spiels g. Welche teilspielperfekten Gleichgewichte gewinnen Sie daraus für Γ?

(1) Konstruieren und beweisen Sie ein teilspielperfektes Gleichgewicht, bei dem dauerhaft nur $(1,1)$ gespielt wird. Warum ist das erstaunlich?

Die folgende Strategie dürfte Ihnen aus Alltagssituationen bekannt sein: Auf Englisch heißt sie *carrot and stick*, Französisch *carotte et bâton*, Luther schrieb *Apfel und Rute*, heutzutage *Zuckerbrot und Peitsche*.

Zuckerbrot und Peitsche / *carrot and stick*

Lösung: (0) Das Paar $(0,0)$ ist das einzige Nash–Gleichgewicht von g, denn sowohl für Alice als auch für Bob ist die Aktion 0 strikt dominant. Dies liefert das offensichtliche teilspielperfekte Gleichgewicht in $\mathrm{PNE}(\Gamma)$.

(1) Wir betrachten das Strategiepaar $s = (s^1, s^2)$ gegeben durch

$$s : X^\circ \to \{0,1,2\}^2 : \left\{ \begin{array}{rcl} \emptyset & \mapsto & 11 \\ v * 11 & \mapsto & 11 \\ v * 22 & \mapsto & 11 \\ \text{sonstige} & \mapsto & 22 \end{array} \right\}.$$

(1a) Verlauf ohne/mit Abweichung und zugehörige Auszahlung:

$$\begin{aligned} 11\,11\,11\,11\,11\ldots &\mapsto (1-\delta)\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \delta^k (1,1) = (1,1) \\ \underline{a}1\,22\,11\,11\,11\ldots &\mapsto (1-\delta)[g(a,1) + \delta g(2,2) + \delta^2/(1-\delta)] \\ 1\underline{a}\,22\,11\,11\,11\ldots &\mapsto (1-\delta)[g(1,a) + \delta g(2,2) + \delta^2/(1-\delta)] \end{aligned}$$

Ein Abweichler erhält bestenfalls $2 - 3\delta + 2\delta^2$. Dies muss ≤ 1 bleiben. Für $\delta \in [\frac{1}{2}, 1[$ ist dies gewährleistet: Abweichung lohnt sich somit nicht.

(1b) Verlauf ohne/mit Abweichung und zugehörige Auszahlung:

$$\begin{aligned} 22\,11\,11\,11\,11\dots &\mapsto (1-\delta)[(-1,-1)+\delta/(1-\delta)] \\ \underline{a}2\,22\,11\,11\,11\dots &\mapsto (1-\delta)[g(a,2)+\delta g(2,2)+\delta^2/(1-\delta)] \\ 2\underline{a}\,22\,11\,11\,11\dots &\mapsto (1-\delta)[g(2,a)+\delta g(2,2)+\delta^2/(1-\delta)] \end{aligned}$$

Der Konformist erhält $2\delta-1$, ein Abweichler bestenfalls $2\delta^2-\delta$.
Für alle $\delta \in [\frac{1}{2}, 1[$ gilt somit: Abweichung lohnt sich hier nicht.

🙂 Beachten Sie, wie wunderbar einfach uns die Rechnung gelingt dank des Prinzips der einmaligen Abweichung: Es reduziert und strukturiert! Es genügt, für jede einzelne Abweichung die Ungleichung aufzustellen. Die Lösung ist dann nur noch eine Frage der sorgfältigen Buchführung.

🙂 Zusammenfassung gemeinsamer Verläufe ist bequem und effizient: Wir betrachten jeweils, was aktuell gespielt werden müsste: 11 oder 22. Nach dem Prinzip der einmaligen Abweichung J2D müssen wir nur eine einzige Abweichung berechnen und vergleichen. Das ist erfreulich leicht!

🙂 Das Nash–Gleichgewicht ergibt die Auszahlung $g(0,0)=(2,2)$. Das etwas raffiniertere Gleichgewicht s liefert hingegen nur $(1,1)$. Wir haben damit insbesondere ein schönes Beispiel, wo das neue Gleichgewicht im wiederholten Spiel eine Verschlechterung bedeutet.

Das ist bemerkenswert: Im Stufenspiel g ist die Aktion 0 strikt dominant, nichtsdestotrotz wird diese Aktion im unendlich iterierten Spiel Γ durch das auszahlungsniedrigere Gleichgewicht s verhindert. Erstaunlich… aber wahr: Wir können die Gleichgewichtsbedingungen nachrechnen!

Das Strategiepaar s nutzt **Zuckerbrot und Peitsche** / *carrot and stick*: Es droht mit der Peitsche 2 zur Bestrafung, falls ein Spieler abweicht, aber verspricht zugleich das Zuckerbrot 1 als anschließende Belohnung, falls alle die Bestrafung wie gefordert ausführen. Das ist recht trickreich.

🙂 In Nashs Folk Theorem K2E nutzen wir ein Gleichgewicht $z \in \mathrm{NE}(\bar{g})$ und seine Auszahlung $g(z) \in \mathbb{R}^I$ als Drohpunkt. Das hier vorliegende Beispiel zeigt, dass wir den Drohpunkt weiter absenken können. Dieser Trick wird allgemein in Satz K2F verwendet.

Eine Hand wäscht die andere.

Wir iterieren unendlich oft das folgende Spiel $g : \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$:

A \ B	0	1
0	0, 0	α_1, β_2
1	β_1, α_2	1, 1

mit Konstanten $\alpha_i > 1 > \delta_i > 0 > \beta_i$ und der diskontierten Auszahlung

$$u : \{00, 01, 10, 11\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^2,$$

$$u^i(x) = (1 - \delta_i) \sum_{n=0}^{\infty} \delta_i^n g^i(x_n)$$

Aufgabe: Es gelte $\alpha_i + \beta_i > 2$, zum Beispiel $\alpha_i = 5$ und $\beta_i = -1$. Die Strategie, niemals zu kooperieren, erreicht die Auszahlung $(0, 0)$. Die raffiniertere Grim-Trigger-Strategie erreicht die Auszahlung $(1, 1)$. Gibt es Gleichgewichte $(s^1, s^2) \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$ mit höherer Auszahlung?

Sie spüren hier ganz konkret die beiden Schwierigkeiten: Wie er/finden wir aussichtsreiche Kandidaten? Wie prüfen wir danach, ob ein Kandidat ein Gleichgewicht ist? Im endlichen Fall hilft Rückwärtsinduktion (J1D), hier jedoch nicht! Das macht die Konstruktion knifflig… und spannend. Die Prüfung gelingt mit dem Prinzip J2D der einmaligen Abweichung.

Eine Hand wäscht die andere.

Auch diese spieltheoretische Situation gibt es als Gleichnis bzw. als Märchen in vielen Variationen. Hier ist meine Fassung, universell / interreligiös zumindest für monotheistische Religionen:

Ein Suchender wünschte sich, Himmel und Hölle kennen zu lernen. Gott gewährte ihm diesen Wunsch und zeigte ihm zunächst die Hölle.

Die Menschen saßen an einem langen Tisch, vor sich dampfende Suppenschüsseln, doch jeder hatte einen meterlangen Löffel an sein Handgelenk gekettet, so dass es ihm unmöglich war, sich den Löffel zum Munde zu führen. So verschütteten sie die Suppe, stießen die Schüsseln um, es herrschte entsetzliches Chaos, und sie mussten schließlich sogar hungern.

Anschließend zeigte Gott dem Suchenden den Himmel.

Auch dort saßen die Menschen an einem langen Tisch, ebenso mit dampfenden Suppenschüsseln und den gleichen meterlangen Löffeln. Doch statt das Unmögliche zu versuchen, speisten sie sich gegenseitig. So wurden sie alle satt, und es herrschte Harmonie und Frieden.

Das also war der Unterschied zwischen Himmel und Hölle.

Eine Hand wäscht die andere.

Stellen wir uns vor, beide Spieler verabreden ein Strategiepaar (s^1, s^2). Damit diese Verabredung stabil ist, sollte sie ein Gleichgewicht sein! Wie können die Spieler die ersehnte himmlische Harmonie erreichen?

L'enfer, c'est les autres.
[Die Hölle, das sind die anderen.]
Jean-Paul Sartre (1905-1980), *Huis Clos*

Kurzes Nachdenken macht anschaulich klar, was sie versuchen *können*: Die Spieler *können* sich abwechseln, um im Mittel davon zu profitieren.

Mit dieser Idee beginnt die interessante mathematische Ausarbeitung: Wir benötigen zuerst eine explizite Beschreibung des Strategiepaars. Es genügt nicht, grob zu verabreden „Die Spieler wechseln sich ab“; eine Strategie muss definieren, wie in *jedem* Zustand zu handeln ist! Auch die Sanktionen bei Abweichungen müssen festgelegt werden. Die Verabredung muss also vollständig, präzise, narrensicher sein.

Anschließend können wir prüfen, ob ein Gleichgewicht vorliegt. Das bedeutet wie immer, kein Spieler hat einen Vorteil davon, von seiner Strategie abzuweichen, egal in welchem Zustand.

Eine Hand wäscht die andere.

Aufgabe: Untersuchen Sie folgende Strategiepaare $s^1, s^2 : X^\circ \to \{0,1\}$. Für welche Parameter $\alpha_i > 1 > \delta_i > 0 > \beta_i$ sind dies Gleichgewichte?

$$(0)\left\{\begin{array}{r} \emptyset \mapsto 01 \\ v*00 \mapsto 00 \\ v*01 \mapsto 10 \\ v*10 \mapsto 01 \\ v*11 \mapsto 11 \end{array}\right\} \qquad (2)\left\{\begin{array}{r} \emptyset \mapsto 01 \\ 01 \mapsto 10 \\ v*01\,10 \mapsto 01 \\ v*10\,01 \mapsto 10 \\ \text{sonstige} \mapsto 00 \end{array}\right\} \qquad (3)\left\{\begin{array}{r} (01\,10)^n \mapsto 01 \\ (01\,10)^n01 \mapsto 10 \\ \text{sonstige} \mapsto 00 \end{array}\right\}$$

$$(1)\left\{\begin{array}{r} \emptyset \mapsto 01 \\ v*00 \mapsto 00 \\ v*01 \mapsto 10 \\ v*10 \mapsto 01 \\ v*11 \mapsto 00 \end{array}\right\} \qquad (2')\left\{\begin{array}{r} \emptyset \mapsto 10 \\ 10 \mapsto 01 \\ v*10\,01 \mapsto 10 \\ v*01\,10 \mapsto 01 \\ \text{sonstige} \mapsto 00 \end{array}\right\} \qquad (3')\left\{\begin{array}{r} (10\,01)^n \mapsto 10 \\ (10\,01)^n10 \mapsto 01 \\ \text{sonstige} \mapsto 00 \end{array}\right\}$$

Das Strategiepaar (3) bzw. (3') nennen wir *Eine Hand wäscht die andere*, *Manus manum lavat* oder *If you scratch my back, then I'll scratch yours*. Die Symmetrie zwischen den Spielern muss hierzu gebrochen werden. Abhilfe schafft ein anfänglicher Münzwurf, also eine korrelierte Strategie!

Eine Hand wäscht die andere.

Lösung: Wir nutzen hier das Prinzip J2D der einmaligen Abweichung! Die Voraussetzung ist erfüllt, beide Auszahlungen u^i sind stetig (J2H).

(0) Diese Strategie heißt traditionell *Tit for tat*, also *Wie du mir so ich dir*. Nur für den Start wird die Symmetrie gebrochen, etwa durch Münzwurf.

(0a) Verlauf ohne/mit Abweichung und zugehörige Auszahlung:

$$\begin{aligned}
01\,10\,01\,10\,01\,10\,01\,10\ldots &\mapsto (1-\delta)\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\delta^{2k}(\alpha+\delta\beta,\beta+\delta\alpha)\\
&= \tfrac{1}{1+\delta}(\alpha+\delta\beta,\beta+\delta\alpha)\\
\underline{1}1\,11\,11\,11\,11\,11\,11\,11\ldots &\mapsto (1-\delta)\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\delta^{n}(1,1) = (1,1)\\
0\underline{0}\,00\,00\,00\,00\,00\,00\,00\ldots &\mapsto (1-\delta)\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\delta^{n}(0,0) = (0,0)
\end{aligned}$$

Hieraus folgen die Bedingungen $\alpha+\delta\beta \ge 1+\delta$ und $\beta+\delta\alpha \ge 0$.

(0b) Verlauf ohne/mit Abweichung in jedem Teilspiel ab $x = v * 00$:

$$\begin{aligned}
\ldots 00\,|\,00\,00\,00\,00\,00\,00\,00\,00\ldots &\mapsto (0,0)\\
\ldots 00\,|\,\underline{1}0\,01\,10\,01\,10\,01\,10\,01\ldots &\mapsto \tfrac{\delta^n}{1+\delta}(\beta+\delta\alpha,\alpha+\delta\beta)\\
\ldots 00\,|\,0\underline{1}\,10\,01\,10\,01\,10\,01\,10\ldots &\mapsto \tfrac{\delta^n}{1+\delta}(\alpha+\delta\beta,\beta+\delta\alpha)
\end{aligned}$$

Hieraus folgt zweimal die Bedingung $0 \ge \beta+\delta\alpha$, mit (0a) Gleichheit.

Eine Hand wäscht die andere.

(0c) Verlauf ohne/mit Abweichung in jedem Teilspiel ab $x = v * 11$:

$$\begin{aligned}
\ldots 11\,|\,11\,11\,11\,11\,11\,11\,11\,11\ldots &\mapsto \delta^n(1,1)\\
\ldots 11\,|\,\underline{0}1\,10\,01\,10\,01\,10\,01\,10\ldots &\mapsto \tfrac{\delta^n}{1+\delta}(\alpha+\delta\beta,\beta+\delta\alpha)\\
\ldots 11\,|\,1\underline{0}\,01\,10\,01\,10\,01\,10\,01\ldots &\mapsto \tfrac{\delta^n}{1+\delta}(\beta+\delta\alpha,\alpha+\delta\beta)
\end{aligned}$$

Hieraus folgt zweimal die Bedingung $1+\delta \ge \alpha+\delta\beta$, mit (0a) Gleichheit.

(0d) Verlauf ohne/mit Abweichung in jedem Teilspiel ab $x = v * 01$:

$$\begin{aligned}
\ldots 01\,|\,10\,01\,10\,01\,10\,01\,10\,01\ldots &\mapsto \tfrac{\delta^n}{1+\delta}(\beta+\delta\alpha,\alpha+\delta\beta)\\
\ldots 01\,|\,\underline{0}0\,00\,00\,00\,00\,00\,00\,00\ldots &\mapsto (0,0)\\
\ldots 01\,|\,1\underline{1}\,11\,11\,11\,11\,11\,11\,11\ldots &\mapsto \delta^n(1,1)
\end{aligned}$$

Hieraus folgen die Bedingungen $\beta+\delta\alpha \ge 0$ und $\alpha+\delta\beta \ge 1+\delta$, wie (0a).

(0e) Für jedes Teilspiel ab $x = v * 10$ finden wir dasselbe, siehe (0a).

Aus $\beta+\delta\alpha = 0$ und $\alpha+\delta\beta = 1+\delta$ folgt $\delta = -\beta/\alpha$ und $\alpha+\beta = 1$. Dies ist auch hinreichend: Wir kehren alles um und nutzen Satz J2D.

☹ Diese Bedingung ist leider eine extrem starke Einschränkung.

Eine Hand wäscht die andere.

(1) Wir modifizieren die Strategie (0) von $11 \mapsto 11$ zu $11 \mapsto 00$.

(1a) Verlauf ohne/mit Abweichung und zugehörige Auszahlung:

$$\begin{aligned}
01\,10\,01\,10\,01\,10\,01\,10\dots &\mapsto (1-\delta)\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\delta^{2k}(\alpha+\delta\beta,\beta+\delta\alpha)\\
&= \tfrac{1}{1+\delta}(\alpha+\delta\beta,\beta+\delta\alpha)\\
\underline{1}1\,00\,00\,00\,00\,00\,00\,00\dots &\mapsto (1-\delta)(1,1)\\
0\underline{0}\,00\,00\,00\,00\,00\,00\,00\dots &\mapsto (1-\delta)(0,0)
\end{aligned}$$

Hieraus folgen die Bedingungen $\alpha+\delta\beta \ge 1-\delta^2$ und $\beta+\delta\alpha \ge 0$.

(1b) Verlauf ohne/mit Abweichung in jedem Teilspiel ab $x = v * aa$:

$$\begin{aligned}
\dots aa\,|\,00\,00\,00\,00\,00\,00\,00\,00\dots &\mapsto (0,0)\\
\dots aa\,|\,\underline{1}0\,01\,10\,01\,10\,01\,10\,01\dots &\mapsto \tfrac{\delta^n}{1+\delta}(\beta+\delta\alpha,\alpha+\delta\beta)\\
\dots aa\,|\,0\underline{1}\,10\,01\,10\,01\,10\,01\,10\dots &\mapsto \tfrac{\delta^n}{1+\delta}(\alpha+\delta\beta,\beta+\delta\alpha)
\end{aligned}$$

Hieraus folgt zweimal die Bedingung $0 \ge \beta+\delta\alpha$, somit Gleichheit.

🙂 Zusammenfassung gemeinsamer Verläufe ist bequem und effizient.

Eine Hand wäscht die andere.

(1c) Verlauf ohne/mit Abweichung in jedem Teilspiel ab $x = v * 01$:

$$\begin{aligned}
\dots 01\,|\,10\,01\,10\,01\,10\,01\,10\,01\dots &\mapsto \tfrac{\delta^n}{1+\delta}(\beta+\delta\alpha,\alpha+\delta\beta)\\
\dots 01\,|\,\underline{0}0\,00\,00\,00\,00\,00\,00\,00\dots &\mapsto (1-\delta)\delta^n(0,0)\\
\dots 01\,|\,1\underline{1}\,00\,00\,00\,00\,00\,00\,00\dots &\mapsto (1-\delta)\delta^n(1,1)
\end{aligned}$$

Hieraus folgen die Bedingungen $\beta+\delta\alpha \ge 0$ und $\alpha+\delta\beta \ge 1-\delta^2$.

(1d) Für jedes Teilspiel ab $x = v * 10$ finden wir dasselbe, siehe (1a).

🙂 Zusammenfassung gemeinsamer Verläufe ist bequem und effizient.

Wir setzen $\alpha > 1 > \delta > 0 > \beta$ voraus, wie in der Aufgabe angegeben. Ist das Strategiepaar s teilspielperfekt, dann sind die Bedingungen $\beta+\delta\alpha = 0$ und $\alpha+\delta\beta \ge 1-\delta^2$ notwendig, wie oben ausgerechnet. Demnach muss $\delta = -\beta/\alpha$ und $\alpha+\beta > 0$ gelten. Diese Bedingungen sind auch hinreichend: Wir kehren alles um und nutzen Satz J2D.

🙂 Die Parameter $\alpha > 1$ und $\beta < 0$ mit $\alpha+\beta > 0$ sind frei wählbar.

☹️ Der Diskontfaktor δ muss leider penibel genau justiert werden!

Eine Hand wäscht die andere.

(2) Verlauf ab $x \in X^\circ$ ohne/mit Abweichung und zugehörige Auszahlung:

$$\begin{array}{lll}
\dots 01\,10 \,|\, 01\,10\,01\,10\,01\,10 \dots & \mapsto (1-\delta)\sum_{k=n}^{\infty} \delta^{2k} & (\alpha+\delta\beta, \beta+\delta\alpha) \\
\dots 01\,10 \,|\, \underline{1}1\,00\,00\,00\,00\,00 \dots & \mapsto (1-\delta)\delta^{2n} & (1,1) \\
\dots 01\,10 \,|\, 0\underline{0}\,00\,00\,00\,00\,00 \dots & \mapsto (1-\delta)\delta^{2n} & (0,0) \\
\dots 10\,01 \,|\, 10\,01\,10\,01\,10\,01 \dots & \mapsto (1-\delta)\sum_{k=n}^{\infty} \delta^{2k+1} & (\beta+\delta\alpha, \alpha+\delta\beta) \\
\dots 10\,01 \,|\, \underline{0}0\,00\,00\,00\,00\,00 \dots & \mapsto (1-\delta)\delta^{2n+1} & (0,0) \\
\dots 10\,01 \,|\, 1\underline{1}\,00\,00\,00\,00\,00 \dots & \mapsto (1-\delta)\delta^{2n+1} & (1,1) \\
\text{sonstige} \,|\, 00\,00\,00\,00\,00\,00 \dots & \mapsto (1-\delta)\delta^{n} & (0,0) \\
\text{sonstige} \,|\, \underline{1}0\,00\,00\,00\,00\,00 \dots & \mapsto (1-\delta)\delta^{n} & (\beta,\alpha) \\
\text{sonstige} \,|\, 0\underline{1}\,00\,00\,00\,00\,00 \dots & \mapsto (1-\delta)\delta^{n} & (\alpha,\beta)
\end{array}$$

Wir setzen $\alpha > 1 > \delta > 0 > \beta$ voraus. Die obigen sechs Abweichungen führen auf die beiden Ungleichungen $\beta + \delta\alpha \ge 0$ und $\alpha + \delta\beta \ge 1 - \delta^2$. Diese sind äquivalent zur Bedingung $1 > \delta \ge -\beta/\alpha$. Ist damit alles klar?

Eine Hand wäscht die andere.

⚠ Man kann hier leicht Fälle übersehen, so ist es auch mir ergangen. Dankenswerterweise wurde ich in der Vorlesung darauf hingewiesen:

$$\begin{array}{lll}
\text{Abweichung } 10 \,|\, 00\,00\,00\,00 \dots & \mapsto (1-\delta)\delta^{n} & (0,0) \\
\text{Abweichung } 10 \,|\, 0\underline{1}\,10\,01\,10 \dots & \mapsto (1-\delta)\sum_{k=n}^{\infty} \delta^{2k} & (\alpha+\delta\beta, \beta+\delta\alpha) \\
\text{Abweichung } 01 \,|\, 00\,00\,00\,00 \dots & \mapsto (1-\delta)\delta^{n} & (0,0) \\
\text{Abweichung } 01 \,|\, \underline{1}0\,01\,10\,01 \dots & \mapsto (1-\delta)\sum_{k=n}^{\infty} \delta^{2k+1} & (\beta+\delta\alpha, \alpha+\delta\beta)
\end{array}$$

Das führt zur weiteren Ungleichung $\beta + \delta\alpha \le 0$, demnach $\delta = -\beta/\alpha$.
☹ Der Diskontfaktor δ muss leider penibel genau justiert werden!

Die Grim-Trigger-Strategie aus Satz K1A ist extrem einfach aufgebaut. Um eine Choreographie der Periode 2 aufzubauen, versuchen es die Strategiepaare (0,1) ebenso mit nur einem Zug Erinnerung, doch damit haben sie zu wenig Kontrolle und erreichen nicht Teilspielperfektion.

Das Strategiepaar (2) ist raffinierter und benötigt zwei Züge Erinnerung. Das sieht anfangs besser aus, genügt aber leider immer noch nicht.
⚠ Nicht alles, was wie ein Gleichgewicht erscheint, ist auch eines!

Eine Hand wäscht die andere.

(3) Verlauf ohne/mit Abweichung und zugehörige Auszahlung:

$$
\begin{array}{rlr}
(01\,10)^n \,|\, 01\,10\,01\,10\,01\,10\ldots & \mapsto (1-\delta)\sum_{k=n}^{\infty}\delta^{2k} & (\alpha+\delta\beta, \beta+\delta\alpha) \\
(01\,10)^n \,|\, \underline{1}1\,00\,00\,00\,00\,00\ldots & \mapsto (1-\delta)\delta^{2n} & (1,1) \\
(01\,10)^n \,|\, 0\underline{0}\,00\,00\,00\,00\,00\ldots & \mapsto (1-\delta)\delta^{2n} & (0,0) \\
(01\,10)^n 01 \,|\, 10\,01\,10\,01\,10\,01\ldots & \mapsto (1-\delta)\sum_{k=n}^{\infty}\delta^{2k+1} & (\beta+\delta\alpha, \alpha+\delta\beta) \\
(01\,10)^n 01 \,|\, \underline{0}0\,00\,00\,00\,00\,00\ldots & \mapsto (1-\delta)\delta^{2n+1} & (0,0) \\
(01\,10)^n 01 \,|\, 1\underline{1}\,00\,00\,00\,00\,00\ldots & \mapsto (1-\delta)\delta^{2n+1} & (1,1) \\
\text{sonstige} \,|\, 00\,00\,00\,00\,00\,00\ldots & \mapsto (1-\delta)\delta^{n} & (0,0) \\
\text{sonstige} \,|\, \underline{1}0\,00\,00\,00\,00\,00\ldots & \mapsto (1-\delta)\delta^{n} & (\beta,\alpha) \\
\text{sonstige} \,|\, 0\underline{1}\,00\,00\,00\,00\,00\ldots & \mapsto (1-\delta)\delta^{n} & (\alpha,\beta)
\end{array}
$$

Wir setzen $\alpha > 1 > \delta > 0 > \beta$ voraus und nutzen das Prinzip J2D: Genau dann ist s teilspielperfekt, wenn $\beta + \delta\alpha \ge 0$ und $\alpha + \delta\beta \ge 1 - \delta^2$. Dies ist äquivalent zur Bedingung $1 > \delta \ge -\beta/\alpha$. Daraus folgt $\alpha + \beta > 0$.

Eine Hand wäscht die andere.

Das Strategiepaar (3) nutzt die Erinnerung des gesamten Spielverlaufs. Das klingt erst einmal kompliziert, doch die Strategien sind noch einfach.

Die Bedingung $\alpha + \beta > 0$ ist anschaulich klar: Die Belohnung durch die mittlere Auszahlung muss für jeden Spieler strikt größer sein als die drohende Strafe $g(0,0) = (0,0)$ durch die Grundstrategie $(0,0) \in A$. Im Beispiel $(\alpha, \beta) = (5, -1)$ muss demnach nur $1/5 \le \delta < 1$ gelten.

Auch die Bedingung $\delta \ge -\beta/\alpha$ ist anschaulich klar: Geht ein Spieler mit β in Vorleistung, so erwartet er anschließend die Kompensation $\delta\alpha$. Beide Spieler müssen ausreichend geduldig sein, um die Kooperation höher zu bewerten als alle möglichen kurzfristigen Gewinnmitnahmen.

Die Ungleichungen sind plausibel, das heißt zunächst: notwendig. Dank des Prinzips J2D sind sie tatsächlich auch hinreichend.

Das Strategiepaar (3’) ist symmetrisch zu (3), das Ergebnis identisch. Die Symmetrie zwischen den Spielern muss hier gebrochen werden. Abhilfe schafft ein anfänglicher Münzwurf, also eine korrelierte Strategie! Dann steht einer harmonischen Kooperation nichts mehr im Wege.

Eine Hand wäscht die andere.

Satz K1D: iteriertes Gefangenendilemma

Wir iterieren das Gefangenendilemma $g : \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch

A \ B	0	1
0	0 / 0	α_1 / β_2
1	β_1 / α_2	1 / 1

mit Konstanten $\alpha_i > 1 > \delta_i > 0 > \beta_i$ und diskontierten Auszahlungen

$$u : \{00, 01, 10, 11\}^N \to \mathbb{R}^2,$$

$$u^i(x) = \frac{1-\delta_i}{1-\delta_i^N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_i^n g^i(x_n).$$

(1) Im endlichen Fall $N < \infty$ gibt es nur ein einziges Gleichgewicht $(s^1, s^2) \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$, und dieses führt zur Auszahlung $u(s^1, s^2) = (0, 0)$.

(2) Für $N = \infty$ und $\delta_i \ge 1 - 1/\alpha_i$ ist zudem die Grim-Trigger-Strategie ein Gleichgewicht $(s^1, s^2) \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$ mit Auszahlung $u(s^1, s^2) = (1, 1)$.

(3) Für $N = \infty$ und $\delta_i \ge -\beta_i/\alpha_i$ haben wir zudem das Gleichgewicht „Eine Hand wäscht die andere“ $(s^1, s^2) \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$ mit Auszahlung

$$u(s^1, s^2) = \left(\tfrac{\alpha_1 + \delta_1 \beta_1}{1+\delta_1}, \tfrac{\beta_2 + \delta_2 \alpha_2}{1+\delta_2}\right) \;\to\; \left(\tfrac{\alpha_1+\beta_1}{2}, \tfrac{\alpha_2+\beta_2}{2}\right).$$

Eine Hand wäscht die andere.

Wir haben uns für dieses grundlegende Beispiel viel Zeit genommen und uns mit den ausführlichen Rechnungen redlich Mühe gegeben. Ich glaube, dass unser Erkenntnisgewinn die Investition belohnt: Wir erhalten explizite Strategien und quantitative Garantien.

Oft wird dies lieblos zusammengefasst zur qualitativen Aussage „Für $\delta \nearrow 1$ existiert ein Strategiepaar $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$ mit $u(s) \to g(a)$.“ Das ist schön knapp und bequem, aber wenig konkret und hilfreich. Hier sind unsere Rechnungen zwar mühsamer, aber auch genauer:

- explizite Angabe der betrachteten Strategien $(s_1, s_2) \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$.
- explizite Angabe der jeweils benötigten Geduldsschwelle $\delta_i \ge \underline{\delta}_i$.

Soviel konkrete Mühe ist nicht immer nötig oder wünschenswert, in diesen Fällen genügt meist eine vereinfachte qualitative Aussage. Doch wenn Sie tatsächlich eine vorgelegte Spielsituation lösen wollen, etwa unter Spielern einen Plan vereinbaren, dann geht es nur konkret.

Allgemeine Regel: *Explicit is better than implicit.* (*The Zen of Python*) Auch zum Erlernen beim ersten Kontakt scheint mir das unerlässlich.

Auch die Mikrostruktur der hier konstruierten Strategien ist interessant. Es geht oft nicht nur grob um das *Was* der erreichbaren Auszahlung, sondern auch genau um das *Wie* der verschiedenen Realisierungen.

Sie spüren feine Unterschiede, sobald Sie selbst als Spieler agieren: Bei Strategien der Form *Eine Hand wäscht die andere* muss einer der beiden Spieler in Vorleistung gehen. Keiner will, einer muss. Doch wer?

Beide Reihenfolgen konvergieren für $\delta_1, \delta_2 \nearrow 1$ gegen den Mittelwert:

$$u(s^1, s^2) = \left(\tfrac{\alpha_1+\delta_1\beta_1}{1+\delta_1}, \tfrac{\beta_2+\delta_2\alpha_2}{1+\delta_2}\right) \;\to\; \left(\tfrac{\alpha_1+\beta_1}{2}, \tfrac{\alpha_2+\beta_2}{2}\right).$$
$$u(s^2, s^1) = \left(\tfrac{\beta_1+\delta_1\alpha_1}{1+\delta_1}, \tfrac{\alpha_2+\delta_2\beta_2}{1+\delta_2}\right) \;\to\; \left(\tfrac{\alpha_1+\beta_1}{2}, \tfrac{\alpha_2+\beta_2}{2}\right).$$

Für vorgegebene Werte $\delta_1, \delta_2 < 1$ sind die Auszahlungen verschieden. Abhilfe schafft ein anfänglicher Münzwurf, also eine korrelierte Strategie! Solche und weitere Fragen sehen Sie erst, wenn Sie konkret werden.

Mathematik ist zugleich abstrakte Theorie und konkrete Anwendung. Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen! Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie.
(Immanuel Kant, 1724–1804)

Jetzt können Sie zu Recht einwenden, dass unser Modell doch nur ein Spielzeug-Beispiel ist. Ja, natürlich, es ist nur ein Beispiel unter vielen, es ist extrem vereinfacht, all unsere Modelle sind beschämend simpel, aber sie illustrieren doch überzeugend das grundlegende **Phänomen**. Wichtiger noch, selbst einfache Modelle zeigen Ihnen die **Methoden**.

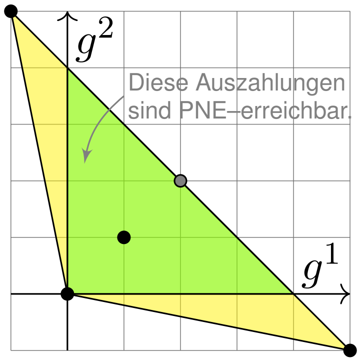
Die Spieltheorie, wie jede gute Theorie, liefert Ihnen nicht nur Beispiele, sondern Methoden. Es ist unwahrscheinlich, dass Sie genau dieses oder jenes *Beispiel* wörtlich anwenden. Das gilt ganz allgemein, selbst für die bestmögliche Auswahl von Beispielen. Wahrscheinlich aber ist, dass Sie diese oder ähnliche bewährte *Methoden* nutzen. Sie sollen daher nicht nur *Beispiele* lernen, sondern zugleich möglichst vielseitige *Methoden*!

☺ Was Sie hier lernen, können Sie überall nutzbringend anwenden. Mit diesen Werkzeugen können Sie auch dicke Bretter bohren. Ihre Investition und unsere gemeinsame Mühe lohnen sicht.

Welche Auszahlungen sind teilspielperfekt realisierbar?

Wir iterieren unendlich oft das folgende Spiel $g : \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$:

A \ B	0	1
0	0 / 0	-1 / 5
1	5 / -1	1 / 1



Welche Auszahlungen $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$ sind teilspielperfekt realisierbar?
Das Nash–Gleichgewicht $z = (0,0)$ ist möglich; es dient als Drohpunkt.
Besser ist $g(1,1) = (1,1)$, realisierbar für $\delta \ge 4/5$ mit Grim Trigger (K1A).
Noch besser wäre $(2,2)$. Für $\delta \ge 1/5$ erreichen wir dies wie oben (K1D).

Geht noch mehr? Welche Auszahlungen sind realisierbar? Nashs Folk Theorem benennt mögliche Gleichgewichtsauszahlungen: Sie liegen (1) in der konvexen Hülle der Auszahlungen und (2) über dem Drohpunkt.

⚠ Insbesondere ist $u\,\mathrm{PNE}(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}^2$ überabzählbar, also auch $\mathrm{PNE}(\Gamma)$.

Welche Auszahlungen sind teilspielperfekt realisierbar?

Das Strategiepaar $(0,0)$ ist ein Nash–Gleichgewicht. Wiederholung dieser Strategie ist teilspielperfekt (Satz K1C), aber wenig lukrativ. Es dient als Notlösung und glaubwürdige Drohung bei Abweichung.

Das Strategiepaar $(1,1)$ ist für beide Spieler strikt besser als $(0,0)$, aber im Einzelspiel kein Nash–Gleichgewicht. Im iterierten Spiel lässt es sich teilspielperfekt realisieren, etwa durch obige Grim-Trigger-Strategie K1A.

Die oben untersuchte Strategie *Eine Hand wäscht die andere* aus K1D realisiert die für beide Spieler strikt bessere Auszahlung $(2,2)$, für $\delta < 1$ etwas asymmetrisch, doch im Grenzwert für $\delta \nearrow 1$ beliebig genau.

Nach kurzem Nachdenken und Probieren sehen Sie vermutlich ebenso, wie etwa die Auszahlung $2/5(5,-1) + 3/5(-1,5)$ realisiert werden kann, zumindest näherungsweise, durch ein teilspielperfektes Gleichgewicht: Es genügt eine periodische Absprache der Form ABABB oder AABBB.

Wenn Ihnen dieser nächste Schritt jetzt klar und einfach einleuchtet, dann hat sich die lange rechenintensive Vorbereitung mehr als gelohnt. Das Folk Theorem ist die natürliche Fortsetzung unserer Rechnungen.

Welche Auszahlungen sind teilspielperfekt realisierbar?

Welche allgemeinen Regeln erkennen wir in diesen Beispielen? Welche Konstruktionen und Aussagen extrahieren wir daraus?

Nashs Folk Theorem gibt Auskunft darüber, welche Auszahlungen teilspielperfekt realisierbar sind. Unser Beispiel legt folgendes nahe: In Frage kommen höchstens alle Konvexkombinationen $g(a)$ der reinen Auszahlungen, also die Auszahlungen korrelierter Strategien $a \in [A]$.

Zur Abschreckung benötigen wir eine glaubwürdige Drohung / Strafe. Hierzu nutzen wir ein Nash–Gleichgewicht $z \in \mathrm{NE}(g)$ oder $z \in \mathrm{NE}(\bar{g})$. Realisierbar ist dann tatsächlich jede Konvexkombination $g(a) \in \mathbb{R}^I$, die für jeden Spieler besser ist als das Grundniveau, kurz $g(a) > g(z)$. Nashs Folk Theorem K2E präzisiert diese Aussage quantitativ.

Unsere Intuition wird sich nachfolgend als richtig erweisen. Wir wollen die anschauliche Aussage nun präzise formulieren und dann beweisen. Die Überraschung liegt schließlich nicht in der naiven Umschreibung, sondern in der mathematischen Ausführung: Explizite Formulierung und sorgfältiges Nachrechnen sind ehrbares mathematisches Handwerk.

Welche Auszahlungen sind teilspielperfekt realisierbar?

Die folgenden Überlegungen bereiten Nashs Folk Theorem vor. Für wiederholte Spiele $\Gamma = \prod_{k=0}^{\infty} g_k$ sind dies grundlegende Hilfsmittel und daher auch von ganz allgemeinem, eigenständigem Interesse.

Der einfachste Fall ist die un/endliche Wiederholung desselben Spiels

$$g \;:\; A = \prod_{i \in I} A^i \to \mathbb{R}^I.$$

Kaum Mehraufwand bereitet eine Familie $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Spielen

$$g_k \;:\; A_k = \prod_{i \in I} A_k^i \to \mathbb{R}^I.$$

Dazu müssen wir zwar einen weiteren Index $k \in \mathbb{N}$ mitführen, doch die Argumente werden dadurch eher einfacher und klarer.

Zu jeder Runde / Stufe $k \in \mathbb{N}$ ist g_k das zugehörige Stufenspiel. Jede Strategie $a^i \in A_k^i$ des Stufenspiels nennen wir nun eine Aktion.

Ich betone nochmal die grundlegende Annahme: Alle vorigen Aktionen sind für alle Spieler sichtbar. Das dient zur Kontrolle der Vereinbarung. Andernfalls sind glaubwürdige Absprachen erschwert oder unmöglich.

Verkettung von Spielen in Normalform

Definition K2A: Verkettung von Spielen in Normalform

Gegeben sei eine Familie $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von strategischen Spielen

$$g_k \;:\; A_k = \prod_{i\in I} A_k^i \to \mathbb{R}^I.$$

Wir nennen g_k das **Stufenspiel** / *stage game* der Stufe k.

Für jeden Spieler $i \in I$ gelte $\sum_{k=0}^{\infty} \sup|g_k^i| < \infty$. Typische Beispiele sind $g_k = (1-\delta)\delta^k g$ für ein endliches Spiel $g : A = \prod_{i\in I} A^i \to \mathbb{R}^I$.

Hieraus konstruieren wir das extensive Spiel

$$\Gamma = \prod_{k=0}^{\infty} g_k$$

als **Verkettung** dieser Stufenspiele durch Hintereinanderausführung.

Die Zustandsmenge $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ besteht aus allen Spielverläufen mit $X_n = \prod_{k=0}^{n-1} A_k = A_0 * \dots * A_{n-1}$ und $\partial X = X_\infty = A = \prod_{k=0}^{\infty} A_k$.

Die Auszahlungen werden summiert zu

$$u^i \;:\; \partial X \to \mathbb{R} \;:\; u^i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^i(x_k).$$

Verkettung von Spielen in Normalform

Diese Konstruktion ist ein Spezialfall der Verkettung $\Gamma = \prod_{k\in\mathbb{N}} \Gamma_k$ beliebiger extensiver Spiele Γ_k, wie zuvor in Definition K1B erklärt. Im vorliegenden Fall ist jedes Stufenspiel $\Gamma_k = g_k$ besonders einfach, daher können wir alle Daten von Γ bequem explizit ausschreiben.

Das nutzen wir dankend in den folgenden Sätzen und Rechnungen. Ohne geeignete Notation wäre dies ein hoffnungsloses Unterfangen. Glücklicherweise ist unsere Notation sowohl präzise als auch bequem. Die folgenden Feststellungen werden damit beinahe zur Trivialität.

Dass schließlich alles übersichtlich, offen und klar vor uns liegt, verdanken wir unserer Vorbereitung der grundlegenden Begriffe: Spiele in statischer und extensiver Form, Nash–Gleichgewichte und teilspielperfekte Gleichgewichte, und für letztere Zermelos Rückwärtsinduktion und das Prinzip der einmaligen Abweichung.

🙂 Mit diesen Werkzeugen können wir präzise und effizient arbeiten: Wir können quantitative Modelle untersuchen und Aussagen beweisen, zudem qualitative Prinzipien und intuitive Interpretationen ableiten.

Das Prinzip der Abschreckung

Gegeben sei eine Familie $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Spielen $g_k : A_k = \prod_{i\in I} A_k^i \to \mathbb{R}^I$ und ihre Verkettung $\Gamma = \prod_{k=0}^{\infty} g_k$ wie zuvor in Definition K2A erklärt.

Gegeben seien Aktionsvektoren $a, z \in A = \prod_{k=0}^{\infty} A_k$ mit $z_k \in \mathrm{NE}(g_k)$. Allgemein genügt $z_k \in \mathrm{NE}(\bar{g}_k)$ oder gar $z_k \in \mathrm{CE}(g_k)$, das ist flexibler. Satz E1F von Nash garantiert die Existenz solcher Gleichgewichte.

Lemma K2B: Prinzip der Abschreckung

Wir definieren die Grim-Trigger-Strategie $s = \mathrm{Grim}(a, z)$ in jeder Stufe $n \in \mathbb{N}$ durch $s : X_n \to A_n$ mit $s(a_0 a_1 \dots a_{n-1}) = a_n$ und $s(x) = z_n$ sonst.

Genau dann gilt $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$, wenn für jeden Spieler $i \in I$ und jede Abweichung $\tilde{a}_n^i \in A_n^i$ die **Abschreckung** ausreichend wirkt gemäß

$$\underbrace{\left[g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) - g_n^i(a_n^i; a_n^{-i})\right]}_{\text{kurzfristiger Vorteil der Abweichung}} \quad \le \quad \underbrace{\sum_{k>n}\left[g_k^i(a_k) - g_k^i(z_k)\right]}_{\text{langfristiger Vorteil der Vereinbarung}}.$$

☺ Drum prüfe, wer sich ewig bindet, ob sich nicht was Bess'res findet! Auf der rechten Seite genügt eine Summe endlicher Länge, siehe K2D

Das Prinzip der Abschreckung

Aufgabe: Was ist für das Lemma zu beweisen? Beweisen Sie es!

Lösung: Für Spieler i lohnt sich eine Abweichung von a_n^i zu $\tilde{a}_n^i$, wenn

$$\underbrace{g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k>n} g_k^i(z_k)}_{\text{Auszahlung bei Abweichung}} \quad > \quad \underbrace{g_n^i(a_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k>n} g_k^i(a_k)}_{\text{Auszahlung bei Vereinbarung}}.$$

Für jeden Spieler $i \in I$ und jede Abweichung $\tilde{a}_n^i \in A_n^i$ fordern wir daher

$$\underbrace{g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k>n} g_k^i(z_k)}_{\text{Auszahlung bei Abweichung}} \quad \le \quad \underbrace{g_n^i(a_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k>n} g_k^i(a_k)}_{\text{Auszahlung bei Vereinbarung}}.$$

Abweichung aus den Nash–Gleichgewichten $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist nie profitabel:

$$\underbrace{g_n^i(\tilde{a}_n^i; z_n^{-i}) + \sum_{k>n} g_k^i(z_k)}_{\text{Auszahlung bei Abweichung}} \quad \le \quad \underbrace{g_n^i(z_n^i; z_n^{-i}) + \sum_{k>n} g_k^i(z_k)}_{\text{Auszahlung bei Vereinbarung}}$$

☺ Diese Ungleichungen sind plausibel und offensichtlich notwendig für jedes teilspielperfekte Gleichgewicht $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$. Dank dem Prinzip J2D der einmaligen Abweichung sind diese Bedingungen auch hinreichend. Damit ist das Lemma bewiesen. So schön, so einfach, so elegant!

Schuld und Sühne

Menschen machen Fehler. Die Grim-Trigger-Strategie ahndet dies sofort mit ewiger Verdammnis. In manchen Anwendungen ist dies realistisch. In vielen Anwendungen ist dies jedoch zu streng, insbesondere dann, wenn die beteiligten Spieler dauerhaft aufeinander angewiesen sind.

In Partnerschaften können Verstöße mit Schmollen geahndet werden, kleine Vergehen mit kurzem Schmollen, größere mit längerem, manche gar mit Beziehungsabbruch. Oft beobachtet man jedoch Versöhnung nach verbüßter Zurechtweisung: „Jetzt hast du deine Lektion gelernt.“

Auch in der Rechtsprechung gilt das Prinzip der Angemessenheit: Die Strafzumessung gründet (1) auf der Feststellung einer Straftat und erfolgt (2) nach der Schwere der Schuld. Dasselbe gilt genauso im Sport bei einem progressiven Strafsystem, etwa beim Handball.

Zur Vereinfachung sind unsere bisherigen Strategien unerbittlich und simple Variationen der Grim-Trigger-Strategie. Das ist für die meisten Anwendungen unnötig streng. Zur Teilspielperfektion / Abschreckung genügt es, genau so lange zu bestrafen, bis die Schuld getilgt ist.

Schuld und Sühne

Aufgabe: Konstruieren Sie explizit und präzise eine solche Strategie „Schuld und Sühne“ und beweisen Sie ihre Teilspielperfektion.

Lösung: Die Strategie „Schuld und Sühne“ (Definition K2C) ist intuitiv klar, und der Nachweis ihrer Teilspielperfektion (Satz K2D) ist plausibel. Dennoch sind explizite Formulierung und sorgfältiges Nachrechnen eine schöne mathematische Fingerübung bzw. artistische Herausforderung. Insbesondere müssen wir alle Fälle klären. Soviel Sorgfalt muss sein!

Gegeben sei eine Familie $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Spielen $g_k : A_k = \prod_{i\in I} A_k^i \to \mathbb{R}^I$ und ihre Verkettung $\Gamma = \prod_{k=0}^{\infty} g_k$ wie zuvor in Definition K2A erklärt.

Vorgegeben sei $a \in A = \prod_{k=0}^{\infty} A_k$ als der „rechte Pfad“. Idealerweise ist der Spielverlauf $a_0 a_1 a_2 \dots$. Jede Abweichung $\tilde{a}_n \ne a_n$ wird sanktioniert, indem die vorgesehenen Nash–Gleichgewichte $z_n z_{n+1} \dots z_{n+\ell}$ gespielt werden für die nächsten $\ell = \ell_n(\tilde{a}_n)$ Runden. Danach wird vergeben.

Wir benötigen für jede Runde $n \in \mathbb{N}$ eine Bußregel $\ell_n : A_n \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$: Sie gibt für jede Abweichung an, wie viele Runden gebüßt werden muss. Diese Abmachungen müssen vor dem Spiel präzise festgelegt werden!

Definition K2C: Schuld und Sühne

Gegeben sei eine Familie $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Spielen $g_k : A_k = \prod_{i\in I} A_k^i \to \mathbb{R}^I$ und ihre Verkettung $\Gamma = \prod_{k=0}^{\infty} g_k$ wie zuvor in Definition K2A erklärt.

Gegeben seien Aktionsvektoren $a, z \in A = \prod_{k\in\mathbb{N}} A_k$ mit $z_k \in \mathrm{NE}(g_k)$ und eine Bußregel $\ell_k : A_k \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $\ell_k(a_k) = 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Wir definieren die **Schuld-und-Sühne-Strategie** $s = \mathrm{CAP}(a, z, \ell)$, engl. *Crime and Punishment*, in jeder Stufe $n \in \mathbb{N}$ wie folgt:

$$s_n \;:\; X_n \to A_n \;:\; x \mapsto \begin{cases} a_n & \text{falls } \ell(x) = 0, \\ z_n & \text{falls } \ell(x) > 0. \end{cases}$$

Für jede Vorgeschichte $x \in X_n$ definieren wir $\ell(x)$ als die Rundenzahl, die noch gesühnt werden muss. Ohne Erbsühne haben wir $\ell(\emptyset) := 0$. Für $x = v * \tilde{a}_n$ mit $v \in X_n$ und $\tilde{a}_n \in A_n$ gilt dann rekursiv:

$$\ell(v * \tilde{a}_n) = \begin{cases} \ell_n(\tilde{a}_n) & \text{falls } \ell(v) = 0, \\ \ell(v) - 1 & \text{falls } \ell(v) > 0. \end{cases}$$

Es genügt $z_k \in \mathrm{NE}(g_k) \subseteq \mathrm{NE}(\bar{g}_k) \subseteq \mathrm{CE}(g_k)$, das ist flexibler (E1F). Teilspielperfektion ist nun ein einfaches System von Ungleichungen:

Satz K2D: Schuld und Sühne

Wie in K2C sei $s = \mathrm{CAP}(a, z, \ell)$ die Schuld-und-Sühne-Strategie.

Genau dann gilt $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$, wenn für jeden Spieler $i \in I$ und jede Abweichung $\tilde{a}_n^i \in A_n^i$ die **Abschreckung** ausreichend wirkt gemäß

$$\underbrace{\left[g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) - g_n^i(a_n^i; a_n^{-i})\right]}_{\text{kurzfristiger Vorteil der Abweichung}} \quad \le \quad \underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+\ell_n(\tilde{a}_n)} \left[g_k^i(a_k) - g_k^i(z_k)\right]}_{\text{langfristiger Vorteil der Vereinbarung}}.$$

Bußzeiten $\ell_n(\tilde{a}_n) = \ell_n(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) = \ell_n^i(\tilde{a}_n^i)$ mit $\ell_n^i : A_k^i \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ werden hierbei nur für die Abweichung eines einzigen Spielers $i \in I$ benötigt. Bußzeiten bei Abweichung von zwei oder mehr Spielern sind beliebig. Sie spielen für Gleichgewichte und obige Ungleichungen keine Rolle. Bei drei oder mehr Spielern sollten wir genauer die Stabilität bezüglich Koalitionen / Kartellen / Komplizen / Verschwörungen untersuchen.

Aufgabe: Beweisen Sie Satz K2D nach dem Vorbild von Lemma K2B. Analysieren Sie hierzu genau die Schuld-und-Sühne-Strategie K2C und nutzen Sie das Prinzip J2D der einmaligen Abweichung.

Beweis: Die genannten Ungleichungen sind offensichtlich notwendig: Für Spieler $i \in I$ lohnt sich eine Abweichung von a_n^i zu $\tilde{a}_n^i$, wenn

$$\underbrace{g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k=n+1}^{n+\ell_n(\tilde{a}_n)} g_k^i(z_k)}_{\text{Auszahlung bei Abweichung, danach normal weiter}} \quad > \quad \underbrace{g_n^i(a_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k=n+1}^{n+\ell_n(\tilde{a}_n)} g_k^i(a_k)}_{\text{Auszahlung bei Vereinbarung, danach normal weiter}}.$$

Für jeden Spieler $i \in I$ und jede Abweichung $\tilde{a}_n^i \in A_n^i$ fordern wir daher

$$\underbrace{g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k=n+1}^{n+\ell_n(\tilde{a}_n)} g_k^i(z_k)}_{\text{Auszahlung bei Abweichung, danach normal weiter}} \quad \le \quad \underbrace{g_n^i(a_n^i; a_n^{-i}) + \sum_{k=n+1}^{n+\ell_n(\tilde{a}_n)} g_k^i(a_k)}_{\text{Auszahlung bei Vereinbarung, danach normal weiter}}.$$

Abweichung aus den Nash–Gleichgewichten $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist nie profitabel, denn $g_n^i(\tilde{a}_n^i; z_n^{-i}) \le g_n^i(z_n^i; z_n^{-i})$. Solche Abweichungen werden daher nicht zusätzlich bestraft, die Bußzeit wird nicht zusätzlich verlängert.

☺ Diese Bedingungen sind auch hinreichend nach dem Prinzip J2D der einmaligen Abweichung. Somit ist s ein teilspielperfektes Gleichgewicht!

Beispiel: Der Extremfall $\ell = 0$ bedeutet keinerlei Sanktionen:

$$\mathrm{Stoic}(a) = \mathrm{CAP}(a, z, 0)$$

Was auch immer in der Vergangenheit $x \in X_n$ vorgefallen sein mag, es wird immer wie vereinbart fortgefahren und stoisch $s_x = a_n$ gespielt. Die Spieler nutzen überhaupt nicht ihre Erinnerung an den Spielverlauf.

Genau dann ist s teilspielperfekt, falls $a_n \in \mathrm{NE}(g_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.
☺ Das ist ein allzu einfacher, aber illustrativer Spezialfall von Satz K2D.

Beispiel: Das andere Extrem $\ell = \infty$ ist die Grim-Trigger-Strategie:

$$\mathrm{Grim}(a, z) = \mathrm{CAP}(a, z, \infty)$$

Hierzu definieren wir „$\ell = \infty$“ für $n \in \mathbb{N}$ durch die Funktion $\ell_n : A_n \to \{0, \infty\}$ mit $\ell_n(a_n) = 0$ und $\ell_n(\tilde{a}_n) = \infty$ für alle $\tilde{a}_n \neq a_n$. Das bedeutet: Jede Abweichung führt zur ewigen Verdammnis.

Genau dann ist s teilspielperfekt, wenn die Abschreckung wirkt (K2B).
☺ Satz K2D formuliert dieses nützliche Kriterium allgemein und flexibel.

Schuld und Sühne

„Strafe muss sein.“, behauptet das Sprichwort. Das sagt der Satz nicht! Er erklärt, unter welchen Bedingungen $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$ gilt, aber behauptet nicht, dass die Schuld-und-Sühne-Strategie s die *einzige* Lösung ist.

🙂 Der Satz besteht, nüchtern betrachtet, lediglich aus Ungleichungen, über die hier effizient und geschickt buchgeführt wird. Etwas epischer: Für jeden Spieler $i \in I$ und jeden Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir

den Treuebonus $\tau_n^i := \sum_{k>n} \big[g_k^i(a_k) - g_k^i(z_k) \big]$ und
die Versuchung $\sigma_n^i := \sup\big\{ g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) - g_n^i(a_n) \bigm| \tilde{a}_n^i \in A_n^i \big\}$.

Die Schuld-und-Sühne-Strategie gelingt, mit endlichen Bußzeiten, falls die Treue überwiegt, also $\sigma_n^i < \tau_n^i$ für alle $i \in I$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt.

🙂 Manche Abweichung $\tilde{a}_n^i$ muss gar nicht bestraft werden, nämlich falls

$$g_n^i(\tilde{a}_n^i; a_n^{-i}) - g_n^i(a_n^i; a_n^{-i}) \le 0.$$

Spieler i schadet sich damit selbst, sein selbstverschuldeter Verlust ist Strafe genug. Spezialfall: Ist $a_n \in \mathrm{NE}(g_n)$ ein Nash–Gleichgewicht, so gilt dies für jeden Spieler $i \in I$ und jede Abweichung $\tilde{a}_n^i \in A_n^i$.

Schuld und Sühne

🙂 Die praktische Bedeutung dieser einfachen Rechnung ist immens. Die Schuld-und-Sühne-Strategie steckt in vielen alltäglichen Situationen, von Teamarbeit bis Sport, von Verträgen bis Strafrecht. Sie prägt soziale Normen und Konventionen, viele davon sind unbewusst Gleichgewichte.

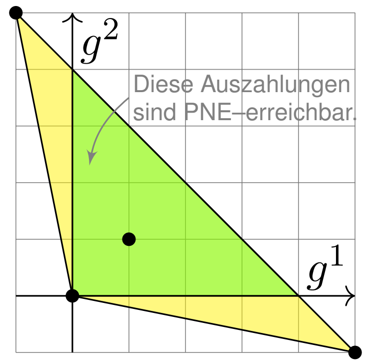
Natürlich ist die Wirklichkeit viel komplizierter als unser simples Modell, doch die mathematische Beschreibung trifft einen wichtigen Kernaspekt: Übereinkünfte und Zusammenarbeit sind nur dann langfristig stabil, wenn Kooperation ausreichend belohnt, Betrug dagegen bestraft wird.

Die Schuld-und-Sühne-Strategie benötigt angemessene Sanktionen: Die Strafe muss streng genug sein, damit Betrug nicht lukrativ wird. Die Strafe darf nachsichtig sein: Zur Teilspielperfektion / Abschreckung genügt es, genau so lange zu bestrafen, bis die Schuld getilgt ist.

Die Schuld ist hier der eigene Vorteil, den der Abweichler erschleicht; es geht nicht um den Schaden, den er damit eventuell anderen zufügt. Die angemessene Strafe garantiert nur Abschreckung, nicht Rache. Zumindest bei rationalen Spielern wird das wirken, und nur das.

Nash Folk Theorem, qualitativ

A \ B	0	1
0	A: 0, B: 0	A: 5, B: -1
1	A: -1, B: 5	A: 1, B: 1



Nash Folk Theorem, qualitative Grundversion

Wir iterieren unendlich oft ein endliches Spiel $g : A = \prod_{i \in I} A^i \to \mathbb{R}^I$, diskontiert mit Faktoren $\delta_i \in [0, 1[$ nahe 1. Gegeben seien hierzu:

Kollektive Erreichbarkeit: Sei $a \in [A]$ eine korrelierte Strategie, also eine Konvexkombination $a = \sum_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda a_\lambda$ gemeinsamer Aktionen $a_\lambda \in A$.

Starke individuelle Rationalität: Sei $z \in \mathrm{NE}(g) \subseteq \mathrm{NE}(\bar{g}) \subseteq \mathrm{CE}(g)$ ein Gleichgewicht mit $g(a) > g(z)$, also $g^i(a) > g^i(z)$ für jeden Spieler $i \in I$.

Dann ist die Auszahlung $g(a) \in \mathbb{R}^I$ teilspielperfekt realisierbar.

Nash Folk Theorem, qualitativ

Folk Theoreme und ganz allgemein Gleichgewichte sagen uns nicht, wie das Spiel verlaufen *muss*, sondern zeigen, wie es verlaufen *kann*. Sie machen Existenzaussagen: Unter den genannten Bedingungen existiert eine Strategie s, mit der sich alle Spieler besser stellen können als permanente Wiederholung von Nash–Lösungen des Stufenspiels.

Der Name „Folk“ rührt daher, dass sie seit Nash unter Spieltheoretikern bekannt waren, aber lange nur als „Folklore“ mündlich tradiert wurden.

Ihre Anwendung liegt in der Modellierung langfristiger Interaktionen: Verträge, Teamarbeit, soziale Bindungen, Ehe, Kindererziehung, ... Eine Vereinbarung ist nur dann rational und glaubwürdig, wenn sie ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist. Viele Strategien sind uns aus dem Alltag vertraut und werden hier mathematisch erklärt und quantifiziert.

Der vorige Satz ist nur eine qualitative Vorschau als erster Überblick, noch nicht präzise zu $\delta_i \nearrow 1$ und keinesfalls explizit zu den Strategien. Die folgende quantitative Version ist genauer und liefert alle Details. Beide stützen sich zur Vereinfachung auf einen Grundzustand z.

Satz K2E: Nash Folk Theorem, quantitative Grundversion

Sei $g : A = \prod_{i \in I} A^i \to \mathbb{R}^I$ ein endliches Spiel, $a = \sum_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda a_\lambda \in [A]$ eine korrelierte Strategie und $z \in \mathrm{NE}(g) \subseteq \mathrm{NE}(\bar{g}) \subseteq \mathrm{CE}(g)$ ein Gleichgewicht.

Jeden Spieler $i \in I$ lockt der Treuebonus $\tau_i := g^i(a) - g^i(z) > 0$ und die Versuchung $\sigma_i := \max\{\, g^i(\tilde{a}^i; a_\lambda^{-i}) - g^i(a_\lambda^i; a_\lambda^{-i}) \mid \tilde{a}^i \in A^i,\ \lambda \in \Lambda \,\} \ge 0$.

Wir wiederholen das Spiel g unendlich oft mit diskontierter Auszahlung $u : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^I : u^i(x) = (1 - \delta_i) \sum_{k=0}^{\infty} \delta_i^k g^i(x_k)$. Dann ist die Auszahlung $g(a) \in \mathbb{R}^I$ durch eine teilspielperfekte Strategie $s \in S$ realisierbar:

(1) Probabilistisch mit einem öffentlich sichtbaren **Zufallsgenerator**: Für jeden Spieler $i \in I$ muss Treue überwiegen gemäß $\delta_i \ge \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \tau_i} =: \underline{\delta}_i$.

(2) Ohne öffentlichen Zufallsgenerator durch **rationale Approximation**: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein Strategievektor $s \in S$ und für jeden Spieler $i \in I$ eine Geduldsschwelle $\underline{\delta}_i \in [0, 1[$, sodass für alle $\delta_i \in [\underline{\delta}_i, 1[$ gilt: Der Strategievektor s ist teilspielperfekt und erfüllt $|u_\emptyset^i(s) - g^i(a)| < \varepsilon$.

Die qualitative Version gibt einen ersten Überblick, die quantitative Version präzisiert die Daten, Voraussetzungen und Folgerungen. Die Konstruktion der geforderten Gleichgewichte erfolgt im Beweis, den Sie hier ausdrücklich als Teil des Satzes verstehen sollten.

Das Stufenspiel $g : A = \prod_{i \in I} A^i \to \mathbb{R}^I$ ist einfach gebaut, das unendlich wiederholte Spiel $\Gamma = (1 - \delta) \prod_{k \in \mathbb{N}} \delta^k g$ hingegen ist erstaunlich komplex: Schon der Strategieraum $S(\Gamma) = \{s : X^\circ \to A\}$ ist phantastisch groß. Darin ist meist auch $\mathrm{PNE}(\Gamma)$ überabzählbar, somit unübersichtlich.

Nashs Folk Theorem verschafft uns hierzu einen praktikablen Überblick, indem wir nicht die Menge $\mathrm{PNE}(\Gamma)$ aller Gleichgewichte betrachten, sondern vereinfachend nur ihr Bild unter der Auszahlungsabbildung $u_\emptyset : S \to \mathbb{R}^I$, also die möglichen Gleichgewichtsauszahlungen in $\mathbb{R}^I$.

Diese geschickte Sichtweise trennt die beiden grundlegenden Fragen: 1. *Was* können die Spieler erreichen? 2. *Wie* können sie es erreichen? Praktisch: Die Spieler einigen sich zuerst auf ein gemeinsames Ziel. Anschließend vereinbaren sie sorgsam eine gemeinsame Realisierung.

Nash Folk Theorem mit öffentlichem Zufallsgenerator

Aufgabe: Lernen, verstehen und beweisen Sie den Satz, indem Sie
(a) explizit geeignete teilspielperfekte Gleichgewichte konstruieren und
(b) die erforderlichen Gleichgewichts-Ungleichungen nachrechnen.

Beweis: (1a) Zu Beginn jeder Runde n wird öffentlich ein Los λ_n aus dem WRaum $(\Lambda, \mathbf{P})$ gezogen mit den gegebenen Wkten $\mathbf{P}(\{\lambda\}) = p_\lambda$. Damit liegt die gesamte Historie $(\lambda_0, x_0, \lambda_1, x_1, \dots, \lambda_{n-1}, x_{n-1}, \lambda_n)$ vor. Vereinbarung: Gilt $x_k = a_{\lambda_k}$ für alle $k < n$, dann spiele a_{λ_n}, sonst z.

(1b) Lohnt sich eine Abweichung von dieser Vereinbarung?

$$\underbrace{(1-\delta_i)\Big[\delta_i^n g^i(\tilde{a}^i; a_{\lambda_n}^{-i}) + \textstyle\sum_{k>n} \delta_i^k g^i(z)\Big]}_{\text{Auszahlung bei Abweichung}} \;\le\; \underbrace{(1-\delta_i) \textstyle\sum_{k\ge n} \delta_i^k g^i(a)}_{\text{Auszahlung bei Vereinbarung}}$$

Umgestellt können wir dies leicht interpretieren:

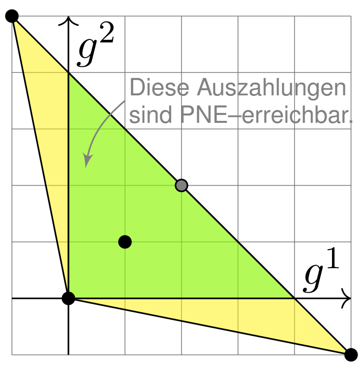
$$\underbrace{(1-\delta_i)\delta_i^n \Big[g^i(\tilde{a}^i; a_{\lambda_n}^{-i}) - g^i(a_{\lambda_n}^i; a_{\lambda_n}^{-i})\Big]}_{\text{kurzfristiger Vorteil der Abweichung}} \;\le\; \underbrace{(1-\delta_i) \textstyle\sum_{k>n} \delta_i^k \Big[g^i(a) - g^i(z)\Big]}_{\text{langfristiger Vorteil der Vereinbarung}}$$

Dies ist äquivalent zu $(1-\delta_i)\sigma_i \le \delta_i \tau_i$, also $\delta_i \ge \frac{\sigma_i}{\sigma_i+\tau_i} =: \underline{\delta}_i \in [0,1[$.

Nash Folk Theorem mit öffentlichem Zufallsgenerator

Beispiel: Wir iterieren unendlich oft das folgende Spiel $g : \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$:

A \ B	0	1
0	A: 0, B: 0	A: 5, B: -1
1	A: -1, B: 5	A: 1, B: 1



Aufgabe: Wie können die Spieler die Auszahlung $(2,2)$ erreichen?

Erste Lösung: Stochastisch mit einem öffentlichen Zufallsgenerator. Die Spieler vereinbaren die korrelierte Strategie $a = \frac{1}{2}\cdot(0,1) + \frac{1}{2}\cdot(1,0)$ mit $g(a) = (2,2)$ und den Grundzustand $z = (0,0)$ mit $g(z) = (0,0)$. Treuebonus $\tau_i = 2$, Versuchung $\sigma_i = 1$, also $\underline{\delta}_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_i+\tau_i} = 1/3$.

Zweite Lösung: Eine Hand wäscht die andere für $\underline{\delta}_i := 1/5 \le \delta_i \nearrow 1$. Anschaulich plausibel: Die Vorleistung -1 wird sofort belohnt mit $5\delta \ge 1$. Zufall erfordert etwas mehr Geduld: Die Vorleistung -1 wird belohnt durch die Erwartung $2(\delta + \delta^2 + \dots) = 2\delta/(1-\delta) \ge 1$, also $\delta \ge 1/3$.

Nash Folk Theorem mit rationaler Approximation

Beweis: (2) Wir beweisen eine genauere Aussage für rationale Wkten, also $p_\lambda = q_\lambda/N$ mit Zählern $q_\lambda \in \mathbb{N}$ und gemeinsamem Nenner $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Hierzu wählen wir eine Folge $f : \mathbb{N} \to \Lambda$ mit einer Periode der Länge N und den richtigen Häufigkeiten $q_\lambda = \sharp\{\, k \in \{0, 1, \dots, N-1\} \mid f(k) = \lambda \,\}$. Wir definieren damit $\alpha_k = a_{f(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ als den „rechten Pfad".

Zu Beginn der Runde n kennen die Spieler die Historie $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. Vereinbarung: Gilt $x_k = \alpha_k$ für alle $k < n$, dann spiele α_n, sonst spiele z.

$$\underbrace{(1-\delta_i)\big[\delta_i^n g^i(\tilde{a}^i; \alpha_n^{-i}) + \textstyle\sum_{k>n} \delta_i^k g^i(z)\big]}_{\text{Auszahlung bei Abweichung}} \;\leq\; \underbrace{(1-\delta_i) \textstyle\sum_{k\geq n} \delta_i^k g^i(\alpha_n)}_{\text{Auszahlung bei Vereinbarung}}$$

Umgestellt können wir dies leicht interpretieren:

$$\underbrace{(1-\delta_i)\delta_i^n \big[g^i(\tilde{a}^i; \alpha_n^{-i}) - g^i(\alpha_n^i; \alpha_n^{-i})\big]}_{\text{kurzfristiger Vorteil der Abweichung}} \;\leq\; \underbrace{(1-\delta_i) \textstyle\sum_{k>n} \delta_i^k \big[g^i(\alpha_n) - g^i(z)\big]}_{\text{langfristiger Vorteil der Vereinbarung}}$$

Mittelung: Für $\delta_i \nearrow 1$ geht die rechte Seite gegen $g^i(a) - g^i(z) = \tau_i$. Die Bedingung ist äquivalent zu $(1-\delta_i)\sigma_i \leq \delta_i \tau_i$, also $\delta_i \geq \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \tau_i}$. Für $\delta_i \nearrow 1$ gilt die Approximation $u^i_\emptyset(s) \to g^i(a)$, wie gewünscht. $\boxed{\text{QED}}$

Nash Folk Theorem mit rationaler Approximation

Zur Vereinfachung des Beweises belasse ich es in der Konstruktion (2) bei der vagen, aber bequemen Formulierung als Grenzwert „$\delta_i \nearrow 1$": Für jedes δ_i hinreichend nahe an 1 sind alle Ungleichungen erfüllt. Ab welcher Geduldsschwelle $\delta_i \geq \underline{\delta}_i$ dies eintritt, muss im Einzelfall nachgerechnet werden. Es hängt von der gewählten Folge f ab!

Das ist ganz allgemein der geniale Trick der Grenzwertrechnung: Explizite Fehlerschranken sind informativ, aber leider auch mühsam. Wenn sie nicht gefordert sind, verwalten wir Fehlerschranken implizit und verstecken sie geschickt in der Epsilontik. Die so erarbeiteten Aussagen sind einfacher, nach wie vor korrekt, aber weniger informativ.

Wie genau benötigen wir es hier? Stellen Sie sich vor, Alice und Bob suchen eine präzise Abmachung, und diese soll nachweislich stabil sein. Die Fortsetzungswkt betrage $\delta = 1/2$ von Runde zu Runde. Beide Spieler prüfen sorgsam, ob ihre Abmachung diesen Anforderungen standhält. Die Beschwörung „$1/2$ gehe gegen 1" ist natürlich unsinnig, wir müssen konkrete Ungleichungen nachweisen, siehe nachfolgende Übungen.

Rationale Approximation: explicit is beautiful.

Wir iterieren unendlich oft das Spiel $g : A = \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$:

A \ B	0	1
0	0, 0	α, β
1	β, α	1, 1

mit Konstanten $\alpha > 1 > \delta > 0 > \beta$
hier $\alpha = 5$ und $\beta = -1$ und $\delta \nearrow 1$.

Die diskontierte Auszahlung ist
$u(x) = (1-\delta)\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n g(x_n)$.

Alice und Bob suchen eine gemeinsame Strategie, die die Auszahlung $w = {}^3\!/_5(\alpha,\beta) + {}^2\!/_5(\beta,\alpha) = ({}^{13}\!/_5, {}^7\!/_5)$ teilspielperfekt gut approximiert.

Aufgabe: (1) Wir identifizieren jeden Vektor $a = (a_0,\dots,a_4) \in A^5$ mit seiner 5-periodischen Fortsetzung $a \in A^{\mathbb{N}}$. Welche (zehn!) Elemente aus A^5 führen zu den gewünschten Auszahlungen, also $u(a) \to w$ für $\delta \nearrow 1$?

(2) Sei $z = 00$. Bestimmen Sie für $s = \mathrm{Grim}(a,z)$ das optimale $\underline{\delta}$, sodass s für alle $\delta \ge \underline{\delta}$ teilspielperfekt ist (numerisch, auf 10^{-2} aufgerundet).

(3) Für ${}^8\!/_{10} \le \delta < 1$ sind alle zehn Strategiepaare s teilspielperfekt. Welche davon approximieren das gewünschte Ziel w am besten?

Rationale Approximation: explicit is beautiful.

(1) Die Auszahlungen der vereinbarten Aktionenfolge $a \in A^{\mathbb{N}}$ sind

$$\begin{aligned} u(a) &= (1-\delta)\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n g(a_n) \\ &= \tfrac{1-\delta}{1-\delta^5}\big[g(a_0) + \delta g(a_1) + \delta^2 g(a_2) + \delta^3 g(a_3) + \delta^4 g(a_4)\big] \\ &\to \tfrac{1}{5}\big[g(a_0) + g(a_1) + g(a_2) + g(a_3) + g(a_4)\big] \quad \text{für } \delta \nearrow 1. \end{aligned}$$

Unter den $4^5 = 1024$ Möglichkeiten sehen wir sofort 10 Lösungen:

$$\begin{aligned} &s_0 : AAABB = 01\,01\,01\,10\,10, && s_5 : AABAB = 01\,01\,10\,01\,10, \\ &s_1 : AABBA = 01\,01\,10\,10\,01, && s_6 : ABABA = 01\,10\,01\,10\,01, \\ &s_2 : ABBAA = 01\,10\,10\,01\,01, && s_7 : BABAA = 10\,01\,10\,01\,01, \\ &s_3 : BBAAA = 10\,10\,01\,01\,01, && s_8 : ABAAB = 01\,10\,01\,01\,10, \\ &s_4 : BAAAB = 10\,01\,01\,01\,10, && s_9 : BAABA = 10\,01\,01\,10\,01. \end{aligned}$$

Wir notieren mit $A = 01$ und $B = 10$, ob Alice oder Bob im Vorteil ist. Weitere Lösungen gibt es nicht! Für $\sum_{n=0}^{4} g^1(a_n) + g^2(a_n) = 20$ muss $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{01, 10\}$ gelten. Um das Ziel $u(a) \to w$ für $\delta \nearrow 1$ zu erreichen, muss genau dreimal 01 und zweimal 10 vorkommen.

Rationale Approximation: explicit is beautiful.

(2) Wir betrachten $s_0 : AAABB$ als erste der zehn Vereinbarungen. Verlauf ohne/mit Abweichung und zugehörige Auszahlung:

$$\begin{aligned} 01\,01\,01\,10\,10\ldots &\mapsto \tfrac{1-\delta}{1-\delta^5}\big[(\delta^0+\delta^1+\delta^2)(\alpha,\beta)+(\delta^3+\delta^4)(\beta,\alpha)\big] \\ \underline{1}1\,00\,00\,00\,00\ldots &\mapsto \hfill (1-\delta)(1,1) \\ 0\underline{0}\,00\,00\,00\,00\ldots &\mapsto \hfill (0,0) \end{aligned}$$

Wir erhalten daraus die beiden notwendigen Ungleichungen

$$\begin{aligned} (1+\delta+\delta^2)\alpha+(\delta^3+\delta^4)\beta &\ge 1-\delta^5, \\ (1+\delta+\delta^2)\beta+(\delta^3+\delta^4)\alpha &\ge 0. \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung ist für $\alpha = 5$ und $\beta = -1$ immer erfüllt, denn

$$(1+\delta+\delta^2)\alpha+(\delta^3+\delta^4)\beta \ge \alpha+2\beta = 3 \ge 1-\delta^5.$$

Das ist anschaulich plausibel, denn hier ist Alice offensichtlich im Vorteil. Wir müssen uns also nur noch um die zweite Ungleichung kümmern: Bob geht (dreifach!) in Vorleistung und muss dafür belohnt werden.

Rationale Approximation: explicit is beautiful.

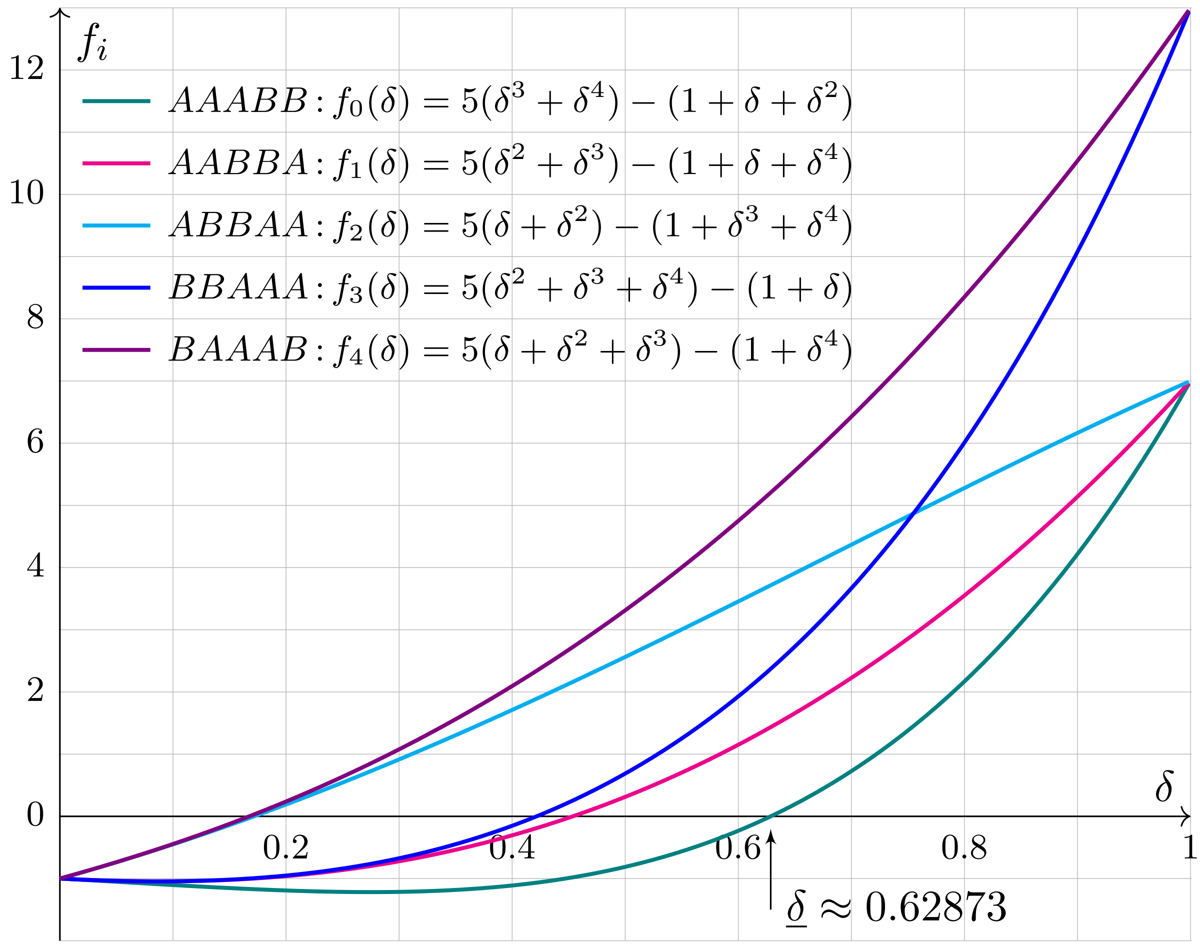
Wir betrachten nun die Grim-Trigger-Strategie zu allen fünf zyklischen Umordnungen $AAABB$, $AABBA$, $ABBAA$, $BBAAA$, $BAAAB$, denn diese treten gegenseitig als Strategien in Teilspielen auf. Wir erhalten zehn Ungleichungen, von denen jede zweite automatisch erfüllt ist.

Die fünf relevanten Ungleichungen $f_i(\delta) \ge 0$ schreiben wir explizit aus. Die folgende Abbildung zeigt die Graphen von $f_i(\delta)$ für $0 \le \delta \le 1$. Graphisch oder numerisch finden wir den kritischen Wert $\underline{\delta} \approx 0.62873$. Für $0.63 \le \delta \le 1$ sind alle Ungleichungen erfüllt und s teilspielperfekt.

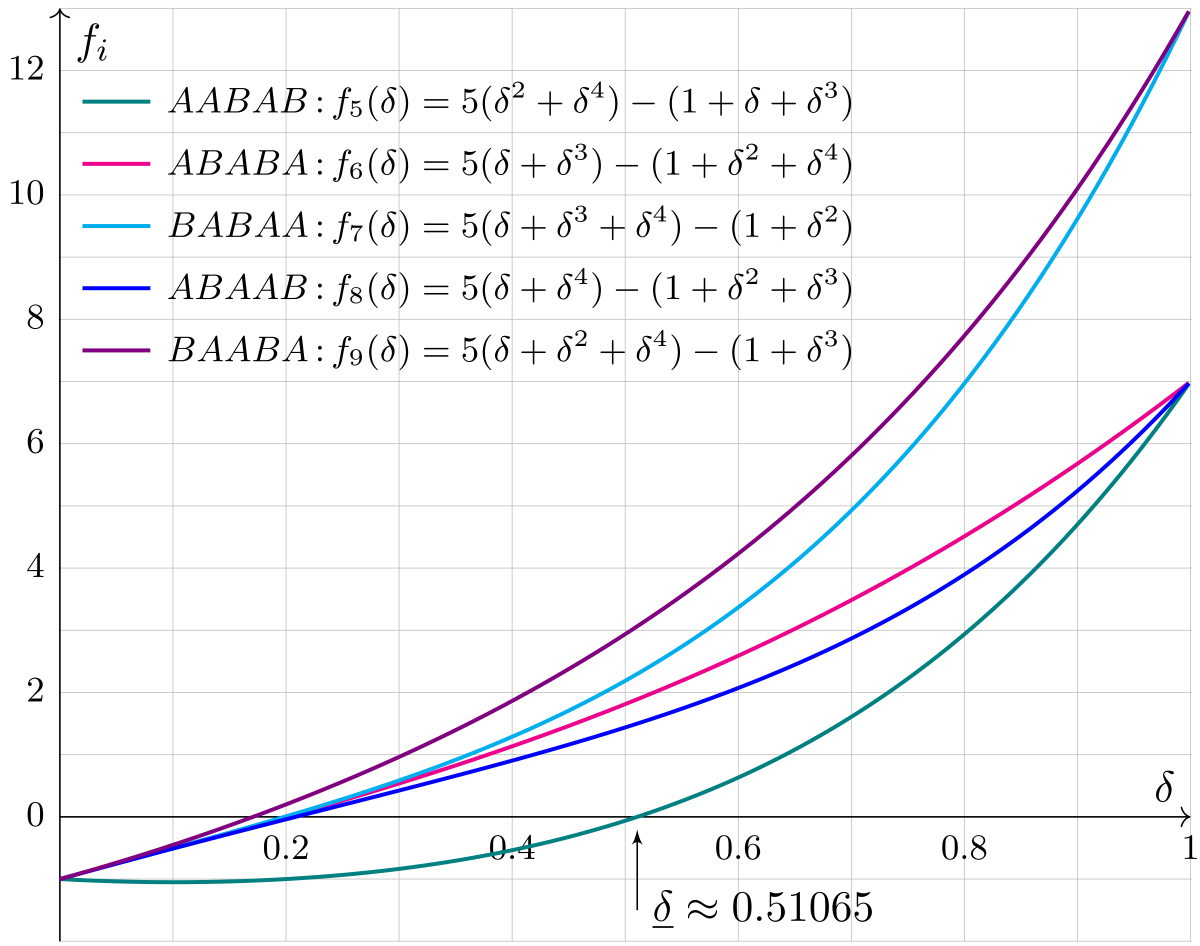
Genauso verfahren wir im zweiten Fall mit den fünf zyklischen Umordnungen $AABAB$, $ABABA$, $BABAA$, $ABAAB$, $BAABA$. Graphisch oder numerisch erhalten wir den kritschen Wert $\underline{\delta} \approx 0.51065$. Für $0.52 \le \delta \le 1$ sind alle Ungleichungen erfüllt und s teilspielperfekt.

(3) Zur Genauigkeit vergleichen wir nur Alice' Auszahlungen $v_i(\delta)$. Für $0.8 \le \delta \nearrow 1$ gilt $v_i(\delta) \to 13/5$. Graphisch konvergiert $v_6 \searrow 13/5$ am schnellsten, gefolgt von $v_4 \nearrow 13/5$; diese dominieren alle anderen. Die Asymptotik kann man nun geduldig nachrechnen. (Übung!)

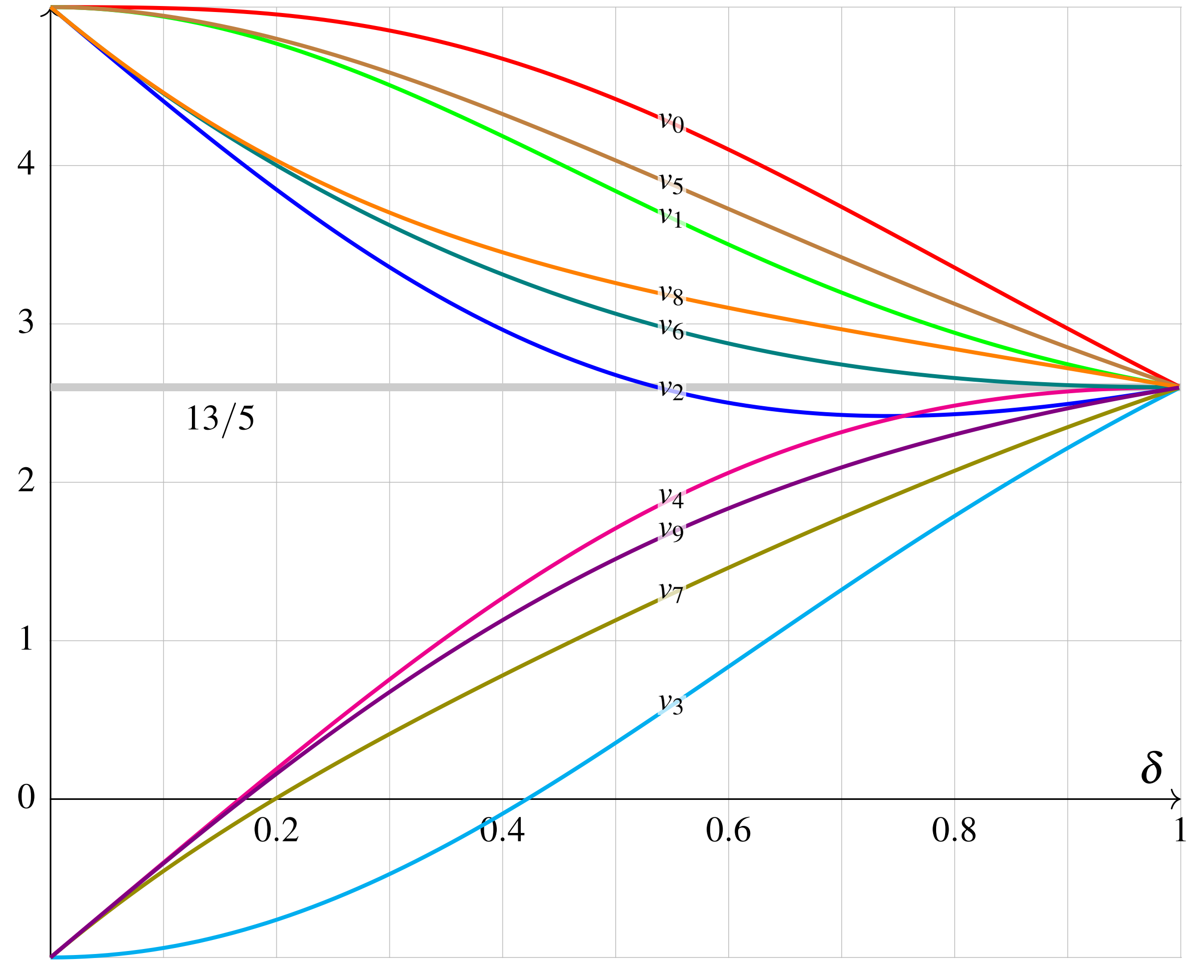
Rationale Approximation: explicit is beautiful.



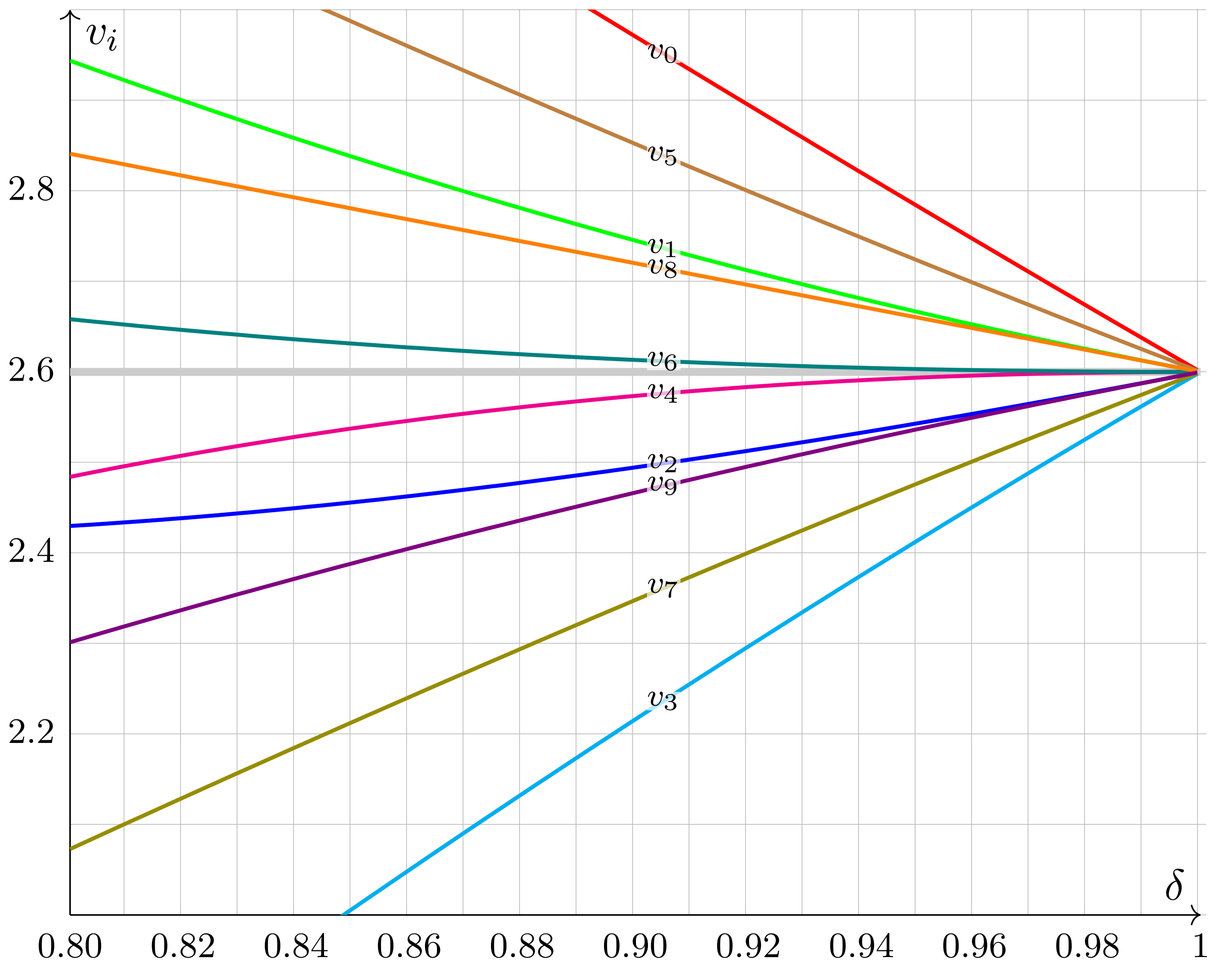
Rationale Approximation: explicit is beautiful.



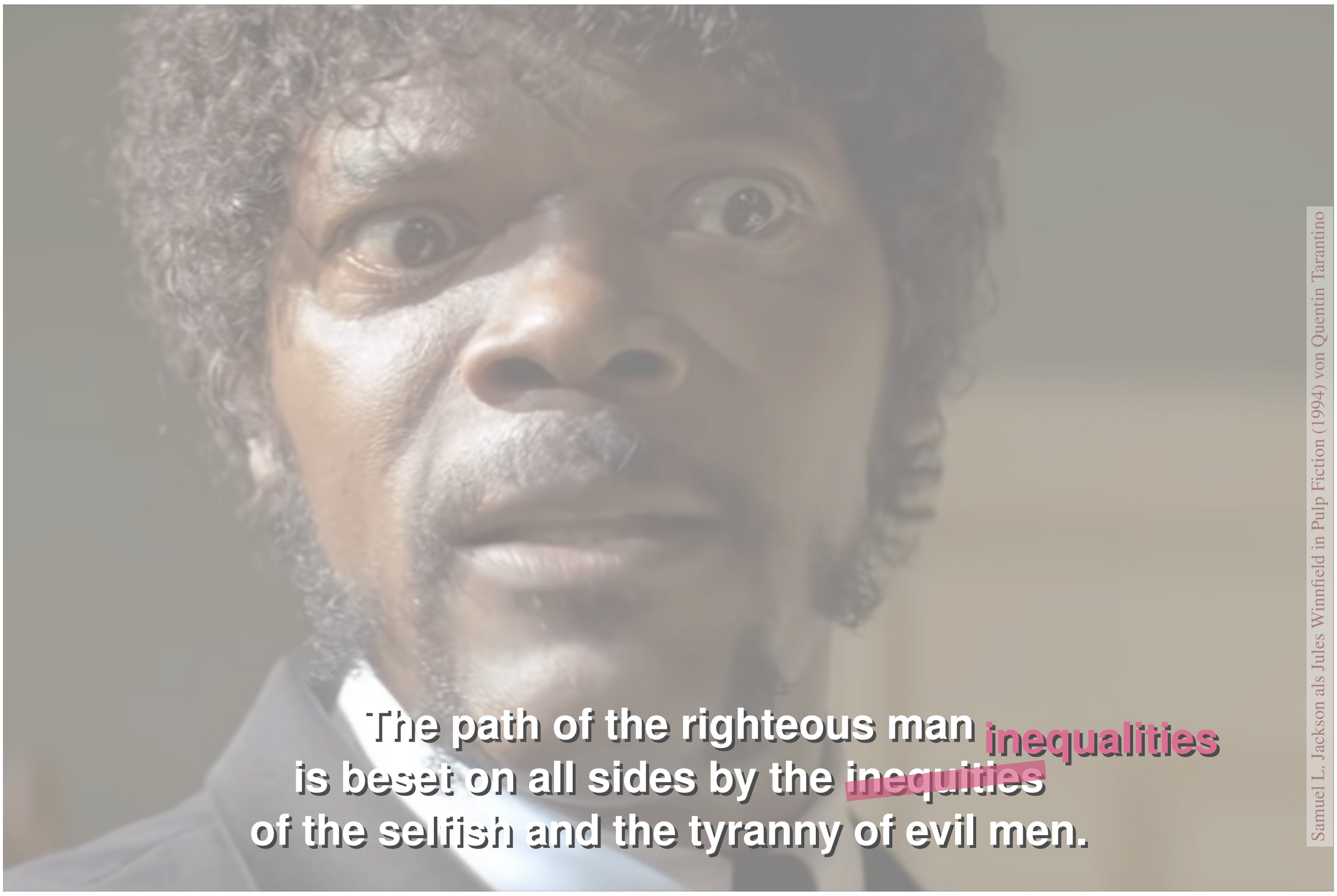
Rationale Approximation: explicit is beautiful.



Rationale Approximation: explicit is beautiful.



Nash Folk Theorem im Film



Nash Folk Theorem, allgemeine Idee

Durch dieses Kapitel zieht sich eine simple Grundidee als roter Faden: Die Spieler vereinbaren ein gewünschtes Verhalten zum allseitigen Vorteil und interpretieren diesen „rechten Pfad“ als soziale Norm. Zugleich vereinbaren sie Sanktionen im Falle von Abweichungen. Die Vereinbarung ist genau dann stabil, wenn sie teilspielperfekt ist, also kein Spieler zu keinem Zeitpunkt eine Abweichung lukrativ findet.

Hierzu betone ich nochmals die Voraussetzungen unseres Modells:

- Vollständige Information über Aktionen und Auszahlungen.
- Alle bisherigen Aktionen sind offen und für alle Spieler sichtbar.

In realen Anwendungen ist dies meist nicht erfüllt: Die Spieler kennen nicht die gegenseitigen Nutzenfunktionen (individuelle Bewertungen), und ihre Aktionen können verdeckt sein und somit kaum nachprüfbar.

In einigen wichtigen Anwendungen sind diese Voraussetzungen jedoch weitgehend erfüllt, etwa bei langfristigen Verträgen zwischen Lieferant und Käufer: Der Vertrag regelt hinreichend genau die gegenseitigen Forderungen und Verpflichtungen sowie Konventionalstrafen.

Nash Folk Theorem, allgemeine Formulierung

Welche Auszahlungen $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$ sind teilspielperfekt realisierbar? Nashs Folk Theorem nennt zwei Kriterien, zusammen hinreichend.

Die **kollektive Erreichbarkeit** ist offensichtlich auch notwendig. An dieser Bedingung können wir also nichts weiter optimieren.

Die **individuelle Rationalität** hingegen können wir verbessern, indem wir den Grundwert $g^i(z)$ mit $z \in \mathrm{NE}(g) \subseteq \mathrm{NE}(\bar{g}) \subseteq \mathrm{CE}(g)$ reduzieren.

Jeder Spieler i kann für sich folgenden **Sicherheitswert** garantieren:

$$\mathrm{val}^i(g) := \max_{a^i \in A^i} \min_{a^{-i} \in A^{-i}} g^i(a^i; a^{-i})$$

Seine Gegenspieler können ihm schlimmstenfalls folgendes androhen:

$$\Theta^i(g) := \min_{a^{-i} \in A^{-i}} \max_{a^i \in A^i} g^i(a^i; a^{-i})$$

Allgemein gilt „Maximin $\le$ Minimax“ (Lemma E2B), also $\mathrm{val}^i(g) \le \Theta^i(g)$. Diese Drohung lässt sich tatsächlich glaubwürdig implementieren, das ist die Aussage des folgenden, allgemeinen Satzes.

Nash Folk Theorem, allgemeine Formulierung

Satz K2F: Nash Folk Theorem, allgemeine Formulierung

Wir iterieren unendlich oft ein endliches Spiel $g : A = \prod_{i \in I} A^i \to \mathbb{R}^I$, diskontiert mit Faktoren $\delta_i \in [0, 1[$ nahe 1. Gegeben seien hierzu:

Kollektive Erreichbarkeit: Sei $a \in [A]$ eine korrelierte Strategie, also eine Konvexkombination $a = \sum_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda a_\lambda$ reiner Aktionsvektoren $a_\lambda \in A$.

Starke individuelle Rationalität: Für jeden Spieler $i \in I$ liegt $g^i(a)$ über dem Drohpunkt $\Theta^i(g) := \min_{a^{-i} \in A^{-i}} \max_{a^i \in A^i} g^i(a^i; a^{-i})$.

Dann ist die Auszahlung $g(a) \in \mathbb{R}^I$ teilspielperfekt realisierbar.

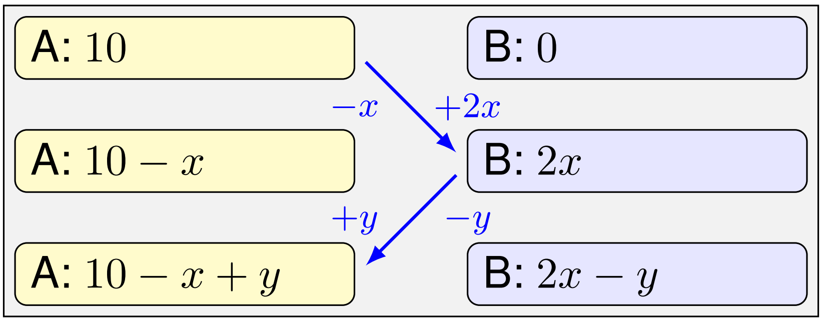
Für jedes Nash–Gleichgewicht $z \in \mathrm{NE}(\bar{g})$ gilt $g^i(z) \ge \Theta^i(g)$. (Warum?) Unsere Grundversion wird hier also verallgemeinert (und meist strikt).

Teilspielperfekte Realisierungen werden dadurch deutlich komplizierter: Abweichungen müssen bestraft werden, wie zuvor, doch die Bestrafung ermöglicht Abweichungen, und auch diese müssen bestraft werden…

Zur Ausführung siehe D. Fudenberg, J. Tirole: *Game Theory*, Kapitel 5 und M.J. Osborne, A. Rubinstein: *A Course in Game Theory*, Kapitel 8.

Das Spiel *Hin-und-Rück*

Wir erinnern an unser Experiment aus der Einführung (Kapitel A): Zwei Spieler A und B interagieren anonym über eine Datenleitung. Sie (er)kennen sich nicht und begegnen sich vermutlich nie wieder.



Zu Beginn erhält Spieler A ein Guthaben von 10€, Spieler B nur 0€.

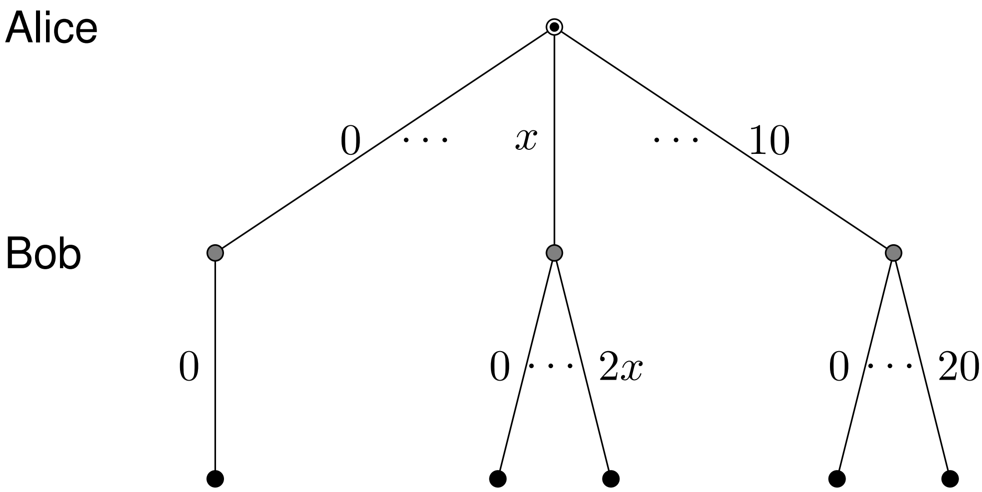
Erster Zug: A schickt an B einen frei wählbaren Betrag $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$. Dieser Betrag x wird bei A abgebucht und bei B doppelt gutgeschrieben.

Zweiter Zug: B schickt an A davon einen Betrag $y \in \{0, 1, \dots, 2x\}$. Dieser Betrag y wird bei B abgebucht und bei A gutgeschrieben.

Damit endet das Spiel und jedem wird sein Kontostand ausbezahlt.

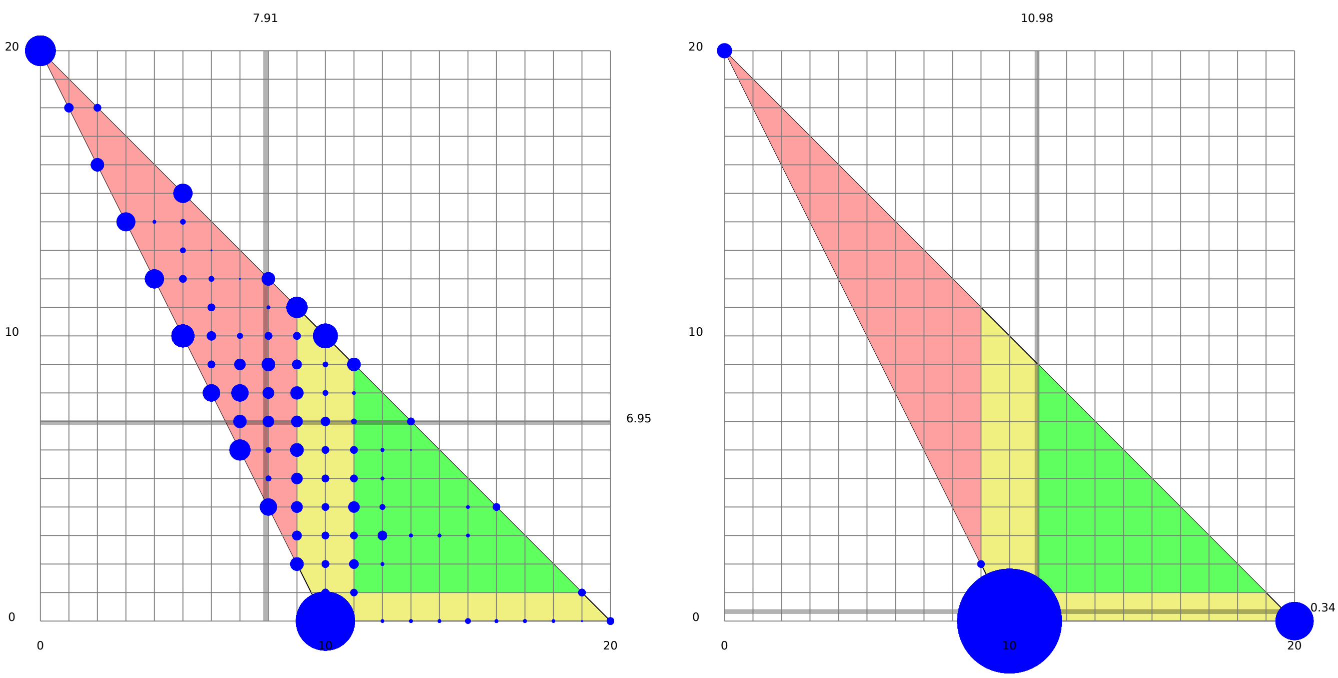
Das Spiel *Hin-und-Rück*

Wir können dieses Spiel nun übersichtlich als Spielbaum darstellen:



$X = \emptyset \sqcup \{\, x \in \mathbb{Z} \mid 0 \le x \le 10 \,\} \sqcup \{\, (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \le x \le 10,\ 0 \le y \le 2x \,\}$
Auszahlung $u(x, y) = (10 - x + y, 2x - y)$ auf terminalen Zuständen.
Aktionen / Strategien für Alice sind $s^1 \in S^1 = A^1 = \{0, 1, \dots, 10\}$.
Im Zustand $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$ hat Bob die Aktionen $A^2_x = \{0, 1, \dots, 2x\}$.
Strategien für Bob sind demnach Tupel der Form $s^2 \in S^2 = \prod_{x \in A^1} A^2_x$, also Abbildungen $s^2 : \{0, 1, \dots, 10\} \to \mathbb{Z}$ mit $0 \le s^2(x) \le 2x$.
Auszahlung $u : S^1 \times S^2 : u(s^1, s^2) = (10 - s^1 + s^2(s^1), 2s^1 - s^2(s^1))$.

Das Spiel *Hin-und-Rück*



Sie sehen hier zwei Momentaufnahmen der Studentenpopulation vom April 2018, und zwar die erste und fünfte Durchführung dieses Spiels.

Welches Spielverhalten erwarten Sie bei un/endlicher Wiederholung? Varianten: (a) ohne Rollenwechsel und (b) mit alternierenden Rollen.

Das Spiel *Hin-und-Rück*

Das ist ein einfaches aber typisches Modell wirtschaftlichen Handelns.

Wir können die Interaktion als **Kredit und Rückzahlung** interpretieren: Spieler A verleiht einen Teil seines Geldes, Spieler B erwirtschaftet damit eine Verdopplung und zahlt zurück: Tilgung plus Zinsen?

Ebenso können wir es als **Online-Handel** interpretieren: Spieler A geht in Vorleistung und verschickt die Ware, für Spieler B ist diese doppelt so nützlich / wertvoll, schließlich bezahlt B nach seinem eigenen Ermessen.

Interessanterweise fehlen hier alle üblichen Kontrollmechanismen.

Bei wiederholtem Spiel entsteht eine **soziale Kontrolle** von selbst. Bekannte soziale Normen wie „Ehrlichkeit“ und „Vertrauen“ sind im iterierten Spiel stabil und führen tatsächlich zu beiderseitigem Vorteil. Im einfachen oder endlich wiederholten Spiel hingegen gilt dies nicht!

Nashs Folk Theorem zeigt uns **Möglichkeiten**. Spieler A muss am Ende mindestens 10€ erhalten, eventuell plus Zinsen. Wie hoch ein „fairer“ Zins sein sollte, sagt uns der Satz nicht. Nullzins oder Wucher sind gleichermaßen möglich. Der Zins ist Teil der sozialen Konvention.

Hintereinanderausführung (Klausur 2018)

Aufgabe: Seien Γ_1 und Γ_2 (normale oder extensive) endliche Spiele mit vollständiger Information und $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$ ihre Hintereinanderhängung.

(1) Folgt aus $\sharp\,\mathrm{PNE}(\Gamma_1) = n$ und $\sharp\,\mathrm{PNE}(\Gamma_2) = 1$ immer $\sharp\,\mathrm{PNE}(\Gamma) = n$?

(2) Folgt aus $\sharp\,\mathrm{PNE}(\Gamma_1) = 1$ und $\sharp\,\mathrm{PNE}(\Gamma_2) = n$ immer $\sharp\,\mathrm{PNE}(\Gamma) = n$?

(3) Wie hängen $\mathrm{PNE}(\Gamma_1 * \Gamma_2)$ und $\mathrm{PNE}(\Gamma_1) * \mathrm{PNE}(\Gamma_2)$ zusammen?

Lösung: (1) Ja. Das folgt sofort aus dem Satz von Zermelo (J1D): Rückwärtsinduktion findet alle Gleichgewichte, die n offensichtlichen.

(2) Nein. Sie kennen bereits einige konkrete Gegenbeispiele.
Die nächste Aufgabe fragt nach einer minimalen Konstruktion.

(3) Wir erinnern an Satz K1C: Allgemein gilt

$$\mathrm{PNE}(\Gamma_0 * \Gamma_1 * \cdots * \Gamma_N) \supseteq \mathrm{PNE}(\Gamma_0) * \mathrm{PNE}(\Gamma_1) * \cdots * \mathrm{PNE}(\Gamma_N).$$

Haben $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ jeweils nur ein teilspielperfektes Gleichgewicht, so gilt Gleichheit. Andernfalls kann die Inklusion „$\supsetneq$“ strikt sein.

Hintereinanderausführung und Gleichgewichte

Aufgabe: (1) Konstruieren Sie Spiele $g_1, g_2 : \{0,1\}^2 \to \{0,1,2,3\}^2$ mit $\mathrm{NE}(g_1) = \{00\}$ und $\mathrm{NE}(g_2) = \{00, 11\}$, aber $\sharp\,\mathrm{PNE}(g_1 * g_2) \geq 3$.

(2) Zeichnen Sie den Spielbaum $\Gamma = g_1 * g_2$ mit allen Informationen.

(3) Bestimmen Sie explizit die Menge $\mathrm{PNE}(\Gamma)$ aller Gleichgewichte. Welche Auszahlungen können teilspielperfekt erreicht werden?

(4) Welchen Auszahlungzuwachs können Sie maximal erzielen im Vergleich von $\mathrm{PNE}(g_1 * g_2)$ und $\mathrm{NE}(g_1) * \mathrm{NE}(g_2)$?

Lösung: (1) Hier ist ein einfach gebautes Beispiel:

$g_1 =$

A \ B	0	1
0	1 / 1	3 / 0
1	0 / 3	2 / 2

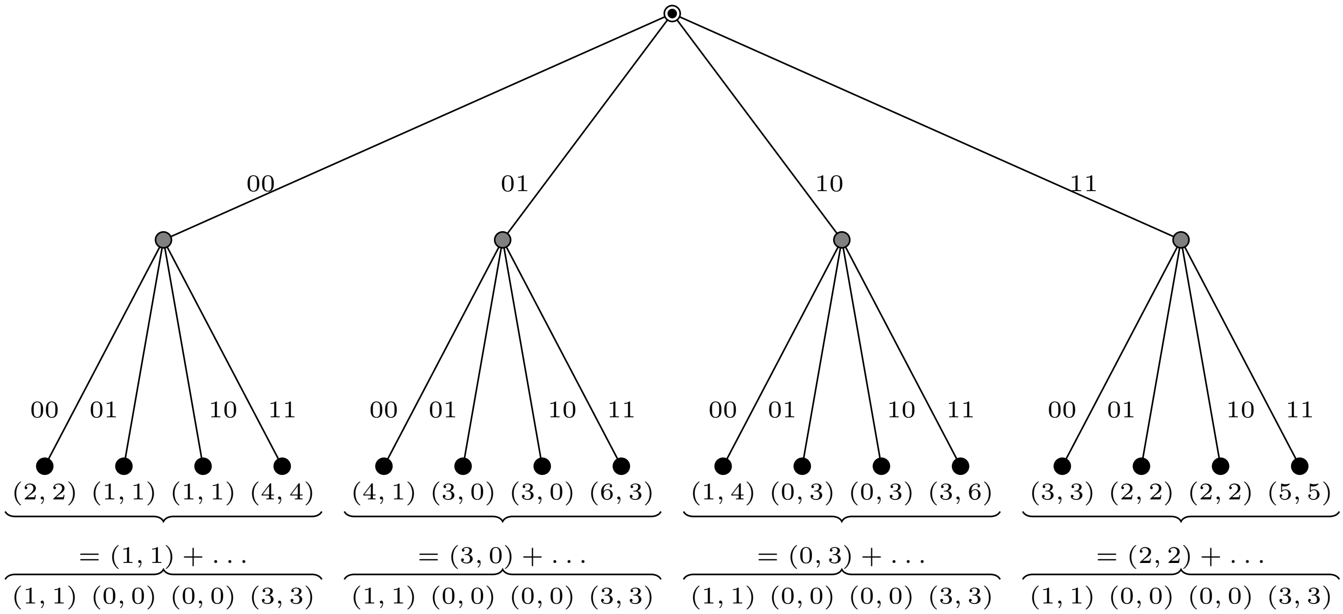
$g_2 =$

A \ B	0	1
0	1 / 1	0 / 0
1	0 / 0	3 / 3

Hier hat g_1 nur das Gleichgewicht 00 wie das Gefangenendilemma, g_2 hat 00 und 11 (und ein gemischtes) wie Bach-oder-Strawinsky.

Hintereinanderausführung und Gleichgewichte

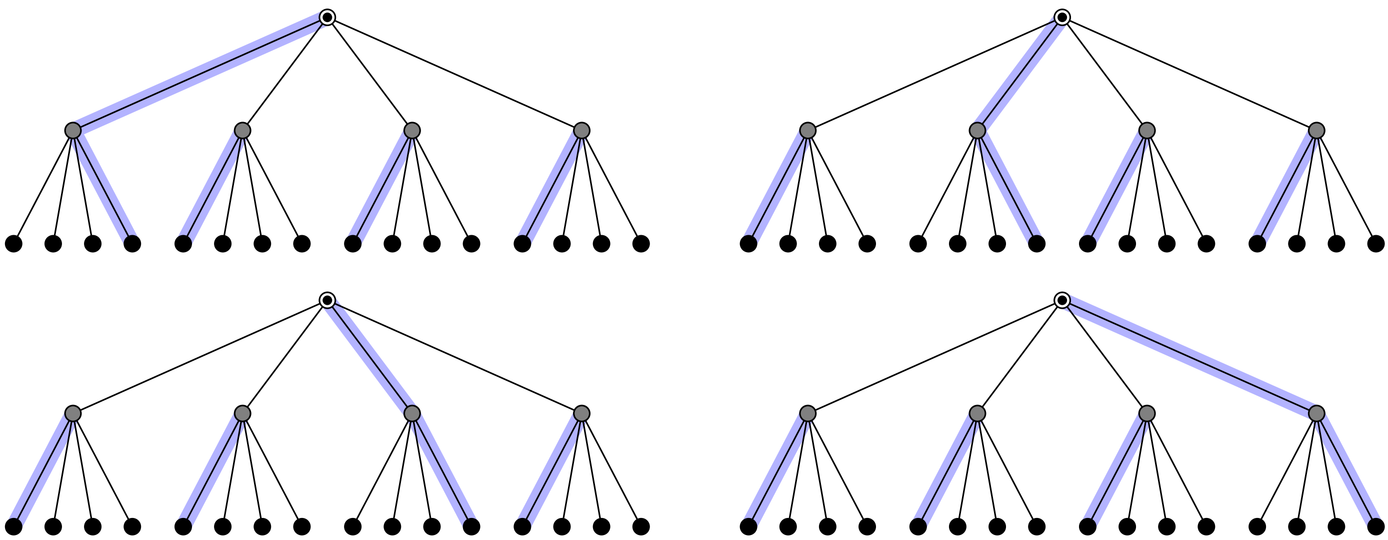
(2) Der Spielbaum $\Gamma = g_1 * g_2$ sieht wie folgt aus:



Dank $\mathrm{NE}(g_1) * \mathrm{NE}(g_2) \subset \mathrm{PNE}(\Gamma)$ hat der Spielbaum zwei offensichtliche Gleichgewichte: 00 in der ersten Stufe gefolgt von immer 00 oder immer 11 in der zweiten Stufe. Die zugehörige Auszahlung ist $(2, 2)$ bzw. $(4, 4)$.

Hintereinanderausführung und Gleichgewichte

(3) Wir konstruieren alle Gleichgewichte durch Rückwärtsinduktion J1D: In der zweiten Stufe gibt es $2^4 = 16$ Gleichgewichte. In der ersten Stufe wählen Alice und Bob hieraus aus: Gleichgewichtsauszahlungen sind neben $(2, 2)$ und $(4, 4)$ nun zusätzlich $(6, 3)$ und $(3, 6)$ sowie $(5, 5)$. Hierzu nutzen wir die folgenden teilspielperfekten Gleichgewichte:



Gibt es weitere Gleichgewichte? weitere Gleichgewichtsauszahlungen? mit gemischten Gleichgewichten? Führen Sie dies zur Übung aus!

Schon zweifache Iteration kann überraschen.

Wir spielen zweimal nacheinander das folgende Spiel $g : \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$:

A \ B	0	1
0	A: 1, B: 1	A: 0, B: 0
1	A: 0, B: 0	A: 3, B: 3

Aufgabe: (0) Bestimmen Sie $\mathrm{NE}(g)$. (1) Bestimmen Sie $\mathrm{PNE}(g * g)$.
(1a) Wie viele reine, teilspielperfekte Nash–Gleichgewichte gibt es?
(1b) Welche Auszahlungen in $\mathbb{R}^2$ sind teilspielperfekt realisierbar?

🙂 Wie der Titel andeutet, ist die Antwort überraschend komplex. Wenn Sie gerne programmieren, dann können Sie ein Skript schreiben, das die reinen Nash–Gleichgewichte von $g_1, \dots, g_n$ bestimmt und damit alle teilspielperfekten Gleichgewichte von $g_1 * \dots * g_n$ auflistet, oder etwas übersichtlicher zumindest die Gleichgewichtsauszahlungen.

Schon zweifache Iteration kann überraschen.

Lösung: (0) Wir finden $\mathrm{NE}(g) = \{00, 11\}$ mit den obigen Gleichgewichtsauszahlungen $g(0,0) = (1,1)$ und $g(1,1) = (3,3)$.

(1) Wir finden alle teilspielperfekten Gleichgewichte $(s^1, s^2) \in \mathrm{PNE}(g * g)$ durch Rückwärtsinduktion (Zermelo J1D): An jedes der vier Blätter $00, 01, 10, 11$ der ersten Runde können wir jeweils eines der beiden Gleichgewichte $00, 11$ der zweiten Runde hängen. Wir erhalten so die folgenden 16 Auszahlungsmatrizen, jeweils dieselbe für Alice und Bob:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

(1a) So finden wir insgesamt 26 teilspielperfekte Nash–Gleichgewichte.
(1b) Die teilspielperfekt realisierbaren Auszahlungen des Spiels $g * g$ sind $(2,2)$ zweimal und $(4,4)$ sechzehnmal sowie $(6,6)$ achtmal.

Bonnie und Clyde: Können Ganoven sich vertrauen?

Im ursprünglichen Gefangenendilemma stehen Bonnie und Clyde vor der Wahl zusammenzuhalten (*cooperate*) oder zu verpfeifen (*defect*). Die Konsequenz sind folgende Gefängnisstrafen:

Bonnie \ Clyde	cooperate	defect
cooperate	-1 / -1	-9 / 0
defect	0 / -9	-6 / -6

Die beiden sind überzeugt, dass sie ihr Leben lang ein kriminelles Paar bleiben, sie sind schließlich Bonnie und Clyde, das ist ihr Markenkern! Daher gehen sie davon aus, mit gewisser Wkt $\delta \in [0, 1]$ immer wieder in diese missliche Situation zu geraten, als Berufsrisiko! Sie betrachten das Dilemma daher als wiederholtes Spiel und vereinbaren immer zusammenzuhalten, gemeint ist *ewige Verdammnis* / *Grim Trigger*.

Bonnie und Clyde: Können Ganoven sich vertrauen?

Aufgabe: Für welche Wkt δ ist diese Vereinbarung glaubwürdig?

Lösung: Sie können die Strategie erneut durchrechnen (Übung!) oder unsere Zusammenfassung aus Satz K1A nutzen. Dazu bringen wir das Spiel in die dort genutzte, besonders einfache Form. Wir normieren die Auszahlungen auf 0 und 1 durch einen affinen Isomorphismus:

Bonnie \ Clyde	0	1
0	0 / 0	$6/5$ / $-3/5$
1	$-3/5$ / $6/5$	1 / 1

Bereits für $\delta \geq \underline{\delta} := 1 - 1/\alpha = 1/6$ ist Grim Trigger teilspielperfekt! Diese Geduldsschwelle ist erstaunlich gering, das heißt, sie ist oft erfüllt. Anschaulich liegt das daran, dass der Anreiz zu verpfeifen gering ist.

Die Strategie *Ewige Harmonie* (Klausur 2018)

Sei Γ die unendliche Wiederholung des Stufenspiels $g : \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$:

A \ B	0	1
0	A: 0, B: 0	A: α, B: β
1	A: β, B: α	A: 1, B: 1

mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 \le \delta < 1$ und der diskontierten Auszahlung

$$u : \{00, 01, 10, 11\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^2,$$

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n g(x_n)$$

Wir untersuchen, ob das folgende Strategiepaar $s = (s_A, s_B)$ ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist, kurz $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$.

Die Strategien s_A, s_B sind wie folgt definiert: Im ersten Zug spiele 1. Haben im letzten Zug beide dasselbe gespielt, spiele 1; andernfalls 0.

Die Strategie *Ewige Harmonie* (Klausur 2018)

Aufgabe: (1) Gilt für Γ das Prinzip der einmaligen Abweichung?

(2) Formulieren Sie s_A und s_B explizit als Funktion des Zustands x.

(3) Unter welchen Bedingungen ist $s = (s_A, s_B)$ teilspielperfekt?

(4) Wir betrachten die Parameter $(\alpha, \beta) = (3/2, -1)$ und $\delta = 0.99$.
(a) Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte $\mathrm{NE}(\bar{g})$ des Spiels $\bar{g}$.
(b) Welche Gesamtauszahlung $u^1 + u^2$ ist maximal erreichbar mit einem teilspielperfekten Gleichgewicht $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$?
Nennen Sie explizit ein maximierendes Gleichgewicht.

(5) Dieselben Fragen (a,b) für $(\alpha, \beta) = (4, -1)$ und $\delta = 0.99$.

Lösung: (1) Das Prinzip der einmaligen Abweichung ist anwendbar, denn die Auszahlungen $u(x) \in \mathbb{R}^2$ sind stetig in $x \in \{00, 01, 10, 11\}^{\mathbb{N}}$.

(2) Wir definieren $s_A = s_B : \{00, 01, 10, 11\}^{n-1} \to \{0, 1\}$ durch $\emptyset \mapsto 1$ sowie $\dots 00 \mapsto 1$ und $\dots 11 \mapsto 1$ sowie $\dots 01 \mapsto 0$ und $\dots 10 \mapsto 0$.

Die Strategie *Ewige Harmonie* (Klausur 2018)

(3) Wir nutzen das Prinzip der einmaligen Abweichung.

(3a) Für die Vorgeschichte $\emptyset$ oder $\dots 00$ oder $\dots 11$ gilt für Alice / Bob:
Fortsetzung $11\ 11\ 11\ 11\ \dots \quad u^1 = \mathrm{const} + \delta^n(1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots)$
Abweichung $01\ 00\ 11\ 11\ \dots \quad u^1 = \mathrm{const} + \delta^n(\alpha + 0 + \delta^2 + \delta^3 + \dots)$
Wir finden so die notwendige Bedingung $1 + \delta \ge \alpha$.

(3b) Für die Vorgeschichte $\dots 01$ oder $\dots 10$ gilt für Alice / Bob:
Fortsetzung $00\ 11\ 11\ 11\ \dots \quad u^1 = \mathrm{const} + \delta^n(0 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots)$
Abweichung $10\ 00\ 11\ 11\ \dots \quad u^1 = \mathrm{const} + \delta^n(\beta + 0 + \delta^2 + \delta^3 + \dots)$
Wir finden so die notwendige Bedingung $\delta \ge \beta$.

Jede dieser Ungleichungen $1 + \delta \ge \alpha$ und $\delta \ge \beta$ ist notwendig, damit Abweichungen nicht belohnt, sondern bestraft werden. Gemeinsam sind beide Ungleichungen hinreichend für $s \in \mathrm{PNE}$.

🙂 Glücklicherweise haben wir präzise Notation und effiziente Technik: Das Prinzip der einmaligen Abweichung vereinfacht die Analyse wie immer enorm! Damit wird die Diskussion aller Fälle ein Kinderspiel.

Die Strategie *Ewige Harmonie* (Klausur 2018)

(4a) Die Strategie 0 dominiert 1 strikt. Dies gilt sowohl für Alice als auch für Bob sobald $\alpha > 1$ und $\beta < 0$. Damnach gilt $\mathrm{NE}(\bar g) = \{00\}$.

(4b) Das obige Strategiepaar (s_A, s_B) ist teilspielperfekt und erreicht die Gesamtauszahlung $2/(1-\delta) = 200$. Wegen $1 + 1 > \alpha + \beta > 0 + 0$ ist dies maximal in jeder Runde, somit auch insgesamt.

(5a) Die Strategie 0 dominiert 1 strikt, wie zuvor, also $\mathrm{NE}(\bar g) = \{00\}$.

🙁 Unser oben untersuchtes Strategiepaar *Ewige Harmonie* (s_A, s_B) ist nun nicht mehr teilspielperfekt, denn kurzfristige Gewinnmitnahme wird nur eine Runde lang bestraft und ist somit insgesamt lukrativ.

(5b) Es wird abwechselnd 01 und 10 gespielt mit Gesamtauszahlung $(\alpha + \beta)/(1-\delta) = 300$. Wegen $\alpha + \beta > 1 + 1 > 0 + 0$ ist dies maximal.

Als teilspielperfektes Gleichgewicht wird dies realisiert, indem jede Abweichung durch ewige Verdammnis $00\,00\,00\ \dots$ bestraft wird, also durch Rückfall auf das Nash–Gleichgewicht $00 \in \mathrm{NE}(\bar g)$.

🙂 Das ist die vertraute Grim-Trigger-Strategie

$$(s'_A, s'_B) = \mathrm{Grim}(01\,10\,01\,10\,01\,10\ \dots, 00\,00\,00\,00\,00\,00\ \dots)$$

Kapitel L

Verhandlungstheorie und Nashs Verhandlungslösung

HARRY: *Haggle properly. This isn't worth nineteen.*
BRIAN: *Well, you just said it was worth twenty.*
HARRY: *Oh, dear. Oh, dear. Come on. Haggle!*
BRIAN: *Huh. All right. I'll give you ten.*
HARRY: *That's more like it.*
Ten?! Are you trying to insult me?!
Me, with a poor dying grandmother?! Ten?!

Monty Python, *Life of Brian* (1979)

Inhalt dieses Kapitels L

Motivation und Überblick

In diesem Kapitel untersuchen wir allgemein Verhandlungssituationen, in denen zwei (oder mehr) Spieler über mögliche Ausgänge feilschen. Die Spieler wollen ein gemeinsames Ergebnis vereinbaren, etwa um darauf bauend das weitere gemeinsame Vorgehen zu koordinieren.

Jeder will sein Ergebnis maximieren. Je härter er verhandelt, umso mehr wird er vermutlich bekommen, es sei denn, die Verhandlungen scheitern, und er muss seine Drohungen ausführen, auch wenn sie nachteilig sind. Die Erfahrung zeigt, dass selbst rationale Spieler, die eine Einigung erzielen können und wollen, dies gelegentlich doch nicht erreichen. Dieses ganz praktische und alltägliche Problem wollen wir lösen.

Um ein drohendes Scheitern und allseitigen Schaden zu vermeiden, sind Spieler oft bereit, ihren Konflikt einem Schlichter zu übergeben, einem unabhängigen Schiedsgericht, das den Konflikt für sie lösen soll. Der Schlichter schlägt für jedes Verhandlungsproblem eine Lösung vor. Alle Lösungen sollen „fair“ und „nachvollziehbar“ sein, und der Schlichter „konsistent“. Genau um diese grundlegenden Forderungen geht es hier.

Motivation und Überblick

Verhandlungstheorie (engl. *bargaining theory*) beginnt mit der Arbeit von John Nash: *The Bargaining Problem*, Econometrica 18 (1950) 155–162. In diesem Artikel formulierte er das Verhandlungsproblem, seine Axiome und zugehörige Verhandlungslösung; dies diskutieren wir im ersten Teil.

Dieser statisch-axiomatisch-kooperative Ansatz lässt sich dynamisch-strategisch-nicht-kooperativ implementieren. Dieser Ansatz geht zurück auf F. Zeuthen: *Problems of Monopoly and Economic Warfare* (1930), K.G. Binmore: *Nash Bargaining Theory* (1987) und vor allem auf die (nach Nash zweite bahnbrechende) Arbeit von A. Rubinstein: *Perfect Equilibrium in a Bargaining Model*, Econometrica 50 (1982) 97–110.

Die prozedurale Implementierung ergänzt die axiomatische Sichtweise, sie beteiligt die Spieler aktiv und erweitert wesentlich die Möglichkeiten. Dieses Modell gilt als realistische Wiedergabe echter Verhandlungen. Inzwischen existiert eine reichhaltige Literatur zur Verhandlungstheorie, sowohl axiomatisch als auch implementativ. Anwendungen sind vielfältig. Ökonom:innen nutzen routiniert diese Begriffe und Werkzeuge.

Einführung und Überblick

Verhandlungen begegnen uns überall im menschlichen Miteinander:

- Ein Ehepaar verhandelt über gemeinsame Entscheidungen wie Aufgabenteilung, Finanzen, Erziehung, Urlaube, etc.
- Eine Regierung verhandelt ebenso (über ähnliche Fragen) zwischen Koalitionspartnern oder zwischen Ministerien.
- Im Parlament ist die Gesetzgebung ein Ergebnis von Verhandlungen zwischen den politischen Parteien.
- Regierungen stehen oft in internationalen Verhandlungen zu Handelsbeziehungen, Umweltschutz, Abrüstung, etc.
- Wirtschaftliche Interaktionen beruhen auf Verhandlungen zwischen den betroffenen Handelspartnern, etwa bei Preisen und Löhnen, beim Handel mit Gütern, bei Fusionen und Übernahmen, etc.

Die Vielfalt solcher Situationen ist beachtlich. Ein erster wichtiger Schritt zur theoretischen Untersuchung ist daher eine geeignete Beschreibung, die alle wesentlichen Gemeinsamkeiten solcher Verhandlungen präzise erfasst und dabei unwesentliche Besonderheiten möglichst ausblendet.

Einführung und Überblick

„A two-person bargaining situation involves two individuals who have the opportunity to collaborate for mutual benefit in more than one way.“ Mit diesen Worten führte Nash 1950 das Verhandlungsproblem ein. Gegenstand ist die Wahl einer der möglichen Kooperationen.

Das Ziel der Spieler ist also, eine gemeinsame Auszahlung zu wählen. Dies ist eine extrem allgemeine Sichtweise. So gesehen ist tatsächlich nahezu jede menschliche Interaktion eine Art Verhandlungsproblem. Für unsere Untersuchung benötigen wir einschränkende Annahmen:

„We idealize the bargaining problem by assuming that the two individuals are highly rational, that each can accurately compare his desires for various things, that they are equal in bargaining skill, and that each has full knowledge of the tastes and preferences of the other.“ [Nash 1950]

Nash brach mit der Tradition und fokussierte nicht zuerst die dynamische Verhandlungsprozedur, sondern die statische Verhandlungssituation. Seine bahnbrechend neue Idee war eine axiomatische Untersuchung, die das Wesen von Verhandlungen und möglichen Lösungen extrahiert.

Einführung und Überblick

Der axiomatischer Ansatz beschreibt vollkommen rationales Verhandeln bei vollständiger Information. Dies erklärt einige zentrale Phänomene, doch einige schwierige Fragen bleiben weitgehend offen: Wann ist eine Vereinbarung gerecht? Wie kann ein Konflikt friedlich beigelegt werden?

Die Annahme vollständiger Information und vollkommener Rationalität vereinfacht die Analyse, macht sie aber zugleich weniger realistisch. Praktische Fragen des Verhandelns und Feilschens bleiben unberührt, ebenso alle sozialen Konventionen und psychologischen Phänomene.

Nashs axiomatische Vorgehensweise ist statisch und kooperativ. Dieser Ansatz erklärt Ihnen nicht, wie Sie Ihr Verhandlungsgeschick optimieren: Dazu müssten wir die Komplexität menschlichen Verhaltens ergründen, unvollständige Information, beschränkte Rationalität, etc.

Die praktische Seite konkreter Verhandlungen ist extrem vielfältig. Eine allgemeine und übersichtliche Theorie ist hier nicht zu erwarten. Hingegen liegen umfangreiche empirische Untersuchungen vor; darauf werde ich in dieser Vorlesung nicht genauer eingehen.

Einführung und Überblick

Komplementär zur statischen Sicht untersuchen wir die dynamische. Dazu nehmen wir an, dass die Verhandlungsprozedur festgelegt ist. Wir können Sie somit als Spiel betrachten und mit den bewährten Instrumenten der nicht-kooperativen Spieltheorie untersuchen.

Unser Ziel ist dabei, Gleichgewichte zu finden als Prognose bzw. Erklärung für rationales Verhalten und mögliche Vereinbarungen. Paradebeispiel einer dynamisch-strategischen Implementierung ist Rubinsteins Verhandlungsmodell durch alternierende Angebote.

Die treibende Kraft in diesem Modell ist der Zeit- und Wertverlust: Der Kuchen schrumpft, und dies erzwingt eine rationale Einigung. Dieses Modell erklärt speziell Phänomene wie Macht und Geduld, die in Verhandlungen erfahrungsgemäß eine große Rolle spielen.

Die drei Sichtweisen von Verhandlungen ergänzen und stützen sich: statisch-axiomatisch, dynamisch-strategisch und praktisch-empirisch. Das Thema ist wichtig, seine allseitige Entwicklung bleibt spannend. Hierzu gibt dieses Kapitel eine Einführung und einen Überblick.

Worum geht es bei Verhandlungen?

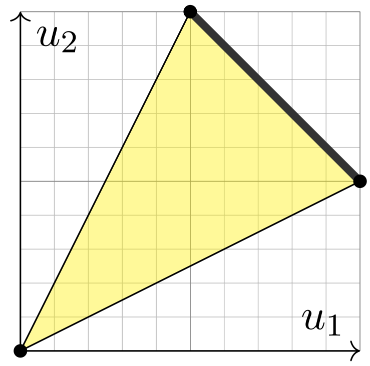
Allgemein entsteht ein **Verhandlungsproblem** in folgender Situation: Zwei (oder mehr) Spieler haben gemeinsames Interesse zu kooperieren, aber konkurrierende Interessen, wie genau sie kooperieren wollen.

Handel: Ein Objekt ver/kaufen und dazu einen Preis aushandeln. Bei unvollständiger Information ist dies schwierig, siehe Auktionen.

Synergie: Einzelkosten für Alice 30 und Bob 50, gemeinsam nur 60. Hier gilt vollständige Information. Wie sollen beide die Kosten teilen?

Kooperation: Gemeinsam agieren in einem vorgegebenen Spiel. Idealerweise liegen alle Informationen vor. Klassisches Beispiel:

A \ B	0	1
0	1 / 2	0 / 0
1	0 / 0	2 / 1



Worum geht es bei Verhandlungen?

Beispiel: Alice möchte ihr Haus verkaufen für mindestens 300 000€. Bob möchte das Haus kaufen und kann höchstens 400 000€ zahlen. Die beiden können und wollen sich einigen, aber auf welchen Preis?

Eine Einigung ist prinzipiell möglich. Den tatsächlichen Preis müssen sie jedoch aushandeln. Beide haben starkes Interesse an einer Einigung, doch Alice will möglichst viel bekommen, Bob möglichst wenig bezahlen. Ein simpler Vorschlag wäre 350 000€. Die Schlichtung wird hier jedoch erschwert, da die Spieler ihre Information sicher nicht offenlegen wollen.

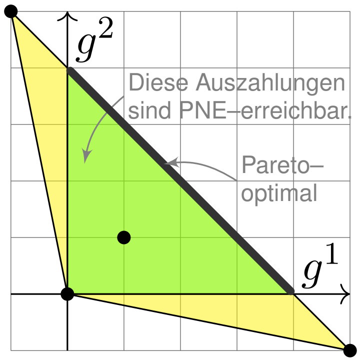
Beispiel: Verhandlungsprobleme sind uns bereits mehrfach begegnet, wenn ein Spiel mehrere Gleichgewichte hat, wie *Bach oder Strawinsky*, und sich die Spieler auf eines verständigen wollen. Wenn sie vor dem Spiel kommunizieren können, so haben beide starkes Interesse an einer Einigung, aber welche? Spiel und Auszahlungen sind hier symmetrisch.

Durch Lotterien lassen sich alle Konvexkombinationen realisieren. Dies entspricht korrelierten Strategien, die wir überall gerne nutzen. Welche dieser Möglichkeiten sollte ein Schlichter vorschlagen?

Worum geht es bei Verhandlungen?

Wir iterieren unendlich oft das folgende Spiel $g : \{0,1\}^2 \to \mathbb{R}^2$:

A \ B	0	1
0	A: 0, B: 0	A: 5, B: -1
1	A: -1, B: 5	A: 1, B: 1



Beispiel: Die beiden Spieler wollen sich auf eine Auszahlung einigen. Welche Auszahlungen $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ sind teilspielperfekt realisierbar? Hierüber gibt Nashs Folk Theorem K2E konkret und detailliert Auskunft. Welche soll angesteuert werden? Das muss ausgehandelt werden!

Das einzige Nash–Gleichgewicht $(0,0)$ ist möglich, aber wenig lukrativ. Es dient als Notlösung bei eventuellem Scheitern der Verhandlungen. Diesen Punkt nennen wir den **Ausgangspunkt** oder **Drohpunkt**, auf englisch *default value* oder *disagreement outcome*.

Worum geht es bei Verhandlungen?

Wir fassen Mut und vollziehen nun den kühnen Schritt der Abstraktion: Wir konzentrieren uns fortan auf die Auszahlungen und abstrahieren von den dahinter liegenden Strategien, die zu diesen Auszahlungen führen. (Diese setzen wir nach erfolgreicher Verhandlung wieder ein.)

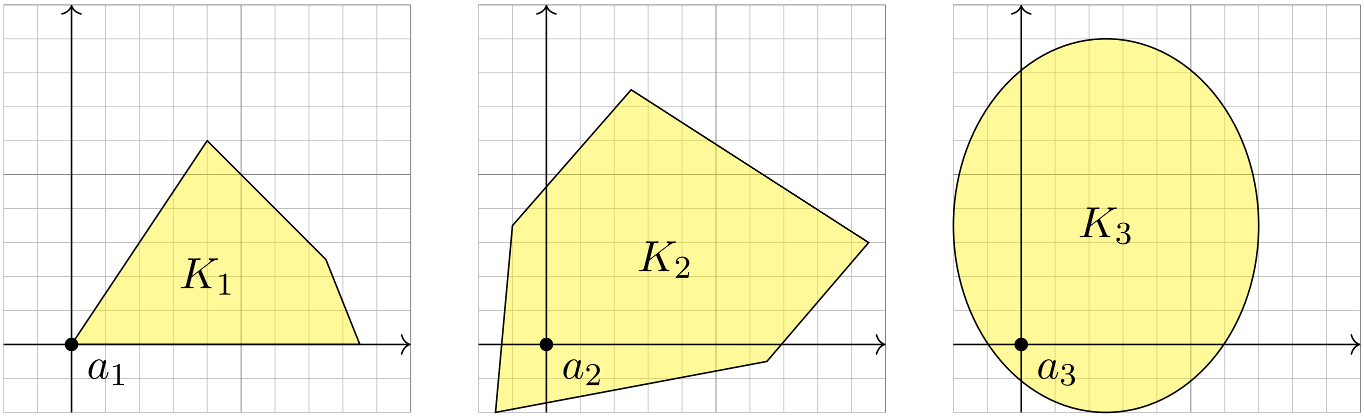
Abstraktion bedeutet Vereinfachung! Möglicherweise vernachlässigen wir dabei wesentliche Informationen. Die Nützlichkeit erweist sich dann in den Anwendungen auf praktische Beispiele. (Vorgriff: Ja, sie wird.)

Den Ausgangspunkt a oder Drohpunkt können die Spieler jederzeit ohne Koordinierung sichern, also auch ohne Einigung in den Verhandlungen, im Gefangenendilemma etwa das Nash–Gleichgewicht $g(0,0) = (0,0)$.

Verhandelt wird ab jetzt also nur noch über die Punkte $(x_1, x_2) \in K_{\geq a}$. Damit bringen wir das Problem in eine einfache doch präzise Form. Sie ist zudem übersichtlich und geometrisch-algorithmisch zugänglich.

Wir erheben unsere Vorüberlegungen nun zu einer formalen Definition: Was muss ein Schlichter oder ein Schiedsgericht wissen (Eingabe), und wie werden diese Daten rational verarbeitet (Ausgabe)?

Was sind Verhandlungsprobleme und -lösungen?



Definition L1A: Verhandlungsproblem und -lösung

Ein **Verhandlungsproblem** (K, a) für zwei Personen besteht aus einer konvexen kompakten Menge $K \Subset \mathbb{R}^2$ und einem Punkt $a \in K$.

Die Menge der **nicht-trivialen Verhandlungsprobleme** ist

$$V^2 := \left\{ (K, a) \;\middle|\; a \in K \Subset \mathbb{R}^2 \text{ mit } K \text{ konvex kompakt, } \exists v \in K : a < v \right\}.$$

Eine allgemeine **Verhandlungslösung** ist eine Abbildung

$$F \,:\, V^2 \to \mathbb{R}^2 \,:\, (K, a) \mapsto F(K, a) \in K.$$

Was sind Verhandlungsprobleme und -lösungen?

Wir suchen und analysieren im Folgenden solche Funktionen F.
Sie heißen auch **Schlichtungsverfahren**, engl. *arbitration scheme*.

Diese genial einfache Definition ist ein Musterbeispiel an Abstraktion. Viele Erfahrungen und Annahmen werden knapp zusammengefasst:

- Der Nutzen lässt sich vollständig durch reelle Zahlen darstellen. Diese bequeme Annahme unterstellen wir auch sonst meistens.
- Die Spieler können den Drohpunkt a ohne Koordinierung sichern. Er dient daher als Notlösung beim Scheitern der Verhandlungen.
- Die Menge $K \Subset \mathbb{R}^2$ möglicher Ausgänge ist vollständig bekannt. Dies schließt Verhandlungen mit unvollständiger Information aus.
- Die Menge K ist konvex, da die Spieler Lotterien bilden können: Ziehung aus einem Lostopf entspricht einer Konvexkombination.

Die Menge K ist kompakt: Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ist das äquivalent zu beschränkt und abgeschlossen. Beschränktheit leuchtet sofort ein: Der zu verteilende Kuchen ist endlich. Abgeschlossenheit nutzen wir zur Vereinfachung: Wir nehmen alle Grenzwerte als Idealisierung mit hinzu.

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir den **koordinatenweisen Vergleich**:

$$\begin{aligned}
x = y \quad &:\Longleftrightarrow \quad x_i = y_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n, \\
x \le y \quad &:\Longleftrightarrow \quad x_i \le y_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n, \\
x < y \quad &:\Longleftrightarrow \quad x_i < y_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n, \\
x \lneqq y \quad &:\Longleftrightarrow \quad x \le y \quad \text{doch zugleich } x \ne y.
\end{aligned}$$

Die Relation $\le$ auf $\mathbb{R}^n$ ist reflexiv ($x \le x$), antisymmetrisch (aus $x \le y$ und $y \le x$ folgt $x = y$) und transitiv (aus $x \le y$ und $y \le z$ folgt $x \le z$). Dies nennen wir eine **Ordnungsrelation**. Für $n \ge 2$ ist sie jedoch nicht total (linear), zum Beispiel gilt weder $(1,0) \le (0,1)$ noch $(0,1) \le (1,0)$. Zur Bequemlichkeit definieren wir, wie für Ordnungsrelationen üblich, die transponierten Relationen $x \ge y$ durch $y \le x$ und $x > y$ durch $y < x$.

Beispiel: Sind $x, y \in \mathbb{R}^I$ die Auszahlungen für die Spieler $i \in I$, dann bedeutet $x \le y$: Beim Übergang von x nach y steht jeder Spieler gleich gut oder besser. Strikte Ungleichung $x < y$ bedeutet, jeder Spieler $i \in I$ verbessert sich strikt. Hingegen bedeutet $x \lneqq y$ nur, jeder Spieler steht mindestens gleich gut, und mindestens ein Spieler verbessert sich strikt.

Eine **geordnete Menge** $(M, \le)$ ist ein Paar aus einer Menge M und einer Ordnungsrelation $\le$ auf M (reflexiv, antisymmetrisch, transitiv).

Ist $(M, \le)$ eine geordnete Menge, dann wird jede Teilmenge $X \subseteq M$ geordnet durch die Einschränkung der Ordnungsrelation $\le$ auf X.

Für $X \subseteq M$ und $a \in M$ schreiben wir $X \le a$, falls $x \le a$ für alle $x \in X$. Entsprechend definieren wir $X < a$ und $X \ge a$ und $X > a$.

Wir schreiben $X_{\ge a} = \{\, x \in X \mid x \ge a \,\}$ und $X_{>a} = \{\, x \in X \mid x > a \,\}$ sowie $X_{\le a} = \{\, x \in X \mid x \le a \,\}$ und $X_{<a} = \{\, x \in X \mid x < a \,\}$.

Wir nennen $m \in M$ ein **größtes Element** von $(M, \le)$, wenn $M \le m$: Für alle $x \in M$ gilt $x \le m$. Es gibt höchstens eines: Sind $m, m' \in M$ größte Elemente, so haben wir $m \le m'$ und $m' \le m$, also $m = m'$.

Wir nennen $m \in M$ ein **maximales Element** von $(M, \le)$, wenn gilt: Für alle $x \in M$ mit $m \le x$ gilt $m = x$. Wir schreiben $\operatorname{Max}(M, \le)$ für die Menge aller maximalen Elemente. Eine geordnete Menge $(M, \le)$ kann kein, ein oder mehrere maximale Elemente haben. Als Beispiele betrachten Sie die obigen Mengen $K \Subset \mathbb{R}^2$.

Beispiele für Verhandlungslösungen

Viele Abbildungen $F : V^2 \to \mathbb{R}^2 : (K,a) \mapsto u \in K$ sind denkbar.
Hierzu einige Beispiele, um Phantasie und Technik zu schulen:

Triviale Lösung: Wähle den Ausgangspunkt $F(K,a) = a$.

Lexikographische Lösungen: Vorgelegt sei $(K,a) \in V^2$.
(1) Wähle $u_1 = \max \operatorname{pr}_1 K_{\geq a}$ und hierzu $(u_1,u_2) \in K$ mit u_2 maximal.
(2) Wähle $u_2 = \max \operatorname{pr}_2 K_{\geq a}$ und hierzu $(u_1,u_2) \in K$ mit u_1 maximal.

Produkt-Maximierer: Sei $u \in K_{\geq a}$ der Maximierer der Funktion $h(x_1,x_2) \mapsto (x_1-a_1)^{p_1}(x_2-a_2)^{p_2}$ mit $p_1,p_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ und $p_1+p_2=2$.
Diese Lösung wird in Satz L1B und L1E axiomatisch charakterisiert.

Halbierung: Sei $u = a + \lambda z \in K$ mit $z = (1,1)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ maximal.

Monotone Lösung: Ebenso mit $z_i = \max \operatorname{pr}_i K_{\geq a}$. (Satz L1G)

Gewichtete Lösung: Ebenso mit $z_i = \int_{K_{\geq a}} (x_i - a_i)^{p_i} \,\mathrm{d}(x_1,x_2)$.
Hierzu sei $\operatorname{vol}_2(K_{\geq a}) > 0$, also $z > 0$, andernfalls ist K eindimensional.
Für $p = 0$ ist das die Halbierung, für $p_1 = p_2 \nearrow \infty$ die monotone Lösung.

Beispiele für Verhandlungslösungen

Geizige Lösung: Vorgelegt sei $(K,a) \in V^2$.
(1) Wähle $u = (u_1,a_2) \in K$ mit u_1 maximal. (Hier ist $u_2 = a_2$.)
(2) Wähle $u = (a_1,u_2) \in K$ mit u_2 maximal. (Hier ist $u_1 = a_1$.)

Kreis-Lösung: Es existiert genau ein Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass die Kreisscheibe $D_r = \bar{B}((a_1+r, a_2+r), r)$ das konvexe Kompaktum K berührt. Sei u der eindeutige Berührpunkt, also $K \cap B_r = \{u\}$.

Stoll–Lösung: Betrachte $(m_1,a_2) \in K$ mit m_1 maximal. Die Punkte (m_1,a_2) und (a_1,m_2) mit $m_2 > a_2$ definieren eine Gerade; sei $H(m_2)$ der Halbraum, der a enthält. Liegt (K,a) in einem Halbraum $H(m_2)$, für m_2 hinreichend groß, so wähle die lexikographische (hier geizige) Lösung. Andernfalls wähle den Produkt-Maximierer zu Parametern (p_1,p_2).
(Machen Sie eine Skizze und lösen Sie damit einige Beispiele.)

Diese vielfältigen Lösungsverfahren sind mehr oder weniger attraktiv, aber alle noch recht einfach, und manche sogar sehr naheliegend.
Sie dienen uns im Folgenden als Fundus an Gegen/Beispielen.

Beispiele für Verhandlungslösungen

Diese Beispiele sollen zunächst einmal Ihre Phantasie anregen. Welche Verhandlungslösungen $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ fallen Ihnen noch ein? Welche dieser Möglichkeiten sollte ein Schlichter vorschlagen?

Denkbar wäre auch eine Auslosung bezüglich einer Dichte auf K; solche stochastischen Lösungen schließen wir hier jedoch aus. Unsere Definition L1A verlangt eine Abbildung $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$, also ein deterministisches Verfahren, kein probabilistisches.

Alles verläuft genauso für eine beliebige Anzahl n von Spielern. Zwecks Anschauung bleibe ich zunächst bei $n = 2$ Spielern. Abschließend ist es eine schöne Übung, alles zu übertragen.

Zwischen diesen Lösungen bestehen interessante Beziehungen:

Übung: In welchem Sinne interpoliert die gewichtete Lösung zwischen der Halbierung und der monotonen Lösung?

Übung: In welchem Sinne interpoliert der Produkt-Maximierer zwischen den beiden lexikographischen Lösungen?

Beispiele für Verhandlungslösungen

Wir kennen nun die Problemstellung und einige (willkürliche) Lösungen. Zum besseren Verständnis hilft es, die Aufgabe wie folgt zu formulieren:

Wir suchen zur Schlichtung ein Verfahren / Mechanismus / Algorithmus, der zu jedem vorgelegten Verhandlungsproblem eine Lösung vorschlägt.

Dies wird in der Realität genutzt, wenn ein Schlichter angerufen wird. Der Schlichter soll sachkundig, auf Grundlage des Problems (K, a) und evtl. weiterer Informationen, einen Kompromiss $u \in K$ vorschlagen.

Die Schlichtung gelingt jedoch nur, wenn sie alle Parteien überzeugt. Hierzu ist es hilfreich, wenn sie zur Begründung ihres Vorschlags auch nachvollziehbare Gründe und überzeugende Argumente anführt.

Der Schlichter schlägt für jedes Verhandlungsproblem eine Lösung vor. Alle Lösungen sollen „fair“ sein, „nachvollziehbar“ und „konsistent“.

Nashs Axiome formulieren vier solcher nachvollziehbaren Gründe. Sie erklären, was wir von einer fairen Verhandlungslösung erwarten. Über die Auswahl und Festlegung dieser Axiome kann man streiten, ihre Konsequenzen jedoch folgen mit mathematischer Präzision.

Nashs Axiome

Eine „faire“ Verhandlungslösung muss bestimmte Forderungen erfüllen.

INV: Invarianz unter positiv-affinen Transformationen $T : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2) \mapsto (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \alpha_2 x_2 + \beta_2)$ wobei $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Dies transformiert Verhandlungsprobleme gemäß

$$T \,:\, V^2 \xrightarrow{\sim} V^2 \,:\, (K, a) \mapsto (T(K), T(a)).$$

Für Verhandlungslösungen $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ fordern wir $F \circ T = T \circ F$.

SYM: Symmetrie. Sei $(K, a) = \tau(K, a)$ in V^2 symmetrisch bezüglich der Transposition $\tau : V^2 \xrightarrow{\sim} V^2$ gemäß $\tau : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Dann ist auch die Lösung $u = F(K, a)$ symmetrisch, also $u_1 = u_2$.

PAR: Pareto–Optimalität. Es gilt $F(K, a) \in \operatorname{Max} K_{\geq a}$.
Für jedes Problem $(K, a) \in V^2$ und seine Lösung $u = F(K, a)$ gilt $a \leq u \in K$ und u ist maximal: Für jedes $v \in K$ mit $u \leq v$ gilt $u = v$.

IIA: Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen.
Vorgelegt seien Verhandlungsprobleme $(K, a) \subseteq (L, a)$ in V^2.
Liegt die Lösung $F(L, a)$ in K, so gilt $F(K, a) = F(L, a)$.

Nashs Axiome

INV bedeutet Skaleninvarianz. Multiplikation mit positiven Konstanten ist recht plausibel: Es ist egal, ob Spieler in Euro oder in Dollar rechnen. Invarianz unter Verschiebung ist weniger klar: Ist es bei einem Streitwert von 100€ einerlei, ob der eine Millionär oder der andere Habenichts ist?

SYM: In jeder symmetrischen Problemstellung (K, a) soll die Lösung $u = F(K, a)$ keinen der beiden Spieler bevorzugen. Das ist fraglich, wenn Spieler 1 allein ist aber Spieler 2 eine größere Gruppe. (L1E)

PAR: Zur Erinnerung (L107): Für Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^2$ definieren wir den Vergleich $u \leq v$ koordinatenweise durch $u_1 \leq v_1$ und $u_2 \leq v_2$.

IIA: Wenn neue Alternativen hinzukommen, dann ist die neue Lösung eine der neuen Alternativen oder bleibt unverändert die alte Lösung.

SYM und PAR schränken die Lösung einzelner Probleme ein,
INV und IIA fordern Konsistenz zwischen den Problemen.
Der Drohpunkt wird nur in PAR wirklich aktiv genutzt.

Über Axiome kann man streiten. Eine ausführliche kritische Diskussion finden Sie bei R.D. Luce, H. Raiffa: *Games and Decisions*, Dover 1989.

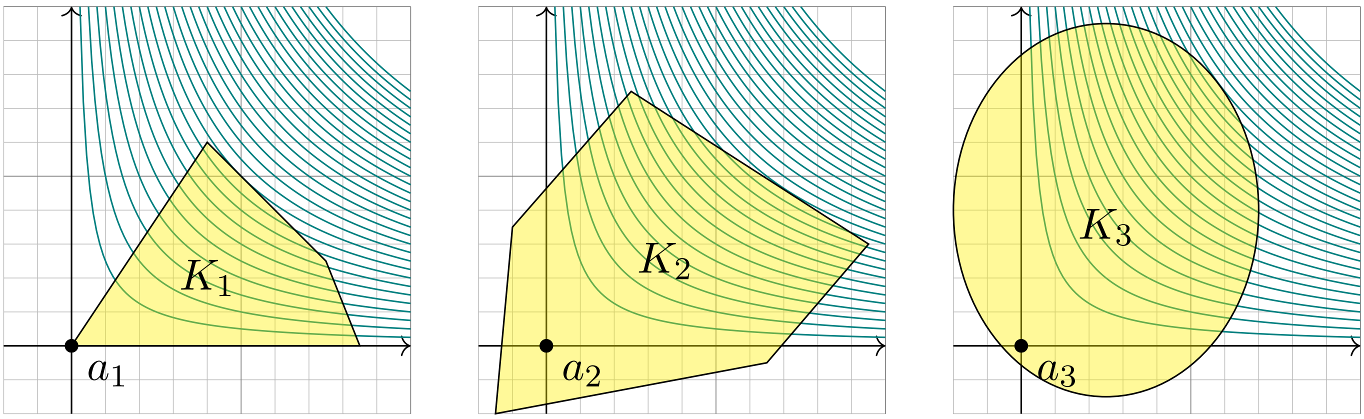
Nashs Verhandlungslösung

Es ist wie so oft in der Mathematik und allgemein im Leben: Axiome sind Annahmen, Forderungen, Wünsche, Sehnsüchte. Nicht immer lassen sie sich erfüllen. Selbst wenn sie erfüllbar sind, so nicht immer eindeutig. Nachdem Existenz und Eindeutigkeit geklärt sind, wollen wir die Lösung tatsächlich finden / berechnen / approximieren, dies möglichst effizient.

Denken Sie als leuchtende Beispiele aus dem ersten Studienjahr an die Determinante quadratischer Matrizen (M2B, axiomatische Definition, Leibniz–Formel, Gauß–Algorithmus, Numerik) oder an gewöhnliche Differentialgleichungen (Definition, Satz von Picard–Lindelöf, exakte Lösungen, Numerik). Existenz und Eindeutigkeit sind grundlegend, um überhaupt von „der“ gesuchten Lösung sprechen zu können, in beiden genannten Beispielen erhalten wir zugleich einen ersten Algorithmus, den wir anschließend noch effizienter gestalten (wollen und müssen).

Als Kontrast: Für das Tensorprodukt $M \otimes_R N$ von R–Moduln zeigen wir Existenz und Eindeutigkeit durch abstrakten Nonsense, knapp & elegant, ohne hilfreichen Algorithmus. Die konkrete Berechnung muss je nach Spezialfall gesondert betrieben werden, angefangen bei freien Moduln.

Nashs Verhandlungslösung



Satz L1B: Nash-Verhandlungslösung / NBS, Nash 1950

Existenz & Eindeutigkeit: Es gibt genau eine Verhandlungslösung $N : V^2 \to \mathbb{R}^2$, die Nashs vier Axiome erfüllt: INV, SYM, PAR und IIA.

Berechnung: Zum Verhandlungsproblem $(K, a) \in V^2$ ist die Lösung $N(K, a) = \arg\max h_{(K,a)}$ gegeben durch den Maximierer des Produkts

$$h = h_{(K,a)} \;:\; K_{\ge a} \to \mathbb{R} \;:\; (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - a_1)(x_2 - a_2).$$

Diese Abbildung $N : V^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt **Nash–Verhandlungslösung**.

Nashs Verhandlungslösung

Dieser Satz wirkt erstaunlich, zuerst geradezu unglaublich. Ist er wahr? Alle Daten liegen explizit vor uns auf dem Tisch, also beweisen wie es! Das ist eine schöne Übung in mathematischer Sorgfalt und Scharfsinn. Nur so lernen Sie axiomatische Verhandlungstheorie wirklich verstehen.

Aufgabe: Was ist für den Satz zu beweisen? Beweisen Sie es!

Lösung: (0) Zu $(K,a) \in V^2$ existiert genau ein Maximierer $u \in K_{\ge a}$, also $(u_1 - a_1)(u_2 - a_2) \ge (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in K_{\ge a}$.

Da $K_{\ge a}$ kompakt ist und h stetig, existiert ein Maximierer $u \in K_{\ge a}$. Es gibt $v \in K_{>a}$, also gilt $h(u) \ge h(v) > h(a) = 0$ und somit $u > a$.

Angenommen ein weiterer Punkt $u' \in K \smallsetminus \{u\}$ erfüllte $h(u') = h(u)$. Da K konvex ist, gälte dann $\bar{u} = \frac{1}{2}(u + u') \in K$ und $h(\bar{u}) > h(u)$.

(1) Dies definiert / konstruiert die Verhandlungslösung

$$N : V^2 \to \mathbb{R}^2 : (K,a) \mapsto \arg\max h_{(K,a)}.$$

Sie erfüllt alle vier Nash–Axiome: INV, SYM, PAR, IIA. Nachrechnen!

Nashs Verhandlungslösung

Zur Vollständigkeit rechnen wir die ersehnten Eigenschaften gleich nach.

INV: Gegeben sei $T : (x_1, x_2) \mapsto (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \alpha_2 x_2 + \beta_2)$ mit $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Für $T : (K,a) \xrightarrow{\sim} (K', a') : x \mapsto x' = Tx$ gilt $h_{(K',a')}(x') = \alpha_1 \alpha_2 h_{(K,a)}(x)$. Somit stiftet T eine Bijektion zwischen den Maximierern u von $h_{(K,a)}$ und den Maximierern u' von $h_{(K',a')}$. Dank Eindeutigkeit gilt $N \circ T = T \circ N$.

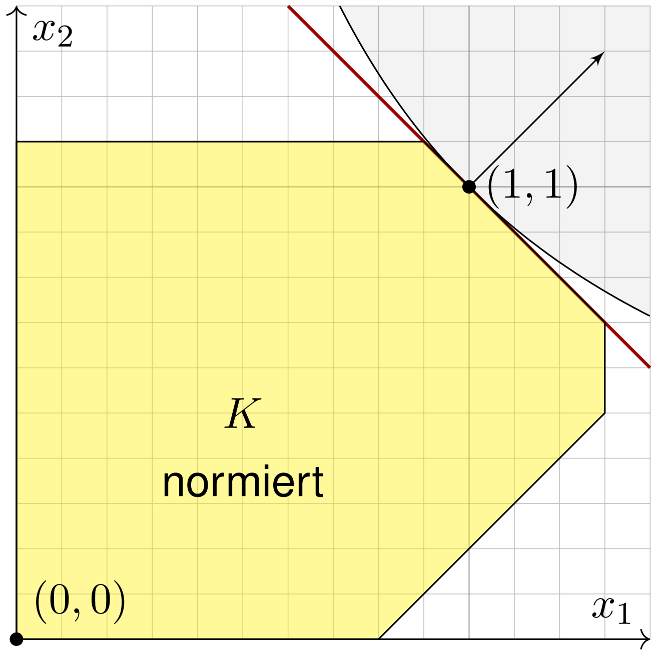
SYM: Im symmetrischen Fall $\tau(K,a) = (K,a)$ gilt $h_{(K,a)} \circ \tau = h_{(K,a)}$. Somit stiftet τ eine Permutation auf der Menge aller Maximierer. Dank Eindeutigkeit des Maximierers u gilt $\tau u = u$, also $u_1 = u_2$.

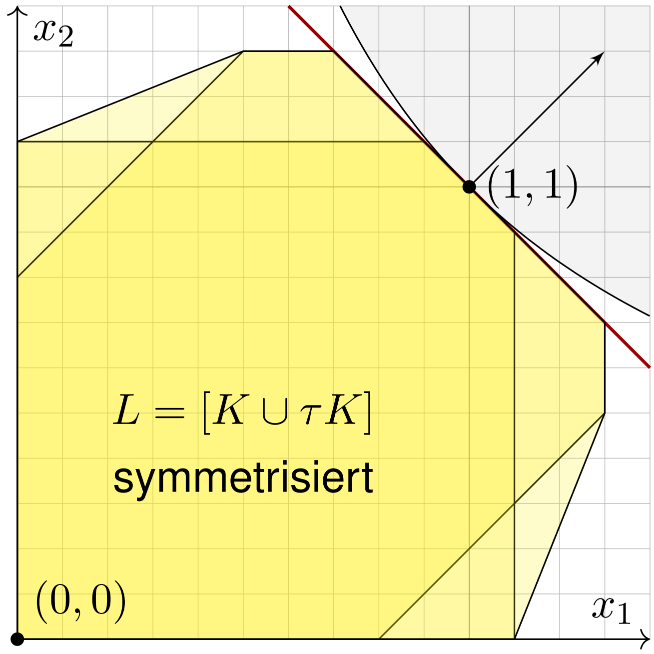
PAR: Wir setzen das Problem als nicht-trivial voraus. Jeder Maximierer u von $h_{(K,a)}$ erfüllt dann $a < u$, also $a_1 < u_1$ und $a_2 < u_2$. Für $u \le v \in K$ gilt $a_1 < u_1 \le v_1$ und $a_2 < u_2 \le v_2$. Gälte $v \ne u$, so wäre $h(v) > h(u)$.

IIA: Gegeben sei $(K,a) \subseteq (L,a)$ in V^2. Die Lösung $N(L,a) = u$ erfüllt $(u_1 - a_1)(u_2 - a_2) = \max h_{(L,a)} \ge \max h_{(K,a)}$. Gilt zudem $u \in K$, so gilt $(u_1 - a_1)(u_2 - a_2) = \max h_{(K,a)}$, also $N(K,a) = u$ dank Eindeutigkeit.

Nashs Verhandlungslösung

Eindeutigkeit $F(K,a) = N(K,a)$ als Beweis in Bildern:





Das vorgelegte Problem $(K,a) \in V^2$ normieren wir zu $a = (0,0)$ und $N(K,a) = (1,1)$. Anschließend symmetrisieren wir $(K,0)$ zu $(L,0)$. Für $(L,0)$ ist die Lösung $F(L,0) = (1,1)$, also auch für $(K,0)$.

Nashs Verhandlungslösung

(2) Zur Eindeutigkeit sei neben N auch $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung, die alle vier Nash–Axiome erfüllt. Wir wollen $F = N$ beweisen. Sei $(K,a) \in V^2$ ein VProblem. Wir zeigen $F(K,a) = N(K,a)$.

Es gilt $(K_{\ge a}, a) \subseteq (K,a)$. Dank PAR und IIA dürfen wir „=“ annehmen. Dank INV dürfen wir $a = (0,0)$ annehmen, zudem auch $N(K,a) = (1,1)$. Damit liegt $(K,0) \subseteq (\Delta,0)$ im Dreieck $\Delta := \{\, x \in \mathbb{R}^2_{\ge 0} \mid x_1 + x_2 \le 2 \,\}$ dank des Gradienten $\operatorname{grad} h(1,1) = (1,1)$ und der Konvexität von K. Dank SYM und PAR gilt $F(\Delta,0) = (1,1)$, dank IIA $F(K,0) = (1,1)$.

🙂 Allein mit Hilfe der Axiome INV, SYM, PAR und IIA können wir somit für jedes vorgelegte Problem $(K,a) \in V^2$ den Punkt $F(K,a)$ bestimmen. Wir finden jeweils $F(K,a) = N(K,a)$. Das beweist $F = N$.

Variante: Das Dreieck Δ ist die maximale Wahl, die Symmetrisierung $L := [K \cup \tau K] \subseteq \Delta$ ist minimal. Der Beweis verläuft wörtlich genauso: L ist konvex, kompakt, symmetrisch und erfüllt $(K,0) \subseteq (L,0) \subseteq (\Delta,0)$.

Ist eines der Nash–Axiome überflüssig?

Wir freuen uns über den eleganten Satz und dazu den schönen Beweis. Wie immer wollen wir zurückschauen, und das Argument perfektionieren: Können wir noch Voraussetzungen weglassen? oder abschwächen? Können wir eines der Nash–Axiome im Satz L1B weglassen? Nein!

Satz L1C: Die vier Nash–Axiome sind unabhängig.

Zu jedem der vier Axiome INV, SYM, PAR, IIA existiert eine Lösung $F_i : V^2 \to \mathbb{R}^2$, die dieses Axiom verletzt, aber die anderen drei erfüllt.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Aussage durch geeignete Beispiele. Hier sind neben Geometrie vor allem Phantasie und Kreativität gefragt.

Hierzu hilft ein möglichst reichhaltiger Fundus an Gegen/Beispielen; anschließend müssen diese Gegen/Beispiele genau geprüft werden.

Das ist eine schöne Übung in mathematischer Sorgfalt und Scharfsinn. Nur so lernen Sie axiomatische Verhandlungstheorie wirklich verstehen.

Schwieriger ist die starke Unabhängigkeit: Sind tatsächlich alle $2^4 = 16$ Kombinationen durch geeignete Verhandlungslösungen realisierbar?

Ist eines der Nash–Axiome überflüssig?

Diese Aufgabe behandeln Sie in den Übungen! Wenn Sie alle bisherigen Beispiele systematisch durchgehen, erhalten Sie die folgende Übersicht:

Verhandlungslösung	INV	SYM	PAR	IIA
triviale Lösung				
lexikographisch				
Produkt-Maximierer				
Halbierung				
Gewichtete Lösung				
Monotone Lösung				
Geizige Lösung				
Kreis-Lösung				
Stoll–Lösung				

Sie dürfen die Tabelle auch gerne noch erweitern um die Eigenschaften WIR, SIR und MON, die wir im Folgenden einführen und diskutieren.

Können wir Pareto–Optimalität abschwächen?

Wir schwächen Pareto–Optimalität ab zu folgenden Forderungen:

WIR: (schwache) individuelle Rationalität. $F(K,a) \in K_{\ge a}$.

SIR: starke individuelle Rationalität. $F(K,a) \in K_{>a}$.

Satz L1D: Individuelle Rationalität genügt. Roth 1977

(1) Es gibt genau eine Verhandlungslösung $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$, welche die vier Axiome INV, SYM, SIR und IIA erfüllt, nämlich die Nash–Lösung.

(2) Genau zwei Lösungen $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ erfüllen INV, SYM, WIR und IIA: neben der Nash–Lösung N nur noch die triviale Lösung $T : (K,a) \mapsto a$.

In gewisser Weise ist Pareto–Optimalität ein übertrieben starkes Axiom, denn es eliminiert sofort die große Mehrheit der möglichen Ausgänge. Individuelle Rationalität ist hierbei wesentlich weniger einschneidend. Zusammen mit den anderen Axiomen genügt diese Abschwächung!

Aufgabe: Beweisen Sie diesen Satz nach dem Vorbild von Satz L1B. Das ist eine schöne Übung in mathematischer Sorgfalt und Scharfsinn.

Können wir Pareto–Optimalität abschwächen?

Lösung: Wir beweisen gleich die allgemeinere Aussage (2). Daraus folgt automatisch die erste Aussage (1) als Spezialfall.

(2a) Existenz: Neben N erfüllt auch $T : (K,a) \mapsto a$ diese Axiome.

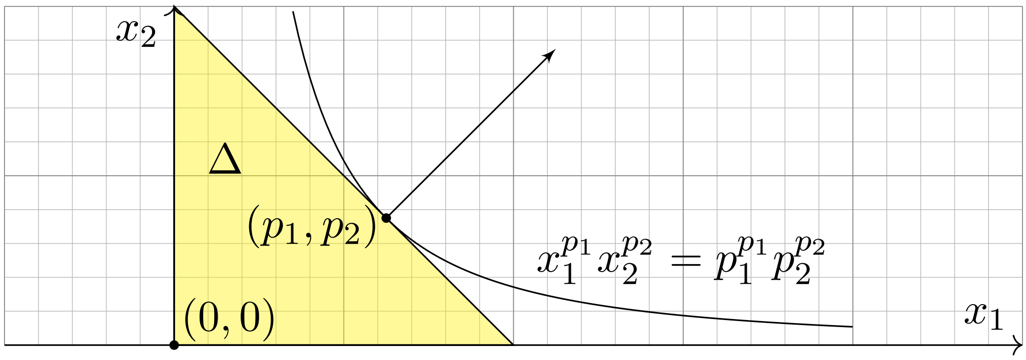
(2b) Eindeutigkeit: Angenommen irgendeine Verhandlungslösung $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ erfüllt die hier geforderten Axiome INV, SYM, WIR, IIA. Wir zeigen, dass entweder $F = T$ oder $F = N$ gilt. Sei $(K,a) \in V^2$.

Es gilt $(K_{\ge a}, a) \subseteq (K,a)$. Dank WIR und IIA dürfen wir „=“ annehmen. Dank INV dürfen wir $a = (0,0)$ annehmen, zudem auch $N(K,a) = (1,1)$. Damit liegt $(K,0) \subseteq (\Delta,0)$ im Dreieck $\Delta = \{\, x \in \mathbb{R}^2_{\ge 0} \mid x_1 + x_2 \le 2 \,\}$.

Dank SYM gilt $F(\Delta,0) = (x,x)$ mit $0 \le x \le 1$. Wir zeigen $x \in \{0,1\}$: Für $0 < x \le 1$ haben wir $(\Delta,0) \subseteq (x^{-1}\Delta,0)$. Dank INV gilt dann $F(x^{-1}\Delta,0) = x^{-1}(x,x) = (1,1) \in \Delta$. Dank IIA folgt $F(\Delta,0) = (1,1)$.

Wir schließen daraus $F(\Delta,0) = u$ mit $u = (0,0)$ oder $u = (1,1)$. Wegen $(0,0),(1,1) \in K$ und IIA folgt daraus auch $F(K,0) = u$. Aus $F(K,0) = (0,0)$ folgt $F = T$. Aus $F(K,0) = (1,1)$ folgt $F = N$.

Asymmetrische Verhandlungslösungen



Satz L1E: asymmetrische Verhandlungslösungen

Wir betrachten das Dreieck $\Delta := \{\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} \mid x_1 + x_2 \leq 2 \,\}$ mit $p \in \Delta$ im Inneren der Hypotenuse, also $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $p_1 + p_2 = 2$.

Existenz & Eindeutigkeit: Es gibt genau eine Verhandlungslösung $P : V^2 \to \mathbb{R}^2$, welche die Axiome INV, WIR, IIA und $P(\Delta, 0) = p$ erfüllt.

Berechnung: $P(K, a)$ ist der eindeutige Maximierer der Funktion

$$h = h^p_{(K,a)} \;:\; K_{\geq a} \to \mathbb{R} \;:\; (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - a_1)^{p_1} (x_2 - a_2)^{p_2}.$$

Symmetrisch $p_1 = p_2 = 1$ erhalten wir die Nash–Verhandlungslösung. In den Randfällen $p \in \{(2,0), (0,2)\}$ ist die Lösung nicht eindeutig.

Asymmetrische Verhandlungslösungen

Das Symmetrie–Axiom normiert Verhandlungslösungen $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ auf symmetrischen Problemen (K, a) durch $F(K, a) = a + \lambda(1, 1)$, und mit Pareto–Optimalität ist $\lambda \in \mathbb{R}$ maximal. Wir fragen allgemein: Wie sehen Verhandlungslösungen $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ aus, die INV, WIR und IIA erfüllen?

Zur Unterscheidung der Möglichkeiten werten wir F auf einem speziellen Beispiel aus, nämlich dem Dreieck $\Delta = \{\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} \mid x_1 + x_2 \leq 2 \,\}$ mit Ausgangspunkt 0. Der Wert $F(\Delta, 0) = p$ dient uns zur Normierung. Ab hier folgen Satz und Beweis dem bewährten Muster von Satz L1B:

Aufgabe: Zeigen Sie Satz L1E nach dem Vorbild von Satz L1B, indem Sie (1) Existenz und (2) Eindeutigkeit der Lösung beweisen.

(3) Finden Sie mindestens zwei verschiedene Verhandlungslösungen $F \neq G : V^2 \to \mathbb{R}^2$, die INV, WIR, IIA erfüllen sowie $(\Delta, 0) \mapsto (2, 0)$.

(4) Zeigen Sie hingegen, dass genau eine Lösung $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ die Axiome INV, PAR, IIA erfüllt sowie $(\Delta, 0) \mapsto (2, 0)$.

🙂 Hier sind neben Geometrie auch Phantasie und Kreativität gefragt. Das ist eine schöne Übung in mathematischer Sorgfalt und Scharfsinn.

Asymmetrische Verhandlungslösungen

Lösung: (1) Zunächst zur Existenz: Die angegebene Lösung

$$P \,:\, V^2 \to \mathbb{R}^2 \,:\, (K,a) \mapsto \arg\max h^p_{(K,a)}$$

ist wohldefiniert und erfüllt INV, WIR, SIR, PAR und IIA. Speziell für das Dreieck $(\Delta, 0)$ finden wir $P(\Delta, 0) = p$ dank der Orthogonalität

$$\operatorname{grad} h(p) = (p_1^{p_1} p_2^{p_2}, p_1^{p_1} p_2^{p_2}) \perp T_p \partial\Delta.$$

(2) Zur Eindeutigkeit sei neben P auch $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ eine solche Lösung. Sei $(K,a) \in V^2$ ein VProblem. Wir zeigen $F(K,a) = P(K,a)$.

Es gilt $(K_{\ge a}, a) \subseteq (K,a)$; dank WIR und IIA dürfen wir „=“ annehmen. Dank INV dürfen wir $a = (0,0)$ annehmen, zudem auch $P(K,a) = p$. Damit liegt $(K,0) \subseteq (\Delta, 0)$ im Dreieck $\Delta = \{\, x \in \mathbb{R}^2_{\ge 0} \mid x_1 + x_2 \le 2 \,\}$ dank des Gradienten $\operatorname{grad} h(p) \perp T_p\partial\Delta$ und der Konvexität von K. Dank Voraussetzung gilt $F(\Delta,0) = p$, dank IIA $F(K,0) = p$.

Allein mit Hilfe der Axiome INV, WIR, IIA und $F(\Delta, 0) = p$ können wir für jedes vorgelegte Problem $(K,a) \in V^2$ den Punkt $F(K,a)$ bestimmen. Wir finden jeweils $F(K,a) = P(K,a)$. Dies beweist $F = P$.

Asymmetrische Verhandlungslösungen

(3) Gegenbeispiele zu finden ist knifflig, auch amüsant und lehrreich.

Geizig: Wähle $G(K,a) = (u_1, u_2) \in K$ mit $u_2 = a_2$ und u_1 maximal.

Lexikographisch: Wähle zunächst das Maximum $u_1 = \max \operatorname{pr}_1 K_{\ge a}$ und hierzu anschließend $L(K,a) = (u_1, u_2) \in K$ mit u_2 maximal.

Diese Lösungen G und L erfüllen tatsächlich INV, WIR und IIA; diese Eigenschaften muss man wie immer gewissenhaft prüfen.

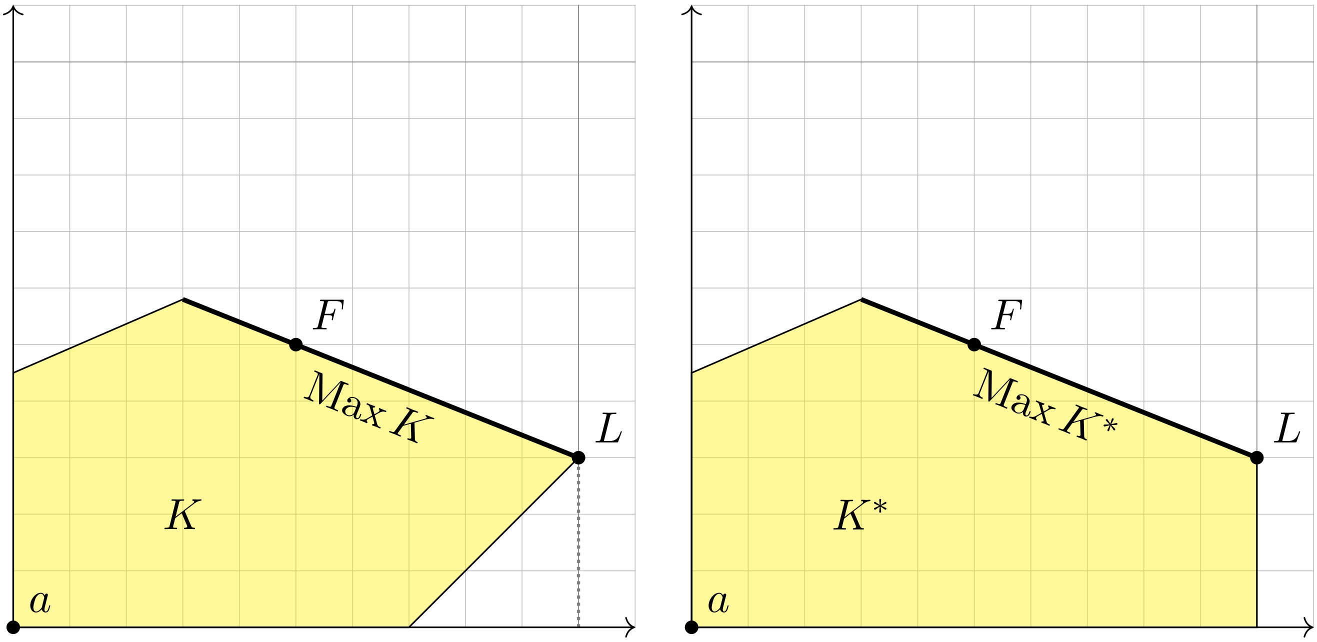
Die geizige Lösung erfüllt zwar WIR, aber weder SIR noch PAR. Die lexikographische Lösung erfüllt zwar PAR, aber nicht SIR. Dies illustriert die subtilen Unterschiede von WIR, SIR, PAR.

(4) Mit der Verschärfung von WIR zu PAR beweisen wir das folgende Ergebnis einiger Übungsgruppenteilnehmer:innen der Spieltheorie 2018:

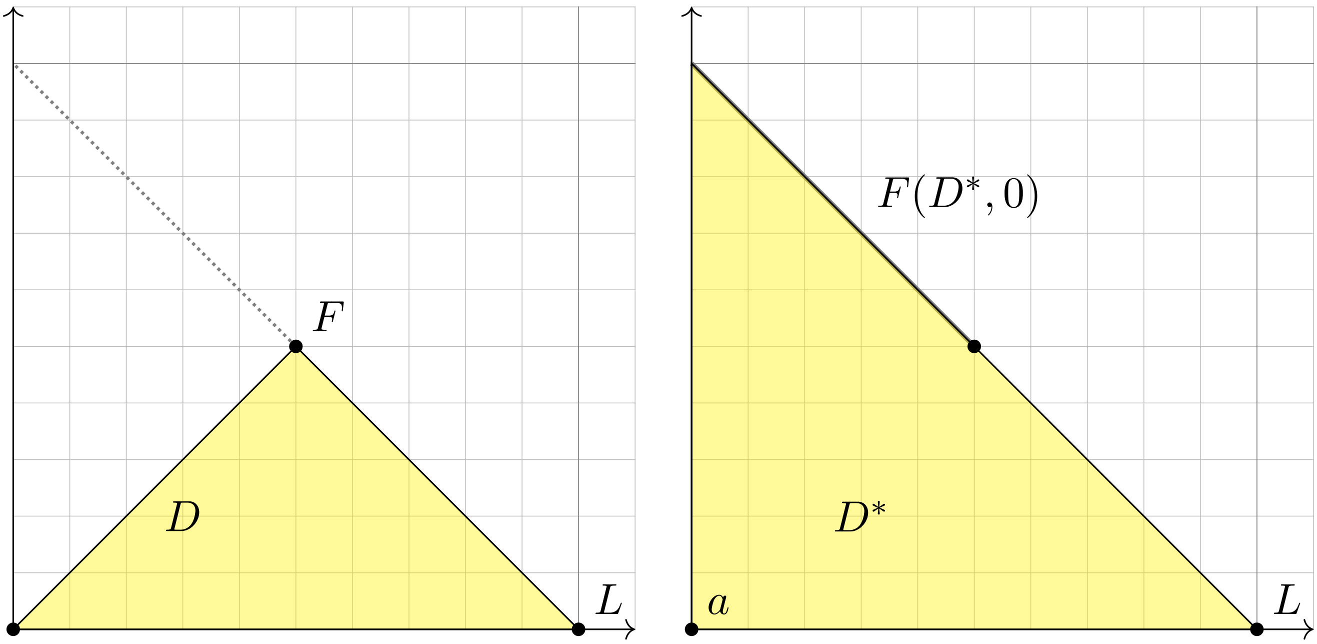
Satz L1F: lexikographische Lösung, Holzmüller et al. 2018

Die lexikographische Verhandlungslösung $L : V^2 \to \mathbb{R}^2$ ist die einzige, welche die drei Axiome INV, PAR, IIA sowie $L(\Delta, 0) = (2, 0)$ erfüllt.

Eindeutigkeit der lexikographischen Lösung als Beweis in Bildern:



Eindeutigkeit der lexikographischen Lösung, Fortsetzung und Schluss:



Asymmetrische Verhandlungslösungen

(4) Zur Eindeutigkeit sei neben L auch $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung, welche die Axiome INV, PAR, IIA erfüllt. Wir nehmen $F(K,a) \ne L(K,a)$ für ein Verhandlungsproblem $(K,a) \in V^2$ an und zeigen damit $F(\Delta, 0) \ne (2,0)$.

Es gilt $(K_{\ge a}, a) \subseteq (K,a)$; dank PAR und IIA dürfen wir „=“ annehmen. Dank INV dürfen wir $a = (0,0)$ annehmen, zudem $\max \operatorname{pr}_2 K = 1$.

Dank PAR liegen $u = F(K,a)$ und $L(K,a)$ in der Pareto–Front $\operatorname{Max} K$. Es gilt $u_1 < 1$ dank Definition von L und der Voraussetzung $u \ne L(K,a)$

Wir erweitern K zum Verhandlungsproblem $K^* = [K \cup (1,0)] \supseteq K$. Die Pareteo–Front $\operatorname{Max} K^* = \operatorname{Max} K$ wird hierdurch nicht verändert. Dank PAR gilt $F(K^*,0) \in \operatorname{Max} K^* \subset K$. Dank IIA folgt $F(K^*,0) = u$.

Wir betrachten nun das Dreieck $D = [(0,0),(1,0),u] \subseteq K^*$. Es gilt $F(K^*,0) = u \in D$. Dank IIA folgt $F(D,0) = u$.

Schließlich wählen wir das Dreieck $D^* = [(0,0),(1,0),(0,y)]$ so, dass u auf der Hypotenuse $[(1,0),(0,y)]$ liegt; dies ist möglich wegen $u_1 < 1$. Dank IIA kann $F(D^*,0)$ nicht in $]u,(1,0)]$ liegen, also $F(D^*,0) \ne (1,0)$.

Dank INV folgt schließlich $F(\Delta,0) \ne (2,0)$, was zu zeigen war.

Verhandlungstheorie für mehrere Spieler

Bislang haben wir nur Verhandlungen mit zwei Spielern untersucht. Dieselben Fragen und Antworten finden wir ebenso für mehrere Spieler.

Aufgabe: Definieren Sie für jede Spielerzahl $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ die Menge V^n der Verhandlungsprobleme und darauf Verhandlungslösungen $F : V^n \to \mathbb{R}^n$. Übertragen Sie soweit möglich Axiome, Beispiele, Sätze und Beweise.

In beliebiger Dimension haben wir keine Anschauung oder Intuition. Diese Übung ist daher eine gute Ergänzung zur Formalisierung! Hier können Sie wunderbar die Techniken der mehrdimensionalen Analysis einsetzen, insbesondere Lagrange–Multiplikatoren.

⚠ Wir diskutieren vorrangig den klassischen Zwei-Spieler-Fall $n = 2$. Die axiomatisch-geometrische Behandlung gelingt in jeder Dimension n. Die spieltheorietisch-ökonomische Interpretation ist jedoch weniger klar. Welche konkrete Verhandlungssituation wird beschrieben und gelöst? Entweder *alle* kooperieren oder *jeder* steht für sich allein (Drohpunkt). Das nächste Kapitel untersucht allgemeiner und genauer Koalitionen.

Axiome fordern ist nicht schwer. . .

Axiome zu formulieren, ist eine Kunst. Viele scheinen anfangs vernünftig, erweisen sich aber gemeinsam als widersprüchlich, also unerfüllbar! Ich möchte dies sofort mit einem drastischen Beispiel illustrieren. Wir setzen im Folgenden wieder Pareto–Optimalität (PAR) voraus.

Aufgabe: Übersetzen Sie folgende Forderungen in Formeln.

(1) „Wenn neue Alternativen hinzukommen, dann ist die neue Lösung eine der neuen Alternativen oder unverändert die alte Lösung.“

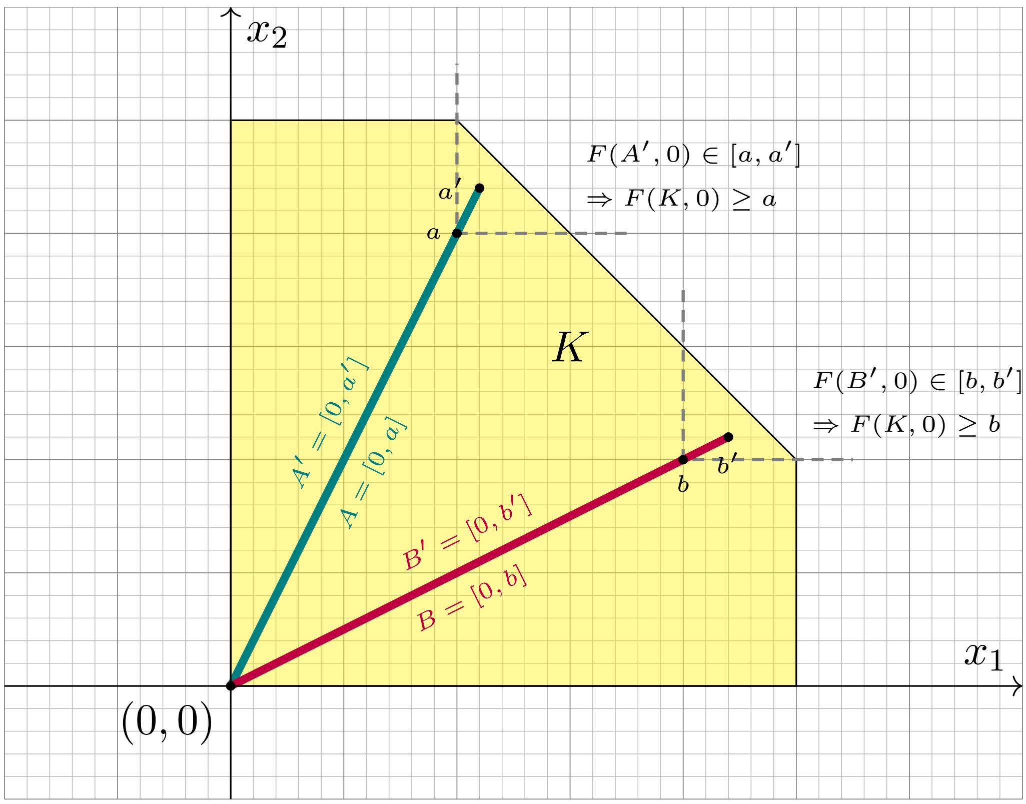
Sei $(K, a) \subseteq (L, a)$ in V^2. Aus $F(L, a) = u \in K$ folgt $F(K, a) = u$.
IIA: Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen.

(2) „Wenn zur alten Lösung strikt bessere Alternativen hinzukommen, dann ist die neue Lösung eine dieser strikt besseren Alternativen.“

Sei $(K, a) \subseteq (L, a)$. Aus $F(K, a) = u$ und $L_{>u} \neq \emptyset$ folgt $F(L, a) \in L_{>u}$.
ÜBA: Übertrumpfen durch strikt bessere Alternativen.

. . . Axiome erfüllen hingegen sehr.

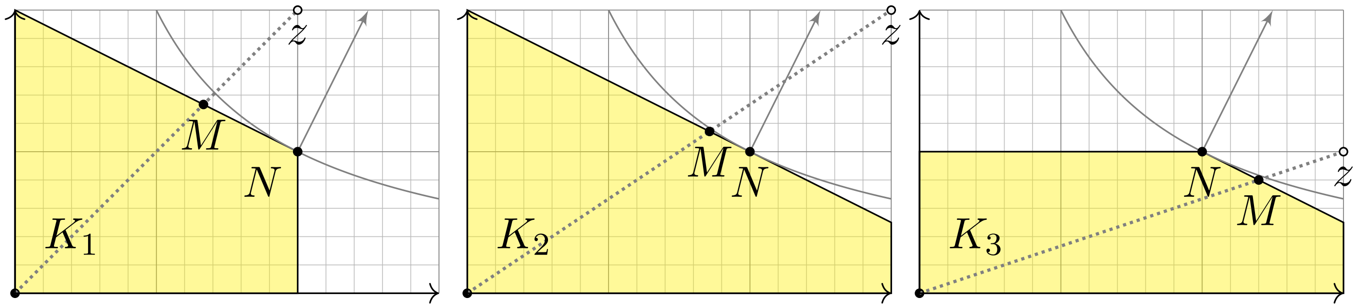
Aufgabe: Finden Sie alle VLösungen $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$, die ÜBA erfüllen.



Lösung: Keine Verhandlungslösung $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ erfüllt ÜBA!

Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen

Ist die Nash–Verhandlungslösung wirklich „fair“ und „gerecht“?



In Situation K_1 bekommt Alice ihr Maximum, Bob nur die Hälfte. Beim Übergang zu K_2 stärkt Alice ihre Position, aber ihr Ergebnis stagniert; umgekehrt schwächt Alice ihre Position, aber Bob profitiert nicht davon. Sinngemäß gilt dasselbe beim Übergang von K_2 zu K_3 und zurück.

In jedem Vergleich findet mindestens ein Spieler einen Grund zur Klage. Er hält die zusätzlichen Alternativen für relevant und bestreitet IIA.

Ist das Nash–Verfahren N deshalb unfair? Nein, das Verfahren ist fair, aber die vorgelegten Verhandlungssituationen (K_i, a) selbst sind unfair. Die zugeordneten Lösungen $N(K_i, a)$ können das nicht wunderheilen.

Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen

Die vier Nash–Axiome scheinen zunächst natürlich und plausibel, zudem können wir daraus eine schöne Charakterisierung ableiten. In manch konkretem Beispiel keimen leise Zweifel. . . Daher nochmal:

Der Schlichter schlägt für jedes Verhandlungsproblem eine Lösung vor. Alle Lösungen sollen „fair“ und „nachvollziehbar“ sein, und der Schlichter „konsistent“. Die vier Nash–Axiome geben hierauf präzise Antworten.

Die Schlichtung gelingt nur, wenn sie alle Parteien überzeugt. Hierzu ist es hilfreich, dass sie zur Begründung ihres Vorschlags nachvollziehbare Gründe und überzeugende Argumente anführt.

Nashs Axiome formulieren vier solche nachvollziehbaren Gründe. Sie erklären, was wir von einer fairen Verhandlungslösung erwarten. Über die Auswahl und Festlegung dieser Axiome kann man streiten, ihre Konsequenzen jedoch folgen mit mathematischer Präzision.

Einzelne Vorschläge mögen unfair erscheinen, doch das Verfahren ist fair im Sinne der Definition, denn es erfüllt all unsere Anforderungen. Aus unfairen Situationen kann es keine fairen Lösungen zaubern.

Die monotone Verhandlungslösung

Wir ersetzen Unabhängigkeit IIA durch eine alternative Forderung...

MON: Monotonie. Für $(K, a) \subseteq (L, a)$ in V^2 gilt $F(K, a) \leq F(L, a)$, vorausgesetzt $\max \mathrm{pr}_i K_{\geq a} = \max \mathrm{pr}_i L_{\geq a}$ bleibt erhalten für $i = 1, 2$.

Satz L1G: monotone Lösung, Kalai–Smorodinsky 1975

Existenz & Eindeutigkeit: Es gibt genau eine Verhandlungslösung $M : V^2 \to \mathbb{R}^2$, welche die Axiome INV, PAR, SYM und MON erfüllt. Diese heißt daher auch die **monotone Verhandlungslösung**.

Berechnung: Zu $(K, a) \in V^2$ ist die Lösung $M(K, a)$ der maximale Punkt auf der Strecke $K \cap [(a_1, a_2), (z_1, z_2)]$ mit $z_i = \max \mathrm{pr}_i K_{\geq a}$.

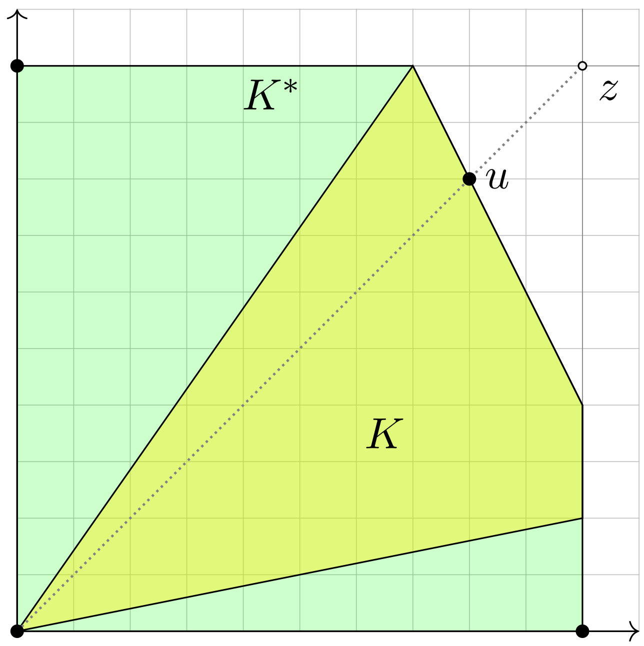
Aufgabe: Beweisen Sie diese Charakterisierung analog zu Satz L1B.

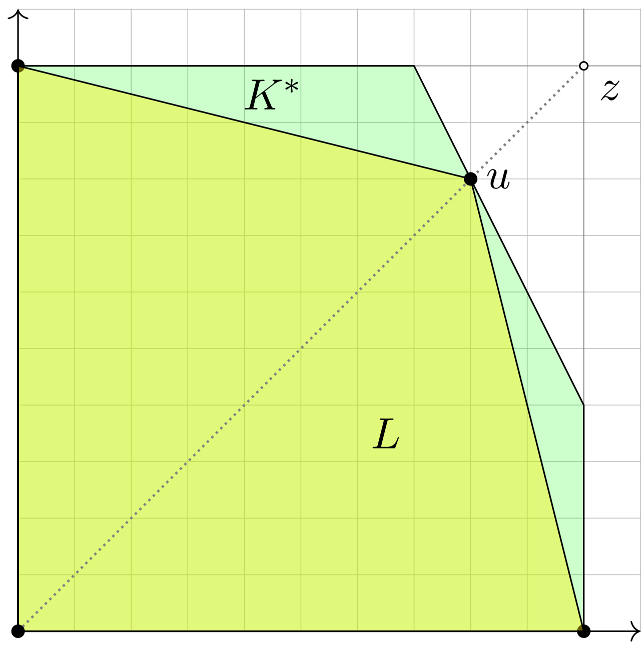
Die monotone Lösung M unterscheidet sich von der Nash–Lösung N, denn N erfüllt IIA aber nicht MON, und M erfüllt MON aber nicht IIA. Wer es konkret mag, findet deutliche Unterschiede in den Beispielen.

Dieser Satz geht zurück auf E. Kalai, M. Smorodinsky: *Other Solutions to Nash's Bargaining Problem*, Econometrica 43 (1975) 513–518.

Die monotone Verhandlungslösung

Eindeutigkeit $F(K, a) = M(K, a)$ als Beweis in Bildern:





Dank INV dürfen wir $a = (0, 0)$ und $\max \mathrm{pr}_i K_{\geq a} = 1$ annehmen. Auf $(K, a) \subseteq (K^*, a)$ und $(L, a) \subseteq (K^*, a)$ können wir MON anwenden. Das zeigt $F(K, a) = F(K^*, a) = F(L, a) = u = M(K, a)$, also $F = M$.

Die monotone Verhandlungslösung

Lösung: (1) Existenz: Die angegebene Lösung

$$M \;:\; V^2 \to \mathbb{R}^2 \;:\; (K,a) \mapsto \max(K \cap [(a_1,a_2),(z_1,z_2)])$$

erfüllt die vier gewünschten Eigenschaften INV, PAR, SYM, MON.
(Das muss man sorgsam nachprüfen. Übung: Versuchen Sie es!)

(2) Eindeutigkeit: Angenommen $F : V^2 \to \mathbb{R}^2$ erfüllt diese Axiome.
Wir leiten daraus ab, dass $F = M$ gilt. Hierzu sei $(K,a) \in V^2$.

Es gilt $(K_{\geq a}, a) \subseteq (K,a)$. Dank MON folgt $F(K_{\geq a}, a) \leq F(K,a)$, dank PAR $F(K_{\geq a}, a) = F(K,a)$. Wir dürfen also $(K_{\geq a}, a) = (K,a)$ annehmen, dank INV zudem $a = (0,0)$ und schließlich $\max \operatorname{pr}_1 K = \max \operatorname{pr}_2 K = 1$.

Sei $u = M(K,a) = a + \lambda(1,1)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ maximal. Wir betrachten wie skizziert $K^* := [K \cup \{(1,0),(0,1)\}]$ und $L := [\{(0,0),\ (0,1)\,(1,0), u\}]$.

Es gilt $(K,0) \subseteq (K^*,0)$. Dank MON folgt $F(K,0) = F(K^*,0)$.
Es gilt $(L,0) \subseteq (K^*,0)$. Dank MON gilt $F(L,0) = F(K^*,0)$.
Dank SYM und PAR gilt $F(L,0) = u$, also $F(K,0) = M(K,0)$.

Die monotone Verhandlungslösung

Die monotone Lösung M und die Nash–Lösung N sind die beiden bekanntesten Verhandlungslösungen. Beide lassen sich axiomatisch charakterisieren, wie hier dargestellt, und geometrisch bestimmen.

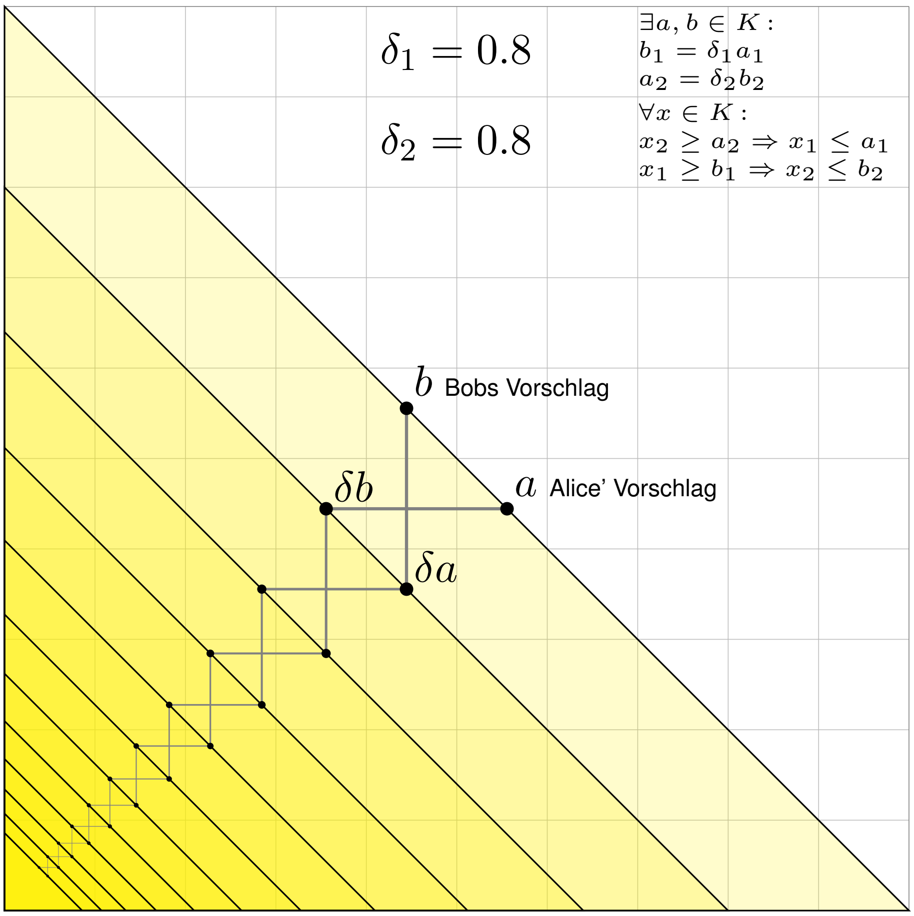
Die Nash–Lösung wird durch die Axiome INV, SYM, PAR und IIA charakterisiert. Viel Kritik entzündet sich traditionell am letzten Axiom, der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen. Als Reaktion darauf entwickelten Kalai und Smorodinsky ihren monotonen Lösungsbegriff, der durch die Axiome INV, SYM, PAR und MON charakterisiert wird.

Die Nash–Lösung erfüllt das Axiome IIA, aber nicht MON,
die monotone Lösung erfüllt umgekehrt MON, aber nicht IIA.
Auf symmetrischen VProblemen stimmen beide Lösungen überein.

Beide Lösungen wurden experimentell in Laborexperimenten getestet: Welche kommt dem empirisch beobachteten Verhalten am nächsten?

Wir durchleuchten eine solche Implementierung hier mathematisch: Die beiden Spieler machen abwechselnd Angebote bis zur Einigung. Welches Verhandlungsergebnis stellt sich bei rationalen Spielern ein?

Verhandeln durch alternierende Angebote



Verhandeln durch alternierende Angebote

Beispiel: Wir betrachten $K = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{\ge 0} \mid x_1 + x_2 \le 1 \}$ mit der Pareto–Front $\operatorname{Max} K = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{\ge 0} \mid x_1 + x_2 = 1 \}$. Für $a, b \in \operatorname{Max} K$ lösen wir $\delta_1 a_1 = b_1$ und $\delta_2 b_2 = a_2$ auf zu

$$a_1 = \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1 \delta_2} \in \left]0, 1\right[\quad \text{und} \quad b_2 = \frac{1 - \delta_1}{1 - \delta_1 \delta_2} \in \left]0, 1\right[.$$

🙂 Probe durch Einsetzen in die geforderten Gleichungen:

$$a_2 = 1 - a_1 = \frac{\delta_2 - \delta_1 \delta_2}{1 - \delta_1 \delta_2} = \delta_2 b_2 \quad \text{und} \quad b_1 = 1 - b_2 = \frac{\delta_1 - \delta_1 \delta_2}{1 - \delta_1 \delta_2} = \delta_1 a_1$$

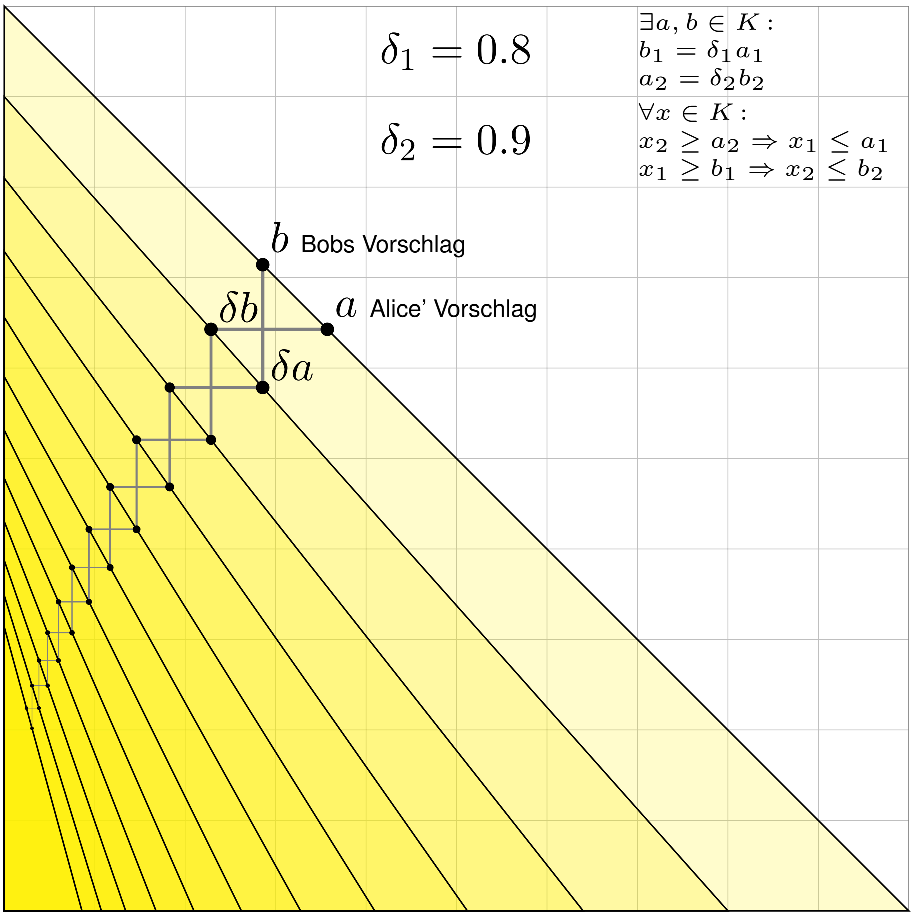
Spezialfall: gleiche Diskontfaktoren $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Für $\delta \nearrow 1$ finden wir:

$$a_1 = \frac{1 - \delta}{1 - \delta^2} = \frac{1}{1 + \delta} \to \frac{1}{2} \qquad \text{also} \qquad a, b \to \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

🙂 Das entspricht der symmetrischen Nash–Verhandlungslösung!

Für $\delta < 1$ bekommt Alice etwas mehr vom Kuchen. Das ist ihr Privileg des ersten Zugs. Im Grenzwert $\delta \nearrow 1$ verschwindet dieser Vorteil.

Verhandeln durch alternierende Angebote



Verhandeln durch alternierende Angebote

Wir betrachten die Diskontfaktoren $\delta_i = \mathrm{e}^{-t/p_i}$ mit $p_i \in \mathbb{R}_{>0}$.

☺ Anschaulich ist $t > 0$ der feste Zeittakt für jede Verhandlungsrunde. Der Geduldsparameter $p_i/\ln 2$ ist hier die Halbwertszeit für Spieler i. Der Kuchen $K_n = (\delta_1^n, \delta_2^n) \cdot K$ schrumpft mit der Zeit, exponentiell in nt.

Als Startwert vereinbaren wir $t = 1$. Für $t \searrow 0$ finden wir:

$$a_1 = \frac{1 - \mathrm{e}^{-t/p_2}}{1 - \mathrm{e}^{-t/p_1}\,\mathrm{e}^{-t/p_2}} \to \frac{p_1}{p_1 + p_2} \quad \text{also} \quad a, b \to \left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right)$$

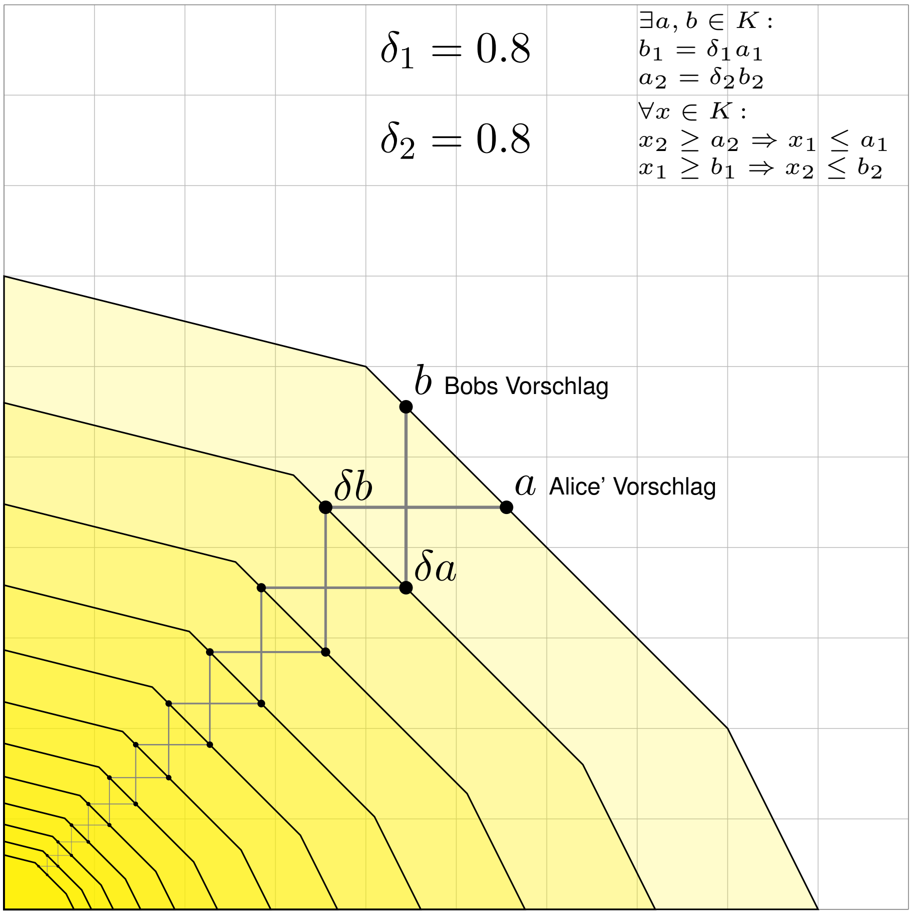
☺ Das entspricht der asymmetrischen Nash–Verhandlungslösung!

Ist Alice geduldiger, $p_1 > p_2$, dann bekommt sie mehr vom Kuchen. Im symmetrischen Fall $p_1 = p_2$ gilt $a, b \to (1/2, 1/2)$ wie zuvor berechnet. Weiterhin gilt das Privileg des ersten Zugs, hier als Zeitvorteil $t > 0$. Im Grenzwert $t \searrow 0$ verschwindet dieser Vorteil.

☺ Geduld erhöht die Verhandlungsmacht! Das ist intuitiv plausibel.

Rubinsteins Verhandlungsmodell mit alternierenden Angeboten erklärt hierzu eine detaillierte Spielmechanik und liefert quantitative Ergebnisse.

Verhandeln durch alternierende Angebote



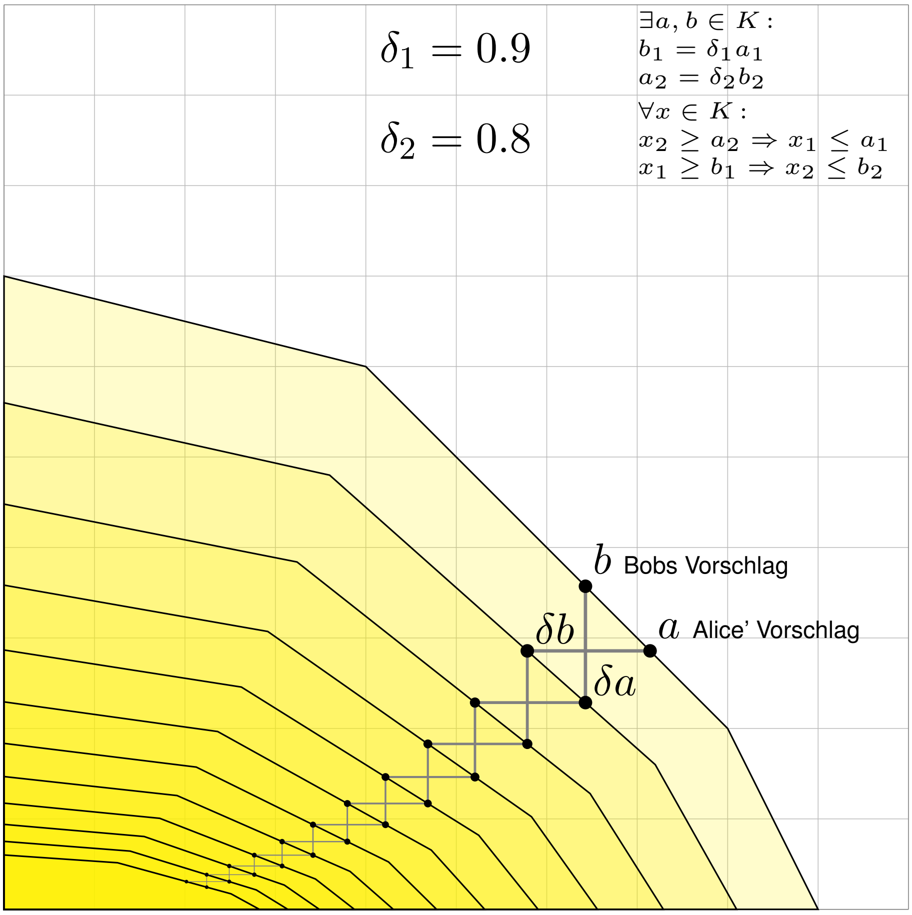
Verhandeln durch alternierende Angebote

Ein wesentlicher Aspekt des Rubinstein–Modells ist das Schrumpfen der Verhandlungsmenge: Der zu verteilende Kuchen nimmt mit der Zeit exponentiell / geometrisch ab. Nur durch diesen Zeitdruck entsteht hier die innere Dynamik der Verhandlung und der Anreiz zur Einigung.

Die Diskontierung mit δ_i können wir auf drei Arten interpretieren:

1. **Intersubjektive Inflation:** Geld morgen ist weniger wert als heute. Wertverlust in Form des Faktors $\delta \in]0, 1[$ ist intersubjektiv, für alle Spieler gleich. Der vermutete Wert δ_i kann jedoch individuell sein.
2. **Individuelle Geduld:** Warten verringert den Nutzen, auch hier ist Geld morgen weniger wert als Geld heute, diesmal aber für jeden Spieler $i \in I$ individuell diskontiert durch den Faktor $\delta_i \in]0, 1[$.
3. **Abbruchwahrscheinlichkeit:** Zu Recht wenden Sie ein, dass unendliche Wiederholung unrealistisch ist. Viel realistischer sind dagegen wiederholte Spiele mit einer gewissen Abbruchwkt $\varepsilon > 0$. Das führt zu derselben geometrischen Summe mit Fortsetzungswkt $\delta = 1 - \varepsilon$. Auch hier kann der vermutete Wert δ_i individuell sein.

Verhandeln durch alternierende Angebote



Verhandeln durch alternierende Angebote

Wir behandeln dieses Spiel zunächst geometrisch, anschließend formal.

Gegeben seien zwei Punkte $a, b \in K$ mit $\delta_1 a_1 = b_1$ und $\delta_2 b_2 = a_2$.
Für alle $x \in K$ gelte zudem $x_1 \geq b_1 \Rightarrow x_2 \leq b_2$ und $x_2 \geq a_2 \Rightarrow x_1 \leq a_1$.

Wir betrachten folgendes Strategiepaar (stationär, ohne Erinnerung):

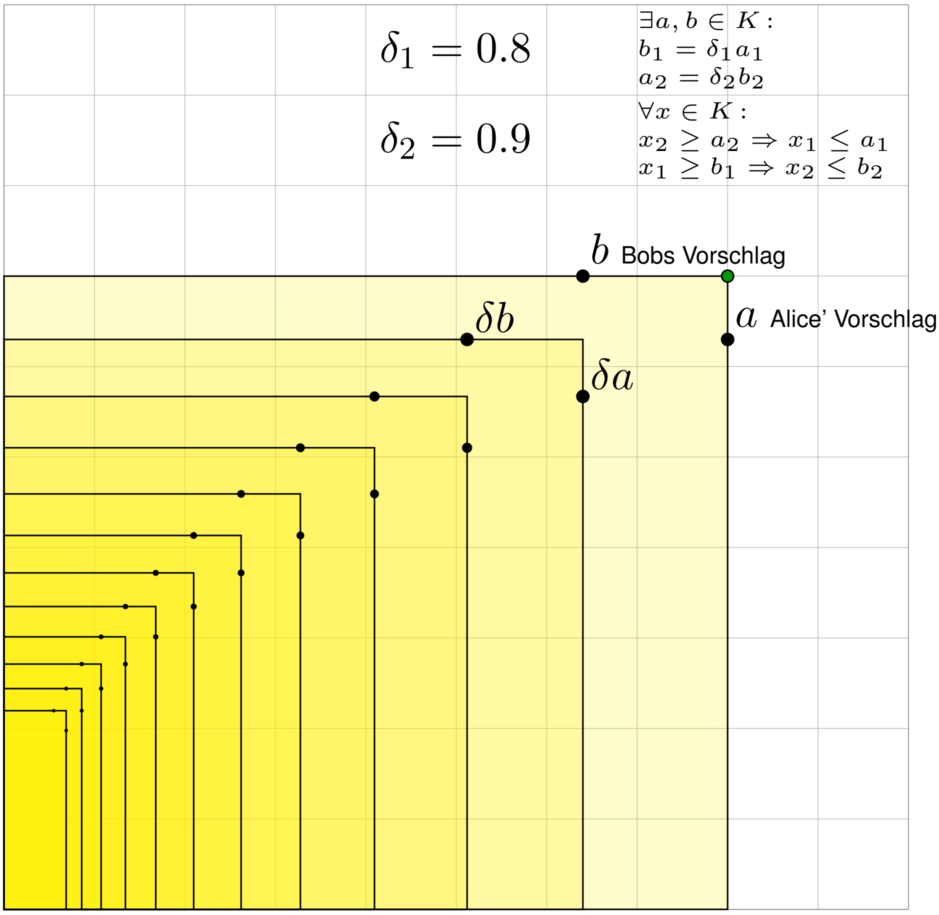
- Alice schlägt $a \in K$ vor und akzeptiert $x \in K$ gdw $x_1 \geq \delta_1 a_1 = b_1$.
- Bob schlägt $b \in K$ vor und akzeptiert $x \in K$ gdw $x_2 \geq \delta_2 b_2 = a_2$.

Ist das ein Gleichgewicht? Wir untersuchen einmalige Abweichungen:

- Alice will a vorschlagen, doch sie erwägt alle Alternativen $x \in K$.
  Im Falle $x_2 < a_2$ lehnt Bob ab; Alice erhält dann nur $b_1 = \delta_1 a_1 < a_1$.
  Für $x_2 \geq a_2$ stimmt Bob zu; wegen $x_1 \leq a_1$ hat Alice keinen Vorteil.
- Bob will das Angebot a annehmen, doch er erwägt Ablehnung.
  Dann bekommt er ebenfalls $\delta_2 b_2 = a_2$, also keine Verbesserung.

Dieselben Argumente gelten mit vertauschten Rollen für Bob und Alice.
Das Prinzip der einmaligen Abweichung fordert Stetigkeit. Das ist erfüllt.
Das obige Strategiepaar ist somit ein teilspielperfektes Gleichgewicht.
(Gibt es weitere? Das ist schwieriger. Lemma L2D zeigt Eindeutigkeit.)

Verhandeln durch alternierende Angebote



Verhandeln durch alternierende Angebote

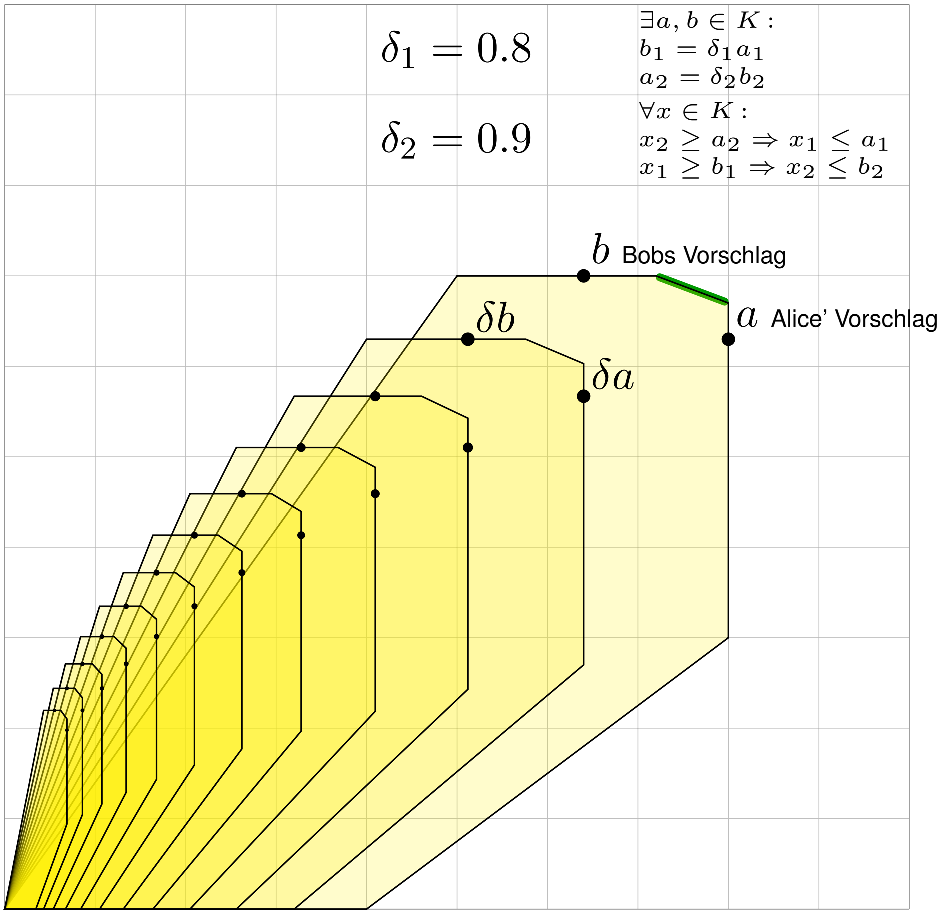
Die vorigen Beispiele waren geometrisch einfach und eindeutig. Als Mahnung zur Vorsicht diskutieren wir Rechtecke, wie gezeigt. Die Pareto–Front $\operatorname{Max} K$ degeneriert hier zu einem einzigen Punkt. Auf den ersten Blick ist nur dieser Punkt ein vernünftiges Ergebnis.

Wie zuvor sind die alternierenden Angebote a und b ein Gleichgewicht. Daneben gibt es noch überabzählbar viele weitere Gleichgewichte und dazu gehören sogar überabzählbar viele Gleichgewichtsauszahlungen! Anschaulich ist die Verhandlungslage hier nicht strikt kompetitiv:

Alice kann ihren Vorschlag a zwar nicht für sich selbst verbessern, denn $a_1 = m_1 = \max \operatorname{pr}_1 K$, doch sie könnte Bob eine Verbesserung bieten. Bob kann seinen Vorschlag b zwar nicht für sich selbst verbessern, denn $b_2 = m_2 = \max \operatorname{pr}_2 K$, doch er könnte Alice eine Verbesserung bieten.

Diese Ambivalenz verkompliziert unsere spieltheoretische Analyse. Zur Vereinfachung wollen wir Degenerierung kurzerhand ausschließen. Wir fordern dazu, dass die Pareto–Front $\operatorname{Max} K$ maximal ausgedehnt ist, also komplett von Achse zu Achse läuft, kurz $(m_1, 0), (0, m_2) \in \operatorname{Max} K$.

Verhandeln durch alternierende Angebote



Verhandeln durch alternierende Angebote

Dieses modifizierte Beispiel ähnelt dem vorigen Problem des Rechtecks, hier jedoch ist die Pareto–Front $\operatorname{Max} K$ nicht nur ein einzelner Punkt, sondern ein Geradensegment, allzu kurz, aber immerhin ausgedehnt. Auch hier liegen außerhalb der Pareto–Front weitere Gleichgewichte!

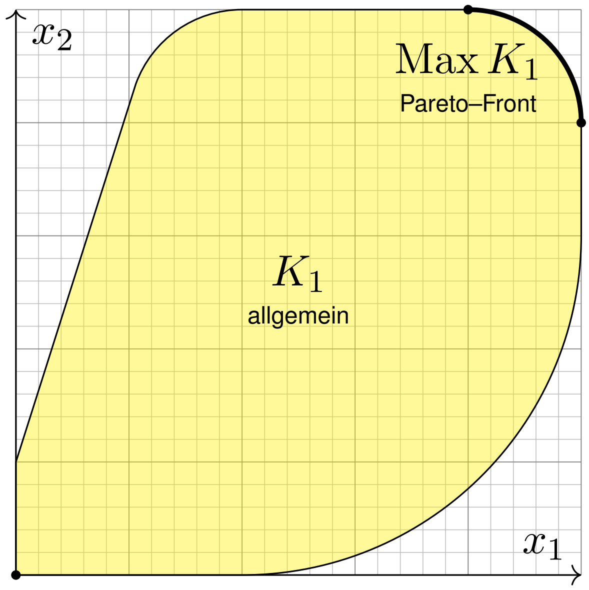
Wie zuvor sind die alternierenden Angebote a und b ein Gleichgewicht. Daneben gibt es noch überabzählbar viele weitere Gleichgewichte und dazu gehören sogar überabzählbar viele Gleichgewichtsauszahlungen! Anschaulich: Die Verhandlungslage ist wieder nicht strikt kompetitiv.

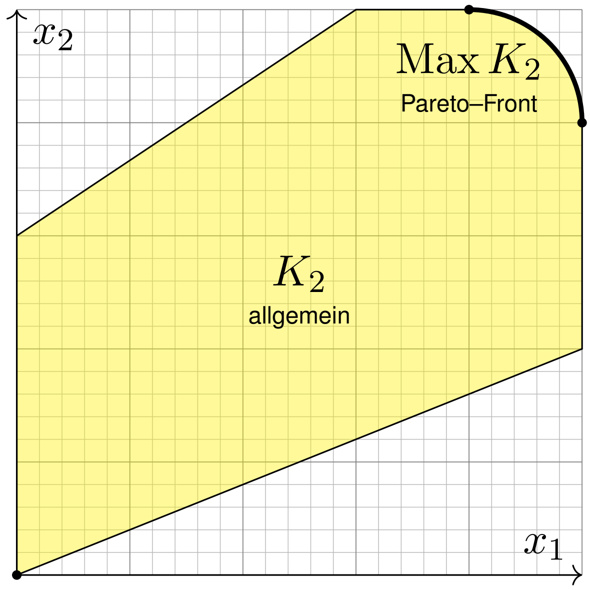
Was wäre die schönste Aussage, die bisher noch nicht widerlegt ist? Wir würden vermuten, unter der nötigen geometrischen Vereinfachung, dass a bzw. b tatsächlich die einzige Gleichgewichtsauszahlung ist. Genau dies ist der Satz L2c von Rubinstein, auf den wir zusteuern.

Nach diesen Beispielen und Mahnungen ist die Vorgehensweise klar:

- Wir präzisieren die geometrischen Voraussetzungen an K.
- Wir formalisieren die Verhandlung $\Gamma = \Gamma(K, \delta)$ in extensiver Form.
- Wir finden alle Gleichgewichte $s \in \operatorname{PNE}(\Gamma)$ bzw. ihre Auszahlungen.

Geometrische Vorbereitung





Sei $K \Subset \mathbb{R}^2_{\geq 0}$ konvex und kompakt mit Drohpunkt $0 \in K$.
Wir setzen $m_1 := \max \operatorname{pr}_1 K$ und ebenso $m_2 := \max \operatorname{pr}_2 K$.

$K = \{\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq m_1,\ \psi_1(x_1) \leq x_2 \leq \varphi_1(x_1) \,\}$ mit
$\psi_1, \varphi_1 : [0, m_1] \to [0, m_2]$ stetig, ψ_1 konvex wachsend, φ_1 konkav.

$K = \{\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_2 \leq m_2,\ \psi_2(x_2) \leq x_1 \leq \varphi_2(x_2) \,\}$ mit
$\psi_2, \varphi_2 : [0, m_2] \to [0, m_1]$ stetig, ψ_2 konvex wachsend, φ_2 konkav.

Geometrische Vorbereitung

Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt **Normalbereich in y–Richtung**, wenn

$$B = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x) \,\}$$

mit $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \leq h$. Dies nutzen wir z.B. zur Integration: B ist kompakt, somit messbar und $\operatorname{vol}_2(B) < \infty$. Sei $f : B \to \mathbb{R}$ absolut integrierbar, z.B. beschränkt oder gar stetig. Dann gilt dank Fubini:

$$\int_B f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_{x=a}^{b} \int_{y=g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

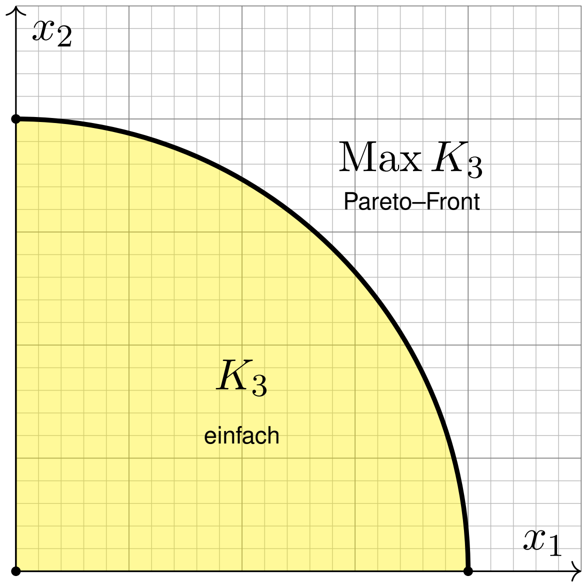
Entsprechend ist $B \subset \mathbb{R}^2$ ein **Normalbereich in x–Richtung**, wenn

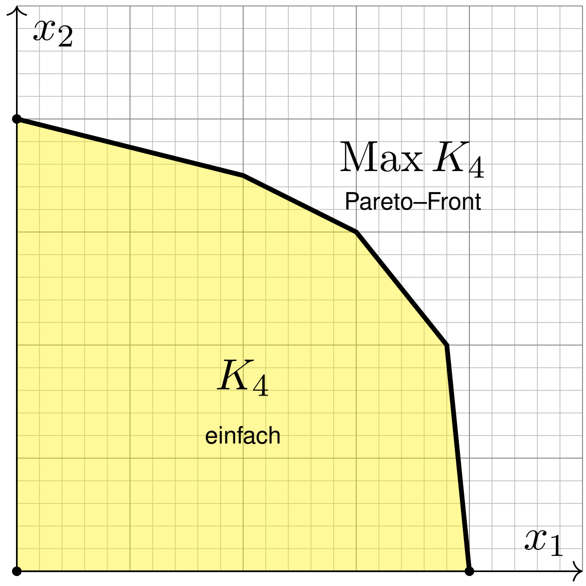
$$B = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b,\ g(y) \leq x \leq h(y) \,\}.$$

Gilt beides, so nennen wir B einen **Binormalbereich**.

Aufgabe: Jedes konvexe Kompaktum $K \Subset \mathbb{R}^2$ ist ein Binormalbereich. Wie konstruieren Sie jeweils die eingrenzenden Funktionen g und h? Warum sind diese dann stetig, zudem g konvex und h konkav?

Geometrische Vereinfachung





Zur Vereinfachung gelte $(m_1, 0) \in \operatorname{Max} K$ und $(0, m_2) \in \operatorname{Max} K$.
Dann verläuft die Pareto–Front von der x_1–Achse zur x_2–Achse.

Somit gilt $K = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x_1 \le m_1,\ 0 \le x_2 \le \varphi_1(x_1) \}$
umgekehrt $K = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x_2 \le m_2,\ 0 \le x_1 \le \varphi_2(x_2) \}$
mit $(\varphi_1, \varphi_2) : [0, m_1] \cong [0, m_2]$ stetig, bijektiv, konkav fallend.

Geometrische Vereinfachung

Aufgabe: Weisen Sie alle hier gemachten Aussagen sorgfältig nach!
Differenzieren im Sinne der Analysis 1 können Sie im Allgemeinen nicht, aber Geometrie und Topologie sind Ihnen hier wie immer treue Helfer.

Verhandlungsgleichgewicht und die Nash–Lösung

Für die Analyse beschaffen wir uns zunächst das Punktepaar (a, b):

Lemma L2A: Verhandlungsgleichgewicht und Nash–Lösung

Sei $0 \in K \Subset \mathbb{R}^2_{\ge 0}$ konvex und kompakt sowie $(m_1, 0), (0, m_2) \in \operatorname{Max} K$.

Zu jedem Parameterpaar $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\delta_1 = \mathrm{e}^{-t/p_1}$, $\delta_2 = \mathrm{e}^{-t/p_2}$ existiert auf der Pareto–Front genau ein Punktepaar $a, b \in \operatorname{Max} K$ mit

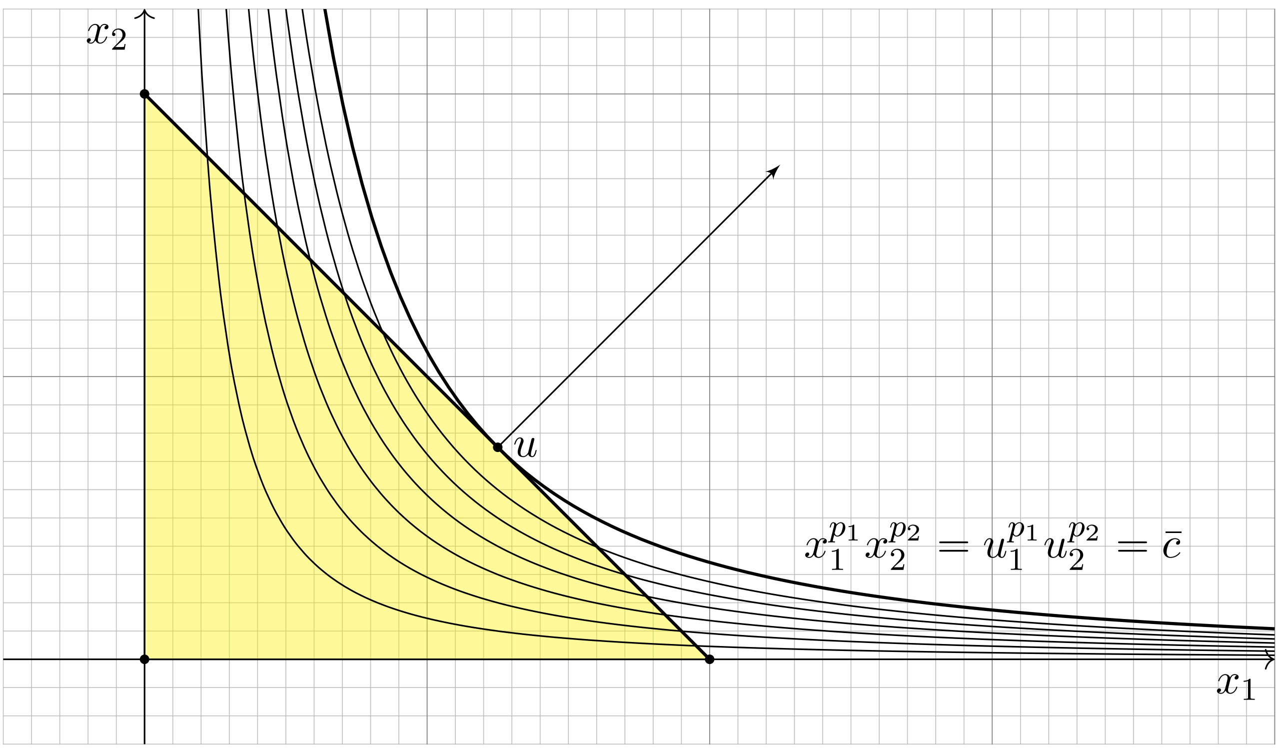
$$\delta_1 a_1 = b_1 \quad \text{und} \quad \delta_2 b_2 = a_2.$$

Für $t \searrow 0$ konvergieren $a(t)$ und $b(t)$ gegen die asymmetrische Nash–Verhandlungslösung $P(K, 0) = u$, also den eindeutigen Maximierer $u \in K$ der Funktion $h : K \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto x_1^{p_1} x_2^{p_2}$.

Beispiel: Wir betonen den symmetrischen Fall $p_1 = p_2$, also $\delta_1 = \delta_2$: Für $t \searrow 0$ konvergieren hierbei $a(t)$ und $b(t)$ gegen die symmetrische Nash–Verhandlungslösung $N(K, 0) = u$, also den eindeutigen Maximierer $u \in K$ der Funktion $h : K \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$.

Verhandlungsgleichgewicht und die Nash–Lösung

Existenz und Eindeutigkeit und Konvergenz als Beweis in Bildern:



☺ Hier sind Geometrie und Topologie gefragt, allerdings noch einfach.

Beweis: Aus $\delta_1 a_1 = b_1$ und $\delta_2 b_2 = a_2$ folgt $h(a) = h(b)$, denn

$$h(a) = (a_1)^{p_1}(a_2)^{p_2} = (\mathrm{e}^{t/p_1} b_1)^{p_1}(\mathrm{e}^{-t/p_2} b_2)^{p_2} = (b_1)^{p_1}(b_2)^{p_2} = h(b)$$

Umgekehrt: Je zwei dieser drei Gleichungen implizieren die dritte.

Sei $\bar{c} := \max_K h = h(u)$. Der Maximierer $u \in K$ ist eindeutig.

Für jedes Niveau $c \in \left]0, \bar{c}\right[$ schneidet die zugehörige Niveaulinie $h^{-1}(c) = \{\, x \in \mathbb{R}^2_{>0} \mid x_1^{p_1} x_2^{p_2} = c \,\}$ die Pareto–Front genau zweimal: Es gilt $h^{-1}(c) \cap \operatorname{Max} K = \{a, b\}$ mit $b_1 < u_1 < a_1$ und $a_2 < u_2 < b_2$.

Die Zuordnung $c \mapsto a_1$ ist antiton. Die Zuordnung $c \mapsto b_1$ ist isoton.
Für $c \searrow 0$ gilt $b_1 \searrow 0$ und $a_1 \nearrow m_1$, also $\delta_1 = b_1/a_1 \searrow 0$.
Für $c \nearrow \bar{c}$ gilt $b_1 \nearrow u_1$ und $a_1 \searrow u_1$, also $\delta_1 = b_1/a_1 \nearrow 1$.

Die Zuordnung $c \mapsto b_1/a_1$ ist stetig. Also wird jeder Wert in $\left]0, 1\right[$ genau einmal angenommen. Aus $b_1/a_1 = \mathrm{e}^{-t/p_1}$ folgt dann $a_2/b_2 = \mathrm{e}^{-t/p_2}$. QED

Aufgabe: Prüfen Sie alle Teilaussagen dieses Beweises sorgfältig nach.

Rubinsteins Verhandlungsmodell

Annahmen: Sei $K \Subset \mathbb{R}^2_{\geq 0}$ konvex und kompakt mit Drohpunkt $0 \in K$. Mit jedem Zeitschritt $n = 0, 1, 2, \dots$ schrumpft der zu verteilende Kuchen auf die Menge $K_n := (\delta_1^n, \delta_2^n) \cdot K$ mit konstanten Faktoren $\delta_1, \delta_2 \in \,]0,1[$.

Diese Daten definieren das **Rubinstein–Modell** einer Verhandlung durch alternierende Angebote als dynamisches Spiel $\Gamma = \Gamma(K, \delta)$, genauer Γ_1, falls Alice beginnt, und Γ_2, falls Bob beginnt.

Als Alphabet wählen wir $\mathcal{A} = K \sqcup \{\, \text{👎} = \text{ablehnen},\ \text{👍} = \text{akzeptieren} \,\}$. Spielbaum $X = X^\circ \sqcup \partial X$ und Auszahlung u entstehen daraus wie folgt:

$$
\begin{aligned}
X_0^\circ &= \{\emptyset\}, \\
X_{2n+1}^\circ &= X_{2n}^\circ * K &&= \{v = (x_0, \text{👎}, \dots, x_n)\}, \\
X_{2n+2}^\circ &= X_{2n+1}^\circ * \{\text{👎}\} &&= \{v = (x_0, \text{👎}, \dots, x_n, \text{👎})\}, \\
\partial X_{2n+2} &= X_{2n+1}^\circ * \{\text{👍}\} &&= \{v = (x_0, \text{👎}, \dots, x_n, \text{👍})\}, \quad && u^i(v) = \delta_i^n x_n^i, \\
X_\infty &= (K * \{\text{👎}\})^\infty &&= \{v = (x_0, \text{👎}, x_1, \text{👎}, \dots)\}, \quad && u^i(v) = 0.
\end{aligned}
$$

☺ Dieses Verhandlungsmodell ist sehr intuitiv und recht natürlich. Es gilt daher als realistische Wiedergabe echter Verhandlungen.

Rubinsteins Verhandlungsmodell

Hier ist K die Verhandlungsmenge. Jedes ihrer Elemente $x \in K$ ist ein mögliches Verhandlungsergebnis und kann als Angebot genutzt werden. Die Verhandlung verläuft alternierend, wobei zunächst Alice beginnt: Zuerst macht Alice ein Angebot. Lehnt Bob ab, so macht er ein Angebot. Lehnt Alice dieses ab, so macht sie ein Angebot. Und immer so weiter.

Zu jeder Vorgeschichte $v = (x_0, \text{👎}, \dots, x_{n-1}, \text{👎}) \in X$ haben wir

- für n gerade: $A_v^1 = K$ und $A_v^2 = \{\text{warten}\}$.
- für n ungerade: $A_v^2 = K$ und $A_v^1 = \{\text{warten}\}$.

Zu jeder Vorgeschichte $v = (x_0, \text{👎}, \dots, x_n) \in X$ haben wir

- für n gerade: $A_v^1 = \{\text{warten}\}$ und $A_v^2 = \{\text{👍}, \text{👎}\}$.
- für n ungerade: $A_v^2 = \{\text{warten}\}$ und $A_v^1 = \{\text{👍}, \text{👎}\}$.

Durch diese Aktionsmengen wird das Spiel Γ_1 eindeutig beschrieben, insbesondere werden alle Strategien $s^1 \in S^1$ und $s^2 \in S^2$ festgelegt.

Das Spiel Γ_2 definieren wir genauso, allerdings mit vertauschten Rollen, das bedeutet, wir vertauschen lediglich die Aktionsmengen A_v^1 und A_v^2.

Rubinsteins Verhandlungsmodell

„Of course, one cannot represent all possible bargaining devices as moves in the non-cooperative game. The negotiation process must be formalized and restricted, but in such a way that each participant is still able to utilize all the essential strengths of his position.“ (Nash 1953)

Wir brauchen demnach Modelle, die einerseits umfassend genug sind, um realistisch zu sein, andererseits einfach genug, um praktikable Analysen und Lösungen zuzulassen. Der axiomatisch-kooperative Ansatz löst das zweite Problem sehr elegant und liefert Lösungen. Doch welche der verschiedenen Verhandlungslösungen ist realistisch, in welchem Kontext ist sie geeignet, und wie sollen wir sie anwenden?

Hier hilft die nicht-kooperative Theorie als Richtschnur, denn wir können diese Modelle gut der Realität anpassen. In diesem Sinne ergänzen sich axiomatisch-kooperative und die strategisch-nicht-kooperative Theorie. Das **Nash–Programm** hat zum Ziel, die erste in die zweite einzubetten. Beide lassen sich so zudem empirisch überprüfen und kalibrieren, etwa passiv in (Real-Life-)Beobachtungen oder aktiv in (Labor-)Experimenten.

Rubinsteins Verhandlungsmodell

Rubinsteins Verhandlungsmodell $\Gamma(K,\delta)$ ist intuitiv und natürlich.

Es ist recht einfach und übersichtlich aufgebaut, doch die Menge der möglichen Strategien $S = S^1 \times S^2$ ist riesig: Jede Entscheidung verzweigt nur in zwei, aber bei jedem Vorschlag $x \in K$ verzweigt der Spielbaum sogleich in überabzählbar viele Teilbäume. Zum Glück haben wir eine universelle, präzise und bequeme Notation für all solche Fälle!

Diese Verzweigungen wiederholen sich abzählbar unendlich oft. Nicht alle Trajektorien / Spielverläufe sind endlich; Rückwärtsinduktion gemäß Satz J1D von Zermelo steht uns demnach nicht zur Verfügung.

Praktisch gesehen sind damit unfassbar viele Strategien denkbar, etwa das Feilschen von Harry und Brian aus dem Eingangszitat. Die Spieler können versuchen, sich gegenseitig zu beeindrucken: täuschen, drohen, einschüchtern, hinhalten, verwirren, ablenken, etc. Der Phantasie und Schauspielkunst sind hier kaum Grenzen gesetzt. Das Verhandlungsergebnis L2C hingegen ist ruhig und nüchtern.

Konstruktion des kanonischen Verhandlungsgleichgewichts

Wir zeigen zunächst $\mathrm{PNE}(\Gamma(K,\delta)) \ne \emptyset$ durch explizite Konstruktion:

Lemma L2B: kanonisches Verhandlungsgleichgewicht

Sei $0 \in K \Subset \mathbb{R}^2_{\ge 0}$ konvex und kompakt sowie $(m_1, 0), (0, m_2) \in \operatorname{Max} K$. Gegeben seien $a, b \in K$. Hierzu betrachten wir folgendes Strategiepaar:

- Alice schlägt immer $a \in K$ vor und akzeptiert $x \in K$ gdw $x_1 \ge \delta_1 a_1$.
- Bob schlägt immer $b \in K$ vor und akzeptiert $x \in K$ gdw $x_2 \ge \delta_2 b_2$.

Dies ist teilspielperfekt gdw $a, b \in \operatorname{Max} K$ sowie $\delta_1 a_1 = b_1$ und $\delta_2 b_2 = a_2$. Dank Lemma L2A existiert genau ein solches Punktepaar $a, b \in \operatorname{Max} K$.

Beweis: „$\Rightarrow$“ Angenommen unser Strategiepaar ist teilspielperfekt.

(1a) Gilt $a_2 < \delta_2 b_2$ und $b_1 < \delta_1 a_1$, so wird nie zugestimmt. Jeder der beiden könnte sich durch Zustimmung verbessern.

(1b) Gilt $a_2 < \delta_2 b_2$ und $b_1 \ge \delta_1 a_1$, so wird δb ausgezahlt. Alice könnte sich auf $\varphi_2(\delta_2 b_2) > \delta_1 b_1$ verbessern.

(1c) Ebenso ist $a_2 \ge \delta_2 b_2$ und $b_1 < \delta_1 a_1$ unmöglich, denn dann wäre das Teilspiel von Bobs Angebot nicht im Gleichgewicht.

Konstruktion des kanonischen Verhandlungsgleichgewichts

(1d) Also gilt $a_2 \ge \delta_2 b_2$ und $b_1 \ge \delta_1 a_1$. Es gilt sogar Gleichheit:
Bei $a_2 > \delta_2 b_2$ könnte Alice sich verbessern auf $\varphi_2(\delta_2 b_2) > \varphi_2(a_2) \ge a_1$.
Bei $b_1 > \delta_1 a_1$ könnte Bob sich verbessern auf $\varphi_1(\delta_1 a_1) > \varphi_1(b_1) \ge b_2$.

(1e) Schließlich gilt $a, b \in \operatorname{Max} K$:
Bei $a \in K \setminus \operatorname{Max} K$ könnte Alice sich verbessern.
Bei $b \in K \setminus \operatorname{Max} K$ könnte Bob sich verbessern.

„$\Leftarrow$“: Wir zeigen, dass unser Strategiepaar teilspielperfekt ist.

(2a) Alice könnte a vorschlagen, doch sie erwägt alle Alternativen $x \in K$. Im Falle $x_2 < \delta_2 b_2$ wird Bob ablehnen; Alice erhält dann nur $b_1 \le a_1$. Für $x_2 \ge a_2$ stimmt Bob zu; wegen $x_1 \le a_1$ hat Alice keinen Vorteil.

(2b) Bob könnte das Angebot a annehmen, doch er erwägt Ablehnung. Dann bekommt er ebenfalls $\delta_2 b_2 = a_2$, also keine Verbesserung. Dasselbe gilt für Bob und Alice mit vertauschten Rollen.

Das Prinzip der einmaligen Abweichung fordert Stetigkeit. Das ist erfüllt. Das obige Strategiepaar ist somit ein teilspielperfektes Gleichgewicht. Das beweist insbesondere $\mathrm{PNE}(\Gamma(K,\delta)) \ne \emptyset$. $\boxed{\text{QED}}$

Satz L2C: Verhandlungsergebnis im Rubinstein–Modell

Wir untersuchen Rubinsteins Modell $\Gamma(K, \delta)$ alternierender Angebote: Sei $0 \in K \Subset \mathbb{R}^2_{\ge 0}$ konvex und kompakt sowie $(m_1, 0), (0, m_2) \in \operatorname{Max} K$.

Zu jedem Parameterpaar $\delta_1, \delta_2 \in \,]0, 1[$ existiert genau ein Punktepaar $a, b \in \operatorname{Max} K$ mit der Gleichgewichtseigenschaft $\delta_1 a_1 = b_1$ und $\delta_2 b_2 = a_2$.

(1) Für jedes teilspielperfekte Gleichgewicht $s \in \operatorname{PNE}(\Gamma(K, \delta))$ gilt dann:

- Alice schlägt zu jedem Zeitpunkt a vor und akzeptiert b oder besser. Sie bejaht $x \in K$, falls $x = b$ oder $x_1 > b_1$, und verneint falls $x_1 < b_1$.
- Bob schlägt zu jedem Zeitpunkt b vor und akzeptiert a oder besser. Er bejaht $x \in K$, falls $x = a$ oder $x_2 > a_2$, und verneint falls $x_2 < a_2$.

Bei Indifferenz $x_1 = b_1$ bzw. $x_2 = a_2$ ist die Antwort leider unbestimmt.

(2) Angenommen, indifferente Spieler bevorzugen ein schnelles Ende. Genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht erfüllt diese Verfeinerung:

- Alice schlägt $a \in K$ vor und akzeptiert $x \in K$ gdw $x_1 \ge \delta_1 a_1 = b_1$.
- Bob schlägt $b \in K$ vor und akzeptiert $x \in K$ gdw $x_2 \ge \delta_2 b_2 = a_2$.

☺ Es ist überaus erstaunlich, dass der Satz so klar und einfach ausfällt. Das Ergebnis ist unglaublich aber wahr – und überraschend nüchtern:

Bei rationaler Spielweise zahlt sich all das Täuschen, Drohen, Ablenken, etc. nicht aus. Beide Spieler bleiben bei ihrer klaren einfachen Linie.

Eine vollkommen rationale Verhandlung verläuft daher wie ein Uhrwerk, ohne jegliche Überraschungen oder Verhandlungstricks, geräuschlos.

☺ Warum beobachten wir bei realen Verhandlungen so viel Wirbel?

Das liegt einerseits an der unvollständigen Information der Spieler: Das Verhandeln übermittelt nun Information, es ist ein Signalspiel. Diese zusätzliche Problematik bildet unser Modell einfach nicht ab.

Andererseits liegt es an der mangelnden Rationalität der Spieler; sie lassen sich durch Finten beeindrucken und vom Plan ablenken. Vollkommen rational und informiert verhandelt jeder kühl und nüchtern.

☺ Die Verhandlung kommt sofort zu einem optimalen Ergebnis. Dank vollständiger Information ist diese Lösung effizient.

Eindeutigkeit der PNE-Auszahlung

Wir nutzen die Projektion Φ_1 nach oben und Φ_2 nach rechts:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &: K \to \operatorname{Max} K \;:\; (x_1, x_2) \mapsto (x_1, \varphi_1(x_1)),\\ \Phi_2 &: K \to \operatorname{Max} K \;:\; (x_1, x_2) \mapsto (\varphi_2(x_2), x_2).\end{aligned}$$

Sei $A^* \subseteq \operatorname{Max} K$ die Menge aller PNE-Auszahlungen von Γ_1.
Sei $B^* \subseteq \operatorname{Max} K$ die Menge aller PNE-Auszahlungen von Γ_2.

Wir setzen $\underline{A} = \inf \operatorname{pr}_1 A^*$ und $\overline{A} = \sup \operatorname{pr}_1 A^*$ sowie $\underline{B} = \inf \operatorname{pr}_2 B^*$ und $\overline{B} = \sup \operatorname{pr}_2 B^*$. Wir erhalten so die zusammenhängenden Kompakta

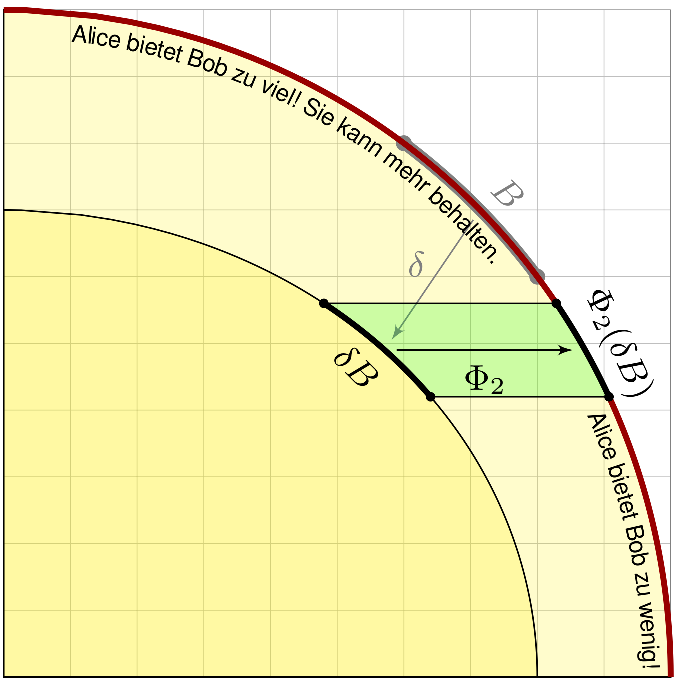
$$\begin{aligned}A &= \Phi_1([\underline{A}, \overline{A}] \times \{0\}) \subseteq \operatorname{Max} K,\\ B &= \Phi_2(\{0\} \times [\underline{B}, \overline{B}]) \subseteq \operatorname{Max} K.\end{aligned}$$

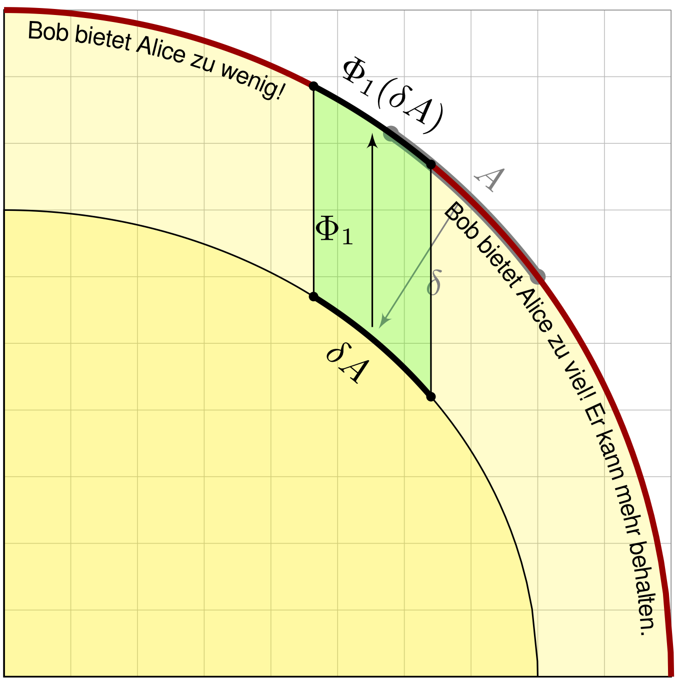
In $\Gamma_1(K,\delta)$ ist die zweite Runde immer ein Teilspiel $\delta\Gamma_2(K,\delta)$.
Alle PNE-Auszahlungen des Teilspiels sind also enthalten in δB.

In $\Gamma_2(K,\delta)$ ist die zweite Runde immer ein Teilspiel $\delta\Gamma_1(K,\delta)$.
Alle PNE-Auszahlungen des Teilspiels sind also enthalten in δA.

Damit können wir nun A und B geometrisch in Beziehung setzen!

Eindeutigkeit der PNE-Auszahlung





Lemma L2D: Kontraktion garantiert Eindeutigkeit.

(1) Mit diesen Bezeichnungen gilt $\Phi_2(\delta B) \supseteq A$ und $\Phi_1(\delta A) \supseteq B$.

(2) Die Abbildung $\operatorname{Max} K \to \operatorname{Max} K : x \mapsto \Phi_i(\delta x)$ ist δ_i–kontraktiv.

(3) Demnach sind die Mengen $A = \{a\}$ und $B = \{b\}$ einpunktig.

Eindeutigkeit der PNE-Auszahlung

Beweis: (1) Wir betrachten ein beliebiges teilspielperfektes Gleichgewicht $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma_1)$ mit Auszahlung $(x_1, x_2) \in A$:

Wäre $x_2 < \delta_2 \underline{B}$, dann lehnt Bob ab: Alice bietet ihm zu wenig.
Wäre $x_1 > \delta_2 \overline{B}$, dann bietet Alice zuviel: Sie kann mehr behalten.

Für ein Gleichgewicht s ist eine solche Auszahlung unmöglich.
Also gilt $(x_1, x_2) \in \Phi_2(\delta B)$. Wir schließen daraus $A \subseteq \Phi_2(\delta B)$.

Mit vertauschten Rollen folgt ebenso $B \subseteq \Phi_1(\delta A)$.

(2) Die Abbildung $\operatorname{Max} K \to \operatorname{Max} K : (x_1, x_2) \mapsto (\delta_1 x_1, \varphi_1(\delta_1 x_1))$ ist δ_1–kontraktiv in der ersten Koordinate. Dasselbe gilt in der zweiten:

Seien $x, y \in \operatorname{Max} K$, also $x = (x_1, \varphi_1(x_1))$ und $y = (y_1, \varphi_1(y_1))$.
Ohne Einschränkung gelte $0 \le x_1 < y_1 \le m_1$. Damit finden wir:

$$\frac{|\varphi_1(\delta_1 y_1) - \varphi_1(\delta_1 x_1)|}{\delta_1 y_1 - \delta_1 x_1} \le \frac{|\varphi_1(y_1) - \varphi_1(\delta_1 x_1)|}{y_1 - \delta_1 x_1} \le \frac{|\varphi_1(y_1) - \varphi_1(x_1)|}{y_1 - x_1}$$

Hierbei nutzen wir, dass $\varphi_1 : [0, m_1] \xrightarrow{\sim} [0, m_2]$ konkav fällt.
Daraus folgt $|\varphi_1(\delta_1 y_1) - \varphi_1(\delta_1 x_1)| \le \delta_1 |\varphi_1(y_1) - \varphi_1(x_1)|$.

Eindeutigkeit der PNE-Auszahlung

(3) Dank (1) haben wir die Inklusionen $A \subseteq \Phi_2(\delta B)$ und $B \subseteq \Phi_1(\delta A)$.
Daraus folgt durch Einsetzen $A \subseteq \Phi_2(\delta \Phi_1(\delta A))$ und $B \subseteq \Phi_1(\delta \Phi_2(\delta B))$.

Dank (2) sind dies Kontraktionen, also A und B höchstens einpunktig.
Dank L2A und L2B kennen wir PNE-Auszahlungen $a \in A$ und $b \in B$.
Somit ist a bzw. b die einzige PNE-Auszahlung von Γ_i. QED

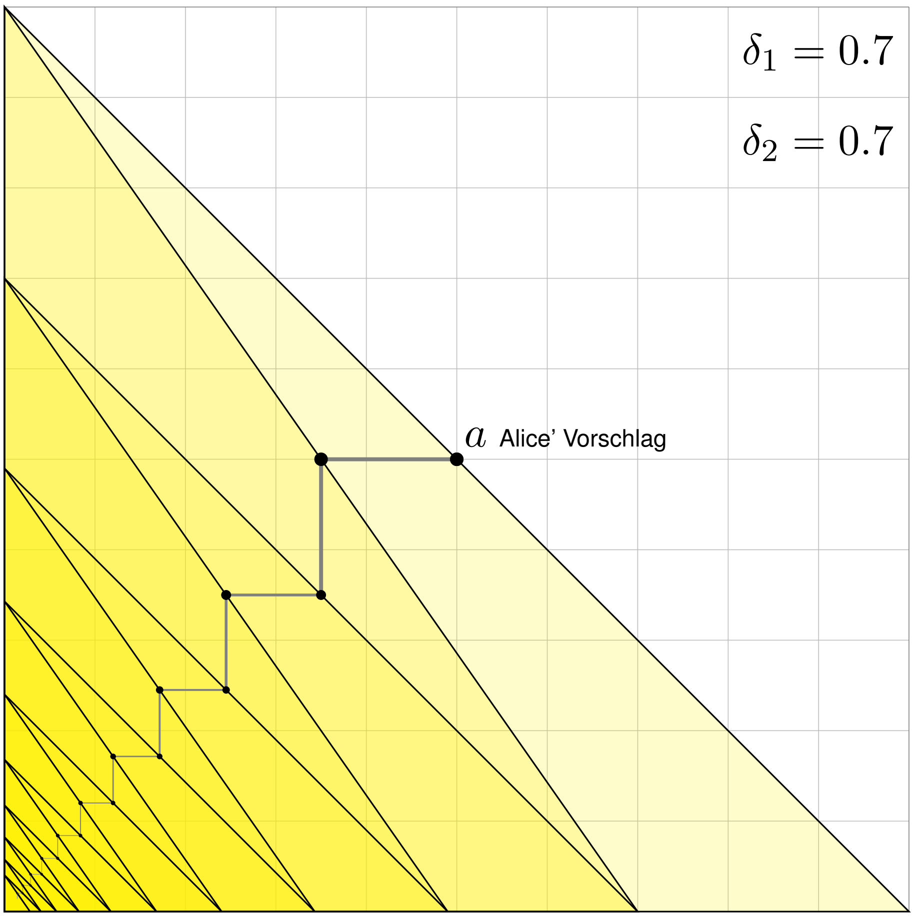
Aufgabe: Beweisen Sie Rubinsteins Satz L2C mit Lemma L2D.

Zusatz: Zeigen Sie durch geeignete Variation dieser Konstruktion, dass $\mathrm{PNE}(\Gamma(K, \delta))$ tatsächlich überabzählbar viele Elemente enthält.

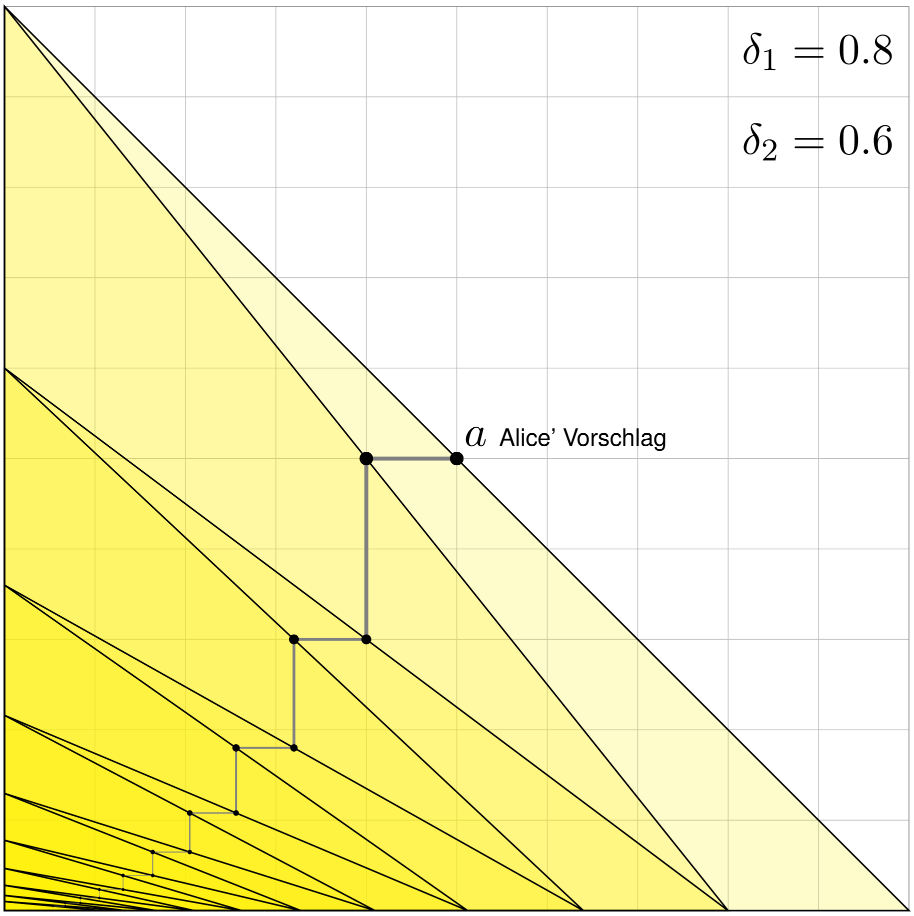
Hinweis: Im Indifferenzfall $x_1 = \delta_1 a_1$ bzw. $x_2 = \delta_2 b_2$ können wir die Annahmeregel modifizieren, ohne die Teilspielperfektion zu gefährden. Das ändert lediglich die Mikrostruktur, nicht aber die Auszahlungen.

Sie ahnen jetzt, warum das Rubinstein–Modell berühmt wurde, denn es bietet das volle Programm: ein realistisches allgemeines Modell, einen bemerkenswerten Satz, zudem eine erfolgreiche vollständige Klärung dank raffinierter Mathematik. Herz, was willst du mehr?
Wie zu erwarten, hat das Modell zahlreiche weitere Arbeiten inspiriert.

Mehrdeutigkeit der Gleichgewichtsauszahlungen



Mehrdeutigkeit der Gleichgewichtsauszahlungen



Sei $0 \in K \Subset \mathbb{R}^2_{\ge 0}$ konvex und kompakt sowie $(m_1, 0), (0, m_2) \in \operatorname{Max} K$. Für $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in \,]0,1[$ setzen wir $\delta^n K = \{\, (\delta_1^n x_1, \delta_2^n x_2) \mid (x_1, x_2) \in K \,\}$. Das definiert die schrumpfenden Kuchen $K \supset \delta K \supset \delta^2 K \supset \dots \supset \{0\}$. Satz L2C garantiert uns ein eindeutiges Verhandlungsergebnis!

Allgemein sei $(K^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathbb{R}^2_{\ge 0} \supset K^0 \supset K^1 \supset K^2 \supset K^3 \supset \dots \supset \{0\}$. Dabei verlangen wir $\bigcap_{n=0}^\infty K^n = \{0\}$: Der Kuchen schrumpft auf Null, etwa $K^n = (\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)})K$ mit $1 = \alpha_i^{(0)} \ge \alpha_i^{(1)} \ge \alpha_i^{(2)} \ge \dots \searrow 0$ in $]0,1]$. Lässt sich der Satz und unser obiger Beweis hierauf übertragen? Nein!

Aufgabe: Wir betrachten $K^{2n} = (\delta_1^n, \delta_2^n)K$ und $K^{2n+1} = (\delta_1^{n+1}, \delta_2^n)K$. Zuerst bietet Alice, bei Ablehnung bietet Bob, dann wieder Alice, usw. Dieses modifizierte Verhandlungsmodell verhält sich radikal anders: *Jede* Auszahlung $a \in \operatorname{Max} K$ lässt sich teilspielperfekt realisieren!

(1) Konstruieren Sie hierzu explizit eine Realisierung $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$.
(2) Weisen Sie Teilspielperfektion nach. Wie gelingt das am besten?
(3) Woran scheitert der Eindeutigkeitsbeweis von Lemma L2D?
Dieses subtile Gegenbeispiel illustriert den raffinierten Beweis.

Beweis: (1) wir setzen $a^{2n} = (\delta_1^n, \delta_2^n)a$ und $b^{2n+1} = (\delta_1^{n+1}, \delta_2^n)a$. Diese Konstruktion ist in den obigen beiden Graphiken illustriert.

- In Runde $2n$ schlägt Alice $a^{2n} \in K^{2n}$ vor. Bob akzeptiert $x \in K^{2n}$ gdw $x_2 \ge b_2^{2n+1}$.
- In Runde $2n+1$ schlägt Bob $b^{2n+1} \in K^{2n+1}$ vor. Alice akzeptiert $x \in K^{2n+1}$ gdw $x_1 \ge a_1^{2n+2}$.

(2) Dank Stetigkeit nutzen wir das Prinzip der einmaligen Abweichung:

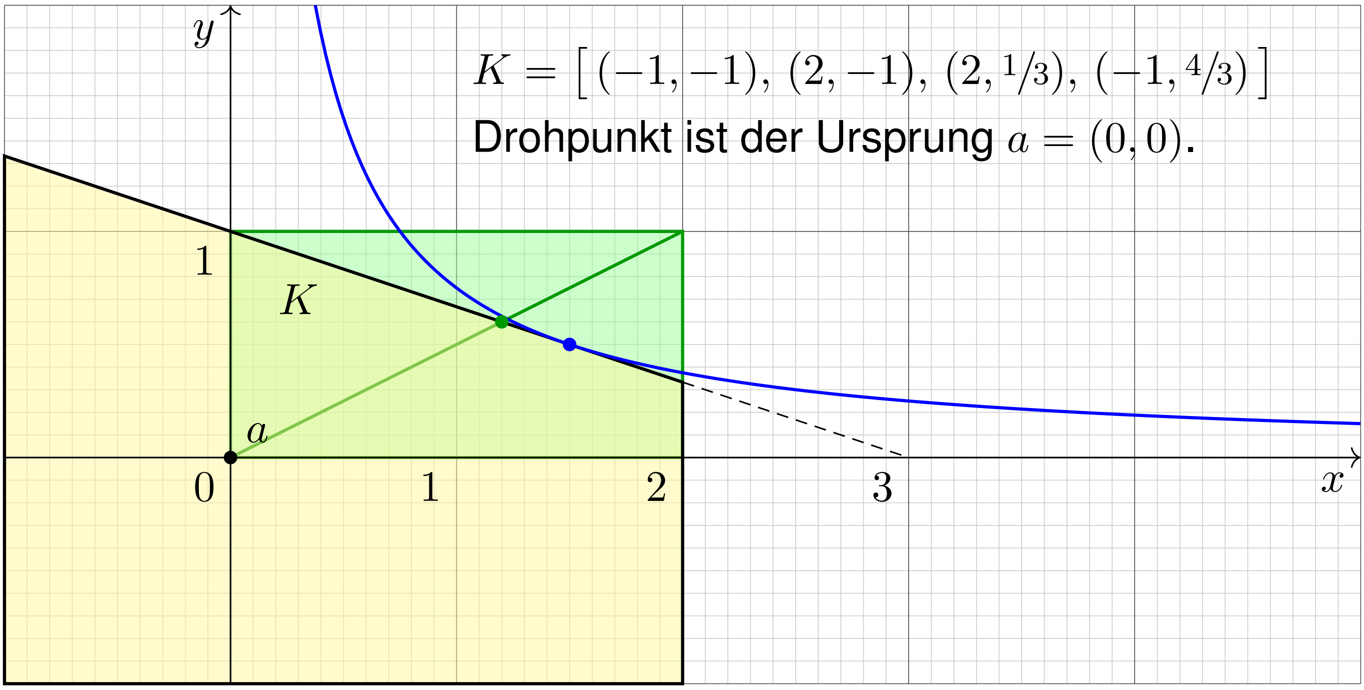
- Alice will a^{2n} vorschlagen, doch sie erwägt Alternativen $x \in K^{2n}$. Im Falle $x_2 < b_2^{2n+1}$ lehnt Bob ab; Alice erhält dann $b_1^{2n+1} < a_1^{2n}$. Für $x_2 \ge a_2^{2n}$ akzeptiert Bob; wegen $x_1 \le a_1^{2n}$ gewinnt Alice nichts.
- Bob will das Angebot a^{2n} annehmen, doch er erwägt Ablehnung. Dann bekommt er ebenfalls $b_2^{2n+1} = a_2^{2n}$, also keine Verbesserung.

Dieselben Argumente gelten mit vertauschten Rollen für Bob und Alice.

(3) Die Abbildung $\operatorname{Max} K \to \operatorname{Max} K : x \mapsto \Phi_i(\alpha x)$ ist α_i–kontraktiv. Hier jedoch gilt $\alpha_i = 1$, und schwache Kontraktion genügt nicht!

Haggle properly! (Klausur 2018)

Aufgabe: Wir betrachten das folgende Verhandlungsproblem (K, a):



(1) Berechnen Sie die monotone Verhandlungslösung $M(K,a)$ und (2) die Nash–Verhandlungslösung $N(K,a)$. (3) Gibt es ein VProblem $(L,a) \supset (K,a)$ mit der Eigenschaft $M(L,a) = N(L,a) = N(K,a)$?

Haggle properly! (Klausur 2018)

(1) Für $z_i = \max \operatorname{pr}_i K_{\ge a}$ finden wir $(z_1, z_2) = (2, 1)$, wie in der Skizze. Der Schnittpunkt $[a, z] \cap \operatorname{Max} K$, also von den Geraden $y = x/2$ und $y = 1 - x/3$, ist demnach $M(K,a) = (6/5, 3/5)$.

In diesem Falle ist die Skizze besonders leicht und übersichtlich, und eine ausreichend genaue Zeichnung ergänzt oder ersetzt die Rechnung. Ich gebe hier deshalb beide Wege an, graphisch und algebraisch.

(2) Wir maximieren $(x, y) \mapsto xy$ entlang der Geraden $y = 1 - x/3$. Die Funktion $h(x) = x(1 - x/3) = x - x^2/3$ hat ihr Maximum in $x = 3/2$. Dies ist somit das Maximum von h auf K, also $N(K,a) = (3/2, 1/2)$.

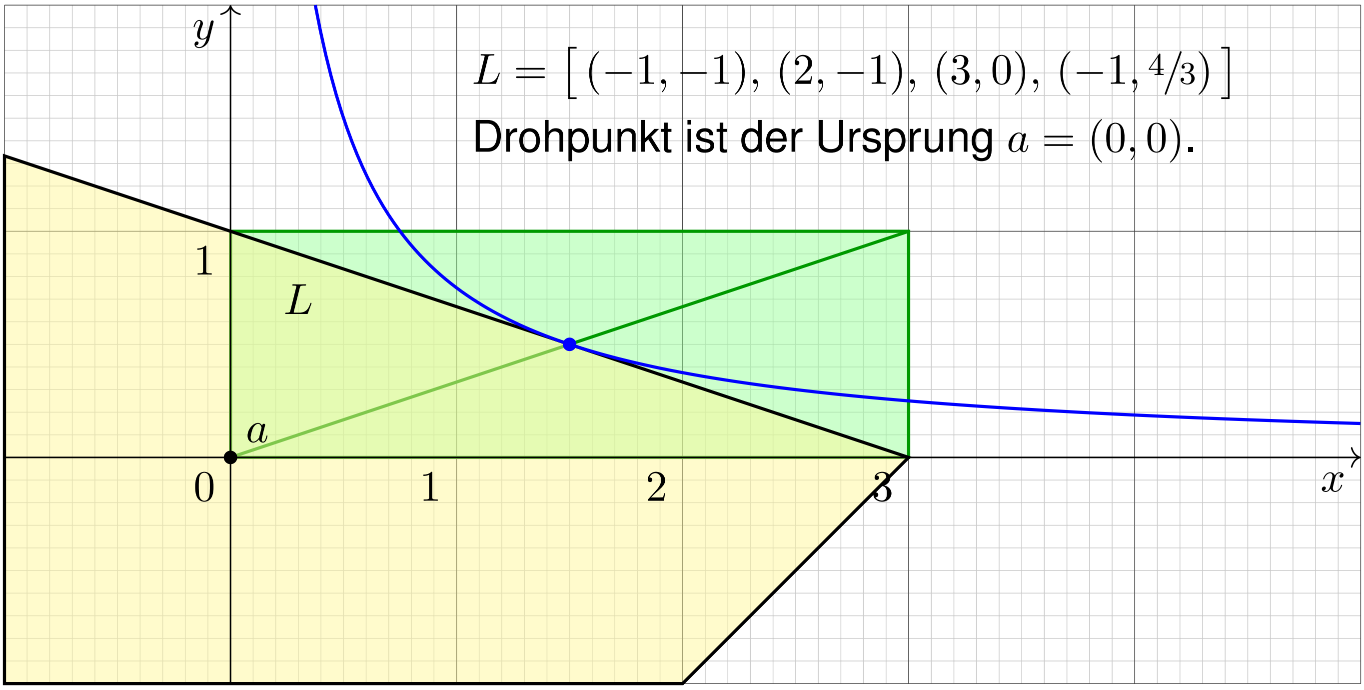
(3) Ja! Das minimale Beispiel ist $L = [K, (3,0)]$.

☺ Die Nash–Lösung ist invariant unter irrelevanten Alternativen (IIA). Die monotone Lösung $M(K,a)$ hingegen verschiebt sich zu $M(L,a)$. Dies können wir so einrichten, dass $M(L,a) = N(L,a) = N(K,a)$ gilt.

☺ Der für die Lösungen relevante Teil $L_{\ge a} = [K_{\ge a}, (3,0)]$ ist hierbei sogar eindeutig, was für eine Klausur durchaus willkommen ist.

Haggle properly! (Klausur 2018)

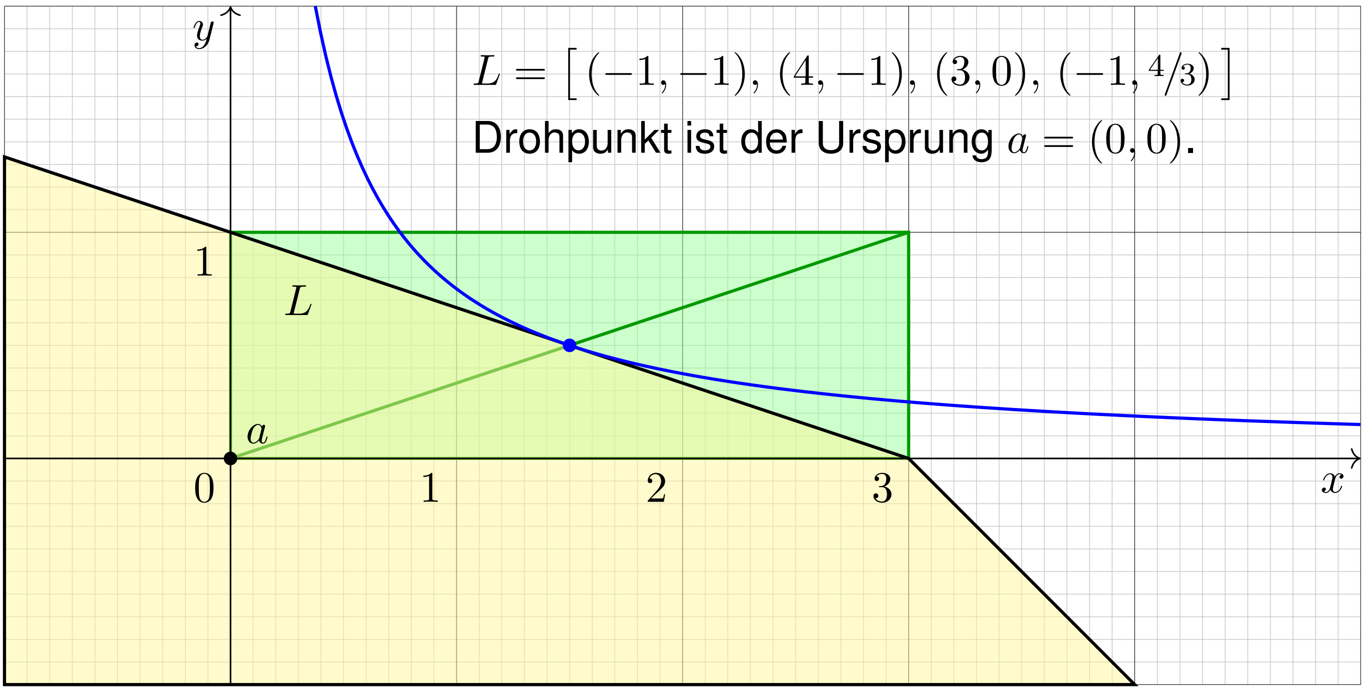
Erstes Beispiel eines Verhandlungsproblems $(L,a) \supset (K,a)$:



Die Nash–Verhandlungslösung $N(K,a) = N(L,a)$ bleibt unverändert.
Die monotone Lösung $M(K,a)$ verschiebt sich zu $M(L,a) = N(L,a)$.
Wir sehen hier das minimale Beispiel (L,a) mit diesen Eigenschaften.

Haggle properly! (Klausur 2018)

Zweites Beispiel eines Verhandlungsproblems $(L,a) \supset (K,a)$:



Die Nash–Verhandlungslösung $N(K,a) = N(L,a)$ bleibt unverändert.
Die monotone Lösung $M(K,a)$ verschiebt sich zu $M(L,a) = N(L,a)$.
Das maximale Beispiel (L,a) ersetzt $(4,-1)$ durch den Punkt $(6,-1)$.

Kapitel M

Koalitionen, Kern und Shapley–Wert

It is better to be alone than to be in bad company.
George Washington (1732–1799) über Etiquette

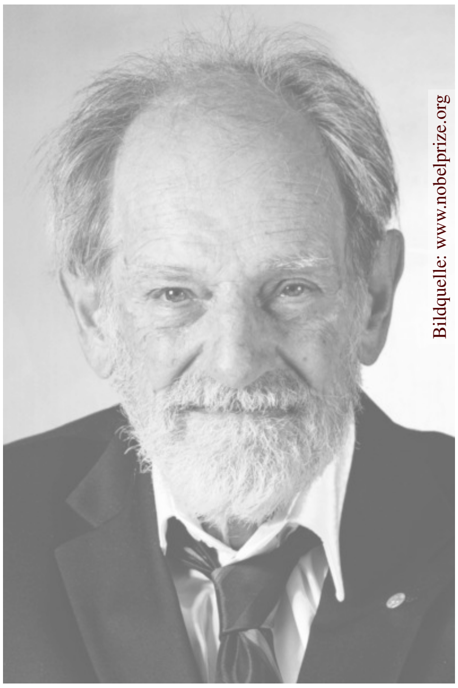
Es ist besser, nicht zu regieren, als falsch zu regieren.
Christian Lindner (1979–) über die Jamaika-Koalition 2017

Two is company, three is a crowd.
frei nach Andy Warhol (1928–1987)

Inhalt dieses Kapitels M

Lloyd Shapley (1923–2016)

Lloyd Shapley (1923–2016) war ein US-amerikanischer Mathematiker und Ökonom. Er betrachtete Spieltheorie als „mathematische Analyse von Konflikt und Kooperation.“ Von 1948 bis 1981 arbeitete er für die RAND Corporation, danach war er Professor an der University of California in Los Angeles.



Seine Dissertation (Princeton 1953) führte Shapley–Wert und Kern ein, zeitgleich untersuchte er stochastische Spiele als Erweiterung von Markov–Entscheidungsprozessen. Viele weitere wichtige Beiträge folgten.

Zusammen mit Alvin E. Roth erhielt er 2012 den Wirtschaftsnobelpreis „for the theory of stable allocations and the practice of market design“. Robert Aumann in seiner Nobelpreisansprache im Dezember 2005 bewunderte Llyod Shapley als „the greatest game theorist of all time“.

Motivation und Überblick

In der **kooperativen Spieltheorie** untersuchen wir mögliche Koalitionen und Aufteilungen des gemeinsam erzielten Gewinns. Gesucht ist dazu der **strategische Wert** jedes Spielers, also eine präzise quantitative und möglichst transparente Bewertung seiner strategischen Position.

Hierzu wurden viele Lösungskonzepte vorgeschlagen und diskutiert. Der Shapley–Wert bietet uns eine universell anwendbare Methode. In vielen Anwendungen ist er der Richtwert und überraschend vielseitig:

- Gewinne oder Kosten teilen in einer ökonomischen Situation
- Machtindex jedes Akteurs in einer kollektiven Entscheidung
- Einfluss eines Merkmals in Data Science und Machine Learning

📖 Lloyd S. Shapley: *A value for n–person games.* Contributions to the Theory of Games 2 (1953), Annals of Mathematical Studies 28.

Alvin E. Roth (ed): *The Shapley value.* Cambridge Univ. Press 1988.

Die damals begründete axiomatische Vorgehensweise (zu Koalitionen, Verhandlungen, Wahlen, etc.) prägte einen revolutionär eleganten Stil und eröffnete neue Themen, Denkweisen und Forschungsmethoden.

Wie kann / soll / wird man gemeinsamen Gewinn teilen?

Fünf Personen verhandeln über Zusammenarbeit und Gewinnaufteilung: ein Kapitalist 1, der das dringend benötigte Kapital zur Verfügung stellt, dazu zwei gelernte Arbeiter $2, 3$ und zwei ungelernte Arbeiter $4, 5$.

Für jede Teilmenge $S \subseteq I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ist der gemeinsame Gewinn

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 1 \notin S, \\ 400 \cdot \overbrace{|S \cap \{2,3\}|}^{\sharp\,\text{Gelernte}} + 200 \cdot \overbrace{|S \cap \{4,5\}|}^{\sharp\,\text{Ungelernte}} & \text{falls } 1 \in S. \end{cases}$$

Aufgabe: Wie können / sollen / werden die fünf den Gewinn aufteilen? Gibt es hierzu eine „faire“ und „gerechte“ Lösung, etwa als Schlichtung? Würden Sie z.B. die Aufteilung $(600, 200, 200, 100, 100)$ vertreten?

Wir haben solche Verhandlungen im Casino experimentell durchgespielt: Sei $S \subseteq I$ die Menge der aktiven Spieler, anfangs $S = I$. Zu Beginn jeder Runde wird einer der Spieler $i \in S$ ausgelost. Er schlägt eine Aufteilung zur Abstimmung vor. Bei einstimmiger Annahme wird dies ausgeführt. Andernfalls geht das Spiel in eine neue Runde. Mit Wkt $1 - \delta$ scheidet Spieler i aus, mit Wkt δ nimmt er weiterhin an den Verhandlungen teil. Die Verhandlungen gestalten sich oft schwierig. . . oder scheitern gar!

Wie kann / soll / wird man gemeinsamen Gewinn teilen?

Wir leben in einer arbeitsteiligen und hochdifferenzierten Gesellschaft. Wer leistet welchen Beitrag? mit welchem Wert? welcher Entlohnung?

In einem großen Konzern spottet die **Produktion** über das Marketing: „Nur wir produzieren, also beruht der Firmenerfolg auf unserem Beitrag.“

Das **Marketing** antwortet: „Ihr könnt gern produzieren soviel Ihr wollt. Solange wir keine Kunden gewinnen, nutzt euch das rein gar nichts.“

Die **Forschung und Entwicklung** wendet ein: „Ohne F&E hätten wir gar keine konkurrenzfähigen Produkte, um am Markt zu bestehen.“

Das **Management** behauptet selbstbewusst: „Wir treffen alle wichtigen Richtungsentscheidungen. Ohne uns läuft alles aus dem Ruder.“

Die **Eigentümer / Aktionäre** pochen auf ihre zentrale Rolle: „Ohne unser Kapital geht gar nichts.“

Wer hat Recht? Firmen funktionieren arbeitsteilig, das ist ihr Zweck. Wie bewerten wir gerecht, wer welchen Anteil am Gesamtertrag hat? Das ist nicht nur eine abstrakt philosophische Betrachtung, sondern ein konkret praktisches Problem, spätestens bei Fragen der Verteilung!

Wie kann / soll / wird man gemeinsamen Gewinn teilen?

Sei I eine endliche Spielermenge. Neben dem Verhalten einzelner Spieler $i \in I$ betrachten wir nun Teilmengen $S \subseteq I$, also **Koalitionen**. Zu jeder Koalition $S \subseteq I$ gibt ihr **charakteristischer Wert** $v(S) \in \mathbb{R}$ an, welchen Nutzen die Koalition S für sich allein sichern kann, kurz:

$$v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} : S \mapsto v(S)$$

Bei **nicht-kooperativen Spielen** untersuchen wir einzelne Spieler und ihre individuellen Aktionen; jeder maximiert seinen individuellen Nutzen. Nun untersuchen wir **kooperative Spiele**, genauer Koalitionsspiele v. Im Vordergrund stehen die Koalitionen, daraus erst folgen Aktionen.

- Welche Koalitionen können sich bilden? Welche sind in/stabil?
- Wie kann / soll / wird eine Koalition ihre Auszahlung aufteilen?

Anschließend untersuchen wir detailliertere und tiefergehende Fragen:

- Nach welchem Verfahren / Protokoll kommunizieren die Spieler?
- Wie verhandeln und entscheiden sie über mögliche Koalitionen?
- Wie sprechen sich Spieler innerhalb ihrer gewählten Koalition ab?

Wie kann / soll / wird man gemeinsamen Gewinn teilen?

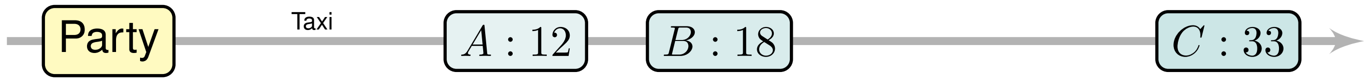
Die allgemeine Fragestellung führt zu einem **Verhandlungsproblem**. Eine einfache Zwei-Spieler-Version haben wir im letzten Kapitel gelöst. Vereinfachend setzen wir **transferierbaren Nutzen** voraus, meist Geld. Dann gibt der **Shapley–Wert** eine bewährte, recht einfache Antwort.

Koalitionsspiele $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$ begegnen uns überall in der Ökonomie, wo Spieler versuchen, durch Bündnisse ihren Nutzen zu maximieren. Die Auszahlung $v(S)$ können die Koalitionäre $i \in S$ unter sich aufteilen. Die kooperative Spieltheorie untersucht die Bildung solcher Koalitionen. Ihre Formalisierung geht zurück auf von Neumman und Morgenstern (1944) mit ersten Anwendungen auf **Modelle der Marktwirtschaft**.

Oft wird der Nutzen maximal, wenn alle Spieler zusammenarbeiten. Welche Aufteilungen sind in/stabil? Im nicht-kooperativen Falle nutzen wir **Nash–Gleichgewichte**: Kein Spieler hat einen Anreiz von seiner Strategie abzuweichen. Im kooperativen Falle betrachten wir analog hierzu Allokationen und den **Kern** [*core*]: Kein Spieler $i \in I$ und auch kein Bündnis $S \subseteq I$ hat Anreiz, die große Koalition I zu verlassen.

Wie kann / soll / wird man gemeinsame Kosten teilen?

M009
Beispiel



Charakteristische Funktion

$$v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} : \begin{cases} \emptyset \mapsto 0, & \{A,B\} \mapsto 18, \\ \{A\} \mapsto 12, & \{A,C\} \mapsto 33, \\ \{B\} \mapsto 18, & \{B,C\} \mapsto 33, \\ \{C\} \mapsto 33, & \{A,B,C\} \mapsto 33. \end{cases}$$

Marginale Mehrkosten $\Delta_i^\rho(v)$ für Spieler i bei Reihenfolge ρ:

Reihenfolge ρ	Spieler $i =$	A	B	C
(A,B,C)	$\Delta_i^\rho(v) =$	12	6	15
(A,C,B)		12	0	21
(B,A,C)		0	18	15
(B,C,A)		0	18	15
(C,A,B)		0	0	33
(C,B,A)		0	0	33
Mittelwert	$\sigma_i(v) =$	4	7	22

Wie kann / soll / wird man gemeinsame Kosten teilen?

M010
Beispiel

Alice, Bob und Chuck fahren mit dem Taxi von einer Party nach Hause. Ihre Ziele liegen alle entlang einer Strecke, aber unterschiedlich weit: Alleine zahlt Alice 12€, Bob 18€ und Chuck 33€. Wenn sie sich ein Taxi teilen, dann zählt nur die weiteste Strecke. Wer sollte wie viel zahlen?

Das ist ein vollkommen realistisches Problem, sowohl konkret für das Taxiteilen, als auch übertragen auf viele ähnlich strukturierte Situationen. Eine gerechte Lösung ist wünschenswert, aber nicht sofort offensichtlich!

Naiv könnte Chuck alles zahlen, doch das ist offensichtlich ungerecht. Sie könnten teilen und jeder 11€ zahlen, auch das scheint ungerecht. Ebenso könnte jeder in der Reihenfolge (A,B,C) seinen marginalen Mehrpreis zahlen, also $A : 12$, $B : 6$, $C : 15$. Auch das ist ungerecht.

Der Shapley–Wert [engl. *Shapley value*] betrachtet den Mittelwert: Sei $\rho : I \xrightarrow{\sim} \{1,2,\dots,n\}$ eine Abzählung / Reihenfolge aller Spieler. Damit bauen wir schrittweise Koalitionen $\rho^{-1}(\{1,2,\dots,m\}) \subseteq I$ auf. Zur Koalition $S_i^\rho = \{\, j \in I \mid \rho(j) \le \rho(i) \,\}$ kam zuletzt der Spieler i. Er trägt den marginalen Mehrwert $\Delta_i^\rho(v) = v(S_i^\rho) - v(S_i^\rho \smallsetminus \{i\})$ bei.

Der Shapley–Wert $\overline{v}(i)$ ist der **durchschnittliche marginale Mehrwert**, den der Spieler $i \in I$ zu allen Koalitionen S mit $i \in S \subseteq I$ beiträgt:

$$\overline{v}(i) = \frac{1}{n!} \sum_{\rho} \Delta_i^{\rho}(v) = \sum_{S: i \in S \subseteq I} \frac{|S \smallsetminus \{i\}|! \cdot |I \smallsetminus S|!}{|I|!} \big[v(S) - v(S \smallsetminus \{i\}) \big]$$

Das ist die allgemeine Formel, die wir im Folgenden erarbeiten werden: Sie fällt hier zunächst vom Himmel... Wir wollen sie verstehen lernen!

Die Formel ist zunächst nicht besonders intuitiv. Was bedeutet sie?
Die Formel ist nicht besonders einfach. Geht das auch einfacher?
Es gibt auch andere schöne Formeln... Warum gerade diese?
Welche Argumente können diese spezielle Wahl begründen?

⚠ Wenn der Shapley–Wert uns bei der Schlichtung helfen soll, dann muss die verwendete Methode alle Beteiligten überzeugen. Es nützt herzlich wenig, eine Formel vom Himmel fallen zu lassen, wenn wir sie nicht mit stichhaltigen Argumenten stützen können!

☺ Wir werden dazu im Folgenden die Ideen und Techniken ausführen. Als Ausblick und Motivation will ich jedoch vor der detaillierten Theorie eine einfache, aber typische Anwendung durchrechnen und analysieren.

☺ Zur Illustration untersuchen wir unsere konkrete Problemstellung. In unserem Beispiel haben wir einen besonders strukturierten Fall und können Shapleys Formel weiter vereinfachen und bestens interpretieren:

Teilung: Die erste Teilstrecke für $12€$ wird durch drei geteilt. Die zweite Teilstrecke für $6€$ wird durch zwei geteilt. Die dritte Teilstrecke für $15€$ wird durch eins geteilt. Die Aufteilung ist demnach $A : 4$, $B : 7$, $C : 22$.

Aufgabe: (1) Formalisieren Sie ein solches Koalitionsspiel $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$, wobei $v(S) = \max_{i \in S} u(i)$ durch ein Maximum gegeben ist. Formulieren und beweisen Sie für den Shapley–Wert $\overline{v}$ die einfache Teilungsregel.

(2) Er/Finden Sie weitere Beispiele: In welchen gilt obige Teilungsregel? In welchen benötigen Sie Shapleys Formel in ihrer vollen Allgemeinheit?

Lösung: (1) Aus dem motivierenden Taxi-Beispiel extrahieren wir die folgende Vermutung und beweisen sie anschließend als Satz.

Satz M0A: Shapley–Wert zu monotoner Kostenfunktion

Gegeben sei die endliche Spielermenge $I = \{1, 2, \dots, n\}$ und hierzu eine monoton wachsende Funktion $u : \{0\} \cup I \to \mathbb{R}$ mit $u(0) = 0$.

Damit definieren wir das Koalitionsspiel

$$v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} : S \mapsto v(S) := \begin{cases} 0 & \text{falls } S = \emptyset, \\ u(\max S) & \text{falls } S \neq \emptyset. \end{cases}$$

Für solche Koalitionsspiele v gilt folgende einfache Beziehung zwischen dem Shapley–Wert $\overline{v}$ und der monotonen Kostenfunktion u:

$$\boxed{\overline{v}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{u(i+1) - u(i)}{n - i}}$$

Beweis: Die monoton wachsende Funktion $u : \{0\} \cup I \to \mathbb{R} : 0 \mapsto 0$ definiert das Koalitionsspiel v und damit den Shapley–Wert $\overline{v} : I \to \mathbb{R}$.

Wir zerlegen $u = u_1 + \dots + u_n$ in die Sprungfunktionen $u_1, \dots, u_n$ mit $u_k(0) = \dots = u_k(k-1) := 0$ und $u_k(k) = \dots = u_k(n) := u(k) - u(k-1)$.

Dies definiert die Zerlegungen $v = v_1 + \dots + v_n$ und $\overline{v} = \overline{v}_1 + \dots + \overline{v}_n$. Für jeden dieser Summanden v_m gilt die ersehnte Gleichung:

$$\overline{v}_m(k) = \left\{ \begin{matrix} 0 & \text{falls } k < m \\ \frac{u_m(m)}{n-m+1} & \text{falls } k \geq m \end{matrix} \right\} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{u_m(i+1) - u_m(i)}{n - i}$$

Hierzu müssen wir uns nur den Mittelwert über ρ genau anschauen: Im Spiel v_m zahlen nur die Spieler $m, \dots, n$, und zwar alle gleich.

Dank Linearität gilt die behauptete Gleichung auch für v. $\boxed{\text{QED}}$

☺ Diesen einfach-genialen Trick nutzen wir im Folgenden immer wieder: Wir nutzen Linearität und weisen die Behauptung auf einer geeigneten Basis nach, für die unsere Rechnungen besonders einfach ausfallen.

Wie kann / soll / wird man gemeinsame Kosten teilen?

Diese einfache Problemstellung und der schöne Satz gehen zurück auf S.C. Littlechild, G. Owen: *A simple expression for the Shapley value in a special case.* Management Science 20 (1973) 370–372. Illustrationen:

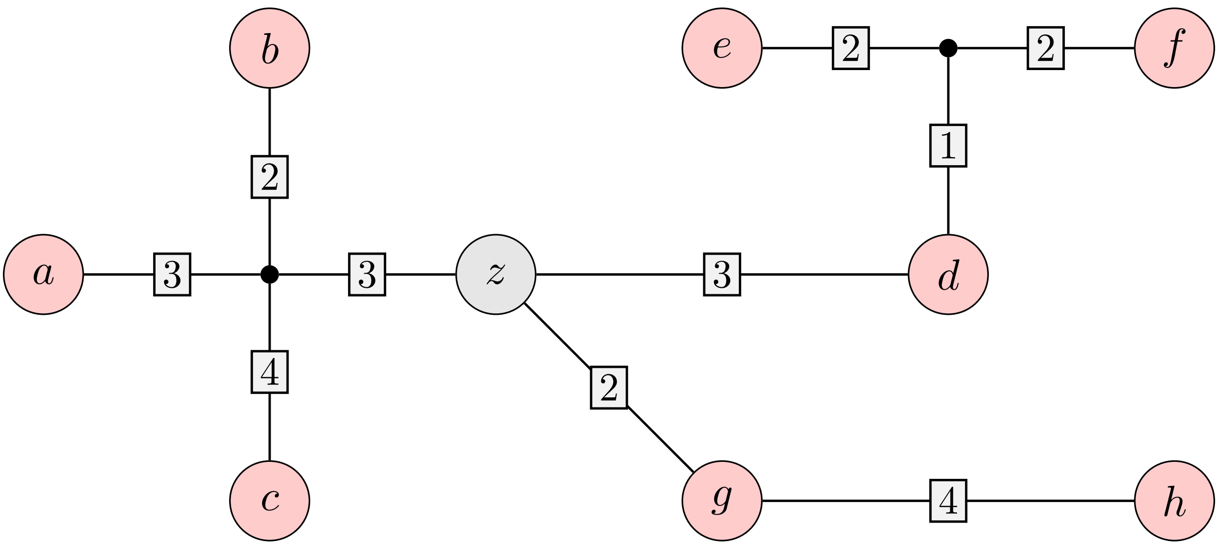
Flughafen: Benachbarte Städte $1, 2, \dots, n$ planen einen gemeinsamen Flughafen. Ihre individuellen Anforderungen an die Flugzeugtypen sind unterschiedlich, somit auch die Planungen für die Länge der Landebahn. Dies führt zu unterschiedlichen Kosten $0 \le u(1) \le u(2) \le \dots \le u(n)$.

Hier entsteht **Synergie:** Beim Zusammenschluss zum gemeinsamen Vorhaben genügt es jeweils, die höchste Anforderung zu erfüllen.

Rechenzentrum: Die Universitäten $1, 2, \dots, n$ benötigen jeweils ein Rechenzentrum, das eine gewünschte Spitzenleistung erbringen soll. Die Kosten hierfür sind jeweils $0 \le u(1) \le u(2) \le \dots \le u(n)$.

Versorgung: Die Leitungen (Internet, Strom, Wasser, Gas, o.ä.) bilden einen Baum. Die Wurzel ist der Versorger z, Knoten sind Verteiler oder Verbraucher $a, b, \dots, h$. Jede Verbindungskante ℓ hat ihre Kosten $c(\ell)$.

Wie teilt man die Kosten von Versorgungsleitungen?



Übung: Der Shapley–Wert führt auch hier zu einer gerechten Teilung: Die Kosten jeder Kante werden gleich aufgeteilt unter den Verbrauchern, die diese als Zuleitung nutzen. (Noch spannender ist die Frage, in einem gegebenen Graphen einen Spannbaum von Zuleitungen auszuhandeln. Wir erleben dies beim Ausbau des deutschen Höchstspannungsnetzes.)

Modularität und Synergie

Vorgelegt sei ein Paar (I, v) bestehend aus einer endlichen Menge I und einer Abbildung $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$. Äquivalent sind folgende Eigenschaften:

1 linear: $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$ für jede Teilmenge $S \subseteq I$

2 kumulativ: $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\})$ für alle $S \subset I$ und $i \in I \setminus S$

3 additiv: $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$ für alle $S, T \subseteq I$ mit $S \cap T = \emptyset$

4 modular: $v(S \cup T) = v(S) + v(T) - v(S \cap T)$ und $v(\emptyset) = 0$

In diesem Falle ist v ein **signiertes Maß** auf I (eine Ladungsverteilung). Gilt $v \geq 0$, so ist v ein **nicht-negatives Maß** auf I (kurz Maß genannt). Das impliziert insbesondere **Monotonie**: Aus $S \subseteq T$ folgt $v(S) \leq v(T)$. Gilt zudem $v(I) = 1$, so ist v ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** (WMaß).

Gegeben sei $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$ mit $v(\emptyset) = 0$. Wir nennen v **sub/super - linear/kumulativ/additiv/modular**, wenn statt „$=$“ nur „$\leq$“ bzw. „$\geq$“ gilt. Wir sagen strikt/echt, wenn immer/mindestens einmal „$<$“ bzw. „$>$“ gilt.

Für je zwei Mengen $S, T \subseteq I$ definieren wir ihre **Synergie** durch

$$\boxed{\operatorname{Synergie}(S, T) := v(S \cup T) - v(S) - v(T) + v(S \cap T).}$$

Modularität und Synergie

Modularität ist die erste Stufe der **Siebformel**, siehe Seite M401.
Aus paarweiser Additivität folgt **endliche Additivität** per Induktion. Aus der Maßtheorie kennen Sie die überaus wichtige **σ–Additivität**: Wir betrachten dann Tripel $(\Omega, \mathscr{A}, v)$ bestehend aus einer Menge Ω, einer σ–Algebra $\mathscr{A}$ auf Ω und einem σ–additiven Maß $v : \mathscr{A} \to [0, \infty]$.

Beispiele: (1) Das **Zählmaß** $v(S) = \sharp S \in \mathbb{N}$ ist additiv, somit modular.

(2) Die **Dimension** $\dim_K(X) \in \mathbb{N}$ von K–Vektorräumen X ist modular, ebenso die **Euler–Charakteristik** $\chi(X) \in \mathbb{Z}$ zellulärer Räume X.

(3) Das **Lebesgue–Maß** λ auf $(\mathbb{R}^n, \mathscr{A})$ ist σ–additiv, somit modular. Dies vollendet den Begriff des Volumens von Teilmengen $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

(4) Signierte Maße treten in der Physik auf, z.B. als **Ladungsverteilung** in der Elektrostatik; σ–Additivität erfordert dazu absolute Konvergenz.

Ladung ist eine **Erhaltungsgröße**, daher ist σ–Additivität plausibel. Das physikalische Volumen hingegen ist nicht additiv: **Volumenkontraktion** kann beim Mischen von Flüssigkeiten auftreten: Die Mischung von 48ml Wasser und 52ml Ethanol hat als Gesamtvolumen nur 96ml statt 100ml. Ähnlicher **Schwund** entsteht bei Salz im Meerwasser. Anschaulich bei Erbsen und Senfkörnern. In manchen Situationen ist die Additivität / Modularität demnach verletzt: Es besteht **Synergie**.

Modularität und Synergie

Superadditivität $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ bedeutet sprichwörtlich:
Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile. (Aristoteles)

Supermodularität ist eine echte Verschärfung: Beispiele siehe unten.
Sie heißt auch Konvexität nach ihrer gemometrischen Entsprechung.

Die **Synergie** misst Zugewinn / Verlust im Vergleich zur Modularität:

v ist strikt supermodular	$\iff$	$\mathrm{Synergie} > 0$
v ist echt supermodular	$\iff$	$\mathrm{Synergie} \gneq 0$
v ist supermodular	$\iff$	$\mathrm{Synergie} \geq 0$
v ist modular	$\iff$	$\mathrm{Synergie} = 0$
v ist submodular	$\iff$	$\mathrm{Synergie} \leq 0$
v ist echt submodular	$\iff$	$\mathrm{Synergie} \lneq 0$
v ist strikt supermodular	$\iff$	$\mathrm{Synergie} < 0$

Für $S \subseteq T$ oder $T \subseteq S$ gilt per Definition immer $\mathrm{Synergie}(S, T) = 0$.
Die strikte Ungleichung fordern wir daher nur für $S \not\subseteq T$ und $T \not\subseteq S$.

Modularität und Synergie

In der **Wirtschaft** entsteht Synergie durch Skalierung (Kostenersparnis) oder Zusammenarbeit (Kooperation, Joint Venture, Fusion, Übernahme). Alle Akteure wollen weiterhin ihren individuellen Nutzen maximieren; sie profitieren von der Kooperation, eventuell manche mehr als andere.

⚠ Vorsicht: Synergie kann sowohl positiv als auch negativ ausfallen!

Beispiel: Daimler und Chrysler fusionierten 1998 zu DaimlerChrysler. Die Macher bewarben dies als „Hochzeit im Himmel", doch schon bald wurde der Ehealltag zur Hölle; 2007 wurde die Chrysler Group verkauft. Insgesamt wurde ein Wert von geschätzt über 70 Milliarden vernichtet.

Die erwarteten Synergien stellten sich nicht ein: Die Daimler-Ingenieure trauten den Chrysler-Kollegen nicht zu, gute Autos zu bauen. Die Amerikaner belächelten die Behäbigkeit der Teutonen, bemängelten, dass die Deutschen weniger profitabel waren als sie. Sollten Mercedes-Teile in die Chrysler-Modelle eingebaut werden? Das hätte die Autos der Amerikaner verteuert. Chrysler-Teile in Mercedes-Karossen? Damit litte die Qualität.

(Süddeutsche Zeitung, 7. Mai 2013)

Modularität und Synergie

Modularität und Synergie

Aufgabe: (0) Bei Gleichung „$=$“ sind alle vier Bedingungen äquivalent:

$$\boxed{\text{modular} \iff \text{additiv} \iff \text{kumulativ} \iff \text{linear}}$$

(1) Bei Ungleichung „$\geq$“ gelten nur die folgenden Implikationen:

$$\boxed{\text{supermodular} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{superadditiv} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{superkumulativ} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{superlinear}}$$

Dasselbe gilt bei Ungleichung „$\leq$“ für submodular $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ sublinear.

Lösung: (0) Zunächst gilt „modular $\Rightarrow$ additiv $\Rightarrow$ kumulativ $\Rightarrow$ linear“: Die ersten beiden Implikationen sind trivial: formale Spezialisierung. Die letzte Implikation folgt per Induktion über die Elementezahl $|S|$. Schließlich gilt „linear $\Rightarrow$ modular“ durch korrekte Summation:

$$\begin{aligned} v(S \cup T) &= \sum\nolimits_{i \in S \cup T} v(\{i\}) \\ &= \sum\nolimits_{i \in S} v(\{i\}) + \sum\nolimits_{i \in T} v(\{i\}) - \sum\nolimits_{i \in S \cap T} v(\{i\}) \\ &= v(S) + v(T) - v(S \cap T) \end{aligned}$$

Modularität und Synergie

(1) Im Folgenden sei $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung mit $v(\emptyset) = 0$. Es gilt supermodular ⇒ superadditiv ⇒ superkumulativ ⇒ superlinear: Die ersten beiden Implikationen sind trivial: formale Spezialisierung. Die letzte Implikation folgt per Induktion über die Elementezahl $|S|$.

Ausführlich: Wir setzen $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} : \emptyset \mapsto 0$ als superkumulativ voraus. Für alle $S \subseteq I$ zeigen wir damit die Superlinearität $v(S) \ge \sum_{i \in S} v(\{i\})$. Superlinearität gilt trivialerweise für $S = \emptyset$, da wir $v(\emptyset) = 0$ voraussetzen. Angenommen die Superlinearität gilt für S. Für alle $k \in I \smallsetminus S$ folgt dann:

$$v(S \cup \{k\}) \ge v(S) + v(\{k\}) \ge \sum\nolimits_{i \in S} v(\{i\}) + v(\{k\}) = \sum\nolimits_{i \in S \cup \{k\}} v(\{i\})$$

(1a) Superkumulativ impliziert superlinear, aber nicht umgekehrt!

Als ein minimales Gegenbeispiel betrachten wir $I = \{1, 2, 3\}$ und $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$ mit $v(S) = 0$ für $|S| \ne 2$ und $v(S) = 1$ für $|S| = 2$. Diese Abbildung ist superlinear (warum?), aber nicht superkumulativ:

$$S = \{1, 2\},\ i = 3 : \quad v(S \cup \{i\}) = 0,\ v(S) + v(\{i\}) = 1 + 0 = 1$$

Modularität und Synergie

(1b) Superadditiv impliziert superkumulativ, aber nicht umgekehrt!

Als ein minimales Gegenbeispiel betrachten wir $I = \{1, 2, 3, 4\}$ und $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$ mit $v(S) = 0$ für $|S| \le 1$ und $v(S) = 1$ für $|S| \ge 2$. Diese Abbildung ist superkumulativ (warum?), aber nicht superadditiv:

$$S = \{1, 2\},\ T = \{3, 4\} : \quad v(S \cup T) = 1,\ v(S) + v(T) = 1 + 1 = 2$$

(1c) Supermodular impliziert superadditiv, aber nicht umgekehrt!

Als ein minimales Gegenbeispiel betrachten wir $I = \{1, 2, 3\}$ und $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$ mit $v(S) = 0$ für $|S| \le 1$ und $v(S) = 1$ für $|S| \ge 2$. Diese Abbildung ist superadditiv (warum?), aber nicht supermodular:

$$S = \{1, 2\},\ T = \{2, 3\} : \quad v(S \cup T) = 1$$
$$v(S) + v(T) - v(S \cap T) = 1 + 1 - 0 = 2$$

Damit sind alle gültigen Implikationen bewiesen und alle ungültigen Umkehrungen durch Gegenbeispiele widerlegt. Diese Überlegungen erklären, warum wir die vier Begriffe sorgsam trennen müssen.

Koalitionsspiele und Shapley–Basis

Definition M1A: Koalitionsspiele

Ein **Koalitionsspiel** ist eine Abbildung $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$ mit $v(\emptyset) = 0$. Diese bilden den $\mathbb{R}$–Vektorraum $C(I) := \{ v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} : \emptyset \mapsto 0 \}$.

Darin liegt der Untervektorraum $C_0(I) := \{ v \in C(I) \mid v \text{ ist additiv} \}$ und der Kegel $C_+(I) := \{ v \in C(I) \mid v \text{ ist supermodular / konvex } \}$.

Satz M1B: Shapley–Basis des Vektorraums $C(I)$

Jede Teilmenge $\emptyset \neq K \subseteq I$ definiert das zugehörige Koalitionsspiel

$$e_K^{\subseteq} \;:\; \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} \;:\; S \mapsto e_K^{\subseteq}(S) = \begin{cases} 1 & \text{falls } K \subseteq S, \\ 0 & \text{falls } K \not\subseteq S. \end{cases}$$

(1) Für jedes $k \in I$ ist die Funktion $e_{\{k\}}^{\subseteq}$ additiv (Dirac–Maß auf I). Die Familie $(e_{\{k\}}^{\subseteq})_{k \in I}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}$–Untervektorraums $C_0(I)$.

(2) Für $|K| \geq 2$ ist $e_K^{\subseteq}$ nicht additiv, aber supermodular / konvex. Die Familie $(e_K^{\subseteq})_{\emptyset \neq K \subseteq I}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}$–Vektorraums $C(I)$.

Koalitionsspiele und Shapley–Basis

Aufgabe: Rechnen Sie diese Aussagen sorgfältig nach!
☺ Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen **Möbius–Inversion**.

(1) Wie stellen Sie eine Funktion $v \in C(I)$ in der Shapley–Basis dar als $v = \sum_K \lambda_K e_K^{\subseteq}$? Wie berechnen Sie aus v die Koeffizienten λ_K?

(2) Vergleichen Sie die Shapley–Basis mit der **kanonischen Basis**

$$e_K^{=} \;:\; \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} \;:\; S \mapsto e_K^{=}(S) = \begin{cases} 1 & \text{falls } K = S, \\ 0 & \text{falls } K \neq S. \end{cases}$$

Schreiben Sie in den kleinsten Beispielen $I = \{1, 2\}$ und $I = \{1, 2, 3\}$ die beiden Basiswechselmatrizen explizit aus. (Tipp: Sortieren Sie die Elemente $K \in \mathfrak{P}(I)$ zunächst nach Länge und dann lexikographisch.)

Bemerkung: Das Koalitionsspiel $e_K^{\subseteq}$ heißt auch Einhelligkeitsspiel / *unanimity game*. Die Basiseigenschaft geht zurück auf Shapley (1953). Der Koeffizient λ_K heißt auch Harsanyi–Dividende (Harsanyi 1959).

Anschaulich: Der Wert λ_K misst den Beitrag der Koalition K, der nicht bereits von Teilkoalitionen $S \subsetneq K$ beigesteuert wird.

Koalitionsspiele: Null-Eins-Normierung

Zwei Koalitionsspiele $u, v \in C(I)$ heißen **additiv äquivalent**, kurz $u \approx v$, falls $u - v \in C_0(I)$ gilt. Allgemeiner heißen sie **positiv äquivalent**, kurz $u \sim v$, falls $u = \lambda v + w$ gilt mit positivem Faktor $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und $w \in C_0(I)$.

Satz M1C: Null-Eins-Normierung

Null-Normierung: Jedes Koalitionsspiel $v \in C(I)$ ist additiv äquivalent zu genau einem null-normierten $u \in C(I)$ mit $u(\{i\}) = 0$ für alle $i \in I$.

Explizit ist $u = v - w$ mit $w \in C_0(I)$ gegeben durch $w(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$. Ist v superadditiv, so auch u, und zudem ist u dann sogar monoton.

Null-Eins-Normierung: Ist v echt superlinear, so erreichen wir $u(I) = 1$ durch positive Äquivalenz $u = \lambda^{-1}(v - w)$ mit $\lambda = v(I) - w(I) > 0$.

Zum Vergleich mit WMaßen stellen wir einige Eigenschaften gegenüber:

Charakteristische Funktion $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$	Wahrscheinlichkeitsmaß $p : \mathfrak{P}(I) \to [0,1]$
$v(\emptyset) = 0$, $v(I) = 1$	$p(\emptyset) = 0$, $p(I) = 1$
$v(\{i\}) = 0$ für alle $i \in I$	—
superadditiv $v(S \sqcup T) \geq v(S) + v(T)$	additiv $p(S \sqcup T) = p(S) + p(T)$
konstante Summe $v(I \smallsetminus S) = 1 - v(S)$	Komplemente $v(I \smallsetminus S) = 1 - v(S)$

Koalitionsspiele: Konvex-Konkav-Zerlegung

Jedes Koalitionsspiel $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} : \emptyset \mapsto 0$ schreibt sich eindeutig $v = \sum_{\emptyset \neq K \subseteq I} \lambda_K e_K^{\subseteq}$ mit $\lambda_K \in \mathbb{R}$, zerfällt also in die Summe von

$$v_0 = \sum_{|K|=1} \lambda_K e_K^{\subseteq}, \quad v_- = \sum_{\substack{|K|\geq 2 \\ \lambda_K < 0}} \lambda_K e_K^{\subseteq}, \quad v_+ = \sum_{\substack{|K|\geq 2 \\ \lambda_K > 0}} \lambda_K e_K^{\subseteq}.$$

Hierbei ist v_0 additiv, v_- konkav und v_+ konvex, beide $v_\pm$ null-normiert.

Aufgabe: Vorgelegt sei $v = \sum_{\emptyset \neq K \subseteq I} \lambda_K e_K^{\subseteq}$ mit $\lambda_K \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_K \in \mathbb{R}$. Genau dann ist v konvex, wenn $\lambda_K \geq 0$ für alle $K \subseteq I$ mit $|K| \geq 2$ gilt.

Lösung: Die Implikation „$\Leftarrow$“ ist klar, denn die Funktion $e_K^{\subseteq}$ ist konvex und Positivkombinationen erhalten die geforderten Ungleichungen.

Wir zeigen „$\Rightarrow$“: Sei $K \subseteq I$ und $i \neq j$ in K. Wir setzen $S = K \smallsetminus \{i\}$ und $T = K \smallsetminus \{j\}$ sowie $U = S \cap T = K \smallsetminus \{i, j\}$. Auswertung von v ergibt:

$$v(S \cup T) - v(S) - v(T) + v(S \cap T) = \lambda_K$$

Für die marginalen Zuwächse bedeutet das $\partial_i \partial_j v(K) = \lambda_K$. Ist also v supermodular / konvex, so folgt $\lambda_K \geq 0$.

Koalitionsspiele: Modell und Interpretation

Eine Quelle von Koalitionsspielen $v:\mathfrak{P}(I)\to\mathbb{R}$ sind strategische Spiele und ihre Zwei-Koalitionen-Konfrontationen (siehe hierzu Seite M405). Dementsprechend sagen wir, $v:\mathfrak{P}(I)\to\mathbb{R}$ hat **konstante Summe**, falls $v(S)+v(I\smallsetminus S)=v(I)$ für alle $S\subseteq I$ gilt. Daraus folgt $v(\emptyset)=0$.

Andere Quellen sind möglich, wie eingangs in den Beispielen motiviert. Manche Autoren nennen das Koalitionsspiel $v:\mathfrak{P}(I)\to\mathbb{R}$ mit $v(\emptyset)=0$ auch die **charakteristische Funktion** oder die **Koalitionsbewertung**: Jede gegebene Koalition $S\subseteq I$ kann sich den Ertrag $v(S)\in\mathbb{R}$ sichern.

In konkreten Anwendungen ist die explizite Berechnung von v mühsam. So ist das Leben. Wir nutzen einen bewährten mathematischen Trick: Wir abstrahieren von der Herkunft der Funktion v und ihrer Berechnung, auch legen wir in Definition M1A noch keine weiteren Eigenschaften fest.

Zwecks Vereinfachung verlangen wir hier lediglich $v(\emptyset)=0$.
Selbst das ist nicht wirklich nötig, aber im Folgenden bequem:
Jede konstante Funktion v ist modular, aber additiv nur für $v=0$.
Mit $v(\emptyset)=0$ ist Additivität gleichbedeutend zu Modularität (M101).

Koalitionsspiele: Modell und Interpretation

Super/submodulare Funktionen treten in der **Ökonomie** häufig auf:
Bei **Kosten** hoffen wir auf Subaddivität: Zusammenarbeit spart Kosten.
Bei **Profiten** hoffen wir auf Superadditivität: Kooperation zahlt sich aus.
Das bedeutet jeweils negative bzw. positive **Synergie**. Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned}\mathrm{Synergie} &: \mathfrak{P}(I)\times\mathfrak{P}(I)\to\mathbb{R}\\ &: (S,T)\mapsto v(S\cup T)-v(S)-v(T)+v(S\cap T).\end{aligned}$$

Für $S\cap T=\emptyset$ gilt demnach $\mathrm{Synergie}(S,T)=v(S\cup T)-v(S)-v(T)$. Dies misst, wie viel S und T von ihrer Zusammenarbeit profitieren, also wie viel sie gemeinsam mehr erwirtschaften als getrennt.

Speziell für $i\in S\subseteq I$ betrachten wir den **marginalen Mehrwert** [*marginal contribution*] des Spielers i zum Wert der Koalition S:

$$\partial_i v(S) := v(S)-v(S\smallsetminus\{i\}).$$

Im Falle $\partial_i v(S) > v(i)$ lohnt sich der Beitritt von i zu der Koalition S.
Im Falle $\partial_i v(S) < v(i)$ lohnt sich der Austritt von i aus der Koalition S.

Mathematisch gesehen sind **additive Funktionen** die einfachsten. Ökonomisch gesehen sind sie jedoch langweilig, da ohne Synergie. Wir nennen sie daher **unwesentlich**, alle anderen sind **wesentlich**. Erstere bilden einen Untervektorraum, den wir vernachlässigen wollen.

Gilt $\lambda u = v$ mit einem positiven Faktor $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, dann unterscheiden sich u und v nur durch **Skalierung** (Währungswechsel, etwa Euro zu Cent). Auch dies vernachlässigen wir und gelangen so zur obigen Äquivalenz; diese ist naheliegend und natürlich und erweist sich als nützlich.

Wir untersuchen nun genauer die wesentlichen, nicht-additiven Spiele. Besonders interessant sind darunter die superadditiven Koalitionspiele, zur ökonomischen Anwendung wie zur mathematischen Untersuchung. Am allerschönsten sind die supermodularen / konvexen Koalitionsspiele.

Satz M1C garantiert uns hierzu eine bequeme und schöne Darstellung: Wir können in jeder Äquivalenzklasse als kanonischen Repräsentanten die Null-Eins–Normierung auszeichnen, analog zu WMaßen (M101). Insbesondere dürfen wir fortan $v \geq 0$ und Monotonie annehmen.

Wir sehen hier sehr schön, wie ökonomische Eigenschaften und Begriffe eine direkte mathematische Entsprechung finden. Die beiden vertraute gemeinsame Sprache ist die der Mengen, Relationen und Abbildungen, hier zudem die Grundlagen zu Vektorräumen und linearen Abbildungen.

Die **Übersetzung** dieser beiden Sichtweisen ist nicht immer einfach, aber meist sehr lohnend, sowohl theoretisch wie praktisch:

- Die ökonomische Sichtweise bietet eine starke Motivation und wunderbar anschauliche Beispiele. Allerdings lassen sich selbst einfache Fälle meist nicht leicht durchschauen oder gar lösen.
- Die mathematische Sichtweise ermöglicht präzise Formulierungen, nachvollziehbare Rechnungen und quantitative Ergebnisse. Diese wiederum nützen in der ökonomischen Fragestellung.

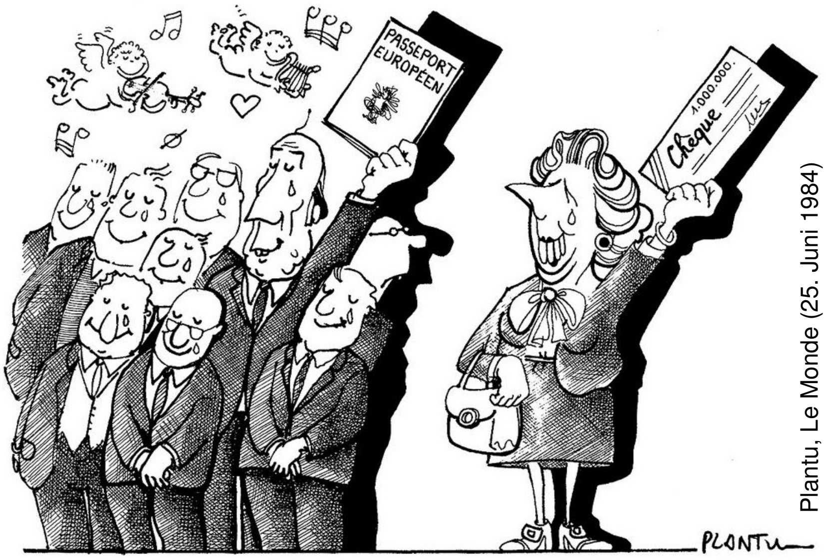
Diese Zusammenarbeit ist überaus bemerkenswert, oft sehr effizient. Natürlich gelingt dies nicht immer und wird wird dann auch kritisiert. Doch insgesamt gilt Eugene Wigners Weisheit zur **unverschämten Wirksamkeit** der Mathematik tatsächlich auch in der Ökonomik.

Europäische Union: vom Britenrabatt zum Brexit

M117
Beispiel

Die Europäische Union (EU) hat hehre Ziele und konkrete Aufgaben: Frieden und Verständigung, dazu auch wirtschaftliche Zusammenarbeit. Der Nutzen überwiegt die Kosten, das ist nahezu unbestritten, doch um die Aufteilung wird erbittert gekämpft. Daran droht die EU zu zerbrechen.

Margaret Hilda Thatcher, 1925–2013



Plantu, Le Monde (25. Juni 1984)

Margaret Thatcher: *„I want my money back, and I want it now!“* (1979)
Durch einseitige Forderungen erzwingt sie im Juni 1984 den Britenrabatt. Selbst dieser Sonderbonus konnte Quengeln und Brexit nicht verhindern.

Europäische Union: vom Britenrabatt zum Brexit

M118
Beispiel

Die große Koalition I ist stabil, wenn sie sich für jeden Koalitionär lohnt. Die Aufteilung des gemeinsamen Nutzens $v(I)$ jedoch ist keineswegs klar vorgegeben, sondern muss mühsam ausgehandelt werden.

Auch in der EU sind Ausgleich und Justierung durchaus wünschenswert. Doch was ist „ausgewogen“ und „gerecht“? Das muss man verhandeln. Hierbei kann es sich lohnen, zu drohen, zu bluffen, zu lügen, etc.

Der Brexit, der uns dauerhaft beschäftigt, hat eine lange Vorgeschichte. Margaret Thatcher verlangte seit 1979, dass Großbritannien zwei Drittel seiner Zahlungen an die EU erlassen werden, da es weniger als andere Länder von Landwirtschafts-Subventionen profitiere und der Wohlstand in Großbritannien niedriger sei als in anderen europäischen Ländern.

Daran kann man zweifeln, zum Beispiel macht der Finanzplatz London astronomische Gewinne. Der Rabatt für die Insulaner blieb jedoch, ebenso ihr tief eingeimpftes Gefühl, ungerecht behandelt zu werden. Aus diesem *Gefühl* der Benachteiligung, und nicht aus den objektiven *Vorteilen*, speist sich für viele Bürger:innen ihre wachsende Euroskepsis.

Ähnliche Probleme und Nörgelrabatte sehen wir in vielen Koalitionen. Beim Feilschen gilt der Grundsatz: Jammern gehört zum Handwerk. Bereits die Datenerhebung vor der Verhandlung ist Teil des Spiels und kann daher für anschließende Verhandlungen instrumentalisiert werden. Das verkompliziert alles, ist aber aus spieltheoretischer Sicht vernünftig: Jeder Spieler will durch einseitige Forderungen seine Zuteilung erhöhen.

Die implizite oder explizite Drohung ist, die Koalition zu verlassen. Das ist allerdings nur dann glaubwürdig, wenn sich der Austritt lohnt. Im Beispiel EU könnte Deutschland über einen Austritt nachdenken, als Alternative durchrechnen und eventuell den anderen damit drohen. Ebenso könnte Frankreich seinen Austritt planen oder androhen. Auch könnten sich beide zusammenschließen, als Teilkoalition.

Damit kommen wir zur spieltheoretisch-mathematischen Formulierung. Die große Koalition ist stabil, wenn sie sich für jeden Koalitionär lohnt. Stärkere Forderung: Sie muss sich sogar für jede Teilkoalition lohnen. Die Aufteilung des gemeinsamen Nutzens ist Verhandlungssache.

Bei aller Begeisterung für die Spieltheorie müssen wir ehrlich bleiben: Die Mathematik benötigt präzise Grundlagen und verlässliche Daten. Die Theorie kann erst dann ihre Kraft ausspielen und ordnende Wirkung entfalten, wenn wir ausreichend wissen, was hier wirklich gespielt wird.

Realistische Daten sind meist schwer zu bekommen und oft umstritten. Das ist leider ein allgegenwärtiges Problem: Gute Daten sind teuer, sie kosten Zeit und Geld, manchmal sind sie ganz unzugänglich. Ich wiederhole daher die Einschränkung und Warnung:

In konkreten Anwendungen ist die explizite Berechnung von v mühsam. So ist das Leben. Wir nutzen einen bewährten mathematischen Trick: Wir abstrahieren von der Herkunft der Funktion v und ihrer Berechnung, auch legen wir in Definition M1A noch keine weiteren Eigenschaften fest.

Für unsere Anwendungsbeispiele bedeutet das natürlich ebenso, dass wir stark vereinfachte und idealisiert Daten annehmen (müssen). Das Problem ist daher nicht die Methode, die hier illustriert wird, sondern die speziellen / vereinfachten / erfundenen Daten.

Definition M1D: Zuteilung, Allokation und Kern

Weiter sei I eine endliche Menge und $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$ ein Koalitionsspiel. Zur Vereinfachung denken wir hier an Gewinne, also $v \ge 0$.

Jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^I$ ist eine **Zuteilung** $x : I \to \mathbb{R} : i \mapsto x_i$ [*imputation*]. Für $S \subseteq I$ definieren wir $x(S) := \sum_{i \in S} x_i$. Den Vektor x nennen wir…

- **zulässig**, falls $x(I) \le v(I)$ gilt, und **pareto–effizient**, falls $x(I) = v(I)$,
- **individuell rational**, falls $x(i) \ge v(i)$ für alle $i \in I$, und eine **Allokation**, falls zudem pareto–effizient,
- **kollektiv rational**, falls $x(S) \ge v(S)$ für alle $S \subseteq I$, und eine **Kernallokation**, falls zudem pareto–effizient.

Dies definiert die **Allokationsmenge** und den **Kern** von v:

$$\mathrm{Alloc}(v) := \{\, x \in \mathbb{R}^I \mid x(I) = v(I),\ \forall i \in I : x(i) \ge v(i) \,\}$$
$$\mathrm{Core}(v) := \{\, x \in \mathbb{R}^I \mid x(I) = v(I),\ \forall S \subseteq I : x(S) \ge v(S) \,\}$$

Dies sind die rational möglichen Zuteilungen in der großen Koalition I.

Angenommen, alle Spieler in I kooperieren mit Gesamtnutzen $v(I)$. Wir suchen eine individuelle Zuteilung x_i für jeden Spieler $i \in I$. Hier gelten Stabilitätskriterien, analog zu Nash–Gleichgewichten: Kein Spieler/Bündnis hat Anreiz, die große Koalition zu verlassen.

Zulässigkeit $x(I) \le v(I)$: Es wird nur verteilt, was vorhanden ist. Pareto–Effizienz $x(I) = v(I)$: Der gesamte Kuchen wird verteilt.

Individuelle Rationalität $x(i) \ge v(i)$: Jeder Spieler $i \in I$ profitiert, zumindest schwach: Es besteht kein Anreiz, die Koalition zu verlassen.

Kollektive Rationalität $x(S) \ge v(S)$: Jedes Bündnis $S \subseteq I$ profitiert, zumindest schwach: Es besteht kein Anreiz, die Koalition zu verlassen.

☺ Dank unserer mathematischen Sprache und Formalisierung lassen sich diese Bedingungen nun klar und einfach formulieren.

☺ Wir verfügen über starke Werkzeuge: reelle Vektorräume und lineare Abbildungen, affin-lineare Un/Gleichungen und Simplex-Verfahren, räumliche Anschauung und analytische Geometrie, etc.

Aufgabe: (1) Was ist die Allokationsmenge bei Null-Eins-Normierung?
(2) Wie verhalten sich Allokationsmenge und Kern bei Äquivalenz?

Lösung: (1) Für $I = \{0, 1, \dots, n\}$ erhalten wir den Standardsimplex

$$\Delta^n = [I] = \{\, x \in \mathbb{R}^I \mid x_0, x_1, \dots, x_n \geq 0,\ x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1 \,\}.$$

(2) Die Zuteilung $x \in C_0(I)$ ist linear, also additiv und modular.
Alle Ungleichungen bleiben erhalten, wenn wir x und v mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ skalieren, und ebenso, wenn wir eine Funktion $w \in C_0(I)$ addieren.

🙂 Die Allokationsmenge $\operatorname{Alloc}(v) \subset \mathbb{R}^I$ ist somit immer ein Simplex, im Allgemeinen allerdings positiv skaliert und additiv verschoben.

🙂 Die Null-Eins-Normierung ist zwar sehr einfach und geradezu banal, dennoch ist sie ungemein praktisch und wird daher häufig eingesetzt.

🙂 Wir nutzen sachgerechte und besonders einfache Koordinaten: Der Standardsimplex $\Delta^n = [I]$ ist uns vertraut und sympathisch.

🙂 Der Kern ist konvex und kompakt. ☹ Er ist eventuell leer.
Der Kern kann also 0, 1 oder überabzählbar viele Punkte enthalten.

Wir müssen also mit zwei entgegengesetzten Problemen umgehen: Zu vorgelegtem v kann zu wenige oder zu viele Lösungen geben.

Aufgabe: (1) Bestimmen Sie den Kern eines additiven Spiels v.
(2) Wie erklärt der Kern die Möglichkeit eines Britenrabatts?

Lösung: (1) Additivität bedeutet $v(S) = \sum_{i \in S} v(i)$. Jede Allokation $x : I \to \mathbb{R}$ erfüllt $x(i) \geq v(i)$ für jeden Spieler $i \in I$, also $x(S) \geq v(S)$. Zulässigkeit erfordert $x(I) \leq v(I)$. Dies erzwingt die Gleichheit $x(i) = v(i)$ für alle $i \in I$, wir schreiben abkürzend $x = v$.

🙂 Für jedes additive Spiel v gilt $\operatorname{Alloc}(v) = \operatorname{Core}(v) = \{v\}$.

(2) Im günstigen Fällen erlaubt das Spiel v einen ausgedehnten Kern. Dies gilt zum Beispiel für echt konvexe Spiele, wie wir sehen werden.

🙂 Für Auszahlungen $x \in \operatorname{Core}(v)$ besteht also Verhandlungsspielraum.

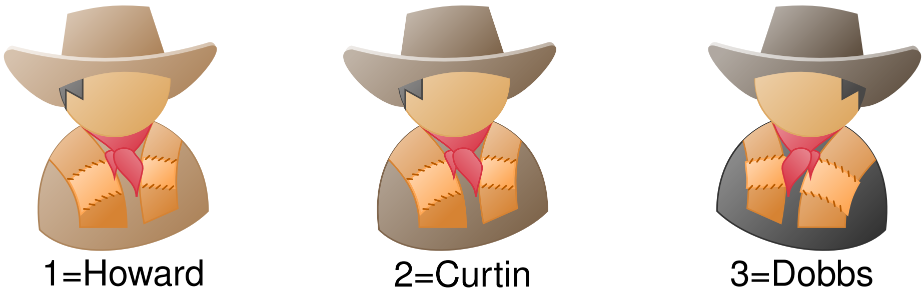
Der Schatz der Sierra Madre (1948)

M125
Beispiel

“The effects of greed on three penniless prospectors (Humphrey Bogart, Walter Huston, Tim Holt) when they strike it rich in the bandit infested mountains of the Sierra Madre.” (`www.virtual-history.com/movie/film/1112/`)

Der Schatz der Sierra Madre (1948)

M126
Beispiel



Zu dritt erwirtschaften sie ein Vermögen 1, zu zweit nur $\alpha \in [0, 1]$, allein überlebt keiner. Als Koalitionsspiel über $I = \{1, 2, 3\}$ gilt also:

$$v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} : S \mapsto v(S) := \begin{cases} 0 & \text{falls } |S| \le 1, \\ \alpha & \text{falls } |S| = 2, \\ 1 & \text{falls } |S| = 3. \end{cases}$$

Aufgabe: Welche Koalitionen sind stabil? Was ist der Kern? Ist die Funktion v superadditiv? oder gar supermodular?

Lösung: Für $\alpha \le 2/3$ ist die große Koalition stabil, etwa mit Zuteilung $x = (1/3, 1/3, 1/3)$. Für $\alpha > 2/3$ sind nur noch Zweierkoalitionen stabil. Für $\alpha \in [0, 1]$ ist v superadditiv, für $\alpha \in [0, 1/2]$ auch supermodular.

Der Schatz der Sierra Madre (1948)

M127
Beispiel

Ein Filmklassiker mit Humphrey Bogart (als Dobbs, mitte), Tim Holt (als Curtin, links) und Walter Huston (als Howard, rechts) unter der Regie seines Sohnes John Huston. Perfektes Tomatometer: 100% (`www.rottentomatoes.com/m/treasure_of_the_sierra_madre`)

Der Schatz der Sierra Madre (1948)

M128
Beispiel

Jeder Spieler $i \in I$ hat Interesse am Zusammenschluss mit $v(I) = 1$. Auf sich alleine gestellt schneidet er mit $v(i) = 0$ definitiv schlechter ab.

Im Falle $\alpha < 2/3$ lohnt sich für jeden Spieler die große Koalition: Jedes kleinere Bündnis führt zu Verlusten bei mindestens einem Spieler.

🙂 Stabilität bedeutet Gewissheit und Sicherheit für jeden Spieler. Misstrauen ist unnötig. Es ist gut zu wissen, dass man gebraucht wird.

☹ Die Aufteilung des Gewinns ist noch nicht festgelegt; jede Zuteilung $x \in \mathbb{R}^3$ ist möglich, solange $x_1 + x_2 + x_3 \le 1$ und $x_1, x_2, x_3 > \alpha/2$ gilt.

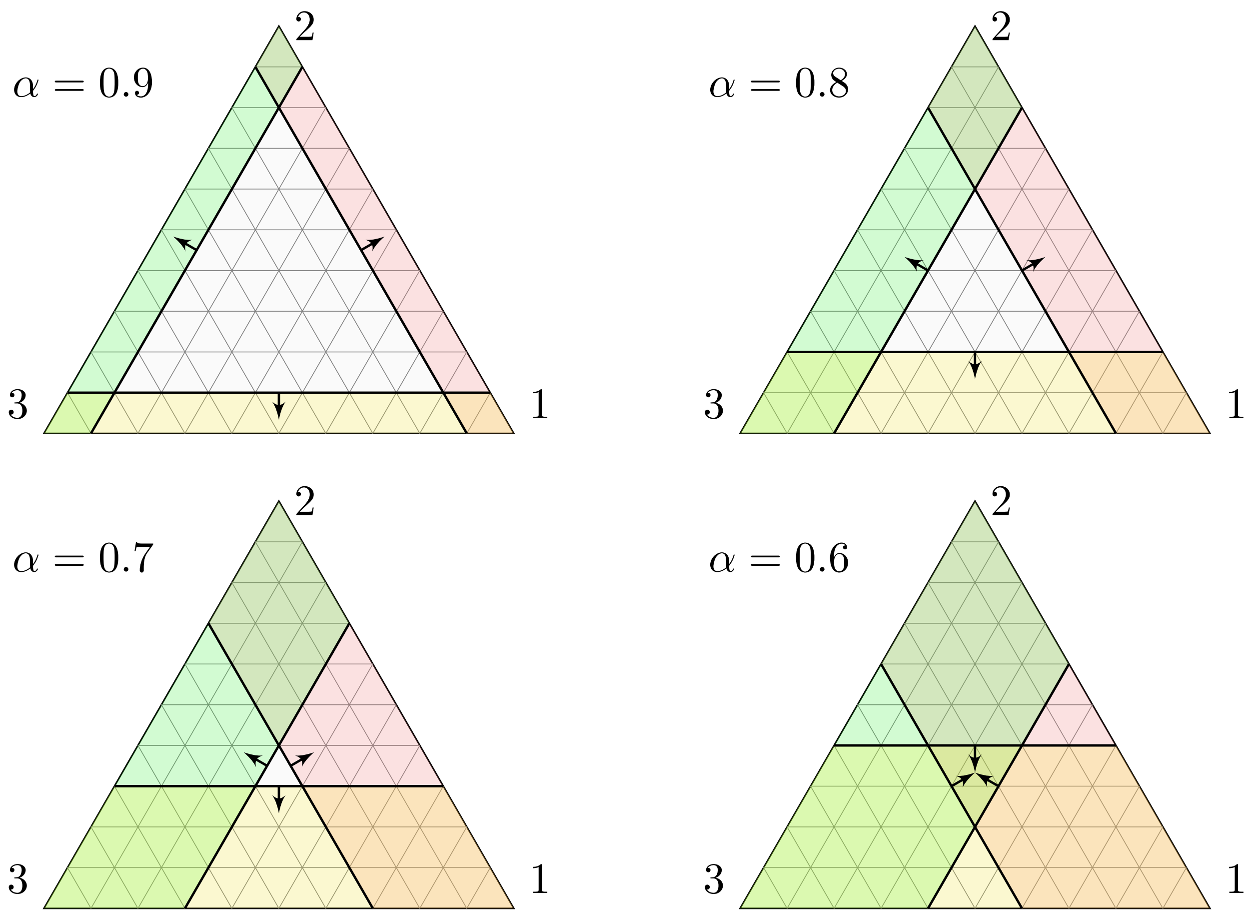
Im Falle $\alpha > 2/3$ hingegen ist die große Koalition $I = \{1, 2, 3\}$ instabil: Je zwei Goldgräber können zusammen mehr unter sich aufteilen.

Jedes Zweierbündnis ist denkbar, die Situation ist symmetrisch. In dieser instabilen Situation ist eine Vorhersage schwierig.

☹ Je zwei können den dritten ausbooten. Das führt zu Instabilität, Ungewissheit, Misstrauen. Davon handelt der Film, Dobbs wird paranoid.

☹ Die Bündnisbildung ist willkürlich. Sie kennen dies vielleicht aus sozialen Situationen, wo manche zu Außenseitern (gemacht) werden.

Der Schatz der Sierra Madre (1948)



Der Schatz der Sierra Madre (1948)

Die Graphiken zeigen für $I = \{1, 2, 3\}$ den Standardsimplex

$$[I] = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2, x_3 \geq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \,\}.$$

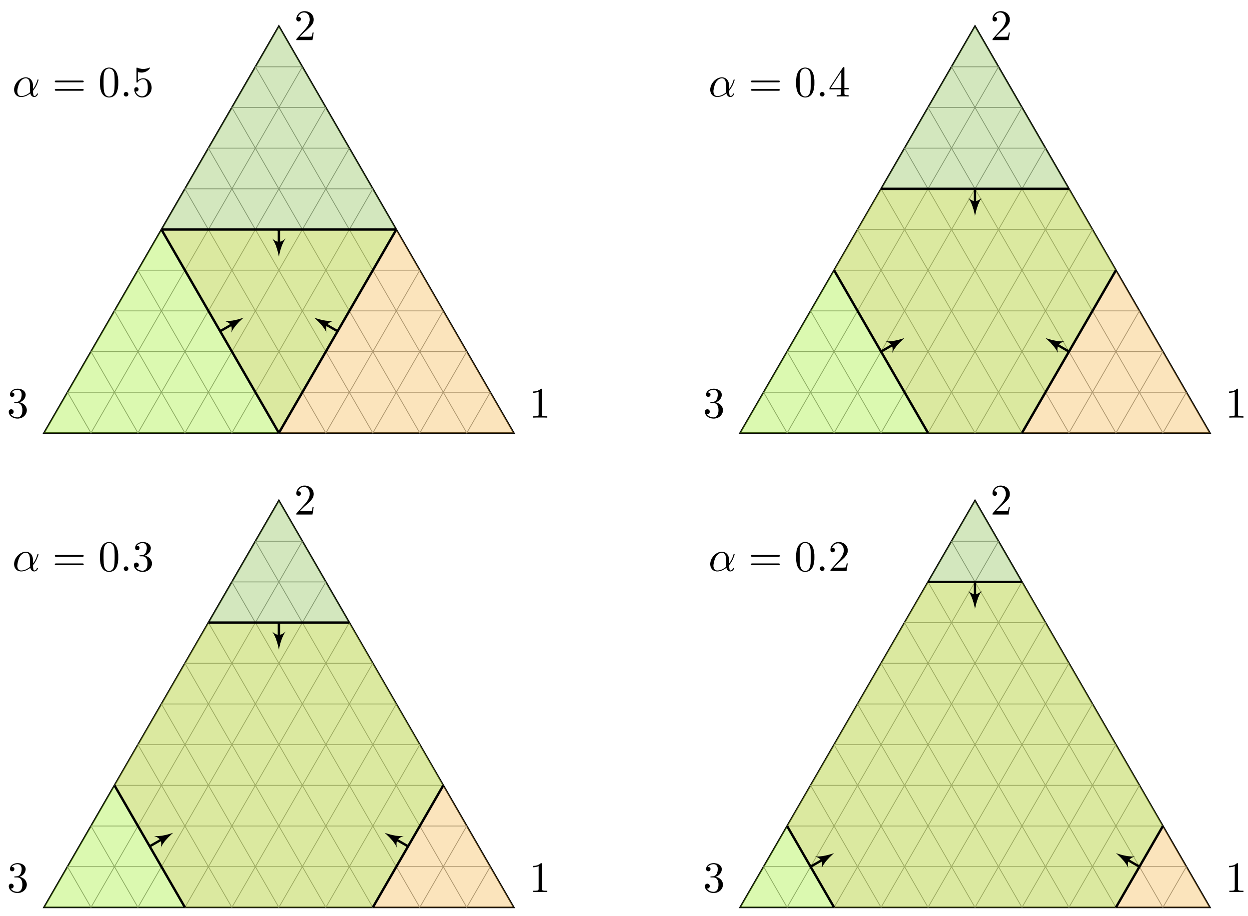
Die Blickrichtung ist von $(1, 1, 1)$ auf den Ursprung $(0, 0, 0)$.
Wir sehen dann ein gleichseitiges Dreieck mit Ecken e_1, e_2, e_3.

Eingefärbt sind jeweils die drei Halbebenen, die durch die geforderten Ungleichungen $x_1 + x_2 \geq \alpha$, $x_1 + x_3 \geq \alpha$, $x_2 + x_3 \geq \alpha$ gegeben sind. Der Pfeil zeigt von der Geraden zur Seite der erfüllten Ungleichung.

Wir beginnen mit dem klarsten Fall: Für $\alpha > 2/3$ ist der Kern leer!
Keine zulässige Zuteilung $x : I \to \mathbb{R}$ ist kollektiv rational.

Aufgabe: Zeigen Sie dies (1) geometrisch und (2) algebraisch: Formulieren Sie alle Ungleichungen, schreiben Sie diese explizit als Tucker–Tableau und lösen Sie es mit dem Simplex-Algorithmus.

Der Schatz der Sierra Madre (1948)



Der Schatz der Sierra Madre (1948)

Für $\alpha \le 2/3$ ist der Kern $\operatorname{Core}(v)$ nicht leer: zunächst ein Sechseck für $0 < \alpha < 1/2$, dann ein Dreieck für $1/2 \le \alpha < 2/3$, und schließlich nur noch ein einziger Punkt für den kritischen Wert $\alpha = 2/3$.

Schönster Fall: Für $0 < \alpha < 1/2$ ist v supermodular, Die marginalen Zuwächse sind von der Form $(0, \alpha, 1-\alpha)$, davon $3!$ Permutationen. Diese Punkte bilden genau die Ecken des Kern-Sechsecks!

Für $\alpha = 1/2$ degeneriert dies zu $(0, 1/2, 1/2)$ mit nur 3 verschiedenen Permutationen. Diese bilden genau die Ecken des Kern-Dreiecks.

Für $1/2 < \alpha \le 2/3$ ist v nicht mehr supermodular. Der Kern ist nicht-leer, doch die Zuwächse $(0, \alpha, 1-\alpha)$ liegen nicht mehr darin. Die Eckpunkte des Kerns müssen wir daher auf andere Weise bestimmen.

🙂 Supermodulare / konvexe Koalitionsspiele $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$ haben die besten Eigenschaften, sowohl aus Sicht der ökonomischen Anwendung als auch bezüglich ihrer mathematischen Eigenschaften, hier speziell in unserer algebraisch-geometrischen Untersuchung.

Charakterisierungen konvexer Koalitionsspiele

Zu $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$ und $i \in I$ definieren wir die **diskrete Ableitung**

$$\partial_i v \;:\; \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} \;:\; S \mapsto (\partial_i v)(S) := v(S \cup \{i\}) - v(S \smallsetminus \{i\}).$$

Allgemeiner definieren wir für $R \subseteq I$ die diskrete Richtungsableitung

$$\partial_R v \;:\; \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} \;:\; S \mapsto (\partial_R v)(S) := v(S \cup R) - v(S \smallsetminus R).$$

Lemma M1E: Charakterisierungen konvexer Koalitionsspiele

Für $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Die Abbildung v ist supermodular / konvex.

(2) Für alle $Q, R, S \subseteq I$ gilt $\partial_Q \partial_R v(S) \ge 0$, also ausgeschrieben

$$v(S \cup R \cup Q) - v((S \cup R) \smallsetminus Q) - v((S \smallsetminus R) \cup Q) + v((S \smallsetminus R) \smallsetminus Q) \ge 0.$$

(3) Für alle $S \subseteq T \subseteq I$ und $i \in I \smallsetminus T$ gilt $\partial_i v(S) \le \partial_i v(T)$, also

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \le v(T \cup \{i\}) - v(T).$$

🙂 Wir nennen $\partial_i v(S)$ auch den **marginalen Mehrwert** von i bzgl. S. Ungleichung (3) besagt, dass der marginale Mehrwert monoton wächst.

Charakterisierungen konvexer Koalitionsspiele

Aufgabe: Rechnen Sie diese Aussagen sorgfältig nach! Illustrieren Sie dies erneut mit dem Schatz der Sierra Madre.

Lösung: Die Aufgabe erfordert vor allem Sorgfalt und klare Schreibung.
„(1) ⇒ (2)“: Für $S' := (S \smallsetminus R) \smallsetminus Q$ und $R' := R \smallsetminus Q$ und $Q' := Q$ gilt

$$\begin{aligned} S \cup R \cup Q &= S' \sqcup R' \sqcup Q', & (S \cup R) \smallsetminus Q &= S' \sqcup R', \\ (S \smallsetminus R) \cup Q &= S' \sqcup Q', & (S \smallsetminus R) \smallsetminus Q &= S'. \end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich die Ungleichung (2) zu

$$v(S' \sqcup R' \sqcup Q') - v(S' \sqcup R') - v(S' \sqcup Q') + v(S') \ge 0.$$

Diese Ungleichung gilt dank der vorausgesetzten Modularität (1).
„(2) ⇒ (3)“: Dies folgt durch die Spezialisierung $R = T \smallsetminus S$ und $Q = \{i\}$.
„(3) ⇒ (1)“: Zu $A, B \subseteq I$ sei $S = A \cap B$ und $R = A \smallsetminus S$ und $Q = B \smallsetminus S$. Modularität $v(A \cup B) \ge v(A) + v(B) - v(A \cap B)$ bedeutet dann

$$v(S \sqcup R \sqcup Q) - v(S \sqcup R) \ge v(S \sqcup Q) - v(S).$$

Dies folgt aus (3) als Teleskopsumme über die Elemente von Q.

Charakterisierungen konvexer Koalitionsspiele

Die Schreibweise „∂" verwenden wir hier für die Differenz

$$\partial_i v(S) := v(S \cup \{i\}) - v(S \smallsetminus \{i\}),$$

also ein sehr einfaches kombinatorisch-algebraisches Konzept.

Ökonom:innen interpretieren dies als den **marginalen Mehrwert** / *marginal contribution* des Spielers i zum Wert der Koalition S.

Mathematiker:innen erinnert dies an den **Differentialquotienten** bzw. die partielle Ableitung, also ein grundlegendes Konzept der Analysis.

Das ist nicht nur eine zufällige Ähnlichkeit, die Analogien sind durchaus bemerkenswert und hilfreiche Gedächtnisstützen. Zur Illustration seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. (Meist genügt weniger, aber diese Generalvoraussetzung vereinfacht die Beispiele.)

Die Ableitungen schreiben wir dann $\partial_1 f$ bzw. $\partial_i g$. Natürlich sind die folgenden analytischen Aussagen subtiler und tiefsinniger, und auch aufwändiger zu beweisen, als ihre kombinatorischen Gegenstücke, aber die anschauliche Bedeutung ist doch frappierend ähnlich.

Charakterisierungen konvexer Koalitionsspiele

Zur Monotonie gilt:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ isoton} \quad &\Leftrightarrow \quad \partial_1 f \ge 0 \\ v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} \text{ isoton} \quad &\Leftrightarrow \quad \partial_i v \ge 0 \text{ für alle } i \in I \end{aligned}$$

Zur Konvexität gilt (dank Lemma M1E):

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ konvex} \quad &\Leftrightarrow \quad \partial_1 f \text{ isoton} \\ v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} \text{ konvex} \quad &\Leftrightarrow \quad \partial_i v \text{ isoton für alle } i \in I \end{aligned}$$

Zur Konvexität gilt allgemein (M1E):

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ konvex} \quad &\Leftrightarrow \quad (\partial_i \partial_j g) \ge 0 \\ v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} \text{ konvex} \quad &\Leftrightarrow \quad \partial_i \partial_j v \ge 0 \text{ für alle } i \in I \end{aligned}$$

Ausführlich: Genau dann ist die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, wenn die Hesse–Matrix $(\partial_i \partial_j g)$ positiv semidefinit ist, geschrieben $(\partial_i \partial_j g) \ge 0$.

Ebenso besteht eine schöne Analogie zur diskreten Ableitung von Funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$. Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(I) \cong 2^I$ entspricht dabei dem diskreten Hamming–Würfel $\{0,1\}^n \subset \mathbb{Z}^n$.

Der Kern eines Koalitionsspiels

Satz M1F: Konvexe Koalitionsspiele haben nicht-leeren Kern.

(1) Ist v superlinear, so ist die Allokationsmenge $\operatorname{Alloc}(v)$ nicht leer.
(2) Ist v supermodular / konvex, so ist der Kern $\operatorname{Core}(v)$ nicht leer.

Konstruktion: Sei $\rho : I \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \dots, n\}$ eine Abzählung aller Spieler. Damit bauen wir schrittweise Koalitionen $\rho^{-1}(\{1, 2, \dots, m\}) \subseteq I$ auf.

Zur Koalition $S_i^\rho = \{\, j \in I \mid \rho(j) \le \rho(i) \,\}$ kam zuletzt der Spieler i. Er trägt den marginalen Mehrwert $\Delta_i^\rho(v) = v(S_i^\rho) - v(S_i^\rho \smallsetminus \{i\})$ bei.

Diese Konstruktion $v \mapsto \Delta_i^\rho(v)$ nützt und hilft uns im Folgenden öfters. Wir können nun ihre erfreulichen Eigenschaften nachrechnen:

Lemma M1G: Eigenschaften des marginalen Mehrwerts Δ^ρ

(0) Für jede Abzählung ρ ist die Zuteilung $\Delta^\rho(v) \in \mathbb{R}^I$ pareto–effizient.
(1) Ist das Koalitionsspiel v superkumulativ, so gilt $\Delta^\rho(v) \in \operatorname{Alloc}(v)$.
(2) Ist das Koalitionsspiel v supermodular, so gilt $\Delta^\rho(v) \in \operatorname{Core}(v)$.

Der Kern eines Koalitionsspiels

Aufgabe: Rechnen Sie diese Aussagen sorgfältig nach!

Lösung: (0) Dies folgt aus der Teleskopsumme

$$\sum\nolimits_{i \in I} v(S_i^\rho) - v(S_i^\rho \smallsetminus \{i\}) = v(I) - v(\emptyset) = v(I).$$

(1) Ist v superkumulativ, so gilt

$$\Delta_i^\rho(v) = v(S_i^\rho) - v(S_i^\rho \smallsetminus \{i\}) \ge v(i).$$

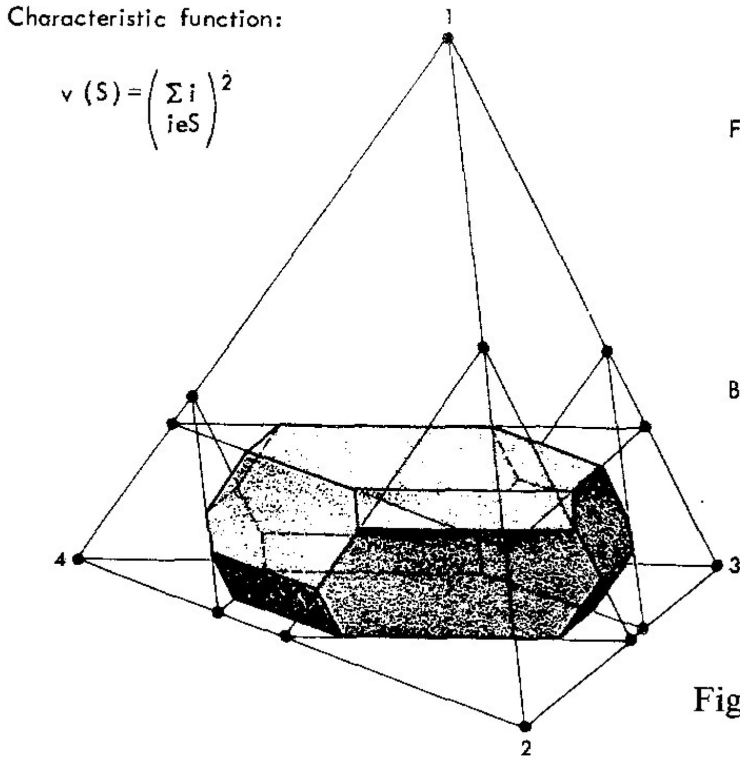
(2) Zum Vergleich nutzen wir $\tau : I \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$ mit $\tau(S) = \{1, \dots, m\}$, indem wir alle Elemente von S nach vorne sortieren, dabei aber ihre interne Reihenfolge in S beibehalten (*shuffle*). Dank Lemma M1E gilt

$$\sum\nolimits_{i \in S} \Delta_i^\rho(v) \ge \sum\nolimits_{i \in S} \Delta_i^\tau(v) = v(S) - v(\emptyset) = v(S).$$

Das beweist Lemma M1G und damit zugleich Satz M1F. $\boxed{\text{QED}}$

Der Kern eines Koalitionsspiels

📖 Die Geometrie des Kerns wurde untersucht von Lloyd S. Shapley: *Cores of convex games.* Int. Journal of Game Theory 1 (1971) 11–26.



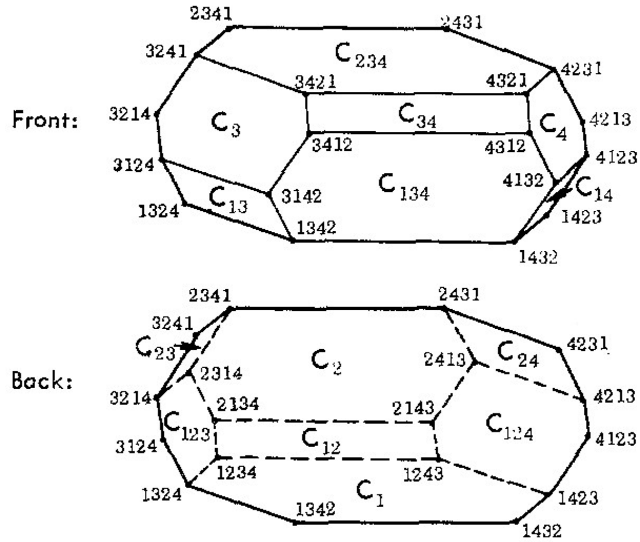
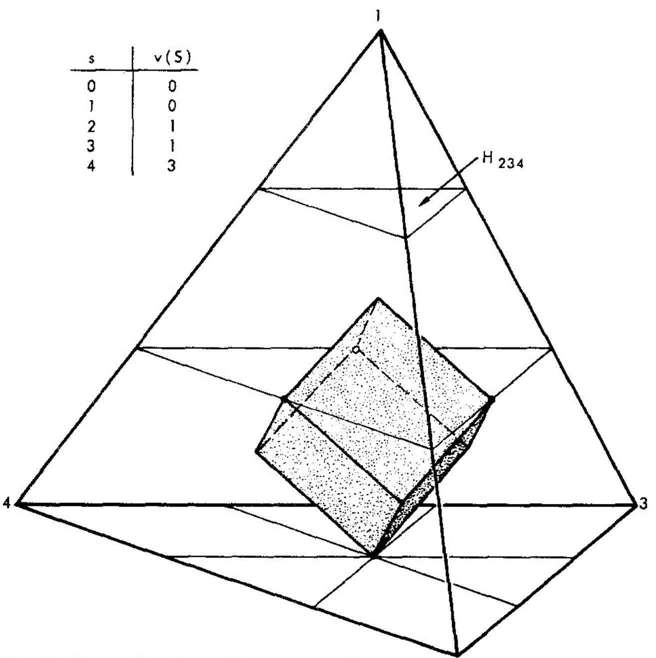


Fig. 2: Core of a four-person convex game

Der Kern eines Koalitionsspiels

Der Kern $\mathrm{Core}(v)$ ist konvex und kompakt, von Dimension $\le |I| - 1$, eventuell leer. Für reguläres v sind seine Ecken die Punkte $\Delta^\rho(v)$. Für nicht-reguläres v fallen einige dieser Eckpunkte zusammen:



s	v(S)
0	0
1	0
2	1
3	1
4	3

Fig. 3: Example of a stable, nonregular core

📖 Günter M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer 1995.

Große Koalition und individuelle Zuteilung

Weiter sei I eine endliche Menge und $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$ ein Koalitionsspiel. Wir suchen für solche v eine allgemeine **Zuteilungsregel**

$$\psi \;:\; C(I) \to \mathbb{R}^I \;:\; v \mapsto \psi(v) = (\psi_i(v))_{i\in I}.$$

Ausgehend von v bekommt jeder Spieler $i \in I$ eine Zuweisung $\psi_i(v)$. Welche Zuteilungen sind „fair“ und „gerecht“? Wir lassen uns leiten von wünschenswerten Eigenschaften und formulieren diese als Axiome.

Der Gesamtwert $v(I)$ der großen Koalition wird an die Spieler verteilt. **PAR: Pareto–Effizienz.** Die Gesamtsumme ist $\sum_{i\in I} \psi_i(v) = v(I)$.

Ein Spieler $i \in I$ heißt *neutral*, falls $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ für alle $S \subseteq I$ gilt. **NTR: Neutralität.** Für jeden neutralen Spieler $i \in I$ gilt $\psi_i(v) = 0$.

Die Zuteilung ist *anonym*, also unabhängig von Namen und Reihenfolge. **SYM: Symmetrie.** Für jede Permutation $\pi : I \xrightarrow{\sim} I$ gilt $\psi_{\pi i}(v\pi) = \psi_i(v)$.

Wir addieren gleichzeitige Koalitionsspiele und ebenso ihre Zuteilungen: **ADD: Additivität.** Für $v_1, v_2 \in C(I)$ gilt $\psi(v_1 + v_2) = \psi(v_1) + \psi(v_2)$.

Große Koalition und individuelle Zuteilung

Zur Motivation und Vereinfachung denken wir uns v supermodular. Dann lohnt Zusammenarbeit, am meisten die große Koalition.

Pareto–Effizienz fordert: Der gesamte Kuchen $v(I)$ wird verteilt. Bei positivem Rest könnte man alle Spieler strikt besser stellen.

Neutralität: Ein Spieler, der nichts beiträgt, erhält auch keine Zuteilung. Nach Paulus: „Wer nicht arbeitet, soll auch nicht essen.“ (2 Thess 3,10).

Symmetrie: Jede Permutation $\pi : I \xrightarrow{\sim} I : i \mapsto \pi i$ induziert auf den Teilmengen die Linksoperation $\mathfrak{P}(I) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{P}(I) : S \mapsto \pi(S)$ und auf den Koalitionsspielen somit die Rechtsoperation $C(I) \to C(I) : v \mapsto v \circ \pi$. Wir fordern die Invarianz $\psi_{\pi i}(v\pi) = \psi_i(v)$ unter allen Permutationen π. Das dient der Gerechtigkeit und verhindert z.B. einen *Gender Pay Gap*.

Die Forderung nach **Additivität** ist wenig intuitiv und wird oft kritisiert. Die Summe $v = v_1 + v_2$ stellen wir uns als gleichzeitige und gekoppelte Koalitionsspiele v_1 und v_2 vor. Hierbei sind Wechselwirkungen denkbar, zum Beispiel in beiden wechselnde Koalitionen. Diese Möglichkeiten ignorieren wir zur Vereinfachung und fordern schlicht Additivität.

Große Koalition und Shapley–Wert

Satz M2A: Shapley–Wert, Shapley 1953

(1) Es gibt genau eine Zuteilungsregel $\sigma : C(I) \to \mathbb{R}^I : v \mapsto \sigma(v) = \overline{v}$, die sowohl pareto–effizient, neutral, symmetrisch als auch additiv ist.

Wir nennen $\overline{v}(i)$ den **Shapley–Wert** des Spielers i im Koalitionsspiel v.

(2) Dies ist der durchschnittliche Mehrwert, den Spieler i beiträgt:

$$\boxed{\overline{v}(i) = \frac{1}{n!} \sum_{\rho} \Delta_i^\rho(v) = \sum_{S : i \in S \subseteq I} \frac{|S \smallsetminus \{i\}|! \cdot |I \smallsetminus S|!}{|I|!} \big[v(S) - v(S \smallsetminus \{i\}) \big]}$$

(3a) Individuelle Rationalität: Ist v superkumulativ, so gilt $\overline{v}(i) \ge v(i)$. Jeder Spieler $i \in I$ gewinnt (schwach) durch diese Zuteilung $\overline{v}$.

(3b) Kollektiv: Ist v supermodular, so gilt $\overline{v}(S) \ge v(S)$ für alle $S \subseteq I$. Jedes Bündnis $S \subseteq I$ gewinnt (schwach) durch diese Zuteilung $\overline{v}$.

Insbesondere liegt $\overline{v}$ im Kern $\mathrm{Core}(v) \subset \mathbb{R}^I$ des Koalitionsspiels v. Genauer ist $\overline{v}$ der Schwerpunkt aller Eckpunkte $\Delta^\rho(v) \in \mathrm{Core}(v)$.

Große Koalition und Shapley–Wert

Aufgabe: Beweisen Sie Eindeutigkeit, Existenz, Eigenschaften! Wie gehen Sie geschickt vor? Wie nutzen Sie unsere Vorbereitung?

Eindeutigkeit: (1) Wir nutzen die Shapley–Basis $(e_K^{\subseteq})_{\emptyset \ne K \subseteq I}$ von $C(I)$. Sei $\psi : C(I) \to \mathbb{R}^I$ pareto–effizient, neutral und symmetrisch. Dann gilt

$$\psi_i(\lambda_K e_K^{\subseteq}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \notin K, \text{ dank NTR,} \\ \lambda_K / |K| & \text{falls } i \in K, \text{ dank PAR, SYM.} \end{cases}$$

Ist ψ zudem additiv, so ist ψ auf ganz $C(I)$ eindeutig festgelegt.

Existenz: (2) Δ_i^ρ erfüllt Pareto–Effizienz, Neutralität und Additivität. Die Symmetrisierung σ_i erfüllt das ebenso und zudem Symmetrie.

Eigenschaften: (3) Die Ungleichungen gelten für Δ_i^ρ dank M1G. Somit gelten diese Ungleichungen auch für ihren Mittelwert σ_i.

☺ Das beweist Satz M2A sehr elegant durch sorgfältiges Nachrechnen. Wieder ist es sehr erstaunlich, wie wir aus wenigen Minimalforderungen (PAR, NTR, SYM, ADD) die Eindeutigkeit der Lösung und eine elegante Formel gewinnen können. Ein Lob der axiomatischen Methode!

Die axiomatische Methode: Analogie zur Determinante

🙂 Ich betone eine schöne Analogie zur Definition der Determinante.

Vorgelegt seien uns die Vektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Diese spannen das Parallelepiped $P = \{ \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1] \} \subset \mathbb{R}^n$ auf. Wie können wir das Volumen $\operatorname{vol}_n(P) = \det(v_1, \dots, v_n)$ berechnen, ja überhaupt erst definieren? Wir besinnen uns auf das Wesentliche!

Normierung: Für die Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ ist $P = [0,1]^n$ der Einheitswürfel. In diesem einfachsten Fall verlangen wir $\operatorname{vol}_n(P) = 1$.

Alternierend: Gilt $v_i = v_j$ für zwei Indizes $1 \le i < j \le n$, so degeneriert / kollabiert das Parallelepiped P. Wir verlangen daher $\operatorname{vol}_n(P) = 0$.

Homogenität: Gilt $v_i' = \lambda v_i$ in einem Index i mit $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist P' eine λ–Streckung von P. Wir verlangen daher $\operatorname{vol}_n(P') = \lambda \operatorname{vol}_n(P')$.

Additivität: Gilt $v_i = v_i' + v_i''$ in einem Index i, ist $P \sim P' \cup P''$ äquivalent durch Scherung. Wir verlangen daher $\operatorname{vol}_n(P) = \operatorname{vol}_n(P') + \operatorname{vol}_n(P'')$.

Diese beiden Forderungen fassen wir zur **Multilinearität** zusammen: $(v_1, \dots, v_n) \mapsto \det(v_1, \dots, v_n)$ ist $\mathbb{R}$–linear in jedem Argument v_i.

Lassen sich diese Wünsche erfüllen? eindeutig? und berechnen?

Die axiomatische Methode: Analogie zur Determinante

Satz M2B: Definition und Eigenschaften der Determinante

In jeder Dimension $n \in \mathbb{N}$ existiert genau eine multilineare, alternierende, normierte Abbildung $\det = \det_{\mathbb{K}}^n : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K}$. Diese Abbildung nennen wir die **Determinante**. Sie erfreut sich folgender Eigenschaften:

1. Es gilt $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$. (Leibniz)
2. Die Determinante ist transpositionsinvariant: $\det(A^\intercal) = \det(A)$.
3. Die Determinante ist multiplikativ: $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
4. Genau dann ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar, wenn $\det(A) \ne 0$ gilt.
5. Es gilt $A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)E$, also $A^{-1} = \det(A)^{-1}\tilde{A}$. (Cramer)

Zu $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ definieren wir hierbei die adjunkte Matrix $\tilde{A}$ durch ihre Koeffizienten $\tilde{a}_{ij} := \det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

🙂 Konzise Charakterisierung durch die wesentlichen Eigenschaften.
🙂 Allgemeine und explizite Formeln. 🙂 Sehr praktisch für kleine n.
☹️ Die naive Anwendung der Formeln ist für große n aufwändig ($n!$).
🙂 Die effiziente Berechnung gelingt mit dem Gauß–Algorithmus (n^3).

Die axiomatische Methode: Analogie zum Integral

Gegeben sei ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Für jede stückweise stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ und alle $a < b$ in I wollen wir einen Wert $\int_a^b f \in \mathbb{R}$ definieren.

Diese Zuordnung $(f, a, b) \mapsto \int_a^b f$ soll folgende Eigenschaften haben:

1. Konstanten: $\int_a^b \lambda = (b - a)\lambda$ für jede Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$
2. Unterteilung: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ für jede Unterteilung $a < c < b$
3. Monotonie: $\int_a^b f \leq \int_a^c g$ falls $f(x) \leq g(x)$ für $a < x < b$

Diese Forderungen scheinen recht „natürlich“, „fair“ und „gerecht“. Das ist Ansichtssache. Die mathematische Frage ist dabei folgende:

Aufgabe: Existenz: Lassen sich diese Forderungen überhaupt erfüllen? Eindeutigkeit: Ist hierdurch der Wert $\int_a^b f$ bereits eindeutig festgelegt? Berechnung: Wie können wir $\int_a^b f$ möglichst effizient berechnen?

☺ Dies ist eine wunderschöne Wiederholung zur Analysis 1! Vermutlich haben Sie das Integral noch nie so betrachtet. Die abstrakt axiomatische Sichtweise zeigt, wie wenig nötig ist, um das ersehnte Objekt eindeutig festzulegen, also zu definieren. Daraus folgen alle Rechnungen!

Die axiomatische Methode: Analogie zum Integral

Satz M2C: Definition und Eigenschaften des Integrals

Es existiert genau eine Zuordnung $(f, a, b) \mapsto \int_a^b f$, die die obigen drei Axiome (1–3) erfüllt. Diese Abbildung nennen wir **(Riemann-)Integral**.

Sie ist $\mathbb{R}$–linear in f und erfreut sich zahlreicher guter Eigenschaften, allen voran der Hauptsatz / HDI, partielle Integration, Substitution, etc.

Beweisidee: Die Axiome (1–3) legen die Zuordnung $(f, a, b) \mapsto \int_a^b f$ für jede Treppenfunktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fest; zudem ist sie hier linear. Approximation und Monotonie setzen dies fort auf alle stückweise stetigen Funktionen, allgemeiner auf alle Riemann–integrierbaren. Näherung und Einschachtelung dienen umgekehrt zur Konstruktion. Daraus folgen alle üblichen Integrationsregeln und Anwendungen.

☺ Konzise Charakterisierung durch die wesentlichen Eigenschaften.
☺ Explizite Formeln dank HDI. ☺ Weitere durch Integrationsregeln.
☹ Nicht jede elementare Funktion lässt sich elementar integrieren.
☺ Hier helfen numerische Methoden: Einschachtelung dank Monotonie!

Koalitionsverhandlung durch alternierende Angebote

Die **nicht-kooperative Spieltheorie** untersucht Spiele in strategischer Form $u : \prod_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in I} R_i$ oder in extensiver Form als Spielbaum. Dieser Ansatz nutzt meist (Nash–)Gleichgewichte als Lösungskonzepte. Grob umschrieben ist er dynamisch-strategisch-kompetitiv-dezentral.

Die **kooperative Spieltheorie** untersucht Koalitionsspiele $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$. Im Vordergrund stehen die möglichen Koalitionen, nicht die Aktionen. Auch dieser Ansatz nutzt Gleichgewichte als Lösungskonzepte. Er ist jedoch eher statisch-axiomatisch-kooperativ-zentral.

Das **Nash–Programm** wurde von John Nash 1953 initiiert mit dem Ziel, die Kluft zwischen diesen beiden disjunkten Ansätzen zu überbrücken. Die Kernidee des Nash–Programms ist ebenso einfach wie wirkungsvoll: Wir wollen kooperative Lösungen nicht-kooperativ implementieren.

Wir kennen bereits ein berühmtes Beispiel: Nashs Verhandlungslösung (statisch-axiomatisch) wird implementiert durch Rubinsteins Modell als Verhandlungsspiel alternierender Angebote (dynamisch-strategisch). Diese beiden Sichtweisen stützen und erklären sich gegenseitig.

Koalitionsverhandlung durch alternierende Angebote

Dasselbe gelingt uns nun mit dem Shapley–Wert (statisch-axiomatisch) mit einer raffinierten Implementierung als Koalitionsverhandlung durch alternierende Angebote (dynamisch-strategisch). Wir folgen S. Hart, A. Mas-Colell: *Bargaining and Value.* Econometrica 64 (1996) 357–380.

Definition M3A: Koalitionsverhandlung nach Hart–Mas-Colell

Gegeben sei eine endliche Menge $I \neq \emptyset$ von Spielern und $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$ als Koalitionsbewertung sowie ein Geduldsparameter $\delta \in [0, 1[$.

Zu diesen Daten definieren wir das Spiel $\Gamma = \Gamma(v, \delta)$ wie folgt:

Jede Runde beginnt mit der Menge $S \subseteq I$ aktiver Spieler, anfangs $S = I$. Ein Spieler $j \in S$ wird zufällig ausgewählt (gleichverteilt, unabhängig). Dieser schlägt eine zulässige Zuteilung $a \in \mathbb{R}^S$ vor, also $a(S) \leq v(S)$.

Stimmen alle Spieler zu, so ist a akzeptiert. Lehnt mindestens einer ab, so wird der Vorschlag verworfen, das Spiel geht in die nächste Runde.

Mit Wkt δ bleibt Spieler j im Spiel; mit Wkt $1 - \delta$ wird er vom weiteren Spiel ausgeschlossen, die aktiven Spieler sind dann $S' = S \setminus \{j\}$.

Koalitionsverhandlung durch alternierende Angebote

Ein Abbruch der Verhandlungen ist hier keinesfalls „alles-oder-nichts“. Verlässt Spieler j die Verhandlungen, so verhandeln die verbleibenden $S' = S \smallsetminus \{j\}$ weiter, allerdings über einen kleineren Kuchen $v(S')$. Zwecks Motivation und Vereinfachung nehmen wir Monotonie an.

Wir interpretieren die Konstante $\delta \in [0,1[$ als Geduld von Spieler j. Hohe Werte nahe 1 bedeuten: Spieler j gibt nicht so schnell auf. Kleine Werte nahe 0 bedeuten: Spieler j schmeißt schnell hin. Idealisiert stellen wir uns den Grenzübergang $\delta \nearrow 1$ vor.

Die Abbruchwkt $1-\delta \searrow 0$ wirkt als allgegenwärtiger Wertverlust. Allein sie übt Druck auf die Spieler aus und erzwingt Fortschritt. Theoretisch könnten die Verhandlungen unendlich lange dauern, doch mit Wkt 1 sind sie endlich, die Auszahlungen also wohldefiniert.

Damit ist das Verhandlungsspiel $\Gamma = \Gamma(v,\delta)$ festgelegt. Wir suchen nun alle teilspielperfekten Gleichgewichte. Zur Vereinfachung betrachten wir nur stationäre Strategien, also ohne Erinnerung an vorige Runden. Zudem lösen wir Indifferenz zugunsten des schnellsten Spielendes.

Koalitionsverhandlung durch alternierende Angebote

Wir betrachten stationäre Strategien ohne Erinnerung an vorige Runden. Zudem lösen wir Indifferenz zugunsten des schnellsten Spielendes.

Satz M3B: Hart–Mas-Colell 1996

Seien $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$ und $\delta \in [0,1[$. Das Koalitions-Verhandlungs-Spiel $\Gamma = \Gamma(v,\delta)$ hat genau ein stationäres teilspielperfektes Gleichgewicht.

(0) Das Angebot $a_S^j \in \mathbb{R}^S$ jedes Spielers $j \in S \subseteq I$ ist pareto–effizient:

$$a_S^j(S) := \sum\nolimits_{i\in S} a_S^j(i) \quad = \quad v(S)$$

(1) Der Erwartungswert über alle $j \in S$ ist gleich dem Shapley–Wert:

$$a_S^* := \frac{1}{|S|} \sum\nolimits_{j\in S} a_S^j \quad = \quad \sigma(v|_{\mathfrak{P}(S)})$$

(2) Jedes Angebot a_S^j wird angenommen und ist gegeben durch

$$a_S^j(i) = \delta a_S^*(i) + (1-\delta) a_{S\smallsetminus\{j\}}^*(i) \quad \text{für alle } i \in S \smallsetminus \{j\}.$$

Für $\delta \nearrow 1$ konvergiert $a_S^j \to a_S^*$ also gegen den Shapley–Wert.

Koalitionsverhandlung durch alternierende Angebote

Aufgabe: Formalisieren Sie dieses Spiel in extensiver Form (X, u) als einen Spielbaum $X = X^\circ \sqcup X^\bullet$ mit den aktiven Zuständen X° und den terminalen Zuständen $X^\bullet$ sowie den Auszahlungen $u : X^\bullet \to \mathbb{R}^I$.

Lösung: Wir übersetzen die verbal gegebene Definition M3A in das folgende formale Protokoll, wie es die extensive Form verlangt:

$$
\begin{array}{lll}
X_0^\circ &= \{v = (I)\} & \text{Start mit } S = I \\
X_{4n}^\bullet &= \{v = (I, \dots, \emptyset)\} & \text{mit Auszahlung } u(v) = 0 \\
X_{4n}^\circ &= \{v = (I, \dots, S)\} & \text{mit } \emptyset \ne S \subseteq I\text{, aktive Spieler} \\
X_{4n+1}^\circ &= \{v = (I, \dots, S, j)\} & \text{mit } j \in S\text{, ausgeloster Spieler} \\
X_{4n+2}^\circ &= \{v = (I, \dots, S, j, a)\} & \text{mit } a \in \mathbb{R}^S,\ a(S) \le v(S) \\
X_{4n+3}^\bullet &= \{v = (I, \dots, S, j, a, \text{👍})\} & \text{mit Auszahlung } u(v) = a \\
X_{4n+3}^\circ &= \{v = (I, \dots, S, j, a, \text{👎})\} & \text{Ablehung, nächste Runde} \\
X_{4n+4} &= \{v = (I, \dots, S, j, a, \text{👎}, S')\} & \text{mit } S' = S \text{ oder } S' = S \smallsetminus \{j\}
\end{array}
$$

Hierbei identifizieren wir $a \in \mathbb{R}^S$ abkürzend mit $a \in \mathbb{R}^I$, $\operatorname{supp}(a) \subseteq S$.

Koalitionsverhandlung durch alternierende Angebote

Gegeben sei $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$ mit $v(\emptyset) = 0$ sowie der Parameter $\delta \in [0, 1[$. Wir betrachten eine Familie $(\alpha_S^j)_{j \in S \subseteq I}$ von Zuweisungen $\alpha_S^j \in \mathbb{R}^I$ mit $\operatorname{supp}(\alpha_S^j) \subseteq S$ und $\alpha_S^j(S) = v(S)$. Wir definieren ihren Erwartungswert

$$\alpha_S^* := \frac{1}{|S|} \sum\nolimits_{j \in S} \alpha_S^j$$

und verlangen die Rekursionsgleichungen

$$\alpha_S^j(i) = \delta \alpha_S^*(i) + (1 - \delta) \alpha_{S \smallsetminus \{j\}}^*(i) \quad \text{für alle } i \in S \smallsetminus \{j\}.$$

Jede solche Familie $(\alpha_S^j)_{j \in S \subseteq I}$ nennen wir ein Angebotsgleichgewicht.

Lemma M3C: Existenz und Eindeutigkeit des Gleichgewichts

(1) Es existiert genau eine Lösung $(\alpha_S^j)_{j \in S \subseteq I}$ dieser Gleichungen.

(2) Für jede Teilmenge $S \subseteq I$ ist $\alpha_S^* = \sigma(v|_{\mathfrak{P}(S)})$ der Shapley–Wert.

Aufgabe: Rechnen Sie diese Aussagen sorgfältig nach!

Lösung: Aus $\alpha_S^j(S) = v(S)$ und den Rekursionsgleichungen folgt:

$$\begin{aligned}\alpha_S^j(j) &= v(S) - \sum\nolimits_{i\neq j} \alpha_S^j(i)\\ &= v(S) - \sum\nolimits_{i\neq j} \delta\alpha_S^*(i) + (1-\delta)\alpha_{S\smallsetminus\{j\}}^*(i)\\ &= v(S) - \delta\big[v(S) - \alpha_S^*(j)\big] - (1-\delta)v(S\smallsetminus\{j\})\\ &= \delta\alpha_S^*(j) + (1-\delta)\big[v(S) - v(S\smallsetminus\{j\})\big]\end{aligned}$$

Für den Erwartungswert $\alpha_S^*(i)$ über alle $j\in S$ erhalten wir somit

$$\begin{aligned}\alpha_S^*(i) &= \frac{1}{|S|}\sum\nolimits_{j\in S}\alpha_S^j(i)\\ &= \delta\alpha_S^*(i) + \frac{1-\delta}{|S|}\Big[v(S) - v(S\smallsetminus\{i\}) + \sum_{j\neq i}\alpha_{S\smallsetminus\{j\}}^*(i)\Big].\end{aligned}$$

Dank $\delta\in[0,1[$ erfüllen die Mittelwerte also die Rekursionsgleichung

$$\alpha_S^*(i) = \frac{1}{|S|}\Big[v(S) - v(S\smallsetminus\{i\}) + \sum_{j\neq i}\alpha_{S\smallsetminus\{j\}}^*(i)\Big].$$

Behauptung 1: Dadurch sind alle Werte $\alpha_S^*(i)$ eindeutig festgelegt.

Induktion über die Elementezahl $|S|$: Für $S=\{i\}$ gilt $\alpha_S^*(i) = v(S)$.
Die Rekursionsgleichung bestimmt dann $\alpha_S^*(i)$ für $|S| = 2,3,\dots,|I|$.

Folgerung 1: Das zeigt Existenz und Eindeutigkeit von $(\alpha_S^j)_{j\in S\subseteq I}$.

Behauptung 2: Für jede Teilmenge $S\subseteq I$ gilt $\alpha_S^* = \sigma(v|_{\mathfrak{P}(S)})$.

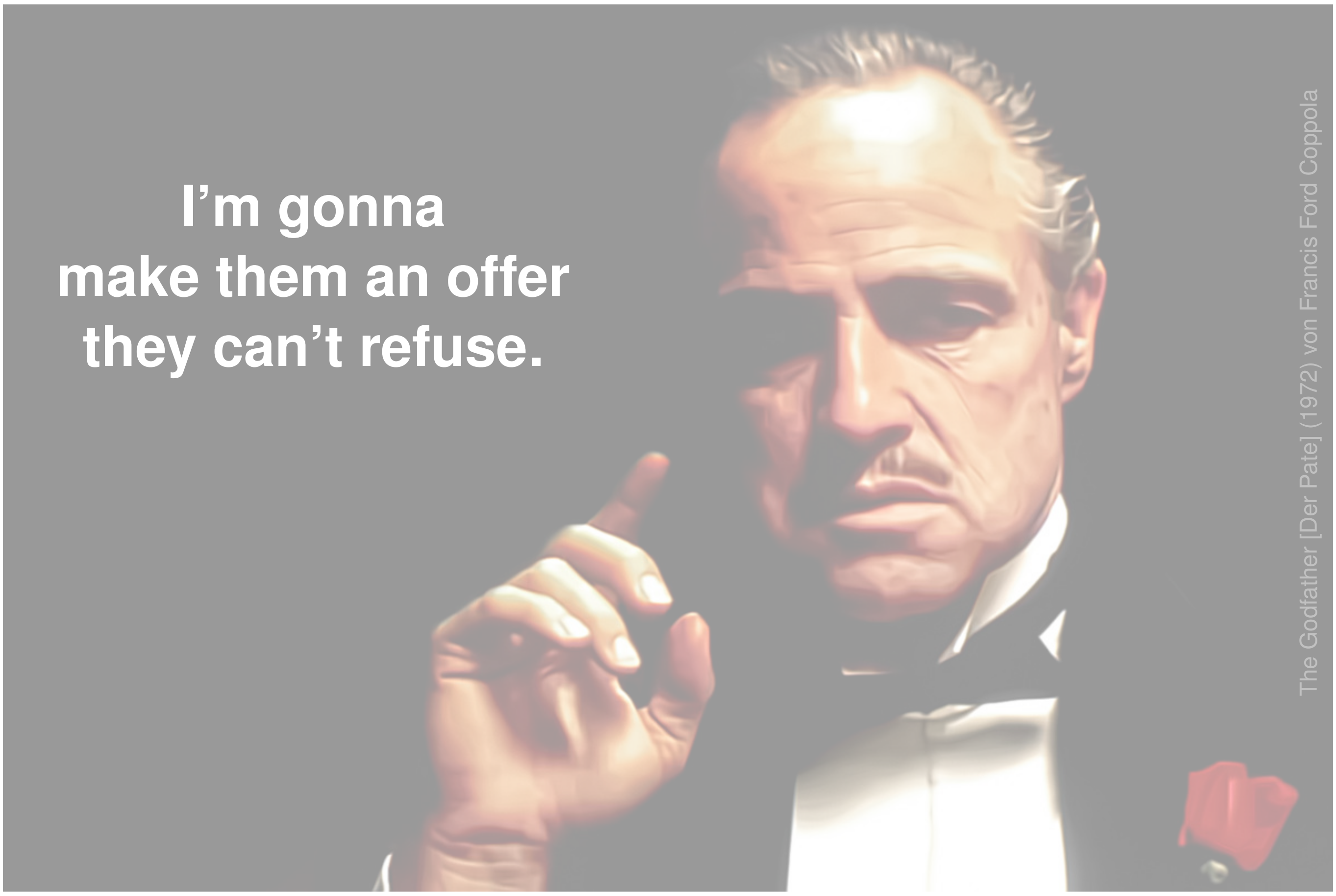
Beweis: Die Berechnung $(v,S)\mapsto\alpha_S^*\in\mathbb{R}^S\subseteq\mathbb{R}^I$ ist unabhängig von δ.
Sie erfüllt alle vier Shapley–Axiome, nämlich: Pareto–Effizienz (PAR), Neutralität (NTR), Symmetrie (SYM) und schließlich Additivität (ADD).
Dank der Eindeutigkeit im Satz M2A von Shapley folgt $\alpha_S^* = \sigma(v|_{\mathfrak{P}(S)})$.

Alternativer Beweis: Ebenso gut könnten wir nachrechnen, dass der Shapley–Wert dieselben Rekursionsgleichungen erfüllt.
Das erfordert weitere Rechnung; wir appellieren lieber an Satz M2A.

Folgerung 2: Das Angebot ist im Mittel der Shapley–Wert.

Das beweist Lemma M3C zur Existenz und Eindeutigkeit des Angebotsgleichgewichts und erklärt die Verbindung zum Shapley–Wert. $\boxed{\text{QED}}$

Koalitionsverhandlung durch alternierende Angebote



Koalitionsverhandlung durch alternierende Angebote

Gegeben sei $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$ mit $v(\emptyset) = 0$. Wir setzen im Folgenden v als superkumulativ voraus und verschieben zu $v(i) = 0$ für alle $i \in I$.

(1) Für das Angebotsgleichgewicht gilt dann $\alpha^*_S \ge 0$ für alle $S \subseteq I$.

(2) Gegeben sei eine Familie $(a^j_S, b^j_S)_{j \in S \subseteq I}$ von Zuweisungsvektoren $a^j_S, b^j_S \in \mathbb{R}^S$; dabei gelte die Zulässigkeitsbedingung $a^j_S(S) \le v(S)$.

Diese definieren den folgenden Strategievektor von $\Gamma(v, \delta)$:

- Spieler $j \in S$ schlägt immer das Angebot $a^j_S \in \mathbb{R}^S$ vor.
- Einen Vorschlag $x \in \mathbb{R}^S$ von Spieler $j \in S$ akzeptiert Spieler $i \in S$ gdw $x(i) \ge b^j_S(i)$.

Diese Strategien sind stationär, also ohne Erinnerung an vorige Runden.

Lemma M3D: Charakterisierung stationärer Gleichgewichte

Dies ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht, kurz $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma(v, \delta))$, genau dann, wenn $a^j_S = b^j_S = \alpha^j_S$ für alle $j \in S \subseteq I$ gilt.

Aufgabe: Rechnen Sie diese Aussagen sorgfältig nach!

Koalitionsverhandlung durch alternierende Angebote

M311
Erläuterung

Koalitionsverhandlung durch alternierende Angebote

M312
Erläuterung

Wie kann / soll / wird man gemeinsamen Gewinn teilen?

Wir kommen schließlich auf unser Eingangsbeispiel zurück.

Fünf Personen verhandeln über Zusammenarbeit und Gewinnaufteilung: ein Kapitalist 1, der das dringend benötigte Kapital zur Verfügung stellt, dazu zwei gelernte Arbeiter $2, 3$ und zwei ungelernte Arbeiter $4, 5$.

Für jede Teilmenge $S \subseteq I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ist der gemeinsame Gewinn

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 1 \notin S, \\ 400 \cdot \overbrace{|S \cap \{2,3\}|}^{\sharp \text{ Gelernte}} + 200 \cdot \overbrace{|S \cap \{4,5\}|}^{\sharp \text{ Ungelernte}} & \text{falls } 1 \in S. \end{cases}$$

Aufgabe: Wie können / sollen / werden die fünf den Gewinn aufteilen? Gibt es hierzu eine „faire“ und „gerechte“ Lösung, etwa als Schlichtung? Würden Sie z.B. die Aufteilung $(600, 200, 200, 100, 100)$ vertreten? Was sagt in diesem Fall der Shapley–Wert? Ist das gerecht?

$$\boxed{\bar{v}(i) = \frac{1}{n!} \sum_{\rho} \Delta_i^{\rho}(v) = \sum_{S : i \in S \subseteq I} \frac{|S \smallsetminus \{i\}|! \cdot |I \smallsetminus S|!}{|I|!} \big[v(S) - v(S \smallsetminus \{i\}) \big]}$$

Wie kann / soll / wird man gemeinsamen Gewinn teilen?

Der Shapley–Wert $\bar{v}(i)$ gibt an, welche Auszahlung der Spieler $i \in I$ erwarten kann (deskriptiv) oder erhalten soll (normativ). Der schöne Satz M2A löst eine abstrakt-axiomatische Frage und bewährt sich in zahlreichen Anwendungen in der Ökonomie, Politik, Informatik, etc.

Die allgemeine Problemstellung lässt sich wie folgt umschreiben: Eine Koalition $I = \{1, 2, \dots, n\}$ von Individuen kooperiert und kann so einen Gesamtgewinn $v(I)$ sichern. Wie soll dieser aufgeteilt werden? Gibt es hierauf eine überzeugende und universelle Antwort?

Die Spieler tragen i.A. unterschiedlich viel zum Gesamtertrag bei. Dies wird für jede Teilkoalition $S \subseteq I$ durch den Wert $v(S)$ gemessen. Das bestimmt die Verhandlungsmacht, etwa durch Locken und Drohen. Welche Verteilung entsteht daraus? Wie wichtig ist jeder Spieler?

🙂 Der Shapley–Wert gibt hierauf eine präzise und plausible Antwort. Er gehört zum Fundament und den ersten Erfolgen der Spieltheorie. Er ist ein Werkzeug, und Sie sollen lernen, es sachgerecht zu nutzen. Dazu gehört neben der korrekten Rechnung auch die Interpretation.

Wie kann / soll / wird man gemeinsamen Gewinn teilen?

Das ist ein guter Moment zur kritischen Rückschau. Der mathematische Sachverhalt ist geklärt, weitere Übungen helfen Ihnen zum Verständnis. Spannend bleibt weiterhin die sozio-ökonomische Interpretation!

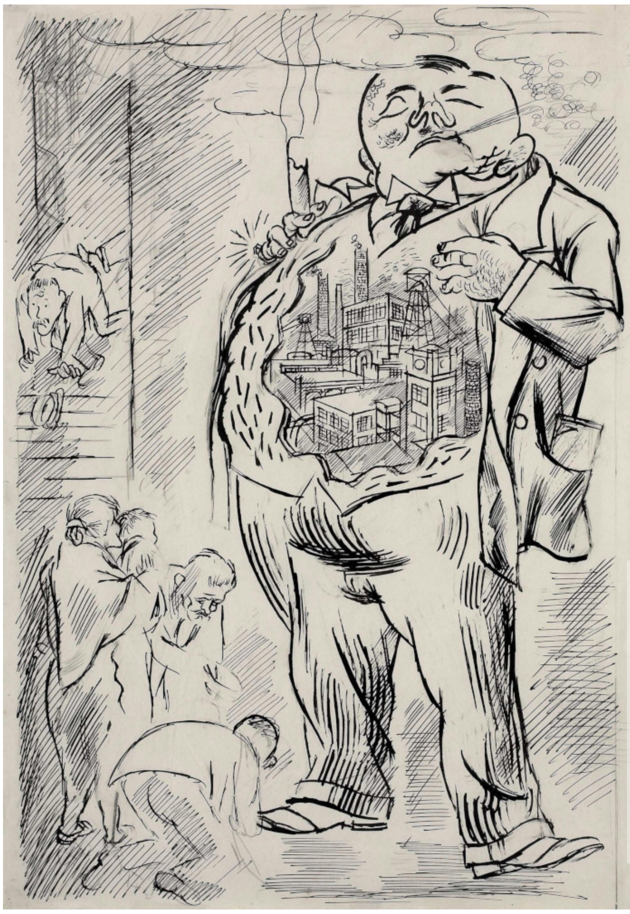
Der Shapley–Wert $\sigma_i(v)$ misst den strategischen Wert des Spielers $i \in I$: Er gibt eine präzise quantitative Bewertung seiner strategischen Position in dem Koalitionsspiel v, zudem ist er transparent und nachvollziehbar.

Zur Anschauung und Motivation habe ich häufig Begriffe wie „fair“ oder „gerecht“ verwendet — und anschließend auch mathematisch präzisiert. Löst das Ergebnis das implizite Versprechen auf Gerechtigkeit ein?

Hierzu muss ich einschränken und wie immer betonen, dass Lösungen nur „fair“ oder „gerecht“ bezüglich des betrachteten Spiels sein können. Das ist ein wichtiger Aspekt der Transparenz: Die Schlichtung beruht nur auf den vorgelegten Daten, externe Überlegungen fließen nicht ein. Andernfalls müssen wir das Spiel umfassender formulieren!

☹ Ist das Spiel selbst unfair oder ungerecht, so kann der Shapley–Wert oder sonst irgendeine Lösung / Schlichtung das nicht wunderheilen.

Wie kann / soll / wird man gemeinsamen Gewinn teilen?



George Grosz (1893–1959), Kapitalist

Der Mensch ist ein soziales Wesen. Erst die neolithische Revolution zu Ackerbau und Viehzucht ermöglichte große Zivilisationen. Wie gehen wir mit diesen Möglichkeiten um?

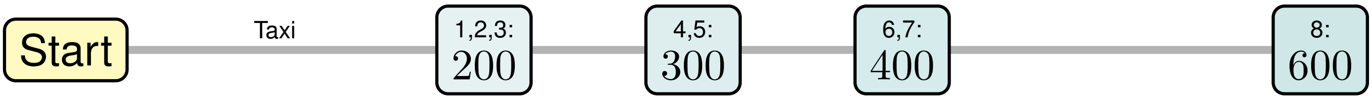
Jede entwickelte Gesellschaft nutzt Arbeitsteilung und Spezialisierung, um die Produktivität zu steigern. Industrialisierung und Globalisierung beschleunigen diesen Prozess.

Gleichzeitig drängt das Problem der Verteilung: Wer trägt die Kosten? Wer profitiert von den gemeinsamen Erträgen? Diese Fragen sind ewig aktuell und stellen sich immer neu. Sie entscheiden unsere Zukunft.

Empirie: Taxikosten teilen, aber wie?

Im **Casino Royal** (08.07.2022) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, die Teilung von Kosten und Erträgen als Verhandlungsspiel zu erproben.

Zum Casino kamen acht Teilnehmer:innen, davon waren die meisten, aber nicht alle, aus der Vorlesung mit dem Shapley–Wert frisch vertraut.



Die Spieler $1,\dots,8$ teilen sich ein Sammeltaxi mit den obigen Kosten. Jede Teilnehmer:in bekommt zufällig eine der Rollen $1,\dots,8$ zugelost. Ziel des Spiels ist, eine gemeinsame Kostenverteilung auszuhandeln, die einstimmig angenommen wird. Auszahlung ist jeweils die Ersparnis.

Zum Ablauf der Verhandlungen geben wir zunächst keine Struktur vor. Daher werden spontan Vorschläge formuliert und vorläufig gesammelt. Hier kennt jeder Spieler seine Rolle, aber a priori nicht die anderen. Manche Vorschläge zeigen eine gewisse Voreingenommenheit.

Empirie: Taxikosten teilen, aber wie?

H: „Jeder zahlt sein zusätzliches Stück, entsprechend geteilt.“

1	2	3	4	5	6	7	8
67	67	67	50	50	50	50	200

J: „Wir sollten 600 auf alle gleich aufteilen, das ist gerecht.“

1	2	3	4	5	6	7	8
75	75	75	75	75	75	75	75

P: „Spieler 8 sollte 600 zahlen, alle anderen fahren gratis mit.“

1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	600

T: „Ich schlage den Shapley–Wert vor, nur der ist wirklich gerecht.“

1	2	3	4	5	6	7	8
25	25	25	45	45	78	78	179

S: „Man könnte allen die gleiche Ersparnis von 250 garantieren.“

1	2	3	4	5	6	7	8
-50	-50	-50	50	50	150	150	350

Empirie: Taxikosten teilen, aber wie?

W: „Bei S sparen ja manche mehr, als sie bezahlen. Das ist unlogisch. Bei J zahlen die ersten mehr, als sie alleine bezahlen. Das ist absurd!“

P: „Ich habe in der Vorlesung heute Morgen genau aufgepasst. Es existiert genau eine gerechte Lösung, und das ist Vorschlag T.“

J: „Ich kenne die Vorlesung nicht. Was soll daran gerecht sein?“

H: „Das ist anschaulich: Jeder zahlt die Kosten, die er verursacht.“

W: „Das ist ein zentraler Satz aus der Vorlesung: Der Shapley–Wert ist die eindeutige Lösung, die ein paar willkürliche Axiome erfüllt.“

(In meinen Vorlesungen frage ich mich oft, was bei den Studierenden überhaupt ankommt und dauerhaft hängen bleibt. Jetzt höre ich es.)

J: „Das überzeugt mich nicht. Da könnte ich ja ebenso willkürlich J^+ fordern: Alle erhalten die gleiche Ersparnis, nur ich 10% mehr.“

T: „Ja, das stimmt schon. Eine weitere willkürliche Alternative wäre J^-: Alle erhalten die gleiche Ersparnis, nur J. bekommt 10% weniger.“

Die Diskussion dreht sich munter im Kreis, fast jeder plädiert für seinen eigenen Vorschlag, vermutlich weil gerade dieser für ihn vorteilhaft ist.

Empirie: Taxikosten teilen, aber wie?

Die Teilnehmer:innen haben viele gute Vorschläge, aber keine Einigung. Um 14:24 verschärfen wir daher die Regeln: „Um 14:30 hält das Taxi am ersten Stopp. Wenn bis dahin keine Einigung erzielt ist, kostet das 50 für jeden wegen der zusätzlichen Wartezeit.“ Diese Drohung wirkt Wunder: Nach kurzer Aussprache wird Vorschlag T einstimmig angenommen. Der Shapley–Wert setzt sich durch, wenn auch auf dubiose Weise.

Veil of ignorance? Erfahrungsgemäß werden Verhandlungsargumente durch die Rolle im Spiel geprägt, dadurch leidet die Glaubwürdigkeit.

Wir spielen erneut. Frau H. schlägt vor, eine Einigung *vor* der Zulosung der Rollen vorzubereiten, selbst wenn dies im Spiel nicht bindend ist. W: „Spieler 8 zahlt fast alles, ein kleiner Anreiz sollte genügen.“

1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0	599

Jetzt werden die Rollen $1, \dots, 8$ zugelost. Weitere Aussprache wird nicht gewünscht, Vorschlag W wird einstimmig angenommen. Erstaunlich! In vielen realen Konflikten ist dieser Trick nicht möglich. Leider!

Arbeitskampf: Spieler:innen aller Länder, einigt euch!

Ein Unternehmen ringt um die Aufteilung der gemeinsamen Gewinne. Ohne die Chefin (1) geht gar nichts. Ihr Sohn (2) trägt zwar nichts bei, aber er stört auch nicht. Die ungelernten Arbeiter:innen $(3, 4, 5, 6)$ erwirtschaften 300, die gelernten Arbeiter:innen $(7, 8)$ sogar 500.

Für jede Teilmenge $S \subseteq I = \{1, \dots, 8\}$ ist der Gewinn demnach

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 1 \notin S, \\ 300 \cdot \overbrace{|S \cap \{3,4,5,6\}|}^{\sharp\,\text{Ungelernte}} + 500 \cdot \overbrace{|S \cap \{7,8\}|}^{\sharp\,\text{Gelernte}} & \text{falls } 1 \in S. \end{cases}$$

Wir spielen die Verhandlung M3A nach Hart–Mas-Colell mit $\delta = 3/4$. Jede Teilnehmer:in bekommt zufällig eine der Rollen $1, \dots, 8$ zugelost; diese kann in den Verhandlungen offengelegt werden, muss aber nicht. Die Abstimmungen sind geheim, kein sozialer Druck oder Kontrolle.

Nach Losentscheid vorschlagen zu dürfen, ist ein wertvolles Privileg und zugleich eine riskante Bürde, denn bei Ablehnung droht der Rauswurf. Diese raffinierten Spielregeln sorgen für ein Gleichgewicht der Kräfte und führen so zum Shapley–Wert (Satz M3B). Soweit die Theorie!

Arbeitskampf: Spieler:innen aller Länder, einigt euch!

1. Zu verteilen sind 2200. P: „Jeder ist wichtig und leistet seinen Beitrag. Daher schlage ich vor, jeder bekommt 300, der Sohn allerdings nur 100.“

1	2	3	4	5	6	7	8
300	100	300	300	300	300	300	300

abgelehnt, scheidet aus

2. Zu verteilen sind 1900. Ö: „Also gut, wir sollten etwas nachbessern. Die Gelernten verdienen mehr Gehalt, die Ungelernten etwas weniger.“

1	2	~~3~~	4	5	6	7	8
300	50		250	250	250	400	400

abgelehnt, scheidet aus

3. Zu verteilen sind 1600. C: „Arbeit ist Arbeit, wir sind alle solidarisch. Die Ungelernten sollten nur etwas weniger verdienen als die Gelernten.“

1	2	~~3~~	~~4~~	5	6	7	8
299	1			300	300	350	350

abgelehnt, bleibt im Spiel

4. Zu verteilen sind 1600. H: „Schön und gut, doch das genügt nicht. Wir müssen die Chefin überzeugen und ihr dazu etwas mehr bieten.“

1	2	~~3~~	~~4~~	5	6	7	8
450	50			200	200	350	350

abgelehnt, bleibt im Spiel

Arbeitskampf: Spieler:innen aller Länder, einigt euch!

5. Zu verteilen sind 1600. Ö: „Auch ich fürchte, so können wir die Chefin noch nicht überzeugen. Sie sollte noch deutlich mehr bekommen.“

1	2	~~3~~	~~4~~	5	6	7	8
580	20			200	200	300	300

abgelehnt, bleibt im Spiel

6. Zu verteilen sind 1600. H: „Wer ist unzufrieden? Was wollt ihr?“ Ein geschickter Verhandlungszug, die direkte Aussprache ergibt:

1	2	~~3~~	~~4~~	5	6	7	8
450	30			230	230	330	330

abgelehnt, bleibt im Spiel

7. Zu verteilen sind 1600. Ö: „Ich fürchte weiterhin, es scheitert an der Chefin. Als Kompromiss sollte sie wieder etwas mehr bekommen.“

1	2	~~3~~	~~4~~	5	6	7	8
525	25			225	225	300	300

abgelehnt, bleibt im Spiel

8. Zu verteilen sind 1600. T: „Ich bin die Chefin, ohne mich läuft nichts. Der letzte Vorschlag war schon recht vernünftig, ich bleibe dabei.“

1	2	~~3~~	~~4~~	5	6	7	8
525	25			225	225	300	300

abgelehnt, scheidet aus

Arbeitskampf: Spieler:innen aller Länder, einigt euch!

Der Verlauf der Verhandlungen ist eindrücklich und überaus lehrreich. Die Vorschläge sind ernsthaft bemüht, denn viel steht auf dem Spiel! Der mühsame Fortschritt ist spürbar, leider lockt die leichte Ablehnung. Die Verhandlungen sind daher eher zäh und es kommt zu Verlusten.

In der achten Runde ergreift erstmals die Chefin das Wort und gibt sich zu erkennen. Alle wissen um das Risiko, sie nun zu verlieren, dennoch stimmen einige gegen ihren Vorschlag. Sie scheidet zufällig sogar aus!

Das Schicksal schreibt die besten Geschichten, zumindest im Casino. Die Theorie weist den Weg, das Experiment ist der kritische Prüfstein. Wer das selbst live erlebt hat, sieht die Spielheorie mit anderen Augen!

Übung: Wo sehen Sie Schwächen dieses Verhandlungsmechanismus? Nach Existenz und Eindeutigkeit des Gleichgewichts interessiert uns für praktische Anwendungen die „Konvergenz“ und die „Geschwindigkeit“. Hilft hier der *veil of ignorance* oder schadet er als *curse of anonymity*? Wie erzielen wir möglichst schnell Einigung ohne große Verluste? Das sind zentrale Fragen des Mechanismendesign!

Modularität und Siebformel

Aufgabe: Sei $(\Omega, \mathbf{P})$ ein WRaum (allgemein ein Maßraum, evtl. signiert).
(1) Erklären Sie graphisch und rechnerisch die folgende Siebformel:

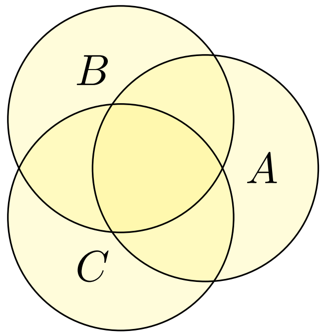
$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = {}& +\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) \\ & -\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C) \\ & +\mathbf{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}}$$

(2) Was erhalten Sie im Spezialfall, wenn A, B, C unabhängig sind?
(3) Formulieren und erklären Sie die Formel für $\mathbf{P}(A \cup B \cup C \cup D)$.
(4) Formulieren Sie die allgemeine Siebformel: Aus $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ folgt $\prod_{i=1}^n (\mathbf{I}_A - \mathbf{I}_{A_i}) = 0$ und somit $\mathbf{I}_A = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|J|-1} \, \mathbf{I}_{A_J}$.

Lösung: (1a) Die Summe $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C)$ zählt manche Elemente doppelt oder gar dreifach.

Nach Korrektur $-\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C)$ zählen die Elemente in $A \cap B \cap C$ gar nicht mehr.

Nach Korrektur $+\mathbf{P}(A \cap B \cap C)$ stimmt alles.



Modularität und Siebformel

(1b) Wir nutzen $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ und finden:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbf{P}(A \cup B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}((A \cup B) \cap C) \\ &= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C) \\ &\quad + \mathbf{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

(2) Sind A, B, C unabhängig, so finden wir die vertraute Produktformel:

$$\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(\overline{\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}}) = 1 - [1 - \mathbf{P}(A)][1 - \mathbf{P}(B)][1 - \mathbf{P}(C)]$$

(4) Für $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$ und $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ gilt $\prod_{i=1}^n (\mathbf{I}_A - \mathbf{I}_{A_i}) = 0$, denn für jedes $x \in A$ ist mindestens ein Faktor Null. Für jede Indexmenge $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ sei $A_J := \bigcap_{i \in J} A_i$ die Schnittmenge, speziell $A_\emptyset = A$.
Wir erhalten die **Siebformel**, auch **Inklusions-Exklusions-Prinzip**:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{I}_A &= \textstyle\sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|J|-1} \, \mathbf{I}_{A_J}, \\ \mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) &= \textstyle\sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|J|-1} \, \mathbf{P}(A_J).\end{aligned}}$$

Siebformel vs Produktformel

Aufgabe: (nach Lewis Carroll) Projekte im Research & Development leiden erfahrungsgemäß zu 70% an irrealen Zielen, 75% an schlechter Kommunikation, 80% an Missmanagement, 85% an Zeitmangel.

Wie viele Projekte leiden sowohl an irrealen Zielen, an schlechter Kommunikation, an Missmanagement als auch an Zeitmangel?
(1) höchstens? (2) mindestens? (3) wenn diese unabhängig sind?

Zeichnen Sie Mengen $I, K, M, Z \subset \Omega$, die diese Werte realisieren!

$M\ Z$	Z			
$M\ Z\ I\ K$	$M\ Z\ I\ K$	$M\ Z\ I\ K$	$M\ Z\ I\ K$	$M\ Z\ K$
$M\ Z\ I\ K$	$M\ Z\ I\ K$	$M\ Z\ I\ K$	$M\ Z\ I\ K$	$M\ Z\ I\ K$
$M\ Z\ I\ K$	$M\ Z\ I\ K$	$M\ Z\ I\ K$	$M\ Z\ I\ K$	$M\ Z\ I\ K$

$M\ Z\ K$	$M\ Z\ K$	$M\ Z\ K$	$M\ Z\ K$	$M\ Z\ K$
$M\ Z\ I$	$M\ Z\ I$	$M\ Z\ I$	$M\ Z\ I$	$M\ Z\ K$
$Z\ I\ K$	$Z\ I\ K$	$Z\ I\ K$	$Z\ I\ K$	$M\ Z\ I$
$M\ Z\ I\ K$	$M\ Z\ I\ K$	$M\ I\ K$	$M\ I\ K$	$M\ I\ K$

Siebformel vs Produktformel

Lösung: (1) Höchstens 70% leiden an allen vier; das ist offensichtlich.
(2) Mindestens 10% leiden an allen vier; das rechnen wir geduldig aus:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(I) &= 0.7 \\
\mathbf{P}(I \cap K) &= \mathbf{P}(I) + \mathbf{P}(K) - \mathbf{P}(I \cup K) \\
&\geq 0.7 + 0.75 - 1 = 0.45 \\
\mathbf{P}(I \cap K \cap M) &= \mathbf{P}(I \cap K) + \mathbf{P}(M) - \mathbf{P}((I \cap K) \cup M) \\
&\geq 0.45 + 0.8 - 1 = 0.25 \\
\mathbf{P}(I \cap K \cap M \cap Z) &= \mathbf{P}(I \cap K \cap M) + \mathbf{P}(Z) - \mathbf{P}((I \cap K \cap M) \cup Z) \\
&\geq 0.25 + 0.85 - 1 = 0.1
\end{aligned}$$

Die oben skizzierten Graphiken zeigen, dass diese Werte tatsächlich angenommen werden können. Unsere Schranken sind also optimal.

(3) Bei Unabhängigkeit von I, K, M, Z gilt die einfache Produktformel:

$$\mathbf{P}(I \cap K \cap M \cap Z) = \mathbf{P}(I) \cdot \mathbf{P}(K) \cdot \mathbf{P}(M) \cdot \mathbf{P}(Z) = 0.357$$

☺ Die untere Schranke 10% und die obere Schranke 70% gelten immer, die Produktformel gilt nur im Spezialfall stochastischer Unabhängigkeit.

Vom Nullsummenspiel zum Koalitionsspiel

Gegeben sei eine endliche Spielermenge I und hierüber ein Spiel

$$u\ :\ A^I := \prod_{i\in I} A^i \to \mathbb{R}^I\ :\ a \mapsto u(a).$$

Angenommen, eine Teilmenge $S \subseteq I$ der Spieler bildet eine Koalition; als Reaktion vereinen sich alle anderen zur Gegenkoalition $T = I \smallsetminus S$. Die beiden Koalitionen konfrontieren sich nun im Zwei-Personen-Spiel

$$\tilde{u}\ :\ A^S \times A^T \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ :\ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \tilde{u}^S(a,b) := \sum_{i\in S} u^i(a\cup b) \\ \tilde{u}^T(a,b) := \sum_{j\in T} u^j(a\cup b) \end{bmatrix}.$$

Hat u konstante Summe c, so auch $\tilde{u}$, denn $\tilde{u}^S + \tilde{u}^T = \sum_{i\in I} u^i = c$. In diesem Falle hat das Spiel $\tilde{u}$ den eindeutigen Wert

$$v(S)\ :=\ \max_{a\in[A^S]}\ \min_{b\in[A^T]}\ \tilde{u}^S(a,b)\ =\ \min_{b\in[A^T]}\ \max_{a\in[A^S]}\ \tilde{u}^S(a,b).$$

Aufgabe: Dies definiert $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$ mit $v(\emptyset) = 0$ und $v(I) = c$. Ist die Abbildung v super/sub/additiv? super/sub/modular?

Vom Nullsummenspiel zum Koalitionsspiel

Auszahlungen werden summiert, alles kommt zunächst in einen Topf; wie dieser aufgeteilt wird, werden wir später noch genauer untersuchen. Wir nennen dies ein **(Koalitions-)Spiel mit transferierbarem Nutzen**: er ist nicht bloß subjektiv individuell, sondern objektiv und übertragbar!

Am einfachsten stellen wir uns hierzu alle Auszahlungen in **Geld** vor. Anschaulich erwarten wir Monotonie: Gemeinsamkeit macht stark! Wir erwarten auch Superadditivität, vielleicht sogar Supermodularität. Ob diese guten Eigenschaften tatsächlich gelten, ist Ziel dieser Aufgabe.

Zuvörderst kommt es bei einem Spiel $u : A^I \to R^I$ auf die geordneten Ergebnismengen $(R^i, <^i)$ an: Jeder Spieler $i \in I$ muss vor allem seine möglichen Ergebnisse $u^i(a)$ vergleichen können, also linear anordnen. Wir können sie beliebig abändern, solange die Monotonie gewahrt bleibt.

Nun jedoch werden die Ergebnisse summiert, wir brauchen daher eine gemeinsame Ergebnismenge $(R, <)$ und darauf zudem die Struktur einer abelschen Gruppe. Die naheliegende und bewährte Wahl ist… Trommelwirbel… der geordnete Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$.

Wir wollen die Rechnung auch für allgemeine Spiele durchführen. Gegeben sei eine endliche Spielermenge I und hierüber ein Spiel

$$u \;:\; A^I := \prod_{i\in I} A^i \to \mathbb{R}^I \;:\; a \mapsto u(a).$$

Hierzu definieren wir die Abbildungen $\hat{v}, \check{v} : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$ durch

$$\hat{v}(S) := \max_{a\in[A^S]} \min_{b\in[A^T]} \tilde{u}^S(a,b),$$
$$\check{v}(S) := \min_{b\in[A^T]} \max_{a\in[A^S]} \tilde{u}^S(a,b),$$

wobei jeweils $T = I \smallsetminus S$ die Gegenkoalition zu S ist.

Aufgabe: Ist $\hat{v}, \check{v}$ monoton? super/sub/additiv? super/sub/modular?

Koalitionsspiele mit konstanter Summe sind langweilig.

Proposition M4A: Koalitionsspiele mit konstanter Summe

Sei $v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R}$ ein Koalitionsspiel mit konstanter Summe, das heißt, es gilt $v(S) + v(I \smallsetminus S) = v(I)$ für jede Koalition $S \subseteq I$.

(1) Ist v additiv, so ist der Kern einpunktiv, $\operatorname{Core}(v) = \{\sigma\}$.

(2) Ist v nicht additiv, so ist der Kern leer, $\operatorname{Core}(v) \neq \emptyset$.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Aussagen.

Lösung: (1) Für jede Allokation $x : I \to \mathbb{R}$ gilt $x(I) = v(I) = \sum_{i \in I} v(i)$. Individuelle Rationalität verlangt $x(i) \geq v(i)$ für alle $i \in I$. Daraus folgt $0 = x(I) - v(I) = \sum_{i \in I} x(i) - v(i)$, und somit $x(i) = v(i)$ für alle $i \in I$. Damit gilt $x \in \operatorname{Core}(v)$, denn für jede Koalition $S \subseteq I$ gilt $x(S) = v(S)$. Zusatz: In diesem Falle ist $x = \sigma$ der Shapley–Wert.

(2) Wir zeigen die Kontraposition: Gilt $\operatorname{Core}(v) \neq \emptyset$, so ist v additiv. Sei $x \in \operatorname{Core}(v)$, also $x(I) = v(I)$ und $x(S) \geq v(S)$ für alle $S \subseteq I$. Für $S = I \smallsetminus T$ gilt dann $v(S) = v(I) - v(T) \geq x(I) - x(T) = x(S)$. Somit gilt $v(S) = x(S)$ für alle $S \subseteq I$, und ist $v = x$ additiv. $\boxed{\text{QED}}$

Kostenteilung und Ersparnis bei zwei Spielern

Zwei benachbarte Städte $1, 2$ wollen ein Klärwerk bauen, entweder gemeinsam oder notfalls einzeln. Die **Kosten** der drei Varianten sind:

$$c : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} : S \mapsto c(S) = \begin{cases} 0 & \text{falls } S = \emptyset, \\ 7 & \text{falls } S = \{1\}, \\ 11 & \text{falls } S = \{2\}, \\ 15 & \text{falls } S = \{1, 2\}. \end{cases}$$

Die **Kostenersparnis** ist demnach gegeben durch

$$v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} : S \mapsto v(S) = \Big[\sum\nolimits_{i \in S} c(i)\Big] - c(S) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |S| < 2, \\ 3 & \text{falls } |S| = 2. \end{cases}$$

Aufgabe: (1) Bestimmen Sie die Shapley–Werte $\overline{c}$ und $\overline{v}$ und den Kern. Welchen allgemeinen Zusammenhang können Sie hier erkennen?
(2) Wie / Können Sie hier die Nash-Verhandlungslösung nutzen?

Der Shapley–Wert muss nicht im Kern liegen!

Aufgabe: Auf der Menge $I = \{1,2,3\}$ betrachten wir das Koalitionsspiel

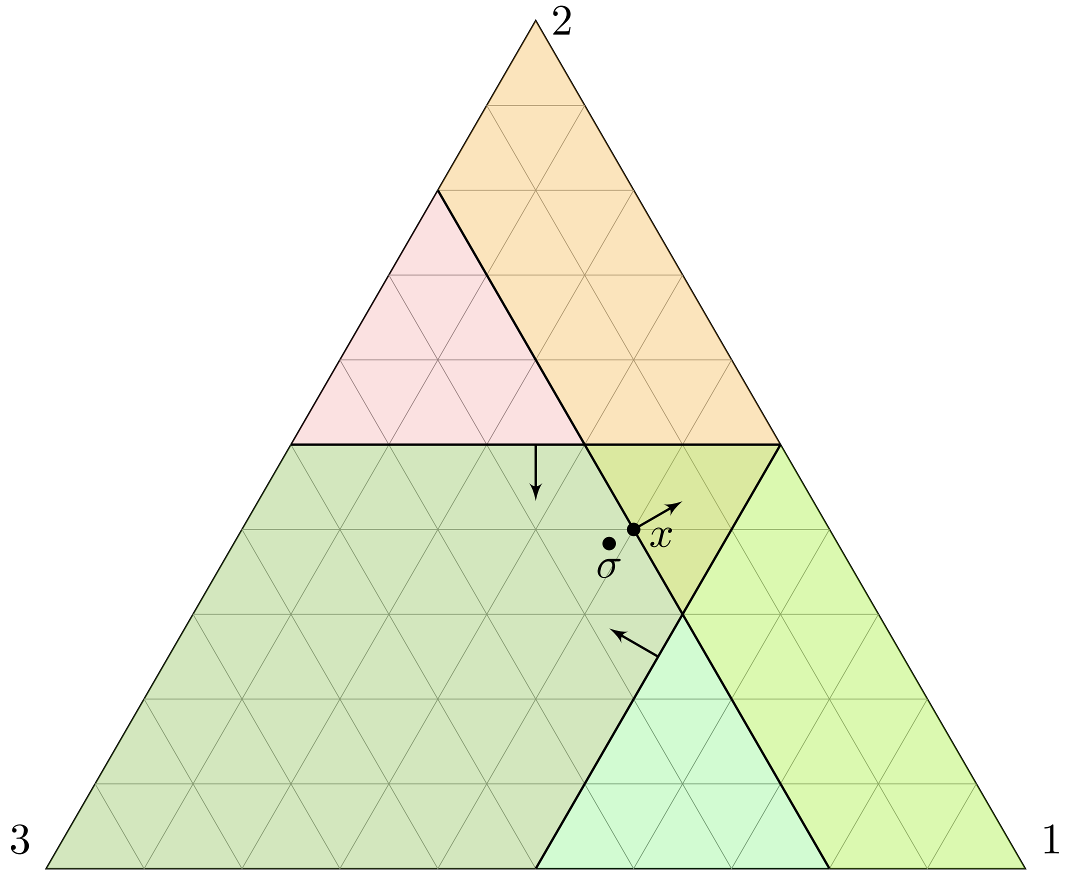
$$v : \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} : S \mapsto v(S) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |S| \le 1, \\ 4/5 & \text{falls } S = \{1,2\}, \\ 1/2 & \text{falls } S = \{1,3\}, \\ 1/2 & \text{falls } S = \{2,3\}, \\ 1 & \text{falls } S = \{1,2,3\}. \end{cases}$$

(1) Berechnen Sie den Shapley–Wert $\sigma(v) \in \mathbb{R}^I$. Prüfen Sie nach, ob $\sigma(v)$ im Kern $\operatorname{Core}(v)$ liegt. Widerspricht das nicht Satz M2A?

(2) Zeigen Sie $\operatorname{Core}(v) \neq \emptyset$ (a) geometrisch und (b) algebraisch: Formulieren Sie alle Ungleichungen, schreiben Sie diese explizit als Tucker–Tableau und lösen Sie es mit dem Simplex-Algorithmus.

(c) Falls Ihnen das zu viel Arbeit ist, hier die Minimalvariante: Prüfen Sie nach, dass der Punkt $x = (2/5, 2/5, 1/5)$ im Kern liegt.

Der Shapley–Wert muss nicht im Kern liegen!



Einfache Koalitionsspiele und Abstimmungen

Ein **einfaches Koalitionsspiel** ist eine Abbildung $v : \mathfrak{P}(I) \to \{0, 1\}$, die also nur die Werte 0 und 1 annimmt, wobei $v(\emptyset) = 0$ und $v(I) = 1$. Wir stellen uns v als eine Ja-Nein-Abstimmung vor und nennen $S \subseteq I$ eine **gewinnende Koalition**, falls $v(S) = 1$ gilt. Ein Spieler $k \in I$ heißt **Vetospieler**, falls k zu allen gewinnenden Koalitionen gehört.

Proposition M4B: Kern eines einfachen Koalitionsspiels

Der Kern besteht aus allen Allokationen getragen von Vetospielern.

Aufgabe: Rechnen Sie diese Aussage nach!

Lösung: Für jede Allokation $x : I \to \mathbb{R}$ gilt $x(I) = v(I) = 1$, und individuelle Rationalität verlangt $x(i) \ge v(i) \ge 0$ für alle $i \in I$.

Sei $x \in \operatorname{Core}(v)$ eine Kernallokation. Gilt $v(S) = 1$ für ein $S \subseteq I$, so fordert kollektive Rationalität $x(S) \ge v(S) = 1$, also $\operatorname{supp}(x) \subseteq S$. Somit liegt der Träger $\operatorname{supp}(x)$ im Durchschnitt aller Gewinnkoalitionen. Anders gesagt: Für $x \in \operatorname{Core}(v)$ und $x(i) > 0$ ist i ein Vetospieler.

Umgekehrt: Jede Allokation $x : I \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ getragen von Vetospielern liegt im Kern, denn jede Koalition $S \subseteq I$ mit $v(S) = 1$ enthält alle Vetospieler.

Shapley–Wert als Machtindex: Abstimmung mit Quorum

Gegeben sei die Spielermenge $I = \{1, 2, \dots, n\}$ sowie Stimmgewichte $g_1, g_2, \dots, g_n \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ und ein Quorum $q \in \mathbb{R}_{\ge 0}$. Diese Daten definieren das Abstimmungsverfahren $[q; g_1, g_2, \dots, g_n]$ durch die Funktion

$$v \;:\; \mathfrak{P}(I) \to \mathbb{R} \;:\; S \mapsto v(S) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \sum_{i \in S} g_i < q, \\ 1 & \text{falls } \sum_{i \in S} g_i \ge q. \end{cases}$$

Diese Abbildung v ist monoton, denn aus $S \subseteq T$ folgt $v(S) \le v(T)$. Negatives Stimmgewicht $g_i < 0$ ist denkbar, bricht aber die Monotonie.

Wie groß ist der Einfluss jedes Spielers $i \in I$ in dieser Abstimmung? Eine erste Beobachtung ist klar, wenn auch in der Praxis oft missachtet: Der Einfluss ist nicht proportional zur Stimmenzahl / zum Stimmgewicht! Wir suchen daher einen **Machtindex** als verlässliche Quantifizierung. Hier findet der **Shapley–Wert** eine erstaunliche politische Anwendung.

Alternativ wird hierzu auch der **Banzhaf–Wert** herangezogen:

$$\boxed{\beta_i(v) := \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq I \smallsetminus \{i\}} v(S \cup \{i\}) - v(S)}$$

Shapley–Wert als Machtindex: UN-Sicherheitsrat

Der UN-Sicherheitsrat hat insgesamt 15 Mitglieder, davon 5 permanente (Frankreich, England, USA, Russland, China) und 10 nicht-permanente. Das Abstimmungsverfahren entspricht den Stimmgewichten

$$[39; 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1].$$

Eine Abstimmung wird nur dann gewonnen, wenn alle fünf permanenten Mitglieder dafür stimmen und zudem mindestens vier nicht-permanente.

Aufgabe: Berechnen Sie (0) den Kern und für jeden Spieler $i \in I$ (1) den Shapley–Wert σ_i und zum Vergleich (2) den Banzhaf–Wert β_i. Ist der Shapley–Wert oder der Banzhaf–Wert hier angemessen? Können Sie eine Interpretation oder Intuition hierzu entwickeln?

Lösung: (0) Kern ist der Simplex der permanenten Mitglieder (M4B). (1,2) Für i permanent und j nicht-permanent finden wir die Werte

$$\sigma_i = \frac{421}{2145} \approx 0.19627, \qquad \beta_i = \frac{848}{2^{14}} \approx 0.05176,$$
$$\sigma_j = \frac{4}{2145} \approx 0.00186, \qquad \beta_j = \frac{84}{2^{14}} \approx 0.00513.$$

Der Shapley–Wert hat zahlreiche Anwendungen.

Ich nenne ein praktisches Beispiel aus dem Bereich **Data Science**. Vorgelegt sei eine große Datenbank zu Immobilienpreisen in Stuttgart. Gelistet sind Häuser und Wohnungen mit ihrem erzielten Verkaufspreis, zudem alle relevanten Eigenschaften wie Typ, Größe, Lage, Alter, etc.

Nehmen wir zur Vereinfachung an, jedes Kriterium $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ sei nur **binär**, also jeweils entweder zutreffend oder nicht zutreffend. Zu jeder Teilmenge $S \subseteq I$ dieser Kriterien können wir aus der Datenbank dann den durchschnittlichen Preis $v(S) \in \mathbb{R}$ dieser Kategorie berechnen. Wie groß ist der Einfluss der Größe / der Lage / der Alters auf den Preis? Zur Interpretation der Daten ist dies eine überaus hilfreiche Größe!

Dieselbe Idee nutzt man zur Faktoranalyse im **Machine Learning**. Die Bilderkennung soll z.B. Photos von Katzen und Hunden trennen. Der Algorithmus lernt selbständig, aus den vorgelegten Daten seine Prognosen anzunähern. Auf Nachfrage kann er jedoch nicht erklären, welcher Teil des Bildes welchen Einfluss auf seine Entscheidung hat. Diese Interpretation kann wie oben durch Faktoranalyse entstehen.

Kapitel N

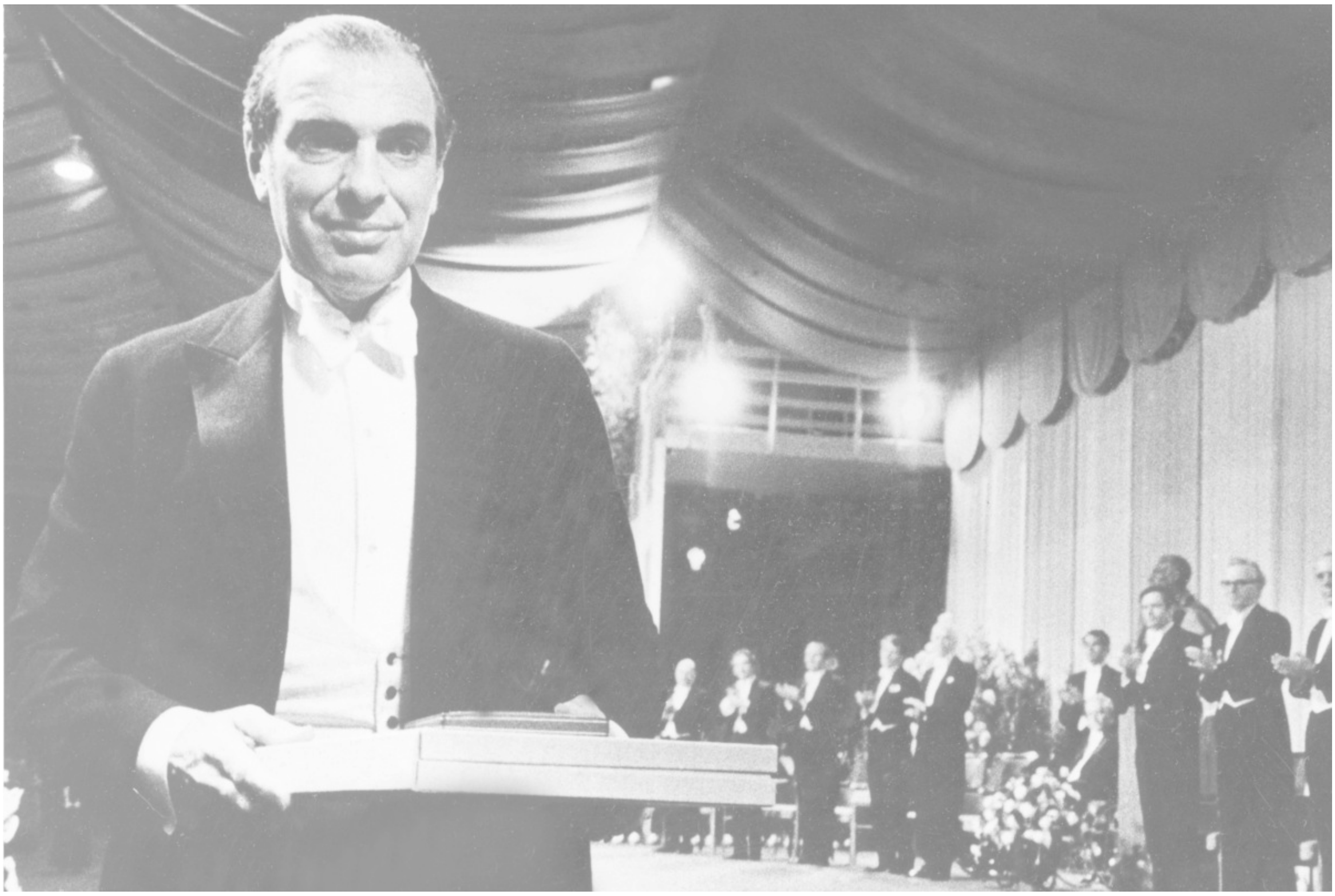
Kollektive Entscheidungen und Arrows Satz vom Diktator

„That was it! It took about five days to write in September 1948. When every attempt failed I thought of the impossibility theorem.“

Kenneth Arrow, zitiert nach Sylvia Nasar, *A Beautiful Mind*

Inhalt dieses Kapitels N

Kenneth Arrow (1921–2017)



Kenneth Arrow bei der Nobelpreisverleihung, Stockholm 10.12.1972 (Associated Press)

Kenneth Arrow (1921–2017)

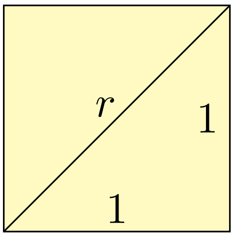
Kenneth Arrow ist berühmt für seinen Unmöglichkeitssatz, spektakulär auch „Satz vom Diktator“ genannt, und weitere Arbeiten zu kollektiven Entscheidungen. Er starb am 21. Februar 2017 im Alter von 95 Jahren. Er war Professor an den Universitäten Harvard und Stanford.

Dieses Kapitel handelt von seiner Doktorarbeit aus dem Jahre 1951. Für diese und weitere bahnbrechende Arbeiten zur Wohlfahrtstheorie und zur Theorie ökonomischer Gleichgewichte bekam Arrow 1972 den Wirtschaftsnobelpreis, mit 51 Jahren als bislang jüngster Preisträger.

Die Arbeiten von Nobelpreisträgern sind oft spannend und wegweisend. Für allgemein verständliche Vorträge eignen sie sich leider selten, oder nur mit großen Mühen. Es gibt ein paar bemerkenswerte Ausnahmen, hierzu zählen Nashs Gleichgewichtssatz und Arrows Satz vom Diktator.

Dieses Theorem ist ein schönes Lehrstück mathematischen Denkens. Der Beweis ist genial-einfach, die Aussage ist gesellschaftlich relevant. Aus der beliebten Reihe: „Wie schreibe ich meine Doktorarbeit in fünf Tagen und erhalte dafür den Wirtschaftsnobelpreis?“

Aperitif: ein klassischer Beweis durch Widerspruch



Sie erinnern sich an $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$.
Ist diese Zahl rational oder irrational?
Wir suchen einen Bruch $r = a/b \in \mathbb{Q}$,
der $r^2 = 1^2 + 1^2$ erfüllt, also $r \cdot r = 2$.

Satz N0C: Irrationalität von $\sqrt{2}$, Euklid ca. 300 v.Chr.

Es gibt keine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft $r^2 = 2$.

Beweis: Angenommen, es gäbe $r \in \mathbb{Q}$ mit $r^2 = 2$.
Rational bedeutet $r = a/b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b > 0$.
Zudem sei der Bruch a/b vollständig gekürzt.

Aus der Gleichung $(a/b)^2 = 2$ folgt $a^2 = 2b^2$.
Daher ist a^2 gerade, also $a = 2\overline{a}$ mit $\overline{a} \in \mathbb{Z}$.
Einsetzen ergibt $4\overline{a}^2 = 2b^2$, also $2\overline{a}^2 = b^2$.
Daher ist b^2 gerade, also $b = 2\overline{b}$ mit $\overline{b} \in \mathbb{Z}$.

Somit ließe sich $a/b = \overline{a}/\overline{b}$ weiter kürzen. Das ist ein Widerspruch!
Also gibt es keine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft $r^2 = 2$. $\boxed{\text{QED}}$

Rational, irrational, scheißegal?

Der Beweis ist klar und einfach, allerdings trickreich: Es ist ein indirekter Beweis, durch Widerspruch. Das müssen Sie erst einmal verarbeiten.

Wir nehmen an, es gäbe eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit $r^2 = 2$.
Dann zeigen wir, dass diese Annahme zum Widerspruch führt.
Wir schließen daraus, dass unsere anfängliche Annahme falsch war.

Es ist sinnlos, einen Bruch für $\sqrt{2}$ zu suchen, denn es gibt keinen.
Wohl gibt es gute Approximationen, etwa $14142/10000$ wie angegeben, aber kein Bruch kann exakt $\sqrt{2}$ darstellen; das haben wir bewiesen.

Nutzen Sie Ihre wertvolle Lebenszeit lieber für lohnendere Dinge!
Zum Beispiel ist es durchaus interessant, lehrreich und lohnend, zu verstehen, *warum* $\sqrt{2}$ nicht rational ist. Das ist ein gutes Ziel.

Übung: Welche der Zahlen $\sqrt[p]{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ sind ir/rational?

Manch Amateur sucht nach der Quadratur des Kreises, einem weiteren klassischen Konstruktionsproblem. Es ist leider ebenso unmöglich.
Der Beweis ist allerdings komplizierter, viele suchen daher lieber nach einer Quadratur, die es nicht gibt. Einige werden darüber verrückt.

Rational, irrational, scheißegal?

N007
Ergänzung

Zur Irrationalität von $\sqrt{2}$ schreibt Platon (428–348 v.Chr.) in den *Nomoi*:

Ihr wackeren Helenen, das ist eins von den Dingen, von denen gesagt wird, es sei eine Schande, wenn man es nicht wisse, und wenn man das Notwendige weiß, ist's erst noch keine sonderliche Ehre.

Heutigen Schüler:innen wird dies vorenthalten, vorgeblich können sie's nicht begreifen; eine selbsterfüllende Prophezeiung, Fluch und Betrug.

Die Irrationalität von $\sqrt{2}$ war lange vor Euklid bekannt, etwa Hippasos von Metapont. Er lebte um 500 v.Chr. und gehörte der Bruderschaft des Pythagoras an, eine Art philosophisch-esoterische Sekte. Der Kernsatz ihrer Lehre lautete: „Alles ist Zahl." Damit meinten sie, alles in der Natur wird durch ganze Zahlen und ihre Verhältnisse (Brüche) beschrieben.

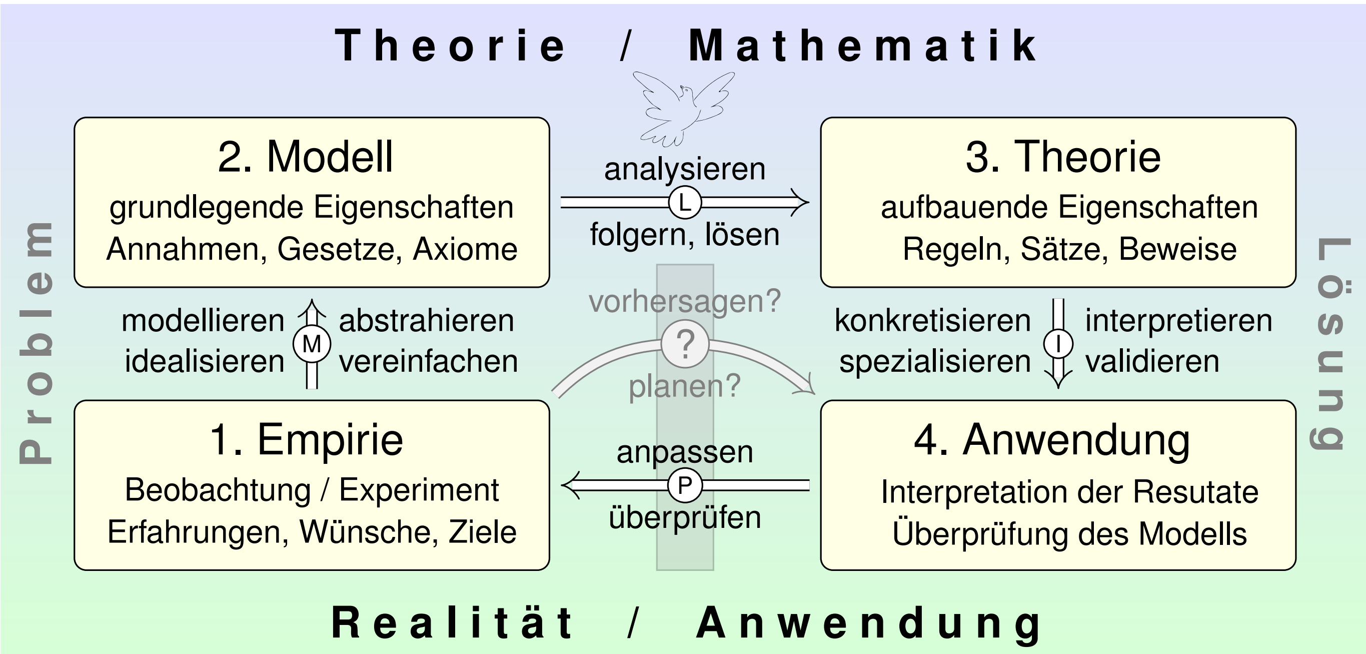
Der Legende nach war die Bruderschaft über die Irrationalität (von $\sqrt{5}$) derart schockiert und erbost, dass sie Hippasos auf einer Schiffsreise ermordeten, indem sie ihn über Bord warfen. Ignoranz schlägt Geist.

Ähnlich schockierend wirkt bis heute der Satz vom Diktator. Wir nehmen uns die nötige Zeit, um alle Ideen und Begriffe sorgfältig auszuführen.

Wozu dient Mathematik?

N008
Ergänzung

Alles Leben ist Problemlösen. (Karl Popper)



Mathematik untersucht sowohl abstrakte Strukturen als auch konkrete Anwendungen. Dies sind keine Gegensätze, sondern sie ergänzen sich!

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant)

Wahlverfahren: informelle Problemstellung

Beispiel: Eine vierköpfige Familie $I = \{1, 2, 3, 4\}$ plant ihren Urlaub. Zur Wahl stehen $A = \{\ a = \text{Venedig},\ b = \text{London},\ c = \text{Paris}\ \}$.

$$\begin{array}{ccccccc} 1: & b & \succ & c & \succ & a \\ 2: & a & \succ & b & \approx & c \\ 3: & a & \succ & c & \succ & b \\ 4: & c & \succ & b & \succ & a \end{array}$$

Was ist ein sinnvoller Kompromiss? rational? nachvollziehbar? gerecht? Geht das überhaupt? Wenn ja, nach welchen Regeln?

Beispiel: $A = \{a, b, c, \dots\}$ sind Geschäftsstrategien, jede Aktionär:in i hat ihre eigene Präferenz P_i. Wir suchen ein Abstimmungsergebnis P.

Beispiel: $A = \{a, b, c, \dots\}$ sind Universitäten, P_i ist das Ranking nach Kriterium i. Gesucht ist ein zusammenfassendes Ranking P aller Unis.

Beispiel: Berufung auf eine Professur, Kandidat:innen $A = \{a, b, c, \dots\}$. Die Kriterien sind Forschung, Lehre, Drittmittel, Administration.

Die Übungen erklären weitere Beispiele und zahlreiche Anwendungen. Solche Beispiele illustrieren. Abstraktion strukturiert und vereinfacht!

Wahlverfahren: gesellschaftliche Relevanz

Abstimmungen sind wohl jedem von uns aus Alltag und Politik vertraut. Zur Demokratie gehören Wahlen, Abstimmungen, Volksentscheide, etc.

Eine Gruppe von Personen $1, 2, \dots, n$ darf / soll / muss über mögliche Alternativen $a, b, c, \dots$ abstimmen. Doch nach welchem Verfahren soll abgestimmt werden? Welche Anforderungen soll das Verfahren erfüllen? Diese Frage tritt in zahlreichen Anwendungen auf, sie ist daher für die Praxis überaus wichtig… und auch theoretisch höchst interessant!

Offensichtlich braucht man gar nicht erst abzustimmen, wenn es nur eine Alternative gibt, $A = \{a\}$. Schlimmer noch: Man *kann* gar nicht abstimmen, wenn es gar keine Alternativen gibt, $A = \emptyset$. „Alternativlos“ war das Unwort des Jahres 2010 und wird immer wieder gerne genutzt.

Wenn es genau zwei Alternativen a, b gibt, dann kann man zum Beispiel die Stimmen zählen und es entscheidet die relative / einfache / absolute / qualifizierte Mehrheit. Hier gibt es bereits mehrere Möglichkeiten, ein Wahlverfahren festzulegen. Zudem gibt es manchmal Vetorechte zum Schutz von Minderheiten und ähnliche Verfeinerungen, siehe unten.

Wahlverfahren: mathematische Sorgfaltspflicht

N103
Erläuterung

Wie sieht ein Wahlverfahren allgemein aus, und was soll es leisten? Wir wollen nicht nur Einzelfälle behandeln, sondern eine allgemeine Regel finden, ein Wahlverfahren, das vernünftigen Ansprüchen genügt.

Jedes Individuum $i \in I$ hat seine individuelle Präferenz $P_i \in \mathbb{P}(A)$. Daraus soll nun eine gemeinsame Präferenz $P = V(P_1, \dots, P_n)$ als Ergebnis gebildet werden, also ein Gesamtclassement.

Das klingt zunächst recht einfach, aber es erweist sich als überraschend schwierig, mitunter gar unmöglich! Um dies im Detail zu verstehen und als Ergebnis zusammenzufassen, müssen wir sehr präzise formulieren und argumentieren. Dann jedoch wird alles wunderbar klar und leicht. Arrows Theorem ist ein schönes Lehrstück mathematischen Denkens.

Wir benötigen hierzu „nur“ elementare Logik und Mengenlehre: Diese ermöglichen uns präzise Begriffe, zuerst um Beispiele zu analysieren, dann um allgemeine Aussage formulieren und beweisen zu können. Damit können wir erklären, was ein Wahlverfahren ist (in Form einer Definition) und welche Eigenschaften wir uns wünschen (als Axiome).

Wahlverfahren: mahnende Analogien

N104
Erläuterung

Es ist wie so oft in der Mathematik und allgemein im Leben: Axiome sind Annahmen, Forderungen, Wünsche, Sehnsüchte. Nicht immer lassen sie sich erfüllen. Selbst wenn sie erfüllbar sind, so nicht immer eindeutig. Denken Sie an leuchtende Beispiele aus dem ersten Studienjahr:

(1) Wir wünschen eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft $r^2 = 2$. Ist dieser Wunsch erfüllbar? Nein! Die beiden Forderungen $r \in \mathbb{Q}$ und $r^2 = 2$ sind widersprüchlich, also unvereinbar und somit unerfüllbar.
Das ist einer der vielen guten Gründe für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$. In $\mathbb{R}$ ist $\sqrt{2} = 1.4142135623\dots$ eine Lösung, und $-\sqrt{2}$ ebenso!

(2) Wir wünschen eine Volumenmessung $\mathrm{vol}_n : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, also normiert, linear in jeder Spalte, alternierend bei Vertauschung. Ist dieser Wunsch erfüllbar? Ja! Wir konstruieren die Determinante.
Die Konstruktion gelingt sogar über jedem kommutativen Ring. Sie ist ein wunderbares Werkzeug der Linearen Algebra!

Nachdem Existenz und Eindeutigkeit geklärt sind, wollen wir die Lösung tatsächlich finden / berechnen / approximieren, dies möglichst effizient.

Präferenzen: Definition

Sei $A = \{a, b, c, \dots\}$ die Menge der betrachteten **Alternativen**, $\sharp A \geq 2$.
Wir vereinbaren die folgende Schreib- und Sprechweise.

Starke Präferenz: $x \succ y$ bedeutet Alternative x ist besser als y.
Indifferenz/Äquivalenz: $x \approx y$ bedeutet x und y sind gleich gut.
Schwache Präferenz: $x \succcurlyeq y$ bedeutet $x \succ y$ oder $x \approx y$.

Formal wird $\succcurlyeq$ festgelegt durch alle Paare $(x, y) \in A \times A$ mit $x \succcurlyeq y$:
Die Menge $P = \{\, (x, y) \in A \times A \mid x \succcurlyeq y \,\}$ codiert alle Information.

Aus $\succcurlyeq$ rekonstruieren wir: Indifferenz $x \approx y$ bedeutet $x \succcurlyeq y$ und $y \succcurlyeq x$.
Starke Präferenz $x \succ y$ bedeutet $x \succcurlyeq y$ und nicht $y \succcurlyeq x$. Also genügt $\succcurlyeq$.

Definition N1A: Präferenz

Die Relation $\succcurlyeq$ heißt **Präferenz**, wenn sie folgende Grundregeln erfüllt:
Transitivität: Gilt $x \succcurlyeq y$ und $y \succcurlyeq z$, so auch $x \succcurlyeq z$.
Linearität: Für jedes Paar $x, y \in A$ gilt $x \succcurlyeq y$ oder $y \succcurlyeq x$.
Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$ die Menge aller Präferenzen auf A.

Antisymmetrie: Für alle $x \neq y$ gilt $x \succ y$ oder $y \succ x$, nie $x \approx y$.
Mit $\mathbb{S} = \mathbb{S}(A)$ bezeichnen wir die Menge aller strikten Präferenzen auf A.

Präferenzen: Beispiele

Wir nutzen hier zwei Schreibweisen für dasselbe Objekt:
Die Schreibweise als Relation $\succcurlyeq$ ist bequem und suggestiv.
Die Darstellung als Menge $P \subseteq A \times A$ dient als präzise Grundlage.
Beide sind äquivalent: Genau dann gilt $x \succcurlyeq y$, wenn $(x, y) \in P$ gilt.

Wozu brauchen wir Definitionen? Damit wir wissen, wovon wir sprechen!
Eine Definition ist eine Vereinbarung: Damit präzisieren wir die Objekte, die wir untersuchen wollen. Damit können Sie selbstständig überprüfen, ob ein vorgelegtes Objekt die geforderten Eigenschaften hat oder nicht.

Aufgabe: Sind die folgenden Teilmengen von $A \times A$ Präferenzen?
(1) $R = \{(a, b)\}$ auf $A = \{a, b\}$
(2) $S = \{(a, a), (b, b)\}$ auf $A = \{a, b\}$
(3) $T = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$ auf $A = \{a, b\}$
(4) $U = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ auf $A = \{a, b\}$
(5) $V = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\}$ auf $A = \{a, b, c\}$

Lösung: Wir nutzen obige Definition N1A und wenden sie sorgfältig an:
(1) Nein, es fehlen (a, a) und (b, b). (2) Nein, es fehlt (a, b) oder (b, a).
(3) Ja, kurz $a \succ b$. (4) Ja, kurz $a \approx b$. (5) Nein, es fehlt (a, c).

Präferenzen: Beispiele

Aufgabe: Wie viele Präferenzen gibt es auf der Menge $A = \{a, b\}$?

Lösung: Es gibt genau drei Präferenzen, nämlich:

$$\left\{\begin{array}{llccc} \{(a,a),(a,b),(b,b)\} & \text{kurz:} & a & \succ & b \\ \{(a,a),(b,a),(b,b)\} & \text{kurz:} & b & \succ & a \\ \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\} & \text{kurz:} & a & \approx & b \end{array}\right\} = \mathbb{P}(A)$$

Aufgabe: Wie viele Präferenzen gibt es auf der Menge $A = \{a, b, c\}$?

Lösung: Es gibt genau 13 Präferenzen, nämlich:

$$\left\{\begin{array}{ccccc@{\qquad}ccccc} a & \succ & b & \succ & c & a & \succ & b & \approx & c \\ a & \succ & c & \succ & b & b & \succ & a & \approx & c \\ b & \succ & a & \succ & c & c & \succ & a & \approx & b \\ b & \succ & c & \succ & a & a & \approx & b & \succ & c \\ c & \succ & a & \succ & b & a & \approx & c & \succ & b \\ c & \succ & b & \succ & a & b & \approx & c & \succ & a \\ \multicolumn{5}{l}{\text{(strikte Präferenzen } \mathbb{S})} & a & \approx & b & \approx & c \end{array}\right\} = \mathbb{P}(A)$$

Präferenzen: Anzahl

Aufgabe: Wie viele (strikte) Präferenzen gibt es bei n Alternativen?

Es ist oft lehrreich, neu definierte Objekte zu zählen. Dies zwingt dazu, die Definition genau zu verstehen und klärt so Missverständnisse auf.
Defendit numerus. [Die Zahl gibt Schutz.] Juvenal (58–138 n.Chr.), *Satiren*

Lösung: Wir zählen zunächst die strikten Präferenzen $\mathbb{S} = \mathbb{S}(A)$:
Für den (eindeutigen) ersten Platz haben wir genau n Möglichkeiten, für den zweiten bleiben noch $n-1$, für den dritten nur $n-2$, usw.
Wir erhalten $\sharp\mathbb{S} = n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. (Fakultät)

Diese Zahlen wachsen schnell, wie folgende Tabelle erahnen lässt:

n	1	**2**	**3**	4	5	6	7	8	9	10
$\sharp\mathbb{S}$	1	**2**	**6**	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800
$\sharp\mathbb{P}$	1	**3**	**13**	75	541	4 683	47 293	545 835	7 087 261	102 247 563

Die Anzahl $\sharp\mathbb{P}(A)$ heißt auch $n$te *Fubini–Zahl* (`oeis.org/A000670`) oder *Bell–Zahl* (`en.wikipedia.org/wiki/Ordered_Bell_number`).
Ihre Berechnung ist komplizierter, ich zitiere nur die ersten Werte.

Exkurs zu Ordnungsrelationen

Eine Relation $\ge$ auf der Menge A wird festgelegt durch alle Paare (x, y) mit $x \ge y$, also genau durch die Menge $R = \{\, (x, y) \in A \times A \mid x \ge y \,\}$.

Diese Einsicht erheben wir nun zur Definition: Eine (zweistellige) **Relation** auf A ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times A$ der Produktmenge.

Statt $(x, y) \in R$ schreibt man traditionell $x\,R\,y$. Das ist leichter lesbar, insbesondere für die üblichen Schreibweisen wie $\ge$, $\le$, $>$, $<$, etc.

Definition N1B: Ordnungsrelationen

Für eine **lineare Ordnung** $\ge$ auf der Menge A verlangen wir:

Reflexivität: Für alle $x \in A$ gilt $x \ge x$.
Antisymmetrie: Für alle $x, y \in A$ mit $x \ge y$ und $y \ge x$ gilt $x = y$.
Transitivität: Für alle $x, y, z \in A$ mit $x \ge y$ und $y \ge z$ gilt $x \ge z$.
Linearität: Für jedes Paar $x, y \in A$ gilt $x \ge y$ oder $y \ge x$.

Eine linear geordnete Menge $(A, \le)$ nennen wir auch eine **Kette**.
Für eine **Ordnung** verlangen wir nur Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität, für eine **Präordnung** nur Reflexivität und Transitivität.

Exkurs zu Ordnungsrelationen

Aufgabe: Welche der Eigenschaften aus N1B gelten für die folgenden Beispiele $(A, \le)$ einer Menge A mit einer zweistelligen Relation $\le$?

(1) Sei $A = \mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots\}$ die Menge der ganzen Zahlen mit ihrer üblichen Ordnung $\le$. (Selbe Frage für $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$… und für $\mathbb{C}$?)

(2) Sei $A = \mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen, oder alternativ $A = \mathbb{Z}_{>0}$ die Menge der positiven ganzen Zahlen. Diese Menge wird durch Teilbarkeit geordnet: Für $x, y \in A$ bedeutet $x \mid y$, es existiert $x' \in A$ mit $xx' = y$.

(3) Sei $M = \{1, 2, \dots\}$ eine beliebige Grundmenge und $A = \{X \subseteq M\}$ die Menge aller Teilmengen von M. Dann ist A durch Inklusion geordnet.

(4) Punkte $x, y \in A = \mathbb{R}^2$ ordnen wir nach ihrem Abstand zum Ursprung: Wir definieren also $x \le y$ durch die Bedingung $x_1^2 + x_2^2 \le y_1^2 + y_2^2$.

Lösung: (1) Für $(\mathbb{Z}, \le)$ gelten alle vier Eigenschaften (R,A,T,L); dies ist eine lineare Ordnung. (2) Auf $\mathbb{Z}$ ist $\mid$ eine Präordnung (R,T), auf $\mathbb{Z}_{>0}$ ist $\mid$ sogar eine Ordnung (R,A,T). (3) Auf A ist die Inklusion $\subseteq$ eine Ordnung, aber für $\sharp M \ge 2$ nicht linear. (4) Dies ist eine lineare Präordnung (R,T,L).

Linearität wird alternativ auch Totalität oder Vollständigkeit genannt: Sie bedeutet, dass wir je zwei Elemente $x, y \in A$ vergleichen können.

Aus Linearität folgt Reflexivität. Für Präferenzen fordern wir Transitivität und Linearität, die Reflexivität bekommen wir daraus geschenkt.

Antisymmetrie verbietet Indifferenz; das ist für manche Anwendungen eine sinnvolle Forderung, für manche Zwecke ist es jedoch zu streng.

Bemerkung N1c: Präferenzen

Eine **Präferenz** gemäß N1a ist demnach eine lineare Präordnung, und eine **strikte Präferenz** (ohne Indifferenzen) ist eine lineare Ordnung.

Ordnungsrelationen sind allgegenwärtig, in der Mathematik und überall. Insbesondere in der Entscheidungstheorie werden Präferenzen genutzt.

In den Wirtschaftswissenschaften bewähren sie sich als Standardmodell zur Formulierung von Entscheidungen und Fragen der Optimierung.

Aufgabe: Sei $R \subseteq A \times A$ eine (Ordnungs)Relation auf der Menge A.

(1) Auf der Teilmenge $B \subseteq A$ betrachten wir $S := R|_B := R \cap (B \times B)$. Dies ist die Einschränkung der Relation R von A auf die Teilmenge B. Beispiel: So schränken wir die Ordnung $\le$ von $\mathbb{R}$ ein auf $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{N}$.

(2) Sei $f : B \to A$ eine Abbildung. Wir ziehen die Relation R auf A zurück zur Relation $S := f^*(R) := \{ (x, y) \in B \times B \mid (f(x), f(y)) \in R \}$ auf B. Beispiel: In (1) betrachten wir die Inklusion $f : B \hookrightarrow A$ und $R|_B = f^*(R)$.

Welche der vier Eigenschaften (R,A,T,L) übertragen sich von R auf S?

Lösung: (2) Ist die Relation R auf A reflexiv / transitiv / total, so auch S auf B: Nachrechnen! Angenommen die Relation R ist antisymmetrisch: Für $x, y \in B$ mit $x\,S\,y$ und $y\,S\,x$ gilt $f(x)\,R\,f(y)$ und $f(y)\,R\,f(x)$, also $f(x) = f(y)$. Daraus folgt allgemein nicht $x = y$, nur falls f injektiv ist.

(1) Dies ist der Spezialfall von (2) für die Inklusion $f : B \hookrightarrow A : x \mapsto x$. Wie in (2) gezeigt, übertragen sich die drei Eigenschaften R,T,L immer. Die Inklusion ist injektiv, also vererbt sich hier auch die Antisymmetrie.

Warum gilt Intransitivität als irrational?

Wir untersuchen **rationale Entscheidungen** [*rational choice theory*]. Mit Transitivität verbieten wir zyklische Anordnungen wie $x \succ y \succ z \succ x$ oder allgemeiner $x \succcurlyeq y \succcurlyeq z \succ x$. Eine solche Präferenz würden wir als irrational betrachten. Warum ist Intransitivität eine logische Katastrophe?

Beispiel: In den Wirtschaftswissenschaften begründet man Transitivität dadurch, dass man einem Individuum mit intransitiver Präferenz alles Geld abknöpfen kann durch eine ewige **Geldpumpe** [*money pump*]. Logische Inkonsistenz wird dabei wie folgt ausgenutzt und bestraft:

Wegen $x \succcurlyeq y \succcurlyeq z$ kann man z zuerst in y und dann in x eintauschen; wegen $z \succ x$ kann man x gegen z und einen Geldbetrag tauschen, usw. Dieser närrische Kreislauf endet erst, wenn alles Geld verbraucht ist, oder wenn schließlich die Vernunft einsetzt: Intransitiv ist irrational.

Genau dieses Verhalten zeigt *Hans im Glück* der Brüder Grimm. Vordergründig illustriert dies Irrationalität, Planlosigkeit, Impulsivität, leichtfertiges Handeln ohne Erwägung naheliegender Konsequenzen, Unbeständigkeit durch Wechsel der Kriterien je nach Situation.

Warum gilt Intransitivität als paradox?

Häufig erwarten wir Transitivität und werden vom Gegenteil arg verblüfft. In solch Extremfällen sprechen wir von einem **Intransitivitäts-Paradox**.

Beispiel: Im Zeitalter digitaler Photographie kommt es vor, dass Sie von einem Motiv viele ähnliche Bilder / Schnappschüsse haben. Nun wollen Sie das schönste aussuchen und alle anderen löschen. Sie können je zwei vergleichen, aber nach dreien gefällt Ihnen doch das erste besser, sodass $x \prec y \prec z \prec x$. (Das liegt manchmal an wechselnden Kriterien.)

Beispiel: Lineare Ordnungen nutzen wir zum Suchen und Sortieren in Wörterbüchern, Datenbanken, Turnieren, etc. Zirkulär wäre katastrophal. Für lineare Ordnungen haben wir phantastisch effiziente Algorithmen, ohne Transitivität versagen sie jedoch kläglich: Suchen und Sortieren kommt nicht zum Ende oder liefert fehlerhafte, widersinnige Resultate.

Beispiel: Bei Wahlen möchten wir demokratisch einen Sieger küren. Das ist unmöglich, falls das Ergebnis eine intransitive Relation ist. Sie kennen das von *Schere-Stein-Papier*. Das Wahlergebnis ist in diesem (und ähnlichen) Fällen nicht transitiv und daher unbrauchbar.

Efrons intransitive Würfel: Welcher ist der beste?

Aufgabe: Der Statistiker Bradley Efron erfand folgende Würfel:

$$
\begin{array}{llcl}
A : 5,5,5,1,1,1 & \Rightarrow & \mathbf{E}(A) = & 9/3 \\
B : 6,6,2,2,2,2 & \Rightarrow & \mathbf{E}(B) = & 10/3 \\
C : 3,3,3,3,3,3 & \Rightarrow & \mathbf{E}(C) = & 9/3 \\
D : 4,4,4,4,0,0 & \Rightarrow & \mathbf{E}(D) = & 8/3
\end{array}
$$

Je zwei Würfel treten gegeneinander an, z.B. A gegen B. Wie groß sind die Gewinnwkten $\mathbf{P}(A > B)$ etc.? Welcher Würfel ist dabei der beste? Wie beschreiben Sie diese Situation präzise durch Zufallsvariablen?

Lösung: Unabhängigkeit! Abzählen aller Gewinnkombinationen ergibt:

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{P}(A > B) = 12/36 = 1/3, & \mathbf{P}(B > C) = 12/36 = 1/3, \\
\mathbf{P}(C > D) = 12/36 = 1/3, & \mathbf{P}(D > A) = 12/36 = 1/3, \\
\mathbf{P}(A > C) = 18/36 = 1/2, & \mathbf{P}(B > D) = 20/36 = 5/9.
\end{array}
$$

Es gibt keinen „besten“ Würfel: Jeder wird vom nächsten geschlagen!

Penney’s Game: Intransitivität entsteht auch in zufälligen 0-1-Folgen beim Wettrennen von je zwei der acht Tripel: Wer schlägt hier wen?

Intransitive Gewinnwahrscheinlichkeiten

Aufgabe: Spieler A und B wählen je ein Muster der Länge n. Es gewinnt, wes Muster als erstes auftritt. Ab $n \geq 3$ sind die Wkten nicht transitiv!

B\A	00	01	10	11
00		1/2	3/4	1/2
01	1/2		1/2	1/4
10	1/4	1/2		1/2
11	1/2	3/4	1/2	

Wkt, dass Muster A vor Muster B eintritt.

B\A	000	001	010	011	100	101	110	111
000		1/2	3/5	3/5	7/8	7/12	7/10	1/2
001	1/2		1/3	1/3	3/4	3/8	1/2	3/10
010	2/5	2/3		1/2	1/2	1/2	5/8	5/12
011	2/5	2/3	1/2		1/2	1/2	1/4	1/8
100	1/8	1/4	1/2	1/2		1/2	2/3	2/5
101	5/12	5/8	1/2	1/2	1/2		2/3	2/5
110	3/10	1/2	3/8	3/4	1/3	1/3		1/2
111	1/2	7/10	7/12	7/8	3/5	3/5	1/2	

Es kommt noch verrückter: Die Muster 1010 und 0100 haben mittlere Wartezeit 20 bzw. 18, doch 1010 kommt vor 0100 mit Wkt $9/14 > 1/2$. Das seltenere Muster gewinnt gegen das häufigere Muster! Das zeigt, wie trügerisch unsere Intuition zu Wartezeiten und Gewinnwkten ist. Martin Gardner: *The Colossal Book of Mathematics.* Norton & Co 2001

Wahlverfahren für 2 Individuen und 2 Alternativen

Aufgabe: Zählen Sie alle möglichen Abstimmungen (Voten) auf bei zwei Individuen, $I = \{1, 2\}$, und zwei Alternativen, $A = \{a, b\}$. Was ist jeweils das Ergebnis bei Mehrheitswahl M? **Lösung:**

$$\begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & a & \approx & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \approx & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \succ & a \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & b & \succ & a \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \succ & a \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \approx & b \end{array}$$

Dies definiert das Wahlverfahren $M : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P} : (P_1, P_2) \mapsto P$.

Wahlverfahren für 2 Individuen und 2 Alternativen

Aufgabe: Beschreiben Sie ebenso folgendes Wahlverfahren D_1: „Allein 1 entscheidet.“ (Das ist die lupenreine Diktatur.) **Lösung:**

$$\begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & a & \succ & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & b & \succ & a \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \succ & a \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & b & \succ & a \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \approx & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \approx & a \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \approx & b \end{array}$$

Dies definiert das Wahlverfahren $D_1 : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P} : (P_1, P_2) \mapsto P = P_1$. Hier ist 1 der Diktator, und 2 hat keinerlei Einfluss auf das Ergebnis.

Wahlverfahren für 2 Individuen und 2 Alternativen

N119

Aufgabe: Beschreiben Sie ebenso die aufgeklärte Diktatur $D_{1,2}$:
„Allein 1 entscheidet, nur bei Indifferenz entscheidet 2.“ **Lösung:**

$$\begin{array}{cccc} 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1: & a & \succ & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & a & \succ & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1: & a & \succ & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & b & \succ & a \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1: & b & \succ & a \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \succ & a \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1: & b & \succ & a \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & b & \succ & a \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \succ & b \\ \hline & a & \succ & b \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1: & a & \approx & b \\ 2: & b & \succ & a \\ \hline & b & \succ & a \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1: & a & \approx & b \\ 2: & a & \approx & b \\ \hline & a & \approx & b \end{array}$$

Dies definiert das Wahlverfahren $D_{1,2} : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P} : (P_1, P_2) \mapsto P$.
Historische Vorbilder: Ist’s dem Diktator egal, so entscheidet seine Frau.

Wahlverfahren für 2 Individuen und 2 Alternativen

N120

Vor dem Wahlgang müssen die Spielregeln eindeutig erklärt werden, hier als Tabelle, besser als Algorithmus, allgemein als Abbildung!

Aufgabe: Wie viele Wahlverfahren $V : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ gibt es hier?

Lösung: Für $\sharp I = 2$ und $\sharp A = 2$ gibt es $3^{3\cdot 3} = 19\,683$ Wahlverfahren.

Ausführlich: Die Menge $\mathbb{P}$ aller Präferenzen auf $A = \{a, b\}$ hat genau 3 Elemente: $\sharp\mathbb{P} = 3$ wie oben erklärt. Jeder Wähler hat also 3 mögliche Präferenzen. Die Wähler sind unabhängig voneinander. Die Anzahl möglicher Paare (P_1, P_2) ist demnach $\sharp(\mathbb{P} \times \mathbb{P}) = \sharp\mathbb{P} \cdot \sharp\mathbb{P} = 3 \cdot 3 = 9$. Ein Wahlverfahren ist eine Funktion $V : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P} : (P_1, P_2) \mapsto P$. Hierzu gibt es genau $\sharp(\mathbb{P}^{\mathbb{P}\times\mathbb{P}}) = (\sharp\mathbb{P})^{\sharp\mathbb{P}\cdot\sharp\mathbb{P}} = 3^9 = 19\,683$ Möglichkeiten.

Zum Kontrast: $\sharp I = 2$ und $\sharp A = 3$ ergibt $13^{13\cdot 13} = 13^{169} \approx 10^{188}$.

Familienurlaub: $\sharp I = 4$ und $\sharp A = 3$ ergibt $13^{13^4} = 13^{28561} \approx 10^{31815}$.

Die allgemeine Formel ist $\sharp\mathbb{P}^{\sharp\mathbb{P}^{\sharp I}}$. Das wird sofort unübersichtlich groß. Die allermeisten davon sind wenig sinnvoll, aber es sind Wahlverfahren. Wir wollen *alle* Wahlverfahren beschreiben und die *sinnvollen* finden. Offensichtlich versagt hier jeder *brute force* Ansatz. Doch Denken hilft!

Wahlverfahren: Definition

Gegeben sei die Menge $I = \{1, 2, \dots, n\}$ der Individuen/Kriterien, $n \ge 2$, und die Menge $A = \{a, b, c, \dots\}$ der Alternativen/Kandidaten, $\sharp A \ge 2$. Wie oben erklärt sei $\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$ die Menge aller Präferenzen auf A.

Definition N2A: Wahlverfahren

Ein **Wahlverfahren** ist eine Funktion $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$.

Statt *Funktion* sagt man auch *Abbildung* oder *Zuordnung*. Wir stellen uns dies als einen Algorithmus vor, eine Verfassung oder eine Konstitution.

Beispiel: (Diktatur) Zu $k \in I$ definieren wir $D_k(P_1, P_2, \dots, P_n) = P_k$. Das ist ein extrem simples Wahlverfahren, vermutlich auch das älteste; es ist leider immer noch weit verbreitet und bis heute überaus relevant.

Definition N2B: Diktator

Im Verfahren V heißt $k \in I$ **Diktator**, wenn aus $x \succ_k y$ stets $x \succ y$ folgt. In jedem Wahlverfahren V kann es höchstens einen Diktator geben.
DIC: Gibt es einen Diktator, so heißt das Verfahren V **diktatorisch**.
~~DIC~~: Gibt es keinen Diktator, so nennen wir V **nicht-diktatorisch**.

Wahlverfahren: Definition

Die unscheinbare Definition N2A codiert drei wichtige Forderungen:

RAT: Das Ergebnis P ist *rational*, also transitiv und linear gemäß N1A.

DOM: [*unrestricted domain*] Jeder Stimmabgabe $(P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{P}^n$ wird als Auswertung ein Ergebnis $P = V(P_1, P_2, \dots, P_n)$ zugeordnet

Die Individuen sind unabhängig, alle Konstellationen können auftreten. Das betrachtete Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ muss aus *jeder* Eingabe $(P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{P}^n$ eine gemeinsame Rangfolge $P \in \mathbb{P}$ bilden.

DET: Das Wahlverfahren V ist *deterministisch*, also nicht zufällig: Gleiche Eingabe $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ liefert immer die gleiche Ausgabe P. (Auch Losverfahren können durchaus nützlich sein, siehe Satz N2D.)

Beispiele: Für den einfachsten Fall $I = \{1, 2\}$ und $A = \{a, b\}$ haben wir oben drei Wahlverfahren beispielhaft ausgeschrieben: Die Verfahren D_1 und $D_{1,2}$ sind diktatorisch, M ist nicht-diktatorisch; Sie können viele weitere Verfahren wie D_2 oder $D_{2,1}$ etc. erfinden. Schon in diesem allereinfachsten Fall gibt es $19\,683$ Möglichkeiten. Die meisten sind sicher wenig nützlich, aber es sind Wahlverfahren.

Mehrheitswahl für n Individuen und 2 Alternativen: $A = \{a, b\}$

Aufgabe: Formulieren Sie die Mehrheitswahl (1) durch Stimmzählung

$$M : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P,$$

(2) M_μ gewichtet mit μ und (3) $M_\mu^{\alpha,\beta}$ qualifiziert mit $-1 < \beta \le \alpha < 1$.

Lösung: (1) Wir erhalten das Ergebnis $x \succcurlyeq y$ genau dann, wenn

$$\sharp\{\, i \mid x \succcurlyeq_i y \,\} \ge \sharp\{\, i \mid y \succcurlyeq_i x \,\}.$$

(2) Gegeben sei eine Gewichtung $\mu : I \to [0, 1]$ mit $\mu(1) + \dots + \mu(n) = 1$. Jede Teilmenge $J \subseteq I$ hat ihr Gewicht $\mu(J) := \sum_{i \in J} \mu(i)$. Wir setzen

$$\delta(x, y) := \mu\{\, i \mid x \succcurlyeq_i y \,\} - \mu\{\, i \mid y \succcurlyeq_i x \,\}.$$

Wir erhalten das Ergebnis $x \succcurlyeq y$ genau dann, wenn $\delta(x, y) \ge 0$ gilt.

(3) Wir setzen $a \succcurlyeq b$, falls $\delta(a, b) \ge \beta$ gilt, und $b \succcurlyeq a$, falls $\delta(a, b) \le \alpha$ gilt.

Beispiele: Für $\mu = (1/n, 1/n, \dots, 1/n)$ erhalten wir $M_\mu = M$ wie in (1). Die Diktatur $D_k = M_\mu$ entspricht $\mu(k) = 1$, es genügt $\mu(k) > 1/2$. Wir sehen: Verschiedene Formeln führen zur selben Funktion. Der Einfluss ist nicht proportional zum Stimmgewicht!

Mehrheitswahl für n Individuen und 2 Alternativen: $A = \{a, b\}$

Die Mehrheitswahl scheint selbstverständlich, aber es lohnt, sie einmal explizit auszuformulieren, wie die US-Präsidentschaftswahlen zeigen. Die Beschreibung des Wahlverfahrens muss klar und eindeutig sein. Im Idealfall, so wie hier, ein Algorithmus zur Stimmauszählung.

Aufgabe: Ist das wirklich ein Wahlverfahren? Was ist hier zu prüfen?

Lösung: Wir müssen prüfen, ob das Ergebnis P in allen Fällen eine Präferenz auf $A = \{a, b\}$ ist, also transitiv und linear. Hierzu vergleichen wir die Auszählungen gemäß $\delta = \mu\{\, i \mid (a, b) \in P_i \,\} - \mu\{\, i \mid (b, a) \in P_i \,\}$:

- Im Falle $\delta > 0$ gilt $P = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$, kurz $a \succ b$.
- Im Falle $\delta < 0$ gilt $P = \{(a, a), (b, a), (b, b)\}$, kurz $b \succ a$.
- Im Falle $\delta = 0$ gilt $P = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$, kurz $a \approx b$.

In jedem der drei Fälle ist P tatsächlich eine Präferenz auf $A = \{a, b\}$.

Bemerkung: Das ist wenig überraschend, muss aber überprüft werden. Ich betone es hier, weil es eine Besonderheit bei zwei Alternativen ist; für drei oder mehr Alternativen ist die Stimmenzählung *kein* Wahlverfahren! Diese Erkenntnis ist das Paradox von Condorcet, siehe Satz N3A.

Gute Eigenschaften und sinnvolle Forderungen

Die Mehrheitswahl erfreut sich folgender Eigenschaften:

UNA: Einhelligkeit. Gilt $x \succ_i y$ für alle $i \in I$, so folgt $x \succ y$. Als Tabelle:

$$\begin{array}{cccc} \hline I: & x & \succ & y \\ \hline & x & \succ & y \end{array}$$

MON: Monotonie. Angenommen, $(P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$ ergibt $x \succcurlyeq y$, und bei einem Vergleichswahlgang $(P'_1, P'_2, \dots, P'_n) \mapsto P'$ wächst die Unterstützung für x und sinkt die Unterstützung für y. Dann gilt $x \succcurlyeq' y$.

$$\begin{array}{cccc} \hline x & \succ & y & :J \\ x & \approx & y & :U \\ y & \succ & x & :K \\ \hline x & \succcurlyeq & y & \end{array} \qquad \begin{array}{c} \subseteq \\ \\ \supseteq \\ \Longrightarrow \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \hline J': & x & \succ' & y \\ U': & x & \approx' & y \\ K': & y & \succ' & x \\ \hline & x & \succcurlyeq' & y \end{array}$$

Ausgeschrieben: Angenommen, es gilt $\{\, i \mid x \succcurlyeq_i y \,\} \subseteq \{\, i \mid x \succcurlyeq'_i y \,\}$ und $\{\, i \mid y \succcurlyeq_i x \,\} \supseteq \{\, i \mid y \succcurlyeq'_i x \,\}$. Dann gilt: Aus $x \succcurlyeq y$ folgt $x \succcurlyeq' y$.

Gute Eigenschaften und sinnvolle Forderungen

Einhelligkeit [*unanimity*] heißt auch *Einstimmigkeit* oder *Souveränität*: Die Gruppe I kann bei Einstimmigkeit das Ergebnis $x \succ y$ erzwingen.

Monotonie [*monotonicity*] garantiert für je zwei Alternativen die *positive Korrelation* zwischen individuellen Präferenzen und dem Wahlergebnis: Wenn in einer zweiten Wahl die Unterstützermenge für x wächst und die Unterstützermenge für y schrumpft, dann darf sich das Ergebnis nur zu Gunsten von x ändern, keinesfalls zu Ungunsten von x.

Das ist nicht bloß fromme Theorie, sondern ein praktisches Problem: Zur Vergabe von Parlamentssitzen muss sinnvoll gerundet werden. In Deutschland entstehen zudem durch Erst- und Zweitstimme Überhangmandate; das Wahlgesetz formuliert hierzu die Regeln. Eine gefürchtete Paradoxie ist dabei das *negative Stimmgewicht*:

Beispiel: Nach Tod einer Direktkandidatin kam es 2005 im Wahlkreis Dresden I zu einer Nachwahl, bei der die CDU durch eine *geringere* Zweitstimmenzahl ein *zusätzliches* Mandat im Bundestag errang. Nach Klagen erklärte das Bundesverfassungsgericht daher 2008 und erneut 2012 das Bundestagswahlrecht für verfassungswidrig.

Gute Eigenschaften und sinnvolle Forderungen

Aus Monotonie folgt **Unabhängigkeit von dritten Alternativen**, engl. *independence of irrelevant alternatives*:

IIA: Sind bei $(P_1, \dots, P_n) \mapsto P$ und $(P'_1, \dots, P'_n) \mapsto P'$ alle individuellen Präferenzen zwischen x und y gleich, so auch das Ergebnis.

$$\begin{array}{cccl c rccc}
\hline
x & \succ & y & : J & = & J' : & x & \succ' & y \\
x & \approx & y & : U & = & U' : & x & \approx' & y \\
y & \succ & x & : K & = & K' : & y & \succ' & x \\
\hline
x & \succcurlyeq & y & & \Longleftrightarrow & & x & \succcurlyeq' & y
\end{array}$$

Sei $\{\, i \mid x \succcurlyeq_i y \,\} = \{\, i \mid x \succcurlyeq'_i y \,\}$ und $\{\, i \mid y \succcurlyeq_i x \,\} = \{\, i \mid y \succcurlyeq'_i x \,\}$. Dann gilt $x \succcurlyeq y$ genau dann, wenn $x \succcurlyeq' y$ gilt.

SYM: Symmetrie. Das Ergebnis ändert sich nicht bei Umordnung; $V(P_1, P_2, \dots, P_n) = V(P_{\tau 1}, P_{\tau 2}, \dots, P_{\tau n})$ für jede Umnummerierung τ.

Gilt dies, so nennen wir das Wahlverfahren V *symmetrisch*. Das extreme Gegenteil ist die Diktatur, wie in N2B erklärt.

Gute Eigenschaften und sinnvolle Forderungen

Bei nur zwei Alternativen ist IIA automatisch erfüllt. (Klar! Warum?) Für mehr Alternativen jedoch ist IIA eine starke Forderung, siehe N3D: Wenn sich der Vergleich des Paares (x, y) individuell nicht ändert, dann auch nicht sein Ergebnis. Die Vergleiche zu den anderen Alternativen dürfen sich beliebig ändern, für das Paar (x, y) spielt das keine Rolle.

Bei *Symmetrie* sind alle Individuen gleichberechtigt. Solche Verfahren heißen auch *anonym*, denn die Identität der Wähler spielt keine Rolle. Dies ist eine starke Forderung. Stimmgewichtung bricht die Symmetrie:

Beispiel: Bei Aktien ist das Stimmgewicht proportional zum Nennwert.

Beispiel: Im preußischen Dreiklassenwahlrecht (1849–1918) besaßen die Wähler abgestufte Stimmengewichte je nach ihrer Steuerleistung.

Beispiel: In einer Föderation unterschiedlich großer Länder kann die Stimme jedes Vertreters proportional zur Bevölkerung gewichtet werden.

Beispiel: Der US-Präsident wird indirekt gewählt, durch Wahlmänner. Dabei führt die ungleiche Aufteilung zu ungleichen Stimmgewichten. J.F. Banzhaf: *One Man, 3.312 Votes.* Vill. Law Rev. 13 (1968) 304–332.

Wie wichtig sind diese Forderungen?

Die hier erklärten Forderungen Einhelligkeit (UNA), Symmetrie (SYM), Monotonie (MON) und Unabhängigkeit (IIA) sind ebenso plausibel wie grundlegend: Sie erklären unmissverständlich und präzise, was wir unter einem „vernünftigen“, gar „fairen“ Wahlverfahren verstehen wollen.

Wir wollen sie daher genau verstehen und möglichst präzise formulieren. Diese Genauigkeit ist für unsere weiteren Untersuchungen unerlässlich. Nur so können wir sorgsam Wahlverfahren entwickeln und beurteilen und Fragen beantworten wie „Hat das Verfahren X die Eigenschaft Y?“

Muss die Formulierung so pedantisch genau sein? Ja, das muss sie! Sie merken in jedem konkreten Beispiel, etwa bei Gruppenarbeit in den Übungen, dass Sie ohne genaue Formulierungen nicht voran kommen, keine gemeinsame Klärung erreichen, sondern nur im Nebel stochern.

Mathematische Präzision erweckt bei manchem leider das irrige Gefühl, dies wären rein theoretische Überlegungen ohne praktische Relevanz. Das Gegenteil ist der Fall! Dies sind allgegenwärtige Forderungen. Um dies zu illustrieren, nenne ich Gegenbeispiele, wo sie fehlen.

Gegenbeispiel: Abstimmung ohne bindende Wirkung

UNA: Was bedeutet das Fehlen der Einhelligkeits-Eigenschaft?

Beispiel: Eine Schulleitung befragt ihre Schülerschaft $I = \{1, 2, \dots, n\}$ zum Kauf von $a =$ Tischtennisplatten, $b =$ Tischkickern, $c =$ Torwänden.

Die Schüler:innen beschließen einhellig $a \succ b \succ c$. Gekauft werden aber zwei Tischkicker. Die Schülerschaft ist in dieser Frage nicht souverän. Hier entscheidet ein weiterer Akteur $a \notin I$, außerhalb unseres Modells.

Dieser Ausgang mag verwundern, kommt aber tatsächlich häufig vor. Oft genug wird eine Kommission berufen, um einen Beschluss gebeten und dieser dann ignoriert, insbesondere wenn er nicht genehm ausfällt.

Wenn du nicht mehr weiter weißt, bilde einen Arbeitskreis!

Die Einhelligkeit (UNA) ist eine sehr schwache Minimalforderung, um wenigstens solch himmelschreienden Widersinn zu vermeiden.

Wir gelangen so zu dieser kaum zu bestreitenden Grundforderung: Zumindest im Falle der Einhelligkeit ist die Wählerschaft I souverän. Daher heißt die Einhelligkeits-Eigenschaft UNA auch Souveränität.

Gegenbeispiel: das Dessert-Paradox

N211

IIA: Was bedeutet das Fehlen der Unabhängigkeits-Eigenschaft?

„Was bieten Sie zum Nachtisch?“ — „Crème Brûlée oder Tiramisù.“
„Dann nehme ich Crème Brûlée.“ — „Wir hätten auch Apfelstrudel.“
„Gut, dann nehme ich Tiramisù.“

Solches Verhalten würden wir als widersinnig und irrational werten: Die Anwesenheit einer dritten Alternative Apfelstrudel sollte nichts ändern an der Präferenz zwischen Crème Brûlée und Tiramisù.

Genau das fordert die Unabhängigkeit von dritten Alternativen, zur Betonung spricht man auch von irrelevanten Alternativen (IIA).

Ist das nicht selbstverständlich? Nein, im Gegenteil, es ist selten der Fall! Bei Wahlen können weitere kleine Parteien das Ergebnis beeinflussen, auch wenn sie selbst keinerlei Aussicht auf einen Wahlsieg haben.

Genau dies geschah 2000 in den USA zwischen Bush - Gore - Nader und ähnlich auch 2002 in Frankreich zwischen Chirac - Jospin - Le Pen, nochmals variiert zuletzt 2022 zwischen Macron - Le Pen - Mélenchon. Solche Spoiler sind häufig. (`en.wikipedia.org/wiki/Spoiler_effect`)

Gegenbeispiel: Abhängigkeit von dritten Alternativen

N212

Bei einer Präsidentschaftswahl treten die drei Kandidaten L, M, R an.

L: 15% M: 40% R: 45%

$\longleftrightarrow$

politisches Spektrum

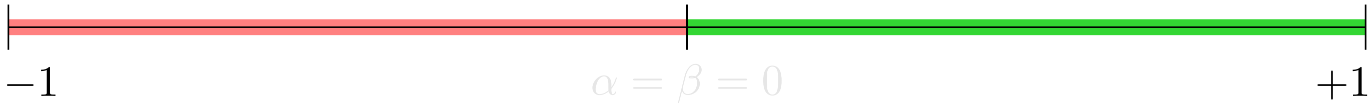
Aufgabe: Wer gewinnt die Präsidentschaftswahl? wenn L zuvor aufgibt?

Lösung: (1) Kandidat R gewinnt mit einer relativen Mehrheit von 45%.
(2) Gibt L zuvor auf, so gewinnt M mit einer absoluten Mehrheit von 55%.
Dabei nehmen wir vereinfachend an, alle Wähler von L wandern zu M.

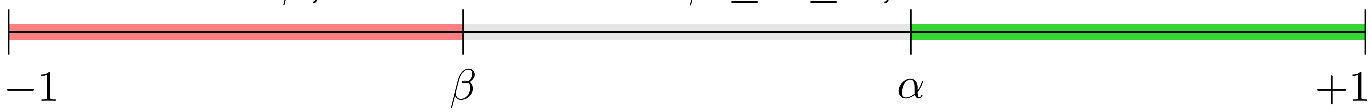
In den USA wird die Präsidentschaftswahl meist zwischen zwei großen Kandidaten entschieden. Manchmal tritt ein dritter kleiner Kandidat an. Dieser hat zwar keine realistischen Aussichten auf den Wahlsieg, kann aber als Spoiler das Ergebnis massiv beeinflussen, indem er einem der beiden großen Kandidaten mehr Stimmen abnimmt als dem anderen.

In diesem Sinne ist ein solches Wahlverfahren also manipulierbar durch das Aufstellen oder Zurückziehen weiterer Kandidaturen.
Die Unabhängigkeit (IIA) soll genau dieses Problem verhindern.

Qualifizierte Mehrheit: Quorum mit gegebenen Schranken



Wir bilden die Differenz $\delta = \mu\{\, i \mid a \succcurlyeq_i b \,\} - \mu\{\, i \mid b \succcurlyeq_i a \,\}$ und setzen $a \succcurlyeq b$, falls $\delta \ge \beta$ gilt, und $b \succcurlyeq a$, falls $\delta \le \alpha$ gilt. Das bedeutet ausführlich
$b \succ a$ falls $\delta < \beta$, $\quad a \approx b$ falls $\beta \le \delta \le \alpha$, $\quad a \succ b$ falls $\delta > \alpha$.



Beispiel: Bei $\alpha = \beta = 1/3$ benötigt Alternative a eine Zweidrittelmehrheit.

Was kann eine Teilmenge $J \subseteq I$ mit Stimmgewicht $\mu(J) = 1/2$ erreichen? Sie kann $b \succ a$ erzwingen, aber nicht $a \succcurlyeq b$, nur $a \succcurlyeq b$ verhindern. (Veto)

Satz N2c: Kenneth May 1952

Sei $A = \{a, b\}$ und $\mathbb{S} = \{\, a \succ b,\ b \succ a \,\}$ die Menge strikter Präferenzen. Erfüllt $V : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}$ Einhelligkeit und Monotonie und Symmetrie, dann ist $V = M^{\alpha,\beta}$ die Mehrheitswahl mit gewissen Schranken $-1 < \beta \le \alpha < 1$.

Qualifizierte Mehrheit: Quorum mit gegebenen Schranken

Typische Anwendung: In vielen Demokratien, auch in Deutschland, ist für Verfassungsänderungen eine Zweidrittelmehrheit erforderlich. Dies dient dem Minderheitenschutz, da ein Drittel der Stimmen genügt, um eine Verfassungsänderung zu verhindern (Veto). Einfache Gesetze hingegen werden mit geringerer Zustimmungsquote beschlossen.

Den zu erreichenden Stimmenanteil nennt man auch das **Quorum**. Hierzu sei $-1 < \beta \le \alpha < 1$. Für $\alpha = \beta = 0$ erhalten wir M_μ wie zuvor. Für $\beta = -\alpha$ werden beide Alternativen a und b gleich behandelt; solche Verfahren heißen **neutral** oder **symmetrisch in den Alternativen**.

Der Satz von May beschließt unsere Beispielsammlung: Wir kennen damit alle Wahlverfahren, die symmetrisch, einhellig und monoton sind.

Bemerkung: Wir untersuchen später entscheidende Teilmengen $J \subseteq I$ (Definition N3c). Im obigen Beispiel $\alpha = \beta = 1/3$ der Zweidrittelmehrheit ist $J \subseteq I$ mit $\mu(J) = 1/2$ entscheidend für (b, a), aber nicht für (a, b).

Ich betone dies hier, weil es eine Besonderheit bei zwei Alternativen ist; bei drei und mehr Alternativen gilt genau das Gegenteil (Lemma N3d).

Zusammenfassung: Wahlverfahren für zwei Alternativen

	UNA einhellig	MON monoton	~~DIC~~ nicht-diktatorisch	SYM symmetrisch
Diktatur D_k	✓	✓	✗	✗
Mehrheitswahl M	✓	✓	✓	✓
mit Schranken $M^{\alpha,\beta}$	✓	✓	✓	✓
mit Gewichtung M_μ	✓	✓	(✓)	(✗)
mit Schranken $M_\mu^{\alpha,\beta}$	✓	✓	(✓)	(✗)

Eine **Präferenz** $P \subseteq A \times A$ ist eine transitive und lineare Relation auf A. Sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Präferenzen auf der Menge A der Alternativen.

Ein **Wahlverfahren** ist eine Funktion $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$. Das bedeutet, jeder möglichen Konstellation individueller Präferenzen $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{P}$ wird als Ergebnis eine Präferenz $P \in \mathbb{P}$ zugeordnet.

Es gibt sehr viele Wahlverfahren; wir wollen die guten hervorheben: Wir nennen ein Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ **perfekt**, wenn die Zuordnung $(P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$ einhellig, monoton und nicht-diktatorisch ist.

Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften

Ein Wahlverfahren ist eine Funktion $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$. Zur Erinnerung gute Eigenschaften und sinnvolle Forderungen:

UNA: Einhelligkeit. Gilt $a \succ_i b$ für alle $i \in I$, so folgt $a \succ b$.

MON: Monotonie. Angenommen, $(P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$ ergibt $a \succcurlyeq b$ und bei einem Vergleichswahlgang $(P_1', P_2', \dots, P_n') \mapsto P'$ wächst die Unterstützung für a und sinkt die Unterstützung für b. Dann gilt $a \succcurlyeq' b$.

IIA: Unabhängigkeit von dritten Alternativen.
Sind bei $(P_1, \dots, P_n) \mapsto P$ und $(P_1', \dots, P_n') \mapsto P'$ alle individuellen Präferenzen zwischen a und b gleich, so auch das Ergebnis.

SYM: Symmetrie. Das Ergebnis ändert sich nicht bei Umordnung; $V(P_1, P_2, \dots, P_n) = V(P_{\tau 1}, P_{\tau 2}, \dots, P_{\tau n})$ für jede Umordnung τ. In diesem Sinne sind alle Individuen/Kriterien gleichberechtigt.

Im Verfahren V heißt $k \in I$ **Diktator**, wenn aus $x \succ_k y$ stets $x \succ y$ folgt.
DIC: Gibt es einen Diktator, so heißt das Verfahren V *diktatorisch*.
~~DIC~~: Gibt es keinen Diktator, so nennen wir V *nicht-diktatorisch*.

Demarchie: Wahl durch Losverfahren

Das antike Griechenland, speziell Athen, gilt als Wiege der Demokratie. Öffentliche Ämter wurden damals durch Los unter den zugelassenen Kandidaten vergeben; dies sollte Korruption mindern und gewalttätige Wahlkämpfe verhindern. . . und den Willen der Götter berücksichtigen.

Jahrhundertelang wurde der Doge von Venedig durch aufwändige Losverfahren bestimmt, die Wahlmanipulation und Machtkonzentration ausschließen sollten. (`de.wikipedia.org/wiki/Doge_von_Venedig`)

In modernen Demokratien geriet diese Praxis in Vergessenheit oder galt als unbefriedigend: Nicht blinder Zufall sollte entscheiden, sondern die Tüchtigkeit der Bewerber. Doch wer entscheidet über die Tüchtigkeit?

Angewendet wird das Losverfahren heute bei Gericht zur Einsetzung von Laienrichtern (Schöffen). In vielen Ländern, zum Beispiel den USA, wird bei Strafverfahren eine Geschworenenjury durch Los berufen, die unabhängig vom Richter über die Schuldfrage entscheidet.

In den letzten Jahren wird auch die Anwendung des Losverfahrens zur parlamentarischen Vertretung diskutiert, z.B. auf europäischer Ebene.

Demarchie: Wahl durch Losverfahren

Das Losverfahren lässt sich auch auf unser Problem anwenden. Ein **deterministisches Wahlverfahren** ist, wie zuvor, eine Funktion

$$V \;:\; \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} \;:\; (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$$

Wir wollen dies nun randomisieren, also ein Zufallselement einführen. Wir betrachten $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ als Lostopf. Die Wahrscheinlichkeiten der Ziehung seien gleichverteilt, also $\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}(2) = \dots = \mathbf{P}(n) = 1/n$.

Die **Wahl durch Losverfahren** beschreiben wir durch die Funktion

$$D_* \;:\; \mathbb{P}^n \times \Omega \to \mathbb{P} \;:\; (P_1, P_2, \dots, P_n; k) \mapsto P_k$$

Praktisch bedeutet das: Jeder Wähler $i \in I$ gibt sein Votum $P_i \in \mathbb{P}$ ab. Anschließend wird ein Element $k \in \Omega$ ausgelost, das Wahlergebnis ist dann das Votum P_k. Das ist nicht diktatorisch, denn $k \in I$ ist zufällig.

Ist eine andere Verteilung gewünscht, so geben wir $\mathbf{P}(i) = \nu(i)$ vor; wie zuvor sei $\nu : I \to [0, 1]$ eine Gewichtung mit $\nu(1) + \dots + \nu(n) = 1$. Hierzu unterteilen wir das Intervall $[0, 1]$ in n Intervalle $I_1, I_2, \dots, I_n$ der Länge $\operatorname{vol}_1(I_i) = \nu(i)$ und wählen ein Los $\omega \in [0, 1]$ zufällig gleichverteilt.

Demarchie: Wahl durch Losverfahren

Wahl durch Losverfahren wirkt zunächst überraschend, gar irrational. Warum sollten wir den Zufall entscheiden lassen, wenn wir das Problem genauso gut auch mit einem deterministischen Verfahren lösen können? Deterministisch können wir es eben nicht, wie wir noch sehen werden!

Aufgabe: Welche Eigenschaften hat die Wahl durch Losverfahren D_ν? Gilt Einhelligkeit? In welcher Form gelten Monotonie und Symmetrie?

Lösung: Wir nutzen wie üblich die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zu $a, b \in A$ erhalten wir im Ergebnis $a \succcurlyeq b$ mit der Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(a \succcurlyeq b) = \nu\{\, i \mid a \succcurlyeq_i b \,\}$. Entsprechend gilt $\mathbf{P}(a \succ b) = \nu\{\, i \mid a \succ_i b \,\}$.

Einhelligkeit: Aus $a \succ_i b$ für alle $i \in I$ folgt $\mathbf{P}(a \succ b) = 1$, das heißt: Mit Wahrscheinlichkeit 100% erhalten wir im Wahlergebnis $a \succ b$.

Monotonie: Aus $\{\, i \mid a \succcurlyeq_i b \,\} \subseteq \{\, i \mid a \succcurlyeq'_i b \,\}$ folgt $\mathbf{P}(a \succcurlyeq b) \le \mathbf{P}(a \succcurlyeq' b)$. Gilt zudem $\{\, i \mid b \succcurlyeq_i a \,\} \supseteq \{\, i \mid b \succcurlyeq'_i a \,\}$, so folgt $\mathbf{P}(a \succ b) \le \mathbf{P}(a \succ' b)$.

Symmetrie: Bei der Gleichverteilung $\nu = (1/n, 1/n, \dots, 1/n)$ sind im Losverfahren D_ν alle Wahrscheinlichkeiten invariant unter Umordnung.

Die **Diktatur** D_k entspricht $\nu(k) = 1$ und $\nu(i) = 0$ für alle $i \ne k$.

Demarchie: Wahl durch Losverfahren

Interpretation? Bei drei oder mehr Alternativen können die Präferenzen $(P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{P}^n$ extrem kompliziert sein, kontrovers und divergent. Das Wahlverfahren V soll hieraus eine einfache Antwort extrahieren. Durch Randomisierung können wir gezielt ein Zufallselement einführen. Das erscheint zunächst ungewöhnlich, erweist sich aber als vorteilhaft:

Satz N2D: nicht-deterministische Wahl durch Losverfahren

Die Wahl durch Losverfahren erfüllt (im Sinne der Wahrscheinlichkeit) all unsere Forderungen: Einhelligkeit, Monotonie und Symmetrie.

Es ist immer gut, die Beschränkungen und Möglichkeiten zu kennen! Im deterministischen Modell haben wir für jedes Paar $a, b \in A$ nur die 0–1–Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}(a \succ b), \mathbf{P}(a \approx b), \mathbf{P}(b \succ a) \in \{0, 1\}$.

Randomisierung $\mathbf{P}(a \succ b), \mathbf{P}(a \approx b), \mathbf{P}(b \succ a) \in [0, 1]$ ist flexibler und liefert weitere Verfahren, eventuell bessere. Auch sie sind nicht perfekt, da nicht deterministisch, aber sie bieten praktisch brauchbare Lösungen.

Wir suchen daher im Folgenden nach deterministischen Wahlverfahren. Überraschung: Die Axiome UNA, IIA, SYM sind dann unvereinbar!

Nicolas de Condorcet (1743–1794)

Nicolas de Condorcet war ein französischer Philosoph, Mathematiker und Politiker der Aufklärung. Er studierte Mathematik bei d'Alembert und promovierte bereits mit 16 Jahren. Sein berühmtes Paradox beschrieb er 1785 in einer Arbeit über Wahrscheinlichkeit und Abstimmungen. Es geriet in Vergessenheit, wurde mehrfach wiederentdeckt und wieder vergessen; dauerhafte Anerkennung verschaffte ihm erst Kenneth Arrow 1951, indem er seinen allgemeinen Unmöglichkeitssatz daraus ableitete.

Einige Werke: 1765: Du calcul intégral. 1767: Du problème des trois corps. 1768: Essai d'analyse. 1776: Fragments sur la liberté de la presse. 1778: Sur quelques séries infinies. 1780: Essai sur la théorie des comètes. 1781: Réflexions sur l'esclavage des nègres. 1784: Mémoire sur le calcul des probabilités. 1789: Vie de Voltaire. 1790: Sur l'admission des femmes au droit de cité.

Nicolas de Condorcet (1743–1794)

Condorcet schließt sich 1789 der Französischen Revolution an und vertritt die Sache der Liberalen. Im Jahr 1790 werden die Menschen- und Bürgerrechte verkündet; Condorcet tritt dafür ein, diese auch Frauen zu gewähren, er streitet für die Einführung des Frauenwahlrechts, die Gleichberechtigung der Schwarzen und die Abschaffung der Sklaverei.

Condorcet wurde 1791 als Pariser Abgeordneter in die Gesetzgebende Nationalversammlung gewählt, 1792 wurde er deren Präsident. In dieser Funktion entwarf er Pläne für das Bildungssystem (*l'instruction publique*). Bildungsunterschiede seien die Hauptursache der Tyrannei. Daher trat Condorcet schon früh für allgemein zugängliche Bildungseinrichtungen ein, die unabhängig von staatlichem Einfluss sein sollten.

Im *Comité de Constitution* arbeitet Condorcet mit an einer Verfassung. 1793 kommen die Jacobiner an die Macht und schlagen eine gänzlich andere Verfassung vor. Condorcet kritisiert diese und wird daraufhin wegen Verrats verurteilt. Er versteckt sich 8 Monate lang, im März 1794 wird er verhaftet und stirbt unter unklaren Umständen, vermutlich Suizid durch Gift. (`fr.wikipedia.org/wiki/Nicolas_de_Condorcet`)

Das Paradox von Condorcet

Können wir paarweise Stimmzählung auf drei Alternativen anwenden? Wir setzen $x \succcurlyeq y$ genau dann, wenn $\sharp\{\, i \mid x \succcurlyeq_i y \,\} \ge \sharp\{\, i \mid y \succcurlyeq_i x \,\}$.

Aufgabe: Ist dies ein Wahlverfahren $C : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$? Analysieren Sie konkrete Beispiele, wie etwa folgende Abstimmung:

40% :	a	$\succ$	b	$\succ$	c
35% :	b	$\succ$	c	$\succ$	a
25% :	c	$\succ$	a	$\succ$	b

Beispiel: 65% sagen $a \succ b$, 75% sagen $b \succ c$, 60% sagen $c \succ a$. Sie kennen das von *Schere-Stein-Papier*. Das Wahlergebnis ist in diesem (und ähnlichen) Fällen nicht transitiv und daher unbrauchbar.

Satz N3A: Nicolas de Condorcet 1785

Für $\sharp A \ge 3$ ist die paarweise Stimmzählung kein Wahlverfahren $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$. Dies ist ein Wahlverfahren $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ bei genau zwei Alternativen, $\sharp A = 2$.

Aufgabe: Entwickeln Sie Wahlverfahren für drei und mehr Alternativen! Welche guten Eigenschaften können Sie erreichen? Erreichen Sie alle?

Das Paradox von Condorcet

In vielen praktischen Anwendungen gibt jeder Wähler nur seinen Favoriten an, also den individuell Erstplatzierten. Daraus wird der Gesamterstplatzierte ermittelt. Dies entspricht einer Funktion

$$v \;:\; A^n \to A \;:\; (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x.$$

Beispiel: Wir wählen die Alternative mit den meisten Stimmen.

Aufgabe: Ist das besser? Wo liegt das Problem bei diesem Verfahren?

Lösung: Wenn jeder ehrlich abstimmt, dann gewinnt Kandidat a.

Die Präferenzen sind oft vor der Wahl bekannt, etwa durch Umfragen. Wähler der zweiten Gruppe erkennen: Wenn sie ehrlich für b stimmen, so gewinnt a. Wenn sie strategisch für c stimmen, so gewinnt c; aus ihrer Sicht eine Verbesserung. Das Wahlverfahren zwingt sie, zu spekulieren und unehrlich abzustimmen. Diese **Manipulierbarkeit** ist gefährlich.

Wähler der ersten Gruppe könnten dies vorausahnen, und schon bei den Umfragen unehrlich b als Favorit angeben. Diese denken, dass jene denken, ... es entsteht ein heilloses Durcheinander. Unehrlichkeit und Misstrauen sind keine tragfähige Grundlage für demokratische Wahlen.

Die Qual der Wahl des Wahlverfahrens

Szenario: Schülervertreter aus J1 und J2 wählen ihre beliebtesten Lehrer aus Astronomie (A), Biologie (B) und Chemie (C). Dazu nennt jede Schüler:in ihre Lieblingsreihenfolge, hier von oben nach unten:

Votum J1

1	2	3	4	5	6	7
C	C	A	A	B	B	C
A	A	B	B	C	C	B
B	B	C	C	A	A	A

Ergebnis

Bor	Maj	Med	Duell	Dikt	Konst

Votum J2

1	2	3	4	5	6	7
A	A	B	B	B	B	C
C	C	A	C	C	C	B
B	B	C	A	A	A	A

Ergebnis

Bor	Maj	Med	Duell	Dikt	Konst

Alternatives Szenario: Die Arrow–Schule (A), die Borda–Schule (B) und die Cusanus–Schule (C) messen sich in sieben Sportarten $1, \dots, 7$.

Die Qual der Wahl des Wahlverfahrens

Borda–Verfahren (Bor): Jeder erste Platz zählt 3 Punkte, jeder zweite 2 Punkte, jeder dritte noch 1 Punkt. Die Punkte werden addiert und die Summen sortiert. Dieses Verfahren bezeichnen wir mit $B(3,2,1)$.

Mehrheitswahl (Maj): Es zählen nur die ersten Plätze, die Alternative mit den meisten ersten Plätzen ist die beste, die mit den zweitmeisten ersten Plätzen die nächstbeste, usw. Dies entspricht $B(1,0,0)$.

Medaillenspiegel (Med): Die Alternative mit den meisten ersten Plätzen ist die beste, haben zwei Alternativen gleich viele erste Plätze, dann zählen die zweiten Plätze, bei Gleichstand die dritten Plätze. Ebenso werden die anderen Plätze bestimmt. Dies entspricht hier $B(100,10,1)$.

Duell: Zuerst treten A und B im Duell an, es gilt die Mehrheitswahl. Der Gewinner tritt gegen C an. Gewinnt er hier wieder, dann gibt es noch ein Duell um Platz 2 und 3. (Man müsste zudem noch festlegen, was bei Gleichstand passieren soll; das kann uns hier aber nicht passieren).

Diktatur: Wir bestimmen Schüler 2 zum Diktator (Schülersprecher), bzw. die zweite Sportart (Handball). In obiger Notation ist dies D_2.

Konstanz: Das Gesamtergebnis ist konstant immer A vor B vor C.

Aufgabe: (1) Werten Sie jeweils die Ergebnisse von J1 bzw. J2 aus.

(2) Finden Sie für jedes Verfahren ein verletztes Axiom UNA, IIA, ~~DIC~~. Diese Eigenschaften dienen uns als theoretische Hilfsmittel; sie sind keine willkürlichen Idealisierungen, sondern dringende Notwendigkeiten! Ist Monotonie MON nicht erfüllt, so ist das Wahlverfahren manipulierbar:

(3) Der Schulleiter des Cusanus–Gymnasiums möchte die Wahl des beliebtesten Lehrers in J1 beeinflussen. Dazu wählt er das Duell-Verfahren. Wie muss er die Reihenfolge der Duelle wählen, damit der Astronomie-Lehrer als beliebtester Lehrer gewählt wird?

(4) Die beste Schule soll im zweiten Jahr J2 mit einem modifizierten Borda–Verfahren $B(p, q, r)$ ermittelt werden. Dabei bekommt jeder erste Platz p Punkte, jeder zweite q Punkte und jeder dritte Platz r Punkte. Wie setzt der Schulleiter $p > q > r$, damit seine Schule gewinnt?

(5) Zur Vereinfachung sind die individuellen Präferenzen strikt, aber die Ergebnispräferenz muss nicht strikt sein, da ein Gleichstand manchmal unvermeidbar ist. Wer möchte, kann sich überlegen, wie man diese Verfahren sinnvoll auf evtl. nicht-strikte Präferenzen erweitern kann.

	UNA	IIA	MON	~~DIC~~	SYM
Bor					
Maj					
Med					
Duell					
Dikt					
Konst					

Jedes dieser Verfahren wurde kritisiert, weil es gewisse Anforderungen verletzt. Dutzende weitere Wahlverfahren wurden vorgeschlagen, doch niemand fand ein perfektes Wahlverfahren. Arrows Forschungsauftrag war 1948, endlich ein solches Verfahren zu entwickeln; seine Lösung war vollkommen überraschend: Ein perfektes Verfahren existiert nicht!

That was it! It took about five days to write in September 1948.
When every attempt failed I thought of the impossibility theorem.
Kenneth Arrow, zitiert nach Sylvia Nasar, *A Beautiful Mind*

Arrows Satz vom Diktator

Bei nur zwei Alternativen, also $\sharp A = 2$, erfüllt die Stimmzählung alle drei wünschenswerten Eigenschaften: Einhelligkeit, Monotonie, Symmetrie.

Wir wünschen ein solches Wahlverfahren für drei und mehr Alternativen. Das Paradox von Condorcet zeigt, dass der naive Versuch fehlschlägt.

Auch die Verfahren der vorigen Übungsaufgabe lösen das Problem nicht: Mindestens eines unserer Axiome UNA, IIA, ~~DIC~~ wird immer verletzt.

Schlimmer noch: Es gibt nachweislich überhaupt kein solches Verfahren! Kenneth Arrow bewies 1948 folgenden Satz, veröffentlicht 1951:

Satz N3B: Satz vom Diktator, Kenneth Arrow 1951

Die Menge A bestehe aus drei oder mehr Alternativen. Erfüllt $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ die Forderungen der Einhelligkeit und Monotonie, so ist V diktatorisch.

Wir wünschen zwei harmlos anmutende Eigenschaften UNA und MON, doch bereits daraus folgt zwingend die unerwünschte Eigenschaft DIC. Anders gesagt, die drei Axiome UNA, IIA, ~~DIC~~ sind unvereinbar. Arrows Beweis ist genial-einfach und einfach-genial, elementar aber nicht trivial.

Arrows Satz vom Diktator

Statt Monotonie (MON) genügt es sogar, nur das deutlich schwächere Axiom der Unabhängigkeit von dritten Alternativen (IIA) zu fordern. Schwächere Voraussetzungen bedeuten einen stärkeren Satz! Wir formulieren und beweisen dies anschließend in Satz N3E.

Die Monotoniebedingung MON mag zuerst unnötig streng erscheinen. Wir verlangen mit UNA und IIA zwei noch harmlosere Eigenschaften, doch auch daraus folgt zwingend die unerwünschte Eigenschaft DIC. Unsere drei Wünsche UNA und IIA und ~~DIC~~ sind unvereinbar.

Dieses negative Ergebnis ist höchst überraschend, gar schockierend. In den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften schlägt es hohe Wellen. Arrow hat damit eine neue Methode und Forschungsrichtung begründet, dafür wurde er vielfach geehrt, sogar mit dem Wirtschaftsnobelpreis.

Zugegeben: Arrows Unmöglichkeitstheorem klingt zunächst unglaublich. Gute Nachricht: Wir müssen es nicht *glauben*, wir können es *beweisen*. Der Beweis ist nicht schwer; dank unserer gründlichen Vorbereitung haben wir bereits alle nötigen Begriffe und Werkzeuge zur Hand.

Entscheidende und souveräne Teilmengen

Definition N3C: entscheidende und souveräne Teilmengen

Vorgelegt sei ein Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$.

Eine Teilmenge $J \subseteq I$ heißt **halbentscheidend** für das Paar (x, y), falls für jedes Votum gilt: Aus $x \succ_J y$ und $y \succ_{I \smallsetminus J} x$ folgt $x \succ y$.

$$\begin{array}{rccc} \hline J: & x & \succ & y \\ I \smallsetminus J: & y & \succ & x \\ \hline & x & \succ & y \end{array}$$

Stärker nennen wir J **(ganz) entscheidend** für das Paar (x, y), falls für jedes Votum gilt: Allein aus $x \succ_J y$ folgt $x \succ y$.

$$\begin{array}{rccc} \hline J: & x & \succ & y \\ I \smallsetminus J: & y & , & x \\ \hline & x & \succ & y \end{array}$$

Gilt dies für jedes Paar $(x, y) \in A \times A$, so heißt J **souverän** in V.

Entscheidende und souveräne Teilmengen

Halbentscheidend zu sein fragt nur nach der direkten Konfrontation; entscheidend heißt, das Votum der Restmenge $I \smallsetminus J$ ist unerheblich.

Mit Monotonie (MON) folgt: halbentscheidend impliziert entscheidend. Hierzu genügt bereits Unabhängigkeit (IIA), wie folgendes Lemma zeigt.

Beispiel: Die leere Menge $\emptyset \subseteq I$ ist niemals souverän in V, da $\sharp A \ge 2$. Genau dann ist I souverän in V, wenn Einhelligkeit (UNA) gilt.

In der Diktatur $D_k : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ ist eine Menge $J \subseteq I$ souverän gdw $k \in J$. Hier ist also die Menge $J = \{k\}$ die kleinste souveräne Teilmenge.

Bei nur zwei Alternativen haben wir zudem die Wahlverfahren $M_\mu^{\alpha,\beta}$. In der Mehrheitswahl $M_\mu : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ ist $J \subseteq I$ souverän gdw $\mu(J) > \frac{1}{2}$. Im Quorum $M_\mu^{\alpha,\beta}$ setzen wir $\delta := \mu(J) - \mu(I \smallsetminus J) = 2\mu(J) - 1 \in [-1, 1]$: Dann ist J entscheidend für (a, b) gdw $\delta > \alpha$, und für (b, a) gdw $-\delta < \beta$.

Im Allgemeinen gibt es mehrere (minimale) souveräne Teilmengen. Denken Sie zum Beispiel an mögliche Koalitionen in einem Parlament.

Halbentscheidend impliziert souverän.

Lemma N3D: Halbentscheidend impliziert souverän.

Die Menge A bestehe aus drei oder mehr Alternativen, und das Wahlverfahren V erfülle Einhelligkeit (UNA) und Unabhängigkeit (IIA). Ist $J \subseteq I$ halbentscheidend für ein Paar (x, y), so ist J souverän in V.

(1) Die Teilmenge J ist entscheidend für (x, z) mit $z \in A \smallsetminus \{x, y\}$:

$$
\begin{array}{rccc}
\hline
J: & x & \succ & z \\
I \smallsetminus J: & z & , & x \\
\hline
 & x & \succ & z
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\Longleftarrow \\
\Longleftarrow \\
\underset{\text{IIA}}{\Longleftarrow}
\end{array}
\quad
\begin{array}{rccccc}
\hline
J: & x & \succ & y & \succ & z \\
I \smallsetminus J: & y & \succ & z & , & x \\
\hline
 & x & \underset{\text{HE}}{\succ} & y & \underset{\text{UNA}}{\succ} & z
\end{array}
$$

(2) Ebenso ist J ist entscheidend für (z, y):

$$
\begin{array}{rccc}
\hline
J: & z & \succ & y \\
I \smallsetminus J: & y & , & z \\
\hline
 & z & \succ & y
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\Longleftarrow \\
\Longleftarrow \\
\underset{\text{IIA}}{\Longleftarrow}
\end{array}
\quad
\begin{array}{rccccc}
\hline
J: & z & \succ & x & \succ & y \\
I \smallsetminus J: & y & , & z & \succ & x \\
\hline
 & z & \underset{\text{UNA}}{\succ} & x & \underset{\text{HE}}{\succ} & y
\end{array}
$$

So können wir das Paar (x, y) in jedes beliebige Paar tauschen. $\boxed{\text{QED}}$

Halbentscheidend impliziert souverän.

Wir rechnen mit Präferenzen gemäß der vereinbarten Rechenregeln!

Ausführlich: (1) Wir untersuchen die linke Konstellation zwischen x, z. Hierzu fügen wir y geschickt ein wie rechts gezeigt. (1a) Es folgt $x \succ y$, denn J ist halbentscheidend für (x, y). (1b) Zudem gilt $y \succ z$ dank UNA. (1c) Rechts folgt $x \succ z$ dank Transitivität, also auch links dank IIA.

Ebenso: (2) Wir untersuchen die linke Konstellation zwischen z, y. Hierzu fügen wir x geschickt ein wie rechts gezeigt. (2a) Es folgt $x \succ y$, denn J ist halbentscheidend für (x, y). (2b) Zudem gilt $z \succ x$ dank UNA. (2c) Rechts folgt $z \succ y$ dank Transitivität, also auch links dank IIA.

Für das Lemma ist die Menge I beliebig, endlich oder unendlich. Den unendlichen Fall können wir später noch genauer untersuchen. Das führt zum Begriff des Ultrafilters und des „unsichtbaren Diktators“.

Für den folgenden Beweis setzen wir die Menge I als endlich voraus. Sei $J \subseteq I$ souverän, also entscheidend für jedes Paar $(x, y) \in A \times A$. Ist auch $J \smallsetminus \{j\}$ souverän, so können wir J verkleinern. Nach endlich vielen Schritten erhalten wir schließlich eine minimale souveräne Menge.

Beweis des Satzes vom Diktator

Satz N3E: Satz vom Diktator, Kenneth Arrow 1951

Die Menge A bestehe aus drei oder mehr Alternativen. Erfüllt irgendein Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ die Forderungen der Einhelligkeit (UNA) und der Unabhängigkeit von dritten Alternativen (IIA), so ist V diktatorisch.

Sei $J \subseteq I$ souverän und minimal. Wir wissen $J \neq \emptyset$. Sei also $k \in J$.
Wir untersuchen folgende Abstimmung (à la Condorcet):

$$\begin{array}{rccccc}
\hline
k: & a & \succ & x & \succ & b \\
J \setminus k: & b & \succ & a & \succ & x \\
I \setminus J: & x & \succ & b & \succ & a \\
\hline
 & a & \succ & x & \succcurlyeq & b
\end{array}$$

Zunächst folgt $a \succ x$, denn J ist souverän. Kann zudem $b \succ x$ gelten?
Nein, dann wäre $J \setminus k$ souverän (Lemma N3D) und J nicht minimal.
Dank Linearität folgt somit $x \succcurlyeq b$. Dank Transitivität folgt $a \succ b$.

Nur das Individuum k wertet $a \succ b$, alle anderen werten $b \succ a$.
Somit ist k souverän (erneut dank Lemma N3D). $\boxed{\text{QED}}$

Beweis des Satzes vom Diktator

Benutzt haben wir tatsächlich nur die Voraussetzungen von Satz N3E:

- Präferenzen $\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$ sind Relationen auf A, transitiv und linear.
  Beides sind grundlegende Forderungen und werden hier benötigt.
- Das Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ erfüllt die Forderungen UNA und IIA, also Einhelligkeit und Unabhängigkeit von dritten Alternativen.
- Es gibt mindestens drei Alternativen, also $\sharp A \geq 3$.
  Daraus folgt Lemma N3D: Halbentscheidend impliziert souverän.
- Die Menge I der Individuen ist endlich, also $n := \sharp I < \infty$.
  Demnach gibt es unter den souveränen Teilmengen eine minimale.

Allein aus diesen geringen Forderungen folgt Arrows Schlussfolgerung:
Das Wahlverfahren V ist diktatorisch, d.h. es existiert ein Diktator $k \in I$.

Nochmal: Dieses negative Ergebnis ist überraschend, gar schockierend.
Gute Nachricht: Wir müssen es nicht *glauben*, wir haben es *bewiesen*.
Der Beweis ist nicht schwer; dank unserer gründlichen Vorbereitung haben wir alle nötigen Begriffe und präzise Werkzeuge zur Hand.

Zusammenfassung

Charlie Chaplin (1889–1977), *The Great Dictator* (1940), `youtu.be/isLNLpxpndA&t=133`

Zusammenfassung

Zum krönenden Abschluss möchte ich Arrows Satz zusammenfassen und dabei umformulieren, logisch äquivalent aber sprachlich griffiger.

Gegeben sei die Menge $I = \{1, 2, \dots, n\}$ der Individuen/Kriterien, $n \ge 2$, und die Menge $A = \{a, b, c, \dots\}$ der Alternativen/Kandidaten, $\sharp A \ge 2$.

Eine **Präferenz** P ist eine transitive und lineare Relation auf A. Sei $\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$ die Menge aller Präferenzen auf A.

Ein **Wahlverfahren** ist eine Funktion $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$. Das bedeutet, jeder möglichen Konstellation individueller Präferenzen $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{P}$ wird als Ergebnis eine Präferenz $P \in \mathbb{P}$ zugeordnet.

Es gibt sehr viele Wahlverfahren; wir wollen die guten hervorheben: Wir nennen V **perfekt**, wenn die Zuordnung $(P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P$ einhellig und monoton und nicht-diktatorisch ist.

Korollar N3F: Arrows Un/Möglichkeitssatz

Für $\sharp A = 2$ gibt es (viele) perfekte Wahlverfahren.
Für $\sharp A \ge 3$ gibt es kein perfektes Wahlverfahren.

Interpretation

Interpretation? Bei drei oder mehr Alternativen können die Präferenzen $(P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{P}^n$ extrem kompliziert sein, kontrovers und divergent. Das Wahlverfahren V soll hieraus eine einfache Antwort extrahieren; das ist im Allgemeinen unmöglich, oder eben nur zum Preis einer Diktatur.

Manche möchten das vielleicht einfach nicht wahr haben,
aber es ist besser die Grenzen von Wahlverfahren zu kennen.
Nur in einfachen, klaren Fällen können wir ein Ergebnis ablesen,
so zum Beispiel im (extrem seltenen) Fall vollständiger Einhelligkeit.

Das Wahlverfahren soll allgemein gelten, also auch aus extremen, heterogenen, widersprüchlichen Voten eine gemeinsame Präferenz extrahieren. Die Gesellschaft kann extrem uneinig sein, gar zerstritten, und das Wahlverfahren soll es irgendwie richten. Das ist zu viel verlangt!

Die Sehnsucht nach einfachen Antworten und klaren Autoritäten ist zwar weit verbreitet, aber einer komplexen Sachlage meist nicht angemessen. Konsens oder Kompromiss muss die Gesellschaft selbst herstellen; diese mühsame Arbeit kann ihr keine „magische Formel“ abnehmen.

Literatur

Arrows bahnbrechende Arbeit hat ein Forschungsgebiet begründet. Hierzu existiert eine umfangreiche Literatur. Eine winzige Auswahl:

- K.J. Arrow: *Social choice and individual values*, John Wiley & Sons, New York 1951. (Ausarbeitung seiner Dissertation in Buchform)
- R.D. Luce, H. Raiffa: *Games and decisions*, John Wiley & Sons, New York 1957; Dover Publications, New York 1989. (Kapitel 14)
- D. Black: *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge University Press, 1958. (mit Ausführungen zur Geschichte)
- E. Maskin, A. Sen: *The Arrow Impossibility Theorem*, Columbia University Press, New York 2014. (Vorlesungen zu Arrows Ehren)
- J. Lützen: *History of Arrow's impossibility theorem*, Hist. Math. 46 (2019), 56–87. `doi.org/10.1016/j.hm.2018.11.001`
- Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften `www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1972`
- S. Nasar: *A beautiful mind*, Faber & Faber, London 1998. (Kapitel 12 handelt von der RAND Corporation und Arrows Arbeit.)

Was ist und wozu nützt die axiomatische Methode?

Arrows grundlegende Arbeiten zu Wahlverfahren, insbesondere sein Unmöglichkeitssatz, sind eine bemerkenswert erfolgreiche Anwendung mathematischen Denkens in den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften.

Die allgemeine Vorgehensweise ist genial-einfach und kunstvoll-elegant: Wir trennen sorgsam die Formulierung der Ziele (Forderungen, Axiome) von der Beschreibung möglicher Lösungen (Konstruktionen, Beispiele).

Diese Trennung hat viele Vorzüge: Sie betont, was wir eigentlich *wollen*, gegenüber den vielen denkbaren Verfahren, es praktisch *auszuführen*. Manchmal gibt es mehrere Verfahren, dann lohnt es, sie zu vergleichen. Manchmal gibt es gar kein Verfahren, dann lohnt es, dies zu erkennen.

Die **axiomatische Methode** bewährt sich in vielen Gebieten! Speziell Mathematik und Informatik nutzen diese Trennung von **Zielsetzung** – Was soll erreicht werden? und **Verfahren** – Wie wird es implementiert?

Der Weg ist das Ziel? So hört man es oft von planlosen Irrwanderern. Häufig ist das Ziel das Ziel, und der Weg will sorgsam gewählt werden. In Arrows Satz ist das ersehnte Ziel klar, aber es gibt gar keinen Weg!

Was ist und wozu nützt die axiomatische Methode?

Wie kam Arrow auf seine geniale Lösung? Als Student interessierte er sich für mathematische Logik. Durch einen glücklichen Zufall hörte er Vorlesungen des Mathematikers und Logikers Alfred Tarski (1901-1983). Der Statistiker und Ökonom Harold Hotelling (1895–1973) ermutigte Arrow zur Promotion in den noch jungen Wirtschaftswissenschaften.

So kamen zwei wesentliche Zutaten zusammen: eine solide Ausbildung in den (mathematischen) Grundlagen und eine vielversprechende Frage in einem (ökonomischen) Anwendungsgebiet. Der Rest ist Geschichte.

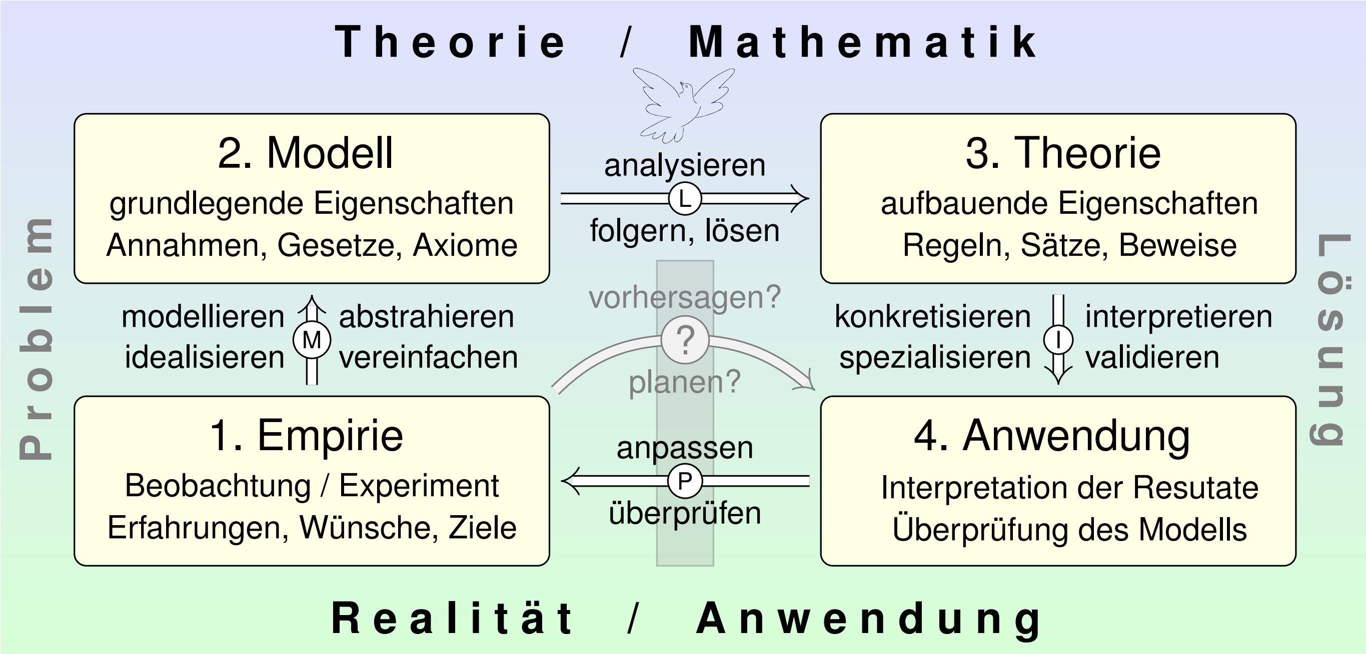
Es ist und bleibt erstaunlich: Mathematik ist wunderbar anwendbar! Das gilt in der Ökonomie ebenso wie in allen Wissenschaften.

The enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious and there is no rational explanation for it. […] The miracle of the appropriateness of the language of mathematics […] is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research.

(Eugene Wigner, 1902–1995)

Wozu dient Mathematik?

Alles Leben ist Problemlösen. (Karl Popper)



Mathematik untersucht sowohl abstrakte Strukturen als auch konkrete Anwendungen. Dies sind keine Gegensätze, sondern sie ergänzen sich!

Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie. (Immanuel Kant)

Varianten zur Wiederholung und Vertiefung

Untersuchen Sie folgende Variante zur Wiederholung und Vertiefung:

Aufgabe: Das Ergebnis darf weiter in $\mathbb{P}$ liegen, da ein Unentschieden manchmal unvermeidbar ist. Aber bei der Stimmabgabe erlauben wir nur strikte Präferenzen $\mathbb{S} \subsetneq \mathbb{P}$. Das Wahlverfahren $V : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}$ muss also nur auf einer kleineren Menge definiert werden, das ist etwas einfacher.

Vermeiden wir so Arrows Unmöglichkeitssatz? Gibt es Wahlverfahren $V : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}$, die einhellig und monoton sind, aber nicht diktatorisch? Gehen Sie alle Argumente sorgfältig durch und übertragen Sie sie.

Lösung: Bitte versuchen Sie es selbst, Sie können dabei viel lernen!

Die Definition eines Diktators gilt weiterhin, ebenso Einhelligkeit, Monotonie und IIA. Für entscheidende Teilmengen und den Beweis des Satzes haben wir nur strikte Präferenzen genutzt, alle Argumente gelten also wörtlich genauso, und der Satz bleibt gültig für eingeschränkte Wahlverfahren $V : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}$. Das gleiche gilt dann natürlich auch für $V : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}$.

Aufgabe: Arrows Satz wird oft ungenau, gar falsch dargestellt. Prüfen Sie den Blog `blog.zeit.de/mathe/allgemein/mathe-wahl-diktator`.

Rückblick auf konkrete Beispiele

Abstraktion strukturiert und vereinfacht! Beispiele illustrieren.

Beispiel: Eine vierköpfige Familie $I = \{1, 2, 3, 4\}$ plant ihren Urlaub. Zur Wahl stehen $A = \{\ a =$ Venedig, $\ b =$ London, $\ c =$ Paris $\}$.

$$\begin{array}{lccccc}
1: & b & \succ & c & \succ & a \\
2: & a & \succ & b & \approx & c \\
3: & a & \succ & c & \succ & b \\
4: & c & \succ & b & \succ & a
\end{array}$$

Beispiel: $A = \{a, b, c, \dots\}$ sind Geschäftsstrategien, jede Aktionär:in i hat ihre eigene Präferenz P_i. Wir suchen ein Abstimmungsergebnis P.

Beispiel: Berufung auf eine Professur, Kandidat:innen $A = \{a, b, c, \dots\}$. Die Kriterien sind Forschung, Lehre, Drittmittel, Administration.

Beispiel: $A = \{a, b, c, \dots\}$ sind Universitäten, P_i ist das Ranking nach Kriterium i. Gesucht ist ein zusammenfassendes Ranking P aller Unis.

Beispiel: $A = \{a, b, c, \dots\}$ sind die Piloten der Formel Eins, P_i ist die Zielreihenfolge beim Rennen i. Gesucht ist ein Gesamtclassement P.

Rückblick auf konkrete Beispiele

Jetzt verstehen Sie besser, warum Abstimmungen kompliziert sind. Schon für das Votum über den skizzierten Familienurlaub gibt es die astronomisch große Zahl von $13^{13^4} = 13^{28561} \approx 10^{31815}$ Wahlverfahren. Die meisten davon sind kaum brauchbar, aber es sind Wahlverfahren.

Die Zeit drängt, der Urlaub naht, welche Entscheidung ist „die richtige“? Wir brauchen mindestens Platz 1, und für den Fall, dass das Wunschziel ausgebucht ist, müssen wir auch Platz 2 und 3 bestimmen. Wir suchen also „die gerecht ausgewählte“ Präferenz $P \in \mathbb{P}$, eine unter dreizehn.

Wir könnten die Alternative(n) wählen, die am häufigsten Platz 1 belegt, das wäre hier $a =$ Venedig. Im direkten Vergleich gewinnt dann c vor b.

Wir könnten ebenso gut die Alternative(n) streichen, die am häufigsten den letzten Platz belegt, hier a und b; dann gilt $c \succ b \approx a$ im Vergleich.

Oder wir machen kurzerhand Spieler 1 zum Diktator, oder er sich selbst, dann gewinnt b vor c vor a. Oder… oder… Es gibt viele Möglichkeiten!

Das darf doch nicht wahr sein! Ist das wirklich so kompliziert? Ja, ist es. Die Präferenzen können insgesamt sehr kompliziert und divergent sein. Ein perfektes Verfahren im Sinne von Arrows Axiomen existiert nicht.

Rückblick auf konkrete Beispiele

Zur Berufung auf eine Professur erstellt die Kommission (mindestens) eine Dreierliste. Solche Verfahren dauern meist sehr lange, bei Absage des Erstplatzierten ermöglicht die Liste die Berufung des Zweit- und dann Drittplatzierten. Zur Vereinfachung dieses Beispiels nehmen wir (etwas unrealistisch) eine vollständige Reihung *aller* Kandidaten an.

Zur Illustration nehmen wir einen typischen Fall von $\sharp A = 10$ Kandidaten und $\sharp I = 15$ Kommissionsmitgliedern an. Dann gibt es $\sharp\mathbb{P} = 102\,247\,563$ Präferenzen und somit $\sharp\mathbb{P}^{\sharp\mathbb{P}^{\sharp I}} \approx 10^{10^{121}}$ Wahlverfahren. Diese Zahl hat 10^{121} Dezimalstellen, also weit mehr Ziffern als die geschätzten 10^{80} Elementarteilchen im Universum. Das ist mehr als ein Googolplex ($10^{10^{100}}$) mit nur einem Googol (10^{100}) Ziffern. Soviel zur Zahlenmystik.

Kein Wunder, dass Berufungsverfahren kompliziert und langwierig sind. Zur Vereinfachung legt sich die Kommission auf genau drei Kriterien fest: Forschung, Lehre, Drittmittel. Das reduziert das Problem auf $\sharp I = 3$. Aber selbst $\sharp I = 2$ wäre noch zu kompliziert. Schließlich wird allein die Forschung (Anzahl der Artikel) oder die Drittmittel (Summe in Euro) zum entscheidenden Kriterium bestimmt. Die Diktatur ist am einfachsten.

Rückblick auf konkrete Beispiele

Arrows Satz ist ein fundamentales Hindernis: Für ein funktionierendes Wahlverfahren müssen wir eine der Forderungen opfern. Meist ist dies Monotonie (MON) oder die Unabhängigkeit von dritten Alternativen (IIA).

Das erklärt, warum „dritte Parteien“ das Ergebnis massiv beeinflussen können, auch wenn sie selbst keinerlei Aussicht haben zu gewinnen.

Natürlich werden dennoch Wahlverfahren verwendet, etwa für das Gesamtclassement der Formel Eins oder das Ranking von Universitäten. Dabei kann es nie ganz gerecht zugehen im Sinne von Arrows Axiomen.

Fun fact: Könnte man zu Beginn über das Wahlverfahren abstimmen? Nun ja, es gibt mehr als drei Wahlverfahren, also… wieder unmöglich! Wie wir es auch drehen und wenden, der Unmöglichkeitssatz besteht.

Ein überraschender Lösungsvorschlag ist die Zufallsdiktatur (Satz N2D): Ein Wähler wird ausgelost und entscheidet in dieser Frage als Diktator. Das ist eines der fairsten Wahlverfahren, leider nicht deterministisch. Es scheint daher schwer zu akzeptieren. Zudem stellt die Durchführung enorme Anforderungen zum Schutz vor Manipulation und Korruption.

Nachlese: einige Fragen und Antworten

Die ernsthafte und redliche Auseinandersetzung mit einem Thema ist immer eine intellektuelle Herausforderung. Wie eingangs erklärt:

Mathematik ist nicht (nur) die sture *Anwendung* vorgefertigter Formeln, sondern (auch und vor allem) die *Entwicklung* neuer (Denk-)Werkzeuge.

Mathematik (gr. μαθηματική τέχνη) ist die *Kunst des Erkennens/Lernens*. Sie ist ein schöpferisch-kreativer Prozess zum Lösen von Problemen.

Sorgfalt und Ehrlichkeit sind mühsam, aber es lohnt sich! Was Sie einmal als richtig erkannt und nachgewiesen haben, behält seine Gültigkeit, auch nach Jahrhunderten, für immer!

Im März 2017 habe ich diesen Vortrag zur Arrows Unmöglichkeitssatz erstmalig vor Schüler:innen, geeignet angepasst an die Zielgruppe. Das war für alle anstrengend, doch sehr lohnend und mitreißend.

Anschließend gab es diverse Ideen und Fragen, die ich hier aufgreife, auch mehrere optimistische Vorschläge zur Lösung des Wahlproblems, z.B. Auswahl der besten Alternative durch Stimmzählung, siehe N304.

Nachlese: einige Fragen und Antworten

Am Ende der Vortrags waren die Schüler:innen ungläubig, ich versprach mutig 1000 Euro für ein perfektes Wahlverfahren bei drei Alternativen. Inzwischen habe ich mein Angebot gründlich überdacht – und erneuert. Ich bin weiterhin zuversichtlich, diesen Preis nie zahlen zu müssen.

Warum bin ich so sicher? Nicht nur, weil ein Nobelpreisträger behauptet, ein solches Verfahren könne es nicht geben. – Das wäre ein reines Autoritätsargument und als solches eher schwach. So beeindruckend oder einschüchternd dies auch sein mag, es ersetzt keinen Beweis.

Starke Antwort: Wir haben einen Beweis! Wir haben alle Argumente *sorgfältig* ausgeführt, jede:r von uns kann sie *selbstständig* prüfen. Es geht nicht um Autorität, sondern um nachvollziehbare Argumente. Das ist wissenschaftliche Ehrlichkeit und Transparenz, so soll es sein.

Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!
Immanuel Kant, *Was ist Aufklärung?*, 1784

Nachlese: einige Fragen und Antworten

Ein pfiffiger Vorschlag der Schüler:innen für ein Wahlverfahren: Sind sich alle Wähler einig, also $P_1 = P_2 = \dots = P_n$, dann ist dies das Ergebnis. Andernfalls wird ein festes Ergebnis P_0 vereinbart, etwa $a \succ b \succ c$.

Aufgabe: Ist dies ein Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$? Ist es perfekt?
(a) für zwei Alternativen? Ist es eines unserer obigen Wahlverfahren?
(b) für drei und mehr Alternativen? Welche Forderung schlägt fehl?

Gelten Einhelligkeit, Monotonie, Nicht-Diktatur? Ich war zuversichtlich, dass mindestens eine fehlschlägt. Oder muss ich 1000 Euro zahlen?

Lösung: (a) Ja, für zwei Alternativen ist dieses Verfahren einhellig und monoton und nicht-diktatorisch. Es ist also ein perfektes Wahlverfahren. Es entspricht $M_\mu^{\alpha,\beta}$ für geeignete Schranken $-1 < \beta \le \alpha < 1$. (Warum?)
(b) Weiter gilt Nicht-Diktatur und Monotonie, nicht jedoch Einhelligkeit:

$$\begin{array}{ccccccc}
\hline
1: & a & \succ & c & \succ & b \\
2: & c & \succ & a & \succ & b \\
\hline
 & a & \succ & b & \succ & c
\end{array}$$

In diesem Fall werten alle $c \succ b$, doch das Ergebnis besagt $b \succ c$.

Nachlese: einige Fragen und Antworten

Wir variieren das vorige Verfahren, wenden es aber nun paarweise an: Wir fixieren ein vorgegebenes Ergebnis P_0, etwa $a \succ b \succ c$. Sind sich zu zwei Alternativen alle einig, so wird P_0 entsprechend geändert.

Aufgabe: Ist dies ein Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$? Ist es perfekt?
(a) für zwei Alternativen? (b) für drei und mehr Alternativen?

Lösung: (a) Ja, für zwei Alternativen ist dieses Verfahren dasselbe wie in der vorigen Aufgabe. Es ist daher sogar ein perfektes Wahlverfahren.

(b) Ab drei Alternativen ist dies leider kein Wahlverfahren:

$$\begin{array}{cccccc}
\hline
1: & c & \succ & a & \succ & b \\
2: & b & \succ & c & \succ & a \\
\hline
\end{array}$$

Zu a, b herrscht Uneinigkeit, es gilt das vorgegebene Ergebnis $a \succ b$.
Zu b, c herrscht Uneinigkeit, es gilt das vorgegebene Ergebnis $b \succ c$.
Nur zu c, a herrscht Einigkeit, als Ergebnis setzen wir daher $c \succ a$.
Das Gesamtergebnis ist demnach nicht transitiv, sondern zirkulär!

Aufgabe: Untersuchen Sie weitere Wahlverfahren, wenn Sie möchten. Sie kennen die nötigen Begriffe, Sie halten alle Werkzeuge in Händen.

Wie un/wahrscheinlich sind paradoxe Wahlergebnisse?

Wir untersuchen nochmal genauer das Paradox von Condorcet (N303).

Dazu betrachten wir drei Alternativen, $A = \{a, b, c\}$, strikte Präferenzen, $\mathbb{S} = \mathbb{S}(A)$, und eine ungerade Anzahl n von Wählern, $I = \{1, \dots, n\}$,

Wir nehmen an, dass jeder Wähler seine Präferenz zufällig wählt, gleichverteilt auf $\mathbb{S} = \mathbb{S}(A)$ und unabhängig von den anderen.

Wenn wir paarweise Abstimmungen auswerten, kann es zu intransitiven Ergebnissen kommen, hier entweder $a > b > c > a$ oder $a < b < c < a$.

Aufgabe: Welche Wkt $f(3, n)$ haben diese intransitive Ergebnisse? Schreiben Sie zur Berechnung ein Programm, etwa in Python, und bestimmen Sie die Werte für $n = 1, 3, 5, \dots, 99$. Was fällt Ihnen auf?

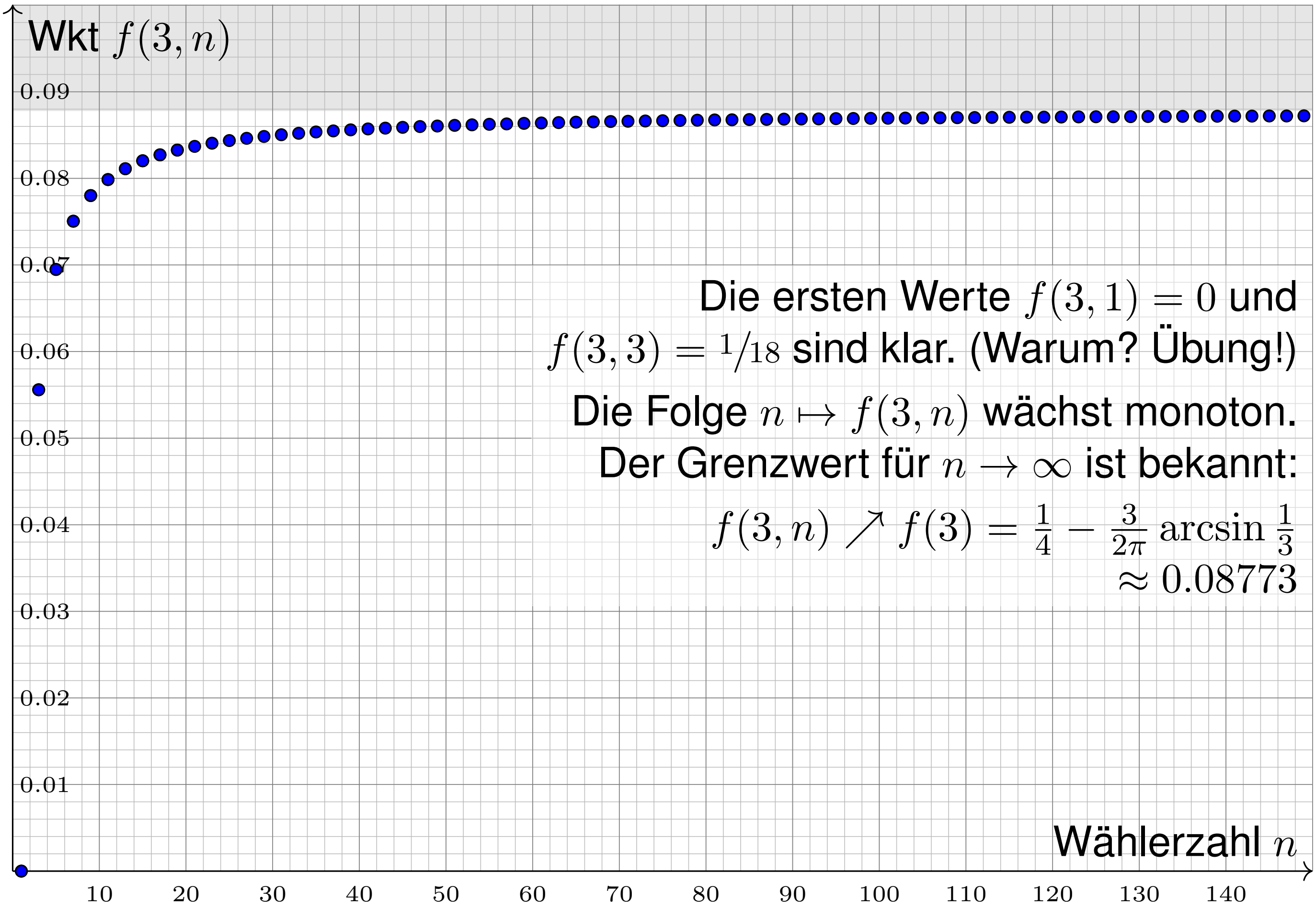
Naiv lassen wir jeden Wähler alle 6 Präferenzen durchlaufen, dabei ist der Aufwand 6^n, also exponentiell. Die Zusammenfassung zu 6 Klassen hat nur polynomiellen Aufwand $O(n^5)$, wie in der folgenden Lösung.

Übung: Können Sie dies mit Aufwand $O(n^4)$ berechnen? sogar $O(n^3)$? Dadurch könnten Sie spürbar schneller und somit weiter rechnen!

Wie un/wahrscheinlich sind paradoxe Wahlergebnisse?

Lösung: Hier eine halbwegs effiziente Implementierung in Python. Damit gelingt die Berechnung bis $n = 99$ in unter zehn Minuten.

```python
# Preferences 1:a>b>c 2:a>c>b 3:b>a>c 4:b>c>a 5:c>a>b 6:c>b>a
for n in range(1,101,2): # n=1,3,...,99 is an odd number of voters
    s = 0  # s counts the number of intransitive results a>b>c>a
    for k1 in range(0,n+1):
        for k2 in range(0,n+1-k1):
            for k3 in range(0,n+1-k1-k2):
                for k4 in range(0,n+1-k1-k2-k3):
                    for k5 in range(0,n+1-k1-k2-k3-k4):
                        k6 = n-k1-k2-k3-k4-k5
                        if( k1+k2+k5 > k3+k4+k6 and
                            k1+k3+k4 > k2+k5+k6 and
                            k4+k5+k6 > k1+k2+k3 ):
                            s += multinomial([k1,k2,k3,k4,k5,k6])
    intrans = 2*s/6**n # The factor 2 includes the twin case a<b<c<a.
    print("voters: {:3d}, transitive: {:10.8f}, intransitive: {:10.8f}".
          format( n, 1-intrans, intrans ) )
```



Die ersten Werte $f(3,1)=0$ und $f(3,3)={}^1/_{18}$ sind klar. (Warum? Übung!)

Die Folge $n \mapsto f(3,n)$ wächst monoton.

Der Grenzwert für $n \to \infty$ ist bekannt:

$$f(3,n) \nearrow f(3) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{2\pi} \arcsin \tfrac{1}{3} \approx 0.08773$$

Die Frage ist recht naheliegend und die Antwort dennoch überraschend: Wenn sich Condorcets Paradox schon nicht verhindern lässt, können wir trotzdem damit leben? Wie wahrscheinlich sind intransitive Ergebnisse?

$$f(3) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2\pi} \arcsin \frac{1}{3} \approx 0.08773\ldots$$

Bei drei Alternativen liegt die Wkt immer unter 9%. Der obige Grenzwert scheint zunächst recht mirakulös. Schließlich folgt er natürlich aus dem Grenzübergang von diskreten Summen zu kontinuierlichen Integralen. Die Rechnung scheint mir allerdings eher länglich. Wenn Sie gerne Integrale und Wahrscheinlichkeiten berechnen, probieren Sie es!

Es gibt umfangreiche Literatur zur Wahrscheinlichkeit von intransitiven Wahlergebnissen, siehe W.V. Gehrlein: *Condorcet's paradox and the Condorcet efficiency of voting rules,* Math. Japon. 45 (1997) 173–199.

Eine raffinierte Analysemethode fand G. Kalai: *A Fourier-theoretic perspective on the Condorcet paradox and Arrow's theorem,* Advances in Applied Mathematics 29 (2002) 412–426.

Parlamentssitze und negatives Stimmgewicht

Die Frage der **Fehlerwahrscheinlichkeit** von Wahlsystemen ist nicht nur von theoretischem, sondern auch von großem praktischen Interesse. Ähnliche Inkonsistenzen traten auch bei Bundestagswahlen auf, daher musste das Wahlrecht 2008 und erneut 2012 nachgebessert werden.

Arrows Unmöglichkeitssatz lässt sich hier nicht unmittelbar anwenden, denn es geht bei Parlamentswahlen um die Zuteilung von Sitzen. Das mag zunächst leicht erscheinen, doch bei genauerer Analyse zeigen sich nahezu genau dieselben Probleme wie in Arrows Satz.

M. Balinski und P. Young bewiesen 1982 folgenden Unmöglichkeitssatz: Bei fester Gesamtzahl der Sitze existiert kein Zuteilungsverfahren, das sowohl die Quotenbedingung als auch die Monotoniebedingung erfüllt. `de.wikipedia.org/wiki/Unmöglichkeitssatz_von_Balinski_und_Young`

Die erstaunliche Ursache ist, das Rundungen immer ungerecht sind. In zahlreichen US-Wahlen hat dies zu dramatischen Inkonsistenzen geführt, hinreißend erklärt von Matt Parker / Stand-up Maths: *Why it's mathematically impossible to share fair.* `youtu.be/GVhFBujPlVo`

Parlamentssitze und negatives Stimmgewicht

Hierzu ist das Fachgutachten unseres Stuttgarter Kollegen Prof. Dr. Christian Hesse überaus lehrreich, öffentlich zugänglich unter `www.isa.uni-stuttgart.de/dokumente/Bundeswahlgesetz_Endversion.pdf`. Ich zitiere aus den mathematischen Daten ab Seite 22:

Entscheidend ist zudem nicht nur, ob diese Situationen – wie oben geschehen – theoretisch konstruierbar sind, sondern mit welcher Wahrscheinlichkeit sie bei realistischen Wahlergebnissen auftreten. Diese Wahrscheinlichkeiten können mit Simulationen ermittelt werden. Das Bundesamt für Sicherheit in der Informationstechnik (BSI) hat mit einer Monte-Carlo-Methode hypothetische Wahlergebnisse simuliert, die im Umfeld der tatsächlichen Wahlausgänge der Bundestagswahlen 2005 und 2009 liegen. Es wurde ein Simulationskorridor von 20 Prozent um die tatsächlichen Wahlergebnisse gewählt. In diesem Korridor wurden zunächst je 1000 realistische Wahlergebnisse generiert, die somit jeweils in der Nähe der beiden letzten Bundestagswahlergebnisse angesiedelt sind. [...] Bei konstant gehaltenen Wählerzahlen kann die NSG-Problematik durch das BWahlG 2011 als hinreichend behoben angesehen werden.

Parlamentssitze und negatives Stimmgewicht

Parlamentssitze und negatives Stimmgewicht

Wahlverfahren für unendliche Gesellschaften

Weiterhin sei $\sharp A \geq 3$ und $\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$. Die Menge I sei nun beliebig. Anders als zuvor setzen wir also I nicht mehr als endlich voraus. Definition N3C und Lemma N3D gelten weiterhin, wörtlich wie zuvor.

Aufgabe: Sei $V : \mathbb{P}^I \to \mathbb{P}$ ein Wahlverfahren, einhellig und monoton. Welche Eigenschaften hat $\mathscr{F} = \mathscr{F}_V := \{\, J \subseteq I \mid J \text{ souverän in } V \,\}$?

(F1) Es gilt $\emptyset \notin \mathscr{F}$ und $I \in \mathscr{F}$.
(F2) Für alle $J, K \in \mathscr{F}$ gilt $J \cap K \in \mathscr{F}$.
(F3) Aus $J \in \mathscr{F}$ und $J \subseteq K \subseteq I$ folgt $K \in \mathscr{F}$.
(F4) Für $I = J \sqcup K$ gilt entweder $J \in \mathscr{F}$ oder $K \in \mathscr{F}$.

Die Rechenregeln (F1–4) sind einfach, elegant und fundamental. Wir interpretieren $J \in \mathscr{F}$ als: J enthält „fast alle“ Elemente von I, die verbleibenden Elemente $I \smallsetminus J$ sind vernachlässigbar.

Lösung: (F1) Dank Einhelligkeit ist I souverän, $\emptyset$ hingegen nicht.
(F3) Ist J souverän, so auch jede Obermenge K mit $J \subseteq K \subseteq I$.

Wahlverfahren für unendliche Gesellschaften

(F2) Wir untersuchen folgende Abstimmung (à la Condorcet):

$$\begin{array}{rccccc}
J \cap K: & a & \succ & x & \succ & b \\
J \smallsetminus K: & b & \succ & a & \succ & x \\
K \smallsetminus J: & x & \succ & b & \succ & a
\end{array}$$

Es folgt $a \succ x$, denn J ist souverän. Es folgt $x \succ b$, denn K ist souverän. Transitivität erzwingt daher $a \succ b$. Doch nur $J \cap K$ wertet $a \succ b$. Also ist $J \cap K$ entscheidend für das Paar (a, b), somit für alle (N3D).

(F4) Sei $I = J \sqcup K$. Angenommen, K ist nicht entscheidend für (b, x):

$$\begin{array}{rccccc}
J: & a & \succ & x & \succ & b \\
K: & b & \succ & a & \succ & x
\end{array}$$

Es folgt $x \succcurlyeq b$. Zudem gilt $a \succ x$, denn I ist souverän. Transitivität erzwingt $a \succ b$. Also ist J entscheidend für (a, b), somit für alle (N3D).

Definition N4A: Filter und Ultrafilter

Sei $I \neq \emptyset$ eine Menge. Ein Mengensystem $\mathscr{F} \subset \mathfrak{P}(I)$ mit Eigenschaften (F1–3) heißt **Filter** auf I. Gilt (F1–4), so heißt $\mathscr{F}$ ein **Ultrafilter** auf I.

Satz N4B: Jeder Ultrafilter definiert ein Wahlverfahren.

Jeder Ultrafilter $\mathscr{F} \subset \mathfrak{P}(I)$ auf der Menge I definiert ein Wahlverfahren $V_{\mathscr{F}} : \mathbb{P}^I \to \mathbb{P} : (P_i)_{i \in I} \mapsto P$ durch die Einigkeit „fast aller" Individuen:

$$(P_i)_{i \in I} \mapsto P := \left\{ (x, y) \in A \times A \;\middle|\; \{ i \in I \mid (x, y) \in P_i \} \in \mathscr{F} \right\}$$

Dieses Wahlverfahren erfüllt Einhelligkeit und Monotonie.

Beispiel N4C: der unsichtbare Diktator

Sei $A \neq \emptyset$ beliebig. Die Menge I der Individuen sei unendlich.
Wir betrachten den **koendlichen Filter** $\mathscr{E} = \{ J \subseteq I \mid I \smallsetminus J \text{ endlich} \}$.
Dieser liegt in einem maximalen Filter / Ultrafilter $\mathscr{F}$ mit $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{F} \subset \mathfrak{P}(I)$.
Das Verfahren $V_{\mathscr{F}}$ ist einhellig und monoton und nicht diktatorisch.

Aufgabe: Prüfen sie Konstruktion und Eigenschaften sorgfältig nach!

Lösung: Die Relation P ist transitiv: $x \succcurlyeq y$ und $y \succcurlyeq z$ bedeutet nach Definition $J = \{ i \in I \mid x \succcurlyeq_i y \} \in \mathscr{F}$ und $K = \{ i \in I \mid y \succcurlyeq_i z \} \in \mathscr{F}$.
Es folgt $J \cap K \subseteq \{ i \in I \mid x \succcurlyeq_i z \}$, dank (F2) und (F3) also $x \succcurlyeq z$.

Die Relation P ist linear: Wir zerlegen $I = J \sqcup K \sqcup L$ gemäß $J = \{ i \mid x \succ_i y \}$ und $K = \{ i \mid x \approx_i y \}$ und $L = \{ i \mid y \succ_i x \}$.
Dank (F4) gilt entweder $J \in \mathscr{F}$ oder $K \in \mathscr{F}$ oder $L \in \mathscr{F}$, also die Trichotomie entweder $x \succ y$ oder $x \approx y$ oder $y \succ x$.

Dank (F1) gilt $I \in \mathscr{F}$, also Einhelligkeit. Dank (F3) gilt Monotonie.

Beispiel: Der koendliche Filter $\mathscr{E}$ besteht aus allen Mengen $J \subseteq I$, die „fast alle" Individuen enthalten, also alle bis auf endlich viele. Aus $J \in \mathscr{E}$ können wir endliche viele Elemente entfernen und behalten immer noch $K = J \smallsetminus \{i_1, \dots, i_n\} \in \mathscr{F}$. Diese Eigenschaft bleibt auch für $\mathscr{F}$ erhalten: Das zugehörige Wahlverfahren V ist nicht diktatorisch. Der Ultrafilter $\mathscr{F}$ möchte gegen ein Element $k \in I$ konvergieren, dies wäre der Diktator, liegt aber nicht in I. Stattdessen entscheiden seine Umgebungen $J \in \mathscr{F}$.

Filter und Ultrafilter

Das Semester neigt sich dem Ende, wir räumen unser Scherzlager, alle Witze müssen raus, egal ob gut oder schlecht: Alles muss gehen!

Wie nennen Mathematiker:innen die Kontrolle vor dem Stadion? Ultrafilter!

Filter und Ultrafilter

Satz N4D: Charakterisierung von Ultrafiltern

Sei I eine Menge und $\mathscr{F} \subseteq \mathfrak{P}(I)$. Dann sind äquivalent:

1. $\mathscr{F}$ ist ein Ultrafilter auf I, erfüllt also (F1–4).
2. $\mathscr{F}$ ist ein Filter auf I und maximal. Ausführlich bedeutet das: Für jeden Filter $\mathscr{F}'$ mit $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}' \subset \mathfrak{P}(I)$ gilt $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$.
3. Es gibt einen surjektiven Halbring-Homomorphismus $h : (\mathfrak{P}(I), \cap, \cup) \to (\{0,1\}, \wedge, \vee)$ mit $\mathscr{F} = \{\, A \subseteq X \mid h(A) = 1 \,\}$.
4. Für $I = J \sqcup K \sqcup L$ gilt entweder $J \in \mathscr{F}$ oder $K \in \mathscr{F}$ oder $L \in \mathscr{F}$.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Äquivalenzen.

Ein Filter $\mathscr{F} \subset \mathfrak{P}(I)$ auf I ist nichts weiter als ein echtes Ideal in der Mengenalgebra $(\mathfrak{P}(I), \cap, \cup)$, hier als Halbring betrachtet. Ultrafilter sind demnach maximale Ideale. Wenn Sie Ideale aus der Algebra kennen und lieben, dann werden Ihnen auch Filter gefallen. Auch in der Mathematik gilt: Man muss auch Ideale haben.

Ein **Hauptfilter** ist von der Form $\mathscr{F} = \langle K \rangle := \{ J \subseteq I \mid K \subseteq J \}$ für eine nicht-leere Teilmenge $K \subseteq I$. Dies ist ein Ultrafilter gdw $K = \{k\}$.

Ein **fixierter Ultrafilter** ist von der Form $\mathscr{F} = \langle k \rangle := \{ J \subseteq I \mid k \in J \}$ für ein festes Element $k \in I$. Jeder weitere Ultrafilter heißt **frei**.

Aufgabe: (1) Auf jeder endlichen Menge I gilt:
(1a) Jeder Filter ist Hauptfilter. (1b) Jeder Ultrafilter ist fixiert.
(1c) Folgern Sie daraus erneut Arrows Satz vom Diktator N3B

(2) Auf jeder unendlichen Menge I existieren freie Ultrafilter.
(3) Allgemeiner: Jeder Filter $\mathscr{F}$ liegt in einem Ultrafilter $\mathscr{F}'$.

Lösung: (1a) Ist I endlich, so auch $\mathscr{F} \subseteq \mathfrak{P}(I)$. Betrachte $K := \bigcap \mathscr{F}$.
Dank (F2) gilt $K \in \mathscr{F}$. Dies ist also das kleinste Element von $\mathscr{F}$.
Dank (F1) gilt $K \neq \emptyset$. Dank (F3) folgt $\mathscr{F} = \{ J \subseteq I \mid K \subseteq J \}$.

(1b) Wir wissen $\mathscr{F} = \langle K \rangle$ dank (1a). Gilt zudem (F4), so folgt $K = \{k\}$.

(1c) Die Familie $\mathscr{F}$ aller entscheidenden Mengen ist ein Ultrafilter.
Ist zudem I endlich, so gilt $\mathscr{F} = \langle k \rangle$, und somit ist k der Diktator.

(2) Wir betrachten $\mathscr{F} = \{ J \subseteq I \mid I \smallsetminus J \text{ endlich} \}$. Dies ist ein Filter.
Dank (3) existiert hierzu ein Ultrafilter $\mathscr{F}'$ mit $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}' \subset \mathfrak{P}(I)$.
Dieser ist nicht fixiert: Wäre $\mathscr{F} = \langle k \rangle$, dann wäre $K = \{k\} \in \mathscr{F}$
und $J = I \smallsetminus K \in \mathscr{F}$, also $\emptyset = K \cap J \in \mathscr{F}$, im Widerspruch zu (F1).

(3) Wir nutzen die Charakterisierung N4D als maximaler Filter.
Jede Kette von Filtern hat eine obere Schranke: ihre Vereinigung.
Nach dem Lemma von Zorn existieren maximale Elemente.

Anwendung: Die Nicht-Standard-Analysis nutzt infinitesimale Zahlen. Hierzu führte Abraham Robinson um 1960 die **hyperreellen Zahlen** ein (`en.wikipedia.org/wiki/Hyperreal_number`): Der Körper ${}^*\mathbb{R}$ entsteht aus dem Ring $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ durch Abstimmung dank unsichtbarem Diktator N4B:

Sei $\mathscr{F}$ ein freier Ultrafilter auf $\mathbb{N}$. Auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ erklären wir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $\{ n \in \mathbb{N} \mid x_n \le y_n \} \in \mathscr{F}$. Damit ist $\approx$ eine Äquivalenzrelation und verträglich mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation. Der Quotientenring ${}^*\mathbb{R} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_{\approx}$ ist ein geordneter Körper. Er enthält $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$ und zudem unendliche große und infinitesimal kleine Elemente.

Kapitel O

Implementierungstheorie und der Satz von Gibbard–Satterthwaite

Wähle deine Wünsche mit Bedacht,
denn sie könnten in Erfüllung gehen!

Alas, the road to hell
is paved with good intentions.

Inhalt dieses Kapitels O

Motivation und Überblick

Aus dem vorigen Kapitel kennen wir Arrows Satz vom Diktator (N3E). Wir untersuchen hierzu alle **Wahlverfahren** von der Form $V:\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$. Vereinfachend beschränken wir uns nun auf strikte Präferenzen $\mathbb{S} \subset \mathbb{P}$. Wenn wir zudem Indifferenzen im Ergebnis aufbrechen, so erhalten wir

$$V \,:\, \mathbb{S}^n \to \mathbb{S} \,:\, (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P.$$

Zu Recht wenden Sie ein, dass viele Wahlverfahren nicht so verlaufen. Wir untersuchen daher noch einfacher **Auswahlverfahren** von der Form

$$W \,:\, \mathbb{S}^n \to A \,:\, (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto a.$$

Jedes Wahlverfahren V definiert ein Auswahlverfahren $W = \max V$. Wenn wir also ein geeignetes V haben, dann automatisch auch W. Satz N3E besagt, dass es kein perfektes Wahlverfahren V gibt. Unsere Hoffnung ist daher: Das Verfahren W hat es etwas leichter, es muss nur *einen* Gewinner ermitteln, nicht das *gesamte* Ranking.

Wir zeigen im Folgenden, dass selbst die leichtere Aufgabe unlösbar ist: Jedes Auswahlverfahren $W:\mathbb{S}^n \twoheadrightarrow A$ ist manipulierbar oder diktatorisch.

Motivation und Überblick

Das Ziel der **Implementierungstheorie** ist, wünschenswertes Verhalten durch ein geeignetes Spiel zu erzwingen / ermutigen / ermöglichen.

Berühmtes Beispiel ist Nashs axiomatische Verhandlungslösung (L1E) und Rubinsteins strategische Implementierung als Verhandlung (L2C). Ähnlich gelagert ist der Shapley–Wert als axiomatische Lösung (M2A) und seine konkrete Implementierung als Koalitionsverhandlung (M3B).

Dort gelingen beide Ansätze, sie stützen und erklären sich gegenseitig. Ähnliches liegt auch diesmal vor uns: Arrows axiomatisch begründeter Satz vom Diktator (N3E) wird nun implementativ gestützt durch den strategisch motivierten Satz von Gibbard–Satterthwaite (O2B).

Gesucht ist ein geeignetes Spiel / Verfahren, das zu dem gewünschten Verhalten führt. Das ist allerdings nicht immer möglich, denn die Anreize müssen mit den Zielsetzungen der Spieler vereinbar / kompatibel sein.

Andernfalls droht **Manipulierbarkeit**. Wir beginnen mit einem einfachen aber typischen Beispiel, das Sie bereits aus Ihren Übungen kennen. Anschließend führen wir die formale Definition und Beweisführung aus.

Das Duellverfahren ist manipulierbar.

Aufgabe: Alice, Bob und Chuck wollen gemeinsam ins Kino gehen. Zur Auswahl stehen die drei Filme X = *X-Men* oder Y = *The Last Yeti* oder Z = *Zombie Apocalypse*. Alice hätte am liebsten X vor Y vor Z, Bob favorisiert Y vor Z vor X, und Chuck sieht Z vor X vor Y.

Chuck ist Wahlleiter und legt als Wahlmodus fest: Im ersten Wahlgang wird per Mehrheitswahl zwischen X und Y abgestimmt, der Gewinner tritt dann im zweiten Wahlgang per Mehrheitswahl gegen Z an.

(1) Welche der Alternativen X, Y, Z wird gewählt, wenn jeder Spieler in jedem Wahlgang ehrlich nach seiner Präferenz abstimmt?

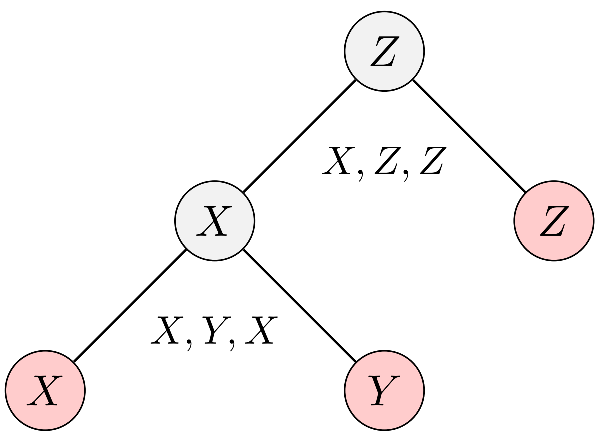
(2) Ist dies ein Gleichgewicht? Lohnt es sich, strategisch zu wählen? Nennen Sie mindestens ein teilspielperfektes Gleichgewicht.

(3) Hat Chuck für seine eigenen Ziele den Wahlmodus gut gewählt? Welchen Wahlmodus (in einem Duellverfahren) würden Sie ihm raten?

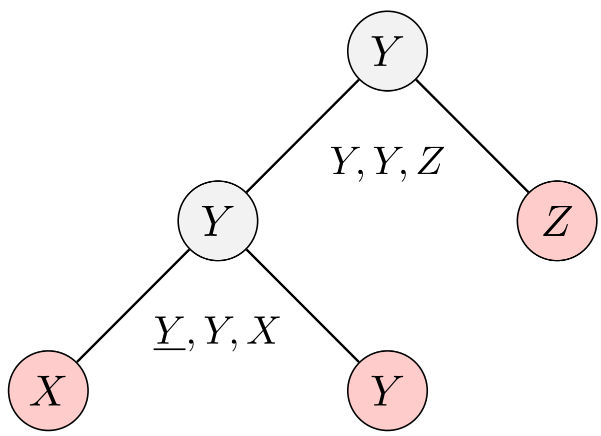
(4) Sehen Sie hier ein Auswahlverfahren, das nicht manipulierbar ist, bei dem also ehrliche Abstimmung belohnt (bzw. nicht bestraft) wird?

Das Duellverfahren ist manipulierbar.

Präferenzen: Alice $X \succ Y \succ Z$, Bob $Y \succ Z \succ X$, Chuck $Z \succ X \succ Y$.



ehrliche Abstimmung



strategische Abstimmung

☹ Dieses Auswahlverfahren kann manipuliert werden! (hier von Alice)

☺ Wie optimiert Alice ihr Wahlverhalten? Durch Rückwärtsinduktion!

Wir beschreiben die Abstimmung als dynamisches Spiel in extensiver Form und lösen es durch Rückwärtsinduktion. Das fordert etwas mehr Raffinesse und Um-die-Ecke-Denken als man Wählern zumuten möchte.

Das Duellverfahren ist manipulierbar.

(1) Der erste Wahlgang $X : Y$ ergibt $2 : 1$. Der zweite Wahlgang $X : Z$ ergibt $1 : 2$. Es gewinnt Z. Man könnte den Eindruck gewinnen, Chuck wählt sein Auswahlverfahren gerade so, dass sein Favorit gewinnt.

(2) Nein, die ehrliche Abstimmung ist kein Gleichgewicht! Alice könnte $P_1' : Y \succ X \succ Z$ vorgeben statt ihrer wahren Präferenz $P_1 : X \succ Y \succ Z$. Der erste Wahlgang $X : Y$ ergibt dann $1 : 2$. Der zweite Wahlgang $Y : Z$ ergibt $2 : 1$ es also gewinnt Y. Das ist für Alice eine Verbesserung!
Für Alice lohnt es sich, strategisch zu wählen, also zu lügen.

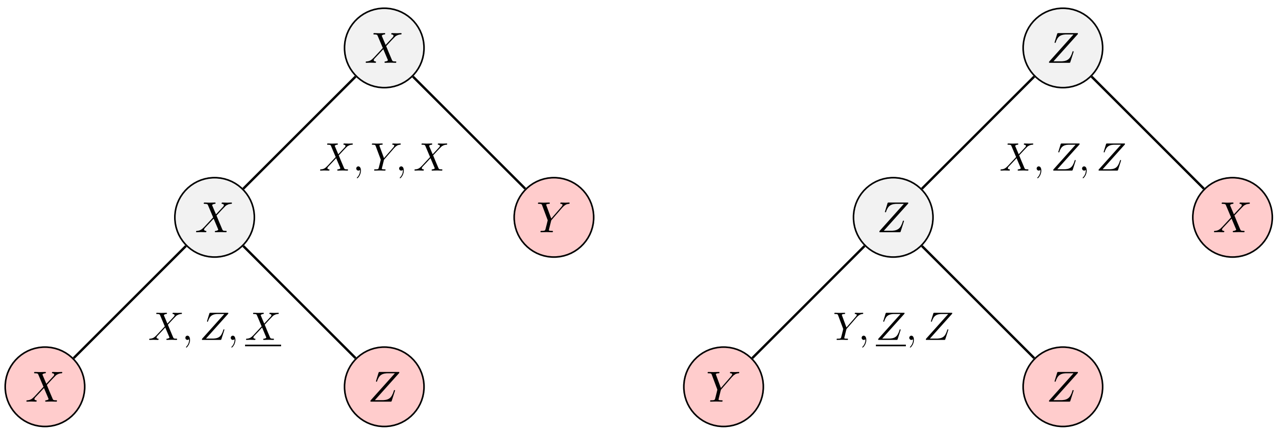
(3) Chucks erster Plan geht auf, wenn alle Spieler ehrlich abstimmen. Wenn sie strategisch denken, müssen sie unehrlich abstimmen, um das Ergebnis zu ihren Gunsten zu ändern. Darauf muss Chuck spekulieren, um das für ihn günstigste Verfahren vorausschauend auszuwählen.

☺ Als strategisch-dynamisches Spiel ist das lehrreich und amüsant. Vorausschauende Spieler müssen spekulieren und gegenspekulieren.

☹ Für demokratische Wahlen ist dies jedoch keine gute Grundlage! Es fällt schwer, die Abstimmung als Willensbekundung zu deuten.

Das Duellverfahren ist manipulierbar.

Präferenzen: Alice $X \succ Y \succ Z$, Bob $Y \succ Z \succ X$, Chuck $Z \succ X \succ Y$.



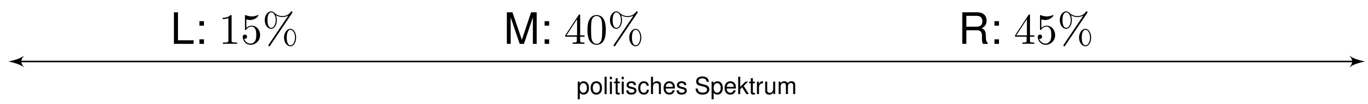
☺ Nach Chucks Präferenz ist das letzte Duellverfahren das beste. Aus Chucks Sicht ist das ein einfaches Beispiel von Mechanism-Design.

☺ Wie bestimmt Chuck sein Verfahren? Durch Rückwärtsinduktion! Aus der Menge aller möglichen Verfahren wählt er ein (für ihn) optimales.

Übung: Schreiben Sie jedes dieser drei Spiele in extensiver Form aus. Finden Sie in dieser Form alle teilspielperfekten Gleichgewichte!

Strategisches Wählen tritt häufig auf.

Sind Manipulation und strategisches Wählen nur ein Gedankenspiel? Nein. Es kommt häufiger vor, als man zunächst naiv erwarten würde!



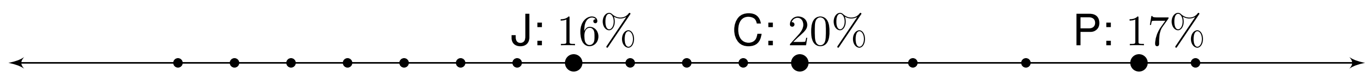
Bei einer **Präsidentschaftswahl** treten die drei Kandidaten L, M, R an. Es gewinnt der Kandidat mit den meisten Stimmen / relative Mehrheit.

Wenn alle ehrlich abstimmen, gewinnt R mit 45%. Die L-Wähler haben einen Anreiz strategisch zu wählen: Wenn sie alle M wählen, dann gewinnt M mit 55%. Für L-Wähler ist dies eine Verbesserung!

☹ Nach der Wahl wird das Ergebnis als „Wählerwillen“ interpretiert — meist natürlich so, dass die Interpretation zu den eigenen Zielen passt. Was war der Wählerwille wirklich? Kann man ihn überhaupt ablesen?

Wenn im Vorfeld der Wahl spekuliert und gegenspekuliert werden muss, kann man nachher kaum noch die eigentlichen Beweggründe erkennen. Wie zuvor: Für demokratische Wahlen ist dies keine gute Grundlage!

Strategisches Wählen tritt häufig auf.



Ein solches Phänomen manifestierte sich 2002 recht dramatisch bei der französischen Präsidentschaftswahl zwischen Jospin - Chirac - Le Pen.

Im ersten Wahlgang traten insgesamt 16 Kandidaten an, ein Rekord. (Die obige Darstellung im Links-Rechts-Spektrum ist grob vereinfacht.) Wenn im ersten Wahlgang kein Kandidat die absolute Mehrheit erringt, dann gehen die beiden Höchstplatzierten in die Stichwahl. Viele Wähler waren sicher, dass dies Jospin und Chirac sein würden. Die erste Runde galt als Formalität, viele wählten daher ehrlich nach ihrer Überzeugung.

Die Zersplitterung der französischen Linken schwächte entscheidend den sozialistischen Premierminister Lionel Jospin. In die Stichwahl kamen daher der konservative amtierende Präsident Jacques Chirac und überraschend der rechtsextreme Jean-Marie Le Pen. Die Stichwahl gewann daraufhin Chirac mit über 82% der Stimmen, damit der höchste Wahlsieg aller Zeiten bei einer französischen Präsidentschaftswahl.

Die Auswirkungen der *Présidentielle 2002* sind bis heute zu spüren. Viele Wähler des linken Spektrums waren verbittert und traumatisiert: Nicht nur ging eine durchaus aussichtsreiche Präsidentschaftswahl aus ihrer Sicht verloren, als besondere Schmach und Demütigung mussten sie im zweiten Wahlgang zudem einen ihnen ungeliebten konservativen Kandidaten wählen, um ein noch schlimmeres Ergebnis zu verhindern.

Damals wurde heftig debattiert und protestiert. Wer hatte Schuld? Jospins Campagne war schlecht, gestanden selbst seine Anhänger, das hat sicher zu seinem denkbar knappen Ausscheiden beigetragen. Auch er war sich seines Erfolges in der ersten Runde wohl allzu sicher. Seine Niederlage war vernichtend, er zog sich aus der Politik zurück.

Jaques Chirac hingegen hatte allen Grund zur Freude, er bekam seine zweite Amtszeit und war stolz auf sein überragendes Wahlergebnis. Er konnte seinen Gegner Le Pen leicht diabolisieren und sich selbst als Garant der Demokratie inszenieren, zum Teil durchaus zu Recht, aber eine inhaltliche politische Debatte fand überhaupt nicht mehr statt.

Hatten sich zu viele Wähler verspekuliert? *„Je pensais voter Jospin le second tour.“*, war ein typischer Seufzer. Doch diese Chance kam nicht.

Wer trägt Schuld daran? Einerseits die Wähler, denn sie kennen ja ihr Wahlsystem und hätten strategisch denken müssen. Andererseits gibt der Wahlaufruf gemischte, verwirrende Signale: Soll man nun ehrlich nach seiner Überzeugung abstimmen oder strategisch, als „*vote utile*“?

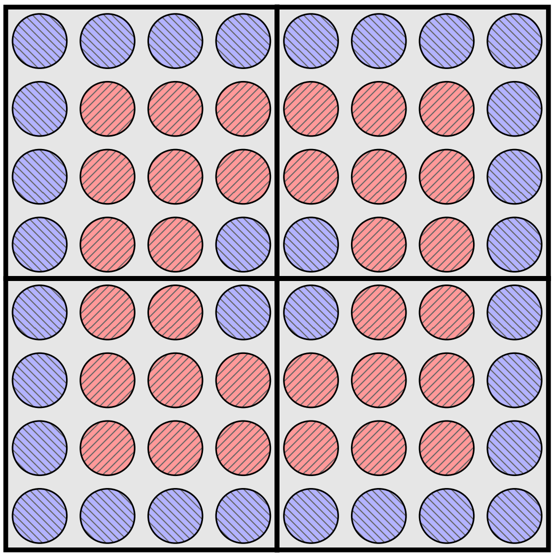
Daher ist es durchaus berechtigt, das Wahlsystem selbst in Betracht zu ziehen und mathematisch-kritisch zu untersuchen. Zu wünschen wäre, aus bitteren Erfahrungen wie diesen, ein Wahlsystem ohne diese Fehler, das ehrliches Abstimmen belohnt — oder zumindest nicht bestraft.

Diese Frage bringt uns zurück zu unserem Thema in diesem Kapitel: Mechanism-Design. Können wir ein Wahlsystem konstruieren, das alle demokratisch wünschenswerten Eigenschaften hat, insbesondere nicht manipulierbar ist und somit strategisches Wählen unnötig macht?

Die ernüchternde Antwort lautet hier leider: *Nein!* Das ist nicht bloß eine empirische Erfahrungstatsache, sondern ein präzise formulierbarer Satz.

Gerrymandering: Maßschneidern von Wahlbezirken

Eine weitere Manipulation von Wahlverfahren ist **Gerrymandering**, also das strategisch kalkulierte Zuschneiden von Wahlkreisgrenzen. Die unvermeidlichen Rundungsfehler werden hierbei instrumentalisiert, um den Einfluss gewisser Stimmanteilen zu mindern oder zu steigern.



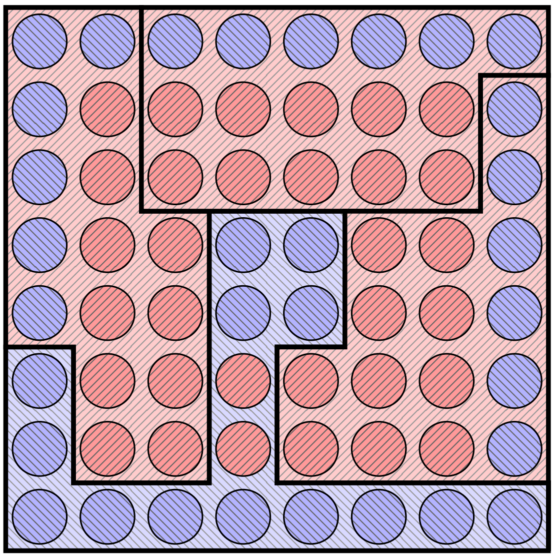
Bevölkerung:
32 rot zu 32 blau,
es herrscht Gleichstand.

Wahlbezirke:
4 mal unentschieden,
jeweils 8 zu 8 Gleichstand.

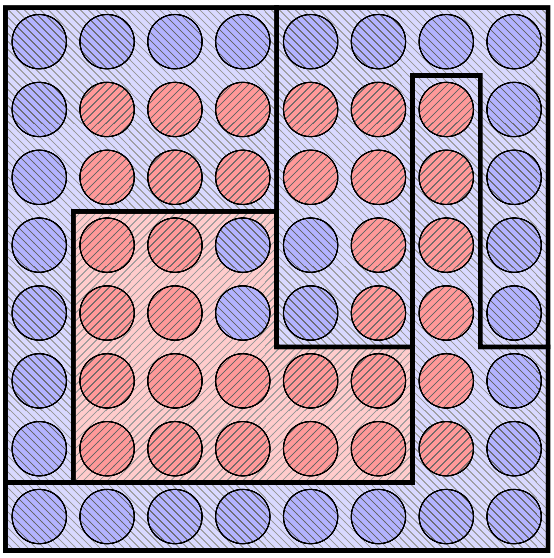
Aufgabe: Gibt es im obigen Beispiel einen Zuschnitt in vier gleichgroße zusammenhängende Wahlbezirke, sodass rot bzw. blau „klar“ gewinnt?

Gerrymandering: Maßschneidern von Wahlbezirken

Lösung: Hier sind zwei von vielen möglichen Zuschnitten:



dreimal 10 rot zu 6 blau
einmal 2 rot zu 14 blau



dreimal 6 rot zu 10 blau
einmal 14 rot zu 2 blau

Ein solcherart manipuliertes Wahlsystem [*rigged voting system*] ist die dunkle Seite des Mechanism-Design: Wie betrüge ich am effizientesten? Kurzfristig erscheint es den Machthabern opportun, langfristig zerstört es das Vertrauen der Wähler in ihre demokratischen Institutionen.

Gerrymandering: Maßschneidern von Wahlbezirken

Die beiden wichtigsten Tricks / Techniken des Gerrymandering sind:
Verdünnung: In diesem Wahlkreis ist die Opposition so weit verdünnt, dass sie keine Chance auf einen Sieg hat. Ihre Stimmen verfallen daher.
Hochburg: In diesem Wahlkreis werden möglichst viele Stimmen der Opposition gebündelt. Er geht zwar verloren, aber mit vielen Stimmen.

Viele Demokratien übertragen daher den Zuschnitt der Wahlkreise einer politisch unabhängigen Kommission, etwa Verfassungsrichtern. In den USA hingegen geschieht dies häufig durch politische Organe, üblicherweise alle 10 Jahre nach der Volkszählung. Beispiel Texas:

Wahl 2002	Republikaner	59% Stimmen	15 Abgeordnete (47%)
	Demokraten	40% Stimmen	17 Abgeordnete (53%)

Die Republikaner errangen 2002 die Mehrheit in der *State Legislature* und ersetzten die für sie ungünstigen Wahlkreisgrenzen durch günstige:

Wahl 2004	Republikaner	58% Stimmen	21 Abgeordnete (66%)
	Demokraten	41% Stimmen	11 Abgeordnete (34%)

Gerrymandering wirkt! Ist es gerecht? *„Two wrongs don't make a right.“*

Gerrymandering: Maßschneidern von Wahlbezirken

Zur Erläuterung: Die Legislative der USA besteht aus zwei Kammern, beide zusammen bilden den US-Kongress / *United States Congress*:

- Der Senat / *Senate* als Oberhaus mit insgesamt 100 Senatoren, je zwei aus jedem der 50 Bundesstaaten, Amtszeit jeweils 6 Jahre; rotierend wird alle zwei Jahre ein Drittel der Senatoren neu gewählt.
- Das Repräsentantenhaus / *House of Representatives* als Unterhaus mit 435 Abgeordneten, je einer aus seinem festen Wahlbezirk / *Congressional District*, Amtszeit zwei Jahre.

Um Letztere geht es in unserem historischen Beispiel von 2002/2004: Texas stellte damals 32 der 435 Abgeordneten im Repräsentantenhaus. Obwohl die Stimmenverteilung 59-58% zu 40-41% nahezu gleich blieb, änderte sich die Sitzverteilung dramatisch aufgrund des Neuzuschnitts der Wahlbezirke im Jahr 2003. Das Beispiel ist frappierend eindeutig:
Im Jahr 2002 waren mit 15 zu 17 die Demokraten stark begünstigt.
Im Jahr 2004 waren mit 21 zu 11 die Republikaner stark begünstigt.
Wünschenswert wäre eine annähernd proportionale Sitzzuteilung, die Fehler durch (böswillige) Rundungen soweit möglich minimiert.

Mehrheitswahlrecht in Großbritannien und Frankreich

In **Großbritannien** gilt die relative Mehrheitswahl. Jeder Wähler hat eine Stimme in seinem Wahlkreis, der Kandidat mit den meisten Stimmen (relative Mehrheit, engl. *first past the post*) zieht ins Parlament ein. Die Stimmen unterlegener Kandidaten gehen verloren: *The winner takes all.* Das so gewählte Parlament hat dadurch in der Regel klare Mehrheiten. Die regelmäßige Anpassung der Wahlkreise nach Einwohnerzahl obliegt der unabhängigen *Boundary Commission*; sie gilt als fair und effizient.

In **Frankreich** hingegen wird die Wahlkreiseinteilung politisch genutzt. De Gaulle instrumentalisierte sie zur Schwächung politischer Gegner, vor allem der Kommunisten, ebenso nutzte er die Wiedereinführung der absoluten Mehrheitswahl 1958. Die regierenden Sozialisten wiederum führten 1985 ein Verhältniswahlsystem ein, um den prognostizierten Wahlsieg der Rechten abzuschwächen. Die Regierung Chirac kehrte 1986 wohlkalkuliert zum traditionellen Mehrheitswahlrecht zurück.

Die Ausführung demokratischer Wahlen lässt Spielräume. Die Beispiele zeigen eindrücklich, dass dies permanent zu Einflussversuchen verlockt.

Wahlkollegium / *United States Electoral College*

Ein Wahlmann bzw. eine Wahlfrau ist eine Person, der eine konkrete Wahl übertragen wird. Die wahlberechtigten **Urwähler** bestimmen in ihrem Wahlbezirk einen oder mehrere **Wahlpersonen**, diese wählen dann ihrerseits in einem zweiten Wahlgang die eigentlich zu Wählenden.

Im Gegensatz zu Abgeordneten werden die Wahlpersonen lediglich für diesen einen Wahlakt bestimmt. Die Versammlung der Wahlleute heißt **Wahlkollegium**. Ein Wahlsystem mit Wahlleuten heißt **indirekte Wahl**.

Prominentes Beispiel sind die Wahlpersonen zu Präsidentschaftswahlen der **USA**. Jeder US-Bundesstaat wählt seine Wahlpersonen / *electors* nach seinen eigenen Regeln. In 48 Staaten gilt *„the winner takes all“*, nur in Maine und Nebraska können die Wahlpersonen aufgeteilt werden.

Zum Sieg genügen 270 der 538 Wahlpersonen. (Die Zahl 100+435+3 entspricht Kongress plus DC.) Rechnerisch genügen dazu etwa 23% der Wählerstimmen. Diskrepanzen zwischen *Electoral College* und *Popular Vote* ergaben sich 1824 zu Gunsten der Demokratisch-Republikanischen Partei sowie 1876, 1888, 2000 und 2016 zu Gunsten der Republikaner.

Wahl der Bundespräsidentin / des Bundespräsidenten

Von fern wirkt das US-amerikanische System der Wahlmänner antiquiert, doch die **Bundesrepublik Deutschland** nutzt ähnliches, wobei jedoch das deutsche Staatsoberhaupt eher überparteilich-repräsentativ wirkt.

Die Bundespräsidentin* (Männer sind wie immer mitgedacht) wird nicht direkt gewählt, sondern von den Wahlfrauen* der Bundesversammlung. Wählbar ist jede* deutsche Staatsangehörige, die* das Wahlrecht zum Bundestag besitzt und mindestens 40 Jahre alt ist. Sie* wird geheim und ohne Aussprache gewählt von der dazu berufenen Bundesversammlung.

Diese wird gebildet, gemäß dem föderativen System der Bundesrepublik Deutschland, aus den Mitgliedern des Bundestages und ebenso vielen von den 16 Landesparlamenten gewählten Wahlfrauen*. Üblicherweise sind dies Mitglieder der Landesparlamente, der Landesregierungen, der Bundesregierung, sowie Persönlichkeiten des öffentlichen Lebens wie Schauspielerinnen*, Sportlerinnen*, Künstlerinnen*. Die Wahlfrauen* sind nicht an Aufträge und Weisungen gebunden, diese Freiheit führt manchmal zu überraschenden (zwischenzeitlichen) Wahlergebnissen.

Mehrstufige Wahlen und Rätedemokratie

Bei indirekten Wahlen werden die Wahlpersonen eigens für diese Wahl bestimmt; es gibt dabei auch indirekte Wahlen mit mehr als zwei Stufen.

In der **Rätedemokratie** oder **Räterepublik** hingegen werden über ein Stufensystem (etwa Bezirk, Region, Republik) dauerhafte Räte gewählt. Diese Räte haben ein **imperatives Mandat**, sie sind an die Weisungen ihrer Wähler gebunden und können somit jederzeit abgewählt werden. Beim **freien Mandat** hingegen sind Mandatsträger nur ihrem Gewissen verantwortlich und bleiben gewählt für die gesamte Dauer ihrer Amtszeit.

Historisches Vorbild für die Rätedemokratie ist die **Pariser Kommune**, die sich während des deutsch-französischen Krieges spontan bildete und vom 18. März bis zum 28. Mai 1871 existierte. Das prominenteste Rätesystem herrschte in der Sowjetunion: Es entstand zuerst 1905 und dann 1917 in der Oktoberrevolution aus basisdemokratischen Arbeiter- und Soldatenräten. Diese wurden bald von den Bolschewiki dominiert, dann entmachtet. In der Stalinschen Verfassung von 1936 wurden sie durch ebenso machtlose Parlamente ersetzt, die weiter Räte hießen.

Bundeswahlgesetz und historische Erfahrung

Stimmenverfall und Gerrymandering sind grundsätzliche Probleme des Mehrheitswahlrechts, insbesondere vom Typ *„the winner takes all“*. Bei der Wahl zum Deutschen Bundestag zählt die Erststimme für den Direktkandidaten im Wahlkreis, die Zweitstimme für die Sitzverteilung. Dieses Wahlverfahren ist etwas aufwändiger, hat dafür viele Vorzüge und reduziert die Gefahren von Stimmenverfall und Gerrymandering.

In der Weimarer Republik, ohne explizite Sperrklausel, waren bis zu 17 Parteien im Reichstag vertreten, was zu instabilen Regierungen führte. Die explizite Sperrklausel (Fünf-Prozent-Hürde) verhindert den Einzug kleiner Parteien in den Bundestag. Sie zwingt Wähler zu strategischer Abstimmung. Sie soll die Zersplitterung des Parlaments in viele kleine Parteien verhindern und so eine stabile Regierungsbildung ermöglichen.

Rundungen bei der Sitzvergabe und explizite Sperrklauseln verletzen die Gleichheit der Wahl, denn zwangsläufig verfallen manche Stimmen. Diese Nachteile müssen gegen praktische Vorteile abgewogen werden. Die Wahl eines „möglichst gerechten“ Wahlverfahrens ist schwierig!

Bundeswahlgesetz und historische Erfahrung

Das Grundgesetz (GG Art. 38, 39, 41) fordert zunächst grundlegend: *Die Abgeordneten des Deutschen Bundestages werden in allgemeiner, unmittelbarer, freier, gleicher und geheimer Wahl gewählt.* (GG Art 38.1) Weitere Konkretisierungen formuliert das Bundeswahlgesetz (BWahlG).

Allgemeine Wahl: Alle Deutschen sind (bis auf wenige Ausnahmen) ab dem Mindestalter berechtigt zu wählen und gewählt zu werden. Das Mindestalter für das aktive wie passive Wahlrecht sind 18 Jahre. Dieser Kompromiss gilt noch als vereinbar mit der allgemeinen Wahl.

Unmittelbare Wahl: Die Stimmabgabe bestimmt die Parlamentssitze, es ist kein weiteres Gremium zwischengeschaltet (insbesondere keine Wahlmänner wie etwa in den USA oder ein mehrstufiges System wie etwa in Räterepubliken praktiziert). Zulässig ist jedoch die Listenwahl.

Freie Wahl: Jeder Wähler darf sich frei zwischen den Alternativen entscheiden, er ist nicht auf bestimmte Wahlentscheidungen festgelegt. Nach derzeitiger Praxis besteht keine Wahlpflicht (wie etwa in Belgien); somit hat jeder Wähler die legale Alternative, nicht zu wählen.

Geheime Wahl: Jeder Wähler ist berechtigt (aber nicht verpflichtet), seine Wahlentscheidung geheim zu halten. Dazu dienen Wahllokale, die alle nötigen Vorkehrungen bieten und öffentlich kontrollierbar sind.

Bei der Briefwahl sind Geheimnis und Kontrolle zwar stärker gefährdet, dies wird jedoch aufgewogen durch erhöhte Allgemeinheit der Wahl.

Die Briefwahl ist anfälliger für Betrug: keine Kontrolle der Einhaltung des Wahlgeheimnisses, daher mögliche Beinflussung oder gar Verkauf der Stimme; Diebstahl oder Verlust von Wahlunterlagen auf dem Postweg; gefälschte Unterschriften ermöglichen Sendung an falsche Adressen.

Gleiche Wahl: Jede Stimme hat den gleichen Wert (näherungsweise). Dazu müssen Wahlkreise ähnlich groß sein (Gerrymandering) und das Sitzzuteilungsverfahren möglichst Rundungsfehler minimieren. Bis 1983 wurde das D'Hondt–Verfahren verwendet, das große Parteien bevorzugt. Danach wurde bis 2005 das Hare–Niemeyer–Verfahren verwendet, das das Ergebnis genauer abbildet, aber manchmal zu Paradoxien führt. Seither wird das Sainte-Laguë–Verfahren verwendet.

Für das Funktionieren einer Demokratie ist neben anderen Faktoren auch und vor allem ein funktionierendes Wahlsystem entscheidend. Das Wahlverfahren kann das Wahlergebnis gravierend beeinflussen, es erfordert daher sorgfältige Formulierung, Bedacht und Präzision.

Es geht um wichtige, richtungweisende Entscheidungen mit konkreten, langfristigen Konsequenzen. Daher sind Wahlen erfahrungsgemäß stets auch Versuchen der Einflussnahme und der Manipulation ausgesetzt. Diese Gefahren müssen bedacht und möglichst minimiert werden.

Das Bundeswahlgesetz (selbst in grober Zusammenfassung, wie hier) und unsere obigen Beispiele zu Wahlsystemen und -manipulationen lassen erahnen, wie anspruchsvoll die Durchführung fairer Wahlen ist. Dieses hehre Ziel erfordert großen Aufwand und hohe Genauigkeit!

Fun fact: Der Bundeswahlleiter wird vom Bundesinnenminister ernannt. Traditionell übernimmt dieses Amt der Präsident des Statistischen Bundesamtes in Wiesbaden. Auch dort arbeiten Mathematiker!
`www.deutschland.de/de/topic/politik/mathematik-in-der-wahlnacht`

Empirie: die Qual der Wahl des Wahlverfahrens

Im **Casino Royal** (31.01.2020) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, die Schwierigkeiten von Wahlverfahren zu erleben und zu erproben.

Wir haben dazu versucht, auch dieses mathematisch-abstrakte Thema möglichst interaktiv spielbar zu gestalten. Die sieben Spieler $1, 2, \dots, 7$ planen einen gemeinsamen Kinoabend. Abgestimmt wird über die drei Alternativen X, Y, Z wie oben. Alle müssen sich gemeinsam für einen Film entscheiden, um den lukrativen Gruppenpreis nutzen zu können.

Gespielt wird so: Jedem Spieler wird eine Karte mit seinen Präferenzen zufällig zugelost, hier $X \succ Y \succ Z$ oder $Y \succ Z \succ X$ oder $Z \succ X \succ Y$, mit möglichst gleichen Häufigkeiten, hier $3, 2, 2$. Je nach Platzierung des gewählten Kandidaten erhält der Spieler $500, 300, 100$ €i$to Gewinn.

Wie wird abgestimmt? Ein Spieler wird als Wahlleiter ausgelost; er darf ein Auswahlverfahren $W : \mathbb{S}^n \to A$ zur Diskussion vorschlagen und dann allein Kraft seines Amtes festlegen. Mit Macht kommt Verantwortung und Sorgfaltspflicht: Ist das vorgeschlagene Verfahren unklar formuliert, widersprüchlich oder unvollständig, so muss er 1000€i$to zahlen.

Empirie: die Qual der Wahl des Wahlverfahrens

Vor Verteilung der Rollen sammelten wir Abstimmungsverfahren an der Tafel, um uns später auf diese „unparteiischen“ Verfahren zu berufen. Vorgeschlagen wurden folgende Verfahren, später ergänzt, verfeinert:

Gotteswille: Das Ergebnis ist X (oder Y oder Z, je nach Religion). Das entspricht der Abbildung $\operatorname{const}^X_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \to A : (P_1, \dots, P_n) \mapsto X$.

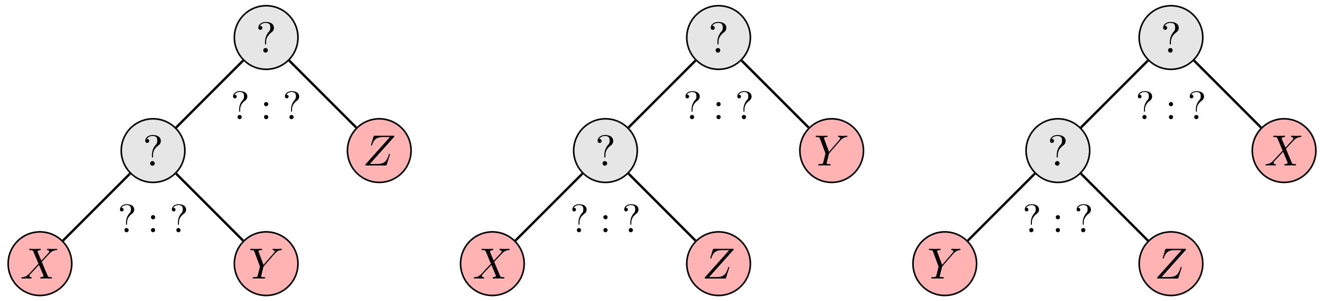
Diktatur: Einer der Spieler $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ bestimmt das Ergebnis. Das entspricht der Abbildung $D_k : \mathbb{S}^n \to A : (P_1, \dots, P_n) \mapsto \max P_k$.

Demarchie: Es wird ein Spieler k zufällig ausgelost, der dann bestimmt. Als Abbildung bedeutet das $D_* : \mathbb{S}^n \times \Omega \to A : (P_1, \dots, P_n; k) \mapsto \max P_k$. Den Lostopf $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ versehen wir mit der Gleichverteilung. Allgemein schreiben wir ebenso D_ν für die WVerteilung ν auf Ω.

Zählung: Es wird gefragt und gezählt „Wer stimmt für X? für Y? für Z?“ Die höchste Zustimmung gewinnt. Gleichstand wird gebrochen entweder durch Stichwahl (eventuell ungenügend), durch alphabetische Ordnung $X \succ Y \succ Z$ (voreingenommen), Losen unter den höchsten Alternativen, oder Willkür durch zufälligen Schlichter (eingeschränkte Demarchie).

Empirie: die Qual der Wahl des Wahlverfahrens

Duell: Für die drei Alternativen X, Y, Z wird ein Turnier ausgetragen:



Zufälliges Duell: Es wird unter diesen drei Duellverfahren gelost.

Alle Duelle: Es werden alle drei Duelle nacheinander durchgeführt. Bei Gleichheit entscheidet die Reihenfolge der Turniere, also das erste. Alternativ könnte Gleichstand wie zuvor diskutiert gebrochen werden.

🙂 Bei diesen Vorbereitungen entspann sich die moralische Diskussion, ob man ehrlich abstimmen müsse oder strategisch abstimmen dürfe. Die Meinung festigte sich schnell, dass alle Strategien erlaubt seien und auch sein müssen, denn niemand schaut einem in Herz oder Hirn.

🙂 Die hier entwickelten Verfahren sind recht kreativ und ausgefeilt. Der Anreiz (echtes Spielgeld!) führt zu beachtlicher Ernsthaftigkeit.

Empirie: die Qual der Wahl des Wahlverfahrens

Natürlich gibt es zahlreiche weitere Auswahlverfahren. Wie viele?

Random fun fact: Bei drei Alternativen $A = \{X, Y, Z\}$ hat die Menge $\mathbb{S} = \mathbb{S}(A)$ der strikten Präferenzen genau $|S| = |A|! = 3! = 6$ Elemente. Bei $n = 7$ Wählern gibt es demnach insgesamt $|\mathbb{S}^n| = 6^7 = 279\,936$ mögliche Konstellation $(P_1, \dots, P_n)$ ihrer individuellen Präferenzen.

Ein Auswahlverfahren ist eine beliebige Abbildung $W : \mathbb{S}^n \to A$, somit gibt es $|A^{\mathbb{S}^n}| = 3^{6^7} = 3^{279\,936} \approx 2.6 \cdot 10^{133\,563}$ Auswahlverfahren. Das lässt noch astronomisch viel Raum für weitere kreative Ideen! Tatsächlich sehen wir die Entwicklung immer raffinierterer Verfahren, sowohl hier in unserem Experiment als auch in realen Demokratien.

Jedes Auswahlverfahren zeigt Schwierigkeiten, Probleme, Paradoxien. Diese treten allerdings nicht immer auf, sind also nicht sofort ersichtlich. Um sie dennoch möglichst pointiert sichtbar und spürbar zu machen, nutzen wir eine kritische Verteilung der Präferenzen à la Condorcet. Diese Vorgabe ist zwar etwas willkürlich und künstlich, erhöht aber die Spannung und den Spielspaß und auch die Erkenntnismöglichkeiten.

Empirie: die Qual der Wahl des Wahlverfahrens

Vorbereitung. Zu Beginn wählt jeder Spieler ein Pseudonym für sich; das ist mathematisch ganz unerheblich, bereitet aber allen viel Freude. Hier wählen recht gewöhnliche Menschen: $1 = \text{Warmduscher}$, $2 = \text{Jedi}$, $3 = \text{AgentOrange}$, $4 = \text{KevinKurányi}$, $5 = \text{Hexe}$, $6 = \text{Kaiser}$, $7 = \text{Papšt}$.

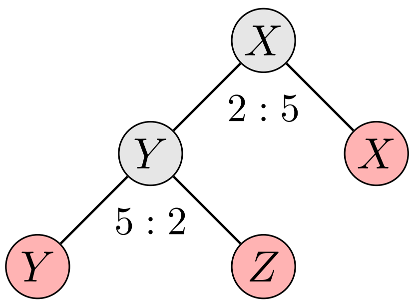
Erstes Spiel. Das Los beruft Spieler $6 = \text{Kaiser}$ zum Wahlleiter.
Der Kaiser bestimmt, nach kurzer Debatte, das Wahlverfahren $\operatorname{const}^X_{\mathbb{S}^n}$.
Die Wahl ist schnell durchgeführt und ergibt... Trommelwirbel... X!
Das Volk murrt, 4 von 7 sind unzufrieden, wagen aber keine Revolution.

Zweites Spiel. Das Los beruft Spieler $7 = \text{Papšt}$ zum Wahlleiter.
Der Papšt ruft, ohne Debatte, das heilige Wahlverfahren D_7 aus.
Die Wahl ergibt Y, das Volk murrt, diesmal sind 5 von 7 unzufrieden.

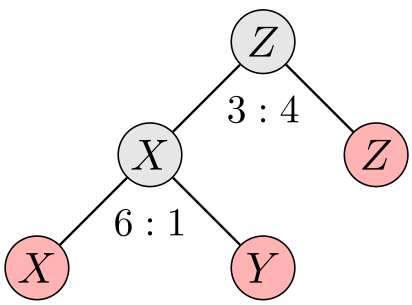
„So kann es nicht weitergehen!“, klagen viele Spieler und nutzen die Zwischenzeit für eine Diskussion *bevor* die Rollen zugeteilt werden. Die Spieler beschließen einstimmig, fortan konstante und diktatorische Wahlverfahren zu verbieten. Der Wahlleiter darf also nur noch aus den verbleibenden, demokratisch akzeptierten Wahlverfahren aussuchen.

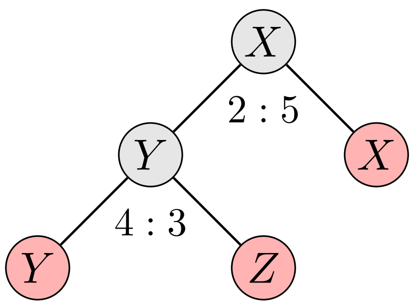
Empirie: die Qual der Wahl des Wahlverfahrens

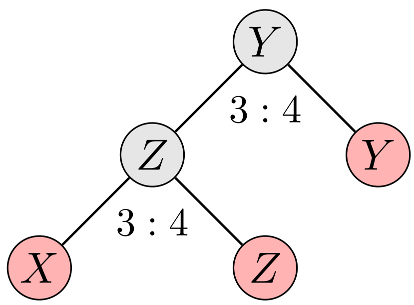
Drittes Spiel. Das Los beruft Spieler $2 = \text{Jedi}$ zum Wahlleiter.
In seiner Weisheit lässt er das folgende Turnier ausgetragen:



Viertes Spiel. Das Los beruft Spieler $1 = \text{Warmduscher}$ zum Wahlleiter.
Er lässt alle drei Turniere nacheinander ausgetragen. Bei Gleichheit aller drei Alternativen entscheidet das erste, wie vom Wahlleiter festgelegt.







Empirie: die Qual der Wahl des Wahlverfahrens

Bei aller Ernsthaftigkeit machte sich doch Wahlmüdigkeit bemerkbar: Jede einzelne dieser Turnierabstimmungen wurde in geheimer Wahl durchgeführt (durch Zungestrecken). Das ist zwar etwas aufwändig, doch die Demokratie verlangt von jedem Bürger einen Beitrag!

Richtig zufrieden ist das Volk mit seinen Wahlen immer noch nicht: Auch wenn die letzten beiden Verfahren demokratisch aussehen, sie fühlen sich doch immer an wie die Diktatur des Wahlleiters.

Fünftes Spiel. Als wesentliche demokratische Neuerung wird das Wahlverfahren nun festgelegt, *bevor* die Spielkarten zugelost werden. Die Spieler einigen sich auf die Auszählung „Wer will X? Y? Z?“ Bei Gleichstand wird ein Schlichter aus $1, 2, \dots, 7$ zufällig ausgelost, der zwischen den höchstplatzierten Alternativen entscheiden darf.

Befragung und Auszählung ergibt $X : 4$ und $Y : 4$ und $Z : 4$. Ja, wirklich! Das Los beruft Spieler $3 = \mathrm{AgentOrange}$ zum salomonischen Schlichter. Dieser entscheidet für Z, nachdem Bestechungsgelder geflossen sind. Das löchrige Wahlgesetz lässt dies zu, die Klage wird fallengelassen.

Empirie: die Qual der Wahl des Wahlverfahrens

🙂 Auch diese Sitzung unseres Casino Royal geht in die Geschichte ein. Sie ist wahrhaftig so geschehen, ich hätte sie nicht ausdenken können. *You can't make this stuff up!* Wer dabei war, wird für ewig die Erlebnisse im Herzen bewahren und die Erkenntnisse in Erinnerung behalten. Für alle anderen versuche ich hier dieses Gedächtnisprotokoll.

Aufgabe: Haben sich in den diversen Abstimmungen der letzten Wahlen alle Spieler strategisch optimal verhalten? Welche Ergebnisse wären bei optimalem Verhalten zu erwarten? Macht das hier einen Unterschied? Ist strategisches Wählen eine Herausforderung? gar Überforderung?

🙂 Bereits unser kleines Labor-Experiment zeigt eine bemerkenswerte Entwicklung von Gotteswillen (immer X) über Diktatur (immer ich) hin zu gut gemeinten Abstimmungen (Turniere, Stimmzählung, Schlichtung). Letztere wurden immer weiter verfeinert, manchmal auch übertrieben, schließlich wurde sogar die Wahl durch Versteigerung erfunden!

Aufgabe: Sehen Sie Parallelen zur Geschichte der Menschheit? Lernen Sie aus diesen Erfahrungen und machen Sie es besser!

Auswahlverfahren

Gegeben sei die Menge $I = \{1, 2, \dots, n\}$ der Individuen/Kriterien, $n \ge 2$, sowie die Alternativen/Kandidaten $A = \{a, b, c, \dots\}$, wobei $2 \le \sharp A < \infty$. Wie zuvor sei $\mathbb{S} = \mathbb{S}(A)$ die Menge aller strikten Präferenzen $P \subseteq A \times A$. Wir schreiben $x \succcurlyeq y$ für $(x, y) \in P$, sowie $x \succ y$ falls zudem $x \ne y$ gilt. Wir schreiben $a = \max P := \max(A, \succcurlyeq)$, falls $a \succcurlyeq x$ für alle $x \in A$ gilt.

Definition O2A: Auswahlverfahren

Ein **Auswahlverfahren** W ist eine Funktion (= Zuordnung = Abbildung)

$$W : \mathbb{S}^n \to A : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto a.$$

Das Verfahren W ist durch Spieler $i \in I$ **manipulierbar**, falls

$$W(P'_i; P_{-i}) \succ_i W(P_i; P_{-i})$$

für einen Präferenzvektor $P \in \mathbb{S}^n$ und einseitige Abweichung $P'_i \in \mathbb{S}$.

Das Verfahren W ist **nicht-manipulierbar** (engl. *strategy-proof*), falls

$$W(P_i; P_{-i}) \succcurlyeq_i W(P'_i; P_{-i})$$

für alle Spieler $i \in I$ sowie $P \in \mathbb{S}^n$ und $P'_i \in \mathbb{S}$ gilt. Nash–Gleichgewicht!

Auswahlverfahren

Wir haben für Probleme wie Verhandlungen, Koalitionen, Wahlen, usw. gewisse Axiome als logische (Mindest-)Anforderungen ausformuliert. Dies dient ganz konkret und sehr praktisch zur Qualitätssicherung: Wir wollen fehlerbehaftete Verfahren erkennen und vermeiden.

Bei Wahlen ist strategische Manipulierbarkeit ein ernstes Problem. Die Verletzung grundlegender Qualitätskriterien kann dazu führen, dass Wähler nicht ihre wahre Entscheidung zum Ausdruck bringen, sondern strategisch wählen, also wahltaktisch lügen. Das ist gefährlich.

Verletzte Qualitätskriterien ermöglichen zudem (ganz legale) Methoden zur gezielten Beeinflussung und Manipulation des Wahlergebnisses, etwa durch geschickte Reihenfolge bei paarweisen Abstimmungen, das Einbringen irrelevanter Alternativen, eine Aggregation durch beabsichtigte Rundungsfehler (Gerrymandering), usw.

Wir wünschen uns daher ein Auswahlverfahren $W : \mathbb{S}^n \to A$, das nicht manipulierbar ist. Selbst diese Minimalforderung ist leider nicht erfüllbar, wie der folgende Satz zeigt.

Satz von Gibbard–Satterthwaite

Satz O2B: Gibbard 1973, Satterthwaite 1975

Es gebe mindestens drei Alternativen, $\sharp A \ge 3$. Jedes surjektive Auswahlverfahren $W : \mathbb{S}^n \twoheadrightarrow A$ ist entweder manipulierbar oder diktatorisch.

In W heißt $k \in I$ **Diktator**, wenn stets $W(P_1, \dots, P_n) = \max P_k$ gilt.

Lemma O2C: Muller–Satterthwaite 1977

Ist ein surjektives Auswahlverfahren $W : \mathbb{S}^n \twoheadrightarrow A$ nicht-manipulierbar, dann ist W einhellig und monoton.

UNA: Einhelligkeit. $W(P_1, \dots, P_n) = a$ falls $a = \max P_i$ für alle $i \in I$.

MON: Monotonie. Sei $W(P_1, \dots, P_n) = a$. Für alle Alternativen $b \in A$ gelte $\{\, i \mid a \succ_i b \,\} \subseteq \{\, i \mid a \succ'_i b \,\}$. Dann folgt $W(P'_1, \dots, P'_n) = a$.

Satz O2D: Muller–Satterthwaite 1977

Es gebe mindestens drei Alternativen, $\sharp A \ge 3$. Erfüllt ein Verfahren $W : \mathbb{S}^n \to A$ Einhelligkeit und Monotonie, dann ist W diktatorisch.

Satz von Gibbard–Satterthwaite

Zur Existenz eines Diktators setzen wir unseren Sprachgebrauch fort:
DIC: Gibt es einen Diktator, so heißt das Verfahren W *diktatorisch*.
~~DIC~~: Gibt es keinen Diktator, so nennen wir W *nicht-diktatorisch*.

Die Axiome der Einhelligkeit, Monotonie und Nicht-Diktatur kennen wir aus Arrows axiomatischer Behandlung von Wahlverfahren $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$.

Hier jedoch betrachten wir Auswahlverfahren $W : \mathbb{S}^n \to A$, daher müssen wir die Begriffe übertragen und im neuen Kontext präzise formulieren.

Einhelligkeit ist klar, wie zuvor, Monotonie braucht etwas Gewöhnung. Wie zuvor ist es das stärkste und daher umstrittenste der Axiome.

Beispiel: Die Diktatur $D_k : \mathbb{S}^n \twoheadrightarrow A : (P_1, \dots, P_n) \mapsto \max P_k$ ist nicht manipulierbar: Das ist ein starker Vorteil, und zugleich ihr einziger.

Der Diktator kann durch Abweichung sein Ergebnis nur verschlechtern. Alle anderen Spieler können das Ergebnis überhaupt nicht beeinflussen.

Wir zeigen nun umgekehrt: Wenn $W : \mathbb{S}^n \twoheadrightarrow A$ nicht manipulierbar ist, dann ist es einhellig und monoton, und im Falle $\sharp A \ge 3$ diktatorisch.

Satz von Muller–Satterthwaite

Wir untersuchen der Reihe nach folgende Präferenzvektoren:

$$P^0 = \left\{ \begin{array}{rccccccc} 1 & : & a & \succ & \dots & \succ & b \\ & : & a & \succ & \dots & \succ & b \\ n & : & a & \succ & \dots & \succ & b \end{array} \right\} \mapsto a \quad \text{UNA}$$

$$P^1 = \left\{ \begin{array}{rccccccc} <k & : & b & \succ & a & \succ & \dots \\ k & : & a & \succ & b & \succ & \dots \\ >k & : & a & \succ & \dots & \succ & b \end{array} \right\} \mapsto a \quad \text{bleibt}$$

$$P^2 = \left\{ \begin{array}{rccccccc} <k & : & b & \succ & a & \succ & \dots \\ k & : & b & \succ & a & \succ & \dots \\ >k & : & a & \succ & \dots & \succ & b \end{array} \right\} \mapsto b \quad \text{kippt}$$

$$P^3 = \left\{ \begin{array}{rccccccc} <k & : & b & \succ & \dots & \succ & a \\ k & : & b & \succ & a & \succ & \dots \\ >k & : & \dots & \succ & a & \succ & b \end{array} \right\} \mapsto b \quad \text{MON}$$

Satz von Muller–Satterthwaite

Wir untersuchen der Reihe nach folgende Präferenzvektoren:

$$P^4 = \left\{ \begin{array}{rccccccc} <k & : & b & \succ & \dots & \succ & a \\ k & : & a & \succ & b & \succ & \dots \\ >k & : & \dots & \succ & a & \succ & b \end{array} \right\} \mapsto a \quad \text{nicht } b$$

$$P^5 = \left\{ \begin{array}{rccccccc} <k & : & \dots & \succ & b & \succ & a \\ k & : & a & \succ & b & \succ & \dots \\ >k & : & \dots & \succ & a & \succ & b \end{array} \right\} \mapsto a \quad \text{MON}$$

$$P^6 = \left\{ \begin{array}{rccccccccc} <k & : & \dots & \succ & c & \succ & b & \succ & a \\ k & : & a & \succ & c & \succ & b & \succ & \dots \\ >k & : & \dots & \succ & c & \succ & a & \succ & b \end{array} \right\} \mapsto a \quad \text{MON}$$

$$P^7 = \left\{ \begin{array}{rccccccccc} <k & : & \dots & \succ & c & \succ & b & \succ & a \\ k & : & a & \succ & c & \succ & b & \succ & \dots \\ >k & : & \dots & \succ & c & \succ & b & \succ & a \end{array} \right\} \mapsto a \quad \text{nicht } b$$

Beweis des Satzes von Muller–Satterthwaite O2D:
Vorgelegt sei ein Auswahlverfahren $W : \mathbb{S}^n \to A$, einhellig und monoton. Wir untersuchen die gezeigten Präferenzvektoren $P^\ell = (P_1^\ell, \dots, P_n^\ell)$ und berechnen allein mit Einhelligkeit und Monotonie die Auswahl $W(P^\ell)$:

(0) Dank Einhelligkeit gilt anfangs $W(P^0) = a$.

(1) Wir rücken b schrittweise nach oben solange $W(P^1) = a$, ...

(2) bis schließlich $W(P^2) = b$. Dank Einhelligkeit geschieht dies irgendwann. Dank Monotonie geschieht es beim Tausch $a \leftrightarrow b$.

(3) In allen Präferenzen P_i^2 mit $i \neq k$ rücken wir a nach unten.
Dank Monotonie bleibt das Ergebnis $W(P^3) = b$ erhalten.

(4) In Präferenz P_k^3 tauschen wir die Alternativen $a \leftrightarrow b$.
Dank Monotonie ist das Ergebnis hier $W(P^4) \in \{a, b\}$.
Wäre $W(P^4) = b$, dann auch $W(P^1) = b$ dank Monotonie.
Dies ist ein Widerspruch zu (1), also gilt $W(P^4) = a$.

(5) In allen Präferenzen P_i^4 mit $i < k$ rücken wir b nach unten.
Dank Monotonie bleibt das Ergebnis $W(P^5) = a$ erhalten.

(6) In P^6 rücken wir $c \in A \smallsetminus \{a, b\}$ in die angegebene Position vor b.
Dank Monotonie bleibt dabei das Ergebnis $W(P^6) = a$ erhalten.

(7) In allen Präferenzen P_i^7 mit $i > k$ tauschen wir $a \leftrightarrow b$.
Dank Monotonie ist das Ergebnis $W(P^7) \in \{a, b\}$.
Es kann nicht b sein, denn überall gilt $c \succ b$.
(Andernfalls rücke das Paar $c \succ b$ überall ganz nach oben; dank Monotonie und Einhelligkeit gälte dann $W(P) = c$, Widerspruch.)

In der speziellen Konstellation P^7 setzen alle Wähler die Alternative a ans Ende, nur k nach vorne, dennoch gilt $W(P_1^7, \dots, P_n^7) = \max P_k^7$.
Dank Monotonie gilt dies für alle Präferenzvektoren $(P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{S}^n$.

Das zeigt: Im Verfahren W ist k souverän bezüglich der Alternative a.
Anders gesagt: Zu jeder Alternative $a \in A$ existiert ein Spieler $k_a \in I$, der diese Alternative a gegen alle anderen Spieler durchsetzen kann.
Für je zwei Alternativen $a \neq b$ in A gilt $k_a = k_b$: Es kann nur einen geben!
Wir erhalten also schließlich den ersehnten Quantorentausch: Es gibt einen Spieler $k \in I$, der jede Alternative $a \in A$ durchsetzen kann. $\boxed{\text{QED}}$

Lemma von Muller–Satterthwaite

Beweis des Lemmas O2C: Sei $W : \mathbb{S}^n \twoheadrightarrow A$ nicht-manipulierbar.
Wir folgern daraus die Eigenschaften Einhelligkeit und Monotonie.

(0) Monotonie für einen Spieler $i \in I$:

Sei $W(P_i; P_{-i}) = a$ und $P'_i \in \mathbb{S}$. Für alle $b \in A$ gelte $a \succ_i b \Rightarrow a \succ'_i b$.
Wir behaupten $W(P'_i; P_{-i}) = a$. Angenommen $W(P'_i; P_{-i}) = b \neq a$.
Dank Nicht-Manipulierbarkeit gilt dann $a \succ_i b$, also auch $a \succ'_i b$.
Damit wäre W manipulierbar wegen $W(P_i; P_{-i}) \succ'_i W(P'_i; P_{-i})$.

(1) Monotonie für alle Spieler $i \in I$:

Sei $W(P_1, \dots, P_n) = a$. Für alle Alternativen $b \in A$ und alle $i \in I$ gelte $a \succ_i b \Rightarrow a \succ'_i b$. Dank (0) können wir P_i durch P'_i ersetzen, ohne das Ergebnis zu ändern. Damit folgt $W(P'_1, \dots, P'_n) = a$, also Monotonie.

(2) Einhelligkeit / Souveränität:

Sei $a \in A$. Da $W : \mathbb{S}^n \to A$ surjektiv ist, existiert $P \in \mathbb{S}^n$ mit $W(P) = a$.
Wir rücken a in jeder Präferenz P_i nach oben, sodass $a = \max P_i$.
Dank Monotonie (1) gilt weiterhin $W(P) = a$, also Einhelligkeit. $\boxed{\text{QED}}$

Lemma von Muller–Satterthwaite

🙂 Das Lemma O2C verbindet zwei grundlegende Sichtweisen:
Strategisch gesehen steht Nicht-Manipulierbarkeit im Vordergrund.
Axiomatisch gesehen sind Einhelligkeit und Monotonie zentral.

Aufgabe: Gilt in Lemma O2C auch die Umkehrung? Das heißt:
Aus einhellig und monoton folgt surjektiv und nicht-manipulierbar.

Lösung: Im Falle $\sharp A \geq 3$ greift der Satz O2D von Muller–Satterthwaite:
Das Auswahlverfahren W ist diktatorisch und somit nicht-manipulierbar.

Im Falle $\sharp A = 2$ prüfen wir die vermutete Implikation direkt nach:
Einhelligkeit von $W : \mathbb{S}^n \to A$ garantiert, dass W surjektiv ist.

Monotonie impliziert Nicht-Manipulierbarkeit: Gilt $W(P_i; P_{-i}) = b$, aber $a \succ_i b$, dann kann Spieler i das Ergebnis nicht verbessern, also nicht das für ihn bessere Ergebnis $W(P'_i; P_{-i}) = a$ erreichen.

Dasselbe Argument gilt allgemein für $\sharp A \geq 2$, auch ohne Satz O2D.
Hierzu rücken wir das Paar a, b in jeder Präferenz ganz nach oben und argumentieren dann wie zuvor für $\sharp A = 2$. (Lemma O2E)

Rückblickende Bemerkungen

Die obigen Beweise sind genial einfach und einfach genial, sie sind vollkommen elementar und zugleich extrem raffiniert.

Ich wiederhole daher das Mantra:

> *“Elementary” does not mean easy to understand.*
> *“Elementary” means that very little is required*
> *to know ahead of time in order to understand it,*
> *except to have an infinite amount of intelligence.*
> (Richard P. Feynman, 1918–1988, Nobelpreis 1965)

Bitte nehmen Sie sich Stift und Papier zur Hand und gehen Sie alle Schritte durch, erst mit dann ohne Vorlage. Erklären Sie die Ergebnisse (Definitionen, Beispiele, Sätze, Beweise) erst sich und dann anderen.

Nur so lernen, begreifen und verstehen Sie Mathematik, … oder jedes andere Thema, das Ihnen am Herzen liegt.

> *Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!*
> (Immanuel Kant, *Was ist Aufklärung?*, 1784)

Rückblickende Bemerkungen

Unsere Ergebnisse zu Verhandlungen (Kapitel L) und Koalitionen (Kapitel M) waren recht überraschend und zudem überaus erfreulich: Zu konkreten Problemen finden wir konkrete, praktische Lösungen. Der Weg dorthin führte uns über eine beachtliche Wegstrecke durch wunderbare Theorielandschaften, doch jeder Schritt hat sich gelohnt: Wir kehren mit reicher Ernte zurück, mathematisch erhellt und erheitert.

Anders sieht es bei kollektiven Entscheidungen aus mit den stachligen Themen Wahlverfahren (Kapitel N) und Auswahlverfahren (Kapitel O). Hier ist das Ergebnis ebenso überraschend, doch leider unerfreulich: Grundlegende Minimalforderungen nach Fairness und Gerechtigkeit sind unerfüllbar, nicht nur historisch-empirisch, sondern nachweislich!

Es ist gut zu wissen, was möglich ist, und ebenso, was unmöglich ist. Die Sehnsucht nach einfachen Antworten und klaren Autoritäten ist zwar weit verbreitet, aber einer komplexen Sachlage meist nicht angemessen. Konsens oder Kompromiss muss die Gesellschaft selbst herstellen, diese mühsame Arbeit kann ihr keine „magische Formel“ abnehmen.

Alternativer Beweis: Arrow impliziert Muller–Satterthwaite.

Aus dem vorigen Kapitel kennen wir Arrows Satz vom Diktator (N3E). Wir untersuchen hierzu alle **Wahlverfahren** von der Form $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$.

Vereinfachend beschränken wir uns nun auf strikte Präferenzen $\mathbb{S} \subset \mathbb{P}$. Wenn wir zudem Indifferenzen im Ergebnis aufbrechen, so erhalten wir

$$V \;:\; \mathbb{S}^n \to \mathbb{S} \;:\; (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P.$$

Zu Recht wenden Sie ein, dass viele Wahlverfahren nicht so verlaufen. Wir untersuchen daher noch einfacher **Auswahlverfahren** von der Form

$$W \;:\; \mathbb{S}^n \to A \;:\; (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto a.$$

Jedes Wahlverfahren V definiert ein Auswahlverfahren $W = \max V$. Wenn wir also ein geeignetes V haben, dann automatisch auch W.

Wir zeigen nun umgekehrt, wir wir aus jedem nicht-manipulierbaren Auswahlverfahren W ein Wahlverfahren V rekonstruieren können.

Arrows Satz N3E impliziert dann Satz O2D von Muller–Satterthwaite und somit auch Satz O2B von Gibbard–Satterthwaite.

Alternativer Beweis: Arrow impliziert Muller–Satterthwaite.

Vorgelegt sei ein **Auswahlverfahren** / *social choice function*

$$W \;:\; \mathbb{S}^n \to A \;:\; (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto a.$$

Konstruieren wollen wir ein **Wahlverfahren** / *social welfare function*

$$V \;:\; \mathbb{S}^n \to \mathbb{S} \;:\; (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P.$$

Sei $P \subseteq A \times A$ eine Präferenz auf der Menge A, also transitiv und linear, geschrieben $x \succcurlyeq y$ für $(x, y) \in P$. Jede Zerlegung $A = B \sqcup B'$ definiert

$$P^B := \big[P \cap (B \times B)\big] \cup \big[P \cap (B' \times B')\big] \cup \big[B \times B'\big].$$

Dies ist eine Präferenz, identisch mit P für $x, y \in B$ und für $x, y \in B'$, aber für $x \in B$ und $y \in B'$ gilt $x \succ y$. Anschaulich entsteht P^B aus P, indem wir B nach vorne sortieren. Ist P strikt, so auch P^B. Beispiele:

$$\begin{aligned} P \quad &: a \succ b \succ c \approx d \succ e, & \qquad P^{\{b,e\}} \;&: b \succ e \succ a \succ c \approx d, \\ P^{\{c\}} \;&: c \succ a \succ b \succ d \succ e, & \qquad P^{\{b,c,d\}} \;&: b \succ c \approx d \succ a \succ e. \end{aligned}$$

Abkürzend schreiben wir $P^x = P^{\{x\}}$, $P^{xy} = P^{\{x,y\}}$ und $P^{xyz} = P^{\{x,y,z\}}$.

Lemma O2E: kanonische Fortsetzung von Auswahlverfahren

Vorgelegt sei ein einhelliges, monotones Auswahlverfahren

$$W : \mathbb{S}^n \to A : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto a.$$

(0) Für alle $\emptyset \neq B \subseteq A$ gilt $W(P_1^B, \dots, P_n^B) \in B$. Für alle $\emptyset \neq C \subseteq B \subseteq A$ gilt $W(P_1^B, \dots, P_n^B) = W(P_1^C, \dots, P_n^C)$ oder $W(P_1^B, \dots, P_n^B) \in B \smallsetminus C$.

(1) Somit lässt sich W kanonisch fortsetzen zu dem Wahlverfahren

$$V : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S} : (P_1, P_2, \dots, P_n) \mapsto P \quad \text{mit}$$
$$P := \{ (x, y) \mid W(P_1^{xy}, P_2^{xy}, \dots, P_n^{xy}) = x \}.$$

(2) Hierbei gilt $W = \max V$, und auch V ist einhellig und monoton.

Nach Satz N3B von Arrow gilt für $\sharp A \geq 3$: Jedes Wahlverfahren V ist diktatorisch, somit auch das zugehörige Auswahlverfahren $W = \max V$.

Aufgabe: Weisen Sie alle Aussagen des Lemmas sorgfältig nach.

Lösung: (0a) Angenommen $W(P_1^B, \dots, P_n^B) = a$ mit $a \in A \smallsetminus B$. Wir wählen $b \in B$. Wegen MON müsste $W((P_1^B)^b, \dots, (P_n^B)^b) = a$ gelten, doch dank UNA gilt $W((P_1^B)^b, \dots, (P_n^B)^b) = b$. Widerspruch!

(0b) Angenommen $W(P_1^B, \dots, P_n^B) = c \in C$. Dank MON folgt dann $c = W(P_1^B, \dots, P_n^B) = W((P_1^B)^C, \dots, (P_n^B)^C) = W(P_1^C, \dots, P_n^C)$.

(1) Wir müssen $P \in \mathbb{S}$ zeigen, d.h. $V : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}$ ist wohldefiniert.

Reflexivität: Für $x = y$ in A gilt $W(P_1^x, \dots, P_n^x) = x$ dank UNA.

Antisymmetrie: Für $x \neq y$ in A gilt $W(P_1^{xy}, \dots, P_n^{xy}) \in \{x, y\}$, also entweder $(x, y) \in P$ oder $(y, x) \in P$, aber niemals beides.

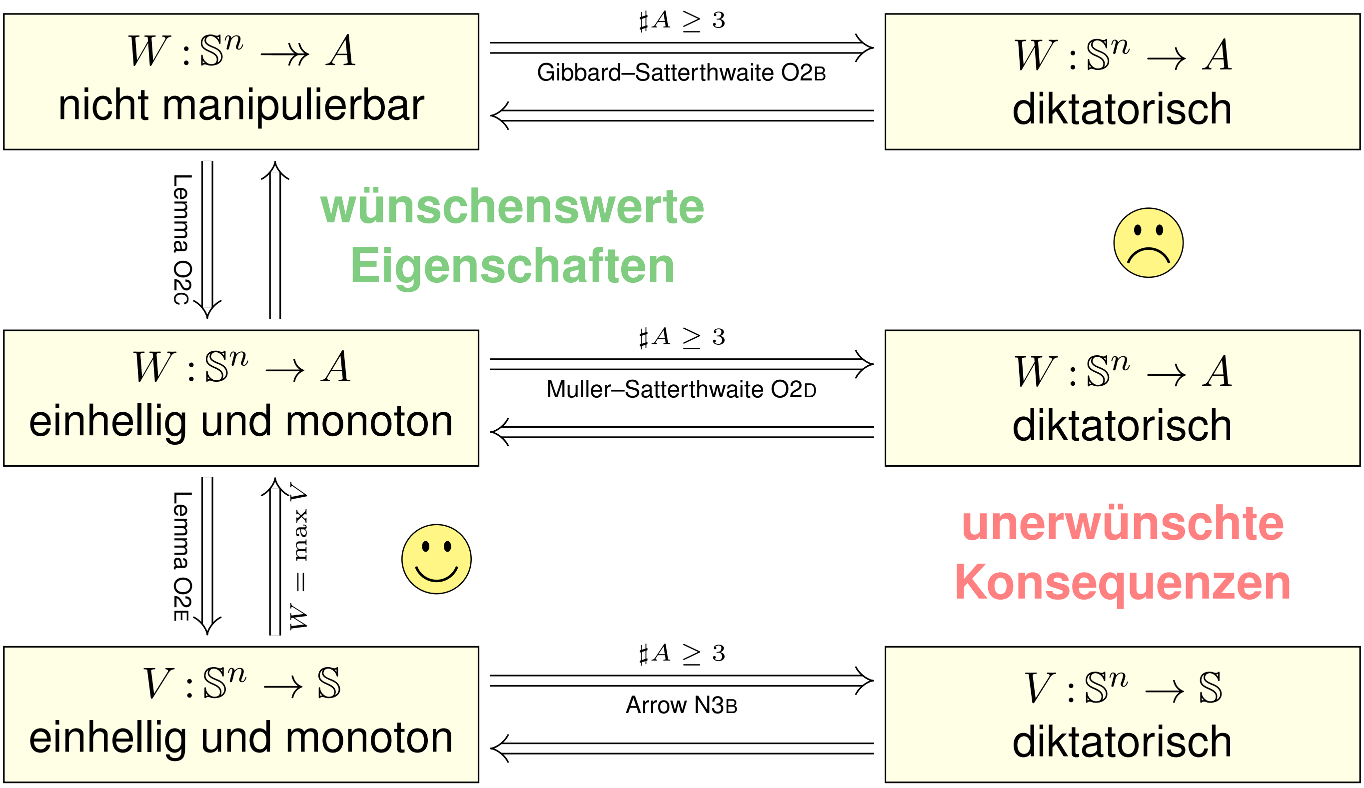
Transitivität: Gegeben seien $x, y, z \in A$ mit $W(P_1^{xy}, \dots, P_n^{xy}) = x$ $W(P_1^{yz}, \dots, P_n^{yz}) = y$. Wir müssen $W(P_1^{xz}, \dots, P_n^{xz}) = x$ zeigen.

Aus $W(P_1^{xy}, \dots, P_n^{xy}) = x$ folgt $W(P_1^{xyz}, \dots, P_n^{xyz}) \in \{x, z\}$ dank (0).
Aus $W(P_1^{yz}, \dots, P_n^{yz}) = y$ folgt $W(P_1^{xyz}, \dots, P_n^{xyz}) \in \{x, y\}$ dank (0).
Daraus folgt $W(P_1^{xyz}, \dots, P_n^{xyz}) = x$ und somit $W(P_1^{xz}, \dots, P_n^{xz}) = x$:
Wäre $W(P_1^{xz}, \dots, P_n^{xz}) = z$, so $W(P_1^{xyz}, \dots, P_n^{xyz}) \in \{y, z\}$ dank (0).

(2) Die weiteren Aussagen sind klar. $\boxed{\text{QED}}$

Überblick zu Aus/Wahlverfahren

Abgestimmt wird über eine Menge A von Alternativen, wobei $\sharp A \ge 2$.
Wie zuvor sei $\mathbb{S} = \mathbb{S}(A)$ die Menge der strikten Präferenzen auf A.



Überblick zu Aus/Wahlverfahren

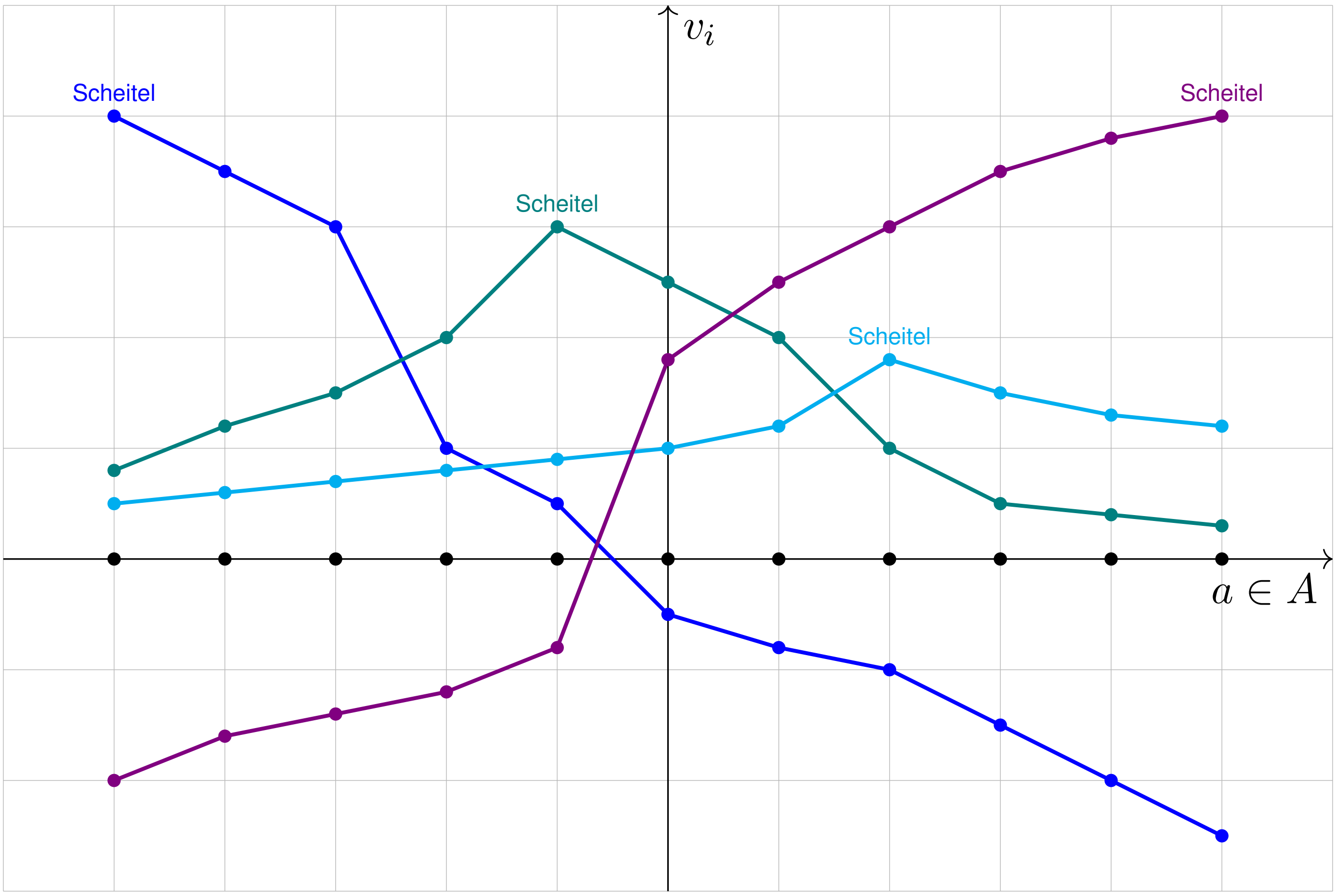
Wir haben das Thema Aus/Wahlverfahren nun verschieden betrachtet und mehrfach umformuliert, das Ergebnis ist robust und immer gleich: Bei drei oder mehr Alternativen gibt es kein perfektes Verfahren. Die obige Graphik fasst die logischen Implikationen zusammen.

Wir haben ein konkretes Anwendungsproblem, demokratische Wahlen, und nehmen hierzu eine ganz pragmatische Ingenieurperspektive ein: Wie können wir geeignete Aus/Wahlverfahren explizit konstruieren? Welche Mindestanforderungen / Axiome müssen erfüllt werden?

Bei Wahlen ist strategische Manipulierbarkeit ein ernstes Problem. Die Verletzung grundlegender Qualitätskriterien kann dazu führen, dass Wähler nicht ihre wahre Entscheidung zum Ausdruck bringen, sondern strategisch wählen, also wahltaktisch lügen. Das ist gefährlich.

Wir beleuchten abschließend eine partielle Lösung, die zwar speziell ist, doch manchmal durchaus anwendbar. Wenn wir die Heterogenität der Gesellschaft hinreichend einschränken können, etwa auf gescheitelte Präferenzen, dann sind perfekte Aus/Wahlverfahren tatsächlich möglich.

Gescheitelte Präferenzen / *single-peaked preferences*



Gescheitelte Präferenzen / *single-peaked preferences*

Wie zuvor sei A die Menge der Alternativen, über die abgestimmt wird. Als zusätzliche Struktur geben wir der Menge A nun eine feste lineare Ordnung $\le$, etwa links nach rechts auf einem politischen Spektrum.

Eine Bewertung $v : (A, \le) \to (\mathbb{R}, \le)$ heißt **gescheitelt** / *single-peaked*, wenn ein Maximum $a \in A$ existiert, sodass für alle $x, y \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} x < y \le a \quad &\Longrightarrow \quad v(x) < v(y) \\ a \le x < y \quad &\Longrightarrow \quad v(x) > v(y) \end{aligned}$$

Gleiches gilt für die zugehörige Präferenz, mit $x \preccurlyeq y$ gdw $v(x) \le v(y)$:

$$\begin{aligned} x < y \le a \quad &\Longrightarrow \quad x \prec y \\ a \le x < y \quad &\Longrightarrow \quad x \succ y \end{aligned}$$

Beispiel: Diese Annahme ist oft plausibel für ein politisches Spektrum oder die Abstimmung einer Zahl (Volljährigkeit, Rentenalter, etc.).

Mit $\mathbb{P}_\le = \mathbb{P}(A, \le)$ bzw. $\mathbb{S}_\le = \mathbb{S}(A, \le)$ bezeichnen wir die Menge aller gescheitelten (strikten) Präferenzen auf A bezüglich der Ordnung $\le$.

Gescheitelte Präferenzen erlauben perfekte Verfahren.

Weiterhin sei $(A, \leq)$ die linear geordnete Menge der Alternativen. Hierin sei $a_1, \dots, a_n \in A$ eine Liste mit ungerader Länge $n = 2m - 1$. Nach Sortierung können wir $a_1 \leq \dots \leq a_m \leq \dots \leq a_n$ annehmen; der **Median** oder **Zentralwert** ist dann $\operatorname{med}(a_1, \dots, a_n) = a_m$.

Satz O3A: Gescheitelte Präferenzen erlauben perfekte Verfahren.

(1) Sei $n \geq 3$ ungerade. Wir definieren das **Median-Auswahlverfahren**

$$M : \mathbb{P}^n_{\leq} \to A : (P_1, \dots, P_n) \mapsto a = \operatorname{med}\big(\max P_1, \dots, \max P_n\big).$$

Dieses Verfahren hat alle guten Eigenschaften: Es ist nicht-diktatorisch, surjektiv und nicht-manipulierbar, somit auch einhellig und monoton.

(2) Sei $n \geq 3$ ungerade. Wir definieren das **Condorcet–Wahlverfahren**

$$C : \mathbb{S}^n_{\leq} \to \mathbb{S}_{\leq} : (P_1, \dots, P_n) \mapsto P \quad \text{durch}$$
$$P = \big\{ (x, y) \in A^2 \;\big|\; \sharp\{ i \mid (x, y) \in P_i \} \geq \sharp\{ i \mid (y, x) \in P_i \} \big\}.$$

Dieses Verfahren hat alle guten Eigenschaften: Es ist nicht-diktatorisch, einhellig und monoton, somit auch unabhängig von dritten Alternativen.

Gescheitelte Präferenzen erlauben perfekte Verfahren.

Im Falle $\sharp A \geq 3$ von drei oder mehr Alternativen wissen wir bereits, dass allgemeine Auswahlverfahren $W : \mathbb{S}^n \to A$ (O2B, O2D) oder gar allgemeine Wahlverfahren $V : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}$ bzw. $V : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ (N3B, N3E) mit all diesen wünschenswerten Eigenschaften nicht existieren.

Das Wahlverfahren soll allgemein gelten, also auch aus extremen, heterogenen, widersprüchlichen Voten eine gemeinsame Präferenz extrahieren. Die Gesellschaft kann extrem uneinig sein, gar zerstritten, und das Wahlverfahren soll es irgendwie richten. Das ist zu viel verlangt!

Hier betrachten wir speziell auf $\mathbb{P}_{\leq} \subset \mathbb{P}$ beschränkte Auswahlverfahren $W : \mathbb{P}^n_{\leq} \to A$ bzw. auf $\mathbb{S}_{\leq} \subset \mathbb{S}$ beschränkte Wahlverfahren $V : \mathbb{S}^n_{\leq} \to \mathbb{S}_{\leq}$. Die hierdurch modellierte Gesellschaft ist deutlich weniger heterogen. In dieser günstigen Situation sind perfekte Aus/Wahlverfahren möglich!

Es ist gut zu wissen, was möglich ist, und ebenso, was unmöglich ist: Die uneingeschränkte Problemstellung ist nachweislich unlösbar, die eingeschränkte Problemstellung hingegen erlaubt Lösungen! Auch über diese bescheidenen Erfolge dürfen wir uns freuen.

Gescheitelte Präferenzen erlauben perfekte Verfahren.

Aufgabe: Weisen Sie alle Aussagen des Satzes sorgfältig nach.

Lösung: (1a) Surjektivität ist klar: Zu jedem Element $a \in A$ existiert eine gescheitelte Präferenz $P \in \mathbb{P}_{\le}$ mit $\max P = a$, somit $M(P, \dots, P) = a$.

(1b) Anreiz-Kompatibilität: Sei $M(P_1, \dots, P_n) = a$. Kann ein Spieler $i \in I$ mit Scheitel $\max P_i = b$ das Ergebnis zu seinen Gunsten manipulieren? Im Falle $a = b$ sicher nicht. Im Falle $a < b$ kann er durch strategische Wahl b' den Median nur nach links verrücken zu $a' < a$, aus seiner Sicht also eine Verschlechterung. Im Falle $b < a$ gilt symmetrisch dasselbe.

Daraus folgen Einhelligkeit und Monotonie dank Lemma O2C.
Sie sind auch leicht direkt nachzuweisen, versuchen Sie es!

(1c) Nicht-Diktatur: Jeder Spieler $i \in I$ kann von den anderen Spielern überstimmt werden, da wir hier ingesamt $n \ge 3$ Spieler voraussetzen. Ausführlich: Sei $P_i \in \mathbb{P}_{\le}$ mit $\max P_i = b$. Es existiert $a \in A$ mit $a \ne b$ und für alle $j \ne i$ existiert eine Präferenz $P_j \in \mathbb{P}_{\le}$ mit $\max P_j = a$. Dann gilt $M(P_1, \dots, P_n) = a$, und somit ist Spieler i kein Diktator.

Gescheitelte Präferenzen erlauben perfekte Verfahren.

(2) Für die so definierte Relation P müssen wir $P \in \mathbb{S}_{\le}$ zeigen.

(2a) Trichotomie ist klar: Für je zwei Alternativen $x, y \in A$ gilt entweder $x = y$ oder $x \succ y$ oder $y \succ x$, da die Anzahl n der Spieler ungerade ist.

(2b) Der Median $a = M(P_1, \dots, P_n)$ gewinnt mit absoluter Mehrheit im direkten Vergleich gegen jede Alternative $x \in A \smallsetminus \{a\}$. Nach Umordnung gilt $\max P_1 \le \ldots \le \max P_m \le \cdots \le \max P_n$ und $a = \max P_m$. Somit:
Für alle $x < y \le a$ gilt $x \prec y$ aufgrund der abs. Mehrheit $P_m, \dots, P_n$.
Für alle $a \ge y > x$ gilt $y \succ x$ aufgrund der abs. Mehrheit $P_1, \dots, P_m$.

Transitivität: Vorgelegt seien drei Elemente $x < y < z$ in A. Wir müssen die Zykel $x \prec y \prec z \prec x$ und $x \prec z \prec y \prec x$ ausschließen. Eingeschränkt auf $A' = \{\, x < y < z \,\}$ ist jede Präferenz $P_i' = P_i \cap (A' \times A')$ gescheitelt. Der Median $a' = M(P_1', \dots, P_n') \in A'$ gewinnt demnach gegen jede der beiden anderen Alternativen in $A' \smallsetminus \{a'\}$, daher ist ein Zykel unmöglich.

Somit ist $C : \mathbb{S}_{\le}^n \to \mathbb{S}_{\le} : (P_1, \dots, P_n) \mapsto P$ tatsächlich wohldefiniert.
Die weiteren Eigenschaften von C sind klar nach Konstruktion. $\boxed{\text{QED}}$

Kapitel P

Auktionen und Äquivalenzsatz von Vickrey

Höre ich mehr?

Inhalt dieses Kapitels P

William Vickrey (1914–1996)

William Vickrey war ein US-amerikanischer Ökonom. Er nutzte als erster Methoden der Spieltheorie, um die Dynamik von Auktionen zu untersuchen. In seiner bahnbrechenden Arbeit *Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders* bewies er 1961 Gleichgewichte für Auktionen und damit die grundlegende Erlösäquivalenz.

Dieses Prinzip und spätere Verallgemeinerungen sind bis heute der Grundstein der Auktionstheorie. Zu seinen Ehren heißt die Zweitpreisauktion auch Vickrey–Auktion.

Vickrey erhielt gemeinsam mit James Mirrlees den Wirtschaftsnobelpreis 1996 für seine Beiträge zur ökonomischen Theorie von Anreizen bei unterschiedlichen Graden von Information der Marktteilnehmer.
Er starb kurz nach der Bekanntgabe noch vor der Verleihung.

Motivation und Überblick

Auktionen werden seit der Antike als ökonomisches Instrument genutzt. In den letzten Jahrzehnten, speziell im Internet, gewinnen sie verstärkt an Bedeutung. Auktionstheorie ist eine erfolgreiche und prominente Anwendung der Spieltheorie, insbesondere des Mechanismendesigns.

Auktionen sind Marktinstrumente; die Verfahrensregeln bestimmen aus den Geboten der Teilnehmer die Zuteilung und den Preis der Ressource. Die Bieter / Käufer kennen die Regeln und verhalten sich strategisch. Der Auktionator / Verkäufer kann die Spielregeln wählen und dadurch das Verhalten der Spieler lenken. Insbesondere kann er versuchen, gewisse Ziele zu implementieren, etwa seinen Erlös zu maximieren.

Wir erkennen hierin viele Themen der vorangegangenen Kapitel wieder: Auktionen sind Spiele, meist dynamisch mit unvollständiger Information. Sie ähneln Verhandlungen oder kollektiven Entscheidungen in einem präzise umrissenen ökonomischen Rahmen. Sie sind zentrale Beispiele von Mechanismendesign und Implementierungstheorie. Last not least, Auktionen sind eine reiche Quelle empirischer Daten zu ökonomischen Verhalten und erlauben, spieltheoretische Vorhersagen zu testen.

Mechanismendesign: erste Beispiele

Mechanismendesign ist **umgekehrte Spieltheorie**: Wie können wir wünschenswertes Verhalten durch ein geeignetes Spiel implementieren? Jeder Spieler verfolgt dabei ausschließlich seine eigenen Interessen, dazu nutzt er seine Aktionen, sein Wissen, seine Ressourcen, etc.

- Verhandlungen: axiomatisch (Nash L1E)
  vs dynamische Verhandlung (Rubinstein L2C)
- Koalitionen: axiomatische Lösung (Shapley M2A)
  vs dynamische Verhandlung (Hart–Mas-Colell M3B)
- Wahlverfahren: axiomatischer Un/Möglichkeitssatz (Arrow N3E)
  vs strategische Manipulierbarkeit (Gibbard–Satterthwaite O2B)

Mechanismendesign ist allgegenwärtig:

- Erziehung, Regeln im Sport, Prüfungsordnung, Studienzulassung,
- Checks&Balances, Management, Entwicklungspolitik, Microfinance,
- Gesetzgebung, De/Regulierung, Umweltschutz, Emmissionsrechte,
- Zuweisung von Ressourcen, gerechtes Teilen, Auktionen, uvm.

Mechanismendesign: erste Beispiele

In der **Erziehung** versuchen Eltern ein wünschenswertes Verhalten ihrer Kinder zu ermutigen. Wahrscheinlich sind Sie irgendwann selbst in dieser Situation und müssen über Regeln des gemeinsamen Umgangs entscheiden. Dazu antizipieren Sie das dadurch erzeugte Verhalten.

Spielregeln im **Sport** sollen gewisses Verhalten fördern oder verhindern. Besonders deutlich sehen wir dies bei korrigierenden Anpassungen, im Handball etwa die *Schnelle Mitte* (2001): schnelleres Spiel, mehr Tore, oder Maßnahmen gegen passives Spiel / Zeitspiel: Fairness, Attraktivität.

Die Spielregeln Ihres Studiengangs heißen **Prüfungsordnung**. Damit möchte die Fakultät wünschenswertes Verhalten ermutigen / erzwingen, das zu Ihrem Erfolg im Studium und anschließend im Beruf beiträgt. Ebenso spielt die Uni mit ihren Fakultäten: **Rahmenprüfungsordnung**.

Zur **Zulassung** können wir eine Beschränkung beantragen oder nicht, ein Motivationsschreiben fordern oder nicht, eine Selbst/Evaluation vorschalten oder nicht, etc. Was ist hilfreich für den Studienerfolg? Die Wahl des Verfahrens ist eine Frage des Mechanismendesigns!

Mechanismendesign: erste Beispiele

Ein funktionierendes **Staatswesen** beruht auf einem Gleichgewicht von Checks & Balances. Die Menschheit braucht hierzu viele Jahrhunderte. Gutes **Management** beruht auf Anreizen und positiver Rückkopplung. Hierzu erproben wir Mechanismen: manche helfen, andere schaden.

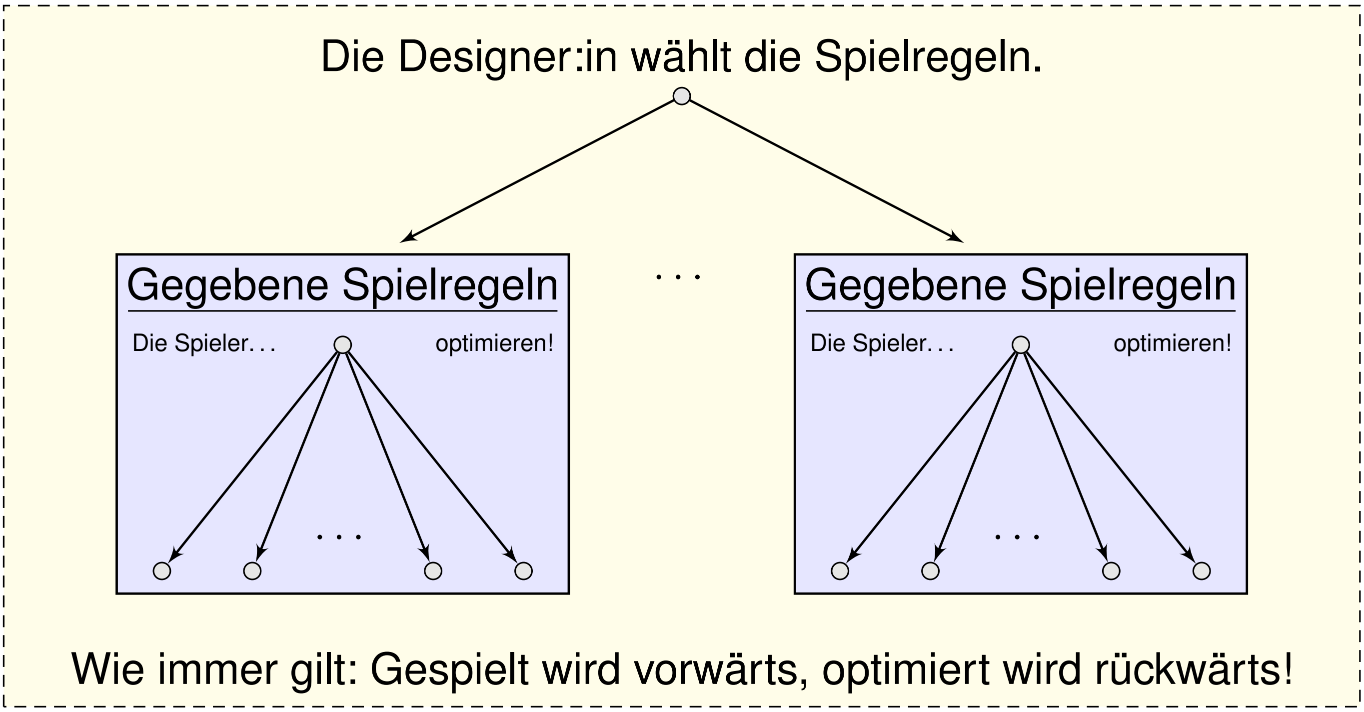
In der **Entwicklungspolitik** wurden nahezu alle denkbaren Fehler auch ausprobiert, wirkliche Entwicklungs*hilfe* ist schwieriger als naiv vermutet. Hier hat sich die **Mikrofinanz** als ein erfolgreiches Instrument bewährt, die Konten, Kredite, Sparbücher, Versicherungen etc. zugänglich macht.

Allgemein will die **Gesetzgebung** nicht nur verbieten, sondern auch positive Anreize schaffen, zum Beispiel durch steuerliche Förderung. Das muss wohlüberlegt und gut konstruiert sein, sonst schadet es. Katastrophenbeispiel: **Cum-Ex-Betrug** durch mehrfache Erstattung.

Der **Emissionsrechtehandel** soll als Instrument der Umweltpolitik Schadstoffemissionen senken und zugleich Kosten gerecht verteilen. Die Hoffnung ruht auf dezentraler **Selbstorganisation** durch Handel, doch dazu müssen sinnvolle, zielführende Anreize vorgegeben werden.

Mechanismendesign: vorwärts und rückwärts

🙂 Mit großer Macht kommt große Verantwortung. Gutes Design kann zu wunderbaren Erfolgen führen, schlechtes Design zu Katastrophen.



🙂 Der Slogan „umgekehrte Spieltheorie“ ist griffig, doch bei genauem Hinsehen ist dies nur eine weitere Anwendung der Rückwärtsinduktion.

Auktionen: Was wird versteigert?

Auktionsnummer 2020-01-005, Bahnhof Nienhagen, Empfangsgebäude mit Nebengebäude, Güterschuppen und Ladestraße. Baujahr unbekannt. Der Wasserturm befindet sich auf einem separaten Teilgrundstück. Aufgrund fehlender Treppen ist eine Innenbesichtigung nicht möglich. Insgesamt sind alle Gebäude stark sanierungsbedürftig. Grundstück $12\,327\mathrm{m}^2$, Geschossfläche: ca. $800\mathrm{m}^2$, Mindestgebot: $3\,000$€. (Quelle: `www.bahnliegenschaften.de`)

Auktionen: Was wird versteigert?

Auktionen sind ein extrem flexibler und daher wichtiger Mechanismus. Sie lassen sich auf viele Situationen maßschneidern, mit allen Chancen und Risiken, es winken hohe Gewinne, aber ebenso drohen Verluste. Manche waren strahlende Erfolge, andere krachende Niederlagen.

Auktionen erfreuen sich in den letzten Jahrzehnten großer Beliebtheit, sowohl bei Wissenschaftlern als auch bei Anwendern, idealerweise bei Käufern und Verkäufern, etwa bei Händlern oder Regierungen, kurzum bei jedem, der etwas Wertvolles zu verkaufen hat. Was wird versteigert?

- Kunstobjekte, Antiquitäten, Trödel, … eBay vertickt alles.
- Rohstoffe, Lebensmittel, Förderlizenzen, Mobilfunklizenzen.
- Zentralbanken versteigern Staatsanleihen [*treasury auctions*].
- Immobilien, Grundstücke (von Bund, Ländern, Bahn, etc.)
- Privatisierung, öffentliche Ausschreibung, Exzellenzinitiative.
- Fundsachen, Konkursmasse, Zwangsversteigerung.
- Das Römische Reich an Didius Julianus, 193 n.Chr.

Auktionen: heutige Beispiele

Weit verbreitet und allgemein bekannt sind Internetauktionen; eBay nutzt eine Zweitpreisauktion / Englische Auktion, ähnlich einer Saalauktion. Öffentliche Aufträge werden oft durch Erstpreisauktion vergeben; die Rollen sind vertauscht, es gewinnt der Bieter mit dem niedrigsten Gebot.

Die Bundesnetzagentur versteigerte bislang dreimal (2000, 2010, 2019) UMTS-Lizenzen (Frequenzblöcke) an zugelassene Mobilfunkanbieter zur Nutzung durch das Universal Mobile Telecommunications System. Im Jahr 2000 versteigerte sie 12 Frequenzblöcke für einen Gesamterlös von 50 Mrd Euro. Vodafone, EPlus, O2, TMobile zahlten jeweils etwa 16.5 Mrd Euro, Mobilcom und Quam gaben später ihre Lizenzen zurück.

Durch die hohen Investitionskosten mussten die Firmen Fremdkapital aufnehmen und gerieten zwischenzeitlich stark unter Druck. Die Kosten werden bis heute an die Endkunden weitergegeben. Die Versteigerung weiterer Frequenzen im Jahre 2010 erbrachte weniger als 5 Mrd Euro, danach 4G (2015) etwa 5.1 Mrd Euro und 5G (2019) etwa 6.6 Mrd Euro.

Große Anwendungserfolge bestärkten die Rolle der Auktionstheorie.

Auktionen: historische Beispiele

Kunstobjekte und Antiquitäten werden seit jeher in Auktionen versteigert. Auch frische Handelsware wird traditionell so verkauft, etwa Tabak, Fisch oder Blumen, aber auch Rohstoffe bis hin zu Altmetall. Gleiches gilt für natürliche Ressourcen, etwa Forstrechte oder Ölbohrlizenzen.

Ihre vielleicht wichtigste Rolle spielten Auktionen bei der Privatisierung von Transportsystemen oder anderen ehemals staatlichen Betrieben.

Das römische Kaiserreich erlebte oft turbulente Zeiten. Im Jahre 193 wurden nacheinander vier Männer zum Kaiser ausgerufen: Pertinax (Januar bis März 193), Didius Julianus (März bis Juni 193), Septimius Severus (193-211) und als Gegenkaiser Pescennius Niger (193-194).

Die Prätorianergarde tötete am 28. März den Kaiser Pertinax (126–193) und versteigerte kurzerhand das Römische Imperium. Didius Julianus gab das Höchstgebot von 25000 Sesterzen pro Mann der Garde und wurde daraufhin Kaiser — und zwei Monate später enthauptet, da er seine Geldversprechen nicht einhalten konnte. Ihm folgte Septimius Severus, der sich auf die Mehrheit der römischen Legionen stützte.

Der Fluch des Gewinners / *winner's curse*

Der **Fluch des Gewinners** ist ein Effekt bei Versteigerungen:

1. Der Gegenstand hat einen objektiven Wert, nicht nur subjektiv.
2. Die individuelle Schätzung dieses Wertes unterliegt Schwankungen.

Aus diesen beiden einfachen Annahmen folgt zunächst anschaulich: Der Gewinner hat typischerweise den Wert am meisten überschätzt. Schlimmstenfalls deckt sein Ertrag nicht die Kosten. Typische Beispiele:

- De/Regulierung: Auktionen von Ölbohrlizenzen, Mobilfunklizenzen
- Börsengang: Erstplatzierung von Aktien [*initial public offering*, IPO]

Die Börse vermittelt normalerweise zwischen Verkäufern und Käufern. Ein IPO jedoch hat nur einen Verkäufer und ähnelt somit einer Auktion. Für Investoren bedeuten IPOs große Chancen, aber auch große Risiken.

Der Fluch des Gewinners ist theoretisch erklärbar und empirisch prüfbar: Er erweist sich als robuste Abweichung zwischen Praxis und Theorie. Für den Auktionator ist dieser Fluch ein Segen, denn er verdient mehr. Für jeden Bieter ist der Fluch ein Risiko, das er gut bedenken muss.

Der Fluch des Gewinners / *winner's curse*

Der Fluch des Gewinners wurde erstmals untersucht von E.C. Capen, R.V. Clapp, W.M. Campbell: *Competitive Bidding in High-Risk Situations.* Journal of Petroleum Technology 23 (1971) 641–653. Die drei Autoren, Ölbohringenieure bei Atlantic Richfield Co., stellten fest, dass Ölfirmen unerwartet niedrige Gewinne machten in den US-Ölfeldern im äußeren Kontinentalschelf; diese wurden damals durch Auktionen vergeben.

> *If it is true, as common sense tells us, that a lease winner tends to be the bidder who most overestimates reserves potential, it follows that the "successful" bidders may not have been so successful after all.*

Ein optimistischer Bieter gewinnt die Auktion mit höherer Wkt. Bayes: Der Gewinner der Auktion ist typischerweise übertrieben optimistisch und bietet deshalb mehr als das versteigerte Objekt wirklich wert ist.

Wir wollen unsere Argumente vereinfachen und werden idealisieren. Insbesondere geht es im Folgenden nur um den privaten Wert, den jeder Bieter treffsicher einschätzen kann. Die Schwankungen bestehen nur in der individuellen Wertschätzung, zum Beispiel für ein Kunstobjekt.

Auktionen: vereinfachende Idealisierungen

Wir betrachten eine **Auktion** mit folgenden Grunddaten:

1. Es wird genau ein **Objekt** verkauft, nicht mehrere zugleich.
2. Die Spieler $i \in I = \{1, \dots, n\}$ sind **Bieter** (potentielle Käufer).
3. Private Information: Spieler i schätzt den **Wert** des Objekts auf s_i gemäß einer **Zufallsvariablen** $S_i : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}_{\ge 0} : \omega \mapsto s_i = S_i(\omega)$.

Zur Vereinfachung nehmen wir zusätzlich an:

4. Die **Verteilung** von $(S_1, \dots, S_n) : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}^n$ ist öffentlich bekannt.
5. Die Variablen $S_1, \dots, S_n$ sind **unabhängig und identisch verteilt**.
6. Jeder Spieler ist **risikoneutral**, optimiert seinen Erwartungswert.

Der Verkäufer / Auktionator legt das **Verfahren** der Auktion fest.

- Spieltheorie: Wie bieten die Spieler? Rationalität? Gleichgewichte?
- Effizienz: An wen geht das Objekt? den Bieter mit höchstem Wert?
- Erlös: Was erwartet der Auktionator insgesamt als Einnahme?

Mechanismendesign: Welches Verfahren wählt der Auktionator?

Auktionen: vereinfachende Idealisierungen

Ich präzisiere die Idealisierungen, damit wir bequem rechnen können. Manche dieser Annahmen scheinen plausibel und leicht zu akzeptieren, andere jedoch sind stark einschränkend und praktisch selten erfüllt: Die Anzahl der teilnehmenden Bieter kann zufällig und unbekannt sein, es können mehrere Objekte versteigert werden, evtl. in Paketen, etc.

Wesentlich für das Modell sind die Wertschätzungen $S_i : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}_{\ge 0}$. Zur Vereinfachung nehmen wir sie als unabhängig an. Das ist halbwegs realistisch bei Objekten von rein privatem Wert. Es ist unrealistisch bei Wirtschaftsobjekten wie natürlichen Ressourcen, etwa Schürfrechten, Forstlizenzen, etc: Die Schätzungen sind hier stark positiv korreliert.

Wir untersuchen hier zunächst nur das Grundmodell; Verfeinerungen ergeben realistischere Modelle und enthüllen weitere Phänomene.

📖 V. Krishna: *Auction Theory*, Academic Press 2009.
P. Klemperer: *Auctions Theory and Practice*, PUP Princeton 2004.
P. Milgrom: *Putting Auction Theory to Work*, CUP Cambridge 2004.
F.M. Menezes, P.K. Monteiro: *Auction Theory*, OUP Oxford 2008.

Auktionen: klassische Verfahren

Für Auktionen mit einem Objekt gibt es mehrere klassische Verfahren. Die einfachsten und häufigsten sind die beiden folgenden Typen:

Erstpreisauktion, *first price (sealed bid) auction*:
Jeder Bieter gibt verdeckt sein verbindliches Gebot ab.
Der Bieter mit dem höchsten Gebot erhält das Objekt
und bezahlt das höchste Gebot (also sein eigenes).

Typisches Beispiel: Vergabe öffentlicher Aufträge.
Strategisch äquivalent zur **Holländischen Auktion**.

Zweitpreisauktion, *second price (sealed bid) auction*:
Jeder Bieter gibt verdeckt sein verbindliches Gebot ab.
Der Bieter mit dem höchsten Gebot erhält das Objekt
und bezahlt das zweithöchste Gebot (nach seinem eigenen).

Typisches Beispiel: Internetauktion, etwa bei eBay.
Strategisch äquivalent zur **Englischen Auktion**.

Die Zweitpreisauktion heißt auch **Vickrey–Auktion**, nach dem Nobelpreisträger William Vickrey, der sie theoretisch untersucht hat.

Auktionen: klassische Verfahren

Um die theoretische Untersuchung von Auktionen zu vereinfachen, gehen wir zunächst von verdeckten und einmaligen Geboten aus. Das ist eine dramatische Vereinfachung, aber für den Anfang hilfreich: Diese Sichtweise ist vollkommen nüchtern und blendet die komplizierte Dynamik von wechselseitigem Bieten und Überbieten zunächst aus.

Warum ist das sinnvoll? Erstaunlicherweise beruht das auf unserer obigen Annahme der stochastisch unabhängigen Wertschätzung! Beim wechselseitigen Bieten fließen offensichtlich Informationen. Da wir die Wertschätzungen $(S_1, \dots, S_n)$ als unabhängig annehmen, kann jeder Bieter alle Informationen der anderen getrost ignorieren.

Anders gesagt: Je nach Auktionsform können die Spieler interagieren, aufgrund der Unabhängigkeit haben sie aber keinerlei Vorteil davon. Im hier vorgestellten Grundmodell rechnet jeder Spieler kühl und rational seine Bietstrategie *vor* der Auktion aus und lässt sich anschließend nicht von möglichem Brimborium *während* der Auktion beeindrucken.

Viele reale Auktionen verlaufen erfahrungsgemäß deutlich anders, deshalb betone ich hier diese einschneidenden Vereinfachungen.

Auktionen: klassische Verfahren

Die **Englische Auktion** verläuft vorwärts, mit steigenden Geboten: Die Bieter steigern ihre Gebote, etwa durch Zuruf oder Handzeichen, bis das Höchstgebot feststeht oder die vorgegebene Zeit abläuft.

Das ist strategisch äquivalent zur Zweitpreisauktion. Allerdings nur unter der Annahme, dass die Bieter trotz größerer Interaktionsmöglichkeiten stur dieselbe Bietstrategie verfolgen. Das ist eine sehr starke und oft unrealistische Rationalitätsforderung: Aufgrund der Unabhängigkeit lassen sich Spieler vom Auktionsverlauf überhaupt nicht beeinflussen, sondern ignorieren alle Signale der anderen Spieler als irrelevant.

Das Auktionsportal eBay nutzt eine Variante dieser Auktionsform. Im einfachsten Falle nennt der Spieler sein Höchstgebot einem Agenten, der stur gemäß dieser Anweisung in einer englischen Auktion bietet. Allerdings wird als Zwischenstand das aktuelle Höchstgebot angezeigt, was viele Spieler zur nachträglichen Erhöhung ihres Gebotes animiert. Dieses Verhalten ist von eBay durchaus beabsichtigt. Es ist vermutlich oft irrational, kann aber auch zur Neueinschätzung des Wertes dienen.

Auktionen: klassische Verfahren

Die **Holländische Auktion** [*Dutch auction*, *clock auction*] hingegen verläuft rückwärts, mit fallenden Preisen: Der Auktionator gibt einen (hohen) Startpreis vor und senkt diesen schrittweise bis zum Zuschlag.

Das ist strategisch äquivalent zur Erstpreisauktion, wie oben erklärt. In der Praxis jedoch kann eine andere Dynamik beobachtet werden.

Ein Vorteil der holländischen Auktion besteht in ihrer Geschwindigkeit. Im Gegensatz zu einer gewöhnlichen Saalauktion wird das Auktionsgut rasch verkauft, die Entscheidung fällt schon bei der ersten Zustimmung eines Interessenten. Die Bieter können nicht aufeinander reagieren, Bietergefechte sind ausgeschlossen. Somit können große Mengen von Auktionsgütern in kurzer Zeit verkauft werden. Die Bieter stehen dabei unter hohem Entscheidungsdruck: Wenn ein Interessent taktiert und auf einen günstigeren Preis wartet, besteht die Gefahr, dass das Auktionsgut an einen Konkurrenten verkauft wird, der schneller zugreift.

Zahlreiche Varianten sind möglich. Zum Beispiel kann der Verkäufer ein Mindestgebot fordern oder hat die Option, das Objekt nicht zu verkaufen.

Perfide Auktion als Glücksspiel: Jeder zahlt.

Beispiel: Die Jeder-Bieter-zahlt-Auktion funktioniert wie folgt:

- Jeder Bieter gibt verdeckt sein verbindliches Gebot ab.
- Der Bieter mit dem höchsten Gebot erhält das Objekt.
- Jeder (!) Bieter bezahlt sein eingereichtes Gebot.

Aufgabe: Was sagt die Theorie? Was geschieht im Experiment? Vickreys Erlös-Äquivalenz-Satz P2C klärt Gleichgewichtserlöse. Solche Auktionen werden wir anschließend selbst als Experiment durchführen und sowohl empirisch als auch theoretisch diskutieren.

Variante: Mit öffentlich ausgerufenen Geboten ist die Auktion lebhafter, allerdings ist die Dynamik komplizierter und schwieriger zu analysieren. Die Gebote sind Signale, dadurch fließt Information, die Bieter können aufeinander reagieren, anders als im statischen Fall verdeckter Gebote.

Solche Auktionen scheinen zunächst sonderbar. In manchen Situationen sind sie durchaus realistisch, etwa als Modell für politisches Lobbying. Ebenso könnte ein gieriger Auktionator dieses Verfahren vorschlagen, und hoffen, dadurch einen besonders hohen Erlös zu erzielen.

Perfide Auktion als Glücksspiel: Jeder zahlt.

Ein typisches Beispiel hierzu sind **politische Kampagnen**, besonders eindrücklich ist die Finanzierung des US-Präsidentschaftswahlkampfs. Traditionell sammeln Lobbygruppen große Spendensummen für ihren Kandidaten, um Einfluss auf die zukünftige Politik der USA zu nehmen.

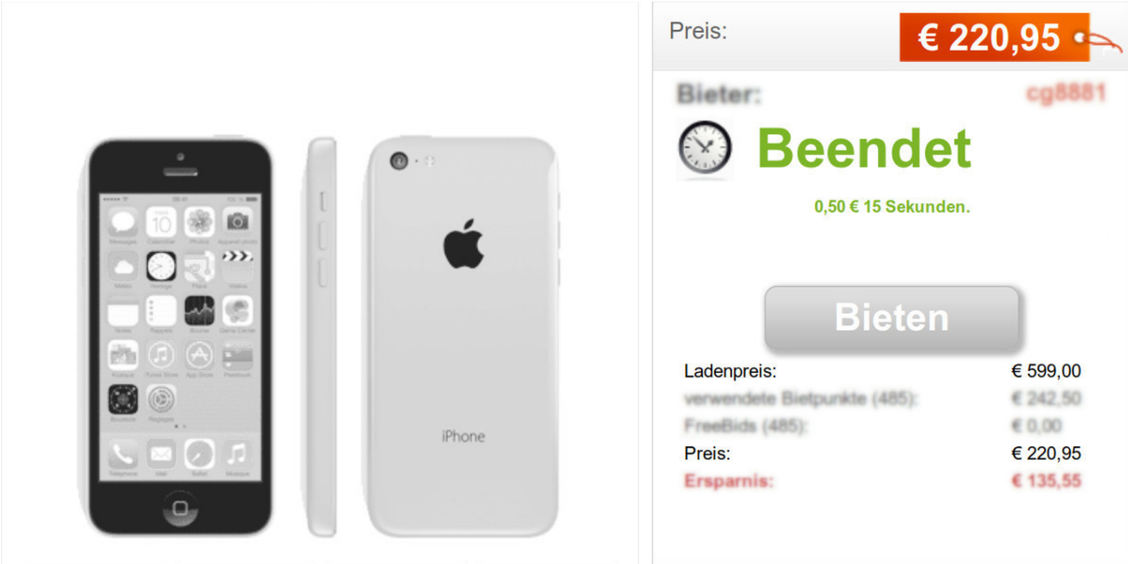
Zur Einschätzung der Größenordnung hier die bisherigen Rekorde: etwa 853 Mio Dollar im Jahr 2012, über 1 Mrd Dollar im Jahr 2016. Darunter machen nur zehn Personen über 20% der Spenden aus; es handelt sich also nicht um basisdemokratisches *crowd funding*.

Manche Großkonzerne oder (einfluss)reiche Personen spenden gezielt, um sich die Gunst der (vermeintlich) zukünftigen Regierung zu sichern. Clinton galt den meisten bis zum Wahltag als wahrscheinliche Siegerin, daher gingen 704 Mio Dollar an Clinton, aber nur 323 Mio an Trump.

Dieses Geld wird im Wahlkampf in Kampagnen investiert, also verbrannt, doch nur der Wahlsieger erhält schließlich als Preis die Präsidentschaft. Neben Inhalten entscheiden auch Spenden: Geld kauft mediale Präsenz und damit größere Gewinnchancen. Dies entspricht einer Auktion.

Perfide Auktion als Glücksspiel: Jeder zahlt.

Bei einer **Pennyauktion** ist jedes Gebot kostenpflichtig, so dass alle Teilnehmer bezahlen, selbst wenn sie den Artikel gar nicht erwerben. Das Verfahren gilt als Glücksspiel und ist in manchen Ländern verboten.



Reales Beispiel: Ein iPhone steigert bis 220.95€. Hierzu wurden 22095 Gebote abgegeben; jedes kostet sofort 50 Cent, erhöht den Preis um einen Cent und die Laufzeit um 15 Sekunden. Insgesamt wurde also der Preis für mehr als 18 iPhones bezahlt, verkauft wurde aber nur eins.

Perfide Auktion als Glücksspiel: Jeder zahlt.

Ebenso funktionieren **Wettbewerbe** mit aufwändigen Einsendungen wie Architekturwettbewerbe oder Exzellenzwettbewerbe von Universitäten. Solche Verfahren erfreuen sich bei den Veranstaltern großer Beliebtheit, auf Seiten der Bewerber vernichten sie Tausende von Arbeitsstunden.

Alle Teilnehmer müssen zunächst mit viel Arbeit in **Vorleistung** gehen, um das für den Wettbewerb geforderte aufwändige Material zu erstellen. Je mehr Arbeit investiert wird, desto besser werden die Erfolgschancen. Doch nur ein glücklicher Bewerber gewinnt, die anderen gehen leer aus.

Die Ausbeutung der **Generation Praktikum** funktioniert ähnlich: Aufwändige Vorleistungen werden schlecht oder gar nicht bezahlt; ideeller Lohn ist die Erfahrung und ein weiterer Punkt im Lebenslauf. Auch ein sinnleeres Pseudo-Studium kann ebenso interpretiert werden.

Wenn zudem mehrfach überboten werden kann, so droht eine Eskalation und **Bietspirale**, wie das nachfolgende Experiment eindrücklich belegt. Bei langen militärischen Konflikten spricht man von **Abnutzungskrieg**, engl. *war of attrition*. Die Verluste übersteigen die möglichen Gewinne.

Zweitpreisauktion: spieltheoretische Analyse

Aufgabe: Spieler i kennt nur seine eigene Schätzung $s_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
(1) Was sind Strategien B_i für Spieler i? Was ist sein Erlös $u_i(B \mid s)$?
(2) Finden Sie ein Gleichgewicht in (halbstark) dominanten Strategien!
(3) Welchen Autionserlös erzielt der Verkäufer / Auktionator?

Lösung: (1) Spieler i bietet gemäß seiner (monotonen) Strategie

$$B_i \,:\, \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \,:\, s_i \mapsto b_i = B_i(s_i).$$

Sein Nutzen berechnet sich aus dem Wert s_i und allen Geboten $(b_j)_{j \in I}$:
Sei $c_i := \max_{j \neq i} b_j$ das Höchstgebot aller anderen Bieter. Dann gilt

$$u_i(B_1, \dots, B_n \mid s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} s_i - c_i & \text{falls } b_i > c_i, \\ 0 & \text{falls } b_i < c_i. \end{cases}$$

Bei Gleichstand $b_i = c_i$ wird unter den höchsten Geboten gelost.

Für $i \in I$ sind $C_i := \max_{j \neq i} B_j(S_j)$ und $T_i := \max_{j \neq i} S_j$ Zufallsvariablen.
Sind alle $B_1 = \dots = B_n = B$ gleich und monoton, so gilt $C_i = B(T_i)$.

Zu T_i berechnet sich die kumul. Verteilung $G_i(t) := \mathbf{P}[T_i \leq t]$ aus der Verteilung von $(S_1, \dots, S_n)$. Bei Unabhängigkeit gilt $G_i = \prod_{j \neq i} F_j$.

Zweitpreisauktion: spieltheoretische Analyse

Wir beginnen unsere Untersuchung mit der **Zweitpreisauktion**, denn sie ist spieltheoretisch besonders leicht zu analysieren.

Zudem erweist sie sich gleich als das zentrale Referenzmodell: Alle Auktionen, die gewissen Mindestanforderungen genügen, sind erlösäquivalent zur Zweitpreisauktion: Satz P2C von Vickrey. Zu seinen Ehren heißt die Zweitpreisauktion auch **Vickrey–Auktion**.

Ihre zentrale Rolle verdankt die Zweitpreisauktion der folgenden bemerkenswerten Eigenschaft: Die Spieler brauchen hier nicht zu taktieren, zu analysieren oder zu spekulieren, jeder Spieler erreicht seine optimale Gewinnerwartung durch wahrheitsgemäßes Bieten.

Diese Besonderheit nennen wir die **Offenbarungseigenschaft**, engl. *revelation principle*. Sie ist bemerkenswert und überaus nützlich.

Wir können dies nun explizit nachrechnen! Dazu müssen wir zunächst die Auktion explizit als Spiel ausschreiben (1), und dann sorgfältig alle Gleichgewichtserlöse bestimmen (2). Dies führt zu folgendem Satz.

Zweitpreisauktion: spieltheoretische Analyse

Satz P2A: Offenbarungseigenschaft und Erlös

In der Zweitpreisauktion ist die Strategie $B_i = \mathrm{id}$ schwach dominant: Spieler i bietet gemäß $B_i(s_i) = s_i$ den wahren Wert seiner Schätzung.

Sein Gebot s_i erhält somit den Zuschlag mit Wkt $\mathbf{P}\big[T_i \le s_i\big] =: G_i(s_i)$. Der Auktionserlös ist dann $\int_{t=0}^{s_i} t\, g_i(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{E}\big[T_i \mid T_i \le s_i\big]\,\mathbf{P}\big[T_i \le s_i\big]$.

Beweis: Angenommen, Spieler i bietet $b_i > s_i$ statt s_i. Drei Fälle:

$c_i > b_i > s_i$: Nutzen $u_i' = 0 = u_i$.

$b_i > s_i > c_i$: Nutzen $u_i' = s_i - c_i = u_i$.

$b_i > c_i > s_i$: Nutzen $u_i' = s_i - c_i < 0 = u_i$.

Angenommen, Spieler i bietet $b_i < s_i$ statt s_i. Drei Fälle:

$c_i > s_i > b_i$: Nutzen $u_i' = 0 = u_i$.

$s_i > b_i > c_i$: Nutzen $u_i' = s_i - c_i = u_i$.

$s_i > c_i > b_i$: Nutzen $u_i' = 0 < s_i - c_i = u_i$.

In jedem Falle erzielt $B_i = \mathrm{id} : s_i \mapsto s_i$ das beste Ergebnis. QED

Zweitpreisauktion: spieltheoretische Analyse

Übung: Wir untersuchen hier die Abweichungen $b_i > s_i$ bzw. $b_i < s_i$. Für den Wert c_i betrachten wir die drei möglichen Einordnungen. Es bleiben zwei Gleichheitsfälle: Warum passiert nichts neues?

Bei der Zweitpreisauktion (Vickrey–Auktion) sind die Regeln so gestaltet, dass es für jeden Bieter eine optimale Strategie ist, wahrheitsgetreu zu bieten, also genau so viel, wie ihm das Objekt tatsächlich wert ist.

Offenbarungseigenschaft: Spieler i offenbart seine Information s_i. Das ist allgemein ein wichtiges Prinzip für das Mechanismendesign, der Nachweis seiner Gültigkeit ist jeweils ein erster Schritt zur Lösung.

Wenn es einen Mechanismus gibt, der eine soziale Auswahlfunktion implementiert, dann gelingt dies ebenfalls mit einen wahrheitsgemäßen Mechanismus. Solche Mechanismen heißen auch **anreizkompatibel**.

Der Auktionator / Verkäufer kann zwar keinen Bieter / Käufer *zwingen*, seine privaten Informationen offenzulegen, hier seine Wertschätzung, aber er kann es durch ein geeignetes Auktionsverfahren *ermutigen*.

Erstpreisauktion: spieltheoretische Analyse

Aufgabe: Spieler i kennt nur seine eigene Schätzung $s_i \in \mathbb{R}_{\ge 0}$.
(1) Was sind Strategien B_i für Spieler i? Was ist sein Erlös $u_i(B \mid s)$?
(2) Finden Sie alle spielersymmetrischen Nash–Gleichgewichte!
(3) Welchen Auktionserlös erzielt der Verkäufer / Auktionator?

Lösung: (1) Spieler i bietet gemäß seiner (monotonen) Strategie

$$B_i \,:\, \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0} \,:\, s_i \mapsto b_i = B_i(s_i).$$

Sein Nutzen berechnet sich aus dem Wert s_i und allen Geboten $(b_j)_{j \in I}$:
Sei $c_i := \max_{j \ne i} b_j$ das Höchstgebot aller anderen Bieter. Dann gilt

$$u_i(B_1, \dots, B_n \mid s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} s_i - b_i & \text{falls } b_i > c_i, \\ 0 & \text{falls } b_i < c_i. \end{cases}$$

Bei Gleichstand $b_i = c_i$ wird unter den höchsten Geboten gelost.

Für $i \in I$ sind $C_i := \max_{j \ne i} B_j(S_j)$ und $T_i := \max_{j \ne i} S_j$ Zufallsvariablen.
Sind alle $B_1 = \dots = B_n = B$ gleich und monoton, so gilt $C_i = B(T_i)$.

Zu T_i berechnet sich die kumul. Verteilung $G_i(t) := \mathbf{P}[T_i \le t]$ aus der Verteilung von $(S_1, \dots, S_n)$. Bei Unabhängigkeit gilt $G_i = \prod_{j \ne i} F_j$.

Erstpreisauktion: spieltheoretische Analyse

(2) Jede Zufallsvariable S_i sei stetig verteilt mit Dichte f_i, kumuliert F_i.
Die Zufallsvariablen $S_1, \dots, S_n$ seien unabhängig identisch verteilt.

Symmetrisches Gleichgewicht $B_1 = \dots = B_n = B \,:\, \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$.
Vereinfachende Annahmen: B sei stetig diff'bar, $B(0) = 0$ und $B' > 0$.

Zum Wert s_i und Gebot b_i ist dann der erwartete Gewinn:

$$\begin{aligned} u_i(b_i \mid s_i) &= (s_i - b_i)\, \mathbf{P}\big[\forall j \ne i : B_j(S_j) < b_i\big] \\ &= (s_i - b_i)\, \mathbf{P}\big[\forall j \ne i : S_j < B^{-1}(b_i)\big] \\ &= (s_i - b_i)\, \mathbf{P}\big[T_i < B^{-1}(b_i)\big] \\ &= (s_i - b_i)\, G_i(B^{-1}(b_i)) \quad \to \quad \max! \end{aligned}$$

Dank Unabhängigkeit gilt $G_i := \prod_{j \ne i} F_j$, dank Symmetrie $G := F^{n-1}$.
Wir lassen fortan alle Indizes weg. Wir maximieren die Erlösfunktion

$$b \mapsto h(b) = (s - b)\, G(B^{-1}(b)).$$

Ihre erste Ableitung ist nach Produkt- und Kettenregel

$$h'(b) = -G(B^{-1}(b)) + (s - b)\, \frac{g(B^{-1}(b))}{B'(B^{-1}(b))}.$$

Erstpreisauktion: spieltheoretische Analyse

Für $h'(b) = 0$ und $b = B(s)$ finden wir die Differentialgleichung

$$G(s)B'(s) = (s - B(s))\, g(s).$$

☺ Dies ist eine inhomogene lineare DG. Wir schreiben sie um zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big[G(s)B(s)\big] = s\, g(s).$$

Mit Anfangswert $B(0) = 0$ wird sie gelöst durch Integration:

$$B(s) = \frac{1}{G(s)} \int_{t=0}^{s} t\, g(t)\, \mathrm{d}t = \mathbf{E}\big[T \mid T \le s\big]$$

☺ Das ist die optimale Bietstrategie. Anschaulich ist das plausibel: $B(s)$ ist der Erwartungswert des höchsten Gebotes T aller anderen Bieter, unter der Bedingung $T \le s$. Der erwartete Auktionserlös ist

$$G(s)B(s) = \int_{t=0}^{s} t\, g(t)\, \mathrm{d}t = \mathbf{E}\big[T \mid T \le s\big]\, \mathbf{P}\big[T \le s\big].$$

☺ Die Erstpreisauktion bringt also keinen größeren Erlös als die Zweitpreisauktion: Beide Auktionsverfahren sind erlösäquivalent!

Erstpreisauktion: spieltheoretische Analyse

Satz P2B: Erlösäquivalenz zwischen Erst- und Zweitpreisauktion

Unter den genannten Bedingungen gilt: In der Erstpreisauktion erwarten Bieter und Auktionator denselben Erlös wie in der Zweitpreisauktion.

Bemerkenswerterweise kann der Verkäufer mit der Erstpreisauktion nicht mehr einnehmen: Rationale Spieler passen ihr Verhalten dem Auktionsverfahren an und spekulieren auf das Verhalten der anderen. Es gibt ein eindeutiges symmetrisches Nash–Gleichgewicht, das wir hier berechnet haben, und der zugehörige Erlös ist exakt derselbe wie zuvor.

Die Differenz zwischen höchster und zweithöchster Wertschätzung geht dem Auktionator auch hier verloren: Dieser Verlust ist unvermeidlich! Dies ist der Preis für seine unvollständige Information: Der Verkäufer kennt keine der privaten Informationen $s_1, \dots, s_n$. Kennte er sie alle, so könnte er das Objekt tatsächlich für $\max\{s_1, \dots, s_n\}$ verkaufen, indem er es zum höchsten Preis anbietet (oder knapp darunter).

Versteigerungen sind eine praktikable Approximation an dieses Ideal. Können wir noch bessere Implementierungen finden? Theoretisch: nein!

Der Erlös-Äquivalenz-Satz

Wir machen weiterhin folgende Annahmen:

1. Jeder Spieler ist risikoneutral, optimiert also den Erwartungswert.
2. Die Zufallsvariablen $S_1, \dots, S_n : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sind unabhängig.
3. Sie sind identisch verteilt mit stetiger Dichte f, kumuliert zu F.

Wir betrachten Auktionsverfahren mit folgenden Eigenschaften:

4. Es existiert ein symmetrisches Gleichgewicht $(B_1, \dots, B_n)$.
5. Zur Wertschätzung $s_i = 0$ ist der Erlös $u_i(B \mid s) = 0$.
6. Das höchste Gebot erhält den Zuschlag.

Satz P2C: Erlösäquivalenz, Vickrey 1961

In all solchen Auktionsverfahren erwarten Bieter und Auktionator denselben Erlös wie in der Zweitpreisauktion (Vickrey–Auktion).

☺ Der Verkäufer will seinen Erlös maximieren. Die Zweitpreisauktion scheint zunächst suboptimal, doch jede andere Auktion liefert dasselbe.

⚠ Dies gilt bei den genannten Bedingungen, also präzise eingegrenzt. Insbesondere Rationalität und Unabhängigkeit sind starke Forderungen.

Der Erlös-Äquivalenz-Satz

Beweis: Sei $B_1 = \dots = B_n = B : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} : 0 \mapsto 0$ die Bietstrategie. Zur Vereinfachung sei wie zuvor B stetig differenzierbar mit $B' > 0$.

Für jeden Bieter i sei $p_i(s_i) \in [0, 1]$ die Zuteilungswkt und $q_i(s_i) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die erwartete Zahlung bei Wertschätzung s_i. Zunächst gilt $q_i(0) = 0$.

Sei $T_i = \max_{j \neq i} S_j$ mit kumulativer Verteilung $G_i = \prod_{j \neq i} F_j$. Dank Symmetrie gilt $G_i = G := F^{n-1}$. Dank Monotonie folgt $p_i(s_i) = G(s_i)$.

Angenommen, Spieler i bietet statt $b_i = B(s_i)$ abweichend $b = B(s)$, mit veränderter Wertschätzung s. Sein erwarteter Gewinn ist dann

$$
\begin{aligned}
u_i(s) &= s_i\, G(s) - q_i(s), \\
u_i'(s) &= s_i\, g(s) - q_i'(s).
\end{aligned}
$$

Im Gleichgewicht wird der erwartete Gewinn maximiert durch $s = s_i$, demnach gilt $u_i'(s_i) = 0$, also $q_i'(s_i) = s_i\, g(s_i)$. Wir integrieren dies zu

$$
q_i(s_i) = q_i(0) + \int_{t=0}^{s_i} t\, g(t)\, \mathrm{d}t = \mathbf{E}\big[T_i \mid T_i \leq s_i\big]\, \mathbf{P}\big[T_i \leq s_i\big].
$$

☺ Das ist genau der Erlös der Vickrey–Auktion (Satz P2A). $\boxed{\text{QED}}$

Wie formalisieren wir Auktionsverfahren?

☺ Vickreys Satz zu Auktionen ist nach Verhandlungen und Wahlen ein weiteres schönes Ergebnis und Grundlage des Mechanismendesigns: Statt Un/Möglichkeitssätzen sehen wir nun Sätze zur **In/Effizienz** und **Sub/Optimalität**: Welcher Erlös ist erreichbar? Warum nicht mehr?

Der gerade erklärte Satz lässt noch zu viel Interpretationsspielraum: Was bedeutet der Allquantor „In all solchen Auktionsverfahren. . . “? Um die berühmt-berüchtigte **mathematische Präzision** zu erreichen, müssen wir erklären, was wir unter einem Auktionsverfahren verstehen.

Aufgabe: (1) Formalisieren Sie das Verfahren als Funktion der Gebote: Wer bekommt das Objekt mit welcher Wkt und wie viel muss er zahlen?

(2) Führen Sie dies explizit aus für die Erst- und Zweitpreisauktion.

(3) Erklären Sie wünschenswerte Eigenschaften von Auktionsverfahren, speziell Symmetrie, Monotonie, Neutralität, Einhelligkeit, evtl. Stetigkeit.

(4) Was sind Bietstrategien? Wie folgt daraus der erwartete Gewinn?

(5) Untersuchen Sie symmetrische Bayes–Nash–Gleichgewichte. Führen Sie damit den obigen Beweis möglichst explizit aus!

Wie formalisieren wir Auktionsverfahren?

Lösung: (1) Die Spieler geben ihre **Gebote** $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ ab. Das Auktionsverfahren definiert die **Zuteilungswkt** und die **Kosten**:

$$P_i \;:\; \mathbb{R}^n_{\ge 0} \to [0,1] \;:\; (b_1,\dots,b_n) \mapsto P_i(b_1,\dots,b_n)$$
$$Q_i \;:\; \mathbb{R}^n_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0} \;:\; (b_1,\dots,b_n) \mapsto Q_i(b_1,\dots,b_n)$$

Zu jedem Gebotsvektor $b \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$ ist $P_i(b)$ die Wkt, dass Spieler i das Objekt zugeteilt wird, und $Q_i(b)$ die von Spieler i erwartete Zahlung.

Wir könnten $\sum_{i=1}^n P_i(b_1,\dots,b_n) = 1$ erhoffen oder axiomatisch fordern, aber auch < 1 ist eventuell sinnvoll, wenn das Objekt nicht verkauft wird.

Umgekehrt wird das **Auktionsverfahren** (P,Q) festgelegt durch

$$P, Q \;:\; \mathbb{R}^n_{\ge 0} \to \mathbb{R}^n_{\ge 0} \quad \text{mit} \quad \textstyle\sum_{i=1}^n P_i \le 1.$$

☺ Das ist alles, was ein rationaler Bieter wissen will und wissen muss, Kosten und Nutzen: „Was muss ich zahlen? Was bekomme ich dafür?“ Alle weiteren Informationen sind dekorative Schnörkel und überflüssig.

⚠ Für nicht (vollständig) rationale Bieter spielen die Einkleidung und Dekoration oft eine große Rolle, wie zahlreiche Experimente belegen.

Formalisierung: Erst- und Zweitpreisauktion

(2) Gegeben sei der Gebotsvektor $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$.
Die Menge aller Höchstbietenden bezeichnen wir mit

$$M := \operatorname{Arg\,max}\{\, i \mapsto b_i \,\} = \{\, i \in I \mid b_i = \max_{j \in I} b_j \,\}.$$

(2a) Die Erstpreisauktion (P^1, Q^1) ist charakterisiert durch

$$\begin{aligned} i \in M \quad &\Longrightarrow \quad P^1_i(b) = 1/\sharp M, \quad Q^1_i(b) = b_i/\sharp M, \\ i \notin M \quad &\Longrightarrow \quad P^1_i(b) = 0, \qquad\quad Q^1_i(b) = 0. \end{aligned}$$

(2b) Sei $i \in I$ und $c_i := \max_{j \ne i} b_j$ das Höchstgebot aller anderen.
Die Zweitpreisauktion (P^2, Q^2) ist charakterisiert durch

$$\begin{aligned} i \in M \quad &\Longrightarrow \quad P^2_i(b) = 1/\sharp M, \quad Q^2_i(b) = c_i/\sharp M, \\ i \notin M \quad &\Longrightarrow \quad P^2_i(b) = 0, \qquad\quad Q^2_i(b) = 0. \end{aligned}$$

🙂 Das löst den Gleichstand auf, den wir oben vernachlässigt haben:
Gibt es nur einen Höchstbieter, $M = \{i\}$, so bekommt i den Zuschlag.
Gibt es hingegen $\sharp M \ge 2$ Höchstbietende, so wird gleichverteilt gelost.

Formalisierung: gute Eigenschaften

(3) Für Auktionsverfahren (P, Q) wünschen wir uns gute Eigenschaften:

SYM: Symmetrie. Für $b \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$ und jede Permutation $\tau : I \xrightarrow{\sim} I$ gilt

$$\begin{aligned} P_i(b_{\tau 1}, \dots, b_{\tau i}, \dots, b_{\tau n}) &= P_i(b_1, \dots, b_i, \dots, b_n), \\ Q_i(b_{\tau 1}, \dots, b_{\tau i}, \dots, b_{\tau n}) &= Q_i(b_1, \dots, b_i, \dots, b_n). \end{aligned}$$

MON: Monotonie. Für jeden Spieler $i \in I$ und je zwei Gebotsvektoren mit $b_i \le b'_i$ und $b_j \ge b'_j$ für $j \ne i$ gilt $P_i(b) \le P_i(b')$ und $Q_i(b) \le Q_i(b')$.

NTR: Neutralität. Für alle Gebote $b \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$ mit $b_i = 0$ gilt $Q_i(b) = 0$.
Wir erlauben jedoch $P_i(b) > 0$, d.h. das Objekt darf verschenkt werden.

UNA: Einhelligkeit. Aus $b_i > \max_{j \ne i} b_j$ folgt $P_i(b) = 1$.
Gibt es nur einen Höchstbieter, so erhält dieser den Zuschlag.

🙂 Die Erst- und Zweitpreisauktion haben diese guten Eigenschaften.
Hingegen ist Stetigkeit der Funktionen P und Q meist zu viel verlangt.
Für Messbarkeit und Integrierbarkeit genügt uns die obige Monotonie.
Neutralität und Einheiligkeit klären die Extreme. Symmetrie vereinfacht.
Wir setzen im Folgenden diese Eigenschaften als Axiome voraus.

Formalisierung: Wie wird geboten?

(4) Vorgelegt sei das **Auktionsverfahren** (P, Q) mit $P, Q : \mathbb{R}^n_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Die Spieler haben die zufälligen **Wertschätzungen** $S : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Jeder Spieler $i \in I$ bietet gemäß seiner gewählten **Strategie**

$$B_i \;:\; \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \;:\; s_i \mapsto b_i = B_i(s_i).$$

Als Menge seiner Bietstrategien betrachten wir daher

$$\mathcal{B}_i := \left\{\, B : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \;\middle|\; B \text{ monoton mit } B(0) = 0 \,\right\}.$$

Gegeben sei ein Strategievektor $B = (B_1, \dots, B_n) : \mathbb{R}^n_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Zur Wertschätzung $s = S(\omega)$ erwartet Spieler i dann den Nutzen

$$u_i(B \mid s) = s_i P_i(B(s))) - Q_i(B(s)).$$

Das Auktionsverfahren definiert die **stochastische Nutzenfunktion**

$$\tilde{u} \;:\; \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_n \times \Omega \to \mathbb{R}^n_{\geq 0} \;:\; (B, \omega) \mapsto u(B \mid S(\omega)).$$

Als Erwartung erhalten wir die **Nutzenfunktion in Normalform**

$$u \;:\; \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_n \to \mathbb{R}^n_{\geq 0} \;:\; B \mapsto \mathbf{E}\big[\omega \mapsto u(B \mid S(\omega))\big].$$

Formalisierung: Disintegration

(5) Hierzu wollen wir nun **Bayes–Nash–Gleichgewichte** untersuchen.

Jeder Spieler i kennt seine individuelle Wertschätzung $s_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, aber nicht die Wertschätzungen $S_j : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ der anderen Spieler $j \neq i$. Über diese kann er immerhin Mittelwerte bilden: Sei $p_i(s_i)$ die erwartete Wkt der Zuteilung und $q_i(s_i)$ die erwarteten Kosten für Spieler i.

Wir können dies aus direkt dem Auktionsverfahren (P, Q) berechnen. Zur Erleichterung der Notation schreibe ich dies nur für $i = 1$ aus:

$$p_1(s_1) := \mathbf{E}\big[\, \omega \mapsto P_1\big(\, B_1(s_1),\; B_2(S_2(\omega)), \dots, B_n(S_n(\omega)) \,\big) \,\big]$$
$$= \int_{s_n=0}^{\infty} \cdots \int_{s_2=0}^{\infty} P_1(B_1(s_1), B_2(s_2), \dots, B_n(s_n))\, f_2(s_2) \mathrm{d}s_2 \cdots f_n(s_n) \mathrm{d}s_n$$

$$q_1(s_1) := \mathbf{E}\big[\, \omega \mapsto Q_1\big(\, B_1(s_1),\; B_2(S_2(\omega)), \dots, B_n(S_n(\omega)) \,\big) \,\big]$$
$$= \int_{s_n=0}^{\infty} \cdots \int_{s_2=0}^{\infty} Q_1(B_1(s_1), B_2(s_2), \dots, B_n(s_n))\, f_2(s_2) \mathrm{d}s_2 \cdots f_n(s_n) \mathrm{d}s_n$$

Dies entspricht einer **Disintegration** (I209), hier des Produktmaßes.

Formalisierung: Die Zuteilungswkt p bestimmt die Kosten q.

Angenommen, der Spieler $i \in I$ schätzt den Wert auf $s_i \in \mathbb{R}_{\ge 0}$, bietet aber abweichend als wäre der Wert $s \in \mathbb{R}_{\ge 0}$. Sein erwarteter Gewinn ist

$$u_i(s) = s_i\, p_i(s) - q_i(s).$$

Im Gleichgewicht wird der erwartete Gewinn maximiert durch $s = s_i$, Zur Vereinfachung nehmen wir p_i und q_i als stetig differenzierbar an:

$$u_i'(s) = s_i\, p_i'(s) - q_i'(s).$$

Für das Maximum in $s = s_i$ folgt somit $u_i'(s_i) = 0$, also $q_i'(s_i) = s_i\, p_i'(s_i)$. Dies gilt für alle $s_i \in \mathbb{R}_{\ge 0}$. Wir integrieren dies zu der Kostenfunktion

$$q_i(s_i) = q_i(0) + \int_{t=0}^{s_i} t\, p_i'(t)\,\mathrm{d}t$$

Nach partieller Integration finden wir die Formel

$$\boxed{q_i(s) = s\, p_i(s) - \int_{t=0}^{s} p_i(t)\,\mathrm{d}t.}$$

🙂 Diese Formel können wir auch ohne Differenzierbarkeit beweisen.

Formalisierung: Die Zuteilungswkt p bestimmt die Kosten q.

Lemma P2D: Die Zuteilungswkt p bestimmt die Kosten q.

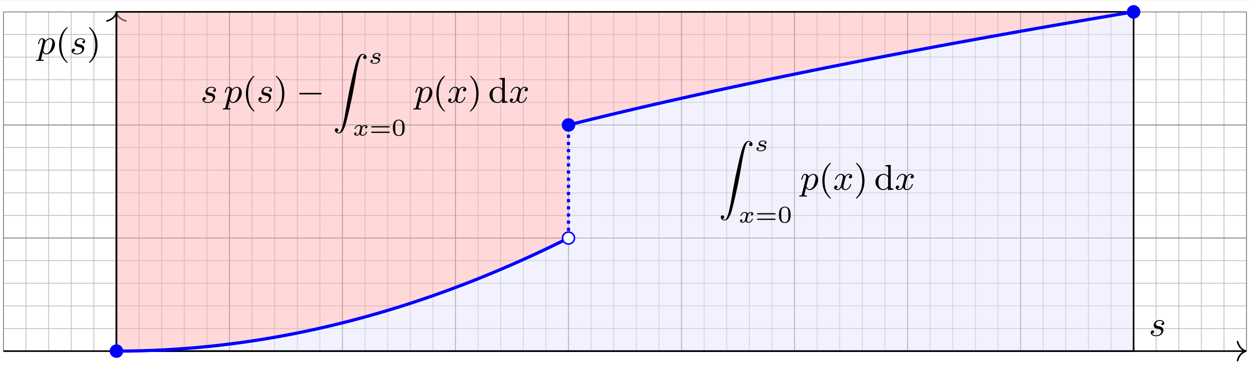
Gegeben seien $p, q : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$. Die folgenden beiden Bedingungen sind äquivalent:

(1) Für alle $s, t \in I$ gilt die Nash–Gleichgewichtsbedingung

$$s\, p(t) - q(t) \le s\, p(s) - q(s).$$

(2) Die Funktion p ist monoton wachsend, und q erfüllt

$$q(s) - q(0) = s\, p(s) - \int_{x=0}^{s} p(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } s \in I.$$



Formalisierung: Die Zuteilungswkt p bestimmt die Kosten q.

Beweis: „(2) $\Rightarrow$ (1)“: Da p monoton wächst, ist p über jedem kompakten Intervall integrierbar. Auch $q(s) = s\,p(s) - \int_{t=0}^{s} p(t)\,\mathrm{d}t$ ist dann wachsend. Dies folgt graphisch wie oben oder durch Nachrechnen für $s \le t$ in I:

$$\begin{aligned} q(t) - q(s) &= t\,p(t) - s\,p(s) - \int_{x=s}^{t} p(x)\,\mathrm{d}x \\ &\ge t\,p(t) - s\,p(t) - \int_{x=s}^{t} p(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=s}^{t} \underbrace{p(t) - p(x)}_{\ge 0}\,\mathrm{d}x \ge 0 \end{aligned}$$

Für alle $s, t \in I$ rechnen wir die Gleichgewichtsbedingung (1) nach:

$$\begin{aligned} \big[s\,p(s) - q(s)\big] - \big[s\,p(t) - q(t)\big] &= \int_{x=t}^{s} p(x)\,\mathrm{d}x - (s-t)p(t) \\ &= \int_{x=t}^{s} p(x) - p(t)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Für $t \le s$ ist der Integrand ≥ 0, somit über $[t, s]$ auch das Integral ≥ 0. Für $t \ge s$ ist der Integrand ≤ 0, somit dennoch das Integral ≥ 0.

Formalisierung: Die Zuteilungswkt p bestimmt die Kosten q.

„(1) $\Rightarrow$ (2)“: Wir zeigen zunächst die Monotonie von p. Für $s < t$ in I gilt

$$\begin{aligned} s\,p(t) - q(t) &\le s\,p(s) - q(s), \\ t\,p(t) - q(t) &\ge t\,p(s) - q(s). \end{aligned}$$

Die Differenz ergibt $(t-s)p(t) \ge (t-s)p(s)$, somit folgt $p(t) \ge p(s)$.

Wir differenzieren die Hilfsfunktion $h : I \to \mathbb{R} : s \mapsto h(s) = s\,p(s) - q(s)$. Die obigen beiden Ungleichungen ergeben die Abschätzungen

$$(t-s)p(s) \le h(t) - h(s) \le (t-s)p(t).$$

Daraus erhalten wir für alle $s < t$ in I den Differenzenquotienten

$$p(s) \le \frac{h(t) - h(s)}{t - s} \le p(t).$$

Die Funktion p ist monoton und somit stetig in allen Punkten $x \in \mathbb{R} \smallsetminus A$ bis auf eine abzählbare Ausnahmemenge $A \subset \mathbb{R}$. (Übung: Warum?) In jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \smallsetminus A$ ist somit h differenzierbar mit $h'(x) = p(x)$. Daraus folgt $h(s) = h(0) + \int_{x=0}^{s} p(x)\,\mathrm{d}x$. (Übung: Warum?) $\boxed{\text{QED}}$

Formalisierung: Vereinfachung durch Symmetrie

Beweis der Erlösäquivalenz P2C: Vorgelegt sei ein Gleichgewicht als symmetrische Bietstrategie $B_1 = \dots = B_n = B : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0} : 0 \mapsto 0$.

Für jeden Bieter i sei $p_i(s_i) \in [0,1]$ die Zuteilungswkt und $q_i(s_i) \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ die erwartete Zahlung bei Wertschätzung s_i. Zunächst gilt $q_i(0) = 0$.

Sei $T_i = \max_{j \ne i} S_j$ mit kumulativer Verteilung $G_i = \prod_{j \ne i} F_j$. Dank Symmetrie gilt $G_i = G := F^{n-1}$. Dank Monotonie folgt $p_i(s_i) = G(s_i)$.

Im Gleichgewicht wird der erwartete Gewinn maximal in $s = s_i$:

$$s_i\, p_i(s) - q_i(s) \le s_i\, p_i(s_i) - q_i(s_i)$$

Dank Lemma P2D gilt demnach:

$$q_i(s_i) = s_i G(s_i) - \int_{t=0}^{s_i} G(t)\,\mathrm{d}t$$

☺ Die rechte Seite hängt nicht mehr vom Auktionsverfahren (P, Q) ab, sondern nur von der (symmetrischen) Verteilung der Wertschätzungen.

☺ Sie gleicht somit dem Erlös der Vickrey–Auktion (Satz P2A). $\boxed{\text{QED}}$

Anwendung auf die Erstpreisauktion

Im prominenten Spezialfall der **Erstpreisauktion** wissen wir zudem, dass der Gewinner der Auktion sein eigenes Gebot zahlt, das heißt:

$$q_i(s_i) = p_i(s_i) B_i(s_i) = G(s_i) B(s_i)$$

Damit können wir die Bietstrategie $B : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ explizit ausrechnen:

$$B(s) = s - \frac{1}{G(s)} \int_{t=0}^{s} G(t)\,\mathrm{d}t$$

Im Vergleich zum wahrheitsgetreuen Bieten $s \mapsto s$ wird hier also ein Spekulationsterm abgezogen: Jeder rational vorausschauende Bieter versucht, sein Gebot zu optimieren, indem er den Preis etwas drückt und so die erwartete Lücke zum zweithöchsten Gebot ausnutzt.

Aufgabe: Jede Wertschätzung sei gleichverteilt auf dem Intervall $[0, M]$.

(1) Berechnen Sie in einer Erstpreisauktion mit genau $n \ge 1$ Bietern die optimale Bietstrategie $B : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ als symmetrisches Gleichgewicht.

(2) Was beobachten Sie für $n \to \infty$, anschaulich also sehr viele Bieter?

Anwendung auf die Erstpreisauktion

Lösung: (1) Wir rechnen alle Zutaten geduldig aus. Für $s \in [0, M]$ gilt:

$$f(s) = \frac{1}{M}$$

$$F(s) = \int_{t=0}^{s} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{s}{M}$$

$$G(s) = F(s)^{n-1} = \frac{s^{n-1}}{M^{n-1}}$$

$$\int_{t=0}^{s} G(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{t^n}{nM^{n-1}}\Big]_{t=0}^{s} = \frac{s^n}{nM^{n-1}}$$

$$B(s) = s - \frac{1}{G(s)} \int_{t=0}^{s} G(t)\,\mathrm{d}t = s - \frac{s}{n} = \frac{n-1}{n} s$$

🙂 Jeder Spieler i bietet in dieser Erstpreisauktion nicht wahrheitsgetreu seine Wertschätzung s_i, sondern nur den Bruchteil $B_i(s_i) = \frac{n-1}{n} s_i < s_i$. Bei $n = 1$ ist er allein und bietet 0. Bei $n = 2$ bietet er die Hälfte von s_i. Bei $n = 3$ Spielern bietet er nur zwei Drittel von s_i, usw.

Anwendung auf die Erstpreisauktion

(2) Für $n \to \infty$ gilt die Konvergenz $B_i(s_i) = \frac{n-1}{n} s_i \nearrow s_i$:
Die optimale Bietstrategie nähert sich der Offenbarung an.

🙂 Das ist anschaulich plausibel: Bei vielen Bietern lohnt es sich kaum, den Preis zu drücken, da schnell die Gefahr droht, überboten zu werden.

🙂 Diese Rechnung illustriert quantitativ mit ganz konkreten Zahlen ein Prinzip, das wir zuvor bereits qualitativ anschaulich erahnt haben: In der Zweitpreisauktion ist es ganz einfach eine dominante Strategie, ehrlich zu bieten. In der Erstpreisauktion hingegen muss jeder Bieter notwendig spekulieren. Er sucht dabei ein Gleichgewicht zwischen zwei widerstrebenden Tendenzen: Einerseits will er seine Wkt maximieren, das Objekt zu erwerben, andererseits will er seine Zahlung minimieren.

🙁 Dazu benötigt jeder Spieler genaue Daten, zum Beispiel die Anzahl der konkurrierenden Mitbieter, die Verteilung ihrer Wertschätzung, usw.

🙁 Anschließend muss er diese Daten rational verarbeiten, dabei muss er voraussetzen, dass auch seine Konkurrenten dies tun, usw. Das sind, wie wir wissen, sehr starke Annahmen, und sie sind leider selten erfüllt.

Beispiel: Versteigerung eines Euro

Beispiel: Versteigert wird ein Euro. Das höchste Gebot gewinnt. Achtung: Gezahlt werden das höchste *und* das zweithöchste Gebot. Geboten wird in ganzen Cent, überboten um mind. 1¢, höchstens 10¢.

Zugegeben, dieses Auktionsverfahren ist etwas sonderbar, aber es ist ein mögliches Verfahren, und der Auktionator hat es nun mal gewählt. Mit öffentlich ausgerufenen Geboten ist die Auktion mitunter sehr lebhaft, es eignet sich bestens als mathematisches Partyspiel... je nach Party. Dieses berühmt-berüchtigte Spiel stammt von Martin Shubik: *The Dollar Auction Game*, Journal of Conflict Resolution 15 (1971) 109–111.

Aufgabe: Sammeln Sie praktische Erfahrung, spielen Sie dieses Spiel! Was beobachten Sie empirisch im Experiment? Was sagt die Theorie?

Lässt sich Vickreys Erlösäquivalenz auf diese Auktion anwenden? Welche der Voraussetzungen sind (vermutlich) erfüllt, welche nicht?

⚠ Bei diesem sozialen Experiment können Sie Geld gewinnen, wenn Sie geschickt sind, aber auch Geld verlieren, wenn Sie ungeschickt sind.

☺ **Einverständnis:** Mit Ihrer Teilnahme akzeptieren Sie die Spielregeln.

Beispiel: Versteigerung eines Euro

Wir haben dieses Spiel zum Ende der Vorlesung am 18.07.2018 gespielt, ohne vorherige Erklärung, zum Staunen und Lernen aller Beteiligten! Wer dabei war, spricht vermutlich noch länger verwundert davon; alle anderen verweise ich auf weniger lebhafte Quellen. Shubik schreibt:

In playing this game, a large crowd is desirable. Furthermore, experience has indicated that the best time is during a party when the spirits are high and the propensity to calculate does not settle in until at least two bids have been made.

Es gelingt auch in einer Mathematikvorlesung mit etwa 30 Teilnehmern. Einmal in Fahrt wird es lustig, lebhaft, emotional, mitunter verbissen. Zwei zusätzliche Einschränkungen sind erfahrungsgemäß sinnvoll:

- Jedes Überbieten wird auf maximal zehn Cent beschränkt, um die Dynamik der Interaktion möglichst lange zu erhalten.
- Man fixiert ein Höchstgebot, hier zehn Euro in der Gesamtsumme, um allzu große Eskalation und finanziellen Schaden zu vermeiden.

Eine ausführliche Diskussion bietet László Mérö: *Moral Calculations*, Springer New York 1998. *Optimal entschieden?*, Springer Basel 1998.

Beispiel: Versteigerung eines Euro

Shubiks *Versteigerung eines Euro* ist experimentell gut untersucht. Die empirischen Befunde konsolidieren unser Miniaturexperiment:

- Bei 10 oder mehr Spielern kommt das Spiel recht sicher in Gang. Einmal in Fahrt, endet es meist oberhalb des Objektwerts 1€.
- In mehr als der Hälfte aller Fälle liegt der Erlös deutlich darüber. Manche Spieler setzen alles Geld, das sie gerade bei sich haben.
- Im Durchschnitt bieten Männer etwas mehr als Frauen, weil bei Männern die Eskalation leichter auszulösen ist.

Dieses Spiel gilt daher als ein Musterbeispiel für irrationales Verhalten. Dies wird noch gesteigert, wenn das Objekt ein konkreter Gegenstand mit geringem, aber bekanntem Wert ist. Die Bietspirale überschreitet schnell den objektiven Wert, der bald völlig aus dem Blick gerät.

This simple game is a paradigm for escalation. Once the contest has been joined, the odds are that the end will be a disaster to both. When this is played as a parlor game, this usually happens. [...] A total of payments between three and five dollars is not uncommon.

Beispiel: Versteigerung eines Euro

Auch die psychologischen Aspekte wurden eingehend untersucht. Typische Phänomene zeigten sich bereits in unserem Experiment:

- Zu Beginn überwiegt der Anreiz, leicht Geld zu verdienen. Im weiteren Verlauf nimmt die Bedeutung des Geldes schnell ab.
- Die Schuld der Eskalation wird meist dem Gegner zugeschrieben; der habe irrational agiert, man selbst habe darauf rational reagiert. Es kommt zu Wortgefechten, wenn die Möglichkeit hierzu besteht.
- Am Ende wollen Teilnehmer vor allem den Schaden begrenzen, aber nicht für dumm oder schwach gehalten werden (Selbstwert), das Gesicht wahren oder Zuschauern imponieren (Image, Prestige), Überlegenheit beweisen oder dem Gegner schaden (Bestrafung).

Manche Versuchspersonen zeigen im Spielverlauf Stressreaktionen (Adrenalinschub), die Bietspirale setzt sie emotional unter Druck.

Die starken Emotionen der Eskalation schränken die Rationalität ein, Einsicht in die Konsequenzen des eigenen Handelns ist erschwert. Selbst erfahrene Spieler entgehen oft nicht der Eskalationsfalle.

Bedeutung im Alltag: Verhaltensökonomik

Viele Spieler verkennen ihre Mitschuld und die Symmetrie des Spiels. Hilfreich wäre ein Perspektivwechsel: Wie sieht das eigene Verhalten aus Sicht des Gegenübers aus? Natürlich genauso! Erst diese ehrliche und selbstkritische Antwort eröffnet die Einsicht, dass man selbst dem Gegner in der Eskalation kaum andere Handlungsoptionen lässt.

Wie könnte eine gemeinsame / kooperative / konstruktive Lösung aussehen? Wie können Spieler die Bietspirale durchbrechen?

Beide könnten sich eine gemeinsame Höchstgrenze setzen, etwa 50 Cent, und bei eventuellem Gleichstand das Objekt verlosen oder teilen. (Gleichstand haben die obigen Regeln perfiderweise ausgeschlossen.)

Die Spieler könnten vereinbaren, den gesamten Gewinn bzw. Verlust zu teilen, also eine Koalition gegen den Verkäufer bilden. (Bieterkartelle sind andernorts illegal, hier jedoch scheinen sie moralisch geboten.)

Kooperation erfordert Absprache und gegenseitiges Vertrauen; gerade bei größerer Teilnehmerzahl ist das riskant (Streikbrecher). Insbesondere erfordert eine Koalition die schnelle und präzise Analyse, und zudem effiziente Kommunikation, bevor die Eskalation losbricht.

Bedeutung im Alltag: Verhaltensökonomik

Wer es noch nicht erlebt hat und zum ersten Mal hört, wird behaupten: „Das gibt es nur hypothetisch, in der Spieltheorie, nicht in Wirklichkeit!“ Erstaunlich viele Alltagssituationen folgen ganz ähnlichen Mechanismen; ihre empirische Untersuchung ist Grundlage der Verhaltensökonomik.

Streik: Eine Verhandlungslösung ermöglicht Ausgleich und Stabilität, Eskalation und Kampf hingegen vernichten Werte: Der Verdienstausfall für die Arbeitnehmer übersteigt rasch den geforderten Zugewinn, ebenso ist der Schaden für den Arbeitgeber schnell größer als die Forderungen.

Dennoch versucht jede Seite, die Eskalation etwas länger durchzuhalten, weil der Verlierer sonst für seinen Verlust gar keinen Ersatz bekäme. Die Debatte verlagert sich von Geld- zu Grundsatzfragen. Am Ende geht es nur noch um Prestige: Wer zeigt Schwäche und muss nachgeben?

In diesem verfahrenen Dilemma kann ein geschickter Vermittler helfen. Eine bewährte Strategie ist, die Debatte auf eine neue, unverbrauchte Grundsatzfrage zu lenken. Hierüber können sich beide Parteien leicht einigen, und beide können den Streik ohne Gesichtsverlust beilegen.

Bedeutung im Alltag: Verhaltensökonomik

Rüstungsspirale während des kalten Krieges und ähnlicher Konflikte, etwa Nahost-Konflikt, allgemein „Erbfeindschaft“ zwischen Nachbarn. Auch das deutsch-französische Verhältnis bis zum zweiten Weltkrieg wurde so bezeichnet, das Ende markierte 1963 der Élysée–Vertrag.

Vietnamkrieg: Die Reden des US-Präsidenten Lyndon B. Johnson von 1964-68 verschieben sich ebenso von positiven Zielen wie „Demokratie, Freiheit, Gerechtigkeit“ hin zu „Kommunismus bekämpfen“ (Feindbild) bis schließlich „Ehre und Stärke des Vaterlandes beweisen“ (Selbstbild).

Schlägerei: Keiner will weitere Schläge kassieren, aber jeder will dem Gegner noch einen letzten verpassen; der reagiert umgekehrt genauso.

Rosenkrieg: Verbitterte Partner machen einander das Leben zur Hölle; verfilmt als *The War of the Roses* (1989) und *Mr. & Mrs. Smith* (2005).

Kunstmarkt: Mitunter entbrennen Bietergefechte bei Kunstauktionen. Ist das rational? Vielleicht, doch höchstens bis die Kunstblase platzt.

Tulpenwahn: Durch Knappheit und Spekulation wurden 1637 teuerste Tulpensorten für $10\,000$ Gulden pro Zwiebel verkauft (etwa Hauspreis).

Abonnementfalle: Der Drucker ist billiger als das Tintenpack.

Bedeutung im Alltag: Verhaltensökonomik

Concorde-Falle: Die britisch-französische *Concorde* war das erste Überschallflugzeug für Passagiere im Linienflugdienst, betrieben von 1976 bis 2003. Früh war abzusehen, dass das Unternehmen niemals Gewinn machen würde, dennoch wurde das hochpolitische Projekt aus Gründen des nationalen Prestiges fortgesetzt. Slogan: „Too late to stop.“ Die gegenteilige Warnung: „Don’t throw good money after bad [money]!“

Großprojekte: Bei Großprojekten wie dem Bahnhof Stuttgart 21 wird oft argumentiert, bisherige Ausgaben verbieten Aufgabe oder Alternativen. Üblicherweise explodieren die Kosten und die Rentabilität schwindet, doch bisherige Investitionen müssen mit weiteren „gerettet“ werden. Am Ende geht es nur noch um Prestige, durchhalten und Stärke zeigen.

Reformen: Auch Bildungsreformen (G8, Bachelor-Master) werden als unumkehrbar dargestellt. Die Mechanismen ähneln der Concorde-Falle: Selbst wenn das Scheitern absehbar ist und schließlich manifest wird, das Projekt wird aus Gründen des politischen Prestiges durchgezogen. Nicht die Einsicht, nur ein Generationenwechsel erlaubt die Umkehr.

Diese Themen sind zugegeben kontrovers, die Mechanismen bleiben.

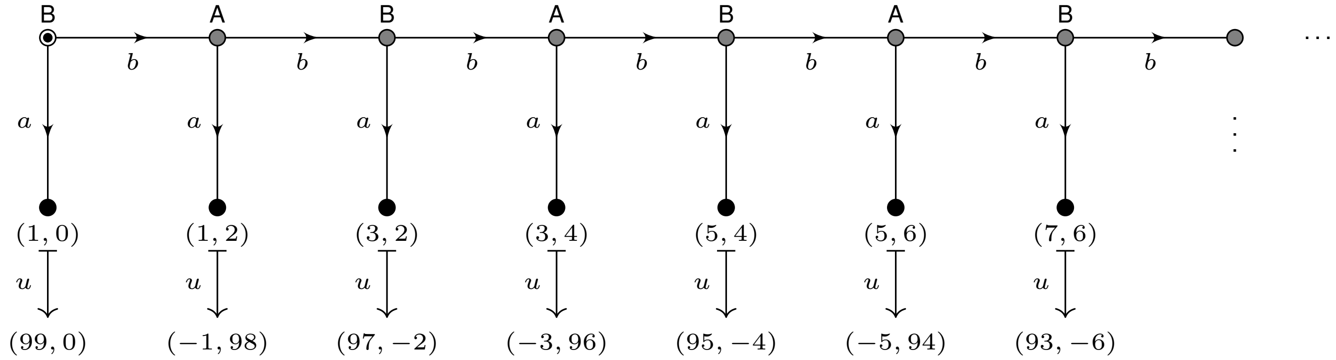
Analyse: Versteigerung eines Euro

Was sagt die Spieltheorie dazu? Nach den empirisch-psychologischen Erläuterungen wollen wir diese Auktion als Spiel genauer untersuchen.

Aufgabe: (1a) Formalisieren Sie diese Auktion als extensives Spiel! Vereinfachungen: Es gibt nur zwei Bieter. Das Startgebot ist $(1, 0)$ Cent. Überboten wird abwechselnd, jeweils minimal um genau einen Cent. (1b) Finden Sie zwei teilspielperfekte Gleichgewichte! (1c) Sind das alle?

(2) Variante: Die Auktion endet bei $(1000, 1000)$ mit Halbierung. Das garantiert Endlichkeit und wahrt halbwegs die guten Sitten.

Lösung: (1a) Die Auktionsregeln definieren folgenden Spielbaum:



Analyse: Versteigerung eines Euro

☺ Das erinnert an das Hundertfüßler-Spiel, siehe Seite J207. Glücklicherweise verfügen wir über eine effiziente Formalisierung.

Die Spielermenge ist hier vereinfacht $I = \{\, 1 = \text{Alice},\ 2 = \text{Bob} \,\}$. Wir formalisieren den Spielbaum durch $X = \{\, b^n, b^n a, b^\infty \mid n \in \mathbb{N} \,\}$.

Wurzel ist das Wort $b^0 = \emptyset$, und $b^\infty = bbb\dots$ ist die konstante Folge. Aktive Zustände $X^\circ = \{\, b^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$, terminal $\partial X = \{\, b^n a, b^\infty \mid n \in \mathbb{N} \,\}$.

Die Auszahlung $u : \partial X \to \bar{\mathbb{R}}^2$ ist wie erklärt $u(b^\infty) = (-\infty, -\infty)$ sowie

$$u(b^n a) = \begin{cases} (99 - n, -n) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ (-n, 99 - n) & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Aktionsmenge für Spieler $i \in I$ im aktiven Zustand $x = b^n$ ist

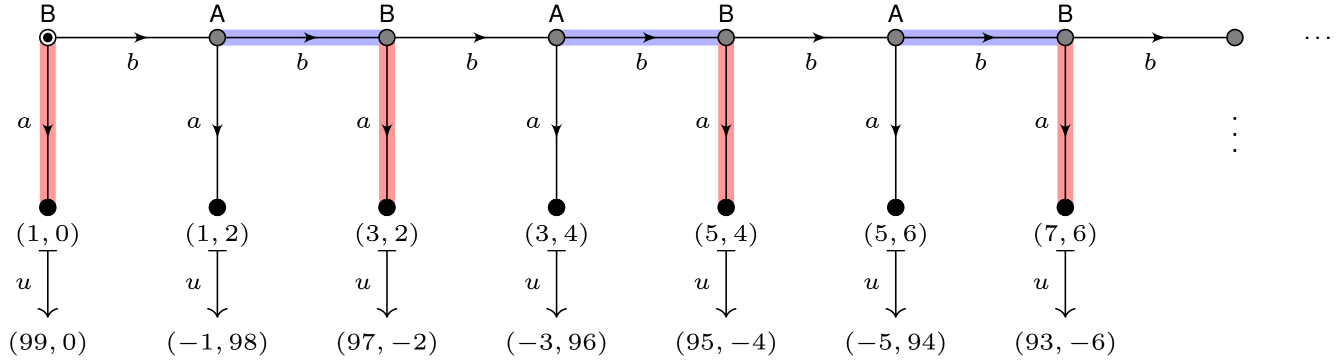
$$A_x^i = \begin{cases} \{a = \text{aussteigen}, b = \text{überbieten}\} & \text{falls } i \equiv n \bmod 2, \\ \{\text{warten}\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Fortsetzung $f : \bigcup_{x \in X^\circ} \{x\} \times A_x \to X$ ist kanonisch $f(x, w) = x * w$. Damit ist das dynamische Spiel $\Gamma = (X, u, f)$ vollständig beschrieben.

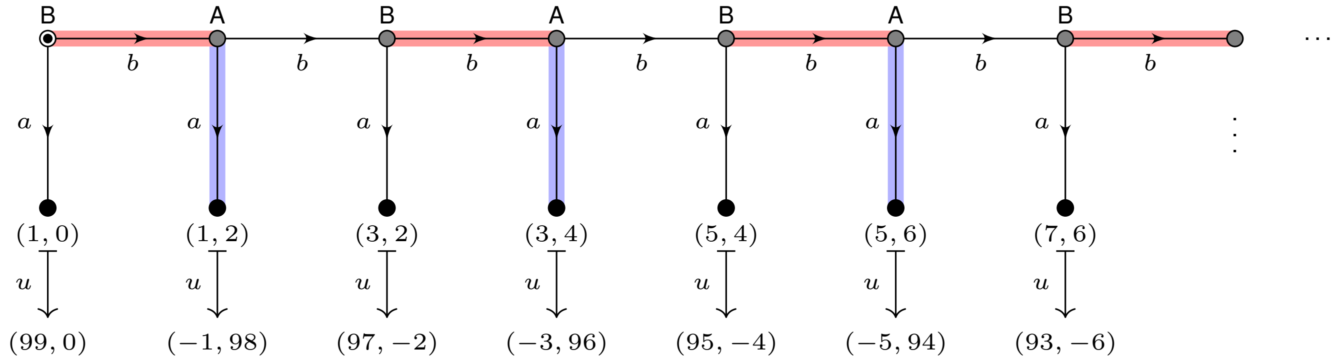
Analyse: Versteigerung eines Euro

(1b) Wir vermuten leicht zwei teilspielperfekte Gleichgewichte.

Erste Lösung: Alice überbietet immer, Bob gibt immer nach.



Zweite Lösung: Bob überbietet immer, Alice gibt immer nach.



Analyse: Versteigerung eines Euro

(1b) Sind dies tatsächlich teilspielperfekte Gleichgewichte? Ja!

Beweis: Wir prüfen zunächst den ersten Vorschlag, dieselbe Analyse gelingt anschließend für den zweiten Vorschlag mit vertauschten Rollen.

Zunächst kann Alice sich nicht verbessern, nur strikt verschlechtern. Aber auch Bob kann sich nicht verbessern, nur strikt verschlechtern.

⚠ Hierzu muss man alle Alternativen auflisten und vergleichen: Versuchen Sie es als Übung in Geduld und Sorgfalt!

☹ Das Prinzip der einmaligen Abweichung J2D ist hier zunächst nicht direkt anwendbar, da mit $-\infty$ nicht alle Auszahlungen in $\mathbb{R}$ liegen.

☺ Für Auszahlungen in $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty, +\infty] \cong [-1, 1]$ kompaktifizieren wir die Zahlengerade $\mathbb{R}$, die Auszahlungen sind stetig, und das Prinzip der einmaligen Abweichung ist formal wieder in Kraft.

☺ Das Prinzip der einmaligen Abweichung vereinfacht die Analyse wie immer enorm! Damit wird die Diskussion aller Fälle ein Kinderspiel.

⚠ Bei fehlender Absprache ist nicht festgelegt und keineswegs klar, welche der beiden Gleichgewichtsstrategien gespielt wird / werden soll.

Analyse: Versteigerung eines Euro

(1c) Haben wir mit diesen beiden alle Gleichgewichte gefunden? Ja!

Beweis: Ewiges Überbieten $b^\infty = bbb\dots$ ist sicher kein Gleichgewicht: Jeder Spieler kann sich, sobald er zieht, durch Aussteigen verbessern! In jedem Gleichgewicht muss mindestens ein Spieler einmal aussteigen.

- Angenommen, Bob steigt beim Gebot $(z+1, z)$ aus. Per Rückwärtsinduktion finden wir dann *davor* die erste Lösung, und zwar eindeutig: Alice überbietet immer, Bob gibt immer nach.
- Angenommen, Alice steigt beim Gebot $(z, z+1)$ aus. Per Rückwärtsinduktion finden wir dann *davor* die zweite Lösung, und zwar eindeutig: Bob überbietet immer, Alice gibt immer nach.

Jetzt kommt der Clou: Dieses Argument gilt genauso für *jedes* Teilspiel! Daher ist jedes teilspielperfekte Gleichgewicht entweder die erste oder die zweite Lösung, weitere Gleichgewichte gibt es nicht!

☺ Damit kennen wir alle teilspielperfekten Gleichgewichte des Spiels; diese beiden beschreiben / erklären das mögliche rationale Verhalten.

Analyse: Versteigerung eines Euro

☺ Damit haben wir diese Versteigerung spieltheoretisch formalisiert und analysiert — und verstehen so das mögliche rationale Verhalten. Zunächst sind die Gleichgewichte nicht offensichtlich, doch unsere vage Ahnung können wir nun beweisen, auf Grundlage der Formalisierung.

Interessanterweise gibt es genau zwei Gleichgewichte, das war auf den ersten Blick nicht sofort ersichtlich. Beide Gleichgewichte zeigen strikt entgegengesetzte Rollenverteilungen beim Überbieten bzw. Nachgeben.

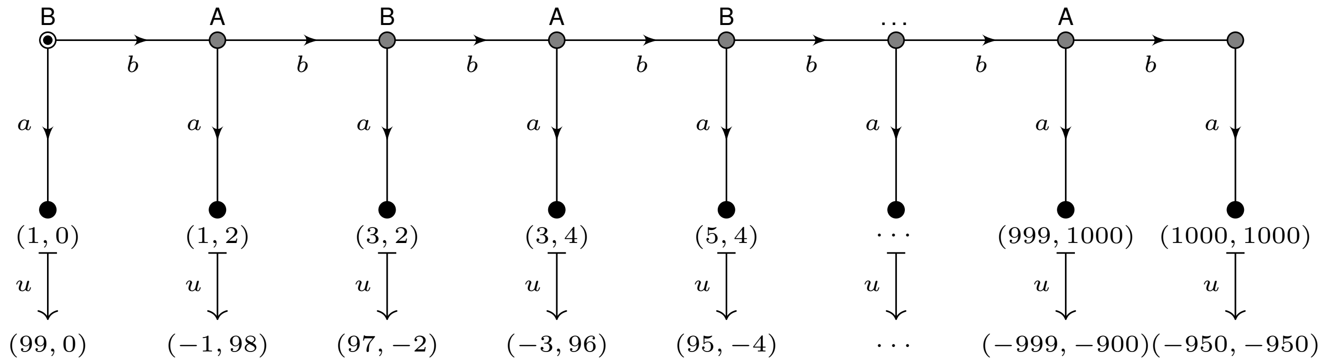
☺ Das erklärt auch das beobachtete (irrationale) Verhalten der Spieler, zumindest teilweise: Jeder Spieler wählt / wünscht / erhofft egozentrisch das ihm vorteilhafte Gleichgewicht. Leider sind beide Gleichgewichte vollkommen inkompatibel und führen zur beobachteten Bietspirale.

Auch im Rückblick hält jeder Spieler sein eigenes Verhalten für rational, das des Gegenübers jedoch für irrational. Das ist nachvollziehbar vom eigenen voreingenommenen Standpunkt „des“ rationalen Verhaltens, doch leider sieht der Kontrahent das symmetrisch entgegengesetzt.

☺ Die logische Falle liegt (vor allem) in der mangelnden Eindeutigkeit! Sozio-psychologische Phänomene kommen noch verstärkend hinzu.

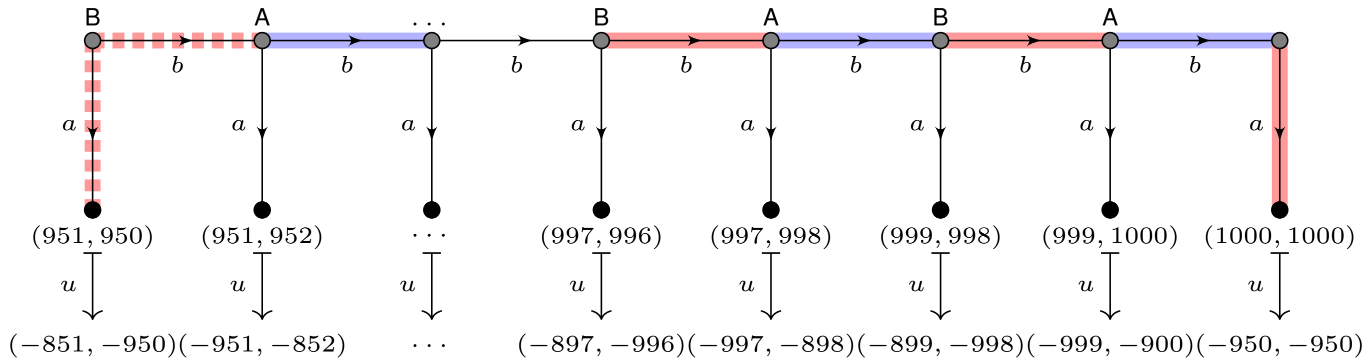
Analyse: Versteigerung eines Euro

(2a) Wir erhalten nun wirklich ein Tausendfüßler-Spiel (vergleiche J207):



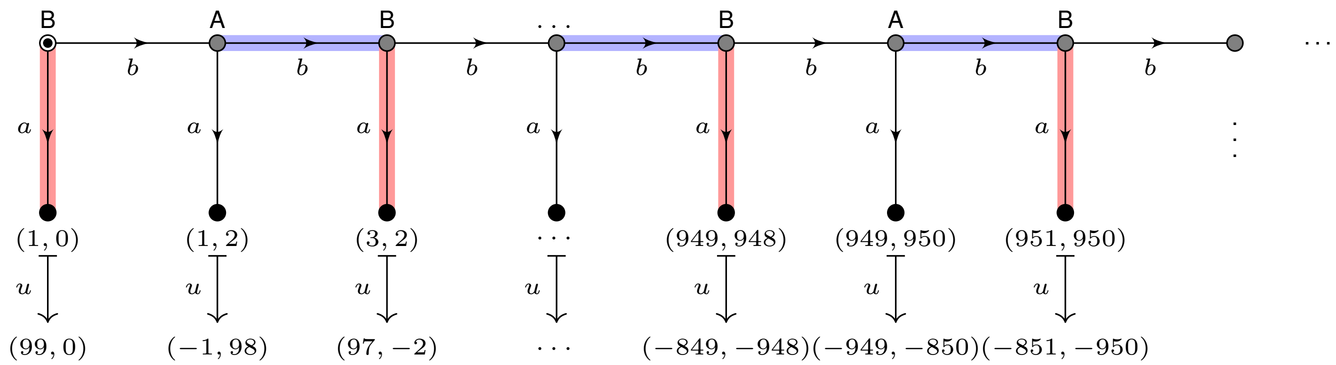
Mit dem Auktionator ist dies ein Drei-Personen-Nullsummenspiel.

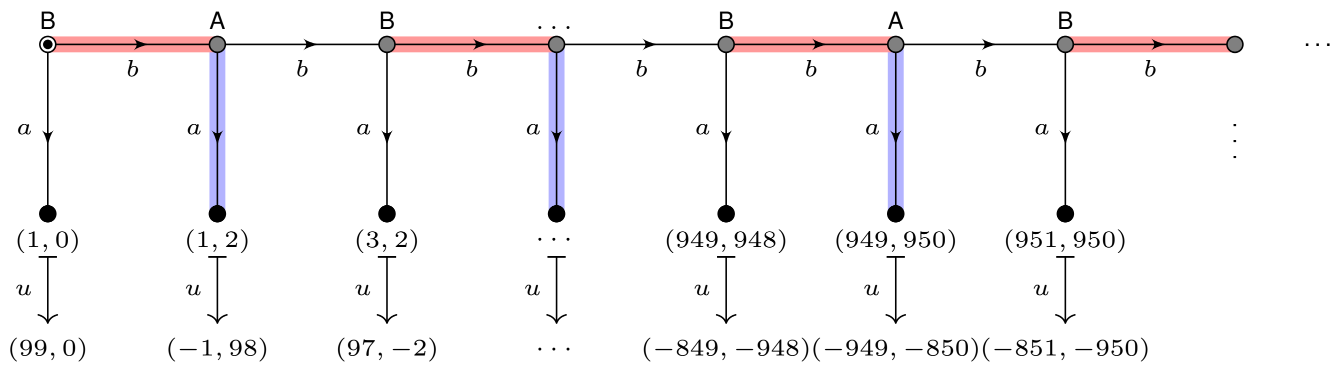
(2b/c) Dieses Spiel ist endlich, wir nutzen Rückwärtsinduktion J1D:



Beispiel: Versteigerung eines Euro

Beim Stand $x = (951, 950 \mid 2)$ ist Bob indifferent zwischen a und b. Bobs Wahl bestimmt eindeutig alle Aktionen *vor* diesem Zustand:





Auch das endliche Spiel hat zwei entgegengesetzte Gleichgewichte.

Versteigerung von vier Euro (Klausur 2018)

Aufgabe: Wir untersuchen eine eng begrenzte, sehr kurze Auktion: Versteigert werden 4 Euro. Alice und Bob bieten abwechselnd in Euro: Alice beginnt mit dem Startgebot $(1,0)$, Bob kann auf $(1,2)$ erhöhen, Alice auf $(3,2)$ usw. bis $(7,8)$ und zuletzt schließlich $(8,8)$ Gleichstand. Wird nicht weiter erhöht, zahlen *beide* ihr zuletzt abgegebenes Gebot. Das Objekt der Auktion, die 4 Euro, gehen an den Höchstbietenden. Beim Gleichstand $(8,8)$ wird geteilt, und beide bekommen 2 Euro.

(1) Zeichnen Sie den Spielbaum Γ mit allen relevanten Informationen.

(2) Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$.

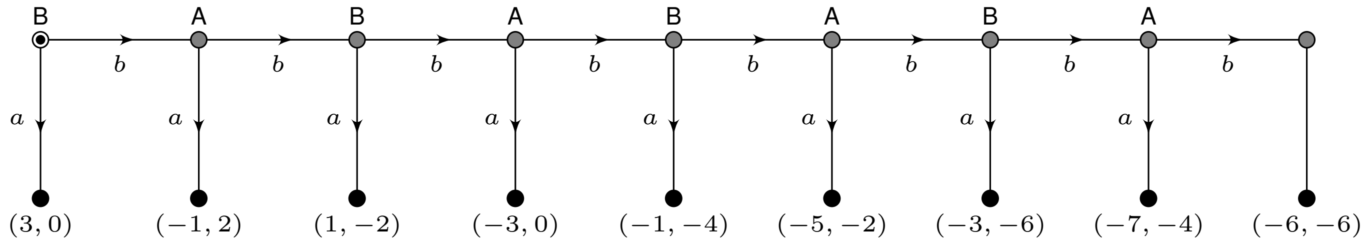
(3) Welche Auszahlungen sind teilspielperfekt erreichbar?

(4) Untersuchen Sie zusätzlich auch gemischte Strategien.

Das ist eng angelehnt an unsere vorherige Untersuchung. Der Spielbaum ist nochmal wesentlich kleiner und übersichtlicher. Dieses Beispiel dient uns hier als einfache und schöne Illustration.

Versteigerung von vier Euro (Klausur 2018)

Lösung: (1) Die Aufgabenstellung codiert folgenden Spielbaum:

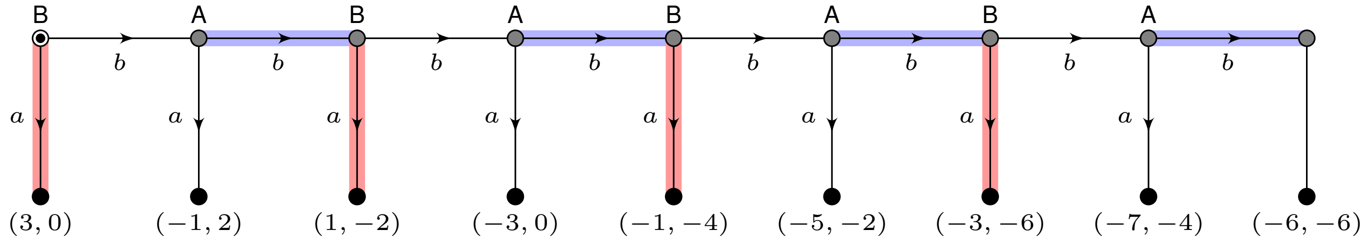


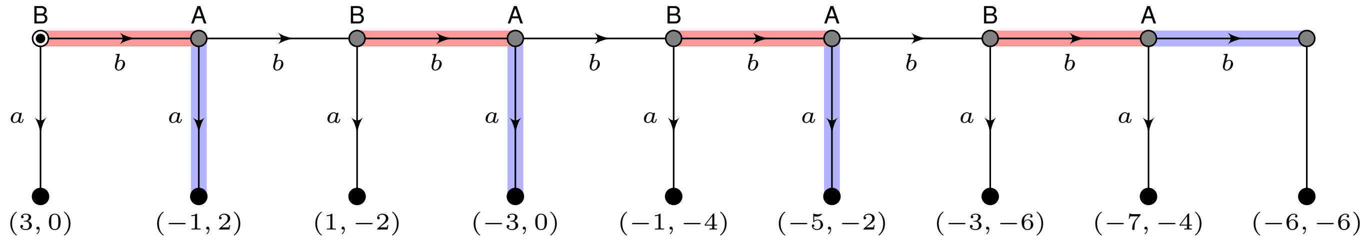
Formal ist dies der Baum $X = \{\emptyset, a, b, ba, b^2, b^2a, \dots b^7a, b^8\}$. Auf den terminalen Zuständen $\partial X = \{a, ba, b^2a, \dots, b^7a, b^8\}$ gelten die angegebenen Auszahlungen gemäß Aufgabenstellung. In den aktiven Zuständen $X^\circ = \{\emptyset, b, b^2, \dots, b^7\}$ sind abwechselnd Bob und Alice am Zug, jeweils mit Aktionsmenge $A_x^i = \{a, b\}$.

Diese Fragestellung übt die Übersetzung vom Text zum Baum und dann zu den Gleichgewichten. Das ist der kritische Übergang von der verbal-prosaischen Beschreibung zur formal-algebraischen Darstellung. Erst die sorgfältige Formalisierung ermöglicht die Analyse. Sie enthüllt auch eventuelle Lücken oder Widersprüche in der Spielbeschreibung.

Versteigerung von vier Euro (Klausur 2018)

(2) Wir finden genau zwei teilspielperfekte Gleichgewichte:





Dies ist eine vereinfachte Variante der Versteigerung eines Euro. Wir konstruieren alle Gleichgewichte durch Rückwärtsinduktion J1D:

Im letzten Zug entscheidet Alice immer für b. Im vorletzten Zug ist Bob indifferent zwischen a und b. Jede dieser beiden Wahlen führt dann eindeutig per Rückwärtsinduktion zu dem angegebenen Gleichgewicht.

Versteigerung von vier Euro (Klausur 2018)

(3) Die einzigen Gleichgewichtsauszahlung sind $(3, 0)$ und $(-1, 2)$.

Es gibt genau zwei Gleichgewichte, tragischerweise sind beide von Anfang an entgegengesetzt. Alice wünscht die Auszahlung $(3, 0)$ und Bob die Auszahlung $(-1, 2)$. Das erklärt das empirisch beobachtete (irrationale) Verhalten der Spieler, zumindest teilweise: Jeder Spieler wählt / wünscht / erhofft egozentrisch das ihm vorteilhafte Gleichgewicht.

(4) Im letzten Zug muss Alice b spielen, denn dies dominiert a strikt. Im vorletzten Zug kann Bob eine gemischte Strategie $s_t = (1-t)a + tb$ mit $t \in [0, 1]$ spielen. Für $t < 2/3$ finden wir das erste Gleichgewicht, für $t > 2/3$ das zweite, wie zuvor per Rückwärtsinduktion.

Bei $t = 2/3$ ist Alice indifferent im vorvorletzten Zug. Auch sie kann dann eine gemischte Strategie spielen, usw. Die Erweiterung zu gemischten Strategien beschert uns unendlich viele weitere Gleichgewichte.

Wenn Sie möchten, führen Sie dies als Übung genauer aus!

Zum Kontrast eine Erbschaft (Klausur 2018)

Aufgabe: Alice und Bob erben bis zu 10 Mio Euro. Das Testament bestimmt folgendes Verfahren: Der Notar schlägt Alice die Auszahlung $(1, 1)$ vor, in Mio Euro, der Rest geht als Spende an wohltätige Zwecke. Bei Ablehnung schlägt er Bob $(0, 3)$ vor. Bei Ablehnung schlägt er Alice $(2, 2)$ vor. Bei Ablehnung schlägt er Bob $(1, 4)$ vor, usw. Zustimmung entscheidet jeweils endgültig. Bei Ablehnung wird dem Ablehnenden eine Mio subtrahiert und dem anderen zwei Mio addiert. Das geht so weiter bis zum letzten Vorschlag $(5, 5)$, der ungefragt entschieden wird.

(1) Zeichnen Sie den Spielbaum Γ mit allen relevanten Informationen.

(2) Nennen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte $s \in \mathrm{PNE}(\Gamma)$.

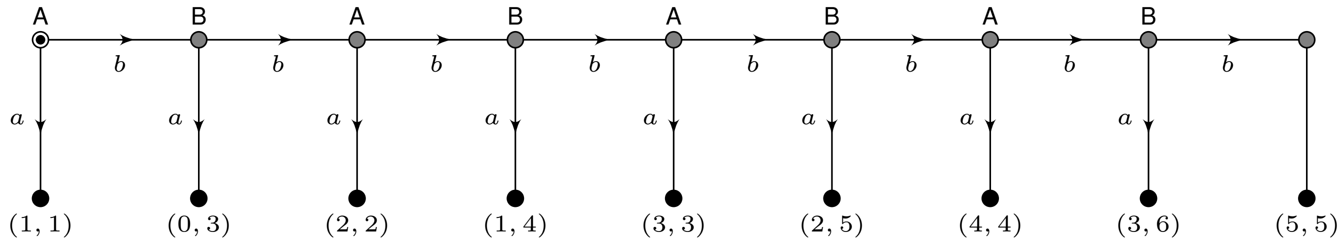
(3) Welche Auszahlungen sind teilspielperfekt erreichbar?

(4) Untersuchen Sie zusätzlich auch gemischte Strategien.

🙂 Das ähnelt auf den ersten Blick der vorigen Auktion, doch die genauere Analyse zeigt ein anderes, überraschendes Verhalten.

Zum Kontrast eine Erbschaft (Klausur 2018)

Lösung: (1) Die Aufgabenstellung codiert folgenden Spielbaum:

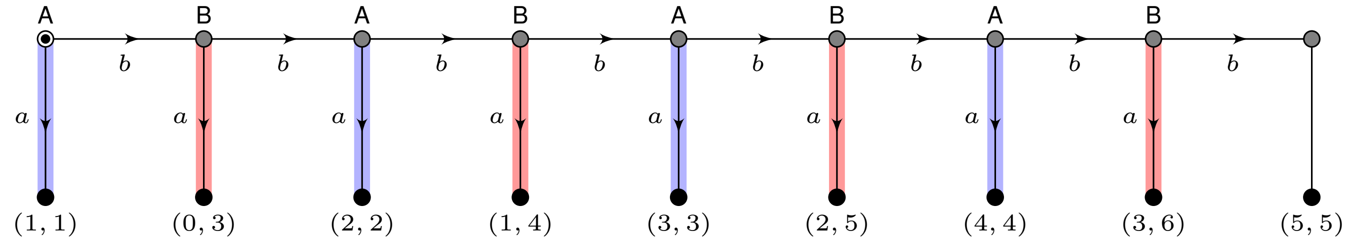


Formal ist dies der Baum $X = \{\emptyset, a, b, ba, b^2, b^2a, \dots b^7a, b^8\}$.
Auf den terminalen Zuständen $\partial X = \{a, ba, b^2a, \dots, b^7a, b^8\}$ gelten die angegebenen Auszahlungen gemäß Aufgabenstellung.
In den aktiven Zuständen $X^\circ = \{\emptyset, b, b^2, \dots, b^7\}$ sind abwechselnd Alice und Bob am Zug, jeweils mit Aktionsmenge $A_x^i = \{a, b\}$.

🙂 Diese Fragestellung übt die Übersetzung vom Text zum Baum und dann zu den Gleichgewichten. Das ist der kritische Übergang von der verbal-prosaischen Beschreibung zur formal-algebraischen Darstellung. Erst die sorgfältige Formalisierung ermöglicht die Analyse. Sie enthüllt auch eventuelle Lücken oder Widersprüche in der Spielbeschreibung.

Zum Kontrast eine Erbschaft (Klausur 2018)

(2) Wir finden genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht:



Wir konstruieren alle Gleichgewichte durch Rückwärtsinduktion (J1D):

- Im letzten Zug muss Bob akzeptieren (a).
- Im vorletzten Zug muss demnach Alice akzeptieren (a).
- Im vorvorletzten Zug muss demnach Bob akzeptieren (a), usw.

Egal wer am Zug ist, jeder stimmt dem aktuellen Angebot zu.

☺ Diese Konstruktion ist leicht. Der Satz von Zermelo J1D garantiert: Dies ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht, und zudem das einzige.

Zum Kontrast eine Erbschaft (Klausur 2018)

(3) Die einzige Gleichgewichtsauszahlung ist demnach $(1, 1)$:
Jeder bekommt nur eine Million, acht Millionen werden gespendet.

(4) Wenn wir gemischte Strategien zulassen, erhalten wir dasselbe Ergebnis: Die oben genannten Aktionen sind jeweils strikt dominant.

☺ Sie kennen analoge Fälle aus zahlreichen Beispielen und Übungen, vom Gefangenendilemma über diverse ähnliche soziale Dilemmata bis hin zu dynamischen Spielen wie diesem oder weiteren Varianten des Hundertfüßlerspiels. Wenn man es recht bedenkt, ist das Ergebnis doch immer etwas überraschend, beim ersten Kontakt wirkt es sogar paradox:

Mit Kooperation könnten beide Spieler wesentlich besser abschneiden. Doch hier ist Zusammenarbeit kein Gleichgewicht: Die Spieler können innerhalb dieses Spiels nicht kommunizieren und bindende Absprache treffen. Daher greift allein die individuelle Gewinnmaximierung, kurz Gier: Rückwärtsinduktion ergibt das obige Gleichgewicht als einzige Lösung.

Wir diskutieren in diesem Kapitel die Grundlagen der Auktionstheorie. Unsere praktischen Beispiele und theoretischen Modelle sind einfach, wir können sie noch mit vertretbaren Mitteln untersuchen und verstehen. Zum Kontrast möchte ich realistische Auktionen zumindest skizzieren, um finanzielle Größenordnung und juristische Sorgfalt zu illustrieren.

Eine zentrale Anwendung von Auktionen sind die staatliche Vergabe von Aufträgen und Lizenzen. Wir betrachten insbesondere Mobilfunklizenzen, denn diese sind sowohl finanziell als auch politisch höchst relevant. Die damit betraute Bundesnetzagentur schreibt hierzu 2019:

Deutschland soll Weltspitze bei der digitalen Infrastruktur und Leitmarkt für 5G werden. Die neue Mobilfunkgeneration 5G soll die Entwicklung innovativer Dienste und Anwendungen (Industrie 4.0, automatisiertes Fahren, Internet der Dinge) fördern. Dafür werden Frequenzen frühzeitig und bedarfsgerecht bereitgestellt, damit Deutschland bei diesem Technologiesprung voranschreitet.

Regeln für die Durchführung des Verfahrens (Auktionsregeln) zur Vergabe von Frequenzen in den Bereichen 2 GHz und 3,6 GHz
`www.bundesnetzagentur.de/SharedDocs/Downloads/DE/Sachgebiete/Telekommunikation/Unternehmen_Institutionen/Frequenzen/OffentlicheNetze/Mobilfunk/DrahtloserNetzzugang/Mobilfunk2020/20181126_Entscheidungen_III_IV.pdf`

Interessant ist hierbei bereits die doppelte Zielsetzung: Einerseits sollen gewisse technische Entwicklungen gefördert werden, andererseits hofft der Finanzminister auf Einnahmen in Milliardenhöhe. Die Abwägung ist schwierig, denn vermutlich ist nicht beides ganz und zugleich möglich.

Die 5G Auktion 2019: Versteigert wurden 41 Frequenzblöcke in den Bereichen 2 GHz und 3.6 GHz. Das mehrstufige Auktionsverfahren lief vom 19.03. bis 12.06.2019 in Mainz. Das Bieten erstreckte sich über 497 Runden und brachte einen Gesamterlös von knapp 6.6 Milliarden Euro.

Zugelassen waren neben den bisherigen Anbietern Deutsche Telekom, Vodafone, Telefónica auch als Neueinsteiger die Drillisch Netz AG (1&1). Alle vier Bieter haben erfolgreich geboten und erhalten Frequenzen. Dafür zahlen sie jeweils 2.17, 1.88, 1.42 bzw. 1.07 Milliarden Euro.

Der Erlös liegt deutlich höher als die erwarteten drei bis fünf Milliarden. Die 4G-Auktion 2015 brachte knapp 5.1 Milliarden. Ein möglicher Grund für die Steigerung: Statt drei nahmen diesmal mit Drillisch vier Bieter teil. Das erhöhte den Druck auf die Bieter. Konkurrenz belebt das Geschäft.

Wie verlaufen große staatliche Auktionen?

„Die Telekom hat das Spektrum erhalten, das sie wollte“, sagt ein Sprecher des Konzerns. Trotzdem hinterlasse die Auktion einen bitteren Nachgeschmack. „Das Ergebnis ist ein Dämpfer für den Netzausbau“, so der Sprecher weiter. „Auch diesmal ist das Spektrum in Deutschland viel teurer als in anderen Ländern. Das Geld für die Auktion fehlt den Netzbetreibern in Deutschland.“ (Süddeutsche Zeitung, 12.06.2019)

Der letzte Satz ergibt ökonomisch wenig Sinn: Natürlich fehlt das Geld, das man ausgibt. Deshalb sollte jeder seine Ausgaben gut bedenken. Diese Aussage ist politisch gemünzt und spielt auf die obige doppelte Zielsetzung an: Die Netzbetreiber sollen die Frequenzen ersteigern und anschließend beim Ausbau zusätzliche vertragliche Auflagen erfüllen.

Die ambitionierte politische Zielsetzung, die technischen Entwicklungen der nächsten Jahre, zudem alle ökonomischen Chancen und Risiken ergeben eine hochkomplexe Entscheidungslage – für alle Beteiligten! Die optimistische Hoffnung und auch die bisherige Erfahrung ist, dass eine gut konstruierte Auktion hierzu einen „fairen“ Preis ermitteln kann.

Wie verlaufen große staatliche Auktionen?

Die Debatte über den „fairen“ Preis wird wohl noch länger anhalten. Natürlich erhofft der Staat als Auktionator möglichst hohe Einnahmen, genau dazu hat er ja das aufwändige Auktionsverfahren konstruiert. Zudem kommen noch politische Erwartungen und Forderungen.

Natürlich beklagen die Unternehmen als Bieter die hohen Preise, doch alle sind vermutlich hochgradig rational und professionell und haben sich daher ihre Gebote sehr genau überlegt. Aus Erfahrung wissen wir: Sie verstehen ihr Geschäft.

Ein salomonisches Urteil oder eine perfekte Gerechtigkeit wird es in Anbetracht der gegensätzlichen Ziele kaum geben. Niemand kennt alle Daten, Informationen und Überlegungen, die zu einer solchen zentralen Entscheidung nötig wären.

Umso erstaunlicher ist es, dass Auktionen hierzu praktikable Lösungen anbieten und gangbare Kompromisse erschaffen. Aus der Sicht der angewandten Spieltheorie sind Auktionen daher zu einem weitverbreiteten Erfolgsmodell aufgestiegen.

Bemerkenswert ist, dass das Verfahren so extrem ausgefeilt ist.
Es geht über 497 Bietrunden und dauert insgesamt 12 Wochen.

Die Auktionsregeln legen genau fest, wie versteigert wird.
Es ist daher wichtig, diese vor der Durchführung zu kennen,
so dass alle Bieter sich gründlich darauf vorbereiten können.
Eine rationale Bietstrategie erfordert viel Zeit und große Sorgfalt.

Entsprechend der großen Bedeutung waren die Regeln sehr detailliert und recht kompliziert. Die Unterlagen umfassen 174 Seiten, ich habe sie oben verlinkt. Davon widmen sich über 100 Seiten der ausführlichen Begründung, warum die Vergaberegeln gerade so gewählt wurden.

Alle Bieter (als Vertreter der Unternehmen) mussten im Vorfeld an einer Bieterschulung teilnehmen und danach verbindlich erklären, dass sie die Regeln verstanden haben. Das eigentliche Auktionsverfahren fand statt im Gebäude der Bundesnetzagentur, Canisiusstraße 21, 55122 Mainz.

Die Erfahrung zeigt, dass Bieter nicht nur erbitterte Konkurrenten sind, sondern als mögliche Option auch Absprachen in Erwägung ziehen. Die möglichst vollständige Unterbindung von Absprachen zwischen den Bietern war daher ein zentraler Aspekt dieses Auktionsverfahrens.

Die Auktion wird in Anwesenheit der Bieter durchgeführt (Präsenzauktion). Wirken Bieter vor oder während der Auktion zusammen, um den Verlauf oder das Ergebnis der Auktion zu beeinflussen (kollusives Verhalten), können sie vom gesamten Versteigerungsverfahren ausgeschlossen werden.

Jedem Bieter wurde ein separater Raum (Bieterraum) zur Verfügung gestellt. In diesem befanden sich ein Auktionscomputer zur Abgabe der Gebote und ein Telefon, das Verbindungen ausschließlich zum Auktionator ermöglicht sowie ein weiteres Telefon und ein Faxgerät und ein Internetanschluss, welche Verbindungen ausschließlich zu den Entscheidungsträgern des zugelassenen Unternehmens ermöglichen.

Wie verlaufen große staatliche Auktionen?

Das gesamte Auktionsverfahren dauerte 12 Wochen, jeweils montags bis freitags, von 8 bis 18 Uhr, durchschnittlich 8 Bietrunden pro Tag. Natürlich kann in einer solch langen Zeit die Kommunikation zwischen den Unternehmen nicht gänzlich unterbunden werden. Für den Erfolg der Auktion wurden alle erdenklichen Anstrengungen unternommen und Absprachen während der Bietrunden soweit wie möglich erschwert.

Die Auktionsregeln legten genau fest, welche Informationen die Bieter zu Beginn jeder Auktionsrunde erhalten. Die Bieter durften ihre Gebote nicht frei wählen, sondern nur aus einer festen Liste von 14 Geboten: jeweils das minimale valide Gebot zuzüglich einer Steigerung von 0, $10\,000$, $20\,000$, $50\,000$, $100\,000$, $200\,000$, $500\,000$, $1\,000\,000$, $2\,000\,000$, $5\,000\,000$, $10\,000\,000$, $20\,000\,000$, $50\,000\,000$ oder $100\,000\,000$ Euro.

🙂 Selbst in unserer sehr einfachen und informellen Auktion zum Semesterschlussverkauf lohnt es sich solche Details zu bedenken.

Wie verlaufen große staatliche Auktionen?

Das sorgfältige Design des Auktionsverfahrens ist extrem wichtig! Selbst kleinste Fehlkonstruktionen können fatal ausgenutzt werden.

Berühmtes Beispiel: Eine Auktion amerikanischer Sendelizenzen im Jahr 1997 brachte dem Staat statt der erhofften 2 Milliarden Dollar nur 14 Millionen. Kollusive Absprachen unter den Bietern waren auch hier strengstens verboten. Was war passiert? Die Bieter durften die Höhe ihrer Gebote frei wählen und kommunizierten durch die letzten Ziffern! Das sind Geschichten wie aus einem phantasievollen Spionage-Krimi.

Sie können daran vielleicht erahnen, wie wichtig, aber auch wie delikat, Versteigerungen dieser Größenordnung sind. Für den Erfolg der Auktion müssen Juristen, Ökonomen und Mathematiker eng zusammenarbeiten.

🙂 Mit großer Macht kommt große Verantwortung. Gutes Design kann zu wunderbaren Erfolgen führen, schlechtes Design zur Katastrophe.

Semesterschlussverkauf: Alles muss raus!

Das große Finale dieses Winnersemesters 2019/20:
Ihr Spieltheorieteam versteigert wertvolle Dinge.
Seien Sie dabei! Machen Sie mit!

Empirie: Wie gestalten wir unterhaltsame Auktionen?

Im **Casino Royal** (07.02.2020) hatten wir die wunderbare Gelegenheit, die Chancen und Risiken von Auktionen zu erleben und zu erproben. Das war zugleich unsere Abschlussveranstaltung für dieses Semester. Dank engagierter Werbung kamen über 30 Teilnehmer aus 3 Fakultäten.

Erste Auktion. Versteigert wurde unser aktuelles Spieltheorieposter, live von den Autoren signiert, also ein weltweit einzigartiges Unikat.

Als Verfahren wählten wir hierzu eine Englische Auktion, die Gebote wurden vom Auktionator aufsteigend aufgerufen in Schritten von 10¢. Dazu standen anfangs alle Teilnehmer auf. Wer nicht mehr mitbieten wollte, setzte sich. Das Plakat ging für 4€ an den glücklichen Gewinner.

☺ Regulärer Preis im Fanshop: 2€, dort allerdings unsigniert.

Zweite Auktion. Versteigert wurde ein Vintage-Super-Sammler-Paket: komlettes Quartett aller Vorlesungsposter und ein Dynamik-Lernposter.

Das Verfahren war eine Holländische Auktion, absteigend aufgerufen. Angefangen bei 12€ in Schritten von 10¢. Das Paket ging für 8€50 an den glücklichen Gewinner. ☺ Regulärer Preis im Fanshop: 11€.

Empirie: Wie gestalten wir unterhaltsame Auktionen?

Nach den ersten beiden erfolgreichen Versteigerungen waren alle Bieter im Ersteigern geübt und sichtlich gespannt auf weitere Schnäppchen.

Dritte Auktion. Versteigert wurde unser beliebtes Dynamik-Lernposter sowie ein unzensiertes Klopapier (Fachschaftsmitteilung Januar 2020) und dazu noch zwei pornographische Kalender: einmal Foodporn mit Rezepten und Bildern von Speisen (Rapp 2020) und einmal Mathporn „Complex Beauties 2019“ mit Phasenportraits komplexer Funktionen.

Das Auktionsverfahren war etwas trickreich: Jeder bietet geheim ein positives Vielfaches von 20¢, also 20¢, 40¢, 60¢, usw. Es gewinnt das *kleinste einzige Gebot*. Sollte es kein einzelnes Gebot geben, so wird unter gleichen Geboten gelost. Geboten wurde 20¢: 8mal, 40¢: 3mal, 60¢: 4mal, 80¢: 4mal, dazu je einmal 1€60, 1€80, 2€, 2€20, 3€80.

Schnäppchen! Als Auktionator bin ich recht enttäuscht, denn ich hätte 3€80 erhalten können… oder nicht? War dies ein ehrliches Gebot oder nur taktisch, um den Zuschlag zu vermeiden? Die wahre Strategie ist kaum rekonstruierbar, eine Interpretation daher nahezu unmöglich.

Empirie: Wie gestalten wir unterhaltsame Auktionen?

Vierte Auktion. Versteigert wurde – diesmal einzeln – der aktuelle Mathekalender „Complex Beauties 2020“ zum zehnjährigen Jubiläum mit zwölf wunderschönen Phasenportraits komplexer Funktionen und faszinierenden Geschichten über ihre mathematischen Hintergründe.
`www.mathe.tu-freiberg.de/fakultaet/information/mathekalender-2020`

Als Verfahren wählten wir die Vickrey–Auktion, *sealed bid second price*: Alle bieten geheim auf Papier, das höchste Gebot erhält den Zuschlag, zahlt aber nur den zweithöchsten Preis. Dieses berühmte Verfahren ermutigt ehrliches Bieten; strategisches Bieten bringt keine Vorteile.

Geboten wurden 10¢, 10¢, 18¢, 23¢, 40¢, 46¢, 50¢ fünfmal, 51¢, 74¢, 75¢, 80¢, 1€, 1€30, 1€41, 1€60, 2€, 2€20, 2€50, 3€10, 4€, 5€.

Das war ein sagenhaftes Schnäppchen! Der Internetpreis ist 10€. Als Auktionator bin ich doch recht enttäuscht, ich hatte mir mehr erhofft.

Leichtsinnig haben wir den Fehler gemacht, alle Beträge zu erlauben. Das provozierte Gebote wie „$\sqrt{2}$“ oder „$\pi/17$“. Oh, diese Mathematiker! Zukünftig Gebote nur in ganzen Cent, geschrieben im Dezimalsystem.

Empirie: Wie gestalten wir unterhaltsame Auktionen?

Fünfte Auktion. Versteigert wurde ein faustgroßes Marmeladenglas randvoll mit Ein- und Zwei-Cent-Münzen von „unschätzbarem Wert“: Der Wert des Münzinhalts war tatsächlich sehr schwer zu schätzen.

Als Verfahren wählten wir eine Englische Saalauktion: Bieter rufen ihre Gebote selbst auf. Der Auktionator bestätigt dies durch Wiederholung und beendet die Auktion, sobald keine weiteren Gebote mehr kommen.

Das Glas ging für den Spottpreis von $2€20$ an den glücklichen Gewinner. Tatsächlich enthielt es mehr als doppelt soviel, nämlich genau $4€50$.

🙂 Auktionen mit verdeckten Geboten (*sealed bid*, wie oben) verlaufen typischerweise sehr ruhig und unterstützen rationale Entscheidungen. Ich hatte gehofft, im Format der Englischen Saalauktion würden sich die Bieter gegenseitig beeinflussen und zu höheren Geboten anstacheln.

🙁 Der erhoffte Effekt blieb aus, sein Gegenteil trat ein: Die Bieter waren sehr konservativ und zurückhaltend, der Auktionsverlauf verstärkte dies. Sie ließen sich hier nicht zu einem irrationalen Bietgefecht verlocken. . . in den nächsten vier Auktionen allerdings durchaus. Woran liegt das?

Empirie: Wie gestalten wir unterhaltsame Auktionen?

Das Münzglas ist ein konkrete, wunderbar anschauliche Illustration:

1. Der Gegenstand hat einen objektiven Wert, nicht nur subjektiv.
2. Die individuelle Schätzung dieses Wertes unterliegt Schwankungen.

In solchen Situationen droht der **Fluch des Gewinners** / *winner’s curse*: Der Gewinner der Auktion hat den wahren Wert am meisten überschätzt. Schlimmstenfalls deckt sein Ertrag nicht die Kosten der Ersteigerung. Diesen Effekt wollte ich plastisch illustrieren und didaktisch nutzen.

🙁 Der Effekt trat leider nicht ein, alle Bieter waren dafür zu vorsichtig. Ich vermute, zu den zufälligen Schwankungen der Schätzung kam eine systematische Unterschätzung, wie viele Münzen in das Glas passen. Hier wäre ein Refenrenzbeispiel hilfreich, etwa ein ähnliches Glas.

🙂 Die zuvor genutzte Vickrey–Auktion, *sealed bid second price*, hat die **Offenbarungseigenschaft**. Das ist nicht bloß ein theoretischer Vorteil, sondern hat einen praktisch wertvollen Zusatznutzen: Als Auktionator erhalte ich tonnenweise **personalisierte Daten**. Das ist Datengold für zukünftige Versteigerungen oder ganz allgemein zur Marktforschung.

Empirie: Wie gestalten wir unterhaltsame Auktionen?

Diese ersten fünf Auktionen waren bereits lehrreich und unterhaltsam. Der krönende Abschluss ist traditionell die Versteigerung eines Euro. Viele Teilnehmer hatten bereits legendäre Erzählungen davon gehört, zudem waren Helden der vorigen Spieltheorievorlesung anwesend.

Sechste Auktion. Versteigert wird eine Ein-Euro-Münze (gebraucht). Geboten / überboten wird in ganzen Cent, das höchste Gebot gewinnt. Achtung: Gezahlt werden das höchste *und* das zweithöchste Gebot. Hierzu stehen immer die beiden letzten Bieter, die vorigen setzen sich.

In einem kurzen aber lebhaften Gefecht wurden geboten: 1¢, 2¢, 3¢, 4¢, 50¢, 1€01, 1€02, 1€03, 1€04, 1€06, 1€07, 1€08, 1€10, 1€12, 1€30.

🙂 Der stolze Gewinner erhält den Euro für sagenhaft günstige 1€30. Der Auktionator freut sich über 2€42 Gesamterlös und die Gewissheit, dass alle Teilnehmer viel über ir/rationales Verhalten gelernt haben.

Siebte Auktion. Versteigert wird ein weiterer Euro, genau wie zuvor. Das erste und zugleich letzte Gebot ist diesmal 1€. Das ist erlaubt.

🙂 Förderlich für lebhafte Auktionen ist Überbieten um höchstens 10¢.

Empirie: Wie gestalten wir unterhaltsame Auktionen?

Alle Teilnehmer, so scheint es, durchschauen nun das Auktionsverfahren. Sie handeln rational und vorausschauend. Zur Sicherheit eine Probe:

Achte Auktion. Versteigert wird ein weiterer Euro, genau wie zuvor. Geboten werden 10¢, 11¢, 40¢, 50¢, 51¢, 52¢, 55¢, 56¢, 70¢, 71¢, 1€, 1€01, 1€10, 1€20, 1€30, 1€40, 1€50, 1€60, 1€70, 1€75, 2€. Wow!

🙂 Der Auktionator freut sich über 3€75 Erlös für einen guten Zweck. Alle wundern sich, wie ir/rational menschliches Verhalten sein kann.

Neunte Auktion. Versteigert wird ein weiterer Euro, genau wie zuvor. Das erste und letzte Gebot ist 21¢. Niemand wagt mehr einzusteigen.

🙂 Der Auktionator verkauft seinen Euro für sagenhaft günstige 21¢. So ist das Leben: Mal verlierst du, mal gewinnen die anderen.

🙂 Nach diesen Auktionen entflammte (erneut!) die Debatte, welches Verhalten hier am erfolgreichsten wäre. Tauben: bloß nicht einsteigen! Falken: systematisch Dominanz beweisen! Spieltheorie liefert Methoden und Erklärungen, doch Praxis und Empirie zeigen komplexes Verhalten.

🙂 Wir haben viel gelernt, noch mehr liegt vor uns. Es bleibt spannend!

Das große Finale dieses Summer of Math 2022:
Ihr Spieltheorieteam versteigert wertvolle Dinge.

Casino Royal am 15.07.2022 ab 14 Uhr im Hörsaal V57.04

Alle sind herzlich willkommen, egal ob mit oder ohne Vorkenntnisse.
Enthüllung des Posters! Viel Aha und Oho! Machen Sie mit!

Empirie: Wie gestalten wir erfolgreiche Auktionen?

Im **Casino Royal** (15.07.2022) konnten wir unsere Kenntnisse zu Auktionen praktisch anwenden. Die Ergebnisse waren spektakulär! Das war unsere feierliche Abschlussveranstaltung für dieses Semester. Dank unserer freundlichen Werbung kamen um die 30 Teilnehmer:innen.

Bei der vorigen Auktion 2020 (Seite P333ff) war unser Ziel der maximale Spaß mit verrückten Auktionsformaten bis zur Versteigerung eines Euro. Diesmal wollen wir unter Beweis stellen, dass wir dazugelernt haben: Wie gestalten wir möglichst lehrreiche *und* erfolgreiche Auktionen?

Feierlich enthüllt und versteigert wird unser aktuelles Doppel-Vorlesungs-Poster „Summer of Math 2022“ zur Topologie und Spieltheorie, vom gesamten Team signiert, limitierte Serie von drei, also weltweit einzigartige Unikate.

Wir klären Fragen der interessierten Teilnehmer:innen: Privilegierte Gelegenheit am Ausgabetag, dynamischer Kunstmarkt, enorme Wertsteigerung gar Hype ist möglich.

Unsignierte Poster sind für 2€ im Fanshop erhältlich. „Greifen Sie zu!“

Empirie: Wie gestalten wir erfolgreiche Auktionen?

Erste Auktion. Wir versteigern das Poster „1/3“ in einer Englischen Saalauktion, Gebote werden vom Auktionator aufsteigend aufgerufen in Schritten von $10¢$. Zunächst stehen alle auf, Hinsetzen heißt aussteigen. (Nebenbei aktiviert dies alle Teilnehmer:innen und macht vielen Spaß.) Der ansehnliche Erlös bestätigt die oben angekündigte Wertsteigerung. „Sie sehen, der Hypetrain rollt. Steigen Sie ein, noch ist es möglich!“

Zweite Auktion. Wir versteigern das Poster „2/3“ in einer Holländischen Auktion, absteigend aufgerufen, angefangen bei utopischen $100€$ zur Erheiterung (Framing), in Schritten von $10€$, dann $1€$, schließlich $10¢$. Dank der ersten Auktion kennen wir nun alle die ungefähre Marktlage. Dieses Auktionsformat erfordert etwas Spekulation und starke Nerven.

Dritte Auktion. Wir versteigern das Poster „3/3“ als Vickrey–Auktion, *sealed bid second price*: Alle bieten geheim auf Papier, das höchste Gebot erhält den Zuschlag, zahlt aber nur den zweithöchsten Preis. Dieses berühmte Verfahren ermöglicht bzw. ermutigt ehrliches Bieten; strategisches Bieten und Spekulieren bringen hier keine Vorteile (P2A).

Empirie: Wie gestalten wir erfolgreiche Auktionen?

Alle drei Auktionen ergeben in etwa denselben Erlös ($\pm 10\%$). Vickreys Äquivalenzsatz P2C sagt genau dies: Bei rationalen Bieter:innen bringen alle Auktionsformate denselben Erlös. Wir können die relative Nähe der drei Ergebnisse als empirische Bestätigung werten, insbesondere für die Rationalität unserer Teilnehmer:innen… am Anfang des Nachmittags!

Schwankungen sind zu erwarten: Die drei Poster sind nicht identisch, sondern numeriert mit „1/3“, „2/3“, „3/3“; dazu gibt es gewisse Vorlieben. Auch die Bieter:innen bleiben nicht dieselben, in jeder Auktion machen sie Erfahrungen und sammeln Informationen über ihre Konkurrenz, sie explorieren die Marktlage und justieren ihre Bietstrategie.

Die Erlöse sind für uns, als Künstler und Versteigerer, erfreulich hoch. Zuletzt 2020 hatten wir uns weniger vorbereitet, und die Erlöse blieben dementsprechend enttäuschend. Entscheidend ist die Vermittlung von positiven Emotionen mit dem Gefühl von Werthaltigkeit, hier suggeriert durch unsere Signaturen und die Numerierung. Meist genügt schon der spekulative Wert, `de.wikipedia.org/wiki/Greater_fool_theory`.

Empirie: Wie gestalten wir erfolgreiche Auktionen?

Vierte Auktion. Wir versteigern ein Vintage-Poster-Package: alle vier Poster der Linearen Algebra 2020/21 und (wir müssen verrückt sein!) das Lernposter zur zweidimensionalen Dynamik um einen Fixpunkt.

Die Auktionen 4 bis 7 erfolgen durch freien Aufruf aufsteigender Gebote, der Auktionator bestätigt jedes Gebot durch Wiederholung und zählt aus: „4€20 zum Ersten, 4€20 zum Zweiten, 4€20 zum Dritten. Gratuliere!“

Die kleinen Ziffern können zum knappen Überbieten genutzt werden, aber auch kreativ: „Es ist jetzt 2 Uhr 37, ich biete 2€37.“ In wichtigen Auktionen diente dies sogar zur heimlichen Kommunikation (P332).

Fünfte Auktion. Studimenü zur gesunden Ernährung bestehend aus Getränk (Spezi), Hauptgericht (Chips) und Nachtisch (Schokoriegel).

Ein erfreulicher Beleg für Rationalität: Trotz des von mir versuchten Spins sind dies standardisierte Produkte und lösen keinen Hype aus. Anders als in den vorigen Auktionen sind die üblichen Marktpreise allen Teilnehmer:innen präsent, daher wird auch das hier beworbene Paket in etwa für den Marktpreis verkauft. . . und sogleich genüsslich verzehrt.

Empirie: Wie gestalten wir erfolgreiche Auktionen?

Sechste Auktion. Wir versteigern Kleingeld in der Dose (Photo links). Wir hatten 2020 ein bauchiges Glas gefüllt, durch diese Form wurde der Inhalt stark unterschätzt. Diesmal optimieren wir unsere Präsentation.

„Verraten Sie anschließend, wieviel Geld wirklich drin ist?“ Gute Frage! Wir beschließen: Diese wertvolle Information gehört der Gewinner:in. Einige Teilnehmer:innen beschließen spontan, Kleingeld zu spenden. „Der Jackpot wächst weiter an, inzwischen auf unschätzbaren Wert.“

Hat es sich gelohnt? Segen oder Fluch? Das weiß nur der Gewinner!

Siebte Auktion. Unser Spieleset „Sprague–Grundy“, das Original vom Tag der Wissenschaft am 25.06.2022. Handarbeit. Mit farbiger Anleitung.

Empirie: Wie gestalten wir erfolgreiche Auktionen?

Achte Auktion. Der traditionelle Höhepunkt: Wir versteigern einen Euro. „Sie bieten in Cent, überbieten zur Fairness um höchstens zehn Cent. Das höchste Gebot gewinnt, zahlen müssen jedoch das höchste *und* das zweithöchste Gebot. Das ist kein Problem, bieten Sie am höchsten!“ Hierzu stehen immer die beiden letzten Bieter, die vorigen setzen sich.

Die Gebote kommen erst schleppend, dann flüssiger, unter Erstaunen und Gelächter! Der erste Euro geht glücklich weg für $61¢$ plus $57¢$. Es verbreitet sich Verwunderung, aber auch Experimentierfreude...

Neunte Auktion. „Viele von Ihnen beneiden den glücklichen Gewinner und möchten auch gerne so ein Schnäppchen machen. Sie dürfen sich freuen: Wir versteigern nochmal einen Euro auf genau dieselbe Weise.“ Der zweite Euro geht weg für $2€02$ plus $2€00$. Alle staunen ungläubig.

Zehnte Auktion. Zwei Höchstbietende stehen zufällig nebeneinander und wollen kolludieren. Das wird sofort durchkreuzt durch einen Dritten, der beide überbietet. Der Euro geht schließlich weg für $70¢$ plus $69¢$. Auch heute wird viel gelacht... und noch lange nachgedacht.

Empirie: Wie gestalten wir erfolgreiche Auktionen?

Auch dieses letzte Casino Royal hat erneut das Zeug zur Legende. Lohnt sich die Mühe? Ist unsere Lehre ein Erfolg? Urteilen Sie selbst:

1. Wir präsentieren Spieltheorie möglichst lehrreich und unterhaltsam. Im Casino verbinden wir praktische Experimente mit Infotainment.
2. Wir illustrieren hier typische Phänomene der Verhaltensökonomik: ir/rationales Verhalten, Bietergefechte, Fluch des Gewinners, uvm.
3. Wichtig sind unter anderem die Präsentation, die Reihenfolge und das Framing der Versteigerungen und die Wahl der Auktionsformate.
4. Unsere Veranstaltung fördert natürlich die Chancengerechtigkeit, alle Interessierten zocken und erproben, *learning by gambling*.
5. Schließlich wollen wir unsere Ware verkaufen. Spieltheorie haben wir jetzt dreimal erfolgreich durchgeführt, können wir auch Auktionen?

Was soll ich sagen, der Erfolg hat all unsere Erwartungen übertroffen. Vielen Dank an alle Teilnehmer:innen, die sich Zeit für unser Casino genommen haben, egal ob zum Zuschauen oder zum Mitsteigern. Wir alle haben viel gelernt. Bleiben Sie kritisch und neugierig!