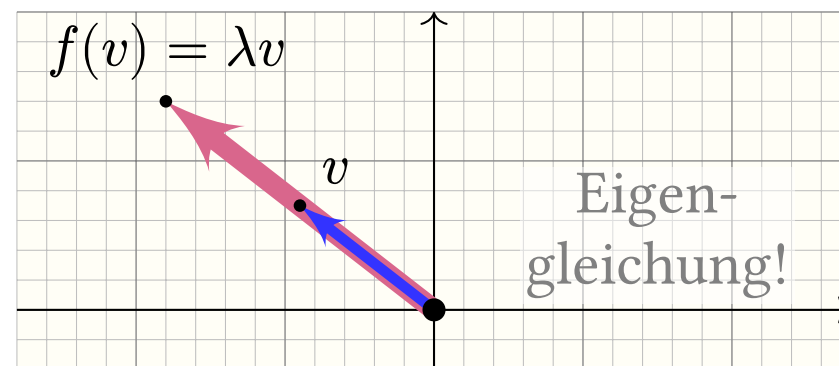
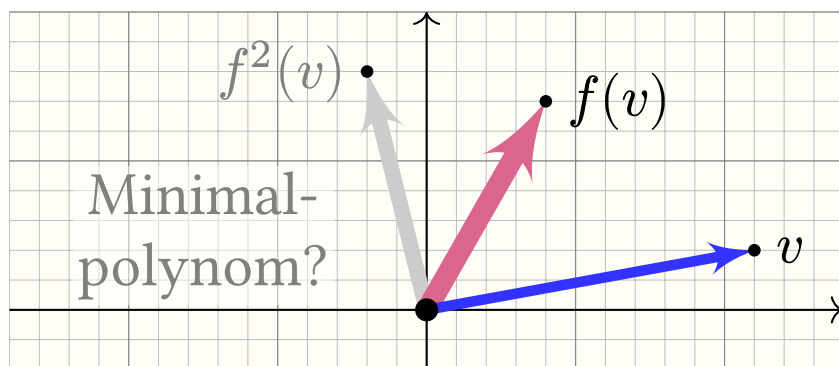


Kapitel P

Eigenvektoren und Diagonalisierung



*Live as if you were to die tomorrow.
Learn as if you were to live forever.*
Mahatma Gandhi (1869–1948)

- 1 Diagonalisierung und Minimalpolynom
- 2 Determinante und charakteristisches Polynom
- 3 Trigonalisierung und Minimalpolynom
- 4 Übungsaufgaben und Anwendungsbeispiele

Willkommen zur Fortsetzung Ihrer Linearen Algebra!

Lineare Algebra 2 - SoSe 2026

Die Lineare Algebra gehört zum Beginn des Mathematikstudiums wie das Erlernen der Buchstaben zum Beginn der Grundschule: Es ist anfangs mühsam, aber nützt ein Leben lang! Lineare Methoden sind elegant und praktisch, daher werden sie überall gerne genutzt, sowohl innerhalb der Mathematik als auch in Ihren zahlreichen Anwendungen, jüngst etwa in Quantencomputing, Data Science oder Künstlicher Intelligenz. Zugleich ist die Lineare Algebra eine wunderschöne Theorie, an der Sie vorbildlich lernen, wie moderne Mathematik aufgebaut wird. Die Vorlesung führt Sie in diese methodische und strukturelle Arbeitsweise ein.

Inhalt Timeline Info Mitglieder

Herzlich willkommen zur Linearen Algebra 2!

Startseite

In diesem Ilias-Kurs finden Sie Informationen und Online-Materialien zu unserer Veranstaltung:

- Die [Vorlesung](#) erklärt Ihnen die Begriffe und Methoden. Unterstützend bieten wir Ihnen unser Skript, erprobt und umfassend.
- Jede Woche lösen Sie hier in Ilias ein hilfreiches [Quiz](#). Damit wiederholen Sie den aktuellen Vorlesungsstoff und sind so für die Übungen bestens vorbereitet.
- Zur [Übung](#) erstellen wir für Sie jede Woche ein Übungsblatt mit gut abgestimmten Aufgaben, die Sie bis zur Folgewoche lösen.
- Zusätzlich gibt es alle zwei Wochen eine [Vortragsübung](#), in der Aufgaben vorgerechnet und erklärt werden.
- Im [Forum](#) können Sie anonym Ihre Fragen stellen und erhalten kompetente Auskunft.
- In den [Sprechstunden](#) haben Sie eine weitere gute Möglichkeit, einem erfahrenen Tutor Fragen zu Ihren Erstsemestervorlesungen zu stellen.
- Schön war die Zeit: zurück zu [unserer Linearen Algebra 1](#) (Falls Sie einen Zugang benötigen, schreiben Sie uns!)



Lineare Algebra 2 - Termine im Überblick für das Sommersemester 2026

Vorlesung

- **Montag 11:30 - 13:00** Uhr in V47.02
- **Mittwoch 9:45 - 11:15** Uhr in V57.03
- **Mittwoch 14:00 - 15:30** Uhr in V57.02 (alle zwei Wochen abwechselnd zur Vortragsübung)

Die Vorlesung startet am Mittwoch, den **8. April** mit beiden Terminen um 9:45 und um 14:00 Uhr.

Vortragsübung

- **Mittwoch 14:00 - 15:30** Uhr in V57.02 (alle zwei Wochen abwechselnd zur Vorlesung)

Die erste Vortragsübung findet in der zweiten Woche statt, also am Mittwoch, den **15. April**.

Quizze

Wöchentlich veranstalten wir ein Quiz jeweils von **Donnerstag 10:00 bis Montag 10:00**. Das erste Quiz (mit Wiederholung zur Determinante und neuem Stoff zur Diagonalisierung) startet in der ersten Woche, also am Donnerstag, den **9. April 2026**.

Gruppenübungen

Die Gruppenübungen finden **dienstags und mittwochs** in verschiedenen Blöcken statt. Zeiten und Räume finden Sie im [Übungsordner](#).

Die **Anmeldung zu den Übungen** findet statt am **Donnerstag, den 9. April 2026, von 10 bis 16 Uhr** hier in Ilias (nicht in C@MPUS!). Treten Sie dazu einer der Ilias-Gruppen im [Übungsordner](#) bei.

Das erste Übungsblatt gibt es in Woche 1. Die zugehörigen Gruppenübungen starten dann in Woche 2, also am **14. und 15. April**.

Sprechstunden

gemeinsam zur Analysis 2 und Linearen Algebra 2

In den Sprechstunden zur Analysis und Linearen Algebra haben Sie eine weitere gute Möglichkeit, Ihre Fragen zum Stoff und zu den Übungsaufgaben zu stellen.

- **Dienstag, 9:45 - 11:15** in V57 8.339
- **Donnerstag, 9:45 - 11:15** in V57 8.339

Präludium: Schulmathematik vom richtigen Standpunkt
Zahlen, Polynome, Matrizen: richtig rechnen und begründen

A-E

Logische Grundlagen

Mathematische Logik
und Beweistechniken

F

Algebraische Grundlagen

Monoide und Gruppen

J

Lineare Strukturen

Lineare Räume und
lineare Abbildungen

L

Mengen, Relationen
und Abbildungen

G

Ringe und Körper

K

Basis und
Dimension

M

Kombinatorik
und Quotienten

H

Polynomringe und
Euklids Algorithmus

C

Matrixdarstellung
linearer Abbildungen

N

Ordnungsrelationen
und Kardinalität

I

Matrixkalkül und
Gauß-Algorithmus

D

Signatur und
Determinante

O

Logische und algebraische Grundlagen des ersten Semesters:
Mengen und Abbildungen, Ringe und Körper, lineare Strukturen

A-O

Normalformen
für Endos

Euklidische
Geometrie

Bilineare
Algebra

Multilineare
Algebra

Diagonalisierung

P

Skalarprodukte

S

Affine Räume

U

Dualität

W

Jordanisierung

Q

Isometrien

S

Bilinearformen

V

Tensorprodukt

X

Elementarteiler

R

Spektralsätze

T

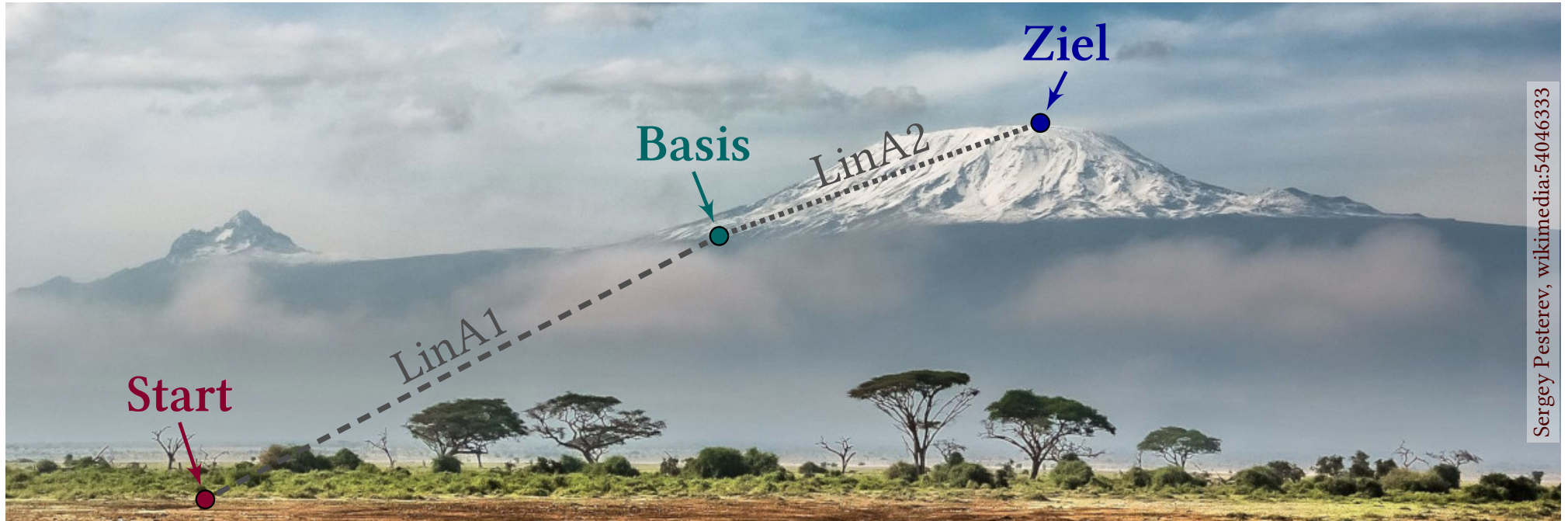
Quadriken

V

Tensoralgebra

Y

Anwendungen in Mathematik, Physik, Informatik, ...
Data Science, Artificial Intelligence, Quantum Computing, uvm.



The Map of Mathematics
(Your mileage may vary.)

by Martin Kuppe for
chalkdustmagazine.com

Mathematik

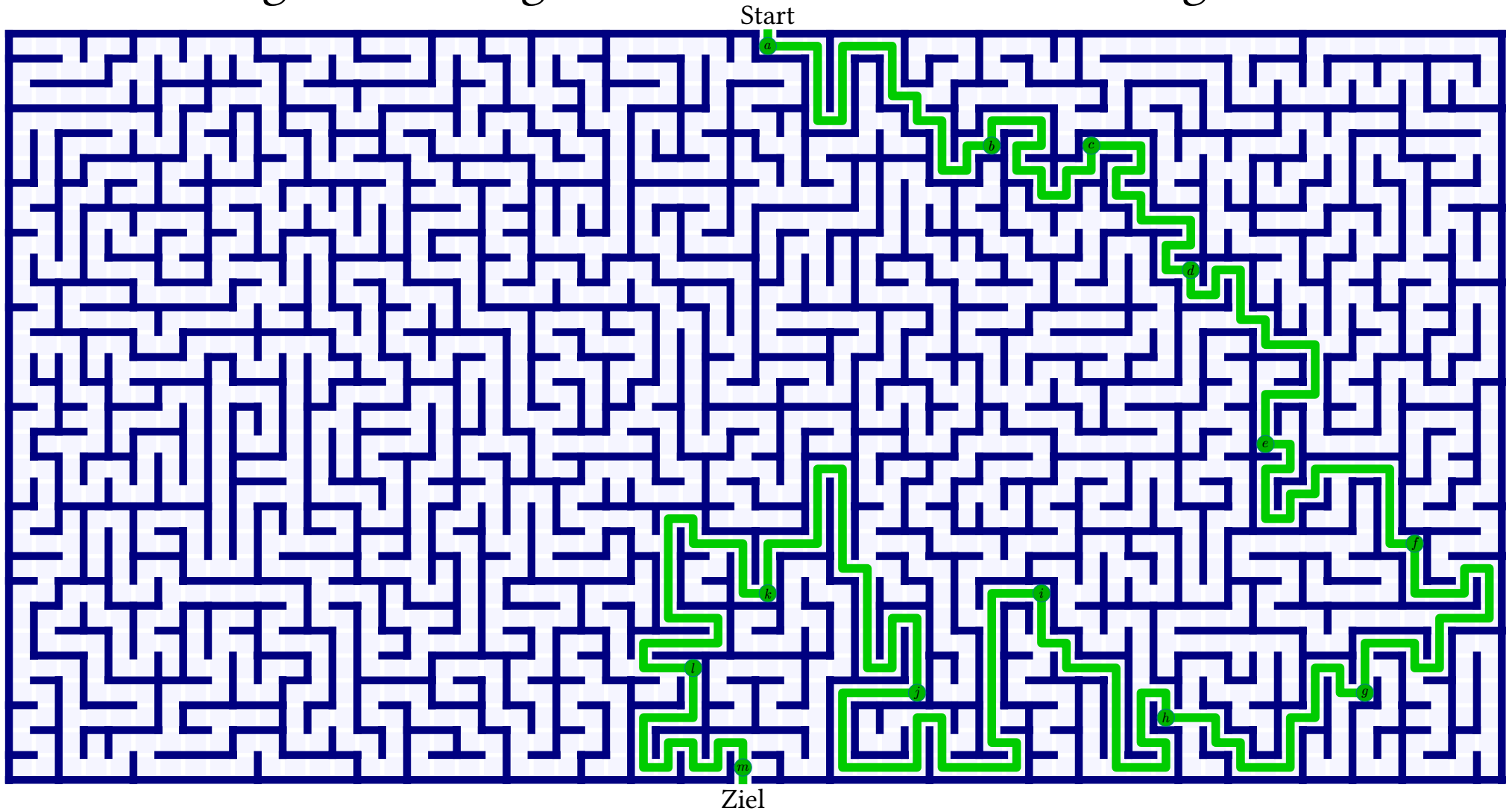
ist wunderschön und nützlich!



Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

Ich führe Argumente sorgsam vor. — Sie arbeiten alles gründlich nach.



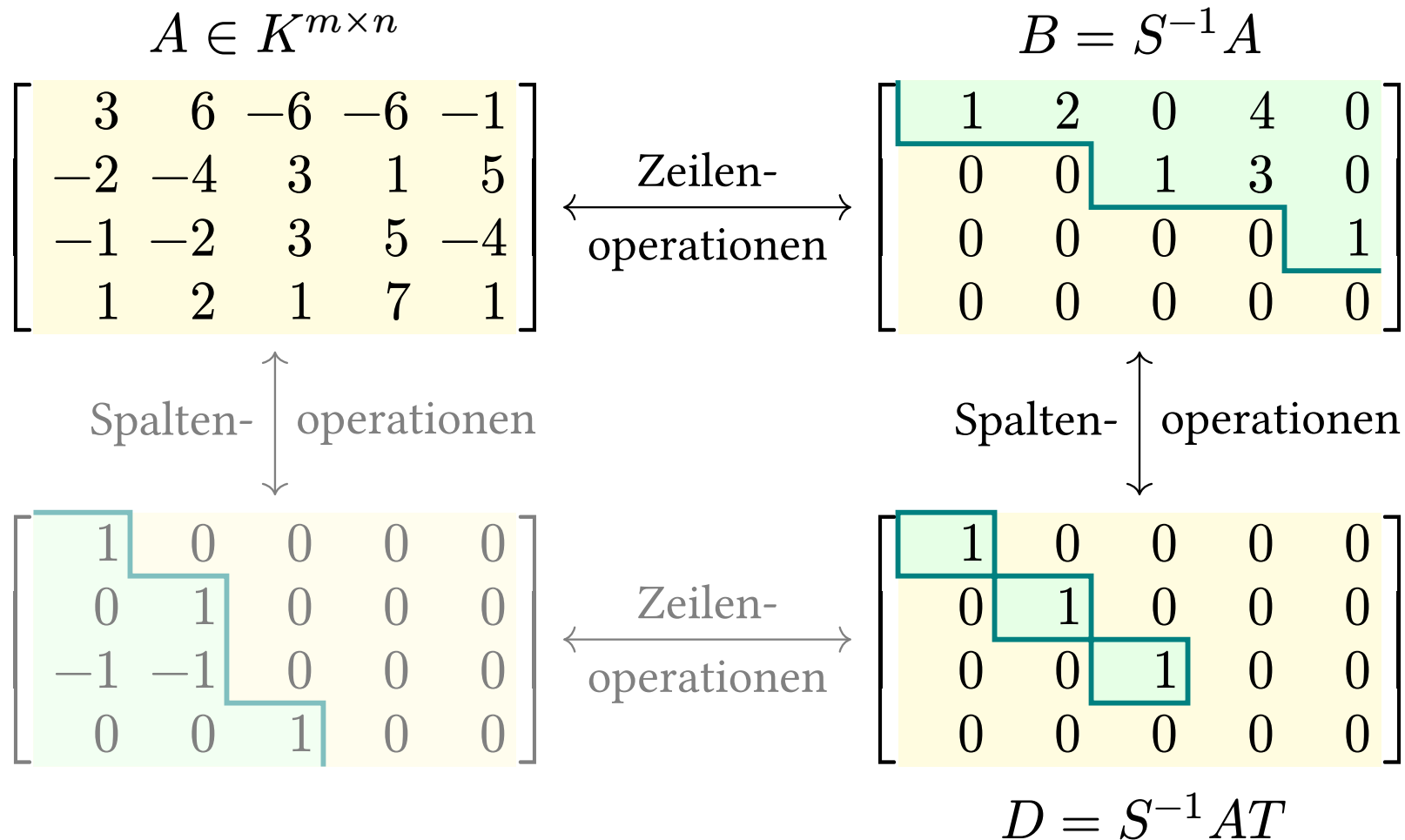
Die Modellmatrix $D_{m \times n}^r$ der Größe $m \times n$ vom Rang r

Ziel: Wir wollen lineare Abbildungen möglichst einfach darstellen.

$$D = D_{m \times n}^r := \begin{bmatrix} 1_{r \times r} & 0_{r \times k} \\ 0_{l \times r} & 0_{l \times k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

$$f_D : K^n \rightarrow K^m : (x_1, \dots, x_r, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Gauß-Algorithmus beidseitig zur Gauß-Normalform



An $SD = AT$ mit $S \in \text{GL}_m K$ und $T \in \text{GL}_n K$ lesen wir Bild und Kern ab:

$$\text{Im } D = \langle e_1, \dots, e_r \rangle_K,$$

$$\text{Ker } D = \langle e_{r+1}, \dots, e_n \rangle_K,$$

$$\text{Im } A = \langle Se_1, \dots, Se_r \rangle_K,$$

$$\text{Ker } A = \langle Te_{r+1}, \dots, Te_n \rangle_K.$$

Diagonalisierung eines Endomorphismus

$$\begin{array}{ccc}
 K^n & \xrightarrow{\quad f_D \quad} & K^n \\
 \Phi_B \downarrow \cong & & \Phi_B \downarrow \cong \\
 V & \xrightarrow{\quad f \quad} & V
 \end{array}$$

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

◆ Definition N3A: Diagonalisierung eines Endomorphismus

(1) Sei $f : V \rightarrow V$ linear über K . Eine **diagonalisierende Basis** zu f ist eine Basis $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^n$ von V , für die die darstellende Matrix von f diagonal ist:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Das bedeutet:

$$f(b_i) = \lambda_i b_i$$

Eine solche Basis $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$ von V über K nennen wir **Eigenbasis** zu f . Existiert zu f eine Eigenbasis \mathcal{B} von V , so nennen wir f **diagonalisierbar**.

Diagonalisierung einer Matrix

◆ Definition N3A: Diagonalisierung einer Matrix

(2) Sei $A \in K^{n \times n}$. Ein **diagonalisierender Basiswechsel** zu A über K ist eine invertierbare Matrix $T \in \text{GL}_n(K)$, so dass $T^{-1}AT$ diagonal ist:

$$T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

D.h. die Spalten der Matrix $T = (v_1, \dots, v_n)$ sind eine Eigenbasis von f_A .

◆ **Definition N3B:** Eigenvektoren, Eigenwerte, Eigenräume

(1) Sei $f : V \rightarrow V$ linear über K . Ein **Eigenpaar** (v, λ) von f besteht aus einem Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ und einem Skalar $\lambda \in K$, die $f(v) = \lambda v$ erfüllen. Wir nennen dann $v \neq 0$ einen **Eigenvektor** und λ einen **Eigenwert** von f .

$$\sigma(f) = \sigma(f; K) := \{ \lambda \in K \mid \exists v \in V \setminus \{0\} : f(v) = \lambda v \}.$$

(2) Zu jedem Skalar $\lambda \in K$ definieren wir den zugehörigen **Eigenraum**

$$E(\lambda) = \text{Eig}(f, \lambda) := \{ v \in V \mid f(v) = \lambda v \} \stackrel{!}{=} \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V).$$

Immer gilt $0 \in E(\lambda)$. Für jeden Vektor $v \in V$ gilt folgende Äquivalenz:

$$f(v) = \lambda v \iff f(v) - \lambda \text{id}_V(v) = 0 \iff (f - \lambda \text{id}_V)(v) = 0$$

Genau dann ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f , wenn $E(\lambda) \neq \{0\}$ gilt.

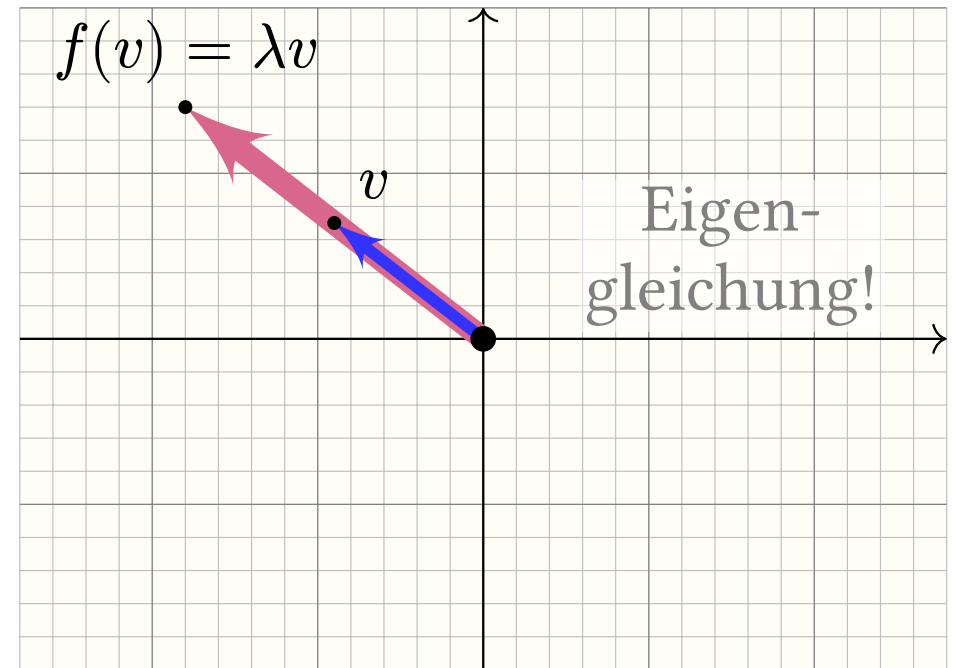
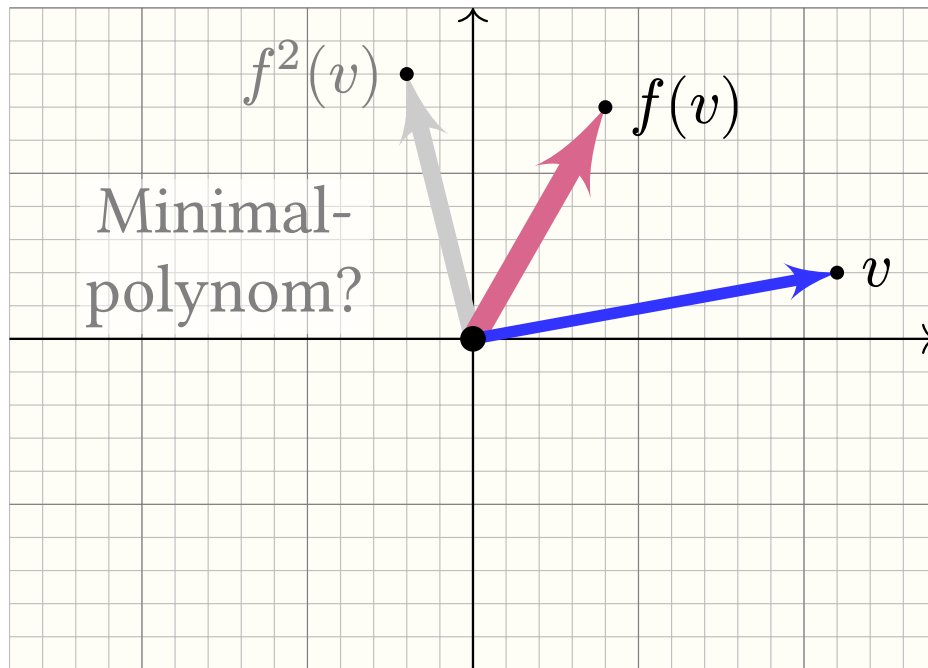
Die Dimension $\dim_K E(\lambda) \geq 1$ ist die **geometrische Vielfachheit** von λ .

◆ Satz N3c: Diagonalisierung, Eigenbasis, Eigenraumzerlegung

Sei $f : V \rightarrow V$ linear über dem Körper K . Äquivalent sind:

- 1 Der Endomorphismus $f \in \text{End}_K(V)$ ist **diagonalisierbar**.
- 2 Es existiert eine Basis aus Eigenvektoren, kurz **Eigenbasis**.
- 3 Der Raum $V \stackrel{!}{=} \bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$ ist Summe der **Eigenräume**.

Was bedeutet die Eigengleichung $f(v) = \lambda v$ geometrisch?



Das lokale Minimalpolynom μ_f^v

◆ **Definition N3D:** das lokale Minimalpolynom $\mu_f^v = \text{MiPo}_f^v$

Sei K ein Körper und $f \in \text{End}_K(V)$, etwa $V = K^n$ und $f(x) = Ax$ mit $A \in K^{n \times n}$. Jeder Vektor $v \in V$ erzeugt seinen **f -zyklischen Unterraum**

$$Z = Z(v) := \langle f^n(v) \mid n \in \mathbb{N} \rangle_K \leq V,$$

$$\dim_K(Z) = m := \sup\{n \in \mathbb{N} \mid f^0(v), \dots, f^{n-1}(v) \text{ linear unabhängig}\}.$$

(0) Im Falle $m = \infty$ ist $(f^n(v))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis von Z . Wir setzen $\mu_f^v := 0$.

(1) Im Falle $m \in \mathbb{N}$ ist $(f^n(v))_{n < m}$ eine Basis von Z . Wir erhalten daraus

$$a_0 f^0(v) + \dots + a_{m-1} f^{m-1}(v) + f^m(v) = 0$$

mit eindeutigen Koeffizienten $a_0, \dots, a_{m-1} \in K$. Damit definieren wir

$$\mu_f^v := a_0 + a_1 X + \dots + a_{m-1} X^{m-1} + X^m \in K[X]_m^1$$

als das **lokale Minimalpolynom** von $f \in \text{End}_K(V)$ bezüglich $v \in V$.

Das (globale) Minimalpolynom μ_f

◆ **Definition N3E:** das (globale) Minimalpolynom $\mu_f = \text{MiPo}_f$

Zu $f \in \text{End}_K(V)$ erzeugen die Potenzen f^0, f^1, f^2, \dots den Unterraum

$$Z := \langle f^n \mid n \in \mathbb{N} \rangle_K \leq \text{End}_K(V),$$

$$\dim_K(Z) = m := \sup\{n \in \mathbb{N} \mid f^0, \dots, f^{n-1} \text{ linear unabhängig}\}.$$

(0) Im Falle $m = \infty$ ist $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis von Z . Wir setzen $\mu_f := 0$.

(1) Im Falle $m \in \mathbb{N}$ ist $(f^n)_{n < m}$ eine Basis von Z . Wir erhalten daraus

$$a_0 f^0 + \dots + a_{m-1} f^{m-1} + f^m = 0$$

mit eindeutigen Koeffizienten $a_0, \dots, a_{m-1} \in K$. Damit definieren wir

$$\mu_f := a_0 + a_1 X + \dots + a_{m-1} X^{m-1} + X^m \in K[X]_m^1$$

als das (globale) **Minimalpolynom** des Endomorphismus $f \in \text{End}_K(V)$.

Das Minimalpolynom teilt jedes annullierende Polynom.

Minimalität: Sei $P \in K[X]$ mit $P(f) = 0$. Polynomdivision $P = Q\mu_f + R$ ergibt $Q, R \in K[X]$ mit $\deg R < \deg \mu_f$. Auch $R = P - Q\mu_f$ annulliert f , denn $R(f) = 0$. Da $\deg \mu_f$ minimal ist, bleibt nur $R = 0$, also $P = Q\mu_f$.

◆ **Satz N3F:** Das Minimalpolynom teilt jedes annullierende Polynom.

- (1) Lokal sei $I := \{P \in K[X] \mid P(f)(v) = 0\}$. Dann gilt $I = \mu_f^v K[X]$.
- (2) Global sei $J := \{P \in K[X] \mid P(f) = 0\}$. Dann gilt $J = \mu_f K[X]$.
- (3) Dank (1) gilt $\mu_f^v \mid \mu_f$. Dank (2) folgt $\mu_f = \text{kgV}(\mu_f^v ; v \in V)$.

Kernzerlegung: ein wirkmächtiger Satz

◆ Satz N3G: Kernzerlegung

Sei $f : V \rightarrow V$ linear über dem Körper K , kurz $f \in \text{End}_K(V)$.

(0) Für $P = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) \in K[X]$ mit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}^! \subseteq K$ gilt

$$\text{Ker } P(f) = \text{Ker}(f - \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(f - \lambda_n).$$

(1) In $K[X]$ sei $P = P_1 \cdots P_n$ mit $\text{ggT}(P_i, P_j) = 1$ für alle $i \neq j$. Dann folgt

$$\text{Ker } P(f) = \text{Ker } P_1(f) \oplus \dots \oplus \text{Ker } P_n(f).$$

(2) Wenn P zudem f annulliert, $P(f) = 0$, so folgt $\text{Ker } P(f) = V$.
Wenn P dabei einfach zerfällt wie in (0), so ist f diagonalisierbar.

Beispiele: Jeder Projektor $f = f^2$ ist diagonalisierbar, dank Zerlegung

$$P = X^2 - X = X(X - 1) \quad \text{und} \quad V = E(0) \oplus E(1) \stackrel{\text{L30}}{=} \text{Ker } f \oplus \text{Im } f.$$

Gilt $f^2 = \text{id}_V$ und $\text{char } K \neq 2$, so ist f diagonalisierbar, dank Zerlegung

$$P = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1) \quad \text{und} \quad V = E(+1) \oplus E(-1).$$

◆ Satz N3H: Minimalpolynom als Diagonalisierungskriterium

Sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum endlicher Dimension. Genau dann ist $f \in \text{End}_K(V)$ diagonalisierbar, wenn $\mu_f \in K[X]$ einfach zerfällt.

MiPo-Verfahren N3H: (0) Berechne $\mu_f \in K[X]$, etwa dank Gauß.

(1) Zerfällt $\mu_f = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$ mit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}^! \subseteq K$, so folgt

$$V = \text{Ker}(f - \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(f - \lambda_n).$$

(2) Wähle darin jeweils Basen und erhalte eine Eigenbasis von V zu f .

Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren

Satz P1A: lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.
 Ausführlich: Sei $f : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung über dem Körper K .
 Seien $v_0, \dots, v_r \in V \setminus \{0\}$ mit $f(v_i) \stackrel{(1)}{=} \lambda_i v_i$ und $\lambda_i \neq \lambda_j$ in K für $i \neq j$.
 Aus $\alpha_0 v_0 + \dots + \alpha_r v_r \stackrel{(2)}{=} 0$ mit $\alpha_0, \dots, \alpha_r \in K$ folgt $\alpha_0 = \dots = \alpha_r = 0$.

Induktion über $r \in \mathbb{N}$: Für $r = 0$ gilt die Aussage dank $v_0 \neq 0$. (L1F)
 Sei nun $r \geq 1$. Auf Gleichung (2) wenden wir $f - \lambda_0$ an und nutzen (1):

$$\alpha_0(\lambda_0 - \lambda_0)v_0 + \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_0)v_1 + \dots + \alpha_r(\lambda_r - \lambda_0)v_r = 0$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_0) = 0$ für $i = 1, \dots, r$.
 Dank der Voraussetzung $\lambda_i \neq \lambda_0$ folgt $\alpha_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, r$.
 Von Gleichung (2) bleibt schließlich nur $\alpha_0 v_0 = 0$, also $\alpha_0 = 0$. QED

Beispiel P1c: Eigenfunktionen des Ableitungsoperators, siehe M1j

Zu jeder Konstanten $\lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben wir die Exponentialfunktion

$$e_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : t \mapsto e^{\lambda t} \quad \text{mit} \quad \partial e_\lambda = \lambda e_\lambda.$$

Dank Satz P1A ist die Familie $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{K}}$ in \mathcal{C}^∞ somit linear unabhängig.

Geometrisches Beispiel: Vorschau zur Diagonalisierung

Beispiel P1E: eine Spiegelung in der Ebene

Zu $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ untersuchen wir die \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto x - v \cdot v^T \cdot x.$$

Aufgabe: (1) Finden Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit nicht-trivialem Eigenraum $E(\lambda)$.
 (2) Bestimmen Sie so alle Eigenräume von f . (3) Diagonalisieren Sie f .

Lösung: (1) Zur Bestimmung von λ nutzen wir die **Determinante**:

$$\text{Ker}(f - \lambda \text{id}) \neq \{0\} \stackrel{\text{O3D}}{\iff} \det(f - \lambda \text{id}) = 0$$

Zur Berechnung wählen wir eine Basis, etwa $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$, und finden

$$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Geometrisches Beispiel: Vorschau zur Diagonalisierung

(2) Wir bestimmen die Eigenräume $E(+1)$ und $E(-1)$ wie folgt:

$$E(+1) = \text{Ker}(f - \text{id}) = \text{Ker} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \mathbb{R} b_1 \quad \text{mit} \quad b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E(-1) = \text{Ker}(f + \text{id}) = \text{Ker} \begin{bmatrix} +1 & 1 \\ 1 & +1 \end{bmatrix} = \mathbb{R} b_2 \quad \text{mit} \quad b_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

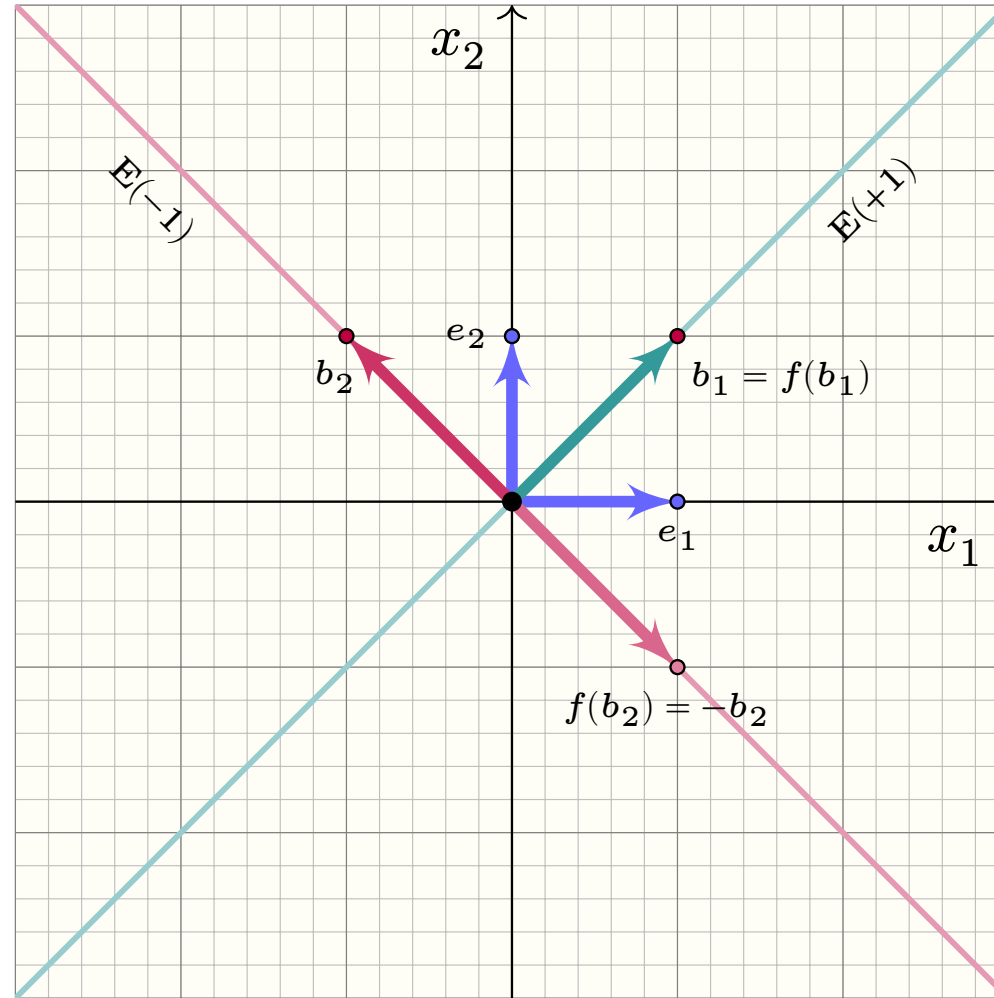
(3) Wir erhalten $\mathbb{R}^2 = E(+1) \oplus E(-1)$ und die Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ von \mathbb{R}^2 .
Nach Konstruktion gilt $f(b_1) = +1 \cdot b_1$ und $f(b_2) = -1 \cdot b_2$, und somit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Geometrisches Beispiel: Vorschau zur Diagonalisierung

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Wie finden wir alle Eigenwerte? Die Determinante hilft!

❓ Wie finden wir alle Eigenwerte $\lambda \in K$ einer Matrix $A \in K^{n \times n}$?

$$\text{Eig}(A, \lambda) \neq \{0\}$$

$$\begin{array}{c} \text{Def} \\ \longleftrightarrow \\ \text{N3B} \end{array}$$

$$\text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$$

$$\begin{array}{c} \text{Det} \\ \longleftrightarrow \\ \text{O2v} \end{array}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Satz P2A: Eigenwerte und Determinante einer Matrix

Genau dann ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A , wenn $\det(A - \lambda I) = 0$ gilt.

Wie finden wir alle Eigenwerte? Die Determinante hilft!

❓ Wie finden wir alle Eigenwerte eines Endomorphismus $f : V \rightarrow V$?

$$\begin{array}{ccc}
 x \in K^n & \xrightarrow{A: x \mapsto Ax} & K^n \\
 \downarrow & \Phi_{\mathcal{B}} \downarrow \cong & \downarrow \cong \\
 v \in V & \xrightarrow{f: v \mapsto f(v)} & V
 \end{array}$$

Satz P2B: Eigenwerte und Determinante eines Endomorphismus

Wie oben sei $v = \Phi_{\mathcal{B}}(x)$. Genau dann gilt $f(v) = \lambda v$, wenn $Ax = \lambda x$.

Genau dann ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f , wenn $\det(f - \lambda \text{id}_V) = 0$ gilt.

Das charakteristische Polynom

Definition P2c: das charakteristische Polynom einer Matrix

(0) Zur Matrix $A \in K^{n \times n}$ definieren wir das **charakteristische Polynom**

$$\tilde{\chi}_A(X) := \det(A - XI) \in K[X]_n.$$

(1) Alternativ nutzen wir das **normierte charakteristische Polynom**

$$\chi_A(X) := \det(XI - A) = (-1)^n \tilde{\chi}_A(X) \in K[X]_n^1.$$

Zahlenbeispiel zum charakteristischen Polynom

Aufgabe: (1) Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

(2) Finden Sie damit alle Eigenwerte, also das Spektrum $\sigma(A; \mathbb{R})$.

Lösung: (1) Wir folgen der Definition und berechnen die Determinante:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_A(X) &\stackrel{\text{Def}}{=} \begin{vmatrix} 1 - X & 4 & 5 \\ 0 & -X & 1 \\ 0 & 2 & 3 - X \end{vmatrix} = (1 - X)[-X(3 - X) - 2 \cdot 1] \\ &= (1 - X)(X^2 - 3X - 2) \\ &= -X^3 + 4X^2 - X - 2 \end{aligned}$$

(2) Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von $\chi_A = -\tilde{\chi}_A$:

$$\sigma(A; \mathbb{R}) = \left\{ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{17}), \lambda_3 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{17}) \right\}$$

Grad und Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

Satz P2D: Grad und Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

(0) Zu $A \in K^{n \times n}$ ist $\tilde{\chi}_A(X) = \det(A - XI)$ ein Polynom von Grad n :

$$\tilde{\chi}_A(X) = a_0 - a_1 X \pm \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} X^{n-1} + (-1)^n X^n$$

(1) Normiert zu $\chi_A(X) = \det(XI - A)$ erhalten wir demnach:

$$\chi_A(X) = X^n - a_{n-1} X^{n-1} \pm \dots + (-1)^{n-1} a_1 + (-1)^n a_0$$

(2) Die extremen Koeffizienten kennen wir: $a_0 = \tilde{\chi}_A(0) = \det(A)$ ist die **Determinante** und $a_{n-1} = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr}(A)$ ist die **Spur** der Matrix A .

Beweis: Jeder Eintrag der Matrix $C = XI - A \in K[X]^{n \times n}$ hat Grad ≤ 1 , Dank Leibniz O2G hat $\det C = \sum_{\tau \in S_n} \text{sign}(\tau) \prod_{j=1}^n c_{\tau(j),j}$ Grad $\leq n$ (C1I).

Der Summand $(X - a_{11})(X - a_{22}) \cdots (X - a_{nn}) = X^n - X^{n-1} \text{tr} A + \dots$ für $\tau = \text{id}$ hat Grad n . Alle weiteren Summanden haben Grad $\leq n - 2$, denn jede Permutation $\tau \neq \text{id}$ hat höchstens $n - 2$ Fixpunkte. QED

❓ Wie ändert sich das charakteristische Polynom bei Basiswechsel?

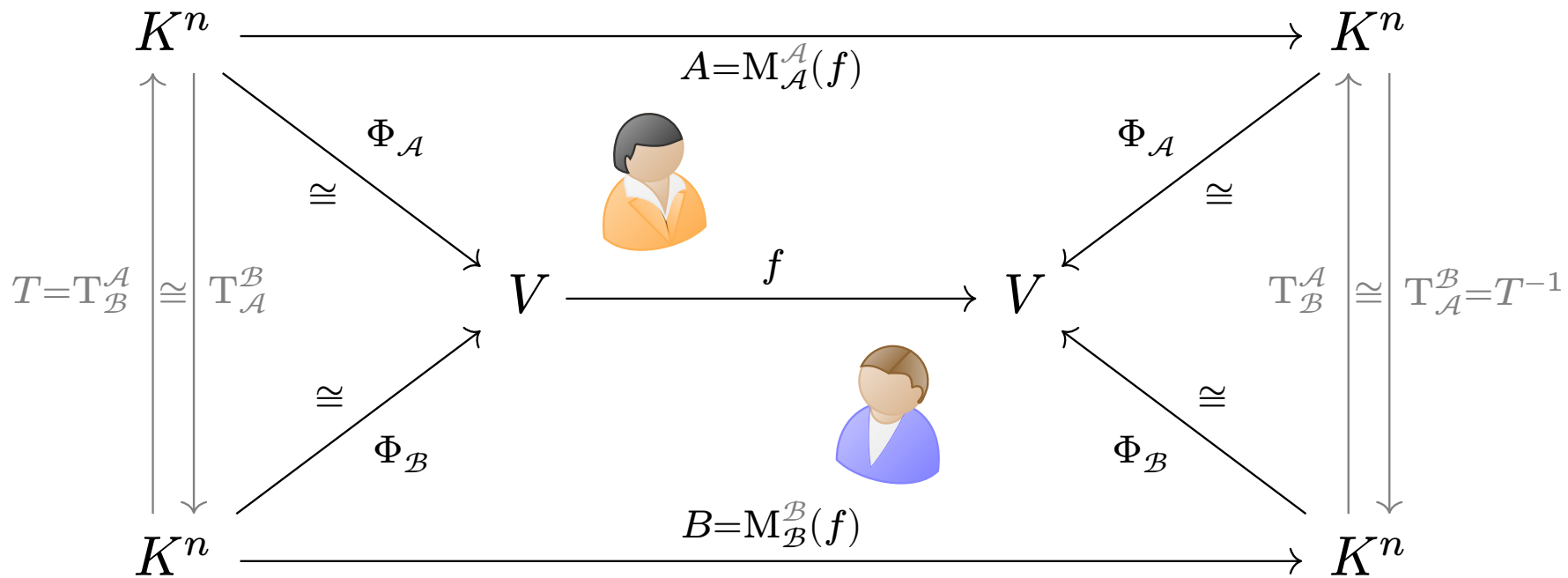
Definition P2E: Konjugation und Ähnlichkeit von Matrizen

Sei K ein Ring und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Die allgemeine lineare Gruppe $GL_n(K)$ operiert auf dem Matrixring $K^{n \times n}$ durch Konjugation gemäß

$$K^{n \times n} \curvearrowright GL_n(K) : (A, T) \mapsto B = T^{-1}AT.$$

Wir nennen $A, B \in K^{n \times n}$ **ähnlich**, oder auch $GL_n(K)$ -konjugiert, geschrieben $A \sim B$, falls $T \in GL_n(K)$ existiert mit $B = T^{-1}AT$.

Konjugation und Ähnlichkeit von Matrizen



Satz P2F: Ähnlichkeit und Basiswechsel

Sei K ein Körper. (1) Für $A, B \in K^{n \times n}$ sind gleichbedeutend:

- (1a) Die Matrizen A und B sind ähnlich, also $GL_n(K)$ -konjugiert $A \sim B$.
- (1b) Beide stellen denselben Endomorphismus $f \in \text{End}_K(V)$ dar bezüglich geeigneter Basen \mathcal{A} und \mathcal{B} von V über K .

Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus

Satz P2F: Invarianz und Wohldefiniertheit des char. Polynoms

(2a) Sind A und B in $K^{n \times n}$ ähnlich, so folgt $\chi_A = \chi_B$ in $K[X]$.

(2b) Zu $f \in \text{End}_K(V)$ wie in (1b) ist $\chi_f := \chi_A = \chi_B$ wohldefiniert.

Beweis: (2a) Wir haben $B = T^{-1}AT$ mit $T \in \text{GL}_n(K)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 \chi_B(X) &\stackrel{\text{Def}}{=} \det(XI - B) \\
 &\stackrel{\text{Vor}}{=} \det(XI - T^{-1}AT) \\
 &\stackrel{\text{Com}}{=} \det[T^{-1}(XI - A)T] \\
 &\stackrel{\text{O2o}}{=} \det(T)^{-1} \cdot \det(XI - A) \cdot \det(T) \\
 &\stackrel{\text{Def}}{=} \chi_A(X)
 \end{aligned}$$

(2b) Für $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ und $B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ wie in (1b) gilt $B = T^{-1}AT$. □ QED

Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus

Definition P2G: das char. Polynom eines Endomorphismus

Sei $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus über K und $\dim_K(V) = n < \infty$.

Wir wählen eine Basis \mathcal{A} von V und stellen f dar durch die zugehörige Matrix $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) \in K^{n \times n}$. Damit definieren wir das char. Polynom:

$$\chi_f := \det(XI - A) \in K[X]_n^1$$

Dank Satz P2F ist das Ergebnis χ_f wohldefiniert, unabhängig von \mathcal{A} .

Das charakteristische Polynom ist eine hilfreiche Invariante...

Aufgabe: Sind die folgenden Matrizen $A, B, C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ähnlich?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{vs} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{vs} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(A) = 15$$

$$\text{tr}(B) = 15$$

$$\text{tr}(C) = 14$$

$$\det(A) = 0$$

$$\det(B) = 0$$

$$\det(C) = 9$$

$$X^3 - 15X^2 - 18X$$

$$X^3 - 15X^2 - X$$

$$X^3 - 14X^2 - 30X - 9$$

... aber noch keine vollständige Invariante zur Ähnlichkeit.

Aufgabe: Sind die folgenden Matrizen ähnlich?

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{vs} \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Lösung: (1) Die char. Polynome sind gleich: $\chi_A = (X - \lambda)^2 = \chi_B$.
(2) Dennoch sind unsere beiden Matrizen A und B nicht ähnlich:
Die Matrix A ist diagonal, doch B ist nicht diagonalisierbar (P20).

Verfahren P2H: ChaPo-Verfahren zur Diagonalisierung

Sei K ein Körper, darüber $f : V \rightarrow V$ linear und $\dim_K(V) = n < \infty$.

- (1) Wähle eine Basis \mathcal{A} von V und bestimme $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) \in K^{n \times n}$.
- (2) Berechne das charakteristische Polynom $\chi_f = \det(XI - A) \in K[X]$.
- (3) Bestimme alle Nullstellen, also $\sigma(f; K) = \{ \lambda \in K \mid \chi_f(\lambda) = 0 \}$.
- (4) Zu $\lambda \in \sigma(f)$ bestimme $\text{Eig}(f, \lambda) = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V) \cong \text{Ker}(A - \lambda I)$.

Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn $V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(f)} \text{Eig}(f, \lambda)$ gilt, also die Dimensionsgleichung $n = \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \dim_K \text{Eig}(f, \lambda)$ erfüllt ist.

- (5) In diesem Fall wähle eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ aus Eigenvektoren und erhalte so die ersehnte Diagonalisierung $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Zerfällung eines Polynoms in Linearfaktoren

Definition P2j: Zerfällung eines Polynoms in Linearfaktoren, siehe C2c

(1) Das Polynom $P \in K[X]_n$ **zerfällt** über K in Linearfaktoren, falls

$$P(X) = c(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n) \quad \text{mit } c, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K.$$

Es **zerfällt einfach**, falls zudem $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, kurz $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}^! \subseteq K$.

Die Matrix $A \in K^{n \times n}$ bzw. der Endomorphismus $f \in \text{End}_K(V)$ **zerfällt (einfach)**, falls dies für das charakteristische Polynom χ_A bzw. χ_f gilt.

(2) Durch Zusammenfassen mehrfacher Nullstellen erhalten wir

$$P(X) = c(X - \mu_1)^{r_1} \cdots (X - \mu_k)^{r_k} \quad \text{mit Nullstellen } \{\mu_1, \dots, \mu_k\}^! \subseteq K.$$

Der Exponent $r_i =: \text{ord}(P, \mu_i)$ heißt die (Nullstellen-) **Ordnung** oder (algebraische) **Vielfachheit** der Nullstelle μ_i im Polynom P .

Beispiele: $P = X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ zerfällt über \mathbb{Q} gemäß $P = (X - 1)(X + 1)$.

$X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ zerfällt nicht über \mathbb{Q} , aber über \mathbb{R} zu $(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$.

$X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ zerfällt nicht über \mathbb{R} , aber über \mathbb{C} zu $(X - i)(X + i)$.

Einfache Zerfällung impliziert Diagonalisierbarkeit.

Satz P2M: Einfache Zerfällung impliziert Diagonalisierbarkeit.

Angenommen das char. Polynom von $f \in \text{End}_K(V)$ zerfällt einfach,

$$\chi_f(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) \quad \text{mit} \quad \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}' \subseteq K.$$

(1) In diesem Falle ist f diagonalisierbar, denn es gilt

$$V = \text{Eig}(f, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \text{Eig}(f, \lambda_n)$$

mit geometrischer Vielfachheit $\dim_K \text{Eig}(f, \lambda_i) = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$.

(2) Wir erhalten eine Eigenbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ durch Wahl von Eigenvektoren $v_i \in \text{Eig}(f, \lambda_i) \setminus \{0\}$. Somit wird f dargestellt durch

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Beweis: Wir haben $E := \bigoplus_{i=1}^n E(\lambda_i) \leq V$ dank Kernzerlegung N3G/P1A. Aus $\dim E(\lambda_i) \geq 1$ folgt $n \leq \dim E \leq \dim V = n$. Das zeigt (1). QED

Satz P2N: Erreicht die geometrische Vielfachheit die algebraische?

(1) Für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma(f; K)$ gilt die Ungleichung

$$1 \leq \dim_K \text{Eig}(f, \lambda) \leq \text{ord}(\chi_f, \lambda) \leq \dim_K(V).$$

(2) Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn (a) χ_f über K zerfällt und (b) $\dim_K \text{Eig}(f, \lambda) = \text{ord}(\chi_f, \lambda)$ für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma(f)$ gilt.

Beweis: (1) Wir wählen eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_k)$ von $\text{Eig}(f, \lambda)$, ergänzen zu einer Basis $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_k, \dots, v_n)$ von V und erhalten die Darstellung

$$A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} B & * \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad \text{mit } B = \lambda \cdot I_k.$$

Somit gilt $\chi_A = \chi_B \cdot \chi_C = (X - \lambda)^k \cdot \chi_C$, also $\dim \text{Eig}(f, \lambda) \leq \text{ord}(\chi_f, \lambda)$.

(2) In V haben wir $E := \bigoplus_{\lambda \in \sigma(f)} E(\lambda)$ dank N3G/P1A. Daraus folgt

$$\dim E \stackrel{\text{M2T}}{=} \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \dim_K E(\lambda) \stackrel{\text{(b)}}{=} \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \text{ord}(\lambda) \stackrel{\text{(a)}}{=} \deg \chi_f \stackrel{\text{P2D}}{=} \dim V. \quad \boxed{\text{QED}}$$

Ist jede Matrix diagonalisierbar? Jordan-Blöcke nicht!

Beispiel P2o: Jordan-Blöcke sind nicht-diagonalisierbar.

$$J = J_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in K^{n \times n} \quad \text{und} \quad J - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hier gilt $\chi_J = \mu_J = (X - \lambda)^n$, also $\sigma(J) = \{\lambda\}$, doch $\text{Eig}(J, \lambda) = \langle e_1 \rangle_K$
 Für $n \geq 2$ erlaubt $J_n(\lambda)$ keine Eigenbasis.

Ist jede Matrix diagonalisierbar? Drehstreckungen nicht!

Beispiel P2P: reelle Drehstreckung ohne reelle Eigenwerte

Zu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ haben wir die reelle Drehstreckung

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \chi_C = \begin{vmatrix} X - a & b \\ -b & X - a \end{vmatrix} = (X - a)^2 + b^2.$$

Das reelle Spektrum ist $\sigma(C; \mathbb{R}) = \emptyset$, komplex gilt $\sigma(C; \mathbb{C}) = \{a \pm ib\}$.

Strukturbeispiel: symmetrische reelle Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Aufgabe: Ist A über \mathbb{R} diagonalisierbar? **Lösung:** Ihr char. Polynom ist

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X - a & -b \\ -b & X - c \end{vmatrix} = X^2 - (a + c)X + (ac - b^2).$$

Seine Diskriminante ist $d = (a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$.

Somit zerfällt $\chi_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ mit $\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(a + c \pm \sqrt{d}) \in \mathbb{R}$.

(1) Im Falle $d > 0$ zerfällt χ_A einfach, und A ist diagonalisierbar (P2M).

(0) Im Falle $d = 0$ gilt $b = 0$ und $a = c$, somit ist A bereits diagonal.

Satz P2q: symmetrische reelle 2×2 -Matrix

Jede symmetrische reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist über \mathbb{R} diagonalisierbar.

Zahlenbeispiel zur Diagonalisierung

Aufgabe: Ist A über \mathbb{R} diagonalisierbar? Falls ja, diagonalisieren Sie A !

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Lösung: (1a) Wir bestimmen das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_A(X) &\stackrel{\text{Def}}{=} \begin{vmatrix} 1-X & 4 & 5 \\ 0 & -X & 1 \\ 0 & 2 & 3-X \end{vmatrix} = (1-X)[-X(3-X) - 1 \cdot 2] \\ &= (1-X)(X^2 - 3X - 2) \\ &= -X^3 + 4X^2 - X - 2 \end{aligned}$$

(1b) Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von $\chi_A = -\tilde{\chi}_A$:

$$\sigma(A; \mathbb{R}) = \left\{ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{17}), \lambda_3 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{17}) \right\}$$

(1c) Da χ_A einfach zerfällt, schließen wir, dass A diagonalisierbar ist.

Zahlenbeispiel zur Diagonalisierung

(1d) Die Diagonalisierung verläuft weiter nach ChaPo-Verfahren P2H:

$$D = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(3 - \sqrt{17}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(3 + \sqrt{17}) \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{8}(15 - \sqrt{17}) & \frac{1}{8}(15 + \sqrt{17}) \\ 0 & \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{17}) & \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{17}) \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{4} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{17}} & \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{17}} \\ 0 & +\frac{2}{\sqrt{17}} & \frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{17}} \end{bmatrix}$$

Normiertes Polynom und seine Begleitmatrix

❓ Tritt jedes normierte Polynom als charakteristisches Polynom auf? Ja!

Satz P2R: normiertes Polynom und seine Begleitmatrix

Zum Polynom $P = X^n + p_1 X^{n-1} + \dots + p_n X^0 \in K[X]_n^1$ über K definieren wir die **Begleitmatrix** (engl. *companion matrix*):

$$C(P) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -p_n \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -p_{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -p_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -p_1 \end{bmatrix} \in K^{n \times n}$$

- (1) Ihr charakteristisches Polynom ist P , ebenso ihr Minimalpolynom.
- (2) Genau dann ist C über K diagonalisierbar, wenn P einfach zerfällt.

Anwendungsbeispiel: die Fibonacci-Folge

Wir definieren $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : n \mapsto f_n$ rekursiv durch $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$ und

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq 2}.$$

Die ersten Werte sind:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
f_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

Explizit, geschlossen? Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die phantastische **Binet-Formel**:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \approx \frac{1.618^n}{2.236}$$

Übung: (1) Wie *beweisen* Sie die gegebene Formel? Per Induktion! (F475)
 (2) Wie *finden* Sie eine solche Formel? Eigenwerte und Eigenvektoren!

Der Folgenraum $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ mit Verschiebeoperator

$$s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : (f_0, f_1, f_2, \dots) \mapsto (f_1, f_2, f_3, \dots).$$

Die Eigengleichung $s(f) = \lambda f$ lautet hier

$$(f_1, f_2, f_3, \dots) \stackrel{!}{=} (\lambda f_0, \lambda f_1, \lambda f_2, \dots),$$

kurz $f_{n+1} = \lambda f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Eig}(s, \lambda) = \{ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : n \mapsto \lambda^n f_0 \} = \langle e_\lambda = (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle_{\mathbb{K}}^!$$

Anwendungsbeispiel zu rekursiven Folgen

$$V = \{ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} \mid \forall n \in \mathbb{N} : f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0 \} \leq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

MiPo-Verfahren: $V = \text{Ker } P(s)$ mit $P = X^2 - X - 1 = (X - \phi)(X - \psi)$ und $\phi, \psi = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Somit gilt $V = E(\phi) \oplus E(\psi)$ mit Eigenbasis (u, v) bestehend aus $u = (\phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $v = (\psi^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Jede Fibonacci-Folge $f \in V$ ist Linearkombination $f = au + bv$ mit eindeutigen Koeffizienten $a, b \in \mathbb{K}$. Wir erhalten $f = (0, 1, \dots)$ mit $a, b = \pm 1/\sqrt{5}$, also $f_n = (\phi^n - \psi^n)/(\phi - \psi)$.

Definition P3A: Trigonalisierung eines Endomorphismus

(1) Sei $f : V \rightarrow V$ linear über K . Eine **trigonalisierende Basis** zu f ist eine Basis $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^n$ von V , für die die darstellende Matrix von f trigonal ist:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

(2) Sei $A \in K^{n \times n}$. Ein **trigonalisierender Basiswechsel** zu A über K ist eine invertierbare Matrix $T \in \text{GL}_n(K)$, so dass $T^{-1}AT$ trigonal ist:

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Satz P3B: Trigonalisierung \Leftrightarrow Zerfällung

Sei $f : V \rightarrow V$ linear über dem Körper K mit $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$.
Genau dann ist f über K trigonalisierbar, wenn χ_f über K zerfällt:

$$\chi_f(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$$

Beispiel: Sei V über \mathbb{C} ein endlich-dimensionaler Vektorraum.
Dann ist jeder \mathbb{C} -Endomorphismus $f : V \rightarrow V$ trigonalisierbar.

Beweis: „ \Rightarrow “: Zu f sei \mathcal{B} eine trigonalisierende Basis von V :

$$R = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Demnach gilt $\chi_f \stackrel{\text{P2G}}{=} \chi_R \stackrel{\text{Def}}{=} \det(XI - R) \stackrel{\text{O2w}}{=} (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$.

Trigonalisierung und Zerfällung

$$A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & & & \\ 0 & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \implies R = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

„ \Leftarrow “: Wir führen Induktion über n . Für $n \leq 1$ ist die Aussage trivial. Sei nun $n \geq 2$ und die Behauptung für $n - 1$ sei bereits bewiesen.

Zum Eigenwert $\lambda_1 \in K$ existiert ein Eigenvektor $v_1 \in \text{Eig}(f, \lambda_1) \leq V$. Diesen ergänzen wir zu einer Basis $\mathcal{A} = (v_1, u_2, \dots, u_n)$ von V . (M2k)

Bezüglich dieser Basis \mathcal{A} hat f die obige Blockform.

Wir zerlegen $V = \langle v_1 \rangle_K \oplus U$ mit $U := \langle u_2, \dots, u_n \rangle_K$.

Die Untermatrix B definiert den Endomorphismus $g : U \rightarrow U$

Wir haben $\chi_f = (X - \lambda_1) \cdot \chi_g$, also zerfällt auch das Polynom χ_g .

IV: Zu g existiert eine trigonalisierende Basis (v_2, \dots, v_n) von U .

Die Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ von V trigonalisiert $f : V \rightarrow V$.

QED

Spur und Determinante aus Eigenwerten

Satz P3F: Spur und Determinante

Sei $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix mit zerfallendem charakteristischem Polynom

$$\chi_A(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n).$$

(1) Die Spur von A ist die Summe aller Eigenwerte:

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

(2) Die Determinante ist das Produkt aller Eigenwerte:

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

Zweiter Beweis: Dank Satz P3B können wir A trigonalisieren zu

$$B = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Dank Satz P2F gilt dabei $\chi_A = \chi_B$, also insbesondere

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A) &\stackrel{\text{P2F}}{=} \operatorname{tr}(B) \stackrel{\text{Def}}{=} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n, \\ \det(A) &\stackrel{\text{P2F}}{=} \det(B) \stackrel{\text{O2w}}{=} \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n. \end{aligned}$$

Die Spur lesen: Den letzten Eigenwert gibt es gratis!

Aufgabe: Gegeben ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mit vier Vektoren:

$$A = \begin{bmatrix} -18 & -50 & 10 & 10 \\ 4 & 11 & -1 & -3 \\ -12 & -32 & 10 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- (1) Welche davon sind Eigenvektoren von A ? Zu welchen Eigenwerten?
 (2) Bestimmen Sie alle Eigenwerte, (3) Eigenräume, (4) eine Eigenbasis.

Lösung: (1) Wir setzen die Daten in die Eigengleichung $Av = \lambda v$ ein:

$$Ab = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \stackrel{\neq}{=} \begin{bmatrix} -10 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} \notin \mathbb{R}b, \quad Ac = A \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \stackrel{=}{=} \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 2c,$$

$$Ad = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \stackrel{=}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0d, \quad Ae = A \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \stackrel{=}{=} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2e$$

Die Spur lesen: Den letzten Eigenwert gibt es gratis!

$$A = \begin{bmatrix} -18 & -50 & 10 & 10 \\ 4 & 11 & -1 & -3 \\ -12 & -32 & 10 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(2) Dank (1) wissen wir $\text{Eig}(A, 0) \geq \langle d \rangle_{\mathbb{R}}^!$ und $\text{Eig}(A, 2) \geq \langle c, e \rangle_{\mathbb{R}}^!$.

Damit kennen wir drei der vier Eigenwerte: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$.

Dank $\text{tr}(A) = 1$ bekommen wir den vierten gratis: $\lambda_4 = -3$.

Ohne weitere Mühe schließen wir $\chi_A = X(X - 2)^2(X + 3)$.

(3) Wir berechnen den Eigenraum $\text{Eig}(A, -3)$ wie üblich mit Gauß:

$$A + 3I = \begin{bmatrix} -15 & -50 & 10 & 10 \\ 4 & 14 & -1 & -3 \\ -12 & -32 & 13 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{RZSF}]{\text{Gauß}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Demnach gilt $\text{Eig}(A, -3) = \langle f \rangle_{\mathbb{R}}^!$ mit dem Vektor $f = (-2, 1, 0, 2)^T$.

(4) Damit haben wir zu A unsere Eigenbasis (d, c, e, f) gefunden.

Der Satz von Cayley–Hamilton: $\mu_f^v \mid \mu_f \mid \chi_f$

Sei $f : V \rightarrow V$ linear über dem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$.

Lemma P3H: Cayley–Hamilton, lokales MiPo teilt ChaPo

Jedes lokale Minimalpolynom μ_f^v teilt das charakteristische Polynom χ_f .

Beweis: Wir haben $Z = \langle f^k(v) \mid k < m \rangle_K \leq V$ mit Basis $\mathcal{B} = (f^k(v))_{k=0}^{m-1}$.

$$B := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f|_Z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} = C(\mu_f^v).$$

Wir ergänzen die Basis \mathcal{B} von Z zu einer Basis \mathcal{A} von V und erhalten

$$A := M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} B & * \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \chi_f \stackrel{\text{P2G}}{=} \chi_A \stackrel{\text{O2W}}{=} \chi_B \cdot \chi_C \stackrel{\text{P2R}}{=} \mu_f^v \cdot \chi_C.$$

QED

Der Satz von Cayley–Hamilton: $\mu_f^v \mid \mu_f \mid \chi_f$

Satz P3H: Cayley–Hamilton, MiPo teilt ChaPo

Das Minimalpolynom $\mu_f \stackrel{\text{N3F}}{=} \text{kgV}(\mu_f^v; v \in V)$ teilt das char. Polynom χ_f .

Korollar P3H: Cayley–Hamilton, ChaPo annulliert Endo

Das charakteristische Polynom χ_f annulliert f , kurz $\chi_f(f) = 0$.

Beweis: Dank Satz N3F ist $\mu_f \mid \chi_f$ äquivalent zu $\chi_f(f) = 0$.

QED

Der Satz von Cayley–Hamilton für Matrizen

Satz P31: Cayley–Hamilton, ChaPo annulliert Matrix

Für jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ gilt $\chi_A(A) = 0$ in $K^{n \times n}$.

Aufgabe: Rechnen Sie dies explizit nach für $A \in K^{2 \times 2}$. **Lösung:**

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \implies \chi_A = \begin{vmatrix} X - a & -c \\ -b & X - d \end{vmatrix} = (X - a)(X - d) - bc$$

$$(A - aI)(A - dI) = \begin{bmatrix} 0 & c \\ b & d - a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a - d & c \\ b & 0 \end{bmatrix} \stackrel{\text{Com}}{=} \dots \stackrel{\text{Com}}{=} \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix}$$

Das zeigt $\chi_A(A) = 0$.

Minimalpolynom und charakteristisches Polynom

Satz P3j: Vergleich MiPo vs ChaPo, $\mu_f^v \mid \mu_f \mid \chi_f \mid (\mu_f)^a$

Sei $f : V \rightarrow V$ linear über dem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$.

(1) Falls das charakteristische Polynom χ_f über K zerfällt, so gilt

$$\begin{aligned} \chi_f &= (X - \lambda_1)^{r_1} \cdots (X - \lambda_k)^{r_k} \quad \text{mit } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j \text{ und} \\ \mu_f &= (X - \lambda_1)^{s_1} \cdots (X - \lambda_k)^{s_k} \quad \text{mit } 1 \leq s_i \leq r_i \text{ für alle } i. \end{aligned}$$

(2) Das Minimalpolynom μ_f teilt das charakteristische Polynom χ_f , und umgekehrt teilt χ_f eine hinreichend hohe Potenz $(\mu_f)^a$ mit $a \in \mathbb{N}$.

(3) Allgemein haben beide Polynome dieselben Nullstellen:

$$\begin{aligned} \chi_f &= (X - \lambda_1)^{r_1} \cdots (X - \lambda_k)^{r_k} Q, \\ \mu_f &= (X - \lambda_1)^{s_1} \cdots (X - \lambda_k)^{s_k} P, \end{aligned}$$

wobei $P, Q \in K[X]$ keine Nullstellen in K haben und $P \mid Q \mid P^a$ erfüllen.

Minimalpolynom und charakteristisches Polynom

Beweis: (1) Zerfallen bedeutet $\chi_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{r_i}$ mit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subseteq K$ und $r_1, \dots, r_k \geq 1$. Dank Cayley–Hamilton P3H gilt $\mu_f \mid \chi_f$, also zerfällt auch $\mu_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{s_i}$ mit $s_i \leq r_i$. Zu jedem $i = 1, \dots, k$ existiert $v \in \text{Eig}(f, \lambda_i) \setminus \{0\}$. Also gilt $\mu_f^v = (X - \lambda_i) \mid \mu_f$, somit $s_i \geq 1$.

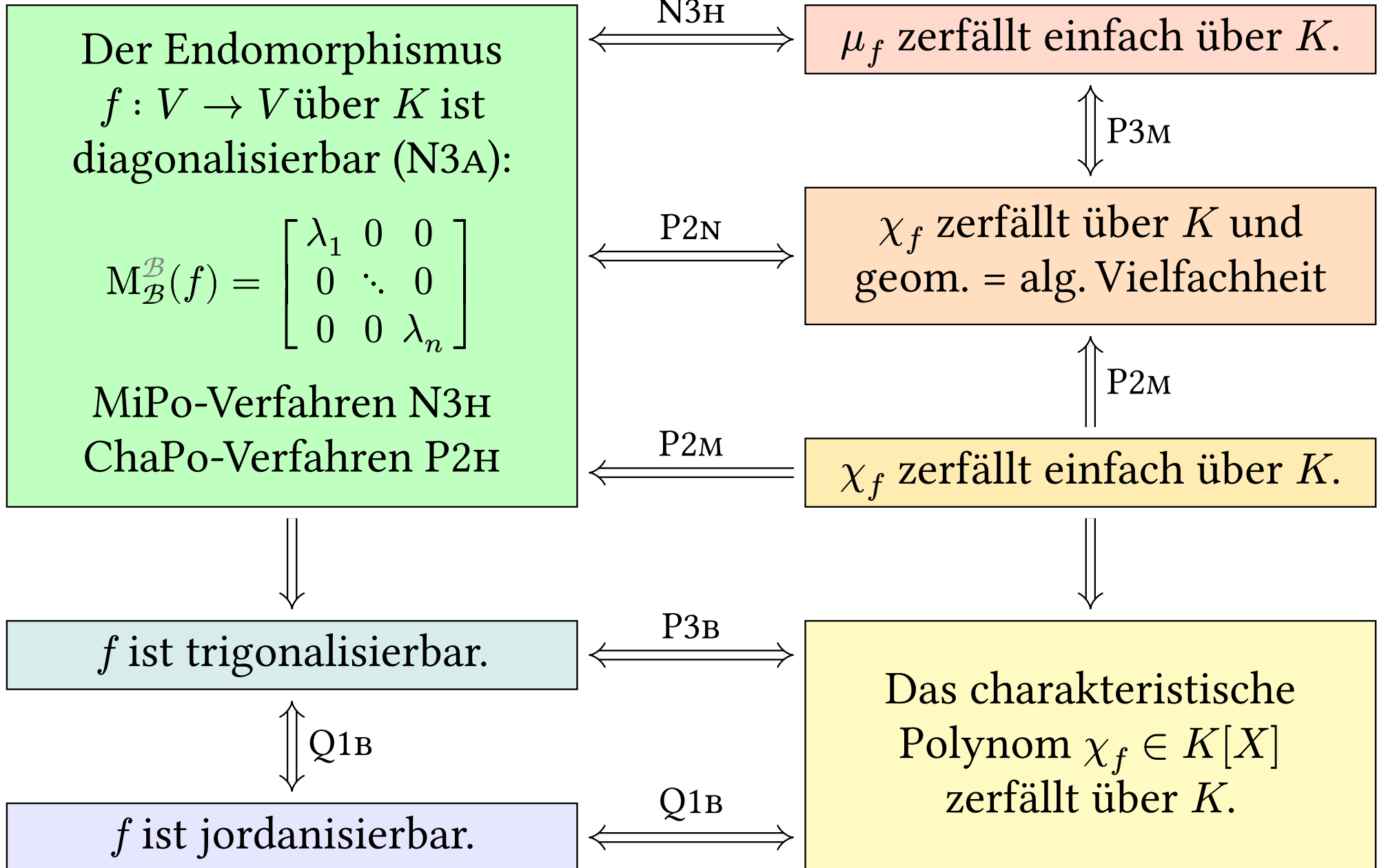
Aus (1) folgt (2), falls χ_f über K zerfällt. Die Aussage (2) gilt allgemein: Zerfällung gilt über einem geeigneten Erweiterungskörper $\bar{K} \supseteq K$. Daraus folgen die Aussagen (1,2) über \bar{K} , und somit (2,3) über K .

Beispiel P3κ: ein nilpotenter Endomorphismus

$$\begin{array}{ccccccc}
 f \text{ ist nilpotent} & \stackrel{\text{Def}}{\iff} & \text{Es gilt } f^k = 0 \text{ f\u00fcr einen Exponenten } k \in \mathbb{N} & & & & \\
 \stackrel{(1)}{\iff} & \mu_f = X^m & \stackrel{(2)}{\iff} & \chi_f = X^n & \stackrel{(3)}{\implies} & \text{tr}(f) = 0 \wedge \det(f) \stackrel{n \geq 1}{=} 0 &
 \end{array}$$

Endomorphismen

Polynome



Kapitel P

Bonusmaterial

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{f_D} & K^n \\ \Phi_{\mathcal{B}} \downarrow \cong & \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} & \cong \downarrow \Phi_{\mathcal{B}} \\ V & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

If I have seen further it is by standing on the shoulders of giants.

Isaac Newton (1643–1727) an Robert Hooke (1635–1703) in einem Brief von 1675

- 5 Divisionsalgebren: die reelle Trilogie $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$
- 6 Gerschgorin: Lokalisierung der komplexen Eigenwerte
- 7 Simultane Diagonalisierung

Die Trilogie $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ – „Papa, can you multiply triplets?“

Frage P5A: Divisionsalgebren über \mathbb{R}

In welchen Dimensionen n finden wir auf \mathbb{R}^n ein interessantes Produkt?

$$\diamond : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (u, v) \mapsto u \diamond v$$

(0) Es soll \mathbb{R} -bilinear sein:

$$(L) \quad u \diamond (v + w) = (u \diamond v) + (u \diamond w), \quad u \diamond (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (u \diamond v),$$

$$(R) \quad (u + v) \diamond w = (u \diamond w) + (v \diamond w), \quad (\lambda \cdot u) \diamond v = \lambda \cdot (u \diamond v).$$

(1) Wir fordern ein Neutrales $e \in \mathbb{R}^n$.

(2) Am besten soll $(\mathbb{R}^n, +, 0, \diamond, e)$ ein Körper sein, oder ein Divisionsring, oder wenigstens nullteilerfrei, genannt eine reelle **Divisionsalgebra** P5i.

😊 Dies gelingt uns für $n = 1, 2, 4$ dank der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, 0, \cdot, 1)$, der komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, 0, \cdot, 1)$ und der Quaternionen $(\mathbb{H}, +, 0, \cdot, 1)$.

Aufgabe: Dies ist unmöglich in ungerader Dimension $n = 3, 5, 7, \dots$

Warum musste Hamilton mit Tripeln scheitern?

Satz P5B: Divisionsalgebren über \mathbb{R}

Ist $(\mathbb{R}^n, +, 0, \diamond, e)$ über \mathbb{R} nullteilerfrei und $n \in \mathbb{N}$ ungerade, so folgt $n = 1$.

Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Dazu betrachten wir die Linksmultiplikation

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : v \mapsto a \diamond v.$$

Dank (L) ist A eine \mathbb{R} -lineare Abbildung mit charakteristischem Polynom

$$\chi_A = \det(XE - A) \in \mathbb{R}[X]_n^1.$$

Da n ungerade ist, hat χ_A eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$ (ZWS). Dazu existiert ein Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $Av = \lambda v$. Für $u := \lambda e - a \in \mathbb{R}^n$ gilt somit

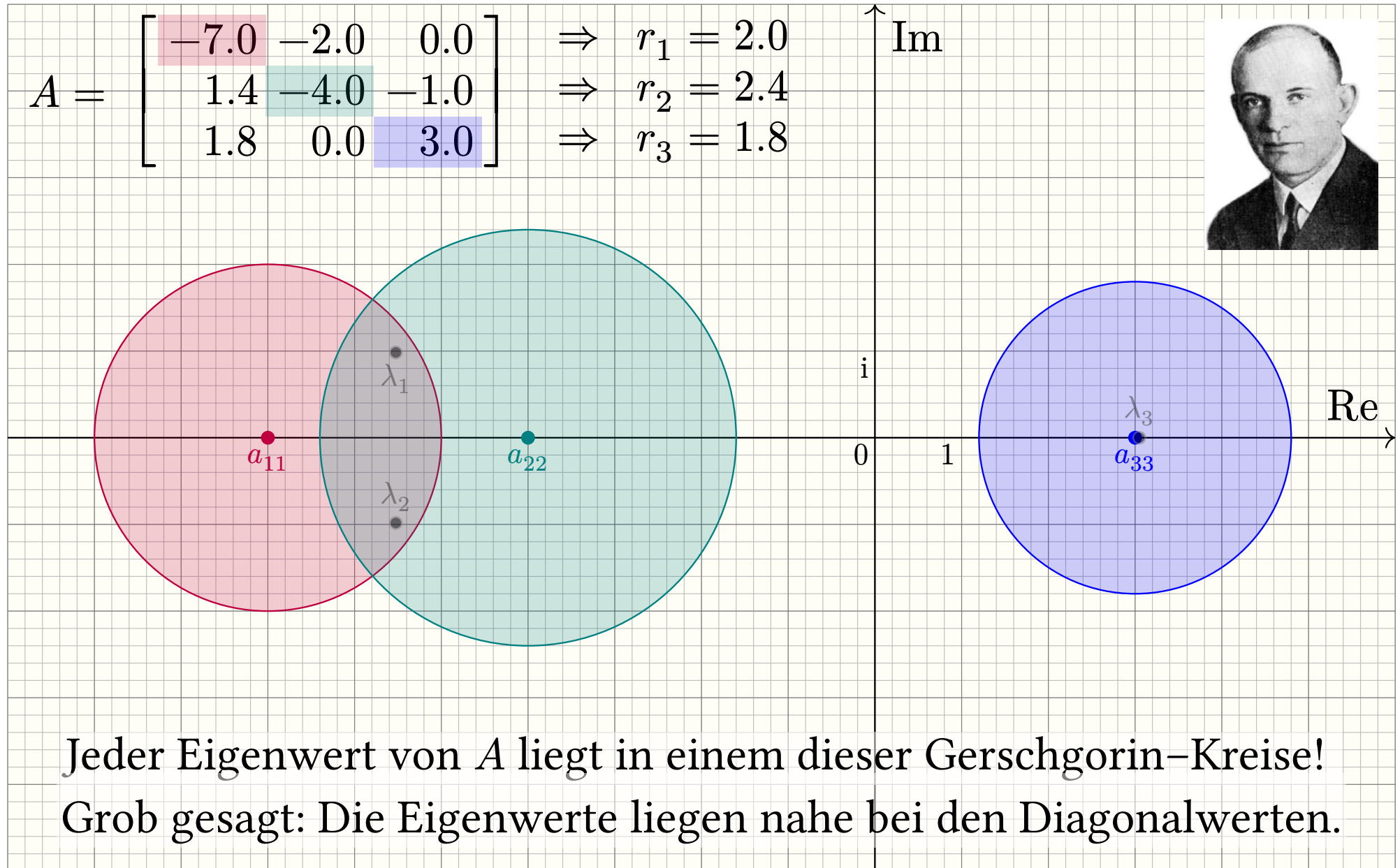
$$u \diamond v \stackrel{\text{Def}}{=} (\lambda e - a) \diamond v \stackrel{(\text{R})}{=} \lambda v - Av \stackrel{\text{Eig}}{=} 0.$$

Dank Nullteilerfreiheit und $v \neq 0$ folgt daraus $u = 0$, also $a = \lambda e$.

Da dies für alle $a \in \mathbb{R}^n$ gilt, folgt $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}e$, also $n = 1$. QED

Semjon Gerschgorin (1901–1933) und seine Kreise

❓ Können wir jeder Matrix ihre Eigenwerte ansehen? Zumindest grob?



Semjon Gerschgorin (1901–1933) und seine Kreise

Satz P6A: Die Gerschgorin–Kreise überdecken das Spektrum.

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. In jeder Zeile $i \in \{1, \dots, n\}$ sei $r_i := \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Dann gilt:

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(a_{ii}, r_i)$$

Beweis: Sei $(v, \lambda) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ ein Eigenpaar unserer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, also $Av = \lambda v$, das heißt $\sum_{j=1}^n a_{ij}v_j = \lambda v_i$, somit $\sum_{j \neq i} a_{ij}v_j = (\lambda - a_{ii})v_i$. Es existiert $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $|v_i|$ maximal. Dank $v \neq 0$ gilt $v_i \neq 0$. Wir können $v_i = 1$ annehmen, notfalls skalieren wir v mit v_i^{-1} .

$$|\lambda - a_{ii}| \stackrel{\text{Vor}}{=} \left| \sum_{j \neq i} a_{ij}v_j \right| \stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |v_j| \stackrel{\text{Vor}}{\leq} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \stackrel{\text{Def}}{=} r_i$$

Das zeigt $\lambda \in \bar{B}(a_{ii}, r_i)$, wie behauptet.

QED

Strikt diagonaldominante Matrizen

🔍 Können wir Invertierbarkeit leicht erkennen? Manchmal schon!
Wir nennen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ strikt **diagonaldominant** in den Zeilen, falls gilt:

$$|a_{ii}| > r_i := \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Korollar P6c: Lévy 1881, Desplanques 1887

vgl. D7c

Jede strikt diagonaldominante Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist invertierbar.
Spektrallücke: Für $\lambda \in \sigma(A)$ gilt $|\lambda| \geq \varepsilon := \min_{i=1}^n (|a_{ii}| - r_i) > 0$.

Strikt diagonaldominante Matrizen

Aufgabe: Welche der folgenden Matrizen sind offensichtlich invertierbar?

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung: Die Matrix A ist strikt diagonaldominant in den Zeilen, die Matrix B nur schwach in den Zeilen, doch strikt in den Spalten.

Definition P7A: simultane Diagonalisierung von Endomorphismen

(1) Seien $f_1, \dots, f_\ell : V \rightarrow V$ lineare Abbildungen über dem Körper K . Hierzu ist eine **diagonalisierende Basis** $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V , sodass $f_k(v_i) = \lambda_{k,i}v_i$ und $\lambda_{k,i} \in K$ für alle $i \in I$ und $k = 1, \dots, \ell$.

Simultane Diagonalisierung von Endomorphismen

Satz P7B: simultane Diagonalisierung von Endomorphismen

Seien $f_1, \dots, f_\ell : V \rightarrow V$ linear über dem Körper K . Äquivalent sind:

- 1 Die Familie (f_1, \dots, f_ℓ) ist simultan diagonalisierbar.
- 2 Jeder Endomorphismus f_1, \dots, f_ℓ ist einzeln diagonalisierbar und je zwei kommutieren, also $f_j \circ f_k = f_k \circ f_j$ für alle $j, k \in \{1, \dots, \ell\}$.

Beweis: „(1) \Rightarrow (2)“: Sei $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ eine simultane Eigenbasis von V . Dann gilt $f_j \circ f_k = f_k \circ f_j$ auf der Basis \mathcal{B} somit dank N1A auf ganz V :

$$f_j(f_k(v_i)) = f_j(\lambda_{k,i} v_i) = \lambda_{k,i} f_j(v_i) = \lambda_{k,i} \lambda_{j,i} v_i,$$

$$f_k(f_j(v_i)) = f_k(\lambda_{j,i} v_i) = \lambda_{j,i} f_k(v_i) = \lambda_{j,i} \lambda_{k,i} v_i.$$

Simultane Diagonalisierung von Endomorphismen

„(2) \Rightarrow (1)“: Wir führen Induktion über ℓ . Der Fall $\ell = 1$ ist trivial.

Sei $\ell \geq 2$. Dank Diagonalisierbarkeit haben wir $V = \bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(f_\ell, \lambda)$.

Dank Kommutation ist jeder Eigenraum $U := \text{Eig}(f_\ell, \lambda)$ zudem

f_k -invariant: Für $v \in \text{Eig}(f_\ell, \lambda)$ gilt $f_k(v) \in \text{Eig}(f_\ell, \lambda)$, denn

$$f_\ell(f_k(v)) = f_k(f_\ell(v)) = f_k(\lambda v) = \lambda f_k(v).$$

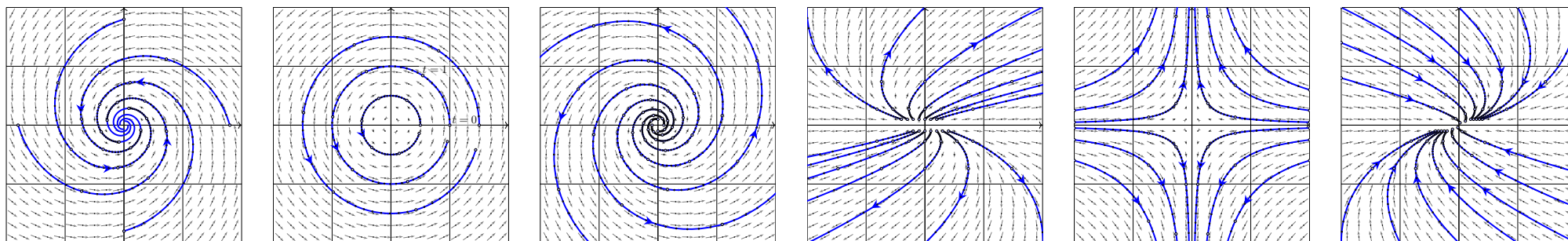
Wir schränken $f_k : V \rightarrow V$ ein zu $g_k = f_k|_U$. Die Endomorphismen $g_1, \dots, g_{\ell-1}$ kommutieren weiterhin und sind diagonalisierbar (P7c).

Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine diagonalisierende Basis $\mathcal{B}_\lambda = (v_i)_{i \in I_\lambda}$ von U zu der Familie $(g_1, \dots, g_{\ell-1})$. Zudem gilt $g_\ell = \lambda \text{id}_U$.

Zusammengesetzt zu $I = \bigsqcup_{\lambda \in K} I_\lambda$ erhalten wir die diagonalisierende Basis $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ von V zu der Familie $(f_1, \dots, f_{\ell-1}, f_\ell)$. QED

Kapitel Q

Hauptvektoren und Jordanisierung



To learn to succeed, you must first learn to fail.

Michael Jordan (1963–)

- 1 Hauptvektoren und Jordanisierung
- 2 Differenzengleichungen und Differentialgleichungen
- 3 Lineare Differentialgleichungssysteme
- 4 Linearisierung um Fixpunkte und dynamische In/Stabilität

Jordan-Blöcke und Hauptvektorketten

⚠ Nicht jede zerfallende Matrix ist diagonalisierbar (P2o):

$$B = J(n, \lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in K^{n \times n} \implies B - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ☹ Es gibt nicht genug **Eigenvektoren** zu B für eine Eigenbasis von K^n .
- 😊 Wir nutzen das Nächstbeste, die **Hauptvektorkette** (e_1, e_2, \dots, e_n) :

$$0 \xleftarrow{B-\lambda} e_1 \xleftarrow{B-\lambda} e_2 \xleftarrow{B-\lambda} \dots \xleftarrow{B-\lambda} e_n$$

Definition Q1A: Hauptvektoren

Sei $f \in \text{End}_K(V)$ und $\lambda \in K$. Eine **Hauptvektorkette** / **Jordan-Kette**

$$0 \xleftarrow{f-\lambda} v_1 \xleftarrow{f-\lambda} v_2 \xleftarrow{f-\lambda} \dots \xleftarrow{f-\lambda} v_\ell$$

besteht aus Vektoren $v_0 = 0 \neq v_1, v_2, \dots, v_\ell \in V$ mit $(f - \lambda)(v_k) = v_{k-1}$.

Satz Q1B: Jordan-Basis eines Endomorphismus

Sei $f \in \text{End}_K(V)$ mit $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$ und $\chi_f \in K[X]$ zerfalle über K .

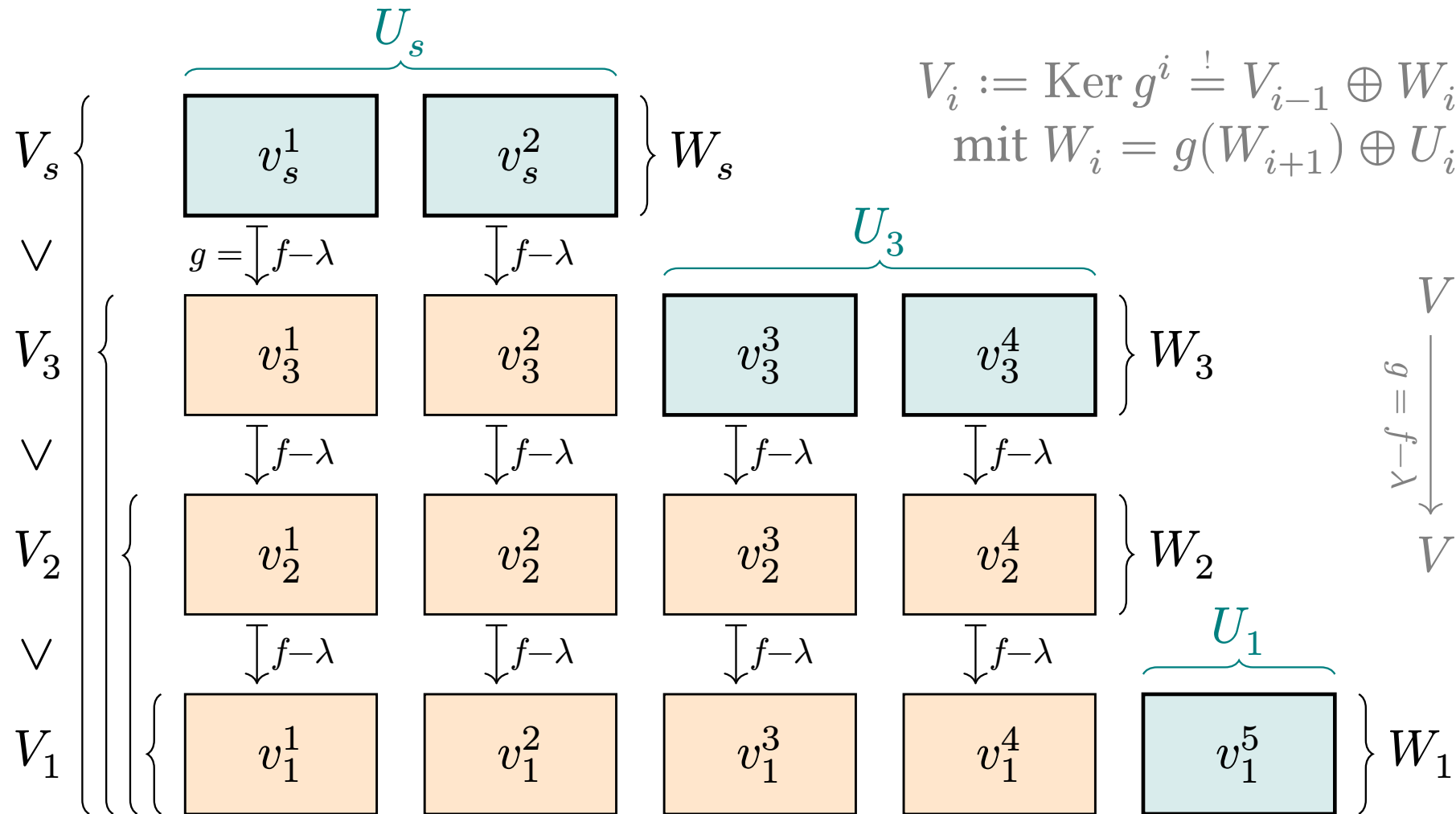
(1) Dann existiert zu f eine Basis \mathcal{J} von V aus **Hauptvektorketten**.

(2) So wird f dargestellt als Diagonalmatrix von **Jordan-Blöcken**:

$$M_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}}(f) = J = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_k \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad B_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in K^{n_i \times n_i}$$

(3) Sie ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Jordan-Blöcke.

Standardverfahren zur Jordanisierung: Hauptraum-Sudoku!



Kurzfassung: Zu jedem Eigenwert λ von $f : V \rightarrow V$ konstruieren wir ein solches Young-Diagramm und lesen daraus die **Jordan-Form** ab.

Langfassung: Wir füllen die Kästchen geschickt mit Hauptvektorketten und erhalten daraus zudem eine explizite **Jordan-Basis** \mathcal{J} von V zu f .

Zunächst benötigen wir alle Eigenwerte von $f \in \text{End}_K(V)$:

- 1 Bestimme das charakteristische Polynom $\chi_f \in K[X]_n^1$.
- 2 Bestimme die Eigenwerte $\lambda_i \in K$ mit Vielfachheiten $r_i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Abbruch? Falls χ_f nicht zerfällt, so ist f nicht jordanisierbar (P3B).

Vereinfachung? Falls χ_f einfach zerfällt, so ist f diagonalisierbar (P2M).

Für jeden Eigenwert λ sei r seine Vielfachheit und $g := f - \lambda \text{id}_V : V \rightarrow V$.

- 3 Für $i = 0, 1, \dots, s$ setze $V_i := \text{Ker } g^i = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V)^i$ und bestimme die Dimension $k_i := \dim V_i$ bis schließlich $k_s = r$ gilt (dank Q1E).
- 4 Lies die Jordan-Form $\text{diag}(B_1, \dots, B_t)$ ab: Die j -te Spalte der Höhe ℓ zum Eigenwert λ steht für eine Hauptvektorkette der Länge ℓ und somit für den Jordan-Block $B_j = J(\ell, \lambda)$.

- 5 Für $i = s, \dots, 1$ wähle in V_i zu $V_{i-1} \oplus g(W_{i+1})$ ein Komplement U_i , sodass $V_i = V_{i-1} \oplus g(W_{i+1}) \oplus U_i$ gilt, und setze $W_i := g(W_{i+1}) \oplus U_i$. Anfangs gilt $W_{s+1} = 0$, also $U_s = W_s$. Wähle eine Basis von U_i und lasse diese Startvektoren zu Hauptvektorketten runterrieseln (Q1F).
- 6 Lies die Jordan-Basis \mathcal{J} zu f ab: Alle Spalten von links nach rechts, jede Spalte von unten nach oben (in der Konvention von Satz Q1B). Füge diese Jordan-Ketten für alle Eigenwerte zu \mathcal{J} zusammen (Q1E).

Definition Q1D: Haupträume eines Endomorphismus

(1) Der **Hauptraum der Stufe** $s = 0, 1, 2, \dots$ von f zu λ ist

$$V_s = \text{Hau}_s(f, \lambda) := \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V)^s.$$

Hierbei ist $V_1 = \text{Eig}(f, \lambda) = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V)$ der **Eigenraum** von f zu λ .

(2) Wir erhalten so eine aufsteigende Kette f -invarianter Unterräume:

$$\{0\} = V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \dots \leq V \quad \text{mit} \quad f(V_i) \subseteq V_i$$

(3) Der **Hauptraum** von f zu λ ist

$$H(\lambda) = \text{Hau}(f, \lambda) := \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V)^s.$$

Hauptraumzerlegung

Satz Q1E: die Hauptraumzerlegung

Sei $f : V \rightarrow V$ linear über dem Körper K . (0) Die Summe $H := \sum_{\lambda \in K} H(\lambda)$ aller Haupträume $H(\lambda) = \text{Hau}(f, \lambda) := \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \text{Ker}(f - \lambda)^s \leq V$ ist direkt:

$$H := \bigoplus_{\lambda \in K} \text{Hau}(f, \lambda) \leq V$$

(1) Zudem gelte $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$ und $\chi_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{r_i}$ mit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subseteq K$ und $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann haben wir

$$V = \bigoplus_{i=1}^k \text{Hau}(f, \lambda_i)$$

mit $\text{Hau}(f, \lambda_i) = \text{Ker}(f - \lambda_i)^{r_i}$ und $\dim_K \text{Hau}(f, \lambda_i) = r_i$.

Hauptraumzerlegung

Beweis: (0) Für $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subseteq K$ und $v_i \in H(\lambda_i)$ müssen wir zeigen:

$$v_1 + \dots + v_k = 0 \quad \implies \quad v_1 = \dots = v_k = 0$$

Hierzu sei $v_i \in \text{Ker}(f - \lambda_i)^{s_i}$ für $i = 1, \dots, k$. Die Kernzerlegung N3G zum Polynom $P = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{s_i}$ garantiert unsere Behauptung:

$$\text{Ker } P(f) = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(f - \lambda_i)^{s_i} \leq V$$

(1) Cayley–Hamilton P3H garantiert $\chi_f(f) = 0$. Die Kernzerlegung ergibt

$$V \stackrel{\text{P3H}}{=} \text{Ker } \chi_f(f) \stackrel{\text{N3G}}{=} \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(f - \lambda_i)^{r_i}$$

Wir haben $\text{Ker}(f - \lambda_i)^{r_i} \leq H(\lambda_i)$. Dank (0) folgt Gleichheit (L3M).

Sei $s_i := \dim_K H(\lambda_i)$. Auf $H(\lambda_i)$ ist $f - \lambda_i$ nilpotent, mit char. Polynom $(X - \lambda_i)^{s_i}$, siehe P3K. Auf der direkten Summe $V = \bigoplus_{i=1}^k H(\lambda_i)$ gilt also $\chi_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{s_i}$. Polynomvergleich zeigt $s_i = r_i$ für alle i . QED

Interne Struktur des Hauptraums

Satz Q1F: Kernfiltrierung jedes Hauptraums

Sei $f \in \text{End}_K(V)$ und $\lambda \in K$ und $g = f - \lambda \text{id}_V$.

(0) Für die Haupträume $V_i := \text{Ker } g^i$ der Stufe $i = 0, 1, 2, \dots$ gilt

$$\{0\} = V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \dots \leq V \text{ mit } g(V_{i+1}) \leq V_i.$$

Fortan sei $i \geq 1$ und $V_{i+1} = V_i \oplus W_{i+1}$.

(1) Die Einschränkung von $g : V \rightarrow V$ zu $g_{i+1} : W_{i+1} \rightarrow V_i$ ist injektiv.

(2) Ihr Bild erfüllt $g(W_{i+1}) \cap V_{i-1} = \{0\}$. Wir erhalten die Injektion

$$\bar{g}_{i+1} : W_{i+1} \hookrightarrow V_i/V_{i-1} : w \mapsto g(w) + V_{i-1}.$$

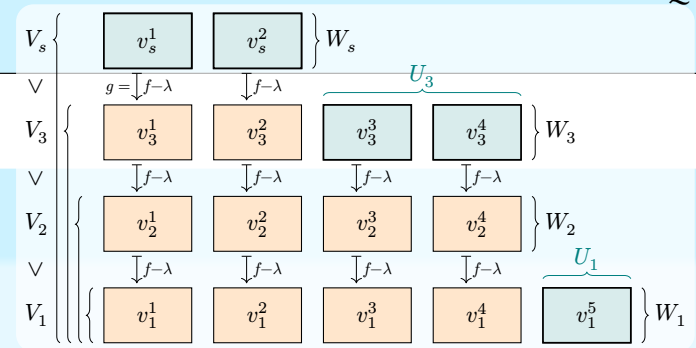
Mit $V_i = V_{i-1} \oplus W_i$ ist die Komposition $W_{i+1} \hookrightarrow V_i/V_{i-1} \cong W_i$ injektiv.

Beweis: (0) Es gilt: $v \in V_i \iff 0 = g^i(v) = g^{i-1}(g(v)) \iff g(v) \in V_{i-1}$.

(1) Wir haben $\text{Ker}(g) = V_1 \leq V_i$, also $\text{Ker}(g) \cap W_{i+1} \leq V_i \cap W_{i+1} = \{0\}$.

(2) Für $w \in W_{i+1} \setminus \{0\}$ gilt $w \notin V_i$, demnach $0 \neq g^i(w) = g^{i-1}(g(w))$.

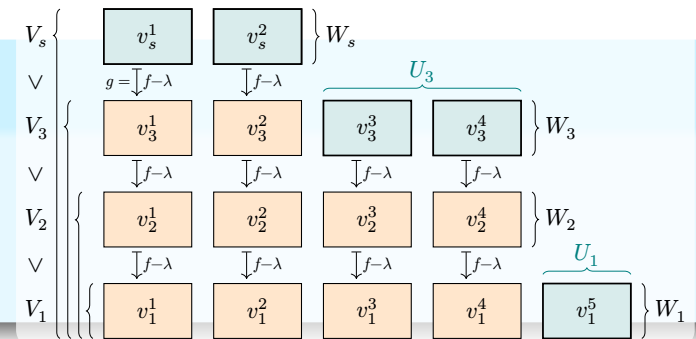
Das heißt $g(w) \notin V_{i-1}$. Also ist auch $\bar{g}_{i+1} : W_{i+1} \rightarrow V_i/V_{i-1}$ injektiv. QED



Interne Struktur des Hauptraums

Satz Q1F: Kernfiltrierung jedes Hauptraums

(3) Unser Hauptraum-Sudoku **1–5** gelingt:
Jeder Hauptraum erlaubt eine Jordan-Basis.



Beweis: Polynom **1** und Zerfällung **2** sind klar. Schritt **3** gelingt dank $V_0 \leq V_1 \leq \dots \leq V$ und Satz Q1E. Abkürzung **4** ist korrekt dank **5** und **6**.

Wir klären nun Schritt **5**: Dank (2) ist in V_i die Summe $V_{i-1} \oplus g(W_{i+1})$ direkt. Wir können also ergänzen zu $V_i = V_{i-1} \oplus g(W_{i+1}) \oplus U_i$. Dank Injektivität (1) erhalten wir durch Runterrieseln und Ergänzen in jeder Zeile W_s, \dots, W_1 eine Basis, also insgesamt eine Basis des Hauptraums $\text{Hau}(f, \lambda) = V_s = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$. In jeder Spalte steht nach Konstruktion eine Hauptvektorkette. (Schritt **6** folgt aus dem vorigen Satz Q1E.) QED

Satz Q1c: Eindeutigkeit der Jordan-Form

Vorgelegt seien in $K^{n \times n}$ zwei Jordan-Matrizen

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_p \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_q \end{bmatrix}$$

mit Jordan-Blöcken $B_i = J(\ell_i, \lambda_i)$ und $C_j = J(m_j, \mu_j)$ für alle i und j .

- (1) Sind B und C ähnlich, also $C = T^{-1}BT$ für ein $T \in \text{GL}_n K$, so gilt $p = q$ und nach Umordnung $B_i = C_i$ für alle $i = 1, \dots, p$.
- (2) Die Dimensionen $(\lambda, s) \mapsto k_s(\lambda) := \dim \text{Ker}(B - \lambda)^s$ sind invariant.

Erstes Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

Aufgabe: Jordanisieren Sie über \mathbb{C} die folgende Matrix.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 & 1 & -6 \\ -4 & 10 & -4 & 1 & -8 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$$

Lösung: (0) Wir bestimmen das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{C}[X]_5^1$.

Klausurtyp: $\chi_A = (X - \lambda)^5$. Dank $\text{tr } A = 10$ finden wir $\chi_A = (X - 2)^5$.

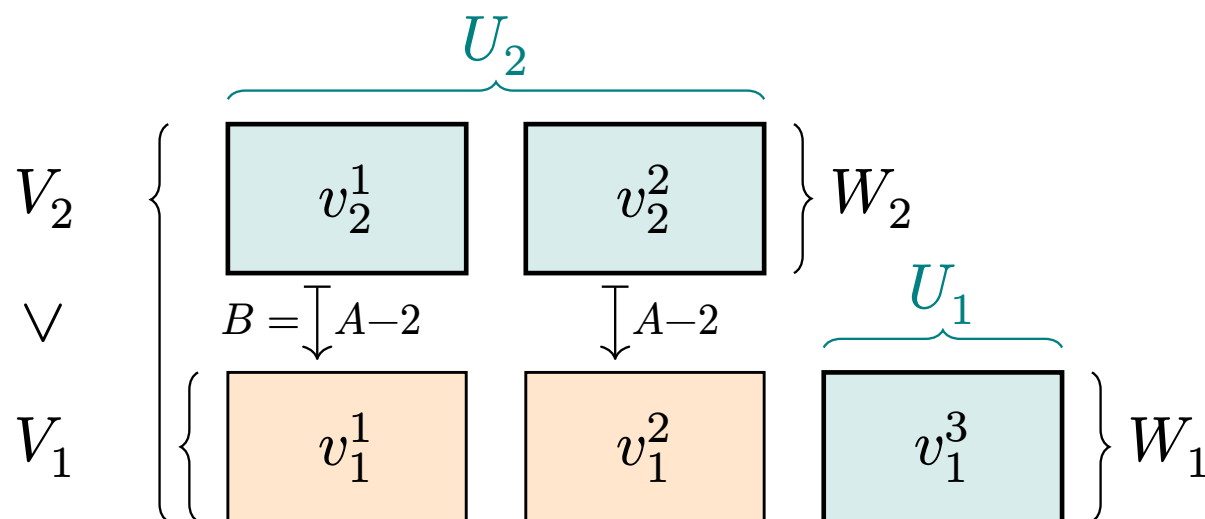
(1) Wir bestimmen den Eigenraum zu $\lambda = 2$. Hierzu sei $B = A - 2I$:

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 & 1 & -6 \\ -4 & 8 & -4 & 1 & -8 \\ -3 & 6 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \implies \text{Ker } B = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

(2) Wir filtrieren den Hauptraum durch $V_i = \text{Ker } B^i$ mit $k_i := \dim V_i$:

$$\text{Ker } B =: V_1 \leq \text{Ker } B^2 =: V_2 \leq \text{Ker } B^3 =: V_3 \leq \dots$$

Wir berechnen B^2 . **Klausurtyp: $B^2 = 0$.** Wir finden so $\text{Ker } B^2 = \mathbb{C}^5$.



Erstes Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

$$\begin{aligned} \exists T \in GL_5 \mathbb{C} : \\ T^{-1}AT = J = \end{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Zu $V_1 < V_2$ wählen wir ein Komplement $W_2 = U_2 = \langle v_2^1, v_2^2 \rangle_{\mathbb{C}}^!$, etwa

$$v_2^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B} v_1^1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B} v_1^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Erstes Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

In der Schicht $W_1 = V_1$ ergänzen wir, etwa

$$v_1^3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

So erhalten wir unsere Jordan-Basis $\mathcal{J} = (v_1^1, v_2^1, v_1^2, v_2^2, v_1^3)$.

⚠ Machen Sie die Probe! Gilt $T^{-1}AT = J$? Wenigstens $AT = TJ$?

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 & 1 & -6 \\ -4 & 10 & -4 & 1 & -8 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{?!}{=} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Zweites Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

Aufgabe: Jordanisieren Sie über \mathbb{C} die folgende Matrix.

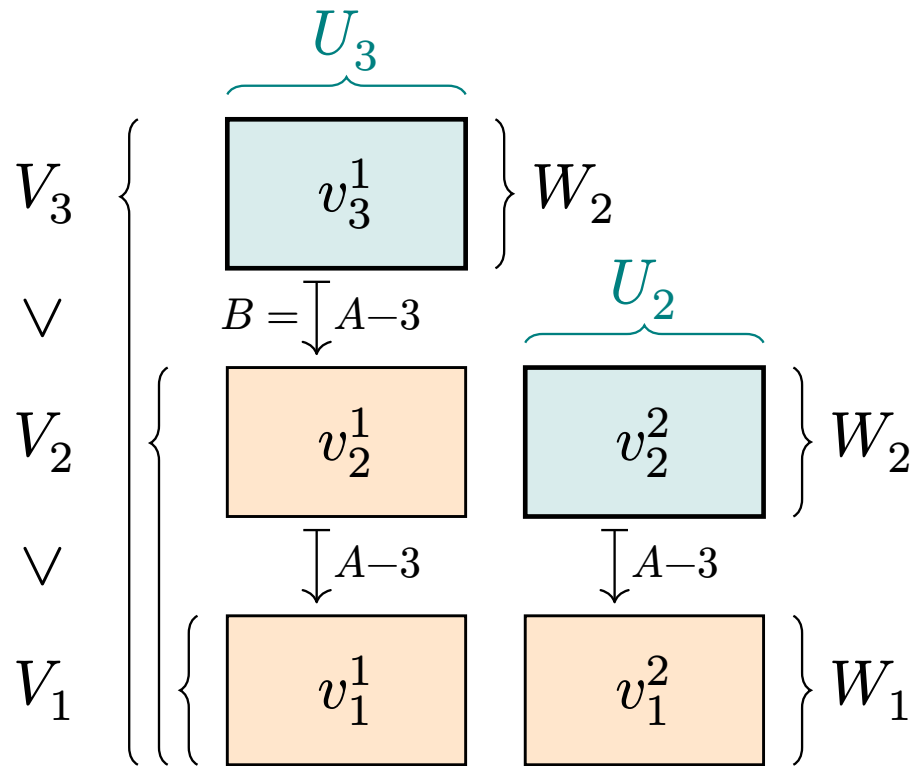
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -6 & -6 & -5 \\ -1 & 0 & -1 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$$

Klausurtyp: Für $B = A - 3I$ gilt $\dim \text{Ker } B = 2$ und $\dim \text{Ker } B^2 = 4$.

Lösung: (0) Wir bestimmen das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{C}[X]_5^1$. Dank Klausurtyp gilt $\chi_A = (X - 3)^4(X - \lambda)$. Mit $\text{tr } A = 15$ folgt $\lambda = 3$.

$$\chi_A = (X - 3)^5$$

Zweites Zahlenbeispiel zur Jordanisierung



$$\exists T \in GL_5 \mathbb{C} : T^{-1}AT = J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Zweites Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

Wir berechnen B^2 . **Klausurtipp:** Wir geben B^2 für Sie explizit an:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -6 & -6 & -5 \\ -1 & 0 & -4 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eine mögliche Jordan-Basis entsteht durch folgende Hauptvektorketten:

$$\begin{array}{l} \text{erste Kette:} \quad v_3^1 = e_3 \xrightarrow{B} v_2^1 = Be_3 \xrightarrow{B} v_1^1 = B^2e_3 \xrightarrow{B} 0 \\ \text{zweite Kette:} \quad v_2^2 = e_1 \xrightarrow{B} v_1^2 = Be_1 \xrightarrow{B} 0 \end{array}$$

Zweites Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

⚠️ Machen Sie die Probe! Gilt $T^{-1}AT = J$? Wenigstens $AT = TJ$?

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 11 & 0 & 15 & 17 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -6 & -6 & -5 \\ -1 & 0 & -1 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -6 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{?!}{=} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Beispiele: Welche Jordan–Formen sind möglich?

Aufgabe: Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A \in \mathbb{R}[X]_n^1$. Welche Jordan–Normalformen sind möglich?

(1) $\chi_A = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$ sowie (2) $\chi_A = (X - 1)(X - 2)^2(X - 3)$,
 (3) $\chi_A = (X - 2)^2(X - 3)^2$, (4) $\chi_A = (X - 2)^3(X - 3)$, (5) $\chi_A = (X - \lambda)^4$

Lösung: (1) Die Matrix A ist diagonalisierbar (P2M). Durch die Wahl einer Eigenbasis (v_1, v_2, v_3) von \mathbb{R}^3 zu A erhalten wir $T \in GL_3 \mathbb{R}$ mit

$$A \sim T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) Die Matrix A ist eventuell diagonalisierbar... oder sie ist es nicht:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Beispiele: Welche Jordan-Formen sind möglich?

(3) Bei $\chi_A = (X - 2)^2(X - 3)^2$ sind vier Jordan-Formen möglich:

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(4) Bei $\chi_A = (X - 2)^3(X - 3)$ sind genau drei Jordan-Formen möglich:

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(5) Bei $\chi_A = (X - \lambda)^4$ sind genau fünf Jordan-Formen möglich:

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Minimalpolynom aus der Jordan-Form

Aufgabe: Bestimmen Sie das ChaPo und das MiPo der Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lösung: Das char. Polynom ist $\chi_A = \chi_B = \chi_C = (X - 2)^3(X - 3)^2$.

Das Minimalpolynom codiert die maximale Größe der Jordan-Blöcke:

$$\mu_A = (X - 2)^1(X - 3)^1,$$

$$\mu_B = (X - 2)^2(X - 3)^2,$$

$$\mu_C = (X - 2)^3(X - 3)^1.$$

Minimalpolynom aus der Jordan-Form

Satz Q1N: charakteristisches Polynom und Minimalpolynom

Sei $f : V \rightarrow V$ linear über dem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$.

(1) Angenommen, χ_f zerfällt in Linearfaktoren über K . Dann gilt

$$\begin{aligned}\chi_f &= (X - \lambda_1)^{r_1} \cdots (X - \lambda_k)^{r_k} \quad \text{mit } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j \text{ und} \\ \mu_f &= (X - \lambda_1)^{s_1} \cdots (X - \lambda_k)^{s_k} \quad \text{mit } 1 \leq s_i \leq r_i \text{ für alle } i.\end{aligned}$$

(2) Der Exponent s_i ist die maximale Größe aller Jordan-Blöcke zu λ_i .
Der Exponent r_i ist die Summe der Größen aller Jordan-Blöcke zu λ_i .

(3) Genau dann ist der Endomorphismus f über K diagonalisierbar, wenn sein Minimalpolynom $\mu_f \in K[X]$ über K einfach zerfällt.

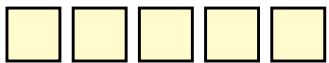
Jordan-Formen zu gegebenem Minimalpolynom

Aufgabe: Welche Jordan-Formen sind möglich mit charakteristischem Polynom $\chi_A = (X - \lambda)^5$ und Minimalpolynom $\mu_A = (X - \lambda)^s$?

Lösung: (1) Im Falle $\mu_A = (X - \lambda)^1$ ist A diagonalisierbar:

$$A \sim T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

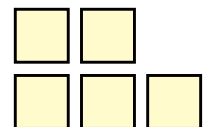
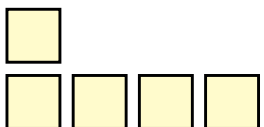
Young-Diagramm



In diesem Fall ist A selbst diagonal, denn $A = T(\lambda I)T^{-1} = \lambda I$.

(2) Im Falle $\mu_A = (X - \lambda)^2$ gibt es genau zwei Möglichkeiten:

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$



Jordan-Formen zu gegebenem Minimalpolynom

(3) Im Falle $\mu_A = (X - \lambda)^3$ gibt es genau zwei Möglichkeiten:

$$\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \square \\ \square \quad \square \\ \square \quad \square \end{array}$$

(4) Im Falle $\mu_A = (X - \lambda)^4$ bzw. $\mu_A = (X - \lambda)^5$ bleibt nur

$$\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} . \quad \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array}$$

Jordan-Zerlegung $J = D + N$ in diagonal plus nilpotent

Bemerkung Q10: Potenzen der Jordan-Form $J = D + N$

Die Jordan-Form $T^{-1}AT = J = D + N$ ist Summe der Diagonalmatrix D und der nilpotenten Matrix N , und beide kommutieren, also $DN = ND$. Angenommen $N^s = 0$. Dank binomischem Lehrsatz H2K gilt dann:

$$J^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^{s-1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k$$

Aus $A = TJT^{-1}$ folgt dann $A^n = TJ^nT^{-1}$ für jeden Exponenten $n \in \mathbb{N}$. Dies ergibt eine geschlossene Formel für jeden Koeffizienten von A^n .

Jordan-Zerlegung $J = D + N$ in diagonal plus nilpotent

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} & \binom{n}{4}\lambda^{n-4} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} & 0 \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^n & n\mu^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^n \end{bmatrix}$$

Von der komplexen zur reellen Jordan-Form

Beweis: (2) Wir haben $\text{conj} : H(\lambda) \simeq H(\bar{\lambda})$, denn für alle $v \in \mathbb{C}^n$ gilt:

$$(A - \lambda)^k v = 0 \quad \stackrel{\text{conj}}{\iff} \quad (A - \bar{\lambda})^k \bar{v} = 0$$

Für $H(\lambda) = \text{Hau}(A, \lambda)$ wählen wir eine Basis aus Hauptvektorketten:

$$\begin{aligned} 0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} v_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_\ell &\in H(\lambda) \leq \mathbb{C}^n \\ 0 \xleftarrow{A-\bar{\lambda}} \bar{v}_1 \xleftarrow{A-\bar{\lambda}} \bar{v}_2 \xleftarrow{A-\bar{\lambda}} \dots \xleftarrow{A-\bar{\lambda}} \bar{v}_\ell &\in H(\bar{\lambda}) \leq \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

Bezüglich $(v_1, \dots, v_\ell, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_\ell)$ wird die Matrix A dargestellt durch:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & & & & \\ & 0 & \lambda & \ddots & 0 & & & \\ & 0 & 0 & \ddots & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & \lambda & & & \\ & & & & & \bar{\lambda} & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & \bar{\lambda} & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\ell \times 2\ell}$$

Von der komplexen zur reellen Jordan-Form

Aufgabe: Welche Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sind nicht reell diagonalisierbar?

Lösung: (1) Wenn $\chi_A \in \mathbb{R}[X]_2^1$ über \mathbb{R} zerfällt, so gibt es genau drei Fälle:

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \text{ 😊}, \quad A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ 😊}, \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ ☹️}.$$

(2) Wenn $\chi_A \in \mathbb{R}[X]_2^1$ nicht über \mathbb{R} zerfällt, so bleibt dank Satz Q1Q nur

$$A \sim \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \text{ ☹️}.$$

mit $b \neq 0$, also $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $t \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$.

Von der komplexen zur reellen Jordan-Form

Aufgabe: Welche Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ sind nicht reell diagonalisierbar?

Lösung: (1) Wenn $\chi_A \in \mathbb{R}[X]_3^1$ über \mathbb{R} zerfällt, so gibt es genau sechs Fälle:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix} \text{ 😊}, & \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \text{ 😊}, & \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \text{ ☹️}, \\
 \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ 😊}, & \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ ☹️}, & \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ ☹️}.
 \end{array}$$

(2) Wenn $\chi_A \in \mathbb{R}[X]_3^1$ nicht über \mathbb{R} zerfällt, so bleibt dank Satz Q1Q nur

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & r \cos t & -r \sin t \\ 0 & r \sin t & r \cos t \end{bmatrix} \text{ ☹️}.$$

Die diskrete Ableitung und ihre Hauptfolgen

$$\Delta : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : f \mapsto \Delta f \quad \text{mit} \quad (\Delta f)(n) := f(n+1) - f(n).$$

❓ Ist die Abbildung Δ linear über \mathbb{K} ? Ja, klar! (Sonst Übung!)

Aufgabe: Bestimmen Sie die Haupträume $V_r = \text{Ker } \Delta^r$ für $r \in \mathbb{N}$.
Nennen Sie eine Jordan-Basis von V_r und von $V = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} V_r \leq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Lösung: (0) Speziell für $r = 0$ haben wir $\Delta^0 = \text{id}$, also $V_0 = \{0\}$.

(1) Die Gleichung $\Delta f = 0$ bedeutet $f(n+1) - f(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Somit gilt $V_1 = \text{Ker } \Delta = \langle 1 \rangle_{\mathbb{K}}^!$ mit der konstanten Funktion $1 = \text{const}_{\mathbb{N}}^1$.

(2) Aus $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } \Delta = 1$ folgt $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } \Delta^r \leq r$ für alle $r \in \mathbb{N}$. (Q1F/Q2A)

Die diskrete Ableitung und ihre Hauptfolgen

(3) Wir erinnern uns an die Binomialkoeffizienten

$$f_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : f_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k^{\underline{k}}}$$

$\binom{n}{k}$	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k=0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45
3	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120
4	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210

Für die diskrete Ableitung finden wir erneut Pascals Rekursionsformel:

$$\Delta f_k(n) \stackrel{\text{Def}}{=} f_k(n+1) - f_k(n) \stackrel{\text{Def}}{=} \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \stackrel{\text{H229}}{=} \binom{n}{k-1} \stackrel{\text{Def}}{=} f_{k-1}(n)$$

(4) Wir erhalten so die (unendlich lange) Hauptfolgenkette

$$0 \xleftarrow{\Delta} f_0 \xleftarrow{\Delta} f_1 \xleftarrow{\Delta} f_2 \xleftarrow{\Delta} f_3 \xleftarrow{\Delta} \dots$$

Die diskrete Ableitung und ihre Hauptfolgen

Satz Q2B: Pascals Dreieck als Hauptfolgenkette

Wir betrachten den Differenzenoperator (aka die diskrete Ableitung)

$$\Delta : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : f \mapsto \Delta f \quad \text{mit} \quad (\Delta f)(n) := f(n+1) - f(n).$$

Zum Eigenwert 0 sind die Haupträume der Stufe $r = 1, 2, 3, \dots$ dann

$$\text{Ker}(\Delta^r) = \langle f_k \mid k < r \rangle_{\mathbb{K}} \quad \text{mit} \quad f_k(n) = \binom{n}{k} \quad \text{und}$$

$$0 \xleftarrow{\Delta} f_0 \xleftarrow{\Delta} f_1 \xleftarrow{\Delta} f_2 \xleftarrow{\Delta} f_3 \xleftarrow{\Delta} f_4 \xleftarrow{\Delta} \dots$$

Der Verschiebeoperator und seine Hauptfolgen

$$s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : f \mapsto sf \quad \text{mit} \quad (sf)(n) = f(n+1).$$

$$f = (f(0), f(1), f(2), \dots) \mapsto sf = (f(1), f(2), f(3), \dots).$$

❓ Ist der Verschiebeoperator s linear über \mathbb{K} ? Ja, klar! (Sonst Übung!)

Aufgabe: Bestimmen Sie alle Haupträume $V_r = \text{Ker}(s - \lambda)^r$ für $r \in \mathbb{N}$. Nennen Sie eine Jordan-Basis von V_r und von $V = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} V_r \leq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Lösung: (1) Wir wissen $\text{Eig}(s, \lambda) = \langle f_0 \rangle_{\mathbb{K}}$ mit $f_0 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : n \mapsto \lambda^n$. (P247)

(2) Aus $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(s - \lambda) = 1$ folgt $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(s - \lambda)^r \leq r$ dank Q1F/Q2A.

(3) Wir inspirieren uns an der vorigen Aufgabe und betrachten

$$f_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : n \mapsto \binom{n}{k} \lambda^{n-k}.$$

Dank Pascals Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten finden wir:

$$(s - \lambda)f_k(n) \stackrel{\text{Def}}{=} \binom{n+1}{k} \lambda^{n+1-k} - \binom{n}{k} \lambda^{n+1-k} \stackrel{\text{H229}}{=} \binom{n}{k-1} \lambda^{n-(k-1)} \stackrel{\text{Def}}{=} f_{k-1}(n)$$

(4) Wir erhalten also auch hier die (unendlich lange) Hauptfolgenkette

$$0 \xleftarrow{s-\lambda} f_0 \xleftarrow{s-\lambda} f_1 \xleftarrow{s-\lambda} f_2 \xleftarrow{s-\lambda} f_3 \xleftarrow{s-\lambda} \dots$$

Der Verschiebeoperator und seine Hauptfolgen

Satz Q2c: lineare Rekursion und ihre Hauptfolgen \rightarrow Eigenfolgen P2s

Auf dem Folgenraum $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ betrachten wir den Verschiebeoperator

$$s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : f \mapsto sf \quad \text{mit} \quad (sf)(n) = f(n+1).$$

(1) Zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ sind die Haupträume der Stufe $r \in \mathbb{N}$ dann

$$\text{Ker}(s - \lambda)^r = \langle f_k \mid k < r \rangle_{\mathbb{K}} \quad \text{mit} \quad f_k(n) = \binom{n}{k} \lambda^{n-k} \quad \text{und}$$

$$0 \xleftarrow{s-\lambda} f_0 \xleftarrow{s-\lambda} f_1 \xleftarrow{s-\lambda} f_2 \xleftarrow{s-\lambda} f_3 \xleftarrow{s-\lambda} f_4 \xleftarrow{s-\lambda} \dots$$

(2) Anwendung auf Rekursion: Gegeben sei ein zerfallendes Polynom

$$P = X^n + p_1 X^{n-1} + \dots + p_n X^0 = (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_k)^{r_k}.$$

Dann hat $L = \text{Ker } P(s) \leq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ eine Basis aus Hauptvektorketten:

$$L \stackrel{\text{N3G}}{=} \text{Ker}(s - \lambda_1)^{r_1} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(s - \lambda_k)^{r_k}$$

Damit können wir jede lineare Rekursionsgleichung $P(s)f = 0$ lösen.

Der Verschiebeoperator und seine Hauptfolgen

Satz Q2c: lineare Rekursion und ihre Hauptfolgen → Eigenfolgen P2s

(3) Die Auswertung in $0, 1, 2, \dots, n - 1$ stiftet den \mathbb{K} -Isomorphismus

$$\text{pr} : L \xrightarrow{\simeq} \mathbb{K}^n : f \mapsto (f(0), f(1), f(2), \dots, f(n - 1)).$$

Damit können wir jede lineare Rekursion mit Anfangswerten lösen.

Erstes Anwendungsbeispiel zur linearen Rekursion

Aufgabe: (1) Finden Sie eine geschlossene Formel für alle Folgen

$$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad u_n = 6u_{n-1} - 12u_{n-2} + 8u_{n-3} \quad \text{für} \quad n \geq 3.$$

(2) Lösen Sie dies speziell für die Anfangswerte $u = (1, 2, 3, \dots)$.

Lösung: (1) Im Folgenraum $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ über \mathbb{C} betrachten wir den Unterraum

$$L = \{ u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+3} - 6u_{n+2} + 12u_{n+1} - 8u_n = 0 \},$$

also $L = \text{Ker } P(s)$ mit $P = X^3 - 6X^2 + 12X - 8 = (X - 2)^3$.

Satz Q2c beschert uns die explizite Lösung $L = \text{Ker}(s - 2)^3$:

Jede P -rekursive Folge $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine Linearkombination

$$u_n = a 2^n + b n 2^{n-1} + c \binom{n}{2} 2^{n-2}.$$

(2) Wir erhalten speziell $u = (1, 2, 3, \dots)$ mit $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, also

$$u_n = 2^{n-3} (8 + n - n^2).$$

Zweites Anwendungsbeispiel zur linearen Rekursion

Aufgabe: (1) Finden Sie eine geschlossene Formel für alle Folgen

$$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} - u_{n-3} \quad \text{für} \quad n \geq 3.$$

(2) Für welche Startwerte $u = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ bleibt die Folge beschränkt?

Lösung: (1) Im Folgenraum $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ über \mathbb{C} betrachten wir den Unterraum

$$L = \{ u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0 \}.$$

also $L = \text{Ker } P(s)$ mit $P = X^3 - X^2 - X + 1 = (X - 1)^2(X + 1)$.

Satz Q2c besichert uns die Lösung $L = \text{Ker}(s - 1)^2 \oplus \text{Ker}(s + 1)$:

Jede P -rekursive Folge $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine Linearkombination

$$u_n = a + bn + c(-1)^n.$$

(2) Die Folge u ist beschränkt gdw $b = 0$. Hingegen sind $a, c \in \mathbb{C}$ beliebig.

Beschränkte Lösungen sind die 2-periodischen: $u = (u_0, u_1, u_0, u_1, \dots)$.

Was sind lineare Differentialgleichungen?

In vielen einfachen Anwendungen sind zunächst **Zahlen** gesucht...

Beispiel: Gesucht ist $x \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $x^2 + 1 = 0$.

Für $x \in \mathbb{R}$ gibt es keine Lösung; für $x \in \mathbb{C}$ gibt es genau zwei, $x = \pm i$.

In vielen fortgeschrittenen Anwendungen sind **Funktionen** gesucht...

Beispiel: Gesucht ist $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $u'' + u = 0$.

Über \mathbb{C} können wir Lösungen erraten, besser systematisch berechnen:

$$u_1(t) = e^{+it} \quad \text{und} \quad u_2(t) = e^{-it}$$

Auch jede Linearkombination $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ erfüllt die Gleichung.

Gibt es weitere Lösungen? Nein! Wir haben also den \mathbb{C} -Lösungsraum:

$$L_{\mathbb{C}} := \{ u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid u'' + u = 0 \} \stackrel{!}{=} \langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{C}}$$

Oft sind reelle Lösungen gefragt. Wir finden den \mathbb{R} -Lösungsraum:

$$L_{\mathbb{R}} := \{ u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid u'' + u = 0 \} \stackrel{!}{=} \langle \cos, \sin \rangle_{\mathbb{R}}$$

Was sind lineare Differentialgleichungen?

Definition Q2D: lineare Differentialgleichung über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Wir betrachten eine **lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung:**

$$u^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) u^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t) u'(t) + a_0(t) u(t) = b(t)$$

Gegeben ist das Definitionsintervall $I \subseteq \mathbb{R}$, darauf die **Koeffizienten** $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{K}$ und die **rechte Seite** $b : I \rightarrow \mathbb{K}$; alle seien stetig. Gesucht sind alle Lösungen $u \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$, die obige Gleichung erfüllen.

Beim **Anfangswertproblem** sind zudem die Anfangswerte zu einer Zeit $t_0 \in I$ vorgegeben durch $(u(t_0), u'(t_0), \dots, u^{(n-1)}(t_0)) \stackrel{!}{=} v \in \mathbb{K}^n$.

Sind a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 konstant, so bündeln wir sie zum **charakteristischen Polynom** $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]_n^1$. Damit prägnant:

$$P(\partial) u(t) = b(t)$$

Für $b = 0$ erhalten wir die **homogene D Gleichung** $P(\partial) u(t) = 0$.

Die Ableitung auf Polynomen und ihre Hauptfunktionen

$$\partial : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] : F = \sum_{i=0}^n f_k X^k \mapsto \partial F = \sum_{k=1}^n k f_k X^{k-1}$$

Aufgabe: Bestimmen Sie alle Haupträume $V_r = \text{Ker}(\partial - \lambda)^r$ für $r \in \mathbb{N}$.

Lösung: (1) Wir lösen die Eigengleichung $\partial F = \lambda F$ für $\lambda \in \mathbb{K}$.

Sei $\lambda \neq 0$. Für $F \neq 0$ gilt $\deg(\partial F) < \deg(\lambda F)$, also $\text{Eig}(\partial, \lambda) = \{0\}$.

Somit bleibt nur $\lambda = 0$ als einzig möglicher Eigenwert von ∂ .

(2) Charakteristik $\text{char } \mathbb{K} = 0$: Wir finden $\text{Ker}(\partial) = \langle X^0 \rangle_{\mathbb{K}}$.

(3) Aus $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(\partial) = 1$ folgt $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(\partial^r) \leq r$ für $r \in \mathbb{N}$. (Q1F/Q2A)

(4) Die Polynome $F_k = X^k / k! \in \mathbb{K}[X]$ bilden eine Hauptvektorkette:

$$0 \xleftarrow{\partial} F_0 \xleftarrow{\partial} F_1 \xleftarrow{\partial} F_2 \xleftarrow{\partial} F_3 \xleftarrow{\partial} \dots$$

(5) Diese ist eine Jordan-Basis der Polynome:

$$\text{Ker}(\partial^r) = \langle F_k \mid k < r \rangle_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}[X]_{<r}$$

Die Ableitung auf Polynomen und ihre Hauptfunktionen

(1) Charakteristik $\text{char } \mathbb{K} = p > 0$ verhält sich anders!

$$\text{Ker}(\partial) = \langle X^0, X^p, X^{2p}, X^{3p}, \dots \rangle_{\mathbb{K}}^!$$

(2) Für die Polynome $F_{m,k} = X^{mp+k}/k!$ mit $k = 0, 1, \dots, p-1$ gilt:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xleftarrow{\partial} & F_{0,0} & \xleftarrow{\partial} & F_{0,1} & \xleftarrow{\partial} & \dots & \xleftarrow{\partial} & F_{0,p-1} \\ 0 & \xleftarrow{\partial} & F_{1,0} & \xleftarrow{\partial} & F_{1,1} & \xleftarrow{\partial} & \dots & \xleftarrow{\partial} & F_{1,p-1} \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & \xleftarrow{\partial} & F_{m,0} & \xleftarrow{\partial} & F_{m,1} & \xleftarrow{\partial} & \dots & \xleftarrow{\partial} & F_{m,p-1} \\ \vdots & & & & & & & & \end{array}$$

Exponentialreihe – als formale Potenzreihe

Sei $\mathbb{K} \geq \mathbb{Q}$ ein Ring und $\mathbb{K}[[X]]$ der Potenzreihenring mit der Ableitung

$$\partial : \mathbb{K}[[X]] \rightarrow \mathbb{K}[[X]] : f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k X^k \mapsto f' = \sum_{k=1}^{\infty} k f_k X^{k-1}.$$

Aufgabe: Lösen Sie (1) in $\mathbb{K}[X]$ und (2) in $\mathbb{K}[[X]]$ die Gleichung

$$f(0) = 1 \text{ und } f' = f.$$

Lösung: (1) Das ist unmöglich! Aus $f \in \mathbb{K}[X]$ und $f' = f$ folgt $f = 0$.

(2) Aus $f_0 = 1$ und $f' = f$ folgt $f_{k-1} = k f_k$ für alle $k \geq 1$, also $f_k = 1/k!$

$$\exp(X) := \sum_{k \in \mathbb{N}} X^k / k! = 1 + X + X^2/2 + X^3/3! + \dots$$

Exponentialfunktion – als reelle Funktion!

Satz Q2E: Exponentialfunktion

→ Analysis ♥

(0) Die Exponentialreihe konvergiert und definiert folgende Funktionen:

$$\exp : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0} \quad : \quad \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k / k!$$

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{\times} \quad : \quad \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / k!$$

$$\exp : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \quad : \quad \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k / k!$$

$$\exp : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \quad : \quad \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k / k!$$

(1) Für alle A, B mit $AB = BA$ gilt $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$.

Speziell für $B = -A$ folgt daraus $\exp(A) \exp(-A) = \exp(0) = 1$.

Demnach ist $\exp(A)$ invertierbar mit $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

(2) Für $f(t) = \exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k t^k / k!$ gilt $f'(t) = A \exp(At)$.

Die Ableitung und ihre Hauptfunktionen

Auf $\mathcal{C}^\infty = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben wir den Ableitungsoperator

$$\partial : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{C}^\infty : f \mapsto f'.$$

❓ Ist die Abbildung ∂ linear über \mathbb{K} ? Ja, klar! (Übung/Analysis)

Aufgabe: Bestimmen Sie die Haupträume $V_r = \text{Ker } \partial^r$ für $r \in \mathbb{N}$.
Nennen Sie eine Jordan-Basis von V_r und von $V = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} V_r$.

Lösung: (1) Es gilt $f \in \text{Ker } \partial$ gdw $f = 0$. (Warum? ZWS, HDI, Q3c)

(2) Aus $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } \partial = 1$ folgt $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } \partial^r \leq r$ für alle $r \in \mathbb{N}$. (Q1F/Q2A)

(3) Wir nutzen die faktorielle Monombasis: $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : f_k(t) = t^k/k!$.

(4) Wir erhalten so die (unendlich lange) Hauptfunktionenkette

$$0 \xleftarrow{\partial} f_0 \xleftarrow{\partial} f_1 \xleftarrow{\partial} f_2 \xleftarrow{\partial} f_3 \xleftarrow{\partial} \dots$$

(5) Diese ist eine Jordan-Basis der Polynomfunktionen:

$$V_r = \text{Ker } \partial^r = \langle f_k \mid k < r \rangle_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}[t]_{<r}$$

$$V = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} V_r = \langle f_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}[t]$$

Die Ableitung und ihre Hauptfunktionen

Aufgabe: Bestimmen Sie alle Haupträume $V_r = \text{Ker}(\partial - \lambda)^r$ für $r \in \mathbb{N}$. Nennen Sie eine Jordan-Basis von V_r und von $V = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} V_r \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Lösung: (1) Die Eigengleichung $\partial f = \lambda f$ wird gelöst durch

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : f(t) = c e^{\lambda t} \quad \text{mit } c \in \mathbb{K}.$$

Gibt es weitere Lösungen? Nein! (Warum? ZWS, HDI, Q3c)

$$\text{Eig}(\partial, \lambda) = \langle f_0 \rangle_{\mathbb{K}} \quad \text{mit } f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : t \mapsto e^{\lambda t}$$

(2) Aus $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(\partial - \lambda) = 1$ folgt $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(\partial - \lambda)^r \leq r$ dank Q1F/Q2A.

(3) Die vorigen Aufgaben inspirieren folgende Hauptfunktionen:

$$f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : t \mapsto e^{\lambda t} t^k / k!$$

$$\partial f_k(t) = \lambda e^{\lambda t} t^k / k! + e^{\lambda t} t^{k-1} / (k-1)! = \lambda f_k(t) + f_{k-1}(t)$$

(4) Wir erhalten auch hier eine unendlich lange Hauptfunktionenkette:

$$0 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_0 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_1 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_2 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_3 \xleftarrow{\partial - \lambda} \dots$$

Die Ableitung und ihre Hauptfunktionen

Satz Q2F: Hauptfunktionen des Ableitungsoperators

Auf $\mathcal{C}^\infty = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben wir den Ableitungsoperator

$$\partial : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{C}^\infty : f \mapsto f'.$$

(1) Zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ sind die Haupträume der Stufe $r \in \mathbb{N}$ dann

$$\text{Ker}(\partial - \lambda)^r = \langle f_k \mid k < r \rangle_{\mathbb{K}} \quad \text{mit} \quad f_k(t) = e^{\lambda t} t^k / k! \quad \text{und}$$

$$0 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_0 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_1 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_2 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_3 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_4 \xleftarrow{\partial - \lambda} \dots$$

(2) Anwendung auf DGleichungen: Gegeben sei ein zerfallendes Polynom

$$P = X^n + p_1 X^{n-1} + \dots + p_n X^0 = (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_k)^{r_k}.$$

Dann hat $L = \text{Ker } P(\partial) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ eine Basis aus Hauptvektorketten:

$$L \stackrel{\text{N3G}}{=} \text{Ker}(\partial - \lambda_1)^{r_1} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(\partial - \lambda_k)^{r_k}$$

Damit können wir jede lineare Differentialgleichung $P(\partial)f = 0$ lösen.

Die Ableitung und ihre Hauptfunktionen

Satz Q2F: Hauptfunktionen des Ableitungsoperators

(3) Die Auswertung zum Zeitpunkt $t = 0$ stiftet den \mathbb{K} -Isomorphismus

$$q : L \simeq \mathbb{K}^n : f \mapsto (f(0), f'(0), f''(0), \dots, f^{(n-1)}(0)).$$

Damit lösen wir jede lineare Differentialgleichung mit Anfangswerten.

(4) Wir vergleichen ∂ und s mittels $T : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : f \mapsto (f^{(n)}(0))_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) & \text{Ker } P(\partial) & [t \mapsto e^{\lambda t} t^k / k!] \\
 T \downarrow & & T \downarrow & T \downarrow \cong & T \downarrow \\
 \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{s} & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \text{Ker } P(s) & [n \mapsto \binom{n}{k} \lambda^{n-k}]
 \end{array}$$

Es gilt $T \circ \partial = s \circ T$, also $T \circ P(\partial) = P(s) \circ T$ und $T(\text{Ker } P(\partial)) \leq \text{Ker } P(s)$.

Dabei schickt T jede Hauptfunktion $t \mapsto e^{\lambda t} t^k / k!$ auf die Hauptfolge $n \mapsto \binom{n}{k} \lambda^{n-k}$. Somit ist $T_P : \text{Ker } P(\partial) \rightarrow \text{Ker } P(s)$ ein Isomorphismus.

Erstes Anwendungsbeispiel zu linearen DGLen

Aufgabe: (1) Finden Sie alle \mathcal{C}^∞ -Funktionen $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$u''' - 6u'' + 12u' - 8u = 0.$$

(2) Lösen Sie dies für die Anfangswerte $u(0) = u'(0) = 0$ und $u''(0) = 1$.

Lösung: (1) Im Funktionenraum $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ über \mathbb{C} betrachten wir den Lösungsraum $L = \text{Ker } P(\partial)$ mit $P = X^3 - 6X^2 + 12X - 8 = (X - 2)^3$.

Dank unserem vorigen Satz Q2F wissen wir:

$$L = \langle t \mapsto e^{2t}, e^{2t} t, e^{2t} t^2/2 \rangle_{\mathbb{C}}$$

Jede Lösung $u \in L$ schreibt sich demnach

$$u(t) = e^{2t}(a + bt + ct^2/2)$$

mit eindeutigen Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{C}$. (2) Die gewünschten Anfangswerte erreichen wir durch $a = 0, b = 0, c = 1$, also

$$u(t) = e^{2t} t^2/2.$$

Konjugiert-komplexe Lösungen

Zu lösen sei über \mathbb{R} die homogene lineare Differentialgleichung

$$P(\partial) u(t) = 0.$$

Hierzu sei $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ ein **reelles Polynom**.
Ist $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Lösung, so auch die konjugierte Funktion $\bar{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$P(\partial) u = 0 \quad \stackrel{\text{conj}}{\iff} \quad P(\partial) \bar{u} = 0$$

Ist $\lambda = \sigma + i\omega$ mit $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ und $\omega \neq 0$ eine k -fache Nullstelle von P ,
so hat unsere DG hat die $2k$ **konjugiert-komplexen Lösungen**

$$\begin{aligned} &e^{\lambda t}, e^{\lambda t} t, \dots, e^{\lambda t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \\ &e^{\bar{\lambda} t}, e^{\bar{\lambda} t} t, \dots, e^{\bar{\lambda} t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}. \end{aligned}$$

Von komplexen zu reellen Lösungen

Anwendungen erfordern oft **reelle Lösungen** $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Basiswechsel:

$$\left. \begin{array}{l} e^{\lambda t} = e^{\sigma t} [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] \\ e^{\bar{\lambda} t} = e^{\sigma t} [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)] \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} e^{\sigma t} \cos(\omega t) = \frac{1}{2} [e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda} t}] \\ e^{\sigma t} \sin(\omega t) = \frac{1}{2i} [e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda} t}] \end{array} \right.$$

Wir linearkombinieren so aus den komplexen die **reellen Lösungen**

$$\begin{array}{l} e^{\sigma t} \cos(\omega t), e^{\sigma t} \cos(\omega t) t, \dots, e^{\sigma t} \cos(\omega t) \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \\ e^{\sigma t} \sin(\omega t), e^{\sigma t} \sin(\omega t) t, \dots, e^{\sigma t} \sin(\omega t) \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}. \end{array}$$

Anwendungsbeispiel: komplex vs reell

Aufgabe: Finden Sie ein reelles Fundamentalsystem der Gleichung

$$u^{(4)}(t) + 8u''(t) + 16u(t) = 0.$$

Lösung: Das char. Polynom unserer Gleichung $P(\partial)u = 0$ ist

$$P(X) = X^4 + 8X^2 + 16 = (X^2 + 4)^2 = (X - 2i)^2(X + 2i)^2.$$

Ein komplexes Fundamentalsystem ist

$$e^{2it}, \quad e^{-2it}, \quad t e^{2it}, \quad t e^{-2it}.$$

Hieraus gewinnen wir das reelle Fundamentalsystem

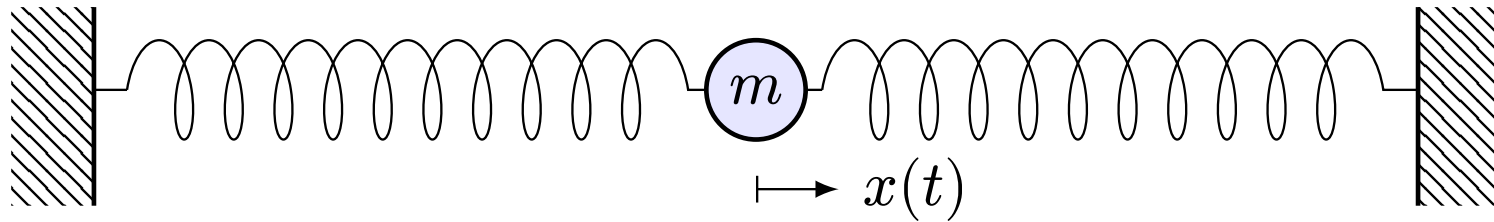
$$\cos(2t), \quad \sin(2t), \quad t \cos(2t), \quad t \sin(2t).$$

Jede reelle Lösung $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat demnach die Form

$$u(t) = \cos(2t)(\alpha_1 + \alpha_2 t) + \sin(2t)(\alpha_3 + \alpha_4 t)$$

mit eindeutig bestimmten Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$.

Schwingung einer Masse an einer Feder:



Zeit $t \in \mathbb{R}$, Auslenkung $x(t)$ aus Ruhelage, Rückstellkraft $F_1 = -k x$, zusätzlich noch Reibung / viskoser Strömungswiderstand $F_2 = -c \dot{x}$.

Newtons Bewegungsgesetz $m \ddot{x} = F_1 + F_2$, also $m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0$.

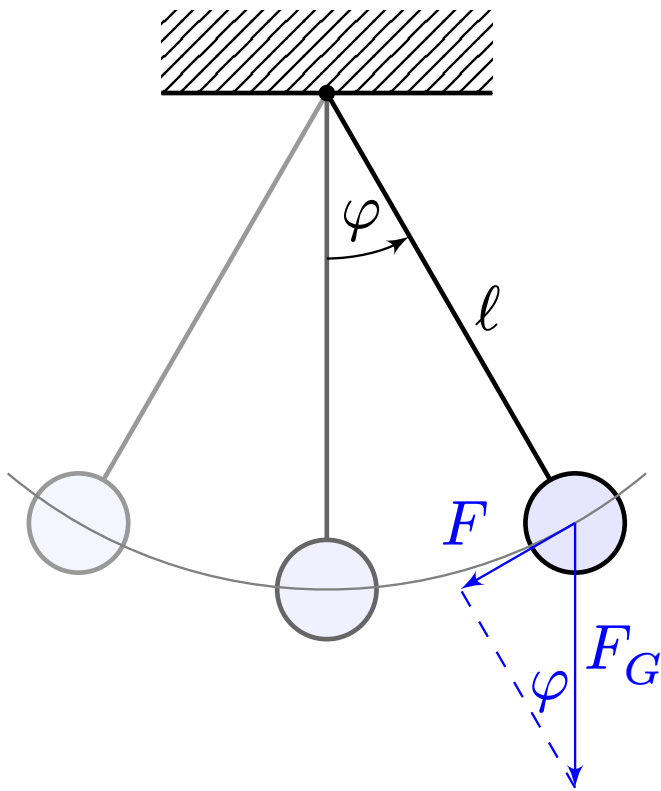
Dies führt zu einer **linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung**

$$\ddot{x}(t) + 2\delta \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

mit konstanten Koeffizienten $\delta = c/2m \geq 0$ und $\omega_0^2 = k/m$, $\omega_0 \geq 0$.

Bei äußerer Anregung durch eine Kraft $F(t) = m f(t)$ gilt:

$$\ddot{x}(t) + 2\delta \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$



Die Rückstellkraft ist hier nicht-linear:

$$F(t) = -m \cdot g \cdot \sin \varphi(t)$$

Newtons Bewegungsgesetz $F(t) = m \ell \ddot{\varphi}(t)$ führt zu

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell} \sin \varphi(t).$$

Freie harmonische Schwingung

Aufgabe: Finden Sie alle Lösungen $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0.$$

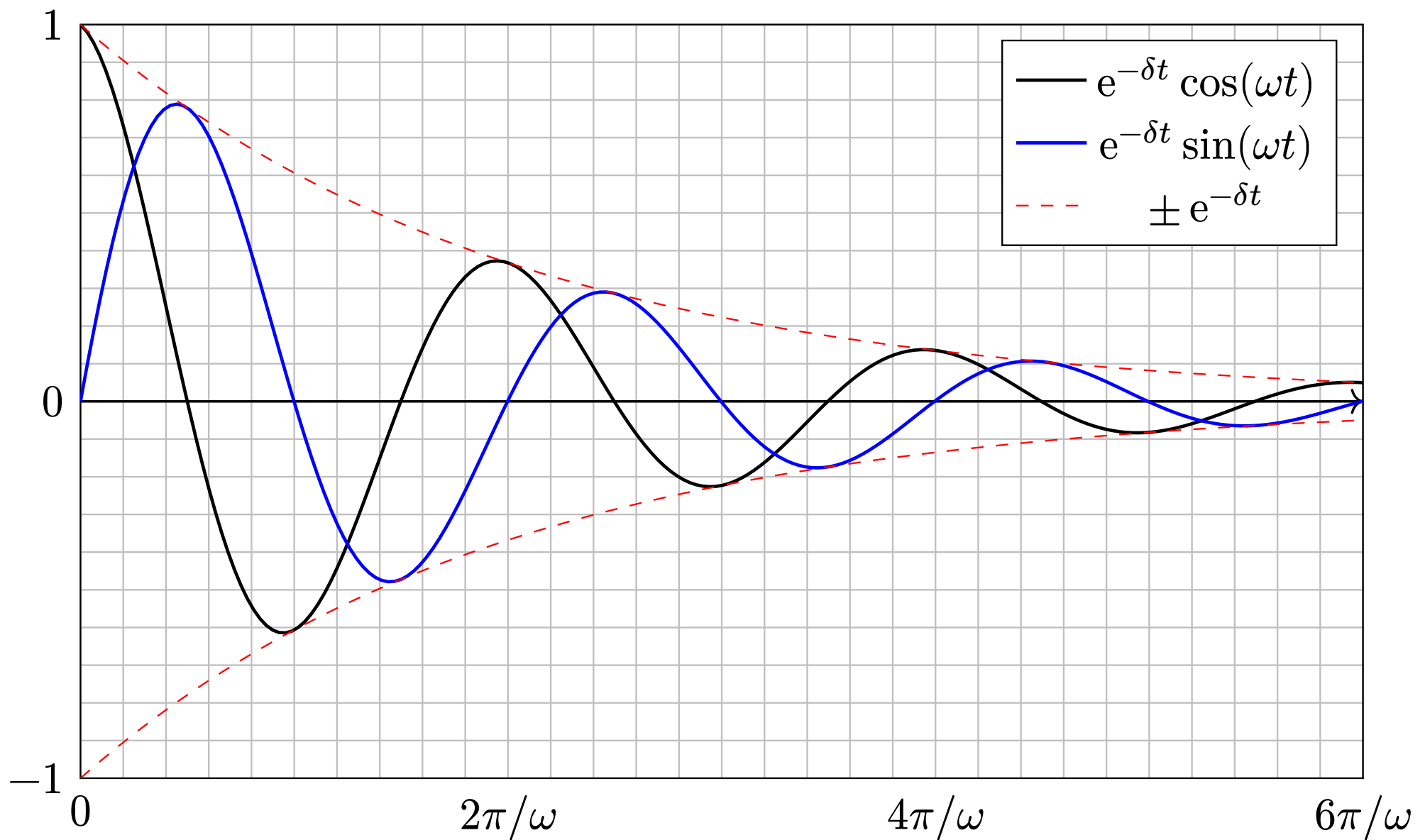
Lösung: Wir lösen $P(\partial) u = 0$ für $P = X^2 + 2\delta X + \omega_0^2$. Eigenwerte:

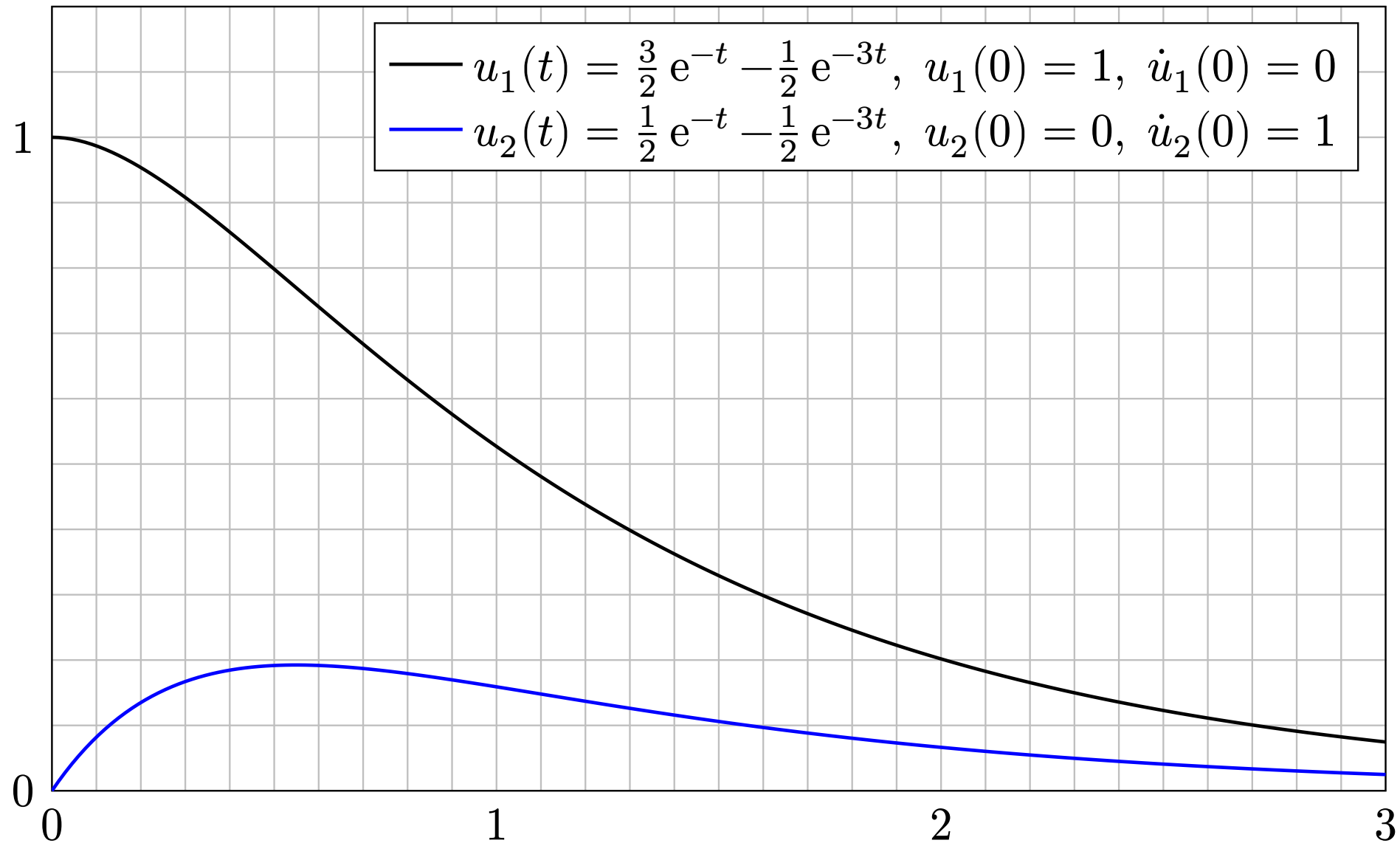
$$\lambda = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{C}$$

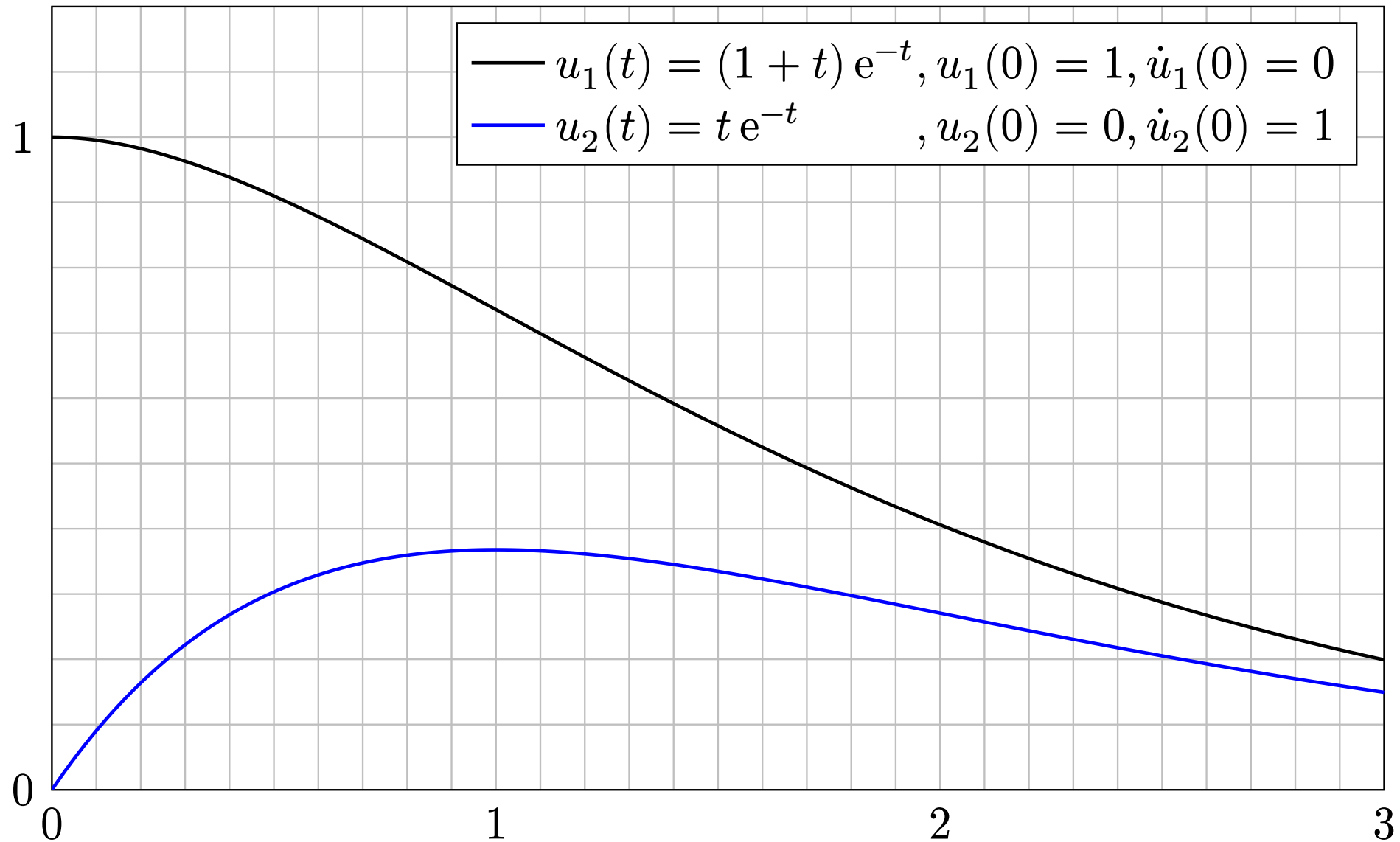
$\delta < \omega_0$: **schwache Dämpfung**, zwei komplex-konjugierte Nullstellen

$\delta > \omega_0$: **starke Dämpfung**, zwei reelle Nullstellen $\lambda_1 < -\delta < \lambda_2 < 0$

$\delta = \omega_0$: **kritische Dämpfung**, doppelte reelle Nullstelle $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$



Starke Dämpfung: $\delta > \omega_0$ 

Kritische Dämpfung: $\delta = \omega_0$ 

Erzwungene harmonische Schwingung

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = a \cos(\omega_1 t)$$

Aufgabe: Gesucht ist $u(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$ mit Amplitude A und Phase φ .

Lösung: Dies ist der Realteil der komplexen Differentialgleichung

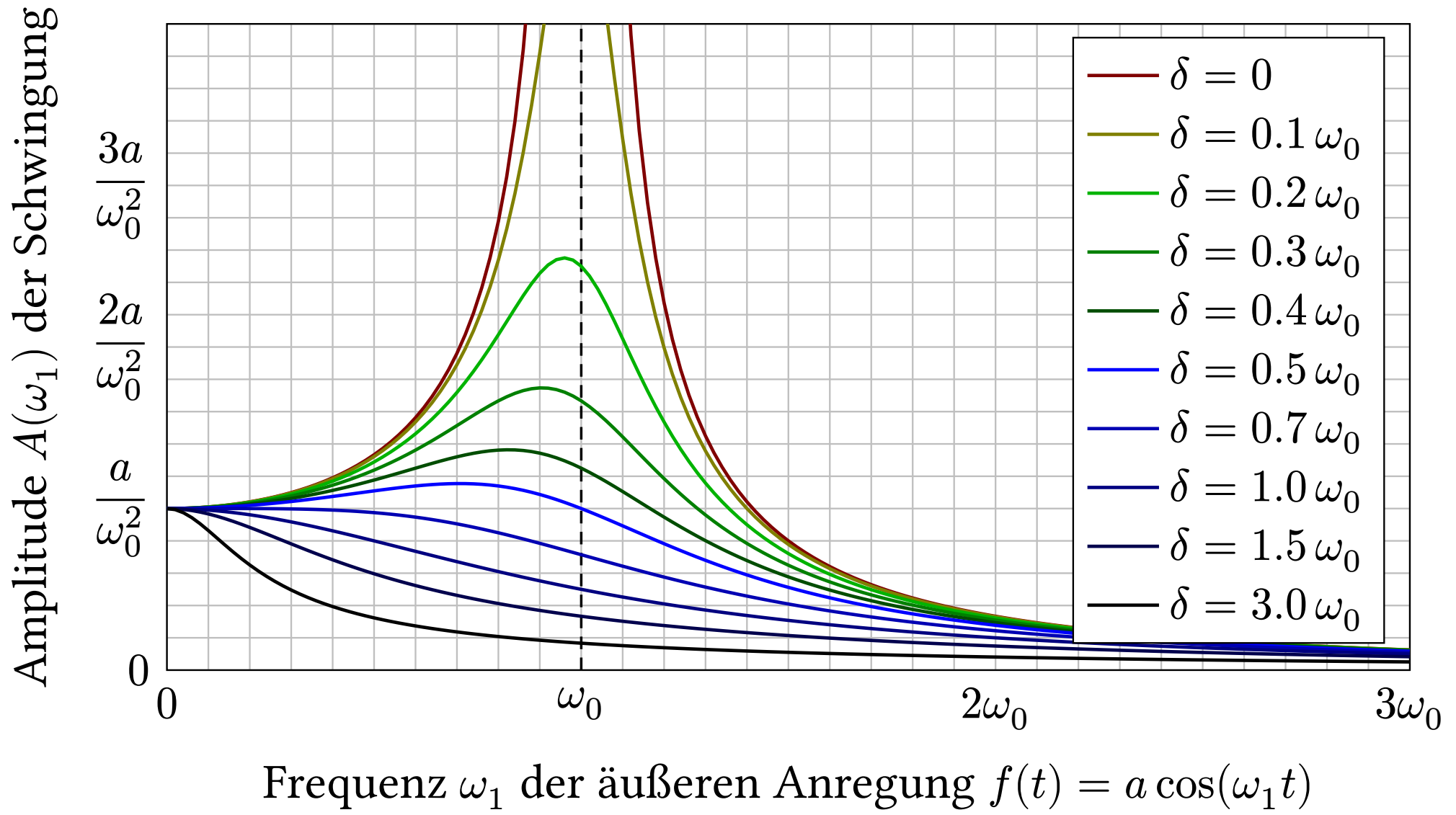
$$\ddot{z}(t) + 2\delta \dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = a e^{i\omega_1 t}.$$

Der Exponentialansatz $z(t) = c e^{i\omega t}$ führt uns zur Gleichung

$$[-\omega^2 + 2\delta i\omega + \omega_0^2] c e^{i\omega t} \stackrel{!}{=} a e^{i\omega_1 t}.$$

Damit finden wir $\omega = \omega_1$ und $c = a/(\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2\delta i\omega_1) \stackrel{!}{=} A e^{-i\varphi}$.

Erzwungene harmonische Schwingung



Zusammenfassung: freie harmonische Schwingung

Satz Q2G: freie harmonische Schwingung

(1) Die **homogene lineare Differentialgleichung**

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0$$

hat einen zweidimensionalen Lösungsraum; die allgemeine Lösung ist

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \quad \text{mit freien Konstanten } c_1, c_2 \in \mathbb{K}$$

$$= \begin{cases} e^{-\delta t} [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)] & \text{für } \delta < \omega_0 \text{ und } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \\ e^{-\delta t} [c_1 e^{-\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}] & \text{für } \delta > \omega_0 \text{ und } \lambda = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \\ e^{-\delta t} [c_1 + c_2 t] & \text{für } \delta = \omega_0 \text{ (kritische Dämpfung)}. \end{cases}$$

Anfangswerte $u(t_0)$ und $\dot{u}(t_0)$ können beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten c_1, c_2 eindeutig fest (und umgekehrt).

Zusammenfassung: erzwungene harmonische Schwingung

Satz Q2c: erzwungene harmonische Schwingung

(2) Die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = a \cos(\omega_1 t)$$

hat einen zweidim. affinen Lösungsraum; die allgemeine Lösung ist

$$u(t) = u_0(t) + c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \quad \text{mit freien Konstanten } c_1, c_2 \text{ und}$$

$$u_0(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_1 t - \varphi) & \text{für } \delta > 0 \text{ oder } \omega_1 \neq \omega_0 \text{ (generisch Q249),} \\ \frac{at}{2\omega_1} \sin(\omega_1 t) & \text{für } \delta = 0 \text{ und } \omega_1 = \omega_0 \text{ (Resonanz Q251).} \end{cases}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

Freie und erzwungene harmonische Schwingung

Typische Beispiele: Bei **schwacher Dämpfung** $0 < \delta < \omega_0$ gilt

$$u(t) = \underbrace{A \cos(\omega_1 t - \varphi)}_{\text{periodische Lösung}} + \underbrace{e^{-\delta t} [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)]}_{\text{Einschwingvorgang} \rightarrow 0 \text{ f\"ur } t \rightarrow \infty}.$$

Der Sonderfall $\delta = 0$ und $\omega_1 = \omega_0$ führt zur **Resonanz(katastrophe)**:

$$u(t) = \underbrace{\frac{at}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t)}_{\text{Amplitude wächst unbeschränkt}} + \underbrace{c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)}_{\text{periodisch, insbesondere beschränkt}}$$

Affin-lineare Struktur des Lösungsraums

Satz Q2H: Struktursatz für lineare Differentialgleichungen

Gegeben seien $P \in \mathbb{K}[X]_n^1$ und $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ stetig auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Wir untersuchen die Lösungsmenge $L = \{u \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}) \mid P(\partial)u = b\}$.

(0) **Globale Existenz und Eindeutigkeit:** Zu jedem Anfangsdatum $(t_0, v_0, \dots, v_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung $u \in L$ mit $u(t_0) = v_0, \dots, u^{(n-1)}(t_0) = v_{n-1}$. Wir haben also die Bijektion

$$\Psi_{t_0} : L \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^n : u \mapsto (u(t_0), u'(t_0), \dots, u^{(n-1)}(t_0)).$$

(1) $L_0 = \{u \mid P(\partial)u = 0\}$ ist ein **\mathbb{K} -linearer U Raum** der Dimension n . Wir finden ein **Fundamentalsystem** $u_1, \dots, u_n \in L_0$, etwa dank Q2F:

$$L_0 = \{c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\} \cong \mathbb{K}^n$$

(2) $L = \{u \mid P(\partial)u = b\}$ ist ein **\mathbb{K} -affiner U Raum** der Dimension n . Für jede **Partikulärlösung** $u_0 \in L$, etwa dank Q2I/Q2J, gilt demnach:

$$L = u_0 + L_0 = \{u_0 + c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\}$$

Lösungsformel für exponentielle rechte Seiten

Satz Q2i: Lösungsformel für exponentielle rechte Seiten

Sei $P \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$P(\partial) u(t) = e^{\mu t}.$$

(0) Gilt $P(\mu) \neq 0$, so haben wir die **Eigenlösung**

$$u_0(t) = e^{\mu t} / P(\mu).$$

(1) Ist μ eine k -fache Nullstelle des Polynoms P , so sprechen wir von **k -facher Resonanz** und erhalten die **Hauptlösung**

$$u_0(t) = e^{\mu t} t^k / P^{(k)}(\mu).$$

(2) Dank **Superposition** lösen wir damit auch rechte Seiten der Form

$$e^{\sigma t} \cos(\omega t) = \frac{1}{2} [e^{(\sigma+i\omega)t} + e^{(\sigma-i\omega)t}],$$

$$e^{\sigma t} \sin(\omega t) = \frac{1}{2i} [e^{(\sigma+i\omega)t} - e^{(\sigma-i\omega)t}].$$

Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten

Satz Q2j: Greensche Fundamentallösung und Lösungsformel

Sei $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]_n^1$ ein Polynom und $b : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{K}$ stetig. Zu lösen ist die Differentialgleichung

$$P(\partial) x(t) = b(t).$$

Die homogene Gleichung $P(\partial) u = 0$ hat genau eine Lösung $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ mit den Anfangswerten $u(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0$ und $u^{(n-1)}(0) = 1$.

Wir nennen u die **Greensche Fundamentallösung**. Hieraus erhalten wir eine Lösung der inhomogenen Gleichung $P(\partial) x = b$ durch **Faltung**:

$$x(t) = \int_{\tau=t_0}^t u(t - \tau) b(\tau) d\tau.$$

Was sind Differentialgleichungssysteme?

In vielen Anwendungen geht es um Größen $x_1(t), \dots, x_n(t) \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, deren Entwicklung durch **Differentialgleichungen** beschrieben wird:

$$\begin{cases} x'_1(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \vdots \\ x'_n(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{cases}$$

Mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $f = (f_1, \dots, f_n)$ bündeln wir dies prägnant zu:

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

Newtons Himmelsmechanik: die Bewegungsgleichung

Aufgabe: Nennen Sie die Bewegungsgleichung für Körper $k = 1, \dots, n$ mit Masse $m_k > 0$, Position $u_k(t) \in \mathbb{R}^3$ und Geschwindigkeit $v_k(t) \in \mathbb{R}^3$.

Lösung: Newtons Gravitationsgesetz ergibt die Differentialgleichungen

$$\dot{u}_k \stackrel{(0)}{=} v_k, \quad \dot{v}_k \stackrel{(1)}{=} f_k(u) \stackrel{(2)}{=} \sum_{j \neq k} \gamma m_j (u_j - u_k) / |u_j - u_k|^3.$$

Vorgegeben sind die Anfangsdaten $u_k(0)$ und $v_k(0)$ zur Zeit $t = 0$.

Als Lösung gesucht ist die Bewegung $(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) : [0, T[\rightarrow \mathbb{R}^{6n}$.

- ☺ Den Fall $n = 2$ lösen Kegelschnitte: Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln.
- ☹ Für $n \geq 3$ lässt sich dieses DGSsystem i.A. nicht geschlossen lösen!
- ☺ Euler-Verfahren: diskrete Zeitschritte $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$,

$$u_k(t_{i+1}) \approx u_k(t_i) + v_k(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i),$$

$$v_k(t_{i+1}) \approx v_k(t_i) + f_k(u) \cdot (t_{i+1} - t_i).$$

Was sind lineare Differentialgleichungssysteme?

Definition Q3A: lineares Differentialgleichungssystem über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Jedes **lineare Differentialgleichungssystem** ist von folgender Form:

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

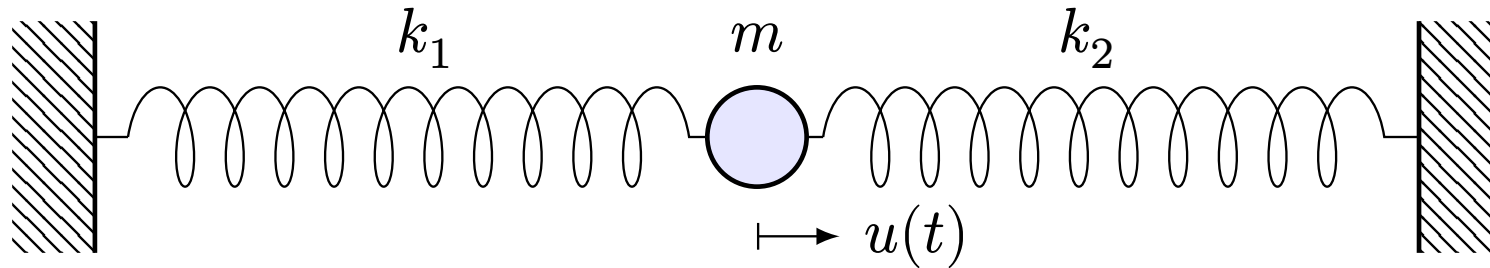
Gegeben sind hier die **Koeffizienten** $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{K}$ und die **rechten Seiten** $b_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ als stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, gebündelt:

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

Gesucht sind als **Lösungen** alle Funktionen $x : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ in $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$, die die Gleichung $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ in jedem Punkt $t \in I$ erfüllen.

Beim **Anfangswertproblem** ist zudem $x(t_0) = v \in \mathbb{K}^n$ vorgegeben.

Für $b = 0$ erhalten wir die **homogene D Gleichung** $x'(t) = A(t)x(t)$.



Aufgabe: Formulieren und lösen Sie den harmonischen Oszillator...

- (1) als eine eindimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung,
- (2) als ein zweidim. Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

Lösung: (1) Zeit $t \in \mathbb{R}$, Position $u(t) \in \mathbb{R}$, Geschwindigkeit $\dot{u}(t) \in \mathbb{R}$, Beschleunigung $\ddot{u}(t) \in \mathbb{R}$, Kraft $-\omega_0^2 u(t) - 2\delta \dot{u}(t)$, Bewegungsgesetz:

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0$$

Lösung $u(t) = e^{-\delta t} [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)]$ mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \in \mathbb{R}_{>0}$.

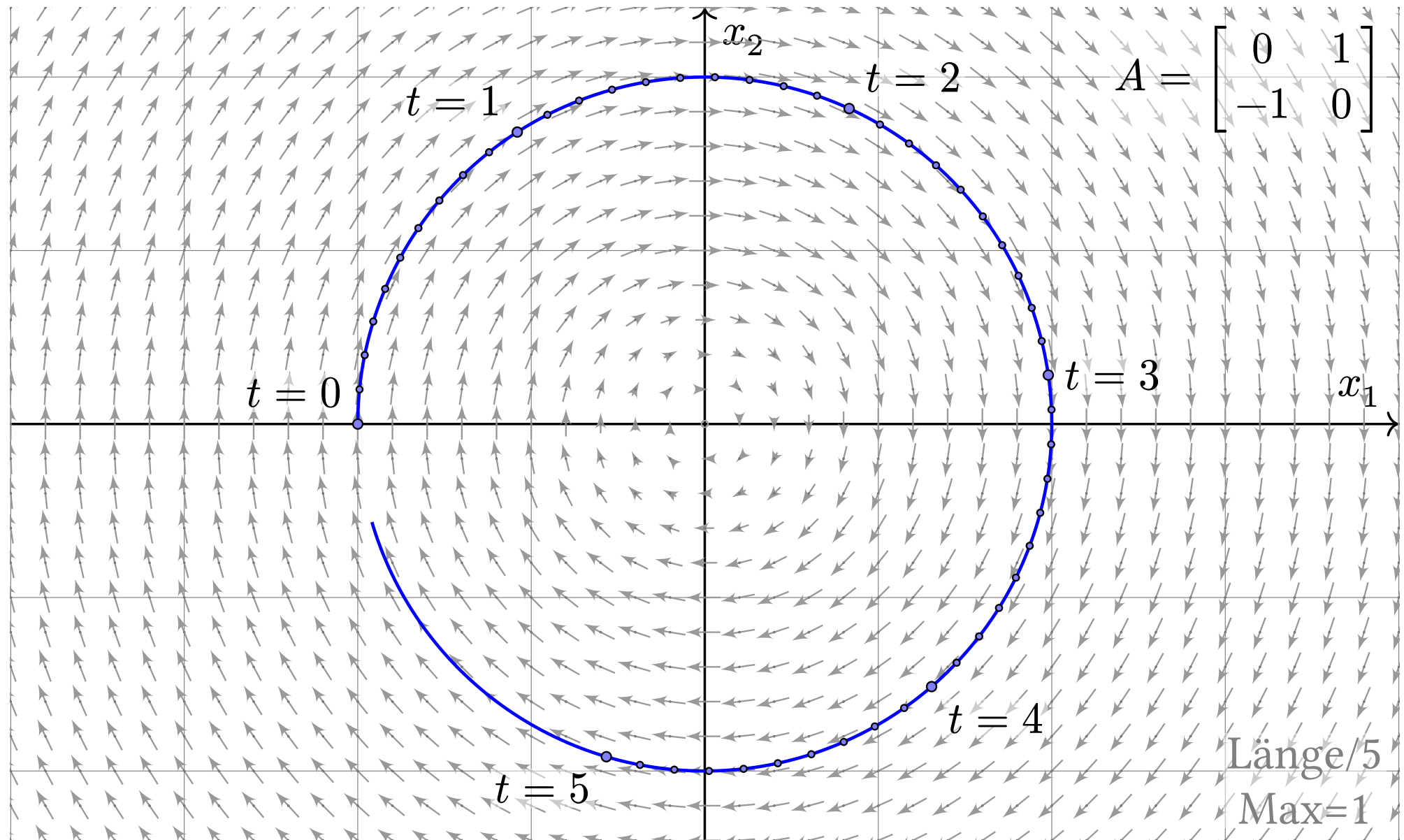
(2) Zustand $(x_1(t), x_2(t)) = (u(t), \dot{u}(t))$, Zustandsraum \mathbb{R}^2 , DGSystem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - 2\delta x_2 \end{array} \right\} \iff \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

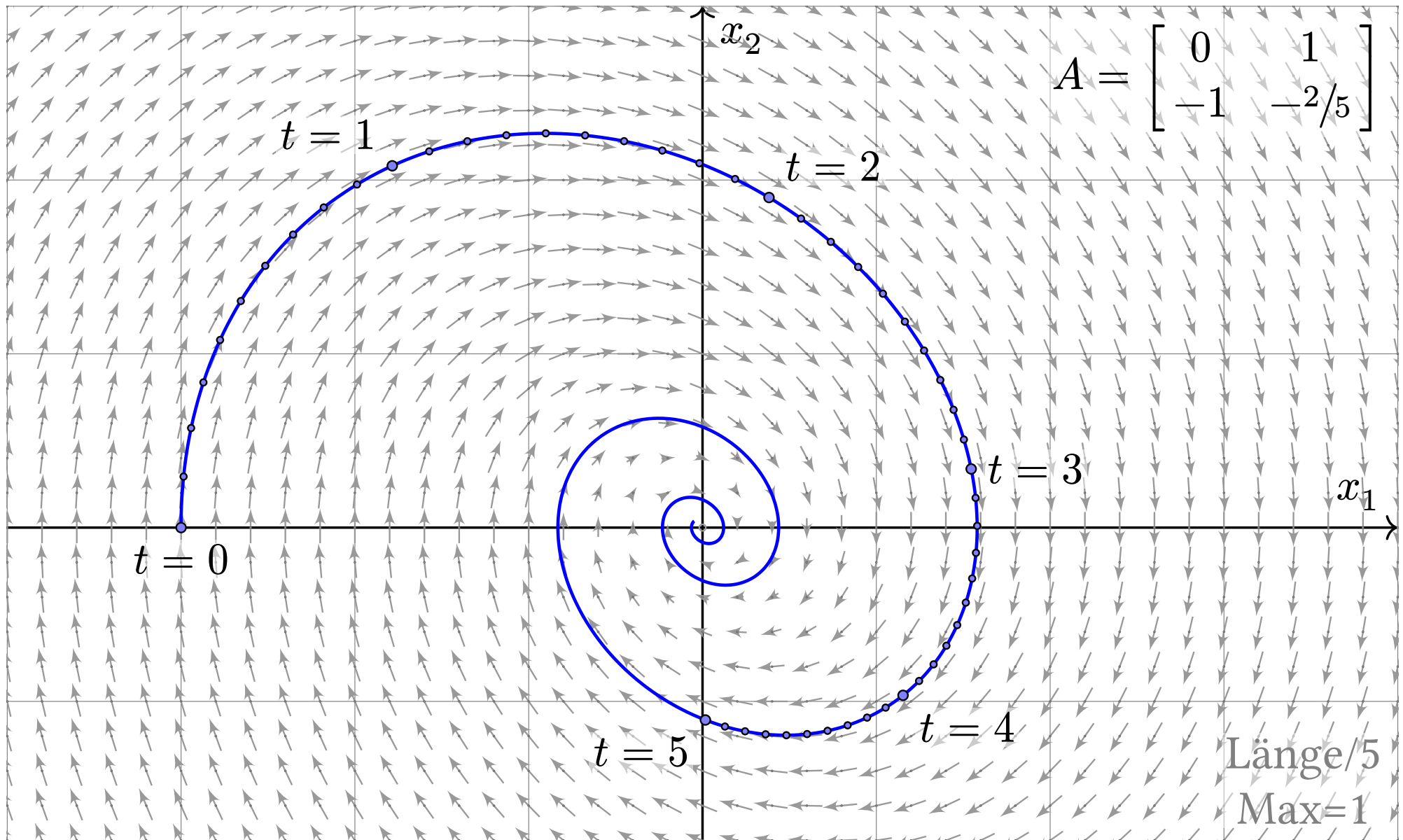
Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

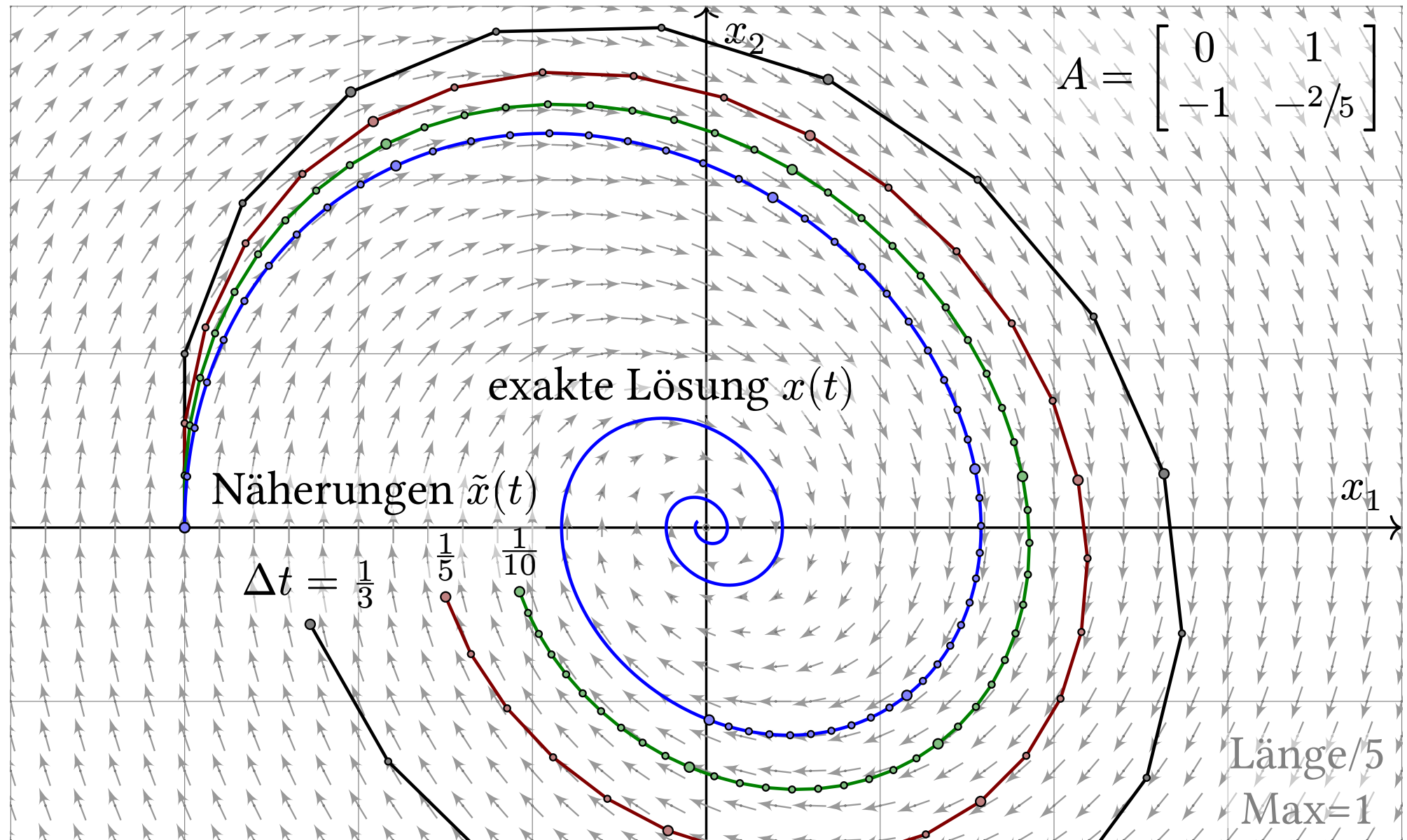
Harmonischer Oszillator, keine Dämpfung $\delta = 0$, zum Beispiel $\omega_0 = 1$:



Schwache Dämpfung $0 < \delta < \omega_0$, zum Beispiel $\delta = 1/5$ und $\omega_0 = 1$:



Approximation durch das Euler-Verfahren mit Schrittweite $\Delta t = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$:



Exponentialfunktion... einer Diagonalmatrix

Aufgabe: Berechnen Sie die Exponentialfunktion $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k / k!$ der Diagonalmatrix $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sowie $\exp(At)$ für $t \in \mathbb{R}$.

Lösung: (0) Die Potenzen der Matrix A sind leicht zu berechnen:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \implies A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

(1) Hieraus berechnen wir ebenso leicht die Exponentialreihe:

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

(2) Mit dem Zeitparameter $t \in \mathbb{R}$ im Exponenten erhalten wir:

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Exponentialfunktion... eines nilpotenten Jordan-Blocks

Aufgabe: Berechnen Sie $\exp(Nt)$ eines nilpotenten Jordan-Blocks.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dots$$

Lösung: (1) Hier gilt $N^4 = 0$, die Exponentialreihe bricht also ab:

$$\exp \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{N^0}{0!} + \frac{N^1}{1!} + \frac{N^2}{2!} + \frac{N^3}{3!} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) Mit dem Zeitparameter $t \in \mathbb{R}$ im Exponenten erhalten wir:

$$\exp(Nt) = N^0 \frac{t^0}{0!} + N^1 \frac{t^1}{1!} + N^2 \frac{t^2}{2!} + N^3 \frac{t^3}{3!} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exponentialfunktion... eines allgemeinen Jordan-Blocks

Aufgabe: Berechnen Sie $\exp(Bt)$ eines allgemeinen Jordan-Blocks

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}.$$

Lösung: (1) Wir haben $B = D + N$ mit $D = \lambda I$. Dank $DN = ND$ folgt:

$$\exp(B) \stackrel{\text{Q3B}}{\underset{(3)}{=}} \exp(D) \exp(N) = e^\lambda \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) Mit dem Zeitparameter $t \in \mathbb{R}$ im Exponenten erhalten wir:

$$\exp(Bt) \stackrel{\text{Q3B}}{\underset{(3)}{=}} \exp(Dt) \exp(Nt) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Exponentialfunktion für Matrizen

Satz Q3B: die Exponentialfunktion für Matrizen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

0 Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ konvergiert die **Exponentialreihe**

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \dots$$

1 Zudem gilt der Euler-Grenzwert $(I + \frac{1}{n}A)^n \rightarrow \exp(A)$ für $n \rightarrow \infty$.

Die so definierte **Matrix-Exponentialfunktion** $\exp : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ hat die von $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vertrauten Eigenschaften:

- 2 Die Nullmatrix 0 wird auf die Einheitsmatrix $\exp(0) = I$ abgebildet.
- 3 Aus $AB = BA$ folgt $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A)$.
- 4 Insbesondere gilt also $\exp(A) \exp(-A) = \exp(A - A) = \exp(0) = I$.
Somit ist die Matrix $\exp(A)$ invertierbar mit $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.
- 5 Die Zuordnung $t \mapsto \exp(tA)$ definiert eine differenzierbare Kurve in $GL_n \mathbb{K} \subset \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $0 \mapsto I$ und $\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA)$.

Die Exponentialfunktion für Matrizen

Satz Q3B: die Exponentialfunktion für Matrizen

Die Exponentialfunktion verträgt sich zudem mit Matrix-Operationen:

- 6 Transposition: $\exp(A^T) = \exp(A)^T$
- 7 komplexe Konjugation: $\exp(\bar{A}) = \overline{\exp(A)}$
- 8 Konjugation: $\exp(T^{-1}AT) = T^{-1} \exp(A)T$
- 9 Determinantenformel: $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$

Beispiel: eine euklidische Drehmatrix

Aufgabe: Berechnen Sie $\exp(At)$ für $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. **Lösung:**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

Hieraus berechnen wir mühelos die Matrix-Exponentialfunktion:

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots & -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \dots \\ t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Bemerkung: Für die Ableitung gilt wie erwartet

$$\frac{d}{dt} \exp(At) = \begin{bmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{bmatrix} = A \exp(At).$$

$$\exp \begin{bmatrix} s & -t \\ t & s \end{bmatrix} \stackrel{\text{Q3B}}{\stackrel{(3)}{=}} \exp \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \exp \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} = e^s \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Lineares Differentialgleichungssystem (DGSystem)

◆ **Definition Q3A:** lineares Differentialgleichungssystem über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Eine **lineares Differentialgleichungssystem** (DGSystem) hat die Form

$$\dot{u}(t) = A(t) u(t) + b(t).$$

Gegeben ist die Systemmatrix $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ und der Störterm $b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$, beide stetig auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Gesucht sind alle $u : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ mit stetiger Ableitung $\dot{u} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ und zeitlicher Entwicklung $\dot{u} = A u + b$.

Beim **Anfangswertproblem** (AWP) ist zudem $u(t_0) = v_0 \in \mathbb{K}^n$ vorgeben.

❓ Wie viele Lösungen hat das AWP? keine, eine, viele? Genau eine!

Eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

Aufgabe: Lösen Sie das AWP zunächst für den Spezialfall $A = 0$:

$$u(t_0) = v_0, \quad u'(t) = b(t)$$

Eindeutigkeit: Angenommen $u : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ ist eine Lösung. Dank HDI gilt:

$$\int_{\tau=t_0}^t u'(\tau) \, d\tau = u(t) - u(t_0)$$

$$u(t) = v_0 + \int_{\tau=t_0}^t b(\tau) \, d\tau$$

Existenz: Diese Integralformel konstruiert eine Lösung $u : I \rightarrow \mathbb{K}$. Probe!

Eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

Aufgabe: Lösen Sie das AWP für das in/homogene DGSytem:

$$u(t_0) = v_0, \quad u'(t) = A u(t) + b(t)$$

Eindeutigkeit: Angenommen $u : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ ist irgendeine Lösung. Wir nutzen die Hilfsfunktion $v(t) := e^{-A(t-t_0)} u(t)$. Für sie gilt:

$$v(t_0) = u(t_0) = v_0,$$

$$v'(t) = -A e^{-A(t-t_0)} u(t) + e^{-A(t-t_0)} (A u(t) + b(t)) = e^{-A(t-t_0)} b(t)$$

Das erzwingt dank HDI wie in der vorigen Aufgabe erklärt:

$$v(t) = v_0 + \int_{\tau=t_0}^t e^{-A(\tau-t_0)} b(\tau) d\tau$$

Wenn es eine Lösung u gibt, dann nur diese: $u(t) = e^{A(t-t_0)} v(t)$.

Existenz: Wir setzen $u(t) = e^{A(t-t_0)} v(t)$ und machen die Probe:

$$u(t_0) = v(t_0) = v_0,$$

$$u'(t) = A e^{A(t-t_0)} v(t) + e^{A(t-t_0)} e^{-A(t-t_0)} b(t) = A u(t) + b(t)$$

Eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

Satz Q3c: Existenz & Eindeutigkeit & explizite Lösung durch Integration

Zu lösen sei das in/homogene DGSsystem als AWP wie in Q3A definiert:

$$u(t_0) = v_0, \quad u'(t) = A u(t) + b(t)$$

Dazu existiert genau eine Lösung $u : I \rightarrow \mathbb{K}^n$. Wir haben explizit:

$$u(t) = e^{A(t-t_0)} v_0 + e^{A(t-t_0)} \int_{\tau=t_0}^t e^{-A(\tau-t_0)} b(\tau) d\tau$$

Eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

Aufgabe: Lösen Sie $x'_1 = -x_2$, $x'_2 = x_1$ mit $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$.

Lösung: Wir suchen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$x'(t) = A x(t) \quad \text{und} \quad x(0) = v \quad \text{wobei} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Das AWP hat dank Satz Q3c genau eine Lösung, nämlich explizit:

$$x(t) = e^{At} v = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

Affin-lineare Struktur des Lösungsraums

Satz Q3D: Struktursatz für lineare Differentialgleichungssysteme

Gegeben sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Wir untersuchen die Lösungsmenge $L = \{u \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n) \mid \dot{u} = Au + b\}$.

(0) **Globale Existenz und Eindeutigkeit:** Zu jedem Anfangsdatum $(t_0, v_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung $u \in L$ mit $u(t_0) = v_0$ dank Satz Q3c. Die Auswertung in t_0 stiftet also eine Bijektion:

$$\Psi_{t_0} : L \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^n : u \mapsto u(t_0)$$

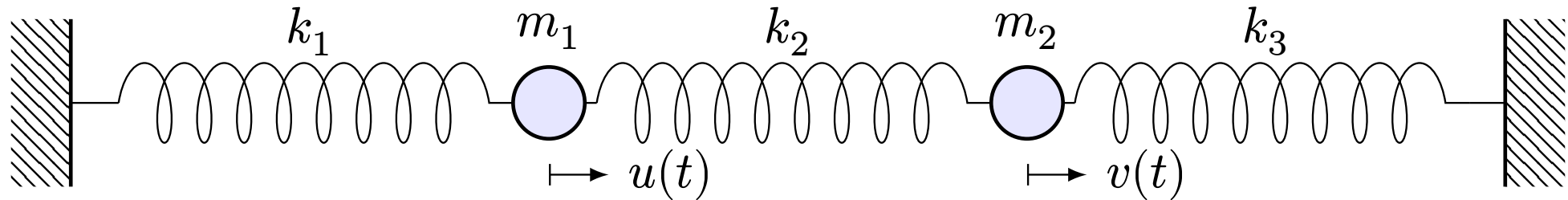
(1) $L_0 = \{u \mid \dot{u} = Au\}$ ist ein **\mathbb{K} -linearer U Raum** der Dimension n . Wir finden ein **Fundamentalsystem** $u_1, \dots, u_n \in L_0$, etwa dank Q3c:

$$L_0 = \{c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\} \cong \mathbb{K}^n$$

(2) $L = \{u \mid \dot{u} = Au + b\}$ ist ein **\mathbb{K} -affiner U Raum** der Dimension n . Für jede **Partikulärlösung** $u_0 \in L$, etwa dank Q3c, gilt demnach:

$$L = u_0 + L_0 = \{u_0 + c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\}$$

Gekoppelte Oszillatoren als dynamisches System



Aufgabe: Formulieren Sie das hier skizzierte dynamische System...

- (0) als Bewegungsgleichung sowie (1) als DGSsystem erster Ordnung.
 (2) Welche Struktur hat die Lösungsmenge? (a) „Form“ und (b) „Größe“?

Lösung: (0) Auslenkungen $u(t)$, $v(t)$ aus der Ruhelage. Kräftebilanz:

$$F_1(t) = -k_1 u(t) - k_2 [u(t) - v(t)]$$

$$F_2(t) = -k_3 v(t) - k_2 [v(t) - u(t)]$$

Bewegungsgesetz: $m_1 \ddot{u}(t) = F_1(t)$ und $m_2 \ddot{v}(t) = F_2(t)$. Hieraus folgt:

$$\ddot{u}(t) = -\frac{k_1+k_2}{m_1} u(t) + \frac{k_2}{m_1} v(t)$$

$$\ddot{v}(t) = +\frac{k_2}{m_2} u(t) - \frac{k_2+k_3}{m_2} v(t)$$

(1) Wir haben ein DGSsystem zweiter Ordnung:

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = a u(t) + b v(t) \\ \ddot{v}(t) = c u(t) + d v(t) \end{cases}$$

Neue Variablen $x_1 = u$, $x_2 = v$, $x_3 = \dot{u}$, $x_4 = \dot{v}$ reduzieren dies zu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \text{kurz} \quad \dot{x} = A x$$

(2) Die Lösungsmenge ist (a) ein \mathbb{R} -Vektorraum (b) der Dimension 4.

Gekoppelte Oszillatoren: Symmetrie und Ansatz

Aufgabe: (3) Lösen Sie den symmetrischen Fall $m_1 = m_2$, $k_1 = k_3$.

(4) Welche Bewegung folgt aus $u(0) = 2$, $v(0) = 0$, $\dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0$?

Lösung: Einstweilen nutzen wir unsere physikalische Anschauung!

(3a) Der Ansatz $u = v$ entkoppelt zu $\ddot{u} = -\frac{k_1}{m_1}u$, $\ddot{v} = -\frac{k_1}{m_1}v$.

Lösungen: $u_1(t) = \cos(\omega_1 t)$ und $u_2(t) = \sin(\omega_1 t)$ mit $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}$.

(3b) Der Ansatz $u = -v$ entkoppelt zu $\ddot{u} = -\frac{k_1+2k_2}{m_1}u$, $\ddot{v} = -\frac{k_1+2k_2}{m_1}v$.

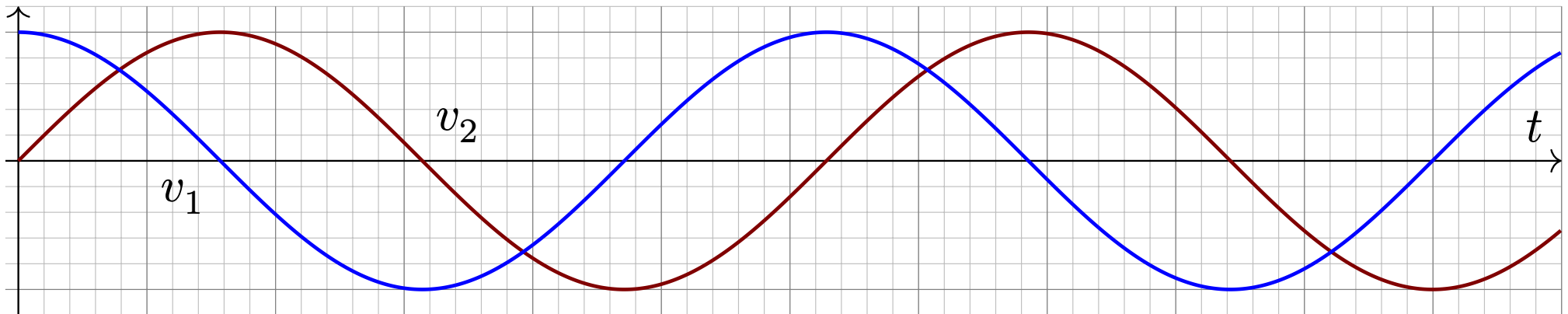
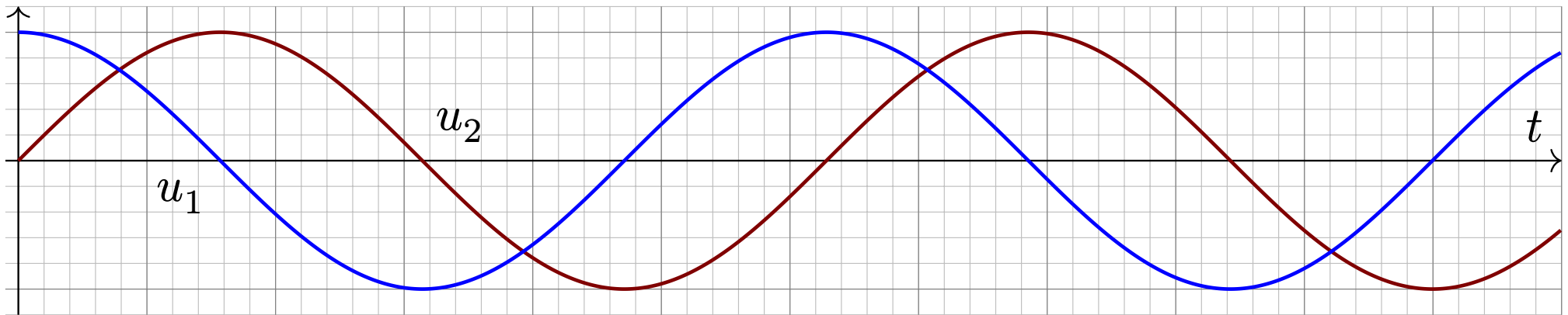
Lösungen: $u_3(t) = \cos(\omega_2 t)$ und $u_4(t) = \sin(\omega_2 t)$ mit $\omega_2^2 = \frac{k_1+2k_2}{m_1} > \omega_1^2$.

Sind wir schon fertig? Ja! Jede Lösung ist eine Linearkombination

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} u_3(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} u_4(t) \\ v_4(t) \end{bmatrix}.$$

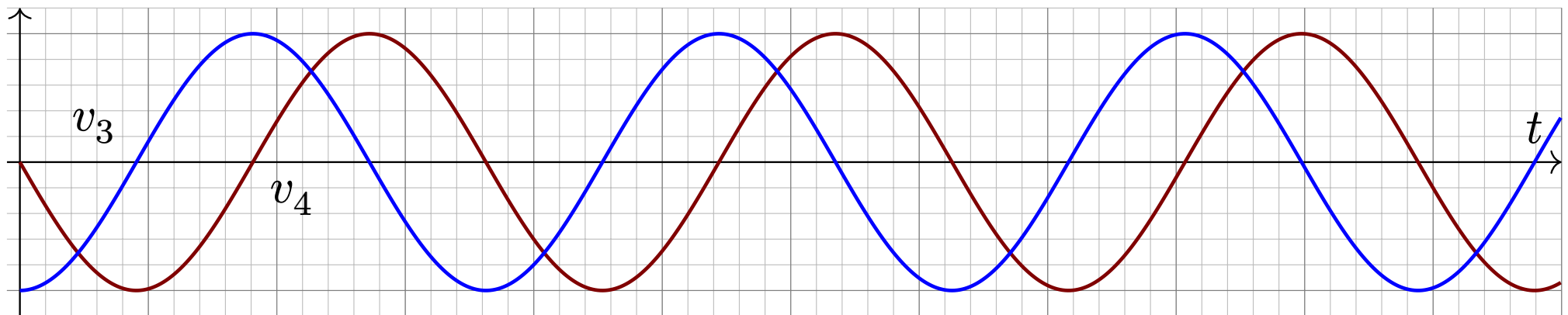
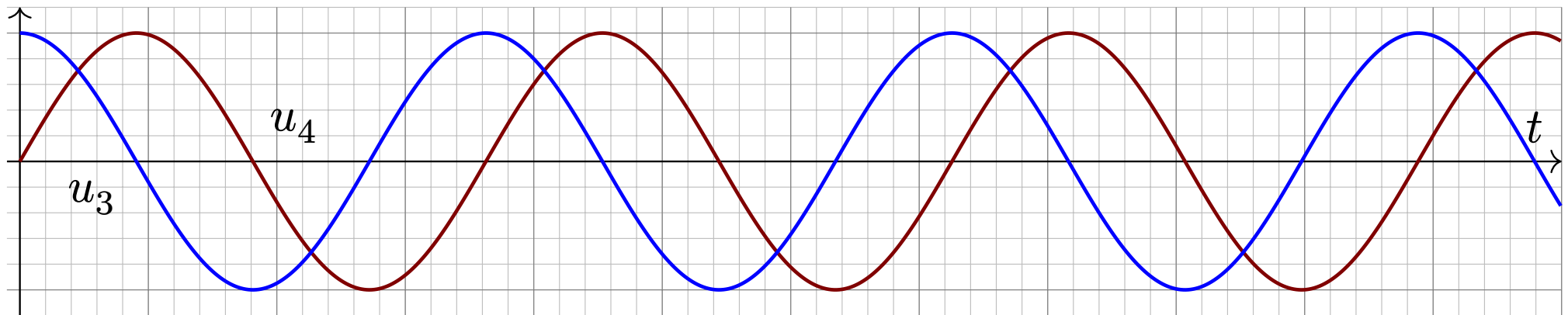
Gekoppelte Oszillatoren: gleichsinnige Eigenschwingungen

Illustration für den Fall $m_1 = m_2 = 1$ und $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.
Gleichsinnige Eigenschwingungen zur Frequenz $\omega_1 = 1$:



Gekoppelte Oszillatoren: gegensinnige Eigenschwingungen

Illustration für den Fall $m_1 = m_2 = 1$ und $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.
Gegensinnige Eigenschwingungen zur Frequenz $\omega_2 = \sqrt{3}$:

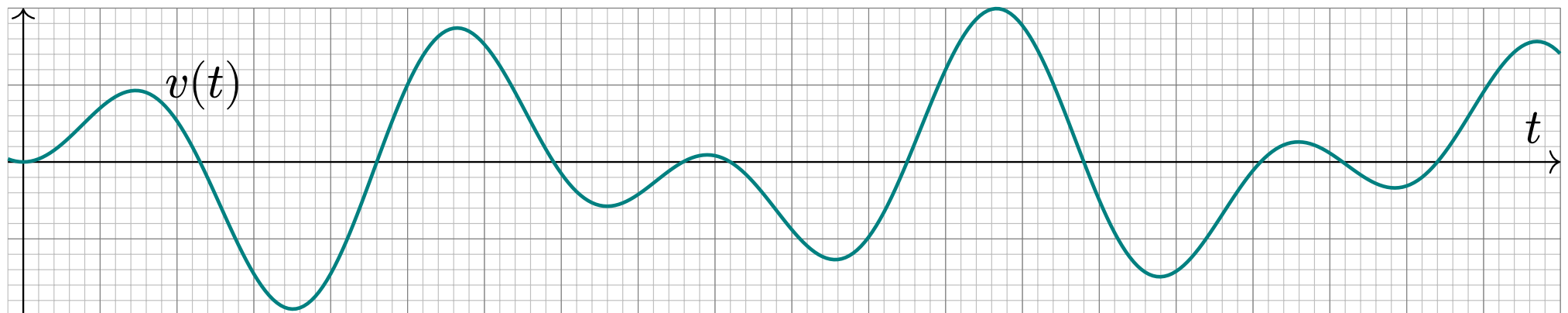
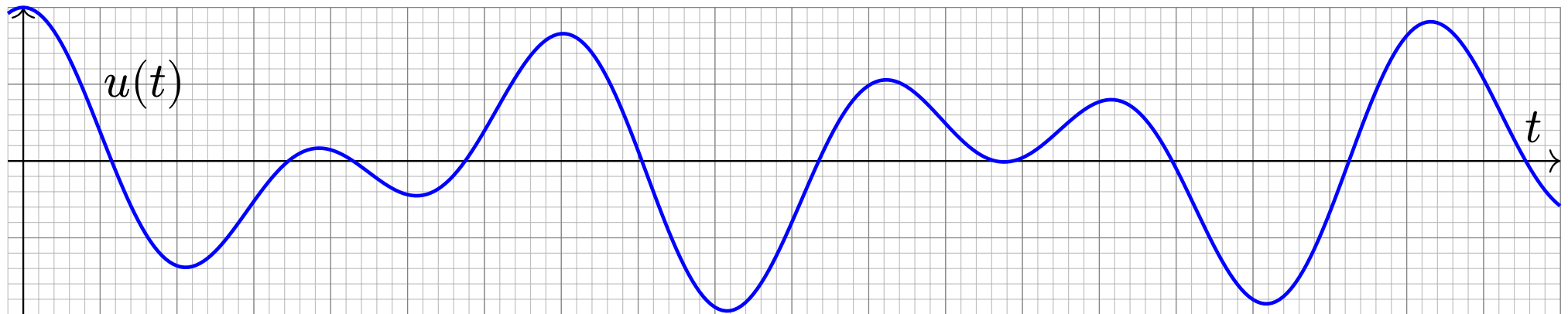


Überlagerung von Eigenschwingungen

(4) Diese Linearkombination von Eigenschwingungen löst das AWP:

$$u(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{3}t), \quad u(0) = 2, \quad \dot{u}(0) = 0$$

$$v(t) = \cos(t) - \cos(\sqrt{3}t), \quad v(0) = 0, \quad \dot{v}(0) = 0$$



Schwache Kopplung führt zu Schwebungen.

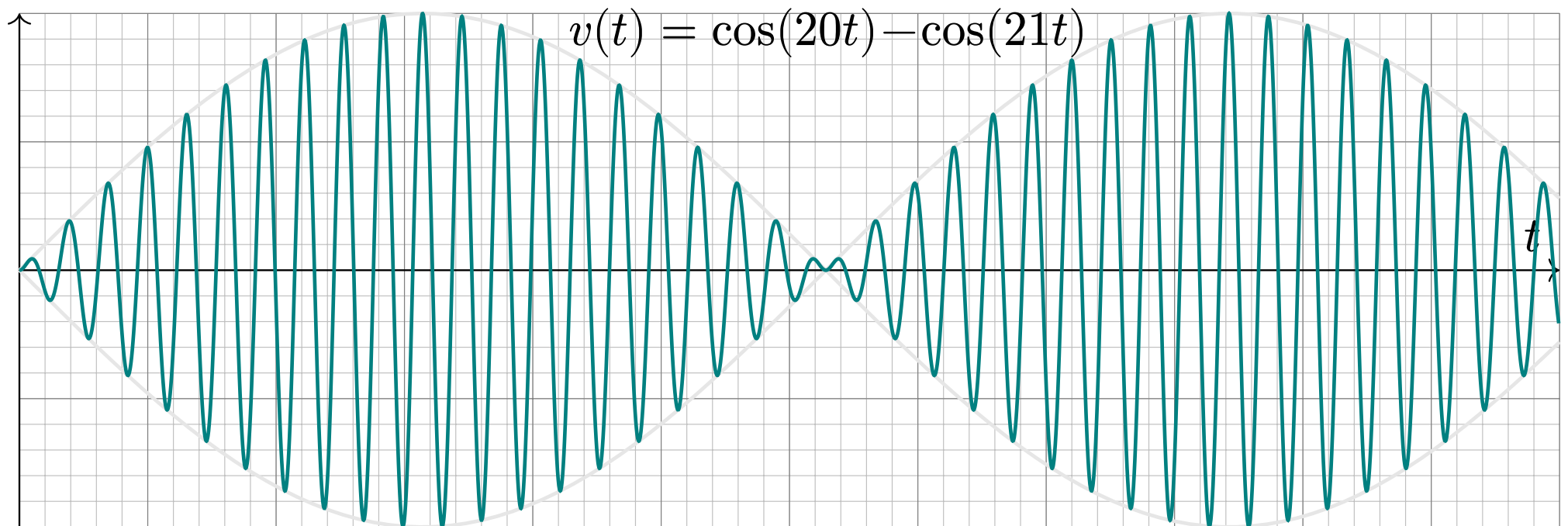
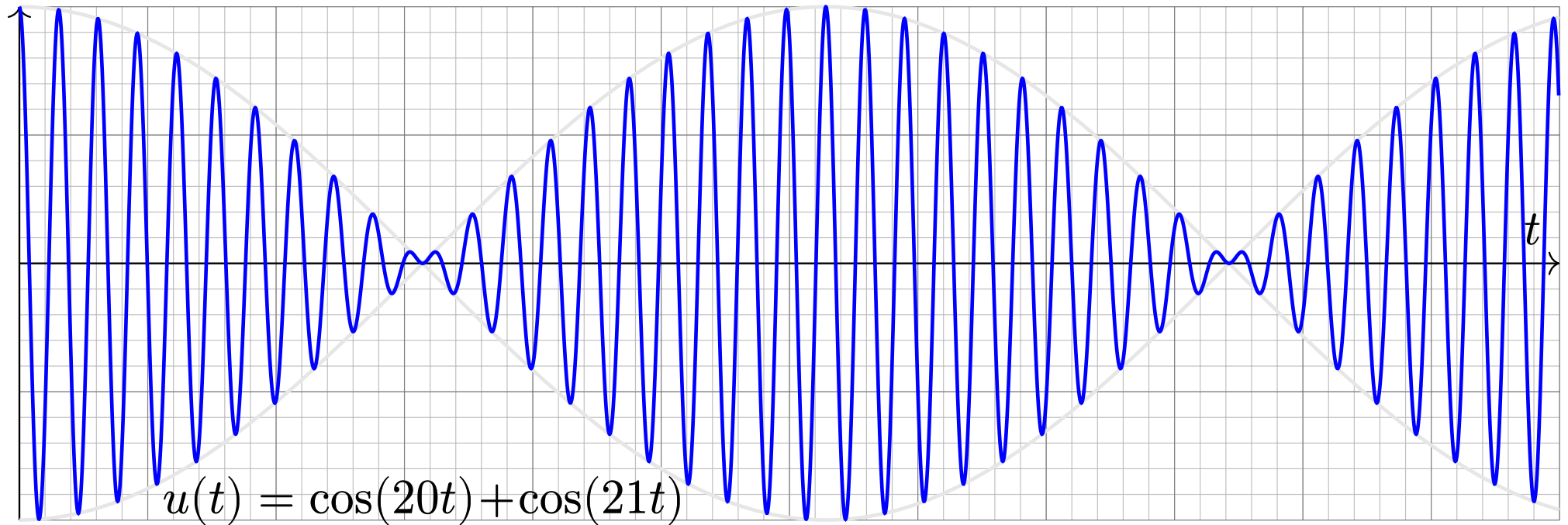


Partnerschaukel, Schloss Freudenberg in Wiesbaden, Bildquelle: reinmein.info

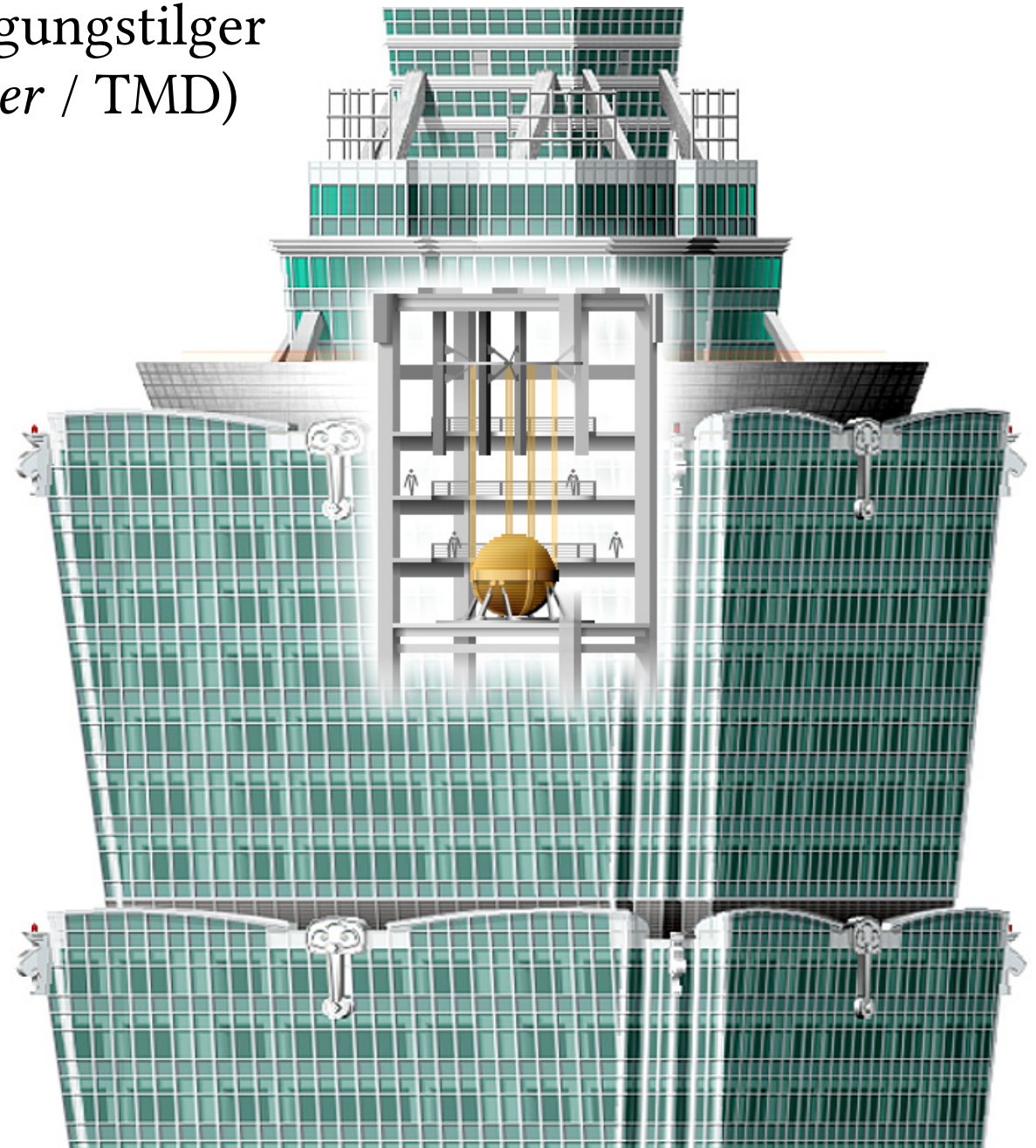
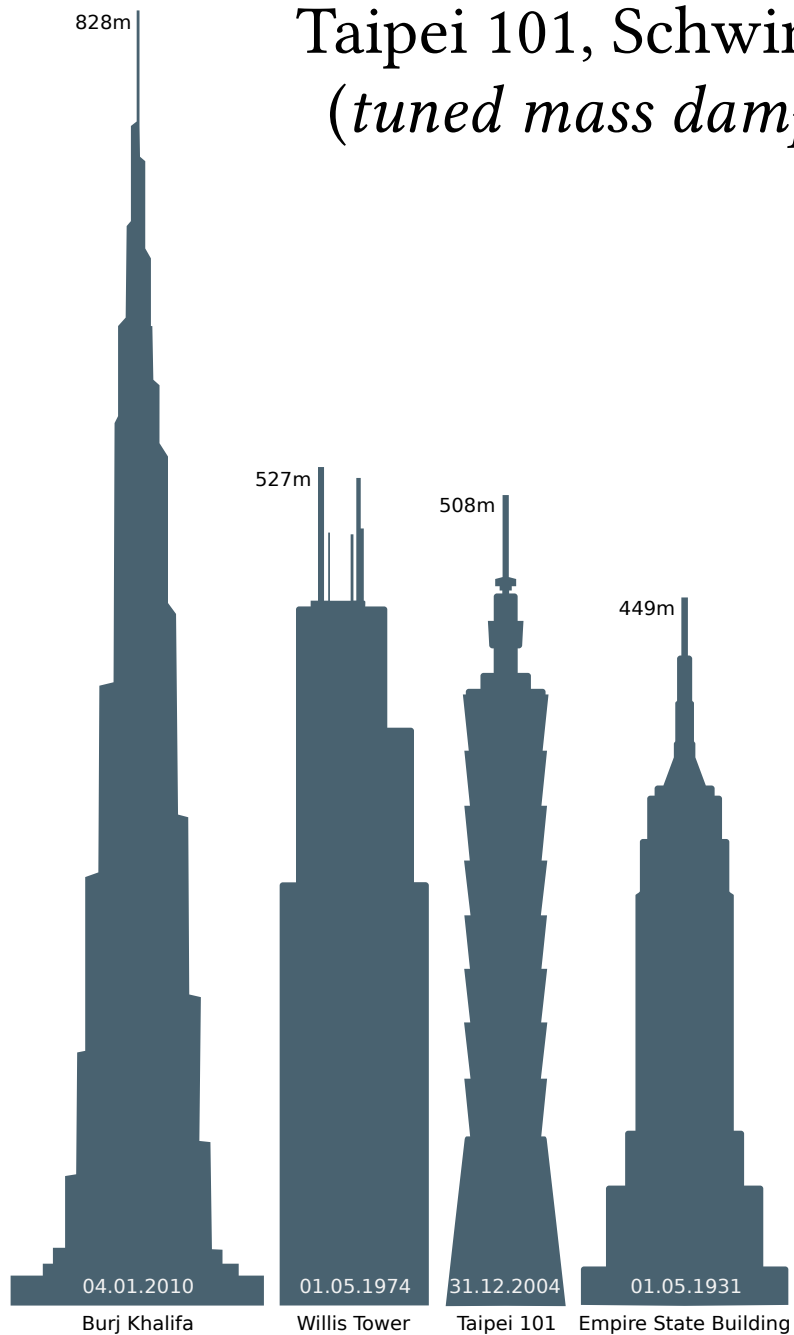
Aufgabe: Was geschieht bei schwacher Kopplung, $0 < k_2 \ll k_1 = k_3$?
 Als Zahlenbeispiel sei $m_1 = m_2 = 1$ sowie $k_1 = k_3 = 400$ und $k_2 = 20.5$.

Schwache Kopplung führt zu Schwebungen.

Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.



Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.



Von Eigenvektoren zu Eigenfunktionen

$$u'(t) = A u(t), \quad u(0) = v$$

Aufgabe: Berechnen Sie die Lösung im Falle $Av = \lambda v$.

Lösung: (0) Wir kennen die eindeutige Lösung $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n : t \mapsto e^{tA} v$.

$$e^{tA} v \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k v \stackrel{\text{Eig}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda^k v \stackrel{\text{Def}}{=} e^{t\lambda} v$$

Von Eigenvektoren zu Eigenfunktionen

Satz Q3E: Lösung eines DGSystems durch Eigenfunktionen

Gegeben sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Zu lösen sei das DGSystem $u'(t) = A u(t)$.

(1) Jeder Eigenvektor $v \in \mathbb{K}^n$ mit $Av = \lambda v$ definiert eine Eigenfunktion

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n : t \mapsto u(t) = e^{\lambda t} v.$$

Diese löst das DGSystem $u'(t) = A u(t)$ mit dem Anfangswert $u(0) = v$.

(2) Angenommen, die Matrix A ist über \mathbb{K} diagonalisierbar, erlaubt also eine Basis $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren. Dann lösen wir unser DGSystem durch eine Basis aus Eigenfunktionen $u_k(t) = e^{\lambda_k t} v_k$:

Jede Lösung des DGSystems $u'(t) = A u(t)$ ist eine Linearkombination $u = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$ mit eindeutigen Koeffizienten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$.

😊 Ist die Matrix A diagonalisierbar, so ist damit die Lösung leicht!

☹ Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar. Was tun? Hauptvektoren!

Von Hauptvektoren zu Hauptfunktionen

Satz Q3F: Lösung eines DGSystems durch Hauptfunktionen

Gegeben sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Zu lösen sei das DGSystem $u'(t) = A u(t)$.

Hierzu sei $0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} v_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_\ell$ eine **Hauptvektorkette**.

Diese löst das DGSystem durch die **Hauptfunktionen** u_1, \dots, u_ℓ mit

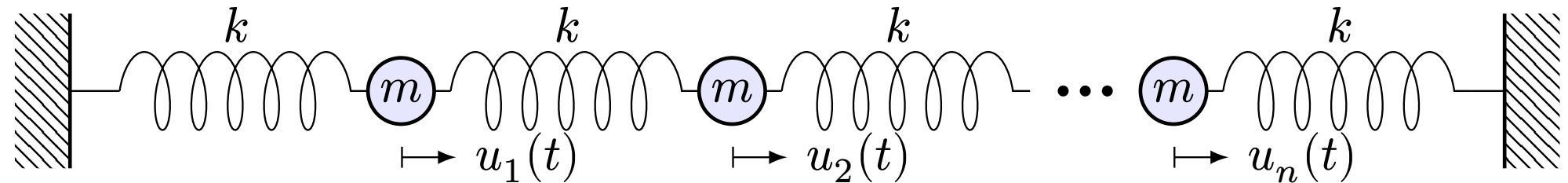
$$u_k(t) = e^{\lambda t} \left[v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right].$$

Wie die Hauptvektoren bilden auch die Hauptfunktionen eine Kette:

$$\begin{aligned} 0 \xleftarrow{A-\lambda} u_1 \xleftarrow{A-\lambda} u_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} u_\ell & \quad \text{also} \quad A u_k = \lambda u_k + u_{k-1}, \\ 0 \xleftarrow{\partial-\lambda} u_1 \xleftarrow{\partial-\lambda} u_2 \xleftarrow{\partial-\lambda} \dots \xleftarrow{\partial-\lambda} u_\ell & \quad \text{also} \quad u'_k = \lambda u_k + u_{k-1}. \end{aligned}$$

Somit gilt $u'_k(t) = A u_k(t)$ mit Anfangswert $u_k(0) = v_k$.

Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen



- Aufgabe:** (1) Formulieren Sie das hier skizzierte dynamische System als ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung.
- (2) Welche Struktur hat die Lösungsmenge? (a) „Form“ und (b) „Größe“?
- (3) Finden Sie alle Lösungen zum Produktansatz $u_j(t) = e^{i\alpha_j} e^{i\omega t}$.
- (4) Gewinnen Sie hieraus eine reelle Basis des Lösungsraumes.

Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

Lösung: (1a) Auslenkung $u_j(t) \in \mathbb{R}$ aus der Ruhelage,
 lineare Rückstellkraft $F_j = k(u_{j+1} - u_j) + k(u_{j-1} - u_j)$,
 Newtons Bewegungsgesetz $F_j = m\ddot{u}_j$. Mit $c^2 = k/m$ erhalten wir

$$\ddot{u}_j(t) = c^2 [u_{j-1}(t) - 2u_j(t) + u_{j+1}(t)] \quad \text{mit} \quad u_0(t) = u_{n+1}(t) = 0.$$

(1b) Diese Bewegungsgleichung ist zweiter Ordnung in n Unbekannten.
 Wir reduzieren sie nun äquivalent zu erster Ordnung in $2n$ Unbekannten:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}(t) \\ \ddot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ c^2 B_n & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}$$

Die Bandmatrix $B = B_n$ kodiert hierbei die geometrische Anordnung:

$$B_n := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$A := \begin{bmatrix} 0 & E \\ c^2 B & 0 \end{bmatrix}$$

(2) Wir suchen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ mit $\dot{x}(t) = A x(t)$. Dank Struktursatz Q3D: Die Lösungsmenge ist (a) ein \mathbb{R} -Vektorraum (b) der Dimension $2n$.

Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

(3) Einsetzen unseres Produktansatzes $u_j(t) = e^{i\omega t} e^{i\alpha j}$ ergibt:

$$-\omega^2 e^{i\omega t} e^{i\alpha j} = c^2 [e^{i\omega t} e^{i\alpha(j-1)} - 2e^{i\omega t} e^{i\alpha j} + e^{i\omega t} e^{i\alpha(j+1)}] \quad \text{also}$$

$$\omega^2 = -c^2 (e^{-i\alpha} - 2 + e^{i\alpha}) = -c^2 (e^{-i\alpha/2} - e^{i\alpha/2})^2 = 4c^2 \sin(\alpha/2)^2$$

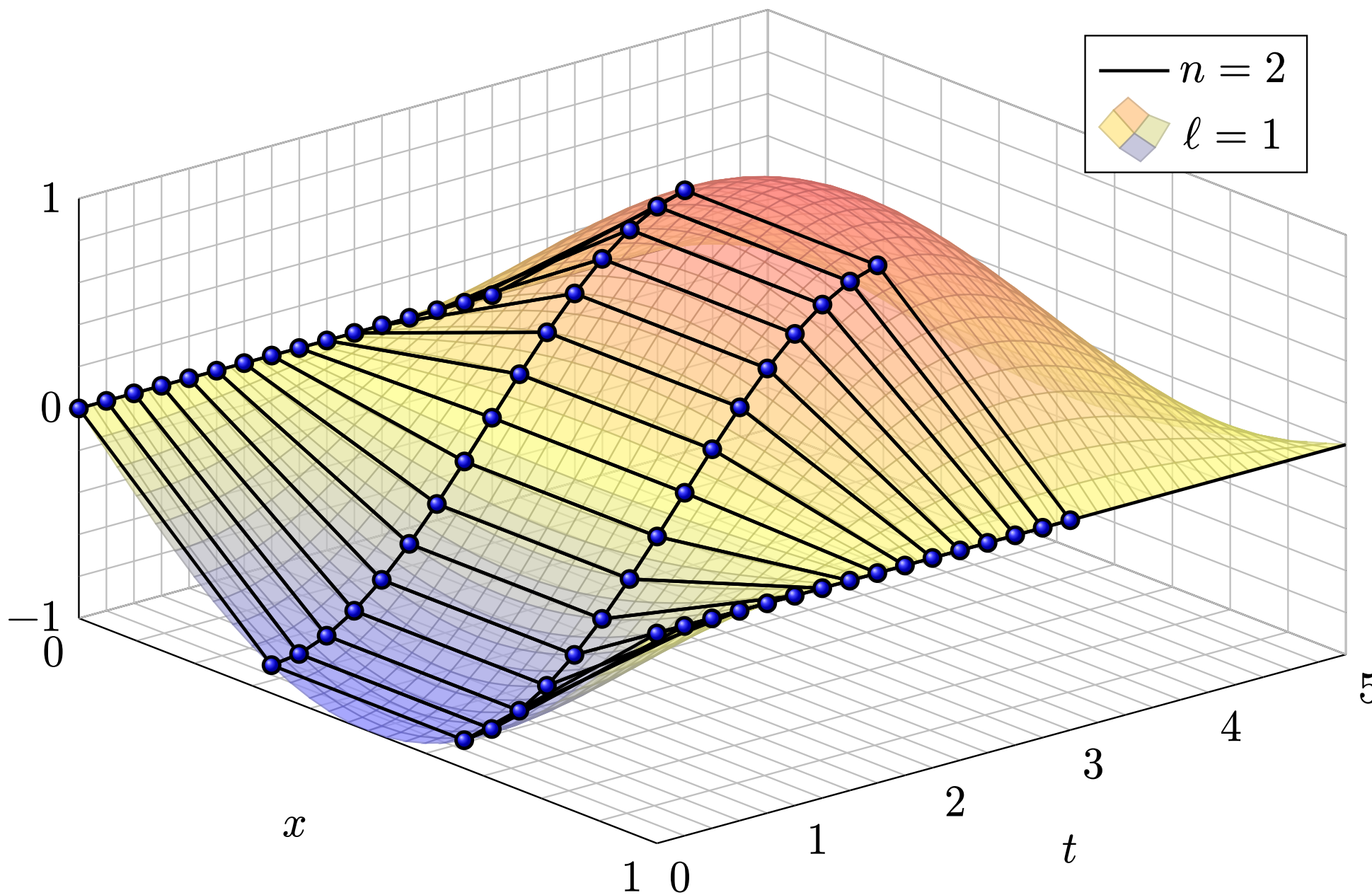
Zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ erhalten wir $\omega = \pm 2c \sin(\alpha/2)$. Reelle Lösungen sind:

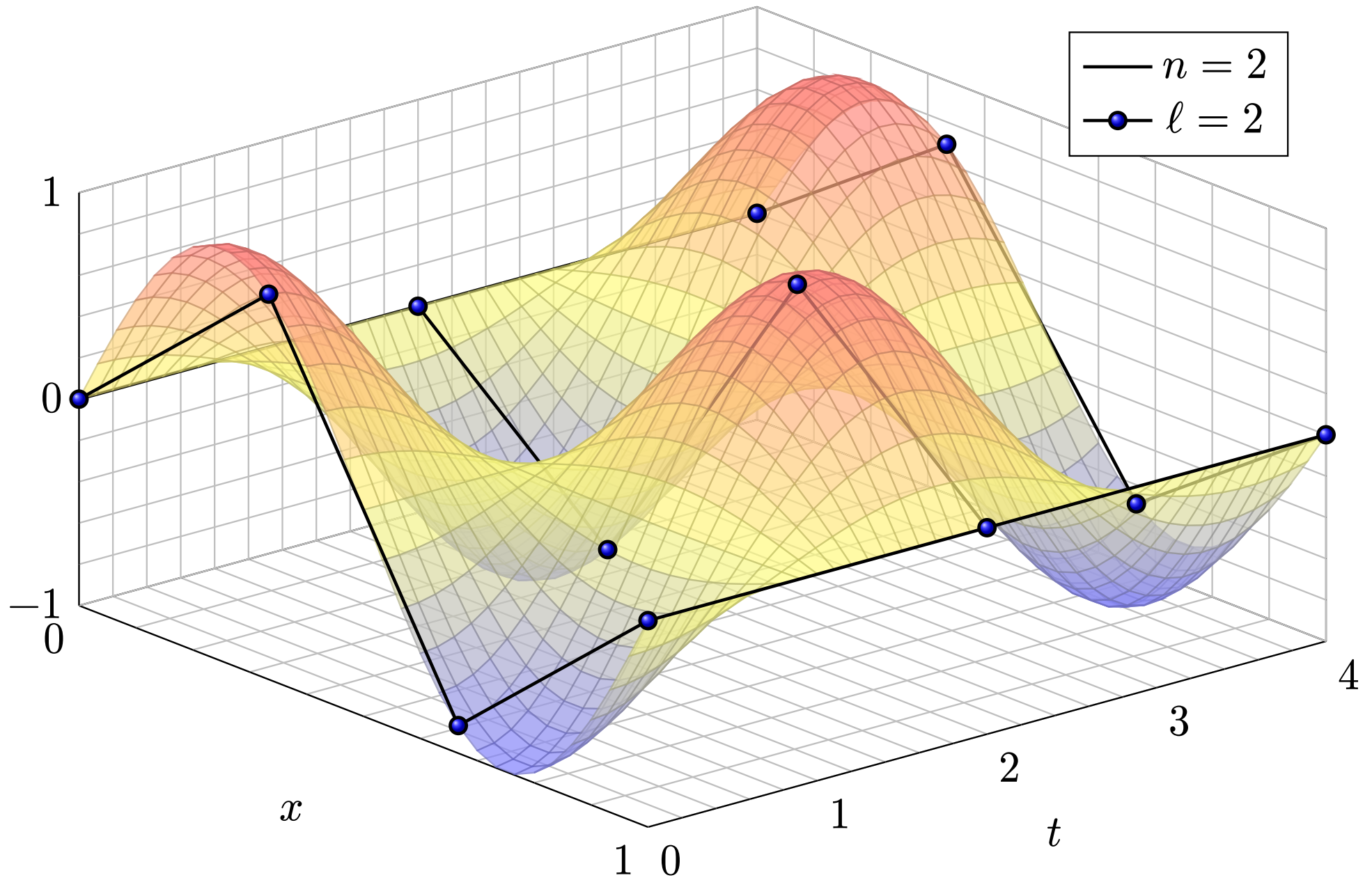
$$u_j(t) = \begin{cases} \sin(\alpha j) \cos(\omega t), & \cos(\alpha j) \cos(\omega t), \\ \sin(\alpha j) \sin(\omega t), & \cos(\alpha j) \sin(\omega t), \end{cases}$$

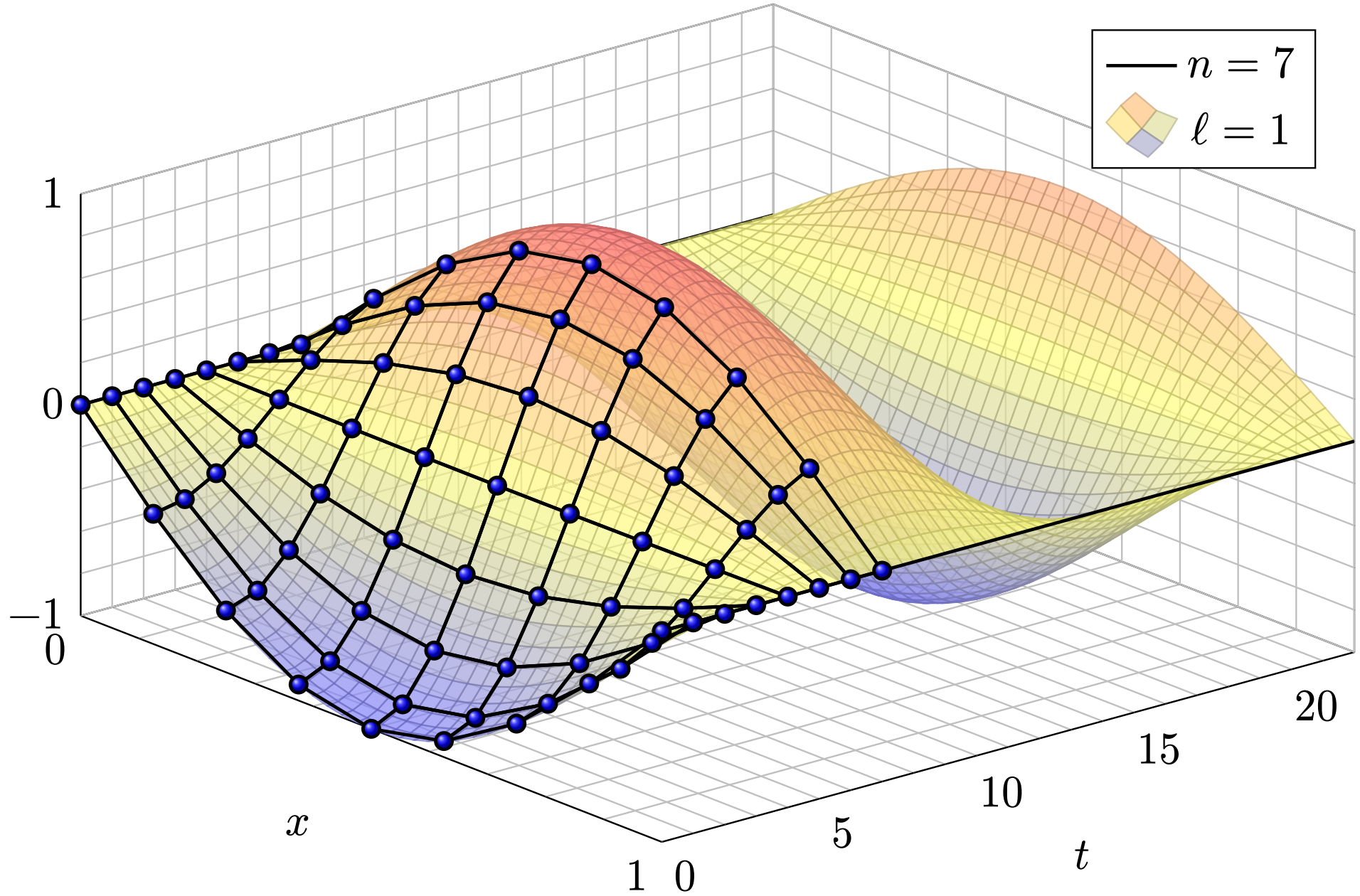
Randbedingungen $u_0 = u_{n+1} = 0$: Die Lösungen links erfüllen $u_0(t) = 0$, und $u_{n+1}(t) = 0$ für $\alpha = \ell\pi/(n+1)$ und $\ell = 1, \dots, n$. **Eigenfunktionen:**

$$\left. \begin{array}{l} u_{\ell,j}(t) = \sin(\alpha_\ell j) \cos(\omega_\ell t) \\ v_{\ell,j}(t) = \sin(\alpha_\ell j) \sin(\omega_\ell t) \end{array} \right\} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \alpha_\ell = \ell\pi/(n+1), \\ \omega_\ell = 2c \sin(\alpha_\ell/2). \end{cases}$$

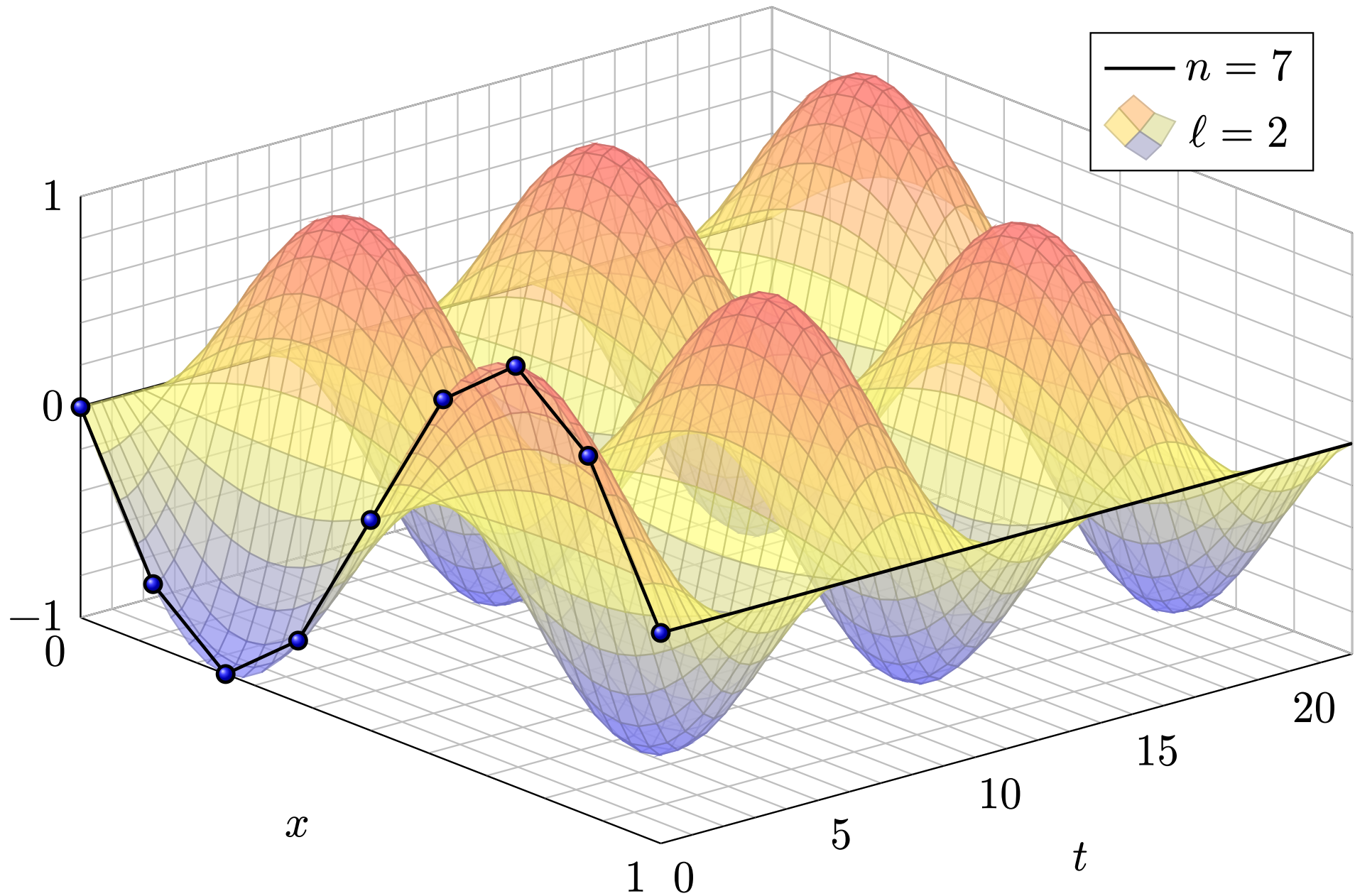
(4) Dies sind $2n$ linear unabhängige Lösungen, also eine **(Eigen)Basis!**



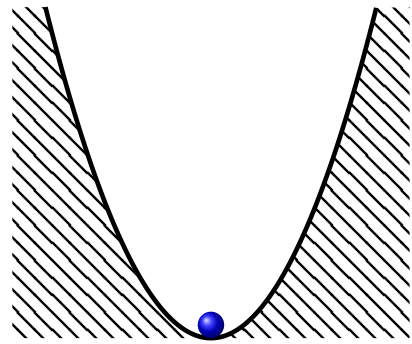


Eigenfunktionen: Grundschiwingung ($\ell = 1$)

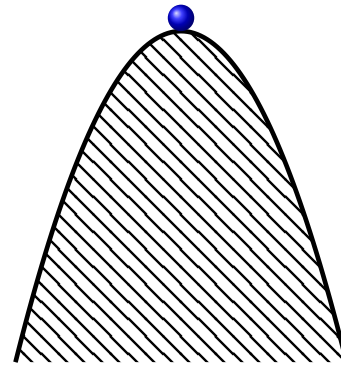
Eigenfunktionen: erste Oberschwingung ($\ell = 2$)



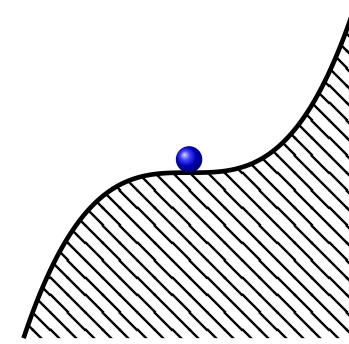
Gleichgewichtslagen und In/Stabilität von Fixpunkten



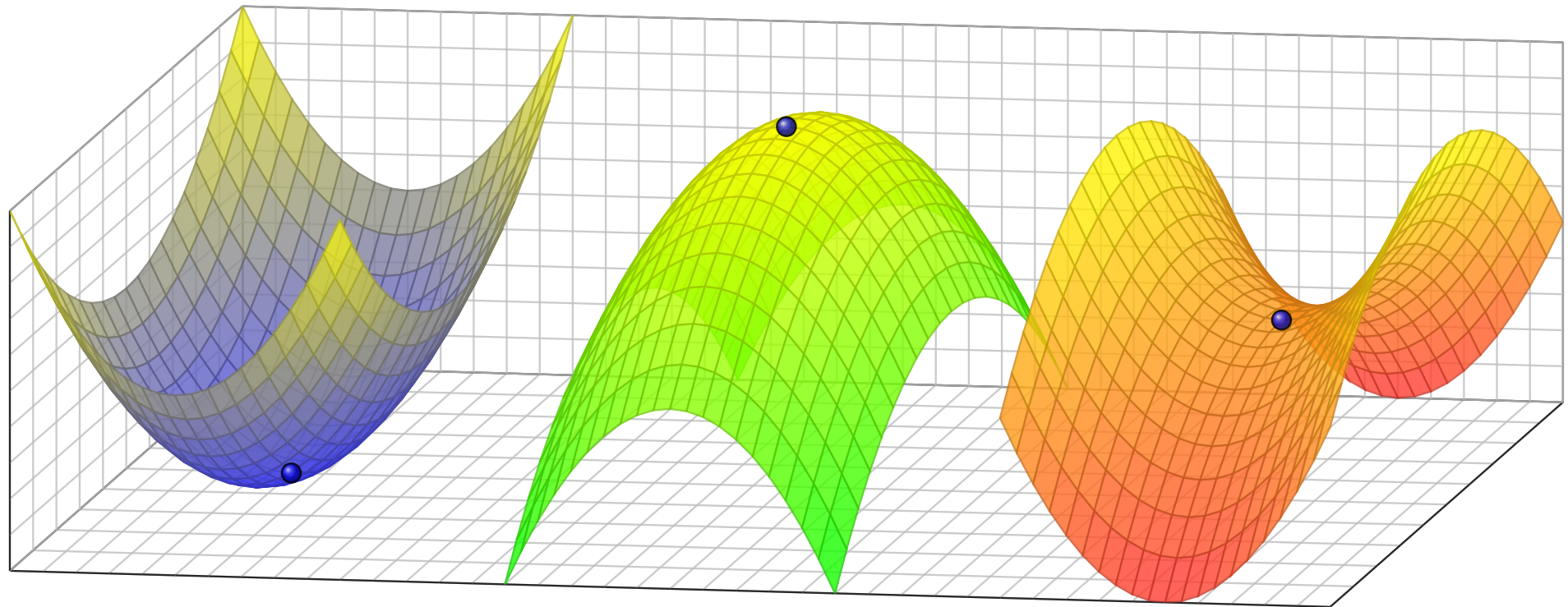
Der Fixpunkt ist
stabil / attraktiv.



Der Fixpunkt ist
instabil / repulsiv.



kritischer Fixpunkt
(höhere Ordnung)



Wir betrachten ein **autonomes Differentialgleichungssystem**:

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Aufgabe: Was geschieht bei Start nahe einer Gleichgewichtslage?

Lösung: Jeder Startpunkt x_0 mit $f(x_0) = 0$ ist ein **Fixpunkt**: $x(t) = x_0$.

Für kleine Auslenkungen $x(t) = x_0 + u(t)$ können wir **linearisieren**:

$$\dot{u}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(x_0 + u(t)) \approx f(x_0) + f'(x_0) u(t) = A u(t)$$

Linearisierung um Fixpunkte und In/Stabilität

😊 Kleine Auslenkungen aus der Ruhelage x_0 folgen näherungsweise dem linearen DGSsystem mit konstanter Systemmatrix $A = f'(x_0)$:

$$\text{nicht-linear } \dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \rightsquigarrow \quad \text{linear } \dot{u}(t) = A u(t)$$

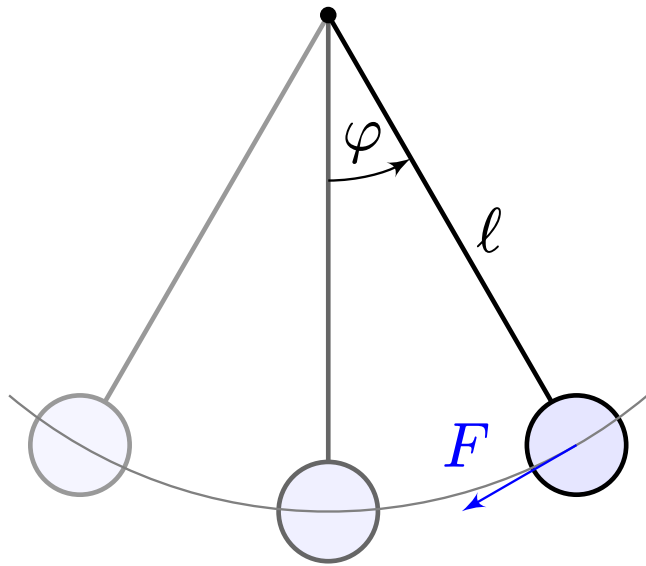
Zum Eigenwert $\lambda = \sigma + i\omega$ gehören Eigen- und Hauptfunktionen

$$u(t) = e^{\sigma t} e^{i\omega t} \left[v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right].$$

Damit erkennen wir die **Stabilität** des Fixpunktes:

- $\text{re}(\lambda) < 0$ staucht; kleine Störungen werden exponentiell gedämpft. Der Fixpunkt ist **stabil**, wenn $\text{re}(\lambda) < 0$ für *alle* Eigenwerte gilt.
- $\text{re}(\lambda) > 0$ streckt; kleine Störungen werden exponentiell verstärkt. Der Fixpunkt ist **instabil**, wenn $\text{re}(\lambda) > 0$ für *einen* Eigenwert gilt.

Linearisierung um Fixpunkte und In/Stabilität



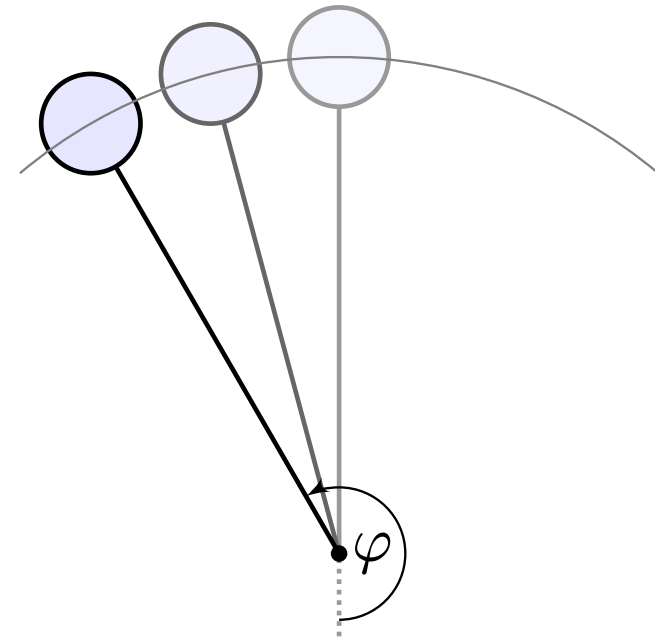
Dynamisches System:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ -(g/l) \sin \varphi - 2\delta\omega \end{bmatrix}$$

Linearisierung um $(0, 0)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(g/l) & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Der Fixpunkt $(0, 0)$ ist stabil.



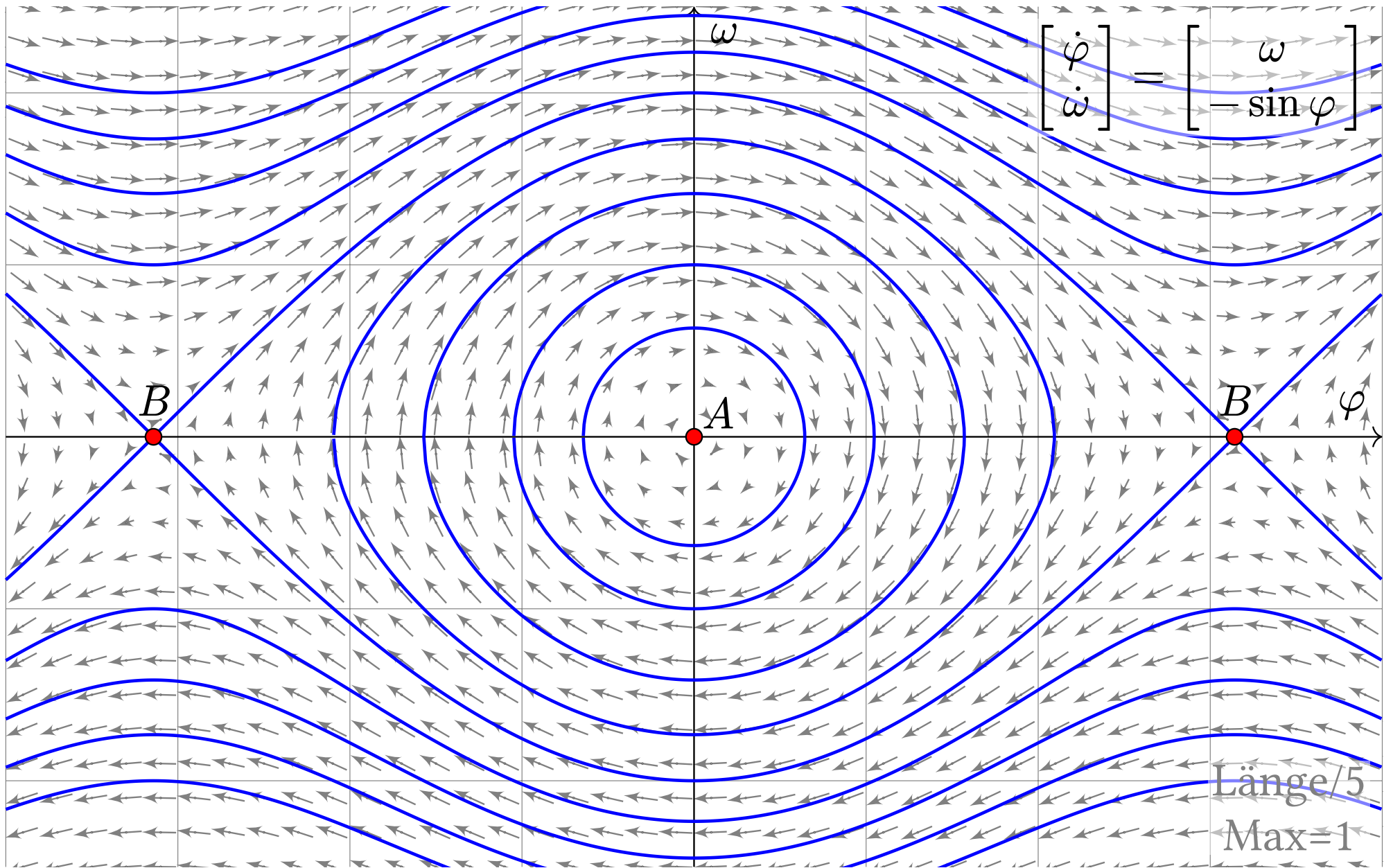
Dynamisches System:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ -(g/l) \sin \varphi - 2\delta\omega \end{bmatrix}$$

Linearisierung um $(\pi, 0)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +(g/l) & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Der Fixpunkt $(\pi, 0)$ ist instabil.



Zweidimensionale Dynamik um einen Fixpunkt

Wir untersuchen das DGSsystem $\dot{u}(t) = A u(t)$ zur Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:
 Polynom $\det(A - XI) = X^2 - 2aX + d$, Eigenwerte $\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - d}$.

Aufgabe: Skizzieren Sie die Dynamik je nach Lage der Eigenwerte und untersuchen Sie das Verhalten von $|u(t)|$ für $t \rightarrow \infty$.

Lösung: Wir unterscheiden zunächst reelle und komplexe Eigenwerte:

$$a^2 < d: \text{ komplex-konjugiert } \lambda_{1,2} = a \pm ib, \quad A \sim \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

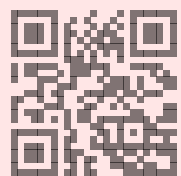
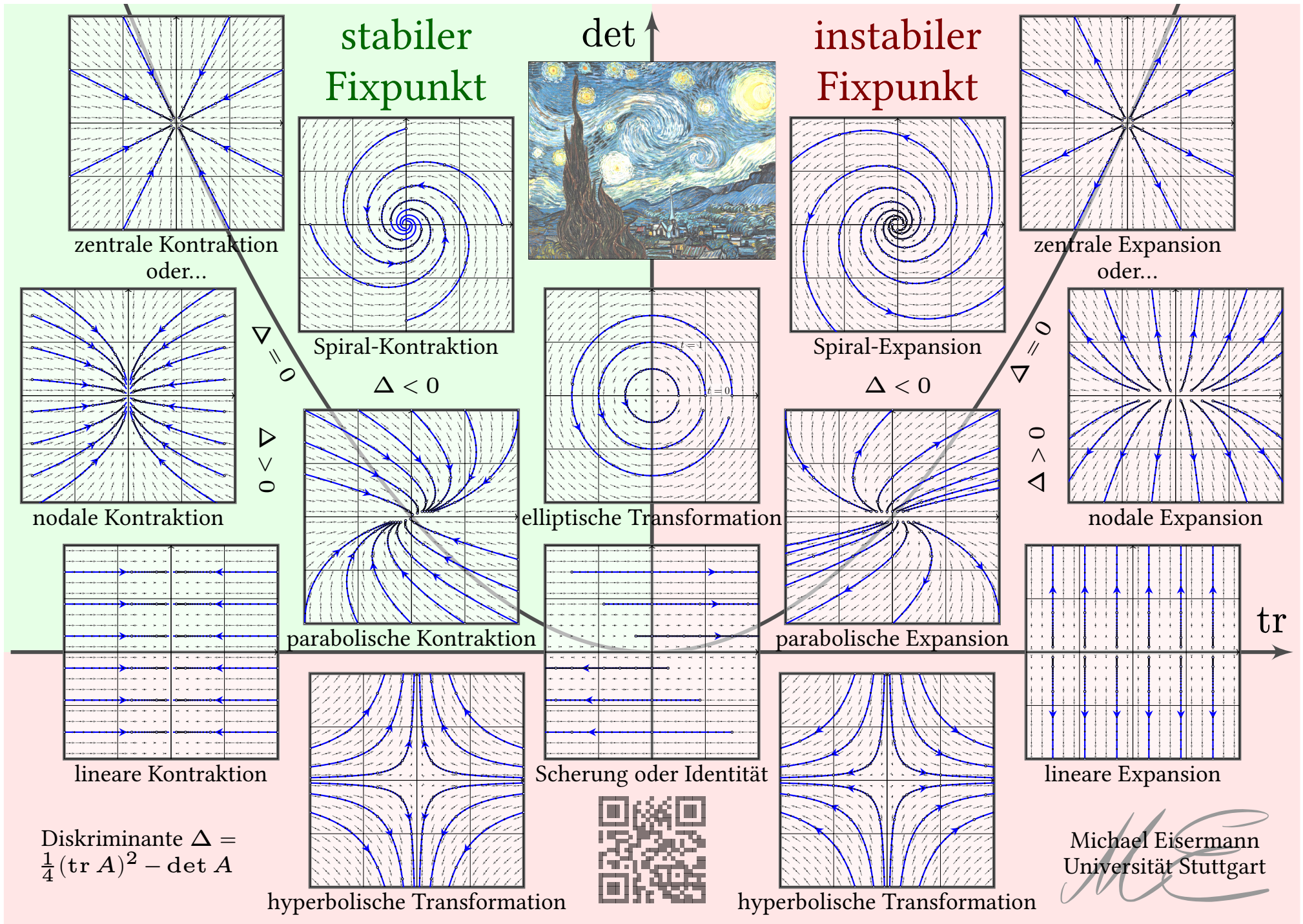
$$a^2 > d: \text{ zwei reelle Eigenwerte } \lambda_1 < \lambda_2, \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

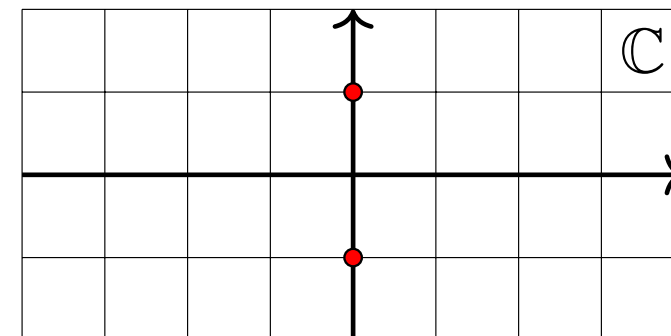
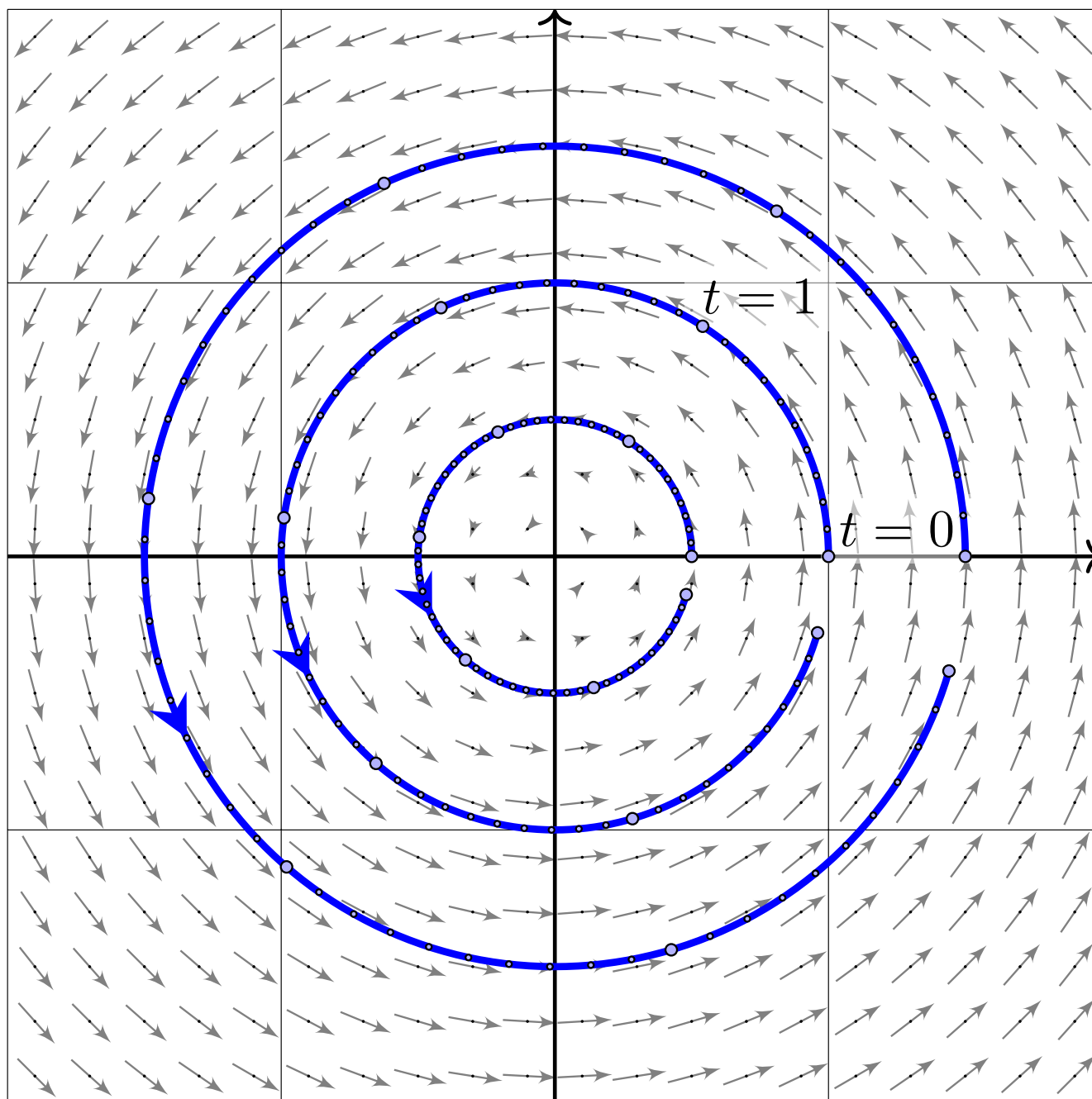
$$a^2 = d: \text{ ein doppelter Eigenwert } \lambda, \quad A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Zweidimensionale Dynamik um einen Fixpunkt

Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.





Komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \pm ib$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

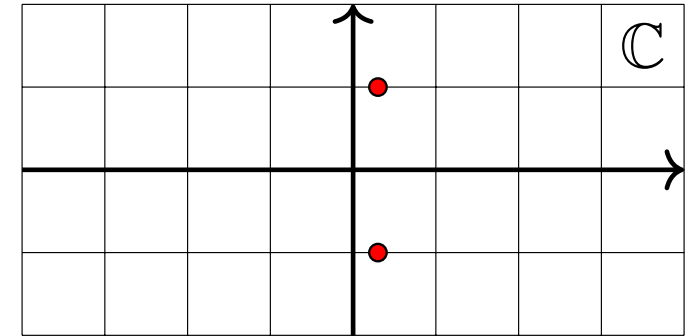
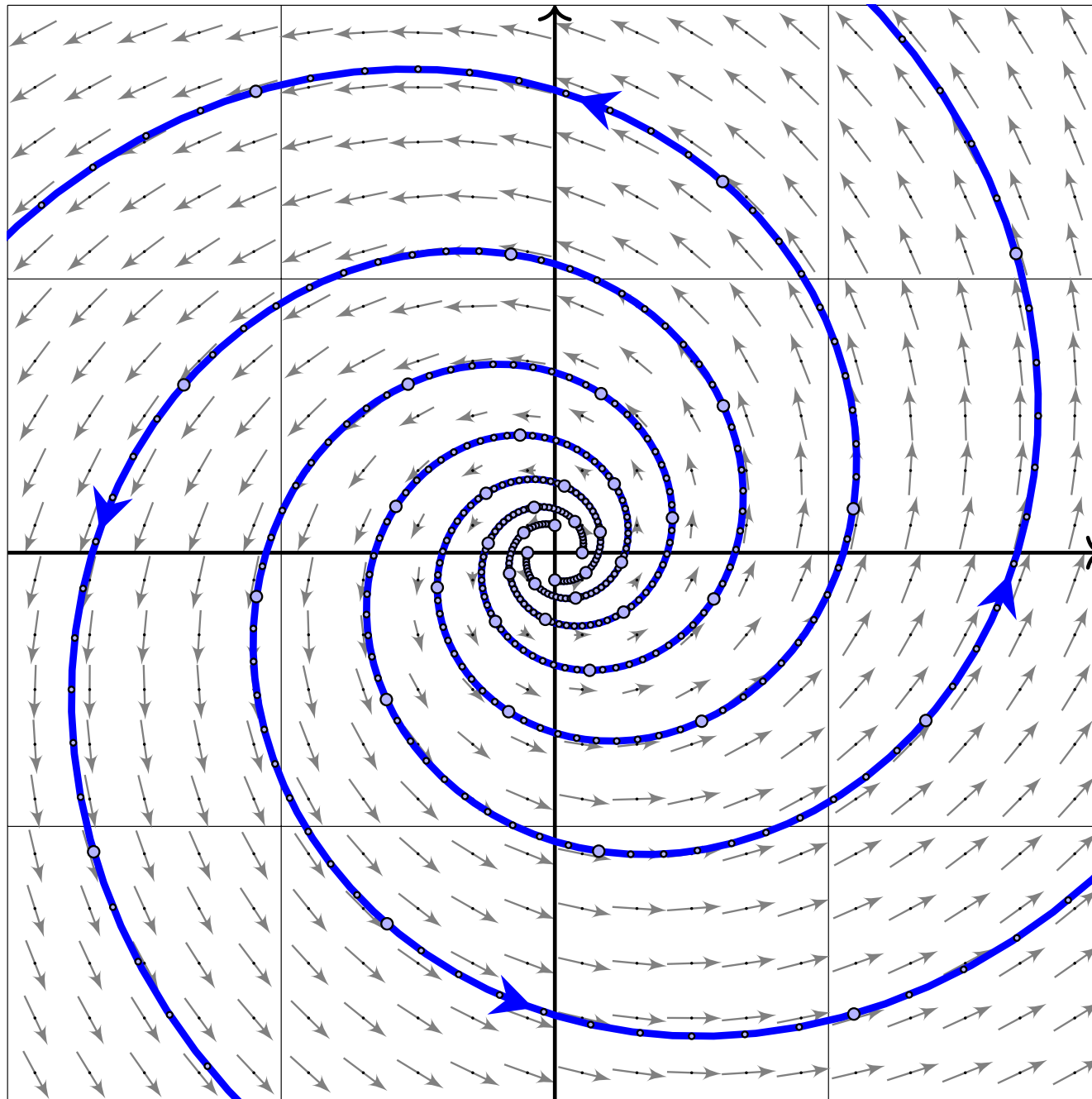
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Instabiler Strudel: Spiral-Expansion



Komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = a \pm ib, \quad a > 0$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

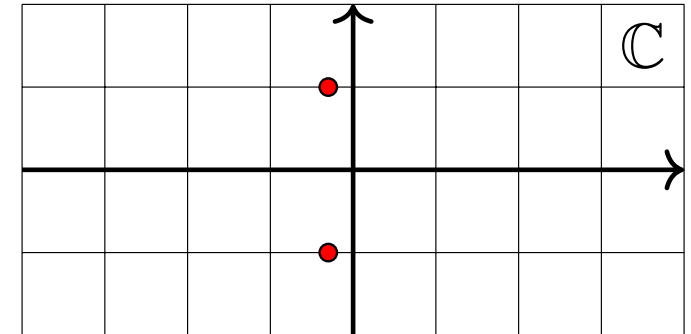
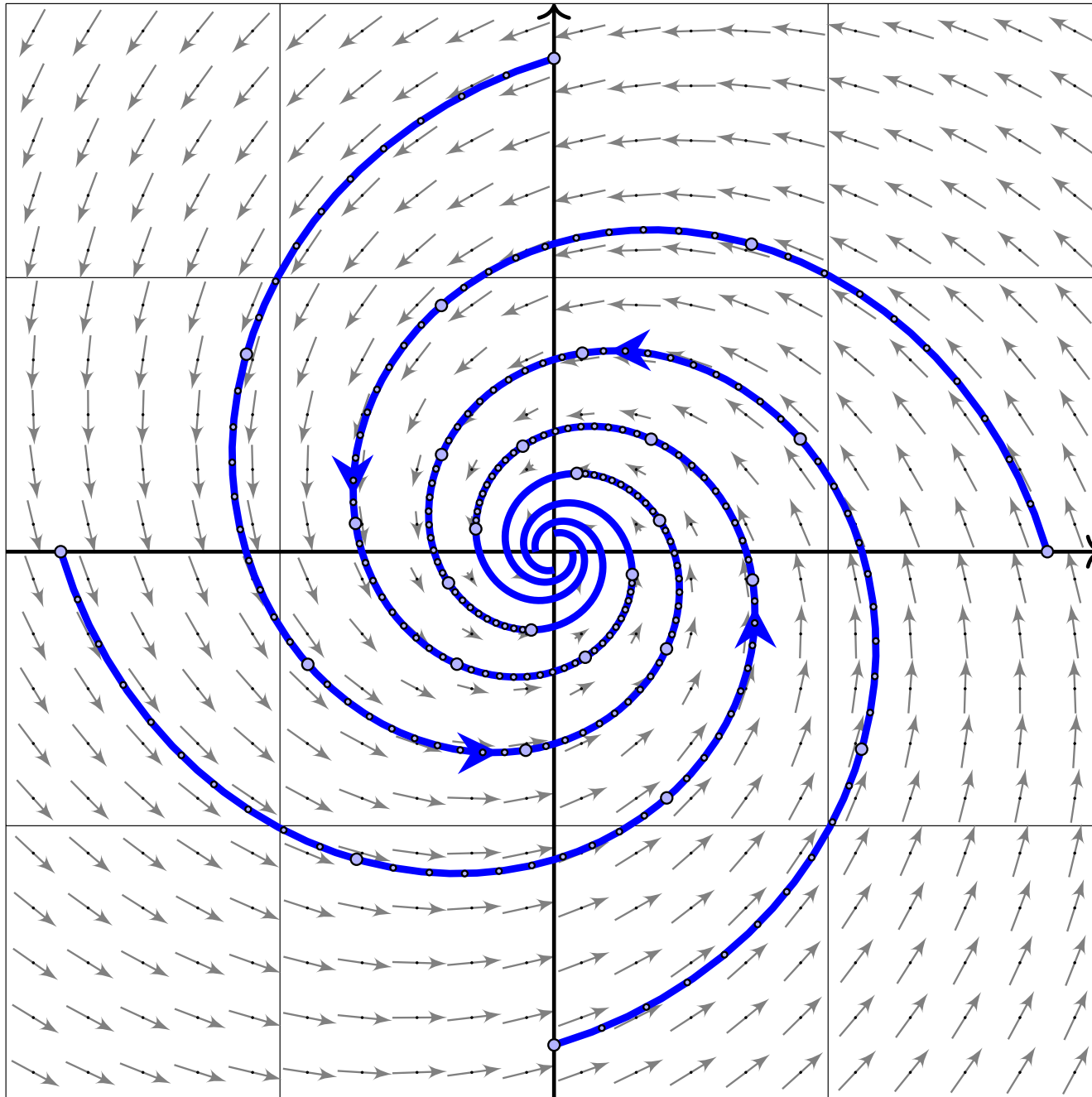
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & -1 \\ 1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{0.3t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Stabiler Strudel: Spiral-Kontraktion



Komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = a \pm ib, \quad a < 0$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

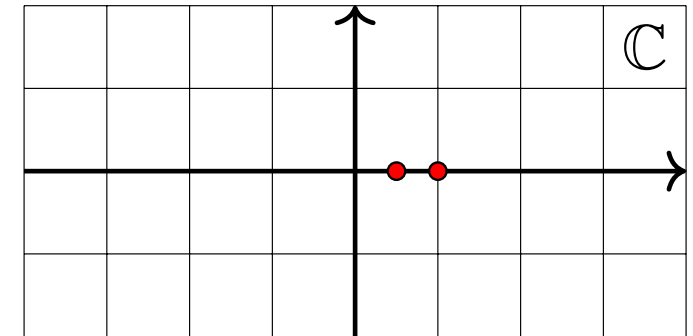
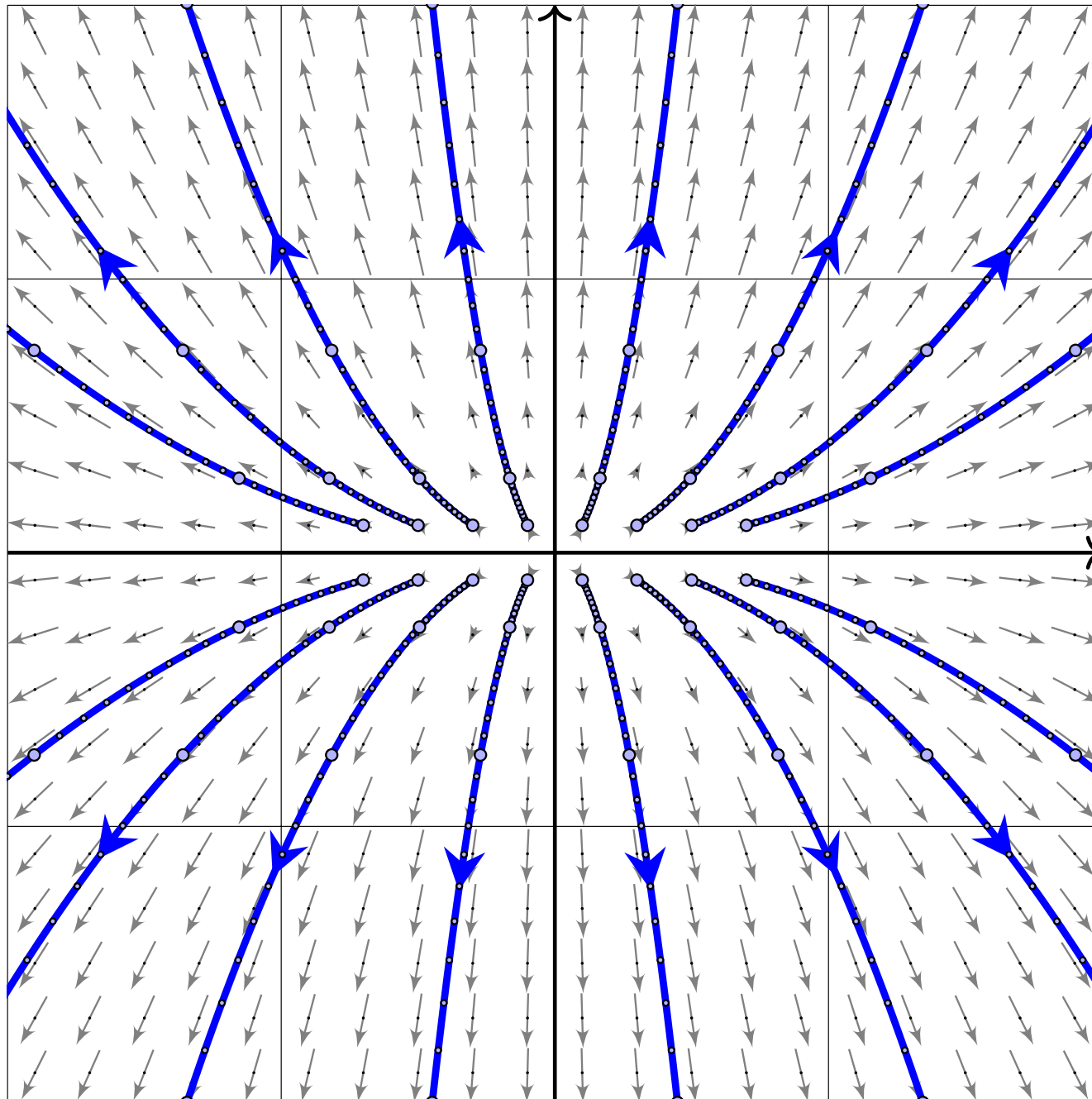
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -0.3 & -1 \\ 1 & -0.3 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{-0.3t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Instabiler Knoten: nodale Expansion



Zwei reelle Eigenwerte

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

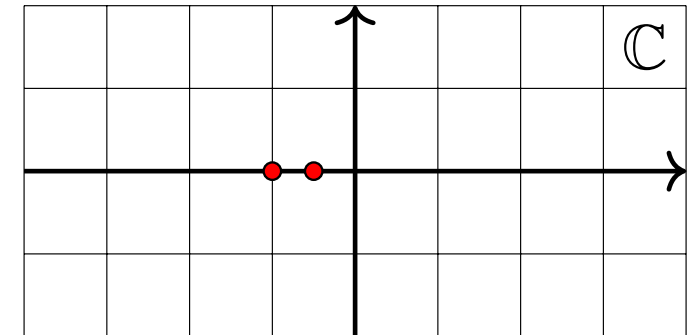
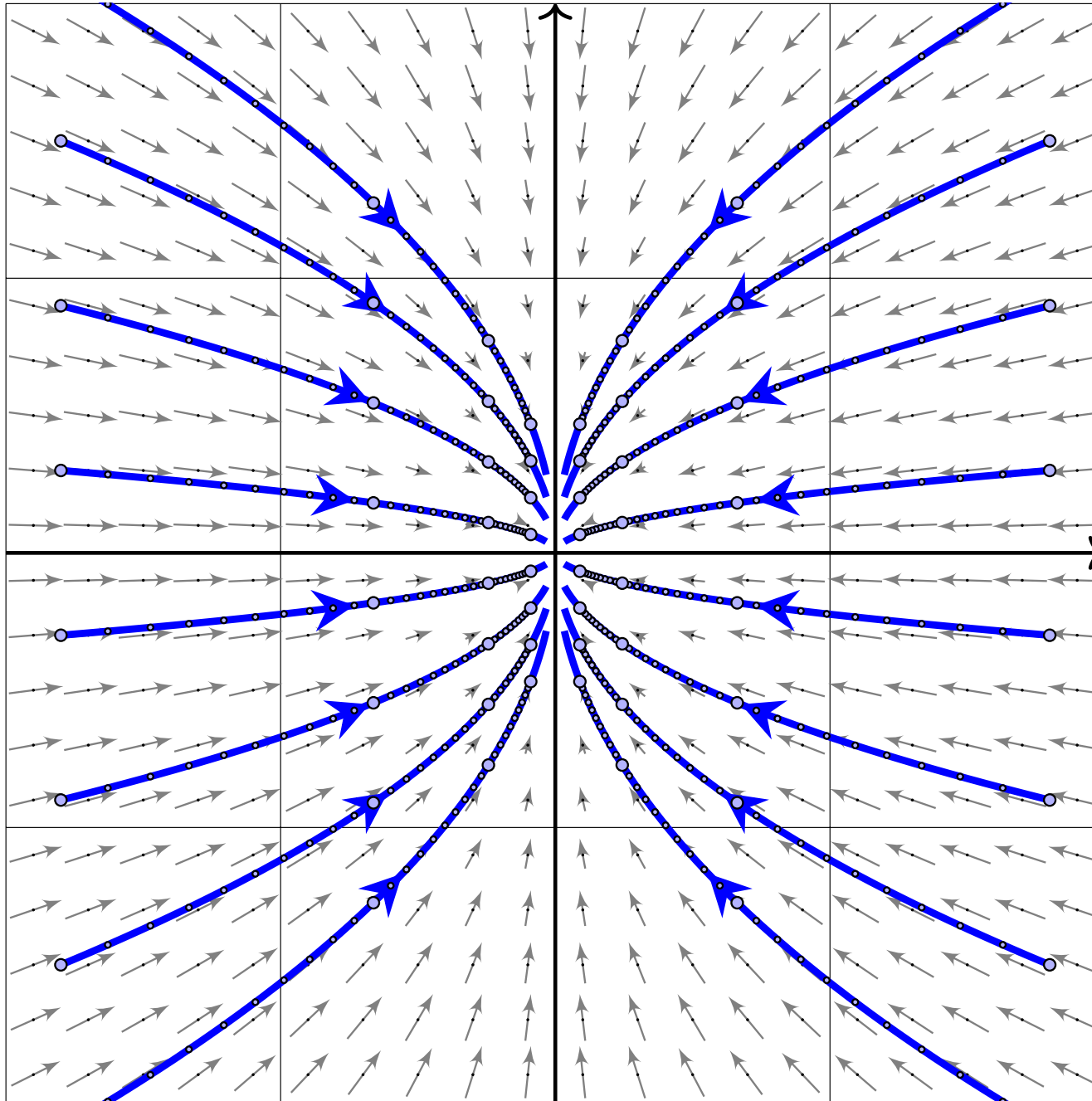
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Stabiler Knoten: nodale Kontraktion



Zwei reelle Eigenwerte

$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

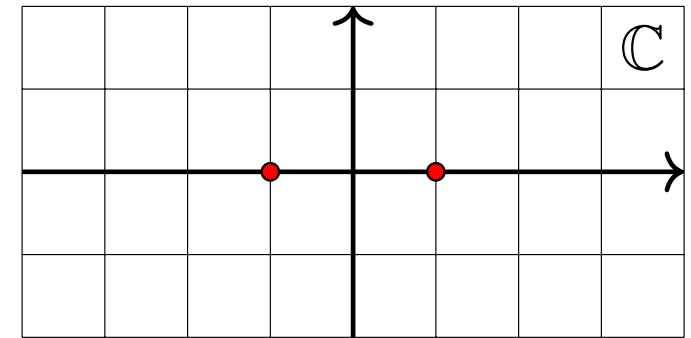
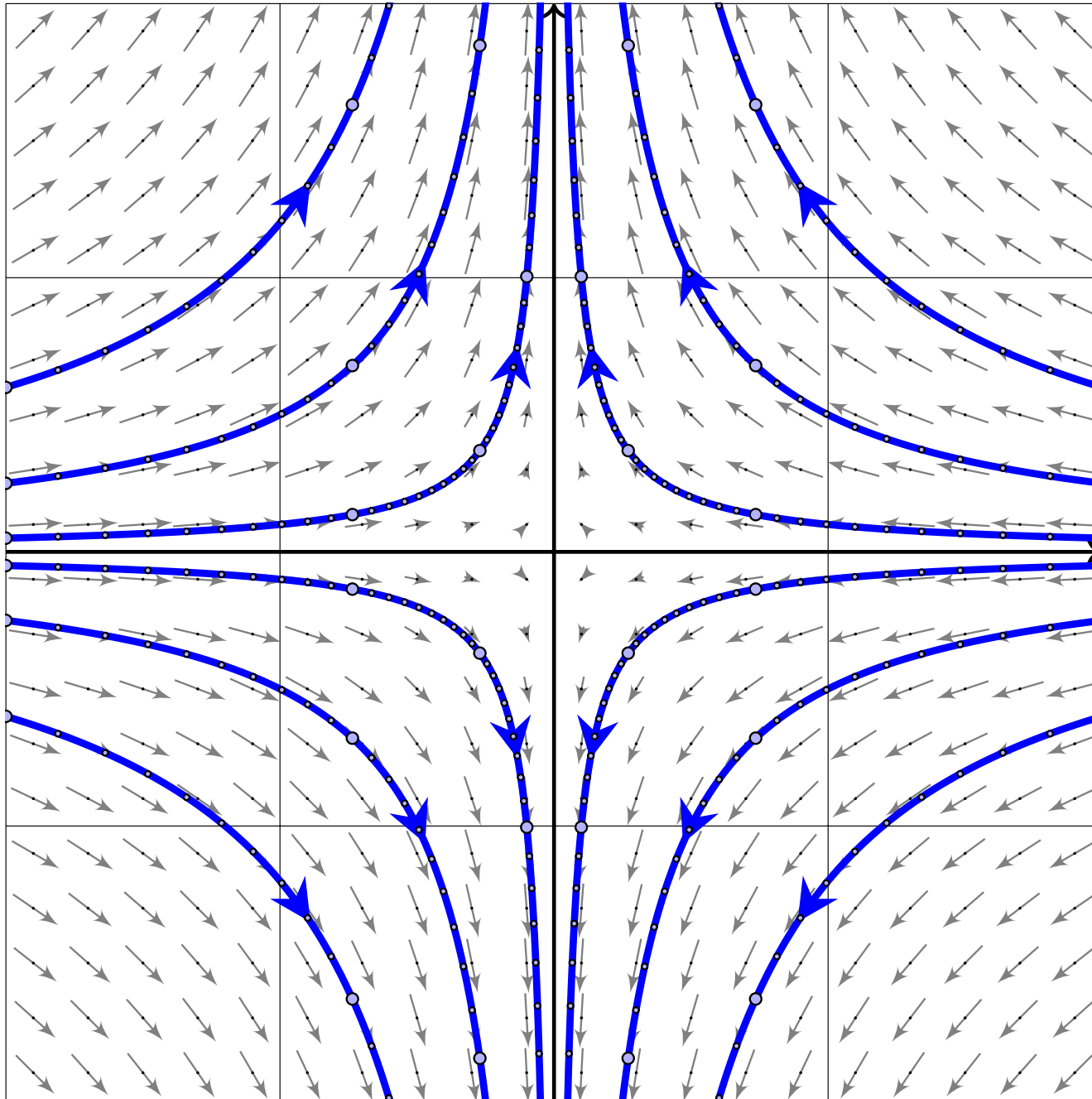
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{bmatrix}$$

Sattelpunkt: hyperbolische Transformation



Zwei reelle Eigenwerte

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

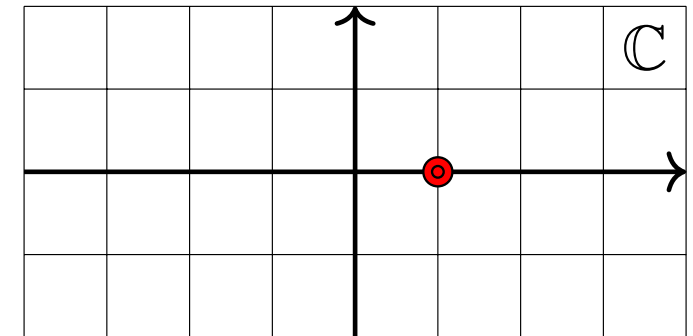
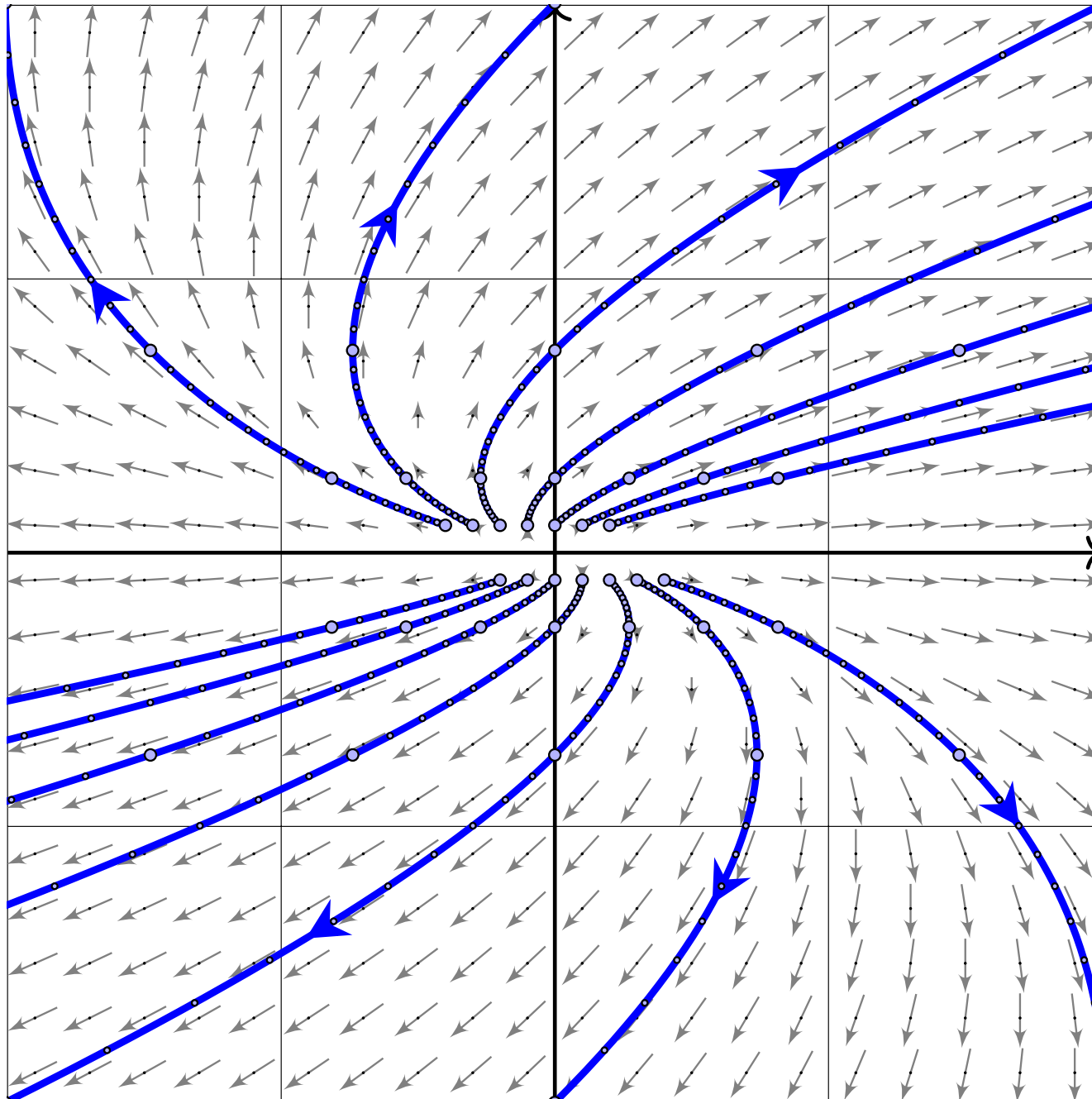
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Instabiler Knoten: parabolische Expansion



Doppelter Eigenwert
 $\lambda > 0$

Nicht-diagonalisierbar

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

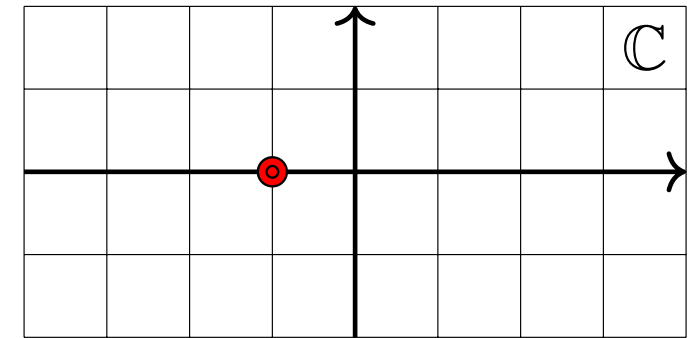
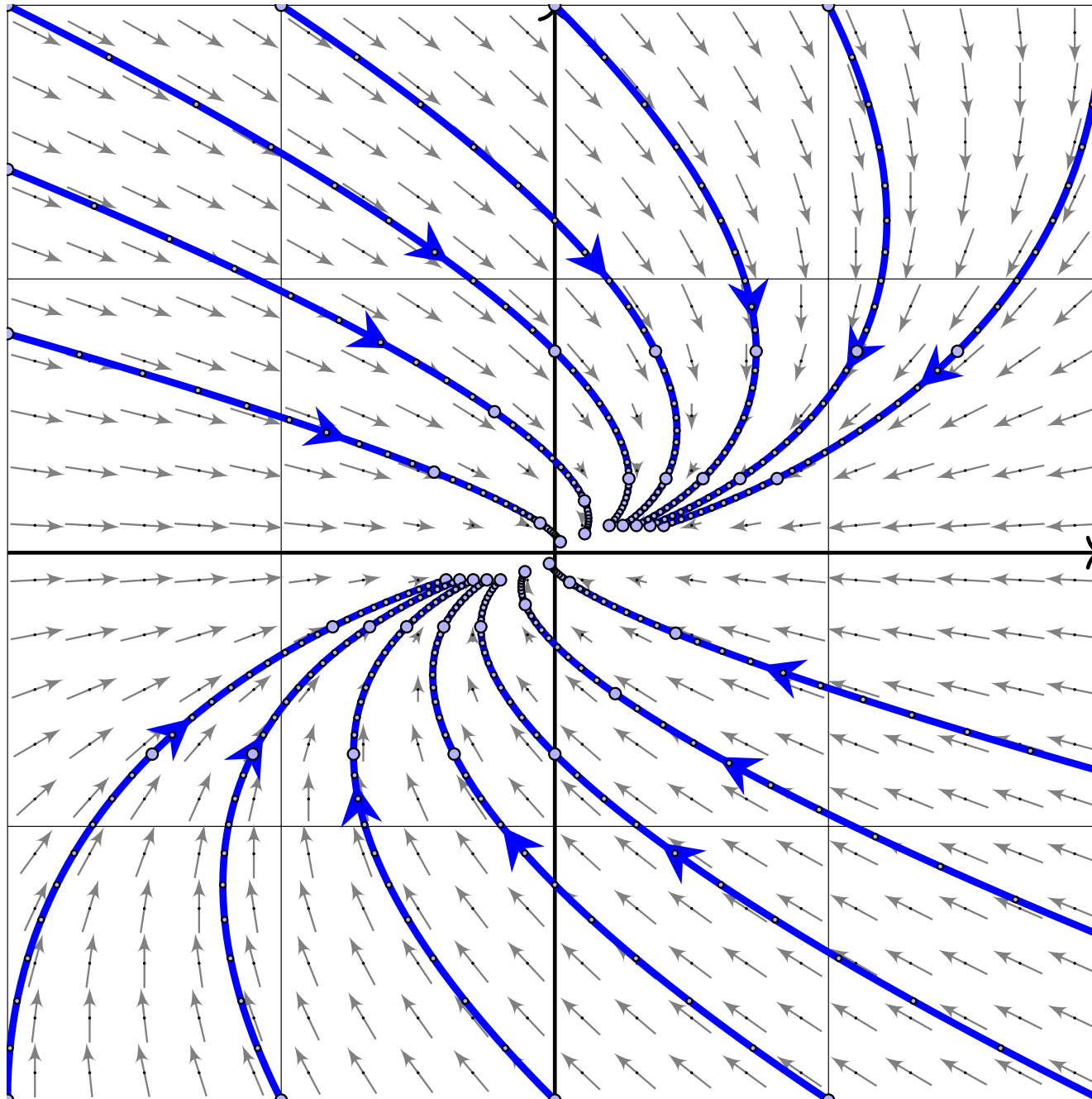
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t & t e^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Stabiler Knoten: parabolische Kontraktion



Doppelter Eigenwert
 $\lambda < 0$

Nicht-diagonalisierbar

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

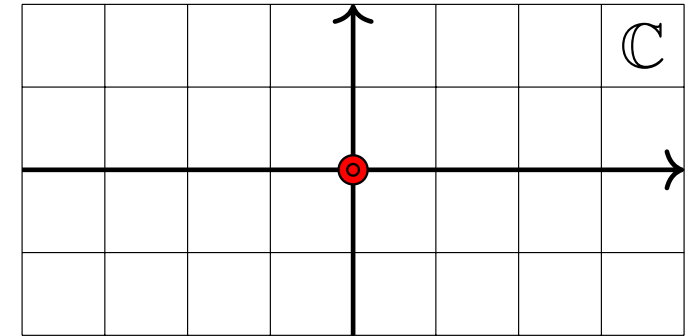
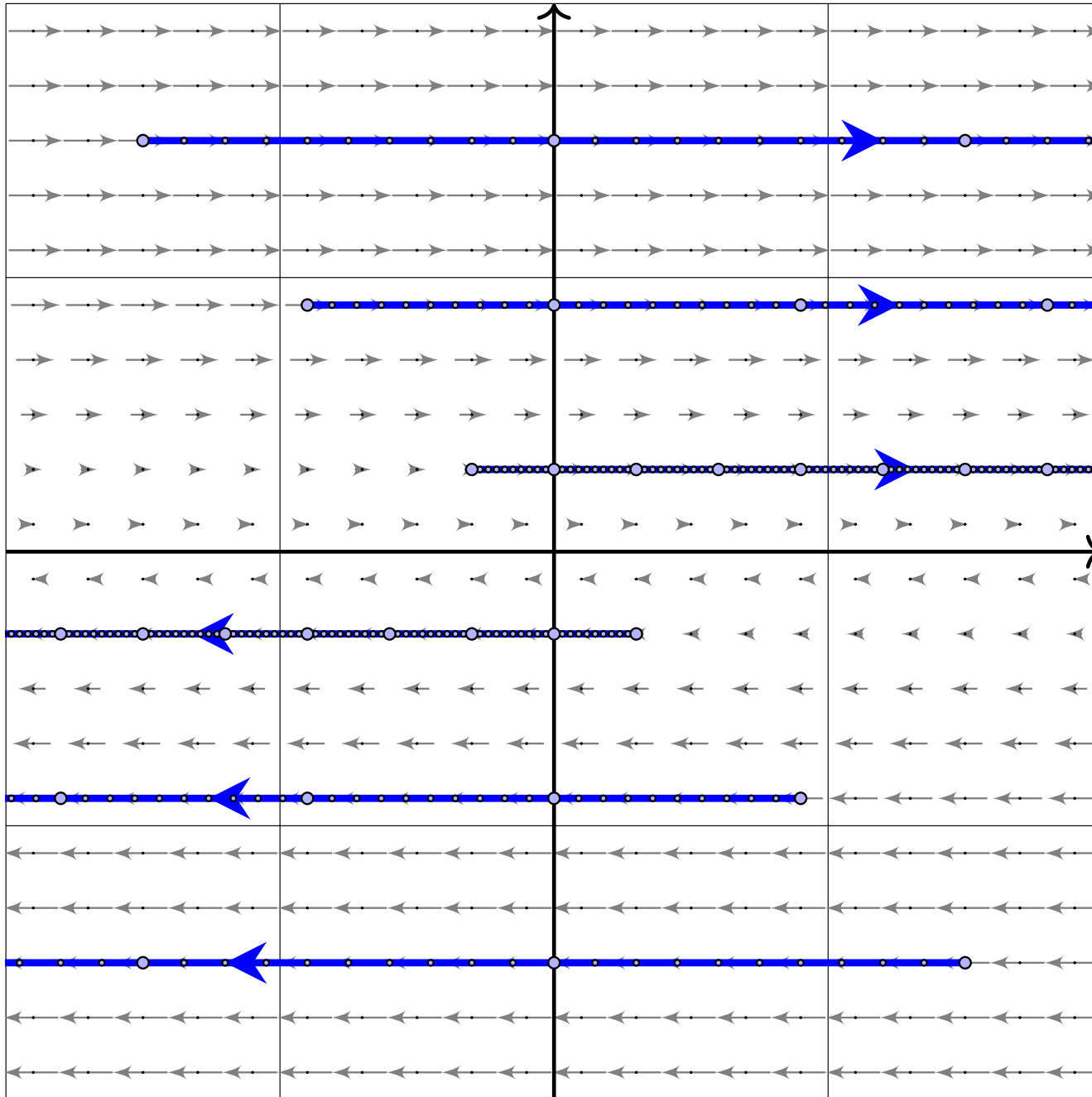
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & t e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Scherung



Doppelter Eigenwert
 $\lambda = 0$

Nicht-diagonalisierbar

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

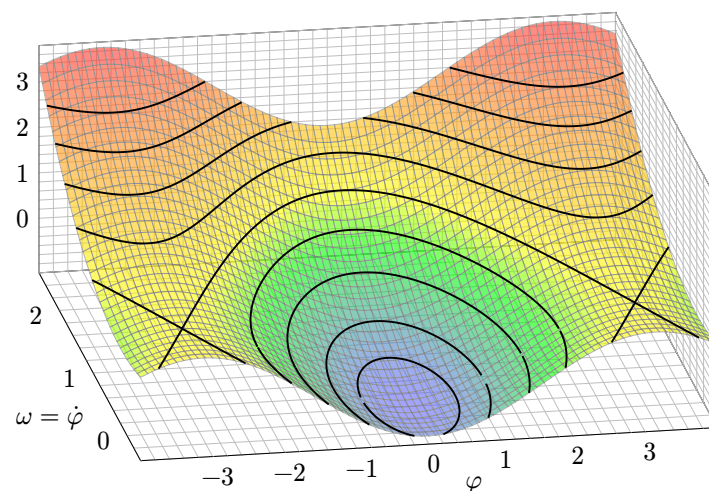
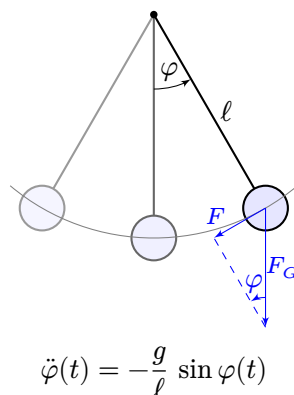
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kapitel Q

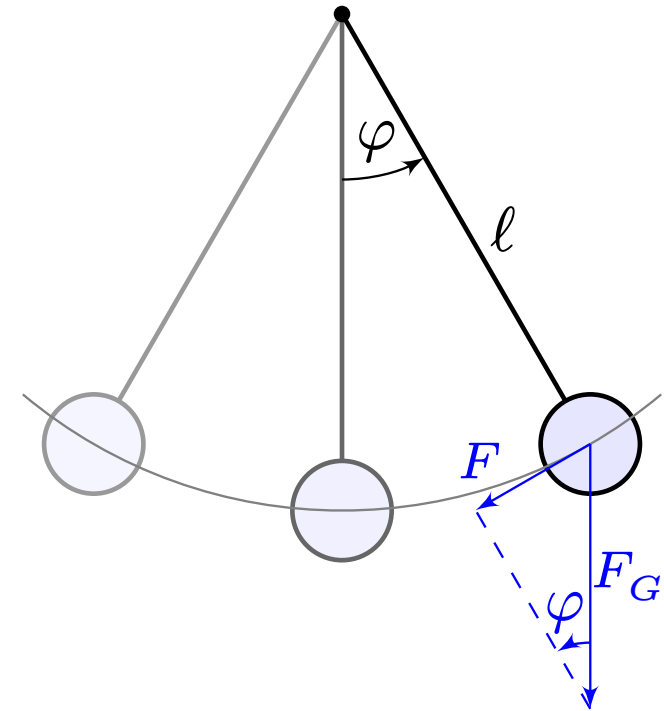
Bonusmaterial



*Euch, euren Kindern und dem gesamten Gemeinwesen Glück und Segen! [...]
Für die Städte sind keine Bollwerke oder Mauern zuverlässigere Schutzwälle als
Bürger, die sich durch Bildung, Klugheit und andere Tugenden auszeichnen.
Philipp Melanchthon (1497–1560), Lobrede auf die neue Schule, Nürnberg 23.05.1526*

5 Dynamische In/Stabilität

Das mathematische Pendel

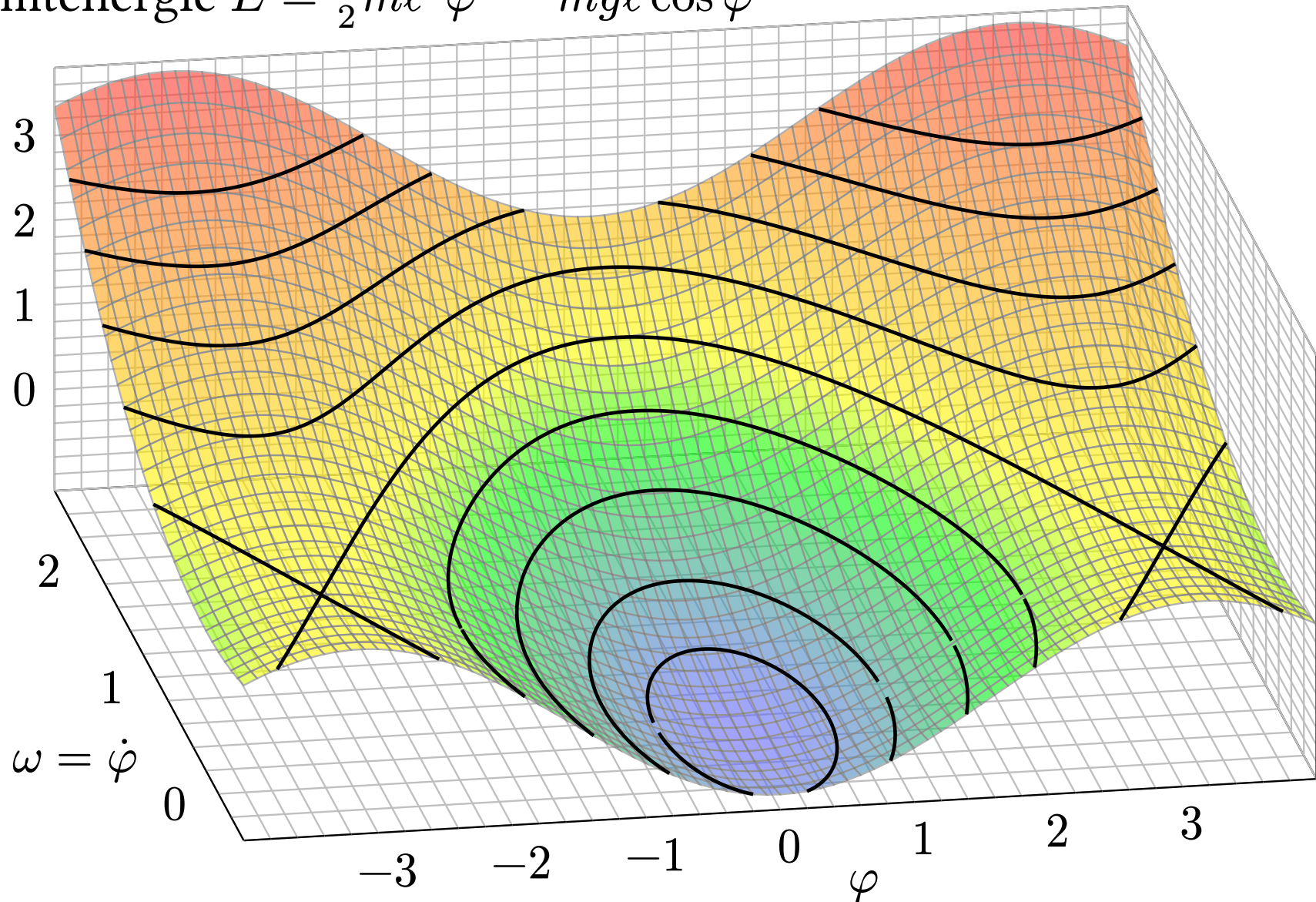


$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \sin \varphi(t)$$

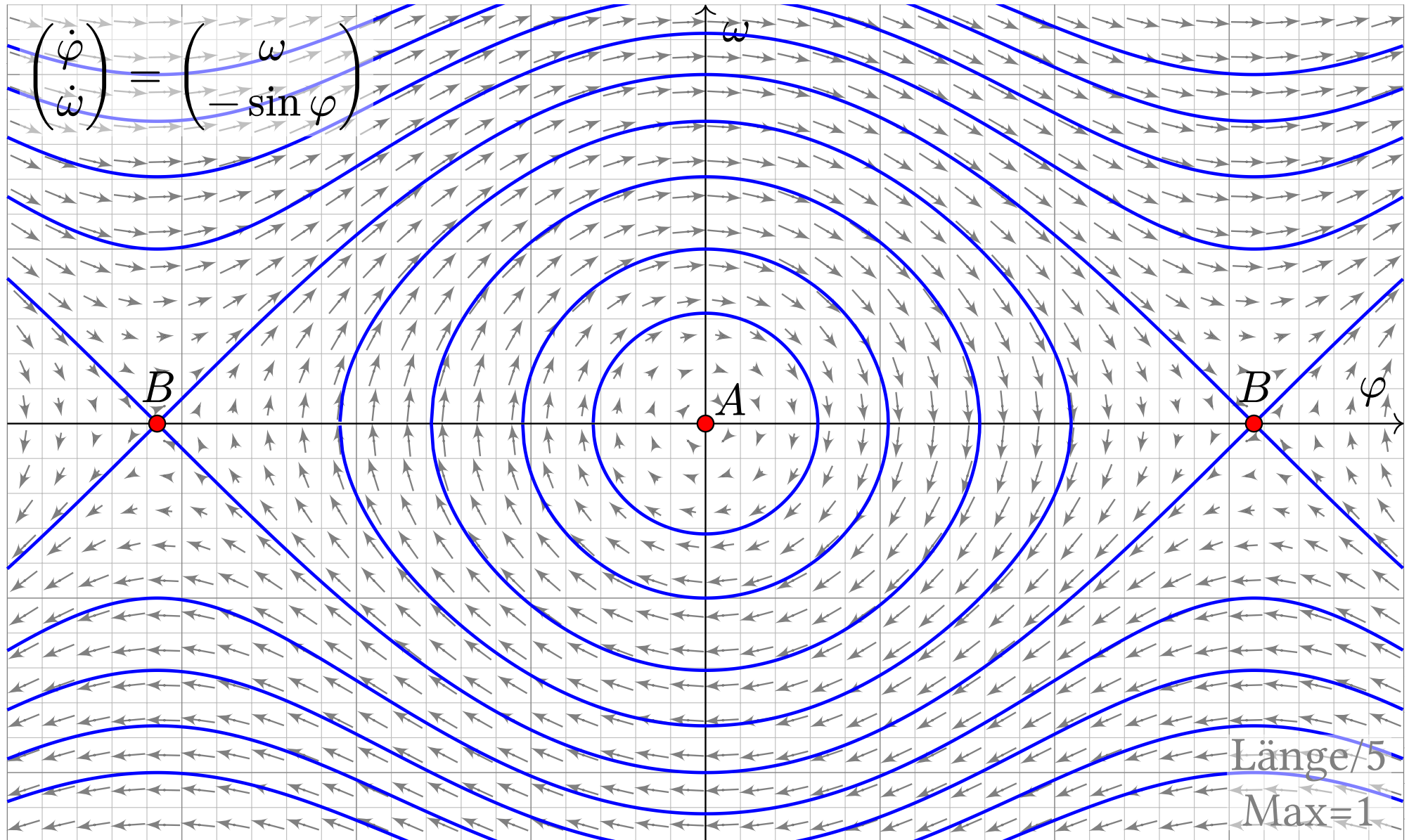
Aufgabe: Beschreiben Sie das mathematische Pendel als dynamisches System. Formulieren und beweisen Sie hierzu die Energieerhaltung. Nutzen Sie dieses Potential zur Berechnung der Lösungskurven.

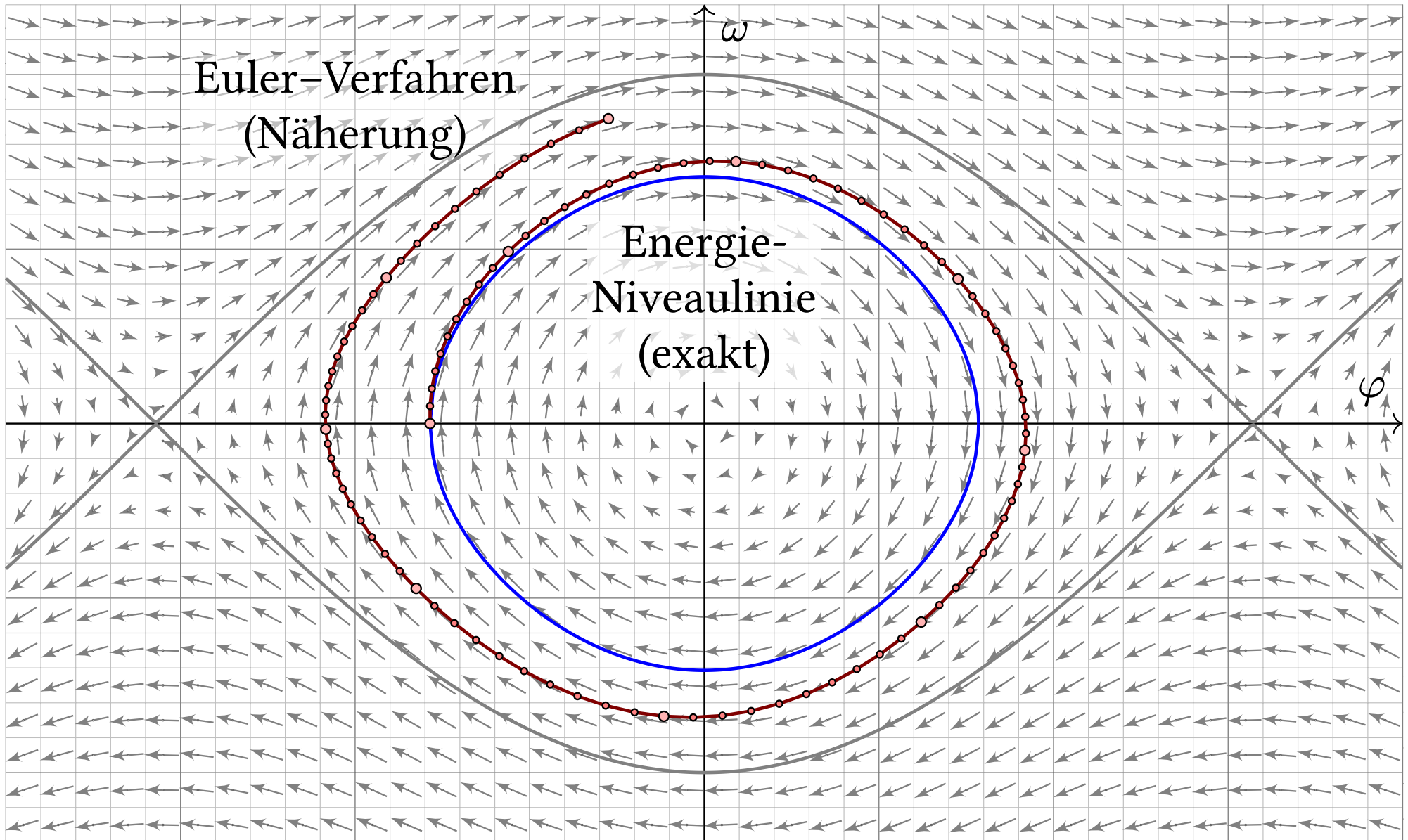
Das mathematische Pendel: Energiefläche

$$\text{Gesamtenergie } E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi$$

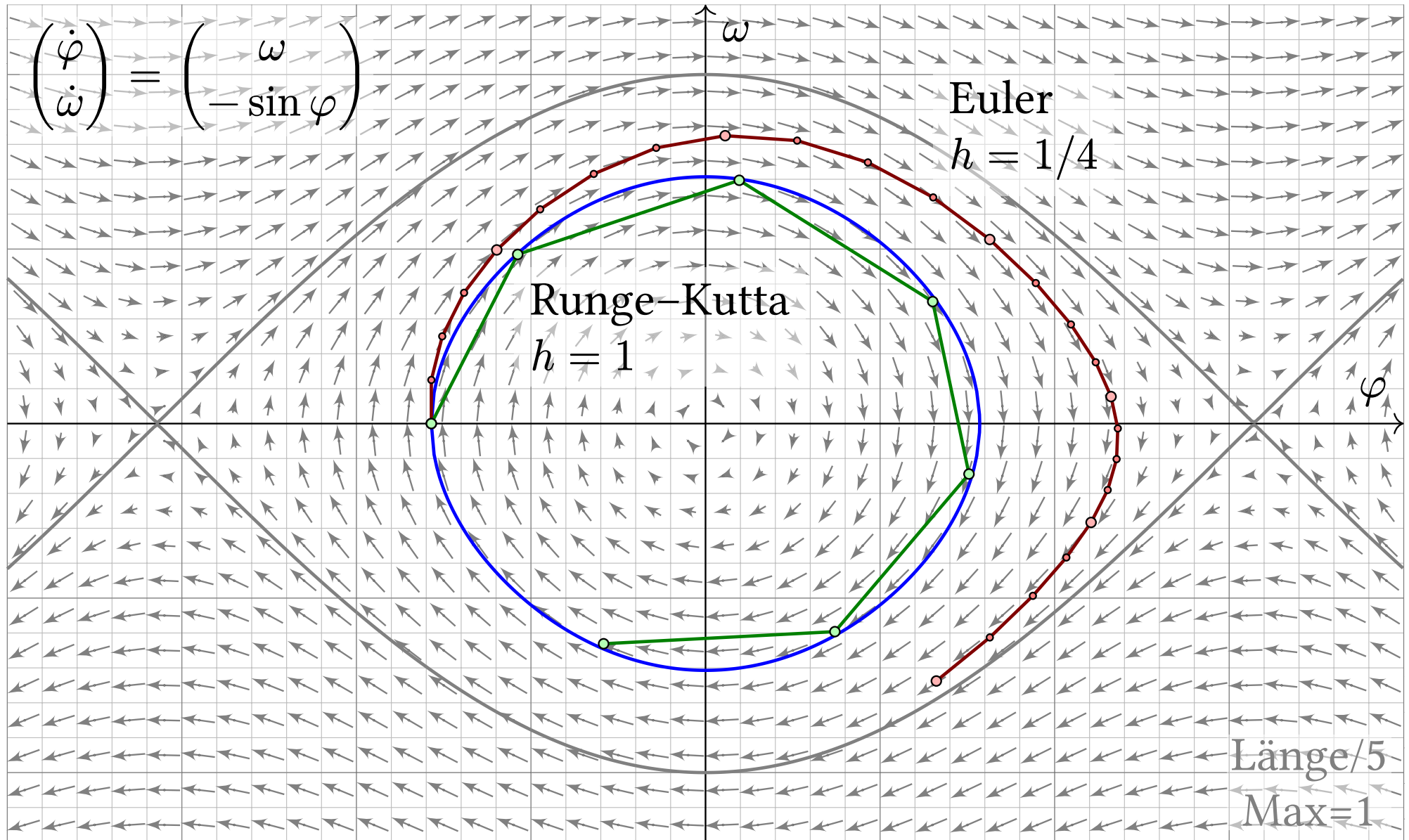


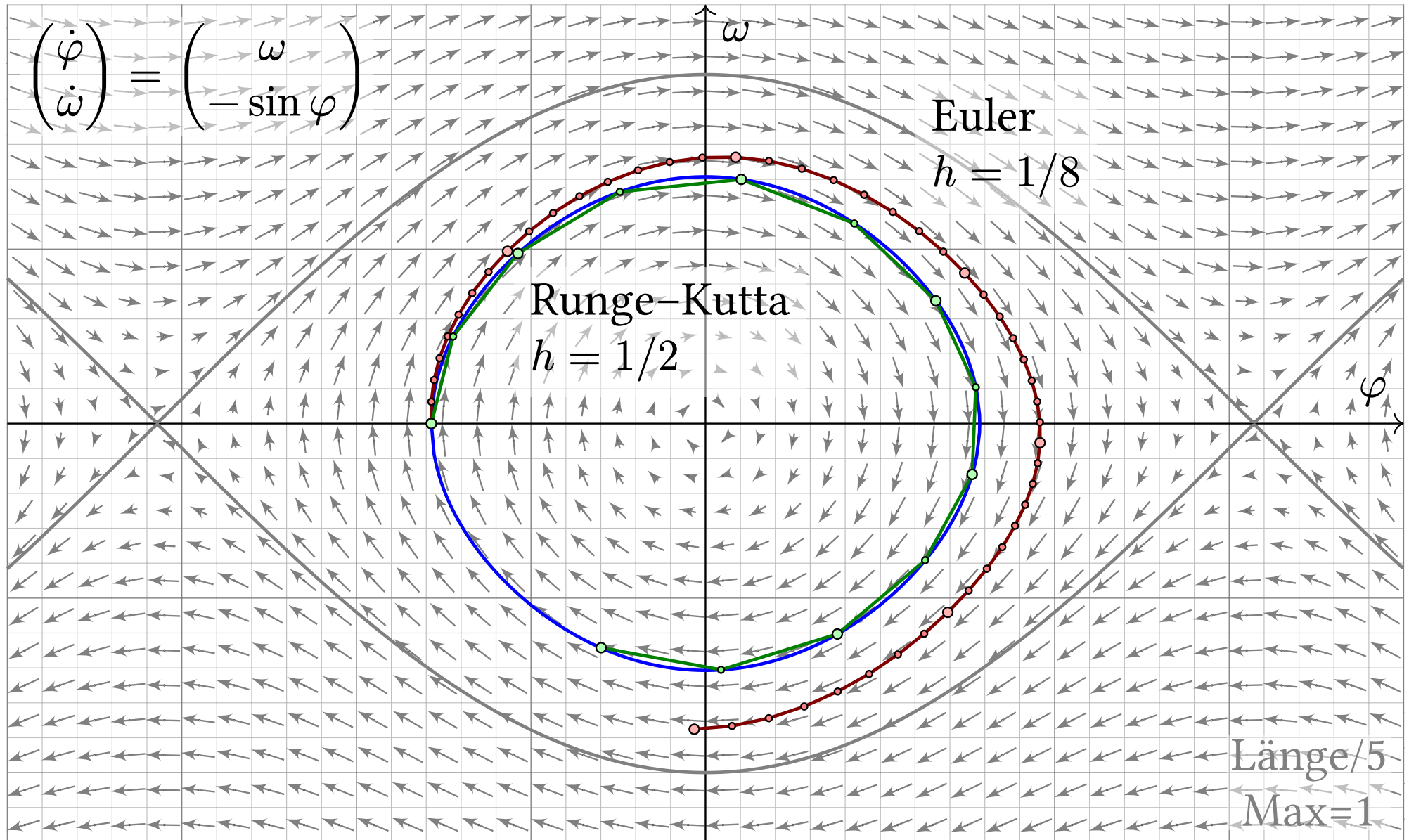
Das mathematische Pendel: Lösungskurven

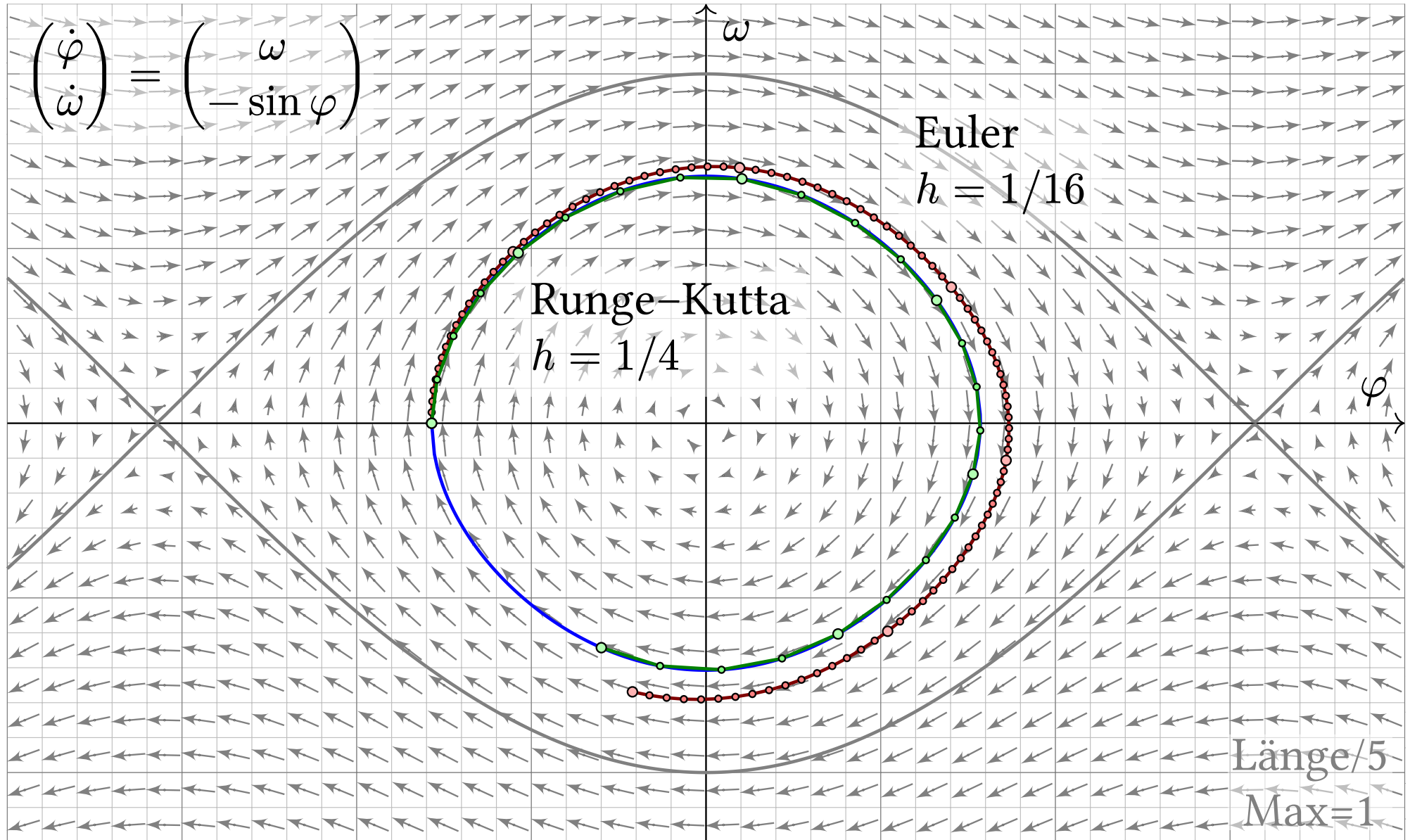


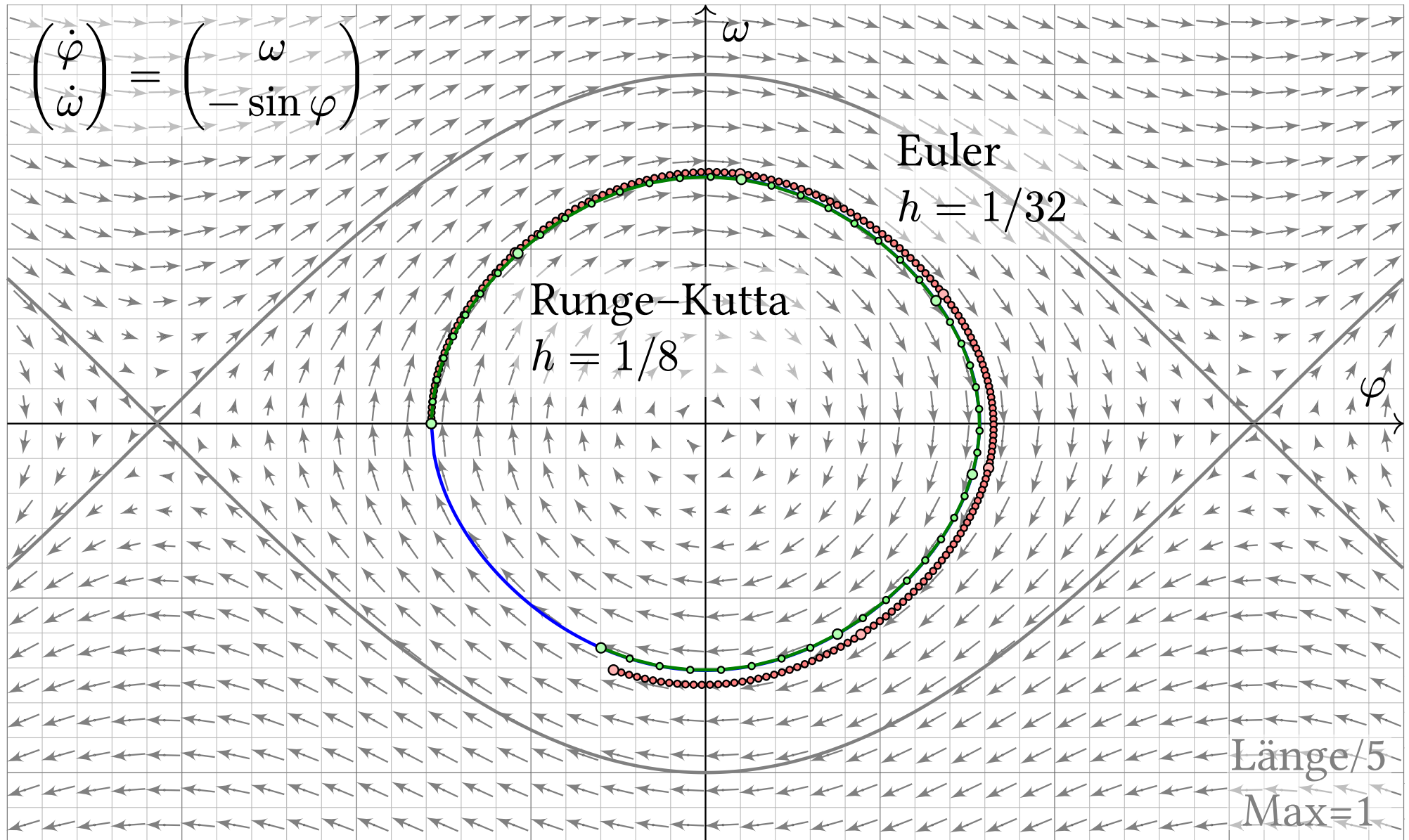


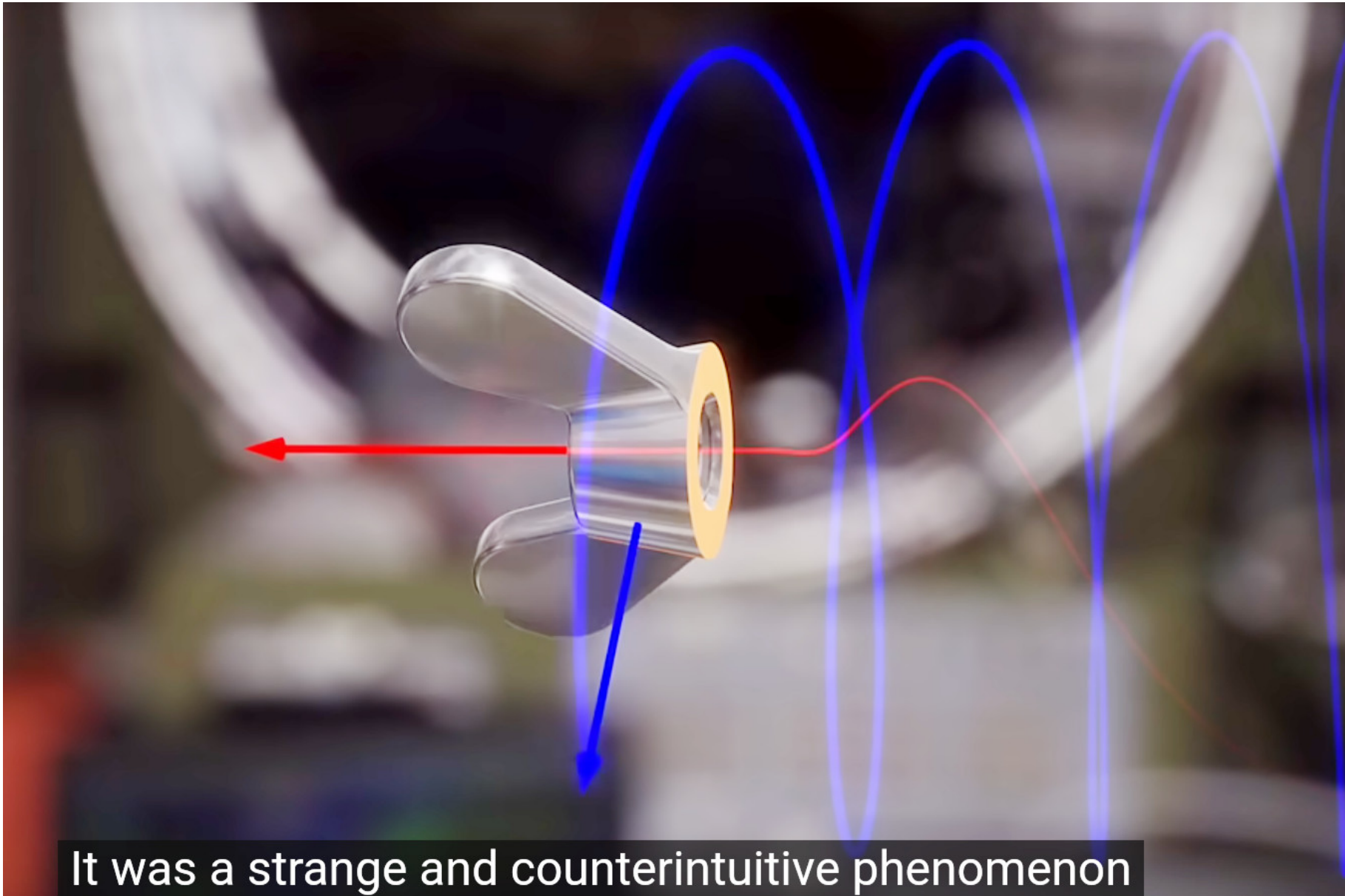
Näherungsverfahren: von Euler zu Runge-Kutta











The bizarre behavior of rotating bodies

Veritasium, youtu.be/1VPfZ_XzisU

Wir betrachten einen rotierenden Körper.

Die Masseverteilung bestimmt das Trägheitsmoment $\Theta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Die Drehbewegung wird beschrieben durch die **Euler-Gleichungen**:

$$\Theta \dot{\omega} = (\Theta \omega) \times \omega + M$$

Zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ ist $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$ die Winkelgeschwindigkeit.

Das Trägheitsmoment $\Theta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ diagonalisieren wir in **Hauptachsen**:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \dot{\omega}_1 \\ \theta_2 \dot{\omega}_2 \\ \theta_3 \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \omega_1 \\ \theta_2 \omega_2 \\ \theta_3 \omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\theta_2 - \theta_3)\omega_2\omega_3 + M_1 \\ (\theta_3 - \theta_1)\omega_3\omega_1 + M_2 \\ (\theta_1 - \theta_2)\omega_1\omega_2 + M_3 \end{bmatrix}$$

Aufgabe: Sei $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$. Bestimmen Sie Fixpunkte und Stabilität.

Der torkelnde Tennisschläger / *intermediate axis theorem*

Lösung: (1) Es gibt genau die Fixpunkte $(\omega_1, 0, 0)$, $(0, \omega_2, 0)$, $(0, 0, \omega_3)$.
 (2) Wir linearisieren, dazu berechnen wir zunächst die Jacobi-Matrix:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} = f \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} \alpha_1 \omega_2 \omega_3 \\ \alpha_2 \omega_3 \omega_1 \\ \alpha_3 \omega_1 \omega_2 \end{bmatrix} \Rightarrow f' \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \omega_3 & \alpha_1 \omega_2 \\ \alpha_2 \omega_3 & 0 & \alpha_2 \omega_1 \\ \alpha_3 \omega_2 & \alpha_3 \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Linearisiert um den Fixpunkt $(0, \omega_2, 0)$ erhalten wir $\dot{u} = Au$:

$$A = f' \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 \omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= -\lambda(\lambda^2 - \alpha_1 \alpha_3 \omega_2^2) \\ &= -\lambda(\lambda^2 - \omega_2^2 (\theta_3 - \theta_2)(\theta_2 - \theta_1) / \theta_1 \theta_3) \end{aligned}$$

Eigenwerte sind 0 und $\pm \omega_2 \sqrt{(\theta_3 - \theta_2)(\theta_2 - \theta_1) / \theta_1 \theta_3}$. Daraus folgt:

Satz Q5A: torkelnder Tennisschläger / *intermediate axis theorem*

Die Rotation um die mittlere Achse ist instabil: Jede kleine Störung wird exponentiell verstärkt mit $e^{\lambda t}$ und $\lambda = |\omega_2| \sqrt{(\theta_3 - \theta_2)(\theta_2 - \theta_1) / \theta_1 \theta_3}$.

Kapitel R

Lineare Algebra über \mathbb{Z} und $\mathbb{K}[X]$: Elementarteilersatz und Anwendungen

Zwar hatte Herr Fourier die Meinung, das Hauptziel der Mathematik sei der Gemeinnutzen (l'utilité publique) und die Erklärung der Naturphänomene; aber ein Philosoph wie er hätte wissen müssen, dass das einzige Ziel der Wissenschaft die Ehre des menschlichen Geistes ist und bei diesem Anspruch eine Frage über Zahlen ebensoviel wert ist wie eine Frage über das Weltsystem.
Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) an Adrien-Marie Legendre (1752–1833)

Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

Dieses schöne Thema ist suspendiert.

Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

Kapitel R

Bonusmaterial

ARGENT, MACHINISME, ALGÈBRE.

Les trois monstres de la civilisation actuelle.

Machine : la méthode se trouve dans la chose, non dans l'esprit.

Algèbre : la méthode se trouve dans les signes, non dans l'esprit.

Simone Weil (1909–1943), zitiert nach Laurent Lafforgue

Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

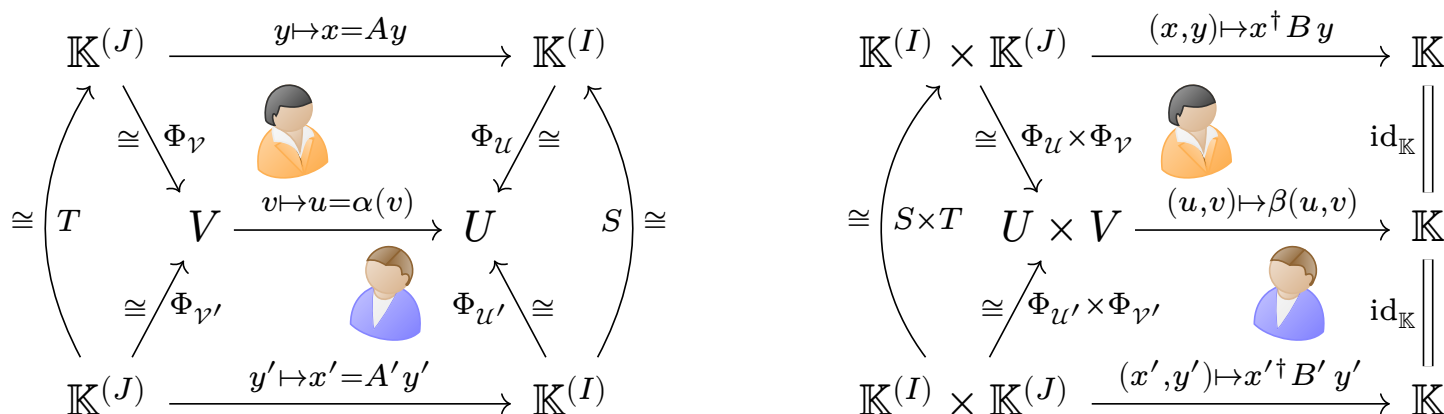
Dieses schöne Thema ist suspendiert.

Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

Kapitel S

Vektorräume mit Skalarprodukt



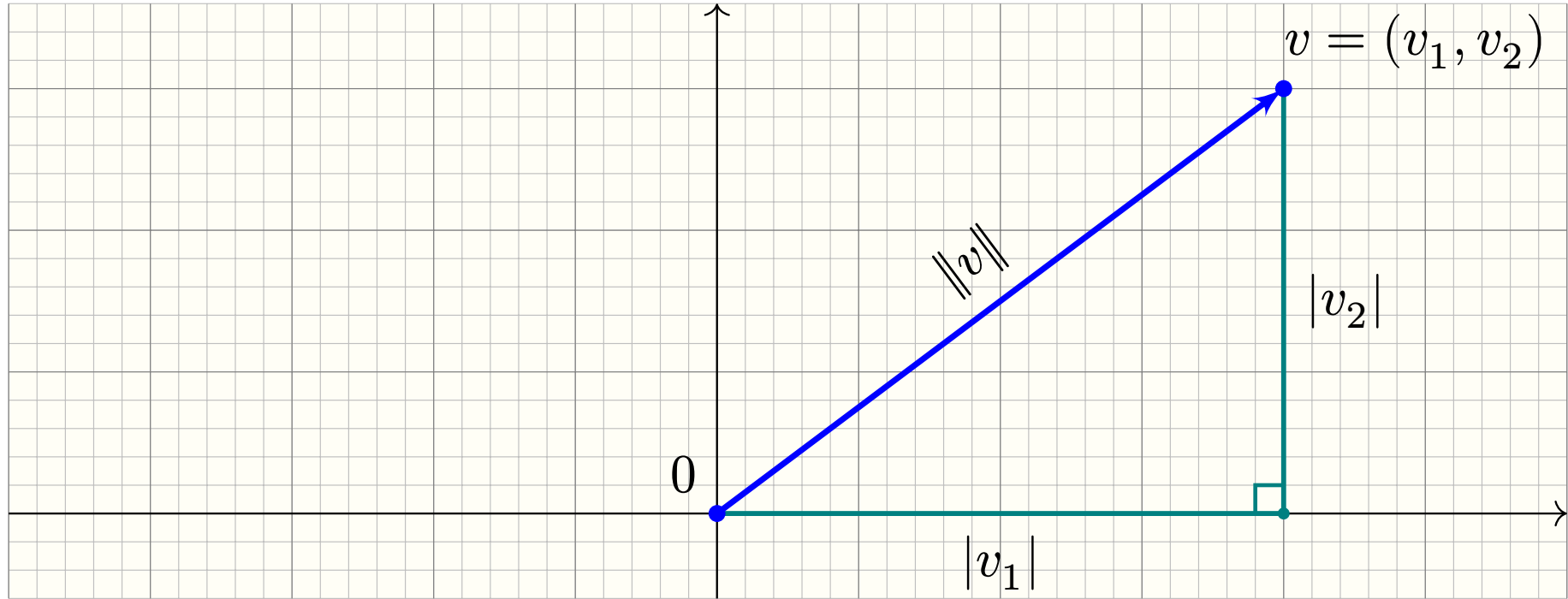
Unsere Allergrößen, wie Archimedes, Newton, Gauß, haben stets Theorie und Anwendungen gleichmäßig umfasst.

Felix Klein (1849–1925)

Inhalt dieses Kapitels S

- 1 Hermitesche Sesquilinearformen über (\mathbb{K}, σ)
- 2 Skalarprodukte über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$
- 3 Orthonormalisierung und Bestapproximation
- 4 Isometrien und unitäre Endomorphismen

Euklidische Norm: Länge eines Vektors im \mathbb{R}^n



$$|v| = \|v\| = \sqrt{|v_1|^2 + \dots + |v_n|^2}$$

Das euklidische Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^n

Das **euklidische Skalarprodukt** von zwei Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\langle u | v \rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

Die **euklidische Norm** des Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$|v| = \|v\| := \sqrt{\langle v | v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Der **euklidische Abstand** zwischen zwei Punkten $u, v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$d(u, v) := |u - v| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}.$$

Wir nutzen Skalarprodukte nicht nur über \mathbb{R} , auch über \mathbb{C} , sogar \mathbb{H} .

$$\text{conj}_{\mathbb{R}} = \text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \alpha \mapsto \bar{\alpha} = \alpha$$

Demnach gilt $|\alpha|^2 = \bar{\alpha}\alpha = \alpha\bar{\alpha} = \alpha^2 \geq 0$, mit Gleichheit gdw $\alpha = 0$.

$$\text{conj}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z = \alpha + i\beta \mapsto \bar{z} = \alpha - i\beta$$

Demnach gilt $|z|^2 = \bar{z}z = z\bar{z} = \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$, mit Gleichheit gdw $z = 0$.

$$\text{conj}_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} : q = \alpha + i\beta + j\gamma + k\delta \mapsto \bar{q} = \alpha - i\beta - j\gamma - k\delta$$

Es gilt $|q|^2 = q\bar{q} = \bar{q}q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \geq 0$, mit Gleichheit gdw $q = 0$.

Das euklidische Skalarprodukt auf \mathbb{K}^n über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Beispiel S1A: das Standardskalarprodukt auf \mathbb{K}^n über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Auf $V = \mathbb{K}^n$ definieren wir das **Standardskalarprodukt**

$$\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u | v \rangle := \overline{u_1}v_1 + \cdots + \overline{u_n}v_n = u^\dagger v.$$

Für alle Vektoren $u, v, w \in V$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

S0: positive Semidefinitheit, $\langle u | u \rangle \geq 0 = \langle 0 | 0 \rangle$

S1: positive Definitheit, $\langle u | u \rangle > 0$ für $u \neq 0$

S2: konjugierte Symmetrie, $\langle v | u \rangle = \overline{\langle u | v \rangle}$

S3: Linearität rechts, $\langle u | v\lambda + w\mu \rangle = \langle u | v \rangle\lambda + \langle u | w \rangle\mu$

Aus (S2&3) folgt konjugierte Linearität in der ersten Variablen:

S4: Semilinearität links, $\langle u\lambda + v\mu | w \rangle = \overline{\lambda}\langle u | w \rangle + \overline{\mu}\langle v | w \rangle$

Eigenschaften (S3&4) heißen **sesquilinear** (lat. *sesqui*, ‘anderthalb’),

(S2) heißt **hermitesch** zu Ehren von Charles Hermite (1822–1901).

Über \mathbb{R} mit $\text{conj}_{\mathbb{R}} = \text{id}_{\mathbb{R}}$ heißt (S2) **symmetrisch** und (S3&4) **bilinear**.

Was ist ein Ring mit Involution?

Wir arbeiten typischerweise über (\mathbb{K}, σ) mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$.

◆ Definition D1c: involutiver Ring, kurz $*$ Ring

Sei $(\mathbb{K}, +, 0, \cdot, 1)$ ein Ring. Eine **Involution** $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} : a \mapsto a^\sigma = a^*$ erfüllt $(a^\sigma)^\sigma = a$ sowie $(a + b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma$ und $(a \cdot b)^\sigma = b^\sigma \cdot a^\sigma$ für alle $a, b \in \mathbb{K}$, somit $0^\sigma = 0$ und $1^\sigma = 1$. Das Paar (\mathbb{K}, σ) heißt dann **involutiver Ring**.

Beispiele: (0) Jeder kommutative Ring \mathbb{K} ist involutiv mit $\sigma = \text{id}_{\mathbb{K}}$.

(1) Auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist die **Konjugation** $\text{conj}_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ eine Involution.

(2) Ist (\mathbb{K}, σ) ein involutiver Ring, so auch $(\mathbb{K}^{n \times n}, \dagger)$ mit $A^\dagger = (A^\sigma)^\top$.

Was ist eine semilineare Abbildung?

Definition S1B: semilineare Abbildung über einem $*$ Ring (\mathbb{K}, σ)

Sei $(V, +, \cdot)$ rechtslinear und $(W, +, \cdot)$ linkslinear über \mathbb{K} . Wir nennen $f: V \rightarrow W$ **semilinear** über (\mathbb{K}, σ) , falls f additiv ist und (\mathbb{K}, σ) -homogen:

$$f(v + v') = f(v) + f(v'), \quad f(v \cdot \lambda) = \lambda^\sigma \cdot f(v)$$

Beispiel: Sei (\mathbb{K}, σ) ein involutiver Ring, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$. Die Matrixadjunktion $\dagger: \mathbb{K}^{I \times J} \rightarrow \mathbb{K}^{J \times I}: A^\dagger = (A^\sigma)^\top$ ist semilinear:

$$\begin{aligned} (A + B)^\dagger &\stackrel{\text{Def}}{=} (A + B)^{\sigma\top} \stackrel{\text{Conj}}{=} (A^\sigma + B^\sigma)^\top \stackrel{\text{Tran}}{=} A^\dagger + B^\dagger \\ (A \cdot \lambda)^\dagger &\stackrel{\text{Def}}{=} (A \cdot \lambda)^{\sigma\top} \stackrel{\text{Conj}}{=} (\lambda^\sigma \cdot A^\sigma)^\top \stackrel{\text{Tran}}{=} \lambda^\sigma \cdot A^\dagger. \end{aligned}$$

Konjugation von rechts nach links und umgekehrt

Bemerkung S1c: Konjugation von rechts nach links und umgekehrt

- (1) Wir können jeden \mathbb{K} -rechtslinearen Raum $\underline{V} = (V, +, \cdot)$ zu einem \mathbb{K} -linkslinearen Raum $\underline{V}^\sigma = (V, +, \cdot)$ konjugieren durch $\lambda \cdot v := v \cdot \lambda^\sigma$.
- (2) Ist die Abbildung $f : V \rightarrow W$ linear über \mathbb{K} , so auch $f : V^\sigma \rightarrow W^\sigma$.
Ist $f : V \rightarrow W$ semilinear, so ist $f : V^\sigma \rightarrow W$ linear, ebenso $f : V \rightarrow W^\sigma$.

Beispiel: Für $(\mathbb{K}, \text{id}_{\mathbb{K}})$ ist der Ring \mathbb{K} kommutativ und wir müssen links und rechts nicht unterscheiden, kurz $\lambda \cdot v = v \cdot \lambda$ für $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Was ist eine Sesquilinearform?

Beispiel: Sei $U = \mathbb{K}^{(I)}$ und $V = \mathbb{K}^{(J)}$. Zu jeder Matrix $B \in \mathbb{K}^{I \times J}$ haben wir die Form $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\beta(u, v) = u^\dagger B v = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_i^\sigma b_{ij} v_j$.
Rechts: Zu u ist $v \mapsto \beta(u, v)$ linear. Links: Zu v ist $u \mapsto \beta(u, v)$ semilinear.

Definition S1D: Sesquilinearform über einem $*$ Ring (\mathbb{K}, σ)

(1) Seien U, V rechtslineare Räume über \mathbb{K} . Eine Abbildung $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ ist **sesquilinear** über (\mathbb{K}, σ) , wenn sie linear in V und semilinear in U ist:

$$\begin{aligned} \beta(u, v + v') &= \beta(u, v) + \beta(u, v'), & \beta(u, v \cdot \mu) &= \beta(u, v) \mu \\ \beta(u + u', v) &= \beta(u, v) + \beta(u', v), & \beta(u \cdot \lambda, v) &= \lambda^\sigma \beta(u, v), \end{aligned}$$

Wir nennen β eine **Sesquilinearform** oder kurz **SForm** und definieren

$$\text{SF}_{(\mathbb{K}, \sigma)}(U, V) := \{ \beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K} \mid \beta \text{ ist sesquilinear} \}.$$

Beliebte Schreibweisen: $\beta(u, v) = (u | v) = \langle u | v \rangle = \langle u, v \rangle = u \cdot v = \dots$

Was ist eine Bilinearform?

Alternative: Für $U = \mathbb{K}^{(I)}$ und $V = \mathbb{K}^{(J)}$ über einem Ring \mathbb{K} haben wir die Form $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\beta(u, v) = u^\top B v = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_i b_{ij} v_j$. Zu u ist $v \mapsto \beta(u, v)$ rechtslinear. Zu v ist $u \mapsto \beta(u, v)$ linkslinear.

Definition S1D: Bilinearform aka Paarung über einem Ring \mathbb{K}

(2) Über dem Ring \mathbb{K} sei $(U, +, \cdot)$ linkslinear und $(V, +, \cdot)$ rechtslinear. Eine Abbildung $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt **bilinear** über \mathbb{K} , falls gilt:

$$\begin{aligned} \beta(u, v + v') &= \beta(u, v) + \beta(u, v'), & \beta(u, v \cdot \mu) &= \beta(u, v) \mu, \\ \beta(u + u', v) &= \beta(u, v) + \beta(u', v), & \beta(\lambda \cdot u, v) &= \lambda \beta(u, v) \end{aligned}$$

Wir nennen β eine **Bilinearform** oder kurz **BForm** und definieren

$$\text{BF}_{\mathbb{K}}(U, V) := \{ \beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K} \mid \beta \text{ ist bilinear} \}.$$

Ist (\mathbb{K}, σ) ein involutiver Ring, so gilt $\text{SF}_{(\mathbb{K}, \sigma)}(U, V) = \text{BF}_{\mathbb{K}}(U^\sigma, V)$.

Für $\sigma = \text{id}_{\mathbb{K}}$ ist \mathbb{K} kommutativ und wir betrachten U und U^σ als gleich.

Darstellende Gram-Matrix einer Sesquilinearform

Satz S1E: Gram-Matrix einer Sesquilinearform

Seien $\mathcal{U} = (u_i)_{i \in I}$ und $\mathcal{V} = (v_j)_{j \in J}$ Basen von U und V über \mathbb{K} .

(0) Jede Sesquilinearform $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ über (\mathbb{K}, σ) definiert ihre darstellende **Gram-Matrix** $B = G_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(\beta) \in \mathbb{K}^{I \times J}$ durch Auswertung,

$$b_{ij} := \beta(u_i, v_j) \quad \text{für } i \in I \text{ und } j \in J.$$

(1) Umgekehrt definiert jede Matrix $B \in \mathbb{K}^{I \times J}$ eine Sesquilinearform $\beta = F_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(B) : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ durch **sesquilineare Fortsetzung**:

$$\beta\left(\sum_{i \in I} u_i x_i, \sum_{j \in J} v_j y_j\right) := x^\dagger B y \quad \text{für } x \in \mathbb{K}^{(I)} \text{ und } y \in \mathbb{K}^{(J)}$$

(2) Dies stiftet einen Isomorphismus zwischen SFormen und Matrizen:

$$(G_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}, F_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}) : \text{SF}_{(\mathbb{K}, \sigma)}(U, V) \cong \mathbb{K}^{I \times J} : \beta \leftrightarrow B$$

Beispiel: Sei $(\mathbb{K}^n, \langle - | - \rangle)$ das Standardskalarprodukt über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Für die Standardbasis (e_1, \dots, e_n) gilt $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$, also $B = 1_{n \times n}$.

Satz S1E: Basiswechsel für Gram-Matrizen

(3) Die Sesquilinearform $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ über (\mathbb{K}, σ) stellen wir dar durch die beiden Gram-Matrizen $B = G_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(\beta)$ und $B' = G_{\mathcal{U}', \mathcal{V}'}(\beta)$ bezüglich der Basen $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ von U und $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ von V . Hierzu sei $S = T_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'} \in GL_I(\mathbb{K})$ und $T = T_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'} \in GL_J(\mathbb{K})$ die Basiswechsellmatrizen. Dann gilt:

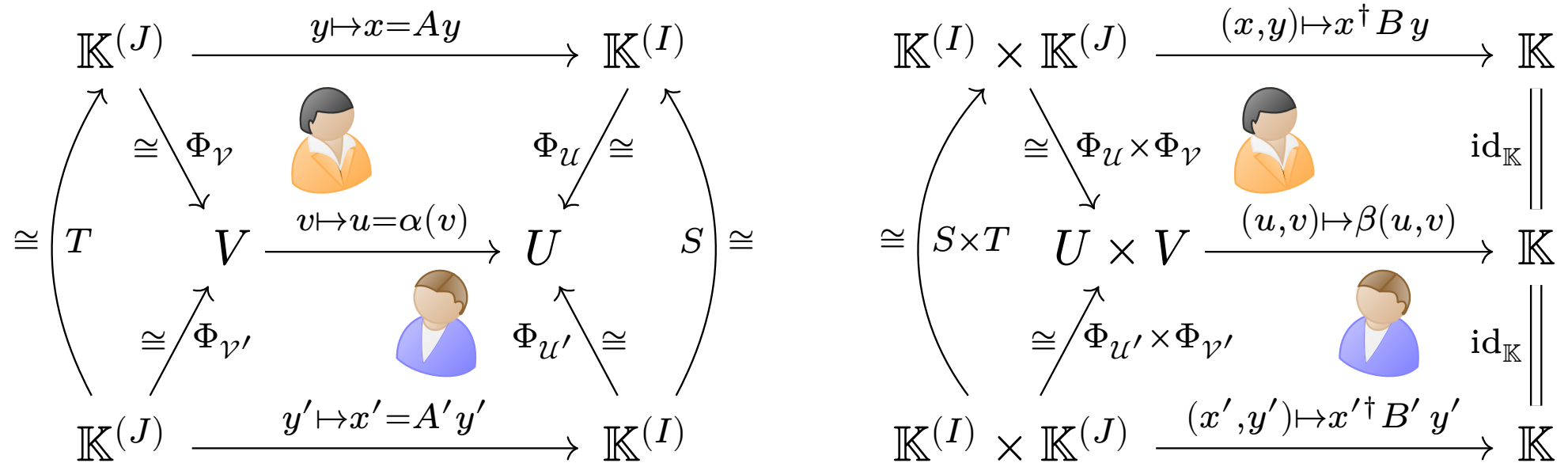
$$B' = S^\dagger B T$$

Beweis: Zu je zwei Vektoren $u, v \in V$ betrachten wir die Koordinaten $x = \Phi_{\mathcal{U}}^{-1}(u)$, $x' = \Phi_{\mathcal{U}'}^{-1}(u) \in \mathbb{K}^{(I)}$ sowie $y = \Phi_{\mathcal{V}}^{-1}(v)$, $y' = \Phi_{\mathcal{V}'}^{-1}(v) \in \mathbb{K}^{(J)}$.

$$x'^\dagger B' y' \stackrel{\text{Def}}{=} \beta(u, v) \stackrel{\text{Def}}{=} x^\dagger B y \stackrel{\text{Trafo}}{=} (Sx')^\dagger B (Ty') \stackrel{\text{Ass}}{=} x'^\dagger (S^\dagger B T) y'.$$

Daraus folgt $B' = S^\dagger B T$ mit $x' = e_i$ und $y' = e_j$ für $i \in I$ und $j \in J$. QED

Synopsis: Homomorphismen vs Sesquilinearformen



Basiswechsel: $x = Sx' = (\Phi_U^{-1} \circ \Phi_{U'})(x')$ und $y = Ty' = (\Phi_V^{-1} \circ \Phi_{V'})(y')$

Homomorphismus: $x = Ay \Leftrightarrow (Sx') = A(Ty') \Leftrightarrow x' = (S^{-1}AT)y'$

Sesquilinearform: $x^\dagger B y = (Sx')^\dagger B (Ty') = x'^\dagger (S^\dagger B T) y'$

Die Bedeutung diktiert das jeweilige **Transformationsverhalten**:

$$A' = S^{-1}AT \quad \text{vs} \quad B' = S^\dagger B T$$

Speziell für $U = V$ mit gemeinsamen Basen $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ und $\mathcal{U}' = \mathcal{V}'$ folgt:

$$\text{\textbf{Ähnlichkeit}} \quad A \sim A' = S^{-1}AS \quad \text{vs} \quad \text{\textbf{Kongruenz}} \quad B \simeq B' = S^\dagger B S$$

Sesquilinearformen in Gauß–Normalform (GNF)

Satz S1F: Gauß–Normalform über einem *DRing (\mathbb{K}, σ)

(1) Zu jeder Matrix $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ konstruieren wir dank Gauß–Algorithmus einen **Basiswechsel** durch $S \in \text{GL}_m(\mathbb{K})$ und $T \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ so, dass gilt:

$$S^\dagger B T = D_{m \times n}^r = \begin{bmatrix} 1_{r \times r} & 0_{r \times k} \\ 0_{\ell \times r} & 0_{\ell \times k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

(2) Zu jeder endlich-dim. Sesquilinearform $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ konstruieren wir so **reziproke Basen** $(u_i)_{i=1}^m$ von U und $(v_j)_{j=1}^n$ von V , für die gilt:

$$\beta(u_i, v_j) = 1 \quad \text{falls } i = j \leq r, \text{ sonst } 0.$$

Orthogonalität bezüglich einer Sesquilinearform

Definition S1G: orthogonal aka senkrecht bezüglich β

Sei $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine sesquilineare Form über (\mathbb{K}, σ) . Vektoren $u \in U$ und $v \in V$ heißen **orthogonal**, geschrieben $u \perp_{\beta} v$, falls $\beta(u, v) = 0$ gilt.

Teilmengen $X \subseteq U$ und $Y \subseteq V$ heißen **orthogonal**, geschrieben $X \perp_{\beta} Y$, falls $u \perp_{\beta} v$ für alle $u \in X$ und $v \in Y$.

Orthogonalität bezüglich einer Sesquilinearform

Definition S1c: Orthogonalraum (rechts)

Zu jeder Menge $X \subseteq U$ definieren wir den (Rechts-)Orthogonalraum

$$X^\perp := \{v \in V \mid X \perp v\} = \{v \in V \mid \forall u \in X : \beta(u, v) = 0\} \leq V.$$

Für $u \in U$ definieren wir $u^\perp := \{u\}^\perp \leq V$. Damit gilt $0^\perp = \{0\}^\perp = V$.

In V ist X^\perp ein Teilraum: Für $v, v' \in X^\perp$ und $\mu, \mu' \in \mathbb{K}$ gilt $v\mu + v'\mu' \in X^\perp$, denn für alle $u \in X$ haben wir $\beta(u, v\mu + v'\mu') = \beta(u, v)\mu + \beta(u, v')\mu' = 0$. Ebenso gilt $X^\perp = \langle X \rangle_{\mathbb{K}}^\perp$, daher können wir X zu $\langle X \rangle_{\mathbb{K}}$ abschließen.

Wir nennen $\text{Ker } \beta := U^\perp \leq V$ den (Rechts-)Kern von $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ oder auch das (Rechts-)Radikal oder den (Rechts-)Ausartungsraum.

Berechnung: Wir wählen Basen $(u_i)_{i=1}^m$ von U und $(v_j)_{j=1}^n$ von V .

Sei $B = \beta(u_i, v_j)_{ij} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ die zugehörige Gram-Matrix. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{Ker } \beta &\stackrel{\text{Def}}{=} \{v \in V \mid U \perp v\} \stackrel{\text{Def}}{=} \{v \in V \mid \forall u \in U : \beta(u, v) = 0\} \\ &\stackrel{\text{Gram}}{=} \{v_1\mu_1 + \cdots + v_n\mu_n \mid \mu \in \mathbb{K}^n \wedge B\mu = 0\} \cong \text{Ker } B \leq \mathbb{K}^n \end{aligned}$$

Orthogonalität bezüglich einer Sesquilinearform

Gilt $U^\perp = \{0\}$, so nennen wir die Form β (rechts-) **regulär**, das heißt, zu jedem Verdächtigen $v \in V \setminus \{0\}$ existiert ein Zeuge $u \in U$ mit $\beta(u, v) \neq 0$.

Andernfalls heißt β (rechts-) **singulär** oder **ausgeartet** oder **degeneriert**. Jeder (rechts-) **singuläre Vektor** $v \in U^\perp$ erfüllt $\beta(u, v) = 0$ für alle $u \in U$.

Zu jeder Menge $Y \subseteq V$ definieren wir den (Links-) **Orthogonalraum**

$${}^\perp Y := \{u \in U \mid u \perp Y\} = \{u \in U \mid \forall v \in Y: \beta(u, v) = 0\} \leq U.$$

Für $v \in V$ definieren wir ${}^\perp v := {}^\perp \{v\} \leq U$. Damit gilt ${}^\perp 0 = {}^\perp \{0\} = U$.

Orthogonalität und lineare Gleichungssysteme

$$\beta : \mathbb{K}^{1 \times n} \times \mathbb{K}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto uv$$

Jedes lineare Gleichungssystem hat die Form $Av = 0$ mit

$$A = \begin{bmatrix} \text{---} & a_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_m & \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}.$$

Der Lösungsraum... ist der Kern ... ist der Orthogonalraum:

$$\{v \in \mathbb{K}^{n \times 1} \mid Av = 0\} \stackrel{\text{Def}}{=} \text{Ker } A \stackrel{\text{Def}}{=} \{a_1, \dots, a_m\}^\perp$$

Orthogonalität und lineare Gleichungssysteme

$$\beta : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} u_i v_i$$

Aufgabe: Bestimmen Sie $u^{\perp} \leq \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ zu der Folge $u = (1, 1, 1, \dots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Lösung: Wir finden $u^{\perp} = \{v \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \mid \sum_{i=0}^{\infty} v_i = 0\} = \langle e_i - e_{i-1} \mid i \geq 1 \rangle_{\mathbb{K}}$.

Aufgabe: Sei $\mathbb{K} \geq \mathbb{Q}$ und $v_i := ie_i - e_{i-1} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ für alle $i \geq 1$. Bestimmen Sie zur Menge $Y = \{v_i \mid i \geq 1\} \subset \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ den Orthogonalraum ${}^{\perp}Y \leq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Lösung: Für $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ gilt $u \perp Y$ gdw $0 = \beta(u, v_i) = iu_i - u_{i-1}$ für alle $i \geq 1$. Für $i \geq 1$ gilt rekursiv $u_i = u_{i-1}/i$ und somit $u_i = u_0/i!$, ausgeschrieben:

$${}^{\perp}Y = \langle \exp \rangle_{\mathbb{K}}$$

Wie bestimmen wir Kern und Regularität?

Sei $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform mit Gram-Matrix

$$G_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(\beta) = D_{m \times n}^r = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}.$$

bezüglich reziproker Basen $(u_i)_{i=1}^m$ von U und $(v_j)_{j=1}^n$ von V .

Aufgabe: Was ist hier der Kern von β ? Wann genau ist β regulär?

Lösung: Der Rechtskern von β ist hier $\text{Ker } \beta = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{K}}^! \leq V$.

Genau dann ist β rechtsregulär, wenn $\text{Ker } \beta = \{0\}$ gilt, hier also $r = n$.

Der Linkskern von β ist entsprechend $\text{Ker } \beta^\dagger = \langle u_{r+1}, \dots, u_m \rangle_{\mathbb{K}}^! \leq U$.

Genau dann ist β linksregulär, wenn $\text{Ker } \beta^\dagger = \{0\}$ gilt, hier also $r = m$.

Was ist die adjungierte Sesquilinearform?

Ist $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ sesquilinear über (\mathbb{K}, σ) , so auch ihre **Adjungierte**

$$\beta^\dagger : V \times U \rightarrow \mathbb{K} : (v, u) \mapsto \beta^\dagger(v, u) = \beta(u, v)^\sigma.$$

Beispiel: Sei $U = \mathbb{K}^{(I)}$ und $V = \mathbb{K}^{(J)}$. Zur Matrix $B \in \mathbb{K}^{I \times J}$ haben wir

$$\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto u^\dagger B v = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_i^\sigma b_{ij} v_j$$

mit der Adjungierten $\beta^\dagger(v, u) = \beta(u, v)^\sigma = (u^\dagger B v)^\sigma = (u^\dagger B v)^\dagger = v^\dagger B^\dagger u$.

Beispiel: Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$ ist das Standardskalarprodukt

$$\langle - | - \rangle : \mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(I)} \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u | v \rangle = u^\dagger v = \sum_{i \in I} \overline{u_i} v_i.$$

Hier gilt $\langle - | - \rangle^\dagger = \langle - | - \rangle$, denn $\langle v | u \rangle^\dagger = \langle u | v \rangle^\sigma = \langle v | u \rangle$ für alle u und v .

Was ist eine hermitesche Form?

Definition S1H: hermitesch aka selbstadjungiert

(1) Sei $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform auf dem Raum V über (\mathbb{K}, σ) .

Das Paar (V, β) nennen wir einen **sesquilinearen Raum**. Wir nennen β

hermitesch, falls $\beta = \beta^\dagger$, also $\beta(v, u) = \beta(u, v)^\sigma$,

antihermitesch, falls $\beta = -\beta^\dagger$, also $\beta(v, u) = -\beta(u, v)^\sigma$.

Wir sagen kurz **anti/hermitesche Form**, das beinhaltet stets sesquilinear.

Das Paar (V, β) nennen wir einen **anti/hermiteschen Raum** über (\mathbb{K}, σ) .

(2) Jede Matrix $B \in \mathbb{K}^{I \times I}$ definiert ihre SForm $\beta : \mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(I)} \rightarrow \mathbb{K}$ durch $\beta(u, v) = u^\dagger B v$. Für diesen Raum schreiben wir kurz $(\mathbb{K}^{(I)}, \beta) =: \langle B \rangle$.

Wir nennen B anti/hermitesch, falls β dies ist, also $B^\dagger = \pm B$ gilt.

$$A = \begin{bmatrix} i & 2i + 1 \\ 2i - 1 & i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 - 4i \\ 3 + 4i & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 + 4i \\ 3 + 4i & 2 \end{bmatrix}$$

Was ist eine anti/symmetrische Form?

Definition S1H: anti/symmetrisch, alternierend

(3) Im Spezialfall $\sigma = \text{id}_{\mathbb{K}}$ ist der Grundring \mathbb{K} kommutativ und die Form $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ bilinear. Wir nennen β

symmetrisch, falls $\beta = \beta^T$, also $\beta(v, u) = \beta(u, v)$,
antisymmetrisch, falls $\beta = -\beta^T$, also $\beta(v, u) = -\beta(u, v)$,
alternierend, falls $\beta(v, v) = 0$, für alle Vektoren $u, v \in V$.

Erinnerung: Alternierend impliziert antisymmetrisch:

$$0 \stackrel{\text{alt}}{=} \beta(u + v, u + v) \stackrel{\text{add}}{=} \beta(u, u) + \beta(u, v) + \beta(v, u) + \beta(v, v)$$

Aus Antisymmetrie folgt $2\beta(v, v) = 0$, falls 2 kürzbar ist also $\beta(v, v) = 0$.

Alternierend vs antisymmetrisch

Beispiel: Ist $\det : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$ alternierend? Was ist ihre Gram-Matrix?

$$\det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Beispiele: Die Matrix $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist anti/symmetrisch, also $B^\top = \pm B$, gdw ihre BForm $\beta : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto u^\top B v$ dies ist, also $\beta^\top = \pm \beta$.

Genau dann ist die BForm β alternierend, wenn die Matrix B dies ist, also antisymmetrisch, d.h. $b_{ji} = -b_{ij}$, und hohl, d.h. $b_{ii} = 0$ für alle i, j .

Beispiel: Über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ bedeuten antisymmetrisch und symmetrisch dasselbe. Doch nicht jede solche Form ist alternierend, etwa

$$\beta : \mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2 : (u, v) \mapsto u^\top v \quad \text{zur Gram-Matrix } I_n.$$

Was ist eine reflexive Form?

Definition S1j: reflexive Sesquilinearform aka orthosymmetrisch

Eine Sesquilinearform $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ über (\mathbb{K}, σ) heißt **reflexiv**, falls

$$u \perp v \iff v \perp u \quad \text{für alle } u, v \in V \text{ gilt.}$$

Typische Anwendungen sind $\beta^\dagger = \pm\beta$ anti/hermitesch über (\mathbb{K}, σ) und $\beta^\top = \pm\beta$ anti/symmetrisch über $(\mathbb{K}, \text{id}_{\mathbb{K}})$ sowie β alternierend.

Von der hermiteschen Form zur quadratischen Form

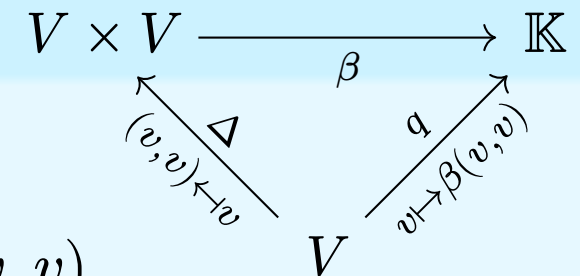
Definition S1κ: quadratische Form

Sei (V, β) hermitesch über (\mathbb{K}, σ) . Die Abbildung

$$q = q_\beta : V \rightarrow \mathbb{K} : v \mapsto q(v) = \beta(v, v)$$

nennen wir die **quadratische Form** zu β . Wir nennen (V, q) den **quadratischen Raum** zur hermiteschen Form β .

Beispiel: Für $(\mathbb{K}^n, \langle - | - \rangle)$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ gilt $q(v) = \|v\|^2 \in \mathbb{R}$.



Was sind quadratische Formen über $(\mathbb{K}, \text{id}_{\mathbb{K}})$?

Im Spezialfall $\sigma = \text{id}_{\mathbb{K}}$ ist \mathbb{K} kommutativ. Für $q = q_{\beta} : V \rightarrow \mathbb{K}$ gilt:

Q1: Homogenität, $q(v\lambda) = q(v)\lambda^2$ für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Q2: Polarisierung, $\beta_q(u, v) := q(u + v) - q(u) - q(v)$ ist bilinear.

Die Rechnung ergibt hier nämlich $\beta_q(u, v) = \beta(u, v) + \beta(v, u) = 2\beta(u, v)$.

Lemma S1L: Polarisierung, explizite Polarisierungsformel

Eine **quadratische Form** $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ über $(\mathbb{K}, \text{id}_{\mathbb{K}})$ erfüllt (Q1&2).

Wir nennen dann (V, q) einen **quadratischen Raum** über \mathbb{K} .

$$\text{QF}(V) := \{q : V \rightarrow \mathbb{K} \mid \text{Q1\&2}\}.$$

(1) Die Zuordnung $\text{BF}(V) \rightarrow \text{QF}(V) : \beta \mapsto q = q_{\beta}$ ist injektiv, falls $2 \in \mathbb{K}$ kürzbar ist, und bijektiv, falls $2 \in \mathbb{K}^{\times}$ invertierbar ist, dank **Polarisierung**

$$\beta(u, v) = \frac{1}{2}[q(u + v) - q(u) - q(v)].$$

Definition S1M: Einschränkung einer Sesquilinearform

Auf jedem \mathbb{K} -linearen Teilraum $U \leq (V, \beta)$ erhalten wir (U, β_U) durch Einschränkung der Sesquilinearform β zu $\beta_U = \beta|_{U \times U} : U \times U \rightarrow \mathbb{K}$.

Aufgabe: Wenn (V, β) regulär ist, gilt dies dann auch für (U, β_U) ?

Lösung: Nein! Auf $V = \mathbb{K}^2$ ist $\beta(u, v) = \det(u, v) = u_1v_2 - u_2v_1$ regulär,

$$G_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Auf $U = \langle e_1 \rangle_{\mathbb{K}}$ bzw. $\langle e_2 \rangle_{\mathbb{K}}$ ist die Einschränkung $\beta_U = 0$ jedoch singulär.

Definition S1M: isotrope Vektoren und Teilräume

Gilt $u \perp u$, also $q(u) = \beta(u, u) = 0$, so nennen wir den Vektor u **isotrop**.

Gilt $q(u) = \beta(u, u) = 0$ für ein $u \in V \setminus \{0\}$, so heißt (V, β) **isotrop**.

Sind alle Vektoren $u \in V$ isotrop, also $q = 0$, so heißt (V, β) **total isotrop**.

Gilt $q(u) = \beta(u, u) \neq 0$ für alle $u \in V \setminus \{0\}$, so heißt (V, β) **anisotrop**.

Damit ist jeder Unterraum (U, β_U) anisotrop, insbesondere regulär.

Beweis: Zu jedem Verdächtigen $v \in U \setminus \{0\}$ existiert ein geeigneter Zeuge $u \in U$ mit $\beta(u, v) \neq 0$, denn hier genügt bereits $u = v$. QED

Beispiel: Euklidisch $(\mathbb{K}^n, \langle - | - \rangle)$ ist 0 der einzige isotrope Vektor, dann für $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ gilt $\langle v | v \rangle > 0$ dank positiver Definitheit.

Satz S1N: Regularität und Diskriminante

Sei $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine sesquilineare Form über (\mathbb{K}, σ) sowie (v_1, \dots, v_n) eine Basis und $B = \beta(v_i, v_j)_{ij} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die zugehörige Gram-Matrix.

(1) Ist der Ring \mathbb{K} ein Körper (**DRing** oder **CRing**), so sind äquivalent:

$$(a) \text{ Ker } \beta = 0, \quad (b) \text{ Ker } B = 0, \quad (c) B \in GL_n \mathbb{K}, \quad (d) \det B \in \mathbb{K}^\times.$$

(2) Die Determinante $\det(B) \in \mathbb{K}$ ändert sich unter **Basiswechsel** zu

$$\det(S^\dagger B S) = \det(S)^\sigma \det(B) \det(S).$$

Demnach ist „ $\det \beta$ “ nur wohldefiniert modulo der **Normgruppe**

$$N = N(\mathbb{K}, \sigma) := \{ a^\sigma a \mid a \in \mathbb{K}^\times \} \leq \mathbb{K}^\times.$$

Wir definieren die **Diskriminante** $\text{disc}(\beta) := [\det(B)]$ in \mathbb{K}/N .

Beispiel: Euklidisch über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$ gilt $N(\mathbb{K}, \sigma) = \mathbb{R}_{>0}$. Ist (V, β) hermitesch über (\mathbb{K}, σ) , so gilt $\det B \in \mathbb{R}$ und $\text{disc } \beta \in \{[\pm 1], [0]\}$.

Definition S1o: reguläre Familie

(0) Eine endliche Familie $(u_i)_{i \in I}$ in (V, β) über (\mathbb{K}, σ) heißt **regulär**, wenn ihre Gram-Matrix $B = \beta(u_i, u_j)_{ij} \in \mathbb{K}^{I \times I}$ invertierbar ist.

Lemma S1o: Fourier-Koeffizienten

Sei $(u_i)_{i \in I}$ in (V, β) regulär. Zu jeder Linearkombination $v = \sum_{j \in I} u_j \lambda_j$ erhalten wir die Koeffizienten $\lambda \in \mathbb{K}^{(I)}$ durch $\lambda = B^{-1} \mu$ mit $\mu_i = \beta(u_i, v)$.

Beweis: Für $\mu_i = \beta(u_i, v) = \beta(u_i, \sum_j u_j \lambda_j) = \sum_j \beta(u_i, u_j) \lambda_j$ gilt $\mu = B \lambda$.

Jede reguläre Familie $(u_i)_{i \in I}$ in (V, β) ist \mathbb{K} -linear unabhängig, somit eine Basis von $U := \langle u_i \mid i \in I \rangle_{\mathbb{K}} \leq V$, und (U, β_U) ist regulär.

Beweis: Sei $v = \sum_{j \in I} u_j \lambda_j$. Aus $v = 0$ folgt $\mu = 0$ und $\lambda = B^{-1} \mu = 0$. QED

Definition S10: orthogonale Familie

- (1) Ein Vektor u in (V, β) heißt **normiert**, falls $q(u) = \beta(u, u) = 1$.
- (2) Eine Familie $(u_i)_{i \in I}$ in V heißt **orthogonal**, kurz OS, falls $\beta(u_i, u_j) = 0$ für alle $i \neq j$ in I gilt, und **orthonormal**, kurz ONS, falls zudem $q(u_i) = 1$:

$$\beta(u_i, u_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j: \text{ paarweise orthogonal,} \\ 1 & \text{falls } i = j: \text{ individuell normiert.} \end{cases}$$

- (3) Ist die Familie $(u_i)_{i \in I}$ zudem eine Basis von $U \leq V$, so nennen wir dies eine **Orthogonalbasis**, kurz OB, bzw. eine **Orthonormalbasis**, kurz ONB.

Beispiel: Euklidisch $(\mathbb{K}^n, \langle - | - \rangle)$ ist (e_1, \dots, e_n) eine Orthonormalbasis. Ist $(e_i)_{i \in I}$ orthonormal und $v = \sum_j e_j \lambda_j$ mit $\lambda \in \mathbb{K}^{(I)}$, so gilt $\lambda_i = \langle e_i | v \rangle$.

Definition S1P: externe orthogonale Summe

(1) Sind (V_1, β_1) und (V_2, β_2) sesquilineare Räume, so auch

$$(V = V_1 \oplus V_2, \beta = \beta_1 \oplus \beta_2) \quad \text{mit} \quad \beta(u, v) = \beta_1(u_1, v_1) + \beta_2(u_2, v_2).$$

Zu Basen $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \sqcup \mathcal{V}_2$ von $V = V_1 \oplus V_2$ sind die Gram-Matrizen dann

$$B = B_1 \oplus B_2 =: \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}.$$

Wir schreiben kurz $(V, \beta) =: (V_1, \beta_1) \oplus (V_2, \beta_2)$ oder zu kurz $V = V_1 \oplus V_2$.

Ebenso für beliebig viele Summanden $(V_i, \beta_i)_{i \in I}$: Die **orthogonale Summe**

$$\bigoplus_{i \in I}^{\text{ext}} (V_i, \beta_i) := (V, \beta) \quad \text{mit} \quad V = \bigoplus_{i \in I}^{\text{ext}} V_i \quad \text{und} \quad \beta = \bigoplus_{i \in I} \beta_i$$

bedeutet direkte Summe mit der SForm $\beta(u, v) = \sum_{i \in I} \beta_i(u_i, v_i)$.

Definition S1P: interne orthogonale Summe

(2) Sei (V, β) ein sesquilinearer Raum über (\mathbb{K}, σ) und $V = \bigoplus_{i \in I}^{\text{int}} V_i$ eine interne Summenzerlegung in paarweise orthogonale Teilräume $V_i \leq V$. Mit den Einschränkungen $\beta_i = \beta|_{V_i \times V_i} : V_i \times V_i \rightarrow \mathbb{K}$ schreiben wir:

$$(V, \beta) = \bigoplus_{i \in I}^{\text{int}} (V_i, \beta_i)$$

oder kurz $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$, wenn alle Formen aus dem Kontext klar sind.

Beispiel: Euklidisch $(\mathbb{K}^n, \langle - | - \rangle)$ gilt intern $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^n e_i \mathbb{K}$,
und ebenso extern $(\mathbb{K}^n, \langle - | - \rangle) = \bigoplus_{i=1}^n (\mathbb{K}, \langle - | - \rangle) = \bigoplus_{i=1}^n \langle 1 \rangle$.

Orthogonales Komplement und Projektion

Satz S1q: orthogonales Komplement und Projektion

Sei $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform über (\mathbb{K}, σ) und regulär auf $U = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{K}} \leq V$, das heißt $B = (\beta(e_i, e_j))_{ij} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Dann gilt:

$$V = U \oplus U^\perp$$

Ausführlich: Wir können jeden Vektor $v \in V$ bezüglich U eindeutig **orthogonal zerlegen** in $(v_\parallel, v_\perp) \in U \times U^\perp$ mit $v = v_\parallel + v_\perp$. Explizit gilt

$$v_\parallel = P_U^\parallel(v) := \sum_{j=1}^n e_j \lambda_j \quad \text{und} \quad v_\perp = P_U^\perp(v) := v - v_\parallel$$

mit den Fourier-Koeffizienten $\lambda = B^{-1}\mu$ und $\mu_i = \beta(e_i, v)$.

Die so definierten Abbildungen $P_U^\parallel, P_U^\perp : V \rightarrow V$ sind linear und heißen die **orthogonale Projektion** auf U bzw. auf den Orthogonalraum U^\perp .

Ist die Basis (e_1, \dots, e_n) orthonormal, also $B = 1_{n \times n}$, so gilt $\lambda_i = \beta(e_i, v)$.

Orthogonales Komplement und Projektion

Beweis: Wir suchen $v_{\parallel} = \sum_{j=1}^n e_j \lambda_j$ mit $\lambda \in \mathbb{K}^n$ und $v_{\perp} = v - v_{\parallel} \in U^{\perp}$. Genau dann gilt $U \perp v_{\perp}$, wenn für jeden Index $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$0 \stackrel{!}{=} \beta(e_i, v_{\perp}) = \beta(e_i, v) - \sum_{j=1}^n \beta(e_i, e_j) \lambda_j$$

Wir erhalten das lineare Gleichungssystem $B\lambda = \mu$ mit $\mu_i = \beta(e_i, v)$. Dank $B \in GL_n(\mathbb{K})$ existiert hierzu genau eine Lösung $\lambda = B^{-1}\mu \in \mathbb{K}^n$.

Orthogonales Komplement und Projektion

Beispiel: Euklidisch $(\mathbb{K}^3, \langle - | - \rangle)$ gilt $\langle e_1 \rangle^\perp = \langle e_2, e_3 \rangle$ und $\mathbb{K}^3 = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_1 \rangle^\perp$.

⚠ Allgemein gilt zu $U \leq (V, \beta)$ weder $V = U + U^\perp$ noch $U \cap U^\perp = \{0\}$.
Gegenbeispiel:

$$\beta : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 : (u, v) \mapsto u^\dagger B v \quad \text{mit} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Hier gilt $\langle e_1 \rangle_{\mathbb{K}}^\perp = \langle e_2 \rangle_{\mathbb{K}}$ und $\langle e_2 \rangle_{\mathbb{K}}^\perp = \langle e_1 \rangle_{\mathbb{K}}$ sowie $\mathbb{K}^2 = \langle e_1 \rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle e_2 \rangle_{\mathbb{K}}$.

Der Vektor $u = (1, 1)^\top \in \mathbb{K}^2$ erfüllt $\beta(u, u) = 0$, ist also isotrop.

Für $U = \langle u \rangle_{\mathbb{K}}$ gilt $U^\perp = \text{Ker}(u^\dagger B) = \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \langle u \rangle_{\mathbb{K}}$.

Der Orthogonalraum U^\perp ist hier kein Komplement zu U :

Es gilt weder $\mathbb{K}^2 = U + U^\perp$ noch $U \cap U^\perp = \{0\}$.

Diagonalisierung hermitescher Formen

Satz S1R: Diagonalisierung einer hermiteschen Form

Sei (\mathbb{K}, σ) ein Divisionsring \mathbb{K} mit Involution σ und $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$.

(1) Sei (V, β) ein hermitescher Raum über (\mathbb{K}, σ) mit $\dim_{\mathbb{K}} V = n \in \mathbb{N}$.
Dann existiert zu (V, β) eine Orthogonalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, also

$$(\beta(v_i, v_j))_{ij} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & b_n \end{bmatrix}$$

(2) Jede hermitesche Matrix ist kongruent zu einer Diagonalmatrix:

$$A^\dagger = A \in \mathbb{K}^{n \times n} \quad \Longrightarrow \quad \exists S \in \text{GL}_n \mathbb{K} : S^\dagger A S = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$$

(3) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$ erreichen wir $b_1, \dots, b_n \in \{0, \pm 1\}$.

Der hermitesche Gauß-Algorithmus über (\mathbb{K}, σ)

Eingabe: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hermitesch, also $A^\dagger = A$ über dem *DRing (\mathbb{K}, σ)

Ausgabe: $B = S^\dagger A S$ mit $S \in GL_n(\mathbb{K})$ und $b_{i1} = 0 = b_{1i}$ für alle $i \geq 2$

Methode: Gilt $a_{i1} = 0 = a_{1i}$ für alle $i \geq 2$, so sind wir fertig.

(1) Gilt $a_{11} \neq 0$, so eliminiere die erste Spalte und Zeile; damit fertig.

$$A = \begin{bmatrix} \blacksquare & * \\ * & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \blacksquare & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} = B$$

(2) Gilt $a_{11} = 0$, aber $a_{ii} \neq 0$, so tausche dies zu $a'_{11} \neq 0$; weiter mit (1).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & \blacksquare \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \blacksquare & * \\ * & 0 \end{bmatrix} = A' = P_{1i} A P_{i1}$$

(3) Gilt $0 = a_{11} = \dots = a_{nn}$, aber $x := a_{i1} \neq 0$, so addiere das x^σ -fache der i -ten Zeile zur ersten, ebenso das x -fache der i -ten Spalte zur ersten:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x^\sigma \\ x & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2x^\sigma x & x^\sigma \\ x & 0 \end{bmatrix} = A' = T_{i1}(x^\sigma) A T_{1i}(x)$$

Damit gilt $a'_{11} = 2xx^\sigma \neq 0$; weiter mit (1).

Der hermitesche Gauß-Algorithmus über $(\mathbb{C}, \text{conj}_{\mathbb{C}})$

Aufgabe: Diagonalisieren Sie über $(\mathbb{C}, \text{conj}_{\mathbb{C}})$ die hermitesche Form

$$\beta : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} : (u, v) \mapsto u^\dagger A v \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Lösung: Wir berechnen schrittweise Matrizen (B_i, S_i) mit $B_i = S_i^\dagger A S_i$:

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & -i \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{i}{2} \\ i & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 - i \cdot R_2 \\ C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \cdot i \\ R_2 \leftarrow R_2 - \frac{i}{2} \cdot R_1 \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_2 \cdot \frac{i}{2} \end{array}$$

Der symmetrische Gauß-Algorithmus über $(\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}})$

Aufgabe: Über $(\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}})$ sei $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die quadratische Form

$$q(v) = 4v_2^2 + v_3^2 + 6v_1v_3 + 4v_2v_3.$$

- (1) Bestimmen Sie die zu q gehörige symmetrische Bilinearform β und ihre Gram-Matrix A bezüglich der Standardbasis (e_1, e_2, e_2) .
- (2) Bestimmen Sie zu β eine Orthogonalbasis (b_1, b_2, b_3) von \mathbb{R}^3 .

Lösung: (1) Wir finden

$$\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (u, v) \mapsto u^T A v \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Der symmetrische Gauß-Algorithmus über $(\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}})$

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{ccc} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1) \leftrightarrow (2) \\
 \left[\begin{array}{ccc} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (3) - \frac{1}{2} \cdot (1) \\
 \left[\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (2) + (3) \\
 \left[\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \quad (3) - \frac{1}{2} \cdot (2) \\
 \left[\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right]
 \end{array}$$

Das euklidische Skalarprodukt auf \mathbb{K}^n über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

◆ **Beispiel S1A:** das Standardskalarprodukt auf \mathbb{K}^n über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Auf $V = \mathbb{K}^n$ definieren wir das **Standardskalarprodukt**

$$\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u | v \rangle := \overline{u_1}v_1 + \cdots + \overline{u_n}v_n = u^\dagger v.$$

Für alle Vektoren $u, v, w \in V$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

S0: positive Semidefinitheit, $\langle u | u \rangle \geq 0 = \langle 0 | 0 \rangle$

S1: positive Definitheit, $\langle u | u \rangle > 0$ für $u \neq 0$

S2: konjugierte Symmetrie, $\langle v | u \rangle = \overline{\langle u | v \rangle}$

S3: Linearität rechts, $\langle u | v\lambda + w\mu \rangle = \langle u | v \rangle\lambda + \langle u | w \rangle\mu$

Aus (S2&3) folgt konjugierte Linearität in der ersten Variablen:

S4: Semilinearität links, $\langle u\lambda + v\mu | w \rangle = \bar{\lambda}\langle u | w \rangle + \bar{\mu}\langle v | w \rangle$

Eigenschaften (S3&4) heißen **sesquilinear** (lat. *sesqui*, ‘anderthalb’),

(S2) heißt **hermitesch** zu Ehren von Charles Hermite (1822–1901).

Über \mathbb{R} mit $\text{conj}_{\mathbb{R}} = \text{id}_{\mathbb{R}}$ heißt (S2) **symmetrisch** und (S3&4) **bilinear**.

Hermiteische Formen und Skalarprodukte

Definition S2A: Skalarprodukt über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$

Ein **Skalarprodukt** auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V ist eine positiv definite, hermitesche Sesquilinearform $\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, erfüllt also (S1,2,3).

Für $\|v\|^2 := \langle v | v \rangle$ gilt dann $\|v\|^2 \in \mathbb{R}$ dank (S2) und $\|v\|^2 \geq 0$ dank (S1).

Die zugehörige **Norm** ist dann $\|-\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : v \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$ und die zugehörige **Metrik** ist $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : (x, y) \mapsto d(x, y) = \|y - x\|$.

Für ein **Semiskalarprodukt** oder „semidefinites Skalarprodukt“ fordern wir nur (S0,2,3). Dazu gehört die **Seminorm** $\|-\|$ und die **Semimetrik** d .

Für eine **hermitesche sesquilineare Form** fordern wir nur (S2,3).

Sie heißt **indefinit**, falls $\langle u | u \rangle > 0 > \langle v | v \rangle$ für geeignete $u, v \in V$ gilt.

Dann haben wir zwar nicht $\|v\|$, aber immerhin noch $\|v\|^2 := \langle v | v \rangle \in \mathbb{R}$.

Algebraisches Beispiel: die Produktsumme

Beispiel S2B: die Produktsumme über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$

(1) Auf $V = \mathbb{K}^{(I)}$ über \mathbb{K} haben wir das Standardskalarprodukt (S1A)

$$\langle u | v \rangle_{\ell^2} := u^\dagger v = \sum_{i \in I} \overline{u_i} v_i.$$

(2) Zu Konstanten $a \in \mathbb{K}^I$ erhalten wir die Sesquilinearform

$$\langle u | v \rangle_{\ell^2, a} := u^\dagger \text{diag}(a) v = \sum_{i \in I} \overline{u_i} a_i v_i.$$

Diese Sesquilinearform ist genau dann hermitesch, wenn $a_i \in \mathbb{R}$ gilt, und positiv semi/definit, wenn $a_i \geq 0$ bzw. $a_i > 0$ gilt für alle $i \in I$.

(3) Zu jeder Matrix $B \in \mathbb{K}^{I \times I}$ erhalten wir die Sesquilinearform

$$\langle u | v \rangle_{\ell^2, B} := u^\dagger B v = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \overline{u_i} b_{ij} v_j.$$

Diese Form ist genau dann hermitesch, wenn die Matrix hermitesch ist. Positive Semi/Definitheit erkennen wir dank Diagonalisierung S1R.

Algebraisches Beispiel: die Produktsumme

Aufgabe: Über $(\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}})$ betrachten wir

$$\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (u, v) \mapsto u^T A v \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ist β bilinear? symmetrisch? positiv definit / semidefinit / indefinit?

Lösung: Bilinearität ist offensichtlich dank $\beta(u, v) = u^T A v$.

Symmetrie ist offensichtlich dank $A^T = A$. Gilt In/Definitheit?

Das wird offensichtlich durch Diagonalisierung, siehe Seite S175:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \simeq S^T A S = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Unsere symmetrische Form β ist demnach indefinit:

Für den Vektor $u = S e_1$ gilt $\beta(u, u) = u^T A u = 4 > 0$.

Für den Vektor $v = S e_3$ gilt $\beta(v, v) = v^T A v = -\frac{3}{2} < 0$.

Algebraisches Beispiel: die Produktsumme

Aufgabe: Über $(\mathbb{C}, \text{conj}_{\mathbb{C}})$ betrachten wir

$$\beta : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} : (u, v) \mapsto u^\dagger A v \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Ist β sesquilinear? hermitesch? positiv definit / semidefinit / indefinit?

Lösung: Sesquilinearität ist offensichtlich dank $\beta(u, v) = u^\dagger A v$.
Hermitizität ist offensichtlich dank $A^\dagger = A$. Gilt In/Definitheit?
Das wird offensichtlich durch Diagonalisierung, siehe S174:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \simeq S^\dagger A S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Unsere hermitesche Form β ist demnach indefinit:

Für den Vektor $u = S e_1$ gilt $\beta(u, u) = u^\dagger A u = 2 > 0$.

Für den Vektor $v = S e_2$ gilt $\beta(v, v) = v^\dagger A v = -\frac{1}{2} < 0$.

Das Standardskalarprodukt für Matrizen

Beispiel S2c: Frobenius-Skalarprodukt über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$
Auf dem Matrixraum $V = \mathbb{K}^{m \times n}$ haben wir das Standardskalarprodukt

$$\langle A | B \rangle_F := \text{tr}(A^\dagger B) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \overline{a_{ji}} b_{ij}.$$

Analytisches Beispiel: das Produktintegral

Beispiel S2D: das Produktintegral über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$

(1) Auf $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ über \mathbb{K} haben wir das Standardskalarprodukt

$$\langle f | g \rangle_{L^2} := \frac{1}{b-a} \int_{t=a}^b \overline{f(t)} g(t) dt.$$

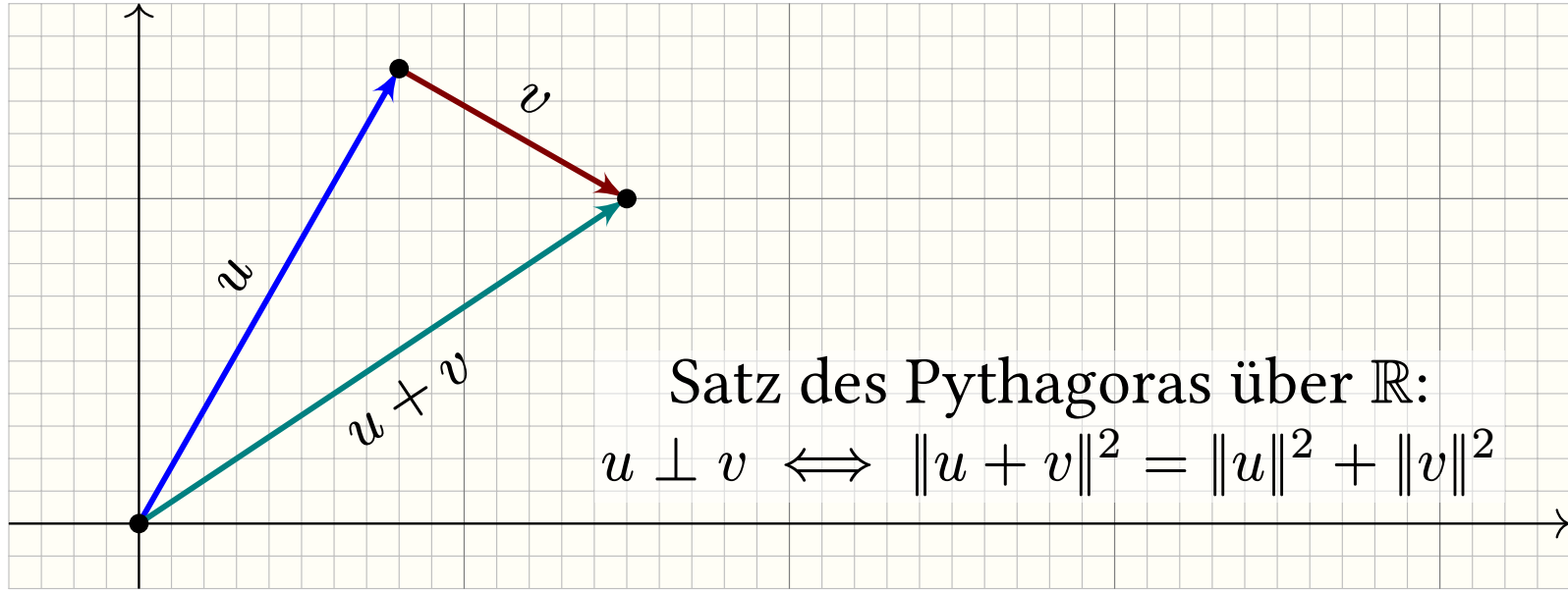
(2) Zum Gewicht $w \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ erhalten wir die Sesquilinearform

$$\langle f | g \rangle_{L^2, w} := \int_{t=a}^b \overline{f(t)} w(t) g(t) dt.$$

(3) Zum Integralkern $k \in \mathcal{C}([a, b]^2, \mathbb{K})$ erhalten wir die Sesquilinearform

$$\langle f | g \rangle_{L^2, k} := \int_{s=a}^b \int_{t=a}^b \overline{f(s)} k(s, t) g(t) dt ds.$$

Der Satz des Pythagoras



Der Satz des Pythagoras

Satz S2E: Pythagoras mit Umkehrung

(0) Für je zwei Vektoren $u, v \in V$ gilt die binomische Formel:

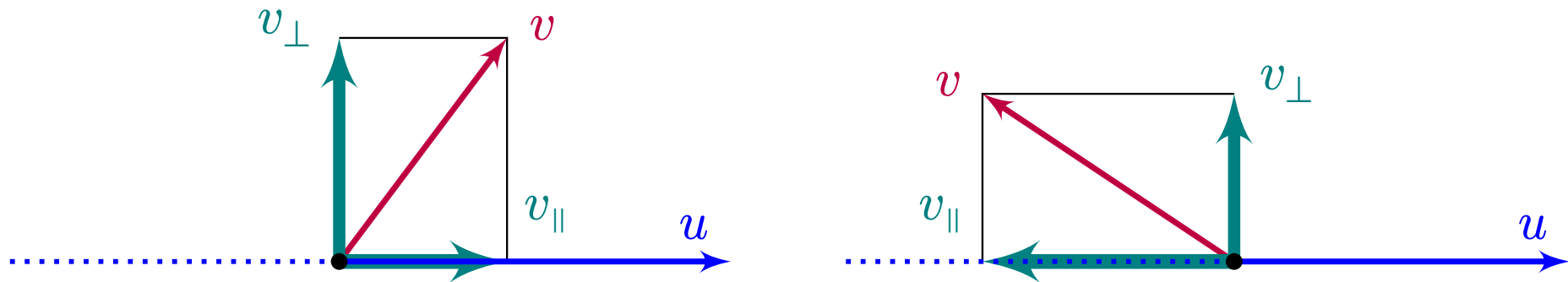
$$\begin{aligned}
 \|u + v\|^2 &\stackrel{\text{Def}}{=} \langle u + v | u + v \rangle \\
 &\stackrel{\text{(S4)}}{=} \langle u | u + v \rangle + \langle v | u + v \rangle \\
 &\stackrel{\text{(S3)}}{=} \langle u | u \rangle + \langle v | u \rangle + \langle u | v \rangle + \langle v | v \rangle \\
 &\stackrel{\text{(S2)}}{=} \|u\|^2 + 2 \operatorname{re} \langle u | v \rangle + \|v\|^2
 \end{aligned}$$

(1) Stehen u und v senkrecht zueinander, so entfällt der gemischte Term:

$$u \perp v \implies \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

(2) Speziell über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt auch die Umkehrung „ \Leftarrow “.

Orthogonale Zerlegung



Satz S2F: orthogonale Zerlegung von v bezüglich u

Sei $u \in V$ mit $\langle u | u \rangle \neq 0$. Jeder Vektor $v \in V$ hat genau eine Zerlegung $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ als Summe $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$ mit $v_{\parallel} \in \langle u \rangle_{\mathbb{K}}$ und $v_{\perp} \in \langle u \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp}$. Explizit gilt:

$$v_{\perp} = v - v_{\parallel} \quad \text{und} \quad v_{\parallel} = u\lambda \quad \text{mit} \quad \lambda = \langle u | v \rangle / \langle u | u \rangle.$$

Beweis: Wir finden $0 \stackrel{!}{=} \langle u | v_{\perp} \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \langle u | v - u\lambda \rangle \stackrel{(S3)}{=} \langle u | v \rangle - \langle u | u \rangle \lambda. \quad \square$ QED

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung

Satz S2G: Cauchy–Schwarz–Ungleichung (CSU)

(1) Für alle Vektoren $u, v \in V$ gilt die **Cauchy–Schwarz–Ungleichung**:

$$|\langle u | v \rangle|^2 \leq \langle u | u \rangle \langle v | v \rangle \quad \text{kurz} \quad |\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

(2) Gleichheit gilt genau dann, wenn u, v über \mathbb{K} linear abhängig sind.

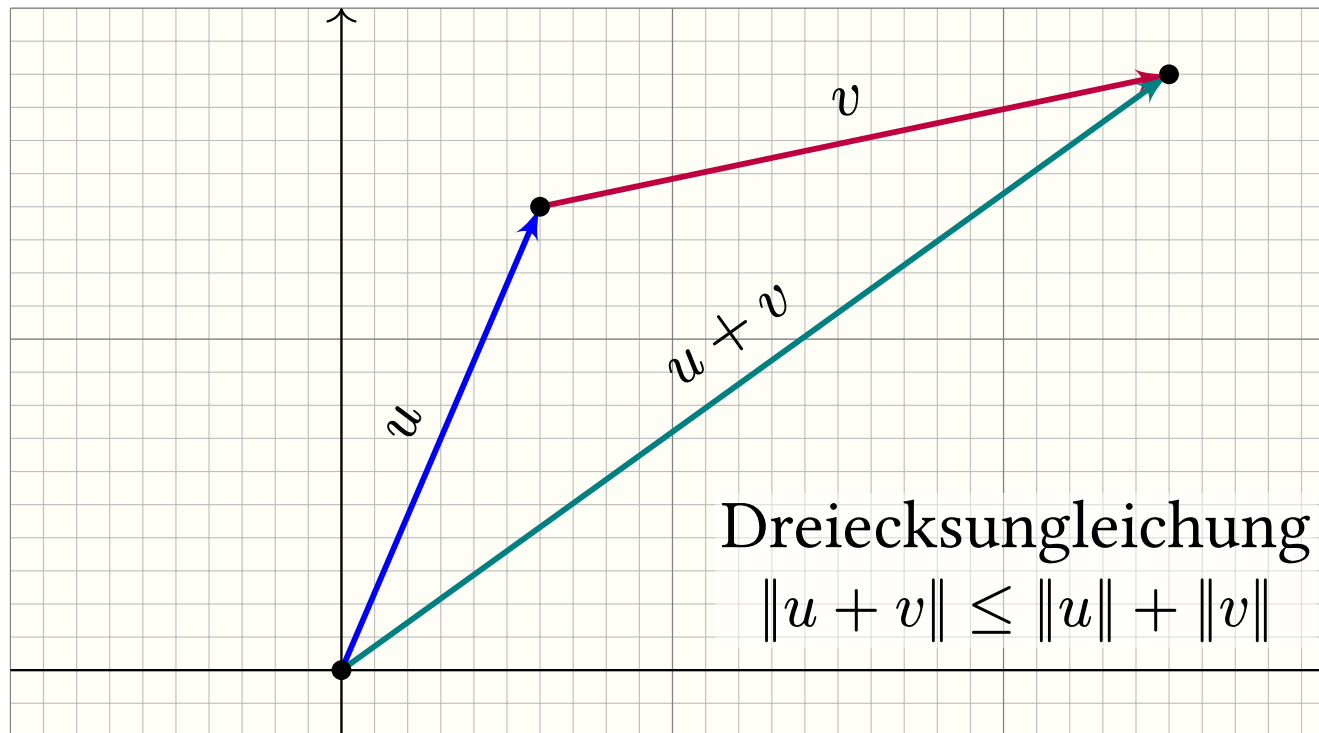
Geometrischer Beweis: (1) Für $u = 0$ ist alles klar. Fortan sei $u \neq 0$. Dank (S1) gilt $\langle u | u \rangle > 0$. Wir zerlegen $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$ gemäß Satz S2F:

$$\|v\|^2 \stackrel{\text{S2E}}{=} \|v_{\parallel}\|^2 + \|v_{\perp}\|^2 \stackrel{\text{(S0)}}{\geq} \|v_{\parallel}\|^2 \stackrel{\text{S2F}}{=} |\langle u | v \rangle|^2 / \|u\|^2$$

Was sind die wesentlichen Eigenschaften der Norm?

Die zum Skalarprodukt zugehörige Norm misst die **Länge von Vektoren**:

$$\|-\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : v \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$$



Was sind die wesentlichen Eigenschaften der Norm?

Satz S2H: Eigenschaften der Norm

Zu jedem Skalarprodukt $\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ gehört seine Norm:

$$\|-\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : v \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$$

Sie erfreut sich folgender Eigenschaften für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\text{N1: positive Definitheit,} \quad \|u\| > 0 \text{ für } u \neq 0$$

$$\text{N2: absolute Homogenität,} \quad \|u\lambda\| = \|u\| \cdot |\lambda|$$

$$\text{N3: Dreiecksungleichung,} \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Beweis: Aus (S1,2,3) folgt (N1,2). Die Ungleichung (N3) folgt dank CSU:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &\stackrel{\text{Def}}{=} \langle u + v | u + v \rangle \stackrel{\text{Bil}}{=} \langle u | u \rangle + \langle u | v \rangle + \langle v | u \rangle + \langle v | v \rangle \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|u\|^2 + 2 \|u\| \|v\| + \|v\|^2 \stackrel{\text{Bin}}{=} (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

Was sind die wesentlichen Eigenschaften der Norm?

Definition S2H: Skalarprodukt und Norm

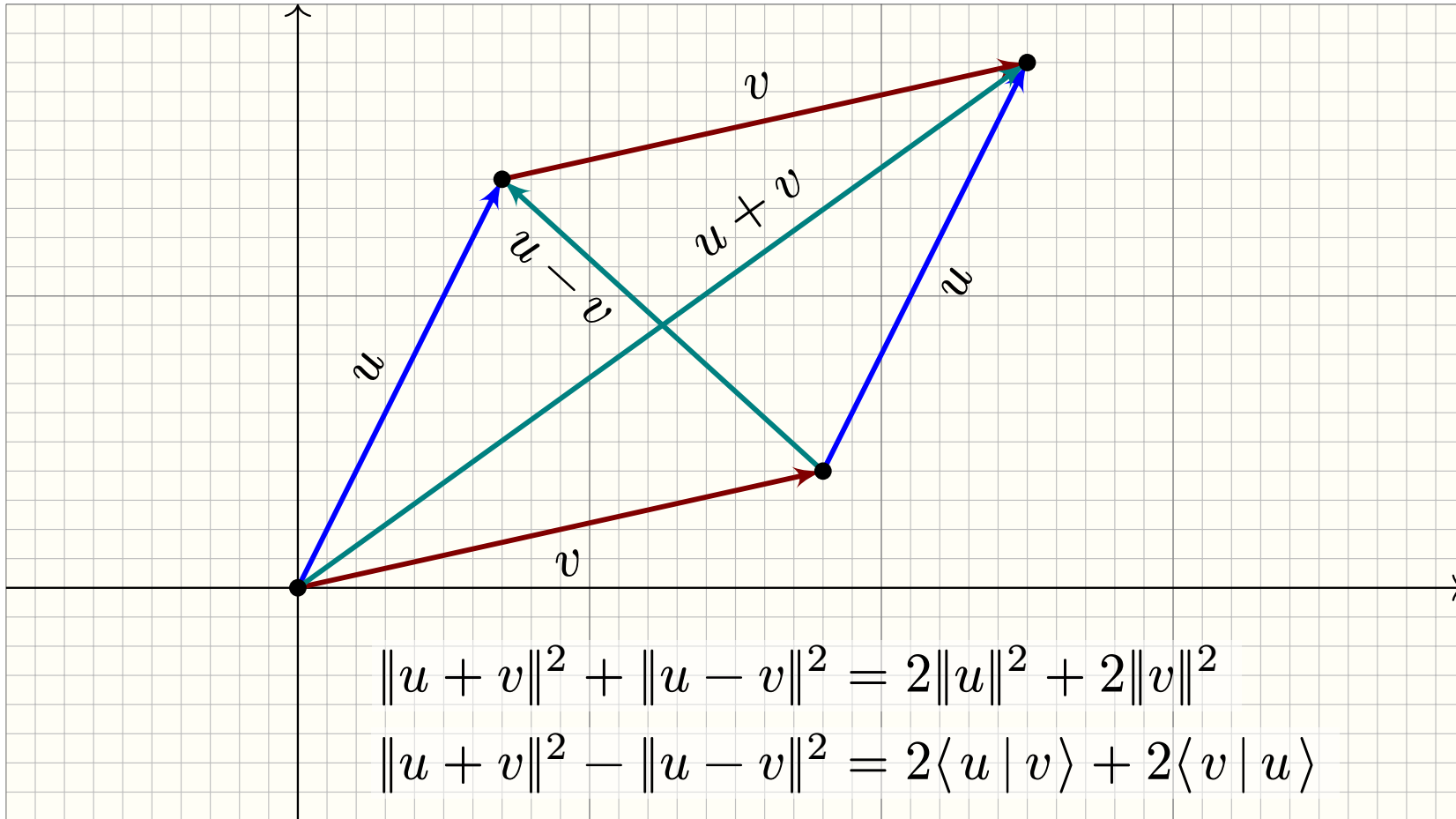
(1) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Ein **Skalarprodukt** auf V oder **inneres Produkt** ist eine Abbildung $\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, die (S1–3) erfüllt.

Das Paar $(V, \langle - | - \rangle)$ heißt dann **\mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt** oder **unitärer Raum** (über $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$) oder **euklidischer Raum** (speziell über \mathbb{R}).

(2) Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\| - \| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, die (N1–3) erfüllt.

Das Paar $(V, \| - \|)$ heißt dann **normierter \mathbb{K} -Vektorraum**, auch kurz **normierter Raum** über \mathbb{K} .

Parallelogramm und Polarisierung



Jede:r gute Handwerker:in kennt diesen Test zur Rechtwinkligkeit.

Parallelogramm und Polarisierung

Satz S2I: Parallelogramm und Polarisierung

(0) Für je zwei Vektoren $u, v \in V$ gilt die binomische Formel S2E:

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2 \operatorname{re}\langle u | v \rangle + \|v\|^2$$

(1) Daraus folgt die Parallelogrammgleichung:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

(2) Allein aus dem Normquadrat $\|-\|^2$ rekonstruieren wir die Form $\langle - | - \rangle$:

$$\operatorname{re}(\langle u | v \rangle) = [\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2] / 4$$

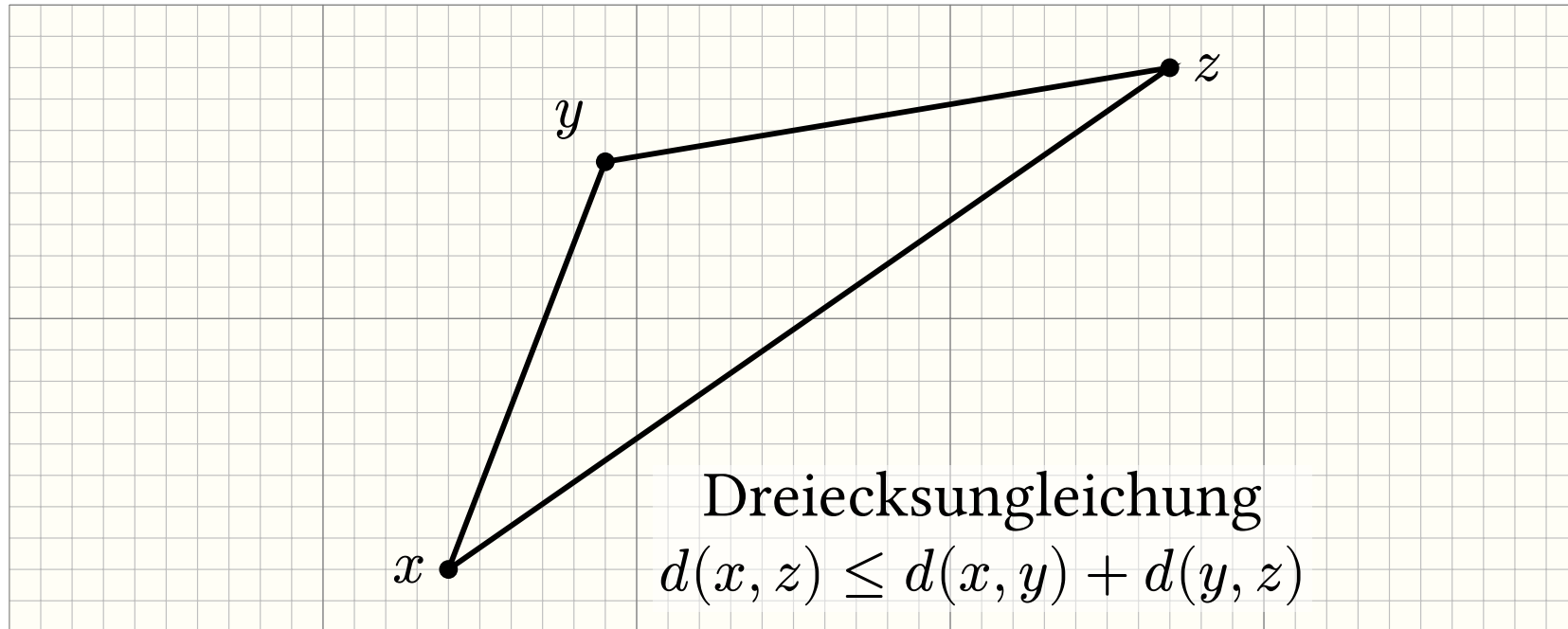
Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit \mathbb{R} -Basis $B = \{1\}, \{1, i\}, \{1, i, j, k\}$ gilt damit:

$$\langle u | v \rangle = \sum_{\varepsilon \in B} \operatorname{re}(\langle u | v/\varepsilon \rangle) \varepsilon$$

Was sind die wesentlichen Eigenschaften der Metrik?

Die zur Norm zugehörige Metrik misst den **Abstand von Punkten**:

$$d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : (x, y) \mapsto d(x, y) = \|y - x\|$$



Was sind die wesentlichen Eigenschaften der Metrik?

Satz S2κ: Eigenschaften der Metrik

Zu jeder Norm $\|-\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ gehört ihre Metrik:

$$d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : (x, y) \mapsto d(x, y) = \|y - x\|$$

Sie erfreut sich folgender Eigenschaften für alle $x, y, z \in V$:

M1: positive Definitheit, $d(x, y) > 0$ für $x \neq y$

M2: Symmetrie, $d(x, y) = d(y, x)$

M3: Dreiecksungleichung, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Beweis: Aus (N1,2,3) folgt (M1,2,3), hier ausführlich für (M3):

$$d(x, z) \stackrel{\text{Def}}{=} \|z - x\| \stackrel{\text{Vek}}{=} \|z - y + y - x\|$$

$$\stackrel{\text{(N3)}}{\leq} \|z - y\| + \|y - x\| \stackrel{\text{Def}}{=} d(x, y) + d(y, z)$$

Was sind die wesentlichen Eigenschaften der Metrik?

Definition S2κ: Metrik

Eine **Metrik** auf einer Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow [0, \infty]$, die (M1–3) erfüllt. Das Paar (X, d) heißt dann ein **metrischer Raum**.

Von Skalarprodukt zu Norm zu Metrik... und zurück?

Beispiel: Auf jeder Menge X haben wir die **diskrete Metrik**

$$d : X \times X \rightarrow \{0, 1\} \subset \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Kommt sie auf $X = \mathbb{K}^{(I)}$ von einer Norm? Nur für $I = \emptyset$ und $X = \{0\}$!

Beispiel: Auf $\mathbb{K}^{(I)}$ haben wir die **Taxinorm** und die **Maximumsnorm**:

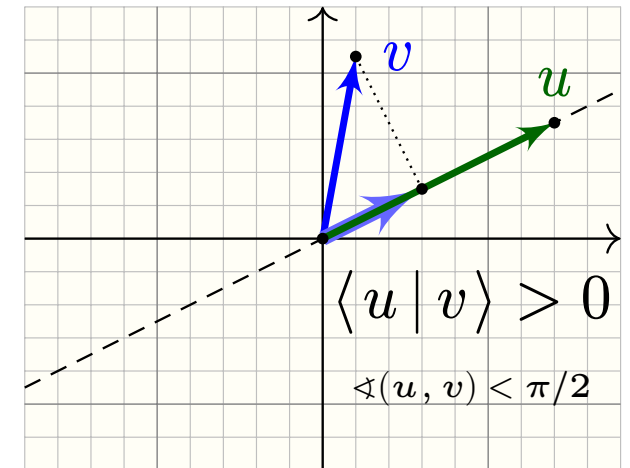
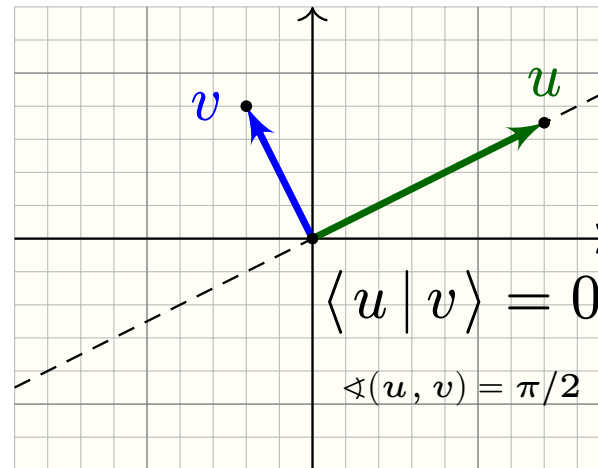
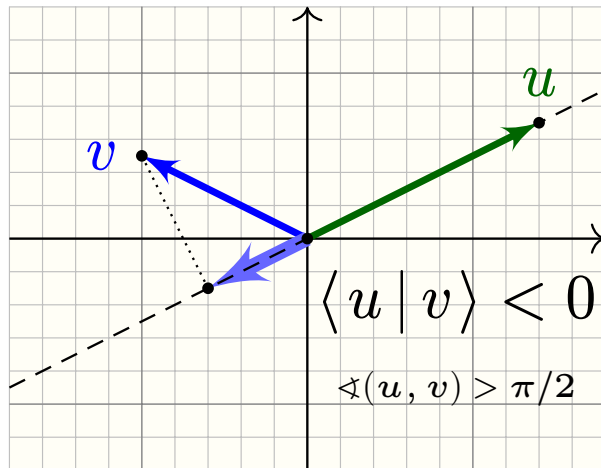
$$|x|_1 = \sum_{i \in I} |x_i| \quad \text{und} \quad |x|_\infty = \max_{i \in I} |x_i|$$

Kommen sie von einem Skalarprodukt? Nur für $X = \{0\}$ oder $X \cong \mathbb{K}$!

Reelle Winkel dank Cauchy–Schwarz–Ungleichung

Speziell über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt die nützliche Gleichung

$$\langle u | v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \sphericalangle(u, v).$$



Satz des Pythagoras

Satz S3A: Pythagoras mit n Summanden

→ S2E

Sind $u_1, \dots, u_n \in V$ orthogonal, so gilt

$$\|u_1 + \dots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \dots + \|u_n\|^2.$$

Beweis: (1) Das Normquadrat erhalten wir aus dem Skalarprodukt:

$$\|\sum_k u_k\|^2 \stackrel{\text{Def}}{=} \langle \sum_k u_k \mid \sum_l u_l \rangle \stackrel{(S3,4)}{=} \sum_k \sum_l \langle u_k \mid u_l \rangle \stackrel{\text{OS}}{=} \sum_k \|u_k\|^2$$

Satz S3B: Fourier–Koeffizienten

→ allgemein S10

Sei $(e_i)_{i \in I}$ in V eine orthogonale Familie mit $\langle e_i | e_i \rangle \neq 0$ für alle $i \in I$.

(1) Für jede Linearkombination $v = \sum_{i \in I} e_i v_i$ über \mathbb{K} gilt dann

$$v_i = \frac{\langle e_i | v \rangle}{\langle e_i | e_i \rangle}.$$

Beweis: (1) Die Koeffizientenformel folgt dank Orthogonalität:

$$\langle e_i | v \rangle = \langle e_i | \sum_j e_j v_j \rangle = \sum_j \langle e_i | e_j \rangle v_j = \langle e_i | e_i \rangle v_i$$

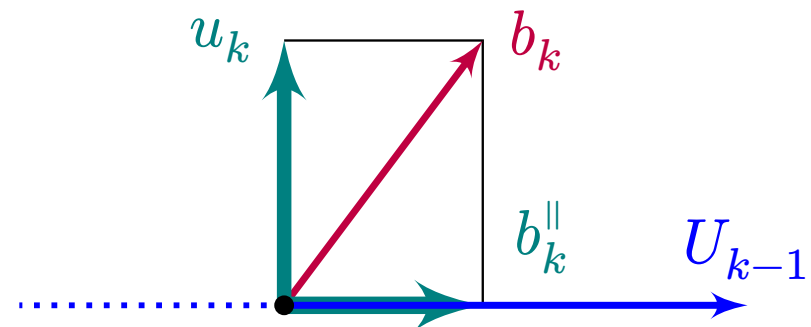
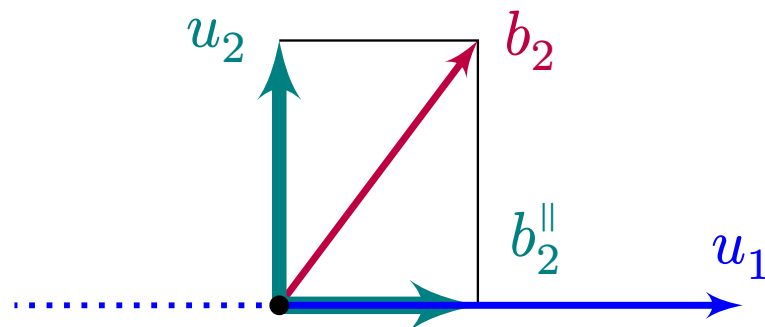
Orthonormalisierung nach Gram–Schmidt

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$.

- ❓ Hat V eine Basis? Ja, dank Basis-Auswahl-und-Ergänzungssatz M2K.
- ❓ Hat V eine Orthonormalbasis? mit möglichst expliziter Konstruktion?

Gegeben sei eine Basis b_1, \dots, b_n von V über \mathbb{K} . Wie formen wir daraus

- (1) ... eine Orthogonalbasis u_1, \dots, u_n ? mit $u_k = \sum_{j \leq k} b_j \lambda_{jk}$ und $\lambda_{kk} = 1$!
 - (2) ... eine Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n ? mit $e_k = \sum_{j \leq k} b_j \mu_{jk}$ und $\mu_{kk} > 0$!
- 😊 Für zwei Vektoren kennen wir die orthogonale Zerlegung S2F:



Orthonormalisierung nach Gram–Schmidt

Satz S3c: Laplace 1816, Gram 1883, Schmidt 1907 – Basisversion

Sei $b_1, \dots, b_n \in V$ eine Basis des Unterraums $U_n = \langle b_1, \dots, b_n \rangle_{\mathbb{K}}$.

(1) Hierzu existiert genau eine Orthogonalbasis u_1, \dots, u_k von U_k mit $b_k - u_k \in U_{k-1}$ für alle $k = 1, \dots, n$. Diese erhalten wir rekursiv:

$$u_k := b_k - \sum_{j=1}^{k-1} u_j \lambda_{jk} \quad \text{mit den eindeutigen} \quad \lambda_{jk} := \frac{\langle u_j | b_k \rangle}{\langle u_j | u_j \rangle}$$

Fourier–Koeffizienten

(2) Normiert zu $e_k := u_k / \|u_k\|$ erhalten wir eine Orthonormalbasis, also

$$\langle u_k | u_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq j, \\ \|u_k\|^2 > 0 & \text{für } k = j, \end{cases} \quad \text{und} \quad \langle e_k | e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq j, \\ 1 & \text{für } k = j. \end{cases}$$

Robuste Orthonormalisierung nach Gram–Schmidt

Robust heißt: Wir müssen lineare Unabhängigkeit nicht vorab prüfen!

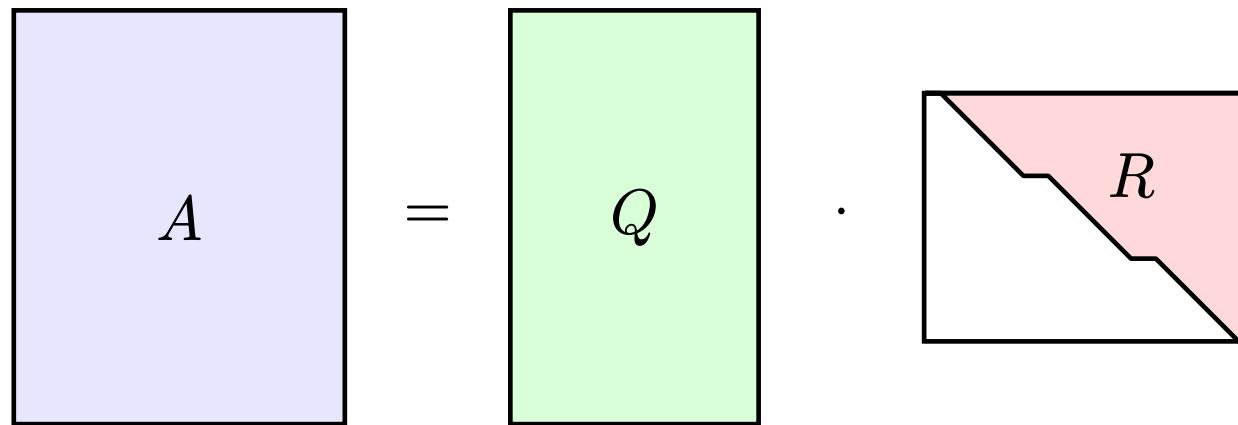
Algo S3D: robuste Orthonormalisierung nach Gram–Schmidt

Eingabe: ein Erzeugendensystem $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ des Unterraums U

Ausgabe: eine Orthonormalbasis $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_k)$ des Unterraums U

-
- 1: $k \leftarrow 0$
 - 2: **for** ℓ **from** 1 **to** n **do**
 - 3: $k \leftarrow k + 1; b'_k \leftarrow b_\ell; u_k \leftarrow b'_k - \sum_{j=1}^{k-1} e_j \langle e_j | b'_k \rangle$
 - 4: **if** $u_k \neq 0$ **then** $e_k \leftarrow u_k / \|u_k\|$ **else** $k \leftarrow k - 1$
 - 5: **return** (e_1, \dots, e_k)

Die QR-Zerlegung



Satz S3E: QR-Zerlegung, Existenz und Eindeutigkeit

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit Rang $\text{rang } A = r$.

Dazu existiert genau eine Zerlegung $A \mapsto (Q, R)$ der Form

$$A = QR$$

wobei $Q \in \mathbb{K}^{m \times r}$ orthonormale Spalten hat, also $Q^\dagger Q = I_r$ erfüllt, und $R \in \mathbb{K}^{r \times n}$ positive Zeilenstufenform (PZSF, mit Pivoteinträgen in $\mathbb{R}_{>0}$).

Zahlenbeispiel zur QR-Zerlegung

Aufgabe: Orthonormalisieren Sie die Spalten der Matrix A nach Gram-Schmidt. Lesen Sie daraus die QR-Zerlegung $A = QR$ ab.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_A \stackrel{(1)}{=} \begin{bmatrix} u_1 & a_2 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{(2)}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_U \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{12} \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_\Lambda$$

😊 Orthogonalisierung erfordert nur Bruchrechnung in \mathbb{K} .

$$\stackrel{(3)}{=} \begin{bmatrix} e_1 & u_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{(4)}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}}_Q \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_R$$

😊 Lästige Wurzeln? Wir normalisieren erst ganz am Ende!

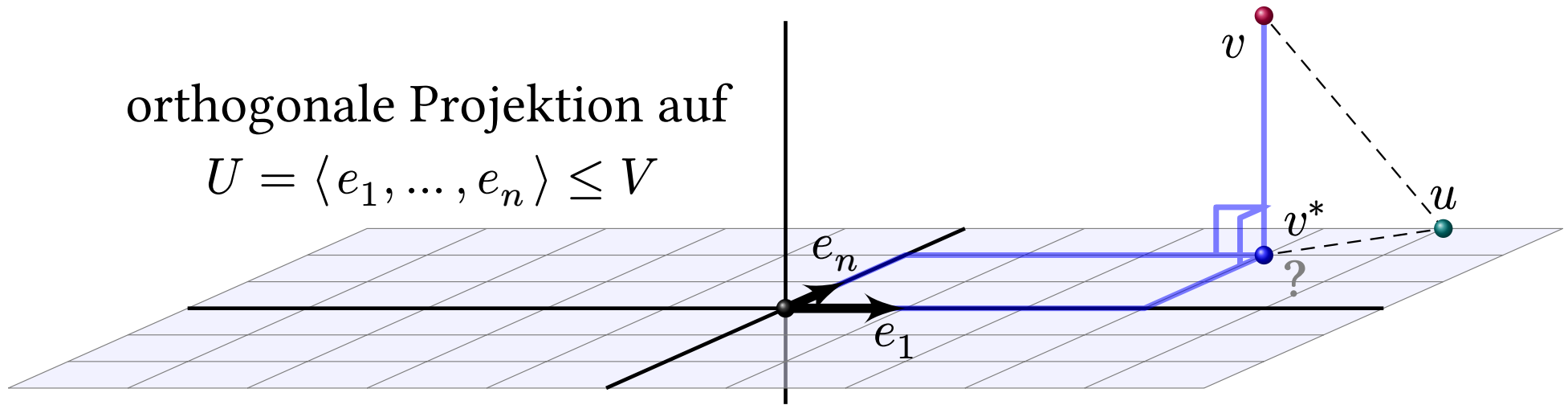
Zahlenbeispiel zur QR-Zerlegung

Aufgabe: Orthonormalisieren Sie die Spalten der Matrix A nach Gram-Schmidt. Lesen Sie daraus die QR-Zerlegung $A = QR$ ab.

$$\underbrace{\begin{array}{c} a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & -1 \end{array} \right] }_A \stackrel{(1)}{=} \underbrace{\begin{array}{c} u_1 \quad u_2 \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{array} \right] }_U \underbrace{\left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]}_\Lambda \\
 \stackrel{(2)}{=} \underbrace{\begin{array}{c} e_1 \quad e_2 \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{array} \right] }_Q \underbrace{\left[\begin{array}{ccccc} 0 & \sqrt{2} & 5\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right]}_R
 \end{array}$$

Bestapproximation durch Orthogonalprojektion

orthogonale Projektion auf
 $U = \langle e_1, \dots, e_n \rangle \subseteq V$



Bestapproximation durch Orthogonalprojektion

Satz S3F: Gauß 1795, Bessel 1818

Sei $U \leq V$ ein Unterraum mit einer Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n .

(1) **Orthogonalprojektion:** Zu jedem $v \in V$ existiert genau ein Vektor $v^* = \sum_{k=1}^n e_k v_k \in U$ mit $(v - v^*) \perp U$. Dieser ist explizit gegeben durch

$$v_k = \langle e_k | v \rangle / \langle e_k | e_k \rangle, \quad \text{seine Fourier-Koeffizienten.}$$

(2) **Bestapproximation:** Für alle Konkurrenten $u \in U \setminus \{v^*\}$ gilt

$$\|v - u\|^2 = \|v - v^*\|^2 + \|v^* - u\|^2 > \|v - v^*\|^2.$$

Bestapproximation durch Orthogonalprojektion

Beweis: (1) Genau dann gilt $(v - v^*) \perp U$, wenn für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$0 \stackrel{!}{=} \langle e_k | v - v^* \rangle \stackrel{\text{Lin}}{=} \langle e_k | v \rangle - \sum_j \langle e_k | e_j \rangle v_j \stackrel{\text{ONB}}{=} \langle e_k | v \rangle - \langle e_k | e_k \rangle v_k$$

(2) Für jeden Konkurrenten $u \in U$ gilt $u = v^* + \sum_k e_k \mu_k$ mit $\mu \in \mathbb{K}^n$, also

$$\|v - u\|^2 \stackrel{\text{Def}}{=} \|(v - v^*) - \sum_k e_k \mu_k\|^2 \stackrel{\text{S3A}}{=} \|v - v^*\|^2 + \sum_k \|e_k\|^2 |\mu_k|^2$$

Näherungslösung eines überbestimmten Gleichungssystems

Problemstellung: Zu lösen sei über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ das Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ von Rang $\text{rang } A = n \leq m$ und rechter Seite $b \in \mathbb{K}^m$.

(0) Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^m$ die Spalten von A und $U = \langle a_1, \dots, a_n \rangle_{\mathbb{K}} \subseteq \mathbb{K}^m$ der Spaltenraum von A . Genau dann ist $Ax = b$ lösbar, wenn $b \in U$ gilt.

(1) Allgemein suchen wir Näherungslösungen $x^* \in \mathbb{K}^n$. Der Fehlervektor

$$v = Ax^* - b$$

soll dabei möglichst klein sein, wir wollen also die Norm $\|v\|$ minimieren. Nach Satz S3F ist dies äquivalent zu $v \perp U$, und somit zu $v \perp a_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, kurz $A^\dagger v = 0$. Ausgeschrieben bedeutet das:

$$A^\dagger Ax^* = A^\dagger b$$

Näherungslösung eines überbestimmten Gleichungssystems

Lemma S3c: die hermitesche Matrix $A^\dagger A$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Zu $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist $A^\dagger A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hermitesch und erfüllt $\text{Ker}(A^\dagger A) = \text{Ker} A$.

Beweis: Es gilt $(A^\dagger A)^\dagger = A^\dagger (A^\dagger)^\dagger = A^\dagger A$. Wir zeigen $\text{Ker}(A^\dagger A) = \text{Ker} A$:

Klar ist „ \supseteq “. Wir zeigen „ \subseteq “: Hierzu sei $v \in \text{Ker}(A^\dagger A)$, also $A^\dagger A v = 0$.

Dann gilt $0 = v^\dagger (A^\dagger A v) = (A v)^\dagger (A v)$, also $A v = 0$, somit $v \in \text{Ker} A$. QED

Näherungslösung eines überbestimmten Gleichungssystems

Satz S3H: Näherungslösung eines überbestimmten Gleichungssystems

Zu lösen sei über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ von Rang $\text{rang } A = n \leq m$ und rechter Seite $b \in \mathbb{K}^m$.

(0) Dank S3F existiert genau eine Bestapproximation $x^* \in \mathbb{K}^n$ mit minimaler Fehlernorm $\|Ax^* - b\|$, gegeben durch $A^\dagger Ax^* = A^\dagger b$.

(1) Dank des vorigen Lemmas ist $A^\dagger A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar, also gilt:

$$x^* = (A^\dagger A)^{-1} A^\dagger b$$

(2) Die QR-Zerlegung $A = QR$ vereinfacht dies zu

$$Rx^* = Q^\dagger b$$

Für Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit Periode T nutzen wir das **Skalarprodukt**

$$\langle f | g \rangle := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Sei $\omega = 2\pi/T$. Als **Basisfunktion** $e_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$e_k(t) := e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t).$$

Ihre Linearkombinationen sind die **trigonometrischen Polynome**:

$$f(t) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ik\omega t}, \quad g(t) = \sum_{\ell=-n}^n \hat{g}(\ell) e^{i\ell\omega t} \quad \text{mit} \quad \hat{f}(k), \hat{g}(\ell) \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe: Berechnen Sie hierzu die Skalarprodukte

$$(0) \langle 1 | e_n \rangle, \quad (1) \langle e_k | e_\ell \rangle, \quad (2) \langle e_k | g \rangle, \quad (3) \langle f | g \rangle, \quad (4) \langle f | f \rangle.$$

(5) Entwickeln Sie $f(t) = \sin^2 t$ und $g(t) = \cos^3 t$ in Fourier-Polynome.

(6) Berechnen Sie daraus $\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \sin^4 t dt$ und $\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \cos^6 t dt$.

Lösung: (0) Wir berechnen $\langle 1 | e_n \rangle$. Für $n = 0$ ist es besonders leicht:

$$\langle 1 | e_0 \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T 1 \cdot e^{i0\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T 1 dt = 1.$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$ nutzen wir den HDI und $\omega T = 2\pi$:

$$\langle 1 | e_n \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T 1 \cdot e^{in\omega t} dt \stackrel{\text{HDI}}{=} \frac{1}{T} \left[\frac{1}{in\omega} e^{in\omega t} \right]_{t=0}^T = 0.$$

(1) **Orthonormalität** – Wir berechnen die gesuchten Skalarprodukte:

$$\begin{aligned} \langle e_k | e_\ell \rangle &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{e_k(t)} e_\ell(t) dt \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} e^{i\ell\omega t} dt \\ &\stackrel{\text{Exp}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{i(\ell-k)\omega t} dt \stackrel{(0)}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell, \\ 1 & \text{für } k = \ell. \end{cases} \end{aligned}$$

Die trigonometrische Orthonormalbasis

(2) **Fourier** – Dank Linearität und Orthonormalität erhalten wir:

$$\langle e_k | g \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \left\langle e_k \left| \sum_{\ell=-n}^n \hat{g}(\ell) e_\ell \right. \right\rangle \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{\ell=-n}^n \hat{g}(\ell) \langle e_k | e_\ell \rangle \stackrel{(1)}{=} \hat{g}(k)$$

😊 Das Skalarprodukt filtert den gewünschten Koeffizienten heraus!

(3) **Parseval** – Dank Bilinearität und Orthonormalität erhalten wir:

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle &\stackrel{\text{Def}}{=} \left\langle \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e_k \left| \sum_{\ell=-n}^n \hat{g}(\ell) e_\ell \right. \right\rangle \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{k=-n}^n \overline{\hat{f}(k)} \left\langle e_k \left| \sum_{\ell=-n}^n \hat{g}(\ell) e_\ell \right. \right\rangle \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{k=-n}^n \sum_{\ell=-n}^n \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(\ell) \langle e_k | e_\ell \rangle \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=-n}^n \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k). \end{aligned}$$

(4) **Energiegleichung** – Für das Normquadrat gilt Pythagoras:

$$\langle f | f \rangle \stackrel{(3)}{=} \sum_{k=-n}^n |\hat{f}(k)|^2$$

😊 Das Normquadrat ist die Summe der Koeffizientenquadrate.

(5) Wir entwickeln f und g dank der Euler-Formel $e^{it} = \cos t + i \sin t$:

$$f(t) = \sin(t)^2 = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^2 = -\frac{1}{4} e^{2it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-2it} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t)$$

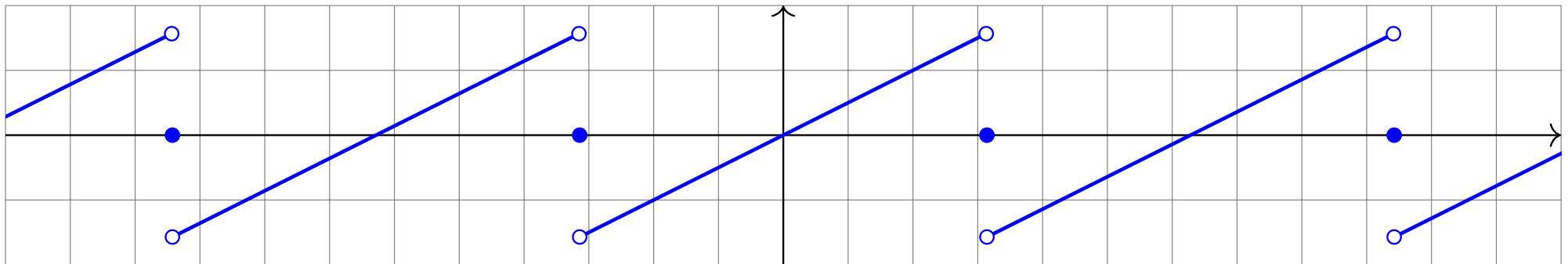
$$\begin{aligned} g(t) = \cos(t)^3 &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} e^{3it} + \frac{3}{8} e^{it} + \frac{3}{8} e^{-it} + \frac{1}{8} e^{-3it} \\ &= \frac{3}{4} \cos(t) + \frac{1}{4} \cos(3t) \end{aligned}$$

(6) Wir nutzen die Energiegleichung (4) und Fourier-Koeffizienten (5):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \sin^4 t \, dt &\stackrel{\text{Def}}{=} \langle f | f \rangle \stackrel{(4)}{=} \sum_{k=-n}^n |\hat{f}(k)|^2 \stackrel{(5)}{=} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \cos^6 t \, dt &\stackrel{\text{Def}}{=} \langle g | g \rangle \stackrel{(4)}{=} \sum_{k=-n}^n |\hat{g}(k)|^2 \stackrel{(5)}{=} \frac{5}{16} \end{aligned}$$

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(t) dx.$$

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ungerade und 2π -periodisch mit $f(x) = x/2$ für $|x| < \pi$.



Aufgabe: Berechnen Sie die Bestapproximation $f_n \in U_n$ im Unterraum $U_n = \langle e_k \mid -n \leq k \leq n \rangle \subseteq V$ der Fourier-Polynome vom Grad $\leq n$.

Lösung: Der Fourier-Koeffizient c_0 ist der Mittelwert über eine Periode:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i0kx} \frac{x}{2} dx = 0 \quad (\text{ungerader Integrand})$$

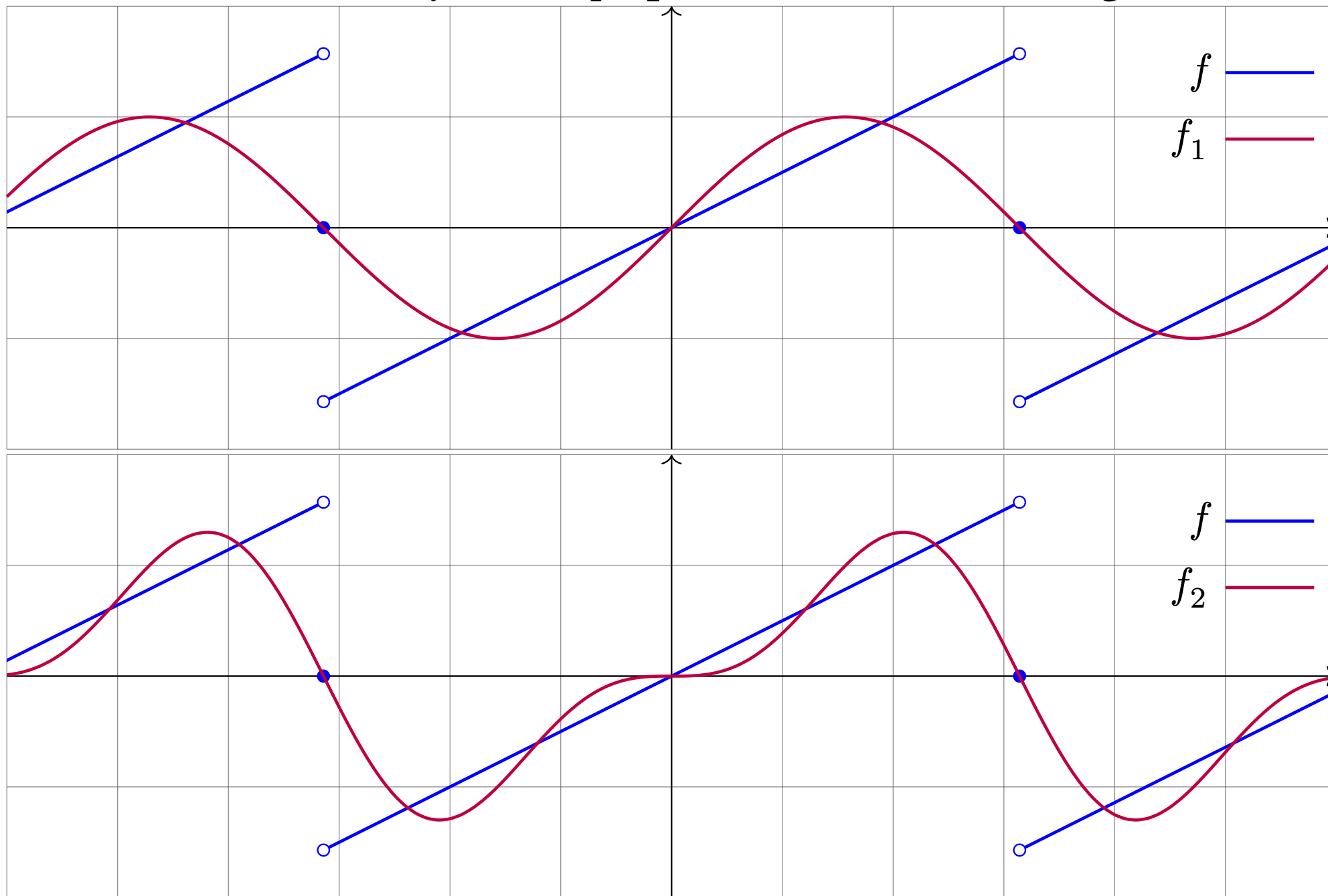
Für $k \neq 0$ nutzen wir partielle Integration:

$$\begin{aligned} c_k &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} x dx \quad \stackrel{\text{part}}{=} \frac{1}{4\pi} \left(\left[\frac{i}{k} e^{-ikx} x \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i}{k} e^{-ikx} dx \right) \\ &= \frac{i}{4\pi k} \left[e^{-i\pi k} \pi - e^{i\pi k} \pi \right] = (-1)^k \frac{i}{2k} \end{aligned}$$

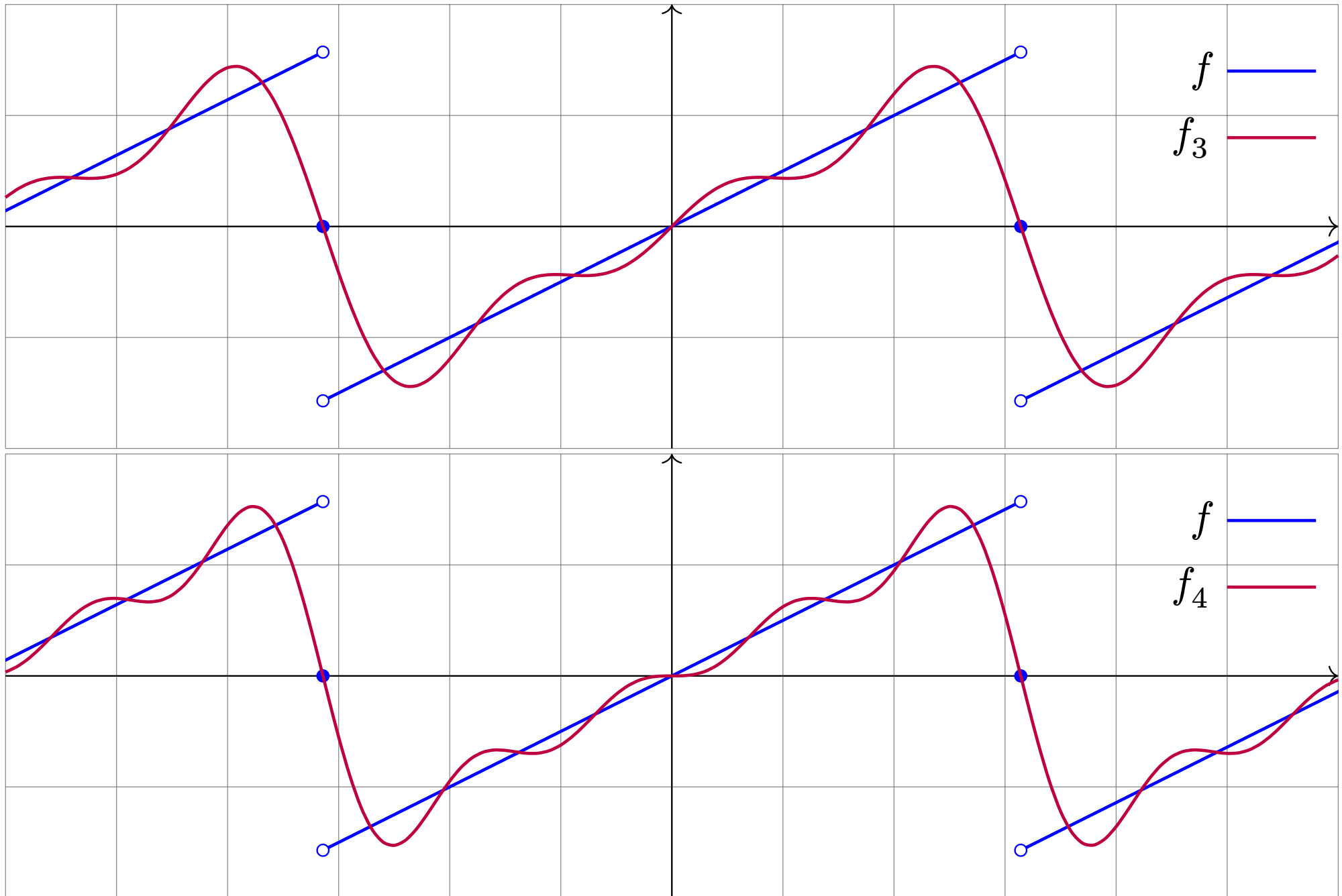
Damit haben wir zu $f \in V$ die Bestapproximation $f_n \in U_n$ gefunden:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^k i \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k} \\ &= \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \end{aligned}$$

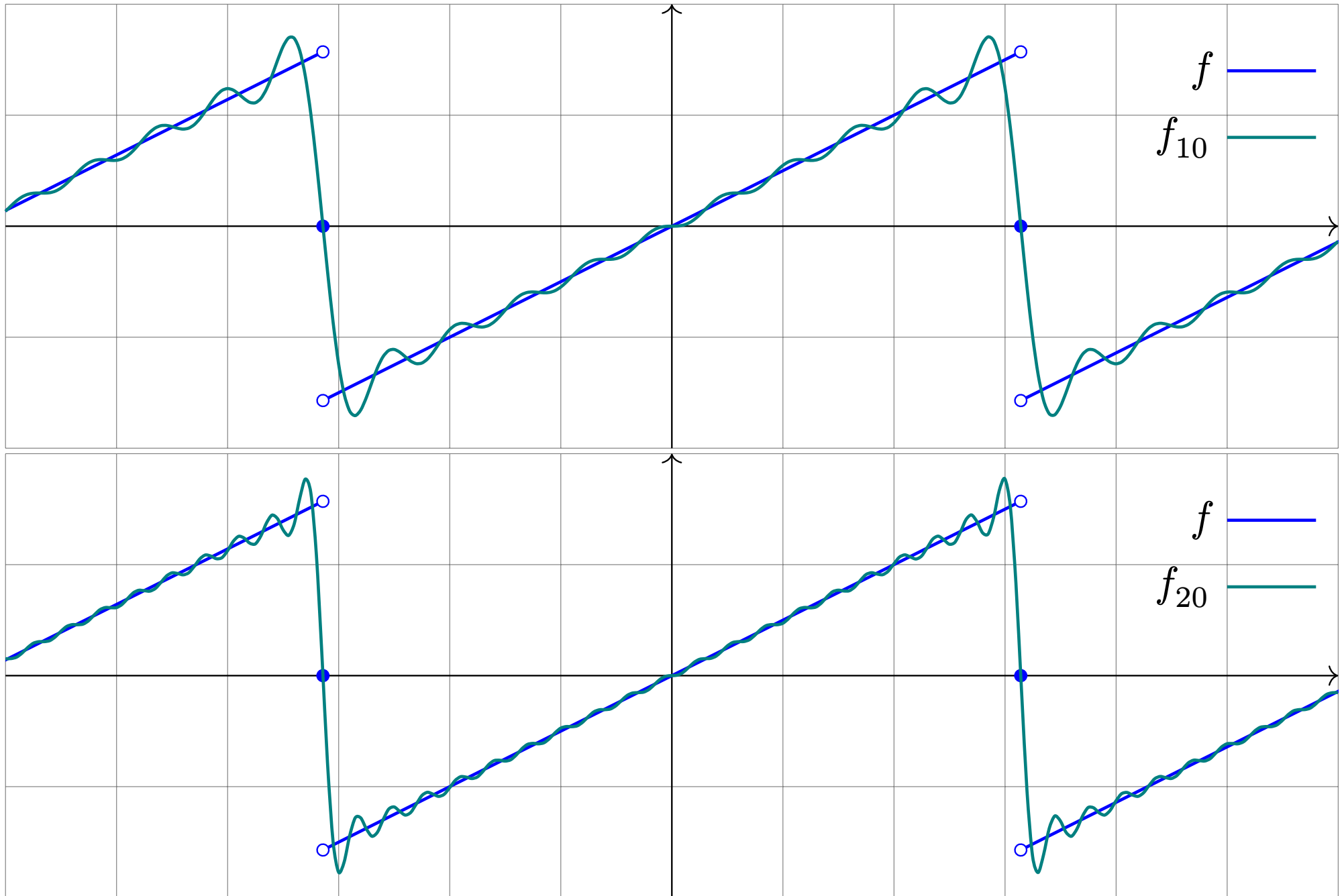
Die ersten Fourier-Polynome f_1, f_2 ähneln f zunächst nur grob:



Die nächsten Fourier-Polynome f_3, f_4 ähneln f schon etwas mehr:



Die Fourier-Polynome überschwingen bis zu 9% der Sprunghöhe:



Isometrische Homomorphismen erhalten die Form.

Definition S4A: Isometrie sesquilinearer Räume

Ein **isometrischer Homomorphismus** $f : (U, \alpha) \rightarrow (V, \beta)$ sesquilinearer Räume über (\mathbb{K}, σ) ist eine \mathbb{K} -lineare Abbildung, die die Formen erhält:

$$\beta(f(u), f(v)) = \alpha(u, v) \quad \text{für alle } u, v \in U$$

Ist f zudem injektiv, so nennen wir f eine **isometrische Einbettung**.
Ist f sogar bijektiv, so nennen wir f einen **isometrischen Isomorphismus**.

Beispiel: Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n : v \mapsto Av$.
Isometrie $u^\dagger A^\dagger A v = u^\dagger v$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^m$ bedeutet $A^\dagger A = 1_{m \times m}$.

Isometrische Homomorphismen erhalten die Form.

Satz S4A: Identität und Komposition und Umkehrung

- (1) Für jeden sesquilinearen Raum (V, β) ist $\text{id}_V : V \rightarrow V$ eine Isometrie.
- (2) Sind $f : (U, \alpha) \rightarrow (V, \beta)$ und $g : (V, \beta) \rightarrow (W, \gamma)$ Isometrien, so auch ihre Komposition $g \circ f : (U, \alpha) \rightarrow (W, \gamma)$.
- (3) Ist $f : (U, \alpha) \rightarrow (V, \beta)$ eine Isometrie und bijektiv, so auch die Umkehrung $g = f^{-1} : (V, \beta) \rightarrow (U, \alpha)$.

Isometrische Homomorphismen erhalten alle Abstände.

Korollar S4B: Isometrie bezüglich Skalarprodukt, Norm, Metrik

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $f: V \rightarrow U$ eine lineare Abbildung zwischen unitären Räumen $(V, \langle - | - \rangle_V)$ und $(U, \langle - | - \rangle_U)$. Dann sind äquivalent:

(1) f erhält alle Skalarprodukte:

$$\langle f(v) | f(v') \rangle_U = \langle v | v' \rangle_V \quad \text{für alle } v, v' \in V$$

(2) f erhält alle Normen:

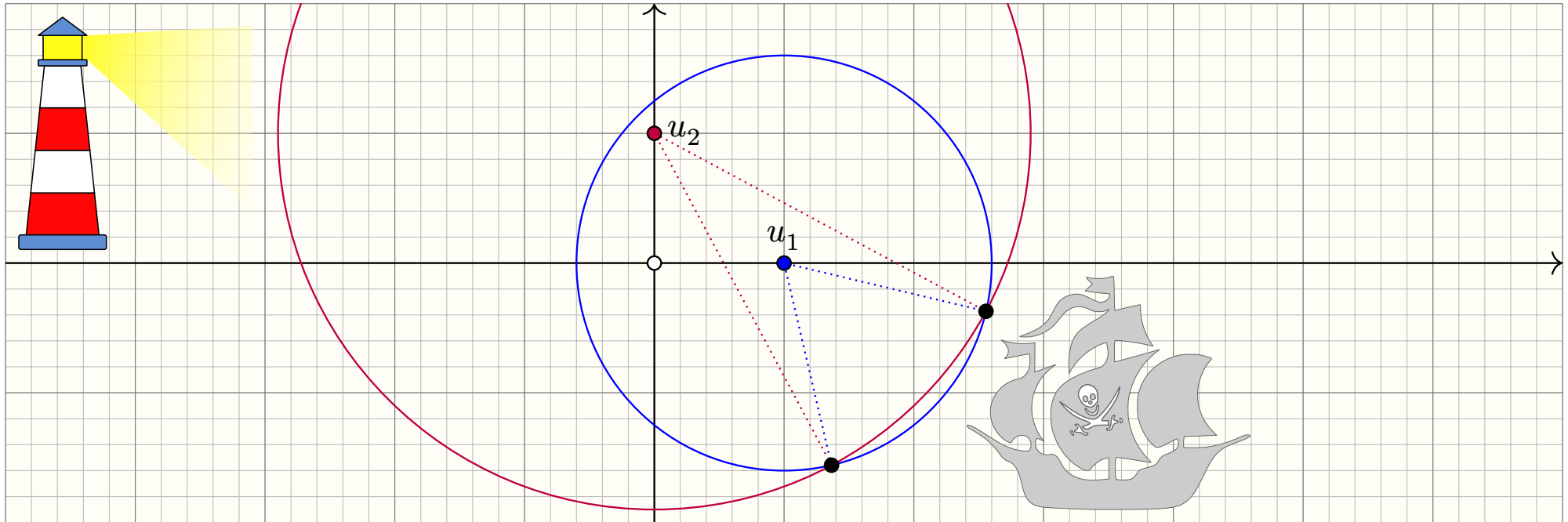
$$\|f(v)\|_U = \|v\|_V \quad \text{für alle } v \in V$$

(3) f erhält alle Abstände:

$$d_U(f(v), f(v')) = d_V(v, v') \quad \text{für alle } v, v' \in V$$

Beweis: Für „(1) \Leftrightarrow (2)“ nutzen wir Polarisierung S2I über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

Globale Positionsbestimmung



Wir finden $\|x - u_i\|^2 = \langle x - u_i | x - u_i \rangle = \|x\|^2 - 2\langle u_i | x \rangle + \|u_i\|^2$,
 umgestellt also $\langle u_i | x \rangle = [d(0, u_i)^2 + d(0, x)^2 - d(u_i, x)^2]/2$.

Satz S4c: Positionsbestimmung aka *global positioning system* / GPS

(0) Wir betrachten \mathbb{R}^n mit Orthonormalbasis (u_1, \dots, u_n) . Jeder Punkt $x = \sum_{i=1}^n u_i \lambda_i$ ist bestimmt durch seine Abstände zu $0, u_1, \dots, u_n$ dank

$$\lambda_i = \langle u_i | x \rangle = (1 + d(0, x)^2 - d(u_i, x)^2)/2.$$

Zahlenbeispiel: Finden Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}^3$ mit folgenden Abständen:

$$d(x, 0) = \sqrt{35}, \quad d(x, e_1) = \sqrt{30}, \quad d(x, e_2) = \sqrt{38}, \quad d(x, e_3) = \sqrt{26}.$$

Lösung: Dank unserer Vorbereitung lesen wir die Koordinaten ab:

$$x_1 = (1 + 35 - 30)/2 = 3$$

$$x_2 = (1 + 35 - 38)/2 = -1$$

$$x_3 = (1 + 35 - 26)/2 = 5$$

Rigidität euklidischer Isometrien

Eine **affine Abbildung** $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist von der Form $f(x) = Ax + b$ mit linearem Anteil $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und Verschiebungsvektor $b \in \mathbb{R}^n$.

Satz S4E: Rigidität euklidischer Isometrien

Wir betrachten (\mathbb{R}^m, d) und (\mathbb{R}^n, d) mit ihrer euklidischen Metrik.

- (1) Eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax + b$ ist isometrisch gdw die Matrix A orthonormale Spalten hat, also $A^T A = 1_{m \times m}$ erfüllt.
- (2) Jede isometrische Abbildung $f : (\mathbb{R}^m, d) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d)$ ist affin-linear.

Rigidität euklidischer Isometrien

Beweis: (1) Für alle $x \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\begin{aligned}d(0, x)^2 &= |x|^2 = x^\top 1_{m \times m} x, \\d(f(0), f(x))^2 &= |Ax|^2 = x^\top A^\top A x.\end{aligned}$$

Gleichheit für alle x ist äquivalent zu $A^\top A = 1_{m \times m}$.

Rigidität euklidischer Isometrien

(2) Ist $f : (\mathbb{R}^m, d) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d)$ eine Isometrie, so auch $g : (\mathbb{R}^m, d) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d)$ verschoben zu $g(x) = f(x) - b$. Wir setzen $b = f(0)$ und erhalten $g(0) = 0$.

(2a) Sei u_1, \dots, u_m in \mathbb{R}^m eine Orthonormalbasis, etwa die kanonische. Die Abstände zwischen $0, u_1, \dots, u_m$ sind $d(0, u_i)^2 = |u_i|^2 = \langle u_i | u_i \rangle = 1$, $d(u_i, u_j)^2 = |u_i - u_j|^2 = \langle u_i - u_j | u_i - u_j \rangle = |u_i|^2 - 2\langle u_i | u_j \rangle + |u_j|^2 = 2$. Dasselbe gilt für ihre Bilder $v_1 = g(u_1), \dots, v_m = g(u_m)$ in \mathbb{R}^n , also sind auch diese orthonormal. Wir ergänzen zu einer ONB $v_1, \dots, v_m, \dots, v_n$.

(2a) Für $x \in \mathbb{R}^m$ gilt $x = \sum_{i=1}^m u_i x_i$ mit $x_i = (1 + d(x, 0)^2 - d(x, u_i)^2)/2$. Für $y = g(x)$ gilt ebenso $y = \sum_{i=1}^n v_i y_i$ mit $y_i = (1 + d(y, 0)^2 - d(y, v_i)^2)/2$. Da g alle Abstände erhält, wissen wir dank Positionsbestimmung S4c:

$$x_i = \frac{1 + d(x, 0)^2 - d(x, u_i)^2}{2} = \frac{1 + d(g(x), g(0))^2 - d(g(x), g(u_i))^2}{2} = y_i$$

Es gilt $\sum_{i=1}^m x_i^2 = d(x, 0)^2 = d(y, 0)^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$, also $y_i = 0$ für $i > m$.

Wir schließen daraus $g(u_1 x_1 + \dots + u_m x_m) = v_1 x_1 + \dots + v_m x_m$.

Das zeigt die Behauptung: g ist linear, somit f affin-linear. □

Die unitäre Gruppe $\mathrm{GU}(V, \beta) \supseteq \mathrm{SU}(V, \beta)$

Definition S4F: die unitäre Gruppe

Sei (V, β) ein hermitescher Raum über (\mathbb{K}, σ) , etwa $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

$$\mathrm{GL}(V) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V) := \{ f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \mid f \text{ ist invertierbar} \}.$$

Ist der Automorphismus f zudem isometrisch, so nennen wir f **unitär**, das bedeutet ausgeschrieben $\beta(f(u), f(v)) = \beta(u, v)$ für alle $u, v \in V$. Diese bilden die **Isometriegruppe** oder (allgemeine) **unitäre Gruppe**

$$\mathrm{GU}(V, \beta) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V, \beta) = \{ f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V) \mid f \text{ ist isometrisch} \}.$$

Ist $\dim_{\mathbb{K}}(V)$ endlich und \mathbb{K} kommutativ, so haben wir die Determinante $\det : \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \rightarrow \mathbb{K}$ (O2G). Dies definiert die **spezielle unitäre Gruppe**

$$\mathrm{SU}(V, \beta) = \mathrm{SAut}_{\mathbb{K}}(V, \beta) = \{ f \in \mathrm{GU}(V, \beta) \mid \det f = 1 \}.$$

Unitäre Matrix, orthogonale Matrix

Definition S4c: unitäre Matrix, orthogonale Matrix

Sei (\mathbb{K}, σ) ein $*$ Körper, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\text{conj}_{\mathbb{K}}$.

Die kanonische Sesquilinearform auf \mathbb{K}^n über (\mathbb{K}, σ) ist $\beta : (u, v) \mapsto u^\dagger v$.

(1) Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ über (\mathbb{K}, σ) heißt **unitär**, falls gilt:

$$A^\dagger A = I$$

Es folgt $AA^\dagger = I$, also $A \in \text{GL}_n \mathbb{K}$ mit $A^{-1} = A^\dagger$. Beispiel: $(\mathbb{C}, \text{conj}_{\mathbb{C}})$.

(2) Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ über $(\mathbb{K}, \text{id}_{\mathbb{K}})$ heißt **orthogonal**, falls gilt:

$$A^\top A = I$$

Es folgt $AA^\top = I$, also $A \in \text{GL}_n \mathbb{K}$ mit $A^{-1} = A^\top$. Beispiel: $(\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}})$.

😊 Sind die Spalten orthonormal, so auch die Zeilen, und umgekehrt!

Die klassischen Gruppen: orthogonal, unitär, symplektisch

Definition S4G: die klassischen Matrixgruppen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

In jeder Dimension $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ haben wir den Matrixring $\mathbb{K}^{n \times n}$ und hierin

$$\mathrm{GL}_n \mathbb{K} = \{ A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \det A \neq 0 \}, \quad \mathrm{SL}_n \mathbb{K} = \{ A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \det A = 1 \}$$

Die Matrizen, die das Skalarprodukt erhalten, bilden Untergruppen:

$$\mathrm{GU}_n \mathbb{K} = \{ A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid A^\dagger A = I \}, \quad \mathrm{SU}_n \mathbb{K} = \{ A \in \mathrm{GU}_n \mathbb{K} \mid \det A = 1 \}$$

Dies sind die **klassischen Matrixgruppen**. Traditionelle Bezeichnung:

$$\mathrm{GO}_n \mathbb{R} = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^\top A = I \}, \quad \mathrm{SO}_n \mathbb{R} = \{ A \in \mathrm{GO}_n \mathbb{R} \mid \det A = 1 \},$$

$$\mathrm{GU}_n \mathbb{C} = \{ A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A^\dagger A = I \}, \quad \mathrm{SU}_n \mathbb{C} = \{ A \in \mathrm{GU}_n \mathbb{C} \mid \det A = 1 \},$$

Kleine orthogonale und unitäre Gruppen

Satz S4H: kleine orthogonale und unitäre Gruppen

Für $n = 1$ haben wir $GL_1 \mathbb{K} = \mathbb{K}^\times$ sowie hierin jeweils

$$\begin{aligned} GO_1 \mathbb{R} &= \{a \in \mathbb{R} \mid a^2 = 1\} = \{\pm 1\} = \mathbb{S}^0, \\ GU_1 \mathbb{C} &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1\} = \mathbb{S}^1. \end{aligned}$$

Für $n = 2$ gilt

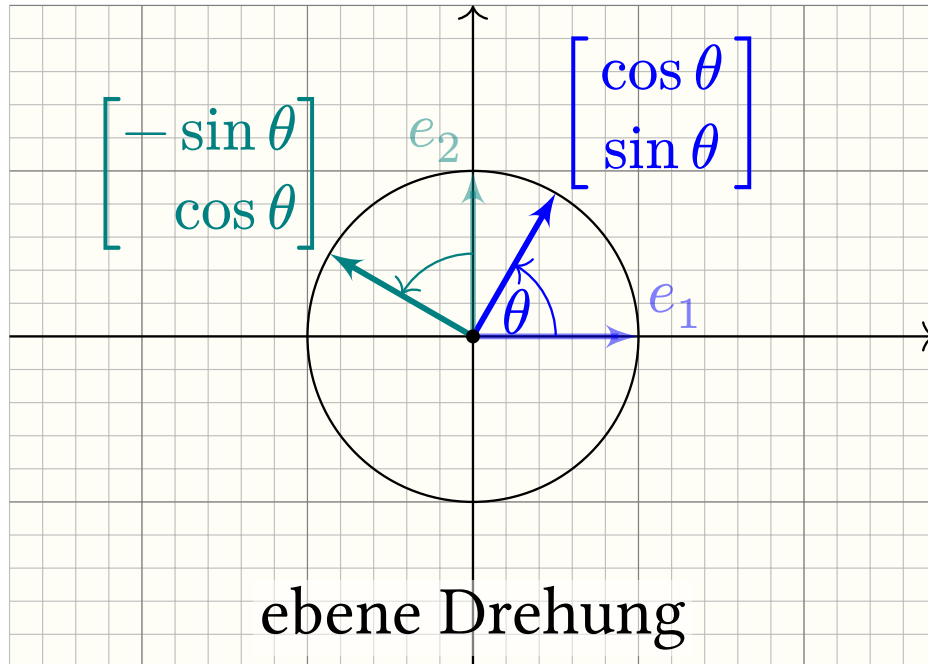
$$GO_2 \mathbb{R} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b\lambda \\ b & a\lambda \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{R}, \lambda = \pm 1, \\ a^2 + b^2 = 1 \end{array} \right\} \quad \text{allgemein und speziell}$$

$$SO_2 \mathbb{R} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{R}, \\ a^2 + b^2 = 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{S}^1,$$

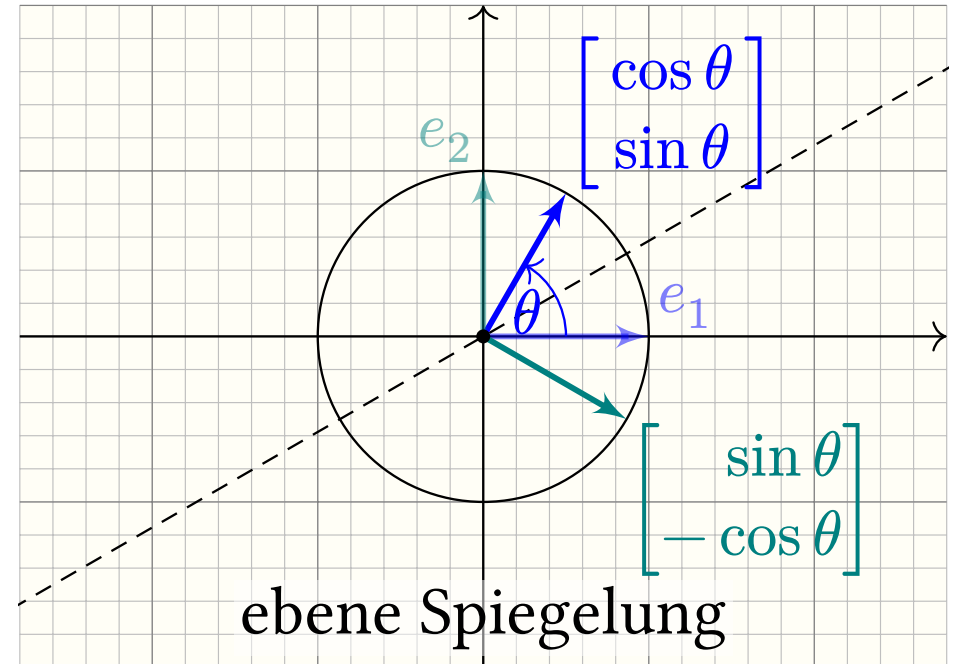
$$GU_2 \mathbb{C} = \left\{ \begin{bmatrix} z & -\bar{w}\lambda \\ w & \bar{z}\lambda \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} z, w, \lambda \in \mathbb{C}, \\ |z|^2 + |w|^2 = 1 = |\lambda| \end{array} \right\} \quad \text{allgemein und speziell}$$

$$SU_2 \mathbb{C} = \left\{ \begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + ib & -c + id \\ c + id & a - ib \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} a, b, c, d \in \mathbb{R}, \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \end{array} \right\} \cong \mathbb{S}^3.$$

Ebene Drehungen und Spiegelungen



$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \in \text{SO}_2 \mathbb{R}$$



$$S_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \in \text{GO}_2^- \mathbb{R}$$

Was ist eine Drehung?

Definition S41: Drehung aka Rotation

(0) Jedes Element $A \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$ und $A \in \text{SU}_n(\mathbb{C})$ nennen wir **Drehung**.

(1) Jeder Winkel $\theta \in \mathbb{R}$ definiert die zugehörige **ebene Drehung**:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$$

(2) Je zwei orthonormale Vektoren u, v in $(\mathbb{R}^n, \langle - | - \rangle)$ und ein Drehwinkel $\theta \in \mathbb{R}$ definieren die **einfache Drehung** $R_\theta^{u,v} \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$ mit der Matrix

$$M_{\mathcal{B}} R_\theta^{u,v} = \begin{bmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Hierzu sei $\mathcal{B} = (u, v, \dots)$ eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n : Auf $\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$ ist $R_\theta^{u,v}$ die ebene Drehung R_θ , und auf $W = \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}}^\perp$ die Identität.

Givens–Rotationen sichern freie Beweglichkeit.

🔍 Können wir jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in die positive x -Achse $e_1 \mathbb{R}_{>0}$ drehen? Ja! Das gelingt elegant-explizit durch seine **Givens–Rotation**

$$G_v := \frac{1}{\|v\|} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ -v_2 & v_1 \end{bmatrix} \in \text{SO}_2(\mathbb{R}), \quad \text{denn} \quad G_v \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|v\| \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lemma S4j: Givens–Rotation von v zu $u_1 \mathbb{R}_{\geq 0}$ in der Ebene $\langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{K}}$
 Seien u_1, u_2 orthonormal in $(V, \langle - | - \rangle)$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Zu jedem Vektor $v \in \langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{K}}$ existiert eine Rotation $G_v \in \text{GU}(V)$ mit $G_v(v) \in u_1 \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Der Gauß–Algorithmus mit Koordinatendrehungen

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} * & * & * \\ \oplus & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & \oplus \end{bmatrix} = R$$

Algo S4κ: Gauß–Givens–Algorithmus zur QR–Zerlegung

Eingabe: eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Ausgabe: (Q, R) mit $A = QR$ und $Q \in \text{GU}_m(\mathbb{K})$ und $R \in \mathbb{K}^{m \times n}$ in PZSF

- 1: Lösche jede Spalte von unten nach oben mit Rotationen $R_\theta^{e_i, e_{i+1}}$
- 2: Für ein Pivot a in der letzten Zeile skaliere mit $\bar{a}/|a| \in \mathbb{S}^1$.
- 3: So bringen wir $Q^\dagger A = R$ in PZSF. **return**(Q, R)

Satz S4L: Euler–Winkel

Jede Drehung $A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ ist Produkt von drei Koordinatendrehungen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Beweis: Wir nutzen obigen Gauß–Givens–Algorithmus zu $A = QR$.

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma} \begin{bmatrix} * & * & * \\ \oplus & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{\beta} \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha} \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & \oplus \end{bmatrix} = R \stackrel{!}{=} I$$

Dank $\det(A) = 1$ ist der letzte Pivoteintrag positiv. Somit hat $Q \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ die obige Produktform. Dank $A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ gilt auch $R = Q^T A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$.

Orthonormalität der Spalten erzwingt dann $R = I$, also $A = Q$. QED

Der Satz vom Fußball

🔍 Zu Beginn des Spiels liegt der Fußball exakt auf dem Mittelpunkt. Dann wird er 45 Minuten lang getreten, verschoben, gedreht. Anfangs der zweiten Halbzeit liegt er wieder exakt auf dem Mittelpunkt. Gibt es einen Punkt auf der Oberfläche des Balls, der sich wieder genau an derselben Stelle des umgebenden Raumes befindet? Ja, immer mindestens zwei!

Satz S4m: der Satz vom Fußball

(1) Jede Matrix $A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ hat den Eigenwert 1, also eine Fixgerade $u\mathbb{R} \subseteq \text{fix}(A)$ mit $u \in \mathbb{S}^2$ und $Au = u$.

Beweis: Wir haben $\chi_A = (X - \lambda)(X - \mu)(X - \nu)$ mit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$: Aus $Av = v\lambda$ mit $v \neq 0$ folgt $0 < \langle v | v \rangle = \langle Av | Av \rangle = \langle v\lambda | v\lambda \rangle = |\lambda|^2 \langle v | v \rangle$.

Zudem gilt $1 = \det A = \lambda\mu\nu$. Echt komplex haben wir $\nu = \bar{\mu}$, also $1 = \lambda$.

Rein reell gilt $\lambda, \mu, \nu \in \{\pm 1\}$, also können nicht alle gleich -1 sein. QED

Satz S4M: der Satz vom Fußball

(2) Zu jeder orthogonalen Matrix $A \in SO_3(\mathbb{R})$ existiert ein orthogonaler Basiswechsel $T \in SO_3(\mathbb{R})$ und ein Drehwinkel $\theta \in [0, \pi]$ so, dass gilt:

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

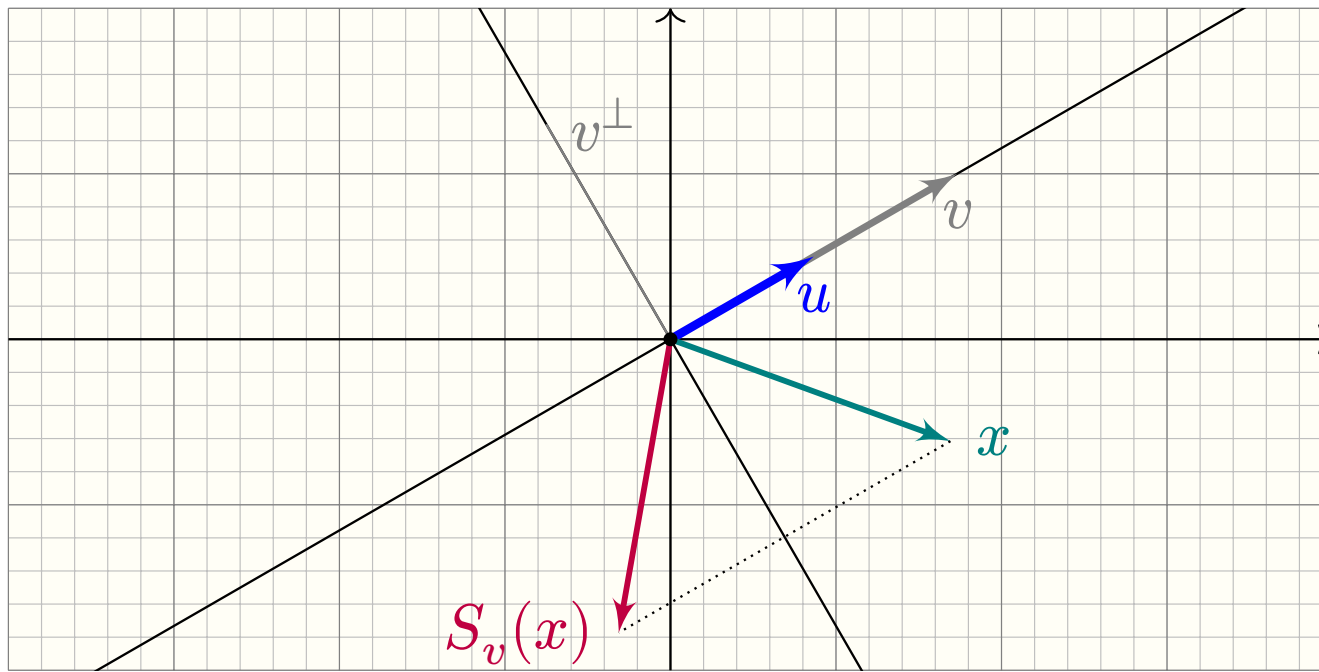
Beweis: Dank (1) existiert $u \in \text{Eig}(A, 1)$ normiert. Hierzu sei (u, v, w) eine positive Orthonormalbasis (etwa dank Gram–Schmidt S3c).

So erhalten wir $T := (u, v, w) \in SO_3(\mathbb{R})$ und wie gewünscht

$$SO_3(\mathbb{R}) \ni T^{-1}AT \stackrel{(1)}{=} \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \stackrel{(3)}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

mit $\theta \in [-\pi, \pi]$. Im Falle $\theta < 0$ wählen wir $T = (-u, -v, w)$ und $-\theta$. QED

Was ist eine Spiegelung?



Was ist eine Spiegelung?

Definition S4N: die Spiegelung S_v

Sei $(V, \langle - | - \rangle)$ ein unitärer Raum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, etwa $V = \mathbb{K}^n$.

Jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$, normiert zu $u = v/\|v\|$, definiert die Spiegelung

$$S_v : V \rightarrow V : x \mapsto x - 2 \cdot u \langle u | x \rangle = x - 2/\langle v | v \rangle \cdot v \langle v | x \rangle$$

Sie ist unitär mit $S_v^2 = \text{id}_V$. In jeder ONB $\mathcal{B} = (u, \dots)$ gilt $M_{\mathcal{B}} S_v = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

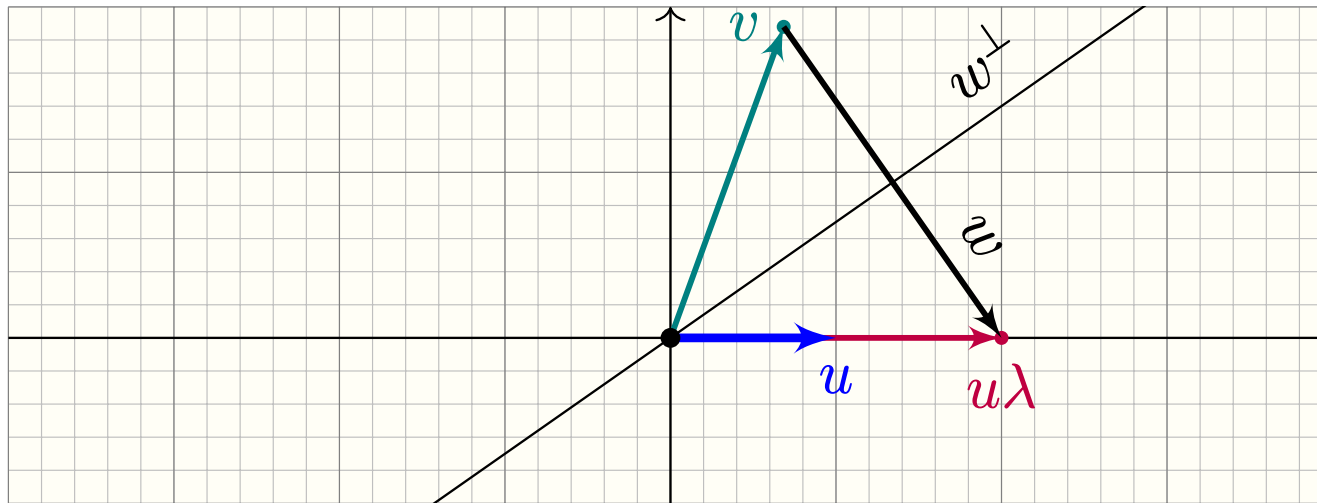
$$M_{\mathcal{E}} S_v = 1_{n \times n} - 2 \cdot u u^\dagger = 1_{n \times n} - 2/(v^\dagger v) \cdot v v^\dagger$$

Beweis: Linearität über \mathbb{K} ist klar, als Komposition linearer Abbildungen.

Für $x \perp u$ gilt $S_v(x) = x$. Für $x = u\lambda$ gilt $S_v(x) = x - 2 \cdot u\lambda = -x$. QED

Householder-Spiegelungen sichern freie Beweglichkeit.

❓ Wie spiegeln wir $v \in \mathbb{R}^2 \setminus e_1\mathbb{R}_{\geq 0}$ in die positive x -Achse $e_1\mathbb{R}_{>0}$?



Lemma S4o: Householder-Spiegelung

Sei $(V, \langle - | - \rangle)$ euklidisch über \mathbb{R} . Sei $u \in V$ normiert und $v \in V \setminus u\mathbb{R}_{\geq 0}$. Für den Vektor $w = u\lambda - v$ mit $\lambda = \|v\|$ gilt dann $S_w(v) \in u\mathbb{R}_{>0}$.

Der Gauß–Algorithmus mit Householder–Spiegelungen

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & \oplus \end{bmatrix} = R \stackrel{?}{\underset{\text{GO}}{=}} I$$

Algo S4P: Gauß–Householder–Algorithmus zur QR–Zerlegung

Eingabe: eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Ausgabe: (Q, R) mit $A = QR$ und $Q \in \text{GU}_m(\mathbb{K})$ und $R \in \mathbb{K}^{m \times n}$ in PZSF

- 1: Liegt die erste Spalte noch nicht in $e_1 \mathbb{R}_{\geq 0}$, so spiegle sie dorthin.
- 2: Verfahre rekursiv ebenso mit der verbleibenden Untermatrix.
- 3: So bringen wir $Q^\dagger A = R$ in PZSF. **return**(Q, R)

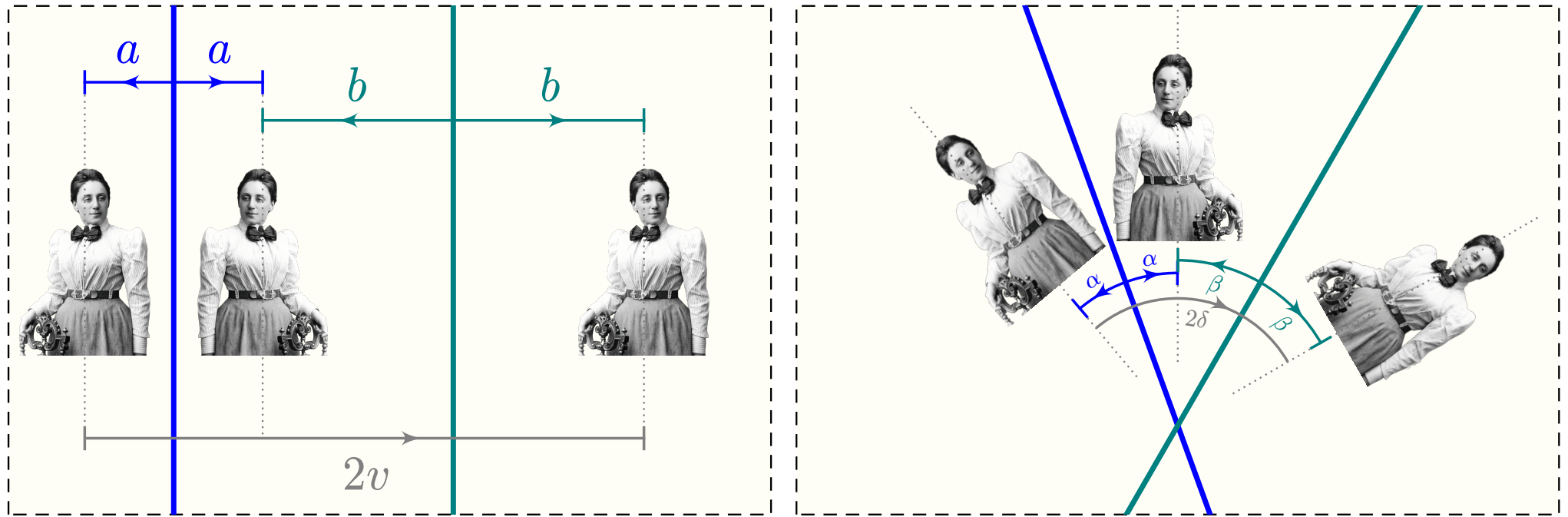
Spiegelungen erzeugen die Gruppe $\text{GO}_n(\mathbb{R})$.

Satz S4q: Spiegelungen erzeugen die Gruppe $\text{GO}_n(\mathbb{R})$.

- (1) Jede Matrix $A \in \text{GO}_n \mathbb{R}$ kann erzeugt werden durch n Spiegelungen.
- (2) Jede Isometrie $f : (\mathbb{R}^n, d) \simeq (\mathbb{R}^n, d)$ des euklidischen Raumes (\mathbb{R}^n, d) ist eine Komposition von höchstens $n + 1$ affinen Spiegelungen.

Jede Isometrie der Ebene ist Komposition höchstens dreier Spiegelungen.

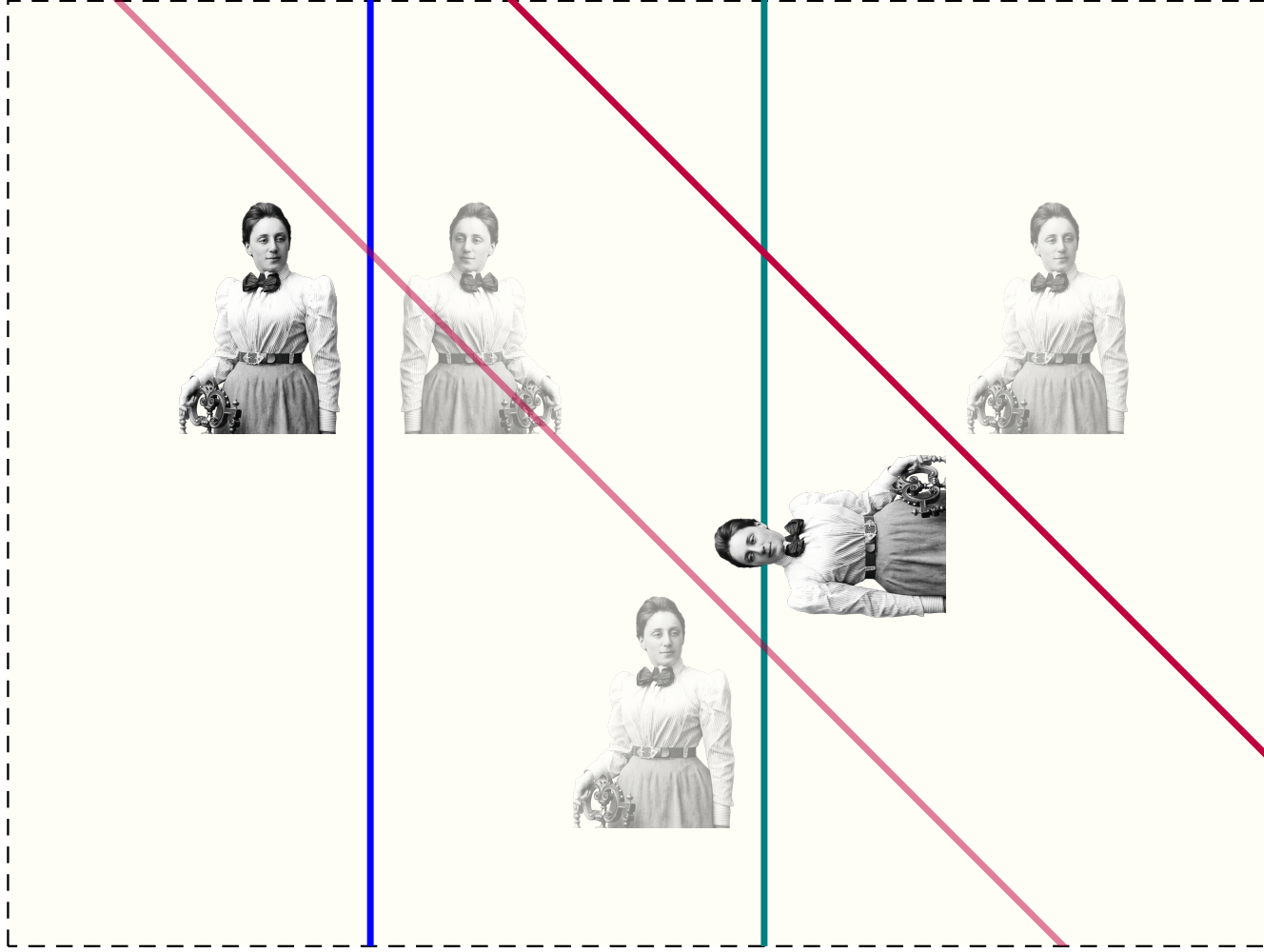
Komposition von zwei ebenen Spiegelungen



Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

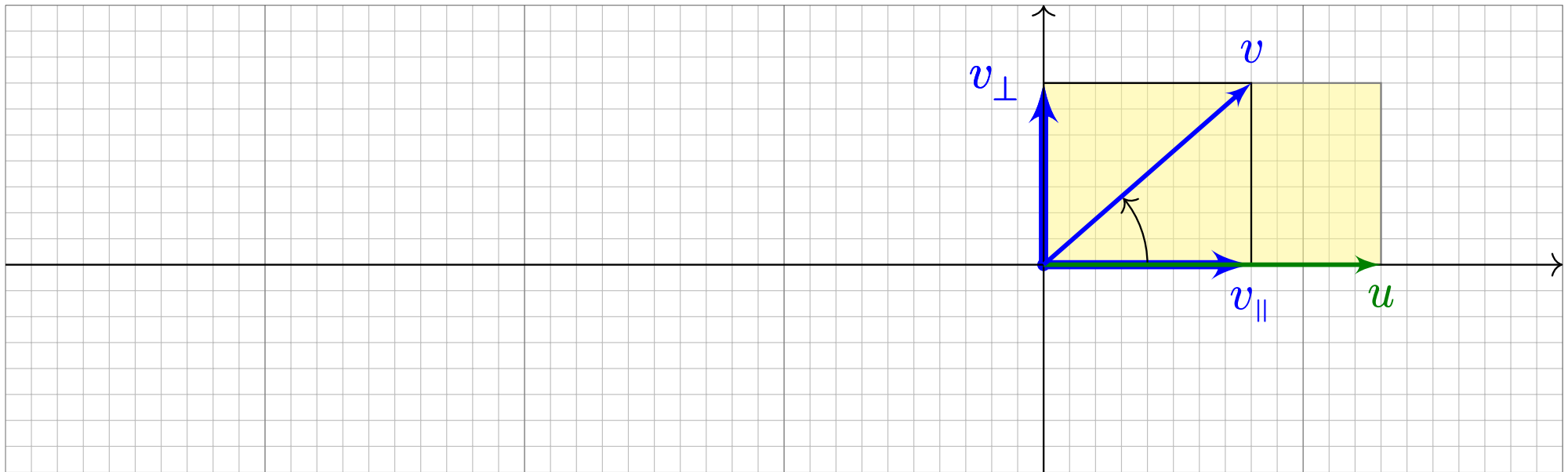
Komposition von drei ebenen Spiegelungen



Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

$$\begin{aligned}u \cdot v &= u_1 v_1 + u_2 v_2 = |u| \cdot |v| \cdot \cos \sphericalangle(u, v) = \pm |u| \cdot |v_{\parallel}| \\u \times v &= u_1 v_2 - u_2 v_1 = |u| \cdot |v| \cdot \sin \sphericalangle(u, v) = \pm |u| \cdot |v_{\perp}|\end{aligned}$$



Das komplexe Skalarprodukt: vorne konjugiert, hinten linear

$$\langle w | z \rangle := \bar{w} z = (u - iv)(x + iy) = (ux + vy) + i(uy - vx)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ux + vy, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = uy - vx.$$

Satz S4R: Kreuzprodukt aka Vektorprodukt in Dimension 3

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & e_1 \\ u_2 & v_2 & e_2 \\ u_3 & v_3 & e_3 \end{vmatrix}.$$

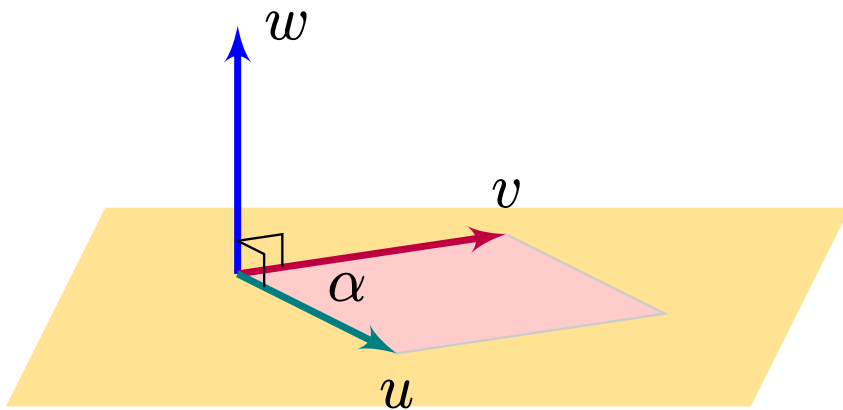
- (1) Das Produkt $(u, v) \mapsto u \times v$ ist antisymmetrisch, $v \times u = -(u \times v)$, und bilinear, also $u \times (v\lambda + v'\mu) = (u \times v)\lambda + (u \times v')\mu$, ebenso in u .
- (2) Für je drei Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle u \times v | w \rangle = \det(u, v, w)$. Insbesondere gilt $0 = \langle u \times v | u \rangle = \langle u \times v | v \rangle$, also $u \times v \in \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$.
- (3) Für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$ und $A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ gilt $(Au) \times (Av) = A(u \times v)$.

Beweis: Eigenschaften (1) und (2) sind klar. (3) Für alle $w \in \mathbb{R}^3$ haben wir $\langle (Au) \times (Av) | Aw \rangle \stackrel{(2)}{=} \det(Au, Av, Aw) \stackrel{\text{Mul}}{=} \det(A) \det(u, v, w) \stackrel{\text{SO}}{=} \det(u, v, w) \stackrel{(2)}{=} \langle u \times v | w \rangle \stackrel{\text{SO}}{=} \langle A(u \times v) | Aw \rangle$. Das zeigt $(Au) \times (Av) = A(u \times v)$. QED

Das Kreuzprodukt von Vektoren im Raum \mathbb{R}^3

Für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$ und $w = u \times v$ gilt $w \perp u$ und $w \perp v$ sowie

$$|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \sphericalangle(u, v)$$



Nach geeigneter Drehung haben wir:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 v_2 \end{bmatrix}$$

Die Rodrigues–Rotationsformel

Satz S4s: Rodrigues–Rotationsformel

Zu jeder Drehachse $u \in \mathbb{S}^2$ und Drehwinkel $\theta \in [0, \pi] \subset \mathbb{R}$ definieren wir die zugehörige Drehung $\rho(u, \theta) \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ nach **Rodrigues** durch

$$\rho(u, \theta) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto x + \sin(\theta) \cdot u \times x + (1 - \cos(\theta)) \cdot u \times (u \times x).$$

Beweis: Wir ergänzen unser u zu einer ONB $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ mit $u \times v = w$. In dieser Basis lesen wir ab: $u \mapsto u$ sowie $v \mapsto \cos(\theta)v + \sin(\theta)w$ und $w \mapsto -\sin(\theta)v + \cos(\theta)w$. Somit gilt $\rho(u, \theta) = R_\theta^{v,w}$. QED

Kapitel S

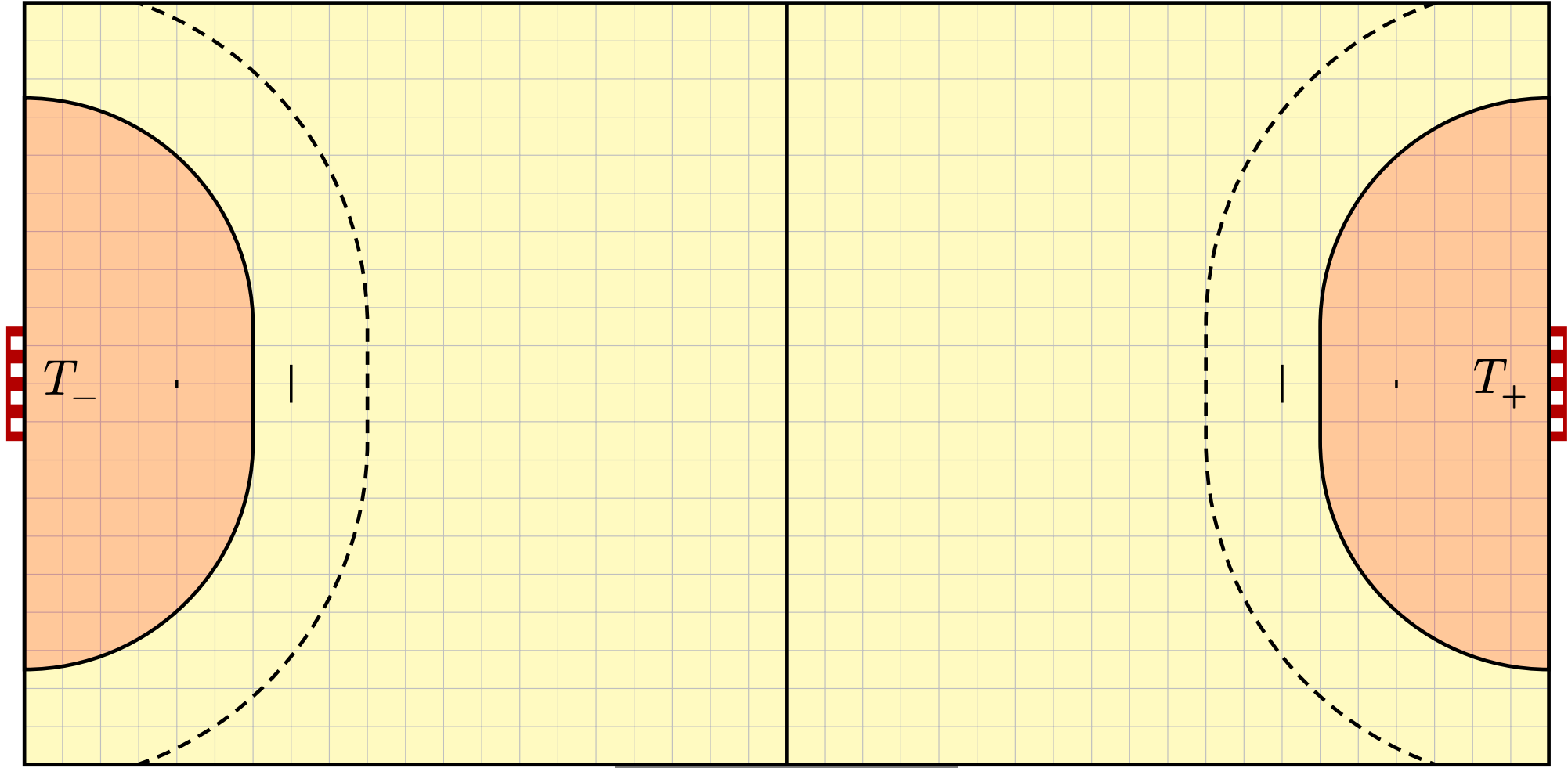
Bonusmaterial



*“Should you just be an algebraist or a geometer?”
is like saying “Would you rather be deaf or blind?”
[...] On the whole, we prefer to have both faculties.*

Sir Michael Atiyah (1929–2019)

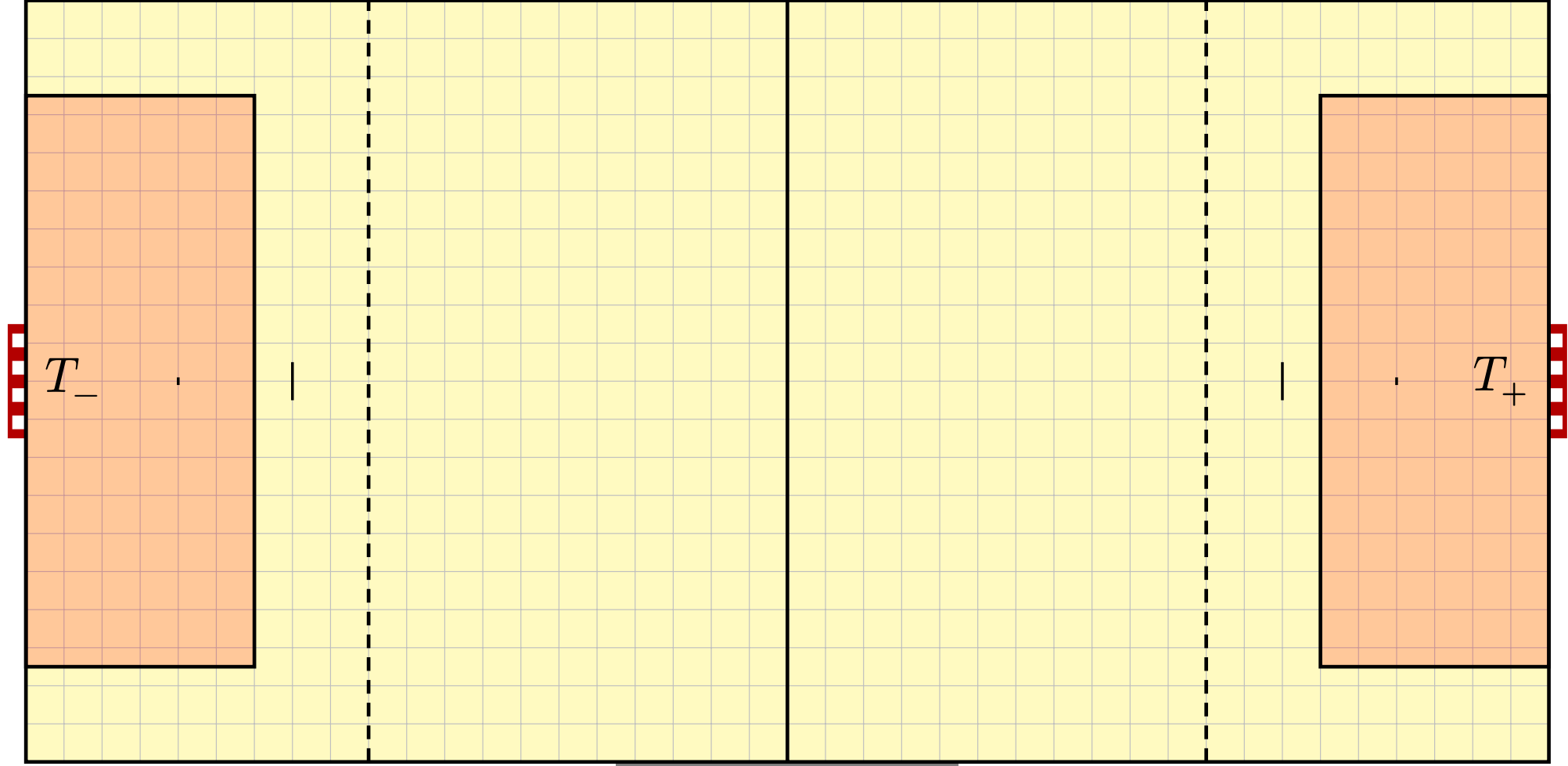
5 Isometriegruppen regulärer Polyeder



Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

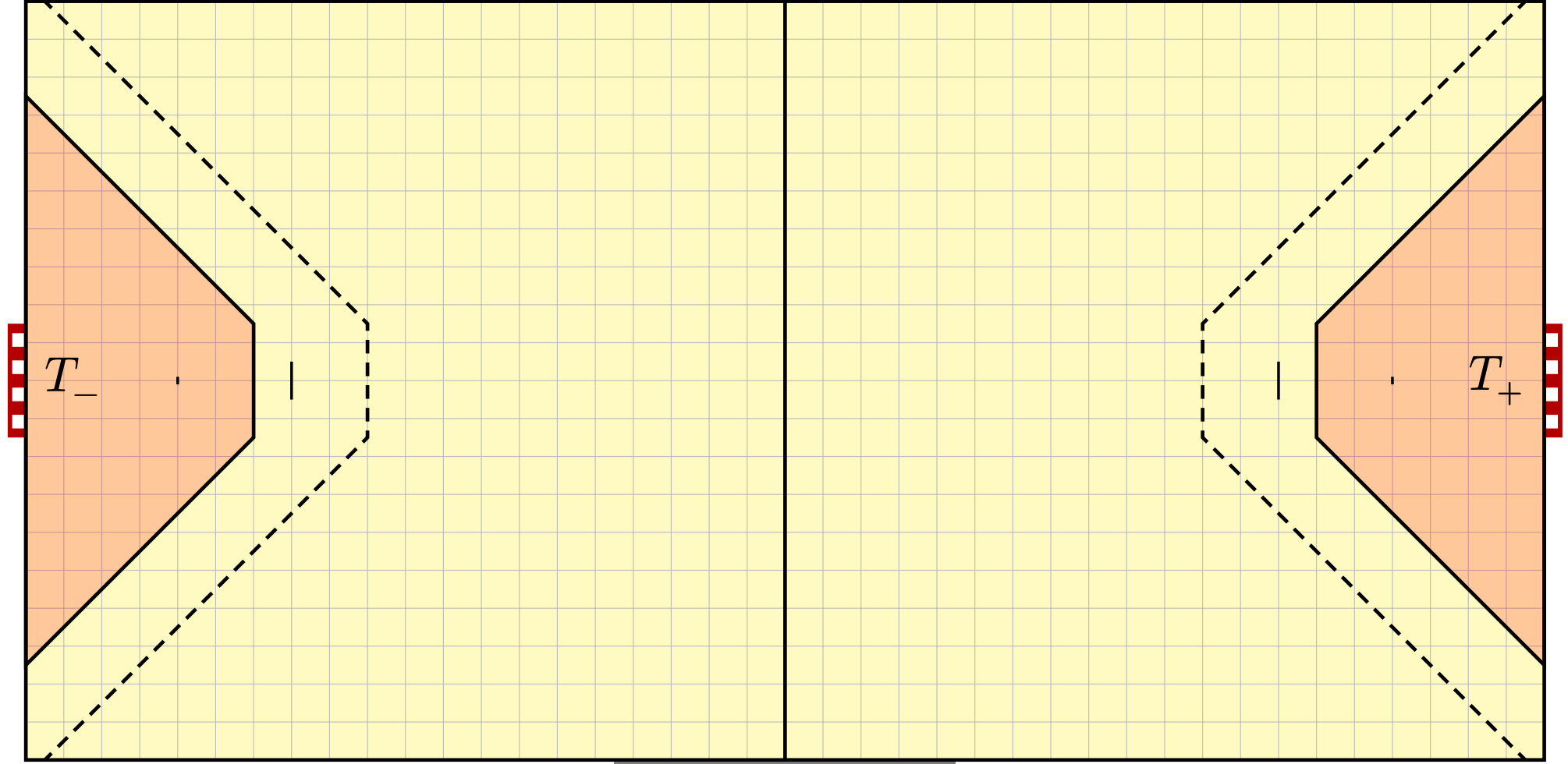
Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

Handballfeld in der Maximumsmetrik aka ℓ^∞ -Metrik



Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.



Dies ist nur die Saalversion ohne Erläuterungen.

Ausführliche Erläuterungen bietet die Vollversion.

Kapitel T

Spektralsatz und erste Anwendungen

*„Was hat Sie [an der Quantenphysik] dermaßen fasziniert?“
— „Die wunderschöne Mathematik, die verwendet wurde.“*

Anton Zeilinger, Physik-Nobelpreis 2022

Inhalt dieses Kapitels T

- 1 Spektralsatz über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$
- 2 Definitheit dank Spektralsatz
- 3 Matrixkalkül dank Spektralsatz

Selbst/adjungierte Matrizen

Definition T1A: selbst/adjungierte Matrix

→ SFormen S1H

Sei (\mathbb{K}, σ) ein involutiver Ring, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$.

(1) Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ definieren wir die **adjungierte Matrix**

$$A^\dagger := \overline{A}^T \in \mathbb{K}^{n \times m}.$$

(2) Gilt $A^\dagger = A$, so heißt die Matrix A **selbstadjungiert** oder **hermitesch**.
Im Spezialfall $\sigma = \text{id}$ nennen wir die Matrix $A = A^T$ **symmetrisch**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2+i & 3i \\ 5 & 1 \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} 2-i & 5 \\ -3i & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{symmetrisch } S = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{hermitesch } H = \begin{bmatrix} 3 & i \\ -i & 5 \end{bmatrix}.$$

Selbst/adjungierte Matrizen

Beispiel: Auf $V = \mathbb{K}^n$ betrachten wir die hermitesche Standardform:

$$\langle - | - \rangle_{\mathbb{K}^n} : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u | v \rangle := u^\dagger v$$

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ sowie $u \in \mathbb{K}^m$ und $v \in \mathbb{K}^n$ gilt:

$$\langle u | A v \rangle_{\mathbb{K}^m} = \langle A^\dagger u | v \rangle_{\mathbb{K}^n}$$

$$\langle A^\dagger u | v \rangle_{\mathbb{K}^n} \stackrel{\text{Def}}{=} (A^\dagger u)^\dagger v \stackrel{\text{Ad}}{=} (u^\dagger A) v \stackrel{\text{Ass}}{=} u^\dagger (A v) \stackrel{\text{Def}}{=} \langle u | A v \rangle_{\mathbb{K}^m}$$

Selbst/adjungierte Homomorphismen

Definition T1B: selbst/adjungierte Homomorphismen

Seien $(U, \langle - | - \rangle_U)$ und $(V, \langle - | - \rangle_V)$ hermitesche Räume über (\mathbb{K}, σ) .

(1) Ein Endomorphismus $f : V \rightarrow V$ heißt **selbstadjungiert**, falls gilt:

$$\langle u | f(v) \rangle_V = \langle f(u) | v \rangle_V \quad \text{für alle } u, v \in V$$

(2) Ein Paar $(f, g) : V \rightleftarrows U$ von \mathbb{K} -linearen Abbildungen $f : V \rightarrow U$ und $g : U \rightarrow V$ heißt zueinander **adjungiert**, falls gilt:

$$\langle u | f(v) \rangle_U = \langle g(u) | v \rangle_V \quad \text{für alle } u \in U \text{ und } v \in V.$$

(3) Ist $\langle - | - \rangle_V$ regulär, etwa ein Skalarprodukt, so ist g eindeutig.

Beweis: (3) Seien $g, \tilde{g} : U \rightarrow V$ adjungiert zu f und $u \in U$. Dann gilt

$$\langle u | f(v) \rangle_U = \langle g(u) | v \rangle_V = \langle \tilde{g}(u) | v \rangle_V$$

für alle $v \in V$, somit $\langle g(u) - \tilde{g}(u) | v \rangle = 0$ also $g(u) = \tilde{g}(u)$. QED

Wir nennen dann $g = f^\dagger$ den **adjungierten Homomorphismus** zu f .

Adjungierte Homomorphismen und ihre Matrizen

Seien $\mathcal{U} = (u_i)_{i=1}^m$ zu U und $\mathcal{V} = (v_j)_{j=1}^n$ zu V Orthonormalbasen über \mathbb{K} .

Für $f : V \rightarrow U$ linear mit Darstellungsmatrix $A = M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(f) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt

$$\langle u_i | f(v_j) \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \langle u_i | \sum_{k=1}^m u_k a_{kj} \rangle \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{k=1}^m \langle u_i | u_k \rangle a_{kj} \stackrel{\text{ONB}}{=} a_{ij}.$$

Ebenso für $g : U \rightarrow V$ linear mit $B = M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(g) \in \mathbb{K}^{n \times m}$ gilt $b_{ji} = \langle v_j | g(u_i) \rangle$.

Satz T1D: adjungierte Homomorphismen und ihre Matrizen

- (1) Genau dann ist das Paar $(f, g) : V \rightleftarrows U$ adjungiert, kurz $g = f^\dagger$, wenn ihre ONB-Darstellungsmatrizen adjungiert sind, also $B = A^\dagger$.
- (2) Zu jedem Homomorphismus $f : V \rightarrow U$, mit endlichen ONBasen, existiert genau ein adjungierter Homomorphismus $f^\dagger : U \rightarrow V$,

Reelles Spektrum und orthogonale Eigenräume

Satz T1E: reelles Spektrum und orthogonale Eigenräume

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle - | - \rangle)$ unitär und $f: V \rightarrow V$ selbstadjungiert.

(1) Jeder Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ von f ist reell, kurz $\sigma(f; \mathbb{K}) \subseteq \mathbb{R}$.

(2) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal:

Gilt $f(u) = u\lambda$ und $f(v) = v\mu$ für $u, v \in V$ und $\lambda \neq \mu$ in \mathbb{R} , so folgt $u \perp v$.

(3) Ist $U \leq V$ invariant, also $f(U) \subseteq U$, so auch $U^\perp \leq V$, also $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

Beweis: (1) Für $f(v) = v\lambda$ mit $v \in V \setminus \{0\}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\langle v | v \rangle \lambda \stackrel{\text{Lin}}{=} \langle v | v\lambda \rangle \stackrel{\text{Eig}}{=} \langle v | f(v) \rangle \stackrel{\text{sad}}{=} \langle f(v) | v \rangle \stackrel{\text{Eig}}{=} \langle v\lambda | v \rangle \stackrel{\text{slin}}{=} \bar{\lambda} \langle v | v \rangle$$

Dank $\langle v | v \rangle \in \mathbb{R}_{>0}$ schließen wir $\lambda = \bar{\lambda}$, also $\lambda \in \mathbb{R}$. (2) Wir rechnen:

$$0 \stackrel{\text{sad}}{=} \langle f(u) | v \rangle - \langle u | f(v) \rangle \stackrel{\text{Eig}}{=} \langle u\lambda | v \rangle - \langle u | v\mu \rangle \stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{(1)}{=}} (\lambda - \mu) \langle u | v \rangle$$

Dank $\lambda \neq \mu$ folgt $\langle u | v \rangle = 0$, also $u \perp v$. (3) Aus $v \in U^\perp$ folgt $f(v) \in U^\perp$:

Für alle $u \in U$ gilt $\langle u | f(v) \rangle \stackrel{\text{sad}}{=} \langle f(u) | v \rangle \stackrel{\text{inv}}{=} 0$ dank $f(u) \in U$. QED

Beispiel: reelles Spektrum und orthogonale Eigenräume

Aufgabe: Finden Sie zu A, B, C jeweils eine orthonormale Eigenbasis!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A : Hier gilt $\text{Eig}(A, k) = \langle e_k \rangle_{\mathbb{R}}$ für $k = 1, 2, 3$, also $\mathbb{R}^3 = \bigoplus_{k=1}^3 \text{Eig}(A, k)$.

B : Für $u = (1, 1, 1)^{\top}$ gilt $Bu = 3u$. Für $v = (1, -1, 0)^{\top}$ gilt $Bv = 0v$.

Für $w = u \times v = (1, 1, -2)^{\top}$ gilt $Bw = 0w$. Orthonormale Eigenbasis:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad Q^{\top}Q = I, \quad Q^{\top}BQ = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C : Hier gilt $C = B + 2I$, also $Q^{\top}CQ = Q^{\top}BQ + 2I = \text{diag}(5, 2, 2)$.

Beispiel: die Ableitung periodischer Funktionen

Beispiel T1F: Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit Periode $T > 0$

$$V = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid T\text{-periodisch und beliebig oft diff'bar} \}.$$

$$e_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto e^{ik\omega t} \quad \text{mit } \omega = 2\pi/T \text{ und } k \in \mathbb{Z}$$

$$V \times V \rightarrow \mathbb{C} : (f, g) \mapsto \langle f | g \rangle := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Beispiel: die Ableitung periodischer Funktionen

Beispiel T1F: Die Ableitung $\frac{1}{i} \frac{d}{dt}$ ist selbstadjungiert.

$$\left\langle f \left| \frac{1}{i} \frac{d}{dt} g \right. \right\rangle = \left\langle \frac{1}{i} \frac{d}{dt} f \left| g \right. \right\rangle$$

$$\frac{1}{i} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g'(t) dt \stackrel{\text{part}}{=} \frac{1}{i} \left[\overline{f(t)} g(t) \right]_{t=0}^T - \frac{1}{i} \int_{t=0}^T \overline{f'(t)} g(t) dt$$

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dt} e^{ik\omega t} = k\omega e^{ik\omega t}$$

Woher bekommen wir ein erstes Eigenpaar?

Lemma T1G: Existenz eines ersten Eigenpaars

- (1) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle - | - \rangle)$ unitär und $f : V \rightarrow V$ selbstadjungiert. Gilt $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, so existiert ein Eigenpaar $(v, \lambda) \in V \times \mathbb{R}$.
- (2) Jede selbstadjungierte Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hat einen reellen Eigenwert.

Algebraischer Beweis: (a) Komplexer Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Zu $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zerfällt das Polynom $\chi_A \in \mathbb{C}[X]_n^1$ über \mathbb{C} dank FTA E3c. Wegen $n \geq 1$ existiert ein Eigenpaar $(v, \lambda) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ (P2A). Dank $A^\dagger = A$ gilt $\lambda \in \mathbb{R}$ (T1E).

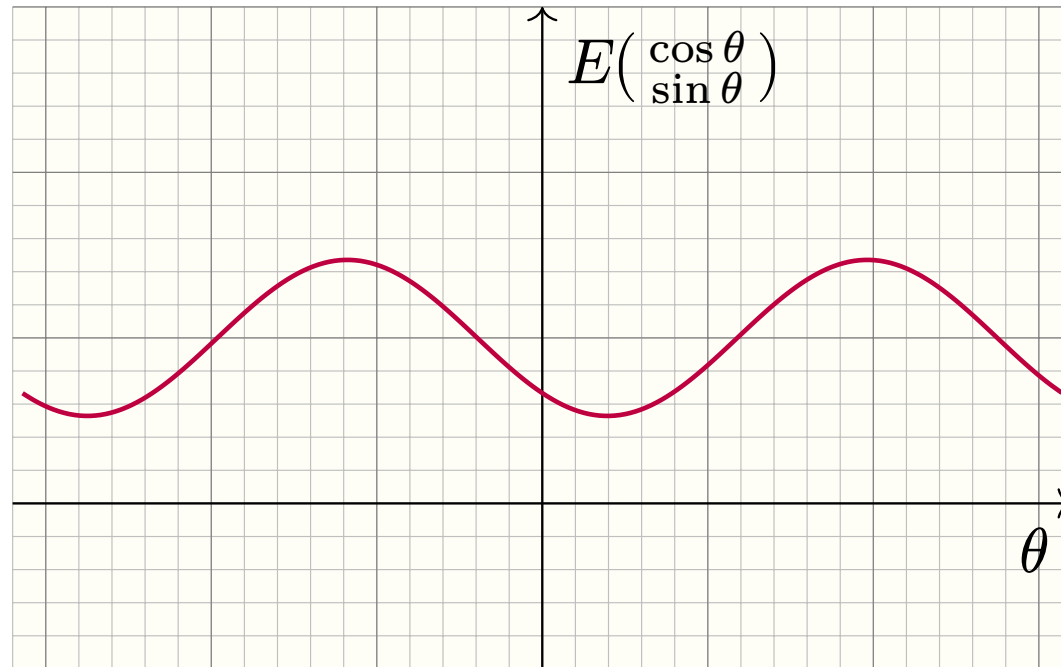
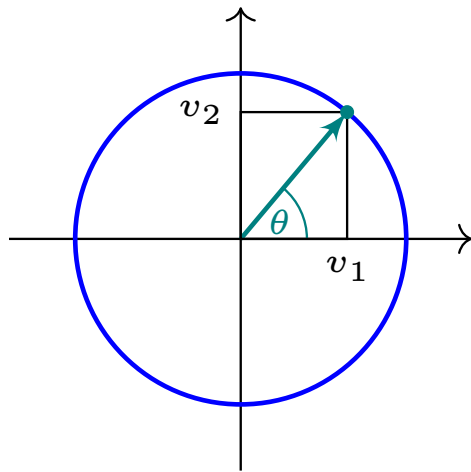
(b) Reeller Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Wir betrachten $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$. Dank (a) existiert $(v, \lambda) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ mit $Av = v\lambda$. Konjugation ergibt $A\bar{v} = \bar{v}\lambda$. Für $u = \operatorname{Re}(v) = \frac{1}{2}(v + \bar{v}) \in \mathbb{R}^n$ erhalten wir $Au = u\lambda$. QED

Quadratische Form als Energiefunktion

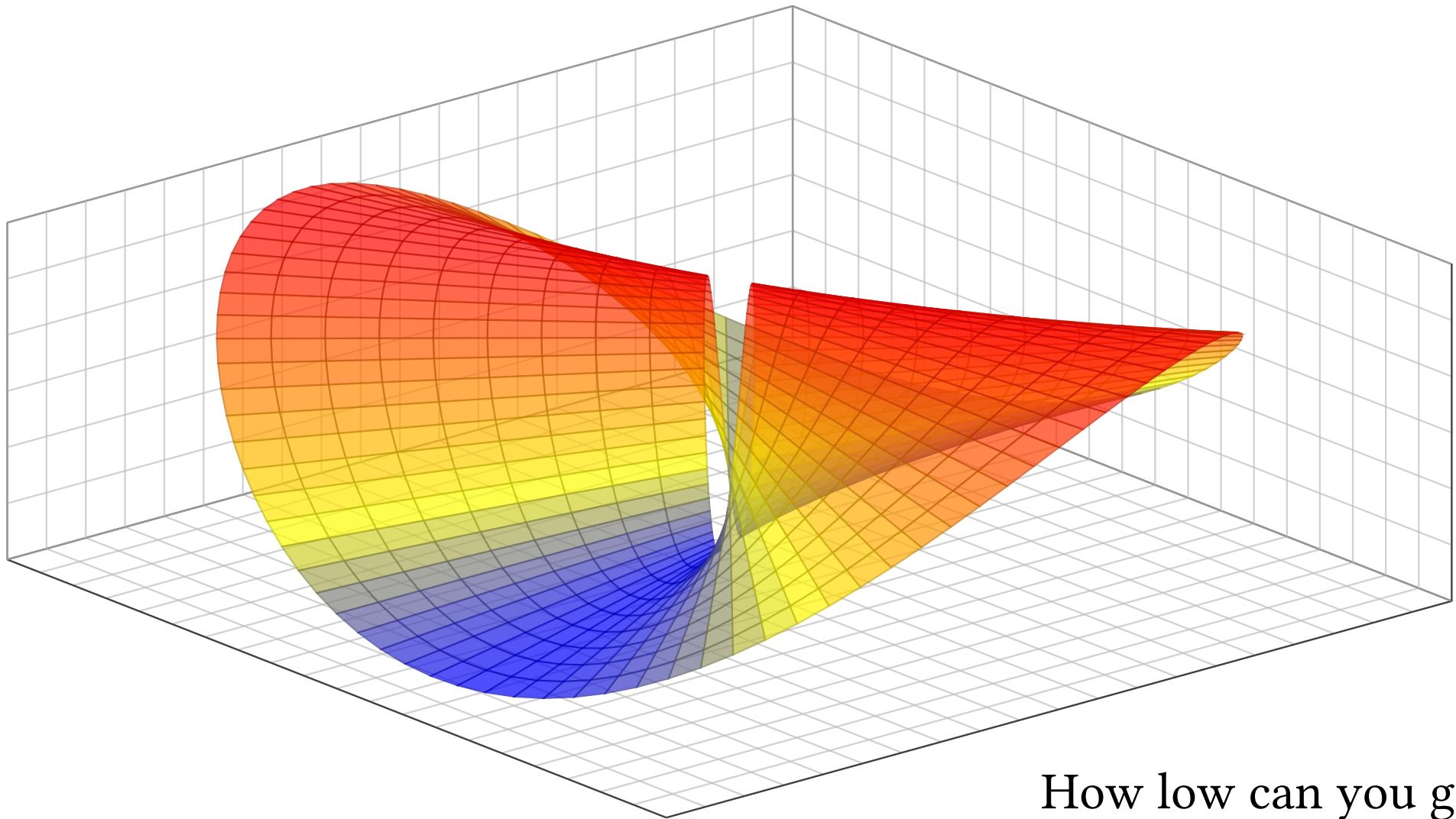
$$\mathbb{S}(\mathbb{K}^n) := \{v \in \mathbb{K}^n \mid \|v\| = 1\},$$

$$E : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R} : v \mapsto v^\dagger A v,$$

$$\text{hier } A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$



$$E : \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : E(v) = \frac{v^\dagger A v}{v^\dagger v}$$



How low can you go?

Satz T1H: Energiemethode

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle - | - \rangle)$ unitär und $f : V \rightarrow V$ selbstadjungiert.

(0) Wir betrachten die Sphäre $\mathbb{S}(V) := \{x \in V \mid \|x\| = 1\}$ und darauf

$$E : V \supset \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{K} : x \mapsto E(x) = \langle x \mid f(x) \rangle.$$

(1) Ist $u \in \mathbb{S}$ eine Minimalstelle, also $E(u) \leq E(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}$, dann ist u ein Eigenvektor, also $f(u) = u\lambda$ mit $\lambda = E(u) \in \mathbb{R}$.

(2) Für $V = \mathbb{K}^n$ nimmt E auf \mathbb{S} Minimum und Maximum an, somit existiert zu f mindestens ein Eigenpaar $(u, \lambda) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}$.

Beweis: (0) Es gilt $E(x) \in \mathbb{R}$, denn $\overline{\langle x \mid f(x) \rangle} = \langle f(x) \mid x \rangle = \langle x \mid f(x) \rangle$.

(1) Wir zerlegen $f(u) = u\lambda + v$ orthogonal mit $\lambda = \langle u \mid f(u) \rangle$ und $v \perp u$.

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto E\left(\frac{u + vt}{\|u + vt\|}\right) = \dots \img alt="pencil icon" data-bbox="418 815 460 875" \dots = \frac{\lambda + 2t\|v\|^2 + t^2\langle v \mid f(v) \rangle}{1 + t^2\|v\|^2} =: h(t)$$

Es gilt $h'(0) = 2\|v\|^2/\|u\|^2$. Ist u extremal, so folgt $h'(0) = 0$, also $v = 0$.

Spektralsatz I: selbstadjungierte Endomorphismen

Satz T11: Spektralsatz I, selbstadjungierte Endomorphismen

(1) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist jede selbstadjungierte Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unitär diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten: Zu $A = A^\dagger$ existiert ein unitärer Basiswechsel $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ so, dass

$$Q^\dagger A Q = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{mit} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

(2) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle - | - \rangle)$ unitär mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n \in \mathbb{N}$. Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ existiert eine orthonormale Eigenbasis (v_1, \dots, v_n) mit reellen Eigenwerten.

Äquivalenz: Wir haben „(2) \Rightarrow (1)“ mit $Q = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ dank T1D, ONB heißt $Q^\dagger Q = I$, Eigenbasis heißt $Q^{-1} A Q = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

😊 Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist unsere Basiswechsellmatrix $Q \in \text{SO}_n \mathbb{R}$ orthogonal.
Jede symmetrische reelle Matrix lässt sich orthogonal diagonalisieren.

😊 Über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist unsere Basiswechsellmatrix $Q \in \text{SU}_n \mathbb{C}$ unitär.
Jede hermitesche komplexe Matrix lässt sich unitär diagonalisieren.

Spektralsatz I: selbstadjungierte Endomorphismen

Beweis: (2) Wir führen Induktion über n . Für $n \leq 1$ ist die Aussage klar. Sei nun $n \geq 2$ und die Behauptung für $n - 1$ sei bereits bewiesen.

Dank T1G/T1H existiert zu $f : V \rightarrow V$ ein Eigenpaar $(v_1, \lambda_1) \in V \times \mathbb{R}$. Wir normieren den Eigenvektor $v_1 \neq 0$ zur Länge $\|v_1\| = 1$.

Die Gerade $\langle v_1 \rangle_{\mathbb{K}}$ ist invariant, also auch $U := \langle v_1 \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp}$ dank T1E(3). Es gilt $V = \langle v_1 \rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle v_1 \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp}$ dank S1Q, somit $\dim_{\mathbb{K}}(U) = n - 1$.

Die Einschränkung $g = f|_U^U : U \rightarrow U$ ist weiterhin selbstadjungiert, denn $\langle u | g(v) \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \langle u | f(v) \rangle \stackrel{\text{Ad}}{=} \langle f(u) | v \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \langle g(u) | v \rangle$.

IV: Zu g existiert eine orthonormale Eigenbasis (v_2, \dots, v_n) von U . Damit ist (v_1, v_2, \dots, v_n) eine orthonormale Eigenbasis zu f . QED

Spektralsatz I: selbstadjungierte Endomorphismen

Algo T1j: unitäre Diagonalisierung, orthogonale Eigenbasis

Eingabe: eine selbstadjungierte Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Ausgabe: eine orthonormale Eigenbasis (v_1, \dots, v_n) zu A

- 1: Zerfalle das charakteristische Polynom $\chi_A = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{n_i}$ über \mathbb{R} .
- 2: Konstruiere eine Orthonormalbasis für jeden Eigenraum $\text{Eig}(A, \lambda_i)$.
- 3: Füge diese zur Orthonormalbasis (v_1, \dots, v_n) von \mathbb{K}^n zusammen.
- 4: **return** (v_1, \dots, v_n)

Woher bekommen wir ein erstes Eigenpaar?

Lemma T1k: Existenz eines ersten Eigenpaars

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle - | - \rangle)$ unitär mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Sei $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$; über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ habe $\chi_f \in \mathbb{R}[X]_n^1$ eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann existiert ein Eigenpaar $(v, \lambda) \in V \times \mathbb{K}$, zudem normiert zu $\|v\| = 1$.

Beweis: (a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Wir haben einen ersten Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dazu existiert ein Eigenvektor $v \in \text{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\}$, siehe P2B.

(b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Das Polynom $\chi_f \in \mathbb{C}[X]_n^1$ zerfällt über \mathbb{C} dank FTA E3c. QED

Schur-Zerlegung: unitäre Trigonalisierung

$$Q^\dagger \begin{array}{|c|} \hline \text{A} \\ \hline \end{array} Q = \begin{array}{|c|} \hline \text{R} \\ \hline \end{array}$$

Satz T1L: Schur-Zerlegung, unitäre Trigonalisierung

(1) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix; über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ fordern wir zudem, dass $\chi_A \in \mathbb{R}[X]_n^1$ über \mathbb{R} zerfällt.

Dann ist A unitär trigonalisierbar: Zu A existiert ein unitärer Basiswechsel $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ zur Dreiecksform $Q^\dagger A Q = R \in \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array}_n \mathbb{K}$.

(2) Sei $(V, \langle - | - \rangle)$ unitär mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n \in \mathbb{N}$ und $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$; über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ fordern wir zudem, dass $\chi_f \in \mathbb{R}[X]_n^1$ über \mathbb{R} zerfällt.

Dann existiert eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V , in der f Dreiecksform hat, $M_{\mathcal{B}}(f) \in \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array}_n \mathbb{K}$. Wir nennen dies eine **Schur-Basis**.

Schur–Zerlegung: unitäre Trigonalisierung

$$A = M_{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & & & \\ 0 & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad R = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Beweis: (2) Wir führen Induktion über n . Für $n \leq 1$ ist die Aussage klar. Sei nun $n \geq 2$ und die Behauptung für $n - 1$ sei bereits bewiesen.

Dank T1K existiert ein erstes Eigenpaar $(v_1, \lambda_1) \in V \times \mathbb{K}$.

Wir normieren den Eigenvektor $v_1 \neq 0$ zur Länge $\|v_1\| = 1$.

Zum Orthogonalraum $U := \langle v_1 \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp}$ wählen wir eine Basis (u_2, \dots, u_n) .

Bezüglich der Basis $\mathcal{A} = (v_1, u_2, \dots, u_n)$ hat f obige Blockform.

Die Untermatrix B definiert den Endomorphismus $g : U \rightarrow U$.

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Es gilt $\chi_f = (X - \lambda_1) \cdot \chi_g$, also zerfällt auch χ_g .

IV: Zu g existiert eine Schur–Basis (v_2, \dots, v_n) von U .

Damit ist $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ eine Schur–Basis zu f .

QED

Welche Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind unitär diagonalisierbar?

Angenommen, $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ wird durch $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ diagonalisiert zu

$$Q^\dagger A Q = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \square_n \mathbb{K}.$$

Dann kommutiert A mit A^\dagger :

$$\begin{aligned} A \cdot A^\dagger &= Q \Lambda Q^\dagger \cdot Q \Lambda^\dagger Q^\dagger = Q \Lambda \Lambda^\dagger Q^\dagger, \\ A^\dagger \cdot A &= Q \Lambda^\dagger Q^\dagger \cdot Q \Lambda Q^\dagger = Q \Lambda^\dagger \Lambda Q^\dagger, \end{aligned}$$

also $A^\dagger A = A A^\dagger$.

Welche Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind unitär diagonalisierbar?

Definition T1M: normale Endomorphismen

(1) Wir nennen $f : V \rightarrow V$ **normal**, falls f^\dagger existiert und mit f kommutiert:

$$f \circ f^\dagger = f^\dagger \circ f$$

(2) Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt **normal**, falls gilt:

$$A \cdot A^\dagger = A^\dagger \cdot A$$

Beispiele: (a) Jeder anti/hermitesche Endomorphismus erfüllt $f^\dagger = \pm f$.

(b) Jeder orthogonale / unitäre Automorphismus erfüllt $f^\dagger = f^{-1}$.

Normal und trigonal bedeutet...

Aufgabe: Wann ist die Matrix $M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{(p+q) \times (p+q)}$ normal?

Lösung: Wir setzen die Definition ein und vergleichen

$$M^\dagger \cdot M = \begin{bmatrix} A^\dagger & 0 \\ C^\dagger & B^\dagger \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^\dagger A & A^\dagger C \\ C^\dagger A & C^\dagger C + B^\dagger B \end{bmatrix},$$

$$M \cdot M^\dagger = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^\dagger & 0 \\ C^\dagger & B^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^\dagger + CC^\dagger & CB^\dagger \\ BC^\dagger & BB^\dagger \end{bmatrix}.$$

Aus Gleichheit $M^\dagger M = M M^\dagger$ folgt $A^\dagger A = AA^\dagger + CC^\dagger$. Die Spur ergibt:

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \overline{a_{ij}} a_{ij} \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_{ij} \overline{a_{ij}} + \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^q c_{ik} \overline{c_{ik}},$$

Notwendig ist also $\sum_{i,k} |c_{ik}|^2 = 0$, somit $C = 0$, sowie A und B normal. Umgekehrt ist dies offensichtlich auch hinreichend. QED

Normal und trigonal bedeutet... diagonal!

Satz T1N: Normal und trigonal bedeutet diagonal.

(1) Eine Dreiecksmatrix

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

ist genau dann normal, $M^\dagger M = M M^\dagger$, wenn sie diagonal ist.

Welche Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind unitär diagonalisierbar?

Satz T1o: Spektralsatz II, normale Endomorphismen

(1) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix; über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ fordern wir zudem, dass $\chi_A \in \mathbb{R}[X]_n^1$ über \mathbb{R} zerfällt.

Genau dann ist A unitär diagonalisierbar, also $Q^\dagger A Q = \Lambda \in \square_n \mathbb{K}$ mit $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$, wenn A normal ist, also $A^\dagger A = A A^\dagger$ erfüllt.

Erster Beweis: (1) Die Implikation „ \Rightarrow “ haben wir oben nachgerechnet, „ \Leftarrow “ folgt dank Schur T1L: Zu A existiert $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ mit $Q^\dagger A Q = R$ trigonal. Ist A normal, so auch R . Dank T1N ist R diagonal. QED

(2) Sei $(V, \langle - | - \rangle)$ unitär mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n \in \mathbb{N}$ und $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$; über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ fordern wir zudem, dass $\chi_f \in \mathbb{R}[X]_n^1$ über \mathbb{R} zerfällt.

Genau dann erlaubt f eine orthonormale Eigenbasis (v_1, \dots, v_n) , mit $f(v_i) = v_i \lambda_i$ und $\lambda_i \in \mathbb{K}$, wenn f normal ist.

Rekursive Konstruktion einer orthonormalen Eigenbasis

Zweiter Beweis: (2) „ \Leftarrow “: Wir führen Induktion über n . Für $n \leq 1$ ist alles klar. Sei nun $n \geq 2$ und die Behauptung für $n - 1$ sei bereits bewiesen.

Dank T1K existiert zu $f : V \rightarrow V$ ein Eigenpaar $(v_1, \lambda_1) \in V \times \mathbb{K}$, zudem normiert zu $\|v\| = 1$. Sei $U = \langle v_1 \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp} \leq V$. Für $v \in U$ gilt $f(v) \in U$, denn

$$\langle v_1 | f(v) \rangle \stackrel{\text{Ad}}{=} \langle f^{\dagger}(v_1) | v \rangle \stackrel{\text{T1P}}{=} \langle v_1 \overline{\lambda_1} | v \rangle \stackrel{\text{S4}}{=} \lambda_1 \langle v_1 | v \rangle \stackrel{\perp}{=} 0.$$

Wir erhalten so $g = f|_U : U \rightarrow U$, ebenso $g^{\dagger} = f^{\dagger}|_U$, denn

$$\langle u | g(v) \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \langle u | f(v) \rangle \stackrel{\text{Ad}}{=} \langle f^{\dagger}(u) | v \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \langle g^{\dagger}(u) | v \rangle$$

Da f normal ist, also $f^{\dagger} \circ f = f \circ f^{\dagger}$ erfüllt, gilt dies auch für g .

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Es gilt $\chi_f = (X - \lambda_1) \cdot \chi_g$, also zerfällt auch χ_g .

IV: Zu g existiert eine orthonormale Eigenbasis (v_2, \dots, v_n) von U .

Damit ist (v_1, v_2, \dots, v_n) eine orthonormale Eigenbasis zu f .

QED

Lemma T1P: charakteristische Eigenschaften

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle - | - \rangle)$ unitär und $(f, f^\dagger) : V \rightleftarrows V$ adjungiert.

(1) Äquivalent sind die folgenden drei Eigenschaften:

(1a) Der Endomorphismus f ist normal, erfüllt also $f \circ f^\dagger = f^\dagger \circ f$.

(1b) Es gilt $\langle f(u) | f(v) \rangle = \langle f^\dagger(u) | f^\dagger(v) \rangle$ für alle $u, v \in V$.

(1c) Es gilt $\|f(u)\| = \|f^\dagger(u)\|$ für alle $u \in V$.

Beweis: Wir setzen die Definitionen ein und vergleichen:

$$\begin{array}{ccc} \langle f(u) | f(v) \rangle & \stackrel{\text{Ad}}{=} & \langle u | (f^\dagger \circ f)(v) \rangle \\ \parallel_{\text{(b)}} & \iff & \parallel_{\text{(a)}} \\ \langle f^\dagger(u) | f^\dagger(v) \rangle & \stackrel{\text{Ad}}{=} & \langle u | (f \circ f^\dagger)(v) \rangle \end{array}$$

Normale Endomorphismen: charakteristische Eigenschaften

(2) Ist $(f, f^\dagger) : V \rightarrow V$ normal, so folgt $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^\dagger)$.

(3) Ist $(f, f^\dagger) : V \rightarrow V$ normal, so auch das Paar $(g, g^\dagger) : V \rightarrow V$ mit $g(v) = f(v) - v\lambda$ und $g^\dagger(v) = f^\dagger(v) - v\lambda^\dagger$ für jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$.

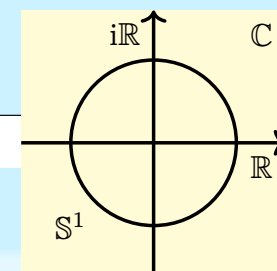
Beweis: Wir setzen die Definitionen ein und vergleichen:

$$\begin{aligned} (g \circ g^\dagger)(v) &\stackrel{\text{Def}}{=} g(f^\dagger(v) - v\lambda^\dagger) \stackrel{\text{Def}}{=} (f \circ f^\dagger)(v) - f(v)\lambda^\dagger - f^\dagger(v)\lambda + v\lambda^\dagger\lambda \\ (g^\dagger \circ g)(v) &\stackrel{\text{Def}}{=} g^\dagger(f(v) - v\lambda) \stackrel{\text{Def}}{=} (f^\dagger \circ f)(v) - f^\dagger(v)\lambda + v\lambda\lambda^\dagger \end{aligned}$$

Dank (2) wissen wir $\text{Ker}(g) = \text{Ker}(g^\dagger)$. Daraus folgt:

(4) Sei $(f, f^\dagger) : V \rightarrow V$ normal. Aus $f(v) = v\lambda$ folgt $f^\dagger(v) = v\lambda^\dagger$.

Zusammenfassung: normale Matrizen über \mathbb{C}



Korollar T1τ: normale Matrizen über \mathbb{C}

Für jede komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gelten folgende Äquivalenzen:

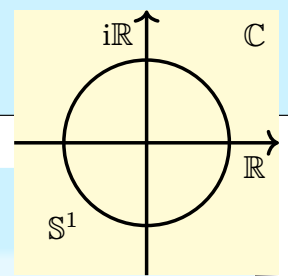
$$\left. \begin{array}{l} A \text{ normal} \\ A^\dagger A = A A^\dagger \end{array} \right\} \stackrel{T1o}{\iff} \exists Q \in SU_n \mathbb{C} : Q^\dagger A Q \in \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{C} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ unitär} \\ A^\dagger = A^{-1} \end{array} \right\} \stackrel{T1o}{\iff} \exists Q \in SU_n \mathbb{C} : Q^\dagger A Q \in \begin{bmatrix} S^1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & S^1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ antihermitesch} \\ A^\dagger = -A \end{array} \right\} \stackrel{T1o}{\iff} \exists Q \in SU_n \mathbb{C} : Q^\dagger A Q \in \begin{bmatrix} i\mathbb{R} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & i\mathbb{R} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ hermitesch} \\ A^\dagger = A \end{array} \right\} \stackrel{T1I}{\iff} \exists Q \in SU_n \mathbb{C} : Q^\dagger A Q \in \begin{bmatrix} \mathbb{R} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{R} \end{bmatrix}$$

Zusammenfassung: normale Matrizen über \mathbb{R}



Korollar T1u: normale Matrizen über \mathbb{R}

Für jede reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gelten folgende Äquivalenzen:

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ normal} \\ A^T A = A A^T \end{array} \right\} \stackrel{\text{T1o}}{\iff} \exists Q \in \text{SO}_n \mathbb{R} : Q^T A Q = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B_\ell \end{bmatrix}$$

$$B_k \in \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}_{>0} \text{SO}_2^\bullet \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ orthogonal} \\ A^T = A^{-1} \end{array} \right\} \stackrel{\text{T1o}}{\iff} \exists Q \in \text{SO}_n \mathbb{R} : Q^T A Q \in \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B_\ell \end{bmatrix}$$

$$B_k \in \{\pm 1\} \sqcup \text{SO}_2^\bullet \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ antisymmetrisch} \\ A^T = -A \end{array} \right\} \stackrel{\text{T1o}}{\iff} \exists Q \in \text{SO}_n \mathbb{R} : Q^T A Q \in \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B_\ell \end{bmatrix}$$

$$B_k \in \{0\} \sqcup \mathbb{R}^\times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ symmetrisch} \\ A^T = A \end{array} \right\} \stackrel{\text{T1I}}{\iff} \exists Q \in \text{SO}_n \mathbb{R} : Q^T A Q \in \begin{bmatrix} \mathbb{R} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{R} \end{bmatrix}$$

Der Satz vom Fußball

Korollar T1u: Satz vom Fußball

→ dreidimensional S4M

Ausführlich: Zu jeder orthogonalen Matrix $A \in \text{GO}_n \mathbb{R}$ existiert ein orthogonaler Basiswechsel $Q \in \text{SO}_n \mathbb{R}$ in folgende Normalform:

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{c_1} & \boxed{-s_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{s_1} & \boxed{c_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{c_k} & \boxed{-s_k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{s_k} & \boxed{c_k} & 0 \end{bmatrix}$$

mit $(c_i, s_i) = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$ für Drehwinkel $\theta_i \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$.

Positive und negative Definitheit

Definition T2A: Definitheit über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$

Sei $(V, \beta) \stackrel{\text{Bsp}}{=} \langle A \rangle$ ein hermitescher Raum, $\beta^\dagger = \beta$, zum Beispiel $V = \mathbb{K}^{(I)}$ und $\beta(u, v) = u^\dagger A v$ mit $A \in \mathbb{K}^{I \times I}$ hermitesch, $A^\dagger = A$. Für alle $v \in V$ ist dann $q(v) := \beta(v, v)$ reell, denn $\beta(v, v) = \overline{\beta(v, v)}$. Wir nennen β, A, q

positiv semidefinit (spsd), $\beta \succeq 0, A \succeq 0, q \succeq 0$, falls $q(v) \geq 0$,

negativ semidefinit, $\beta \preceq 0, A \preceq 0, q \preceq 0$, falls $q(v) \leq 0$,

für alle $v \in V$ gilt. Stärker nennen wir β, A, q

positiv definit (spd), $\beta \succ 0, A \succ 0, q \succ 0$, falls $q(v) > 0$,

negativ definit, $\beta \prec 0, A \prec 0, q \prec 0$, falls $q(v) < 0$,

für alle $v \in V \setminus \{0\}$ gilt und $V \neq \{0\}$. Schließlich bedeutet **indefinit** $\beta \not\prec 0, A \not\prec 0, q \not\prec 0$, es existieren Vektoren $u, v \in V$ mit $q(u) < 0 < q(v)$.

Beispiel: Für $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ gilt $q(v) = \lambda_1 |v_1|^2 + \dots + \lambda_n |v_n|^2$, also $A \succeq 0$ gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ und $A \succ 0$ gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

Wie erkennen wir Definitheit? ... dank Gauß–Hermite!

❓ Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ selbstadjungiert, $A^\dagger = A$. Wie erkennen wir Definitheit? Eine erste Möglichkeit bietet der **hermitesche Gauß–Algorithmus** S1R:

$$A = A^\dagger \in \mathbb{K}^{n \times n} \quad \Longrightarrow \quad \exists S \in \text{GL}_n \mathbb{K} : S^\dagger A S = B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$$

Lemma T2B: Kongruenz, allgemein und unitär

Quadratische Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißen (allgemein) **kongruent**, kurz $A \simeq B$, falls eine Matrix $S \in \text{GL}_n \mathbb{K}$ existiert mit $B = S^\dagger A S$.

Sie heißen **unitär kongruent**, falls $B = S^\dagger A S$ für ein $S \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ gilt.

Wegen $S^\dagger = S^{-1}$ heißt das **unitär ähnlich**, $B = S^{-1} A S$ mit $S \in \text{GU}_n \mathbb{K}$.

(1) Kongruenz (allgemein oder unitär) ist eine Äquivalenzrelation.

(2) Positive Semi/Definitheit ist invariant unter Kongruenz.

Wie erkennen wir Definitheit? ... dank Faktorisierung!

Lemma T2c: schwache Faktorisierung $A = S^\dagger S$ in $\mathbb{K}^{n \times n}$

- (0) SPSD: $A = A^\dagger$ ist positiv semidefinit gdw $A = S^\dagger S$ mit $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$.
 (1) SPD: $A = A^\dagger$ ist positiv definit gdw $A = S^\dagger S$ mit $S \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

Beweis: „ \Leftarrow “: Aus $A = S^\dagger S$ folgt $A^\dagger = (S^\dagger S)^\dagger = S^\dagger (S^\dagger)^\dagger = S^\dagger S = A$.

(0) „ \Leftarrow “: Für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt $x^\dagger A x = x^\dagger S^\dagger S x = (Sx)^\dagger (Sx) \geq 0$.

(1) „ \Leftarrow “: Für $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ gilt $Sx \neq 0$, also $x^\dagger A x = (Sx)^\dagger (Sx) > 0$.

(0) „ \Rightarrow “: Gauß–Hermite S1R konstruiert $T \in \text{GL}_n \mathbb{K}$ mit

$$A = T^\dagger B T \quad \text{und} \quad B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n).$$

Aus $A \succeq 0$ folgt $B \succeq 0$ dank T2B, wir haben also $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Wir setzen $B^{1/2} := \text{diag}(b_1^{1/2}, \dots, b_n^{1/2})$. Für $S := B^{1/2} T$ gilt dann

$$S^\dagger S \stackrel{\text{Def}}{=} T^\dagger B^{1/2} \cdot B^{1/2} T \stackrel{\text{Def}}{=} T^\dagger B T \stackrel{\text{Vor}}{=} A.$$

(1) „ \Rightarrow “: Ebenso, dank $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_{> 0}$ gilt nun $S \in \text{GL}_n \mathbb{K}$. □ QED

Wie erkennen wir Definitheit? ... dank Cholesky!

Analogie: Eine Zahl $a \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist positiv, also $a \in \mathbb{R}_{>0}$,
gdw $a = \bar{r}r$ für ein $r \in \mathbb{K}^\times$, und dies gelingt eindeutig mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$.

Satz T2c: Cholesky-Zerlegung $A = R^\dagger R$ in $\mathbb{K}^{n \times n}$

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sind äquivalent:

- 1 SPD: Die Matrix A ist selbstadjungiert und positiv definit.
- 2 Cholesky: Es gilt $A = R^\dagger R$ für genau eine Matrix $R \in \mathbb{K}_n^{>0}(\mathbb{K})$.

Beweis: „(1) \Leftarrow (2)“ folgt aus Lemma T2c, da $R \in \text{GL}_n \mathbb{K}$.

„(1) \Rightarrow (2)“: Dank Lemma T2c haben wir $A = S^\dagger S$ mit $S \in \text{GL}_n \mathbb{K}$.

Die QR-Zerlegung S3E liefert $S = QR$ mit $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ und $R \in \mathbb{K}_n^{>0}(\mathbb{K})$.

Wir erhalten $A = S^\dagger S = R^\dagger Q^\dagger QR = R^\dagger R$. Das beweist die *Existenz!*

Wie erkennen wir Definitheit? ... dank Cholesky!

Eindeutigkeit dank Berechnung: Der Fall $n = 1$ ist klar. Sei $n \geq 2$:

$$R = \begin{bmatrix} u & v^\dagger \\ 0 & S \end{bmatrix} \quad \text{mit } u \in \mathbb{R}_{>0} \text{ und } v^\dagger \in \mathbb{K}^{1 \times (n-1)} \text{ und } S \in \mathbb{K}_{n-1}^{>0}$$

$$R^\dagger R = \begin{bmatrix} u & 0 \\ v & S^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v^\dagger \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^2 & uv^\dagger \\ vu & vv^\dagger + S^\dagger S \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} c & d^\dagger \\ d & B \end{bmatrix} = A$$

Die Matrix A bestimmt somit eindeutig $u = \sqrt{c}$ und $v = d/u$, und per Induktion ebenso S mit $vv^\dagger + S^\dagger S = B$. Genauer ergibt Gauß:

$$T := \begin{bmatrix} 1/u & -v^\dagger/u \\ 0 & I \end{bmatrix} \implies RT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad T^\dagger AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B - dd^\dagger/c \end{bmatrix}$$

Dies zeigt die *Eindeutigkeit*!

QED

🔍 Warum ist die Untermatrix $U := B - dd^\dagger/c$ weiterhin positiv definit?

Wie erkennen wir Definitheit? ... mit Hauptminoren!

🔍 Können wir positive Definitheit mit Determinanten charakterisieren?

Satz T2D: Hauptminorenkriterium nach Hurwitz–Sylvester

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ selbstadjungiert, $A^\dagger = A$. Für $\ell = 1, \dots, n$ betrachten wir die Untermatrix $A_\ell := A|_{\{1, \dots, \ell\}^2} \in \mathbb{K}^{\ell \times \ell}$. Äquivalent sind:

- 1 Die Matrix A ist positiv definit, kurz $A \succ 0$.
- 2 Alle Hauptminoren sind positiv, $\Delta_\ell := \det(A_\ell) > 0$ für $\ell = 1, \dots, n$.

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist positiv definit gdw $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$.

$A = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist positiv definit gdw $a > 0$, $ac - b^2 > 0$, $\det A > 0$.

Beispiel: $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ist positiv definit gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

Das ist äquivalent zu $\det(A_\ell) = \lambda_1 \cdots \lambda_\ell > 0$ für alle $\ell = 1, \dots, n$.

⚠️ Können wir positive Semidefinitheit ebenso testen durch $\det A_\ell \geq 0$?
O nein! Gegenbeispiele sind $A = \text{diag}(0, -1)$ oder $A = \text{diag}(+1, 0, -1)$.

Wie erkennen wir Definitheit? ... mit Hauptminoren!

Beweis: „(1) \Rightarrow (2)“: Dank Cholesky T2c haben wir

$$A = R^\dagger R \quad \text{mit} \quad R \in \mathbb{K}_n^{>0}.$$

Dank der Dreiecksform von R gilt $A_\ell = R_\ell^\dagger R_\ell$ für alle $\ell = 1, \dots, n$, also

$$\det A_\ell = \det(R_\ell^\dagger) \det(R_\ell) = (r_{11} \cdots r_{\ell\ell})^2 > 0.$$

„(1) \Leftarrow (2)“: Wir führen Induktion über n . Der Fall $n = 1$ ist klar. Sei $n \geq 2$. In obiger Berechnung von R müssen wir $S^\dagger S \stackrel{!}{=} B - dd^\dagger / c =: U$ lösen.

$$T := \begin{bmatrix} 1/u & -v^\dagger/u \\ 0 & I \end{bmatrix} \implies T^\dagger A T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} = 1 \oplus U$$

Dank der Dreiecksform von T gilt $A_\ell \mapsto T_\ell^\dagger A_\ell T_\ell = 1 \oplus U_{\ell-1}$.

Das zeigt $\det(U_\ell) = \det(A_{\ell+1}) / \det(A_1) > 0$ für alle $\ell = 1, \dots, n-1$.

Per Induktion ist U positiv definit. Somit lässt sich $S^\dagger S = U$ lösen.

Wir erhalten $R \in \mathbb{K}_n^{>0}$ mit $A = R^\dagger R$. Also ist A positiv definit. QED

Beispiel: die berühmte Bandmatrix

$$B_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{n \times n}.$$

Aufgabe: Bestimmen Sie Determinante $\Delta_n = \det(B_n)$ und Definitheit.

Lösung: (1) Wir finden $\Delta_0 = 1$ und $\Delta_1 = 2$, dann $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$.
 (2) Wir erhalten so die Werte 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... und behaupten $\Delta_n = n + 1$.

Beweis per Induktion: Anfangs für $n = 0, 1$ gilt die Behauptung.

Für $n \geq 2$ gilt induktiv $\Delta_n \stackrel{(1)}{=} 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \stackrel{IV}{=} [2n - (n - 1)] \stackrel{\mathbb{Z}}{=} n + 1$.

😊 Dank Hauptminorenkriterium T2D ist B_n somit positiv definit!

Beispiel: die berühmte Bandmatrix

Übung: Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung $B_n = R_n^\dagger R_n$.

$$R_n = \begin{bmatrix} d_1 & r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & r_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & r_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\sqrt{\frac{n-1}{n}} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \sqrt{\frac{n+1}{n}} \end{bmatrix}$$

Wie erkennen wir Definitheit? ... an den Eigenwerten!

❓ Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ selbstadjungiert, $A^\dagger = A$. Wie erkennen wir Definitheit? Eine zweite Möglichkeit bietet die **unitäre Diagonalisierung** T1I:

$$A = A^\dagger \in \mathbb{K}^{n \times n} \quad \Longrightarrow \quad \exists Q \in \text{GU}_n \mathbb{K} : Q^\dagger A Q = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Auch Λ ist selbstadjungiert, also $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Vorteil: Dank $Q^\dagger = Q^{-1}$ gilt nun auch $Q^{-1} A Q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Das bewahrt die Eigenwerte!

Satz T2E: Eigenwertkriterium für positive Semi/Definitheit

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ selbstadjungiert, $A^\dagger = A$.

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die (reellen!) Eigenwerte.

- (1) Es gilt $A \succ 0$ gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.
Es gilt $A \succeq 0$ gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$.
- (2) Es gilt $A \prec 0$ gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n < 0$.
Es gilt $A \preceq 0$ gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 0$.
- (3) Es gilt $A \not\prec 0$ gdw $\lambda_i < 0 < \lambda_j$ für ein Paar i, j .

Wie erkennen wir Definitheit? ... an den Eigenwerten!

🔍 Können wir jeder Matrix ihre Eigenwerte ansehen? Zumindest grob?

Korollar T2F: In/Definitheit bei strikter Diagonaldominanz

Sei $A = A^\dagger \in \mathbb{C}^{n \times n}$ selbstadjungiert und strikt **diagonaldominant**:

$$|a_{ii}| > r_i := \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Dann können wir In/Definitheit bequem an der Diagonale ablesen:

- (1) Es gilt $A \succ 0$ gdw $a_{11}, \dots, a_{nn} > 0$.
- (2) Es gilt $A \prec 0$ gdw $a_{11}, \dots, a_{nn} < 0$.
- (3) Es gilt $A \succcurlyeq 0$ gdw $a_{ii} < 0 < a_{jj}$ für ein Paar i, j .

Wie erkennen wir Definitheit? ... an den Eigenwerten!

Beweis: „ \Rightarrow “: Aus $A \succ 0$ folgt $a_{ii} = e_i^\dagger A e_i > 0$, aus $A \prec 0$ ebenso $a_{ii} < 0$.
 „ \Leftarrow “: Dank Gerschgorin P6A liegt jeder Eigenwert in einem der Intervalle $[a_{ii} - r_i, a_{ii} + r_i] \subset \mathbb{R}^\times$. Das beweist (1) und (2). Daraus folgt (3). QED

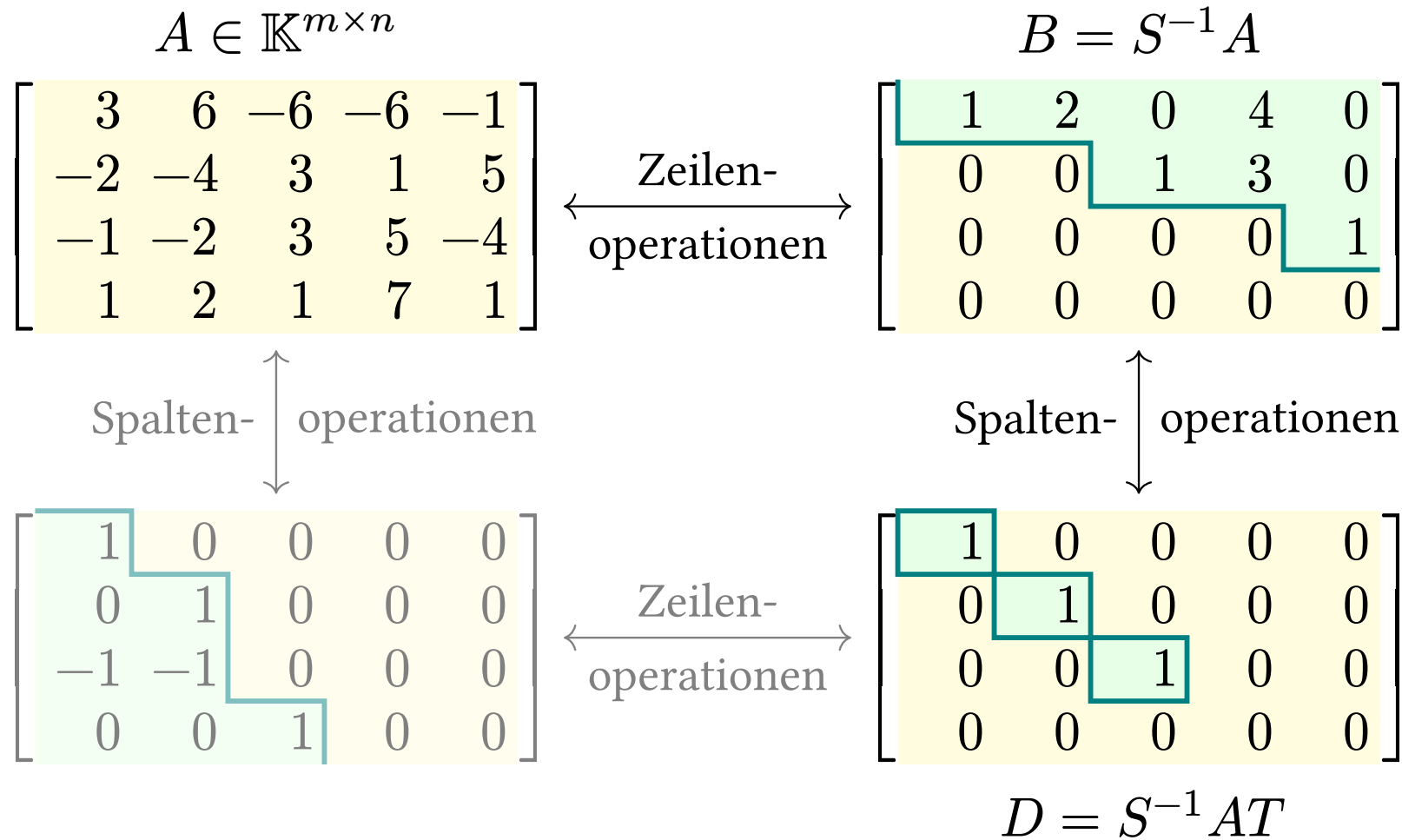
Beispiele: Wo das Kriterium greift, ist es wunderbar effizient:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & -6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ähnlichkeit $A \sim S^{-1} A S$ vs **Kongruenz** $A \simeq S^\dagger A S$

- ⚠ Das sind zwei verschiedene Anwendungen und Werkzeugkästen.
- 😊 Speziell für unitäre Basiswechsel $S \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ gilt jedoch $S^\dagger = S^{-1}$.

Erinnerung: Gauß–Normalform (GNF)



Erinnerung: Gauß–Normalform (GNF)

$$A = U \cdot \begin{matrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \end{matrix} \cdot V^\dagger$$

Singulärwertzerlegung (SVD)

Definition T3A: Singulärwertzerlegung (*singular value decomposition*)

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Eine **Singulärwertzerlegung**

$$(u_i, \sigma_i, v_i)_{i=1}^r \text{ erfüllt } A = \sum_{i=1}^r u_i \sigma_i v_i^\dagger$$

mit orthonormalen Vektoren $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{K}^m$ und $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{K}^n$ und reellen Zahlen $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.

Orthonormal ergänzt gilt $A = U \Sigma V^\dagger$ mit $U = (u_1, \dots, u_m) \in \text{GU}_m$ und $V = (v_1, \dots, v_n) \in \text{GU}_n$ und $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots) \in \mathbb{K}^{m \times n}$. **Beispiel:**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{u_1} \cdot \underbrace{5}_{\sigma_1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{v_1^\dagger} = \underbrace{\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}}_U \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_\Sigma \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{V^\dagger}$$

Singulärwertzerlegung (SVD)

Satz T3B: Singulärwertzerlegung (*singular value decomposition*, SVD)

- (1) Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ hat eine Singulärwertzerlegung $(u_i, \sigma_i, v_i)_{i=1}^r$.
- (2) Die Singulärwerte $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ sind durch A eindeutig bestimmt.

Beweis: (2) *Eindeutigkeit:* Aus $A = \sum_{i=1}^r u_i \sigma_i v_i^\dagger$ folgt $A^\dagger A = \sum_{i=1}^r v_i \sigma_i^2 v_i^\dagger$. Also sind $\sigma_1^2 \geq \dots \geq \sigma_r^2 > 0$ die positiven Eigenwerte von $A^\dagger A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

(1) *Konstruktion:* $A^\dagger A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist selbstadjungiert und positiv semidefinit (T2c). Dank erstem Spektralsatz T1i existiert zu $A^\dagger A$ eine orthonormale Eigenbasis $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Wir setzen $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i}$ und sortieren $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 = \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n$. Für $i \in \{1, \dots, r\}$ setzen wir $u_i := Av_i / \sigma_i \in \mathbb{K}^m$ und erhalten ein ONS:

$$\langle u_i | u_j \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \langle Av_i / \sigma_i | Av_j / \sigma_j \rangle \stackrel{\text{Ad}}{=} \langle v_i | A^\dagger Av_j \rangle / \sigma_i \sigma_j \stackrel{\text{Eig}}{=} \langle v_i | v_j \rangle \sigma_j / \sigma_i \stackrel{\text{ONB}}{=} \delta_{ij}$$

Somit ist $A = \sum_{i=1}^r u_i \sigma_i v_i^\dagger$ die ersehnte Singulärwertzerlegung. □ QED

Korollar T3E: Operatornorm

(1) Der größte Singulärwert σ_1 von $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist die **Operatornorm**:

$$\sigma_1 = \|A\| := \sup\{ |Ax|_{\mathbb{K}^m} ; |x|_{\mathbb{K}^n} \leq 1 \}$$

Beweis: (1) Sei $A = U\Sigma V^\dagger = \sum_{i=1}^r u_i \sigma_i v_i^\dagger$ eine Singulärwertzerlegung. Für $x \in \mathbb{K}^n$ gilt $x = \sum_{j=1}^n v_j x_j$ mit $x_j \in \mathbb{K}$, somit $v_i^\dagger x = x_i$, also

$$|Ax|_{\mathbb{K}^m}^2 \stackrel{\text{SVD}}{=} \left| \sum_{i=1}^r u_i \sigma_i x_i \right|_{\mathbb{K}^m}^2 \stackrel{\text{ONS}}{=} \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 |x_i|^2 \leq \sigma_1^2 |x|_{\mathbb{K}^n}^2.$$

Aus $|x| \leq 1$ folgt $|Ax| \leq \sigma_1$. Zudem gilt $|Av_1| = \sigma_1$. Also $\|A\| = \sigma_1$. QED

Korollar T3E: Frobenius–Norm

(2) Das Frobenius–Normquadrat von $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist die Quadratsumme aller Matrixeinträge und zugleich aller Singulärwerte:

$$\sum_{i=1}^r \sigma_i^2 = |A|_F^2 := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2$$

Beweis: Seien (a_1, \dots, a_n) die Spalten von $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Für $U \in \text{GU}_m \mathbb{K}$ gilt dann $U^\dagger A = (U^\dagger a_1, \dots, U^\dagger a_n)$. Die euklidischen Spaltennormen ändern sich dabei nicht, $|U^\dagger a_j|_F^2 = |a_j|_F^2$, also auch nicht die Frobenius–Norm.

Entsprechendes gilt für die Operation $A \mapsto AV$ mit $V \in \text{GU}_n \mathbb{K}$.

Somit erhalten wir $|A|_F^2 = |U^\dagger AV|_F^2 = |\Sigma|_F^2 = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2$.

QED

Eindeutige SPSD-Wurzel $\sqrt[r]{A}$

Satz T3F: Wurzel quadratischer Matrizen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ selbstadjungiert und positiv semidefinit (kurz spsd).

Zu $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ existiert genau eine spsd Matrix $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $B^r = A$.

Für diese schreiben wir dann $B =: \sqrt[r]{A} = A^{1/r}$.

Beweis: Dank erstem Spektralsatz T1I haben wir $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^k \text{Eig}(A, \lambda_i)$ mit $0 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_k$ in \mathbb{R} . Auf $\text{Eig}(A, \lambda_i)$ wirkt A als Skalierung mit λ_i , also B mit $\mu_i = \lambda_i^{1/r}$. Das beweist Eindeutigkeit und Existenz. QED

Polarzerlegung $A = QP$

Jeden Skalar $a \in \mathbb{K}^\times$ können wir **polar zerlegen** gemäß $a = qp = pq$ in Länge $p = |a|$ und Richtung $q = a/|a| \in \text{GU}_1 \mathbb{K} = \{a \in \mathbb{K} ; |a| = 1\}$.

Über \mathbb{R} ist $p = |a|$ der Betrag und $q \in \text{GU}_1 \mathbb{R} = \mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ das Vorzeichen.

Über \mathbb{C} ist $q \in \text{GU}_1 \mathbb{C} = \mathbb{S}^1$ die Richtung, über \mathbb{H} ebenso $q \in \text{GU}_1 \mathbb{H} = \mathbb{S}^3$.

Satz T3g: Polarzerlegung quadratischer Matrizen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ erlaubt eine **Polarzerlegung**

$$A = QP = P'Q$$

mit $P, P' \in \mathbb{K}^{n \times n}$ selbstadjungiert positiv semidefinit und $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$. Dabei sind P, P' immer eindeutig, falls A invertierbar ist auch Q .

Beweis: *Existenz:* Aus jeder Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^\dagger$ gewinnen wir zugehörige Polarzerlegungen $A = (UV^\dagger) \cdot (V\Sigma V^\dagger) = (U\Sigma U^\dagger) \cdot (UV^\dagger)$.

Eindeutigkeit: Aus $A = QP$ folgt $A^\dagger A = P^\dagger Q^\dagger QP = P^2$, also $P = \sqrt{A^\dagger A}$. Ist A invertierbar, so auch P , demnach ist $Q = AP^{-1}$ eindeutig. QED

Kapitel T

Bonusmaterial

*We have normality. I repeat, we have normality.
Anything you still can't cope with is therefore your own problem.*
Douglas Adams (1952–2001), *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*

5 Anwendungen

Simultane unitäre Diagonalisierung

◆ Satz P7B: simultane Diagonalisierung von Endomorphismen

Seien $f_1, \dots, f_\ell : V \rightarrow V$ linear über dem Körper \mathbb{K} . Äquivalent sind:

- 1 Die Endomorphismen (f_1, \dots, f_ℓ) sind simultan diagonalisierbar.
- 2 Jeder Endomorphismus f_1, \dots, f_ℓ ist einzeln diagonalisierbar und je zwei kommutieren, also $f_j \circ f_k = f_k \circ f_j$ für alle $j, k \in \{1, \dots, \ell\}$.

Korollar T5A: simultane unitäre Diagonalisierung von Endomorphismen

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sei nun $(V, \langle - | - \rangle)$ zudem unitär. Äquivalent sind:

- 1 Die Familie (f_1, \dots, f_ℓ) ist simultan unitär diagonalisierbar.
- 2 Jeder Endomorphismus f_1, \dots, f_ℓ ist einzeln unitär diagonalisierbar und je zwei kommutieren, also $f_j \circ f_k = f_k \circ f_j$ für alle $j, k \in \{1, \dots, \ell\}$.

Spektralsatz, von I zu II

Lemma T5B: hermitesche Zerlegung

Wir zerlegen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gemäß $A = B + iC$ mit $B = (A + A^\dagger)/2$ und $C = (A - A^\dagger)/2i$ hermitesch. Damit gilt $A^\dagger A = AA^\dagger$ gdw $BC = CB$.

Beweis: Es gilt $A^\dagger = B - iC$ und $A^\dagger A - AA^\dagger = 2i(BC - CB)$. □ QED

Dritter Beweis des zweiten Spektralsatzes T1o: Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normal, so haben wir $A = B + iC$ mit $B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch und $BC = CB$. Dank T1I & T5A existiert zu B, C eine simultane orthonormale Eigenbasis (v_1, \dots, v_n) mit reellen Eigenwerten β_k für B und γ_k für C . Dies ist eine Eigenbasis zu $A = B + iC$ mit Eigenwerten $\alpha_k = \beta_k + i\gamma_k$. □ QED