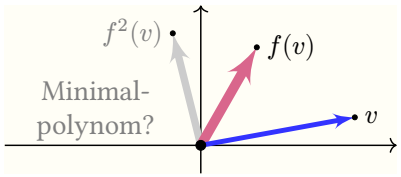
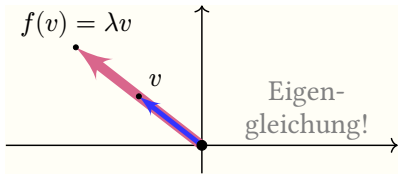
Kapitel P

Eigenvektoren und Diagonalisierung





Live as if you were to die tomorrow.
Learn as if you were to live forever.
Mahatma Gandhi (1869–1948)

Inhalt dieses Kapitels P

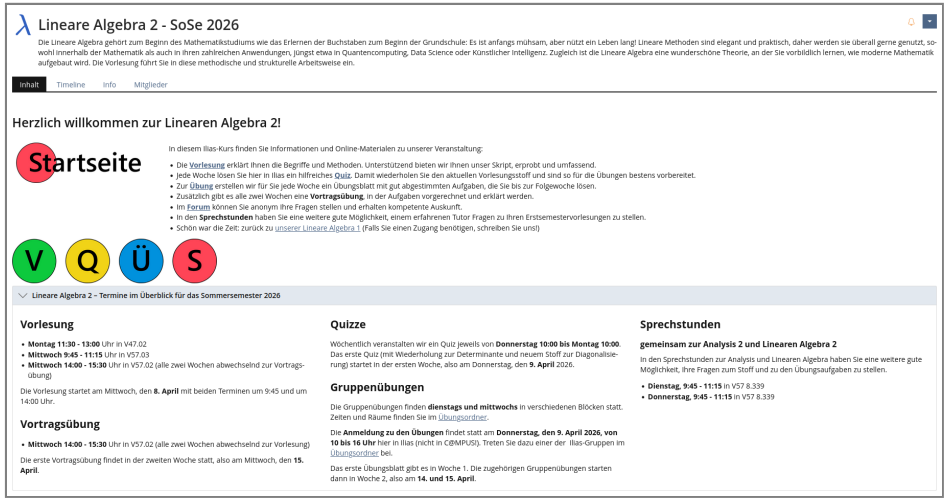
1 Diagonalisierung und Minimalpolynom
- Diagonalisierung eines Endomorphismus
- Das MiPo-Verfahren zur Diagonalisierung
- Erste Beispiele zur Eigenraumzerlegung

2 Determinante und charakteristisches Polynom
- Eigenschaften des charakteristischen Polynoms
- Das ChaPo-Verfahren zur Diagonalisierung
- Begleitmatrix und lineare Rekursion

3 Trigonalisierung und Minimalpolynom
- Trigonalisierung eines Endomorphismus
- Cayley–Hamilton: MiPo teilt ChaPo
- Fazit: Kriterien zur Diagonalisierung

4 Übungsaufgaben und Anwendungsbeispiele

Willkommen zur Fortsetzung Ihrer Linearen Algebra!



Unser Ilias-Kurs zur LinA2 ist aktuell, informativ und liebevoll gestaltet. Dort finden Sie alle Informationen, hilfreiche Materialien und Termine, etwa in der ersten Woche die Anmeldung zu Ihren Übungsgruppen.

Leseanleitung: Wie nutzen Sie das LinA-Skript richtig?

Pro Vorlesung à 90min besprechen wir etwa 20 bis 25 Vorlesungsfolien; diese bilden den blauen (!) Faden, unser Grundgerüst, den harten Kern.

Optional biete ich nützlichen Hintergrund, besonders in der Vollversion: hilfreiche Erläuterungen und Ergänzungen, Anwendungen und Beispiele, Aufgaben und Lösungen, uvm. Dosieren Sie selbst nach Ihrem Bedarf!

Lineare Algebra 1 – solide Fundamente

Präludium: Schulmathematik vom mathematischen Standpunkt
Zahlen, Polynome, Matrizen: richtig rechnen und begründen (A–E)

Logische Grundlagen	Algebraische Grundlagen	Lineare Strukturen
Mathematische Logik und Beweistechniken (F)	Monoide und Gruppen (J)	Lineare Räume und lineare Abbildungen (L)
Mengen, Relationen und Abbildungen (G)	Ringe und Körper (K)	Basis und Dimension (M)
Kombinatorik und Quotienten (H)	Polynomringe und Euklids Algorithmus (C)	Matrixdarstellung linearer Abbildungen (N)
Ordnungsrelationen und Kardinalität (I)	Matrixkalkül und Gauß–Algorithmus (D)	Signatur und Determinante (O)

Lineare Algebra 2 – Aufbau und Anwendungen

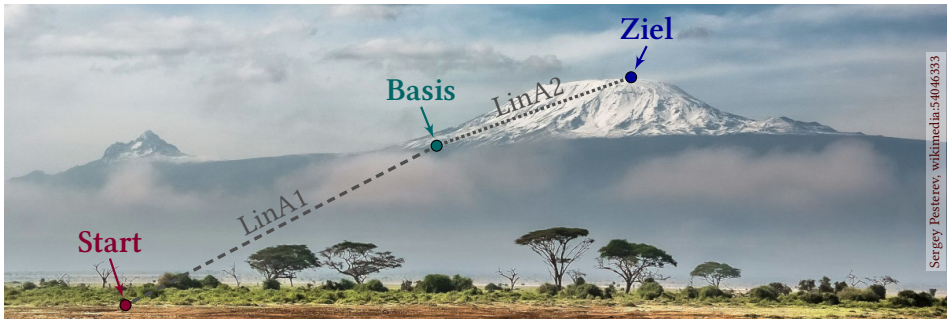
Logische und algebraische Grundlagen des ersten Semesters:
Mengen und Abbildungen, Ringe und Körper, lineare Strukturen (A–O)

Normalformen für Endos	Euklidische Geometrie	Geometrische Anwendung	Multilineare Algebra
Diagonalisierung (P)	Skalarprodukte (S)	Affine Räume (U)	Dualität (W)
Jordanisierung (Q)	Isometrien (S)	Projektive Räume (U)	Tensorprodukt (X)
Elementarteiler (R)	Spektralsatz (T)	Quadriken (V)	Tensoralgebren (Y)

Anwendungen in Mathematik, Physik, Informatik, Ökonomik, ...
Data Science, Machine Learning, Quantum Computing, Optimierung, uvm.

Mathematik ist schön und nützlich, anstrengend doch lohnend!

Five percent of the people think; ten percent of the people think they think; and the other eighty-five percent would rather die than think.
Thomas A. Edison (1847–1931), Erfinder und Unternehmer



Because in the end, you won't remember the time you spent working in the office or mowing your lawn. Climb that goddamn mountain!
Jack Kerouac (1922–1969), Poet der Beat Generation

Mathematik ist schön und nützlich, anstrengend doch lohnend!

1. Was kann ich wissen? — 2. Was soll ich tun? — 3. Was darf ich hoffen?
Immanuel Kant (1724–1804), Grundfragen der Philosophie (KrV 1787, p. 833)

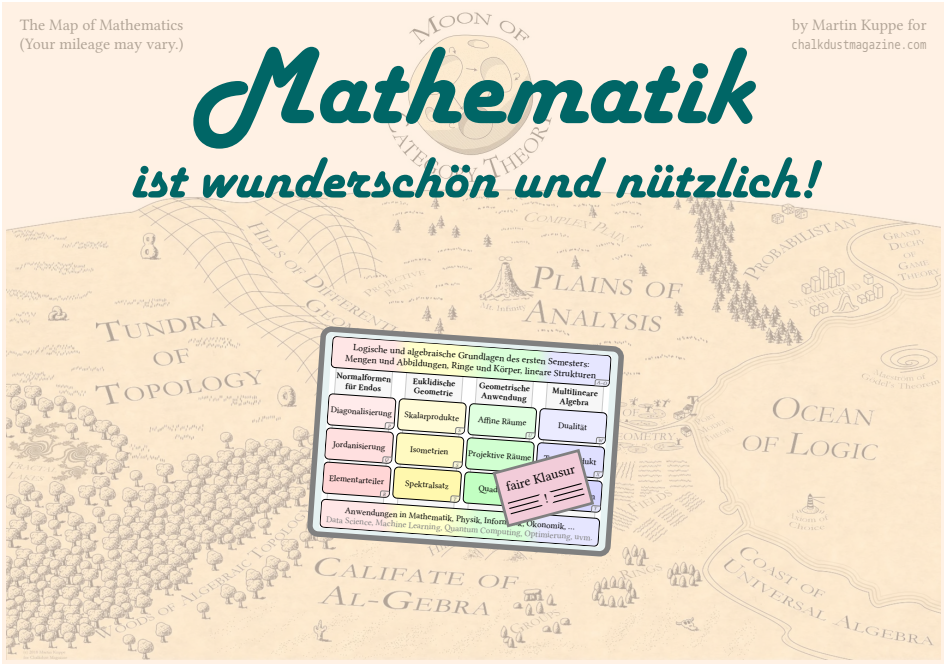
Richtige Entscheidungen für Ihr Studium: Aufwärtsspirale —
engagiert mitarbeiten, gemeinsam lernen, erfolgreich studieren.

Falsche Weichenstellung der Vermeidung: Abwärtsspirale —
desinteressiert mittrotten, planlos vertrödeln, frustriert aufgeben.

Ihr Mathematikstudium hat zwei zentrale und sich ergänzende Ziele:
Wissen und Können, Verstehen und Anwenden, Theorie und Praxis.
Darin liegt der besondere Reiz und zugleich die große Schwierigkeit.
Die Mathematik erfordert ernsthafte Investition, und sie lohnt sich!

Das ist, kurz gesagt, die Entscheidung Ihres Studiums, ja Ihres Lebens:
Planen Sie kurzfristig oder langfristig? Lohnt sich die LinA? Ja, sicher!
☺ Universelle Grundlage, wunderschöne und nützliche Mathematik.
☺ Klar strukturiert, gut durchdacht, hervorragend betreut, faire Klausur.

Schöne Mathematik – gute Vorlesung – faire Klausur



Schöne Mathematik – gute Vorlesung – faire Klausur

Ich beginne das zweite Semester wie das erste mit Zuspruch und Zusage. Sie können sich auf uns verlassen und uns vertrauen, Ihr LinA-Team! Wir betreuen Sie gut… Sie werden sicherlich Ihre Schwierigkeiten haben, die können wir nicht wegzaubern, doch wir helfen Ihnen mit Rat und Tat.

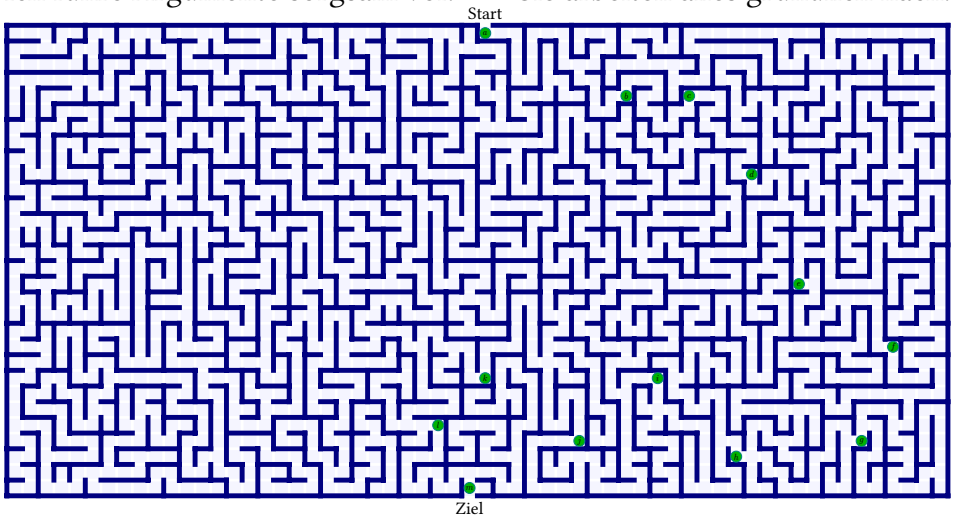
Meine Bitte: Vertrauen Sie uns! Wir haben umfangreiche Lehrerfahrung und damit sogar einige Lehrpreise gewonnen. Sie bekommen hier beste Lernbedingungen, in Präsenz von Mensch zu Mensch. Nutzen Sie dieses Studienjahr, geben Sie Ihre einmalige Chance nicht leichtfertig auf.

Was ist neu? Sie haben inzwischen schon ein Semester gute Erfahrungen mit uns gemacht. Sie wissen daher, dass wir wahr sprechen, es gut mit Ihnen meinen und Ihnen helfen wollen, richtig Mathematik zu studieren. Wenn Sie schon gut gestartet sind, dann machen Sie bitte weiter so!

Vielleicht haben Sie anfangs gezögert, nicht ernsthaft die nötige Zeit und Mühe investiert, die guten Angebote ausgeschlagen und sich so selbst abgehängt. Dann ist jetzt die Gelegenheit, es endlich richtig anzupacken und wahrhaft zu studieren. Fangen Sie heute an! Wir unterstützen Sie.

Arbeitsteilung zwischen Lehren und Lernen

Ich führe Argumente sorgsam vor. — Sie arbeiten alles gründlich nach.



Ich zeige Ihnen den Weg vom Start zum Ziel und erkläre die wesentlichen Etappen. Sie verbinden die Punkte, ergänzen und klären die Details, üben die Techniken. Dazu müssen Sie mitdenken, auch um die Ecke. Wir gehen den Weg gemeinsam; kommen Sie startklar und gut vorbereitet!

Arbeitsteilung zwischen Lehren und Lernen

Ich gebe mir mit Ihnen und dieser Lehrveranstaltung allergrößte Mühe. Ebenso gehe ich davon aus, dass Sie lernen wollen und lernen können: Sie haben sich umsichtig und bewusst für die Mathematik entschieden, Sie sind lernfreudig und wissbegierig, ausdauernd und gewissenhaft.

Der erste Schritt zu Ihrem Erfolg ist Ihre beständige und aktive Teilnahme an Vorlesung – Quiz – Übung – Hausaufgaben. In der Vorlesung werden Sie zwar nicht sofort alles verstehen, doch sie bietet Ihnen den wichtigen ersten Durchgang und Überblick der Themen, Begriffe und Techniken. Davon wollen und sollen Sie jedesmal so viel wie möglich profitieren.

Parallel dazu arbeiten Sie in Ihrem zweiten Durchgang zwischen den Vorlesungen den neuen Stoff selbständig nach, angeleitet durch Quiz und Übung und Hausaufgaben, bestens betreut von Team und Tutor:innen. Nur so erarbeiten Sie sich ein Thema, nur so können Sie in der weiteren Vorlesung und in folgenden Semestern darauf bauen. Lernen ist aktiv!

Nutzen Sie den wöchentlichen Rhythmus, hängen Sie sich nicht selbst ab, bleiben Sie dauerhaft dran, profitieren Sie vom gemeinsamen Lernen!

Die Modellmatrix $D^r_{m\times n}$ der Größe $m \times n$ vom Rang r

Ziel: Wir wollen lineare Abbildungen möglichst einfach darstellen.
Die **Modellmatrix** der Größe $m \times n$ vom Rang r über dem Körper K ist

$$D = D^r_{m\times n} := \begin{bmatrix} 1_{r\times r} & 0_{r\times k} \\ 0_{\ell\times r} & 0_{\ell\times k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Die zugehörige K–lineare **Modellabbildung** ist die Projektion-Inklusion

$$f_D : K^n \to K^m : (x_1, \dots, x_r, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Daran lesen wir Bild und Kern ab, somit auch Rang und Defekt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(D) &= \langle e_1, \dots, e_r \rangle^!_K \leq K^m &\implies \operatorname{rang}(D) = r \\ \operatorname{Ker}(D) &= \langle e_{r+1}, \dots, e_n \rangle^!_K \leq K^n &\implies \operatorname{def}(D) = n - r \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\operatorname{rang}(D) + \operatorname{def}(D) = n$ gemäß Rangsatz M2U.

Gauß–Normalform eines Vektorraumhomomorphismus

☺ In geeigneten Basen sieht jede lineare Abbildung genau so aus:

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "f_D : (x_1, \dots, x_r, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{V}}"', "\cong"] & K^m \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{U}}"', "\cong"] \\ V \arrow[r, "f : \begin{cases} v_i \mapsto u_i & \text{für } i = 1, \dots, r, \\ v_i \mapsto 0 & \text{für } i = r+1, \dots, n \end{cases}"'] & U \end{tikzcd}$$

♦ Satz M2x: Gauß–Normalform eines Vektorraumhomomorphismus

Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung von K–Vektorräumen endlicher Dimension $n := \dim_K(V)$ und $m := \dim_K(U)$ mit Rang $r := \operatorname{rang}_K(f)$.
Dazu existieren Basen $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_m)$ von U und $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ von V mit $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, \dots, r$ und $f(v_i) = 0$ für alle $i = r+1, \dots, n$.
Somit wird f dargestellt durch unsere Modellmatrix $D^r_{m\times n}$.

Diese Matrix ist so einfach und übersichtlich wie möglich. Das bringt uns zum allgemeinen Ziel dieses Kapitels: Wir wollen nun Endomorphismen $f : V \to V$ so einfach wie möglich durch eine „Normalform“ darstellen.

Gauß–Algorithmus beidseitig zur Gauß–Normalform

Ausprobieren mit Gaël!

Mit Gauß wandeln wir jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ zur Modellmatrix $D^r_{m\times n}$:

$$\begin{tikzcd} A \in K^{m\times n} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Zeilen-operationen}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Spalten-operationen}"'] & B = S^{-1}A \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Spalten-operationen}"'] \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Zeilen-operationen}"] & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & D = S^{-1}AT \end{tikzcd}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 & -6 & -1 \\ -2 & -4 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

An $SD = AT$ mit $S \in \mathrm{GL}_m K$ und $T \in \mathrm{GL}_n K$ lesen wir Bild und Kern ab:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} D &= \langle e_1, \dots, e_r \rangle^!_K, & \operatorname{Ker} D &= \langle e_{r+1}, \dots, e_n \rangle^!_K, \\ \operatorname{Im} A &= \langle Se_1, \dots, Se_r \rangle^!_K, & \operatorname{Ker} A &= \langle Te_{r+1}, \dots, Te_n \rangle^!_K. \end{aligned}$$

Gauß–Algorithmus zur kanonischen Darstellung

Ausführlich haben wir hierzu das folgende, allgemeine Verfahren:

♦ Satz M3c: Gauß–Algorithmus beidseitig zur Normalform

Sei $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix über dem Körper K, ein Divisionsring genügt.
(1) Der Gauß–Algorithmus konstruiert zu A invertierbare Matrizen $S, S^{-1} \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $T, T^{-1} \in \mathrm{GL}_n(K)$, sodass $AT = SD^r_{m\times n}$ gilt.
(2) Daraus folgt $\operatorname{rang}(A) = r$ und $\operatorname{def}(A) = n - r$ sowie explizit

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Im}(A) &= \langle Se_1, \dots, Se_r \rangle^!_K, \\ \operatorname{Ker}(A) &= \langle Te_{r+1}, \dots, Te_n \rangle^!_K. \end{aligned}}$$

☺ Dies ist ein Basiswechsel: Wir lesen die Matrix $A \in K^{m\times n}$ in den richtigen Basen, und schon vereinfacht sich A zur Modellmatrix $D^r_{m\times n}$! Diese Gauß–Normalform (GNF) löst das Klassifikationsproblem M3E.

☺ Die Bestimmung von Bild $\operatorname{Im}(A)$ und Kern $\operatorname{Ker}(A)$ haben wir bereits zuvor in Satz M1V gelöst. Mit Satz M3C sehen Sie hier nun eine elegante Umformulierung. Wählen Sie jeweils das best passende Werkzeug!

Diagonalisierung eines Endomorphismus

Wir betrachten einen Endomorphismus $f : V \to V$ über dem Körper K.

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "f_D"'] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"', "\cong"] & K^n \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"', "\cong"] \\ V \arrow[r, "f"] & V \end{tikzcd}$$

Wir suchen eine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass die darstellende Matrix

$$D = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) := \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in K^{n\times n}$$

möglichst einfach wird. Die einfachsten Matrizen sind **diagonal**:

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Zum Beispiel können wir **Potenzen** von D leicht berechnen:

$$D^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Diagonalisierung eines Endomorphismus

Strenger als im allgemeinen Fall $f : V \to W$ stimmen hier Startraum V und Zielraum W überein. Daher wollen wir statt zwei Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W nur noch eine Basis $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ von $V = W$ verwenden.

Das klingt auf den ersten Takt trügerisch einfacher: Statt *zwei* Basen müssen wir nur *eine* Basis wählen. Tatsächlich ist das schwieriger: Statt zwei Basen *dürfen* wir nur noch eine Basis wählen.

Damit haben wir weniger Möglichkeiten zur Anpassung unserer Basis, weniger Freiheitsgrade zur Problemlösung, nämlich nur „halb“ so viele! Weniger ist mehr: Weniger Spielraum bedeutet mehr Herausforderung.

Die Vereinfachung auf Diagonalform wird dadurch tatsächlich spürbar erschwert, und sie gelingt nicht immer. Auch das Klassifikationsproblem wird dadurch kniffliger. Genau darum geht es in diesem Kapitel!

Diese Problemstellung der **Diagonalisierung** tritt sehr häufig auf, und ihre Lösung ist ein vielseitiges Werkzeug der Linearen Algebra.

Jordan–Normalform eines Endomorphismus

Diagonalisierung ist nicht immer möglich. In diesem Falle weicht man notgedrungen auf die „nächstbeste“ Möglichkeit aus und sucht eine Darstellung als Blockdiagonalmatrix mit möglichst einfachen Blöcken:

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_k \end{bmatrix}$$

Diagonalisierung entspricht $k = n$ Blöcken $B_1, B_2, \dots, B_k \in K = K^{1\times 1}$. Die nächstbeste Darstellung sind Jordan–Blöcke

$$B_i = J_{n_i}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in K^{n_i\times n_i}.$$

Die Größen addieren sich hierbei gemäß $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Diese Jordan–Normalform (JNF) diskutieren wir im nächsten Kapitel.

Frobenius–Normalform eines Endomorphismus

Der allgemeinste Fall ist die Frobenius–Normalform (FNF) mit Blöcken

$$B_i = C(P_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -p_{n_i} \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -p_{n_i-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -p_{n_i-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -p_1 \end{bmatrix} \in K^{n_i\times n_i}.$$

Diese Matrix ist nicht ganz so simpel wie zuvor, doch von übersichtlicher Struktur und mit erfreulich vielen Nullen. Dies ist die Begleitmatrix des Polynoms $P_i = X^{n_i} + p_1 X^{n_i-1} + \dots + p_{n_i} X^0 \in K[X]_{n_i}^1$, siehe Satz P2R.

Jede lineare Abbildung $f : V \to V$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums V lässt sich so möglichst übersichtlich darstellen. Das ist zwar nicht so schön und einfach wie eine Diagonalmatrix, aber wie gesagt das nächstbeste und dafür universell einsetzbar.

Nach diesem kurzen Überblick beschäftigen wir uns nun in diesem Kapitel mit dem schönsten und einfachsten Fall: der Diagonalisierung.

Diagonalisierung eines Endomorphismus

♦ Definition N3A: Diagonalisierung eines Endomorphismus

Sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K; wir skalieren von links.

(1) Sei $f : V \to V$ linear über K. Eine **diagonalisierende Basis** zu f ist eine Basis $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^n$ von V, für die die darstellende Matrix von f diagonal ist:

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Das bedeutet, für jeden Index $i = 1, \dots, n$ erfüllt b_i die **Eigengleichung**:

$$f(b_i) = \lambda_i b_i$$

In Worten zur Betonung: Jeder Basisvektor b_i wird so einfach wie möglich abgebildet, nämlich nur um einen Skalar $\lambda_i \in K$ gestreckt!

Eine solche Basis $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$ von V über K nennen wir **Eigenbasis** zu f. Existiert zu f eine Eigenbasis $\mathcal{B}$ von V, so nennen wir f **diagonalisierbar**.

Diagonalisierung eines Endomorphismus

Diagonalisierung ist das zentrale Anliegen der Linearen Algebra: Wir wollen unseren Endomorphismus so einfach wie möglich darstellen, am besten also diagonal. Dazu wollen wir unsere Basis optimal wählen. Wir werden dies in mehreren Kapiteln noch ausgiebig untersuchen.

Allgemein verlangen wir eine Eigenbasis $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$ von V zu f, also $V = \langle \mathcal{B} \rangle_K^!$ und $f(v_i) = \lambda_i b_i$ mit $\lambda_i \in K$ für jeden Index $i \in I$. Der unendlich-dimensionale Fall dient als Ergänzung und heilsamer Kontrast. Die Funktionalanalysis führt dies später erfolgreich fort.

Endliche Dimension $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$ ist besonders sympathisch, sie tritt in Anwendungen häufig auf und deckt viele Bedürfnisse ab. Sie erlaubt stärkere Werkzeuge, daher werden wir uns meist darauf konzentrieren. Hier können wir effizient rechnen: mit Matrizen!

Ich habe daher die endlich-dimensionale Sichtweise voran gestellt. Dieselbe Sprechweise wenden wir auch auf jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ an, indem wir A als lineare Abbildung $f_A : K^n \to K^n : v \mapsto Av$ auffassen.

Diagonalisierung einer Matrix

♦ Definition N3A: Diagonalisierung einer Matrix

(2) Sei $A \in K^{n \times n}$. Ein **diagonalisierender Basiswechsel** zu A über K ist eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$, so dass $T^{-1}AT$ diagonal ist:

$$T^{-1}AT = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Existiert eine solche Matrix T, so nennen wir A über K **diagonalisierbar**. D.h. die Spalten der Matrix $T = (v_1, \dots, v_n)$ sind eine Eigenbasis von f_A, der zur Matrix A gehörigen linearen Abbildung $f_A : K^n \to K^n : v \mapsto Av$.

Bemerkung M1s: $(v_1, \dots, v_n)$ ist eine Basis gdw T in $K^{n \times n}$ invertierbar ist.

Beweis: „$\Leftarrow$“: Ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Eigenbasis mit $Av_i = \lambda_i v_i$ für $i = 1, \dots, n$, so ist T diagonalisierend, denn $D = T^{-1}AT : e_i \mapsto v_i \mapsto \lambda_i v_i \mapsto \lambda_i e_i$.

„$\Rightarrow$“: Diagonalisiert T zu $D = T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, so ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Eigenbasis, denn $A = TDT^{-1} : v_i \mapsto e_i \mapsto \lambda_i e_i \mapsto \lambda_i v_i$. QED

Diagonalisierung, gerne auch unendlich-dimensional

Wir interessieren uns besonders für den endlich-dimensionalen Fall. Dann können wir f durch eine Matrix darstellen, bestmöglich diagonal. Allgemein suchen wir zu $f : V \to V$ eine Eigenbasis $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ von V, mit der schönen Eigenschaft $f(v_i) = \lambda_i v_i$ und $\lambda_i \in K$ für alle $i \in I$.

Je nach Anwendung darf diese Basis durchaus auch unendlich sein, also $\dim_K(V) = \sharp I = \infty$. Speziell für den endlichen Fall haben wir eine besonders schöne Theorie, Sätze und Techniken. Der unendliche Fall findet später in der Funktionalanalysis eine umfassende Behandlung.

Die obige Definition N3A erklärt zunächst präzise das angestrebte Ziel. Unser Wunsch: Wir wollen einen Endomorphismus $f : V \to V$ über K bzw. eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ über K diagonalisieren. Im Folgenden erarbeiten wir uns dazu die nötigen Werkzeuge.

Beachten Sie die logische Trennung von Ziel und Weg. Es lohnt sich, zunächst das Ziel klar zu benennen, dann mögliche Wege zu suchen. Es gibt im Allgemeinen mehrere alternative Lösungsmöglichkeiten, die sollten Sie kennen, und darüber Ziel und Weg nicht verwechseln.

Eigenvektoren – Eigenwerte – Eigenräume

♦ Definition N3B: Eigenvektoren, Eigenwerte, Eigenräume

(1) Sei $f : V \to V$ linear über K. Ein **Eigenpaar** (v, λ) von f besteht aus einem Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ und einem Skalar $\lambda \in K$, die $f(v) = \lambda v$ erfüllen.

Wir nennen dann $v \neq 0$ einen **Eigenvektor** und λ einen **Eigenwert** von f. Die Menge aller Eigenwerte nennen wir das **(Eigenwert)Spektrum**

$$\sigma(f) = \sigma(f; K) := \{\lambda \in K \mid \exists v \in V \setminus \{0\} : f(v) = \lambda v\}.$$

(2) Zu jedem Skalar $\lambda \in K$ definieren wir den zugehörigen **Eigenraum**

$$\mathrm{E}(\lambda) \;=\; \mathrm{Eig}(f, \lambda) \;:=\; \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} \;\overset{!}{=}\; \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V).$$

Immer gilt $0 \in \mathrm{E}(\lambda)$. Für jeden Vektor $v \in V$ gilt folgende Äquivalenz:

$$f(v) = \lambda v \quad\Longleftrightarrow\quad f(v) - \lambda\,\mathrm{id}_V(v) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (f - \lambda\,\mathrm{id}_V)(v) = 0$$

Genau dann ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f, wenn $\mathrm{E}(\lambda) \neq \{0\}$ gilt.
Die Dimension $\dim_K \mathrm{E}(\lambda) \geq 1$ ist die **geometrische Vielfachheit** von λ.

Eigenwerte und Eigenvektoren eines Endomorphismus

Die meisten Skalare λ erweisen sich wegen $\mathrm{E}(\lambda) = \{0\}$ als uninteressant. Wir betrachten daher nur die interessanten Werte $\lambda \in K$ mit $\mathrm{E}(\lambda) \neq \{0\}$, genannt **Eigenwert** von f, manche sagen auch **charakteristischer Wert** (ebenso char. Vektor, char. Gleichung, char. Matrix, char. Polynom, etc.)

☺ Auf Englisch heißt es *eigenvector*, *eigenvalue*, *eigenspace*, *eigenbasis*, auf Französisch *vecteur propre*, *valeur propre*, *espace propre*, *base propre*. Abkürzungen: EW = EWert = Eigenwert, EV = EVektor = Eigenvektor, manchmal auch ER = ERaum = Eigenraum, EB = EBasis = Eigenbasis, etc.

Beispiel: Sei $V \neq \{0\}$ und $f = \mathrm{id}_V$. Dann ist $\lambda = 1$ der einzige EW. der ER ist $\mathrm{Eig}(f, 1) = V$, die geometrische Vielfachheit ist $\dim_K(V)$. Jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ist ein EV. Jede Basis von V ist eine EB zu f.

⚠ Der Nullvektor erfüllt $f(0) = 0 = \lambda 0$ für alle $\lambda \in K$; diese Gleichung gilt immer und ist ohne jedes Interesse. Anders gesagt: Der Nullvektor gehört zu jedem Eigenraum $\mathrm{E}(\lambda)$, ist aber niemals ein Eigenvektor.

⚠ Der Skalar $\lambda = 0$ kann durchaus ein Eigenwert sein. Dies geschieht genau dann, wenn f nicht injektiv ist, denn es gilt $\mathrm{E}(0) = \mathrm{Ker}(f)$.

Diagonalisierung – Eigenbasis – Eigenraumzerlegung

Beispiele: Die beiden einfachsten Spezialfälle kennen Sie bereits:
Für $\lambda = 0$ ist $\mathrm{Eig}(f, 0) = \mathrm{Ker}(f)$ der Kern der Abbildung $f : V \to V$.
Für $\lambda = 1$ ist $\mathrm{Eig}(f, 1) = \mathrm{fix}(f)$ die Fixpunktmenge von $f : V \to V$.

♦ Satz N3C: Diagonalisierung, Eigenbasis, Eigenraumzerlegung

Sei $f : V \to V$ linear über dem Körper K. Äquivalent sind:

1. Der Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ist **diagonalisierbar**.
2. Es existert eine Basis aus Eigenvektoren, kurz **Eigenbasis**.
3. Der Raum $V \overset{!}{=} \bigoplus_{\lambda \in K} \mathrm{Eig}(f, \lambda)$ ist Summe der **Eigenräume**.

Relevant sind dabei nur die nicht-trivialen Eigenräume $\mathrm{Eig}(f, \lambda) \neq \{0\}$, also die Summanden zu Eigenwerten $\lambda \in \sigma(f; K)$ des Endomorphismus f.

Beweis: Die Äquivalenz „(1) ⇔ (2)“ ist klar nach Definition N3A.
„(3) ⇒ (2)“: Wähle je eine (Eigen)Basis $\mathcal{B}_\lambda$ von $\mathrm{E}(\lambda) \leq V$ dank M2K und erhalte daraus die Eigenbasis $\mathcal{B} = \bigsqcup_{\lambda \in K} \mathcal{B}_\lambda$ von V dank M2T.
„(2) ⇒ (3)“: Umgekehrt, sortiere die Eigenbasis $\mathcal{B} \overset{!}{=} \bigsqcup_{\lambda \in K} \mathcal{B}_\lambda$. QED

Diagonalisierung – Eigenbasis – Eigenraumzerlegung

? Wie finden wir alle Eigenwerte $\lambda \in K$, also das Spektrum $\sigma(f; K)$?

☺ Zwei Wege: (1) Das Minimalpolynom führt zum MiPo-Verfahren N3H.
(2) Das charakteristische Polynom führt uns zum ChaPo-Verfahren P2H.

☺ Sobald wir alle EW haben, können wir jeden Eigenraum $\mathrm{Eig}(f, \lambda) \leq V$ bestimmen, somit die Summe $\bigoplus_{\lambda \in \sigma(f)} \mathrm{Eig}(f, \lambda)$ und eine Eigenbasis P1D.

Wir betrachten ein Polynom $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n \in K[X]$. Für die Variable X setzen wir den Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein:

$$P(f) = a_0\,\mathrm{id}_V + a_1 f + a_2 f^2 + \ldots + a_n f^n \in \mathrm{End}_K(V)$$

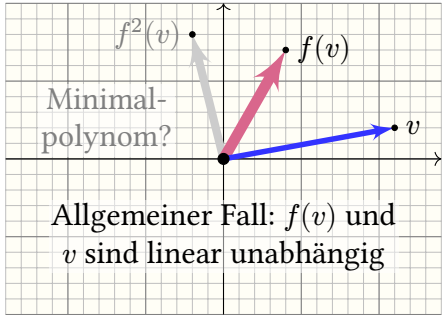
Ebenso setzen wir $A \in K^{n \times n}$ ein statt $f_A \in \mathrm{End}_K(K^n)$, siehe K3D.

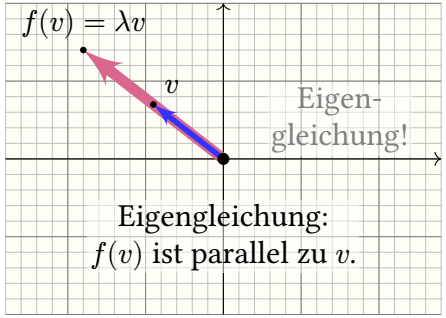
Das Polynom P **annulliert** f lokal in $v \in V$, falls $P(f)(v) = 0$ gilt.
Das Polynom P **annulliert** f global auf ganz V, falls $P(f) = 0$ gilt.

? Unter allen annullierenden Polynomen $P \in K[X]$ suchen wir jeweils das grad-minimale und normierte. Dies führt uns zur nachfolgend erinnerter Definition N3D/N3E des (lokalen) Minimalpolynoms.

Was bedeutet die Eigengleichung $f(v) = \lambda v$ geometrisch?

Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung über dem Grundkörper K.





Wir vergleichen einen Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ mit seinem Bild $w = f(v) \in V$. Im Allgemeinen besteht keine Relation, beide sind linear unabhängig; das lokale Minimalpolynom N3D verallgemeinert dann die Eigengleichung.

Im Fall $w = \lambda v$ mit $\lambda \in K$ sind sie linear abhängig, also parallel: Aus dem Vektor v entsteht sein Bild $w = f(v)$ durch Streckung. Der zugehörige Eigenwert λ ist der Streckfaktor von v zu w.

Was bedeutet die Eigengleichung $f(v) = \lambda v$ algebraisch?

Aus der Eigengleichung $f(v) = \lambda v$ erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ sofort:

$$\boxed{f^n(v) = \lambda^n v}$$

Dies folgt per Induktion über $n \in \mathbb{N}$: Für $n = 0$ gilt $f^0 = \mathrm{id}_V$ und $\lambda^0 = 1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gelingt damit der Schritt von $n-1$ auf n wie folgt:

$$f^n(v) \overset{\text{Def}}{=} f(f^{n-1}(v)) \overset{\text{Vor}}{=} f(\lambda^{n-1} v) \overset{\text{Lin}}{=} \lambda^{n-1} f(v) \overset{\text{Eig}}{=} \lambda^{n-1}\lambda v \overset{\text{Def}}{=} \lambda^n v$$

Für jedes Polynom $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$ gilt demnach:

$$\boxed{P(f)(v) = P(\lambda)\, v}$$

Wir nutzen hierzu den Einsetzungshomomorphismus K3D:

$$\begin{aligned} P(f)(v) &\overset{\text{Def}}{=} (a_0 + a_1 f + \cdots + a_n f^n)(v) \\ &\overset{\text{Lin}}{=} a_0 v + a_1 f(v) + \cdots + a_n f^n(v) \\ &\overset{\text{Eig}}{=} a_0 v + a_1 \lambda v + \cdots + a_n \lambda^n v \\ &\overset{\text{Def}}{=} (a_0 v + a_1 \lambda + \cdots + a_n \lambda^n) v \overset{\text{Def}}{=} P(\lambda)\, v \end{aligned}$$

Das lokale Minimalpolynom μ_f^v

♦ **Definition N3D:** das lokale Minimalpolynom $\mu_f^v = \mathrm{MiPo}_f^v$

Sei K ein Körper und $f \in \mathrm{End}_K(V)$, etwa $V = K^n$ und $f(x) = Ax$ mit $A \in K^{n \times n}$. Jeder Vektor $v \in V$ erzeugt seinen **f–zyklischen Unterraum**

$$Z = Z(v) := \langle f^n(v) \mid n \in \mathbb{N} \rangle_K \leq V, \quad \text{und für seine Dimension gilt}$$
$$\dim_K(Z) = m := \sup\{ n \in \mathbb{N} \mid f^0(v), \ldots, f^{n-1}(v) \text{ linear unabhängig} \}.$$

(0) Im Falle $m = \infty$ ist $(f^n(v))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis von Z. Wir setzen $\mu_f^v := 0$.
(1) Im Falle $m \in \mathbb{N}$ ist $(f^n(v))_{n<m}$ eine Basis von Z, da frei und erzeugend: Für alle $n \geq m$ gilt induktiv $f^n(v) \in \langle f^0(v), \ldots, f^{m-1}(v) \rangle_K$. Wir erhalten

$$a_0 f^0(v) + \ldots + a_{m-1} f^{m-1}(v) + f^m(v) = 0$$

mit eindeutigen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{m-1} \in K$. Damit definieren wir

$$\mu_f^v := a_0 + a_1 X + \cdots + a_{m-1} X^{m-1} + X^m \in K[X]_m^1$$

als das **lokale Minimalpolynom** von $f \in \mathrm{End}_K(V)$ bezüglich $v \in V$.

Das (globale) Minimalpolynom μ_f

♦ **Definition N3E:** das (globale) Minimalpolynom $\mu_f = \mathrm{MiPo}_f$

Zu $f \in \mathrm{End}_K(V)$ erzeugen die Potenzen $f^0, f^1, f^2, \ldots$ den Unterraum

$$Z := \langle f^n \mid n \in \mathbb{N} \rangle_K \leq \mathrm{End}_K(V), \quad \text{und für seine Dimension gilt}$$
$$\dim_K(Z) = m := \sup\{ n \in \mathbb{N} \mid f^0, \ldots, f^{n-1} \text{ linear unabhängig} \}.$$

(0) Im Falle $m = \infty$ ist $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis von Z. Wir setzen $\mu_f := 0$.
(1) Im Falle $m \in \mathbb{N}$ ist $(f^n)_{n<m}$ eine Basis von Z, da frei und erzeugend: Für alle $n \geq m$ gilt induktiv $f^n \in \langle f^0, \ldots, f^{m-1} \rangle_K$. Wir erhalten daraus

$$a_0 f^0 + \ldots + a_{m-1} f^{m-1} + f^m = 0$$

mit eindeutigen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{m-1} \in K$. Damit definieren wir

$$\mu_f := a_0 + a_1 X + \cdots + a_{m-1} X^{m-1} + X^m \in K[X]_m^1$$

als das (globale) **Minimalpolynom** des Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Ebenso definieren wir das Minimalpolynom μ_A für jede Matrix $A \in K^{n \times n}$.

Das Minimalpolynom teilt jedes annullierende Polynom.

☺ Für $V \cong K^n$ können wir μ_f^v mit dem Gauß–Verfahren berechnen, ebenso μ_f, nun jedoch im größeren Matrixraum $\mathrm{End}_K(V) \cong K^{n\times n}$: Wir stellen $f \in \mathrm{End}_K(V)$ als Matrix $A \in K^{n\times n}$ dar und bestimmen die minimale Relation zwischen $A^0, A^1, A^2, \ldots$, siehe N313 und Beispiel N3I.

Beispiel: Genau dann ist v ein Eigenvektor von f, wenn $\dim_K Z(v) = 1$, denn es gilt $v \neq 0$ und $f(v) = \lambda v$ mit Eigenwert $\lambda \in K$, also $\mu_f^v = X - \lambda$.
☺ Das Minimalpolynom μ_f^v verallgemeinert die Eigengleichung! (P109)

Minimalität: Sei $P \in K[X]$ mit $P(f) = 0$. Polynomdivision $P = Q\mu_f + R$ ergibt $Q, R \in K[X]$ mit $\deg R < \deg \mu_f$. Auch $R = P - Q\mu_f$ annulliert f, denn $R(f) = 0$. Da $\deg \mu_f$ minimal ist, bleibt nur $R = 0$, also $P = Q\mu_f$.

♦ Satz N3F: Das Minimalpolynom teilt jedes annullierende Polynom.

(1) Lokal sei $I := \{P \in K[X] \mid P(f)(v) = 0\}$. Dann gilt $I = \mu_f^v K[X]$.
(2) Global sei $J := \{P \in K[X] \mid P(f) \quad = 0\}$. Dann gilt $J = \mu_f K[X]$.
(3) Dank (1) gilt $\mu_f^v \mid \mu_f$. Dank (2) folgt $\mu_f = \mathrm{kgV}(\mu_f^v\,;\, v \in V)$.

Das Minimalpolynom teilt jedes annullierende Polynom.

Beweis: Für ein (beidseitiges) Ideal $I \trianglelefteq R$ im Ring R fordern wir $0 \in I$ und $I + I \subseteq I$ und $R \cdot I \subseteq I \supseteq I \cdot R$. Da unser Polynomring $R = K[X]$ kommutativ ist, sind Ideale links- und rechts- und beidseitig dasselbe.

(1) Ist die Menge $I := \{P \in K[X] \mid P(f)(v) = 0\}$ ein Ideal im Ring $K[X]$? Definition einsetzen: Es gilt $0 \in I$. Aus $P(f)(v) = 0$ und $Q(f)(v) = 0$ folgt $(P+Q)(f)(v) = P(f)(v) + Q(f)(v) = 0$. Aus $P(f)(v) = 0$ und $Q \in K[X]$ folgt $P(f)(Q(f)(v)) = (PQ)(f)(v) = (QP)(f)(v) = Q(f)(P(f)(v)) = 0$.

Dank Satz L3F kennen wir in $K[X]$ alle Ideale: I wird erzeugt von μ_f^v. Ausführlich: Sei $P \in K[X]$ mit $P(f)(v) = 0$. Polynomdivision ergibt $P = Q\mu_f^v + R$ mit $Q, R \in K[X]$ und $\deg R < \deg \mu_f^v$. Auch $R = P - Q\mu_f^v$ erfüllt $R(f)(v) = 0$. Da $\deg(\mu_f^v)$ minimal ist, folgt $R = 0$, also $P = Q\mu_f^v$.

(2) Wörtlich dieselbe Rechnung gelingt für $J := \{P \in K[X] \mid P(f) = 0\}$. Kürzer: J ist der Kern von $\Phi_f : K[X] \to \mathrm{End}_K(V)$, dank L3G also ein Ideal.

(3) Dank Extensionalität gilt $P(f) = 0$ gdw $P(f)(v) = 0$ für alle $v \in V$, also $\forall v : \mu_f^v \mid P \overset{(1)}{\iff} \forall v : P(f)(v) = 0 \overset{\text{Ext}}{\iff} P(f) = 0 \overset{(2)}{\iff} \mu_f \mid P$. $\boxed{\text{QED}}$

Kernzerlegung: ein wirkmächtiger Satz

♦ Satz N3G: Kernzerlegung

Sei $f : V \to V$ linear über dem Körper K, kurz $f \in \mathrm{End}_K(V)$.
(0) Für $P = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) \in K[X]$ mit $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}^! \subseteq K$ gilt

$$\mathrm{Ker}\, P(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_n).$$

(1) In $K[X]$ sei $P = P_1 \cdots P_n$ mit $\mathrm{ggT}(P_i, P_j) = 1$ für alle $i \neq j$. Dann folgt

$$\mathrm{Ker}\, P(f) = \mathrm{Ker}\, P_1(f) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}\, P_n(f).$$

(2) Wenn P zudem f annulliert, $P(f) = 0$, so folgt $\mathrm{Ker}\, P(f) = V$.
Wenn P dabei einfach zerfällt wie in (0), so ist f diagonalisierbar.

Beispiele: Jeder Projektor $f = f^2$ ist diagonalisierbar, dank Zerlegung

$$P = X^2 - X = X(X-1) \quad \text{und} \quad V = \mathrm{E}(0) \oplus \mathrm{E}(1) \overset{\text{L3O}}{=} \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f.$$

Gilt $f^2 = \mathrm{id}_V$ und $\mathrm{char}\, K \neq 2$, so ist f diagonalisierbar, dank Zerlegung

$$P = X^2 - 1 = (X-1)(X+1) \quad \text{und} \quad V = \mathrm{E}(+1) \oplus \mathrm{E}(-1).$$

Minimalpolynom und Diagonalisierungsverfahren

♦ Satz N3H: Minimalpolynom als Diagonalisierungskriterium

Sei K ein Körper und V ein K–Vektorraum endlicher Dimension. Genau dann ist $f \in \mathrm{End}_K(V)$ diagonalisierbar, wenn $\mu_f \in K[X]$ einfach zerfällt.

Beweis: „⇒“: Wir haben $V = \mathrm{E}(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{E}(\lambda_n)$ mit $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}^! \subseteq K$. Das Produkt $P = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$ annulliert f. Dank N3F folgt $\mu_f \mid P$.
„⇐“: Das verdanken wir der Kernzerlegung N3G von $\mathrm{Ker}\, \mu_f(f) = V$. $\boxed{\text{QED}}$

MiPo-Verfahren N3H: (0) Berechne $\mu_f \in K[X]$, etwa dank Gauß.
(1) Zerfällt $\mu_f = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$ mit $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}^! \subseteq K$, so folgt

$$V = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_n).$$

(2) Wähle darin jeweils Basen und erhalte eine Eigenbasis von V zu f.

(3) Zerfällt das Minimalpolynom μ_f nicht oder hat mehrfache Nullstellen, so ist f nicht diagonalisierbar. Erste Beispiele wie N3I illustrieren dies. Auch das ist wertvolle Information, um aussichtslose Suche abzubrechen.

Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren

Satz P1A: lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Ausführlich: Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung über dem Körper K.
Seien $v_0, \dots, v_r \in V \smallsetminus \{0\}$ mit $f(v_i) \overset{(1)}{=} \lambda_i v_i$ und $\lambda_i \neq \lambda_j$ in K für $i \neq j$.
Aus $\alpha_0 v_0 + \dots + \alpha_r v_r \overset{(2)}{=} 0$ mit $\alpha_0, \dots, \alpha_r \in K$ folgt $\alpha_0 = \dots = \alpha_r = 0$.

Beweis: Die Kernzerlegung N3G zu $P = (X - \lambda_0) \cdots (X - \lambda_n)$ liefert die direkte Summe $\operatorname{Ker} P(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda_0) \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda_n)$. QED

Induktion über $r \in \mathbb{N}$: Für $r = 0$ gilt die Aussage dank $v_0 \neq 0$. (L1F)
Sei nun $r \geq 1$ und die Aussage für $r - 1$ bereits bewiesen.
Auf Gleichung (2) wenden wir $f - \lambda_0$ an und nutzen (1):

$$\alpha_0(\lambda_0 - \lambda_0)v_0 + \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_0)v_1 + \dots + \alpha_r(\lambda_r - \lambda_0)v_r = 0$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_0) = 0$ für $i = 1, \dots, r$.
Dank der Voraussetzung $\lambda_i \neq \lambda_0$ folgt $\alpha_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, r$.
Von Gleichung (2) bleibt schließlich nur $\alpha_0 v_0 = 0$, also $\alpha_0 = 0$. QED

Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren

Beweis mit dem Vandermonde–Trick: Gegeben sind die Vektoren $u_i = \alpha_i v_i \in \operatorname{Eig}(f, \lambda_i)$ mit $u_0 + u_1 + \dots + u_r = 0$. Wir wenden f^k an:

$$\lambda_0^k u_0 + \lambda_1^k u_1 + \dots + \lambda_r^k u_r = 0.$$

Für $k = 0, 1, \dots, r$ erhalten wir so das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0^0 & \lambda_1^0 & \dots & \lambda_r^0 \\ \lambda_0^1 & \lambda_1^1 & \dots & \lambda_r^1 \\ \vdots & & \vdots & \\ \lambda_0^r & \lambda_1^r & \dots & \lambda_r^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Vandermonde–Matrix ist invertierbar dank Satz D5B:

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0^0 & \lambda_1^0 & \dots & \lambda_r^0 \\ \lambda_0^1 & \lambda_1^1 & \dots & \lambda_r^1 \\ \vdots & & \vdots & \\ \lambda_0^r & \lambda_1^r & \dots & \lambda_r^r \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daraus folgt $u_0 = u_1 = \dots = u_r = 0$, wie behauptet. QED

Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren

Zur Illustration nenne ich zwei einfache doch grundlegende Beispiele, die wir später für Differenzen- und Differentialgleichungen nutzen:

Beispiel P1B: Eigenfolgen des Verschiebeoperators, siehe M1K

Über jedem Körper K betrachten wir den Folgenraum $K^{\mathbb{N}}$ mit

$$s : K^{\mathbb{N}} \to K^{\mathbb{N}} : (f_0, f_1, f_2, \dots) \mapsto (f_1, f_2, f_3, \dots).$$

Zu jedem $\lambda \in K$ ist $e_\lambda = (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Eigenfolge, denn $s(e_\lambda) = \lambda e_\lambda$.
Dank Satz P1A ist die Familie $(e_\lambda)_{\lambda \in K}$ in $K^{\mathbb{N}}$ somit linear unabhängig.

Beispiel P1C: Eigenfunktionen des Ableitungsoperators, siehe M1J

Zu jeder Konstanten $\lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben wir die Exponentialfunktion

$$e_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{K} : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t} \quad \text{mit} \quad \partial e_\lambda = \lambda e_\lambda.$$

Sie ist Eigenfunktion des Ableitungsoperators $\partial \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}))$.
Dank Satz P1A ist die Familie $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{K}}$ in $\mathscr{C}^\infty$ somit linear unabhängig.

Eigenraumzerlegung und Dimensionsgleichung

? Wie können wir effizient feststellen, ob $f : V \to V$ diagonalisierbar ist?

Satz P1D: Eigenraumzerlegung und Dimensionsgleichung

Vorgelegt sei eine lineare Abbildung $f : V \to V$ über dem Körper K.
(1) Die Summe $\mathrm{E} = \sum_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f, \lambda)$ aller Eigenräume ist direkt. (Satz P1A)
(2) Genau dann ist $f : V \to V$ diagonalisierbar, wenn $\mathrm{E} = V$ gilt. (Satz N3C)
(3) Im Falle $\dim_K(V) < \infty$ ist dies äquivalent zur Dimensionsgleichung

$$\boxed{\dim_K(V) = \textstyle\sum_{\lambda \in \sigma(f)} \dim_K \operatorname{Eig}(f, \lambda).}$$

Aufgabe: Rechnen Sie dies sorgsam nach. Es ist eine gute Wiederholung!
(1) Was ist für eine direkte Summe zu zeigen, hier $\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f, \lambda)$?
(2) Wann gibt es genügend Eigenvektoren, um eine Eigenbasis zu bilden?
(3) Wie berechnen Sie die Dimension einer direkten Summe? (Satz M2T)
Wie schließen Sie von $\mathrm{E} \leq V$ damit auf $\mathrm{E} = V$, wie ersehnt? (Satz M3O)

☺ Eigenräume ausrechnen und Dimensionen zusammenzählen!
Wir führen dieses praktische Kriterium später in Satz P2N fort.

Geometrisches Beispiel: Vorschau zur Diagonalisierung

Beispiel P1E: eine Spiegelung in der Ebene

Zu $v = \left[\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2$ untersuchen wir die $\mathbb{R}$–lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto x - v \cdot v^\top \cdot x.$$

Aufgabe: (1) Finden Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit nicht-trivialem Eigenraum $\mathrm{E}(\lambda)$. (2) Bestimmen Sie so alle Eigenräume von f. (3) Diagonalisieren Sie f.

Lösung: (1) Es gilt dank $f^2 = \mathrm{id}$ mit $\mu_f = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.
Alternative: Zur Bestimmung von λ nutzen wir die **Determinante**:

$$\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \{0\} \quad \overset{\text{O3D}}{\iff} \quad \det(f - \lambda\,\mathrm{id}) = 0$$

Zur Berechnung wählen wir eine Basis, etwa $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$, und finden

$$A = \mathrm{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Dies ist das **charakteristische Polynom** von A und f, siehe P2C und P2F.

Geometrisches Beispiel: Vorschau zur Diagonalisierung

(2) Wir bestimmen die Eigenräume $\mathrm{E}(+1)$ und $\mathrm{E}(-1)$ wie folgt:

$$\mathrm{E}(+1) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \mathbb{R}\, b_1 \quad \text{mit} \quad b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{E}(-1) = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} +1 & 1 \\ 1 & +1 \end{bmatrix} = \mathbb{R}\, b_2 \quad \text{mit} \quad b_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Für alle weiteren $\lambda \in \mathbb{R} \smallsetminus \{\pm 1\}$ gilt $\mathrm{E}(\lambda) = \{0\}$ dank Satz O3D, denn hier ist $\det(A - \lambda I) \neq 0$, also $A - \lambda I$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar.

(3) Wir erhalten $\mathbb{R}^2 = \mathrm{E}(+1) \oplus \mathrm{E}(-1)$ und die Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ von $\mathbb{R}^2$. Nach Konstruktion gilt $f(b_1) = +1 \cdot b_1$ und $f(b_2) = -1 \cdot b_2$, und somit

$$\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Auf Seite N205 haben wir bereits die Basiswechselmatrizen bestimmt:

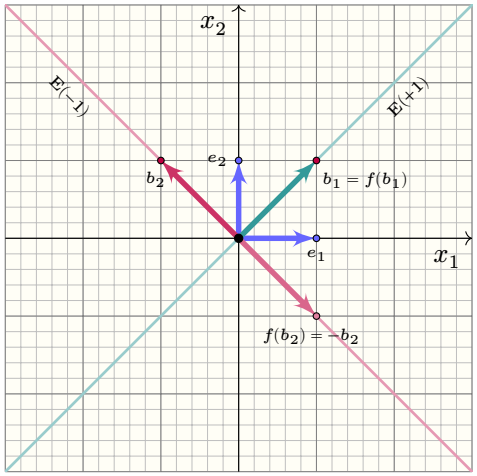
$$\mathrm{T}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{T}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Geometrisches Beispiel: Vorschau zur Diagonalisierung

In ihrer Eigenbasis $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ können wir die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ einfach darstellen und besser verstehen… dank Eigenraumzerlegung!

$$\mathrm{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist die Spiegelung an der Hauptdiagonalen.

Geometrisches Beispiel: Vorschau zur Diagonalisierung

☺ Eine solcherart angepasste Basis $\mathcal{B}$ zu f ist besonders wertvoll: Bezüglich $\mathcal{B}$ wird f durch eine Diagonalmatrix dargestellt, wie erhofft. Wir nennen dies eine **diagonalisierende Basis** zu f, wie oben in Definition N3A vereinbart, oder auch kurz eine **Eigenbasis** zu f.

☺ Auf jedem Eigenraum $\mathrm{E}(\lambda)$ ist die Abbildung f besonders einfach: Sie skaliert / streckt jeden Eigenvektor $v \in \mathrm{E}(\lambda)$ um den Eigenwert λ. Das ist die oben beworbene geometrisch-algebraische Bedeutung. Wir hoffen auf ausreichend viele Eigenvektoren für eine Eigenbasis.

☺ Glücklicherweise erhalten wir hier $\mathbb{R}^2 = \mathrm{E}(+1) \oplus \mathrm{E}(-1)$, wie erhofft. Die Eigenräume unserer Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind etwas Natürliches. Die Wahl der jeweiligen Basen $b_1 \in \mathrm{E}(+1)$ und $b_2 \in \mathrm{E}(-1)$ ist hingegen etwas willkürlich; wir können auch Vielfache dieser Vektoren wählen.

☺ Die so gewonnene Eigenbasis $\mathcal{B}$ zeigt uns, was f eigentlich tut: Hier offenbart die Abbildung f ihr wahres Wesen, ihren Charakter, ihr Wirken, hier erkennen wir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sofort als eine Spiegelung. Hier ist $\mathrm{E}(+1)$ die Spiegelachse von f, also die Fixpunktmenge.

Wie finden wir alle Eigenwerte? Die Determinante hilft!

Wie finden wir alle Eigenwerte $\lambda \in K$ einer Matrix $A \in K^{n\times n}$?

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Eig}(A,\lambda) \neq \{0\} \\
\overset{\text{Def}}{\underset{\text{N3B}}{\Longleftrightarrow}} \quad & \exists v \in K^n,\ v \neq 0 : \quad Av = \lambda v \\
\overset{\text{Lin}}{\underset{\text{D11}}{\Longleftrightarrow}} \quad & \exists v \in K^n,\ v \neq 0 : \quad (A-\lambda I)v = 0 \\
\overset{\text{Def}}{\underset{\text{L2B}}{\Longleftrightarrow}} \quad & \operatorname{Ker}(A-\lambda I) \neq \{0\} \\
\overset{\text{Det}}{\underset{\text{O2V}}{\Longleftrightarrow}} \quad & \det(A-\lambda I) = 0
\end{aligned}$$

Satz P2A: Eigenwerte und Determinante einer Matrix

Genau dann ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A, wenn $\det(A-\lambda I) = 0$ gilt.

Diese einfache Rechnung zeigt, wie die Determinante uns helfen kann, Eigenwerte zu finden. Dies entwickeln wir nun zum charakteristischen Polynom. Es ist eine übliche Methode, aber bei weitem nicht die einzige. Das Minimalpolynom ist eine Alternative, siehe MiPo-Verfahren N3H.

Wie finden wir alle Eigenwerte? Die Determinante hilft!

Die Eigenwerte unserer Matrix $A \in K^{n\times n}$ sind demnach genau die Nullstellen der **charakteristischen Funktion** $K \to K : \lambda \mapsto \det(A-\lambda I)$. Sie ordnet jedem Skalar $\lambda \in K$ die Determinante $\det(A-\lambda I) \in K$ zu und zeigt uns an, ob der Kern von $A-\lambda I$ trivial ist oder nicht (Satz O2V).

Diese Funktion wollen wir nun genauer untersuchen! Insbesondere werden wir zeigen, dass dies eine Polynomfunktion ist, induziert vom **charakteristischen Polynom** $\chi_A \in K[X]^1_n$ unserer Matrix A. So können wir all unsere Werkzeuge zu Polynomen hier nutzbringend anwenden!

⚠ In Definition N3B haben wir zunächst erklärt, was Eigenwerte sind. Hier nun lernen Sie die Rechenmethode mit der Determinante kennen. Um Matrizen und Determinanten überhaupt einsetzen zu können, werden wir uns dabei auf endliche Dimension konzentrieren.

⚠ Unterscheiden Sie Definition und Methoden, also Ziel und Wege! Eigenwerte und Eigenräume lassen sich auch noch in vielen Situationen erklären und nutzen, in denen die Determinante nicht anwendbar ist, insbesondere auch für unendlich-dimensionale Vektorräume.

Wie finden wir alle Eigenwerte? Die Determinante hilft!

Wie finden wir alle Eigenwerte eines Endomorphismus $f : V \to V$?

Im Falle $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$ wählen wir eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von V und stellen f dar durch die zugehörige Matrix $A = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \in K^{n\times n}$:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[d, mapsto] & \in & K^n \arrow[r, "A : x \mapsto Ax"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"', "\cong"] & K^n \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"', "\cong"] \\
v & \in & V \arrow[r, "f : v \mapsto f(v)"] & V
\end{tikzcd}$$

Satz P2B: Eigenwerte und Determinante eines Endomorphismus

Wie oben sei $v = \Phi_{\mathcal{B}}(x)$. Genau dann gilt $f(v) = \lambda v$, wenn $Ax = \lambda x$. Genau dann ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f, wenn $\det(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) = 0$ gilt.

⚠ Die entscheidende Voraussetzung ist hier $\dim_K(V) = n < \infty$. In diesem Falle können wir Matrizen und die Determinante nutzen!

Auf unendlichen Vektorräumen ist die Sachlage schwieriger… und weitaus interessanter (siehe Funktionalanalysis).

Wie finden wir alle Eigenwerte? Die Determinante hilft!

Damit wird das Problem berechenbar dank der Determinante und der charakteristischen Funktion von f bzw. A:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Eig}(f,\lambda) \neq \{0\} \\
\Longleftrightarrow \quad & \operatorname{Eig}(A,\lambda) \neq \{0\} \\
\Longleftrightarrow \quad & \det(A-\lambda I) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \det(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) = 0
\end{aligned}$$

Zur Determinante eines Endomorphismus $f : V \to V$ siehe O3D: Dies gelingt in einer Basis durch Darstellung als Matrix $A \in K^{n\times n}$.

Meist interessiert uns eigentlich die lineare Abbildung $f : V \to V$, doch mit der Matrix $A \in K^{n\times n}$ können wir besonders gut rechnen.

Notation: Hier ist $I = E = 1_{n\times n} = \operatorname{diag}(1, \dots, 1)$ die Einheitsmatrix. Da E schon für Eigenräume genutzt wird, schreibe ich hier lieber I.

Für $A - \lambda I$ schreiben wir kurz $A - \lambda$, und für $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ ebenso $f - \lambda$. Diese Kurzschreibweise ist etwas nachlässig, aber manchmal bequem.

Das charakteristische Polynom

Definition P2c: das charakteristische Polynom einer Matrix

(0) Zur Matrix $A \in K^{n\times n}$ definieren wir das **charakteristische Polynom**

$$\tilde{\chi}_A(X) := \det(A - XI) \in K[X]_n.$$

(1) Alternativ nutzen wir das **normierte charakteristische Polynom**

$$\chi_A(X) := \det(XI - A) = (-1)^n\, \tilde{\chi}_A(X) \in K[X]^1_n.$$

⚠ Beide Konventionen sind in der Literatur üblich, aber uneinheitlich. Das normierte Polynom χ_A hat immer Leitkoeffizient 1, das ist schöner.

⚠ Die unnormierte Variante ist in Rechnungen bequemer, da die Matrix A bereits vorliegt, und nur auf der Diagonalen jeweils X subtrahiert wird: Das ist per Hand leichter zu schreiben und vermeidet Vorzeichenfehler.

☺ Beide Varianten unterscheiden sich nur in ungerader Dimension. Für die Nullstellen (also Eigenwerte) spielt das Vorzeichen keine Rolle. Auch für den Eigenraum gilt $\operatorname{Eig}(A,\lambda) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I) = \operatorname{Ker}(\lambda I - A)$.

Das charakteristische Polynom

Zur Illustration betrachten wir ein einfaches Zahlenbeispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

☺ Der Übergang von A zu $A - XI$ ist etwas leichter auszuschreiben:

$$A - XI = \begin{bmatrix} 1-X & 4 & 5 \\ 0 & 0-X & 1 \\ 0 & 2 & 3-X \end{bmatrix}$$

⚠ Der Übergang von A zu $XI - A$ erfordert etwas mehr Änderungen:

$$XI - A = \begin{bmatrix} X-1 & -4 & -5 \\ -0 & X-0 & -1 \\ -0 & -2 & X-3 \end{bmatrix}$$

Für einen Computer ist der Unterschied unerheblich. Menschen jedoch machen (Schreib-)Fehler, daher biete ich Ihnen hier beide Varianten an.

Zahlenbeispiel zum charakteristischen Polynom

Aufgabe: (1) Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(2) Finden Sie damit alle Eigenwerte, also das Spektrum $\sigma(A;\mathbb{R})$.
(3) Ist A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar? (4) Falls ja, diagonalisieren Sie A.

Lösung: (1) Wir folgen der Definition und berechnen die Determinante:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_A(X) \overset{\text{Def}}{=} \begin{vmatrix} 1-X & 4 & 5 \\ 0 & -X & 1 \\ 0 & 2 & 3-X \end{vmatrix} &= (1-X)[-X(3-X) - 2\cdot 1] \\ &= (1-X)(X^2 - 3X - 2) \\ &= -X^3 + 4X^2 - X - 2 \end{aligned}$$

(2) Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von $\chi_A = -\tilde{\chi}_A$:

$$\sigma(A;\mathbb{R}) = \{\ \lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = \tfrac{1}{2}(3-\sqrt{17}),\ \ \lambda_3 = \tfrac{1}{2}(3+\sqrt{17})\ \}$$

Zahlenbeispiel zum charakteristischen Polynom

Summe von Monomen vs **Produkt von Linearfaktoren**

$$X^3 - 4X^2 + X + 2 \quad \longleftarrow \quad (X-1)(X^2-3X-2) \quad \longrightarrow \quad (X-1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$$

Das Ausmultiplizieren (hier nach links) ist eine leichte Routineübung. Das Faktorisieren (nach rechts) gelingt routiniert in kleinen Graden, ist im Allgemeinen jedoch ein schwieriges Problem.

In Frage (1) wollen wir das charakteristische Polynom bestimmen. Polynome können wir jedoch verschieden darstellen; implizit gemeint ist meist die Monomform, dazu multiplizieren wir alles geduldig aus.

Für die Frage (2) hingegen ist die Monomform nicht die beste Wahl! Wir suchen hier Nullstellen unseres Polynoms, also Linearfaktoren. Dazu geht das Ausmultiplizieren genau in die falsche Richtung; es ist schlauer, die bereits vorliegende partielle Faktorisierung zu nutzen.

⚠ In Klausuren ist das ein tragischer Fehler! Unnötige Umwege kosten Zeit und erhöhen die Wahrscheinlichkeit von Rechenfehlern. Sie sollten daher genau wissen, was Sie suchen und wie Sie es am besten erreichen.

Grad und Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

Satz P2D: Grad und Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

(0) Zu $A \in K^{n\times n}$ ist $\tilde{\chi}_A(X) = \det(A - XI)$ ein Polynom von Grad n:

$$\tilde{\chi}_A(X) = a_0 - a_1 X \pm \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1} X^{n-1} + (-1)^n X^n$$

(1) Normiert zu $\chi_A(X) = \det(XI - A)$ erhalten wir demnach:

$$\chi_A(X) = X^n - a_{n-1} X^{n-1} \pm \cdots + (-1)^{n-1} a_1 + (-1)^n a_0$$

(2) Die extremen Koeffizienten kennen wir: $a_0 = \tilde{\chi}_A(0) = \det(A)$ ist die **Determinante** und $a_{n-1} = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \operatorname{tr}(A)$ ist die **Spur** der Matrix A.

Beweis: Jeder Eintrag der Matrix $C = XI - A \in K[X]^{n\times n}$ hat Grad ≤ 1, Dank Leibniz O2G hat $\det C = \sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sign}(\tau) \prod_{j=1}^n c_{\tau(j),j}$ Grad $\le n$ (C1I).

Der Summand $(X - a_{11})(X - a_{22}) \cdots (X - a_{nn}) = X^n - X^{n-1} \operatorname{tr} A + \ldots$ für $\tau = \mathrm{id}$ hat Grad n. Alle weiteren Summanden haben Grad $\le n-2$, denn jede Permutation $\tau \ne \mathrm{id}$ hat höchstens $n-2$ Fixpunkte. QED

Grad und Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

☺ Die Koeffizienten $a_0 = \det A$ und $a_{n-1} = \operatorname{tr} A$ haben eine besondere und erfreulich klare Bedeutung, die weiteren Koeffizienten leider nicht.

Die **charakteristische Matrix** $C = XI - A \in K[X]^{n\times n}$ hat Koeffizienten im Polynomring $K[X]$. Wir rechnen nicht nur über dem Grundkörper K!

☺ Dazu ist bereits alles vorbereitet, denn wir haben die Determinante wohlweislich gleich allgemein über kommutativen Ringen erklärt.

Manche Autor:innen arbeiten vorgeblich nur über einem Körper K, insbesondere für Matrizen und Determinanten, doch spätestens beim charakteristischen Polynom genügt dies genau genommen nicht mehr.

☺ Man kann sich mit verschiedenen Tricks aus dieser misslichen Lage befreien, zum Beispiel können wir den Polynomring $K[X]$ einbetten in seinen Bruchkörper $K(X)$ der gebrochen-rationalen Funktionen (siehe Seite C170 und Satz K3I) und über diesem größeren Körper arbeiten.

Der natürliche Weg scheint mir jedoch die allgemeine Betrachtung über kommutativen Ringen. Genau dafür haben wir alles sorgsam vorbereitet.

Konjugation und Ähnlichkeit von Matrizen

? Wie ändert sich das charakteristische Polynom bei Basiswechsel?

Definition P2E: Konjugation und Ähnlichkeit von Matrizen

Sei K ein Ring und $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$. Die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$ operiert auf dem Matrixring $K^{n\times n}$ durch Konjugation gemäß

$$K^{n\times n} \curvearrowleft \mathrm{GL}_n(K) : (A, T) \mapsto B = T^{-1}AT.$$

Wir nennen $A, B \in K^{n\times n}$ **ähnlich**, oder auch $\mathrm{GL}_n(K)$–konjugiert, geschrieben $A \sim B$, falls $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert mit $B = T^{-1}AT$.

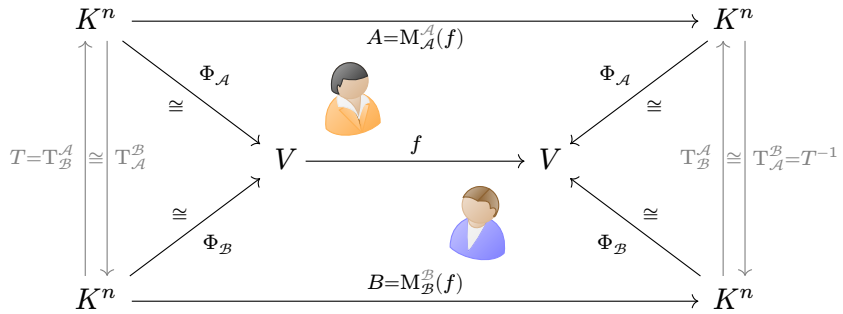
Der Übergang von A zu B heißt auch **Ähnlichkeitstransformation** oder **Konjugation** vermöge T. Dies entspricht einem Basiswechsel.

Übung: Dies ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge $K^{n\times n}$. Warum?

☺ Diese Äquivalenzrelation wollen wir nutzen, um Matrizen soweit wie möglich zu vereinfachen: Wir wollen die vorgegebene Matrix A durch eine ähnliche, aber schönere Matrix B ersetzen. Im aktuellen Kontext geht es uns zunächst darum, dass B diagonal wird, falls möglich.

Konjugation und Ähnlichkeit von Matrizen

☺ Sie kennen Ähnlichkeitstransformationen bereits von Basiswechseln:



Aus dem Diagramm lesen wir die Transformationsformel ab: $B = T^{-1}AT$.

Satz P2F: Ähnlichkeit und Basiswechsel

Sei K ein Körper. (1) Für $A, B \in K^{n\times n}$ sind gleichbedeutend:

(1a) Die Matrizen A und B sind ähnlich, also $\mathrm{GL}_n(K)$–konjugiert $A \sim B$.

(1b) Beide stellen denselben Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$ dar bezüglich geeigneter Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V über K.

Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus

Satz P2F: Invarianz und Wohldefiniertheit des char. Polynoms

(2a) Sind A und B in $K^{n\times n}$ ähnlich, so folgt $\chi_A = \chi_B$ in $K[X]$.

(2b) Zu $f \in \mathrm{End}_K(V)$ wie in (1b) ist $\chi_f := \chi_A = \chi_B$ wohldefiniert.

Beweis: (2a) Wir haben $B = T^{-1}AT$ mit $T \in \mathrm{GL}_n(K)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\chi_B(X) &\overset{\text{Def}}{=} \det(XI - B) \\
&\overset{\text{Vor}}{=} \det(XI - T^{-1}AT) \\
&\overset{\text{Com}}{=} \det\big[T^{-1}(XI - A)T\big] \\
&\overset{\text{O2o}}{=} \det(T)^{-1} \cdot \det(XI - A) \cdot \det(T) \\
&\overset{\text{Def}}{=} \chi_A(X)
\end{aligned}$$

(2b) Für $A = \mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$ und $B = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ wie in (1b) gilt $B = T^{-1}AT$.
Somit ist das char. Polynom $\chi_f := \chi_A = \chi_B$ wohldefiniert. QED

☺ Die implizite Definition (2b) formulieren wir nun explizit aus.

Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus

Definition P2G: das char. Polynom eines Endomorphismus

Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus über K und $\dim_K(V) = n < \infty$.
Wir definieren sein **charakteristisches Polynom** $\chi_f \in K[X]$ wie folgt.

Wir wählen eine Basis $\mathcal{A}$ von V und stellen f dar durch die zugehörige Matrix $A = \mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f) \in K^{n\times n}$. Damit definieren wir das char. Polynom:

$$\boxed{\chi_f := \det(XI - A) \in K[X]^1_n}$$

Dazu ist die Wahl irgendeiner Basis $\mathcal{A}$ notwendig, aber willkürlich.
Dank Satz P2F ist das Ergebnis χ_f wohldefiniert, unabhängig von $\mathcal{A}$.

☺ Sie sehen hier sehr schön: Manchmal können wir eine Definition erst nach einem Satz aussprechen, der den Weg zum Begriff bereitet. Das geschieht immer dann, wenn die Wohldefiniertheit zu klären ist, bzw. Existenz und Eindeutigkeit des hier zu definierenden Gegenstands. (Streng besehen müsste ich auch Definition P2C und Satz P2D umdrehen.)

Das charakteristische Polynom ist eine hilfreiche Invariante...

Aufgabe: Sind die folgenden Matrizen $A, B, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ähnlich?
Können wir sie durch Basiswechsel ineinander transformieren?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{vs} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{vs} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{tr}(A) = 15$	$\mathrm{tr}(B) = 15$	$\mathrm{tr}(C) = 14$
$\det(A) = 0$	$\det(B) = 0$	$\det(C) = 9$
$X^3 - 15X^2 - 18X$	$X^3 - 15X^2 - X$	$X^3 - 14X^2 - 30X - 9$

Lösung: Nein, denn ihre charakteristischen Polynome sind verschieden.

Effiziente Abkürzung: Für $A, B \nsim C$ genügen hier schon die Spuren, denn $\mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, B = 15$ ist verschieden von $\mathrm{tr}\, C = 14$. Das ist besonders bequem.

Ebenso genügen die Determinanten: Leicht sehen wir $\det A = \det B = 0$, da Rang 2, die Determinante $\det C = 9$ ist leider mühsamer als die Spur.

Nicht-Ähnlichkeit $A \nsim B$ zeigen erst die charakteristischen Polynome!

... aber noch keine vollständige Invariante zur Ähnlichkeit.

☺ Je zwei ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom, $\chi : K^{n\times n} \to K[X]^1_n : A \mapsto \chi_A$ ist eine Invariante: Sind die Polynome $\chi_A \neq \chi_B$ verschieden, so sind die Matrizen $A \nsim B$ nicht ähnlich.

⚠ Sie ist jedoch noch keine vollständige Invariante: Es gibt Matrizen, die dasselbe charakteristische Polynom haben, aber nicht ähnlich sind. Allein aus $\chi_A = \chi_B$ können wir also im Allgemeinen noch nicht schließen, dass A und B ähnlich sind. Hierzu sind weitere Untersuchungen notwendig.

Aufgabe: Sind die folgenden Matrizen ähnlich?

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{vs} \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Lösung: (1) Die char. Polynome sind gleich: $\chi_A = (X - \lambda)^2 = \chi_B$.
(2) Dennoch sind unsere beiden Matrizen A und B nicht ähnlich:
Die Matrix A ist diagonal, doch B ist nicht diagonalisierbar (P2O).

☺ Für $\lambda = 0$ gilt $\mathrm{rang}\, A = 0$ und $\mathrm{rang}\, B = 1$, also sind A und B nicht ähnlich, nicht einmal äquivalent: $B \neq S^{-1}AT$ für alle $S, T \in \mathrm{GL}_2\, K$.

Das ChaPo-Verfahren zur Diagonalisierung

Verfahren P2H: ChaPo-Verfahren zur Diagonalisierung

Sei K ein Körper, darüber $f : V \to V$ linear und $\dim_K(V) = n < \infty$.

(1) Wähle eine Basis $\mathcal{A}$ von V und bestimme $A = \mathrm{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) \in K^{n\times n}$.

(2) Berechne das charakteristische Polynom $\chi_f = \det(XI - A) \in K[X]$.

(3) Bestimme alle Nullstellen, also $\sigma(f; K) = \{\lambda \in K \mid \chi_f(\lambda) = 0\}$.

(4) Zu $\lambda \in \sigma(f)$ bestimme $\operatorname{Eig}(f, \lambda) = \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) \cong \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$.

Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn $V = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(f)} \operatorname{Eig}(f, \lambda)$ gilt, also die Dimensionsgleichung $n = \sum_{\lambda\in\sigma(f)} \dim_K \operatorname{Eig}(f, \lambda)$ erfüllt ist.

(5) In diesem Fall wähle eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ aus Eigenvektoren und erhalte so die ersehnte Diagonalisierung $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

☺ Schritte (1,2,4,5) sind geübte Routineaufgaben der Linearen Algebra. Hierzu kennen Sie effiziente Algorithmen (mit Aufwand $\le \mathrm{const} \cdot n^4$).

☹ Allein die Suche nach Nullstellen (3) ist im Allgemeinen schwierig. Dieses Problem gehört zur (nicht-linearen!) Algebra bzw. Numerik.

Das ChaPo-Verfahren zur Diagonalisierung

Dieses Verfahren *können* Sie immer anwenden, insbesondere wenn keine bessere Information vorliegt. Diagonalisierung *dürfen* Sie so angehen, Sie *müssen* aber nicht: Manchmal gibt es geschickte Abkürzungen oder raffinierte Tricks (P313). Diese sollten Sie erkennen, um sich unnötige Arbeit und längliche Umwege zu ersparen. Übung hilft! Denken hilft!

Beispiel: Ist der Körper K klein doch die Matrix $A \in K^{n\times n}$ recht groß, etwa $\sharp K < n$, dann kann man Schritte (2) und (3) überspringen, und in (4) alle Kandidaten $\lambda \in K$ einsetzen und direkt $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ berechnen.

Bemerkung: Extrem nützlich ist auch das Minimalpolynom $\mu_f \in K[X]^1_m$, siehe N3 und P3. Sein Grad $m \le n$ kann dabei deutlich geringer ausfallen. Oft hilft das, manchmal sogar für $\dim V = \infty$, siehe MiPo-Verfahren N3H.

Kritisch ist und bleibt einzig der Punkt 3: die Bestimmung der Nullstellen. Wenn dies gelingt, sei es durch günstige Umstände der gegebenen Daten oder durch zusätzliche Überlegungen zur vorliegenden Struktur (P2Q), so ist das Diagonalisierungsproblem insgesamt gelöst. Routine hilft!

Schnelle Berechnung des charakteristischen Polynoms

Wie schnell können wir das charakteristische Polynom berechnen?

Satz P2I: Berechnung des charakteristischen Polynoms

Sei K ein Körper mit ausreichend großer Elementezahl $\sharp K \ge n$.

Zu jeder Matrix $A \in K^{n\times n}$ können wir das charakteristische Polynom $\chi_A \in K[X]^1_n$ berechnen mit $\le n^4$ arithmetischen Operationen in K.

Dies gelingt trickreich und genial-einfach durch Lagrange–Interpolation:

Algo P2I: Berechnung des charakteristischen Polynoms

Eingabe: eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ über K, wobei $\sharp K \ge n$
Ausgabe: das charakteristische Polynom $\chi_A \in K[X]^1_n$

1: Wähle n verschiedene Stützstellen $x_1, \dots, x_n \in K$.
2: Berechne die Werte $y_k = \det(x_k I - A)$ dank Gauß O2Y.
3: Rekonstruiere $\chi_A \in K[X]^1_n$ dank Lagrange–Interpolation D5B.

Übung: Führen Sie die Details aus und beweisen Sie den Satz.

Schnelle Berechnung des charakteristischen Polynoms

In typischen Übungen und Klausuren berechnen Sie charakteristische Polynome meist nur für kleine Matrizen, etwa $n = 2, 3, 4$. Es gelingt auch noch für große, stark strukturierte Matrizen, etwa Begleitmatrizen P2R.

☺ Zur Behandlung von großen, unstrukturierten Matrizen nutzen Sie sinnvollerweise ein Computer-Algebra-System (CAS). Damit stellt sich die dringende Frage, auch für Sie als Nutzer:in, wie der Computer damit effizient umgehen soll, und welcher Rechenaufwand zu erwarten ist.

⚠ Die Leibniz–Formel O2G und Laplace–Entwicklung O2J erfordern schlimmstenfalls exponentiellen Aufwand, nämlich $n \cdot n!$ Operationen. Das überfordert selbst Supercomputer für moderate n, siehe Seite O267.

☺ Die Berechnung mit n^4 Operationen ist zwar immer noch aufwändig für große n, aber effizient genug für viele Anwendungen mittlerer Größe, ähnlich wie der Gauß–Algorithmus: Für typische Laufzeiten siehe D231.

Der trickreiche Algorithmus von Faddeev–LeVerrier perfektioniert dies, siehe hierzu `en.wikipedia.org/wiki/Faddeev-LeVerrier_algorithm`.

Was bedeutet „Diagonalisieren Sie $A \in K^{n\times n}$“?

☺ Diese Standardaufgabe ist typisch für Übungen und Klausuren. Dabei stellt sich jeweils die Frage, was genau gefordert ist: Welche Daten gehören zu einer vollständigen Antwort?

⚠ Je nach Aufgabe bzw. Anwendung sind verschiedene Stufen der Ausführung denkbar. Beginnen wir mit der maximalen Ausbaustufe:

Gegeben ist eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ über dem Körper K.

Gesucht ist im Sinne einer vollständigen Analyse:

1. das Spektrum $\sigma(A; K) \subseteq K$, also die Menge aller Eigenwerte,
2. die Dimension jedes Eigenraums $\operatorname{Eig}(A;\lambda) \leq K^n$ für P1D/P2N,
3. eine Basis $\mathcal{B}_\lambda = (v_i)_{i\in I_\lambda}$ für jeden Eigenraum $\operatorname{Eig}(A;\lambda)$,
4. die daraus gebildete Basiswechselmatrix $T = (v_1, \dots, v_n) \in \mathrm{GL}_n K$,
5. die hierzu inverse Matrix T^{-1}, mit der Eigenschaft / Probe $T^{-1}T = I$,
6. die so gewonnene Diagonalmatrix $D = T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, mit der Eigenschaft / Probe $D = T^{-1}AT$ bzw. $AT = TD$.

Verschiedene Härtegrade des Problems

Neben der vollständigen Analyse gibt es mehrere kleinere **Varianten**:

Ist nur die **Diagonalisierbarkeit** von A gefragt, so genügen (1) und (2). Daran lässt sich die Diagonalisierbarkeit entscheiden und (6) D ablesen. Die noch fehlenden Daten (3,4,5) lassen sich anschließend ergänzen…

Ist ein **diagonalisierender Basiswechsel** gefragt, so genügen (4) T und (5) T^{-1} und (6) D. Damit lassen sich die Eigenschaften $T^{-1}T = I$ und $T^{-1}AT = D$ prüfen und die Daten (1,2,3) ablesen.

Ist nur eine **Eigenbasis** zu A gefragt, so genügen (4) T und (6) D. Damit lässt sich $AT = TD$ prüfen und die Daten (1,2,3) ablesen.

In Klausuren geben wir die Fragen kleinschrittig vor und sagen genau, was jeweils gefragt ist. Erfahrungsgemäß bereitet das keine Probleme.

Bei einer mündlichen Präsentation, etwa in Ihrer Gruppenübung, haben Sie mehr Freiheiten, Sie können nachfragen und ergänzen. In solchen Fällen ist eine offene Fragestellung meist sinnvoller.

Ergebnis und Zertifikat

Die algorithmische Sichtweise ist oft hilfreich. Hier geht es speziell um die Frage der Spezifikation: Was ist die Eingabe? Was ist die Ausgabe? Welche Eigenschaften müssen garantiert bzw. überprüft werden?

Spezifikation: Eigenbasis einer Matrix

Eingabe: eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ über dem Körper K
Ausgabe: $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $AT = TD$
oder notfalls die Antwort „A ist nicht diagonalisierbar“

Allgemein gilt: Je mehr Daten die Spezifikation als Ausgabe verlangt, desto aufwändiger die Berechnung, doch umso leichter ist die Prüfung.

Umgekehrt: Wird von der Eingabe mehr verlangt, so ist dies schwerer für den Auftraggeber, doch umso leichter für den Auftragnehmer.

Spezifikation: Eigenbasis einer diagonalisierbaren Matrix

Eingabe: eine diagonalisierbare Matrix $A \in K^{n\times n}$ über K
Ausgabe: $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $AT = TD$

Was bedeutet „Diagonalisieren Sie $f \in \operatorname{End}_K(V)$“?

Welche Daten gehören zu einer vollständigen Antwort?

⚠ Je nach Aufgabe bzw. Anwendung sind verschiedene Stufen der Ausführung denkbar. Beginnen wir mit der maximalen Ausbaustufe:

Gegeben ist $f \in \operatorname{End}_K(V)$ über K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$.

Gesucht ist im Sinne einer vollständigen Analyse:

1. die Menge $\sigma(f; K) \subseteq K$, also die Menge aller Eigenwerte,
2. die Dimension jedes Eigenraums $\operatorname{Eig}(f;\lambda) \leq V$ für P1D/P2N,
3. eine Basis $\mathcal{B}_\lambda = (v_i)_{i\in I_\lambda}$ für jeden Eigenraum $\operatorname{Eig}(f;\lambda)$,
4. die durch $I = \bigsqcup_\lambda I_\lambda$ gebildete Eigenbasis $\mathcal{B} = (v_i)_{i\in I}$ von V,
5. die so gewonnene Diagonalmatrix $D = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \in K^{n\times n}$.

Zur **Diagonalisierbarkeit** von f genügen (1) und (2). Daran lässt sich (5) ablesen und die noch fehlenden Daten (3,4) anschließend ergänzen…

Für eine **Eigenbasis** zu f genügen (4) und (5), daraus folgen (1,2,3). Selbst im Falle $\dim_K(V) = \infty$ bleiben (1,3,4) ebenso sinnvoll.

Zerfällung eines Polynoms in Linearfaktoren

Definition P2J: Zerfällung eines Polynoms in Linearfaktoren, siehe C2c

(1) Das Polynom $P \in K[X]_n$ **zerfällt** über K in Linearfaktoren, falls

$$P(X) = c(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_n) \quad \text{mit } c, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K.$$

Es **zerfällt einfach**, falls zudem $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, kurz $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}^! \subseteq K$.
Die Matrix $A \in K^{n\times n}$ bzw. der Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$ **zerfällt (einfach)**, falls dies für das charakteristische Polynom χ_A bzw. χ_f gilt.

(2) Durch Zusammenfassen mehrfacher Nullstellen erhalten wir $P(X) = c(X-\mu_1)^{r_1}\cdots(X-\mu_k)^{r_k}$ mit Nullstellen $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}^! \subseteq K$.
Der Exponent $r_i =: \mathrm{ord}(P, \mu_i)$ heißt die (Nullstellen-)**Ordnung** oder (algebraische) **Vielfachheit** der Nullstelle μ_i im Polynom P.

Beispiele: $P = X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ zerfällt über $\mathbb{Q}$ gemäß $P = (X-1)(X+1)$.
$X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ zerfällt nicht über $\mathbb{Q}$, aber über $\mathbb{R}$ zu $(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$.
$X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ zerfällt nicht über $\mathbb{R}$, aber über $\mathbb{C}$ zu $(X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})$.

Zerfällung eines Polynoms in Linearfaktoren

☺ Alle bisherigen Begriffe und Verfahren der Linearen Algebra sind tatsächlich linear (im Sinne der mathematischen Struktur) und daher algorithmisch recht einfach (im Sinne der informatischen Komplexität).

⚠ Die Faktorisierung von Polynomen und speziell die Nullstellensuche verhalten sich dagegen spürbar anders, mathematisch und informatisch: Dieses Problem gehört zur (nicht-linearen!) Algebra bzw. Numerik.

Dieser Frage können wir nun nicht länger ausweichen. Alles Weitere ist wieder originärer Bestandteil der Linearen Algebra, doch um überhaupt weiter arbeiten zu können, müssen wir uns um Nullstellen kümmern.

Definition P2J klärt zunächst die nötigen Begriffe und benennt unser ersehntes Ziel: Wir wollen jedes Polynom in Linearfaktoren zerlegen.

☺ Über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ lässt sich dies immer erreichen, genau dies ist die Aussage des Fundamentalsatzes der Algebra.

⚠ Bislang waren alle Körper in der Linearen Algebra gleichbereichtigt. Ab hier jedoch spielt der Körper $\mathbb{C}$ für die LinA seine besondere Rolle.

Algebraisch abgeschlossener Grundkörper K

♦ **Satz E3c:** Fundamentalsatz der Algebra

Jedes komplexe Polynom $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ zerfällt über $\mathbb{C}$.

Definition P2K: algebraischer Abschluss

Seien $C \geq K$ Körper, zum Beispiel $\mathbb{C} \geq \mathbb{R}$. Wir nennen den Körper C **algebraisch abgeschlossen**, falls jedes Polynom $P \in C[X]$ über C zerfällt.

Die Körpererweiterung $C \geq K$ ist **algebraisch**, falls jedes Element $a \in C$ Nullstelle eines Polynoms $P \in K[X]^*$ ist, gerne minimal (MiPo).

Wir nennen $C \geq K$ einen **algebraischen Abschluss** der Körpers K, falls C algebraisch ist über K und zudem algebraisch abgeschlossen.

Beispiel: Der Körper $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen, $\mathbb{R}$ jedoch nicht.
Die Erweiterung $\mathbb{C} \geq \mathbb{R}$ ist ein algebraischer Abschluss des Körpers $\mathbb{R}$.
Daher arbeiten wir meist lieber über dem Körper $\mathbb{C}$ statt nur mit $\mathbb{R}$.

Übung: Warum ist $\mathbb{C} \geq \mathbb{Q}$ kein algebraischer Abschluss?

Zerfällungskörper $L \geq K$ zum Polynom $P \in K[X]$

Satz P2L: algebraischer Abschluss, Existenz und Eindeutigkeit

Zu jedem Körper K existiert ein algebraischer Abschluss $C \geq K$.
Je zwei algebraische Abschlüsse C und C' von K sind isomorph.

Ich zitiere dies hier vor allem zur Beruhigung und als schönen Ausblick: Diese und weitere Konstruktionen lernen Sie in Ihrer Vorlesung *Algebra*.

☺ Es besteht also kein grundsätzliches mathematisches Problem: Wir können prinzipiell jedes Polynom in Linearfaktoren zerlegen. Notfalls nutzen wir den Abschluss $C \geq K$. Es geht auch sparsamer: Jedes Polynom zerfällt über einer endlichen Erweiterung $L \geq K$. (C3P)
Zu $P = X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ etwa haben wir den Zerfällungskörper $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

⚠ Die algorithmischen Fragen hingegen sind überaus anspruchsvoll und führen zu zwei wichtigen, modernen und tiefliegenden Themen: einerseits die (Computer-)Algebra für exaktes, symbolisches Rechnen, andererseits die (Computer-)Numerik für effiziente Näherungslösungen. Beide bereichern demnächst Ihren mathematischen Werkzeugkasten!

Einfache Zerfällung impliziert Diagonalisierbarkeit.

Der folgende Spezialfall ist besonders einfach und sympathisch:

Satz P2M: Einfache Zerfällung impliziert Diagonalisierbarkeit.

Angenommen das char. Polynom von $f \in \mathrm{End}_K(V)$ zerfällt einfach,

$$\chi_f(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) \quad \text{mit} \quad \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}^! \subseteq K.$$

(1) In diesem Falle ist f diagonalisierbar, denn es gilt

$$V = \mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Eig}(f, \lambda_n)$$

mit geometrischer Vielfachheit $\dim_K \mathrm{Eig}(f, \lambda_i) = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$.

(2) Wir erhalten eine Eigenbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ durch Wahl von Eigenvektoren $v_i \in \mathrm{Eig}(f, \lambda_i) \smallsetminus \{0\}$. Somit wird f dargestellt durch

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Beweis: Wir haben $\mathrm{E} := \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{E}(\lambda_i) \leq V$ dank Kernzerlegung N3G/P1A. Aus $\dim \mathrm{E}(\lambda_i) \geq 1$ folgt $n \leq \dim \mathrm{E} \leq \dim V = n$. Das zeigt (1). QED

Einfache Zerfällung impliziert Diagonalisierbarkeit.

Im allgemeinen Fall muss das char. Polynom $\chi_f \in K[X]$ nicht zerfallen, siehe etwa das Beispiel P2P. Selbst wenn $\chi_f \in K[X]$ über K zerfällt, kann es mehrfache Nullstellen haben, siehe Beispiele P4A und P2O. In diesem Falle ist zur Diagonalisierung noch kein Urteil möglich: f kann diagonalisierbar sein (wie P4A) oder auch nicht (wie P2O).

Im Falle mehrfacher Nullstellen hilft letztlich nur die Bestimmung der Eigenräume und insbesondere ihrer Dimension (Satz P1D):

Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn $V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(f)} \mathrm{Eig}(f, \lambda)$ gilt, also die Dimensionsgleichung $n = \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \dim_K \mathrm{Eig}(f, \lambda)$ erfüllt ist.

Das ist genau dann der Fall, wenn zu jedem Eigenwert $\lambda \in K$ die geometrische und die algebraische Vielfachheit übereinstimmen (P2N).

Hierzu zeigen wir die folgende nützliche Ungleichung: Die geometrische Vielfachheit ist immer kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit. Das ist eine recht einfache, aber ebenso grundlegende Beobachtung, die wir anschließend in Theorie und Praxis überall nutzen werden.

Geometrische und algebraische Vielfachheit

Satz P2N: Erreicht die geometrische Vielfachheit die algebraische?

(1) Für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma(f; K)$ gilt die Ungleichung

$$1 \;\leq\; \dim_K \mathrm{Eig}(f, \lambda) \;\leq\; \mathrm{ord}(\chi_f, \lambda) \;\leq\; \dim_K(V).$$

(2) Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn (a) χ_f über K zerfällt und (b) $\dim_K \mathrm{Eig}(f, \lambda) = \mathrm{ord}(\chi_f, \lambda)$ für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma(f)$ gilt.

Beweis: (1) Wir wählen eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_k)$ von $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$, ergänzen zu einer Basis $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_k, \dots, v_n)$ von V und erhalten die Darstellung

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} B & * \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad \text{mit } B = \lambda \cdot I_k.$$

Somit gilt $\chi_A = \chi_B \cdot \chi_C = (X - \lambda)^k \cdot \chi_C$, also $\dim \mathrm{Eig}(f, \lambda) \leq \mathrm{ord}(\chi_f, \lambda)$.

(2) In V haben wir $\mathrm{E} := \bigoplus_{\lambda \in \sigma(f)} \mathrm{E}(\lambda)$ dank N3G/P1A. Daraus folgt $\dim \mathrm{E} \overset{\text{M2T}}{=} \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \dim_K \mathrm{E}(\lambda) \overset{(b)}{\underset{<}{=}} \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \mathrm{ord}(\lambda) \overset{(a)}{\underset{<}{=}} \deg \chi_f \overset{\text{P2D}}{=} \dim V$. QED

Geometrische und algebraische Vielfachheit

Aufgabe: Führen Sie diese Beweisschritte sorgsam aus. **Ausführung:**

(1) Die Determinante ist multiplikativ für Block-Dreiecksmatrizen O2W.

(2a) Es gilt $\sum_{\lambda \in \sigma(f)} \mathrm{ord}(\chi_f, \lambda) \leq n = \dim V$, mit Gleichheit gdw χ_f zerfällt. Andernfalls enthält die Faktorisierung $\chi_f = (X - \lambda_1)^{r_1} \cdots (X - \lambda_k)^{r_k} Q$ noch einen Faktor $Q \in K[X]$ mit $\deg Q > 0$ ohne Nullstellen in K. Aus $\sum_{\lambda \in \sigma(f)} \mathrm{ord}(\chi_f, \lambda) + \deg Q = n$ folgt $\sum_{\lambda \in \sigma(f)} \mathrm{ord}(\chi_f, \lambda) < n$.

(2b) Dank (1) gilt immer $\sum_{\lambda \in \sigma(f)} \dim_K \mathrm{Eig}(f, \lambda) \leq \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \mathrm{ord}(\chi_f, \lambda)$, mit Gleichheit gdw $\dim \mathrm{Eig}(f, \lambda) = \mathrm{ord}(\chi_f, \lambda)$ für jeden Eigenwert λ gilt. Gilt hierbei auch nur einmal die strikte Ungleichung „$<$“, so kann dies durch die anderen Summanden nicht mehr aufgeholt werden.

Aus diesen Vorbereitungen folgt die ersehnte Äquivalenz (2):
„$\Leftarrow$“: Aus (a) und (b) folgt $\dim E = \dim V$, also $E = V$ dank M3O.
„$\Rightarrow$“: Aus $E = V$ folgt $\dim E = \dim V$, also (a) und (b). QED

Ist jede Matrix diagonalisierbar? Jordan–Blöcke nicht!

☺ Wir verfügen nun über wirksame Werkzeuge zur Diagonalisierung. Damit erkennen wir, dass manche Matrizen *nicht* diagonalisierbar sind. Das typische und daher wichtigste Gegenbeispiel sind Jordan–Blöcke:

Beispiel P2O: Jordan–Blöcke sind nicht-diagonalisierbar.

Zu Dimension $n \in \mathbb{N}$ und Eigenwert $\lambda \in K$ haben wir den **Jordan–Block**

$$J = J_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in K^{n\times n} \quad \text{und} \quad J - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hier gilt $\chi_J = \mu_J = (X-\lambda)^n$, also $\sigma(J) = \{\lambda\}$, doch $\operatorname{Eig}(J,\lambda) = \langle e_1 \rangle_K^!$ und $\operatorname{Eig}(J,\mu) = \{0\}$ für $\mu \neq \lambda$. Für $n \geq 2$ erlaubt $J_n(\lambda)$ keine Eigenbasis.

Nach den diagonalisierbaren wollen wir jede beliebige Matrix $A \in K^{n\times n}$ auf möglichst einfache Gestalt transformieren. Gute Nachricht über $\mathbb{C}$: Komplizierter als Jordan–Blöcke wird es nicht, siehe Kapitel Q.

Ist jede Matrix diagonalisierbar? Drehstreckungen nicht!

Speziell für reelle Matrizen besteht ein weiteres ernstes Hindernis zur Diagonalisierbarkeit, hier das typische und wichtigste Gegenbeispiel:

Beispiel P2P: reelle Drehstreckung ohne reelle Eigenwerte

Zu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ haben wir die reelle Drehstreckung

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \chi_C = \begin{vmatrix} X-a & b \\ -b & X-a \end{vmatrix} = (X-a)^2 + b^2.$$

Das reelle Spektrum ist $\sigma(C;\mathbb{R}) = \emptyset$, komplex gilt $\sigma(C;\mathbb{C}) = \{a \pm ib\}$.

☺ Selbst wenn wir uns vorrangig für reelle Matrizen interessieren, so ist es meist einfacher, über $\mathbb{C}$ zu arbeiten, zumindest behelfsweise. Das ist einer der guten Gründe, warum komplexe Zahlen so beliebt sind.

☺ Diese Beispiele zeigen die beiden Hindernisse zur Diagonalisierung. Erstens P2P: Zerfällt das char. Polynom, liegen also alle Eigenwerte im Grundkörper K? Zweitens P2O: Erreicht die geometrische Vielfachheit die algebraische? Nur wenn beides erfüllt ist, existiert eine Eigenbasis.

Strukturbeispiel: symmetrische reelle Matrizen

Zu Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$ betrachten wir die symmetrische Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Aufgabe: Ist A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar? **Lösung:** Ihr char. Polynom ist

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -b & X-c \end{vmatrix} = X^2 - (a+c)X + (ac - b^2).$$

Seine Diskriminante ist $d = (a+c)^2 - 4(ac-b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$.
Somit zerfällt $\chi_A = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$ mit $\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(a+c \pm \sqrt{d}) \in \mathbb{R}$.
(1) Im Falle $d > 0$ zerfällt χ_A einfach, und A ist diagonalisierbar (P2M).
(0) Im Falle $d = 0$ gilt $b = 0$ und $a = c$, somit ist A bereits diagonal.

Satz P2Q: symmetrische reelle 2×2–Matrix

Jede symmetrische reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.

Strukturbeispiel: symmetrische reelle Matrizen

☺ Das ist ein sehr schönes, allgemeines und nützliches Ergebnis:
Wir betrachten symmetrische reelle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, also $A^\top = A$.
Der erste interessante Fall ist die Dimension $n = 2$ wie hier zu sehen:
Das obige Beispiel zeigt, dass A diagonalisierbar ist.

☺ Dies beweisen wir später allgemein in jeder Dimension $n \in \mathbb{N}$:
Jede symmetrische reelle Matrix ist über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar!
Das ist eine Konsequenz des berühmten Spektralsatzes T1I.
Wir sehen hier das verheißungsvolle allerersten Beispiel.

Die Ausführung der Diagonalisierung erfordert wie immer die explizite Berechnung einer Eigenbasis. Im Falle $n = 2$ gelingt dies bereits jetzt ganz direkt. Im allgemeinen Fall werden wir dies später noch genauer untersuchen, hilfreiche Werkzeuge erarbeiten und als Sätze bereitstellen.

Übung: Diagonalisieren Sie die obige Matrix A im Falle $b > 0$.
(1) Untersuchen Sie einige konkrete Zahlenbeispiele.
(2) Entwickeln Sie eine allgemeine Formel.

Zahlenbeispiel zur Diagonalisierung

Aufgabe: Ist A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar? Falls ja, diagonalisieren Sie A!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{ebenso} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Lösung: (1a) Wir bestimmen das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_A(X) \overset{\text{Def}}{=} \begin{vmatrix} 1-X & 4 & 5 \\ 0 & -X & 1 \\ 0 & 2 & 3-X \end{vmatrix} &= (1-X)[-X(3-X)-1\cdot 2] \\ &= (1-X)(X^2-3X-2) \\ &= -X^3+4X^2-X-2 \end{aligned}$$

(1b) Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von $\chi_A = -\tilde{\chi}_A$:

$$\sigma(A;\mathbb{R}) = \{\ \lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = \tfrac{1}{2}(3-\sqrt{17}),\ \ \lambda_3 = \tfrac{1}{2}(3+\sqrt{17})\ \}$$

(1c) Da χ_A einfach zerfällt, schließen wir, dass A diagonalisierbar ist.

Zahlenbeispiel zur Diagonalisierung

(1d) Die Diagonalisierung verläuft weiter nach ChaPo-Verfahren P2H:

$$D = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(3-\sqrt{17}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(3+\sqrt{17}) \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{8}(15-\sqrt{17}) & \frac{1}{8}(15+\sqrt{17}) \\ 0 & \frac{1}{4}(-3-\sqrt{17}) & \frac{1}{4}(-3+\sqrt{17}) \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{4} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{17}} & \frac{1}{2}-\frac{3}{2\sqrt{17}} \\ 0 & +\frac{2}{\sqrt{17}} & \frac{1}{2}+\frac{3}{2\sqrt{17}} \end{bmatrix}$$

Die Rechnungen sind Routine, etwa für ein Computer-Algebra-System (CAS), doch für die Handrechnung nicht ganz kurz. Obwohl die Matrix A über $\mathbb{Q}$ gegeben ist, sind Rechnungen in der Körpererweiterung $\mathbb{Q}[\sqrt{17}]$ nötig. Auch das gelingt letztlich problemlos, wie bereits gesehen (B293).

Zahlenbeispiel zur Diagonalisierung

Lösung: (2a) Auch zu B bestimmen wir das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_B(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 4 & 5 \\ 0 & -X & 2 \\ 0 & 2 & 3-X \end{vmatrix} &= (1-X)[-X(3-X)-2\cdot 2] \\ &= (1-X)(X^2-3X-4) \\ &= -X^3+4X^2+X-4 \end{aligned}$$

(2b) Die Eigenwerte von B sind genau die Nullstellen von $\chi_B = -\tilde{\chi}_B$:

$$\sigma(B;\mathbb{R}) = \{\ \lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = -1,\ \ \lambda_3 = 4\ \}$$

(2c) Da χ_B einfach zerfällt, schließen wir, dass B diagonalisierbar ist.

☺ Die Matrizen A und B unterscheiden sich nur an einer Stelle.
Die Rechnungen für B sind dennoch spürbar einfacher.

☺ Mit ausreichend Muße gelingen Ihnen auch längere Rechnungen.
In Klausuren versuchen wir die Schwierigkeit gut zu kalibrieren.
Sobald Sie es ausreichend geübt haben, gelingt es routiniert.

Zahlenbeispiel zur Diagonalisierung

(2d) Die Diagonalisierung verläuft weiter nach ChaPo-Verfahren P2H:

$$D = T^{-1}BT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 14 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{16}{3} \\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

☺ Alle Eigenwerte liegen in $\mathbb{Q}$, das vereinfacht die Rechnung spürbar!
☺ Erinnerung (N3A): Die Spalten von T sind eine Eigenbasis zu B.

Übung: Machen Sie für A und B die Probe! Was ist zu prüfen?
Übung: Machen Sie die Rechnung! Wie verläuft das Verfahren?

Normiertes Polynom und seine Begleitmatrix

Tritt jedes normierte Polynom als charakteristisches Polynom auf? Ja!

Satz P2R: normiertes Polynom und seine Begleitmatrix

Zum Polynom $P = X^n + p_1 X^{n-1} + \cdots + p_n X^0 \in K[X]_n^1$ über K definieren wir die **Begleitmatrix** (engl. *companion matrix*):

$$C(P) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -p_n \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -p_{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -p_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -p_1 \end{bmatrix} \in K^{n\times n}$$

(1) Ihr charakteristisches Polynom ist P, ebenso ihr Minimalpolynom.
(2) Genau dann ist C über K diagonalisierbar, wenn P einfach zerfällt:

$$P = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n) \quad \text{mit} \quad \{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}^! \subseteq K$$

(3) In diesem Falle gelingt die Diagonalisierung $VCV^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ mit der Vandermonde–Matrix $V = (\lambda_i^j)_{i=1,\dots,n}^{j=0,\dots,n-1} \in \mathrm{GL}_n(K)$, siehe D5B.

Normiertes Polynom und seine Begleitmatrix

Einfache Zerfällung ist immer hinreichend für Diagonalisierbarkeit (P2M). Satz P2R besagt speziell für die Begleitmatrix $C = C(P)$, dass einfache Zerfällung auch notwendig ist und gibt explizit eine Eigenbasis an.

Aufgabe: (1) Berechnen Sie χ_C, indem Sie die charakteristische Matrix $XI - C$ entwickeln nach der ersten (oder letzten) Zeile (oder Spalte).

(2a) Für jeden Skalar $\lambda \in K$ gilt $\dim_K \operatorname{Eig}(C,\lambda) \le 1$, denn die Matrix $\lambda I - C$ hat mindestens Rang $n-1$.

(2b) Wie folgt daraus sofort das Diagonalisierbarkeitskriterium? Warum ist es hier nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig?

(3) Die Eigenvektoren finden wir später auf ganz natürliche Weise in den folgenden Untersuchungen zur linearen Rekursionen. Sie können es jetzt schon direkt versuchen, oder anschließend darauf zurückkommen.

Die inverse Matrix V^{-1} ist mühsam, wie so oft. Für die Probe ist sie gar nicht nötig: Es genügt sicherzustellen, dass V invertierbar ist (D5B), und statt $VCV^{-1} = D$ die äquivalente Gleichung $VC = DV$ zu prüfen.

Normiertes Polynom und seine Begleitmatrix

Beweis: (1a) Induktion: Für $n = 1$ gilt $\det(XI - C) = \det\begin{bmatrix} X + p_1 \end{bmatrix} = P$. Für $n \ge 2$ entwickeln wir nach der ersten Zeile (Laplace O2J):

$$\det(XI - C) \overset{\text{Def}}{=} \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 & p_n \\ -1 & X & \ddots & \vdots & p_{n-1} \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & p_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X+p_1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{O2J}}{=} X \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 & p_n \\ -1 & X & \ddots & \vdots & p_{n-1} \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & p_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X+p_1 \end{vmatrix} + (-1)^{n-1} p_n \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 & p_n \\ -1 & X & \ddots & \vdots & p_{n-1} \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & p_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X+p_1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{IV}}{=} X(X^{n-1} + p_1 X^{n-1} + \dots + p_{n-1}) + p_1 \;=\; P$$

Die Determinante der Dreiecksmatrix rechts ist $(-1)^{n-1}$, siehe O2W.

Normiertes Polynom und seine Begleitmatrix

(1b) Wir haben $C : e_0 \mapsto e_1 \mapsto \dots \mapsto e_{n-1} \mapsto -\sum_{i=1}^n p_i e_{n-i}$. Der Raum K^n ist also C–zyklisch, erzeugt von e_0, und das Minimalpolynom ist $\mu_C^{e_0} = P$. Für alle i gilt $P(C)e_i = P(C)C^i e_0 = C^i P(C) e_0 = 0$, also global $\mu_C = P$. Dank MiPo-Kriterium N3H ist C diagonalisierbar gdw P einfach zerfällt.

(2) ChaPo-Kriterium: Zu jedem Skalar $\lambda \in K$ erhalten wir die Matrix

$$\lambda I - C = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & p_n \\ -1 & \lambda & \ddots & \vdots & p_{n-1} \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & p_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \lambda + p_1 \end{bmatrix}.$$

Ihr Rang ist $\ge n-1$, denn die ersten $n-1$ Spalten sind gestuft und somit linear unabhängig. Dank Rangsatz M1V folgt $\dim_K \operatorname{Ker}(\lambda I - C) \le 1$.

Jeder Eigenwert $\lambda \in \sigma(C)$ hat demnach geometrische Vielfachheit 1.

Diagonalisierbareit, $n = \sum_\lambda \dim_K \operatorname{Eig}(f,\lambda)$ gemäß P1D, erreichen wir also genau dann, wenn wir n verschiedene Eigenwerte haben. QED

Anwendungsbeispiel: die Fibonacci–Folge

Wir definieren $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto f_n$ rekursiv durch $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$ und

$$\boxed{f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq 2}.}$$

Leonardo Fibonacci beschrieb damit im Jahr 1202 das Wachstum einer Kaninchenpopulation; in der Natur ist diese Folge ein häufiges Muster.
Tibees: *Fibonacci slop*, `youtu.be/LWJzirlCv8I`. Die ersten Werte sind:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
f_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

Explizit, geschlossen? Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die phantastische **Binet–Formel**:

$$\boxed{f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \approx \frac{1.618^n}{2.236}}$$

Übung: (1) Wie *beweisen* Sie die gegebene Formel? Per Induktion! (F475)
(2) Wie *finden* Sie eine solche Formel? Eigenwerte und Eigenvektoren!

Anwendungsbeispiel: die Fibonacci–Folge

☺ Näherungswerte sind $\phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ und $\psi := \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$.
Die geschlossene Formel für f_n zeigt das Wachstumsverhalten:
(0) Der zweite Summand ψ^n konvergiert rasch gegen Null.
(1) Die Fibonacci–Folge f_n wächst exponentiell, wie ϕ^n.

☺ Zunächst handelt die Fragestellung von Zahlenfolgen und Rekursion. Auf den ersten Blick hat das nichts mit Linearer Algebra, Matrizen oder gar Eigenvektoren zu tun. Es zeigt sich jedoch, dass diese universellen Werkzeuge auch hier wunderbar effizient angewendet werden können!

Das ist ein allgemeines und häufiges Phänomen: Die Problemstellung deutet meist noch nicht die möglichen oder nötigen Werkzeuge an. Zur Problemlösung braucht es daher Erfahrung und Kreativität.
Man erblickt nur, was man schon weiß und versteht. (Goethe)

☺ Erfahrung sammeln Sie durch Übungen wie etwa der folgenden. Vielfältige Rechnungen und Erprobung der Werkzeuge übt die korrekte Anwendung und fördert Ihre Kreativität für zukünftige neue Aufgaben.

Der Folgenraum $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ mit Verschiebeoperator

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ aller Folgen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : n \mapsto f_n$ und darauf die Verschiebung (*shift*):

$$\boxed{s : \mathbb{K}^\mathbb{N} \to \mathbb{K}^\mathbb{N} : (f_0, f_1, f_2, \dots) \mapsto (f_1, f_2, f_3, \dots).}$$

Ausgeschrieben bedeutet das $s(f) = g$ mit $g_n = f_{n+1}$.
Dies ist offensichtlich eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung.

Aufgabe: Bestimmen Sie zu s alle Eigenwerte und Eigenräume.

Lösung: Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Die Eigengleichung $s(f) = \lambda f$ lautet hier

$$(f_1, f_2, f_3, \dots) \overset{!}{=} (\lambda f_0, \lambda f_1, \lambda f_2, \dots),$$

also $f_1 = \lambda f_0$, $f_2 = \lambda f_1$, $f_3 = \lambda f_2$, ..., kurz $f_{n+1} = \lambda f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Jede solche Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ erfüllt somit $f_n = \lambda^n f_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\operatorname{Eig}(s, \lambda) = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : n \mapsto \lambda^n f_0 \} = \langle e_\lambda = (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle_\mathbb{K}^!}$$

Als Basis fixieren wir hierzu den Eigenvektor $e_\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : n \mapsto \lambda^n$.

Der Folgenraum $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ mit Verschiebeoperator

☺ Hier ist *jeder* Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ Eigenwert, das Spektrum also $\sigma(s) = \mathbb{K}$.
Insbesondere hat s über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ überabzählbar viele Eigenwerte!

☺ Jeder Eigenraum ist eindimensional, das ist äußerst übersichtlich.
Den Basisvektor $e_\lambda = (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ können wir bequem und explizit angeben.

⚠ Hier ist der Vektorraum $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ unendlich-dimensional. Determinante und charakteristisches Polynom stehen uns daher nicht zur Verfügung. Dennoch können wir Eigenwerte und Eigenräume direkt berechnen.

Übung: Ist der Verschiebeoperator $s : \mathbb{K}^\mathbb{N} \to \mathbb{K}^\mathbb{N}$ diagonalisierbar?
Selbst wenn der Raum $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ unendlich-dimensional ist, können wir uns dennoch eine diagonalisierende Basis wünschen. Ist dies hier erfüllbar?
Der endliche Fall $\sharp\mathbb{K} < \infty$ ist leicht, der unendliche Fall spannend. (P407)

Übung: Sei $U = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \leq \mathbb{K}^\mathbb{N}$ der Unterraum der beschränkten Folgen.
Er ist s–invariant, das heißt $s(U) \subseteq U$. Einschränkung definiert $s : U \to U$.
Bestimmen Sie Spektrum und Eigenräume. Ebenso $\ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K}) \leq \mathbb{K}^\mathbb{N}$

Übung: Untersuchen Sie $t : \mathbb{K}^\mathbb{N} \to \mathbb{K}^\mathbb{N} : (f_0, f_1, f_2, \dots) \mapsto (0, f_0, f_1, f_2, \dots)$.

Anwendungsbeispiel zu rekursiven Folgen

☺ Wir untersuchen nun die Fibonacci–Folgen mit Linearer Algebra!

$$V = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \mid \forall n \in \mathbb{N} : f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0 \} \leq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

MiPo-Verfahren: $V = \operatorname{Ker} P(s)$ mit $P = X^2 - X - 1 = (X - \phi)(X - \psi)$ und $\phi, \psi = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Somit gilt $V = \mathrm{E}(\phi) \oplus \mathrm{E}(\psi)$ mit Eigenbasis (u, v) bestehend aus $u = (\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $v = (\psi^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Jede Fibonacci–Folge $f \in V$ ist Linearkombination $f = au + bv$ mit eindeutigen Koeffizienten $a, b \in \mathbb{K}$. Wir erhalten $f = (0, 1, \dots)$ mit $a, b = \pm 1/\sqrt{5}$, also $f_n = (\phi^n - \psi^n)/(\phi - \psi)$.

ChaPo-Verfahren: (1) Stellen Sie $s|_V^V$ als Matrix dar. (2) Berechnen Sie χ_s. (3) Bestimmen Sie die Eigenwerte, (4) die Eigenräume, (5) eine Eigenbasis. (6) Linearkombinieren Sie unsere Fibonacci–Folge f aus Eigenvektoren.

Lösung: (0) Welche Dimension hat V? Wir betrachten die Projektion

$$q : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \geq V \to \mathbb{K}^2 : (f_0, f_1, f_2, \dots) \mapsto (f_0, f_1).$$

Zu beliebigen Startwerten $f_0, f_1 \in \mathbb{K}$ existiert genau eine Folge $f \in V$. Somit ist $q : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^2$ ein Isomorphismus, insbesondere $\dim_{\mathbb{K}}(V) = 2$.

Anwendungsbeispiel zu rekursiven Folgen

(1) Als eine Basis $\mathcal{A} = (a_1, a_2)$ von V wählen wir $a_1 = (1, 0, 1, 1, 2, 3, \dots)$ und $a_2 = (0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)$. Es gilt $s(a_1) = a_2$ und $s(a_2) = a_1 + a_2$. Also:

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = C(X^2 - X - 1)^{\intercal}$$

(2) Aus dieser Matrix gewinnen wir das charakteristische Polynom:

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X - 1 \end{vmatrix} = X^2 - X - 1$$

(3) Die beiden Nullstellen sind $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ und $\psi = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$.

(4) Als Eigenvektoren erhalten wir $u = (\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $v = (\psi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V.

(5) Damit erhalten wir eine Eigenbasis $\mathcal{B} = (u, v)$ von $s : V \to V$ sowie

$$D = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \psi \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \phi & \psi \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -\psi & 1 \\ \phi & -1 \end{bmatrix}.$$

Obwohl die Matrix A über $\mathbb{Q}$ gegeben ist, sind Rechnungen in der Körpererweiterung $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ nötig. **Übung:** Machen Sie die Probe!

Anwendungsbeispiel zu rekursiven Folgen

(6) Wir stellen die Fibonacci–Folge $f = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots) \in V$ dar als Linearkombination der Eigenvektoren $u = (\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $v = (\psi^n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$f = au + bv \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} 0 = a\phi^0 + b\psi^0 \\ 1 = a\phi^1 + b\psi^1 \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Wir finden so die einzige Lösung für die gesuchten Koeffizienten:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Explizit ausgeschrieben ergibt dies die Binet–Formel:

$$\boxed{f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]}$$

So lösen Eigenvektoren jede lineare Rekursion als geschlossene Formel!
Übung: Prüfen Sie die hier gefundene Gleichung per Induktion (F475).

Anwendungsbeispiel zu rekursiven Folgen

Beide hier gezeigte Verfahren gelten allgemein für rekursive Folgen!

$$V = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \mid \forall k \geq n : f_k + p_1 f_{k-1} + \dots + p_n f_{k-n} = 0 \} \leq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

Dies entspricht der Rekursionsgleichung $P(s)(f) = 0$ mit dem Polynom

$$P = X^n + p_1 X^{n-1} + \dots + p_n X^0 \in \mathbb{K}[X]_n^1.$$

Speziell im Fibonacci–Beispiel haben wir $P = X^2 - X - 1$ betrachtet.

Allgemein ist $P \in \mathbb{K}[X]_n^1$ gegeben, wir haben also $V = \operatorname{Ker} P(s)$.
Dieser Unterraum V in $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist s–invariant, das heißt $s(V) \subseteq V$.
Wir wollen den Verschiebeoperator $s : V \to V$ diagonalisieren,
also eine Basis aus Eigenvektoren der Form $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmen.
Falls P über $\mathbb{K}$ einfach zerfällt, so gelingt dies wörtlich wie zuvor:
Zu beliebigen Anfangswerten finden wir so eine geschlossene Formel!

☺ Das ist das allgemeine MiPo-Verfahren N3H zur Diagonalisierung!
☺ Das ist das allgemeine ChaPo-Verfahren P2H zur Diagonalisierung!

Satz P2s: lineare Rekursion und ihre Eigenfolgen → Hauptfolgen Q2c

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $P = X^n + p_1 X^{n-1} + \dots + p_n X^0 \in \mathbb{K}[X]^1_n$.
Wir betrachten den Folgenraum $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ mit dem Verschiebeoperator

$$s : \mathbb{K}^\mathbb{N} \to \mathbb{K}^\mathbb{N} : (f_0, f_1, f_2, \dots) \mapsto (f_1, f_2, f_3, \dots).$$

Darin liegt der $\mathbb{K}$–Untervektorraum $V \le \mathbb{K}^\mathbb{N}$ der P–rekursiven Folgen:

$$V = \operatorname{Ker} P(s) = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \mid \forall k \ge n : f_k + p_1 f_{k-1} + \dots + p_n f_{k-n} = 0 \}$$

Dieser ist s–invariant, also $s(V) \subseteq V$, und hat Dimension $\dim_\mathbb{K}(V) = n$.
Genau dann ist der (so eingeschränkte) Verschiebeoperator $s : V \to V$ über $\mathbb{K}$ diagonalisierbar, wenn das Polynom P über $\mathbb{K}$ einfach zerfällt,

$$P(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) \quad \text{mit} \quad \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}^! \subseteq \mathbb{K}.$$

Zu jedem Eigenwert λ haben wir die Eigenfolge $e_\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : n \mapsto \lambda^n$.
Wir erhalten so die Eigenbasis $(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})$ von V bezüglich s.

Einfache Zerfällung ist immer hinreichend für Diagonalisierbarkeit (P2M).
Satz P2s garantiert die Umkehrung und gibt explizit eine Eigenbasis an.

Aufgabe: Folgern Sie dies direkt aus dem MiPo-Verfahren N3H!

Beweisen Sie den Satz mit dem ChaPo-Verfahren P2H nach Vorbild des obigen Fibonacci–Beispiels. (1) Stellen Sie $s|_V^V : V \to V$ als Matrix dar. (2) Berechnen Sie das char. Polynom. (3) Bestimmen Sie die Eigenwerte, (4) die Eigenräume, (5) eine Eigenbasis, (6) den Basiswechsel.

Lösung: (0) Welche Dimension hat V? Wir betrachten die Projektion

$$q : \mathbb{K}^\mathbb{N} \ge V \to \mathbb{K}^n : f \mapsto (f_0, \dots, f_{n-1}).$$

Zu je n beliebig vorgegebenen Startwerten $f_0, \dots, f_{n-1} \in \mathbb{K}$ existiert genau eine P–rekursive Folge $f = (f_0, \dots, f_{n-1}, f_n, \dots)$.
Somit ist $q : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n$ ein Isomorphismus, insbesondere $\dim_\mathbb{K}(V) = n$.

☺ Durch diesen Isomorphismus q bestimmen wir die Dimension und erhalten nach Wunsch auch Basen, etwa $(q^{-1}(e_1), \dots, q^{-1}(e_n))$.

(1) Den Verschiebeoperator $s : V \to V$ können wir wie folgt darstellen:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "s"] \arrow[d, "q"', "\cong"] & V \arrow[d, "q"', "\cong"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -p_n & -p_{n-1} & -p_{n-2} & \dots & -p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{bmatrix}$$

(2) Das charakteristische Polynom ist $\chi_A = P$, dank $A = C(P)^\intercal$ und P2R.
Wir sehen $\dim_\mathbb{K} \operatorname{Eig}(s, \lambda) \le 1$ und können direkt Satz P1D anwenden:

(3) Genau dann ist $s : V \to V$ diagonalisierbar, wenn P einfach zerfällt, $P(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ und $\lambda_i \ne \lambda_j$ für $i \ne j$.

(4) Es gilt $\operatorname{Eig}(s, \lambda) = \langle e_\lambda \rangle^!_\mathbb{K}$ mit der Eigenfolge $e_\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : n \mapsto \lambda^n$.
(5) Wir erhalten so die Eigenbasis $(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})$ von V bezüglich s.
(6) Hierdurch wird der Verschiebeoperator $s : V \to V$ diagonalisiert:

$$T^{-1} A T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad T = \begin{bmatrix} \lambda_1^0 & \lambda_2^0 & \dots & \lambda_n^0 \\ \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \dots & \lambda_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

☺ Die Basiswechselmatrix $T = \operatorname{VDM}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^\intercal$ ist die berühmte Vandermonde–Matrix (siehe Satz D5B), hier transponiert. Alles ist gut.

Übung: Machen Sie die Probe $AT = TD$.

☺ Die inverse Matrix T^{-1} ist mühsam, wie so oft. Für die Probe ist sie gar nicht nötig: Es genügt sicherzustellen, dass T invertierbar ist (D5B), und statt $T^{-1}AT = D$ die äquivalente Gleichung $AT = TD$ zu prüfen. Das gelingt leicht, und es entspricht unserer bisherigen Rechnung.

Trigonalisierung eines Endomorphismus

Definition P3A: Trigonalisierung eines Endomorphismus

(1) Sei $f : V \to V$ linear über K. Eine **trigonalisierende Basis** zu f ist eine Basis $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^n$ von V, für die die darstellende Matrix von f trigonal ist:

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Existiert eine solche Basis $\mathcal{B}$ von V, so nennen wir f **trigonalisierbar**.

(2) Sei $A \in K^{n\times n}$. Ein **trigonalisierender Basiswechsel** zu A über K ist eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$, so dass $T^{-1}AT$ trigonal ist:

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Die Spalten der Matrix $T = (v_1, \dots, v_n)$ sind eine trigonalisierende Basis.
Existiert eine solche Matrix T, so nennen wir A über K **trigonalisierbar**.

Trigonalisierung und Zerfällung

Wie können wir herausfinden, ob f bzw. A trigonalisierbar ist?

Satz P3B: Trigonalisierung $\Leftrightarrow$ Zerfällung

Sei $f : V \to V$ linear über dem Körper K mit $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$.
Genau dann ist f über K trigonalisierbar, wenn χ_f über K zerfällt:

$$\chi_f(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$$

Dasselbe gilt für die Trigonalisierung einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ über K.

Beispiel: Sei V über $\mathbb{C}$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum.
Dann ist jeder $\mathbb{C}$–Endomorphismus $f : V \to V$ trigonalisierbar.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Zu f sei $\mathcal{B}$ eine trigonalisierende Basis von V:

$$R = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Demnach gilt $\chi_f \overset{\text{P2G}}{=} \chi_R \overset{\text{Def}}{=} \det(XI - R) \overset{\text{O2W}}{=} (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$.

Trigonalisierung und Zerfällung

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & & & \\ 0 & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \implies R = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

„$\Leftarrow$“: Wir führen Induktion über n. Für $n \le 1$ ist die Aussage trivial.
Sei nun $n \ge 2$ und die Behauptung für $n - 1$ sei bereits bewiesen.

Zum Eigenwert $\lambda_1 \in K$ existiert ein Eigenvektor $v_1 \in \mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \le V$.
Diesen ergänzen wir zu einer Basis $\mathcal{A} = (v_1, u_2, \dots, u_n)$ von V. (M2K)

Bezüglich dieser Basis $\mathcal{A}$ hat f die obige Blockform.
Wir zerlegen $V = \langle v_1 \rangle_K^! \oplus U$ mit $U := \langle u_2, \dots, u_n \rangle_K^!$.

Die Untermatrix B definiert den Endomorphismus $g : U \to U$
Wir haben $\chi_f = (X - \lambda_1) \cdot \chi_g$, also zerfällt auch das Polynom χ_g.

IV: Zu g existiert eine trigonalisierende Basis $(v_2, \dots, v_n)$ von U.
Die Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ von V trigonalisiert $f : V \to V$. QED

Trigonalisierung und Zerfällung

Um Induktion über die Dimension führen zu können, müssen wir die Dimension reduzieren. Der entscheidende Konstruktionsschritt ist hier die Projektion auf den strikt kleineren Unterraum $U < V$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & V \arrow[d, two heads, "p_U"] \\ U \arrow[u, hook, "\iota_U"] \arrow[r, dashed, "g"] & U \end{tikzcd}$$

Konkret bedeutet das: Zu jedem $u = \sum_{k=2}^n \alpha_k u_k \in U$ haben wir $f(u) = \beta_1 v_1 + \sum_{k=2}^n \beta_k u_k$ und setzen $g(u) := \sum_{k=2}^n \beta_k u_k \in U$.
Wir ignorieren also ganz dreist-naiv den Störterm $\beta_1 v_1 \in U$.
(Auf der vorigen Seite ist das die Zeile oberhalb der Matrix B.)

Dass $g : U \to U$ linear ist, sehen wir an $g = p_U \circ f \circ \iota_U$.

In der Zerlegung $V = \langle v_1 \rangle_K^! \oplus U$ als direkte Summe ist die Wahl des Komplements U willkürlich. Mit dem Quotienten $W = V/U$ gelingt dies natürlich und elegant, aber auch abstrakter. Dies führen wir nun aus.

Lemma P3c: Endomorphismus einer kurzen exakten Sequenz

Sei $f : V \to V$ linear über K und $U \leq V$ ein invarianter Unterraum.

(1) Wir haben die Einschränkung $g = f|_U^U$ und auf dem Quotienten $W = V/U$ die lineare Abbildung $h : W \to W : x + U \mapsto f(x) + U$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "f\circ i"] & V \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "q\circ f"] & W \arrow[d, "h"] \\
U \arrow[r, hook, "i"] & V \arrow[r, two heads, "q"] & W
\end{tikzcd}$$

(2) Aus je zwei Basen $\mathcal{A}$ von U und $\mathcal{C}$ von W erhalten wir eine Basis $\mathcal{B}$ von V gemäß Satz M1x. Für die darstellenden Matrizen gilt dann:

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \mathrm{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(g) & * \\ 0 & \mathrm{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(h) \end{bmatrix}$$

Für die charakteristischen Polynome folgt somit $\chi_f = \chi_g \cdot \chi_h$.

Aufgabe: Beweisen Sie Lemma P3c und damit erneut Satz P3b.

Beweis von Lemma P3c: (1) Wir erhalten $g : U \to U$ und $h : W \to W$ durch lineare Faktorisierung über eine Injektion L3b bzw. Surjektion L3c.
(2) Die Matrixdarstellung folgt aus (1) und der Konstruktion der Basis $\mathcal{B}$.

Beweis von Satz P3b: Wir zeigen hier nur die Rückrichtung „$\Leftarrow$“:
Wir führen Induktion über $n = \dim V$. Für $n = 1$ ist die Aussage trivial.
Sei nun $n \geq 2$, und die Behauptung für $n - 1$ sei bereits bewiesen.

Zum Eigenwert $\lambda_1 \in K$ existiert ein Eigenvektor $v_1 \in \mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \leq V$.
Der Unterraum $U = \langle v_1 \rangle_K^! < V$ ist f–invariant. Lemma P3c beschert uns die lineare Abbildung $h : W \to W$ auf dem Quotienten $W = V/U$.
Dabei gilt $\chi_f = (X - \lambda_1) \cdot \chi_h$, also zerfällt auch das Polynom χ_h.

Dank $\dim W = \dim V - \dim U < n$ greift die Induktionsvoraussetzung:
Zu $h : W \to W$ existiert eine trigonalisierende Basis $\mathcal{C} = (w_2, \dots, w_n)$.
Wir wählen Urbilder $v_2, \dots, v_n \in V$ mit $q(v_i) = w_i$. Dank Lemma P3c wird f durch die Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ trigonalisiert. QED

Definition P3d: Fahne von Unterräumen

(1) Sei V ein K–Vektorraum der Dimension n. Eine **Fahne** ist eine Kette

$$\{0\} = V_0 < V_1 < \cdots < V_\ell = V$$

von Unterräumen. Dabei gilt $0 = \dim V_0 < \dim V_1 < \cdots < \dim V_\ell = n$.
Eine **vollständige Fahne** erfüllt $\ell = n$, somit $\dim V_i = i$ für alle i.

Die ersten Teilräume $V_0 < V_1 < V_2$ mit $\dim V_i = i$ entsprechen Punkt, Gerade, Ebene; daher der geometrisch anschauliche Name „Fahne“.

Beispiel: Ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V über K, so definieren die aufgespannten Unterräume $V_i = \langle v_1, \dots, v_i \rangle_K$ für $i = 0, 1, \dots, n$ eine vollständige Fahne $\{0\} = V_0 < V_1 < \cdots < V_n = V$.

(2) Sei $f : V \to V$ eine K–lineare Abbildung.
Ein Unterraum $U \leq V$ heißt ***f*–invariant**, wenn $f(U) \subseteq U$ gilt.
Eine Fahne $(V_i)_i$ heißt ***f*–invariant**, wenn $f(V_i) \subseteq V_i$ für alle i gilt.

Lemma P3e: Trigonalisierung $\Leftrightarrow$ invariante Fahne

Genau dann ist $f : V \to V$ trigonalisierbar, wenn eine vollständige, f–invariante Fahne $\{0\} = V_0 < V_1 < \cdots < V_n = V$ existiert.

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Aufgabe: Beweisen Sie dieses Lemma.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Angenommen, zu f existiert eine trigonalisierende Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von V. Die Unterräume $V_i = \langle v_1, \dots, v_i \rangle_K$ für $i = 0, 1, \dots, n$ sind eine vollständige Fahne und zudem f–invariant, denn $f(V_i) \subseteq V_i$.

„$\Leftarrow$“: Durch schrittweise Ergänzung erhalten wir eine Basis $(v_1, \dots, v_i)$ von V_i. Die Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ von V trigonalisiert $f : V \to V$. QED

Spur und Determinante aus Eigenwerten

Satz P3F: Spur und Determinante

Sei $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix mit zerfallendem charakteristischen Polynom

$$\chi_A(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_n).$$

(1) Die Spur von A ist die Summe aller Eigenwerte:

$$\boxed{\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}$$

(2) Die Determinante ist das Produkt aller Eigenwerte:

$$\boxed{\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n}$$

☺ Die Spur $\operatorname{tr}(A)$ der Matrix A ist besonders leicht zu berechnen. Wenn wir also $n-1$ Eigenwerte kennen, so ist der letzte gratis!

☺ Über $\mathbb{C}$ zerfällt jedes Polynom, die Voraussetzung ist also erfüllt. Dasselbe gilt über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe: Beweisen Sie diesen Satz! (Zwei Wege sind möglich.)

Spur und Determinante aus Eigenwerten

Erster Beweis: Wir multiplizieren zur Monomform aus:

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_n)\\ &= X^n - a_{n-1}X^{n-1} \pm \cdots + (-1)^n a_0\end{aligned}$$

Dank Satz P2D kennen wir bereits die extremen Koeffizienten:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A) &\overset{\text{P2D}}{=} a_{n-1} &&= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n,\\ \det(A) &\overset{\text{P2D}}{=} a_0 &&= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n.\end{aligned}$$

Zweiter Beweis: Dank Satz P3B können wir A trigonalisieren zu

$$B = T^{-1}AT = \begin{bmatrix}\lambda_1 & * & *\\ 0 & \ddots & *\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}$$

Dank Satz P2F gilt dabei $\chi_A = \chi_B$, also insbesondere

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A) &\overset{\text{P2F}}{=} \operatorname{tr}(B) \overset{\text{Def}}{=} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n,\\ \det(A) &\overset{\text{P2F}}{=} \det(B) \overset{\text{O2W}}{=} \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n.\end{aligned}$$

☺ Der zweite Beweis ist noch schöner, dank stärkerer Werkzeuge.

Elementarsymmetrische Polynome

Der obige Satz P3F erklärt die Spur $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ und die Determinante $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ aus den Eigenwerten. Allgemein:

Definition P3G: elementarsymmetrische Polynome

Im Polynomring $\mathbb{Z}[T, X_1, \dots, X_n]$ entwickeln wir das Produkt

$$(T+X_1)(T+X_2)\cdots(T+X_n) = T^n + \sigma_1 T^{n-1} + \sigma_2 T^{n-2} + \cdots + \sigma_n.$$

Der hier auftretende Koeffizient $\sigma_k \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ für $k = 1, \dots, n$ ist das **elementarsymmetrische Polynom** vom Grad k in $X_1, X_2, \dots, X_n$:

$$\begin{aligned}\sigma_1(X_1, X_2, \dots, X_n) &= X_1 + X_2 + \cdots + X_n\\ &\dots\\ \sigma_k(X_1, X_2, \dots, X_n) &= \textstyle\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_k}\\ &\dots\\ \sigma_n(X_1, X_2, \dots, X_n) &= X_1X_2\cdots X_n\end{aligned}$$

Das Polynom σ_k ist die Summe von $\binom{n}{k}$ Monomen, jedes vom Grad k.

Der Wurzelsatz von Vieta

Für $X^2 + a_1X + a_2 = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$ gilt $\lambda_1 + \lambda_2 = -a_1$ und $\lambda_1\lambda_2 = a_2$.

Satz P3G: Wurzelsatz von Vieta

Sei $X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_n)$.
Dann gilt $a_k = (-1)^k\sigma_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Explizit ausgeschrieben heißt das:

$$\begin{aligned}a_1 &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\\ &\dots\\ a_k &= (-1)^k \textstyle\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_k}.\\ &\dots\\ a_n &= (-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\end{aligned}$$

Dies gilt insb. für das charakteristische Polynom χ und die Eigenwerte! Aus den Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ von χ können wir also ganz leicht die Koeffizienten $a_1, \dots, a_n \in K$ bestimmen: Ausmultiplizieren genügt.

Umgekehrt bestimmen die Koeffizienten $a_1, \dots, a_n \in K$ von χ eindeutig die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ bis auf Reihenfolge (also mit Vielfachheiten). Die Faktorisierung ist wesentlich schwieriger als das Ausmultiplizieren!

Die Spur lesen: Den letzten Eigenwert gibt es gratis!

Aufgabe: Gegeben ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit vier Vektoren:

$$A = \begin{bmatrix} -18 & -50 & 10 & 10 \\ 4 & 11 & -1 & -3 \\ -12 & -32 & 10 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \; d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \; e = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(1) Welche davon sind Eigenvektoren von A? Zu welchen Eigenwerten?
(2) Bestimmen Sie alle Eigenwerte, (3) Eigenräume, (4) eine Eigenbasis.

Lösung: (1) Wir setzen die Daten in die Eigengleichung $Av = \lambda v$ ein:

$$Ab = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{\checkmark}{=} \begin{bmatrix} -10 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} \notin \mathbb{R}b, \qquad Ac = A \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \overset{\checkmark}{=} \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 2c,$$

$$Ad = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \overset{\checkmark}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0d, \qquad Ae = A \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \overset{\checkmark}{=} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2e$$

Die Spur lesen: Den letzten Eigenwert gibt es gratis!

☺ Teil (1) ist eine leichte Fingerübung: Um zu prüfen, ob $v \in K^n$ ein Eigenvektor der Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist, genügt es, die Definition $Av = \lambda v$ einzusetzen… und im günstigen Fall den Eigenwert $\lambda \in K$ abzulesen. Entscheidend ist, wie immer, das Ziel zu kennen, hier: die Definiton!

⚠ Es lohnt sich, die wertvollen Informationen aus Teil (1) zu nutzen! Die hier angebotenen Daten sind nicht zufällig, sondern mit Bedacht vorbereitet; in einer Klausur sind sie eine gezielte Hilfestellung. Auch außerhalb von Klausuren kann diese Situation entstehen.

☹ Alternativ, aber ungeschickt, kann man die hilfreichen Daten aus Teil (1) ignorieren und für (2–4) stur das ChaPo-Verfahren einsetzen: Das charakteristische Polynom entwickeln und seine Nullstellen finden, Eigenräume berechnen und eine Eigenbasis wählen. Das ist mühsam.

☺ Sie arbeiten umso effizienter, je genauer Sie verstehen, was Sie tun! … insbesondere, was Sie schon haben und was Sie noch suchen. Sie können dann geschickt vom ChaPo-Verfahren abweichen, je nach konkretem Bedarf und möglichen Abkürzungen.

Die Spur lesen: Den letzten Eigenwert gibt es gratis!

$$A = \begin{bmatrix} -18 & -50 & 10 & 10 \\ 4 & 11 & -1 & -3 \\ -12 & -32 & 10 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \; d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \; e = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(2) Dank (1) wissen wir $\operatorname{Eig}(A, 0) \geq \langle d \rangle_{\mathbb{R}}^{!}$ und $\operatorname{Eig}(A, 2) \geq \langle c, e \rangle_{\mathbb{R}}^{!}$.
Damit kennen wir drei der vier Eigenwerte: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$.
Dank $\operatorname{tr}(A) = 1$ bekommen wir den vierten gratis: $\lambda_4 = -3$.
Ohne weitere Mühe schließen wir $\chi_A = X(X-2)^2(X+3)$.

(3) Wir berechnen den Eigenraum $\operatorname{Eig}(A, -3)$ wie üblich mit Gauß:

$$A + 3I = \begin{bmatrix} -15 & -50 & 10 & 10 \\ 4 & 14 & -1 & -3 \\ -12 & -32 & 13 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{RZSF}]{\text{Gauß}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Demnach gilt $\operatorname{Eig}(A, -3) = \langle f \rangle_{\mathbb{R}}^{!}$ mit dem Vektor $f = (-2, 1, 0, 2)^{\mathsf{T}}$.
(4) Damit haben wir zu A unsere Eigenbasis (d, c, e, f) gefunden.

Die Spur lesen: Den letzten Eigenwert gibt es gratis!

☺ Dank der Informationen aus (1) sind unsere Rechnungen (2–4) in dieser Anwendung wesentlich effizienter als das ChaPo-Verfahren!

Vielleicht erscheint Ihnen die obige Aufgabenstellung etwas künstlich, das will ich gar nicht bestreiten. Ganz unrealistisch ist das Vorgehen jedoch auch nicht, denn in Anwendungen verfügen Sie manchmal über Teilinformationen, und diese sollten Sie geschickt nutzen.

Zur Diagonalisierung haben ChaPo-Verfahren P2H und MiPo-Verfahren N3H natürlich trotzdem ihre Berechtigung: Wenn Sie keine weiteren Daten oder Ideen haben, dann bieten diese Ihnen allgemeine und verlässliche Methoden, um das Diagonalisierungsproblem zu lösen.

Variantenreiche Beispiele wie das vorige zeigen Ihnen jedoch ebenso, dass Sie sich nicht stur allein auf vorgefertigte Rezepte verlassen können. Manchmal sind geschickte Abkürzungen oder raffinierte Tricks möglich. Diese sollten Sie erkennen, um sich unnötige Arbeit zu ersparen.

☺ Man muss eine Matrix auch lesen können. Denken hilft!

Der Satz von Cayley–Hamilton: $\mu_f^v \mid \mu_f \mid \chi_f$

Sei $f : V \to V$ linear über dem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$.

Lemma P3H: Cayley–Hamilton, lokales MiPo teilt ChaPo

Jedes lokale Minimalpolynom μ_f^v teilt das charakteristische Polynom χ_f.

Beweis: Wir haben $Z = \langle f^k(v) \mid k < m \rangle_K^! \leq V$ mit Basis $\mathcal{B} = (f^k(v))_{k=0}^{m-1}$. Nach Konstruktion gilt $f(Z) \subseteq Z$, das heißt, der Raum Z ist f–invariant. Die Einschränkung $g = f|_Z^Z$ wird dargestellt durch die Begleitmatrix P2R

$$B := \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f|_Z^Z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} = \mathrm{C}(\mu_f^v).$$

Ihr charakteristisches Polynom ist $\chi_B = \det(XI - B) = \mu_f^v$ dank P2R. Wir ergänzen die Basis $\mathcal{B}$ von Z zu einer Basis $\mathcal{A}$ von V und erhalten

$$A := \mathrm{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} B & * \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \chi_f \overset{\text{P2G}}{=} \chi_A \overset{\text{O2W}}{=} \chi_B \cdot \chi_C \overset{\text{P2R}}{=} \mu_f^v \cdot \chi_C. \quad \boxed{\text{QED}}$$

Der Satz von Cayley–Hamilton: $\mu_f^v \mid \mu_f \mid \chi_f$

Jedes lokale Minimalpolynom μ_f^v teilt das charakteristische Polynom χ_f. Dasselbe gilt dann für ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches, also μ_f:

Satz P3H: Cayley–Hamilton, MiPo teilt ChaPo

Sei $f : V \to V$ linear über dem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$.
Das Minimalpolynom $\mu_f \overset{\text{N3F}}{=} \mathrm{kgV}(\mu_f^v \,;\, v \in V)$ teilt das char. Polynom χ_f.

Beweis: Dank Satz N3F gilt $\mu_f = \mathrm{kgV}(\mu_f^v \,;\, v \in V)$ in $K[X]$. $\boxed{\text{QED}}$

Korollar P3H: Cayley–Hamilton, ChaPo annulliert Endo

Sei $f : V \to V$ linear über dem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$.
Das charakteristische Polynom χ_f annulliert f, kurz $\chi_f(f) = 0$.

Beweis: Dank Satz N3F ist $\mu_f \mid \chi_f$ äquivalent zu $\chi_f(f) = 0$. Wir erinnern „$\Rightarrow$“: Aus $\chi_f = Q \cdot \mu_f$ mit $Q \in K[X]$ folgt $\chi_f(f) = Q(f) \circ \mu_f(f) = 0$. $\boxed{\text{QED}}$

Direkt: Für jeden Vektor $v \in V$ gilt $\chi_f = Q \cdot \mu_f^v$ mit $Q \in K[X]$ dank Lemma P3H, also $\chi_f(f)(v) = Q(f)\, \mu_f^v(f)(v) = 0$. Wir schließen $\chi_f(f) = 0$. $\boxed{\text{QED}}$

Der Satz von Cayley–Hamilton: $\mu_f^v \mid \mu_f \mid \chi_f$

☺ Das Minimalpolynom μ_f bzw. μ_f^v ist in zweifacher Hinsicht minimal: bezüglich dem Polynomgrad und bezüglich der Teilbarkeit in $K[X]$.

Wiederholung: Formulieren Sie dies explizit aus. **Lösung:**
Sei $f : V \to V$ linear über dem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$.
Sei $v \in V$ ein Vektor und $P \in K[X]$ ein Polynom über K.

(1) Genau dann gilt $P(f) = 0$, wenn P ein Vielfaches von μ_f ist.

$$P(f) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists Q \in K[X] : P = Q \cdot \mu_f$$

(2) Das Minimalpolynom μ_f teilt das charakteristische Polynom χ_f. Für den Polynomgrad folgt insbesondere $m = \deg \mu_f \leq \deg \chi_f = n$.

(3) Genau dann gilt $P(f)(v) = 0$, wenn P ein Vielfaches von μ_f^v ist.

$$P(f)(v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists Q \in K[X] : P = Q \cdot \mu_f^v$$

(4) Das globale Minimalpolynom μ_f ist das kleinste gemeinsame Vielfache im Ring $K[X]$ aller lokalen Minimalpolynome μ_f^v für $v \in V$.

Der Satz von Cayley–Hamilton für Matrizen

Der Satz P3H von Cayley–Hamilton für Endomorphismen $f : V \to V$ über dem Körper K ist äquivalent zu folgender Formulierung für quadratische Matrizen $A \in K^{n \times n}$, ebenso elegant und zudem wunderbar konkret:

Satz P3I: Cayley–Hamilton, ChaPo annulliert Matrix

Für jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ gilt $\chi_A \in K[X]_n^1$ und $\chi_A(A) = 0$ in $K^{n \times n}$.
In Worten: Das charakteristische Polynom der Matrix A annulliert A.

Aufgabe: Rechnen Sie dies explizit nach für $A \in K^{2 \times 2}$. **Lösung:**

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \chi_A = \begin{vmatrix} X - a & -c \\ -b & X - d \end{vmatrix} = (X - a)(X - d) - bc$$

$$(A - aI)(A - dI) = \begin{bmatrix} 0 & c \\ b & d - a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a - d & c \\ b & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{Com}}{=} \dots \overset{\text{Com}}{=} \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix}$$

Das zeigt $\chi_A(A) = 0$, wie von Cayley–Hamilton prädiziert / garantiert. Schon in Dimension $n = 2$ war das nicht offensichtlich, nun aber leicht. Der Satz von Cayley–Hamilton gilt in jeder Dimension, einfach, elegant.

Cayley–Hamilton für Matrizen: falscher Beweis

Wir arbeiten bisher über einem Körper, das ist bequem. Allgemein gilt:

Satz P3I: Cayley–Hamilton über jedem kommutativen Ring

Sei $(K, +, 0, \cdot, 1)$ ein kommutativer Ring. In $(K^{n\times n}, +, 0_{n\times n}, \cdot, 1_{n\times n})$ gilt für jede Matrix $A \in K^{n\times n}$ und ihr charakteristisches Polynom $\chi_A = \det(X1_{n\times n} - A) = \sum_{k=0}^n p_k X^k \in K[X]_n^1$ die Annullation

$$\boxed{\chi_A(A) = \textstyle\sum_{k=0}^n p_k A^k = 0_{n\times n}.}$$

⚠ Verlockend simpel, aber unsinnig, ist folgendes Scheinargument:

$$\chi_A(X) := \det(XI - A) \in K[X]_n^1$$

Wenn wir darin formal X durch A ersetzen, so erhalten wir scheinbar

$$\chi_A(A) \overset{?}{=} \det(AI - A) = \det(A - A) = \det(0_{n\times n}) = 0_K.$$

Aufgabe: Bitte schützen Sie sich gegen solcherart (Selbst)Betrug! Warum ist das kein Beweis von Cayley–Hamilton, sondern Unsinn?

Cayley–Hamilton für Matrizen: falscher Beweis

Lösung: Links ist $\chi_A(A) = \sum_{k=0}^n p_k A^k \in K^{n\times n}$ eine Matrix. Rechts hingegen ist $\det(AI - A) = \det(0_{n\times n}) = 0_K$ ein Skalar.

Das obige Scheinargument behauptet, naiv oder frech, nach obskurer Rechnung „Matrix = Skalar“ und ist deshalb schon syntaktisch unsinnig, zumindest solange wir Matrizen und Skalare sauber auseinanderhalten.

⚠ Schon die rein syntaktische Typen-Prüfung schlägt hier fehl! Auf der linken und der rechten Seite stehen verschiedene Objekte. Die frech-naiv behauptete Gleichung „$\overset{?}{=}$“ gilt ganz sicher nicht.

Erstaunlicherweise lässt sich dieses unsinnige Scheinargument reparieren zu einem Beweis. 🕮 Serge Lang: *Algebra.* GTM 211, 2002, §XIV.3. David Eisenbud: *Commutative Algebra.* GTM 150, 1995, Thm. 4.3.

Aufgabe: (1) Was erhalten Sie tatsächlich, wenn Sie in der Matrix $C(X) = (XI - A)^\intercal$ die Variable X durch die Matrix A ersetzen?
(2) Multiplizieren Sie die Matrix $C(A)$ mit dem Vektor $(e_1, \dots, e_n)^\intercal$.
(3) Multiplikation mit der Adjunkten $B(A) = \operatorname{adj} C(A)$ zeigt $\chi_A(A) = 0$.

Cayley–Hamilton für Matrizen: reparierter Beweis

Lösung: (1) Wir betrachten die Matrix $C(X) = (XI - A)^\intercal$, also

$$C(X) = \begin{bmatrix} X - a_{11} & \dots & -a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & \dots & X - a_{nn} \end{bmatrix} \in K[X]^{n\times n}.$$

Wir ersetzen die Variable X korrekt durch die Matrix A und erhalten

$$C(A) = \begin{bmatrix} A - a_{11}I & \dots & -a_{n1}I \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{1n}I & \dots & A - a_{nn}I \end{bmatrix} \in K[A]^{n\times n}.$$

(2) Angewendet auf die Standardbasis $e_1, \dots, e_n \in K^n$ gilt:

$$C(A) \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ae_1 - a_{11}e_1 - \dots - a_{n1}e_n \\ \vdots \\ -a_{1n}e_1 - \dots + Ae_n - a_{nn}e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wir arbeiten hier über dem kommutativen Ring $K[A] \le K^{n\times n}$. Der Ring $K[A]$ operiert von links auf dem Raum $K^n = K^{n\times 1}$.

Cayley–Hamilton für Matrizen: reparierter Beweis

(3) Aus der Gleichung (2) folgern wir nun $\det C(A) = 0$. Für die adjunkte Matrix $B(X) = \operatorname{adj} C(X)$ gilt dank O2R:

$$B(X) \cdot C(X) = \det C(X) \cdot I = \begin{bmatrix} \chi_A(X) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \chi_A(X) \end{bmatrix} \in K[X]^{n\times n}$$

Wir ersetzen wieder X durch A und erhalten:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = C(A) \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = B(A) \cdot C(A) \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_A(A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \chi_A(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

Somit gilt $\chi_A(A)\, e_i = 0$ in K^n für alle i, also $\chi_A(A) = 0$ in $K^{n\times n}$. $\boxed{\text{QED}}$

☺ Diese Rechnung folgt der naiven Eingebung „ersetze X durch A“. Die korrekte Ausführung erfordert allerdings extrem genaue Notation.

☺ Determinante und Adjunkte haben wir über jedem kommutativen Ring, insbesondere also über unserem Matrixunterring $K[A] \le K^{n\times n}$.

Minimalpolynom und charakteristisches Polynom

Zum guten Schluss fassen wir unsere Erkenntnisse wie folgt zusammen:

Satz P3J: Vergleich MiPo vs ChaPo, $\mu_f^v \mid \mu_f \mid \chi_f \mid (\mu_f)^a$

Sei $f : V \to V$ linear über dem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$.

(1) Falls das charakteristische Polynom χ_f über K zerfällt, so gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \chi_f &= (X-\lambda_1)^{r_1} \cdots (X-\lambda_k)^{r_k} && \text{mit } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j \text{ und} \\ \mu_f &= (X-\lambda_1)^{s_1} \cdots (X-\lambda_k)^{s_k} && \text{mit } 1 \le s_i \le r_i \text{ für alle } i. \end{aligned}}$$

(2) Das Minimalpolynom μ_f teilt das charakteristische Polynom χ_f, und umgekehrt teilt χ_f eine hinreichend hohe Potenz $(\mu_f)^a$ mit $a \in \mathbb{N}$.

(3) Allgemein haben beide Polynome dieselben Nullstellen:

$$\begin{aligned} \chi_f &= (X-\lambda_1)^{r_1} \cdots (X-\lambda_k)^{r_k}\, Q, \\ \mu_f &= (X-\lambda_1)^{s_1} \cdots (X-\lambda_k)^{s_k}\, P, \end{aligned}$$

wobei $P, Q \in K[X]$ keine Nullstellen in K haben und $P \mid Q \mid P^a$ erfüllen.

Minimalpolynom und charakteristisches Polynom

Beweis: (1) Zerfallen bedeutet $\chi_f = \prod_{i=1}^k (X-\lambda_i)^{r_i}$ mit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}^! \subseteq K$ und $r_1, \dots, r_k \ge 1$. Dank Cayley–Hamilton P3H gilt $\mu_f \mid \chi_f$, also zerfällt auch $\mu_f = \prod_{i=1}^k (X-\lambda_i)^{s_i}$ mit $s_i \le r_i$. Zu jedem $i = 1, \dots, k$ existiert $v \in \operatorname{Eig}(f, \lambda_i) \setminus \{0\}$. Also gilt $\mu_f^v = (X-\lambda_i) \mid \mu_f$, somit $s_i \ge 1$.

Aus (1) folgt (2), falls χ_f über K zerfällt. Die Aussage (2) gilt allgemein: Zerfällung gilt über einem geeigneten Erweiterungskörper $\bar{K} \ge K$. Daraus folgen die Aussagen (1,2) über $\bar{K}$, und somit (2,3) über K.

Genauer: Ohne Einschränkung betrachten wir $f : K^n \to K^n : x \mapsto Ax$. Es existiert eine Körpererweiterung $\bar{K} \ge K$, sodass χ_f über $\bar{K}$ zerfällt. Wir betrachten die lineare Abbildung $\bar{f} : \bar{K}^n \to \bar{K}^n : x \mapsto Ax$ über $\bar{K}$.

Für diese gilt Aussage (1), somit Teilbarkeit (2) $\mu_{\bar{f}} \mid \chi_{\bar{f}} \mid (\mu_{\bar{f}})^a$ in $\bar{K}[X]$. Es gilt $\chi_f = \chi_{\bar{f}}$ und $\mu_f = \mu_{\bar{f}}$ in $K[X] \le \bar{K}[X]$, also $\mu_f \mid \chi_f \mid (\mu_f)^a$ in $K[X]$. (Für χ ist das klar, für μ siehe die Bemerkung nach Algorithmus N3E.)

Somit gilt Teilbarkeit (2) tatsächlich über jedem Körper K. QED

Anwendungsbeispiel: Nilpotenz und Minimalpolynom

Sei R ein Ring, etwa $R = \operatorname{End}_K(V)$. Ein Element $f \in R$ heißt **nilpotent**, falls $f^k = 0$ für einen (hinreichend groß gewählten) Exponenten $k \in \mathbb{N}$. Der kleinste Exponent $m \in \mathbb{N}$ mit $f^m = 0$ heißt **Nilpotenzindex** von f.

Beispiel P3K: ein nilpotenter Endomorphismus

Für $f : V \to V$ linear über dem Körper K mit $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist nilpotent} \quad &\overset{\text{Def}}{\iff} \quad \text{Es gilt } f^k = 0 \text{ für einen Exponenten } k \in \mathbb{N} \\ \overset{(1)}{\iff} \quad \mu_f = X^m \quad &\overset{(2)}{\iff} \quad \chi_f = X^n \quad \overset{(3)}{\implies} \quad \operatorname{tr}(f) = 0 \wedge \det(f) \overset{n\ge1}{=} 0 \end{aligned}$$

Beweis: „$\overset{(1)}{\Leftarrow}$“: Aus $\mu_f = X^m$ folgt $f^m = 0$. „$\overset{(1)}{\Rightarrow}$“: Aus $f^k = 0$ folgt $\mu_f \mid X^k$, also $\mu_f = X^m$. Insbesondere ist m der minimale Exponent mit $f^m = 0$. „$\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$“: Das folgt aus dem Vergleichssatz P3J. „$\overset{(1)}{\Rightarrow}$“: Siehe Satz P3F. QED

Die letzte Bedingung ist notwendig, aber für $n \ge 3$ nicht hinreichend. Sie genügt nur in Dimension $n = 2$, dank $\chi_f = X^2 - \operatorname{tr}(f)X + \det(f)$, und in Dimension $n = 1$, dank $\chi_f = X - \lambda$ mit $\lambda = \operatorname{tr}(f) = \det(f)$. Im Sonderfall $n = 0$ gilt $f = 0 = \mathrm{id}_V$ und $\operatorname{tr}(f) = 0$, doch $\det(f) = 1$.

Das Minimalpolynom ist invariant unter Ähnlichkeit.

Lemma P3L: Das Minimalpolynom ist invariant unter Ähnlichkeit.

(1) Für jedes Polynom $P \in K[X]$ sowie $A \in K^{n\times n}$ und $T \in \mathrm{GL}_n K$ gilt:

$$\boxed{P(T^{-1}AT) = T^{-1}P(A)T}$$

(2) Aus $P(A) = 0$ folgt $P(B) = 0$ für alle ähnlichen Matrizen $B \sim A$.

(3) Das Minimalpolynom ist invariant unter Ähnlichkeit, also $\mu_A = \mu_B$.

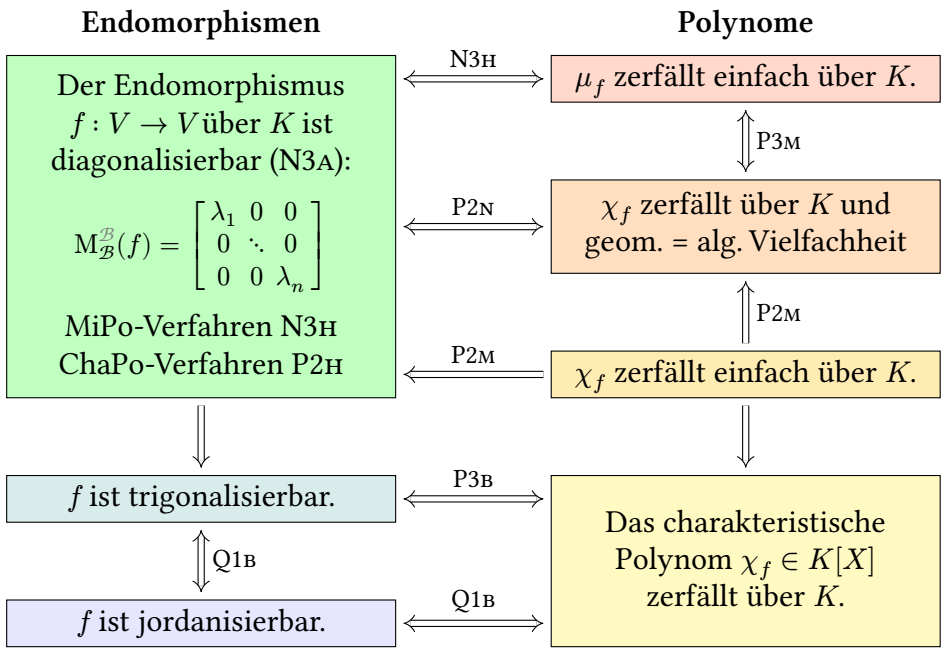
Beweis: (1) Wir setzen die konjugierte Matrix $B = T^{-1}AT$ in unser Polynom $P(X) = \sum_{i=0}^n p_i X^i$ ein und erhalten:

$$\begin{aligned} P(T^{-1}AT) &= \textstyle\sum_{i=0}^n p_i (T^{-1}AT)^i = \sum_{i=0}^n p_i (T^{-1}A^iT) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^n T^{-1}(p_iA^i)T = T^{-1}(\sum_{i=0}^n p_iA^i)T = T^{-1}P(A)T \end{aligned}$$

Daraus folgt (2) und daraus wiederum (3) nach Definition N3E. QED

☺ Der Algorithmus N3E ist demnach unabhängig von der Basiswahl. Die Definition N3E ist ohnehin schon basisunabhängig formuliert.

Diagonalisierung: notwendige und hinreichende Kriterien



Diagonalisierung: notwendige und hinreichende Kriterien

Zum guten Schluss fassen wir unsere Kriterien und Verfahren zusammen:

Satz P3M: Kriterien zur Diagonalisierbarkeit

Sei $f : V \to V$ linear über dem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$.
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Der Endomorphismus $f : V \to V$ ist diagonalisierbar.
2. Es gilt die Eigenraumzerlegung $V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(f)} \operatorname{Eig}(f, \lambda)$.
3. Es gilt die Dimensionsgleichung $n = \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \dim_K \operatorname{Eig}(A, \lambda)$.
4. Das Minimalpolynom zerfällt einfach, also $\mu_f = \prod_{\lambda \in \sigma(f)} (X - \lambda)$.
5. Das charakteristische Polynom χ_f zerfällt über K in Linearfaktoren und für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma(f)$ gilt $\dim_K \operatorname{Eig}(f, \lambda) = \operatorname{ord}(\chi_f, \lambda)$.

Beweis: Die Äquivalenz „(1) ⇔ (2)“ verdanken wir Satz N3C.
Das Dimensionskriterium „(2) ⇔ (3)“ verdanken wir Satz P1D.
Die MiPo-Kriterium „(2) ⇔ (4)“ verdanken wir Satz N3H.
Die ChaPo-Kriterium „(2) ⇔ (5)“ verdanken wir Satz P2N. QED

Zusammenfassung zur Diagonalisierung

Was ist das wichtigste Thema der Linearen Algebra? Die Antwort ist klar: **Diagonalisierung!** Somit auch der Aufbau der dazu nötigen Grundlagen:

- Diagonalisierung und Eigenbasis (N3A), Eigengleichung, Eigenvektor, Eigenwert, Spektrum, Eigenraum und geometrische Vielfachheit (N3B)
- Eigenraumzerlegung N3C, Kernzerlegung N3G, MiPo-Verfahren N3H dank Minimalpolynom (lokal N3D, global N3E, Teilbarkeit N3F)
- Unabhängigkeit von Eigenvektoren (P1A) und Dimensionsformel P1D
- Eigenwerte dank Determinante (P2A), char. Polynom (P2D), Ähnlichkeit / Konjugation von Matrizen (P2E) und Invarianz (P2F)
- Das bewährte ChaPo-Verfahren P2H zur Diagonalisierung
- Erreicht die geometrische Vielfachheit die algebraische? (P2N) Einfache Zerfällung impliziert Diagonalisierbarkeit. (P2M)
- Reelle Drehstreckungen sind reell nicht diagonalisierbar. (N3I, P2P) Jordan–Blöcke zerfallen, sind aber nicht-diagonalisierbar. (N3J, P2O)
- Begleitmatrix (P2R). Eigenvektoren lösen lineare Rekursion. (P2S)

Zusammenfassung zur Diagonalisierung

Diagonalisierung P2N hat zwei Bedingungen: (a) Das char. Polynom zerfällt und (b) die geometrische Vielfachheit erreicht die algebraische. Letzteres ist nicht immer gegeben, statt Diagonalisierung begnügen wir uns dann mit einer Trigonalisierung; das ist wenig, aber immerhin etwas:

- Trigonalisierung (P3A) ist äquivalent zu Zerfällung (P3B).
- Wir lesen Spur und Determinante aus den Eigenwerten. (P3F) Umgekehrt gelesen: Den letzten Eigenwert gibt es gratis! (P313)

Minimalpolynom und char. Polynom arbeiten wunderbar zusammen! Jedes hat seine jeweils eigenen Vorzüge: Mal ist das eine besser geeignet, mal das andere, mal gelingen beide. Wählen Sie weise Ihr Werkzeug.

- Lokales Minimalpolynom (N3D) und Cayley–Hamilton (P3H)
- Das (globale) Minimalpolynom eines Endomorphismus (N3E)
- Teilbarkeit (P3H) und Nullstellen (P3J) der beiden Polynome
- Teilerfremde Faktorisierung und Kernzerlegung (N3G)
- Äquivalente Kriterien zur Diagonalisierbarkeit (P3M)

Beispiel: Diagonalmatrix und Dreiecksmatrix

Beispiel P4A: Diagonalmatrizen und Dreiecksmatrix

Wir betrachten **Diagonalmatrizen** und **Dreiecksmatrizen** in $K^{n\times n}$:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Was ist hier besonders leicht zu berechnen: MiPo? ChaPo? Eigenbasis?

Lösung: (A) Dank Satz O2W können wir das ChaPo direkt ablesen:

$$\chi_A = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n) \in K[X]^1_n$$

Das MiPo erhalten wir durch Reduktion jeder alg. Vielfachheit auf 1: Sei $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\} = \{\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*\}^!$. Damit können wir das MiPo ablesen:

$$\mu_A = (X-\lambda_1^*)\cdots(X-\lambda_m^*) \in K[X]^1_m$$

dank Satz P3J. Ausführlich und direkt, ohne ChaPo, siehe Beispiel N3K. Genau dann gilt $\mu_A = \chi_A$, wenn alle Eigenwerte verschieden sind.

Beispiel: Diagonalmatrix und Dreiecksmatrix

Die Standardbasis $(e_1,\dots,e_n)$ des Raums K^n ist eine Eigenbasis zu A. Die gemetrischen und algebraischen Vielfachheiten sind hier gleich.

Genau dann gilt $\operatorname{Ker}(A-\lambda I) \neq \{0\}$, wenn $\lambda \in \{\lambda_1,\dots,\lambda_n\} = \sigma(A)$. Zum EW λ_k ist e_k ein EV, ebenso jedes Vielfache $v \in Ke_k \smallsetminus \{0\}$.

Zum Skalar $\lambda \in K$ gehört der Eigenraum $\operatorname{Eig}(f,\lambda) = \langle e_i \mid \lambda_i = \lambda\rangle^!_K$. Gilt $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, so haben wir n Eigenräume $\operatorname{Eig}(f,\lambda_i) = \langle e_i\rangle^!_K$.

(B) Dank Satz O2W können wir das ChaPo direkt ablesen:

$$\chi_A = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n) \in K[X]^1_n$$

Das MiPo hingegen ist nicht so offensichtlich. Dank Cayley–Hamilton P3H wissen wir immerhin $\mu_A \mid \chi_A$. Sind alle Eigenwerte $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$ paarweise verschieden, so erhalten wir sogar $\mu_A = \chi_A$ dank Satz P3J. Sowohl P2M als auch N3H garantieren dann Diagonalisierbarkeit.

⚠ Im Allgemeinen können algebraische Vielfachheiten auftreten, und wir müssen dazu die geometrischen Vielfachheiten prüfen. (P2N)

Beispiel: konstante Matrix

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ \dots,\ A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \in K^{n\times n}$$

Aufgabe: Ist diese Matrix diagonalisierbar über $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p$? Wie gehen Sie geschickt vor? Wie bestimmen Sie effizient ChaPo und MiPo, das Spektrum und eine Eigenbasis? In welcher Reihenfolge?

Lösung: Der Rang ist 1, somit ist 0 Eigenwert mit Vielfachheit $n-1$. Den letzten Eigenwert λ gibt es immer gratis (P3F), hier $\lambda = \operatorname{tr}(A) = n$.

Teilt $p = \operatorname{char} K$ die Dimension n? Falls ja, so hat 0 die alg. Vielfachheit n, doch geom. nur $n-1$, unsere Matrix A also nicht diagonalisierbar. (P2N)

Andernfalls gilt $n \neq 0$ in K. Wir sehen $v_1 = (1,\dots,1)^\top$ mit $Av_1 = nv_1$. Für $v_2 = e_2 - e_1, \dots, v_n = e_n - e_{n-1}$ gilt $Av_k = 0$. Wir haben somit die Eigenbasis $(v_1,\dots,v_n)$, daraus $\chi_A = X^{n-1}(X-n)$ und $\mu_A = X(X-n)$.

⚠ Stur angewendet ist das ChaPo-Verfahren P2M hier allzu umständlich. Das MiPo-Verfahren N3H gelingt leicht dank $A^2 = nA$, also $\mu = X(X-n)$. Noch besser ist hier die Methode des scharfen Hinsehens. Denken hilft!

Beispiel: Rahmenmatrix

Aufgabe: Bestimmen Sie das ChaPo und das MiPo der Rahmenmatrix

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \dots,\ A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösung: Der Rang ist 2, somit ist 0 Eigenwert mit Vielfachheit $n-2$. Laplace Entwicklung ergibt (mühsam) $\chi_A = X^{n-2}(X^2 - 2X + 4 - 2n)$.

☺ Besser durch scharfes Hinsehen: Der Ansatz $v = (a,b,\dots,b,a)^\top$ gibt $Av = (c,d,\dots,d,c)$ mit $c = 2a + (n-2)b$ und $d = 2a$. Die Eigengleichung $Av = \lambda v$ führt nach kurzer Rechnung zu $\lambda^2 - 2\lambda + 4 - 2n = 0$. Elegant!

☺ Direkt mit MiPo: Für $v = (1,\dots,1)$ gilt $f(v) = (n,2,\dots,2,n) =: w$ und $f(w) = (4n-4, 2n, \dots, 2n, 4n-4) = 2w + (2n-4)v$. Das Verfahren zeigt $\mu_A^v = (X^2 - 2X + 4 - 2n)$, also $\chi_A = X^{n-2}(X^2 - 2X + 4 - 2n)$ dank P3H.

☺ Rechenwege sind unterschiedlich schnell, doch alle führen schließlich zu Eigenwerten und Eigenvektoren und charakteristischem Polynom. Ist A diagonalisierbar? Ja! Dank P3J folgt $\mu_A = X(X^2 - 2X + 4 - 2n)$.

Das charakteristische Polynom eines Produkts

Seien $A, B \in K^{n\times n}$ zwei quadratische Matrizen über dem Körper K.
Ist die Spur multiplikativ? Nein, sie ist additiv, doch im Allgemeinen gilt:

$$\operatorname{tr}(A \cdot B) \neq \operatorname{tr}(A) \cdot \operatorname{tr}(B)$$

Ein besonders einfaches, wahrhaft minimalistisches Gegenbeispiel ist

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ist die Determinante multiplikativ? Ja, dank Satz O2o:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B),$$

Scherzfrage: Ist auch das charakteristische Polynom multiplikativ?
Nein! Für das charakteristische Polynom gilt schon aus Gradgründen:

$$\chi_{A\cdot B} \neq \chi_A \cdot \chi_B$$

Um sich gegen solch naiven Irrglauben zu immunisieren,
erfinden, berechnen, merken Sie sich geeignete Gegenbeispiele!

Das charakteristische Polynom eines Produkts

Für die Determinante $\det : K^{n\times n} \to K$ gilt dank Multiplikativität O2o:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(B) \cdot \det(A) = \det(A \cdot B)$$

für alle $A, B \in K^{n\times n}$. Die Spur $\operatorname{tr} : K^{n\times n} \to K$ ist nicht multiplikativ,
doch dank Satz D1h ebenfalls invariant unter zyklischer Vertauschung:

$$\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A).$$

Frage: Gilt dies sogar für das gesamte charakteristische Polynom?

$$\chi_{AB} \overset{?}{=} \chi_{BA}$$

Teilantwort: Ist eine der beiden Matrizen A oder B invertierbar,
so folgt dies aus der Invarianz P2f unter Konjugation / Ähnlichkeit:

$$\chi_{AB} = \chi_{A^{-1}(AB)A} = \chi_{BA}$$
$$\chi_{AB} = \chi_{B(AB)B^{-1}} = \chi_{BA}$$

Satz P4b verallgemeinert dies auf nicht-invertierbare Matrizen.

Das charakteristische Polynom eines Produkts

Satz P4b: das charakteristische Polynom eines Produkts

Sei K ein Körper oder allgemein ein kommutativer Ring.
(0) Für je zwei rechteckige Matrizen $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times m}$ gilt

$$\chi_{AB} \cdot X^n = \chi_{BA} \cdot X^m.$$

(1) Für je zwei quadratische Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ gilt

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}.$$

Aus (0) folgt (1) dank $m = n$ und Kürzung des Faktors $X^m = X^n$.
Umgekehrt folgt (0) aus (1) durch Auffüllen mit Nullzeilen/spalten.

Für Determinante und Spur ist die Aussage klar, wie zuvor erklärt.
Dies sind beiden extremen Koeffizienten des Polynoms (Satz P2d).

Die Koeffizienten zwischen Spur und Determinante in $\chi_{AB} = \chi_{BA}$
haben keine so leichte Interpretation, doch auch sie sind invariant
unter zyklischer Vertauschung der Matrixfaktoren von AB zu BA.

Das charakteristische Polynom eines Produkts

Beweis: (0) Wir berechnen zunächst folgende Matrixprodukte:

$$\begin{bmatrix} XI_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & XI_n \end{bmatrix} \overset{(a)}{=} \begin{bmatrix} XI_m - AB & 0 \\ B & XI_n \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} XI_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & XI_n \end{bmatrix} \overset{(b)}{=} \begin{bmatrix} XI_m & XA \\ 0 & XI_n - BA \end{bmatrix}$$

Dank Multiplikativität der Determinante O2o und Satz O2w folgt:

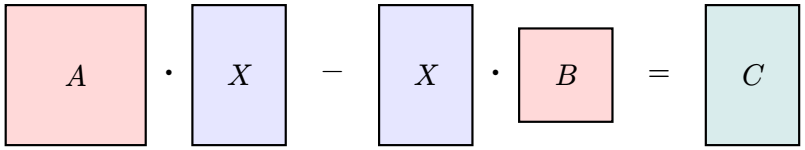
$$\det(XI_m - AB)X^n \overset{(a)}{=} \begin{vmatrix} I_m & A \\ B & XI_n \end{vmatrix} X^m \overset{(b)}{=} \det(XI_n - BA)X^m$$

Das ist trickreich-raffiniert. Rechnen Sie es nach! $\boxed{\text{QED}}$

Das ist eine gefürchtete Übungsaufgabe (oder Klausuraufgabe?) aus
Paul Halmos, *Finite dimensional vector spaces* (1958), §53, exercise 13.

Ohne den Trick oder einen Hinweis ist es schwer, mit ist es leicht.
Liegen die Formeln erst einmal vor uns, so genügt Nachrechnen.

Die Sylvester–Gleichung



Gesucht sind alle Lösungen $X \in K^{m\times n}$ der **Sylvester–Gleichung**:

$$\boxed{AX - XB = C}$$

Gegeben sind dazu Matrizen $A \in K^{m\times m}$ und $B \in K^{n\times n}$ sowie $C \in K^{m\times n}$.

$$\begin{array}{lll} n \geq 1,\ B = 0: & AX - X0 = C, & AX = C \quad \text{LGS} \\ n = 1,\ C = 0: & AX - XB = 0, & Ax = x\lambda \quad \text{EG!} \\ n \geq 1,\ C = 0: & AX - XB = 0, & AX = X\Lambda \quad \text{ES!} \end{array}$$

Wir denken an $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, also ein Eigengleichungssystem (ES). Später betrachten wir ebenso die Hauptvektorgleichung $Av_2 - v_2\lambda = v_1$.
Bemerkung: Die Gleichung wird auch als $AX + XB = C$ formuliert, das ist offensichtlich äquivalent durch Ersetzung von B durch $-B$.

Die Sylvester–Gleichung

Die **Sylvester–Gleichung** wird für Differentialgleichungen genutzt, speziell in der Stabilitätstheorie und Kontrolltheorie. Sie hat die Form

$$\boxed{AX - XB = C.}$$

Gegeben sind Matrizen $A \in K^{m\times m}$ und $B \in K^{n\times n}$ sowie $C \in K^{m\times n}$. Gesucht sind alle Lösungen $X \in K^{m\times n}$, die obige Gleichung erfüllen.

Lemma P4c: Sylvester–Gleichung als in/homogenes LGS

Die Sylvester–Gleichung ist K–linear in X! Die linke Seite $f : K^{m\times n} \to K^{m\times n} : X \mapsto AX - XB$ ist eine K–lineare Abbildung, also $f(X) = C$ eine affin-lineare Gleichung, und homogen für $C = 0$.

Über K ist sie ein lineares Gleichungssystem mit mn Unbestimmten (x_{ij}) und ebensoviele Gleichungen. Jede konkrete Instanz lässt sich daher mit dem Gauß–Verfahren lösen, der Aufwand ist $(mn)^3$ Operationen in K.

Lassen sich allgemeine Aussagen über die Lösbarkeit dieser Gleichung $AX - XB = C$ machen? Dies wollen wir im Folgenden klären!

Die Sylvester–Gleichung

Satz P4D: eindeutige Lösbarkeit der Sylvester–Gleichung

Wir setzen voraus, dass $\chi_A \in K[T]$ und $\chi_B \in K[T]$ über K zerfallen. Dies ist automatisch erfüllt, wenn wir über $K = \mathbb{C}$ arbeiten.

(1) Genau dann erlaubt $AX - XB = 0$ eine Lösung $X \in K^{m\times n} \smallsetminus \{0\}$, wenn A und B einen gemeinsamen Eigenwert $\lambda \in K$ haben.

(2) Sind die Spektren von A und B disjunkt, so hat $AX - XB = C$ für jede rechte Seite $C \in K^{m\times n}$ genau eine Lösung $X \in K^{m\times n}$.

Beispiel: Die **Lyapunov–Gleichung** $AX + XA^\dagger + Q = 0$ über $\mathbb{C}$ entsteht aus der Sylvester–Gleichung als Spezialfall mit $B = -A^\dagger$ und $C = -Q$. Hat die Matrix A nur Eigenwerte λ mit $\operatorname{re}\lambda < 0$, so hat $B = -A^\dagger$ nur Eigenwerte $\mu = -\bar\lambda$ mit $\operatorname{re}\mu > 0$, die beiden Spektren sind also disjunkt, und der Satz garantiert die Eindeutigkeit und die Existenz der Lösung X.

Damit sind alle theoretischen Hindernisse aus dem Weg geräumt, und wir können uns praktischen Fragen der Berechnung zuwenden: Die Numerik entwickelt Verfahren zur effizienten Approximation.

Die Sylvester–Gleichung

Beweis: (2) Die lineare Gleichung $L(X) = C$ lässt sich genau dann für jede rechte Seite C eindeutig lösen, wenn $\operatorname{Ker}(L) = 0$ gilt. Gauß!

(1a) „$\Leftarrow$“: Sei $\lambda \in K$ ein gemeinsamer Eigenwert. Wir haben $Au = u\lambda$ mit $u \in K^{m\times 1} \smallsetminus \{0\}$ und $vB = \lambda v$ mit $v \in K^{1\times n} \smallsetminus \{0\}$. So erhalten wir $X = uv \in K^{m\times n} \smallsetminus \{0\}$ als eine Lösung von $AX - XB = 0$, denn:

$$AX - XB \;=\; Auv - uvB \;=\; v\lambda v - u\lambda v \;=\; 0$$

(1b) „$\Rightarrow$“: Angenommen, die charakteristischen Polynome $p = \chi_A$ und $q = \chi_B$ zerfallen ohne gemeinsame Nullstelle in K, und sind somit teilerfremd: Es gibt Bézout–Koeffizienten $u, v \in K[X]$ mit $pu + qv = 1$. Dank $q(B) = 0$ gilt $p(B)u(B) = 1$, also ist $p(B)$ invertierbar.

Sei $AX - XB = 0$, also $AX = XB$. Per Induktion folgt $A^kX = XB^k$ also $h(A)X = Xh(B)$ für jedes Polynom $h \in K[X]$. Wir wählen nun $h = p$. Dank Cayley–Hamilton gilt $p(A) = 0$. Hingegen ist $p(B)$ invertierbar, also gilt $X = 0$. QED

Kapitel P

Bonusmaterial

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "f_D"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}"] & K^n \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}", "\cong"'] \\ V \arrow[r, "f"'] & V \end{tikzcd}$$

If I have seen further it is by standing on the shoulders of giants.
Isaac Newton (1643–1727) an Robert Hooke (1635–1703) in einem Brief von 1675

Inhalt dieses Kapitels P

5 Divisionsalgebren: die reelle Trilogie $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$
- Warum musste Hamilton mit Tripeln scheitern?
- Algebra: Vektoren skalieren, addieren und multiplizieren!
- Über $\mathbb{R}$ gibt es nur drei assoziative Divisionsalgebren: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

6 Gerschgorin: Lokalisierung der komplexen Eigenwerte
- Semjon Gerschgorin und seine Kreise
- Spektralradius und Diagonaldominanz

7 Simultane Diagonalisierung
- Kommutierende Endomorphismen
- Erste Anwendungsbeispiele

Erste spektakuläre Anwendungen

Der Körper $(\mathbb{R}, +, 0, \cdot, 1, \leq)$ der reellen Zahlen wird überall gerne genutzt. Er ist geordnet und (supremums-)vollständig, und darauf bauen viele wunderbare Eigenschaften in der Analysis und all ihren Anwendungen. Ein einziges Manko bleibt: Nicht jedes Polynom über $\mathbb{R}$ zerfällt über $\mathbb{R}$.

☺ Der Körper $\mathbb{C} = \mathbb{R}[\mathrm{i}] = \mathbb{R}[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{R}^2$ löst dieses Problem! Er ist zwar nicht mehr geordnet, dafür jedoch algebraisch vollständig: Jedes Polynom über $\mathbb{C}$ zerfällt über $\mathbb{C}$. In vielen Gebieten der Mathematik und ihren Anwendungen ist daher der Körper $\mathbb{C}$ die bewährte Grundlage.

☺ Davon profitieren wir auch und besonders in der Linearen Algebra: Wir arbeiten oft mit reellen Polynomen und wünschen uns Zerfällung. Dies gelingt nicht immer über $\mathbb{R}$, siehe X^2+1, aber immer über $\mathbb{C}$! Der Satz P6A von Gerschgorin erlaubt eine grobe Lokalisierung.

☺ Für die LinA2 werden die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ ein zentrale Rolle spielen. Die grundlegenden Techniken gelten allgemeiner, doch $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ erlauben sowohl eine besonders tiefe Theorie als auch zahlreiche Anwendungen.

Erste spektakuläre Anwendungen

Hamilton war fasziniert von der Körpererweiterung $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$: Wir können Vektoren nicht nur addieren, sondern auch multiplizieren, und erhalten so die Körpererweiterung $\mathbb{C} \geq \mathbb{R}$. Was liegt näher, als dies auf $\mathbb{R}^3$ zu wiederholen? Hamilton suchte acht Jahre vergeblich danach!

Hamilton hätte sich seine jahrelange Suche ersparen können. Satz P5B besagt: In Dimension $n = 3, 5, 7, \ldots$ hat $(\mathbb{R}^n, +, 0, \diamond, e)$ Nullteiler. Mit den Werkzeugen Ihrer Linearen Algebra passt der Beweis auf eine Postkarte. Warum fiel es Hamilton so schwer und gelingt Ihnen heute so leicht?

Sie profitieren von einer fertig ausgebauten Theorie, die Werkzeuge liegen vor Ihnen auf dem Silbertablett, Sie nießen die Erfahrung vieler Generationen vor Ihnen. Dieses kulturelle Erbe verdient Wertschätzung.

▶ *Was sind und was sollen die Quaternionen?* `youtu.be/9AakzE0ZLaQ`
Ein schönes und ausführliches Video von Prof. Edmund Weitz mit Erläuterungen zur historischen Entwicklung und Anwendungen, etwa Drehungen im Raum für Physik, Graphik, Navigation, uvm.

Beispiele in un/endlicher Dimension

Aufgabe: (0) Nennen Sie zehn (interessante) lineare Abbildungen $f : V \to V$ über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_q, \ldots$, die gar keine Eigenwerte haben! Gelingt das zudem nicht/injektiv? nicht/surjektiv? nicht/bijektiv?
(1) Was gilt in un/endlicher Dimension über $\mathbb{C}$?
(2) Was gilt in un/gerader Dimension über $\mathbb{R}$?

Ideen: (0) Für den (langweiligen) Nullraum $V = \{0\}$ gilt $f = 0 = \mathrm{id}_V$. Zwar hat f die Eigenbasis $()$, aber keine Eigenvektoren / Eigenwerte.

Interessanter ist die Multiplikation $m : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] : P \mapsto X \cdot P$, ebenso der Shift $r : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : (x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_0, x_1, x_2, \ldots)$.

Bijektiv ist $s : \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} : (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{i-1})_{i\in\mathbb{Z}}$, jedoch mit $\sigma(u) = \mathbb{K}^\times$. Die Einschränkung $s : \mathbb{K}^{(\mathbb{Z})} \to \mathbb{K}^{(\mathbb{Z})}$ hingegen hat keine Eigenvektoren.

Bedenken Sie weitere Beispiele zu Folgen, Polynomen, Funktionen, ...

Jedes solche Beispiel f ist injektiv, denn nicht-injektiv ist gleichbedeutend zu $\{0\} \neq \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Eig}(f, 0)$, also $0 \in \sigma(f)$. Surjektiv oder bijektiv spielt keine Rolle, siehe m, r und s.

Beispiele in un/endlicher Dimension

(1) Die vorigen Gegenbeispiele gelten insbesondere auch über $\mathbb{C}$: Die $\mathbb{C}$–linearen Abbildungen m, r, u haben keinerlei Eigenwerte. In *endlicher* Dimension haben wir das charakteristische Polynom. Über $\mathbb{C}$ zerfällt es immer, das garantiert Eigenwert und Eigenvektor.

(2) Die reelle Drehstreckung P2P hat keine reellen Eigenwerte. Solche Gegenbeispiele existieren daher in jeder geraden Dimension über $\mathbb{R}$. In ungerade Dimension hingegen hat das charakteristische Polynom mindestens eine Nullstelle, somit existiert mindestens ein Eigenwert.

Sie sehen an diesen Beispielen, dass endliche Dimension wesentlich ist. Unendliche Dimension ist schöner Ausblick und lehrreicher Kontrast: O wie einfach doch stark sind die Werkzeuge der Linearen Algebra!

Unendliche Dimension bietet mehr Platz: mehr Chancen, mehr Risiken. Um hier dennoch ausreichend starke Werkzeuge zu erhalten, benötigen wir noch weitere Struktur, etwa Skalarprodukt, Norm, Topologie, etc. Dies wird in der Funktionalanalysis äußerst erfolgreich ausgeführt.

Beispiel in unendlicher Dimension: die Verschiebung

Aufgabe: Ist der Verschiebeoperator $s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ diagonalisierbar? Hierbei sei $s(f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots) = (f_1, f_2, f_3, \ldots)$. Bonus: Was gilt auf $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$?

Ideen: Wir kennen das Spektrum $\sigma(s; \mathbb{K}) = \mathbb{K}$: Zu jedem Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\mathrm{Eig}(s, \lambda) = \langle e_\lambda = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle_{\mathbb{K}}^{!}$. Die Familie $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{K}}$ ist frei (M1K, P1B).

(0) In $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} < \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ haben wir nur $\mathrm{Eig}(s, 0) = \langle e_0 \rangle_{\mathbb{K}}^{!}$, das ist zu wenig.

(1) Für jeden endlichen Körper $\mathbb{K}$ hat die Summe $E = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{K}} \mathrm{Eig}(s, \lambda)$ die Dimension $\sharp\mathbb{K} < \infty$, doch der Raum $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist unendlich-dimensional.

(2) Wenn $\mathbb{K}$ abzählbar ist, wie $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, etc., so hat E nur abzählbare Dimension, doch der gesamte Raum $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist überabzählbar-dimensional.

(3) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ haben E und $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dieselbe (überabzählbare) Dimension. Das bedeutet natürlich noch nicht $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Tatsächlich ist dies falsch:

Elegante Lösung: Die Folge $f = (0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$ erfüllt $f \overset{s}{\longmapsto} e_0 \overset{s}{\longmapsto} 0$. Ihr Minimalpolynom $\mu_s^f = X^2$ zerfällt, aber nicht einfach. Nach Satz N3H ist f nicht Summe von Eigenvektoren, also s nicht diagonalisierbar.

☺ Hier brilliert das lokale Minimalpolynom als effizientes Werkzeug!

Beispiel in unendlicher Dimension: die Ableitung

Aufgabe: Ist die Ableitung $\partial : V \to V$ diagonalisierbar auf $V = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$? (1) auf $\mathbb{K}[t]$? (2) auf $U = \langle t \mapsto \cos(kt), \sin(kt) \mid k \in \mathbb{Z} \rangle_{\mathbb{K}}$?

Lösung: (1) Die Polynomfunktion $f(t) = t$ erfüllt $f \overset{\partial}{\longmapsto} 1 \overset{\partial}{\longmapsto} 0$. Ihr lokales Minimalpolynom $\mu_\partial^f = X^2$ zerfällt nicht einfach. Nach Satz N3H ist f nicht Summe von Eigenvektoren, also ∂ nicht diagonalisierbar. (N5G)

(2a) Für die Funktion cos gilt $\cos \overset{\partial}{\longmapsto} \sin \overset{\partial}{\longmapsto} -\cos$. Ihr Minimalpolynom $\mu_\partial^{\cos} = X^2 + 1$ zerfällt nicht über $\mathbb{R}$. Nach Satz N3H ist f nicht Summe von Eigenvektoren, also ∂ nicht diagonalisierbar. (Ebenso $\cos(kt)$ und $\sin(kt)$.)

☺ Hier brilliert das lokale Minimalpolynom als effizientes Werkzeug!

(2b) Über $\mathbb{C}$ gelingt es! Wir wechseln zur Eigenbasis $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mit

$$e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = \cos(kt) + \mathrm{i}\sin(kt) \quad \text{und zurück}$$
$$\cos(kt) = \tfrac{1}{2}(e_k(t) + e_{-k}(t)), \quad \sin(kt) = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(e_k(t) - e_{-k}(t)).$$

Der Basiswechsel ist die Euler–Formel! Nun gilt $\partial e_k = \mathrm{i}k$, wie gewünscht.

☺ Hier brillieren die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als effizientes Werkzeug!

Die Trilogie $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ — „Papa, can you multiply triplets?“

Frage P5A: Divisionsalgebren über $\mathbb{R}$

Wir wollen Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ skalieren, addieren... und multiplizieren!
In welchen Dimensionen n finden wir auf $\mathbb{R}^n$ ein interessantes Produkt?

$$\diamond : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (u, v) \mapsto u \diamond v$$

(0) Es soll $\mathbb{R}$–bilinear sein, für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gelte also:

$$\begin{array}{lll} \text{(L)} & u \diamond (v + w) = (u \diamond v) + (u \diamond w), & u \diamond (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (u \diamond v), \\ \text{(R)} & (u + v) \diamond w = (u \diamond w) + (v \diamond w), & (\lambda \cdot u) \diamond v = \lambda \cdot (u \diamond v). \end{array}$$

(1) Wir fordern ein Neutrales $e \in \mathbb{R}^n$, mit $e \diamond v = v = v \diamond e$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

(2) Am besten soll $(\mathbb{R}^n, +, 0, \diamond, e)$ ein Körper sein, oder ein Divisionsring, oder wenigstens nullteilerfrei, genannt eine reelle **Divisionsalgebra** P5I.

☺ Dies gelingt uns für $n = 1, 2, 4$ dank der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, 0, \cdot, 1)$, der komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, 0, \cdot, 1)$ und der Quaternionen $(\mathbb{H}, +, 0, \cdot, 1)$.

Aufgabe: Dies ist unmöglich in ungerader Dimension $n = 3, 5, 7, \ldots$.

Die Trilogie $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ — „Papa, can you multiply triplets?“

„Können wir Sie für eines unserer interessanten Produkte begeistern?“
Die Konstruktion des Körpers $\mathbb{C}$ ist ein Geniestreich! (Siehe E3A und E3B)
(?) Davon inspiriert möchten wir weitere DRinge $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ konstruieren.
☺ Auf $\mathbb{Q}^3$ über $\mathbb{Q}$ gelingt dies, etwa durch $\mathbb{Q}^3 \cong \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \mathbb{Q}[X]/(X^3 - 2)$,
☹ auf $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ aber nicht! Hamilton versuchte es acht Jahre vergeblich:

In 1835, at the age of 30, he had discovered how to treat complex numbers as pairs of real numbers. Fascinated by the relation between $\mathbb{C}$ and 2-dimensional geometry, he tried for many years to invent a bigger algebra that would play a similar role in 3-dimensional geometry. [...] His quest built to its climax in October 1843. He later wrote to his son, "Every morning [... you] used to ask me: 'Well, Papa, can you multiply triplets?' Whereto I was always obliged to reply, with a sad shake of the head: 'No, I can only add and subtract them.' " The problem, of course, was that there exists no 3-dimensional normed division algebra. He really needed a 4-dimensional algebra. (John Baez, *The Octonions*, 2002)

Heute wissen wir, dass dies nicht gelingen konnte. Hamilton hätte Jahre sparen können mit den Werkzeugen der Linearen Algebra. Sie verfügen nun über die nötigen Techniken, der Beweis wird dadurch genial-einfach!

Warum musste Hamilton mit Tripeln scheitern?

Satz P5B: Divisionsalgebren über $\mathbb{R}$

Ist $(\mathbb{R}^n, +, 0, \diamond, e)$ über $\mathbb{R}$ nullteilerfrei und $n \in \mathbb{N}$ ungerade, so folgt $n = 1$.
Kontraposition: In Dimension $n = 3, 5, 7, \ldots$ hat $(\mathbb{R}^n, +, 0, \diamond, e)$ Nullteiler.

Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Dazu betrachten wir die Linksmultiplikation

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : v \mapsto a \diamond v.$$

Dank (L) ist A eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung mit charakteristischem Polynom

$$\chi_A = \det(XE - A) \in \mathbb{R}[X]^1_n.$$

Da n ungerade ist, hat χ_A eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$ (ZWS). Dazu existiert ein Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ mit $Av = \lambda v$. Für $u := \lambda e - a \in \mathbb{R}^n$ gilt somit

$$u \diamond v \overset{\text{Def}}{=} (\lambda e - a) \diamond v \overset{\text{(R)}}{=} \lambda v - Av \overset{\text{Eig}}{=} 0.$$

Dank Nullteilerfreiheit und $v \neq 0$ folgt daraus $u = 0$, also $a = \lambda e$.
Da dies für alle $a \in \mathbb{R}^n$ gilt, folgt $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}e$, also $n = 1$. QED

Warum musste Hamilton mit Tripeln scheitern?

Aufgabe: Für welche (K, n) existieren Körper $(K^n, +, 0, \diamond, e)$ über K?
$(\mathbb{F}_2, 2)$, $(\mathbb{F}_2, 3)$, ...? $(\mathbb{Q}, 2)$, $(\mathbb{Q}, 3)$, ...? $(\mathbb{R}, 2)$, $(\mathbb{R}, 3)$, ...? $(\mathbb{C}, 2)$, $(\mathbb{C}, 3)$, ...?

Lösung: (1) Über $\mathbb{F}_2$ ist $P = X^2 + X + 1$ unzerlegbar, da ohne Nullstelle. Somit ist $\mathbb{F}_2[X]/P =: \mathbb{F}_4$ eine Körperweiterung von $\mathbb{F}_2$ der Dimension 2. Ebenso gelingt Dimension 3 mit $X^3 + X^2 + 1$ und mit $X^3 + X + 1$.

(2) Über $\mathbb{Q}$ sind $X^2 - 2$ und $X^2 + 1$ unzerlegbar. So erhalten wir Körperweiterungen der Dimension 2 duch $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ und $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 1) = \mathbb{Q}[\mathrm{i}]$. Ebenso gelingt Dimension 3 durch $\mathbb{Q}[X]/(X^3 + 2)$.

(3) Über $\mathbb{R}$ ist $X^2 + 1$ unzerlegbar. Somit sind $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) = \mathbb{R}[\mathrm{i}] = \mathbb{C}$ eine Körperweiterung von $\mathbb{R}$ der Dimension 2. Dimension 3 hingegen ist nachweislich unmöglich dank unserem obigen Satz P5B. Und über $\mathbb{C}$?

Satz P5C: Divisionsalgebren über $\mathbb{C}$

Ist $(\mathbb{C}^n, +, 0, \diamond, e)$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ über $\mathbb{C}$ nullteilerfrei, so folgt $n = 1$.

Übung: Dies folgt nach dem Vorbild P5B dank Fundamentalsatz E3C.

Algebren über einem Körper oder kommutativen Ring

Sei $(K, +, 0, \cdot, 1)$ ein kommutativer Ring, etwa $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/n$.

Erinnerung: Ein **linearer Raum** $(A, +, 0, \cdot)$ über K besteht aus einer abelschen Gruppe $(A, +, 0)$ mit Skalierung $\cdot : K \times A \to A$ (hier von links, alternativ von rechts), sodass für alle $\lambda, \mu \in K$ und $u, v \in A$ gilt:

$$\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v, \qquad 1 \cdot v = v,$$
$$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v, \qquad (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v).$$

Man beachte, dass hier wie üblich die beiden Additionen mit demselben Symbol $+$ bezeichnet werden, ebenso mit $\cdot$ die beiden Multiplikationen.

Ist unser Grundring K ein Körper, so nennen wir A einen K–Vektorraum. Eine **K–Algebra** $(A, \diamond)$ ist ein K–Vektorraum A mit einer Multiplikation

$$\diamond : A \times A \to A,$$

die mit der Vektorraumstruktur verträglich ist, das bedeutet K–bilinear. Je nach Anwendung fordern wir zusätzlich ein Einselement $e \in A$ oder Assoziativität oder Kommutativät. Die folgende Definition führt dies aus.

Algebren über einem Körper oder kommutativen Ring

☺ Da es keinen Mehraufwand erfordert, definieren wir den Begriff der K–Algebra gleich allgemein über einem kommutativen Ring K.

Definition P5D: Algebra über einem kommutativen Ring

Sei $(K, +, 0, \cdot, 1)$ ein kommutativer Ring, etwa $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/n$.

Eine **K–Algebra** ist ein Paar $(A, \diamond)$ bestehend aus einem K–linearen Raum $(A, +, 0, \cdot)$ und einer K–bilinearen Abbildung $\diamond : A \times A \to A$.

Letzteres bedeutet, für alle $u, v, w \in A$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\text{(L)} \qquad u \diamond (v + w) = (u \diamond v) + (u \diamond w), \qquad u \diamond (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (u \diamond v),$$
$$\text{(R)} \qquad (u + v) \diamond w = (u \diamond w) + (v \diamond w), \qquad (\lambda \cdot u) \diamond v = \lambda \cdot (u \diamond v).$$

Die Algebra $(A, \diamond)$ heißt **assoziativ**, falls $u \diamond (v \diamond w) = (u \diamond v) \diamond w$ für alle $u, v, w \in A$ gilt, und **kommutativ**, falls $u \diamond v = v \diamond u$ für alle $u, v \in A$ gilt.

Ein **neutrales Element** $e \in A$ erfüllt $e \diamond u = u \diamond e = u$ für alle $u \in A$. (Es existiert höchstens eines.) In diesem Falle nennen wir $(A, \diamond)$ eine **unitale K–Algebra** oder $(A, \diamond, e)$ eine **K–Algebra mit Einselement**.

Beispiele von Algebren

Beispiel: Ist $(R, +, 0, \cdot, 1)$ ein Ring und $K \leq R$ ein Teilring, so ist R ein K–linearer Raum (von links und von rechts). Liegt zudem $K \leq Z(R)$ im Zentrum von R, so ist $(R, \cdot, 1)$ eine K–Algebra, unital und assoziativ.

Beispiele: Wir haben die Zahlbereiche $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C} \leq \mathbb{H}$: Hier sind $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ Algebren über $\mathbb{Z}$, ebenso sind $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ Algebren über $\mathbb{Q}$, und $\mathbb{C}, \mathbb{H}$ sind Algebren über $\mathbb{R}$, jeweils unital und assoziativ und bis auf $\mathbb{H}$ auch kommutativ. Jedoch ist $\mathbb{H}$ ist keine Algebra über $\mathbb{C}$, da $\mathbb{C} \not\subseteq Z(\mathbb{H})$.

Beispiel: Für jeden kommutativen Ring K ist der Polynomring $K[X]$ eine K–Algebra, unital, assoziativ und kommutativ. Hier gilt $K \leq K[X]$, das heißt, der Grundring K ist ein Teilring des Polynomrings $K[X]$.

Beispiel: Der Matrixring $K^{n \times n}$ ist eine K–Algebra, unital und assoziativ, jedoch für $n \geq 2$ nicht-kommutativ. Streng besehen ist K kein Teilring von $K^{n \times n}$, doch immerhin haben wir $\varphi : K \hookrightarrow Z(K^{n \times n}) : \lambda \mapsto \lambda E_n$.

Zu jedem K–linearen Raum V ist der Endomorphismenring $\mathrm{End}_K(V)$ eine K–Algebra. Speziell für $V \cong K^n$ erhalten wir $\mathrm{End}_K(V) \cong K^{n \times n}$.

Algebren über einem kommutativen Ring

Übung: (1) Sei $(A, \diamond, e)$ eine unitale und assoziative K–Algebra. Dann ist $(A, +, 0, \diamond, e)$ ein Ring, und die charakteristische Abbildung $\varphi : K \to A : \lambda \mapsto \lambda \cdot e$ ist ein Ringhomomorphismus in das Zentrum des Rings $(A, +, 0, \diamond, e)$. Wir nennen $(A, +, 0, \diamond, e, \varphi)$ kurz einen **K–Ring**.

(2) Sei umgekehrt $(A, +, 0, \diamond, e)$ ein Ring und $\varphi : K \to A$ ein Ringhomomorphismus in das Zentrum des Rings $(A, +, 0, \diamond, e)$. Dann ist $(A, +, 0, \cdot)$ ein K–linearer Raum vermöge $\lambda \cdot a = \varphi(\lambda) \diamond a$ und $(A, \diamond, e)$ eine unitale assoziative K–Algebra, kurz ein K–Ring.

(3) Jeder Ring A ist eine $\mathbb{Z}$–Algebra. Die charakteristische Abbildung $\varphi : \mathbb{Z} \to A$ ist genau dann injektiv, wenn A die Charakteristik 0 hat. Die klassischen Beispiele sind die Ringe $\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

(4) Ist K ein Körper, so ist $\varphi : K \to A : \lambda \mapsto \lambda \cdot e$ injektiv (siehe L1F).

(5) Ist φ injektiv, so können wir den Ring K mit seinem Bild $\varphi(K) \leq Z(A)$ identifizieren und so kurzerhand $K \leq Z(A)$ als Teilring annehmen. Dies ist für $K \leq K[X]$ traditionell üblich, für $K \leq K^{n \times n}$ eher nicht.

Homomorphismen von K–Algebren

Definition P5D: Homomorphismen von K–Algebren

Seien $(A, \diamond)$ und $(B, \circ)$ Algebren über dem kommutativen Ring K. Ein **K–Algebren-Homomorphismus** $\varphi : (A, \diamond) \to (B, \circ)$ ist eine K–lineare Abbildung, die multiplikativ ist, $\varphi(u \diamond v) = \varphi(u) \circ \varphi(v)$ für alle $u, v \in A$.

Eine **K–Unteralgebra** $U \leq (A, \diamond)$ ist ein K–Untervektorraum $U \leq A$, sodass für alle $u, v \in U$ auch $u \diamond v \in U$ gilt. Damit ist $(U, \diamond_U)$ selbst eine K–Algebra durch Einschränkung des Produkts $\diamond$ zu $\diamond_U : U \times U \to U$, und die Inklusion $U \hookrightarrow A$ ist ein Homomorphismus von K–Algebren.

Seien $(A, \diamond, e_A)$ und $(B, \circ, e_B)$ unitale K–Algebren. Für einen **unitalen K–Algebren-Homomorphismus** $\varphi : (A, \diamond, e_A) \to (B, \circ, e_B)$ fordern wir zudem $\varphi(e_A) = e_B$, das heißt, φ respektiert die Einselemente.

Eine **unitale K–Unteralgebra** $U \leq (A, \diamond, e_A)$ ist eine K–Unteralgebra $U \leq (A, \diamond)$ mit $e_A \in U$. Damit ist $(U, \diamond_U, e_A)$ eine unitale K–Algebra und die Inklusion $U \hookrightarrow A$ ein Homomorphismus unitaler K–Algebren.

Ist $(A, \diamond)$ assoziativ / kommutativ, so auch jede Unteralgebra U.

Unteralgebren und Quotientenalgebren

Weiterhin sei $(A, \diamond)$ eine K–Algebra. Eine **K–Unteralgebra** $B \leq (A, \diamond)$ ist ein K–linearer Unterraum $B \leq A$, der multiplikativ abgeschlossen ist, das bedeutet $B \diamond B \subseteq B$: Für je zwei Elemente $u, v \in B$ gilt $u \diamond v \in B$.

Für eine **unitale Unteralgebra** $B \leq (A, \diamond, e)$ fordern wir zudem $e \in B$. Die Inklusion $\mathrm{inc}_B^A : B \hookrightarrow A$ ist ein (unitaler) Algebrenhomomorphismus.

Ein **Ideal** $I \trianglelefteq (A, \diamond)$ ist ein K–linearer Unterraum $I \leq A$, der multiplikativ beidseitig absorbiert, das heißt links $A \diamond I \subseteq A$ und rechts $A \supseteq I \diamond A$.

Der Kern $I = \mathrm{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ jedes K–Algebrenhomomorphismus $\varphi : (A, \diamond) \to (B, \circ)$ ist ein Ideal in $(A, \diamond)$. Umgekehrt, jedes Ideal $I \trianglelefteq (A, \diamond)$ definiert eine Quotientenalgebra A/I, dazu ist $q : A \twoheadrightarrow A/I : x \mapsto [x]$ ein surjektiver Algebrenhomomorphismus mit $\mathrm{Ker}(q) = I$. Ist die Algebra A unital, assoziativ oder kommutativ, so auch die Quotientenalgebra A/I.

Übung: Beweisen Sie diese Behauptungen nach dem Vorbild von Ringen. Sie müssen nur sorgsam die Definitionen einsetzen und nachrechnen.

Der Einsetzungshomomorphismus, neu formuliert

Satz P5E: der Einsetzungshomomorphismus K3D

Sei K ein kommutativer Ring. Der Polynomring $K[X]$ ist eine K–Algebra. Sei A ein weiterer **K–Ring**, also eine unitale und assoziative K–Algebra. Zu jedem $\alpha \in A$ existiert dann genau ein K–Algebrenhomomorphismus $\Phi : K[X] \to A$ mit $\Phi(X) = \alpha$, nämlich die Einsetzung

$$\Phi : K[X] \twoheadrightarrow K[\alpha] \leq A : \textstyle\sum_i p_i X^i \mapsto p_i \alpha^i$$

Sei nun speziell K ein Körper. Der Kern $\mathrm{Ker}(\Phi) = \mu_\alpha K[X]$ wird erzeugt vom Minimalpolynom $\mu_\alpha \in K[X]$ dank Satz L3F. Durch Übergang zum Quotienten $K[X]/\mu_\alpha$ gemäß L3G erhalten wir den K–Isomorphismus $\bar{\Phi} : K[X]/\mu_\alpha \xrightarrow{\sim} K[\alpha]$ dank kanonischer Faktorisierung L3G.

Genau dann ist $K[\alpha]$ ein Körper, wenn μ_α in $K[X]$ unzerlegbar ist (C3M).

Übung: Wiederholen Sie diese universell nützliche Konstruktion für Ringe, hier bequem neuformuliert in der Sprache der K–Algebren.

Der Fundamentalsatz der Algebra, neu formuliert

Satz P5F: Neuformulierung des Fundamentalsatzes E3C der Algebra

(1) Ist $A \geq \mathbb{C}$ ein Körper mit $\dim_{\mathbb{C}}(A) = n \in \mathbb{N}$, so gilt $A \cong \mathbb{C}$ dank P5C.
(2) Ist $A \geq \mathbb{R}$ ein Körper mit $\dim_{\mathbb{R}}(A) = n \in \mathbb{N}$, so gilt $A \cong \mathbb{R}$ oder $A \cong \mathbb{C}$.

Beweis: (2) Im Falle $n = 1$ gilt $A = \mathbb{R}$, und wir sind fertig. Sei also $n \geq 2$.

Wir wählen $\alpha \in A \smallsetminus \mathbb{R}$ und untersuchen $\mathbb{R}[\alpha] = \langle 1, \alpha, \alpha^2, \ldots \rangle_{\mathbb{R}} \leq A$. Der Kern des Einsetzungshomomorphismus $\mathbb{R}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{R}[\alpha] : X \mapsto \alpha$ wird erzeugt vom Minimalpolynom $\mu \in \mathbb{R}[X]^1_m$. Da $\mathbb{R}[X]/\mu \cong \mathbb{R}[\alpha]$ nullteilerfrei ist, ist μ unzerlegbar. Dank FTA E3C bedeutet das $\mu = X - \lambda$ mit $\alpha = \lambda \in \mathbb{R}$ oder $\mu = X^2 - 2pX + q$ mit Diskriminante $p^2 - q < 0$. Ersteres haben wir ausgeschlossen, somit bleibt nur noch Zweiteres.

Wir haben $(\alpha - p)^2 = \alpha^2 - 2p\alpha + p^2 = p^2 - q < 0$. Daraus erhalten wir $i := (\alpha - p)/\sqrt{q - p^2}$ in A mit $i^2 = -1$. Wir betrachten $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i] \leq A$ als Teilkörper vermöge der $\mathbb{R}$–Einbettung $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}[i] \leq A : x + yi \mapsto x + yi$. Dank (1) folgt $\dim_{\mathbb{C}}(A) = 1$, also $A = \mathbb{C}$. QED

Satz P5G: Klassifikation der eindimensionalen Algebren

Sei $(K, +, 0, \cdot, 1)$ ein kommutativer Ring. (0) Zu jedem Skalar $\alpha \in K$ haben wir die K–Algebra $A_\alpha = (K, \diamond_\alpha)$ mit $u \diamond_\alpha v = u \cdot \alpha \cdot v$.

(1) Jede eindimensionale K–Algebra $(A, \diamond)$ isomorph zu (mindestens) einem dieser Modelle $A_\alpha = (K, \diamond_\alpha)$.

(2) Jeder K–Algebren-Homomorphismus $\varphi : A_\alpha \to A_\beta$ lässt sich eindeutig darstellen durch $\varphi(u) = u\lambda$ mit $\lambda \in K$ und $\alpha\lambda = \beta\lambda^2$.

(3) Genau dann sind $A_\alpha \cong A_\beta$ isomorph als K–Algebren, wenn $\alpha \sim \beta$ assoziiert sind, also $\alpha = \beta\lambda$ für ein $\lambda \in A^\times$ gilt.

(4) Ist K ein Körper, so ist jede eindimensionale K–Algebra $(A, \diamond)$ isomorph zu genau einem der beiden Modelle A_0 oder A_1.

Beispiel: Über dem Ring $K = \mathbb{Z}$ haben wir für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ die $\mathbb{Z}$–Algebra $A_n = (\mathbb{Z}, \diamond_n)$ mit $u \diamond_n v = u \cdot n \cdot v$. Jede eindimensionale $\mathbb{Z}$–Algebra $(A, \diamond)$ ist isomorph zu genau einem dieser Modelle $(\mathbb{Z}, \diamond_n)$.

Beweis: (0) Auf dem K–linearen Raum K ist $\diamond_\alpha : K \times K \to K$ bilinear: Dank Kommutativität der Multiplikation ist $u \cdot \alpha \cdot v$ linear in u und in v.

(1) Sei $b \in A \setminus \{0\}$ eine Basis. Damit gilt $b \diamond b = \alpha b$ für ein $\alpha \in K$. Somit ist $\varphi : K \xrightarrow{\sim} A : u \mapsto ub$ ein Isomorphismus von K–Algebren, denn es gilt $\varphi(u) \diamond \varphi(v) = (ub) \diamond (vb) = (uv)(b \diamond b) = (uv)(\alpha b) = (u\alpha v)b = \varphi(u \diamond_\alpha v)$.

(2) Ist $\varphi : A_\alpha \to A_\beta$ ein K–Algebren-Homomorphismus, so setzen wir $\lambda := \varphi(1) \in K$. Für alle $u \in K$ folgt $\varphi(u) = \varphi(u \cdot 1) = u \cdot \varphi(1) = u\lambda$. Weiters vergleichen wir $\varphi(u) \diamond_\beta \varphi(v) = (u\lambda) \diamond_\beta (v\lambda) = u\beta v\,\lambda^2$ mit $\varphi(u \diamond_\alpha v) = u\alpha v\,\lambda$. Die Auswertung in $u = v = 1$ ergibt $\alpha\lambda = \beta\lambda^2$. Die Bedingung $\alpha\lambda = \beta\lambda^2$ ist also notwendig und offensichtlich auch hinreichend für einen K–Algebren-Homomorphismus $\varphi : A_\alpha \to A_\beta$.

(3) Im Falle eines Isomorphismus ist λ invertierbar, also $\lambda \in K^\times$. Gilt umgekehrt $\lambda \in K^\times$ und $\alpha = \beta\lambda$, so ist φ ein Isomorphismus.

(4) Dies folgt aus (1) und (3): Ist K ein Körper, so gilt $K^\times = K^*$. Somit ist jedes Element $\alpha \in K \setminus \{0\}$ assoziiert zu 1. QED

Satz P5H: unitale reelle Algebren der Dimension 2

Drei nicht-isomorphe Beispiele für unitale $\mathbb{R}$–Algebren sind:

1. $(\mathbb{R}^2, \cdot, (1,0))$ mit $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.
2. $(\mathbb{R}^2, \bullet, (1,0))$ mit $(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2y_1)$.
3. $(\mathbb{R}^2, \circ, (1,1))$ mit $(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$.

Jede zweidimensionale unitale $\mathbb{R}$–Algebra $(A, \diamond, e)$ ist isomorph zu genau einem dieser drei Modelle.

Beweis: Alle drei Produkte sind offensichtlich $\mathbb{R}$–bilinear. Die erste Algebra ist der Körper $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ der komplexen Zahlen mit Einselement $e = (1,0)$ und imaginärer Einheit $\mathrm{i} = (0,1)$, also $\mathrm{i}^2 = -e$. Die zweite Algebra ist $\mathbb{R}[X]/X^2$ mit Einselement $(1,0)$, und $w = (0,1)$ ist nilpotent, $w^2 = 0$. Die dritte Algebra ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Einselement $(1,1)$, hat keine nilpotenten Elemente, aber Nullteiler wie $(1,0) \circ (0,1) = (0,0)$. Insbesondere sind diese drei Algebren paarweise nicht isomorph.

Sei $(A, \diamond, e)$ eine unitale $\mathbb{R}$–Algebra der Dimension $\dim_{\mathbb{R}}(A) = 2$. Wir ergänzen e durch $u \in A$ zu einer Basis (e, u). Für das Produkt gilt dann $u \diamond u = \alpha e + \beta u$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wir setzen $v := \beta e - 2u$ und erhalten die Basis (e, v) mit $v \diamond v = \gamma e$ und $\gamma = 4\alpha + \beta^2$. (Nachrechnen!) Im Falle $\gamma \neq 0$ setzen wir $w := \sqrt{1/|\gamma|}\, v$, sonst $w := v$. Wir erhalten so die neue Basis (e, w) von $(A, \diamond, e)$ mit $w \diamond w = \delta e$ und $\delta = \operatorname{sign} \gamma \in \{-1, 0, 1\}$.

Fall (1): Für $\delta = -1$ erhalten wir den $\mathbb{R}$–Algebren–Isomorphismus $\varphi : (\mathbb{R}^2, \cdot) \xrightarrow{\sim} (A, \diamond) : (x_1, x_2) = x_1 e + x_2 w$. (Einsetzen und nachrechnen!)

Fall (2): Für $\delta = 0$ erhalten wir den $\mathbb{R}$–Algebren–Isomorphismus $\varphi : (\mathbb{R}^2, \bullet) \xrightarrow{\sim} (A, \diamond) : (x_1, x_2) = x_1 e + x_2 w$. (Ebenso nachrechnen!)

Fall (3): Für $\delta = 1$ setzen wir $a := \frac{1}{2}(e + w)$ und $b := \frac{1}{2}(e - w)$ und finden $a \diamond a = a$ und $b \diamond b = b$ sowie $a \diamond b = b \diamond a = 0$. Wir erhalten somit den Isomorphismus $\varphi : (\mathbb{R}^2, \circ) \xrightarrow{\sim} (A, \diamond) : \varphi(x_1, x_2) = x_1 a + x_2 b$. QED

Bemerkung: Satz und Beweis gelten wörtlich für jeden geordneten Körper $(K, +, \cdot, \leq)$, in dem jedes Element $a \geq 0$ ein Quadrat ist.

Was verlangen wir von einer Divisionsalgebra?

Definition P5I: Divisionsalgebra

Wir nennen $(A, \diamond)$ mit $A \neq \{0\}$ eine **Divisionsalgebra**, wenn für jedes Paar $u, v \in A$ mit $u \neq 0$ zu den Gleichungen $u \diamond x = v$ und $y \diamond u = v$ eindeutige Lösungen $x, y \in A$ existieren. Das heißt, die Abbildungen $L_u : A \to A : x \mapsto u \diamond x$ und $R_u : A \to A : y \mapsto y \diamond u$ sind Bijektionen.

Ein **Nullteilerpaar** $u, v \in A$ erfüllt $u \neq 0$ und $v \neq 0$ doch $u \diamond v = 0$. Das bedeutet, dass die K–linearen Abbildungen L_u, R_v nicht-trivialen Kern haben. Entsprechend heißt $(A, \diamond)$ **nullteilerfrei**, wenn L_u und R_u injektiv sind für alle $u \neq 0$. Gilt zudem $\dim_K A < \infty$, so sind L_u und R_u für alle $u \neq 0$ invertierbar, und $(A, \diamond)$ ist eine Divisionsalgebra.

Beispiel: Die Matrixalgebra $K^{n\times n}$ über einem Körper K hat für $n \geq 2$ Nullteiler und ist somit keine Divisionsalgebra. Im Beispiel $a = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $b = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gilt $a \neq 0$ und $b \neq 0$, aber $ab = 0$. Man beachte hierbei die Reihenfolge, denn $ba = a \neq 0$. Genau dann ist $a \in K^{n\times n} \smallsetminus \{0\}$ ein Nullteiler, wenn die Determinante verschwindet, $\det(a) = 0$. (Warum?)

Jede assoziative Divisionsalgebra ist ein Divisionsring.

☺ In jeder Divisionsalgebra können wir links und rechts dividieren. Sobald wir Assoziativität hinzufügen, erhalten wir einen Divisionsring:

Satz P5J: Jede assoziative Divisionsalgebra ist ein Divisionsring.

Für jede *assoziative* Algebra $(A, \diamond)$ sind äquivalent:

1. Die Algebra $(A, \diamond)$ ist eine Divisionsalgebra im Sinne von P5I.
2. Es existiert ein neutrales Element $e \in A$ und zu jedem $u \in A \smallsetminus \{0\}$ ein inverses Element $u^{-1} \in A$, sodass $u \diamond u^{-1} = u^{-1} \diamond u = e$ gilt.

Auf der Teilmenge $A^\times = A \smallsetminus \{0\}$ in A erhalten wir demnach durch Einschränkung die multiplikative Gruppe $(A^\times, \diamond, e, \iota)$ mit $\iota : u \mapsto u^{-1}$.

Aufgabe: Beweisen Sie die Äquivalenz „(2) ⇔ (1)“. *Hinweis zur Erinnerung:* Die Implikation „(2) ⇒ (1)“ ist leicht, doch „(1) ⇒ (2)“ ist etwas knifflig. Folgen Sie Satz J1N zur Lösung von Gleichungen in einer Halbgruppe.

☺ Solide Grundlagen, die wir damals für Gruppen/Monoide erarbeitet haben, zahlen sich nun erneut aus für assoziative Divisions/Algebren.

Jede assoziative Divisionsalgebra ist ein Divisionsring.

Beweis: „(2) ⇒ (1)“: Wir lösen $u \diamond x = v$ durch Linksmultiplikation mit u^{-1} und erhalten $u^{-1} \diamond v = u^{-1} \diamond (u \diamond x) = (u^{-1} \diamond u) \diamond x = e \diamond x = x$. Ebenso lösen wir $y \diamond u = v$ durch Rechtsmultiplikation mit u^{-1}.

„(1) ⇒ (2)“: Sei $u \in A \smallsetminus \{0\}$. Dank Bijektivität von R_u und L_u existiert ein Linksneutrales $e' \in A$ mit $e' \diamond u = u$ und ein Rechtsneutrales $e'' \in A$ mit $u \diamond e'' = u$. Dank Assoziativität sind diese neutral für *jedes* Element $v \in A$, denn es gilt $e' \diamond v = e' \diamond (u \diamond L_u^{-1}(v)) = (e' \diamond u) \diamond L_u^{-1}(v) = u \diamond L_u^{-1}(v) = v$ und ebenso für $v \diamond e'' = v$. Insbesondere folgt daraus $e'' = e' \diamond e'' = e'$. Wir schreiben e für dieses neutrale Element unserer Algebra $(A, \diamond)$.

Zu jedem Element $u \in A$ mit $u \neq 0$ existiert dank Bijektivität von R_u, L_u ein Linksinverses $u' \in A$ mit $u' \diamond u = e$ und ein Rechtsinverses $u'' \in A$ mit $u \diamond u'' = e$. Dank Assoziativität stimmen beide überein, denn es gilt $u'' = e \diamond u'' = (u' \diamond u) \diamond u'' = u' \diamond (u \diamond u'') = u' \diamond e = u'$. Diese Rechnung zeigt auch, dass u sein Inverses $u^{-1} := u' = u''$ eindeutig bestimmt. Dies definiert die ersehnte Inversion $\iota : A^\times \to A^\times : u \mapsto u^{-1}$. Dank $A \neq \{0\}$ gilt $e \neq 0$ und $(A^\times, \diamond, e, \iota)$ ist eine Gruppe. QED

Klassifikation der assoziativen reellen Divisionsalgebren

Satz P5K: Frobenius 1877

Über $\mathbb{R}$ kennen wir drei assoziative Divisionsalgebren:

1. Den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.
2. Den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.
3. Den Schiefkörper $\mathbb{H}$ der Quaternionen.

Jede endlich-dimensionale, assoziative Divisionsalgebra $(A, \diamond)$ über $\mathbb{R}$ ist isomorph zu genau einem dieser drei vertrauten Modelle $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

Folgenden eleganten Beweis verdanken wir R. Palais: *The classification of real division algebras.* Amer. Math. Monthly (75) 1968, pp. 366–368.

> *The proofs of Frobenius' theorem in the literature seem to be of two types. Either they are elementary, but rather computational [...], or else they deduce the theorem from sophisticated general results about division algebras [...]. We wish to give here a short, self-contained proof which seems both elementary and conceptual. Besides the inevitable use of the fundamental theorem of algebra we use only the simplest facts about the eigenvalues of linear transformations.*

Vorbild: Der Divisionsring $\mathbb{H} = \mathbb{R}[\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}]$ der Quaternionen E3D enthält die komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \mathbb{R}[\mathrm{i}]$ als Unterkörper E3A. Die Multiplikation $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} : (z, q) \mapsto z \cdot q$ von links macht $\mathbb{H}$ zu einem $\mathbb{C}$–Vektorraum.

Die Multiplikation $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H} : q \mapsto q \cdot \mathrm{i}$ mit i von rechts ist demnach eine $\mathbb{C}$–lineare Abbildung. Sie erfüllt $f^2 = -\mathrm{id}$, ihr Minimalpolynom ist somit $X^2 + 1$ und hat die Nullstellen $\pm\mathrm{i}$. Die beiden Eigenräume von f sind

$$E^+ := \mathrm{Eig}(f, +\mathrm{i}) = \{\, q \in \mathbb{H} \mid q \cdot \mathrm{i} = +\mathrm{i} \cdot q \,\} = \langle 1, \mathrm{i} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle 1 \rangle_{\mathbb{C}} = \mathbb{C},$$
$$E^- := \mathrm{Eig}(f, -\mathrm{i}) = \{\, q \in \mathbb{H} \mid q \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{i} \cdot q \,\} = \langle \mathrm{j}, \mathrm{k} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mathrm{j} \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Wir erhalten so die Eigenzerlegung $\mathbb{H} = E^+ \oplus E^-$ als direkte Summe der beiden eindimensionalen $\mathbb{C}$–Untervektorräume E^+ und E^-.

☺ Der allgemeine Beweis repliziert diese einfache Beobachtung. Das Argument ist vollkommen elementar, doch sehr scharfsinnig. Es benutzt äußerst geschickt die Werkzeuge der Linearen Algebra, hier insbesondere die Theorie der Eigenwerte und Eigenräume.

Beweis des Satzes: Sei $(A, \diamond)$ eine assoziative Divisionsalgebra über $\mathbb{R}$ der Dimension $\dim_{\mathbb{R}}(A) = n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dank Satz P5J existiert ein Einselement $e \in A$. Wir betrachten $\mathbb{R} \leq A$ als Teilkörper vermöge $\mathbb{R} \hookrightarrow A : x \mapsto xe$. Im Falle $n = 1$ gilt $A = \mathbb{R}$, und wir sind fertig. Fortan sei also $n \geq 2$.

(1) Sei $\alpha \in A \smallsetminus \mathbb{R}$ und $C = \langle e, \alpha \rangle_{\mathbb{R}}$. Dann ist C ein Körper isomorph zu $\mathbb{C}$.

Dazu wählen wir M über $\mathbb{R}$ maximal mit $C \leq M \leq A$ und M kommutativ. Kommutiert $x \in A$ mit allen $y \in M$, so ist $M + \mathbb{R}x$ kommutativ und $x \in M$. Aus $x, x' \in M$ folgt $x \diamond x' \in M$, denn $(x \diamond x') \diamond y = x \diamond y \diamond x' = y \diamond (x \diamond x')$. Für $x \in M \smallsetminus \{0\}$ kommutiert x^{-1} mit allen $y \in M$, denn aus $x \diamond y = y \diamond x$ folgt $y \diamond x^{-1} = x^{-1} \diamond y$, also $x^{-1} \in M$. Somit ist M ein Körper (vgl. K1s).

Dank Fundamentalsatz der Algebra ist $(M, \diamond)$ über $\mathbb{R}$ isomorph zu $(\mathbb{C}, \cdot)$, siehe Satz P5F. Insbesondere gilt $\dim_{\mathbb{R}}(M) = 2$, und demnach $M = C$.

Wir wählen und fixieren $i \in C$ mit $i^2 = -e$ und betrachten $\mathbb{C} = C \leq A$ als Teilkörper vermöge der $\mathbb{R}$–Einbettung $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} C \leq A : x + y\mathrm{i} \mapsto xe + yi$. Somit ist A ein Vektorraum über $\mathbb{C} \leq A$, mit Skalierung von links.

(2) Wir definieren $f : A \to A : v \mapsto v \diamond \mathrm{i}$ durch Multiplikation mit i von rechts. Dank $f^2 = -\mathrm{id}_A$ gilt $\mu_f \mid X^2 + 1$ und somit $A = E^+ \oplus E^-$ mit

$$E^+ := \mathrm{Eig}(f, +\mathrm{i}) = \{\, v \in A \mid v \diamond \mathrm{i} = +\mathrm{i} \diamond v \,\},$$
$$E^- := \mathrm{Eig}(f, -\mathrm{i}) = \{\, v \in A \mid v \diamond \mathrm{i} = -\mathrm{i} \diamond v \,\}.$$

Dank (1) gilt $E^+ = \mathbb{C}$. Im Falle $E^- = \{0\}$ gilt $A = \mathbb{C}$, und wir sind fertig. Im Folgenden sei also $E^- \neq \{0\}$. Wir werden nun $A \cong \mathbb{H}$ nachweisen.

(3) Wir wählen $\alpha \in E^- \smallsetminus \{0\}$. Die Abbildung $g : A \to A : v \mapsto v \diamond \alpha$ ist ein $\mathbb{C}$–linearer Isomorphismus dank der Umkehrung $g^{-1}(v) = v \diamond \alpha^{-1}$. Für $v \in E^{\pm}$ gilt $v \diamond \alpha \in E^{\mp}$, denn $(v \diamond \alpha) \diamond \mathrm{i} = v \diamond (-\mathrm{i}) \diamond \alpha = (\mp\mathrm{i}) \diamond (v \diamond \alpha)$. Das bedeutet $g(E^{\pm}) \subseteq E^{\mp}$, insbesondere $\dim_{\mathbb{C}}(E^-) = \dim_{\mathbb{C}}(E^+) = 1$.

(4) Erneut dank (1) ist auch $D = \langle e, \alpha \rangle_{\mathbb{R}}$ ein Körper isomorph zu $\mathbb{C}$. Dank (3) gilt $\alpha^2 \in E^+$, also $\alpha^2 \in D \cap E^+ = \mathbb{R}$. Wäre $\alpha^2 > 0$, so hätte das Polynom $X^2 - \alpha^2 = (X - \alpha)(X + \alpha)$ mindestens *vier* Nullstellen im Körper D, neben $\pm\alpha$ noch zwei in $\mathbb{R}$. Demnach muss $\alpha^2 < 0$ gelten. Folglich existiert $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\alpha^2 = -\lambda^2$. Für $\mathrm{j} := \alpha/\lambda$ gilt nun $\mathrm{j}^2 = -1$.

(5) Wir haben $\mathrm{i} \in E^+$ mit $\mathrm{i}^2 = -1$ und $\mathrm{j} \in E^-$ mit $\mathrm{j}^2 = -1$ und $\mathrm{j} \diamond \mathrm{i} = -\mathrm{i} \diamond \mathrm{j}$. Das führt zu den vertrauten Relationen der Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$: Wie üblich setzen wir $\mathrm{k} := \mathrm{i} \diamond \mathrm{j}$. Wegen $\mathrm{k} \in E^-$ gilt $\mathrm{k} \diamond \mathrm{i} = -\mathrm{i} \diamond \mathrm{k}$, zudem $\mathrm{k} \diamond \mathrm{j} = \mathrm{i} \diamond \mathrm{j}^2 = -\mathrm{i}$ und $\mathrm{j} \diamond \mathrm{k} = \mathrm{j} \diamond \mathrm{i} \diamond \mathrm{j} = -\mathrm{i} \diamond \mathrm{j}^2 = \mathrm{i}$. Schließlich haben wir $\mathrm{k}^2 = \mathrm{i} \diamond \mathrm{j} \diamond \mathrm{i} \diamond \mathrm{j} = -\mathrm{i}^2 \diamond \mathrm{j}^2 = -1$. Somit ist $H = \langle e, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k} \rangle_{\mathbb{R}} \leq A$ isomorph zu $\mathbb{H}$.

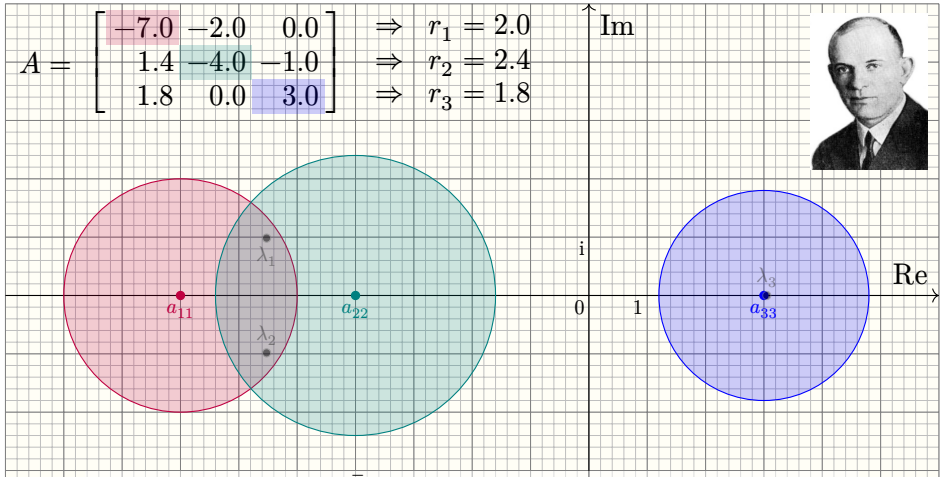
(6) Dank (3) ist (j, k) eine $\mathbb{R}$–Basis von E^-. Dank (2) ist $(1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k})$ eine $\mathbb{R}$–Basis von A. Wir schließen $A = H \cong \mathbb{H}$, wie ersehnt. QED

☺ Dieser raffinierte Beweis ist ein weiterer Höhepunkt bei unserem Aufbau der Linearen Algebra. Sie blicken zurück und erkennen erfreut, wie unsere Werkzeuge hier wunderbar harmonisch zusammenarbeiten: Ringe und Körper, Polynome und Matrizen, Aufbau des Zahlensystems $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C} \leq \mathbb{H}$, der Fundamentalsatz der Algebra, lineare Räume beidseitig mit Skalierung von links und von rechts, Basis und Dimension, MiPo und Kernzerlegung, Determinante und ChaPo. Alles ist gut.

Semjon Gerschgorin (1901–1933) und seine Kreise

? Können wir jeder Matrix ihre Eigenwerte ansehen? Zumindest grob?

$$A = \begin{bmatrix} -7.0 & -2.0 & 0.0 \\ 1.4 & -4.0 & -1.0 \\ 1.8 & 0.0 & 3.0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \; r_1 = 2.0 \\ \Rightarrow \; r_2 = 2.4 \\ \Rightarrow \; r_3 = 1.8 \end{array}$$



Gerschgorin–Kreis $\bar{B}(a_{ii}, r_i)$: Mittelpunkt a_{ii} und Radius r_i können wir leicht ablesen. Damit werden alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ überdeckt, es gilt also $\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(a_{ii}, r_i)$.

Semjon Gerschgorin (1901–1933) und seine Kreise

Satz P6A: Die Gerschgorin–Kreise überdecken das Spektrum.

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. In jeder Zeile $i \in \{1, \dots, n\}$ sei $r_i := \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ die Summe der Beträge der Nicht-Diagonal-Einträge. Dann liegt jeder Eigenwert von A in einer der Kreisscheiben $\bar{B}(a_{ii}, r_i) := \{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le r_i \}$. Kurz:

$$\boxed{\sigma(A) \;\subseteq\; \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(a_{ii}, r_i)}$$

Ebenso spaltenweise $\sigma(A) = \sigma(A^\top) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(a_{ii}, s_i)$ mit $s_i := \sum_{j\neq i} |a_{ji}|$.

Beweis: Sei $(v, \lambda) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ ein Eigenpaar unserer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, also $Av = \lambda v$, das heißt $\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j = \lambda v_i$, somit $\sum_{j\neq i} a_{ij} v_j = (\lambda - a_{ii}) v_i$. Es existiert $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $|v_i|$ maximal. Dank $v \neq 0$ gilt $v_i \neq 0$. Wir können $v_i = 1$ annehmen, notfalls skalieren wir v mit v_i^{-1}. Dank Dreiecksungleichung (Δ) erhalten wir daraus:

$$|\lambda - a_{ii}| \overset{\text{Vor}}{=} \left|\textstyle\sum_{j\neq i} a_{ij} v_j\right| \overset{\Delta}{\le} \textstyle\sum_{j\neq i} |a_{ij}||v_j| \overset{\text{Vor}}{\le} \textstyle\sum_{j\neq i} |a_{ij}| \overset{\text{Def}}{=} r_i$$

Das zeigt $\lambda \in \bar{B}(a_{ii}, r_i)$, wie behauptet. QED

Semjon Gerschgorin (1901–1933) und seine Kreise

Beispiel: Dieses Abschätzung gilt (nur) für Diagonalmatrizen exakt: Für $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ gilt $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(a_{ii}, 0)$.

Exakte Werte sind im Allgemeinen schwierig. Für reelle und komplexe Matrizen jedoch fand Gerschgorin 1931 seine einfache Abschätzung, um die Eigenwerte zu lokalisieren, wenigstens grob einzukreisen.

Gerschgorin erfüllt unseren naiven Wunsch, sogar erstaunlich leicht: Seine Gerschgorin–Kreise lokalisieren die Eigenwerte zunächst grob, umso besser, je stärker sich die Einträge zur Diagonale konzentrieren.

⚠ A priori wissen wir nicht, welcher Eigenwert in welchem Kreis liegt. Lesen Sie nochmal aufmerksam Satz und Beweis zur Überdeckung. Die nachfolgende Präzisierung optimiert Gerschgorins Satz.

Beispiel: Die Matrix $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ hat das Spektrum $\sigma(A) = \{\pm 2\}$. Hier enthält $\bar{B}(0, 4)$ beide Eigenwerte, aber $\bar{B}(0, 1)$ gar keinen.

📖 Richard S. Varga: *Geršgorin and His Circles.* Springer 2004.
`mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gershgorin`

Semjon Gerschgorin (1901–1933) und seine Kreise

Wir können die Eigenwerte präziser lokalisieren: In der Vereinigung aller Gerschgorin–Kreisscheiben enthält jede Zusammenhangskomponente genauso viele Eigenwerte wie Diagonalelemente der Matrix A.

Satz P6A: Die Gerschgorin–Kreise überdecken das Spektrum.

(1) Ist für einen Index $i \in N := \{1, \dots, n\}$ die Kreisscheibe $\Gamma_i := \bar{B}(a_{ii}, r_i)$ disjunkt von allen Γ_j mit $j \neq i$, so enthält Γ_i genau einen Eigenwert.

(2) Für $I \subseteq N$ sei $\Gamma_I := \bigcup_{i\in I} \Gamma_i$. Gilt $N = \bigsqcup_{k=1}^\ell I_k$ und $\Gamma_N = \bigsqcup_{k=1}^\ell \Gamma_{I_k}$, so enthält die Vereinigung Γ_{I_k} genau $|I_k|$ Eigenwerte (mit Vielfachheit).

Idee: Für $t \in [0, 1]$ betrachten wir $A^t = tA + (1 - t) \operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$. Für das Spektrum gilt somit $\sigma(A^t) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(a_{ii}, tr_i) \subseteq \Gamma_N = \bigsqcup_{k=1}^\ell \Gamma_{I_k}$. Zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, 1]$ enthält Γ_{I_k} genau $|I_k|$ Eigenwerte von A^t: Für $t = 0$ ist dies klar. Die Eigenwerte bewegen sich stetig mit $t \in [0, 1]$, können also die Menge Γ_{I_k} nicht verlassen. QED

Beispiel: Unser einleitendes Beispiel illustriert dies (Seite P601).

Anwendung: Realität von Eigenwerten

☺ Der Überdeckungssatz P6A von Gerschgorin ist sensationell nützlich, da wir direkt wichtige Eigenschaften ablesen oder abschätzen können.

Aufgabe: (1) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reell und Γ_i disjunkt von allen Γ_j für $j \neq i$. Dann enthält Γ_i genau einen Eigenwert λ, und dieser ist demnach reell. Somit liegt λ im Gerschgorin–Intervall $[a_{ii} - r_i, a_{ii} + r_i] = \bar{B}(a_{ii}, r_i) \cap \mathbb{R}$.

(2) Dies gilt allgemein für jede komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit reellem charakteristischen Polynom $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ und reellem Diagonaleintrag $a_{ii} \in \mathbb{R}$, insbesondere für jede hermitesche Matrix A mit $A^\intercal = \overline{A}$.

Lösung: Dank $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ ist das Spektrum $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ invariant unter komplexer Konjugation: Aus $\lambda \in \sigma(A)$, also $\chi_A(\lambda) = 0$, folgt $\overline{\lambda} \in \sigma(A)$, denn $\chi_A(\overline{\lambda}) = \overline{\chi_A(\lambda)} = 0$. Wegen $a_{ii} \in \mathbb{R}$ ist auch die Kreisscheibe $\Gamma_i = \bar{B}(a_{ii}, r_i)$ invariant unter Konjugation: Aus $\lambda \in \Gamma_i$ folgt $\overline{\lambda} \in \Gamma_i$. Dank P6A(1) gilt $\sigma(A) \cap \Gamma_i = \{\lambda\}$ und somit $\overline{\lambda} = \lambda$. QED

Anwendung: Abschätzung des Spektralradius

Korollar P6B: Abschätzung des Spektralradius

Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definieren wir ihren **Spektralradius** $\rho(A)$ als den maximalen Betrag all ihrer Eigenwerte:

$$\rho(A) := \max\{\, |\lambda| : \lambda \in \sigma(A) \,\}$$

Aus dem Überdeckungssatz P6A von Gerschgorin folgt sofort:

$$\rho(A) \le r(A) := \max_{i=1}^n \textstyle\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Angewendet auf $A^\intercal$ finden wir ebenso spaltenweise:

$$\rho(A) \le s(A) := \max_{j=1}^n \textstyle\sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Beweis: Dank Gerschgorin P6A liegt jeder Eigenwert $\lambda \in \sigma(A)$ in einer der Kreisscheiben $\bar{B}(a_{ii}, r_i)$, somit auch in $\bar{B}(0, r)$, denn aus $|z - a_{ii}| \le r_i$ folgt $|z| = |z - a_{ii} + a_{ii}| \le |z - a_{ii}| + |a_{ii}| \le r_i + |a_{ii}| \le r(A)$. QED

Strikt diagonaldominante Matrizen

❓ Können wir Invertierbarkeit leicht erkennen? Manchmal schon! Wir nennen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ strikt **diagonaldominant** in den Zeilen, falls gilt:

$$|a_{ii}| > r_i := \textstyle\sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

in jeder Zeile $i = 1, \dots, n$. In Worten: Jeder Diagonaleintrag a_{ii} ist größer als die Summe aller anderen Einträge seiner Zeile (jeweils im Betrag). Ebenso definieren wir strikt diagonaldominant in den Spalten. (D7F) Dieses einfache Kriterium ist hinreichend für Invertierbarkeit:

Korollar P6C: Lévy 1881, Desplanques 1887 — vgl. D7G

Jede strikt diagonaldominante Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist invertierbar. Spektrallücke: Für $\lambda \in \sigma(A)$ gilt $|\lambda| \ge \varepsilon := \min_{i=1}^n (|a_{ii}| - r_i) > 0$.

Beweis: Dank Gerschgorin P6A liegt λ in einer Kreisscheibe $\bar{B}(a_{ii}, r_i)$, also $|\lambda| \ge |a_{ii}| - r_i \ge \varepsilon > 0$ nach der umgekehrten Dreiecksungleichung: $|a_{ii}| = |a_{ii} - \lambda + \lambda| \le |a_{ii} - \lambda| + |\lambda| \le r_i + |\lambda|$. Daraus folgt $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$. Dank Satz D2M ist unsere Matrix A in $\mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar. QED

Strikt diagonaldominante Matrizen

Aufgabe: Welche der folgenden Matrizen sind offensichtlich invertierbar da strikt diagonaldominant? Wie schätzen Sie den Spektralradius ab?

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung: Die Matrix A ist strikt diagonaldominant in den Zeilen, die Matrix B nur schwach in den Zeilen, doch strikt in den Spalten. Für C und D greift keines dieser Kriterien, wir schauen genauer hin: Es gilt $\det C = 4$, siehe O508, und $\det D = 0$, denn $D(1,1,1)^\intercal = 0$.

Für A erhalten wir zeilenweise $\rho(A) \le r(A) = 13$, besser spaltenweise $\rho(A) \le s(A) = 12$. Tatsächlich finden wir hier $\sigma(A) \approx \{3, 3.73, 11.27\}$.

Für B finden wir spaltenweise $\rho(B) \le s(B) = 13$, besser zeilenweise $\rho(B) \le r(B) = 12$. Tatsächlich gilt $\sigma(B) \approx \{3.46 \pm 0.53\mathrm{i}, 11.07\}$.

Für C gilt $\rho(C) \le r(C) = s(C) = 4$, tatsächlich $\sigma(C) = \{2, 2 \pm \sqrt{2}\}$.
Für D gilt $\rho(D) \le r(D) = s(D) = 4$, tatsächlich $\sigma(D) = \{0, 1, 3\}$.

Simultane Diagonalisierung von Endomorphismen

Definition P7A: simultane Diagonalisierung von Endomorphismen

(1) Seien $f_1, \dots, f_\ell : V \to V$ lineare Abbildungen über dem Körper K. Hierzu ist eine **diagonalisierende Basis** $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V, sodass $f_k(v_i) = \lambda_{k,i} v_i$ und $\lambda_{k,i} \in K$ für alle $i \in I$ und $k = 1, \dots, \ell$.

Wir nennen $\mathcal{B}$ eine **(simultane) Eigenbasis** der Familie $(f_1, \dots, f_\ell)$.

Existiert zur Familie $(f_1, \dots, f_\ell)$ eine simultane Eigenbasis $\mathcal{B}$ von V, so nennen wir $(f_1, \dots, f_\ell)$ **simultan diagonalisierbar**.

(2) Seien $A_1, \dots, A_\ell \in K^{n \times n}$ quadratische Matrizen derselben Größe. Hierzu ist ein **(simultan) diagonalisierender Basiswechsel** eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$, so dass die durch T konjugierten Matrizen $T^{-1} A_1 T, \dots, T^{-1} A_\ell T \in K^{n \times n}$ allesamt diagonal sind.

Existiert eine solche Matrix T, so nennen wir die Familie $(A_1, \dots, A_r)$ in $K^{n \times n}$ **simultan diagonalisierbar** über K.

☺ Im Falle $\ell = 1$ ist dies die vorige Definition N3A zur Diagonalisierung.

Simultane Diagonalisierung von Endomorphismen

Wann ist simultane Diagonalisierung möglich? Der folgende Satz gibt hierzu ein einfaches Kriterium, sowohl notwendig als auch hinreichend:

Satz P7B: simultane Diagonalisierung von Endomorphismen

Seien $f_1, \dots, f_\ell : V \to V$ linear über dem Körper K. Äquivalent sind:

1. Die Familie $(f_1, \dots, f_\ell)$ ist simultan diagonalisierbar.
2. Jeder Endomorphismus $f_1, \dots, f_\ell$ ist einzeln diagonalisierbar und je zwei kommutieren, also $f_j \circ f_k = f_k \circ f_j$ für alle $j, k \in \{1, \dots, \ell\}$.

Die im folgenden Beweis geführte Konstruktion „(2) ⇒ (1)“ erklärt zugleich einen Algorithmus zur simultanen Diagonalisierung.

Beweis: „(1) ⇒ (2)“: Sei $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ eine simultane Eigenbasis von V. Dann gilt $f_j \circ f_k = f_k \circ f_j$ auf der Basis $\mathcal{B}$, somit auf ganz V dank N1A:

$$f_j(f_k(v_i)) = f_j(\lambda_{k,i}\, v_i) = \lambda_{k,i}\, f_j(v_i) = \lambda_{k,i}\, \lambda_{j,i}\, v_i,$$
$$f_k(f_j(v_i)) = f_k(\lambda_{j,i}\, v_i) = \lambda_{j,i}\, f_k(v_i) = \lambda_{j,i}\, \lambda_{k,i}\, v_i.$$

Simultane Diagonalisierung von Endomorphismen

„(2) ⇒ (1)“: Wir führen Induktion über ℓ. Der Fall $\ell = 1$ ist trivial. Sei $\ell \geq 2$. Dank Diagonalisierbarkeit haben wir $V = \bigoplus_{\lambda \in K} \mathrm{Eig}(f_\ell, \lambda)$.

Dank Kommutation ist jeder Eigenraum $U := \mathrm{Eig}(f_\ell, \lambda)$ zudem f_k–invariant: Für $v \in \mathrm{Eig}(f_\ell, \lambda)$ gilt $f_k(v) \in \mathrm{Eig}(f_\ell, \lambda)$, denn

$$f_\ell(f_k(v)) = f_k(f_\ell(v)) = f_k(\lambda v) = \lambda f_k(v).$$

Wir schränken $f_k : V \to V$ ein zu $g_k = f_k|_U^U$. Die Endomorphismen $g_1, \dots, g_{\ell-1}$ kommutieren weiterhin und sind diagonalisierbar (P7C).

Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine diagonalisierende Basis $\mathcal{B}_\lambda = (v_i)_{i \in I_\lambda}$ von U zu der Familie $(g_1, \dots, g_{\ell-1})$. Zudem gilt $g_\ell = \lambda\, \mathrm{id}_U$.

Zusammengesetzt zu $I = \bigsqcup_{\lambda \in K} I_\lambda$ erhalten wir die diagonalisierende Basis $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ von V zu der Familie $(f_1, \dots, f_{\ell-1}, f_\ell)$. QED

☺ Dieser Beweis ist erfreulich konstruktiv: Das Vorgehen erklärt zugleich einen Algorithmus zur simultanen Diagonalisierung.

Simultane Diagonalisierung von Endomorphismen

⚠ Die Basis $\mathcal{B}_\lambda$ des Eigenraums $\mathrm{Eig}(f_\ell, \lambda)$ bestimmen wir nicht allein mit f_ℓ, sondern auch mit den anderen Endomorphismen $f_1, \dots, f_{\ell-1}$.

⚠ Satz P7B sagt nicht allgemein: „Kommutierende Endomorphismus sind diagonalisierbar.“ Der Satz sagt korrekt genau: „Kommutierende diagonalisierbare Endomorphismus sind simultan diagonalisierbar.“

Beispiel: Alle Matrizen $\left[\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ mit $a \in K^*$ kommutieren untereinander, aber keine davon ist diagonalisierbar. **Übung:** Rechnen Sie es nach.

☺ Angenommen, die Basis $\mathcal{B}$ diagonalisiert $f_1, \dots, f_\ell$ in $\mathrm{End}_K(V)$. Dann gilt dies für alle Endomorphismen in dem hiervon erzeugten kommutativen Unterring $K[f_1, \dots, f_\ell] \leq \mathrm{End}_K(V)$.

Beispiel: Ohne Kommutativität bleibt Diagonalisierbarkeit nicht erhalten unter Summen und Produkten. Zum Beispiel sind die Matrizen $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ und $B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ einzeln diagonalisierbar, nicht jedoch $A + B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Übung: Finden Sie ähnliche Gegenbeispiele für Produkte.

Diagonalisierbarkeit und Einschränkung

Lemma P7c: Diagonalisierbarkeit und Einschränkung

Sei $f : V \to V$ diagonalisierbar und $U \leq V$ ein f–invarianter Unterraum. Dann ist auch die Einschränkung $g = f|_U^U : U \to U$ diagonalisierbar:

$$U = \bigoplus_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(g, \lambda) \quad \text{mit} \quad \operatorname{Eig}(g, \lambda) = \operatorname{Eig}(f, \lambda) \cap U$$

Übung: Zeigen Sie dies, es ist eine nützliche Übung zur Wiederholung. Welches Ihrer Werkzeuge zur Diagonalisierung passt hier am besten?

Beweis: Wir nutzen das lokale Minimalpolynom (Satz N3H):

Genau dann ist $f \in \operatorname{End}_K(V)$ diagonalisierbar, also $V = \bigoplus_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f, \lambda)$, wenn das MiPo $\mu_f^v \in K[X]$ über K einfach zerfällt für jeden Vektor $v \in V$.

Gilt dies für f, so auch für g, dank $\mu_f^v = \mu_g^v$ für jeden Vektor $v \in U$.
Demnach ist g diagonalisierbar, $U = \bigoplus_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(g, \lambda)$.

Nach Definition gilt $\operatorname{Eig}(g, \lambda) = \operatorname{Eig}(f, \lambda) \cap U$. QED

Simultane Diagonalisierung von Endomorphismen

Lemma P7D: Kommutation und Invarianz

Angenommen $f, g \in \operatorname{End}_K(V)$ kommutieren, das heißt $f \circ g = g \circ f$.
(1) Dann kommutieren auch $P(f)$ und $Q(g)$ für alle $P, Q \in K[X]$.
(2) Jeder Unterraum $U = \operatorname{Ker} P(f)$ ist g–invariant, $g(U) \subseteq U$.
(3) Jeder Eigenraum $\operatorname{Eig}(f, \lambda) = \operatorname{Ker}(f - \lambda)$ ist g–invariant.

Beweis: (1) Wir betrachten $P = \sum_{i=0}^m p_i X^i$ und $Q = \sum_{j=0}^n q_j X^j$:

$$P(f) \circ Q(g) = (\textstyle\sum_{i=0}^m p_i f^i) \circ (\sum_{j=0}^n q_j g^j) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n p_i q_j \, f^i \circ g^j$$
$$Q(g) \circ P(f) = (\textstyle\sum_{j=0}^n q_j g^j) \circ (\sum_{i=0}^m p_i f^i) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m q_j p_i \, g^j \circ f^i$$

Diese Summen sind termweise gleich, $p_i q_j \, f^i \circ g^j = q_j p_i \, g^j \circ f^i$.
(2) Für jeden Vektor $v \in \operatorname{Ker} P(f)$ zeigen wir $g(v) \in \operatorname{Ker}(f)$:

$$P(f)(g(v)) = (P(f) \circ g)(v) = (g \circ P(f))(v) = g(P(f)(v)) = g(0) = 0$$

(3) Speziell für $P = X - \lambda$ erhalten wir $\operatorname{Ker}(f - \lambda) = \operatorname{Eig}(f, \lambda)$. QED

Simultane Diagonalisierung von Endomorphismen

Korollar P7E: einfache Zerfällung

Angenommen $A \in K^{n \times n}$ zerfällt einfach. Für $B \in K^{n \times n}$ sind äquivalent:

1. Die Matrizen A und B kommutieren, es gilt also $AB = BA$.
2. Es gilt $B = P(A)$ für ein Polynom $P \in K[X]$.

Aufgabe: Beweisen Sie dies mit den obigen Werkzeugen.
Es ist eine nützliche Übung und schöne Wiederholung.

Beweis: „(2) ⇒ (1)“ ist klar dank Lemma P7D. Wirklich interessant ist die Umkehrung „(1) ⇒ (2)“: Es gilt $\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ mit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}^! \subseteq K$.
Dank Satz P2M existiert eine Eigenbasis $v_1, \dots, v_n \in K^n$ mit $Av_k = \lambda_k v_k$.
Dank Satz P7B ist dies zugleich eine Eigenbasis für B, also $Bv_k = \mu_k v_k$.

Dank Lagrange–Interpolation C2F existiert zu diesen Daten genau ein Polynom $P \in K[X]_{<n}$ mit $P(\lambda_k) = \mu_k$ für alle $k = 1, \dots, n$. Dank P110 gilt $P(A)v_k = P(\lambda_k)v_k = \mu_k v_k = Bv_k$. Dank N1A folgt $B = P(A)$. QED

Ausblick: Anwendungen in der Physik

Eigenvektoren spielen in vielen weiteren Anwendungen eine wichtige Rolle, etwa in der Graphentheorie, speziell beim PageRank–Verfahren, mit dem Google die Relevanz von Internetseiten bewertet.

Auch in der Physik treten Eigenwerte und Eigenvektoren häufig auf. In der Quantenmechanik werden physikalische Größen durch lineare Operatoren beschrieben. Eigenvektoren sind besonders einfache Basiszustände, ihre Eigenwerte entsprechen möglichen Messwerten.

Auf diese Weise erklärte Heisenberg seine Unschärferelation durch Begriffe der Linearen Algebra: Ortsoperator und Impulsoperator kommutieren nicht und haben keine gemeinsame Eigenbasis, sie können nicht beide gleichzeitig genau gemessen werden.

Die ominösen „Atom-Orbitale“ aus dem Chemie-Unterricht sind die Eigenfunktionen der zugehörigen Schrödinger–Gleichung. Messungen entsprechen linearen Operatoren, Messwerte sind Eigenwerte, und gleichzeitige Messung entspricht simultaner Diagonalisierung.

Anwendungsbeispiel zur simultanen Diagonalisierung

Aufgabe: (1) Welche der folgenden Matrizen sind $\mathbb{R}$–diagonalisierbar?

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -8 & -2 \\ 11 & 9 & 2 \\ 22 & 16 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -9 & -8 & -2 \\ 18 & 15 & 3 \\ -6 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -10 & -8 & -2 \\ 14 & 11 & 2 \\ 10 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

(2) Welche Teilfamilien von (A, B, C) sind simultan diagonalisierbar?
(3) Finden Sie jeweils eine simultane Eigenbasis, soweit möglich.
(4) Finden Sie jeweils alle simultanen Eigenbasen, soweit möglich.

Lösung: (1a) Wir berechnen $\chi_A = (X-1)^2(X-2)$. Das allein lässt die Frage der Diagonalisierbarkeit noch offen. Zur Klärung berechnen wir entweder zuerst $\mu_A = (X-1)(X-2)$ oder gleich die Eigenräume:

$$\begin{aligned} \operatorname{Eig}(A,1) &= \langle (-8,11,0)^\top,\ (-2,0,11)^\top \rangle_{\mathbb{R}}^{!} \\ \operatorname{Eig}(A,2) &= \langle (-1,1,2)^\top \rangle_{\mathbb{R}}^{!} \end{aligned}$$

Machen Sie die Probe! Somit ist die Matrix A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar. (Bonus: Die Eigenräume liefern erneut χ_A und μ_A wie angegeben.)

Anwendungsbeispiel zur simultanen Diagonalisierung

(1b) Wir berechnen $\chi_B = (X-2)^2(X-3)$. Das allein lässt die Frage der Diagonalisierbarkeit vorerst noch offen. Zur Klärung berechnen wir entweder zuerst $\mu_B = (X-2)(X-3)$ oder gleich die Eigenräume:

$$\begin{aligned} \operatorname{Eig}(B,2) &= \langle (2,-3,1)^\top \rangle_{\mathbb{R}}^{!} \\ \operatorname{Eig}(B,3) &= \langle (-2,3,0)^\top,\ (-1,0,6)^\top \rangle_{\mathbb{R}}^{!} \end{aligned}$$

Machen Sie die Probe! Somit ist die Matrix B über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar. (Bonus: Die Eigenräume liefern erneut χ_B und μ_B wie angegeben.)

(1c) Wir berechnen $\chi_C = (X-1)(X-2)(X-3)$. Somit ist die Matrix C über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar. Explizit berechnen wir hierzu die Eigenräume:

$$\begin{aligned} \operatorname{Eig}(C,1) &= \langle (2,-3,1)^\top \rangle_{\mathbb{R}}^{!} \\ \operatorname{Eig}(C,2) &= \langle (1,-2,2)^\top \rangle_{\mathbb{R}}^{!} \\ \operatorname{Eig}(C,3) &= \langle (0,-1,4)^\top \rangle_{\mathbb{R}}^{!} \end{aligned}$$

Machen Sie die Probe! Dies zeigt erneut $\chi_C = (X-1)(X-2)(X-3)$.

Anwendungsbeispiel zur simultanen Diagonalisierung

(2) Jede Matrix A, B, C ist *einzeln* diagonalisierbar. Zur *simultanen* Diagonalisierbarkeit prüfen wir die Kommutativität (P7B) und finden:

$$AB = BA \quad \text{und} \quad BC = CB \quad \text{aber} \quad AC \neq CA$$

Die Teilfamilien (A, B) und (B, C) sind also simultan diagonalisierbar, die Teilfamilien (A, C) und (A, B, C) hingegen sind es nicht!

(3a) Wir können auf (A, B) den Algorithmus P7B anwenden oder aus den berechneten Eigenräumen eine gemeinsame Eigenbasis wählen:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Eig}(A,1) = \langle (-8,11,0)^\top,\ (-2,0,11)^\top \rangle_{\mathbb{R}}^{!}, \quad \operatorname{Eig}(A,2) = \langle (-1,1,2)^\top \rangle_{\mathbb{R}}^{!} \\ &\operatorname{Eig}(B,2) = \langle (2,-3,1)^\top \rangle_{\mathbb{R}}^{!}, \quad \operatorname{Eig}(B,3) = \langle (-2,3,0)^\top,\ (-1,0,6)^\top \rangle_{\mathbb{R}}^{!} \end{aligned}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1}BS = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(4a) Das ist die einzige gemeinsame Eigenbasis des Paares (A, B), wie immer bis auf Vielfache und Vertauschung der Basisvektoren.

Anwendungsbeispiel zur simultanen Diagonalisierung

(3b) Wir können auf (B, C) den Algorithmus P7B anwenden oder aus den berechneten Eigenräumen eine gemeinsame Eigenbasis wählen:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Eig}(B,2) = \langle (2,-3,1)^\top \rangle_{\mathbb{R}}^{!}, \quad \operatorname{Eig}(B,3) = \langle (-2,3,0)^\top,\ (-1,0,6)^\top \rangle_{\mathbb{R}}^{!} \\ &\operatorname{Eig}(C,\{1,2,3\}) = \{ \langle (2,-3,1)^\top \rangle_{\mathbb{R}}^{!},\ \langle (1,-2,2)^\top \rangle_{\mathbb{R}}^{!},\ \langle (0,-1,4)^\top \rangle_{\mathbb{R}}^{!} \} \end{aligned}$$

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad T^{-1}BT = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad T^{-1}CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(4b) Das ist die einzige Eigenbasis von C und somit auch von (B, C), wie immer bis auf Vielfache und Vertauschung der Basisvektoren.

Bemerkung: In den Eigenbasen zu (A, B) bzw. (B, C) gilt jeweils

$$S^{-1}CS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dies zeigt eindrücklich, dass die jeweils dritte Matrix nicht gleichzeitig diagonalisiert wird, auch nicht kann, wie wir aus (2) bereits wissen.

Anwendungsbeispiel zur simultanen Diagonalisierung

Aufgabe: Wir betrachten weiterhin die drei reellen Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -8 & -2 \\ 11 & 9 & 2 \\ 22 & 16 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -9 & -8 & -2 \\ 18 & 15 & 3 \\ -6 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -10 & -8 & -2 \\ 14 & 11 & 2 \\ 10 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

(5) Sind $A,\ B,\ A+B,\ A\cdot B$ diagonalisierbar? einzeln? simultan?
(6) Sind $B,\ C,\ B+C,\ B\cdot C$ diagonalisierbar? einzeln? simultan?
(7) Sind $A,\ C,\ A+C,\ A\cdot C$ diagonalisierbar? einzeln? simultan?

Lösung: (5) Wir haben das Paar (A, B) bereits simultan diagonalisiert:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} S^{-1}AS &= \operatorname{diag}(1,1,2) \\ S^{-1}BS &= \operatorname{diag}(2,3,3) \\ S^{-1}(A+B)S &= \operatorname{diag}(3,4,5) \\ S^{-1}(A\cdot B)S &= \operatorname{diag}(2,3,6) \end{cases}$$

Durch S wird somit auch $(\,A,\ B,\ A+B,\ A\cdot B\,)$ simultan diagonalisiert.

Anwendungsbeispiel zur simultanen Diagonalisierung

(6) Wir haben das Paar (B, C) bereits simultan diagonalisiert:

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} T^{-1}BT &= \operatorname{diag}(2,3,3) \\ T^{-1}CT &= \operatorname{diag}(1,2,3) \\ T^{-1}(B+C)T &= \operatorname{diag}(3,5,6) \\ T^{-1}(B\cdot C)T &= \operatorname{diag}(2,6,9) \end{cases}$$

Durch T wird somit auch $(\,B,\ C,\ B+C,\ B\cdot C\,)$ simultan diagonalisiert.

(7) Wegen $AC \neq CA$ lässt sich (A, C) nicht simultan diagonalisieren. Über die Diagonalisierbarkeit von $A+C$ und $A\cdot C$ lässt sich daraus allein leider noch nichts schließen; beide Fälle sind noch möglich.

Um dies zu klären, müssen wir die Matrizen genauer untersuchen.
Langer Weg: Wir können das ChaPo-Verfahren P2H anwenden.
Abkürzung: Wir nutzen geschickt unsere Ergebnisse (1–4).

Anwendungsbeispiel zur simultanen Diagonalisierung

Zur Vereinfachung nutzen wir unsere Diagonalisierung von A:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1}CS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Daraus lesen wir Summe und Produkt ab:

$$S^{-1}(A+C)S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad S^{-1}(A\cdot C)S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Das zeigt uns, $A\cdot C$ ist (zufällig) diagonalisierbar, $A+C$ jedoch nicht.
Ausführlich gilt $\chi_{A+C} = \mu_{A+C} = (X-1)(X-4)^2$, also greift Satz P3M:
Somit sind zwar A und C diagonalisierbar, $A+C$ jedoch nicht.

Ebenso gilt $\chi_{AC} = \mu_{AC} = (X-1)(X-3)(X-4)$, also greift Satz P2M:
Somit sind A und C und AC diagonalisierbar, jedoch nicht simultan,
denn es gilt $AC \neq CA$ sowie $A(AC) \neq (AC)A$ und $C(AC) \neq (AC)C$.

Anwendungsbeispiel zur simultanen Diagonalisierung

Dieses Zahlenbeispiel zeigt erneut sehr eindrücklich:

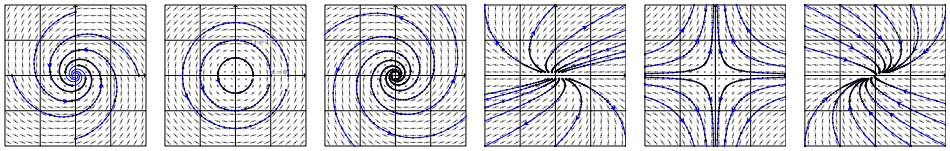
☺ Starke theoretische Grundlagen liefern praktische Werkzeuge.
Diese strukturieren und vereinfachen die Rechnungen spürbar.

☺ Gute Notation und ChaPo-Verfahren erleichtern das Vorgehen.
Oft hilft es, vorige Informationen geschickt wiederzuverwenden.

☺ Sie arbeiten umso effizienter, je genauer Sie verstehen, was Sie tun!
… insbesondere, was Sie schon haben und was Sie noch suchen.
Sie können dann geschickt vom ChaPo-Verfahren abweichen,
je nach konkretem Bedarf und möglichen Abkürzungen.

Kapitel Q

Hauptvektoren und Jordanisierung



To learn to succeed, you must first learn to fail.
Michael Jordan (1963–)

Inhalt dieses Kapitels Q

1 Hauptvektoren und Jordanisierung
- Die Jordan–Normalform
- Beweis des Satzes von Jordan
- Erste Beispiele und Anwendungen
- Von der komplexen zur reellen Jordan–Form

2 Differenzengleichungen und Differentialgleichungen
- Die diskrete Ableitung und ihre Hauptfolgen
- Die Ableitung und ihre Hauptfunktionen
- Freie und erzwungene harmonische Schwingung
- Struktursatz für lineare Differentialgleichungen

3 Lineare Differentialgleichungssysteme
- Exponentialfunktion und Struktursatz für DGSysteme
- Gekoppelte Oszillatoren und ihre Eigenschwingungen
- Jordanisierung: von Hauptvektoren zu Hauptfunktionen
- Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

4 Linearisierung um Fixpunkte und dynamische In/Stabilität

Kanonische Darstellung eines Endomorphismus

Worum geht es bei der kanonischen Darstellung von Endomorphismen? Vorgelegt sei eine lineare Abbildung $f : V \to V$ über einem Körper K. Unser Ziel ist eine möglichst einfache und übersichtliche Darstellung von f als Matrix bezüglich einer Basis von V, geschickt zu f angepasst!

Im vorigen Kapitel P haben wir zuerst die Diagonalisierung geklärt: Bezüglich einer Eigenbasis $\mathcal{B} = (v_i)_{i\in I}$ gilt $f(v_i) = \lambda_i v_i$ für alle $i \in I$. Das ist der Idealfall: In endlicher Dimension ist die darstellende Matrix dann diagonal, also $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Einfacher geht es nicht.

Leider ist nicht jeder Endomorphismus $f : V \to V$ diagonalisierbar!

Wir konzentrieren uns auf endliche Dimension $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$. Notwendig ist, dass das charakteristische Polynom $\chi_f \in K[X]_n^1$ über K in Linearfaktoren zerfällt. Hinreichend wird dies jedoch erst, wenn die geometrische Vielfachheit die algebraische erreicht (P3M).

In diesem Kapitel Q lösen wir alle verbleibenden Fälle, in denen zwar χ_f über K zerfällt, aber dennoch zu wenige Eigenvektoren zu f existieren.

Naturwissenschaftlich-technische Anwendungen

Die Jordan–Form ist ein grundlegendes Ergebnis der Linearen Algebra und zugleich ein Universalwerkzeug in ihren zahlreichen Anwendungen. Sie ist benannt nach dem französischen Mathematiker Camille Jordan (1838–1921), der sie 1870 veröffentlichte. Karl Weierstraß (1815–1897) hatte kurz zuvor bereits 1868 ein äquivalentes Ergebnis vorgestellt.

Genutzt wird die Jordan–Form nicht nur in der Algebra, sondern auch in der Analysis. Anwender:innen in Natur- und Ingenieurwissenschaften ist sie höchst willkommen zur Lösung von linearen Differentialgleichungssystemen $\dot{u} = Au$ mit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Der Ingenieur Yvon Villarceau löste 1870 den Fall von $n = 2$ Variablen, doch fehlten ihm die algebraischen Werkzeuge für das allgemeine Problem. Jordan antwortete ihm 1871, wie die Normalform dieses Problem löst, und übernahm diese Lösung in die zweite Auflage seines Lehrwerks *Cours d'analyse* von 1887.

Auch diese wichtigen Anwendungen will ich hier gebührend beleuchten. Zeit und Mühe sind gut investiert, denn dadurch werden Motivation, Anwendungen und Techniken wesentlich besser verständlich.

Ist jede quadratische Matrix trigonalisierbar?

Q005
Erinnerung

Welche quadratischen Matrizen $A \in K^{n\times n}$ sind trigonalisierbar?

Hindernis: Zerfällt das charakteristische Polynom χ_A in $K[X]$?

Typisches Gegenbeispiel über $\mathbb{R}$ ist eine reelle Drehstreckung P2P:

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \Rightarrow \quad \chi_A = (X-a)^2 + b^2 \in \mathbb{R}[X]_2^1$$

In $\mathbb{C}[X]$ gilt $\chi_A(X) = (X-\lambda)(X-\bar{\lambda})$ mit $\sigma(A;\mathbb{C}) = \{\lambda, \bar{\lambda}\} = \{a \pm \mathrm{i}b\}$.

Für $b \neq 0$ hat χ_A keine reelle Nullstelle, zerfällt also nicht in $\mathbb{R}[X]$.

☹ Somit ist A für $b \neq 0$ über $\mathbb{R}$ nicht trigonalisierbar, $A \nsim \left[\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right]$.

☺ Zur Trigonalisierung ist dies bereits das einzige Hindernis:

♦ **Satz P3B:** Trigonalisierung ⇔ Zerfällung

Genau dann ist eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ über K trigonalisierbar, wenn ihr charakteristisches Polynom $\chi_A \in K[X]$ über K zerfällt.

⚠ Das hängt sowohl von der Matrix A als auch von dem Körper K ab.

Ist jede quadratische Matrix trigonalisierbar?

Q006
Erinnerung

☺ Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K, etwa $\mathbb{C}$ (E3C), zerfällt jedes Polynom in Linearfaktoren (P2K), dieses erste Hindernis tritt über K demnach nie auf, und jede Matrix ist über K trigonalisierbar.

☺ Im Allgemeinen ist der Körper K nicht algebraisch abgeschlossen. Notfalls, wenn χ_f über K nicht zerfällt, können wir in einer geeigneten Körpererweiterung $\bar{K} \geq K$ arbeiten, sodass χ_f über $\bar{K}$ zerfällt.

Beispiel: Bei der Untersuchung der Fibonacci–Folge in $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ tritt die folgende Matrix A auf als Darstellung des Verschiebeoperators:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \chi_A = X^2 - X - 1$$

Das charakteristische Polynom zerfällt nicht über $\mathbb{Q}$, dies gelingt jedoch über der Körpererweiterung $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$: Die beiden Nullstellen von χ_A sind $\phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ und $\psi = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$. Somit lässt sich die Matrix A über dem Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ diagonalisieren und so die Fibonacci–Folge durch die einfache geschlossene Formel $f_n = (\phi^n - \psi^n)/(\phi - \psi)$ darstellen.

Ist jede trigonalisierbare Matrix diagonalisierbar?

Q007
Erinnerung

Welche quadratischen Matrizen $A \in K^{n\times n}$ sind diagonalisierbar?

1. Hindernis: Zerfällt das charakteristische Polynom χ_A in $K[X]$?

2. Hindernis: Erreicht die geometrische Vielfachheit die algebraische?

♦ **Satz P3M:** Kriterien zur Diagonalisierbarkeit

Sei $f : V \to V$ linear über dem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$.
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Der Endomorphismus $f : V \to V$ ist diagonalisierbar.
2. Es gilt die Eigenraumzerlegung $V = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(f)} \operatorname{Eig}(f,\lambda)$.
3. Es gilt die Dimensionsgleichung $n = \sum_{\lambda\in\sigma(f)} \dim_K \operatorname{Eig}(A,\lambda)$.
4. Das Minimalpolynom zerfällt einfach, also $\mu_f = \prod_{\lambda\in\sigma(f)}(X-\lambda)$.
5. Das charakteristische Polynom χ_f zerfällt über K in Linearfaktoren und für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma(f)$ gilt $\dim_K \operatorname{Eig}(f,\lambda) = \operatorname{ord}(\chi_f,\lambda)$.

Übung: Beweisen Sie diese Äquivalenzen zur Wiederholung.

Ist jede trigonalisierbare Matrix diagonalisierbar?

Q008
Erinnerung

☺ Das erste Hindernis tritt über einem algebraisch abgeschlossenen Körper wie $\mathbb{C}$ nie auf. Über jedem nicht-abgeschlossenen Körper K lässt es sich durch eine geeignete Körpererweiterung $\bar{K} \geq K$ lösen.

⚠ Das zweite Hindernis ist noch ernster und lässt sich nicht umgehen. Typisches Gegenbeispiel ist ein **Jordan–Block** der Dimension $n \geq 2$:

$$B = J(n,\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in K^{n\times n} \quad \Longrightarrow \quad B - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe: Bestimmen Sie zu B das Spektrum und die Eigenräume.

Lösung: Für $\mu \neq \lambda$ ist $B - \mu I$ invertierbar, also $\operatorname{Eig}(B,\mu) = \{0\}$.
Es bleibt nur $\operatorname{Eig}(B,\lambda) = Ke_1$, also erlaubt B keine Eigenbasis.

Das Polynom $\chi_B(x) = (X-\lambda)^n$ hat die Nullstelle λ mit Vielfachheit n.
Der zugehörige Kern $\operatorname{Ker}(B-\lambda I) = Ke_1$ hat aber nur Dimension 1:
Die geometrische Vielfachheit ist hier kleiner als die algebraische!

Jordan–Blöcke und Hauptvektorketten

Ist der Körper K algebraisch abgeschlossen, etwa $K = \mathbb{C}$, so zerfällt jedes Polynom über K, daher ist jede Matrix in $K^{n\times n}$ trigonalisierbar (P3B).
⚠ Nicht jede zerfallende Matrix ist diagonalisierbar (P2O):

$$B = J(n,\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in K^{n\times n} \quad \Longrightarrow \quad B - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

☹ Es gibt nicht genug **Eigenvektoren** zu B für eine Eigenbasis von K^n.
☺ Wir nutzen das Nächstbeste, die **Hauptvektorkette** $(e_1, e_2, \dots, e_n)$:

$$0 \xleftarrow{B-\lambda} e_1 \xleftarrow{B-\lambda} e_2 \xleftarrow{B-\lambda} \dots \xleftarrow{B-\lambda} e_n$$

Definition Q1A: Hauptvektoren

Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\lambda \in K$. Eine **Hauptvektorkette** / **Jordan–Kette**

$$0 \xleftarrow{f-\lambda} v_1 \xleftarrow{f-\lambda} v_2 \xleftarrow{f-\lambda} \dots \xleftarrow{f-\lambda} v_\ell$$

besteht aus Vektoren $v_0 = 0 \neq v_1, v_2, \dots, v_\ell \in V$ mit $(f-\lambda)(v_k) = v_{k-1}$.

Jordan–Blöcke und Hauptvektorketten

Wir schreiben kurz $B - \lambda$ für $B - \lambda I$ und $f - \lambda$ für $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$.
Wir nennen v_k einen **Hauptvektor k-ter Stufe**. Das bedeutet:

$$(f-\lambda)^k(v_k) = 0 \quad \text{aber} \quad v_1 = (f-\lambda)^{k-1}(v_k) \neq 0$$

Die Eigenvektoren v_1 von f sind genau die **Hauptvektoren 1. Stufe**:

$$(f-\lambda)^1(v_1) = 0 \quad \text{aber} \quad v_1 = (f-\lambda)^0(v_1) \neq 0$$

Jeder Vektor v_2 mit $(f-\lambda)(v_2) = v_1$ ist ein **Hauptvektor 2. Stufe**, usw.
Daher heißen Hauptvektoren auch **verallgemeinerte Eigenvektoren**.

Jordan–Blöcke spielen im Folgenden die zentrale Rolle: Sie zeigen sehr einfach und eindrücklich, dass nicht jede Matrix diagonalisierbar ist.
Die gute Nachricht: Jordan–Blöcke sind auch schon das Schlimmste, was uns passieren kann (wie immer vorausgesetzt, χ_f zerfällt über K).

Jeder Jordan–Block der Größe $n \times n$ entspricht einer Hauptvektorkette der Länge n und umgekehrt. Der folgende Satz Q1B besagt, dass wir zu $f : V \to V$ eine Basis aus Hauptvektorketten konstruieren können.

Jordan–Basen und Jordan–Normalform

Beim Diagonalisierungsproblem sind Jordan–Blöcke unvermeidlich.
Müssen wir zudem noch mit schlimmeren Komplikationen rechnen?
Nein! Glücklicherweise genügen Jordan–Blöcke bereits:

Satz Q1B: Jordan–Basis eines Endomorphismus

Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$ und $\chi_f \in K[X]$ zerfalle über K.
(1) Dann existiert zu f eine Basis $\mathcal{J}$ von V aus **Hauptvektorketten**.
Wir nennen jede solche Basis $\mathcal{J}$ von V eine **Jordan–Basis** zu f.
(2) So wird f dargestellt als Diagonalmatrix von **Jordan–Blöcken**:

$$\mathrm{M}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}}(f) = J = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_k \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad B_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in K^{n_i \times n_i}$$

Wir nennen die Matrix J die **Jordan–(Normal)Form** von f, kurz JNF.
(3) Sie ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Jordan–Blöcke.

Jordan–Basen und Jordan–Normalform

Für jeden Endomorphismus f über $\mathbb{C}$ zerfällt das charakteristische Polynom, also $\chi_f(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.
Sind alle Nullstellen verschieden, so ist f diagonalisierbar (P2M).

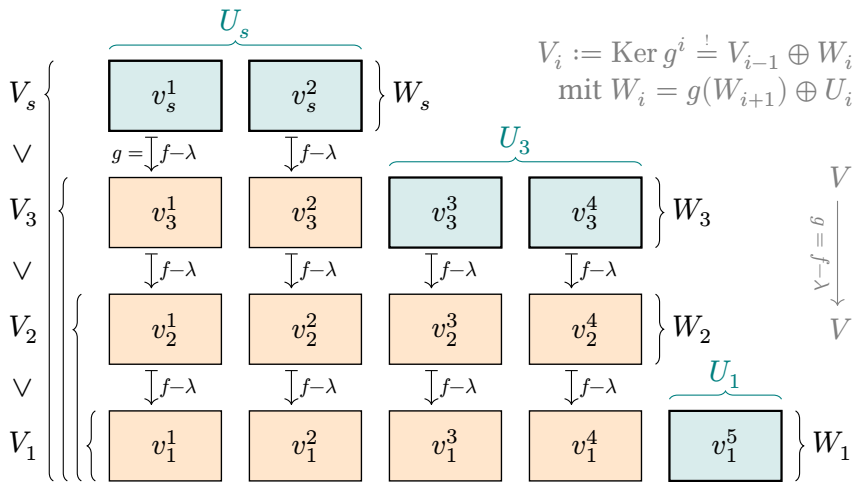
⚠ Bei mehrfachen Nullstellen müssen wir genauer hinschauen:
Möglicherweise ist f diagonalisierbar (P4A) oder auch nicht (P2O).

Gegenbeispiel: Für die Matrix B existieren nicht genug Eigenvektoren, um eine Basis zu bilden. Mit der Verallgemeinerung zu Hauptvektoren können wir dieses Problem allgemein lösen. Die Matrix kommt zwar nicht in Diagonalform, wird aber immerhin so einfach wie möglich.

Jeder r-fache Eigenwert λ erlaubt mindestens einen und höchstens r linear unabhängige Eigenvektoren; alle Möglichkeiten können auftreten.
Hingegen existieren zu λ immer r linear unabhängige Hauptvektoren!
Genauer besagt Satz Q1B: Es gibt eine Basis aus Hauptvektorketten.

Die nächsten Folien erklären das Standardverfahren zur Jordanisierung; der anschließende Beweis arbeitet die nötigen Argumente sorgfältig aus.

Standardverfahren zur Jordanisierung: Hauptraum-Sudoku!



Kurzfassung: Zu jedem Eigenwert λ von $f : V \to V$ konstruieren wir ein solches Young–Diagramm und lesen daraus die **Jordan–Form** ab.

Langfassung: Wir füllen die Kästchen geschickt mit Hauptvektorketten und erhalten daraus zudem eine explizite **Jordan–Basis** $\mathcal{J}$ von V zu f.

Standardverfahren zur Jordanisierung: Hauptraum-Sudoku!

Sei K ein Körper, V ein K–Vektorraum mit $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$ und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Nach folgendem Verfahren finden wir eine Jordan–Basis $\mathcal{J}$ von V zu f und somit die Jordan–Form von f.

Einzige Voraussetzung ist, dass das charakteristische Polynom χ_f über K in Linearfaktoren zerfällt. Der Beweis von Satz Q1B ist nichts anderes als dieser Algorithmus plus Nachweis der Korrektheit aller Schritte.

Zunächst benötigen wir alle Eigenwerte von $f \in \operatorname{End}_K(V)$:

1. Bestimme das charakteristische Polynom $\chi_f \in K[X]_n^1$.
2. Bestimme die Eigenwerte $\lambda_i \in K$ mit Vielfachheiten $r_i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Abbruch? Falls χ_f nicht zerfällt, so ist f nicht jordanisierbar (P3B).

Vereinfachung? Falls χ_f einfach zerfällt, so ist f diagonalisierbar (P2M), also $V = \bigoplus_i \operatorname{Eig}(f, \lambda_i)$. In diesem Falle genügt das Standardverfahren zur Diagonalisierung (P2H). Allgemein jedoch müssen wir jordanisieren.

Keine Sorge: Das folgende Standardverfahren zur Jordanisierung beinhaltet die Diagonalisierung als besonders einfachen Spezialfall.

Standardverfahren zur Jordanisierung: Hauptraum-Sudoku!

Für jeden Eigenwert λ sei r seine Vielfachheit und $g := f - \lambda \operatorname{id}_V : V \to V$. Führe für λ die folgenden Schritte (3&4) sowie bei Bedarf (5&6) aus:

3. Für $i = 0, 1, \dots, s$ setze $V_i := \operatorname{Ker} g^i = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_V)^i$ und bestimme die Dimension $k_i := \dim V_i$ bis schließlich $k_s = r$ gilt (dank Q1E).

Visualisierung: Diese Daten stellen wir wie oben als Young–Diagramm übersichtlich dar; die Zeile $i = 1, \dots, s$ enthält $z_i := k_i - k_{i-1}$ Kästchen. Dabei gilt $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_s$: Kein Kästchen hängt in der Luft (Q1F).

4. Lies die Jordan–Form $\operatorname{diag}(B_1, \dots, B_t)$ ab: Die j-te Spalte der Höhe ℓ zum Eigenwert λ steht für eine Hauptvektorkette der Länge ℓ und somit für den Jordan–Block $B_j = J(\ell, \lambda)$. Diese Jordan–Form ist eindeutig bis auf die willkürliche Reihenfolge der Eigenwerte.

Kurzfassung: Wenn zu f nur die Jordan–Form $J = \mathrm{M}_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}}(f)$ gefragt ist, jedoch keine Jordan–Basis $\mathcal{J}$, so sind wir an dieser Stelle schon fertig.

Langfassung: Falls zudem eine explizite Jordan–Basis $\mathcal{J}$ gesucht ist, so gelingt uns dies wie folgt: In den grünen Kästchen stehen die Startvektoren der Hauptvektorketten. Diese suchen wir!

Standardverfahren zur Jordanisierung: Hauptraum-Sudoku!

5. Für $i = s, \dots, 1$ wähle in V_i zu $V_{i-1} \oplus g(W_{i+1})$ ein Komplement U_i, sodass $V_i = V_{i-1} \oplus g(W_{i+1}) \oplus U_i$ gilt, und setze $W_i := g(W_{i+1}) \oplus U_i$. Anfangs gilt $W_{s+1} = 0$, also $U_s = W_s$. Wähle eine Basis von U_i und lasse diese Startvektoren zu Hauptvektorketten runterrieseln (Q1F).

Konkrete Rechnung mit Basisvektoren: In jeder Schicht $i = s, \dots, 1$ konstruieren wir eine Basis von W_i. Zuvor berechnet ist eine Basis $w_1, \dots, w_q$ der darüberliegenden Schicht W_{i+1}. (Anfangs $W_{s+1} = 0$.) Runterrieseln liefert eine Basis $g(w_1), \dots, g(w_q)$ des Bildes $g(W_{i+1})$. Wähle eine Hilfsbasis $v_1, \dots, v_p$ von V_{i-1} und setzte diese zur Basis $v_1, \dots, v_p, g(w_1), \dots, g(w_q)$ von $V_{i-1} \oplus g(W_i)$ zusammen. Ergänze diese schließlich zu einer Basis $v_1, \dots, v_p, g(w_1), \dots, g(w_q), u_1, \dots, u_h$ von V_i. Trage die Startvektoren $u_1, \dots, u_h$ in die grünen Kästchen ein und lasse runterrieseln. Unsere Basis von W_i ist nun $g(w_1), \dots, g(w_q), u_1, \dots, u_h$. Mit diesen Daten gehen wir weiter zur darunterliegenden Schicht $i - 1$.

6. Lies die Jordan–Basis $\mathcal{J}$ zu f ab: Alle Spalten von links nach rechts, jede Spalte von unten nach oben (in der Konvention von Satz Q1B). Füge diese Jordan–Ketten für alle Eigenwerte zu $\mathcal{J}$ zusammen (Q1E).

Hauptvektorketten sind linear unabhängig.

Warum gelingt die Jordanisierung? Wir prüfen sorgsam jeden Schritt!

Satz Q1c: Hauptvektorketten sind linear unabhängig.

Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung über K und $\lambda \in K$ ein Skalar.

(1) Jede Hauptvektorkette $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_\ell)$ zu λ ist linear unabhängig.

$$0 \xleftarrow{f-\lambda} v_1 \xleftarrow{f-\lambda} v_2 \xleftarrow{f-\lambda} \dots \xleftarrow{f-\lambda} v_\ell$$

(2) Eine Familie von Hauptvektorketten $\mathcal{F} = (v_1^1, \dots, v_{\ell_1}^1; \dots; v_1^k, \dots, v_{\ell_k}^k)$ zu λ ist genau dann linear unabhängig, wenn die zugrundeliegenden Eigenvektoren $\mathcal{E} = (v_1^1, \dots, v_1^k)$ linear unabhängig sind.

$$\begin{array}{c} 0 \xleftarrow{f-\lambda} v_1^1 \xleftarrow{f-\lambda} v_2^1 \xleftarrow{f-\lambda} \dots \xleftarrow{f-\lambda} v_{\ell_1}^1 \\ \vdots \\ 0 \xleftarrow{f-\lambda} v_1^k \xleftarrow{f-\lambda} v_2^k \xleftarrow{f-\lambda} \dots \xleftarrow{f-\lambda} v_{\ell_k}^k \end{array}$$

☺ Alle Vektoren in einem korrekt ausgefüllten Young–Diagramm, wie auf Seite Q105 dargestellt, sind demnach linear unabhängig.

Hauptvektorketten sind linear unabhängig.

Beweis: (1) Wir führen Induktion über die Länge ℓ der Hauptvektorkette. Der Fall $\ell = 1$ ist klar (L1F), denn es gilt $v_1 \neq 0$ nach Definition Q1A. Sei also $\ell \geq 2$. Gegeben seien Koeffizienten $a_1, \dots, a_{\ell-1}, a_\ell \in K$ mit $a_1 v_1 + \dots + a_{\ell-1} v_{\ell-1} + a_\ell v_\ell = 0$. Wir zeigen $0 = a_1 = \dots = a_{\ell-1} = a_\ell$. Die Anwendung von $(f-\lambda)^{\ell-1}$ ergibt zunächst $a_\ell v_1 = 0$, also gilt $a_\ell = 0$. Die reduzierte Familie $\mathcal{F}' = (v_1, \dots, v_{\ell-1})$ ohne v_ℓ ist linear unabhängig nach Induktionsvoraussetzung. Wir schließen $0 = a_1 = \dots = a_{\ell-1} = a_\ell$.

(2) Wir führen Induktion über die maximale Länge $\ell = \max\{\ell_1, \dots, \ell_k\}$. Der Fall $\ell = 1$ ist trivial, denn hier ist $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ linear unabhängig. Wir können $\ell = \ell_1 = \dots = \ell_r > \ell_{r+1} \geq \dots \geq \ell_k \geq 1$ annehmen. Gegeben seien Koeffizienten $a_j^i \in K$ mit $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell_k} a_j^i v_j^i = 0$. Die Anwendung von $(f-\lambda)^{\ell-1}$ reduziert dies zu $\sum_{i=1}^r a_\ell^i v_1^i = 0$. Da die Familie $\mathcal{E}$ linear unabhängig ist, folgt $a_\ell^1 = \dots = a_\ell^r = 0$. Die Familie $\mathcal{F}'$ entsteht aus $\mathcal{F}$ durch Löschung von $v_\ell^1, \dots, v_\ell^r$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\mathcal{F}'$ linear unabhängig, also gilt $a_j^i = 0$ für alle i, j. Das war zu zeigen. QED

Haupträume eines Endomorphismus

Definition Q1D: Haupträume eines Endomorphismus

Sei $f : V \to V$ linear über dem Körper K und $\lambda \in K$ ein Skalar.

(1) Der **Hauptraum der Stufe** $s = 0, 1, 2, \dots$ von f zu λ ist

$$V_s = \mathrm{Hau}_s(f, \lambda) := \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^s.$$

Hierbei ist $V_1 = \mathrm{Eig}(f, \lambda) = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)$ der **Eigenraum** von f zu λ. Entsprechend heißt V_s auch **verallgemeinerter Eigenraum** der Stufe s.

(2) Wir erhalten so eine aufsteigende Kette f–invarianter Unterräume:

$$\{0\} = V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \dots \leq V \quad \text{mit} \quad f(V_i) \subseteq V_i$$

(3) Der **Hauptraum** von f zu λ (ohne Einschränkung der Stufe) ist

$$\mathrm{H}(\lambda) = \mathrm{Hau}(f, \lambda) := \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^s.$$

(4) Dank (2) ist $\mathrm{Hau}(f, \lambda)$ ein f–invarianter Unterraum von V. Er besteht aus allen Vektoren $v \in V$ mit $(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^s(v) = 0$ für einen hinreichend großen Exponenten $s \in \mathbb{N}$, der im Allgemeinen von v abhängen wird.

Haupträume eines Endomorphismus

Aufgabe: Zeigen Sie die Aussagen (2) und (4). (Streng genommen sollte eine Definition keine Behauptungen enthalten, doch hier will ich davon abweichen und sofort die grundlegenden Eigenschaften nennen.)

Beweis: (2) Wir setzen abkürzend $g := f - \lambda$, genauer $g = f - \lambda\, \mathrm{id}_V$. Sei $v \in V_s$. Daraus folgt $g^{s+1}(v) = g(g^s(v)) = g(0) = 0$, also $v \in V_{s+1}$. Dank $g \circ f = f \circ g$ folgt $g^s(f(v)) = f(g^s(v)) = f(0) = 0$, also $f(v) \in V_s$.

(4) Ist $V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \dots \leq V$ eine Kette von Unterräumen in V, dann ist ihre Vereinigung $\bigcup_{s \in \mathbb{N}} V_s$ ebenfalls ein Unterraum in V. Beweisen Sie dies als Übung, oder konsultieren Sie Satz L2J.

Bemerkung: Ist V endlich-dimensional, so auch jeder Unterraum

$$V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \dots \leq V,$$

und diese Kette wird stationär, das heißt es existiert ein Index $s \in \mathbb{N}$, sodass $V_s = V_r$ für alle $r \geq s$ gilt, also $\mathrm{Hau}(f, \lambda) = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^s$.

Der folgende Satz klärt die Zerlegung von V in Haupträume $\mathrm{Hau}(f, \lambda)$.

Hauptraumzerlegung

Satz Q1E: die Hauptraumzerlegung

Sei $f : V \to V$ linear über dem Körper K. (0) Die Summe $\mathrm{H} := \sum_{\lambda \in K} \mathrm{H}(\lambda)$ aller Haupträume $\mathrm{H}(\lambda) = \mathrm{Hau}(f, \lambda) := \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \mathrm{Ker}(f - \lambda)^s \leq V$ ist direkt:

$$\boxed{\mathrm{H} := \bigoplus_{\lambda \in K} \mathrm{Hau}(f, \lambda) \leq V}$$

(1) Zudem gelte $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$ und $\chi_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{r_i}$ mit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}^! \subseteq K$ und $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann haben wir

$$\boxed{V = \bigoplus_{i=1}^k \mathrm{Hau}(f, \lambda_i)}$$

mit $\mathrm{Hau}(f, \lambda_i) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i)^{r_i}$ und $\dim_K \mathrm{Hau}(f, \lambda_i) = r_i$.

☺ Der entscheidende Vorteil zur Eigenraumzerlegung P1D ist hier, dass die Haupträume $\mathrm{Hau}(f, \lambda_i)$ *immer* eine Summenzerlegung von ganz V ergeben. Insbesondere hat jeder Hauptraum $\mathrm{Hau}(f, \lambda_i)$ *immer* die richtige Dimension, nämlich genau die algebraische Vielfachheit r_i.

Hauptraumzerlegung

Beweis: (0) Für $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}^! \subseteq K$ und $v_i \in \mathrm{H}(\lambda_i)$ müssen wir zeigen:

$$v_1 + \dots + v_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \dots = v_k = 0$$

Hierzu sei $v_i \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_i)^{s_i}$ für $i = 1, \dots, k$. Die Kernzerlegung N3G zum Polynom $P = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{s_i}$ garantiert unsere Behauptung:

$$\mathrm{Ker}\, P(f) = \bigoplus_{i=1}^k \mathrm{Ker}(f - \lambda_i)^{s_i} \leq V$$

(1) Cayley–Hamilton P3H garantiert $\chi_f(f) = 0$. Die Kernzerlegung ergibt

$$V \overset{\text{P3H}}{=} \mathrm{Ker}\, \chi_f(f) \overset{\text{N3G}}{=} \bigoplus_{i=1}^k \mathrm{Ker}(f - \lambda_i)^{r_i}$$

Wir haben $\mathrm{Ker}(f - \lambda_i)^{r_i} \leq \mathrm{H}(\lambda_i)$. Dank (0) folgt Gleichheit (L3M).

Sei $s_i := \dim_K \mathrm{H}(\lambda_i)$. Auf $\mathrm{H}(\lambda_i)$ ist $f - \lambda_i$ nilpotent, mit char. Polynom $(X - \lambda_i)^{s_i}$, siehe P3K. Auf der direkten Summe $V = \bigoplus_{i=1}^k \mathrm{H}(\lambda_i)$ gilt also $\chi_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{s_i}$. Polynomvergleich zeigt $s_i = r_i$ für alle i. $\boxed{\text{QED}}$

Slogan: Es gibt nicht immer genug Eigenvektoren, aber es gibt immer genug Hauptvektoren! Die direkte Summe der Haupträume ist ganz V.

Hauptraumzerlegung

Satz Q1E: die Hauptraumzerlegung

(2) Sei $\mathcal{A}_i$ eine Basis von $\mathrm{Hau}(f, \lambda_i)$. Zusammengesetzt erhalten wir eine Basis $\mathcal{A}$ von V. Die Abbildung f wird dann dargestellt durch

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_k \end{bmatrix}.$$

Hier gilt $A_i = \lambda_i E_{r_i} + N_i$ mit einer nilpotenten Matrix $N_i \in K^{r_i \times r_i}$. Somit erhalten wir die Zerlegung $A = D + N$ mit $D, N \in K^{n \times n}$, wobei D diagonal und N nilpotent ist und zudem $DN = ND$ gilt.

(3) Wenn wir für jeden Hauptraum eine Jordan–Basis wählen, so wird f dargestellt als Diagonalmatrix von Jordan–Blöcken:

$$A_i = \mathrm{diag}(J(r_{i,1}, \lambda_i), J(r_{i,2}, \lambda_i), \dots, J(r_{i,k_i}, \lambda_i))$$

mit $r_{i,1} \geq r_{i,2} \geq \dots \geq r_{i,k_i}$ und $r_i = r_{i,1} + r_{i,2} + \dots + r_{i,k_i}$.

Hauptraumzerlegung

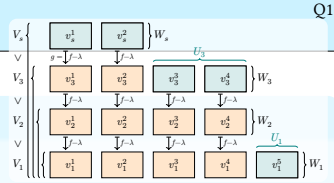
Die Hauptraumzerlegung folgt aus der Kernzerlegung als wichtiger Spezialfall und schöne Anwendung. Daher habe ich die Kernzerlegung schon früh in den Mittelpunkt gerückt. Anfangs wirkte sie vermutlich noch abstrakt, und das ist sie ja auch. Nun erkennen Sie, wie sich unsere alte Weisheit auch hier einmal mehr bewährt: Abstrakt heißt nicht etwa fern der Anwendung, sondern im Gegenteil vielseitig anwendbar!

☺ Abstraktion hilft: *Prove once, apply everywhere!*

Dank der Hauptraumzerlegung können wir uns im Folgenden auf einen einzelnen Hauptraum $\mathrm{H}(\lambda)$ konzentrieren. Insbesondere wollen wir die Aussage (3) schärfen: Wir können in $\mathrm{H}(\lambda)$ eine Jordan–Basis wählen. Genau das ist die Aussage des folgenden Satzes: Wir kennen schon das Verfahren, wir müssen nur noch sicherstellen, dass es immer gelingt.

☺ Anwendungen zeigen – in diesem Kapitel und weit darüber hinaus: Die (schöne!) Theorie ordnet und vereinfacht die (komplexe!) Praxis. Eine allgemeine Theorie ist manchmal (gar oft?) leichter zu verstehen als ihre zahlreichen Spezialfälle. Beide Sichtweisen ergänzen sich.

Interne Struktur des Hauptraums



Satz Q1F: Kernfiltrierung jedes Hauptraums

Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\lambda \in K$ und $g = f - \lambda\,\mathrm{id}_V$.
(0) Für die Haupträume $V_i := \operatorname{Ker} g^i$ der Stufe $i = 0, 1, 2, \dots$ gilt

$$\{0\} = V_0 \le V_1 \le V_2 \le \dots \le V \text{ mit } g(V_{i+1}) \le V_i \text{ und } V_{i+1} = g^{-1}(V_i),$$

somit $g(V_{i+1} \smallsetminus V_i) \subseteq V_i \smallsetminus V_{i-1}$. Fortan sei $i \ge 1$ und $V_{i+1} = V_i \oplus W_{i+1}$.
(1) Die Einschränkung von $g : V \to V$ zu $g_{i+1} : W_{i+1} \to V_i$ ist injektiv.
(2) Ihr Bild erfüllt $g(W_{i+1}) \cap V_{i-1} = \{0\}$. Wir erhalten die Injektion

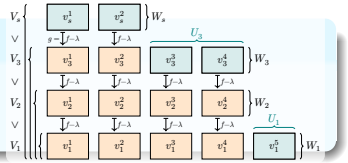
$$\bar g_{i+1} : W_{i+1} \hookrightarrow V_i/V_{i-1} : w \mapsto g(w) + V_{i-1}.$$

Mit $V_i = V_{i-1} \oplus W_i$ ist die Komposition $W_{i+1} \hookrightarrow V_i/V_{i-1} \cong W_i$ injektiv.

Beweis: (0) Es gilt: $v \in V_i \iff 0 = g^i(v) = g^{i-1}(g(v)) \iff g(v) \in V_{i-1}$.
(1) Wir haben $\operatorname{Ker}(g) = V_1 \le V_i$, also $\operatorname{Ker}(g) \cap W_{i+1} \le V_i \cap W_{i+1} = \{0\}$.
(2) Für $w \in W_{i+1} \smallsetminus \{0\}$ gilt $w \notin V_i$, demnach $0 \ne g^i(w) = g^{i-1}(g(w))$.
Das heißt $g(w) \notin V_{i-1}$. Also ist auch $\bar g_{i+1} : W_{i+1} \to V_i/V_{i-1}$ injektiv. QED

Interne Struktur des Hauptraums

Für die Dimensionen $k_i := \dim V_i$ folgt $0 = k_0 \le k_1 \le k_2 \le \dots$ dank (0).
Sei zudem $k_1 = \dim V_1 = \dim W_1$ endlich. Per Induktion über $i \in \mathbb{N}$ folgt aus (2), dass auch $\dim W_i \le k_1$ und $\dim V_i \le ik_1$ endlich sind.
Für die Zuwächse $z_i = k_i - k_{i-1} = \dim W_i$ folgt $z_1 \ge z_2 \ge z_3 \ge \dots$.



Satz Q1F: Kernfiltrierung jedes Hauptraums

(3) Unser Hauptraum-Sudoku 1–5 gelingt:
Jeder Hauptraum erlaubt eine Jordan–Basis.

Beweis: Polynom 1 und Zerfällung 2 sind klar. Schritt 3 gelingt dank $V_0 \le V_1 \le \dots \le V$ und Satz Q1E. Abkürzung 4 ist korrekt dank 5 und 6.

Wir klären nun Schritt 5: Dank (2) ist in V_i die Summe $V_{i-1} \oplus g(W_{i+1})$ direkt. Wir können also ergänzen zu $V_i = V_{i-1} \oplus g(W_{i+1}) \oplus U_i$. Dank Injektivität (1) erhalten wir durch Runterrieseln und Ergänzen in jeder Zeile $W_s, \dots, W_1$ eine Basis, also insgesamt eine Basis des Hauptraums $\mathrm{Hau}(f, \lambda) = V_s = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$. In jeder Spalte steht nach Konstruktion eine Hauptvektorkette. (Schritt 6 folgt aus dem vorigen Satz Q1E.) QED

Eindeutigkeit der Jordan–Form

Satz Q1G: Eindeutigkeit der Jordan–Form

Vorgelegt seien in $K^{n\times n}$ zwei Jordan–Matrizen

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_p \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_q \end{bmatrix}$$

mit Jordan–Blöcken $B_i = J(\ell_i, \lambda_i)$ und $C_j = J(m_j, \mu_j)$ für alle i und j.

(1) Sind B und C ähnlich, also $C = T^{-1}BT$ für ein $T \in \mathrm{GL}_n K$, so gilt $p = q$ und nach Umordnung $B_i = C_i$ für alle $i = 1, \dots, p$.

(2) Die Dimensionen $(\lambda, s) \mapsto k_s(\lambda) := \dim \operatorname{Ker}(B - \lambda)^s$ sind invariant unter Konjugation, und diese bestimmen bereits die Jordan–Form.

(3) Genauer: Die Anzahl $n(B; \ell, \lambda)$ der Blöcke $J(\ell, \lambda)$ der Matrix B ist

$$\boxed{n(B; \ell, \lambda) = 2k_\ell(\lambda) - k_{\ell-1}(\lambda) - k_{\ell+1}(\lambda)}$$

Eindeutigkeit der Jordan–Form

☺ Für alle jordanisierbaren Matrizen, also mit zerfallendem Polynom, haben wir damit das Klassifikationsproblem bis auf Ähnlichkeit gelöst. Über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper wie $\mathbb{C}$ ist jede Matrix jordanisierbar und das Klassifikationsproblem somit gelöst.

Beweis: (3) Jeder Jordan–Block $J(\ell, \lambda)$ der Größe $\ell \times \ell$ entspricht einer Hauptvektorkette der Länge ℓ, und umgekehrt. Zur Matrix B definieren wir $k_\ell := \dim \operatorname{Ker}(B - \lambda)^\ell$ und setzen $z_\ell := k_\ell - k_{\ell-1}$ wie in Satz Q1F.

Die Zahl $z_\ell \in \mathbb{N}$ ist die Breite der Zeile ℓ im Young–Diagramm (Q105) zum Hauptvektorraum $\mathrm{Hau}(B, \lambda)$. Dies ist zugleich die Anzahl der Hauptvektorketten der Länge $\ge \ell$. Somit ist $n(B; \ell, \lambda) = z_\ell - z_{\ell+1}$ die gesuchte Anzahl der Hauptvektorketten der Länge genau ℓ.

(2) Aus $C = T^{-1}BT$ folgt $(C - \lambda)^\ell = (T^{-1}BT - \lambda)^\ell = T^{-1}(B - \lambda)^\ell T$.
Wir erhalten den Isomorphismus $(T, T^{-1}) : \operatorname{Ker}(C - \lambda)^\ell \cong \operatorname{Ker}(B - \lambda)^\ell$, und somit $\dim \operatorname{Ker}(C - \lambda)^\ell = \dim \operatorname{Ker}(B - \lambda)^\ell$ für alle $\lambda \in K$ und $\ell \in \mathbb{N}$.

(1) Dank dieser Rechnung folgt $n(C; \ell, \lambda) = n(B; \ell, \lambda)$. QED

Un/endliche Jordan–Basis

Wir konzentrieren uns auf endliche Dimension $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$.
Doch auch der unendlich-dimensionale Fall ist ebenso natürlich:

Beispiel Q1H: eine unendliche Hauptvektorkette

Sei $\mathbb{K} \geq \mathbb{Q}$. Die Ableitung $\partial : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ hat als unendliche Jordan–Basis $(v_k = X^k/k!)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $0 \xleftarrow{\partial} v_0 \xleftarrow{\partial} v_1 \xleftarrow{\partial} v_2 \xleftarrow{\partial} \dots$.

Definition Q1I: un/endliche Jordan–Basis

Sei $g : V \to V$ linear über dem Körper K. Wir nennen g **lokal nilpotent**, falls zu jedem Vektor $v \in V$ ein Exponent $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $g^k(v) = 0$.

Eine **Jordan–Basis** $\mathcal{J}$ von V zu g ist eine Basis $\mathcal{J} \subseteq V$, für die gilt:

1. Für jeden Basisvektor $v \in \mathcal{J}$ gilt entweder $g(v) = 0$ oder $g(v) \in \mathcal{J}$.
2. Zu jedem $v \in \mathcal{J}$ existiert höchstens ein Urbild $u \in \mathcal{J}$ mit $g(u) = v$.

Allgemein sei $f : V \to V$ linear über K. Eine **Jordan–Basis** $\mathcal{J} = \bigsqcup_{\lambda\in K} \mathcal{J}_\lambda$ von V zu f besteht zu jedem Skalar $\lambda \in K$ aus einer Jordan–Basis $\mathcal{J}_\lambda$ des Hauptraums $\mathrm{Hau}(f, \lambda)$ zu der darauf nilpotenen Abbildung $g = f - \lambda$.

Un/endliche Jordan–Basis

Lemma Q1J: un/endliches Hauptraum-Sudoku

Ist $g : V \to V$ lokal nilpotent, so existiert eine Jordan–Basis $\mathcal{J}$ von V zu g.

Beweis: Wie zuvor betrachten wir $V_k := \operatorname{Ker} g^k$ für die Stufen $k \in \mathbb{N}$.
In V_1 liegt der Bildraum $B_k := g^{k-1}(V_k)$. Wir haben $g(V_{k+1}) \leq V_k$, also

$$B_{k+1} \;=\; g^k(V_{k+1}) \;=\; g^{k-1}(g(V_{k+1})) \;\leq\; g^{k-1}(V_k) \;=\; B_k.$$

Hierzu wählen wir ein Komplement $C_k \leq B_k$ so, dass $B_k = B_{k+1} \oplus C_k$.
Wir wählen Urbilder $(v_k^i)_{i\in I_k}$ in V_k, sodass $(g^{k-1}(v_k^i))_{i\in I_k}$ eine Basis von C_k ist. Dies sind die Startvektoren der Hauptvektorketten der Länge k.

Schließlich bleibt $B_\infty := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k \leq V_1$. Wir wählen eine Basis von B_∞, und über jedem Basiselement eine Hauptvektorkette unendlicher Länge.

Alle Längen zusammenfassend erhalten wir unsere Jordan–Basis von V, denn wir haben eine Basis in jeder Schicht V_i/V_{i-1} für $i \in \mathbb{N}$. QED

Übung: Vergleichen Sie diese Methode mit unserem Hauptraum-Sudoku.

Un/endliche Jordan–Basis

Satz Q1K: lokales Minimalpolynom und Hauptraumzerlegung

Sei $f : V \to V$ linear über K. Für jeden Vektor $v \in V$ sind äquivalent:

1. Unser Vektor v ist eine Summe von Hauptvektoren:
   $v = v_1 + \dots + v_n$ mit $(f - \lambda_i)^{s_i}(v_i) = 0$ und $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}^! \subseteq K$.
2. Das Minimalpolynom $\mu_f^v \in K[X]$ zerfällt über K:
   $\mu_f^v \mid P = (X - \lambda_1)^{s_1} \cdots (X - \lambda_n)^{s_n}$ mit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}^! \subseteq K$.

Beweis: „⇒“: P annulliert f in $v_1, \dots, v_n$, also in v. Dank N3F folgt $\mu_f^v \mid P$.
„⇐“: Das folgt aus der Kernzerlegung N3G für $\operatorname{Ker} P(f) \ni v$. QED

Genau dann gilt die Hauptraumzerlegung $V = \bigoplus_{\lambda\in K} \mathrm{Hau}(f, \lambda)$, wenn das MiPo $\mu_f^v \in K[X]$ über K zerfällt für jeden Vektor $v \in V$.

Beweis: „⇒“: Für jeden Vektor $v \in V$ gilt die Aussage (1), also auch (2).
„⇐“: Die Summe $\mathrm{H} := \sum_{\lambda\in K} \mathrm{Hau}(f, \lambda) \leq V$ ist direkt dank Satz Q1E.
Für jeden Vektor $v \in V$ gilt Aussage (2), also auch (1), somit $V \subseteq \mathrm{H}$. QED

Un/endliche Jordan–Basis

Als krönenden Abschluss fassen wir unsere Erkenntnisse zusammen.
Auch der unendlich-dimensionale Fall wird wieder elegant gelöst durch das lokale Minimalpolynom, das uns überall gute Dienste leistet:

Satz Q1K: MiPo–Kriterium für Diagonalisierung und Jordanisierung

Sei $f : V \to V$ linear über dem Körper K.

(D) Diagonalisierbar: Genau dann existiert eine Eigenbasis $\mathcal{B}$ von V zu f, wenn jedes lokale Minimalpolynom μ_f^v für $v \in V$ über K einfach zerfällt.

(J) Jordanisierbar: Genau dann existiert eine Jordan–Basis $\mathcal{J}$ von V zu f, wenn jedes lokale Minimalpolynom μ_f^v für $v \in V$ über K zerfällt.

Im Falle $\dim_K(V) < \infty$ genügt hierzu das globale Minimalpolynom μ_f.

Beweis: Die Äquivalenz (D) ist das bewährte MiPo-Kriterium N3H:
Es garantiert $V = \bigoplus_{\lambda\in K} \mathrm{Eig}(f, \lambda)$, und so erhalten wir eine Eigenbasis.
Die Äquivalenz (J) zeigen wir ganz genauso: Es gilt $V = \bigoplus_{\lambda\in K} \mathrm{Hau}(f, \lambda)$, wie oben erklärt, und daraus konstruieren wir eine Jordan–Basis. QED

Erstes Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

Aufgabe: Jordanisieren Sie über $\mathbb{C}$ die folgende Matrix. Was ist gefragt? Kurzfassung: die Jordan–Form. Langfassung: zudem eine Jordan–Basis.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 & 1 & -6 \\ -4 & 10 & -4 & 1 & -8 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 5}$$

Lösung: (0) Wir bestimmen das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{C}[X]^1_5$. Klausurtipp: $\chi_A = (X-\lambda)^5$. Dank $\operatorname{tr} A = 10$ finden wir $\chi_A = (X-2)^5$.

(1) Wir bestimmen den Eigenraum zu $\lambda = 2$. Hierzu sei $B = A - 2I$:

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 & 1 & -6 \\ -4 & 8 & -4 & 1 & -8 \\ -3 & 6 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \implies \operatorname{Ker} B = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle^{!}_{\mathbb{C}}$$

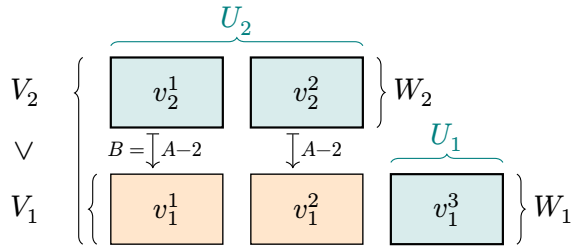
Erstes Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

☺ An dieser Stelle entscheidet sich bereits die Diagonalisierbarkeit: Zum Eigenwert $\lambda = 2$ ist die geom. Vielfachheit 3, erreicht also nicht die alg. Vielfachheit 5. Unsere Matrix A ist demnach nicht diagonalisierbar.

(2) Wir filtrieren den Hauptraum durch $V_i = \operatorname{Ker} B^i$ mit $k_i := \dim V_i$:

$$\operatorname{Ker} B =: V_1 \;\le\; \operatorname{Ker} B^2 =: V_2 \;\le\; \operatorname{Ker} B^3 =: V_3 \;\le\; \dots$$

Wir haben zuvor in (1) bereits $\operatorname{Ker} B = \langle \dots \rangle^{!}_{\mathbb{C}}$ und $k_1 = 3$ bestimmt. Wir berechnen B^2. Klausurtipp: $B^2 = 0$. Wir finden so $\operatorname{Ker} B^2 = \mathbb{C}^5$. Aus den Dimensionen $k = (3,5)$ lesen wir die Form des Hauptraums:



Erstes Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

Wenn nur die **Jordan–Form** gefragt ist, so können wir bereits antworten. Es existiert ein Basiswechsel $T \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{C})$ zu folgender Jordan–Form:

$$\exists T \in \mathrm{GL}_5\,\mathbb{C}: \quad T^{-1}AT = J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Wie finden wir den Basiswechsel T? Wir konstruieren eine Jordan–Basis! Zu $V_1 < V_2$ wählen wir ein Komplement $W_2 = U_2 = \langle v_2^1, v_2^2 \rangle^{!}_{\mathbb{C}}$, etwa

$$v_2^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{B}{\longmapsto} v_1^1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \overset{B}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{B}{\longmapsto} v_1^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{B}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

⚠ Es gibt viele Wahlen: Komplemente und Basen sind nicht eindeutig!

Erstes Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

Im Hauptraum-Sudoku (hier für $s = 2$) ist damit in der obersten Schicht $W_2 = U_2 = \langle v_2^1, v_2^2 \rangle^{!}_{\mathbb{C}}$ eine Basis gewählt. Diese lassen wir runterrieseln zu $g(W_2) = \langle v_1^1, v_1^2 \rangle^{!}_{\mathbb{C}} \le V_1$. In der Schicht $W_1 = V_1$ ergänzen wir, etwa

$$v_1^3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \overset{B}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

So erhalten wir unsere Jordan–Basis $\mathcal{J} = (\, v_1^1, v_2^1,\; v_1^2, v_2^2,\; v_1^3 \,)$.

❓ Was bedeutet dieses Ergebnis? Wie können wir wissen, ob wir richtig gerechnet haben? Was war eigentlich das Ziel? *Know your definitions!*

⚠ Machen Sie die Probe! Gilt $T^{-1}AT = J$? Wenigstens $AT = TJ$? Die Inversion von T zu T^{-1} prüft die Basiseingeschaft, ist aber mühsam.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 & 1 & -6 \\ -4 & 10 & -4 & 1 & -8 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{?!}{=} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Zweites Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

Aufgabe: Jordanisieren Sie über $\mathbb{C}$ die folgende Matrix. Was ist gefragt? Kurzfassung: die Jordan–Form. Langfassung: zudem eine Jordan–Basis.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -6 & -6 & -5 \\ -1 & 0 & -1 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 5}$$

Klausurtipp: Für $B = A - 3I$ gilt $\dim \operatorname{Ker} B = 2$ und $\dim \operatorname{Ker} B^2 = 4$.

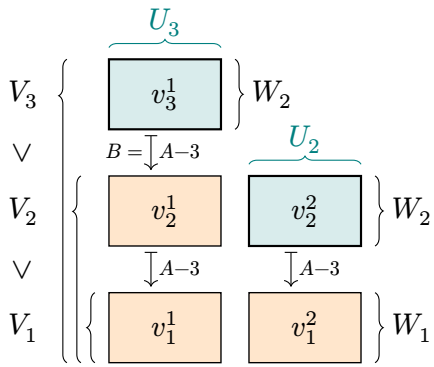
☺ An dieser Stelle entscheidet sich bereits die Diagonalisierbarkeit: Zum Eigenwert $\lambda = 3$ ist die geom. Vielfachheit 2, erreicht also nicht die alg. Vielfachheit ≥ 4. Unsere Matrix A ist demnach nicht diagonalisierbar.

Lösung: (0) Wir bestimmen das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{C}[X]^1_5$. Dank Klausurtipp gilt $\chi_A = (X-3)^4(X-\lambda)$. Mit $\operatorname{tr} A = 15$ folgt $\lambda = 3$.

$$\chi_A = (X-3)^5$$

Zweites Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

☺ Aus den Dimensionen lesen wir bereits die Form des Hauptraums! Wenn nur die **Jordan–Form** gefragt ist, so können wir bereits antworten: Es existiert ein Basiswechsel $T \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{C})$ zu folgender Jordan–Form.



$$\exists T \in \mathrm{GL}_5\,\mathbb{C}: \quad T^{-1}AT = J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Für die Kurzfassung bis zur Jordan–Form genügt das. Langfassung: Wie finden wir den Basiswechsel T? Wir konstruieren eine Jordan–Basis!

Zweites Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

Wir berechnen B^2. Klausurtipp: Wir geben B^2 für Sie explizit an:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -6 & -6 & -5 \\ -1 & 0 & -4 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eine mögliche Jordan–Basis entsteht durch folgende Hauptvektorketten:

$$\begin{array}{lllllll} \text{erste Kette:} & v_3^1 = e_3 & \overset{B}{\longmapsto} & v_2^1 = Be_3 & \overset{B}{\longmapsto} & v_1^1 = B^2 e_3 & \overset{B}{\longmapsto} 0 \\ \text{zweite Kette:} & & & v_2^2 = e_1 & \overset{B}{\longmapsto} & v_1^2 = Be_1 & \overset{B}{\longmapsto} 0 \end{array}$$

Für den Startvektor $v_3^1 \in \mathbb{C}^5$ können wir *fast jeden* Vektor wählen. Wenn Sie zufällig (stetig verteilt) einen Vektor rausgreifen, ist er hier mit Wkt 100% ein Hauptvektor 3. Stufe: Wir müssen nur $\operatorname{Ker} B^2 \cong \mathbb{C}^4$ ausweichen! Wir erhalten dann $v_2^1 \in V_2 \smallsetminus V_1$. Dies ergänzen wir durch $v_2^2 \in V_2 \smallsetminus V_1$. Beide müssen unabhängig in V_2/V_1 sein. Im Zweifel hilft Q1c.

Zweites Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

⚠ Machen Sie die Probe! Gilt $T^{-1}AT = J$? Wenigstens $AT = TJ$? Die Inversion von T zu T^{-1} prüft die Basiseingeschaft, ist aber mühsam.

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 11 & 0 & 15 & 17 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -6 & -6 & -5 \\ -1 & 0 & -1 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -6 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \overset{?!}{=} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

☺ Die Probe setzt das Ergebnis in die Definition ein: Wir suchen eine jordanisierende Basis, also prüfen wir am Ende genau diese Eigenschaft!

Lohnt sich die Probe? Ja, immer wenn Ihnen das Ergebnis wichtig ist. Daher ist es unerlässlich das Ziel / die Definition genau zu kennen!

In einer Klausur ist die Zeit meist knapp, daher wird die abschließende Probe dort selten gemacht. Das ist ok, schlimm ist jedoch: Wer nur alte Klausuren lernt, erkennt seine realen Möglichkeiten gar nicht. Zur Probe liegt alles vor Ihnen, die Rechnung ist leicht, aber länglich. Daher geben wir nach Möglichkeit auch freundliche Hinweise, damit Sie zumindest Teile Ihrer Rechnung prüfen und die Plausibilität testen können.

Beispiele: Welche Jordan–Formen sind möglich?

Q133

Aufgabe: Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A \in \mathbb{R}[X]^1_n$. Welche Jordan–Normalformen sind möglich?

(1) $\chi_A = (X-1)(X-2)(X-3)$ sowie (2) $\chi_A = (X-1)(X-2)^2(X-3)$, (3) $\chi_A = (X-2)^2(X-3)^2$, (4) $\chi_A = (X-2)^3(X-3)$, (5) $\chi_A = (X-\lambda)^4$

Lösung: (1) Die Matrix A ist diagonalisierbar (P2M). Durch die Wahl einer Eigenbasis (v_1, v_2, v_3) von $\mathbb{R}^3$ zu A erhalten wir $T \in \mathrm{GL}_3\,\mathbb{R}$ mit

$$A \sim T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) Die Matrix A ist eventuell diagonalisierbar… oder sie ist es nicht:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

☺ Diese beiden Jordan–Formen sind die einzigen Möglichkeiten (Q1B).

Beispiele: Welche Jordan–Formen sind möglich?

Q134 Erläuterung

☺ Der einfachste Fall sind n paarweise verschiedene Eigenwerte. Hier greift Satz P2M und garantiert uns die Diagonalisierbarkeit:

$$V = \mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \oplus \mathrm{Eig}(f, \lambda_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Eig}(f, \lambda_n).$$

☹ Leider ist nicht jede Matrix so einfach zu durchschauen, es können mehrfache Eigenwerte auftreten. Dann steht die Diagonalisierbarkeit in Frage (P3M): Erreicht die geometrische Vielfachheit die algebraische?

☺ Dank der Jordan–Normalform (Q1B) können wir alle möglichen Fälle einfach und übersichtlich darstellen, egal ob diagonalisierbar oder nicht. Das ist eine enorme Vereinfachung und sehr nützliche Struktur.

☺ Im vorliegenden Beispiel (2) gibt es nur genau zwei Möglichkeiten: Dank Satz Q1B ist jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A = (X-1)(X-2)^2(X-3)$ entweder ähnlich zur Diagonalmatrix links oder ähnlich zur hier gezeigten Jordan–Matrix rechts.

Auch in den folgenden Beispielen gibt es jeweils nur endlich viele Möglichkeiten, und wir können diese leicht vollständig aufzählen.

Beispiele: Welche Jordan–Formen sind möglich?

Q135

(3) Bei $\chi_A = (X-2)^2(X-3)^2$ sind vier Jordan–Formen möglich:

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(4) Bei $\chi_A = (X-2)^3(X-3)$ sind genau drei Jordan–Formen möglich:

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(5) Bei $\chi_A = (X-\lambda)^4$ sind genau fünf Jordan–Formen möglich:

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Beispiele: Welche Jordan–Formen sind möglich?

Q136 Erläuterung

⚠ Die Reihenfolge der Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ ist dabei beliebig; in $(\mathbb{R}, \leq)$ können wir sie zum Beispiel der Größe nach anordnen. Im Allgemeinen jedoch gibt es hierzu keine sinnvolle Konvention.

Die Konstruktion aller möglichen Jordan–Matrizen ist denkbar einfach. Dank Satz Q1B haben wir neben der Existenz auch die Eindeutigkeit!

Zu jedem Eigenwert $\lambda \in K$ mit Vielfachheit $r \geq 1$ überlegen wir uns, wie wir die gegebene Dimension r in Jordan–Blöcke aufteilen können. Das entspricht den Zahlpartitionen, wie anschließend in Q1L erklärt.

Zu jedem Eigenwert sortieren wir die Jordan–Blöcke nach ihrer Größe, und zwar absteigend wie im Young–Diagram. Diese übliche Konvention ist zwar etwas willkürlich, aber doch sehr nützlich und übersichtlich.

Übung: Umordnung der Jordan–Blöcke führt zu einer ähnlichen Matrix.

☺ Da wir aus jeder Ähnlichkeitsklasse genau einen Repräsentanten auswählen wollen, verhelfen uns die hier erklärten Konventionen zur (weitgehenden) Eindeutigkeit, wie in den Beispielen (3–5) zu sehen.

Kombinatorik: Wie viele Jordan–Formen gibt es?

Aufgabe: Gegeben sei eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A = (X-\lambda)^n$. Wie viele Jordan–Formen gibt es hierzu?

Lösung: Zur systematischen Aufzählung zerlegen wir $n \in \mathbb{N}$ als Summe $n = n_1 + \dots + n_k$ mit $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Die Reihenfolge der Jordan–Blöcke ist beliebig, also können wir die Summanden absteigend ordnen:

Definition Q1L: (ungeordnete) Zahlpartition

Eine **Partition** der Zahl $n \in \mathbb{N}$ als Summe von $k \in \mathbb{N}$ (ungeordneten, umsortierbaren) Summanden ist ein Tupel $(n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ mit

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k \quad \text{und} \quad n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 1.$$

Ihre Menge bezeichnen wir mit $P(n,k)$ und $P(n) = \bigsqcup_{k=0}^n P(n,k)$, ihre Anzahl mit $p(n,k) = \sharp P(n,k)$ und $p(n) = \sharp P(n) = \sum_{k=0}^n p(n,k)$.

So zählt $P(n,k)$ die Young–Diagramme mit n Kästchen und k Spalten. Mit dieser hilfreichen Notation können wir auch für große n die Anzahl der möglichen Jordan–Formen übersichtlich darstellen und berechnen.

Kombinatorik: Wie viele Jordan–Formen gibt es?

Partitionen spielen in Kombinatorik und Informatik eine wichtige Rolle. Auch in der Linearen Algebra treten sie ganz natürlich auf, wie hier bei der Aufzählung von Jordan–Normalformen. Zur Betonung sagen wir **Zahlpartition** in Q1L zur Unterscheidung von **Mengenpartition** in H2M.

Beispiele: Für $n = 2, 3, 4, 5$ erhalten wir die folgenden Zahlpartitionen:

$$\begin{aligned}
n = 2 &= 1+1 \\
n = 3 &= 2+1 \;=\; 1+1+1 \\
n = 4 &= 3+1 = 2+2 \;=\; 2+1+1 \;=\; 1+1+1+1 \\
n = 5 &= 4+1 = 3+2 \;=\; 3+1+1 = 2+2+1 \\
&= 2+1+1+1 \;=\; 1+1+1+1+1
\end{aligned}$$

Im letzten Beispiel finden wir also $P(5,0) = \emptyset$, $P(5,1) = \{(5)\}$, $P(5,2) = \{(4,1),(3,2)\}$, $P(5,3) = \{(3,1,1)),(2,2,1)\}$, $P(5,4) = \{(2,1,1,1)\}$, $P(5,5) = \{(1,1,1,1,1)\}$.

Wir suchen nun eine möglichst effiziente Methode, um die Anzahlen $p(n,k)$ und auch die Mengen $P(n,k)$ systematisch zu konstruieren.

Kombinatorik: Wie viele Jordan–Formen gibt es?

Für die ersten Partitionszahlen erhalten wir somit folgende Werte:

n	$p(n)$	$p(n,k)$	$k=1$	2	3	4	5	6	…
0	1	1	0	0	0	0	0	0	…
1	1	0	1	0	0	0	0	0	…
2	2	0	1	1	0	0	0	0	…
3	3	0	1	1	1	0	0	0	…
4	5	0	1	2	1	1	0	0	…
5	7	0	1	2	2	1	1	0	…
6	11	0	1	3	3	2	1	1	…

Hierbei gilt $P(n) = \bigsqcup_{k=0}^n P(n,k)$, also $p(n) = \sharp P(n) = \sum_{k=0}^n p(n,k)$.
Für $k = n$ gilt $P(n,n) = \{(1,1,\dots,1)\}$, und somit $p(n,n) = 1$.
Für $k > n$ gilt $P(n,k) = \emptyset$, und somit $p(n,k) = 0$.

Bemerkung: Für alle k mit $n/2 \leq k \leq n$ gilt zudem $p(n,k) = p(n-k)$: Wenn wir zunächst jeden Summanden mit 1 belegen, so bleibt noch $n-k \leq k$ zu verteilen. Hierfür gibt es genau $p(n-k)$ Möglichkeiten.

Kombinatorik: Wie viele Jordan–Formen gibt es?

Wie berechnen wir die Partitionszahlen $p(n,k)$ und $p(n)$ geschickt? Eine Möglichkeit ist die explizite Konstruktion von $P(n,k)$. Effizienter:

Satz Q1M: Rekursionsformel für Partitionszahlen

(0) Für $k = 0$ gilt $p(0,0) = 1$ sowie $p(n,0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
(1) Für alle $1 \leq k \leq n$ gilt $p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-k,k)$

Aufgabe: Beweisen Sie die Rekursionsformeln des Satzes.

Lösung: (0) Nach Definition Q1L gilt $P(0,0) = \{()\}$ und $P(n,0) = \{\}$.

(1) Wir zerlegen $P(n,k) = P_1(n,k) \sqcup P_2(n,k)$ in disjunkte Teilmengen

- $P_1(n,k) := \{\,(n_1,\dots,n_k) \in P(n,k) \mid n_k = 1\,\} \cong P(n-1,k-1)$, vermöge der Bijektion $(n_1,\dots,n_{k-1},1) \leftrightarrows (n_1,\dots,n_{k-1})$, und
- $P_2(n,k) := \{\,(n_1,\dots,n_k) \in P(n,k) \mid n_k \geq 2\,\} \cong P(n-k,k)$, vermöge der Bijektion $(n_1,\dots,n_k) \leftrightarrows (n_1-1,\dots,n_k-1)$.

Übung: Füllen Sie damit die Tabelle für $0 \leq k \leq n \leq 10$ aus! Zur Probe:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	…

Minimalpolynom aus der Jordan–Form

Aufgabe: Bestimmen Sie das ChaPo und das MiPo der Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lösung: Das char. Polynom ist $\chi_A = \chi_B = \chi_C = (X-2)^3(X-3)^2$.
Das Minimalpolynom codiert die maximale Größe der Jordan–Blöcke:

$$\begin{aligned} \mu_A &= (X-2)^1(X-3)^1, \\ \mu_B &= (X-2)^2(X-3)^2, \\ \mu_C &= (X-2)^3(X-3)^1. \end{aligned}$$

Aufgabe: Setzen Sie A, B, C in $(X-2)^k(X-3)^\ell$ ein und bestimmen Sie die minimalen Exponenten k und ℓ, für die die Matrix annulliert wird.

Aufgabe: Formulieren Sie hierzu eine allgemeine, einfache Merkregel: Wie extrahieren Sie das Minimalpolynom aus der Jordan–Form?

Minimalpolynom aus der Jordan–Form

Satz Q1N: charakteristisches Polynom und Minimalpolynom

Sei $f : V \to V$ linear über dem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$.

(1) Angenommen, χ_f zerfällt in Linearfaktoren über K. Dann gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \chi_f &= (X-\lambda_1)^{r_1} \cdots (X-\lambda_k)^{r_k} \quad \text{mit } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j \text{ und} \\ \mu_f &= (X-\lambda_1)^{s_1} \cdots (X-\lambda_k)^{s_k} \quad \text{mit } 1 \leq s_i \leq r_i \text{ für alle } i. \end{aligned}}$$

(2) Der Exponent s_i ist die maximale Größe aller Jordan–Blöcke zu λ_i.
Der Exponent r_i ist die Summe der Größen aller Jordan–Blöcke zu λ_i.

(3) Genau dann ist der Endomorphismus f über K diagonalisierbar, wenn sein Minimalpolynom $\mu_f \in K[X]$ über K einfach zerfällt.

Beweis: Diese Zusammenfassung ist eine unmittelbare Anwendung der zuvor erarbeiteten Sätze (1) P3J und (2) N3F und (3) P3M. QED

Übung: Führen Sie zur Wiederholung die Aussage (2) sorgfältig aus: Warum hat das Minimalpolynom genau diese schöne einfache Form?

Jordan–Formen zu gegebenem Minimalpolynom

Aufgabe: Welche Jordan–Formen sind möglich mit charakteristischem Polynom $\chi_A = (X-\lambda)^5$ und Minimalpolynom $\mu_A = (X-\lambda)^s$?

Lösung: (1) Im Falle $\mu_A = (X-\lambda)^1$ ist A diagonalisierbar:

$$A \sim T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Young–Diagramm

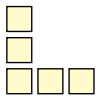
In diesem Fall ist A selbst diagonal, denn $A = T(\lambda I)T^{-1} = \lambda I$.

(2) Im Falle $\mu_A = (X-\lambda)^2$ gibt es genau zwei Möglichkeiten:

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Jordan–Formen zu gegebenem Minimalpolynom

(3) Im Falle $\mu_A = (X-\lambda)^3$ gibt es genau zwei Möglichkeiten:



$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

(4) Im Falle $\mu_A = (X-\lambda)^4$ bzw. $\mu_A = (X-\lambda)^5$ bleibt nur

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

☺ Das Minimalpolynom bündelt nützliche Informationen zur Größe der Jordan–Blöcke und damit insbesondere zur Diagonalisierbarkeit.

Jordan–Zerlegung $J = D + N$ in diagonal plus nilpotent

Bemerkung Q1O: Potenzen der Jordan–Form $J = D + N$

Die Jordan–Form $T^{-1}AT = J = D + N$ ist Summe der Diagonalmatrix D und der nilpotenten Matrix N, und beide kommutieren, also $DN = ND$.

Angenommen $N^s = 0$. Dank binomischem Lehrsatz H2K gilt dann:

$$\boxed{J^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{s-1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k}$$

Aus $A = TJT^{-1}$ folgt dann $A^n = TJ^nT^{-1}$ für jeden Exponenten $n \in \mathbb{N}$. Dies ergibt eine geschlossene Formel für jeden Koeffizienten von A^n.

Beweis: Jeder Jordan–Block operiert auf seinem zyklischen Unterraum. Dank der Zerlegung als direkte Summe kommutieren sie untereinander. In jedem einzelnen Jordan–Block $D + N$ gilt $D = \lambda I$, also $DN = ND$.

Induktion über n: Für $n = 0$ gilt $A^0 = I$ und $TJ^0T^{-1} = TIT^{-1} = I$. Für $n \geq 1$ gilt $A^n = A \cdot A^{n-1} = TJT^{-1} \cdot TJ^{n-1}T^{-1} = TJ^nT^{-1}$. QED

Jordan–Zerlegung $J = D + N$ in diagonal plus nilpotent

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} & \binom{n}{4}\lambda^{n-4} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} & 0 \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^n & n\mu^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^n \end{bmatrix}$$

Der Spezialfall $A = \lambda I + N$ mit N nilpotent

Bemerkung Q1P: Speziallfall $A = \lambda I + N$

Angenommen, für $A \in K^{r \times r}$ gilt $\mu_A = (X - \lambda)^r$. Dann folgt $A = \lambda I + N$ mit $N^s = 0$ für ein $s \in \{1, \dots, r\}$. Dank binomischem Lehrsatz H2K gilt:

$$\boxed{A^n = (\lambda I + N)^n = \sum_{k=0}^{s-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k}$$

Dies ergibt eine geschlossene Formel für jeden Koeffizienten von A^n.

Beweis: Aus der Jordan–Form $T^{-1}AT = J = \lambda I + M$ mit $M^s = 0$ folgt $A = TJT^{-1} = \lambda I + N$ mit $N = TMT^{-1}$, also ebenso $N^s = 0$. QED

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 14 & 10 & -18 \\ 11 & 9 & -17 \end{bmatrix}$$

Aufgabe: Für die obige Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt $\mu_A = (X - \lambda)^3$. Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für jeden Koeffizienten von $A^n = (a_{ij}^{(n)})$.

Der Spezialfall $A = \lambda I + N$ mit N nilpotent

Standardverfahren: Bestimme die Jordan–Form $T^{-1}AT = J = D + N$. Rücktransformation ergibt $A^n = TJ^nT^{-1} = T[\sum_{k=0}^{s-1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k] T^{-1}$.

☺ Allgemein und gelingt immer: Wir berechnen J sowie T und T^{-1}.

☹ Die Berechnung ist aufwändig. Geht es vielleicht auch kürzer?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 14 & 10 & -18 \\ 11 & 9 & -17 \end{bmatrix}$$

Im Spezialfall haben wir den kurzen Weg: $A = \lambda I + N$ mit N nilpotent. Aus $\operatorname{tr}(A) = -6$ lesen wir $\lambda = -2$ (P3F). Somit ist $N = A + 2I$ nilpotent:

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 14 & 12 & -18 \\ 11 & 9 & -15 \end{bmatrix} \implies N^2 = \begin{bmatrix} -18 & -15 & 24 \\ 12 & 10 & -16 \\ -6 & -5 & 8 \end{bmatrix} \implies N^3 = 0$$

☺ Damit ist auch die Annahme $\mu_A = (X - \lambda)^3$ nachträglich bewiesen.

☺ Wir erhalten so $A^n = \lambda^n N^0 + n\lambda^{n-1} N^1 + \binom{n}{2}\lambda^{n-2} N^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das ist eine einfache geschlossene Formel für die Koeffizienten von A^n.

Von der komplexen zur reellen Jordan–Form

Eine reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n} \leq \mathbb{C}^{n\times n}$ können wir reell jordanisieren nur falls $\chi_A \in \mathbb{R}[X]^1_n \leq \mathbb{C}[X]^1_n$ über $\mathbb{R}$ zerfällt. Hingegen können wir A immer komplex jordanisieren und dann das komplexe Ergebnis „reellifizieren“:

Satz Q1q: die reelle Jordan–Form

Jede reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ können wir über $\mathbb{R}$ erweitert jordanisieren,
(1) für jeden reellen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit obigen Jordan–Blöcken $J(\ell, \lambda)$,
(2) für echt komplexe Eigenwerte $a \pm ib \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$ durch erweiterte Jordan–Blöcke von folgender Form:

$$J(\ell, a, b) = \begin{bmatrix} a & -b & 1 & 0 & & & & \\ b & a & 0 & 1 & & & & \\ & & a & -b & \ddots & \ddots & & \\ & & b & a & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & & & a & -b \\ & & & & & & b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\ell\times 2\ell}$$

Von der komplexen zur reellen Jordan–Form

Beweis: (2) Wir haben $\operatorname{conj} : \mathrm{H}(\lambda) \rightsquigarrow \mathrm{H}(\overline{\lambda})$, denn für alle $v \in \mathbb{C}^n$ gilt:

$$(A - \lambda)^k\, v = 0 \quad \overset{\text{conj}}{\iff} \quad (A - \overline{\lambda})^k\, \overline{v} = 0$$

Für $\mathrm{H}(\lambda) = \mathrm{Hau}(A, \lambda)$ wählen wir eine Basis aus Hauptvektorketten:

$$0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} v_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_\ell \quad \in \mathrm{H}(\lambda) \leq \mathbb{C}^n$$
$$0 \xleftarrow{A-\overline{\lambda}} \overline{v_1} \xleftarrow{A-\overline{\lambda}} \overline{v_2} \xleftarrow{A-\overline{\lambda}} \dots \xleftarrow{A-\overline{\lambda}} \overline{v_\ell} \quad \in \mathrm{H}(\overline{\lambda}) \leq \mathbb{C}^n$$

Bezüglich $(v_1, \dots, v_\ell, \overline{v_1}, \dots, \overline{v_\ell})$ wird die Matrix A dargestellt durch:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 & & & & \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & & & & \\ & & & & \overline{\lambda} & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & \overline{\lambda} & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\ell\times 2\ell}$$

Von der komplexen zur reellen Jordan–Form

Basiswechsel: Hieraus linearkombinieren wir die reellen Basisvektoren

$$u_k = \operatorname{re}[v_k] = \tfrac{1}{2}\,[v_k + \overline{v_k}] \in \mathbb{R}^n \leq \mathbb{C}^n$$
$$u'_k = \operatorname{im}[v_k] = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\,[v_k - \overline{v_k}] \in \mathbb{R}^n \leq \mathbb{C}^n$$

Die Rücktransformation ist $v_k = u_k + \mathrm{i}u'_k$ und $\overline{v_k} = u_k - \mathrm{i}u'_k$.
Bezüglich $(u'_1, u_1, \dots, u'_\ell, u_\ell)$ wird die Matrix A dargestellt durch:

$$J(\ell, a, b) = \begin{bmatrix} a & -b & 1 & 0 & & & & \\ b & a & 0 & 1 & & & & \\ & & a & -b & \ddots & \ddots & & \\ & & b & a & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & & & a & -b \\ & & & & & & b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\ell\times 2\ell}$$

Übung: (1) Rechnen Sie diese Matrixdarstellung nach!
(2) Ist conj linear über $\mathbb{R}$? Ja! Was genau passiert über $\mathbb{C}$?

Von der komplexen zur reellen Jordan–Form

Beweis: (1) Wir rechnen es geduldig nach. Für $k \geq 2$ gilt:

$$\begin{aligned} Au_k &\overset{\text{Def}}{=} \tfrac{1}{2}\,[Av_k + A\overline{v_k}] \\ &\overset{\text{Vor}}{=} \tfrac{1}{2}\,[\lambda v_k + v_{k-1} + \overline{\lambda}\overline{v_k} + \overline{v_{k-1}}] \\ &\overset{\text{Def}}{=} \operatorname{re}[(a + \mathrm{i}b)(u_k + \mathrm{i}u'_k)] + u_{k-1} \\ &\overset{\mathbb{C}}{=} au_k - bu'_k + u_{k-1} \\ Au'_k &\overset{\text{Def}}{=} \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\,[Av_k - A\overline{v_k}] \\ &\overset{\text{Vor}}{=} \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\,[\lambda v_k + v_{k-1} - \overline{\lambda}\overline{v_k} - \overline{v_{k-1}}] \\ &\overset{\text{Def}}{=} \operatorname{im}[(a + \mathrm{i}b)(u_k + \mathrm{i}u'_k)] + u'_{k-1} \\ &\overset{\mathbb{C}}{=} bu_k + au'_k + u'_{k-1} \end{aligned}$$

Das ergibt die im Satz behauptete Darstellungsmatrix.

(2) Die Konjugation $\operatorname{conj} : \mathbb{C} \rightsquigarrow \mathbb{C} : z = x + \mathrm{i}y \mapsto \overline{z} = x - \mathrm{i}y$ ist $\mathbb{R}$–linear, aber $\mathbb{C}$–semilinear. Demnach ist der Isomorphismus $\operatorname{conj} : \mathrm{H}(\lambda) \rightsquigarrow \mathrm{H}(\overline{\lambda})$ ebenfalls $\mathbb{R}$–linear, aber nur $\mathbb{C}$–semilinear. Das genügt uns hier bereits, denn conj bildet $\mathbb{C}$–Jordan–Basen auf $\mathbb{C}$–Jordan–Basen ab. $\boxed{\text{QED}}$

Von der komplexen zur reellen Jordan–Form

Q153

Aufgabe: Welche Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sind nicht reell diagonalisierbar?

Lösung: (1) Wenn $\chi_A \in \mathbb{R}[X]^1_2$ über $\mathbb{R}$ zerfällt, so gibt es genau drei Fälle:

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} ☺, \qquad A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} ☺, \qquad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} ☹.$$

Hier seien $\lambda < \mu$ in $\mathbb{R}$. Dank Jordan Q1B ist *jede* $\mathbb{R}$–zerfallende Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ähnlich zu genau einer dieser Modellmatrizen.

(2) Wenn $\chi_A \in \mathbb{R}[X]^1_2$ nicht über $\mathbb{R}$ zerfällt, so bleibt dank Satz Q1Q nur

$$A \sim \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} ☹.$$

mit $b \neq 0$, also $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $t \in \,]-\pi, 0[\, \cup \,]0, \pi[$. Das sind genau die reellen Drehstreckungen ohne reelle Eigenwerte, die wir aus Beispiel P2P kennen. Nun haben wir die vollständige Klassifikation: Jede nicht $\mathbb{R}$–zerfallende Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist ähnlich zu genau einer dieser Modellmatrizen.

☺ Die Jordan–Form verschafft uns einen bequemen Überblick!

Von der komplexen zur reellen Jordan–Form

Q154

Aufgabe: Welche Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sind nicht reell diagonalisierbar?

Lösung: (1) Wenn $\chi_A \in \mathbb{R}[X]^1_3$ über $\mathbb{R}$ zerfällt, so gibt es genau sechs Fälle:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix} ☺, \qquad \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} ☺, \qquad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} ☹,$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} ☺, \qquad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} ☹, \qquad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} ☹.$$

Hierbei seien $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ drei verschiedene reelle Zahlen.

(2) Wenn $\chi_A \in \mathbb{R}[X]^1_3$ nicht über $\mathbb{R}$ zerfällt, so bleibt dank Satz Q1Q nur

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & r\cos t & -r\sin t \\ 0 & r\sin t & r\cos t \end{bmatrix} ☹.$$

Wie zuvor seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$, also $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $t \in \,]-\pi, 0[\, \cup \,]0, \pi[$.

Von der komplexen zur reellen Jordan–Form

Q155 Erläuterung

Diese sympathisch einfachen Beispiele sind uns bereits bestens vertraut. Nun haben wir zusätzlich die vollständige Klassifikation dank Satz Q1Q: Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist ähnlich zu genau einer dieser Modellmatrizen.

Bereits im vorigen Kapitel haben wir Jordan–Matrizen P2O und reelle Drehstreckungen P2P als typische Gegenbeispiele kennengelernt. Nun sehen wir erfreut: Noch komplizierter kann es nicht werden!

Da uns reelle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ in zahlreichen Anwendungen begegnen, können wir diesen Überblick gut nutzen.

Wir erinnern uns: Jedes reelle Polynom $P \in \mathbb{R}[X]^1_n$ ungeraden Grades n hat mindestens eine reelle Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$. Das sehen wir hier für $n = 3$.

Übung: Sie verfügen nun über alle Werkzeuge. Wenn Sie möchten, können Sie die obige Klassifikation für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ fortführen. Hier entstehen zum ersten Mal die erweiterten Jordan–Blöcke.

Von der komplexen zur reellen Jordan–Form

Q156 Erläuterung

Damit schließt sich der Kreis der Fragen, mit denen wir dieses Kapitel eröffnet haben. Besonders elegant ist die Antwort über $\mathbb{C}$ und über $\mathbb{R}$.

Welche quadratischen Matrizen $A \in K^{n\times n}$ sind diagonalisierbar?
1. Hindernis: Zerfällt das charakteristische Polynom χ_A in $K[X]$?
2. Hindernis: Erreicht die geometrische Vielfachheit die algebraische?

☺ Im Idealfall wollen wir unsere Matrix A über K diagonalisieren.
Wir wissen genau, *wann* dies gelingt, dank praktischer Kriterien.
Wir wissen zudem, *wie* uns dies gelingt, dank praktischer Algorithmen.

☺ Notfalls müssen wir uns manchmal begnügen zu trigonalisieren.
In diesem Falle ist es am besten und übersichtlichsten zu jordanisieren.
Wir wissen genau, *wann* dies gelingt, dank Zerfällung von χ_A in $K[X]$.
Wir wissen zudem, *wie* uns dies gelingt, dank Hauptraum–Sudoku.

☺ Die Jordan–Form verschafft uns einen bequemen Überblick!
Die starke Theorie hilft oft, schon vor der Rechnung.

Lemma Q2A: Defekt-Ungleichung

(0) Sei K ein Körper. Für $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ gilt dank M2X:

$$\boxed{\dim_K(V) = \dim_K \mathrm{Ker}(f) + \dim_K \mathrm{Im}(f)}$$

(1) Bei Komposition mit $g \in \mathrm{Hom}_K(U,V)$ gilt:

$$\dim_K \mathrm{Ker}(f \circ g) = \dim_K \mathrm{Ker}(g) + \dim_K(\mathrm{Im}\, g \cap \mathrm{Ker}\, f)$$

(2) Daraus erhalten wir die Abschätzungen:

$$\boxed{\dim_K \mathrm{Ker}(g) \;\le\; \dim_K \mathrm{Ker}(f \circ g) \;\le\; \dim_K \mathrm{Ker}(g) + \dim_K \mathrm{Ker}(f)}$$

(3) Für jeden Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\dim_K \mathrm{Ker}(f) \;\le\; \dim_K \mathrm{Ker}(f^n) \;\le\; n \dim_K \mathrm{Ker}(f)$$

Aufgabe: Wie impliziert (1) sofort (2) und (3)? Beweisen Sie (1).

Beweis: (1) Wir komponieren $g : U \to V$ und $f : V \to W$:

$$\begin{array}{ccccccl} U & \xrightarrow{\;g\;} & V & \xrightarrow{\;f\;} & W & & \\ u_i & \longmapsto & v_i & \longmapsto & w_i & & (i \in A) \\ u_i & \longmapsto & v_i & \longmapsto & 0 & & (i \in B) \\ u_i & \longmapsto & 0 & \longmapsto & 0 & & (i \in C) \end{array}$$

Wir können g und f als surjektiv annehmen. Notfalls schränken wir g ein zur Surjektion $g' : U \twoheadrightarrow V'$ auf das Bild $V' = \mathrm{Im}(g)$, ebenso schränken wir f ein zur Surjektion $f' : V' \twoheadrightarrow W'$ auf das Bild $W' = \mathrm{Im}(f \circ g)$.

Wir nutzen mehrfach den Basissatz M2K und Zusammenfügen M1X: Wir wählen eine Basis $(w_i)_{i\in A}$ von W. Hierzu wählen wir Urbilder $(v_i)_{i\in A}$ in V mit $f(v_i) = w_i$. Wir ergänzen durch eine Basis $(v_i)_{i\in B}$ von $\mathrm{Ker}(f)$ zu einer Basis $(v_i)_{i\in A\sqcup B}$ von V. Hierzu wählen wir Urbilder $(u_i)_{i\in A\sqcup B}$ in U mit $g(u_i) = v_i$. Wir ergänzen durch eine Basis $(u_i)_{i\in C}$ von $\mathrm{Ker}(g)$ zu einer Basis $(u_i)_{i\in A\sqcup B\sqcup C}$ von U. Somit ist $(u_i)_{i\in B\sqcup C}$ eine Basis von $\mathrm{Ker}(f \circ g)$.

Exakte Alternative: Wir nutzen M2U und folgende kurze exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(g) \xhookrightarrow{\mathrm{inc}} \mathrm{Ker}(f \circ g) \xrightarrow[u \mapsto g(u)]{g'} \mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow[v \mapsto f(v)]{f'} 0$$

Zunächst ist die Sequenz wie angegeben tatsächlich wohldefiniert:
Für $u \in \mathrm{Ker}(g)$ gilt $f(g(u)) = f(0) = 0$, somit $\mathrm{Ker}(g) \le \mathrm{Ker}(f \circ g)$.
Für $u \in \mathrm{Ker}(f \circ g)$ gilt $g(u) \in \mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(f)$, denn $f(g(u)) = 0$.

Zur Erinnerung, Exaktheit bedeutet „Bild gleich Kern“ an jeder Stelle:
Das Bild von links ist gleich dem Kern nach rechts. (Definition L3H)
Exaktheit links ist klar, denn Inklusion $\mathrm{Ker}(g) \hookrightarrow \mathrm{Ker}(f \circ g)$ ist injektiv.

Die Exaktheit rechts entspricht der Surjektivität der Abbildung g'.
Jedes Element $v \in \mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(f)$ hat die Form $v = g(u)$ mit $f(v) = 0$.
Somit existiert $u \in \mathrm{Ker}(f \circ g)$ mit $v = g'(u)$. Das heißt, g' ist surjektiv.

Die Exaktheit in der Mitte schließlich bedeutet $\mathrm{Ker}(g') = \mathrm{Ker}(g)$:
Dies gilt, denn $\mathrm{Ker}(g) \le \mathrm{Ker}(f \circ g)$, und g' ist die Einschränkung von g auf den Startraum $\mathrm{Ker}(f \circ g)$ und den Zielraum $\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(f)$.

Beweis: (2) Wir haben $\mathrm{Ker}(g) \le \mathrm{Ker}(f \circ g)$ und $\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Ker}(f) \le \mathrm{Ker}(f)$.
Die Dimensionen erfüllen die entsprechenden Ungleichungen dank M3O.
Ungleichung (3) folgt aus (2) mit $g = f^{n-1}$ und Induktion über n. $\boxed{\text{QED}}$

Aufgabe: Wie folgt (3) aus dem Hauptraum-Sudoku? (Satz Q1F)

Lösung: Wir nutzen das Young–Diagramm des Hauptraums $\mathrm{Hau}(f,0)$.
Das Fundament der Breite $z_1 = \dim_K \mathrm{Ker}(f)$ erlaubt weitere Schichten der Breite $z_1 \ge z_2 \ge \ldots \ge z_n$, somit $\dim_K \mathrm{Ker}(f^n) = z_1 + \cdots + z_n \le n z_1$.

Aufgabe: Treten in (2) alle numerisch möglichen Fälle tatsächlich auf?

Lösung: Seien $k, \ell, m \in \mathbb{N}$ beliebige Dimensionen mit $k \le m \le k + \ell$.
Für $n := k + \ell - m$ gilt dann $0 \le n \le \ell$. Wir betrachten die Matrizen

$$F = \begin{bmatrix} 1_{n\times n} & 0_{n\times \ell} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1_{\ell\times\ell} & 0_{\ell\times k} \\ 0_{n\times\ell} & 0_{n\times k} \end{bmatrix}, \quad FG = \begin{bmatrix} 1_{n\times n} & 0_{n\times m} \end{bmatrix}.$$

Das zeigt: Die Ungleichung (2) lässt sich nicht weiter verbessern.

Die diskrete Ableitung und ihre Hauptfolgen

Sei $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : n \mapsto f(n) \}$ der Folgenraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Wir betrachten den Differenzenoperator (aka die diskrete Ableitung):

$$\boxed{\Delta : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : f \mapsto \Delta f \quad \text{mit} \quad (\Delta f)(n) := f(n+1) - f(n).}$$

? Ist die Abbildung Δ linear über $\mathbb{K}$? Ja, klar! (Sonst Übung!)

Aufgabe: Bestimmen Sie die Haupträume $V_r = \operatorname{Ker} \Delta^r$ für $r \in \mathbb{N}$. Nennen Sie eine Jordan–Basis von V_r und von $V = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} V_r \leq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

☺ Hier haben wir eine aufsteigende Kette von Untervektorräumen $V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \dots$ in $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, daher ist ihre Vereinigung $V = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} V_r$ ebenfalls ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. (Warum? Übung! Satz L2J)

Lösung: (0) Speziell für $r = 0$ haben wir $\Delta^0 = \mathrm{id}$, also $V_0 = \{0\}$.

(1) Die Gleichung $\Delta f = 0$ bedeutet $f(n+1) - f(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $V_1 = \operatorname{Ker} \Delta = \langle 1 \rangle^!_{\mathbb{K}}$ mit der konstanten Funktion $1 = \mathrm{const}^1_{\mathbb{N}}$.

(2) Aus $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} \Delta = 1$ folgt $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} \Delta^r \leq r$ für alle $r \in \mathbb{N}$. (Q1F/Q2A)

Die diskrete Ableitung und ihre Hauptfolgen

(3) Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir erinnern uns an die Binomialkoeffizienten

$$f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : f_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k^{\underline{k}}}.$$

$\binom{n}{k}$	n=0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k=0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45
3	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120
4	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210

Für die diskrete Ableitung finden wir erneut Pascals Rekursionsformel:

$$\Delta f_k(n) \overset{\text{Def}}{=} f_k(n+1) - f_k(n) \overset{\text{Def}}{=} \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \overset{\text{H229}}{=} \binom{n}{k-1} \overset{\text{Def}}{=} f_{k-1}(n)$$

(4) Wir erhalten so die (unendlich lange) Hauptfolgenkette

$$0 \xleftarrow{\Delta} f_0 \xleftarrow{\Delta} f_1 \xleftarrow{\Delta} f_2 \xleftarrow{\Delta} f_3 \xleftarrow{\Delta} \dots$$

Die diskrete Ableitung und ihre Hauptfolgen

(5) Die Vektoren jeder Hauptvektorkette sind linear unabhängig (Q1C). Hier ist die Unabhängigkeit offensichtlich, da die Folgen gestuft sind. Somit erhalten wir die ersehnten Basen aus Hauptfolgenketten:

$$V_r = \operatorname{Ker} \Delta^r = \langle f_k \mid k < r \rangle^!_{\mathbb{K}}$$
$$V = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} V_r = \langle f_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle^!_{\mathbb{K}}$$

Wir fassen unser Ergebnis zitierfähig in folgendem Satz zusammen:

Satz Q2B: Pascals Dreieck als Hauptfolgenkette

Wir betrachten den Differenzenoperator (aka die diskrete Ableitung)

$$\Delta : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : f \mapsto \Delta f \quad \text{mit} \quad (\Delta f)(n) := f(n+1) - f(n).$$

Zum Eigenwert 0 sind die Haupträume der Stufe $r = 1, 2, 3, \dots$ dann

$$\operatorname{Ker}(\Delta^r) = \langle f_k \mid k < r \rangle^!_{\mathbb{K}} \quad \text{mit} \quad f_k(n) = \binom{n}{k} \quad \text{und}$$
$$0 \xleftarrow{\Delta} f_0 \xleftarrow{\Delta} f_1 \xleftarrow{\Delta} f_2 \xleftarrow{\Delta} f_3 \xleftarrow{\Delta} f_4 \xleftarrow{\Delta} \dots$$

Die diskrete Ableitung und ihre Hauptfolgen

☺ Wir sehen an diesem Zahlenbeispiel sehr schön, warum der Differenzenoperator auch als „diskrete Ableitung“ gesehen wird: Die Folge $f = \Delta F$ mit $f(n) = F(n+1) - F(n)$ gibt in jedem Punkt die „Steigung“ von F an, also die Differenz zum nächsten Wert.

☺ Umgekehrt entsteht F aus f durch „diskrete Integration“: Wir geben die Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sowie den Startwert $F(0) = 0$ vor und erhalten alle weiteren Werte $F(n)$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ rekursiv durch Aufsummieren gemäß $F(n+1) = F(n) + f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Genau dies ist die Definition der Summe $F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$.

☺ Pascals Dreieck haben wir der vorliegenden Situation angepasst: In jeder Zeile halten wir $k \in \mathbb{N}$ fest und lassen $n \in \mathbb{N}$ laufen. (Üblicherweise ist $n \in \mathbb{N}$ die Zeile und $k \in \{0, \dots, n\}$ läuft.)

Beispiel: Die diskrete Ableitung macht im Young–Diagramm aus $\dim V_k$ zunächst die Breite $\dim W_k = \dim V_k - \dim V_{k-1}$ der Schichten und daraus schließlich die Anzahl der Startvektoren, $\dim U_k = \dim W_k - \dim W_{k+1}$.

Der Verschiebeoperator und seine Hauptfolgen

$$s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : f \mapsto sf \quad \text{mit} \quad (sf)(n) = f(n+1).$$
$$f = (f(0), f(1), f(2), \dots) \mapsto sf = (f(1), f(2), f(3), \dots).$$

? Ist der Verschiebeoperator s linear über $\mathbb{K}$? Ja, klar! (Sonst Übung!)

Aufgabe: Bestimmen Sie alle Haupträume $V_r = \operatorname{Ker}(s-\lambda)^r$ für $r \in \mathbb{N}$. Nennen Sie eine Jordan–Basis von V_r und von $V = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} V_r \le \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Lösung: (1) Wir wissen $\operatorname{Eig}(s,\lambda) = \langle f_0 \rangle^!_{\mathbb{K}}$ mit $f_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : n \mapsto \lambda^n$. (P247)
(2) Aus $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(s-\lambda) = 1$ folgt $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(s-\lambda)^r \le r$ dank Q1F/Q2A.
(3) Wir inspirieren uns an der vorigen Aufgabe und Q1O und betrachten

$$f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : n \mapsto \tbinom{n}{k}\lambda^{n-k}, \quad \text{somit } 0 \text{ für } n < k \text{ und } 1 \text{ für } n = k.$$

Dank Pascals Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten finden wir:

$$(s-\lambda)f_k(n) \overset{\text{Def}}{=} \tbinom{n+1}{k}\lambda^{n+1-k} - \tbinom{n}{k}\lambda^{n+1-k} \overset{\text{H229}}{=} \tbinom{n}{k-1}\lambda^{n-(k-1)} \overset{\text{Def}}{=} f_{k-1}(n)$$

(4) Wir erhalten also auch hier die (unendlich lange) Hauptfolgenkette

$$0 \xleftarrow{s-\lambda} f_0 \xleftarrow{s-\lambda} f_1 \xleftarrow{s-\lambda} f_2 \xleftarrow{s-\lambda} f_3 \xleftarrow{s-\lambda} \dots$$

Anwendung: lineare Rekursionsgleichungen

☺ Unser systematisches Vorgehen ist sowohl effizient als auch elegant: Wir bestimmen zunächst ganz explizit den Eigenraum $V_1 = \operatorname{Eig}(s,\lambda)$. Daraus folgt die Abschätzung $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(s-\lambda)^r \le r$ für alle $r \in \mathbb{N}$.

Die Vektoren jeder Hauptvektorkette sind linear unabhängig (Q1C). Durch explizite Konstruktion finden wir eine Hauptvektorkette, somit eine Basis von V_r, und daraus folgt $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(s-\lambda)^r = r$.

☺ Ich zelebriere diese Anwendung hier betont ausführlich, da es sich um allgemein wichtige Operatoren handelt, und all unsere Werkzeuge der Linearen Algebra hier zur Blüte kommen und reiche Früchte tragen. Die Formel (3) fällt nicht vom Himmel, siehe Bemerkung Q1O.

Übung: Was passiert im interessanten Spezialfall $\lambda = 1$? und $\lambda = 0$?

☺ Wir fassen unser Ergebnis zitierfähig in folgendem Satz zusammen zum Verschiebeoperator und den Lösungen von Rekursionsgleichungen. Anschließend werden wir dasselbe erfolgreiche Rezept genauso anwenden auf den Ableitungsoperator und Differentialgleichungen.

Der Verschiebeoperator und seine Hauptfolgen

Satz Q2c: lineare Rekursion und ihre Hauptfolgen → Eigenfolgen P2s

Auf dem Folgenraum $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ betrachten wir den Verschiebeoperator

$$s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : f \mapsto sf \quad \text{mit} \quad (sf)(n) = f(n+1).$$

(1) Zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ sind die Haupträume der Stufe $r \in \mathbb{N}$ dann

$$\operatorname{Ker}(s-\lambda)^r = \langle f_k \mid k < r \rangle^!_{\mathbb{K}} \quad \text{mit} \quad f_k(n) = \tbinom{n}{k}\lambda^{n-k} \quad \text{und}$$
$$0 \xleftarrow{s-\lambda} f_0 \xleftarrow{s-\lambda} f_1 \xleftarrow{s-\lambda} f_2 \xleftarrow{s-\lambda} f_3 \xleftarrow{s-\lambda} f_4 \xleftarrow{s-\lambda} \dots$$

(2) Anwendung auf Rekursion: Gegeben sei ein zerfallendes Polynom

$$P = X^n + p_1 X^{n-1} + \dots + p_n X^0 = (X-\lambda_1)^{r_1} \cdots (X-\lambda_k)^{r_k}.$$

Dann hat $L = \operatorname{Ker} P(s) \le \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ eine Basis aus Hauptvektorketten:

$$L \overset{\text{N3G}}{=} \operatorname{Ker}(s-\lambda_1)^{r_1} \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker}(s-\lambda_k)^{r_k}$$

Damit können wir jede lineare Rekursionsgleichung $P(s)f = 0$ lösen.

Der Verschiebeoperator und seine Hauptfolgen

Satz Q2c: lineare Rekursion und ihre Hauptfolgen → Eigenfolgen P2s

(3) Die Auswertung in $0, 1, 2, \dots, n-1$ stiftet den $\mathbb{K}$–Isomorphismus

$$\operatorname{pr} : L \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n : f \mapsto \big(f(0),\ f(1),\ f(2), \dots, f(n-1) \big).$$

Damit können wir jede lineare Rekursion mit Anfangswerten lösen, also die eindeutige Lösung explizit als geschlossene Formel darstellen, nun für alle Polynome $P \in \mathbb{K}[X]^1_n$, auch mit mehrfachen Eigenwerten!

☺ Dasselbe gilt entsprechend für die diskrete Ableitung $\Delta = s - \mathrm{id}$: Nur die Eigenwerte verschieben sich gemäß $\Delta - \lambda = s - (1+\lambda)$.

Beweis: (1) Die Haupträume kennen wir aus der vorigen Aufgabe.
(2) Diese direkte Summe verdanken wir der Kernzerlegung N3G. Die Dimensionen r_i und unsere Hauptvektorkette verdanken wir (1).
(3) Zu je n beliebig vorgegebenen Startwerten $f(0), \dots, f(n-1) \in \mathbb{K}$ existiert genau eine P–rekursive Fortsetzung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, siehe Satz P2s. Dank (2) schreiben wir f als Linearkombination von Hauptfolgen. QED

Erstes Anwendungsbeispiel zur linearen Rekursion

Q213

Aufgabe: (1) Finden Sie eine geschlossene Formel für alle Folgen

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad u_n = 6u_{n-1} - 12u_{n-2} + 8u_{n-3} \quad \text{für} \quad n \geq 3.$$

(2) Lösen Sie dies speziell für die Anfangswerte $u = (1, 2, 3, \ldots)$.

Lösung: (1) Im Folgenraum $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ über $\mathbb{C}$ betrachten wir den Unterraum

$$L = \{\, u : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+3} - 6u_{n+2} + 12u_{n+1} - 8u_n = 0 \,\},$$

also $L = \operatorname{Ker} P(s)$ mit $P = X^3 - 6X^2 + 12X - 8 = (X-2)^3$.
Satz Q2c beschert uns die explizite Lösung $L = \operatorname{Ker}(s-2)^3$:
Jede P–rekursive Folge $u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ ist eine Linearkombination

$$u_n = a\,2^n + b\,n2^{n-1} + c\,\tbinom{n}{2}2^{n-2}$$

mit eindeutigen Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{C}$. Dimension 3 ist anschaulich:
Als Freiheitsgrade haben wir die beliebigen Startwerte $u_0, u_1, u_2 \in \mathbb{C}$,
ab da greift die Rekursion und legt die Folge $u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eindeutig fest.

(2) Wir erhalten speziell $u = (1, 2, 3, \ldots)$ mit $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, also

$$u_n = 2^{n-3}(8 + n - n^2).$$

Erstes Anwendungsbeispiel zur linearen Rekursion

Q214
Erläuterung

Zunächst handelt die Frage von Zahlenfolgen und linearer Rekursion. Auf den ersten Blick scheint das noch ohne Bezug zur Linearen Algebra, Polynomen oder gar Matrizen und Eigenvektoren. Es zeigt sich jedoch, dass diese universellen Werkzeuge auch hier wunderbar effizient wirken!

Das ist ein allgemeines Phänomen: Die Problemstellung deutet meist nicht die möglichen oder nötigen (mathematischen) Werkzeuge an. Zur Problemlösung benötigen Sie daher Erfahrung und Kreativität. *Man erblickt nur, was man schon weiß und versteht.* (J.W. v. Goethe)

☺ Die lineare Rekursion erinnert uns an Fibonaccis berühmte Folge $f = (0, 1, \ldots)$ mit $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ für alle n. Dies konnten wir allein mit Eigenfolgen lösen und erhielten die schöne Binet–Formel (P249).

☺ Hier nun genügen Eigenfunktionen alleine nicht mehr, wir benötigen auch Hauptfunktionen. Diese lösen tatsächlich *jede* lineare Rekursion!

☺ Die geschlossene Formel bietet Vorteile. Wir sehen zum Beispiel das Wachstumsverhalten $u_n \sim -2^{n-3}n^2$, und dass u_n negativ ist für $n \geq 4$.

Zweites Anwendungsbeispiel zur linearen Rekursion

Q215

Aufgabe: (1) Finden Sie eine geschlossene Formel für alle Folgen

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} - u_{n-3} \quad \text{für} \quad n \geq 3.$$

(2) Für welche Startwerte $u = (u_0, u_1, u_2, \ldots)$ bleibt die Folge beschränkt?

Lösung: (1) Im Folgenraum $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ über $\mathbb{C}$ betrachten wir den Unterraum

$$L = \{\, u : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0 \,\}.$$

also $L = \operatorname{Ker} P(s)$ mit $P = X^3 - X^2 - X + 1 = (X-1)^2(X+1)$.
Satz Q2c beschert uns die Lösung $L = \operatorname{Ker}(s-1)^2 \oplus \operatorname{Ker}(s+1)$:
Jede P–rekursive Folge $u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ ist eine Linearkombination

$$u_n = a + bn + c(-1)^n$$

der Hauptfunktionen 1 und n und $(-1)^n$ mit Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{C}$.
Ausrechnen: $b = (u_2 - u_0)/2$, $a = (u_0 + u_1 - b)/2$, $c = (u_0 - u_1 + b)/2$.

(2) Die Folge u ist beschränkt gdw $b = 0$. Hingegen sind $a, c \in \mathbb{C}$ beliebig.
Beschränkte Lösungen sind die 2–periodischen: $u = (u_0, u_1, u_0, u_1, \ldots)$.

Zweites Anwendungsbeispiel zur linearen Rekursion

Q216
Erläuterung

☺ Die Lineare Algebra bietet Ihnen einen bewährten Werkzeugkasten mit mächtigen Hilfsmittel zur Lösung abstrakter und konkreter Fragen. Ich betone das allgemeine Phänomen: Die Problemstellung deutet meist nicht die möglichen oder nötigen (mathematischen!) Werkzeuge an.

Aufgabe: Die einfache Antwort suggeriert einen einfachen Lösungsweg. Handgefertigt optimierte Lösung im Rückblick durch *reverse engineering*: Können Sie die Rekursion direkt lösen, allein durch scharfes Hinsehen? Ich betone es hier als lehrreichen Kontrast zum allgemeinen Werkzeug.

Lösung: (1) Wir schreiben unsere Rekursion geschickt etwas anders:

$$u_n - u_{n-2} = u_{n-1} - u_{n-3} =: d$$

Daraus sehen wir $u_{2n} = u_0 + nd$ und $u_{2n+1} = u_1 + nd$. Somit wechselt u zwischen zwei affin-linearen Funktionen gleicher Steigung $d := u_2 - u_0$.

(2) Beschränkt bedeutet $d = 0$, also $u_2 = u_0$. Diese spezielle Rekursion können wir also auch wunderbar durch eigenes Nachdenken lösen. Allgemeine Technik vs handgefertigte Lösung: Beides ergänzt sich.

Was sind lineare Differentialgleichungen?

In vielen einfachen Anwendungen sind zunächst **Zahlen** gesucht…

Beispiel: Gesucht ist $x \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $x^2 + 1 = 0$.
Für $x \in \mathbb{R}$ gibt es keine Lösung; für $x \in \mathbb{C}$ gibt es genau zwei, $x = \pm \mathrm{i}$.

In vielen fortgeschrittenen Anwendungen sind **Funktionen** gesucht…

Beispiel: Gesucht ist $u : \mathbb{R} \to \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $u'' + u = 0$.
Über $\mathbb{C}$ können wir Lösungen erraten, besser systematisch berechnen:

$$u_1(t) = \mathrm{e}^{+\mathrm{i}t} \quad \text{und} \quad u_2(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$$

Auch jede Linearkombination $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ erfüllt die Gleichung.
Gibt es weitere Lösungen? Nein! Wir haben also den $\mathbb{C}$–Lösungsraum:

$$L_{\mathbb{C}} := \{ u : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid u'' + u = 0 \} \overset{!}{=} \langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{C}}^{!}$$

Oft sind reelle Lösungen gefragt. Wir finden den $\mathbb{R}$–Lösungsraum:

$$L_{\mathbb{R}} := \{ u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid u'' + u = 0 \} \overset{!}{=} \langle \cos, \sin \rangle_{\mathbb{R}}^{!}$$

Machen Sie die Probe! Satz Q2F garantiert die Eindeutigkeit.

Was sind lineare Differentialgleichungen?

P L M I „Einfache Beispiele von Differentialgleichungen begegnen uns schon in der Schule, zum Beispiel bei harmonischer Schwingung (Federn, elektrischer Schwingkreis, etc.). Damals mussten wir die Lösungen noch erraten oder sie fielen vom Himmel. Na gut, auch damit kann man gut weiterrechnen.“ — Genau dies wollen wir nun systematisieren, damit Sie selbständig arbeiten können und lineare Differentialgleichngen lösen.

Ich stelle daher bewusst ein sehr einfaches Beispiel voran. Sie wollen nun einen allgemeinen Rahmen abstecken – lineare Differentialgleichungen! – und darin eine allgemeine Lösungsmethode erlernen – Eigenfunktionen! Die Theorie ist bemerkenswert parallel zur diskreten Ableitung und dem Verschiebungsoperator. Solche Analogien sind uns immer willkommen.

☺ Wir sind bestens vorbereitet und erahnen bereits: Meist gibt es nicht genügend Eigenfunktionen, daher erweitern wir sofort unseren Blick und behandeln zugleich Hauptfunktionen. So erreichen wir ein erfreuliches kleines Wunder: Wir können so *jede* lineare Differentialgleichung lösen. Dazu präzisieren wir die allgemeine Fragestellung und ihre Lösung.

Was sind lineare Differentialgleichungen?

Definition Q2D: lineare Differentialgleichung über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Wir betrachten eine **lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung**:

$$\boxed{u^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)\, u'(t) + a_0(t)\, u(t) = b(t)}$$

Gegeben ist das Definitionsintervall $I \subseteq \mathbb{R}$, darauf die **Koeffizienten** $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} : I \to \mathbb{K}$ und die **rechte Seite** $b : I \to \mathbb{K}$; alle seien stetig.
Gesucht sind alle Lösungen $u \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$, die obige Gleichung erfüllen.

Beim **Anfangswertproblem** sind zudem die Anfangswerte zu einer Zeit $t_0 \in I$ vorgegeben durch $(\, u(t_0),\ u'(t_0),\ \dots,\ u^{(n-1)}(t_0)\,) \overset{!}{=} v \in \mathbb{K}^n$.

Sind $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ konstant, so bündeln wir sie zum **charakteristischen Polynom** $P = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]_n^1$. Damit prägnant:

$$\boxed{P(\partial)\, u(t) = b(t)}$$

Für $b = 0$ erhalten wir die **homogene DGleichung** $P(\partial)\, u(t) = 0$.

Was sind lineare Differentialgleichungen?

Gleichung	traditionelle Bezeichnung	Struktur
$P(\partial)\, u(t) = 0$	homogene lineare DG	linear
$P(\partial)\, u(t) = b(t)$	inhomogene lineare DG	affin-linear

Bezeichnung und Struktur entsprechen linearen Gleichungssystemen:

$Ax = 0$	homogenes LGS	linear
$Ax = b$	inhomogenes LGS	affin-linear

⚠ Der Funktionenraum $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$ ist unendlich-dimensional, wir können daher nicht direkt auf die Matrizenrechnung zurückgreifen. Wie schade!

☺ Homogene Differentialgleichungen $P(\partial)\, u(t) = 0$ werden wir gleich allgemein, vollständig und explizit lösen durch Hauptfunktionen (Q2F).

☺ Damit lösen wir inhomogene Differentialgleichungen $P(\partial)\, u(t) = b(t)$: Satz Q2J zeigt eine systematische Lösungsformel durch Integration.

☺ Für spezielle rechte Seiten gibt es einfache Lösungsformeln (Q2I) und geschickte Lösungsansätze, die leichter und schneller zum Ziel führen.

Die Ableitung auf Polynomen und ihre Hauptfunktionen

Über jedem Körper $\mathbb{K}$ haben wir die formale Ableitung von Polynomen:

$$\boxed{\partial : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] : F = \textstyle\sum_{i=0}^{n} f_k X^k \mapsto \partial F = \sum_{k=1}^{n} k f_k X^{k-1}}$$

Aufgabe: Bestimmen Sie alle Haupträume $V_r = \operatorname{Ker}(\partial - \lambda)^r$ für $r \in \mathbb{N}$.

Lösung: (1) Wir lösen die Eigengleichung $\partial F = \lambda F$ für $\lambda \in \mathbb{K}$.
Sei $\lambda \neq 0$. Für $F \neq 0$ gilt $\deg(\partial F) < \deg(\lambda F)$, also $\operatorname{Eig}(\partial, \lambda) = \{0\}$.
Somit bleibt nur $\lambda = 0$ als einzig möglicher Eigenwert von ∂.

(2) Charakteristik $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$: Wir finden $\operatorname{Ker}(\partial) = \langle X^0 \rangle_{\mathbb{K}}^{!}$.

(3) Aus $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(\partial) = 1$ folgt $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(\partial^r) \leq r$ für $r \in \mathbb{N}$. (Q1F/Q2A)

(4) Die Polynome $F_k = X^k/k! \in \mathbb{K}[X]$ bilden eine Hauptvektorkette:

$$0 \xleftarrow{\partial} F_0 \xleftarrow{\partial} F_1 \xleftarrow{\partial} F_2 \xleftarrow{\partial} F_3 \xleftarrow{\partial} \dots$$

(5) Diese ist eine Jordan–Basis der Polynome (M1G/Q1C):

$$\operatorname{Ker}(\partial^r) = \langle F_k \mid k < r \rangle_{\mathbb{K}}^{!} = \mathbb{K}[X]_{<r}$$

Die Ableitung auf Polynomen und ihre Hauptfunktionen

(1) Charakteristik $\operatorname{char} \mathbb{K} = p > 0$ verhält sich anders!

$$\operatorname{Ker}(\partial) = \langle X^0, X^p, X^{2p}, X^{3p}, \dots \rangle_{\mathbb{K}}^{!}$$

(2) Für die Polynome $F_{m,k} = X^{mp+k}/k!$ mit $k = 0, 1, \dots, p-1$ gilt:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \xleftarrow{\partial} & F_{0,0} & \xleftarrow{\partial} & F_{0,1} & \xleftarrow{\partial} & \dots & \xleftarrow{\partial} & F_{0,p-1} \\
0 & \xleftarrow{\partial} & F_{1,0} & \xleftarrow{\partial} & F_{1,1} & \xleftarrow{\partial} & \dots & \xleftarrow{\partial} & F_{1,p-1} \\
\vdots & & & & & & & & \\
0 & \xleftarrow{\partial} & F_{m,0} & \xleftarrow{\partial} & F_{m,1} & \xleftarrow{\partial} & \dots & \xleftarrow{\partial} & F_{m,p-1} \\
\vdots & & & & & & & &
\end{array}$$

(3) Wir finden hier eine Basis (Q1C) aus mehreren Hauptvektorketten:

$$\operatorname{Ker}(\partial^r) = \langle F_{m,k} \mid m \in \mathbb{N},\ k < r \rangle_{\mathbb{K}}^{!}$$

Dies gilt für $r = 0, 1, \dots, p$, wobei $\operatorname{Ker} \partial^0 = \{0\}$ und $\operatorname{Ker} \partial^p = \mathbb{K}[X]$.

In positiver Charakteristik verhält sich die Ableitung recht ungewohnt.
Umso erfreulicher ist es, auch hier vertraute Strukturen zu finden.

Exponentialreihe – als formale Potenzreihe

Sei $\mathbb{K} \geq \mathbb{Q}$ ein Ring und $\mathbb{K}[\![X]\!]$ der Potenzreihenring mit der Ableitung

$$\partial : \mathbb{K}[\![X]\!] \to \mathbb{K}[\![X]\!] : f = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k X^k \mapsto f' = \sum_{k=1}^{\infty} k f_k X^{k-1}.$$

Wir rechnen hier bequem mit formalen Potenzreihen, wie in C7 erklärt.
Dies sind Koeffizientenfolgen, also „Polynome von unendlichem Grad“.

Aufgabe: Lösen Sie (1) in $\mathbb{K}[X]$ und (2) in $\mathbb{K}[\![X]\!]$ die Gleichung

$$\boxed{f(0) = 1 \ \text{ und } \ f' = f.}$$

Lösung: (1) Das ist unmöglich! Aus $f \in \mathbb{K}[X]$ und $f' = f$ folgt $f = 0$.
Polynome genügen uns nicht für DGleichungen, erst Potenzreihen!

(2) Aus $f_0 = 1$ und $f' = f$ folgt $f_{k-1} = k f_k$ für alle $k \geq 1$, also $f_k = 1/k!$

$$\boxed{\exp(X) := \textstyle\sum_{k \in \mathbb{N}} X^k/k! \ = \ 1 + X + X^2/2 + X^3/3! + \dots .}$$

Wir machen die Probe: Diese Potenzreihe löst $\exp(0) = 1$ und $\exp' = \exp$.
Eindeutigkeit: Nach unserer obigen Rechnung ist dies die einzige Lösung.

Exponentialreihe – als formale Potenzreihe

☺ Bisher haben wir rein formal gerechnet, nicht nur über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, sondern über jedem beliebigen Körper $\mathbb{K}$, und das sehr erfolgreich:
Wie üblich betrachten wir Polynome $P = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ formal als Koeffizientenfolgen $(p_0, p_1, \dots, p_n, 0, 0, 0, \dots) \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ mit endlichem Träger.

Ebenso nützlich ist der gesamte Folgenraum $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ als $\mathbb{K}$–Vektorraum, wie oben gesehen für Rekursionen, nun zudem als Potenzreihenring.
Der Ableitungsoperator $(f_0, f_1, f_2, f_3, \dots) \mapsto (f_1, 2f_2, 3f_3, \dots)$ ist analog zum obigen Verschiebeoperator, zusätzlich versehen mit den Faktoren.

? Was fehlt uns noch? Als nächsten Schritt nehmen wir unseren Mut zusammen und setzen in die formale Potenzreihe $\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} X^k/k!$ reelle oder komplexe Werte $z \in \mathbb{C}$ ein, später sogar Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Für jedes Polynom $P \in \mathbb{K}[X]$ ist das Einsetzen algebraisch problemlos und bereits extrem nützlich als Einsetzungshomomorphismus K3D.
Für Potenzreihen müssen wir als allererstes die Konvergenz klären.
Das schöne Ergebnis importieren wir dankend aus der Analysis

Exponentialfunktion – als reelle Funktion!

Satz Q2E: Exponentialfunktion → Analysis ♥

(0) Die Exponentialreihe konvergiert und definiert folgende Funktionen:

$$\begin{aligned}
\exp &: \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}_{>0} &&: \exp(x) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k! \\
\exp &: \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}^\times &&: \exp(z) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k! \\
\exp &: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) &&: \exp(A) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k/k! \\
\exp &: \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &&: \exp(A) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!
\end{aligned}$$

Hierzu müssen wir jeweils die **Konvergenz** dieser Reihe nachweisen. Wir überlassen der Analysis die sorgsame Ausarbeitung, importieren aber gerne das Ergebnis und seine segensreichen Eigenschaften:

(1) Für alle A, B mit $AB = BA$ gilt $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. Speziell für $B = -A$ folgt daraus $\exp(A)\exp(-A) = \exp(0) = 1$. Demnach ist $\exp(A)$ invertierbar mit $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

(2) Für $f(t) = \exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k t^k/k!$ gilt $f'(t) = A\exp(At)$.

Exponentialfunktion – als reelle Funktion!

Wir importieren aus der Analysis die nötigen Begriffe zur Konvergenz von Folgen und Reihen, das Cauchy–Kriterium und Vollständigkeit, etc.

☺ Wenn Sie diese bereits aus Ihrer Analysis kennen und beherrschen, so dürfen Sie stolz sein auf diese fundamentalen analytischen Werkzeuge: Wir werden diese gut und gerne nutzen! Falls noch nicht, so freuen Sie sich auf die kommende Einführung in diese wundervolle Kulturtechnik.

☺ Die Aussagen (1) und (2) können Sie auch so direkt nachrechnen: Wir können Potenzreihen formal auffassen, also Konvergenz vorerst ausklammern, und dennoch die obige Funktionalgleichung (1) und die Ableitung (2) nachrechnen. Abschnitt C7 führt dies für Sie aus.

Die formale Sichtweise vereinfacht, sie trennt Algebra und Analysis. Natürlich benötigen Sie beides, doch können es getrennt untersuchen. Wir unterscheiden das Polynom $P \in \mathbb{K}[t]$ von der dargestellten Funktion $f_P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ und ebenso die Potenzreihe $P \in \mathbb{K}[\![t]\!]$ von ihrer Funktion f_P. Letztere erfordert Konvergenz für $t \in \mathbb{K}$ und existiert nicht überall.

Die Ableitung und ihre Hauptfunktionen

Auf $\mathscr{C}^\infty = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben wir den Ableitungsoperator

$$\boxed{\partial : \mathscr{C}^\infty \to \mathscr{C}^\infty : f \mapsto f'.}$$

? Ist die Abbildung ∂ linear über $\mathbb{K}$? Ja, klar! (Übung/Analysis)

Aufgabe: Bestimmen Sie die Haupträume $V_r = \operatorname{Ker} \partial^r$ für $r \in \mathbb{N}$. Nennen Sie eine Jordan–Basis von V_r und von $V = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} V_r$.

Lösung: (1) Es gilt $f \in \operatorname{Ker} \partial$ gdw $f = 0$. (Warum? ZWS, HDI, Q3C)

(2) Aus $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} \partial = 1$ folgt $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} \partial^r \le r$ für alle $r \in \mathbb{N}$. (Q1F/Q2A)

(3) Wir nutzen die faktorielle Monombasis: $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{K} : f_k(t) = t^k/k!$.

(4) Wir erhalten so die (unendlich lange) Hauptfunktionenkette

$$0 \xleftarrow{\partial} f_0 \xleftarrow{\partial} f_1 \xleftarrow{\partial} f_2 \xleftarrow{\partial} f_3 \xleftarrow{\partial} \dots$$

(5) Diese ist eine Jordan–Basis der Polynomfunktionen:

$$\begin{aligned}
V_r &= \operatorname{Ker} \partial^r = \langle f_k \mid k < r \rangle_{\mathbb{K}}^! = \mathbb{K}[t]_{<r} \\
V &= \textstyle\bigcup_{r\in\mathbb{N}} V_r = \langle f_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle_{\mathbb{K}}^! = \mathbb{K}[t]
\end{aligned}$$

Die Ableitung und ihre Hauptfunktionen

Aufgabe: Bestimmen Sie alle Haupträume $V_r = \operatorname{Ker}(\partial - \lambda)^r$ für $r \in \mathbb{N}$. Nennen Sie eine Jordan–Basis von V_r und von $V = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} V_r \le \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Lösung: (1) Die Eigengleichung $\partial f = \lambda f$ wird gelöst durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} : f(t) = c\,\mathrm{e}^{\lambda t} \quad \text{mit } c \in \mathbb{K}.$$

Gibt es weitere Lösungen? Nein! (Warum? ZWS, HDI, Q3C)

$$\operatorname{Eig}(\partial, \lambda) = \langle f_0 \rangle_{\mathbb{K}}^! \quad \text{mit} \quad f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{K} : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$$

(2) Aus $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(\partial - \lambda) = 1$ folgt $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(\partial - \lambda)^r \le r$ dank Q1F/Q2A.

(3) Die vorigen Aufgaben inspirieren folgende Hauptfunktionen:

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{K} : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}\, t^k/k!$$

$$\partial f_k(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t}\, t^k/k! + \mathrm{e}^{\lambda t}\, t^{k-1}/(k-1)! = \lambda f_k(t) + f_{k-1}(t)$$

(4) Wir erhalten auch hier eine unendlich lange Hauptfunktionenkette:

$$0 \xleftarrow{\partial-\lambda} f_0 \xleftarrow{\partial-\lambda} f_1 \xleftarrow{\partial-\lambda} f_2 \xleftarrow{\partial-\lambda} f_3 \xleftarrow{\partial-\lambda} \dots$$

Satz Q2F: Hauptfunktionen des Ableitungsoperators

Auf $\mathscr{C}^\infty = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R},\mathbb{C}$ haben wir den Ableitungsoperator

$$\partial : \mathscr{C}^\infty \to \mathscr{C}^\infty : f \mapsto f'.$$

(1) Zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ sind die Haupträume der Stufe $r \in \mathbb{N}$ dann

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{Ker}(\partial-\lambda)^r = \langle f_k \mid k < r \rangle^!_{\mathbb{K}} \quad \text{mit} \quad f_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\, t^k/k! \quad \text{und} \\ 0 \xleftarrow{\partial-\lambda} f_0 \xleftarrow{\partial-\lambda} f_1 \xleftarrow{\partial-\lambda} f_2 \xleftarrow{\partial-\lambda} f_3 \xleftarrow{\partial-\lambda} f_4 \xleftarrow{\partial-\lambda} \dots \end{array}}$$

(2) Anwendung auf DGleichungen: Gegeben sei ein zerfallendes Polynom

$$P = X^n + p_1 X^{n-1} + \dots + p_n X^0 = (X-\lambda_1)^{r_1} \cdots (X-\lambda_k)^{r_k}.$$

Dann hat $L = \operatorname{Ker} P(\partial) \le \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$ eine Basis aus Hauptvektorketten:

$$L \overset{\text{N3G}}{=} \operatorname{Ker}(\partial-\lambda_1)^{r_1} \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker}(\partial-\lambda_k)^{r_k}$$

Damit können wir jede lineare Differentialgleichung $P(\partial)f = 0$ lösen.

Satz Q2F: Hauptfunktionen des Ableitungsoperators

(3) Die Auswertung zum Zeitpunkt $t = 0$ stiftet den $\mathbb{K}$–Isomorphismus

$$q : L \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n : f \mapsto \big(f(0),\ f'(0),\ f''(0), \dots, f^{(n-1)}(0) \big).$$

Damit lösen wir jede lineare Differentialgleichung mit Anfangswerten, stellen also die eindeutige Lösung explizit als geschlossene Formel dar.

(4) Wir vergleichen ∂ und s mittels $T : \mathscr{C}^\infty \to \mathbb{K}^\mathbb{N} : f \mapsto (f^{(n)}(0))_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K}) & \xrightarrow{\partial} & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K}) & \qquad \operatorname{Ker} P(\partial) & \qquad [t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}\, t^k/k!] \\ T\downarrow & & T\downarrow & T\downarrow\cong & T\downarrow \\ \mathbb{K}^\mathbb{N} & \xrightarrow{s} & \mathbb{K}^\mathbb{N} & \qquad \operatorname{Ker} P(s) & \qquad [n \mapsto \binom{n}{k}\lambda^{n-k}] \end{array}$$

Es gilt $T \circ \partial = s \circ T$, also $T \circ P(\partial) = P(s) \circ T$ und $T(\operatorname{Ker} P(\partial)) \le \operatorname{Ker} P(s)$. Dabei schickt T jede Hauptfunktion $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}\, t^k/k!$ auf die Hauptfolge $n \mapsto \binom{n}{k}\lambda^{n-k}$. Somit ist $T_P : \operatorname{Ker} P(\partial) \to \operatorname{Ker} P(s)$ ein Isomorphismus.

Beweis: (1) Die Haupträume kennen wir aus der vorigen Aufgabe.

(2) Diese direkte Summe verdanken wir der Kernzerlegung N3G. Die Dimensionen r_i und unsere Hauptvektorkette verdanken wir (1).

(3) Wir nutzen (4) und Satz Q2C: Die Auswertung $q : L \to \mathbb{K}^n$ ist die Komposition von $T_P : \mathscr{C}^\infty \supset \operatorname{Ker} P(\partial) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker} P(s) \subset \mathbb{K}^\mathbb{N}$ und $\mathrm{pr} : \mathbb{K}^\mathbb{N} \supset \operatorname{Ker} P(s) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n$. Somit ist auch q ein Isomorphismus.

Anwendung: Zu je n beliebig gegebenen Startwerten $(f^{(k)}(0))_{k<n} \in \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung f mit diesen Startwerten und $P(\partial)f = 0$. Dank (2) schreiben wir f als Linearkombination von Hauptfunktionen.

(4) Die Eigenschaft $T \circ \partial = s \circ T$ ist klar nach Definition bzw. eine schöne Fingerübung, ebenso $T \circ P(\partial) = P(s) \circ T$ und $T(\operatorname{Ker} P(\partial)) \le \operatorname{Ker} P(s)$. Die Ableitungen $\partial^n f_k$ von $f_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\, t^k/k!$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(\partial^n f)(0)$ berechnen wir per Induktion. Anwendung: Diese Ableitungen zeigen die Isomorphie (3) und nützen ebenso in konkreten Rechnungen. Zudem verstehen wir nun explizit die Ähnlichkeit von ∂ und s.

(4) Wir wissen $\partial f_k = \lambda f_k + f_{k-1}$. Per Induktion zeigen wir:

$$\boxed{\partial^n f_k = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} f_{k-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} f_{k-i}}$$

Zur einfacheren Schreibweise setzen wir $f_k := 0$ für $k \in \mathbb{Z}_{<0}$. Die Aussage gilt für $n = 0$. Induktionsschritt von $n-1$ auf n:

$$\begin{aligned} \partial^n f_k &\overset{\text{Def}}{=} \partial(\partial^{n-1} f_k) \overset{\text{IV}}{=} \partial\Big[\sum_{i\in\mathbb{Z}} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} f_{k-i} \Big] \\ &\overset{(1)}{=} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-i} f_{k-i} + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \binom{n-1}{j} \lambda^{n-1-j} f_{k-j-1} \\ &\overset{\text{Subs}}{=} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-i} f_{k-i} + \sum_{i\in\mathbb{Z}} \binom{n-1}{i-1} \lambda^{n-i} f_{k-i} \overset{\text{H229}}{=} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} f_{k-i} \end{aligned}$$

Wir nutzen die Indexverschiebung $i = j+1$ bzw. $j = i-1$. Schließlich gilt $f_0(0) = 1$ und $f_k(0) = 0$ für alle $k \neq 0$, also $(\partial^n f_k)(0) = \binom{n}{k}\lambda^{n-k}$. $\boxed{\text{QED}}$

Erstes Anwendungsbeispiel zu linearen DGleichungen

Q233

Aufgabe: (1) Finden Sie alle $\mathscr{C}^\infty$–Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\boxed{u''' - 6u'' + 12u' - 8u = 0.}$$

(2) Lösen Sie dies für die Anfangswerte $u(0) = u'(0) = 0$ und $u''(0) = 1$.

Lösung: (1) Im Funktionenraum $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ über $\mathbb{C}$ betrachten wir den Lösungsraum $L = \operatorname{Ker} P(\partial)$ mit $P = X^3 - 6X^2 + 12X - 8 = (X-2)^3$.

Dank unserem vorigen Satz Q2F wissen wir:

$$L = \langle\ t \mapsto \mathrm{e}^{2t},\ \mathrm{e}^{2t}\, t,\ \mathrm{e}^{2t}\, t^2/2\ \rangle_{\mathbb{C}}^{!}$$

Jede Lösung $u \in L$ schreibt sich demnach

$$u(t) = \mathrm{e}^{2t}(a + bt + ct^2/2)$$

mit eindeutigen Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{C}$. (2) Die gewünschten Anfangswerte erreichen wir durch $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, also

$$u(t) = \mathrm{e}^{2t}\, t^2/2.$$

Erstes Anwendungsbeispiel zu linearen DGleichungen

Q234 Erläuterung

☺ Das ist die eindeutige Lösung des AWP wie in Satz Q2F versprochen. Machen Sie die Probe! Erfüllt u die Differentialgleichung $P(\partial)\, u = 0$? Zudem die gewünschten Anfangswerte $u(0) = u'(0) = 0$ und $u''(0) = 1$? Gemäß unserer Definition Q2D ist für Lösungen genau das zu prüfen.

Das Anfangswertproblem erfordert die Bestimmung der Konstanten. Dies führt zu einem linearen Gleichungssystem in drei Variablen und drei Gleichungen. Der vorige Satz garantiert die eindeutige Lösbarkeit! Die Ausführung der Rechnung, etwa mit Gauß, ist dann Routine.

Zunächst handelt die Frage von Funktionen und ihren Ableitungen. Auf den ersten Blick scheint das noch ohne Bezug zur Linearen Algebra, Polynomen oder Eigenvektoren. Bei genauer Betrachtung enthüllt sich die lineare Struktur und entfalten sich unsere wirksamen Werkzeuge.

Die Analysis darf sich hier noch ganz entspannt zurückhalten. Lineare DGleichungen lassen sich vollkommen elementar lösen, Wir kommen hier (beinahe) ausschließlich mit Linearer Algebra aus,

Zweites Anwendungsbeispiel zu linearen DGleichungen

Q235 Erläuterung

Aufgabe: (1) Finden Sie alle $\mathscr{C}^\infty$–Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\boxed{u''' - u'' - u' + u = 0.}$$

(2) Lösen Sie dies für die Anfangswerte $u(0) = 4$ und $u'(0) = u''(0) = 1$.

Lösung: (1) Im Funktionenraum $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ über $\mathbb{C}$ betrachten wir den Lösungsraum $L = \operatorname{Ker} P(\partial)$ mit $P = X^3 - X^2 - X + 1 = (X-1)^2(X+1)$.

Dank unserem vorigen Satz Q2F wissen wir:

$$L = \langle\ t \mapsto \mathrm{e}^{t},\ \mathrm{e}^{t}\, t,\ \mathrm{e}^{-t}\ \rangle_{\mathbb{C}}^{!}$$

Jede Lösung $u \in L$ schreibt sich demnach

$$u(t) = \mathrm{e}^{t}(a + bt) + c\,\mathrm{e}^{-t}$$

mit eindeutigen Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{C}$. (2) Die gewünschten Anfangswerte erreichen wir durch $a = 3$, $b = -2$, $c = 1$, also

$$u(t) = \mathrm{e}^{t}(3 - 2t) + \mathrm{e}^{-t}\,.$$

Zweites Anwendungsbeispiel zu linearen DGleichungen

Q236 Erläuterung

Sie sehen hier die verblüffende Ähnlichkeit zwischen linearer Rekursion (Q213) und linearen Differentalgleichungen (Q233). Zur Illustration habe ich in beiden Beispielpaaren sogar genau dieselben Polynome gewählt. Das betont das gemeinsame Prinzip und die unterschiedlichen Details.

Tatsächlich identisch sind die zugrundeliegende linearen Strukturen und daher auch die Techniken zur Lösung: Wir jordanisieren unsere beiden Operatoren s und ∂. Im Folgenraum $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ haben wir $U = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} \operatorname{Hau}(s, \lambda)$. Im Funktionenraum $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ haben wir ebenso $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} \operatorname{Hau}(\partial, \lambda)$. Die Hauptraumstrukturen sind dieselben, für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $(\operatorname{Hau}(s, \lambda), s) \cong (\operatorname{Hau}(\partial, \lambda), \partial)$. Wir haben also insgesamt $(U, s) \cong (V, \partial)$.

Für Rekursion ist das Anfangswertproblem offensichtlich: Es existiert genau eine Lösung! Für Differentialgleichungen ist das keineswegs klar. In der Analysis beweisen Sie Existenz und Eindeutigkeit für das AWP in voller Schönheit. Wir zeigen dies hier ganz handfest zunächst für *lineare* DGleichungen. Die Analogie $(U, s) \cong (V, \partial)$ ist uns dabei willkommen.

Konjugiert-komplexe Lösungen

Q237

Zu lösen sei über $\mathbb{R}$ die homogene lineare Differentialgleichung

$$\boxed{P(\partial)\,u(t) = 0.}$$

Hierzu sei $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ ein **reelles Polynom**.
Ist $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Lösung, so auch die konjugierte Funktion $\overline{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$P(\partial)\,u = 0 \quad \overset{\text{conj}}{\Longleftrightarrow} \quad P(\partial)\,\overline{u} = 0$$

Ist $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\omega$ mit $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ und $\omega \neq 0$ eine k-fache Nullstelle von P,
so hat unsere DG hat die $2k$ **konjugiert-komplexen Lösungen**

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{e}^{\lambda t},\ \mathrm{e}^{\lambda t}\,t, \dots,\ \mathrm{e}^{\lambda t}\,\tfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \\ &\mathrm{e}^{\overline{\lambda} t},\ \mathrm{e}^{\overline{\lambda} t}\,t, \dots,\ \mathrm{e}^{\overline{\lambda} t}\,\tfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}. \end{aligned}}$$

Im Falle $\omega = 0$ ist $\lambda = \sigma \in \mathbb{R}$ reell und $\mathrm{e}^{\lambda t}\,t^k/k!$ ist fix unter Konjugation.
Im Falle $\omega \neq 0$ ist unser Eigenwert λ echt komplex; per Konvention wählen wir $\omega > 0$ und erhalten die konjugierte Lösung gratis.

Von komplexen zu reellen Lösungen

Q238

Anwendungen erfordern oft **reelle Lösungen** $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Basiswechsel:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{e}^{\lambda t} &= \mathrm{e}^{\sigma t}[\cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t)] \\ \mathrm{e}^{\overline{\lambda} t} &= \mathrm{e}^{\sigma t}[\cos(\omega t) - \mathrm{i}\sin(\omega t)] \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} \mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t) &= \tfrac{1}{2}[\mathrm{e}^{\lambda t} + \mathrm{e}^{\overline{\lambda} t}] \\ \mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t) &= \tfrac{1}{2\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{\lambda t} - \mathrm{e}^{\overline{\lambda} t}] \end{aligned}\right.$$

Wir linearkombinieren so aus den komplexen die **reellen Lösungen**

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t),\ \mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t)\,t, \dots,\ \mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t)\,\tfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \\ &\mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t),\ \mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t)\,t, \dots,\ \mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t)\,\tfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}. \end{aligned}}$$

Diese reellen Funktionen bilden eine Basis des komplexen Lösungsraums

$$L_{\mathbb{C}} := \{\, u : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid P(\partial)\,u = 0 \,\} \quad \text{über } \mathbb{C}$$

und nach Konstruktion zugleich eine Basis des reellen Lösungsraums

$$L_{\mathbb{R}} := \{\, u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid P(\partial)\,u = 0 \,\} \quad \text{über } \mathbb{R}.$$

Übung: Es gilt $\dim_{\mathbb{R}} L_{\mathbb{R}} \leq n$ und wir haben n unabhängige Lösungen.

Anwendungsbeispiel: komplex vs reell

Q239
Erläuterung

Aufgabe: Lösen Sie (a) allgemein und (b) das Anfangswertproblem

$$\boxed{u''(t) + 2u'(t) + 5u(t) = 0 \quad \text{mit} \quad u(0) = 1,\ u'(0) = 3}$$

Lösung: (a) Das charakteristische Polynom ist $P(X) = X^2 + 2X + 5$.
Die Nullstellen $\lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2\mathrm{i}$ sind komplex-konjugiert.

Komplexes Fundamentalsystem: $\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})t},\ \mathrm{e}^{(-1-2\mathrm{i})t}$
Komplexe Lösungen: $z(t) = c_1\,\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})t} + c_2\,\mathrm{e}^{(-1-2\mathrm{i})t}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$
Reelles Fundamentalsystem: $\mathrm{e}^{-t}\cos(2t),\ \mathrm{e}^{-t}\sin(2t)$
Reelle Lösungen: $u(t) = \alpha_1\,\mathrm{e}^{-t}\cos(2t) + \alpha_2\,\mathrm{e}^{-t}\sin(2t)$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= \alpha_1 &&= 1 \\ u'(0) &= -\alpha_1 + 2\alpha_2 &&= 3 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= 2 \end{aligned}\right.$$

Probe! Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems ist demnach

$$u(t) = \mathrm{e}^{-t}(\cos(2t) + 2\sin(2t)).$$

☺ Über die komplexe Lösung kommt man zur selben Lösung des AWP.

Anwendungsbeispiel: komplex vs reell

Q240

Aufgabe: Finden Sie ein reelles Fundamentalsystem der Gleichung

$$\boxed{u^{(4)}(t) + 8u''(t) + 16u(t) = 0.}$$

Lösung: Das char. Polynom unserer Gleichung $P(\partial)\,u = 0$ ist

$$P(X) = X^4 + 8X^2 + 16 = (X^2+4)^2 = (X - 2\mathrm{i})^2(X + 2\mathrm{i})^2.$$

Doppelte Nullstellen $2\mathrm{i}, -2\mathrm{i}$. Ein komplexes Fundamentalsystem ist

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}, \quad \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}, \quad t\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}, \quad t\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}.$$

Probe! Hieraus gewinnen wir das reelle Fundamentalsystem

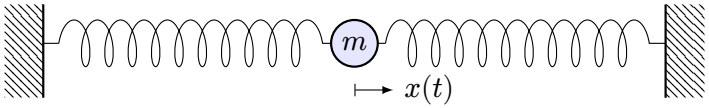
$$\cos(2t), \quad \sin(2t), \quad t\cos(2t), \quad t\sin(2t).$$

Basiswechsel! Jede reelle Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat demnach die Form

$$u(t) = \cos(2t)(\alpha_1 + \alpha_2 t) + \sin(2t)(\alpha_3 + \alpha_4 t)$$

mit eindeutig bestimmten Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$. **Anfangswerte** $u(t_0), u'(t_0), u''(t_0), u'''(t_0) \in \mathbb{R}$ legen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ eindeutig fest.

Beispiel: mechanische Schwingung



Zeit $t \in \mathbb{R}$, Auslenkung $x(t)$ aus Ruhelage, Rückstellkraft $F_1 = -k\,x$ (Hookes Gesetz: zur Auslenkung proportional und entgegengesetzt), zusätzlich noch Reibung / viskoser Strömungswiderstand $F_2 = -c\,\dot{x}$.

Newtons Bewegungsgesetz $m\,\ddot{x} = F_1 + F_2$, also $m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = 0$.
Dies führt zu einer **linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung**

$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\delta\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0}$$

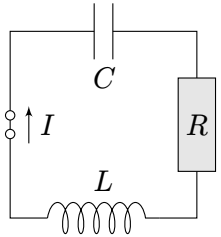
mit konstanten Koeffizienten $\delta = c/2m \geq 0$ und $\omega_0^2 = k/m$, $\omega_0 \geq 0$.
Bei äußerer Anregung durch eine Kraft $F(t) = m\,f(t)$ gilt:

$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\delta\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = f(t)}$$

Allgemein suchen wir alle möglichen Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto x(t)$, speziell die Lösung x zu vorgegebenen Anfangswerten $x(t_0)$ und $\dot{x}(t_0)$.

Beispiel: elektrischer Schwingkreis

Diese Differentialgleichung begegnet uns in sehr vielen Situationen.
Sie ist daher grundlegend wichtig in Naturwissenschaft und Technik.



Elektrischer Schwingkreis (RLC), Radioempfänger:
Beziehungen zwischen Strom I und Spannung U:

- Ohmscher Widerstand: $U_R = R\,I$,
- Selbstinduktivität der Spule: $U_L = L\,\dot{I}$,
- Kapazität des Kondensators: $I = C\,\dot{U}_C$.

In der Reihenschaltung summieren sich diese Spannungen zu Null:
$U_L + U_R + U_C = 0$. Wir erhalten $L\,\ddot{I}(t) + R\,\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = 0$, also

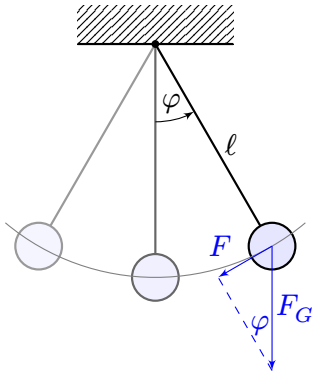
$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\delta\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0}$$

mit $x(t) = I(t)$ sowie $\delta = \frac{R}{2L}$ und $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Bei äußerer Anregung gilt:

$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\delta\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = f(t)}$$

Wir suchen Lösungen $x(t)$, speziell zu Anfangswerten $x(0)$ und $\dot{x}(0)$.

Beispiel: das mathematische Pendel



Die Rückstellkraft ist hier nicht-linear:

$$F(t) = -m \cdot g \cdot \sin\varphi(t)$$

m = Masse des Pendelkörpers
$g = 9.81\mathrm{m/s}^2$ Erdbeschleunigung
$F_G = mg$ Gravitationskraft zur Masse m
ℓ = Länge des Pendelstabes
$\varphi(t)$ = Winkelauslenkung
$\ell\,\varphi(t)$ = Auslenkung

Newtons Bewegungsgesetz $F(t) = m\,\ell\,\ddot{\varphi}(t)$ führt zu

$$\boxed{\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell}\,\sin\varphi(t).}$$

Anders als vorige ist dies eine **nicht-lineare Differentialgleichung**.
Gegeben sind die anfängliche Position $\varphi(0)$ und Geschwindigkeit $\dot{\varphi}(0)$.
Fragen: Wie sieht die Trajektorie aus? Wie lang dauert eine Periode?

Beispiel: Pendel bei kleinen Amplituden

⚠ Wir vereinfachen etwas: punktförmige Masse des Pendelkörpers, vernachlässigbare Masse des Stabes, reibungsfreie Aufhängung, etc.
Für kleine Auslenkungen gilt $\sin(\varphi) \approx \varphi$. (Faustregel für $|\varphi| < 5°$)
Dies führt uns zur **linearisierten Differentialgleichung**:

$$\boxed{\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell}\,\varphi(t)}$$

Diese Differentialgleichung ist viel einfacher, denn sie ist linear in φ:

$$\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2\varphi(t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{g/\ell}$$

Dies ist die Bewegungsgleichung eines **harmonischen Oszillators**:

$$\varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega t + \alpha), \quad \ddot{\varphi}(t) = -\varphi_0\,\omega^2\cos(\omega t + \alpha).$$

Für kleine Auslenkungen ist demnach die Periodendauer $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.
Die Anfangsdaten bestimmen die Auslenkung φ_0 und die Phase α.
Für große Auslenkungen brauchen wir eine genauere Rechnung! (Q5.1)

Freie harmonische Schwingung

Q245

Aufgabe: Finden Sie alle Lösungen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$\boxed{\ddot{u}(t) + 2\delta\,\dot{u}(t) + \omega_0^2\,u(t) = 0.}$$

Diese berühmte **Gleichung des harmonischen Oszillators** ist eine lineare DG zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten mit **Dämpfung** $\delta \geq 0$ und **ungedämpfter Eigenfrequenz** $\omega_0 > 0$.

Lösung: Wir lösen $P(\partial)\,u = 0$ für $P = X^2 + 2\delta X + \omega_0^2$. Eigenwerte:

$$\lambda = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \;\in\; \mathbb{C}$$

$\delta < \omega_0$: **schwache Dämpfung**, zwei komplex-konjugierte Nullstellen
$\delta > \omega_0$: **starke Dämpfung**, zwei reelle Nullstellen $\lambda_1 < -\delta < \lambda_2 < 0$
$\delta = \omega_0$: **kritische Dämpfung**, doppelte reelle Nullstelle $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$

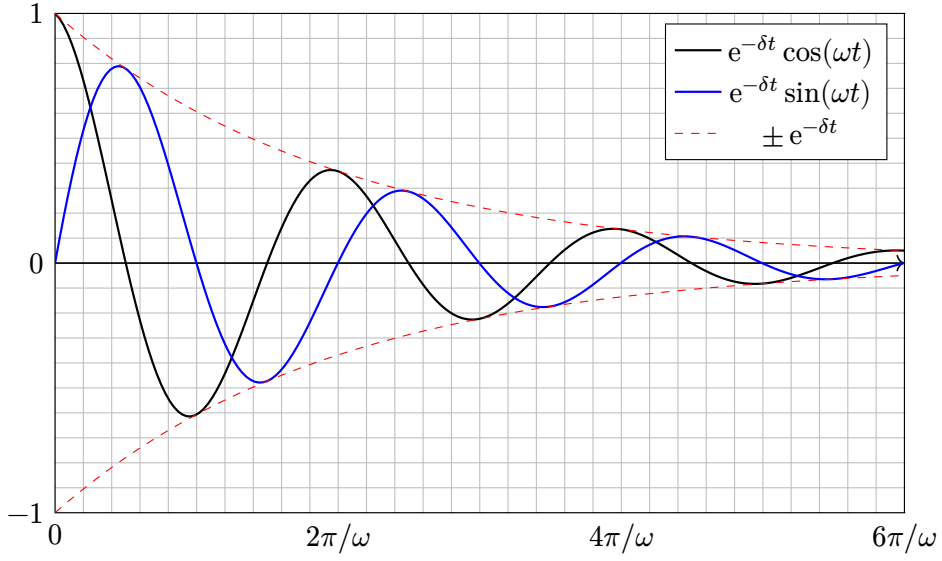
☺ Existenz und Eindeutigkeit und explizite Lösung Q2F: Dank unserer Vorbereitung kennen wir alle Lösungen über $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$: Zu jedem Start $(u(0), \dot{u}(0)) \in \mathbb{R}^2$ haben wir genau eine Lösung.

Ohne Theorie muss man Lösungen raten. Vornehm gesagt machen wir den Exponentialansatz $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Er führt zur Gleichung $(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2)\,\mathrm{e}^{\lambda t} = 0$ und somit zu obigen Eigenwerten.

Schwache Dämpfung: $\delta < \omega_0$

Q246

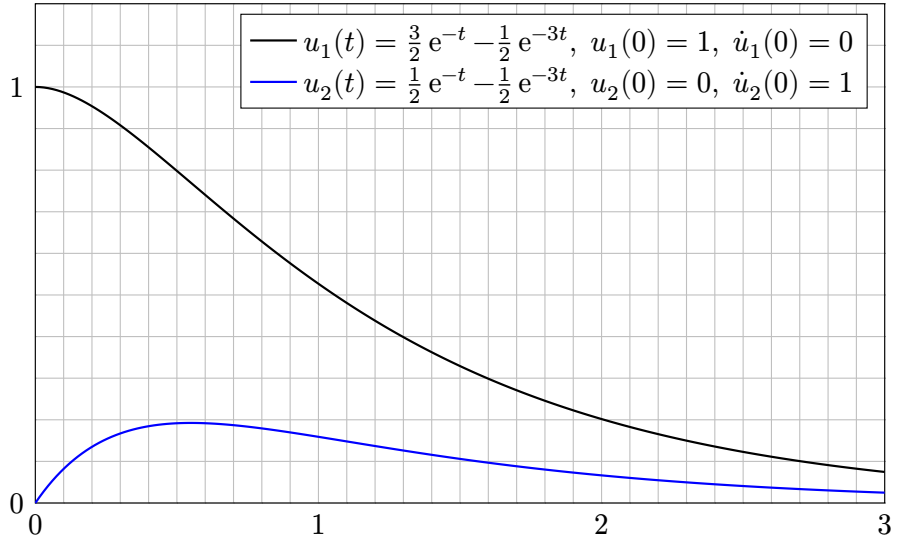
Die Masse wird durch die Federkraft zur Ruhelage zurückgezogen, aufgrund ihrer Trägheit schwingt die Masse jedoch darüber hinaus.



Starke Dämpfung: $\delta > \omega_0$

Q247

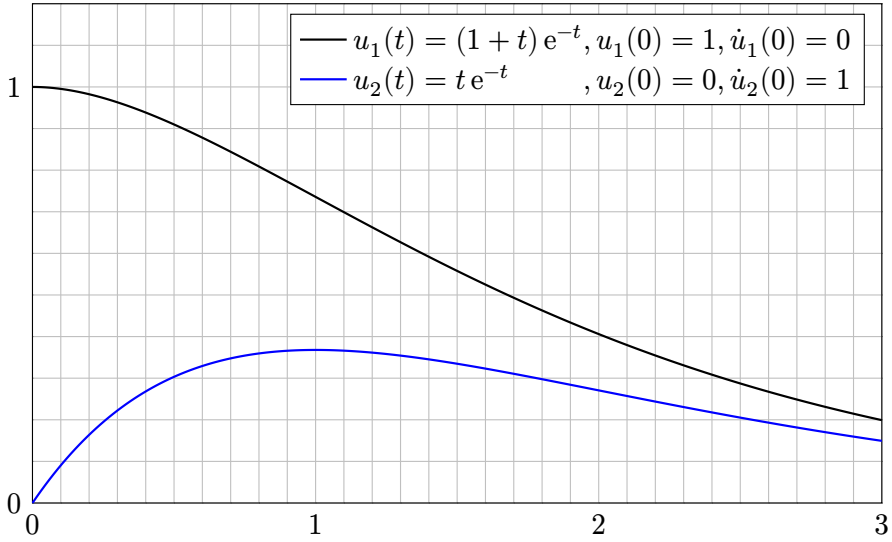
Dies nennt man auch den **Kriechfall:** Es gibt keine Schwingung, das System kriecht nach einer Auslenkung zur Ruhelage zurück.



Kritische Dämpfung: $\delta = \omega_0$

Q248

Dies nennt man den **aperiodischen Grenzfall**: Er liegt genau auf der Grenze zwischen gedämpfter Schwingung und Kriechfall.



Erzwungene harmonische Schwingung

Q249

$$\boxed{\ddot{u}(t) + 2\delta\,\dot{u}(t) + \omega_0^2\,u(t) = a\cos(\omega_1 t)}$$

Aufgabe: Gesucht ist $u(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$ mit Amplitude A und Phase φ.

Lösung: Dies ist der Realteil der komplexen Differentialgleichung

$$\ddot{z}(t) + 2\delta\,\dot{z}(t) + \omega_0^2\,z(t) = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t}\,.$$

Der Exponentialansatz $z(t) = c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ führt uns zur Gleichung

$$[-\omega^2 + 2\delta\,\mathrm{i}\omega + \omega_0^2]\,c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \overset{!}{=} a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t}\,.$$

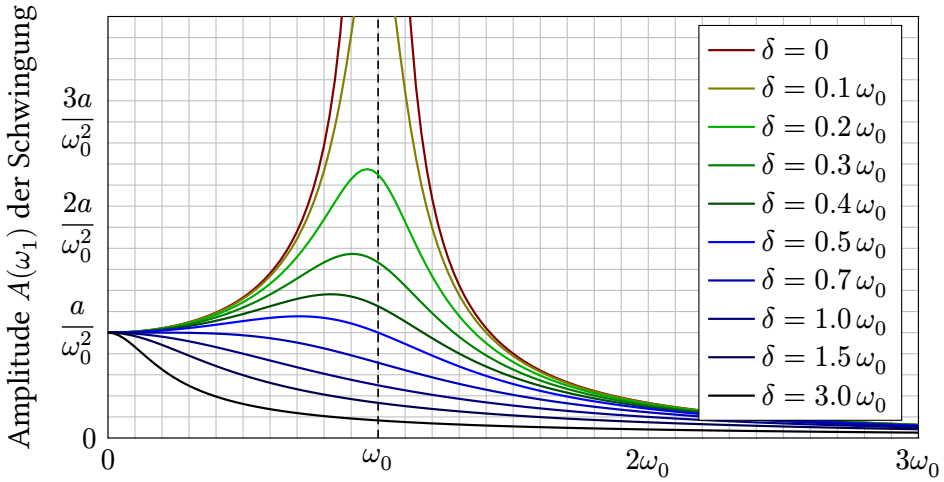
Damit finden wir $\omega = \omega_1$ und $c = a/(\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2\delta\,\mathrm{i}\omega_1) \overset{!}{=} A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$.
Das System reagiert mit derselben Frequenz wie die Anregung!
In Polardarstellung $c = A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$ erhalten wir $z(t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t - \varphi)}$ mit

$$A = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}}, \qquad \varphi = \arctan\frac{2\delta\omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2} + \begin{cases} 0 & \text{für } \omega_1 < \omega_0, \\ \pi & \text{für } \omega_1 > \omega_0. \end{cases}$$

☺ Damit haben wir die reelle Lösung $u(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$ gefunden.

Erzwungene harmonische Schwingung

Q250



Die Amplitude ist maximal für $\omega_1^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$ bzw. $\omega_1 = 0$ falls $2\delta^2 > \omega_0^2$.
Die **Resonanz** ist dabei umso stärker, je kleiner die Dämpfung δ ist.
Für $\delta \approx 0$ und $\omega_1 \approx \omega_0$ kommt es zur **Resonanzkatastrophe**.

Erzwungene harmonische Schwingung

Q251
Erläuterung

⚠ Im Sonderfall $\delta = 0$ und $\omega_1 = \omega_0$ schlägt unser Ansatz $c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ fehl!

$$\ddot{z}(t) + \omega_0^2\,z(t) = [\omega_0^2 - \omega^2]\,c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \quad \neq \quad a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$$

Zur Gleichheit muss $\omega = \omega_0$ gelten, aber dann verschwindet $[\omega_0^2 - \omega^2]$.
In obiger Formel für c ist das genau die Polstelle! Hauptansatz:

$$z(t) = c\,t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \quad \dot{z}(t) = c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + c\,t\mathrm{i}\omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \quad \ddot{z}(t) = 2c\mathrm{i}\omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - c\,t\,\omega^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$
$$\Longrightarrow \quad \ddot{z}(t) + \omega_0^2\,z(t) = [2\mathrm{i}\omega + t\,(\omega_0^2 - \omega^2)]\,c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \quad \overset{!}{=} \quad a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$$

Durch Vergleich finden wir die Werte $\omega = \omega_0$ und $c = a/(2\mathrm{i}\omega_0)$. Also:

$$z(t) = \frac{at\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}}{2\mathrm{i}\omega_0} = \frac{at\cos(\omega_0 t) + \mathrm{i}at\sin(\omega_0 t)}{2\mathrm{i}\omega_0} = \frac{at}{2\omega_0}\sin(\omega_0 t) - \mathrm{i}\frac{at}{2\omega_0}\cos(\omega_0 t)$$

Der Realteil $u(t) = (a/2\omega_0)\,t\sin(\omega_0 t)$ löst $\ddot{u}(t) + \omega_0^2\,u(t) = a\cos(\omega_0 t)$.

⚠ Das System reagiert mit derselben Frequenz ω wie die Anregung, aber die Amplitude wächst unbeschränkt: Man nennt dies **Resonanz**.

☺ Anschaulich: Jedes Kind lernt dieses Phänomen beim Schaukeln.
Die Anregungsfrequenz trifft genau eine Eigenfrequenz des Systems!

Amplitude und Resonanz

Q252
Erläuterung

Erzwungene Schwingungen sind ein weit verbreitetes Phänomen:

- Mechanik: Schaukel, Brücke bei gleichmäßigen Schritten / Wind, Vibrationen von Fahrzeugteilen bei bestimmten Drehzahlen,
- Akustik: Tonerzeugung in Musikinstrumenten, Resonanzkörper, Mitschwingen einer nicht gespielten Saite oder einer Stimmgabel,
- Elektrotechnik: elektrischer Schwingkreis, Radioempfang, WLAN,
- Hydromechanik: Tideresonanz der Ozeane und großen Meere.

Auch die (Hochschul-)Didaktik zeigt Resonanzphänomene: Jede Lernende folgt ihrem eigenen kognitiven Bewegungsgesetz (Rückstellkraft, Trägheit, Vergessen), wird von außen durch die Lehrende angeregt auf einer vorgegebenen Frequenz (als erzwungene Bewegung, extrinsich). Trifft die anregende Frequenz in etwa eine Eigenfrequenz (intrinsisches Interesse), so kommt es zur Resonanz: Das ist die ideale Lern- und Lehrsituation! Anregung mit zu niedriger oder zu hoher Frequenz hingegen zeigt kaum Wirkung. Auch das kennen Sie aus eigener Erfahrung. Bei hunderten Teilnehmer:innen sind die individuellen Eigenfrequenzen meist sehr breit gestreut. Egal auf welcher Frequenz ich sende, nur bei einen kleinen Teil bringt es eine Saite zum Klingen. Dieses Phänomen ist mir schmerzhaft bewusst, aber unter den gegebenen Bedingungen wohl unvermeidlich. Das erklärt auch die Bedeutung, sich aufeinander einzustellen. Ich versuche, auf verschiedenen Frequenzen zu senden, und lausche den Reaktionen. Das eigentlich Erstaunliche ist nicht, wie oft die Übertragung misslingt, sondern dass sie manchmal tatsächlich funktioniert.

Zusammenfassung: freie harmonische Schwingung

Gegeben seien reelle Konstanten $\delta, \omega_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sowie $\omega_1, a \in \mathbb{R}_{>0}$.

Satz Q2G: freie harmonische Schwingung

(1) Die **homogene lineare Differentialgleichung**

$$\boxed{\ddot{u}(t) + 2\delta\,\dot{u}(t) + \omega_0^2\,u(t) = 0}$$

hat einen zweidimensionalen Lösungsraum; die allgemeine Lösung ist

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \quad \text{mit freien Konstanten } c_1, c_2 \in \mathbb{K} \\ &= \begin{cases} \mathrm{e}^{-\delta t}\left[c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\right] & \text{für } \delta < \omega_0 \text{ und } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \\ \mathrm{e}^{-\delta t}\left[c_1\,\mathrm{e}^{-\lambda t} + c_2\,\mathrm{e}^{\lambda t}\right] & \text{für } \delta > \omega_0 \text{ und } \lambda = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \\ \mathrm{e}^{-\delta t}\left[c_1 + c_2 t\right] & \text{für } \delta = \omega_0 \text{ (kritische Dämpfung).} \end{cases} \end{aligned}}$$

Diese Lösungen sind reell, also eine Basis über $\mathbb{R}$, ebenso über $\mathbb{C}$.

Anfangswerte $u(t_0)$ und $\dot{u}(t_0)$ können beliebig vorgegeben werden:
Sie legen die freien Konstanten c_1, c_2 eindeutig fest (und umgekehrt).

Zusammenfassung: erzwungene harmonische Schwingung

Satz Q2G: erzwungene harmonische Schwingung

(2) Die **inhomogene lineare Differentialgleichung**

$$\boxed{\ddot{u}(t) + 2\delta\,\dot{u}(t) + \omega_0^2\,u(t) = a\cos(\omega_1 t)}$$

hat einen zweidim. affinen Lösungsraum; die allgemeine Lösung ist

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= u_0(t) + c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \quad \text{mit freien Konstanten } c_1, c_2 \text{ und} \\ u_0(t) &= \begin{cases} A\cos(\omega_1 t - \varphi) & \text{für } \delta > 0 \text{ oder } \omega_1 \neq \omega_0 \text{ (generisch Q249),} \\ & \text{Amplitude } A = a/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}, \\ & \text{Phase } \varphi = \arctan\left[2\delta\omega_1/(\omega_0^2 - \omega_1^2)\right](+\pi), \\ \dfrac{at}{2\omega_1}\sin(\omega_1 t) & \text{für } \delta = 0 \text{ und } \omega_1 = \omega_0 \text{ (Resonanz Q251).} \end{cases} \end{aligned}}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

Anfangswerte $u(t_0)$ und $\dot{u}(t_0)$ können beliebig vorgegeben werden:
Sie legen die freien Konstanten c_1, c_2 eindeutig fest (und umgekehrt).

Freie und erzwungene harmonische Schwingung

Typische Beispiele: Bei **schwacher Dämpfung** $0 < \delta < \omega_0$ gilt

$$\boxed{u(t) = \underbrace{A\cos(\omega_1 t - \varphi)}_{\text{periodische Lösung}} + \underbrace{\mathrm{e}^{-\delta t}\left[c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)\right]}_{\text{Einschwingvorgang} \to 0 \text{ für } t \to \infty}.}$$

Nach Einschwingzeit sehen wir nur noch die periodische Lösung u_0:
Das System reagiert mit derselben Frequenz ω_1 wie die Anregung,
mit konstanter Amplitude A und Phasenverschiebung φ wie berechnet.

Für $\omega_1 \to 0$ gilt $A \to 1/\omega_0^2$: Niedrige Frequenzen werden gedämpft.
Für $\omega_1 \to \infty$ gilt $A \to 0$: Hohe Frequenzen werden verschluckt.

Der Sonderfall $\delta = 0$ und $\omega_1 = \omega_0$ führt zur **Resonanz(katastrophe)**:

$$\boxed{u(t) = \underbrace{\frac{at}{2\omega_0}\sin(\omega_0 t)}_{\text{Amplitude wächst unbeschränkt}} + \underbrace{c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t)}_{\text{periodisch, insbesondere beschränkt}}}$$

☺ Manchmal ist genau dies erwünscht, etwa beim Radioempfang.
Mit unseren Techniken lösen Sie alle Fälle vollständig und explizit.

Freie und erzwungene harmonische Schwingung

Die allgemeine Lösung / Schwingung $u : I \to \mathbb{R}$ ist die **Überlagerung** einer inhomogenen Lösung / **erzwungenen Schwingung** u_0 und einer homogenen Lösung / **freien Schwingung** $c_1 u_1 + c_2 u_2$.

Die Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ergeben sich aus Anfangsdaten $u(t_0), \dot{u}(t_0)$.
Bei Dämpfung $\delta > 0$ klingen $u_1(t) \to 0$ und $u_2(t) \to 0$ exponentiell ab.
Der Einfluss der Startwerte ist nach gewisser **Einschwingzeit** kaum noch spürbar, bestehen bleibt schließlich nur die **periodische Lösung** u_0.

Im dämpfungsfreien Fall $\delta = 0$ klingen die freien Schwingungen $u_1(t) = \cos(\omega_0 t)$ und $u_2(t) = \sin(\omega_0 t)$ nicht ab. Zudem führt eine äußere Anregung mit Frequenz $\omega_1 = \omega_0$ zur **Resonanzkatastrophe**:
Die Amplitude der Schwingung wächst (theoretisch) unbegrenzt.

Für **praktische Zwecke** gilt dies bereits für $\delta \approx 0$: Die Schwingungen u_1, u_2 klingen sehr langsam ab, bei realistischer Beobachtungsdauer sind Dämpfungsverluste kaum wahrnehmbar. Bei Anregung mit $\omega_1 \approx \omega_0$ kommt es zu sehr starker Resonanz, die Amplitude der erzwungenen Schwingung wächst schließlich über die Belastbarkeit des Materials.

Warum zelebriere ich dieses Beispiel so ausführlich?

Q257 Erläuterung

Aus rein mathematischer Sicht ist die obige Gleichung des harmonischen Oszillators lediglich ein einfaches Beispiel unserer allgemeinen Theorie. Dennoch haben wir gute Gründe, dies hier gebührend zu feiern:

☺ Phänomene von Schwingungen und Resonanzen treten auch im Alltag sehr häufig auf: Achten Sie darauf und lernen Sie zu staunen!

☺ Die Frage und die Antwort sind anschaulich, motivierend und intuitiv: Anders als bei anderen Gleichungen können Sie die Lösungen spüren!

☺ In zahlreichen naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen ist der harmonische Oszillator zentrales Modell und leuchtendes Vorbild.

☺ In embryonaler Form enthält das Beispiel alle Schwierigkeiten und Schönheiten der allgemeinen Theorie linearer Differentialgleichungen.

☺ Insbesondere zeigt es die Eleganz und geradezu die Notwendigkeit der komplexen Zahlen: Erst über $\mathbb{C}$ wird die Sachlage klar und einfach.

☺ Selbst einfache Beispiele entfalten eine beachtliche Komplexität. Erst mit der zugrundeliegenden Theorie verschaffen wir uns Überblick.

Warum sind Existenz und Eindeutigkeit so wichtig?

Q258 Erläuterung

In der Geschichte der Mathematik wurde das Problem der *Existenz und Eindeutigkeit* von Lösungen erst erstaunlich spät entdeckt… und gelöst.

Im 17. Jahrhundert entwickeln Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) und Isaac Newton (1642–1726) und andere die Infinitesimalrechnung. Aus physikalisch–geometrischen Anwendungen treten dabei unmittelbar Differentialgleichungen in den Fokus des mathematischen Interesses. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen standen dabei nie in Zweifel. Umso schockierender waren daher die ersten Gegenbeispiele von Gleichungen mit mehrdeutigen Lösungen oder ganz ohne Lösung.

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) und seine Nachfolger begründeten die bis heute übliche mathematische Strenge. Existiert eine Lösung? Erst dann lohnt sich überhaupt danach zu suchen. Ist sie eindeutig? Haben wir eine, so brauchen wir nicht nach weiteren zu fahnden.

⚠ Erst nach Klärung dieser grundlegenden Fragen können wir uns weiteren Eigenschaften und numerischen Näherungen zuwenden.

Abstrakt bedeutet… vielseitig anwendbar!

Q259 Erläuterung

Das einleitende Beispiel einer mechanischen Schwingung ist besonders anschaulich und sinnlich direkt zugänglich. Wir alle haben dies schon als Kinder spielerisch gelernt: beim Schaukeln, Seilspringen, usw.

Der elektrische Schwingkreis ist weniger sinnlich-anschaulich, doch er führt zu genau derselben Differentialgleichung! Dieselben Gleichungen und Lösungsmethoden lassen sich auf zahlreiche Probleme anwenden, die zunächst sehr verschieden anmuten, aber doch einen gemeinsamen Kern haben. Das ist das Gütesiegel für Effizienz und Denkökonomie!

Wir bestaunen und bewundern hier ein Paradebeispiel für die viel zitierte Abstraktion in der Mathematik: Sie ist kein Schimpfwort für „fern jeder Anwendung“, sondern eine Auszeichnung für „vielseitig anwendbar“. Zumindest sollte dies meiner Ansicht nach so sein. Achten Sie darauf, wenn jemand über „abstrakten Quatsch“ schimpft, vielleicht Sie selbst: Meist ist dies weniger eine objektive Aussage über den Gegenstand, sondern vielmehr das offene Bekenntnis selbstgefälliger Ignoranz.

Grundlegende Theorie, große praktische Wirkung

Q260 Erläuterung

So einfach der elektrische Schwingkreis auch erscheinen mag, er hat doch phantastische Anwendungen hervorgebracht wie den Funkverkehr, engl. *radio communication*, die unser heutiges Leben nachhaltig prägen.

Guglielmo Marconi (1874–1937) war ein italienischer Erfinder und Unternehmer. Als erstem gelangen ihm drahtlose Verbindungen über größere Entfernungen, 1903 die erste transatlantische Funkverbindung: Grußbotschaften zwischen König Edward VII. in England und Präsident Theodore Roosevelt in den USA. Marconi begründete so unter anderem den Seefunkverkehr und bekam für seine Verdienste im April 1912 eine kostenlose Passage für die Jungfernfahrt der RMS Titanic angeboten; da er jedoch Schriftverkehr erledigen wollte, nahm er drei Tage früher die RMS Lusitania, da es an Bord dieses Schiffs eine Stenografin gab. Im Jahre 1930 gründete er gemeinsam mit Papst Pius XI. Radio Vatikan.

Für seine praktischen Arbeiten erhielt er 1909 den Nobelpreis für Physik, zusammen mit Ferdinand Braun, der die theoretischen Grundlagen dazu erarbeitete. (Mehr unter `de.wikipedia.org/wiki/Guglielmo_Marconi`)

Affin-lineare Struktur des Lösungsraums

Q261

Satz Q2H: Struktursatz für lineare Differentialgleichungen

Gegeben seien $P \in \mathbb{K}[X]^1_n$ und $b : I \to \mathbb{K}$ stetig auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Wir untersuchen die Lösungsmenge $L = \{u \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{K}) \mid P(\partial)\,u = b\}$.

(0) **Globale Existenz und Eindeutigkeit**: Zu jedem Anfangsdatum $(t_0, v_0, \dots, v_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung $u \in L$ mit $u(t_0) = v_0$, ..., $u^{(n-1)}(t_0) = v_{n-1}$. Wir haben also die Bijektion

$$\boxed{\Psi_{t_0} : L \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n : u \mapsto (u(t_0), u'(t_0), \dots, u^{(n-1)}(t_0)).}$$

(1) $L_0 = \{u \mid P(\partial)\,u = 0\}$ ist ein **$\mathbb{K}$–linearer URaum** der Dimension n. Wir finden ein **Fundamentalsystem** $u_1, \dots, u_n \in L_0$, etwa dank Q2F:

$$\boxed{L_0 = \{c_1u_1 + \dots + c_nu_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\}^! \cong \mathbb{K}^n}$$

(2) $L = \{u \mid P(\partial)\,u = b\}$ ist ein **$\mathbb{K}$–affiner URaum** der Dimension n. Für jede **Partikulärlösung** $u_0 \in L$, etwa dank Q2I/Q2J, gilt demnach:

$$\boxed{L = u_0 + L_0 = \{u_0 + c_1u_1 + \dots + c_nu_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\}^!}$$

Affin-lineare Struktur des Lösungsraums

Q262
Ausführung

☺ Dieser Struktursatz gibt uns einen bequemen und präzisen Überblick! Sie kennen diese Strukturaussagen von linearen Gleichungssystemen: „Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“ Diese gilt allgemein für lineare Abbildungen, hier $P(\partial) : \mathscr{C}^n \to \mathscr{C}^0$.

⚠ Die Menge $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{K})$ aller n-mal stetig diff'baren Funktionen ist ein $\mathbb{K}$–Vektorraum. Allerdings ist er unendlich-dimensional; daher greifen die so erfolgreichen Methoden der Matrizenrechnung wie etwa der Gauß–Algorithmus hier nicht. Wir müssen es anders anpacken.

☺ Glücklicherweise ist unser Lösungsraum L endlich-dimensional, und wir können allgemein die Dimension $\dim_{\mathbb{K}}(L_0) = n$ bestimmen. Bei jeder konkreten Berechnung wissen wir daher genau, wie viele Lösungen wir suchen müssen und wann wir alle gefunden haben!

☺ Die Dimension $\dim_{\mathbb{K}}(L_0) = n$ besagt $L_0 \cong \mathbb{K}^n$. Darüber hinaus sind die konkreten Isomorphismen interessant, insbesondere $\Psi_{t_0} : L \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n$. Zu theoretischem Verständnis und praktischer Lösung von DGleichungen arbeiten Analysis und Lineare Algebra auch hier wunderbar zusammen.

Affin-lineare Struktur des Lösungsraums

Q263
Ausführung

☺ In der Analysis lernen Sie diesen Satz von anderer Seite kennen, meist über den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf. Wir kommen hier (beinahe) ausschließlich mit Linearer Algebra aus, benötigen lediglich die Exponentialfunktion (Q2F) und die Greensche Lösungsformel (Q2J). Auch das ist raffiniert, prüfen Sie die Argumente!

Als motivierenden *Blick in die Zukunft* bewerbe ich dynamische Systeme, wunderschöne Mathematik mit starken Anwendungen in Physik und Informatik, Ingenieurwesen und Ökonomik, ... alles ist dynamisch... und als Mathematiker:in wollen Sie in die Zukunft schauen...

Diskrete Dynamik, n-schrittige Rekursion: Gesucht ist $u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ mit

$$u(t+n) = f(t, u(t), \dots, u(t+n-1))$$

für alle Zeitpunkte $t \in \mathbb{N}$ und die gegebene Dynamik $f : \mathbb{N} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$. Zum Start $(u(0), u(1), \dots, u(n-1)) \in \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung u. Lineare Dynamik bedeutet $P(s)\,u = b$ mit $P \in \mathbb{K}[X]^1_n$ und $b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, homogen $P(s)\,u = 0$. Dies lösen wir durch Hauptfolgen (Q2C).

Affin-lineare Struktur des Lösungsraums

Q264
Ausführung

Differentielle Dynamik hier als Differentialgleichung n-ter Ordnung: Gesucht sind n-mal stetig differenzierbare Funktionen $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{K}$ mit

$$u^{(n)}(t) = f(t, u(t), \dots, u^{(n-1)}(t))$$

für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und die gegebene Dynamik $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$. Zum Start $(u(0), u'(0), \dots, u^{(n-1)}(0)) \in \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung u. Lineare Dynamik bedeutet $P(\partial)\,u = b$ mit $P \in \mathbb{K}[X]^1_n$ und $b : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{K}$, homogen $P(\partial)\,u = 0$. Dies lösen wir durch Hauptfunktionen (Q2F).

☺ Diskrete und differentielle Dynamik verhalten sich erfreulich ähnlich. Das ist willkommen für die Anschauung und gegenseitiges Verständnis. Die Numerik nutzt Diskretisierung zur rechnerischen Vereinfachung, die Analysis nutzt umgekehrt den Limes $\Delta t \to 0$ zur Idealisierung.

☺ In beiden Fällen lassen sich die *linearen* Gleichungen besonders schön und explizit lösen und der gesamte Lösungsraum perfekt strukturieren. Zum Beweis des Struktursatzes Q2H fehlt uns nur noch die Konstruktion einer Lösung u zu $P(\partial)\,u = b$, speziell Q2I oder allgemein Q2J.

Lösungsformel für exponentielle rechte Seiten

Satz Q21: Lösungsformel für exponentielle rechte Seiten

Sei $P \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$\boxed{P(\partial)\, u(t) = \mathrm{e}^{\mu t}\,.}$$

(0) Gilt $P(\mu) \neq 0$, so haben wir die **Eigenlösung**

$$\boxed{u_0(t) = \mathrm{e}^{\mu t}/P(\mu).}$$

(1) Ist μ eine k-fache Nullstelle des Polynoms P, so sprechen wir von **k-facher Resonanz** und erhalten die **Hauptlösung**

$$\boxed{u_0(t) = \mathrm{e}^{\mu t}\, t^k / P^{(k)}(\mu).}$$

(2) Dank **Superposition** lösen wir damit auch rechte Seiten der Form

$$\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t) = \tfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{i}\omega)t} + \mathrm{e}^{(\sigma-\mathrm{i}\omega)t}\right],$$
$$\mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t) = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{i}\omega)t} - \mathrm{e}^{(\sigma-\mathrm{i}\omega)t}\right].$$

Lösungsformel für exponentielle rechte Seiten

Aufgabe: Rechnen Sie die Lösungsformeln des Satzes sorgsam nach.

Beweis: (0) Wir haben $\partial^k\, \mathrm{e}^{\mu t} = \mu^k\, \mathrm{e}^{\mu t}$ und somit $P(\partial)\, \mathrm{e}^{\mu t} = P(\mu)\, \mathrm{e}^{\mu t}$. Im Falle $P(\mu) \neq 0$ erhalten wir die Eigenlösung $u_0(t) = \mathrm{e}^{\mu t}/P(\mu)$.

(1) Wir zerlegen $P(X) = \tilde{P}(X)(X-\mu)^k$ mit $\tilde{P}(\mu) \neq 0$ und erhalten

$$P(\partial)\left[\mathrm{e}^{\mu t}\, t^k\right] = \tilde{P}(\partial)(\partial-\mu)^k\left[\mathrm{e}^{\mu t}\, t^k\right] = \tilde{P}(\partial)\, \mathrm{e}^{\mu t}\, k! = \tilde{P}(\mu)\, \mathrm{e}^{\mu t}\, k!$$
$$P^{(k)}(t) = \textstyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \partial^j \tilde{P}(t) \cdot \partial^{k-j}(t-\mu)^k \quad\Longrightarrow\quad P^{(k)}(\mu) = \tilde{P}(\mu)\, k!$$

Wir erhalten so die Hauptlösung $u_0(t) = \mathrm{e}^{\mu t}\, t^k / P^{(k)}(\mu)$.

(2) Dank (0) und (1) finden wir Lösungen $u_\pm$ mit $P(\partial)\, u_\pm(t) = \mathrm{e}^{(\sigma\pm\mathrm{i}\omega)t}$. Dank Linearität des Operators $P(\partial)$ erhalten wir

$$P(\partial)\, \tfrac{1}{2}\left[u_+(t) + u_-(t)\right] = \tfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{i}\omega)t} + \mathrm{e}^{(\sigma-\mathrm{i}\omega)t}\right] = \mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t),$$
$$P(\partial)\, \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\left[u_+(t) - u_-(t)\right] = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{i}\omega)t} - \mathrm{e}^{(\sigma-\mathrm{i}\omega)t}\right] = \mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t).$$

☺ All diese rechten Seiten können wir somit leicht und explizit lösen!

Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten

Satz Q21: Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten

Seien $P, R \in \mathbb{K}[X]$ Polynome. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$\boxed{P(\partial)\, u(t) = \mathrm{e}^{\mu t}\, R(t).}$$

(3) Ist μ eine k-fache Nullstelle von P, so existiert eine Lösung

$$\boxed{u_0(t) = \mathrm{e}^{\mu t}\, t^k\, Q(t)}$$

mit einem eindeutigen Polynom $Q \in \mathbb{K}[X]$ vom Grad $\deg Q = \deg R$.

(4) Dieser Ansatz gelingt ebenso für rechte Seiten $\mathrm{e}^{0t} R(t)$ sowie

$$\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t)\, R(t) = \tfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{i}\omega)t} + \mathrm{e}^{(\sigma-\mathrm{i}\omega)t}\right] R(t),$$
$$\mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t)\, R(t) = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{i}\omega)t} - \mathrm{e}^{(\sigma-\mathrm{i}\omega)t}\right] R(t).$$

☺ Wir berechnen Q leicht durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich. Hier ist $k = 0$ erlaubt; bei $k > 0$ sprechen wir von k-facher **Resonanz**.

Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten

Beweis: Der Satz erklärt ein Lösungsrezept: „Wenn das Problem soundso gegeben ist, dann sieht die Lösung soundso aus.“ Warum gelingt das?

Es gilt $\partial[\mathrm{e}^{\mu t}\, g(t)] = \mathrm{e}^{\mu t}(\partial+\mu)g(t)$, also $P(\partial)[\mathrm{e}^{\mu t}\, g(t)] = \mathrm{e}^{\mu t}\, P(\partial+\mu)g(t)$. Nach Voraussetzung gilt $P(X) = \tilde{P}(X)\,(X-\mu)^k$ mit $\tilde{P}(\mu) \neq 0$, also $P(\partial)\left[\mathrm{e}^{\mu t}\, t^k\, Q(t)\right] = \mathrm{e}^{\mu t}\, P(\partial+\mu)\left[t^k\, Q(t)\right] = \mathrm{e}^{\mu t}\, \tilde{P}(\partial+\mu)\, \partial^k\left[t^k\, Q(t)\right]$. Zunächst senkt ∂^k den Grad um k, sodann erhält $\tilde{P}(\partial+\mu)$ den Grad.

$$\partial^k : \quad t^k\, \mathbb{K}[t]_{<n} \rightsquigarrow \quad \mathbb{K}[t]_{<n},$$
$$P(\partial) : \mathrm{e}^{\mu t}\, t^k\, \mathbb{K}[t]_{<n} \rightsquigarrow \mathrm{e}^{\mu t}\, \mathbb{K}[t]_{<n}.$$

Für unsere Differentialgleichung bedeutet das ausführlich folgendes: Zu jedem gegebenen Polynom $R(t) = r_0 + r_1 t + \cdots + r_{n-1} t^{n-1} \in \mathbb{K}[t]_{<n}$ existiert genau ein Polynom $Q(t) = q_0 + q_1 t + \ldots q_{n-1} t^{n-1} \in \mathbb{K}[t]_{<n}$, das unsere Differentialgleichung $P(\partial)\left[\mathrm{e}^{\mu t}\, t^k\, Q(t)\right] = \mathrm{e}^{\mu t}\, R(t)$ löst. $\boxed{\text{QED}}$

☺ Das ist die vertraute Wirkung der Ableitung auf Hauptfunktionen.
☺ Die praktische Berechnung gelingt durch Koeffizientenvergleich.

Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten

Satz Q2J: Greensche Fundamentallösung und Lösungsformel

Sei $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]_n^1$ ein Polynom und $b : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{K}$ stetig. Zu lösen ist die Differentialgleichung

$$\boxed{P(\partial)\, x(t) = b(t).}$$

Die homogene Gleichung $P(\partial)\, u = 0$ hat genau eine Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ mit den Anfangswerten $u(0) = \cdots = u^{(n-2)}(0) = 0$ und $u^{(n-1)}(0) = 1$.

Wir nennen u die **Greensche Fundamentallösung**. Hieraus erhalten wir eine Lösung der inhomogenen Gleichung $P(\partial)\, x = b$ durch **Faltung**:

$$\boxed{x(t) = \textstyle\int_{\tau=t_0}^{t} u(t-\tau)\, b(\tau)\, \mathrm{d}\tau.}$$

Genauer ist $x : I \to \mathbb{K}$ die eindeutige Lösung der Gleichung $P(\partial)\, x = b$ mit verschwindenden Anfangswerten $x(t_0) = \cdots = x^{(n-1)}(t_0) = 0$.

☺ Weitere erhalten wir durch Addition homogener Lösungen (Q2H).

Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten

Aufgabe: Zu lösen sei, für $-\pi/2 < t < \pi/2$, die Differentialgleichung

$$\boxed{\ddot{x}(t) + x(t) = \frac{1}{\cos t} \quad \text{mit} \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.}$$

Lösung: Die allgemeine homogene Lösung ist $u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, Fundamentallösung mit $u(0) = 0$ und $\dot{u}(0) = 1$ ist $u(t) = \sin t$. Wir falten:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{\tau=0}^{t} \sin(t-\tau) \frac{1}{\cos\tau}\, \mathrm{d}\tau = \int_{\tau=0}^{t} (\sin t \cos\tau - \cos t \sin\tau) \frac{1}{\cos\tau}\, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{\tau=0}^{t} \sin t - \cos t \cdot \frac{\sin\tau}{\cos\tau}\, \mathrm{d}\tau = \Big[\tau \sin t + \cos t \cdot \ln\cos\tau\Big]_{\tau=0}^{t} \\ &= t \sin t + \cos t \cdot \ln\cos t \end{aligned}$$

☺ Die Probe ist wie immer leicht und lohnend! Geduldig ausrechnen:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sin t + t\cos t - \sin t \cdot \ln\cos t - \sin t \\ \ddot{x}(t) &= \cos t - t \sin t - \cos t \cdot \ln\cos t + \sin(t)^2/\cos t \end{aligned}$$

Einsetzen: $\ddot{x}(t) + x(t) = \cos t + \sin(t)^2/\cos t = 1/\cos t$. Alles passt!

Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten

Aufgabe: Beweisen Sie Greens Lösungsformel durch Nachrechnen.

Lösung: (a) Für die Ableitung nutzen wir die Leibniz–Regel:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\tau=t_0}^{h(t)} f(t,\tau)\, \mathrm{d}\tau = h'(t)\, f(t, h(t)) + \int_{\tau=t_0}^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,\tau)\, \mathrm{d}\tau}$$

Angewendet auf $h(t) = t$ und $f(t,\tau) = u(t-\tau)\, b(\tau)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} x'(t) &= \underbrace{u(0)}_{=0}\, b(t) + \int_{\tau=t_0}^{t} u'(t-\tau)\, b(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \\ x''(t) &= \underbrace{u'(0)}_{=0}\, b(t) + \int_{\tau=t_0}^{t} u''(t-\tau)\, b(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \\ &\vdots \\ x^{(n-1)}(t) &= \underbrace{u^{(n-2)}(0)}_{=0}\, b(t) + \int_{\tau=t_0}^{t} u^{(n-1)}(t-\tau)\, b(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \\ x^{(n)}(t) &= \underbrace{u^{(n-1)}(0)}_{=1}\, b(t) + \int_{\tau=t_0}^{t} u^{(n)}(t-\tau)\, b(\tau)\, \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten

Einsetzen dieser Ableitungen in unsere Differentialgleichung ergibt:

$$\begin{aligned} & x^{(n)}(t) + a_{n-1}\, x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\, x'(t) + a_0\, x(t) \\ &= b(t) + \int_{\tau=t_0}^{t} \underbrace{\big[u^{(n)} + a_{n-1}\, u^{(n-1)} + \cdots + a_1\, u' + a_0\, u\big]}_{=\,0,\ \text{da } u \text{ eine Lösung der homogenen DG ist}}(t-\tau)\, b(\tau)\, \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

Somit ist x eine Lösung der inhomogenen Gleichung $P(\partial)\, x = b$.

(b) Die Anfangswerte $x(t_0) = x'(t_0) = \cdots = x^{(n-2)}(t_0) = x^{(n-1)}(t_0) = 0$ folgen sofort aus der Berechnung der Ableitungen (a) im Punkt $t = t_0$.

Anschauliche Erklärung wie sie in der Physik beliebt ist: Für alle $t < 0$ sei das System in seiner Ruhelage $u(t) = 0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt $u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-2)}(0) = 0$, und es wird abrupt beschleunigt durch $u^{(n-1)}(0) = 1$. Man stellt sich dies als einen „Hammerschlag“ vor. Das System vollführt als sogenannte **Impulsantwort** die Bewegung $u(t)$ für alle Zeit $t \geq 0$.

Entsprechend verschoben ist $u(t-\tau)\, b(\tau)$ ein Hammerschlag zum Zeitpunkt τ mit Stärke $b(\tau)$. Das Integral über τ ist die Summe dieser Beiträge: Wir nutzen **Superposition** dank Linearität und erhalten so $x(t) = \int_{\tau=t_0}^{t} u(t-\tau)\, b(\tau)\, \mathrm{d}\tau$ als Summe kleiner Hammerschläge $b(\tau)\, \mathrm{d}\tau$. Diese Intuition liefert tatsächlich eine korrekte Lösung: Wir haben es nachgerechnet!

Was sind Differentialgleichungssysteme?

Q301

In vielen Anwendungen geht es um Größen $x_1(t), \dots, x_n(t) \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, deren Entwicklung durch **Differentialgleichungen** beschrieben wird:

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \quad\vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{cases}$$

Mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $f = (f_1, \dots, f_n)$ bündeln wir dies prägnant und übersichtlich zu einer **vektorwertigen Differentialgleichung**:

$$\boxed{x'(t) = f(t, x(t))}$$

Gegeben ist als rechte Seite die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \to \mathbb{K}^n$ auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$, zumindest mit nicht-leerem Inneren $\mathring{G}$.

Gesucht sind alle differenzierbaren Funktionen $x : I \to \mathbb{K}^n$ auf einem (maximalen) Intervall $I \subset \mathbb{R}$, die zunächst die Bedingung $(t, x(t)) \in G$ und dort die ersehnte Gleichung $x'(t) = f(t, x(t))$ für alle $t \in I$ erfüllen.

Was sind Differentialgleichungssysteme?

Q302
Ausführung

Dies führt uns zu den Grundfragen der Differentialgleichungen:

- Wie viele Lösungen gibt es? keine, eine, viele?
- Wie finden wir mindestens eine Lösung? gar alle?

Wir benötigen wie immer mehrere sich ergänzende Lösungsmethoden:

- Leistungsstarke Theorie als Grundlage: Existenz, Eindeutigkeit, ...
- Konstruktionsverfahren für Lösungen: möglichst explizit, effizient, ...
- Exakte Lösung spezieller Gleichungen, sonst numerische Näherung, ...

Bei einer **autonomen Differentialgleichung** hängt f nicht von t ab,

$$x'(t) = f(x(t))$$

Wir können autonomisieren durch Einführung von $x_0 = t$ und $f_0 = 1$.

Zeitinvarianz: Bei einer autonomen Differentialgleichung $x' = f(x)$ ist mit jeder Lösung $x : I \to \mathbb{K}^n$ auch die um $\tau \in \mathbb{R}$ verschobene Funktion $\tilde{x} : \tilde{I} \to \mathbb{K}^n : \tilde{x}(t) = x(t - \tau)$ auf dem Intervall $\tilde{I} = I + \tau$ eine Lösung.

Reduktion eines DGSystems auf erste Ordnung

Q303
Erläuterung

☺ Differentialgleichungen erster Ordnung sind universell: Wir können jede DG n-ter Ordnung auf ein DGSystem erster Ordnung reduzieren!

Reduktion: Vorgelegt sei eine **Differentialgleichung n-ter Ordnung**:

(1) $$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$$

Diese können wir umformulieren in ein **DGSystem erster Ordnung**:

(2) $$\begin{cases} x_0'(t) &= x_1(t) \\ x_1'(t) &= x_2(t) \\ &\vdots \\ x_{n-2}'(t) &= x_{n-1}(t) \\ x_{n-1}'(t) &= f(t, x_0(t), x_1(t), \dots, x_{n-1}(t)) \end{cases}$$

Übung: Rechnen Sie diesen genial-einfachen Trick sorgsam nach:
Löst $x : I \to \mathbb{K}$ die DG (1), so löst $(x, x', \dots, x^{(n-1)})$ das DGSystem (2).
Löst $(x_0, \dots, x_{n-1}) : I \to \mathbb{K}^n$ das DGSystem (2), so löst x_0 die DG (1).

Einfachste DGSysteme: entkoppelte Gleichungen

Q304
Ausführung

☺ Es genügt daher, **DGSysteme erster Ordnung** zu untersuchen!
Diese Formulierung ist einfacher und erlaubt starke Werkzeuge:
In jeder Dimension n gilt **Existenz & Eindeutigkeit & Stabilität** dank des Satzes von Picard–Lindelöf, den Sie in der Analysis kennenlernen.

☺ Der einfachste Fall sind **entkoppelte Gleichungen**:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(t, x_1(t)) \\ x_2'(t) &= f_2(t, x_2(t)) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= f_n(t, x_n(t)) \end{aligned}$$

Hierzu lösen wir n eindimensionale Differentialgleichungen.

⚠ Im Allgemeinen sind die gegebenen Gleichungen aber gekoppelt.
Für dieses Problem benötigen wir daher passende Rechenmethoden.
Hierzu nutzen wir die Werkzeuge der Analysis und der Linearen Algebra, insbesondere Eigen- und Hauptvektoren, wie wir gleich sehen werden.

Newtons Himmelsmechanik: die Bewegungsgleichung

Q305

Aufgabe: Nennen Sie die Bewegungsgleichung für Körper $k = 1, \dots, n$ mit Masse $m_k > 0$, Position $u_k(t) \in \mathbb{R}^3$ und Geschwindigkeit $v_k(t) \in \mathbb{R}^3$.

Lösung: Newtons Gravitationsgesetz ergibt die Differentialgleichungen

$$\boxed{\dot{u}_k \overset{(0)}{=} v_k, \quad \dot{v}_k \overset{(1)}{=} f_k(u) \overset{(2)}{=} \textstyle\sum_{j \neq k} \gamma m_j (u_j - u_k)/|u_j - u_k|^3.}$$

Vorgegeben sind die Anfangssdaten $u_k(0)$ und $v_k(0)$ zur Zeit $t = 0$.
Als Lösung gesucht ist die Bewegung $(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) : [0, T[\to \mathbb{R}^{6n}$.

Erlaubt ein so komplexes System immer genau eine Lösung? Ja, das ist der zentrale ∃&E-Satz! Kollision oder Expulsion nach ∞ sind möglich: Eventuell existiert die Lösung nur für eine kurze Zeit $T > 0$. Für manche Startwerte sind Lösungen periodisch, oder beinahe: Zu unserem Glück!

- 🙂 Den Fall $n = 2$ lösen Kegelschnitte: Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln.
- ☹ Für $n \geq 3$ lässt sich dieses DGSystem i.A. nicht geschlossen lösen!
- 🙂 Euler–Verfahren: diskrete Zeitschritte $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$,

$$\begin{aligned} u_k(t_{i+1}) &\approx u_k(t_i) + v_k(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i), \\ v_k(t_{i+1}) &\approx v_k(t_i) + f_k(u) \cdot (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Newtons Himmelsmechanik: der historische Triumph

Q306
Erläuterung

Das Verständnis der **Himmelsmechanik** markiert den Übergang vom Mittelalter zur Neuzeit.

Die Beobachtung des Nachthimmels und seiner Sterne fasziniert uns Menschen seit Alters her. Neben den zahlreichen „Fixsternen“ (weit entfernte Sterne) erkennen wir einige „Wandelsterne“ (Planeten unseres Sonnensystems). Ihre Bewegung lässt Regeln erahnen, doch für Wandelsterne scheinen diese zunächst kompliziert und verwirrend. Sie quantitativ zu erfassen und gründlich zu verstehen, ist einer der großen Triumphe menschlicher Neugier und systematischer Forschung!

Von der Erde besehen scheinen sich alle Sterne um uns zu drehen, doch die exakte Bewegung der Planeten erweist sich als schrecklich kompliziert. Kopernikus' heliozentrisches Modell (1543) ist einfacher, daher nützlicher: Die Bahnen der Planeten um die Sonne erweisen sich recht genau als Ellipsen. Diese Koordinatentransformation hat enorme Wirkung und schreibt Weltgeschichte!

Aus Tycho Brahes präzisen **Beobachtungsdaten** leitete Johannes Kepler drei Gesetze ab, die die Ellipsenbewegung der Planeten um die Sonne gut *beschreiben*. Eine *Erklärung* der Bewegungen durch einheitliche physikalische Prinzipien gelang erst Isaac Newton 1686 mit seinen Principia!

Die moderne Naturwissenschaft beginnt mit Newtons Formulierung der drei Bewegungsgesetze, des universellen Gravitationsgesetzes und seiner Lösung des Zwei-Körper-Problems. Mit einer Handvoll physikalischer Prinzipien und den passenden mathematischen Werkzeugen konnte er die Keplerschen Regeln *erklären*, ja *herleiten*. Newtons revolutionäre Idee: Überall im Universum gelten dieselben Gesetze! Newtons Mechanik erklärt die Schwerkraft hier auf Erden ebenso wie außerirdische Phänomene: den Umlauf der Planeten um die Sonne und des Mondes um die Erde, sogar die Gezeiten unserer Meere, ebenso die Coriolis–Kraft und das Foucaultsche Pendel.

Newtons Himmelsmechanik: die Herausforderung

Q307
Ausführung

Allein schon das obige Differentialgleichungssystem zu formulieren, ist eine Meisterleistung der Mathematik und Physik der Neuzeit. Wir nennen dies **Himmelsmechanik** und sind völlig zu Recht stolz auf sie: Mathematische Sprache und Werkzeuge erleuchten die gesamte Entwicklung und ebnen den Weg von Beobachtung über Erklärung und Berechnung bis zur Raumfahrt.

Auch nach über 300 Jahren sind Newtons Gleichungen immer noch nützlich wie am ersten Tag! Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen. Solide mathematische Arbeit hat eine extrem lange Wirksamkeit. Daher lohnt es sich auch für Sie heute, in mathematische Grundlagen zu investieren und diese wirksamen Werkzeuge zu erlernen, anzuwenden und fortzuführen.

Die drei Fälle $n = 1$ und $n = 2$ sowie $n \geq 3$ sind sehr verschieden! Für einen einzigen Körper, also im Falle $n = 1$, enthalten Newtons Gleichungen $\dot{u}_1 = v_1$ und $\dot{v}_1 = 0$ keine gravitative Wechselwirkung. Ihre Lösung ist eine **geradlinige Bewegung**, nämlich $u_1(t) = u_1(0) + v_1 t$.

Ein Zwei-Körper-System ($n = 2$) wie Sonne-Erde oder Erde-Mond ist bereits ausgesprochen interessant. Newton konnte seine Gleichungen hier gut lösen, sie ergeben Ellipsenbahnen und erklären die Keplerschen Gesetze. Allgemeiner sind auch Parabeln und Hyperbeln als Lösungen möglich, je nach Anfangsdaten $u_1(0), v_1(0), u_2(0), v_2(0)$. In allen Fällen gelingt die Lösung hier noch in geschlossener Form. Man nennt ein solches System **vollständig integrabel**. ??

Newton betrachtete anschließend das Drei-Körper-System Sonne-Erde-Mond. Dies entzog sich jedoch hartnäckig einer Lösung und wurde zum berühmtesten offenen Problem der Mathematik. Das **Drei-Körper-Problem** gilt bis heute als eines der schwierigsten Probleme, die zahlreichen Anstrengungen zu seiner Lösung erfordern und erzeugen immer wieder wichtige neue Methoden.

Newtons Himmelsmechanik: mögliche Lösungsmethoden

Q308
Ausführung

Für künstliche Satelliten wird das **zirkuläre restringierte Drei-Körper-Problem** (CR3BP) sehr ausgiebig untersucht: Zwei massereiche Körper umrunden sich kreisförmig, während der dritte Körper nahezu masselos ist. Hier findet man die berühmten fünf Lagrange–Punkte. ??

Nur wenige und sehr spezielle Sonderfälle des n–Körper-Problems sind geschlossen lösbar. Auch diese haben ihren eigenen Reiz: Seit 1994 wurden zahlreiche **Choreographien** entdeckt, in denen n Körper symmetrisch angeordnet werden und dann periodische Bahnen durchlaufen. Für generische Anfangsdaten hingegen ist die Bewegung **chaotisch** und kann nur numerisch annähernd berechnet werden. ▶ *Solving the Three Body Problem*, `youtu.be/et7XvBenEo8`.

Zum Kontrast untersuchen und vergleichen wir zwei klassische Anwendungen der Mechanik: Einerseits gekoppelte **lineare Systeme** wie harmonische Oszillatoren Q313 Q373, andererseits Planetenbewegung und ähnliche **nicht-lineare Systeme**. Nicht-lineare Systeme sind schwierig und verhalten sich oft chaotisch. Lineare Systeme sind besonders gutartig und einfach zu lösen. Daher sollten Sie Linearität erkennen und wertschätzen, verstehen und nutzen lernen!

Auch nicht-lineare Systeme lassen sich mitunter gut lösen, wie einfache Beispiele zeigen. Dies sind aber Ausnahmen und seltene Glücksfälle. Typischerweise sind nicht-lineare Systeme nicht geschlossen lösbar. Dann bleibt uns noch die **numerische Approximation** mit Hilfe geeigneter Näherungsverfahren, z.B. das Euler–Verfahren oder besser gleich das Runge–Kutta–Verfahren. Mehr hierzu erfahren Sie in der Numerik. Aufbauend auf den mathematischen Grundlagen können Sie die Numerik von Differentialgleichungen nutzen und wo nötig vertiefen.

Klassische Grundlagen und aktuelle Anwendungen ergänzen sich wunderbar.

Was sind lineare Differentialgleichungssysteme?

Q309

Definition Q3A: lineares Differentialgleichungssystem über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Jedes **lineare Differentialgleichungssystem** ist von folgender Form:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)\,x_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n(t) + b_1(t) \\ \quad\vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)\,x_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

Gegeben sind hier die **Koeffizienten** $a_{ij} : I \to \mathbb{K}$ und die **rechten Seiten** $b_i : I \to \mathbb{K}$ als stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, gebündelt:

$$\boxed{x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t)}$$

Gesucht sind als **Lösungen** alle Funktionen $x : I \to \mathbb{K}^n$ in $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$, die die Gleichung $x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t)$ in jedem Punkt $t \in I$ erfüllen.

Beim **Anfangswertproblem** ist zudem $x(t_0) = v \in \mathbb{K}^n$ vorgegeben.
Für $b = 0$ erhalten wir die **homogene DGleichung** $x'(t) = A(t)\,x(t)$.

Was sind lineare Differentialgleichungssysteme?

Q310
Erläuterung

Wir nennen $A(t)$ die **Koeffizientenmatrix** oder die **Systemmatrix**.
Die rechte Seite $b(t)$ heißt auch **Inhomogenität** oder **Störterm**.

Unser Ziel ist die Bestimmung (einer Basis) des **Lösungsraums**.
Dazu können wir explizite Lösungsformeln angeben und für wichtige Beispiele ausrechnen. Hierzu benötigen wir geeignete Techniken aus der Analysis, insbesondere die allgegenwärtige Integration.

Lineare Differentialgleichungssysteme mit **konstanten Koeffizienten** sind der allereinfachste Fall: Die Lösung der Gleichung $x'(t) = A\,x(t)$ gelingt uns vollständig bereits mit den Techniken der Linearen Algebra: Wir finden eine Basis des Lösungsraums mit Hilfe der Hauptvektoren einer Jordan–Basis; die Integration tritt dabei in den Hintergrund.

Wir mobilisieren nahezu alle bisherigen Begriffe und Techniken: Vektorraum, Basis, Dimension, lineare Abbildung, Kern und Bild, Darstellung durch Matrizen, Determinante, charakteristisches Polynom, Eigenvektoren und Diagonalform, Hauptvektoren und Jordan–Form.

Reduktion eines linearen DGSystems auf erste Ordnung

Q311
Erläuterung

Zu lösen sei eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung:

(1) $$x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)\,x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)\,x'(t) + a_0(t)\,x(t) + b(t)$$

Diese ist äquivalent zu einem linearen DGSystem erster Ordnung:

(2) $$\begin{cases} x_0' &= \qquad\qquad x_1 \\ &\vdots \\ x_{n-2}' &= \qquad\qquad\qquad x_{n-1} \\ x_{n-1}' &= a_0\,x_0 + a_1\,x_1 \ldots + a_{n-1}\,x_{n-1} + b \end{cases}$$

Das entspricht $x'(t) = A(t)\,x(t) + B(t)$ mit zugehöriger Systemmatrix

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

Beispiel: Wir nutzen dies für gekoppelte Oszillatoren, siehe Q349.

Lineare DGSysteme: entkoppelte Gleichungen

Q312
Erläuterung

☺ Besonders wichtig und gut zu lösen sind lineare DGSysteme $x'(t) = A\,x(t) + b(t)$ mit konstanter Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

☺ Der einfachste Fall sind auch hier **entkoppelte Gleichungen**:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_1\,x_1(t) \\ x_2'(t) &= a_2\,x_2(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_n\,x_n(t) \end{aligned}$$

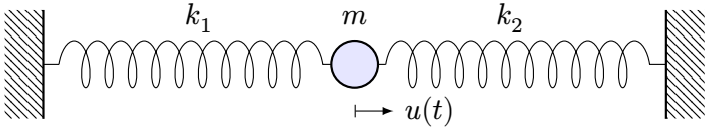
Die Lösungen $x_k(t) = c_k\,\mathrm{e}^{a_k t}$ können wir sofort ausschreiben!

☺ Oft lassen sich komplexe Lösungen $\mathrm{e}^{(\sigma\pm\mathrm{i}\omega)t}$ leichter berechnen und dann in reelle Lösungen $\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t)$ und $\mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t)$ umrechnen.
Wir nutzen dies oben für den harmonischen Oszillator, siehe Q245.

⚠ Im Allgemeinen sind die gegebenen Gleichungen aber gekoppelt.
Für dieses Problem benötigen wir daher passende Rechenmethoden.
Hierzu nutzen wir die Werkzeuge der Analysis und Linearen Algebra!

Der harmonische Oszillator als dynamisches System

Q313 Beispiel



Aufgabe: Formulieren und lösen Sie den harmonischen Oszillator...
(1) als eine eindimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung,
(2) als ein zweidim. Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

Lösung: (1) Zeit $t \in \mathbb{R}$, Position $u(t) \in \mathbb{R}$, Geschwindigkeit $\dot{u}(t) \in \mathbb{R}$, Beschleunigung $\ddot{u}(t) \in \mathbb{R}$, Kraft $-\omega_0^2\, u(t) - 2\delta\, \dot{u}(t)$, Bewegungsgesetz:

$$\boxed{\ddot{u}(t) + 2\delta\, \dot{u}(t) + \omega_0^2\, u(t) = 0}$$

Lösung $u(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}[c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)]$ mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \in \mathbb{R}_{>0}$.
Die Anfangsdaten $(u(t_0), \dot{u}(t_0))$ bestimmen die Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(2) Zustand $(x_1(t), x_2(t)) = (u(t), \dot{u}(t))$, Zustandsraum $\mathbb{R}^2$, DGSystem:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 = & & x_2 \\ \dot{x}_2 = & -\omega_0^2 x_1 & -2\delta x_2 \end{Bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$$

Der harmonische Oszillator als dynamisches System

Q314 Erläuterung

☺ Allgemeiner Trick: Reduktion von höherer auf erste Ordnung! Q311

☺ DGSystem erster Ordnung = Vektorfeld auf dem Zustandsraum!

Der harmonische Oszillator dient uns weiterhin als zentrales Modell: Es ist besonders einfach und anschaulich, lässt sich leicht lösen, und zeigt im Prinzip bereits alle wesentlichen Phänomene! Q245

Wir schreiben seine Differentialgleichung zweiter Ordnung hier neu als System erster Ordnung: Das ist ein Vektorfeld auf dem Zustandsraum!

Jedes solche Richtungsfeld ist geometrisch besonders anschaulich als ein „Fluss“, und dies nützt ebenso in der Analysis und der Numerik.

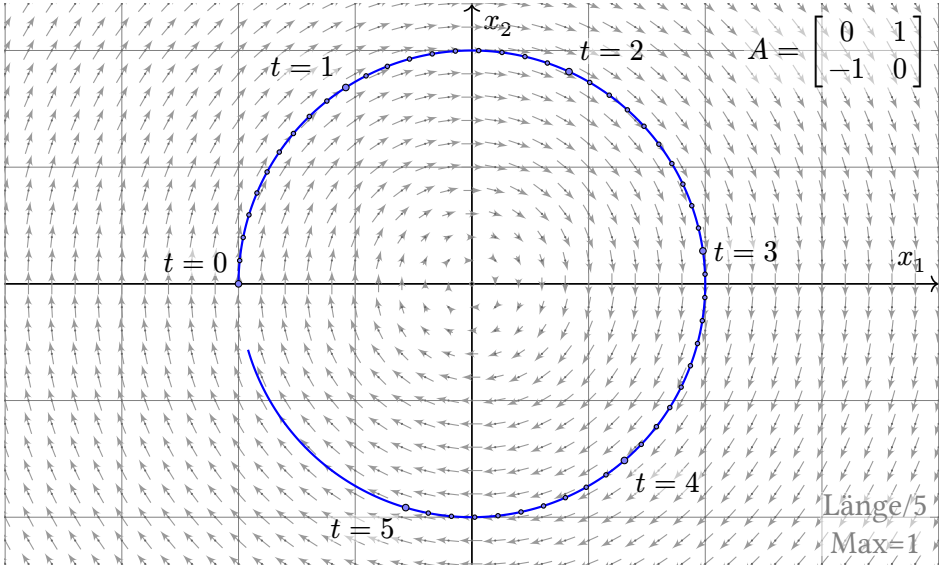
Lösungskurven des DGSystems sind die Trajektorien: Die nächsten beiden Graphiken zeigen den nicht bzw. schwach gedämpften Fall. Hierzu kennen wir bereits die exakten Lösungen. Q253

Die dritte Graphik zeigt mehrere numerische Näherungen durch das Euler–Verfahren: Solche Näherungen sind nützlich, wenn wir keine exakte Lösung kennen oder mühsam beschaffen wollen, und nötig, wenn gar keine Lösungsformel in geschlossener Form existiert.

Der harmonische Oszillator im Zustandsraum $\mathbb{R}^2$

Q315 Beispiel

Harmonischer Oszillator, keine Dämpfung $\delta = 0$, zum Beispiel $\omega_0 = 1$:

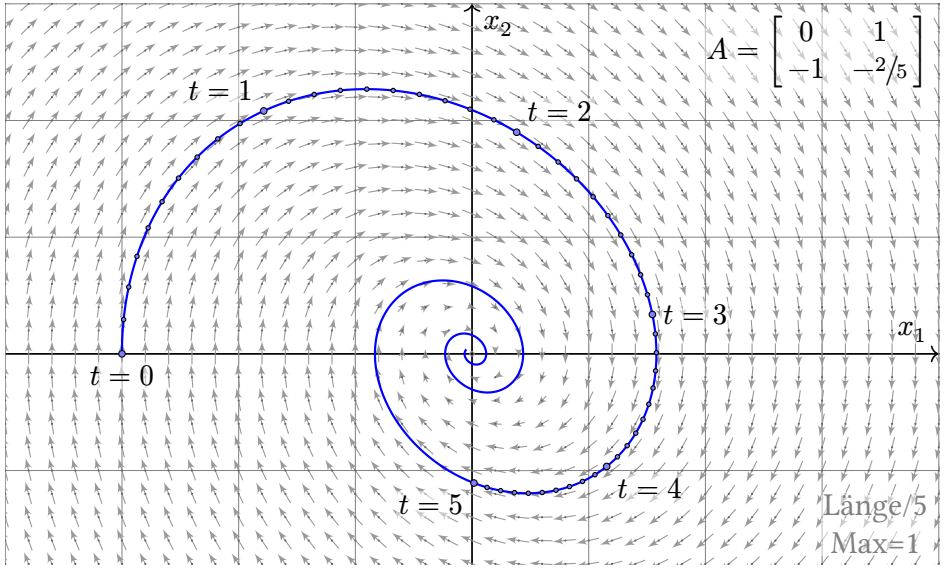


Kein Energieverlust, daher sogar Rückkehr in den Anfangszustand.

Der harmonische Oszillator im Zustandsraum $\mathbb{R}^2$

Q316 Beispiel

Schwache Dämpfung $0 < \delta < \omega_0$, zum Beispiel $\delta = 1/5$ und $\omega_0 = 1$:

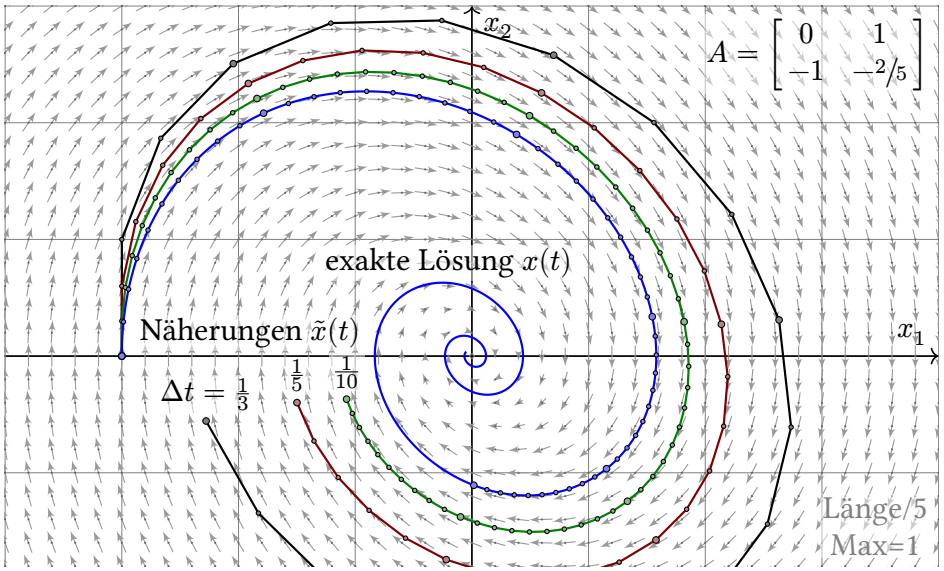


Echter Energieverlust, daher keine Rückkehr in den Anfangszustand.

Numerische Näherung durch das Euler–Verfahren

Q317
Beispiel

Approximation durch das Euler–Verfahren mit Schrittweite $\Delta t = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$:



Wir erkennen graphisch den Rechenaufwand und Approximationsfehler.

Numerische Näherung durch das Euler–Verfahren

Q318
Erläuterung

Zu lösen sei ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0$$

☺ Dies ist im Wesentlichen ein Vektorfeld f auf dem Zustandsraum!
Gesucht ist eine Lösungskurve $x(t)$, die die obige Gleichung erfüllt.
Das **Euler–Verfahren** verschafft uns eine numerische Näherung $\tilde{x}$:

Wir wählen Zeitschritte $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ mit $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$.
Am einfachsten äquidistant $t_i = t_0 + i\Delta t$ mit fester Schrittweite $\Delta t > 0$.
Die Ableitung $\dot{x}$ approximieren wir durch den **Differenzenquotienten**:

$$\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \approx \dot{x}(t_i) \overset{!}{=} f(t, x(t_i))$$

Damit berechnen wir Näherungswerte $\tilde{x}(t_1), \tilde{x}(t_2), \tilde{x}(t_3), \dots$ rekursiv:

$$\tilde{x}(t_{i+1}) = \tilde{x}(t_i) + f(t_i, \tilde{x}(t_i)) \cdot (t_{i+1} - t_i) \quad \text{für } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

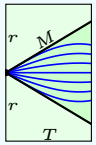
Unter geeigneten Bedingungen existiert genau eine Lösung $x(t)$ und die Euler–Approximation $\tilde{x}(t)$ kommt für kleine Schrittweiten beliebig nahe.

Numerische Näherung durch das Euler–Verfahren

Q319
Erläuterung

Geometrische Voraussetzungen für das Euler–Verfahren:

Sei $I = [t_0, t_0 + T] \subset \mathbb{R}$ ein Zeitintervall der Länge $T > 0$.
Sei $K = \bar{B}(x_0, r) \subset \mathbb{K}^n$ der Ball um x_0 mit Radius $r > 0$.
Sei $f : I \times K \to \mathbb{K}^n$ stetig, somit beschränkt, also $|f| \le M$.
Hierbei gelte $T \cdot M \le r$, notfalls verkleinern wir T und I.
Dies garantiert, dass Lösungen nicht vorzeitig aus K rauslaufen.



Gesucht ist $x : I \to K$ diff'bar mit $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$.
Das heißt: In jedem Punkt $(t, x(t))$ ist die Tangente $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$.

Euler–Approximation: Wir wählen eine Partition des Zeitintervalls

$$P = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T\}.$$

Wie oben illustriert definieren wir hierzu den **Euler–Polygonzug**

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_N \\ \tilde{x}_0 & \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_N \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i}{t_{i+1} - t_i} = f(t_i, \tilde{x}_i)$$

☺ Praktisch: Aus $\tilde{x}_0 = x_0$ berechnet man schrittweise $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N$:
Im Punkt $(t_i, \tilde{x}_i)$ wird die Kurve in Richtung $f(t_i, \tilde{x}_i)$ weitergeschickt.

Numerische Näherung durch das Euler–Verfahren

Q320
Erläuterung

Existenz von Lösungen, Peano 1890

Zu lösen sei die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ mit $x(t_0) = x_0$.
Unter den oben erklärten geometrischen Voraussetzungen gilt:

Es existieren Partitionen $P_1, P_2, P_3, \dots \subset I$, deren Euler–Polygonzüge $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots : I \to K$ gegen eine Lösung $x : I \to K$ konvergieren.

☺ Dies garantiert Existenz von Lösungen, ☹ keine Eindeutigkeit.

☺ Die Rechnung ist für $\Delta t = T/N$ sehr leicht zu implementieren.

☹ Präzision verlangt großes N, damit wächst der Rechenaufwand.

☹ Praktisches Problem: Der Satz ist nicht konstruktiv! Gegeben $\varepsilon > 0$, wie wählt man eine Partition P, um eine ε–Approximation zu erhalten?

☺ Die Numerik untersucht und optimiert solche Näherungsverfahren.
Ziel: gute Fehlerschranken und hohe Präzision bei geringem Aufwand.

Die **Numerik der gewöhnlichen Differentialgleichungen** ist ein hoch entwickeltes Gebiet und stellt umfangreiche Werkzeuge zur Verfügung.
Lineare DGSysteme werden wir im Folgenden explizit und exakt lösen.

Exponentialfunktion... einer Diagonalmatrix

Q321

Aufgabe: Berechnen Sie die Exponentialfunktion $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$ der Diagonalmatrix $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sowie $\exp(At)$ für $t \in \mathbb{R}$.

Lösung: (0) Die Potenzen der Matrix A sind leicht zu berechnen:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

(1) Hieraus berechnen wir ebenso leicht die Exponentialreihe:

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

(2) Mit dem Zeitparameter $t \in \mathbb{R}$ im Exponenten erhalten wir:

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Exponentialfunktion... einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

Q322 Erläuterung

☺ Haben Sie keine Angst vor Wörtern oder Formeln. Hier helfen Definitionen und Sätze, damit gelingen Ihnen dann die Beispiele.

Wir arbeiten entweder reell über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder komplex über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Hier können wir über Konvergenz sprechen und somit von Polynomen $\sum_{k=0}^{n} c_k A^k$ übergehen zu (konvergenten!) Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$.

? Wie berechnen wir $\exp(A)$ für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$? Zunächst haben wir die (konvergente!) Exponentialreihe $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$ als Definition. Die können wir immer einsetzen, theoretisch genügt das. In günstigen Fällen können wir sie weiter vereinfachen und explizit ausrechnen:

☺ Für jede Diagonalmatrix $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ berechnen wir $\exp(D)$ wie oben. Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalisierbar, so gilt $T^{-1}AT = D$ nach Basiswechsel $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Aus $A = TDT^{-1}$ folgt dann $\exp(A) = T\exp(D)T^{-1}$.

☺ Leider ist nicht jede Matrix diagonalisierbar, doch Jordan hilft immer! Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist $\mathbb{C}$–jordanisierbar: Es existiert ein Basiswechsel $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ so, dass $J = T^{-1}AT$ in Jordan–Form ist. Wie oben können wir $\exp(J)$ berechnen. Aus $A = TJT^{-1}$ folgt $\exp(A) = T\exp(J)T^{-1}$.

Exponentialfunktion... eines nilpotenten Jordan–Blocks

Q323

Aufgabe: Berechnen Sie $\exp(Nt)$ eines nilpotenten Jordan–Blocks.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dots$$

Lösung: (1) Hier gilt $N^4 = 0$, die Exponentialreihe bricht also ab:

$$\exp \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{N^0}{0!} + \frac{N^1}{1!} + \frac{N^2}{2!} + \frac{N^3}{3!} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) Mit dem Zeitparameter $t \in \mathbb{R}$ im Exponenten erhalten wir:

$$\exp(Nt) = N^0\frac{t^0}{0!} + N^1\frac{t^1}{1!} + N^2\frac{t^2}{2!} + N^3\frac{t^3}{3!} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exponentialfunktion... eines allgemeinen Jordan–Blocks

Q324

Aufgabe: Berechnen Sie $\exp(Bt)$ eines allgemeinen Jordan–Blocks

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

Lösung: (1) Wir haben $B = D + N$ mit $D = \lambda I$. Dank $DN = ND$ folgt:

$$\exp(B) \overset{\text{Q3B}}{\underset{(3)}{=}} \exp(D)\exp(N) = \mathrm{e}^{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) Mit dem Zeitparameter $t \in \mathbb{R}$ im Exponenten erhalten wir:

$$\exp(Bt) \overset{\text{Q3B}}{\underset{(3)}{=}} \exp(Dt)\exp(Nt) = \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Exponentialfunktion für Matrizen

Q325

Satz Q3B: die Exponentialfunktion für Matrizen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

0 Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ konvergiert die **Exponentialreihe**

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \dots .$$

1 Zudem gilt der Euler–Grenzwert $(I + \frac{1}{n}A)^n \to \exp(A)$ für $n \to \infty$.

Die so definierte **Matrix-Exponentialfunktion** $\exp : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n}$ hat die von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vertrauten Eigenschaften:

2 Die Nullmatrix 0 wird auf die Einheitsmatrix $\exp(0) = I$ abgebildet.

3 Aus $AB = BA$ folgt $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$.

4 Insbesondere gilt also $\exp(A)\exp(-A) = \exp(A - A) = \exp(0) = I$. Somit ist die Matrix $\exp(A)$ invertierbar mit $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

5 Die Zuordnung $t \mapsto \exp(tA)$ definiert eine differenzierbare Kurve in $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K} \subset \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $0 \mapsto I$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tA) = A\exp(tA)$.

Die Exponentialfunktion für Matrizen

Q326

Satz Q3B: die Exponentialfunktion für Matrizen

Die Exponentialfunktion verträgt sich zudem mit Matrix-Operationen:

6 Transposition: $\exp(A^\intercal) = \exp(A)^\intercal$

7 komplexe Konjugation: $\exp(\overline{A}) = \overline{\exp(A)}$

8 Konjugation: $\exp(T^{-1}AT) = T^{-1}\exp(A)T$

9 Determinantenformel: $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$

Übung: Rechnen Sie alle Aussagen dieses Satzes sorgsam nach!
Dies gelingt wörtlich genauso wie für die reelle Exponentialfunktion.

Die Techniken der Analysis benötigen Sie vor allem für die Konvergenz (0,1). Alle weiteren Aussagen (2–9) erhalten Sie, indem Sie termweise rechnen – und dies dürfen Sie: Potenzreihen verhalten sich (innerhalb ihres Konvergenzbereichs) wie Polynome (von unendlichem Grad).

⚠ In $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ kommutieren je zwei Elemente, daher spüren Sie dort von der Kommutativität (3) nichts. Für Matrizen ist sie jedoch wesentlich.

Konvergenz der Exponentialfunktion für Matrizen

Q327
Ausführung

Wir wollen eine Norm $|A|$ für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ erklären. Beispiel: Die **Frobenius–Norm** von Matrizen entspricht der euklidischen Norm:

$$|-|_F = \|-\|_F : \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{R} : A \mapsto \|A\|_F := \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

Auf $\mathbb{K}^{m\times n}$ ist dies eine Norm (N0–3) und zudem submultiplikativ (N4):

N0:	$\|A\| \geq 0 = \|0\|$	(Positivität)
N1:	$\|A\| > 0$ für $A \neq 0$	(Definitheit)
N2:	$\|\lambda A\| = \lvert\lambda\rvert \cdot \|A\|$	(Homogenität)
N3:	$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$	(Dreiecksungleichung)
N4:	$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$	(Submultiplikativität)

Letzteres gilt für komponierbare Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n\times r}$. Jede Abbildung $\|-\| : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (N0–4) für alle Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{K}$ nennen wir eine **Matrixnorm**.

Damit klären wir nachfolgend all unsere Fragen der Konvergenz… und ernten anschließend die wunderbaren algebraischen Eigenschaften!

Konvergenz der Exponentialfunktion für Matrizen

Q328
Ausführung

Aufgabe: (0) Folgern Sie die Konvergenz der Matrix-Exponentialreihe.

Lösung: (a) Wir zeigen zuerst die absolute Konvergenz dieser Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \overset{\text{N2}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A^k\|}{k!} \overset{\text{N4}}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k}{k!} \overset{\text{Def}}{=} \exp(\|A\|) \overset{!}{<} \infty$$

(b) Der Raum $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist Cauchy–vollständig bezüglich der Norm $\|-\|$.
(c) Dank (a) konvergiert die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$ absolut, und dank (b) konvergiert sie auch in $\mathbb{K}^{n\times n}$. Zudem gilt die Abschätzung:

$$\|\exp(A)\| \overset{\text{Def}}{=} \left\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\right\| \overset{\text{N3}}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty}\left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \overset{\text{(a)}}{\leq} \exp(\|A\|)$$

Für konvergente Potenzreihen gelten wunderschöne Rechenregeln: Sie verhalten sich (innerhalb ihres Konvergenzbereichs) wie Polynome! Insbesondere dürfen wir solche Reihen umordnen, termweise addieren, multiplizieren und differenzieren – wie von Polynomen vertraut. Genaueres hierzu lernen Sie im ersten Studienjahr der Analysis.

Eigenschaften der Matrix–Exponentialfunktion

Q329
Ausführung

(1) Den Euler–Grenzwert $(1 + a/n)^n \to \exp(a)$ kennen Sie für $a \in \mathbb{K}$. Daraus folgt dieser Grenzwert sofort für jede Diagonalmatrix, dann für jede diagonalisierbare Matrix. Mit etwas Mühe zeigt man den Grenzwert ebenso für jede Jordan–Matrix, dann für jede jordanisierbare Matrix. (Wenn Sie möchten, führen Sie es aus als Übung zur Jordanisierung.)

Die Aussage (2) des Satzes hingegen ist klar, denn wir haben:

$$\exp(0) \overset{\text{Def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} \overset{\text{Def}}{=} I + 0 + 0 + \ldots = I$$

Dank Funktionalgleichung (3) folgt daraus die Inversionsformel (4):

$$\exp(A)\exp(-A) \overset{(4)}{=} \exp(A - A) \overset{(2)}{=} I$$

Somit ist die Matrix $\exp(A)$ invertierbar mit $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Wir kommen nun zu den interessanten Aussagen (3) und (5).
Diese haben wir in den obigen Beispielen bereits in Aktion gesehen.
Nun wollen wir diese nützlichen Rechenregeln allgemein beweisen.

Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

Q330
Ausführung

Aufgabe: (3) Für je zwei kommutierende Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ gilt:

$$\boxed{\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B) \quad \text{falls} \quad AB = BA.}$$

Lösung: Dank (a) Umordnungssatz und (b) binomischem Lehrsatz gilt

$$\begin{aligned}
\exp(A)\exp(B) &\overset{\text{Def}}{=} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right]\left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B^\ell}{\ell!}\right] &&\overset{\text{Lin}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\frac{B^\ell}{\ell!} \\
&\overset{(a)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k+\ell=n} \frac{A^k}{k!}\frac{B^\ell}{\ell!} &&\overset{\text{Def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^k B^{n-k} \\
&\overset{(b)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(A+B)^n &&\overset{\text{Def}}{=} \exp(A+B).
\end{aligned}$$

☺ Dies entspricht dem **Potenzgesetz**, daher die Kurzschreibweise

$$\mathrm{e}^A := \exp(A) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\,\mathrm{e}^B\,.$$

☺ Das ist wörtlich die Rechnung für die reelle Exponentialfunktion!

Die Ableitung der Exponentialfunktion

Q331
Ausführung

Aufgabe: (5) Aus der Exponentialreihe folgt die **Ableitungsregel**

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tA) = A\exp(tA).}$$

Lösung: Dank (a) Ableitungsregel für Potenzreihen gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tA) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k &&\overset{(a)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{t^k}{k!}A^k \\
&\overset{\text{Abl}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k &&\overset{\text{Ind}}{=} A\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}A^j \overset{\text{Def}}{=} A\exp(At).
\end{aligned}$$

Wir nutzen hier die Indexverschiebung $k = j + 1$, umgekehrt $j = k - 1$.

☺ In Kurzschreibweise erhalten wir die vertraute Formel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{tA} = A\,\mathrm{e}^{tA}\,.$$

☺ Das ist eine der definierenden Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Exponentialfunktion und Matrixoperationen

Q332
Ausführung

Aufgabe: Beweisen Sie sorgsam die Aussagen (6–9) des Satzes Q3B.

Lösung: (6) Die Transposition $^\top : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n}$ quadratischer Matrizen ist ein Ringantiautomorphismus, denn es gilt $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$ und $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$ sowie $(A^\top)^\top = A$ für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\exp(A^\top) &\overset{\text{Def}}{=} \lim_{N\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{N}\frac{(A^\top)^k}{k!}\right] &&\overset{(a)}{=} \lim_{N\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{N}\frac{A^k}{k!}\right]^\top \\
&\overset{(b)}{=} \left[\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{A^k}{k!}\right]^\top &&\overset{\text{Def}}{=} \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\right]^\top \overset{\text{Def}}{=} \exp(A)^\top
\end{aligned}$$

Für die Gleichung (b) nutzen wir die Stetigkeit der Abbildung $^\top$.
Wir gehen bei dieser einfachen Rechnung bewusst kleinschrittig vor, so sehen wir genau, welche Eigenschaften wirklich benötigt werden:

Für jeden stetigen Ring(anti)homomorphismus $\Phi : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt

$$\boxed{\exp(\Phi(A)) = \Phi(\exp(A)).}$$

Exponentialfunktion und Matrixoperationen

Q333
Ausführung

(7) Die komplexe Konjugation $^{-} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z = x + \mathrm{i}y \mapsto z = x - \mathrm{i}y$ ist ein Körperautomorphismus, denn es gilt $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ sowie $\overline{\overline{z}} = z$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$. Für Matrizen über $\mathbb{C}$ definieren wir die komplexe Konjugation koeffizientenweise durch

$$^{-} : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n} : A = (a_{ij}) \mapsto \overline{A} = (\overline{a_{ij}}).$$

Dies ist ein Ringautomorphismus von $(\mathbb{C}^{n\times n}, +, \cdot)$ und zudem stetig. (Warum? Nachrechnen!) Wie in (6) folgt daraus $\exp(\overline{A}) = \overline{\exp(A)}$.

(8) Für jede invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$ ist die Konjugation

$$\mathrm{conj}_T : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n} : A \mapsto T^{-1}AT$$

ein Ringautomorphismus von $(\mathbb{K}^{n\times n}, +, \cdot)$ und stetig. (Warum? Übung!) Wie in (6) folgt daraus $\exp(T^{-1}AT) = T^{-1}\exp(A)T$. Ausgeschrieben:

$$\exp(T^{-1}AT) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T^{-1}AT)^k}{k!} \;\overset{(6)}{=}\; T^{-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right]T \;=\; T^{-1}\exp(A)T$$

Exponentialfunktion und Matrixoperationen

Q334
Ausführung

(9) Wir zeigen schließlich die bemerkenswerte Determinantengleichung

$$\boxed{\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A)).}$$

(9a) Wir beweisen dies zunächst für Dreiecksmatrizen. Hier gilt:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad A^k = \begin{bmatrix} a_{11}^k & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn}^k \end{bmatrix}$$

Damit erhalten wir ohne weitere Mühe:

$$\begin{aligned} \det\exp\begin{bmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} &\overset{\text{Def}}{=} \det\begin{bmatrix} \exp(a_{11}) & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \exp(a_{nn}) \end{bmatrix} \\ &\overset{\text{O2w}}{=} \exp(a_{11})\cdots\exp(a_{nn}) \\ &\overset{(3)}{=} \exp(a_{11} + \cdots + a_{nn}) \\ &\overset{\text{Def}}{=} \exp(\mathrm{tr}(A)) \end{aligned}$$

Exponentialfunktion und Matrixoperationen

Q335
Ausführung

(9b) Über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ trigonalisierbar (Satz P3B), es existiert also ein Basiswechsel $T \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{C}$ so, dass $T^{-1}AT$ trigonal ist. Die Determinante und die Spur bleiben dabei unverändert (Satz P2F):

$$\begin{aligned} \det(\exp(A)) &\overset{\text{P2F}}{=} \det(T^{-1}\exp(A)T) &&\overset{(8)}{=} \det(\exp(T^{-1}AT)) \\ &\overset{(9a)}{=} \exp(\mathrm{tr}(T^{-1}AT)) &&\overset{\text{P2F}}{=} \exp(\mathrm{tr}(A)) \end{aligned}$$

(9c) Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ können wir in $\mathbb{C}^{n\times n}$ betrachten. Determinante und Spur bleiben dabei unverändert. Dank (9b) gilt somit $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.

☺ Wieder einmal fügen sich Theorie und Praxis wunderbar zusammen, solide Grundlagen führen zu hilfreichen Rechenregeln. Dazu betone ich: Im *Beweis* nutzen wir die Trigonalisierung, in *Rechnungen* jedoch nicht.

☺ Für große Matrizen ist die Berechnung der Exponentialfunktion und der Determinante im Allgemeinen sehr aufwändig. Die Berechnung der Komposition $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$ hingegen ist erfreulich leicht!

Exponentialfunktion: von antisymmetrisch zu orthogonal

Q336
Ausführung

Aufgabe: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ antisymmetrisch, so gilt $Q := \exp(A) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Lösung: Antisymmetrisch bedeutet $A^{\mathsf{T}} = -A$. Alle Diagonaleinträge $a_{11}, \dots, a_{nn}$ verschwinden, also gilt $\mathrm{tr}(A) = 0$, somit $\det Q = \mathrm{e}^0 = 1$. Orthogonal bedeutet $QQ^{\mathsf{T}} = I = Q^{\mathsf{T}}Q$. Dies zeigen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} QQ^{\mathsf{T}} &\overset{\text{Def}}{=} \exp(A)\exp(A)^{\mathsf{T}} \\ &\overset{(6)}{=} \exp(A)\exp(A^{\mathsf{T}}) \\ &\overset{\text{Vor}}{=} \exp(A)\exp(-A) \\ &\overset{(3)}{=} \exp(A - A) \overset{\text{Mat}}{=} \exp(0) \overset{(2)}{=} I \end{aligned}$$

Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ erinnern wir an die Adjunktion $A^{\dagger} := \overline{A}^{\mathsf{T}}$.

Übung: Ist die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ antihermitesch, also $A^{\dagger} = -A$, so ist $Q := \exp(A)$ unitär, also $QQ^{\dagger} = I = Q^{\dagger}Q$, kurz $Q \in \mathrm{GU}_n(\mathbb{C})$.

Die Diagonaleinträge $a_{11}, \dots, a_{nn}$ sind rein imaginär, also $\mathrm{tr}(A) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, somit $\det Q = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}\,A} \in \mathbb{S}^1$. Im Falle $\mathrm{tr}(A) = 0$ gilt stärker $Q \in \mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$.

Beispiel: eine euklidische Drehmatrix

Q337

Aufgabe: Berechnen Sie $\exp(At)$ für $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. **Lösung:**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

Hieraus berechnen wir mühelos die Matrix-Exponentialfunktion:

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots & -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \dots \\ t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Bemerkung: Für die Ableitung gilt wie erwartet

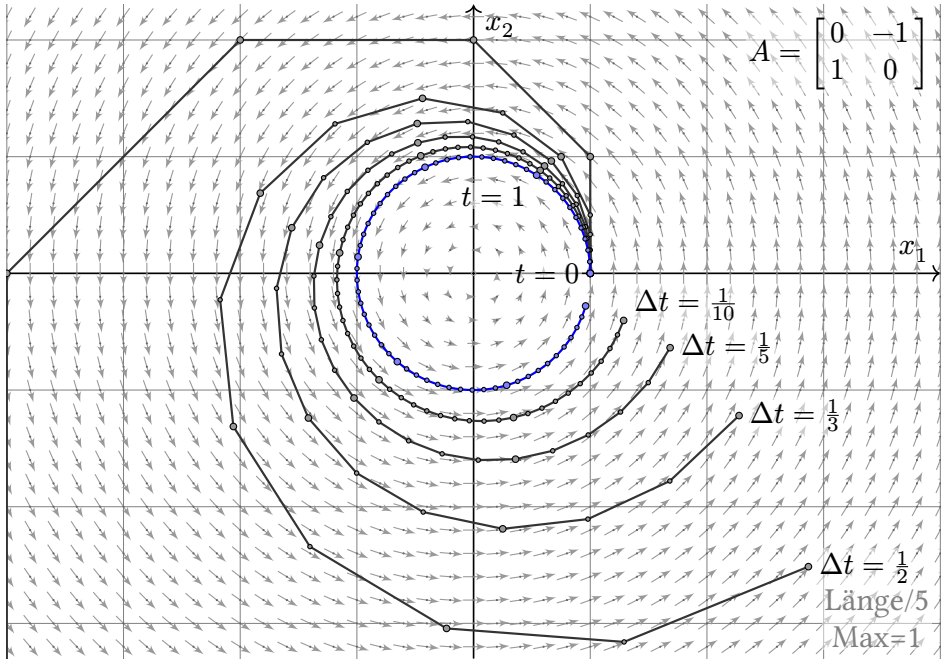
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(At) = \begin{bmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{bmatrix} = A \exp(At).$$

Das AWP $u'(t) = A\,u(t)$ mit $u(0) = v$ wird gelöst durch $u(t) = \exp(At)\,v$.
Das Euler–Verfahren entspricht dem Grenzwert $(I + \frac{1}{n}A)^n \to \exp(A)$.

$$\exp\begin{bmatrix} s & -t \\ t & s \end{bmatrix} \overset{\text{Q3B}}{\underset{(3)}{=}} \exp\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \exp\begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^s \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Exponentialfunktion und Euler–Verfahren

Q338
Ausführung



Beispiel: eine hyperbolische Drehmatrix

Q339
Erläuterung

Aufgabe: Berechnen Sie $\exp(At)$ für $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. **Lösung:**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

Hieraus berechnen wir mühelos die Matrix-Exponentialfunktion:

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots & t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \\ t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots & 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}$$

Bemerkung: Für die Ableitung gilt wie erwartet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tA) = \begin{bmatrix} \sinh t & \cosh t \\ \cosh t & \sinh t \end{bmatrix} = A \exp(tA).$$

Das AWP $u'(t) = A\,u(t)$ mit $u(0) = v$ wird gelöst durch $x(t) = \exp(tA)\,v$.
Das Euler–Verfahren entspricht dem Grenzwert $(I + \frac{1}{n}A)^n \to \exp(A)$.

$$\exp\begin{bmatrix} s & t \\ t & s \end{bmatrix} \overset{\text{Q3B}}{\underset{(3)}{=}} \exp\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \exp\begin{bmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^s \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}$$

Beispiel: eine kleine Dreiecksmatrix

Q340
Ausführung

Aufgabe: Berechnen Sie $\exp(A)$ einer 2×2–Dreiecksmatrix.

Lösung: (0) Wir betrachten eine obere 2×2–Dreiecksmatrix:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix},\ A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & (a+b)c \\ 0 & b^2 \end{bmatrix},\ A^3 = \begin{bmatrix} a^3 & (a^2+ab+b^2)c \\ 0 & b^3 \end{bmatrix}, \dots$$

(1) Wir nehmen zunächst $a \neq b$ an. Per Induktion finden wir dann

$$A^k = \begin{bmatrix} a^k & \frac{a^k - b^k}{a-b} c \\ 0 & b^k \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \exp\begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^a & \frac{\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b}{a-b} c \\ 0 & \mathrm{e}^b \end{bmatrix}.$$

(2) Resonanz: Für $b \to a$ gilt $\frac{\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b}{a-b} \to \mathrm{e}^a$. Für $a = b$ finden wir tatsächlich:

$$A^k = \begin{bmatrix} a^k & k a^{k-1} c \\ 0 & a^k \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \exp\begin{bmatrix} a & c \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^a & c\,\mathrm{e}^a \\ 0 & \mathrm{e}^a \end{bmatrix}.$$

Für große Matrizen ist diese Rechnung ebenso möglich, aber mühsam.
Im Folgenden nutzen wir hierfür lieber Eigen- und Hauptvektoren.

Lineares Differentialgleichungssystem (DGSystem)

♦ **Definition Q3A:** lineares Differentialgleichungssystem über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Eine **lineares Differentialgleichungssystem** (DGSystem) hat die Form

$$\boxed{\dot u(t) = A(t)\,u(t) + b(t).}$$

Gegeben ist die Systemmatrix $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ und der Störterm $b : I \to \mathbb{K}^n$, beide stetig auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Gesucht sind alle $u : I \to \mathbb{K}^n$ mit stetiger Ableitung $\dot u : I \to \mathbb{K}^n$ und zeitlicher Entwicklung $\dot u = A\,u + b$, also ausgeschrieben $\dot u(t) = A(t)\,u(t) + b(t)$ für jeden Zeitpunkt $t \in I$.

Beim **Anfangswertproblem** (AWP) ist zudem eine Startzeit $t_0 \in I$ und ein Startwert / Startvektor $u(t_0) = v_0 \in \mathbb{K}^n$ vorgeben.

Mit $b = 0$ heißt unser DGSystem $\dot u = A\,u$ **homogen**, sonst **inhomogen**. Zur Vereinfachung betrachten wir **konstante Koeffizienten** $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

? Wie viele Lösungen hat das AWP? keine, eine, viele? Genau eine! Das können wir nun nachrechnen und erhalten damit den ∃&E-Satz Q3C.

Lineares Differentialgleichungssystem (DGSystem)

Nach der motivierenden Einleitung und ersten Beispielen wollen wir nun unser Vorgehen systematisieren. Als erstes präzisieren wir den Rahmen für lineare DGSysteme, aufbauend entwickeln wir eine starke Theorie und effiziente Lösungsmethoden. Nicht-lineare DGSysteme wie Newtons Himmelsmechanik sind noch allgemeiner und spannender, aber vorerst noch außerhalb unserer Reichweite. Freuen Sie sich auf die Analysis!

Beliebte Schreibweisen für die Ableitung sind $\dot u = u'$, $\ddot u = u''$, etc.
Die gesuchten Funktionen heißen u oder x oder y... je nach Kontext.
Ich formuliere das DGSystem und das Anfangswertproblem (AWP).
Wir dürfen $t_0 = 0$ annehmen und uns etwas Schreibarbeit sparen.
Ich führe für Sie im Folgenden t_0 mit, lese es aber meist als $t_0 = 0$.

Aufgabe: Finden Sie $u : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ mit $u(0) = v$ und $u'(t) = A\,u(t)$.

Lösung: Die Funktion $u(t) = \mathrm{e}^{At}\,v$ erfüllt $u(0) = v$ und $u'(t) = A\,u(t)$.
Die Matrix-Exponentialfunktion Q3B führt uns zu direkt zu *einer* Lösung.

? Wir fragen nach den vier E: existent? eindeutig? effektiv? effizient?

Eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

Aufgabe: Lösen Sie das AWP zunächst für den Spezialfall $A = 0$:

$$\boxed{u(t_0) = v_0, \quad u'(t) = b(t)}$$

Eindeutigkeit: Angenommen $u : I \to \mathbb{K}^n$ ist eine Lösung. Dank HDI gilt:

$$\textstyle\int_{\tau=t_0}^{t} u'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = u(t) - u(t_0)$$

Erinnerung: Wir differenzieren und integrieren immer koordinatenweise.
Wir lösen nach $u(t)$ auf und setzen die Daten $u(t_0) = v_0$ und $u' = b$ ein:

$$\boxed{u(t) = v_0 + \textstyle\int_{\tau=t_0}^{t} b(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

Existenz: Diese Integralformel konstruiert eine Lösung $u : I \to \mathbb{K}$. Probe!

Differenzieren und Integrieren, hier koordinatenweise, sind zueinander invers dank HDI. Das hilft überall, schon bei einfachen Integralen und Rechnungen wie Produktregel vs partielle Integration, Kettenregel vs Substitution, uvm. Hier „integrieren“ wir damit Differentialgleichungen!

Eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

Aufgabe: Lösen Sie das AWP für das in/homogene DGSystem:

$$\boxed{u(t_0) = v_0, \quad u'(t) = A\,u(t) + b(t)}$$

Eindeutigkeit: Angenommen $u : I \to \mathbb{K}^n$ ist irgendeine Lösung.
Wir nutzen die Hilfsfunktion $v(t) := \mathrm{e}^{-A(t-t_0)}\,u(t)$. Für sie gilt:

$$\begin{aligned} v(t_0) &= u(t_0) = v_0, \\ v'(t) &= -A\,\mathrm{e}^{-A(t-t_0)}\,u(t) + \mathrm{e}^{-A(t-t_0)}(A\,u(t) + b(t)) = \mathrm{e}^{-A(t-t_0)}\,b(t) \end{aligned}$$

Das erzwingt dank HDI wie in der vorigen Aufgabe erklärt:

$$v(t) = v_0 + \textstyle\int_{\tau=t_0}^{t} \mathrm{e}^{-A(\tau-t_0)}\,b(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Wenn es eine Lösung u gibt, dann nur diese: $u(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}\,v(t)$.
Existenz: Wir setzen $u(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}\,v(t)$ und machen die Probe:

$$\begin{aligned} u(t_0) &= v(t_0) = v_0, \\ u'(t) &= A\,\mathrm{e}^{A(t-t_0)}\,v(t) + \mathrm{e}^{A(t-t_0)}\,\mathrm{e}^{-A(t-t_0)}\,b(t) = A\,u(t) + b(t) \end{aligned}$$

Eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

Diese elegante Rechnung ist genial einfach und einfach genial:
Zur Lösung genügen uns Exponentialfunktion und Integration!

Satz Q3c: Existenz & Eindeutigkeit & explizite Lösung durch Integration

Zu lösen sei das in/homogene DGSystem als AWP wie in Q3A definiert:

$$u(t_0) = v_0, \quad u'(t) = A\,u(t) + b(t)$$

Dazu existiert genau eine Lösung $u : I \to \mathbb{K}^n$. Wir haben explizit:

$$u(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}\, v_0 + \mathrm{e}^{A(t-t_0)} \int_{\tau=t_0}^{t} \mathrm{e}^{-A(\tau-t_0)}\, b(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Wir können unser DGSystem eindeutig lösen, explizit durch Integration!
Das Ergebnis ist überraschend stark, der Beweis war erfreulich leicht.

Integration lernen Sie in der Analysis. Zudem müssen und wollen wir nun das Matrixexponential beherrschen und möglichst effizient ausrechnen. Hier hilft uns die Jordan–Normalform, genau dazu wurde sie erfunden!

Eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

Aufgabe: Lösen Sie $x_1' = -x_2$, $x_2' = x_1$ mit $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$.

Lösung: Als erstes strukturieren wir die etwas krude Problemstellung als DGSystem mit Anfangswertproblem. Wir suchen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$x'(t) = A\,x(t) \quad \text{und} \quad x(0) = v \quad \text{wobei} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Das AWP hat dank Satz Q3c genau eine Lösung, nämlich explizit:

$$x(t) = \mathrm{e}^{At}\, v = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

Zur Rechnung siehe Q337. Ist dies eine Lösung? Wir machen die Probe:

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= \cos t \\ x_2(t) &= \sin t \end{aligned}\right\} \implies \left\{\begin{aligned} x_1'(t) &= -\sin t = -x_2(t), & x_1(0) &= 1 \\ x_2'(t) &= \cos t = x_1(t), & x_2(0) &= 0 \end{aligned}\right.$$

Dies ist tatsächlich die einzige Lösung: Das garantiert der vorige Satz!
Er beruht auf unserer obigen eleganten Rechnung zur Endeutigkeit.

Affin-lineare Struktur des Lösungsraums

Satz Q3D: Struktursatz für lineare Differentialgleichungssysteme

Gegeben sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $b : I \to \mathbb{K}^n$ stetig auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
Wir untersuchen die Lösungsmenge $L = \{\, u \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K}^n) \mid \dot u = Au + b \,\}$.

(0) **Globale Existenz und Eindeutigkeit**: Zu jedem Anfangsdatum $(t_0, v_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung $u \in L$ mit $u(t_0) = v_0$ dank Satz Q3c. Die Auswertung in t_0 stiftet also eine Bijektion:

$$\Psi_{t_0} : L \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n : u \mapsto u(t_0)$$

(1) $L_0 = \{\, u \mid \dot u = Au \,\}$ ist ein **$\mathbb{K}$–linearer URaum** der Dimension n.
Wir finden ein **Fundamentalsystem** $u_1, \dots, u_n \in L_0$, etwa dank Q3c:

$$L_0 = \{\, c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \,\}^! \cong \mathbb{K}^n$$

(2) $L = \{\, u \mid \dot u = Au + b \,\}$ ist ein **$\mathbb{K}$–affiner URaum** der Dimension n.
Für jede **Partikulärlösung** $u_0 \in L$, etwa dank Q3c, gilt demnach:

$$L = u_0 + L_0 = \{\, u_0 + c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \,\}^!$$

Affin-lineare Struktur des Lösungsraums

🙂 Dieser Struktursatz gibt uns einen bequemen und präzisen Überblick!
Sie kennen diese Strukturaussagen von linearen Gleichungssystemen:
„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“
Diese gilt allgemein für lineare Abbildungen, hier $u \mapsto \dot u - Au$.

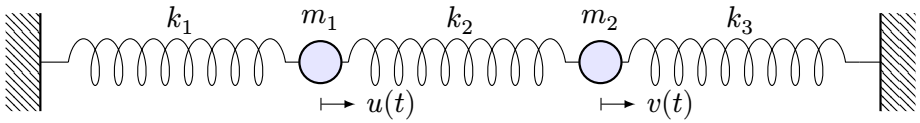
⚠ Die Menge $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ aller stetig differenzierbaren Funktionen ist ein $\mathbb{K}$–Vektorraum. Allerdings ist er unendlich-dimensional; daher greifen die so erfolgreichen Methoden der Matrizenrechnung wie etwa der Gauß–Algorithmus hier nicht. Wir müssen es anders anpacken.

🙂 Glücklicherweise ist unser Lösungsraum L endlich-dimensional, und wir können allgemein die Dimension $\dim_{\mathbb{K}}(L_0) = n$ bestimmen.
Bei jeder konkreten Berechnung wissen wir daher genau, wie viele Lösungen wir suchen müssen und wann wir alle gefunden haben!

🙂 Die Dimension $\dim_{\mathbb{K}}(L_0) = n$ besagt $L_0 \cong \mathbb{K}^n$. Darüber hinaus sind die konkreten Isomorphismen interessant, insbesondere $\Psi_{t_0} : L \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n$.
Zu theoretischem Verständnis und praktischer Lösung von DGSystemen arbeiten Analysis und Lineare Algebra auch hier wunderbar zusammen.

Gekoppelte Oszillatoren als dynamisches System

Q349



Zwei Massen $m_1, m_2 > 0$ sind durch Federn $k_1, k_2, k_3 > 0$ verbunden.

Aufgabe: Formulieren Sie das hier skizzierte dynamische System...
(0) als Bewegungsgleichung sowie (1) als DGSystem erster Ordnung.
(2) Welche Struktur hat die Lösungsmenge? (a) „Form“ und (b) „Größe“?

Lösung: (0) Auslenkungen $u(t), v(t)$ aus der Ruhelage. Kräftebilanz:

$$F_1(t) = -k_1\, u(t) - k_2[u(t) - v(t)]$$
$$F_2(t) = -k_3\, v(t) - k_2[v(t) - u(t)]$$

Bewegungsgesetz: $m_1\ddot{u}(t) = F_1(t)$ und $m_2\ddot{v}(t) = F_2(t)$. Hieraus folgt:

$$\ddot{u}(t) = -\tfrac{k_1+k_2}{m_1}\, u(t) \quad + \tfrac{k_2}{m_1}\, v(t)$$
$$\ddot{v}(t) = \quad + \tfrac{k_2}{m_2}\, u(t) - \tfrac{k_2+k_3}{m_2}\, v(t)$$

☺ Zur Vereinfachung betrachten wir keine Reibung oder äußere Kräfte.

Gekoppelte Oszillatoren als dynamisches System

Q350

(1) Wir haben ein (homogen lineares) DGSystem zweiter Ordnung:

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = a\, u(t) + b\, v(t) \\ \ddot{v}(t) = c\, u(t) + d\, v(t) \end{cases}$$

Neue Variablen $x_1 = u,\ x_2 = v,\ x_3 = \dot{u},\ x_4 = \dot{v}$ reduzieren dies zu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \text{kurz} \quad \dot{x} = A\, x$$

Das DGSystem (1) ist einfacher als (0), da erster Ordnung. Unser System $\dot{x} = Ax$ ist homogen linear mit Systemmatrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Hier sind die Koeffizienten konstant, das heißt, sie hängen nicht von der Zeit t ab. Für solche homogen-linearen DGSysteme mit konstanten Koeffizienten entwickeln wir mit Hilfe der Linearen Algebra exakte und zudem effiziente Lösungsmethoden: Wie in der folgenden Aufgabe nutzen wir dazu Eigenvektoren und alle zugehörigen Techniken. Der grundlegende Existenz- und Eindeutigkeitssatz Q3D erklärt ganz allgemein die Struktur:

(2) Die Lösungsmenge ist (a) ein $\mathbb{R}$–Vektorraum (b) der Dimension 4.

Gekoppelte Oszillatoren: Symmetrie und Ansatz

Q351

Aufgabe: (3) Lösen Sie den symmetrischen Fall $m_1 = m_2$, $k_1 = k_3$.
(4) Welche Bewegung folgt aus $u(0) = 2$, $v(0) = 0$, $\dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0$?

Lösung: Einstweilen nutzen wir unsere physikalische Anschauung!

(3a) Der Ansatz $u = v$ entkoppelt zu $\ddot{u} = -\frac{k_1}{m_1}u,\ \ddot{v} = -\frac{k_1}{m_1}v$.
Lösungen: $u_1(t) = \cos(\omega_1 t)$ und $u_2(t) = \sin(\omega_1 t)$ mit $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}$.
(3b) Der Ansatz $u = -v$ entkoppelt zu $\ddot{u} = -\frac{k_1+2k_2}{m_1}u,\ \ddot{v} = -\frac{k_1+2k_2}{m_1}v$.
Lösungen: $u_3(t) = \cos(\omega_2 t)$ und $u_4(t) = \sin(\omega_2 t)$ mit $\omega_2^2 = \frac{k_1+2k_2}{m_1} > \omega_1^2$.

Sind wir schon fertig? Ja! Jede Lösung ist eine Linearkombination

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} u_3(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} u_4(t) \\ v_4(t) \end{bmatrix}.$$

☺ Als **Anfangswerte** zur Zeit t_0 können Position und Geschwindigkeit $u(t_0), v(t_0), \dot{u}(t_0), \dot{v}(t_0) \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ eindeutig fest (und umgekehrt).

Gekoppelte Oszillatoren: Symmetrie und Ansatz

Q352
Erläuterung

☺ Unser DGSystem ist sehr einfach: Die Gleichungen sind linear! Linearkombinationen von Lösungen sind daher wieder Lösungen. Mit anderen Worten: Der Lösungsraum ist ein **Vektorraum** über $\mathbb{R}$.

☺ Unser **geschickter Ansatz** entkoppelt das Gleichungssystem: Eindimensionale Differentialgleichungen können wir bereits lösen!

Die einfache Rechnung bestätigt und präzisiert unsere physikalische Anschauung: Die Probe ist nun leicht: Einsetzen und Ausrechnen!

☺ Wir haben vier Lösungen gefunden. Diese sind **linear unabhängig**. Der Lösungsraum hat also Dimension ≥ 4. Gibt es noch mehr?

⚠ Wir wünschen uns ein einfaches Kriterium für Dimension $= 4$. Dann wüssten wir sicher: Wir haben alle Lösungen gefunden!

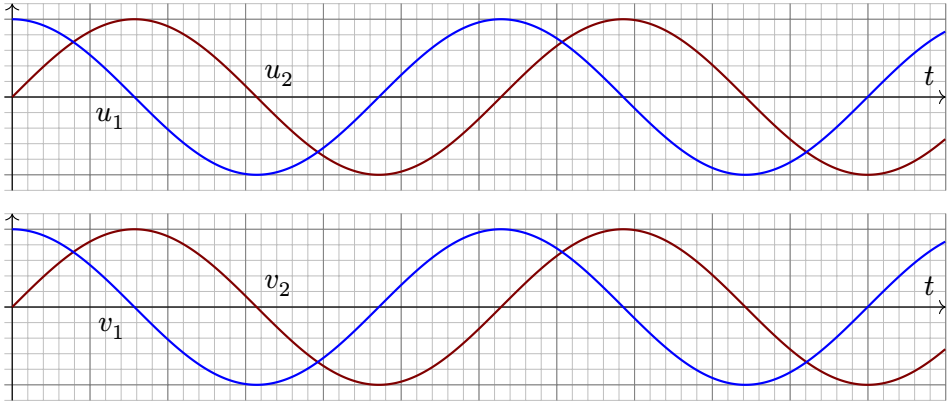
Physikalisch ist das plausibel: Jede Masse hat zur Zeit t_0 eine Position und eine Geschwindigkeit. Diese Daten sollten den weiteren Verlauf eindeutig festlegen. Wir hätten demnach genau 4 Freiheitsgrade.

☺ Diese Heuristik lässt sich mathematisch formulieren und beweisen: Es gilt der grundlegende **Existenz- und Eindeutigkeitssatz Q3D**!

Gekoppelte Oszillatoren: gleichsinnige Eigenschwingungen

Q353

Illustration für den Fall $m_1 = m_2 = 1$ und $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.
Gleichsinnige Eigenschwingungen zur Frequenz $\omega_1 = 1$:

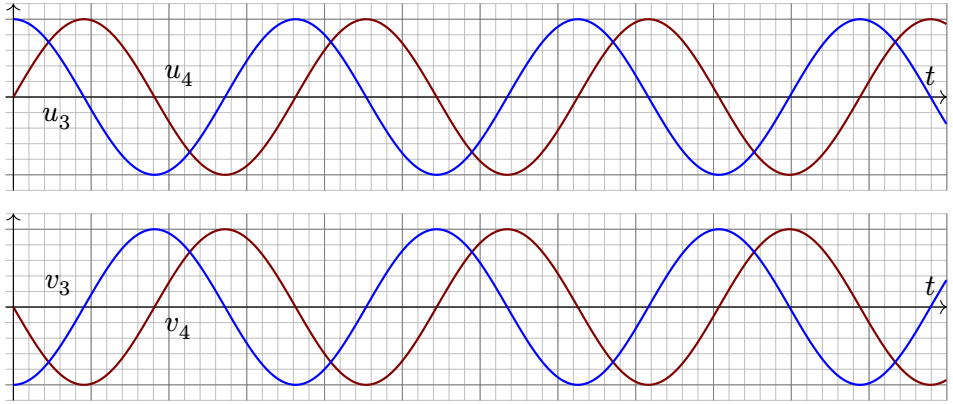


🙂 Die Eigenschwingungen unseres Systems sind besonders leicht zu berechnen. Zudem erweisen sie sich als einfach und übersichtlich: Harmonische Schwingung: Jede dieser vier Lösungen ist periodisch.

Gekoppelte Oszillatoren: gegensinnige Eigenschwingungen

Q354

Illustration für den Fall $m_1 = m_2 = 1$ und $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.
Gegensinnige Eigenschwingungen zur Frequenz $\omega_2 = \sqrt{3}$:



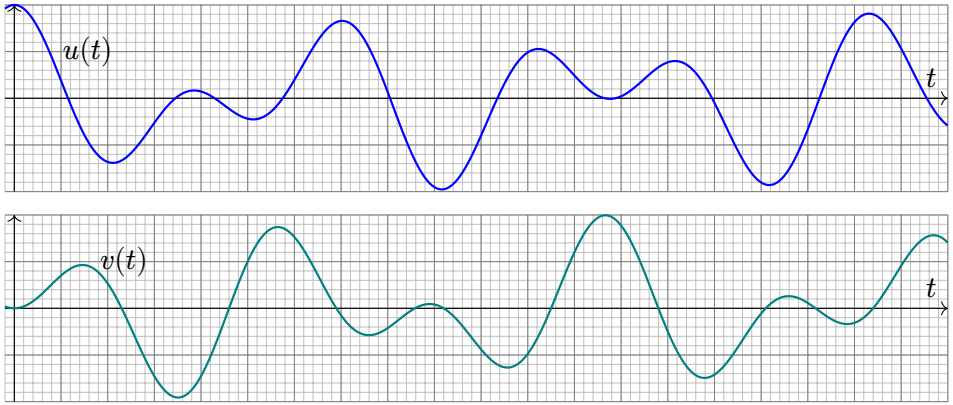
🙂 Die Frequenz der gegensinnigen Schwingung ist deutlich größer als die der gleichsinnigen Schwingung. Das ist anschaulich plausibel; probieren Sie es mal aus! Nun können wir es sogar präzise ausrechnen.

Überlagerung von Eigenschwingungen

Q355

(4) Diese Linearkombination von Eigenschwingungen löst das AWP:

$$u(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{3}t), \quad u(0) = 2, \quad \dot{u}(0) = 0$$
$$v(t) = \cos(t) - \cos(\sqrt{3}t), \quad v(0) = 0, \quad \dot{v}(0) = 0$$



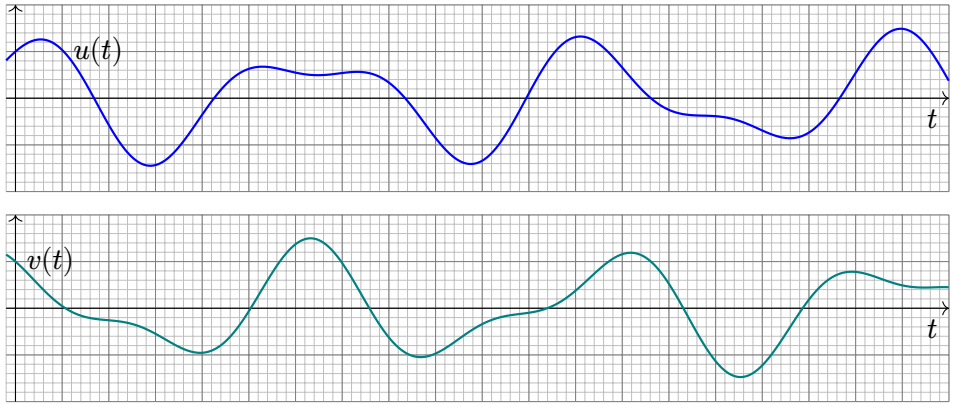
⚠ Diese Bewegung ist nicht periodisch! Sie scheint zuerst kompliziert, ist aber nur die Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen.

Überlagerung von Eigenschwingungen

Q356
Erläuterung

Zur Illustration eine weitere Linearkombination der Eigenschwingungen:

$$u(t) = \cos(t) + \tfrac{1}{2}\sin(\sqrt{3}t)$$
$$v(t) = \cos(t) - \tfrac{1}{2}\sin(\sqrt{3}t)$$



🙂 Die Anfangswerte $u(0)$, $\dot{u}(0)$ sowie $v(0)$, $\dot{v}(0)$ können beliebig vorgegeben werden; sie legen den weiteren Verlauf eindeutig fest.

Schwache Kopplung führt zu Schwebungen.

Partnerschaukel, Schloss Freudenberg in Wiesbaden

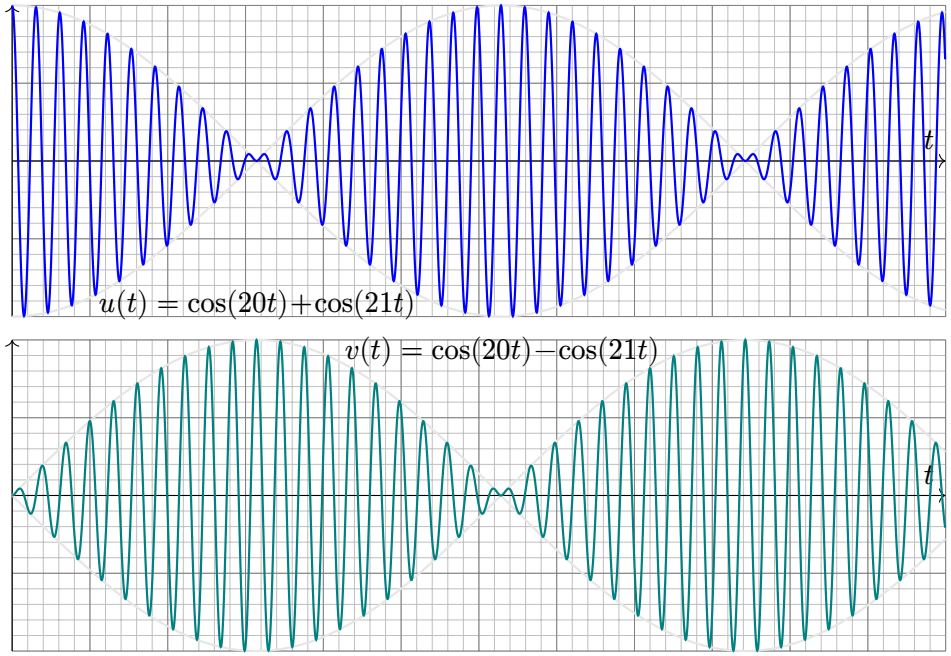
Aufgabe: Was geschieht bei schwacher Kopplung, für $0 < k_2 \ll k_1 = k_3$?

(5) Als Zahlenbeispiel sei $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = k_3 = 400$, $k_2 = 20.5$.

Lösung: (5) Die Eigenfrequenzen $\omega_1 = 20$ und $\omega_2 = 21$ liegen nahe. Das Anfangswertproblem $u(0) = 2$, $v(0) = 0$ und $\dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0$ wird gelöst durch $u(t) = \cos(20t) + \cos(21t)$ und $v(t) = \cos(20t) - \cos(21t)$. Die folgenden Graphiken illustrieren den zeitlichen Verlauf für $t \in [0, 12]$.

Wir beobachten eine *Schwebung*: In der Überlagerung $u(t)$ bzw. $v(t)$ nimmt die Amplitude der Summe mit langer Periode zu und ab, additive Phasen und subtraktive Phasen wechseln sich ab.

Schwache Kopplung führt zu Schwebungen.



Schwache Kopplung führt zu Schwebungen.

Anschaulich geschieht hier folgendes: Wir können den linken Oszillator auslenken und dann loslassen. Er schwingt daraufhin nahezu frei, doch nach und nach überträgt sich (fast) seine gesamte Energie auf den rechten Oszillator, anschließend geschieht dasselbe umgekehrt.

Aufgabe: Erklären Sie das hier gezeigte, bemerkenswerte Phänomen der Schwebungen mit Hilfe der trigonometrischen **Additionstheoreme**.

Lösung: Aus der Euler–Gleichung $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$ und der Homomorphie $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^w$ erhalten wir (nach kurzer Rechnung):

$$\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha+\beta}{2}
\end{aligned}$$

Schwache Kopplung führt zu Schwebungen.

In unserem Zahlenbeispiel erhalten wir:

$$\begin{aligned}
u(t) &= \cos(20t) + \cos(21t) = 2\cos(0.5t)\cdot\cos(20.5t)\\
v(t) &= \cos(20t) - \cos(21t) = -2\sin(0.5t)\cdot\sin(20.5t)
\end{aligned}$$

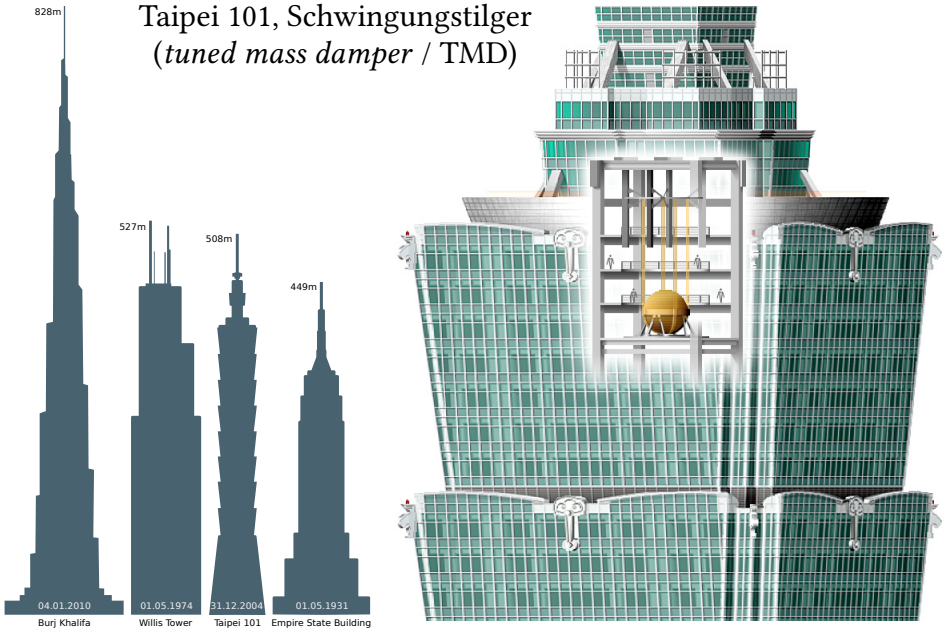
Wir interpretieren daher die Überlagerung $u(t) = A(t)\cos(20.5t)$ als eine Grundschwingung der mittleren Frequenz $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = 20.5$ mit der variablen Amplitude $A(t) = 2\cos(0.5t)$; diese hat die deutlich niedrigere Frequenz $\delta = \frac{1}{2}|\omega_1 - \omega_2| = 0.5$, sodass $\omega_{1/2} = \bar{\omega} \mp \delta$ gilt.

Diese Rechnung ist in der obigen Graphik schön anschaulich illustriert durch die Trägerschwingung $\cos(20.5t)$ und die Einhüllende $\pm 2\cos(0.5t)$. Das Phänomen der Schwebung entsteht immer, wenn sich zwei ähnlich große Schwingungen mit nahezu gleichen Frequenzen überlagern.

In der Akustik sind solche Schwebungen deutlich zu hören: Der Ton ist moduliert, seine Lautstärke schwankt mit der Schwebungsfrequenz, was mitunter als recht unangenehm empfunden wird. Das ist keine akustische Täuschung, sondern ein reales physikalisches Phänomen.

Anwendung in Wolkenkratzern: Schwingungstilger

Q361



Anwendung in Wolkenkratzern: Schwingungstilger

Q362
Erläuterung

Gebäude werden zu Schwingungen angeregt, extern durch Wind oder Erdbeben, intern durch Menschen oder Maschinen. Dagegen helfen **Schwingungstilger**, justiert auf die Eigenfrequenz des Gebäudes. Berlins Fernsehturm hat in seiner Spitze ein 1.5-Tonnen-Tilgerpendel. Londons Millennium Bridge, 2000 eröffnet und *wobbly bridge* genannt, wurde nachträglich mit 52 kleinen *tuned mass dampers* ausgestattet.

Das Taipei Financial Center in Taiwan hielt ab 2004 den Rekord des höchsten Gebäudes der Welt, bis es 2009 vom Burj Khalifa überholt wurde. Zwischen dem 88. und 92. Stockwerk befindet sich eine 660 Tonnen schwere Stahlkugel als Pendel mit ölhydraulischer Dämpfung. Es ist öffentlich zugänglich und eine beliebte Touristen-Attraktion.

Das Gebäude überträgt Schwingungsenergie auf diesen Oszillator, der sie absorbiert und dann durch Dämpfung in Wärme umwandelt. Die maximale Beschleunigung bei Stürmen wird so etwa halbiert! (Taiwan ist sowohl aktive Erdbebenregion als auch Taifungebiet.) Ein Video sagt mehr als tausend Worte: `youtu.be/f1U4SAgy60c`.

Anwendung im Schiffsbau: frahmscher Schlingertank

Q363
Erläuterung

Wasserwellen regen ein Schiff zu Schwingungen an:

1. Das Schiff „rollt“ um seine Längsachse,
   kippt also nach links (Backbord) und rechts (Steuerbord).
2. Das Schiff „stampft“ um seine Querachse,
   neigt sich also nach vorne (zum Bug) und hinten (zum Heck).

Wenn die anregende Frequenz des Seegangs unglücklich nah an der Eigenfrequenz des Schiffes liegt, so kommt es zur Resonanz. Um eine Katastrophe zu verhindern, möchte man vorsorgen und die auftretenden Resonanzen so weit wie möglich abschwächen.

Für die Rollbewegung um die Längsachse gelingt dies recht effizient mit zwei raffiniert gekoppelten Schwingungen. Hierzu entwickelte der deutsche Schiffsbauer Hermann Frahm (1867–1939) um 1900 den sogenannten frahmschen **Schlingertank**. Dieser besteht aus zwei Wassertanks an den Längsseiten des Schiffes, die möglichst hoch liegen und über Rohre kommunizieren. Hierin füllt man Wasser, bis die Eigenfrequenz des Tanks der des Schiffes entspricht.

Anwendung im Schiffsbau: frahmscher Schlingertank

Q364
Erläuterung

Seitlich auftreffende Wellen regen das Schiff zum Rollen an. Im Resonanzfall erzwingt dies eine Schwingung des Schiffes mit der Phasenverschiebung um $\pi/2$ gegenüber der Anregung. Das rollende Schiff lässt nun seinerseits das Ballastwasser im Tank periodisch hin- und herströmen, ebenso mit einer Phasenverschiebung um $\pi/2$.

Die äußere Anregung und die innere Schwingung des Tanks sind daher gegenphasig. Die so wirkenden entgegengesetzten Drehmomente heben sich weitgehend auf, was die Rollbewegung deutlich verringert.

Die Grundidee ist genial-einfach und in unserem mathematischen Modell gut nachzuverfolgen. Die technische Ausführung erfordert die geeignete Kalibrierung der Parameter und ist eine eigene Kunst.

Das gesamte System ist in Wirklichkeit nicht-linear: Die Frequenz des Schiffes und des Ballastwassers hängen von der Amplitude ab, dadurch wird ihr Zusammenspiel recht kompliziert. Das Prinzip ist jedoch gleich.

Von Eigenvektoren zu Eigenfunktionen

Gegeben ist die Systemmatrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und der Startvektor $v \in \mathbb{K}^n$.
Zu lösen sei das zugehörige Anfangswertproblem (AWP)

$$\boxed{u'(t) = A\,u(t), \quad u(0) = v}$$

Aufgabe: Berechnen Sie die Lösung im Falle $Av = \lambda v$.

Lösung: (0) Wir kennen die eindeutige Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n : t \mapsto \mathrm{e}^{tA}\,v$.
Dank Eigengleichung können wir diese nun explizit ausrechnen:

$$\mathrm{e}^{tA}\,v \overset{\text{Def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k v \overset{\text{Eig}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda^k v \overset{\text{Def}}{=} \mathrm{e}^{t\lambda}\,v$$

(1) Jeder Eigenvektor $v \in \mathbb{K}^n$ mit $Av = \lambda v$ definiert eine Eigenfunktion

$$\boxed{u : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n : t \mapsto u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\,v.}$$

Diese löst das DGSystem $u'(t) = A\,u(t)$ mit dem Anfangswert $u(0) = v$.
Probe: Es gilt $u'(t) = \lambda u(t)$ und $Au(t) = \lambda u(t)$ sowie $u(0) = v$.

Von Eigenvektoren zu Eigenfunktionen

Satz Q3E: Lösung eines DGSystems durch Eigenfunktionen

Gegeben sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zu lösen sei das DGSystem $u'(t) = A\,u(t)$.
(1) Jeder Eigenvektor $v \in \mathbb{K}^n$ mit $Av = \lambda v$ definiert eine Eigenfunktion

$$\boxed{u : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n : t \mapsto u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\,v.}$$

Diese löst das DGSystem $u'(t) = A\,u(t)$ mit dem Anfangswert $u(0) = v$.
Zeitlich verschoben zu $\tilde{u}(t) = u(t - t_0)$ gilt $\tilde{u}'(t) = A\,\tilde{u}(t)$ mit $\tilde{u}(t_0) = v$.

(2) Angenommen, die Matrix A ist über $\mathbb{K}$ diagonalisierbar, erlaubt also eine Basis $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren. Dann lösen wir unser DGSystem durch eine Basis aus Eigenfunktionen $u_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda_k t}\,v_k$:

Jede Lösung des DGSystems $u'(t) = A\,u(t)$ ist eine Linearkombination $u = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$ mit eindeutigen Koeffizienten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$.

☺ Ist die Matrix A diagonalisierbar, so ist damit die Lösung leicht!
☹ Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar. Was tun? Hauptvektoren!

Von Hauptvektoren zu Hauptfunktionen

☺ Eine wichtige Anwendung von Eigen- und Hauptvektoren ist die exakte Lösung linearer Differentialgleichungssysteme $u'(t) = A\,u(t)$:

Satz Q3F: Lösung eines DGSystems durch Hauptfunktionen

Gegeben sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zu lösen sei das DGSystem $u'(t) = A\,u(t)$.
Hierzu sei $0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} v_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_\ell$ eine **Hauptvektorkette**.
Diese löst das DGSystem durch die **Hauptfunktionen** $u_1, \dots, u_\ell$ mit

$$\boxed{u_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\left[v_k + t\,v_{k-1} + \frac{t^2}{2}\,v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,v_1\right].}$$

Wie die Hauptvektoren bilden auch die Hauptfunktionen eine Kette:

$$0 \xleftarrow{A-\lambda} u_1 \xleftarrow{A-\lambda} u_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} u_\ell \quad \text{also} \quad Au_k = \lambda u_k + u_{k-1},$$
$$0 \xleftarrow{\partial-\lambda} u_1 \xleftarrow{\partial-\lambda} u_2 \xleftarrow{\partial-\lambda} \dots \xleftarrow{\partial-\lambda} u_\ell \quad \text{also} \quad u_k' = \lambda u_k + u_{k-1}.$$

Somit gilt $u_k'(t) = A\,u_k(t)$ mit Anfangswert $u_k(0) = v_k$.
Verschoben zu $\tilde{u}_k(t) = u_k(t - t_0)$ gilt $\tilde{u}_k(t_0) = v_k$.

Von Hauptvektoren zu Hauptfunktionen

Die Hauptvektoren $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$ sind unabhängig (Q1C), also auch die zugehörigen Hauptfunktionen $u_1, \dots, u_\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$, denn $u_k(0) = v_k$.

Ist A diagonalisierbar, so existiert eine Basis aus Eigenfunktionen (Q3E).
Ist A nicht diagonalisierbar, so doch immer noch jordanisierbar (Q1B):
Über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ finden wir immer eine Basis aus Hauptvektorketten!
Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ erhalten wir daraus reelle Lösungen, siehe unten.

☺ Damit ist das zunächst recht schwierige analytische Problem, ein DGSystem $u'(t) = A\,u(t)$ zu lösen, zurückgeführt auf das einfachere algebraische Problem, Hauptvektoren der Matrix A zu berechnen.

☺ Das ist mitunter mühsam aber letztlich Routinearbeit. Es kann insbesondere von Computer-Algebra-Systemen ausgeführt werden.
In günstigen Fällen gelingt uns die Lösung direkt per Handrechnung.

☺ Wir erkennen hieran Stabilität und Langzeitverhalten der Lösungen:
Für $\operatorname{re}(\lambda) < 0$ gilt exponentielles Abklingen, $|u_k(t)| \to 0$ für $t \to \infty$.
Für $\operatorname{re}(\lambda) > 0$ gilt exponentielles Wachstum, $|u_k(t)| \to \infty$ für $t \to \infty$.
Für $\operatorname{re}(\lambda) = 0$ ist u_1 beschränkt, aber $u_2, \dots, u_\ell$ wachsen polynomiell.

Anwendungsbeispiel zu Hauptfunktionen

Q369 Erläuterung

Aufgabe: Finden Sie ein Fundamentalsystem aus Hauptfunktionen zu

$$(1)\quad u' = A\,u \text{ mit } A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (2)\quad u' = B\,u \text{ mit } B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Wie verhalten sich die Lösungen für $t \to \infty$ und $\lambda < 0$? $\lambda > 0$? $\lambda = 0$?

Lösung: (1) Die Matrix A hat den doppelten Eigenwert λ.
Eigenvektoren bestimmen wir durch $(A - \lambda)v = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0, \quad \text{mögliche Lösungen } v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten das Fundamentalsystem bzw. die Fundamentalmatrix:

$$u_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad U(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

☺ Jede andere Basis $(v_1, v_2)^\top$ des $\mathbb{C}^2$ wäre hier ebenso möglich.
Sie führt zum Fundamentalsystem $u_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\, v_1$, $u_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\, v_2$.

⚠ Eigenvektoren von A entsprechen Eigenfunktionen von $u' = A\,u$.

Anwendungsbeispiel zu Hauptfunktionen

Q370 Erläuterung

(2) Auch die Matrix B hat den doppelten Eigenwert λ. Eigenvektoren:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v_1 = 0, \quad \text{eine Lösung } v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wir suchen daher noch einen Hauptvektor v_2 über v_1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v_2 = v_1, \quad \text{eine Lösung } v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten das Fundamentalsystem bzw. die Fundamentalmatrix:

$$u_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad U(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} & t\,\mathrm{e}^{\lambda t} \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

☺ Andere Wahlen sind möglich: Jeder Vektor $v_1 = (a, 0)^\top$ mit $a \neq 0$ ist Eigenvektor, und jeder Vektor $v_2 = (b, a)^\top$ liegt darüber als Hauptvektor.

$$u_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix},\ u_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{bmatrix} at + b \\ a \end{bmatrix} \Longrightarrow U(t) = \begin{bmatrix} a\,\mathrm{e}^{\lambda t} & (at + b)\,\mathrm{e}^{\lambda t} \\ 0 & a\,\mathrm{e}^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

⚠ Hauptvektoren von A entsprechen Hauptfunktionen von $u' = A\,u$.

Von komplexen zu reellen Lösungen

Q371 Erläuterung

Zur Vereinfachung rechnen wir meist über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.
Vorteil: Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hat n Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.
Für eine reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ werden wir im Allgemeinen nicht n reelle Eigenwerte finden: Wir brauchen auch komplexe Eigenwerte!
Für reelle DGSysteme wollen wir aber meist nur reelle Lösungen!
Diesen Zusammenhang können wir nun klären, wie bereits gesehen:

Lemma Q3G: Konjugation von Lösungen und Basiswechsel

(0) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zu lösen sei das DGSystem

$$\boxed{u'(t) = A\,u(t).}$$

Ist u Lösung von $u'(t) = A\,u(t)$, so ist $\overline{u}$ Lösung von $\overline{u}'(t) = \overline{A}\,\overline{u}(t)$.
(1) Genau dann ist die Matrix reell, also $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wenn $\overline{A} = A$ gilt.
In diesem Fall ist zu u mit $u' = A\,u$ auch $\overline{u}$ mit $\overline{u}' = A\,\overline{u}$ eine Lösung.
Somit sind $\operatorname{re} u = \frac{1}{2}(u + \overline{u})$ und $\operatorname{im} u = \frac{1}{2\mathrm{i}}(u - \overline{u})$ reelle Lösungen.
Dies entspricht einem Basiswechsel von $(u, \overline{u})$ zu $(\operatorname{re} u, \operatorname{im} u)$.

Von komplexen zu reellen Lösungen

Q372 Erläuterung

Satz Q3H: von komplexen zu reellen Lösungen

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zu lösen sei das DGSystem $u'(t) = A\,u(t)$.
Sei $0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_\ell$ eine Hauptvektorkette zu $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\omega$.
Dann ist $0 \xleftarrow{A-\overline{\lambda}} \overline{v_1} \dots \xleftarrow{A-\overline{\lambda}} \overline{v_\ell}$ eine Hauptvektorkette zu $\overline{\lambda} = \sigma - \mathrm{i}\omega$.

Somit hat das DGSystem die folgenden 2ℓ **reellen Lösungen**:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{re} u_k(t) &= \mathrm{e}^{\sigma t} \operatorname{re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\left[v_k + t\,v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1\right]\right) \\ \operatorname{im} u_k(t) &= \mathrm{e}^{\sigma t} \operatorname{im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\left[v_k + t\,v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1\right]\right) \end{aligned}}$$

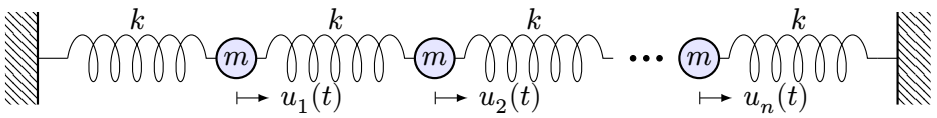
Im Falle $\omega \neq 0$ sind diese 2ℓ Lösungen linear unabhängig. (Im Falle $\omega = 0$ erhalten wir nur eine Kette von ℓ linear unabhängigen Lösungen.)

☺ Wir erkennen hieran Stabilität und Langzeitverhalten der Lösungen, wie oben erklärt, je nach Vorzeichen $\sigma > 0$ oder $\sigma < 0$ oder $\sigma = 0$.

Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

Wir haben nun die nötigen Begriffe und Techniken zu DGSystemen und wollen damit ein reales Phänomen mathematisch untersuchen.

Wir untersuchen die Ausbreitung einer Welle, zum Beispiel einer Druck- oder Schallwelle, zunächst als diskretes, endlich-dimensionales Modell: mit Federn verbundene Massenpunkte. In diesem schönen Beispiel können wir alles explizit berechnen und anschaulich interpretieren. Zudem können wir unsere Methoden der linearen Algebra und Analysis erproben und schärfen.



Aufgabe: (1) Formulieren Sie das hier skizzierte dynamische System als ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

(2) Welche Struktur hat die Lösungsmenge? (a) „Form“ und (b) „Größe“?

(3) Finden Sie alle Lösungen zum Produktansatz $u_j(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$.

(4) Gewinnen Sie hieraus eine reelle Basis des Lösungsraumes.

Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

Lösung: (1a) Auslenkung $u_j(t) \in \mathbb{R}$ aus der Ruhelage, lineare Rückstellkraft $F_j = k(u_{j+1} - u_j) + k(u_{j-1} - u_j)$, Newtons Bewegungsgesetz $F_j = m\ddot{u}_j$. Mit $c^2 = k/m$ erhalten wir

$$\boxed{\ddot{u}_j(t) = c^2\big[u_{j-1}(t) - 2u_j(t) + u_{j+1}(t)\big] \quad \text{mit} \quad u_0(t) = u_{n+1}(t) = 0.}$$

Dies gilt für jeden der Massenpunkte $j = 1, \dots, n$ im Inneren der Kette. Randbedingung: Die beiden Enden $u_0 = u_{n+1} = 0$ sind hierbei fixiert. Anfangswerte: Position $u_j(0)$ und Geschwindigkeit $\dot{u}_j(0)$ für $j = 1, \dots, n$.

(1b) Diese Bewegungsgleichung ist zweiter Ordnung in n Unbekannten. Wir reduzieren sie nun äquivalent zu erster Ordnung in $2n$ Unbekannten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}(t) \\ \ddot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ c^2 B_n & 0_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}$$

Für $x = (u, \dot{u})$ ist dies eine homogene lineare Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ mit der angegebenen Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$. Hier ist 0_n die $(n \times n)$–Nullmatrix und I_n die $(n \times n)$–Einheitsmatrix.

Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

Die Bandmatrix $B = B_n$ kodiert hierbei die geometrische Anordnung:

$$B_n := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad A := \begin{bmatrix} 0 & E \\ c^2 B & 0 \end{bmatrix}$$

(2) Wir suchen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$ mit $\dot{x}(t) = A\,x(t)$. Dank Struktursatz Q3D: Die Lösungsmenge ist (a) ein $\mathbb{R}$–Vektorraum (b) der Dimension $2n$.

Diese wichtige Information strukturiert und erleichtert unsere Rechnung: Wir müssen nicht alle – unendlich vielen! – Lösungen berechnen, als Basis genügt uns, $2n$ linear unabhängige Lösungen zu finden! Dabei hilft physikalisches Verständnis: Unser Produktansatz liefert tatsächlich $2n$ unabhängige Lösungen; jede davon ist eine *stehende Welle*. Wo bleiben die erwarteten *wandernden Wellen*? Die Antwort ist ebenso einfach wie verblüffend: Je nach Startzustand $x(0)$ erhalten wir eine Linearkombination stehender Wellen, ihre Summe ist eine wandernde Welle! Basiswechsel: Stehende Wellen und wandernde Wellen sind zwei mögliche Basen des Lösungsraums.

Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

(3) Einsetzen unseres Produktansatzes $u_j(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha j}$ ergibt:

$$-\omega^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha j} = c^2\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(j-1)} - 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha j} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(j+1)}\big] \quad \text{also}$$

$$\omega^2 = -c^2(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} - 2 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}) = -c^2(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2})^2 = 4c^2\sin(\alpha/2)^2$$

Zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ erhalten wir $\omega = \pm 2c\sin(\alpha/2)$. Reelle Lösungen sind:

$$u_j(t) = \begin{cases} \sin(\alpha j)\cos(\omega t), & \cos(\alpha j)\cos(\omega t), \\ \sin(\alpha j)\sin(\omega t), & \cos(\alpha j)\sin(\omega t), \end{cases}$$

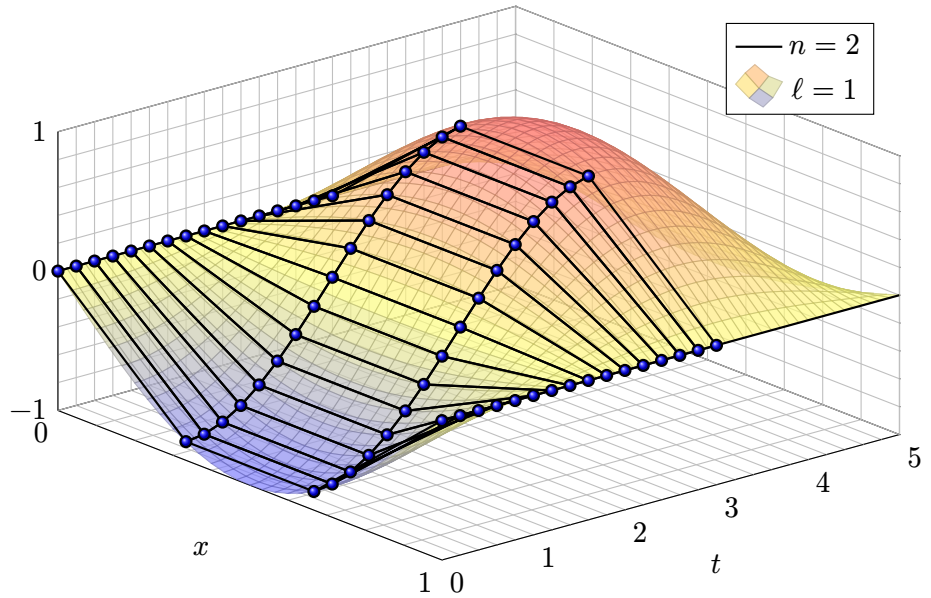
Randbedingungen $u_0 = u_{n+1} = 0$: Die Lösungen links erfüllen $u_0(t) = 0$, und $u_{n+1}(t) = 0$ für $\alpha = \ell\pi/(n+1)$ und $\ell = 1, \dots, n$. **Eigenfunktionen**:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} u_{\ell,j}(t) &= \sin(\alpha_\ell j)\cos(\omega_\ell t) \\ v_{\ell,j}(t) &= \sin(\alpha_\ell j)\sin(\omega_\ell t) \end{aligned}\right\} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \alpha_\ell = \ell\pi/(n+1), \\ \omega_\ell = 2c\sin(\alpha_\ell/2). \end{cases}}$$

(4) Dies sind $2n$ linear unabhängige Lösungen, also eine **(Eigen)Basis**! Wir haben n verschiedene Eigenwerte $\omega_1^2 < \omega_2^2 < \cdots < \omega_n^2$ mit je zwei unabhängigen Eigenfunktionen, $\partial_t^2 u_\ell = -\omega_\ell^2 u_\ell$ und $\partial_t^2 v_\ell = -\omega_\ell^2 v_\ell$.

Eigenfunktionen: Grundschwingung ($\ell = 1$)

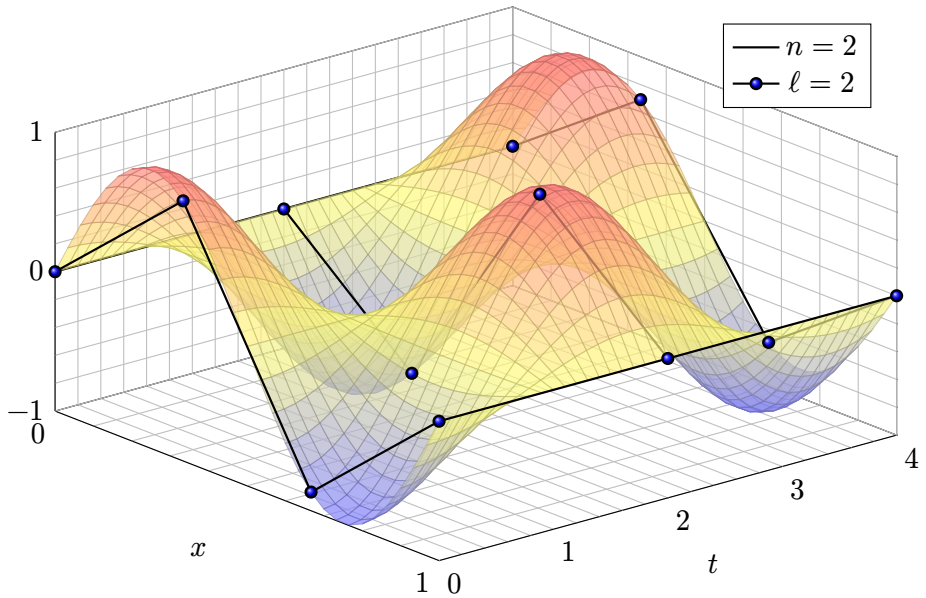
Q377



Dies ist eine stehende Welle; Randbedingungen $u_0(t) = u_{n+1}(t) = 0$.

Eigenfunktionen: Oberschwingung ($\ell = 2$)

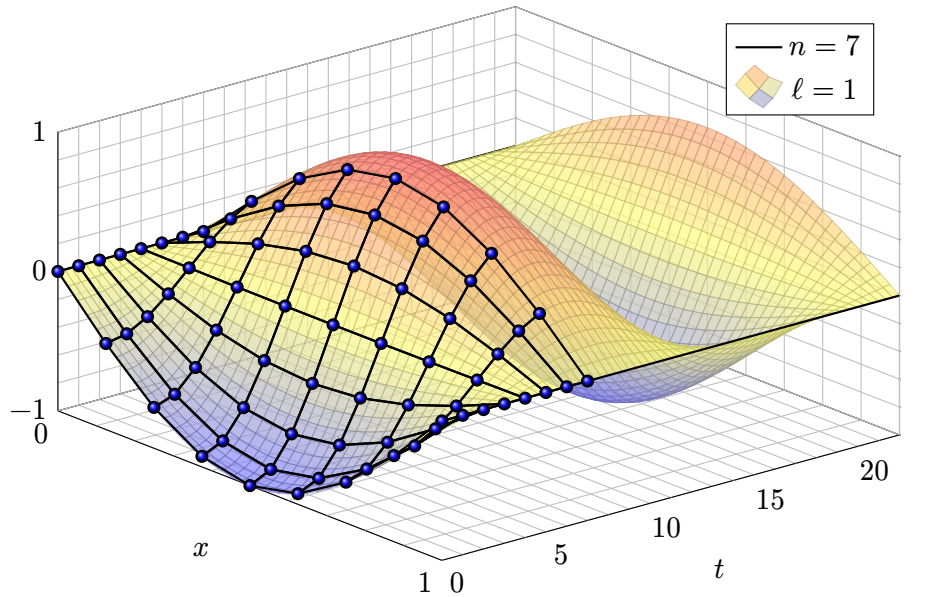
Q378



Auch dies ist eine stehende Welle; die Frequenz $\omega_2 > \omega_1$ wird größer.

Eigenfunktionen: Grundschwingung ($\ell = 1$)

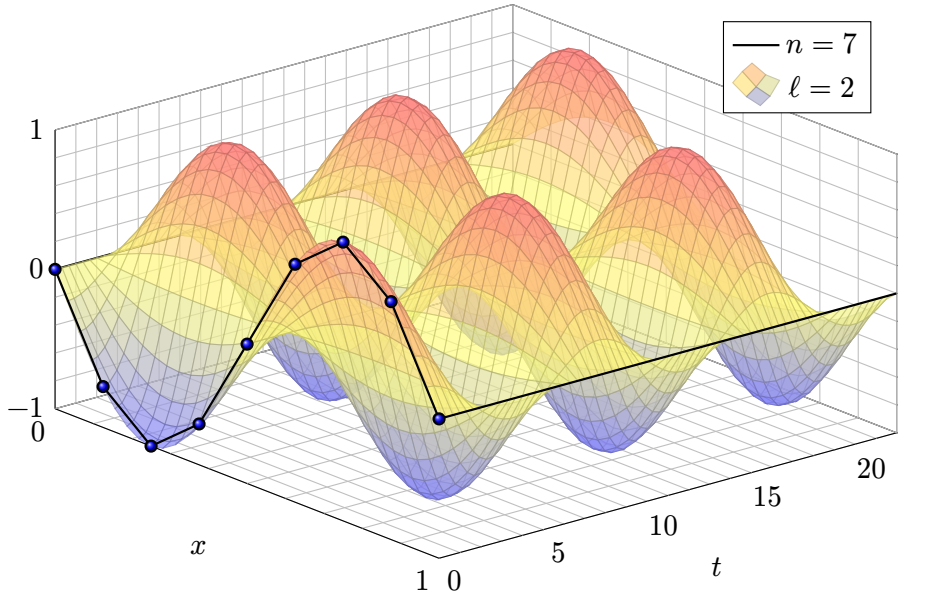
Q379



Dieses Phänomen kennt jedes Kind vom Seilspringen. Probieren Sie es!

Eigenfunktionen: erste Oberschwingung ($\ell = 2$)

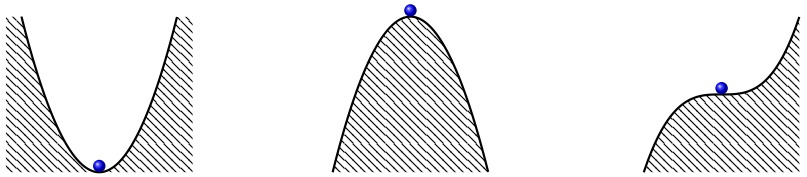
Q380



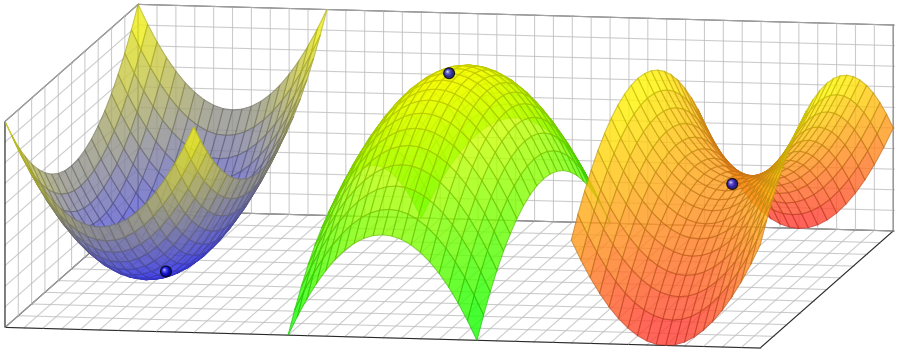
☺ Von der Intuition zur Präzision: Nun können Sie alles ausrechnen!

Gleichgewichtslagen und In/Stabilität von Fixpunkten

Q401



Der Fixpunkt ist stabil / attraktiv. | Der Fixpunkt ist instabil / repulsiv. | kritischer Fixpunkt (höhere Ordnung)



Gleichgewichtslagen und In/Stabilität von Fixpunkten

Q402
Erläuterung

Anfangsdaten sind oft zufälligen kleinen Schwankungen unterworfen, etwa durch kleine äußere Störungen oder ungenaue Messdaten.

Wir wollen das Langzeitverhalten in der Nähe von Fixpunkten verstehen. Hier gilt $\dot{x}(t) = f(x(t))$, für $x(t) = x_0 + u(t) \approx x_0$ also $\dot{u}(t) \approx f'(x_0)\, u(t)$.

- Gilt Abklingen $|u(t)| \to 0$? sogar exponentiell?
- Gilt Beschränktheit gemäß $0 < c_0 \le |u(t)| \le c_1 < \infty$?
- Gilt Wachstum $|u(t)| \to \infty$? nur polynomiell? gar exponentiell?

⚠ Instabile Fixpunkte sind meist Opfer des **Schmetterlingseffekts**! Sie zeigen eine extrem sensible Abhängigkeit von den Anfangsdaten. Typischerweise können kleine Störungen exponentiell anwachsen. Beispiele wie $\dot{x}(t) = a\, x(t)$ zeigen, dass dies tatsächlich vorkommt.

⚠ Technische Anwendungen erfordern meist stabile Gleichgewichte! Die **Stabilitätstheorie** untersucht die Auswirkung kleiner Störungen, die als Abweichung von Gleichgewichtszuständen auftreten, etwa in der Technischen Mechanik oder in der Regelungstechnik.

Eindimensionale Dynamik um einen Fixpunkt

Q403
Erläuterung

Aufgabe: (1) Wir untersuchen $\dot{x}(t) = a\, x(t)$ mit $x(0) = x_0$ und $a \in \mathbb{R}$. Welches asymptotische Verhalten haben die Lösungen für $t \to \infty$?

(2) Welches Verhalten erwarten Sie für eine nicht-lineare Gleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$ mit $x(0) = x_0$ und $f(x_0) = 0$? Ist x_0 ein Fixpunkt? Welche Rolle spielt die Ableitung $f'(x_0)$ für die Stabilität?

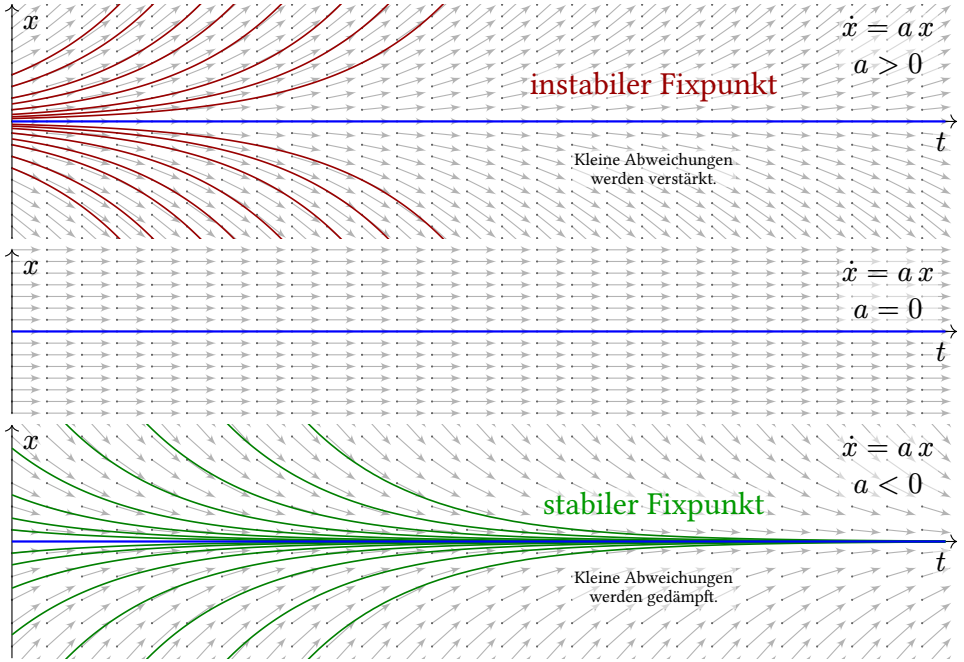
Lösung: (1) Dieses AWP hat als eindeutige Lösung $x(t) = x_0\, \mathrm{e}^{at}$. Die Dynamik eindimensionaler linearer Systeme ist sehr einfach:

- $a > 0$ streckt; Störungen werden exponentiell verstärkt. Der einzige Fixpunkt 0 ist **instabil**.
- $a < 0$ staucht: Störungen werden exponentiell gedämpft. Der einzige Fixpunkt 0 ist **stabil**.
- Im Falle $a = 0$ ist jeder Startpunkt x_0 ein Fixpunkt.

(2) Nicht-lineare Systeme sind wesentlich komplizierter! In der Nähe eines Fixpunktes können wir linearisieren und annähernd eine **lineare Dynamik** erwarten. Diese Technik wird im Folgenden ausgeführt.

Eindimensionale Dynamik um einen Fixpunkt

Q404
Erläuterung



Linearisierung um Fixpunkte und In/Stabilität

Wir betrachten ein **autonomes Differentialgleichungssystem**:

$$\boxed{\dot{x}(t) = f(x(t))}$$

Hierbei sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Die rechte Seite $f(x)$ hängt nicht explizit von der Zeit t ab, daher **autonom**. Zu jedem Startpunkt $x_0 \in \mathring{G}$ existiert eine eindeutige Lösung $x : [0, T[\to \mathring{G}$ für $T > 0$ mit $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(t) = f(x(t))$ für $t \in [0, T[$. Für das maximale T gilt entweder $T = \infty$ oder $f(t) \to \partial G \cup \{\infty\}$ für $t \nearrow T < \infty$.

Aufgabe: Was geschieht bei Start nahe einer Gleichgewichtslage?

Lösung: Jeder Startpunkt x_0 mit $f(x_0) = 0$ ist ein **Fixpunkt**: $x(t) = x_0$.

Für kleine Auslenkungen $x(t) = x_0 + u(t)$ können wir **linearisieren**:

$$\dot{u}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(x_0 + u(t)) \approx f(x_0) + f'(x_0)\, u(t) = A\, u(t)$$

Sei $x : [0, T[\to \mathring{G}$ die Lösung zum Startpunkt $x(0) = x_0$ mit $\dot{x}(t) = f(x(t))$ für alle $t \in [0, T[$.
Ruhelage: Genau dann herrscht Konstanz $x(t) = x_0$ für alle $t \in [0, T[$, wenn $f(x_0) = 0$ gilt.
Die **Jacobi–Matrix** $A = f'(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ von f beschreibt das Verhalten um den Fixpunkt x_0:
Wir erhalten als Näherung die lineare Differentialgleichung $\dot{u}(t) = A\, u(t)$. Hierdurch erhalten lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten ihre zentrale Bedeutung!

Linearisierung um Fixpunkte und In/Stabilität

☺ Kleine Auslenkungen aus der Ruhelage x_0 folgen näherungsweise dem linearen DGSystem mit konstanter Systemmatrix $A = f'(x_0)$:

$$\boxed{\text{nicht-linear } \dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \rightsquigarrow \quad \text{linear } \dot{u}(t) = A\, u(t)}$$

☺ Linearisierung vereinfacht die ursprüngliche Gleichung enorm!
Jede Lösung dieser Approximation ist von der Form $u(t) = \mathrm{e}^{tA}\, u_0$.
Zum Eigenwert $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\omega$ gehören Eigen- und Hauptfunktionen

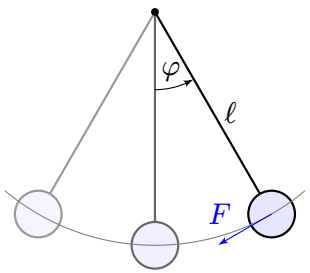
$$u(t) = \mathrm{e}^{\sigma t}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \Big[v_k + t\, v_{k-1} + \tfrac{t^2}{2} v_{k-2} + \ldots + \tfrac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \Big],$$

siehe Q3F und Q3H. Damit erkennen wir die **Stabilität** des Fixpunktes:

- $\mathrm{re}(\lambda) < 0$ staucht; kleine Störungen werden exponentiell gedämpft. Der Fixpunkt ist **stabil**, wenn $\mathrm{re}(\lambda) < 0$ für *alle* Eigenwerte gilt.
- $\mathrm{re}(\lambda) > 0$ streckt; kleine Störungen werden exponentiell verstärkt. Der Fixpunkt ist **instabil**, wenn $\mathrm{re}(\lambda) > 0$ für *einen* Eigenwert gilt.

Der Grenzfall $\mathrm{re}(\lambda_k) = 0$ bedarf genauerer Analyse (höhere Ordnung).

Linearisierung um Fixpunkte und In/Stabilität



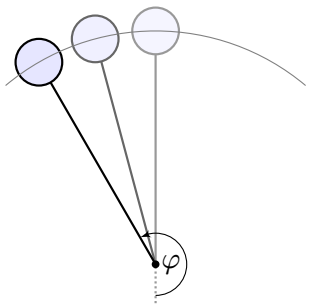
Dynamisches System:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ -(g/\ell)\sin\varphi - 2\delta\omega \end{bmatrix}$$

Linearisierung um $(0, 0)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(g/\ell) & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Der Fixpunkt $(0, 0)$ ist stabil.



Dynamisches System:

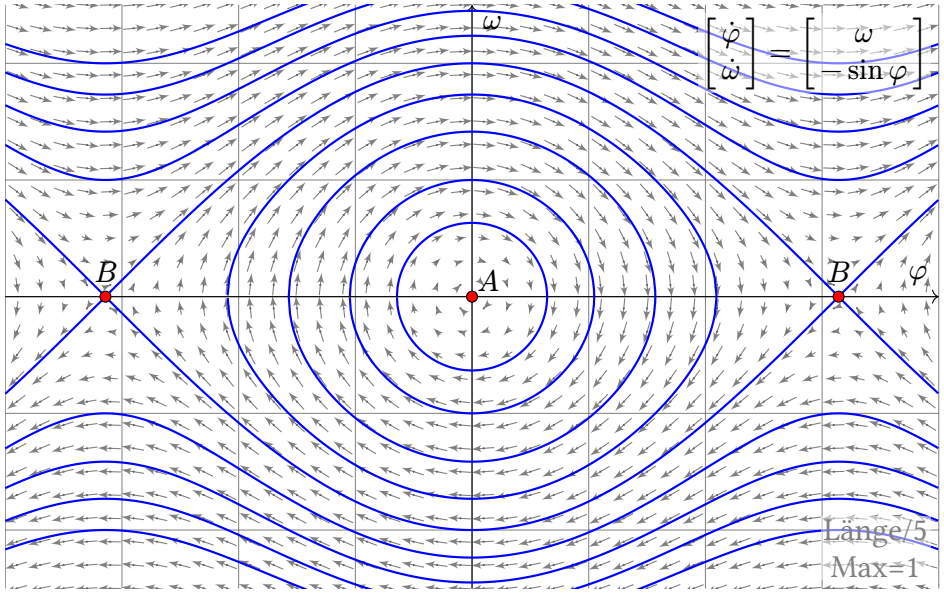
$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ -(g/\ell)\sin\varphi - 2\delta\omega \end{bmatrix}$$

Linearisierung um $(\pi, 0)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +(g/\ell) & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Der Fixpunkt $(\pi, 0)$ ist instabil.

Linearisierung um Fixpunkte und In/Stabilität



Wir erkennen harmonische Oszillation um das untere Gleichgewicht A.
Der obere Scheitelpunkt B hingegen ist ein instabiles Gleichgewicht.

Zweidimensionale Dynamik um einen Fixpunkt

Wir untersuchen das DGSystem $\dot{u}(t) = A\,u(t)$ zur Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:
Polynom $\det(A - XI) = X^2 - 2aX + d$, Eigenwerte $\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - d}$.
Spur $\operatorname{tr}(A) = 2a$, Determinante $\det(A) = d$, Diskriminante $\Delta = a^2 - d$.

Aufgabe: Skizzieren Sie die Dynamik je nach Lage der Eigenwerte (14 Fälle) und untersuchen Sie das Verhalten von $|u(t)|$ für $t \to \infty$.

- Gilt Abklingen $|u(t)| \to 0$ für $t \to \infty$? sogar exponentiell?
- Gilt Beschränktheit $0 < c_0 \le |u(t)| \le c_1 < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\ge 0}$?
- Oder wächst $|u(t)|$ unbeschänkt? polynomiell? gar exponentiell?

Lösung: Wir unterscheiden zunächst reelle und komplexe Eigenwerte:

$a^2 < d$: komplex-konjugiert $\lambda_{1,2} = a \pm \mathrm{i}b$, $\qquad A \sim \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

$a^2 > d$: zwei reelle Eigenwerte $\lambda_1 < \lambda_2$, $\qquad A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$a^2 = d$: ein doppelter Eigenwert λ, $\qquad A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ oder $A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

Zweidimensionale Dynamik um einen Fixpunkt

☺ Damit haben wir alle möglichen Fälle vollständig gelöst!
Dank Eigen- und Hauptfunktionen wird alles klar und einfach.

Ähnlichkeit $A \sim B$ bedeutet, dass A und B konjugiert sind (P2E) ,
also $B = T^{-1}AT$ für eine geeignete Basiswechselmatrix $T \in \mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}$.

Dies beschreibt den Übergang zu unserer neuen Basis aus Eigen- bzw. Hauptvektoren, in der sich das Problem wesentlich einfacher darstellt.

☺ Wir finden drei Klassen, je nach Vorzeichen der Diskriminante

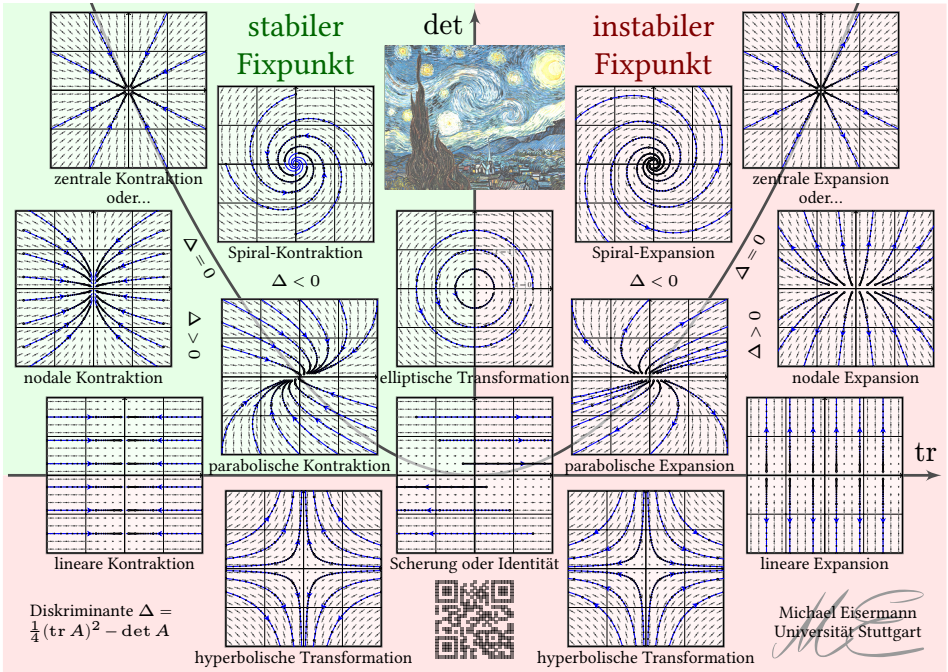
$$\boxed{\Delta = \tfrac{1}{4}(\operatorname{tr} A)^2 - \det A.}$$

Das Vorzeichen der Diskriminante unterscheidet, wie oben gesehen, zwischen reellen Eigenwerten und (echt) komplexen Eigenwerten.

Der Fixpunkt ist stabil, wenn $\operatorname{re}(\lambda) < 0$ für beide Eigenwerte gilt.
Das bedeutet: Kleine Störungen werden exponentiell gedämpft.

Das gilt hier genau dann, wenn $\operatorname{tr}(A) < 0$ und $\det(A) > 0$ gilt.
Die stabile Region ist grün gefärbt, die instabile Region rot.

Zweidimensionale Dynamik um einen Fixpunkt



Zweidimensionale Dynamik um einen Fixpunkt

Diese schöne Graphik gibt einen guten Überblick: Sie klassifiziert die (linearisierte) Dynamik um einen Fixpunkt in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

Im obigen Beispiel des mathematischen Pendels haben wir bereits zwei Fälle gesehen, einen stabilen und einen instabilen Fixpunkt.

Die folgenden Folien diskutieren alle gezeigten Einzelfälle im Detail, wir zoomen also auf einzelne Punkte dieser Gesamtkunstwerks.

⚠ Wir betrachten hier als einfaches Modell die linearisierte Gleichung.
Nicht-lineare dynamische Systeme sind meist wesentlich komplizierter!

Dennoch gibt uns das linearisierte Modell sehr nützliche Auskunft, denn im Kleinen verhält sich das nicht-lineare Modell ganz ähnlich:

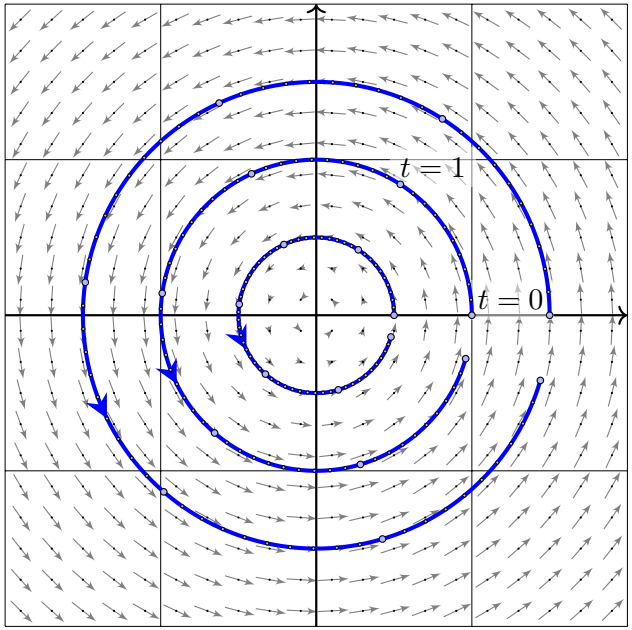
☺ Für die Stabilität des Fixpunktes x_0 genügt die Matrix $A = f'(x_0)$, falls alle Eigenwerte negativen Realteil haben (Satz von Lyapunov).

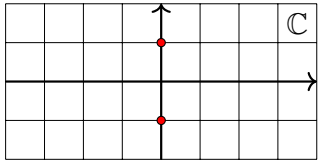
☺ In diesem Falle sieht die lokale Dynamik von $\dot{x} = f(x)$ topologisch aus wie im linearisierten Modell $\dot{u} = Au$ (Satz von Hartman–Grobman).

☺ Dieser Linearisierungssatz gilt ganz allgemein in jeder Dimension n um jeden *hyperbolischen* Fixpunkt (ohne Eigenwerte mit Realteil Null).

Wirbelpunkt: elliptische Transformation

Q413





Komplexe Eigenwerte

$\lambda_{1,2} = \pm ib$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

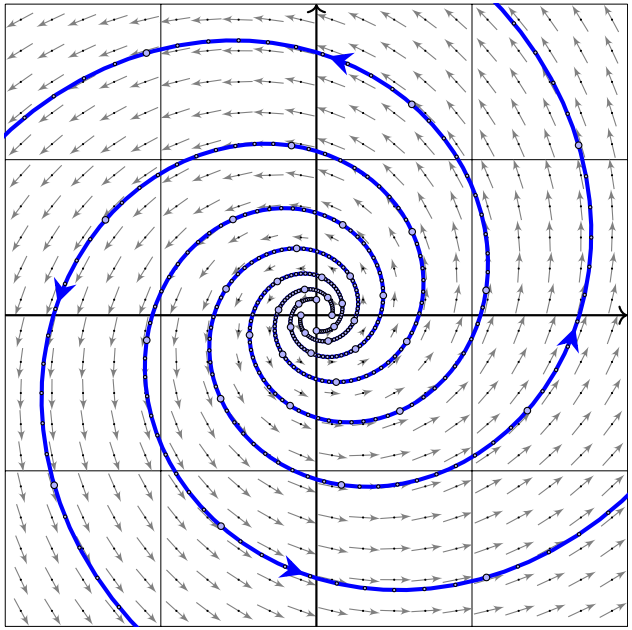
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

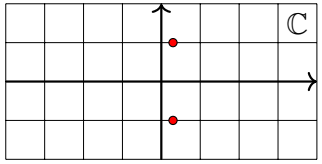
Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Instabiler Strudel: Spiral-Expansion

Q414





Komplexe Eigenwerte

$\lambda_{1,2} = a \pm ib, \quad a > 0$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

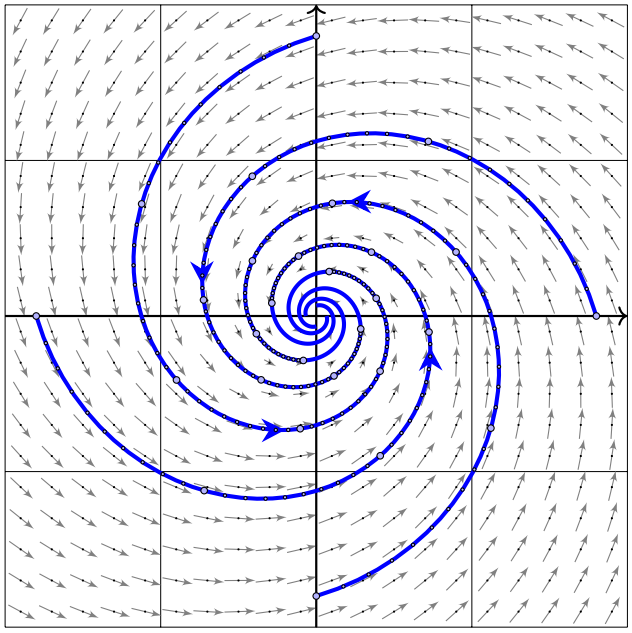
$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & -1 \\ 1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

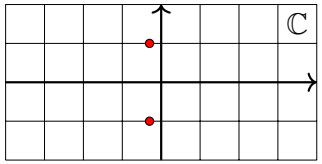
Fundamentalmatrix

$$e^{0.3t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Stabiler Strudel: Spiral-Kontraktion

Q415





Komplexe Eigenwerte

$\lambda_{1,2} = a \pm ib, \quad a < 0$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -0.3 & -1 \\ 1 & -0.3 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{-0.3t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Stabilität und Eigenwerte

Q416
Erläuterung

☺ Die ersten drei Fälle komplex-konjugierter Eigenwerte zeigen bereits den Einfluss auf das Langzeitverhalten und die Stabilität der Lösungen:

- $\mathrm{re}(\lambda) < 0$ staucht; kleine Störungen werden exponentiell gedämpft. Der Fixpunkt 0 ist **stabil**, wenn $\mathrm{re}(\lambda) < 0$ für alle Eigenwerte gilt.
- $\mathrm{re}(\lambda) > 0$ streckt; kleine Störungen werden exponentiell verstärkt. Der Fixpunkt 0 ist **instabil**, wenn $\mathrm{re}(\lambda) > 0$ für einen Eigenwert gilt.

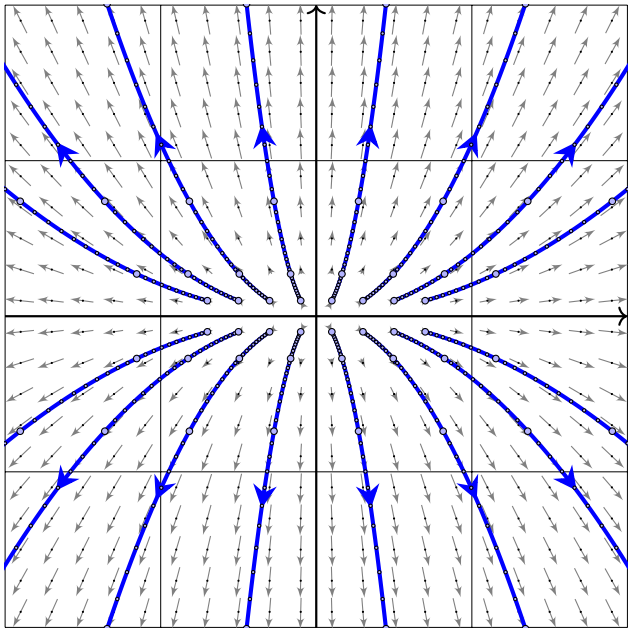
☺ Wir diskutieren die verbleibenden Fälle reeller Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2$:

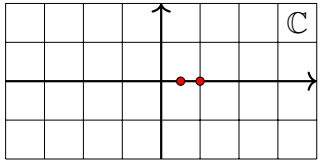
Im Falle $\lambda_1 < \lambda_2$ unterscheiden wir fünf Fälle je nach Lage zu 0:
Die Matrix A ist hierbei wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ immer diagonalisierbar.

Im Falle $\lambda_1 = \lambda_2$ unterscheiden wir drei Fälle je nach Lage zu 0:
Im einfachsten Falle ist $A \sim \mathrm{diag}(\lambda, \lambda)$ diagonalisierbar (drei Fälle); andernfalls nutzen wir Hauptvektoren zur Jordan–Form (drei Fälle).

☺ Dank unserer gründlichen Vorarbeit zu Eigen- und Hauptvektoren können wir alle 14 Fälle vollständig lösen und übersichtlich darstellen. Ebenso gelingt die Klassifikation linearer Dynamik in jeder Dimension!

Instabiler Knoten: nodale Expansion





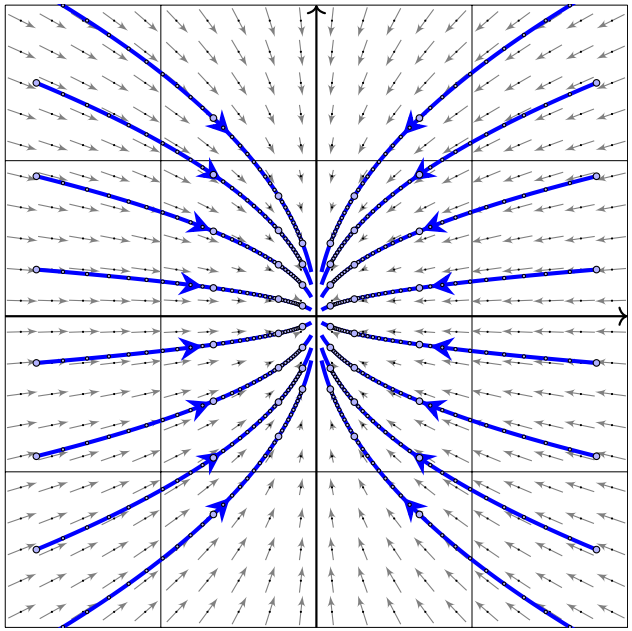
Zwei reelle Eigenwerte
$0 < \lambda_1 < \lambda_2$

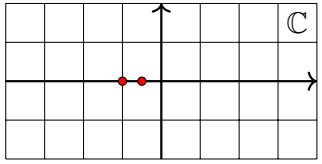
Allgemeiner Fall
$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel
$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix
$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{t/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t} \end{bmatrix}$$

Stabiler Knoten: nodale Kontraktion





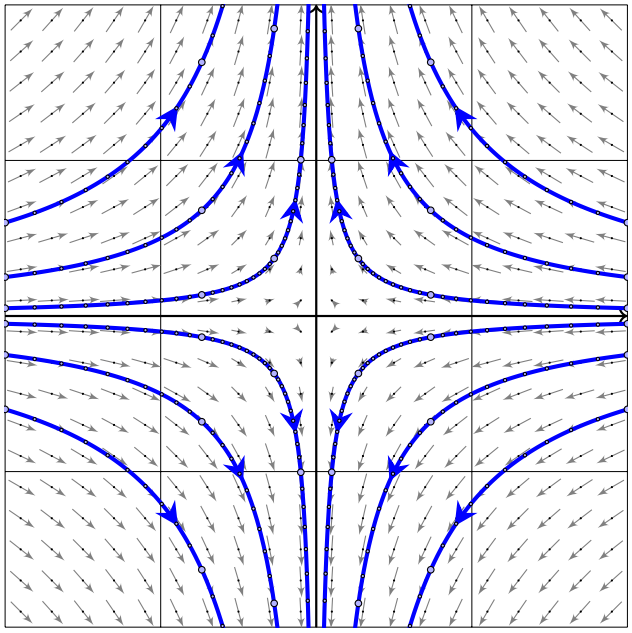
Zwei reelle Eigenwerte
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

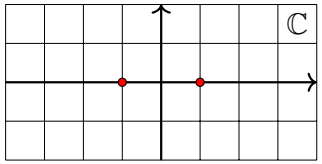
Allgemeiner Fall
$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix
$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t/2} \end{bmatrix}$$

Sattelpunkt: hyperbolische Transformation





Zwei reelle Eigenwerte
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

Allgemeiner Fall
$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix
$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t} \end{bmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

☺ Die hier illustrierten Beispiele zeigen die typische ebene Dynamik um den Fixpunkt $(0,0)^\top$ im elliptischen und im hyperbolischen Fall: Die Eigenwerte geben Auskunft über Dynamik und Stabilität!

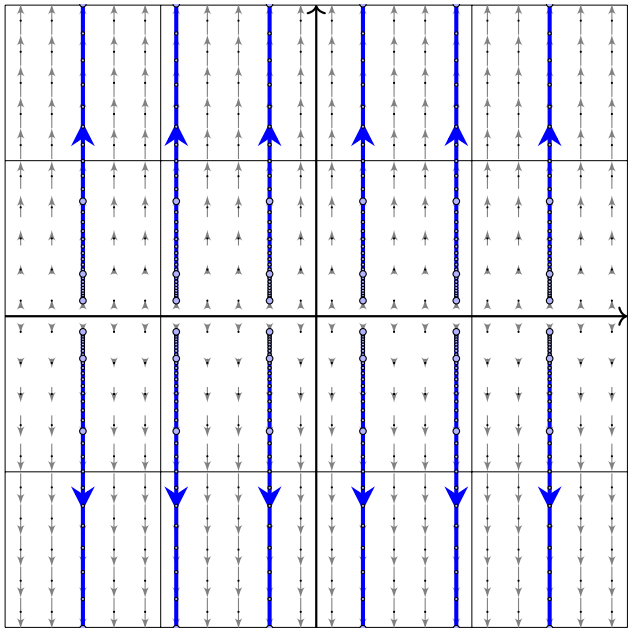
- Sind beide Eigenwerte positiv, so erhalten wir eine Expansion, typischerweise zwei Eigenräume / Achsen: langsam und schnell.
- Sind beide Eigenwerte negativ, so erhalten wir eine Kontraktion, typischerweise zwei Eigenräume / Achsen: langsam und schnell.
- Ist einer negativ und einer positiv, so erhalten wir eine stabile und eine instabile Richtung, wie im hyperbolischen Fall gezeigt.

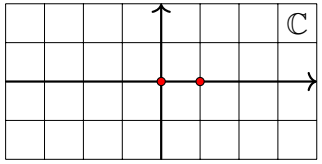
☺ Die nächsten Folien zeigen schließlich alle Rand- und Sonderfälle. Zur Vereinfachung transformieren wir die beiden Eigen/Hauptvektoren der Systemmatrix A auf $(1,0)^\top$ und $(0,1)^\top$; das ist übersichtlicher.

⚠ Im Allgemeinen liegen diese beiden Achsen beliebig in der Ebene; sie sind typischerweise verdreht und stehen nicht senkrecht zueinander. Nach Koordinatenwechsel entsteht das hier gezeigte, einfache Bild. Die Aufgabe auf Seite Q429 zeigt ein realistisches Beispiel.

Lineare Expansion

Q421
Erläuterung





Zwei reelle Eigenwerte

$0 = \lambda_1 < \lambda_2$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

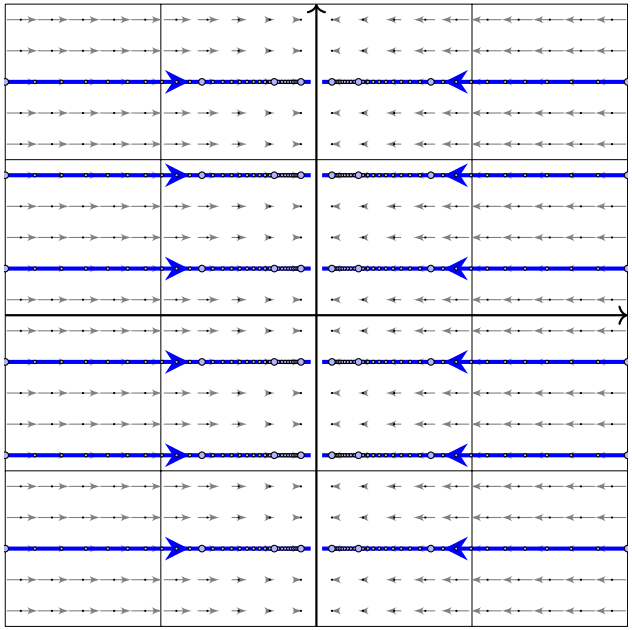
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

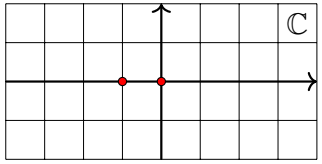
Fundamentalmatrix

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{bmatrix}$$

Lineare Kontraktion

Q422
Erläuterung





Zwei reelle Eigenwerte

$\lambda_1 < \lambda_2 = 0$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

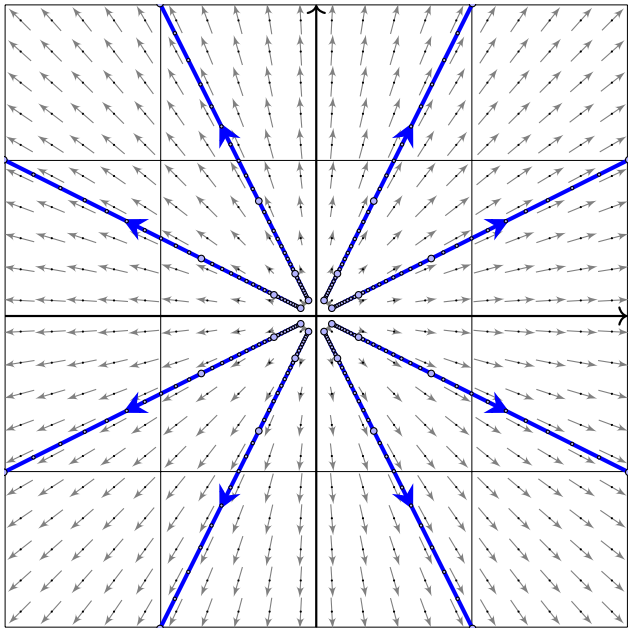
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

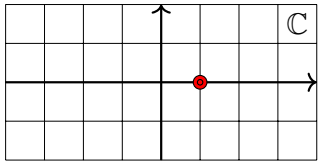
Fundamentalmatrix

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zentrale Expansion

Q423
Erläuterung





Doppelter Eigenwert

$\lambda > 0$

Diagonalisierbarer Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

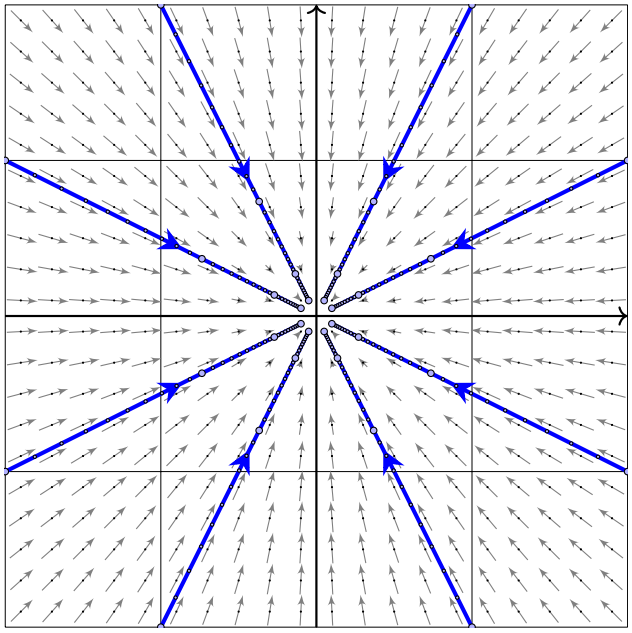
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

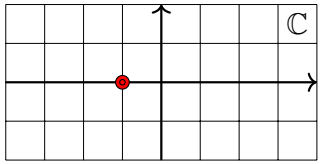
Fundamentalmatrix

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{bmatrix}$$

Zentrale Kontraktion

Q424
Erläuterung





Doppelter Eigenwert

$\lambda < 0$

Diagonalisierbarer Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

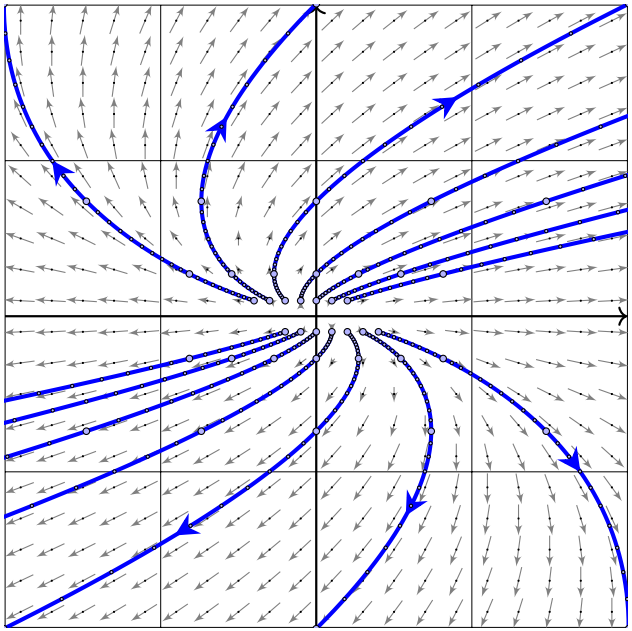
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

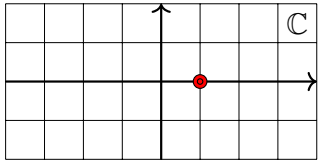
Fundamentalmatrix

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}$$

Instabiler Knoten: parabolische Expansion

Q425





Doppelter Eigenwert
$\lambda > 0$

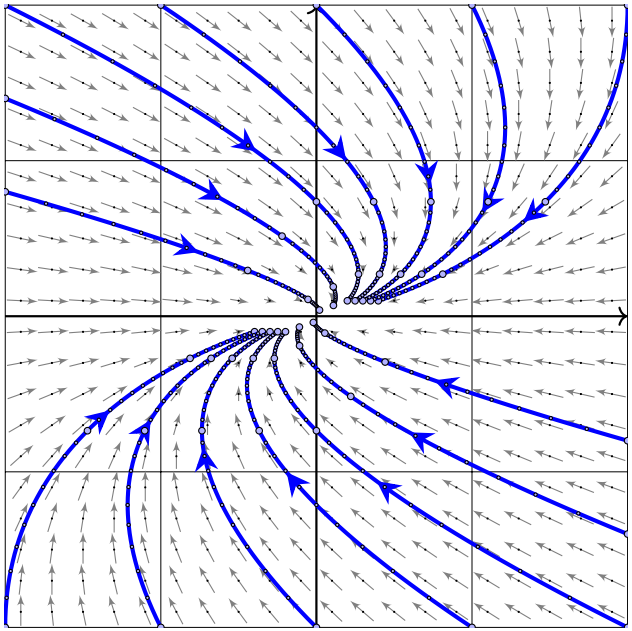
Nicht-diagonalisierbar
$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

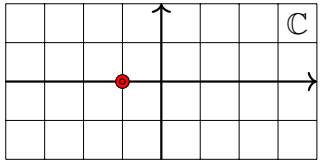
Konkretes Beispiel
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix
$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{t} & t\,\mathrm{e}^{t} \\ 0 & \mathrm{e}^{t} \end{bmatrix}$$

Stabiler Knoten: parabolische Kontraktion

Q426





Doppelter Eigenwert
$\lambda < 0$

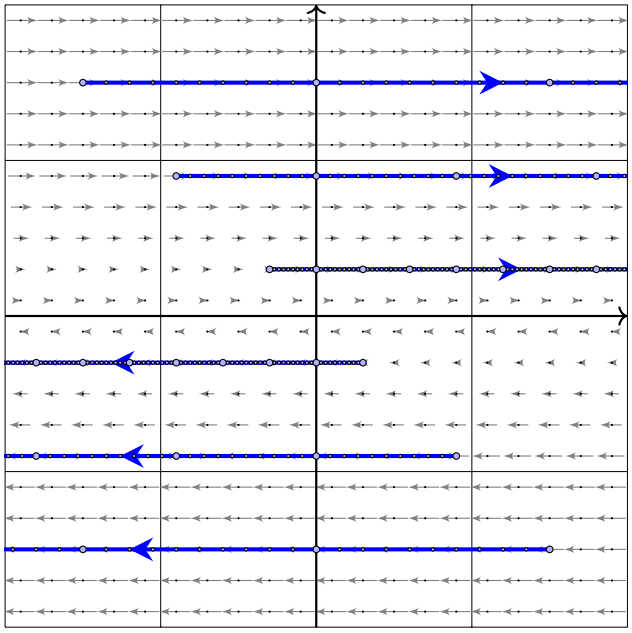
Nicht-diagonalisierbar
$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

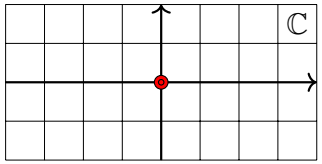
Konkretes Beispiel
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix
$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} & t\,\mathrm{e}^{-t} \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}$$

Scherung

Q427





Doppelter Eigenwert
$\lambda = 0$

Nicht-diagonalisierbar
$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix
$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalisierbar oder nicht diagonalisierbar?

Q428
Erläuterung

Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit doppeltem Eigenwert λ gilt $\lambda \in \mathbb{R}$ sowie

$$\text{entweder} \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Im ersten Fall existiert eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A. Die Matrix A wird hierdurch diagonalisiert. Es gilt dann:

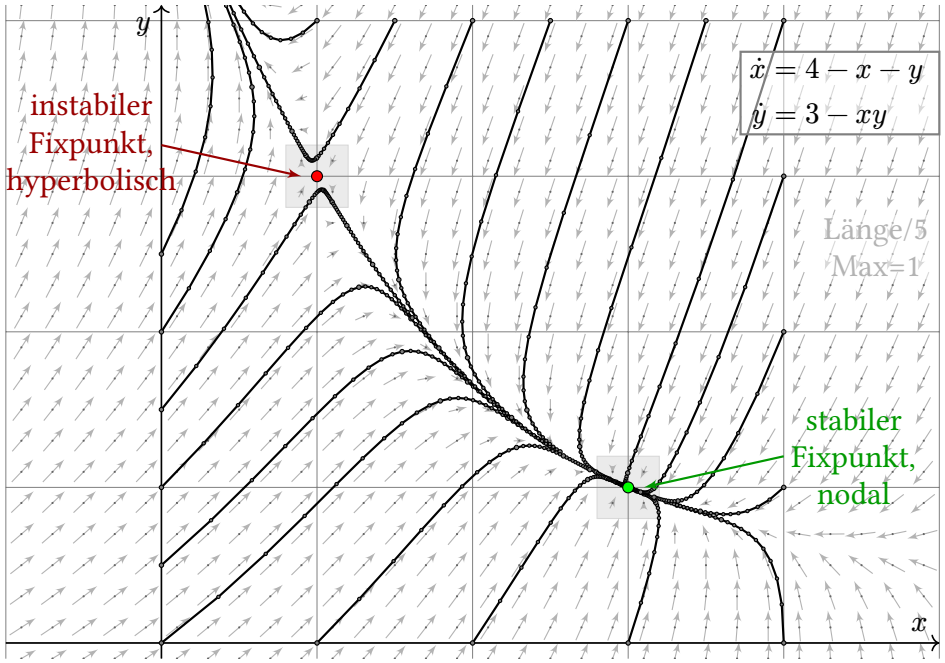
$$\mathrm{e}^{tA} \sim \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Andernfalls existiert eine Hauptvektorkette der Länge 2. Diese nutzen wir als Basis des $\mathbb{R}^2$ und erhalten obigen Jordan–Block. Es gilt dann:

$$\mathrm{e}^{tA} \sim \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

☺ Nach demselben Schema können wir n–dimensionale autonome Systeme analysieren: Fixpunkte, Linearisierung, Eigenwerte, Stabilität. Unsere gründliche Vorarbeit zu Eigen- und Hauptvektoren zahlt sich aus!

Ein einfaches nicht-lineares DGSystem



Ein einfaches nicht-lineares DGSystem

Aufgabe: Wir untersuchen folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} \dot{x} = 4 - x - y \\ \dot{y} = 3 - xy \end{cases}$$

(0) Skizzieren Sie das zugehörige Vektorfeld und einige Flusslinien.

(1a) Finden Sie alle Fixpunkte. Es gibt genau zwei: $(1,3)$ und $(3,1)$.
(1b) Linearisieren Sie um jeden Fixpunkt: Welche Dynamik gilt hier?
Leichtere Teilfrage: Ist der betrachtete Fixpunkt stabil oder instabil?
Was bedeuten die zugehörigen Eigenvektoren und die Eigenwerte?

(2) Erklären Sie (qualitativ anhand Ihrer Skizze) für jeden Startpunkt $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^2$ das Verhalten der Lösung $(x(t), y(t))$ für $t \to \infty$.
(2a) Gibt es zu jedem Startwert eine Lösung? Ist sie eindeutig?
(2b) Für welche Startwerte konvergiert die Lösung gegen $(3,1)$?
(2c) Für welche Startwerte konvergiert die Lösung gegen $(1,3)$?
(2d) Für welche Startwerte divergiert die Lösung? gegen ∞?
Ist dieses Verhalten stabil? Wird das Ziel in endlicher Zeit erreicht?

Ein einfaches nicht-lineares DGSystem

Lösung: (1a) Fixpunkte sind die Nullstellen des Vektorfeldes:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4 - x - y \overset{!}{=} 0 \\ \dot{y} &= 3 - xy \quad \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung bedeutet $y = 4 - x$, einsetzen in die zweite ergibt:

$$3 - 4x + x^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{1, 3\}$$

☺ Die beiden einzigen Fixpunkte sind daher $(1,3)$ und $(3,1)$. Probe!
(1b) Wir berechnen die Jacobi–Matrix in jedem der beiden Fixpunkte:

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 - x - y \\ 3 - xy \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad f'\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -y & -x \end{bmatrix}$$

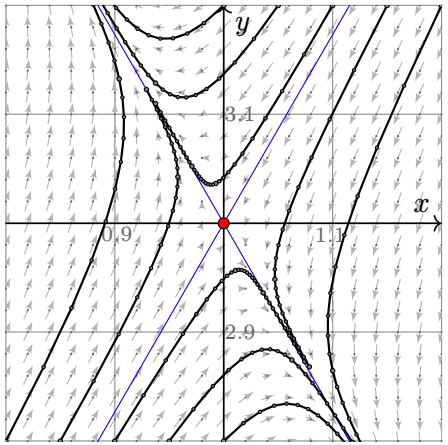
$$f'\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \det = -2 < 0, \ \operatorname{tr} = -2 < 0: \\ \text{instabil! genauer: hyperbolisch} \end{cases}$$

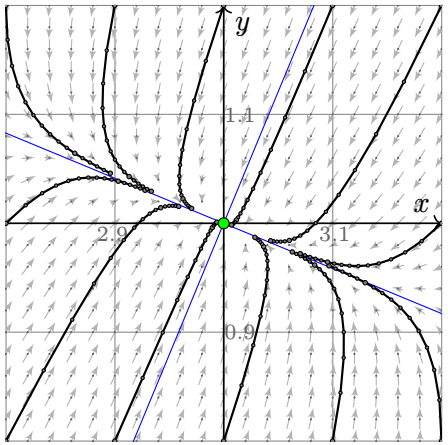
$$f'\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \det = +2 > 0, \ \operatorname{tr} = -4 < 0: \\ \text{stabil! genauer: nodale Kontraktion} \end{cases}$$

☺ Vergleich mit der obigen Skizze: Das entspricht der Anschauung!

Ein einfaches nicht-lineares DGSystem

Die Vergrößerung um die Fixpunkte zeigt annähernd lineares Verhalten:





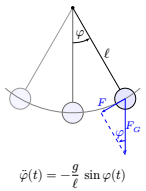
Die beiden Eigenvektoren entsprechen den Hauptachsen der Dynamik:

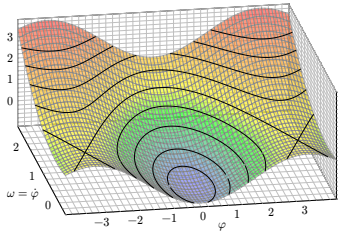
$$v = \begin{bmatrix} \pm 1/\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \ \lambda = \mp\sqrt{3} - 1 \qquad v = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{2} - 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \lambda = \mp\sqrt{2} - 2$$

☺ Rechts ist die Jacobi–Matrix symmetrisch, die EV daher orthogonal.

Kapitel Q

Bonusmaterial





Euch, euren Kindern und dem gesamten Gemeinwesen Glück und Segen! [...] Für die Städte sind keine Bollwerke oder Mauern zuverlässigere Schutzwälle als Bürger, die sich durch Bildung, Klugheit und andere Tugenden auszeichnen.

Philipp Melanchthon (1497–1560), *Lobrede auf die neue Schule*, Nürnberg 23.05.1526

Inhalt dieses Kapitels Q

5 Dynamische In/Stabilität
- Das mathematische Pendel
- Das Näherungsverfahren von Runge–Kutta
- Das Theorem vom torkelnden Tennisschläger

Jede jordanisierbare Matrix A ist ähnlich zu $A^\intercal$.

Aufgabe: Zeigen Sie $A \sim A^\intercal$ für jeden Jordan–Block $A = J(n,\lambda)$.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad A^\intercal = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Lösung: Es gilt $Ae_1 = \lambda e_1$ und $Ae_2 = \lambda e_2 + e_1$ bis $Ae_n = \lambda e_n + e_{n-1}$. In dieser Jordan–Basis $\mathcal{J} = (e_1, \dots, e_n)$ wird A wie oben dargestellt. In der umgedrehten Basis $\mathcal{J}^\intercal := (e_n, \dots, e_1)$ ist die darstellende Matrix dann $A^\intercal$.

Allgemein: Umdrehen der Basis dreht die Darstellung A um 180° zu $A^{\circlearrowleft}$. Dieser Trick gelingt ebenso für jeden erweiterten Jordan–Block in der reellen Jordan–Form Q1Q, denn auch hier gilt die Symmetrie $A^{\circlearrowleft} = A^\intercal$.

☺ Dasselbe gilt allgemein für jede jordanisierbare Matrix $A \in K^{n\times n}$: Es existiert eine jordanisierende Basis $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_\ell)$ bestehend aus Hauptvektorketten $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_\ell$. In der kettenweise umgedrehten Basis $\mathcal{J}' = (\mathcal{J}_1^\intercal, \dots, \mathcal{J}_\ell^\intercal)$ wird A dargestellt durch die transponierte Matrix $A^\intercal$.

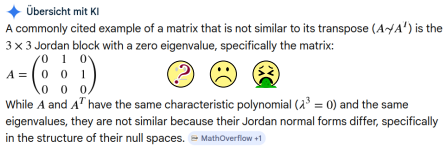
Jede jordanisierbare Matrix A ist ähnlich zu $A^\intercal$.

Satz Q4A: Ähnlichkeit zur Transponierten

(1) Jede jordanisierbare Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist ähnlich zu $A^\intercal$.
(2) Über $K = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ ist jede Matrix $A \in K^{n\times n}$ ähnlich zu $A^\intercal$.

Ist $A \sim A^\intercal$ nicht plausibel? oder sogar selbstverständlich? Müssen wir dies wirklich so aufwändig beweisen? Ja, denn es gibt Gegenbeispiele!

⚠ Vorsicht vor *ai slop*! Sie können mit KI gut lernen, wenn Sie Ihre Grundlagen beherrschen, kritisch bleiben, Fragen und Problemen auf den Grund gehen. Andernfalls lügt die KI frech das Blaue vom Himmel (hier Gemini am 18.04.2026).



Aufgabe: In $\mathbb{Z}^{2\times 2}$ ist die Matrix $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{smallmatrix}\right]$ nicht ähnlich zu $A^\intercal = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 8 \end{smallmatrix}\right]$.

Lösung: Wir suchen $S = \left[\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ mit $AS = SA^\intercal$. Dies führt uns zu den Gleichungen $b = c$ und $7b = 2d$. Demnach gilt $b = 2k$ und $d = 7k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Für $1 \overset{!}{=} \det S = ad - bc = k(7a - 4k)$ bedeutet das $k = \pm 1$ und $7a \pm 4 = \pm 1$, was unmöglich ist. Also gilt $A \nsim A^\intercal$ in $\mathbb{Z}^{2\times 2}$.

Lineare Rekursion und schnelle Matrixpotenz

Q405 Ausführung

Sei $\mathbb{K}$ ein Ring und darin eine Folge $u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ definiert durch die lineare Rekursion $u_{k+n} = a_{n-1}u_{k+n-1} + \dots + a_1 u_{k+1} + a_0 u_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe: (0) Wie berechnen Sie u_{k+n} mit $n(k+1)$ Operationen in $\mathbb{K}$?
(1) Wie berechnen Sie u_{k+n} mit $2n^3\lceil\log_2(k+1)\rceil$ Operationen in $\mathbb{K}$?
☺ Dieser *trade-off* lohnt sich bereits für moderat große k.

(2) Als Zahlenbeispiel betrachten wir die Fibonacci–Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Berechnen Sie mit einem Python-Skript die letzten 20 Dezimalen von f_{10^a} für $a = 2, 3, 4, \dots$. Wie weit kommen Sie in einer Stunde?

Lösung: (1) Wir können die Rekursion als Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ darstellen:

$$\begin{bmatrix} u_{k+1} \\ \vdots \\ n_{k+n-1} \\ u_{k+n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ n_{k+n-1} \end{bmatrix}$$

Wir berechnen $B = A^k$ mit $\le 2\lceil\log_2(k)\rceil$ Matrixmultiplikationen dank binärem Potenzieren B6A. Jede benötigt n^3 Operationen im Grundring $\mathbb{K}$.

Lineare Rekursion und schnelle Matrixpotenz

Q406 Ausführung

(2) Für die Fibonacci–Folge $f = (0, 1, \dots)$ mit $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ haben wir:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad A^n = \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix}$$

Aus $A^{2n} = (A^n)^2$ folgt so $f_{2n} = (2f_{n+1} - f_n)f_n$ und $f_{2n+1} = f_{n+1}^2 + f_n$.
Wir berechnen $(a, b) = (f_n, f_{n+1}) \in \mathbb{Z}_m^2$ dank binärem Potenzieren B6A:

```python
def fiboslow(n: int, m: int):                          # Fibonacci f(n) modulo m
    a, b = 0, 1
    while n > 0: a, b = b, (a+b) % m; n = n - 1
    return a, b

def fibofast(n: int, m: int):                          # Fibonacci f(n) modulo m
    if n < 16: return fiboslow(n, m)
    a, b = fibofast(n // 2, m)
    a, b = ((2*b-a)*a) % m, (a*a+b*b) % m
    if n % 2 == 1: a, b = b, (a+b) % m
    return a, b
```

☺ Probieren Sie es selbst; naiv linear ist lahm, clever binär ist schnell!

Wann und wogegen konvergiert A^k für $k \to \infty$ in $\mathbb{C}^{n\times n}$?

Q407 Ausführung

Beispiel: Für $n = 1$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Ihnen das Verhalten von λ^k für $k \to \infty$ vertraut: λ^k konvergiert gegen 0 für $|\lambda| < 1$ und divergiert gegen ∞ für $|\lambda| > 1$. Auf dem Rand $|\lambda| = 1$ ist die Folge λ^k beschränkt, doch für $\lambda \neq 1$ nicht konvergent. Für $\lambda = 1$ ist sie konstant, und somit auch konvergent.

☺ Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ verhalten sich erfreulich ähnlich:

Satz Q4B: Wann und wogegen konvergiert A^k für $k \to \infty$ in $\mathbb{C}^{n\times n}$?

Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sind äquivalent:

1. Für $k \to \infty$ konvergiert A^k in $\mathbb{C}^{n\times n}$ gegen eine Matrix B.
2. Für jeden Eigenwert λ gilt entweder $|\lambda| < 1$ oder aber $\lambda = 1$ mit geometrischer Vielfachheit $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker}(A - I)$ gleich der algebraischen.

Der Grenzwert B ist dann der Projektor der Hauptraumzerlegung $\mathbb{C}^n = \bigoplus_\lambda \mathrm{H}(\lambda)$ auf den Summanden $\mathrm{H}(1) = \mathrm{E}(1) = \operatorname{Ker}(A - I) = \operatorname{fix}(A)$.

☺ Damit haben wir ein bequem einfaches Konvergenzkriterium, sowohl hinreichend als auch notwendig. *Algebra meets Analysis.*

Wann und wogegen konvergiert A^k für $k \to \infty$ in $\mathbb{C}^{n\times n}$?

Q408 Ausführung

Aufgabe: Beweisen Sie die Aussagen dieses Satzes.

Lösung: Dank Satz Q1B können wir unsere Matrix A jordanisieren. Nach Basiswechsel besteht $A = \operatorname{diag}(A_1, \dots, A_\ell)$ aus Jordan–Blöcken A_i. Nun genügt es, jeden Block einzeln zu behandeln, denn die Konvergenz von $A^k = \operatorname{diag}(A_1^k, \dots, A_\ell^k)$ ist äquivalent zur Konvergenz in jedem Block.

Sei also $A = \lambda I + N$. Wir nutzen Bemerkung Q1P. Hier gilt:

$$(\lambda I + N)^k = \textstyle\sum_{i=0}^{s-1} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} N^i$$

Wir diskutieren nun alle möglichen Fälle:

1. Für $|\lambda| < 1$ konvergiert $(\lambda I + N)^k$ gegen 0.
2. Für $|\lambda| > 1$ divergiert $(\lambda I + N)^k$ exponentiell gegen ∞.
3. Für $|\lambda| = 1$ und $N \neq 0$ divergiert dies polynomiell gegen ∞.

Es bleibt $|\lambda| = 1$ und $N = 0$. Hier ist $A^k = \lambda^k I$ beschränkt, doch für $\lambda \neq 1$ nicht konvergent. Für $\lambda = 1$ ist $A^k = I$ konstant, somit konvergent. QED

Das mathematische Pendel

Q501

Welche Schwingungsdauer hat eine Schaukel bei 90° Auslenkung?

⚠ Als eindrücklicher Kontrast vergleichen wir hier noch einmal detailliert ein nicht-lineares DGSystem mit seiner Linearisierung.

Aufgabe: (1) Erstellen Sie die Bewegungsgleichung $\ddot{\varphi}(t) = \dots$.

(2) Nähern und lösen Sie diese für kleine Amplituden ($|\varphi| < 5°$).

(3) Formulieren und beweisen Sie die Energieerhaltung für $E = \dots$.

(4) Schreiben Sie die Bewegungsgleichung als DGSystem $\dot{x} = \dots$

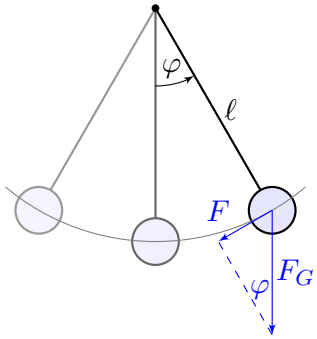
(5) Skizzieren Sie das Vektorfeld f und Lösungskurven für $\ell = 9.81m$.

(6) Wenden Sie das Euler–Verfahren an auf die Anfangsdaten $\varphi(0) = -\pi/2$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ mit Schrittweite $\Delta t = 0.1$.

Können Sie der so berechneten Näherung vertrauen?
Wie lange dauert ein Umlauf ungefähr?

Das mathematische Pendel

Q502
Ausführung



Die Rückstellkraft ist hier nicht-linear:

$$F(t) = -m \cdot g \cdot \sin\varphi(t)$$

m = Masse des Pendelkörpers
$g = 9.81\text{m/s}^2$ Erdbeschleunigung
$F_G = mg$ Gravitationskraft zur Masse m
ℓ = Länge des Pendelstabes
$\varphi(t)$ = Winkelauslenkung
$\ell\,\varphi(t)$ = Auslenkung

(1) Newtons Gesetz $F(t) = m\,\ell\,\ddot{\varphi}(t)$ führt zur Differentialgleichung

$$\boxed{\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi(t).}$$

⚠ Wir vereinfachen hier: punktförmige Masse des Pendelkörpers, vernachlässigbare Masse des Stabes, reibungsfreie Aufhängung, etc.

☺ Für kleine Auslenkungen gilt $\sin(\varphi) \approx \varphi$. (Faustregel für $|\varphi| < 5°$)

Das mathematische Pendel

Q503
Ausführung

(2) Dies führt uns zur **linearisierten Differentialgleichung**:

$$\boxed{\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell}\varphi(t)}$$

Dies ist ein harmonischer Oszillator: $\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2\varphi(t)$ mit $\omega = \sqrt{g/\ell}$.

Lösung $\varphi(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)$, Periodendauer $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.

Beispiel Schiffsschaukel: Für $\ell = 9.81m$ finden wir $T = 2\pi\text{s} \approx 6.28\text{s}$.

☺ Die Schwingungsdauer ist unabhängig von der Pendelmasse m!
Bei kleinen Schwingungen ist sie auch unabhängig von der Amplitude.

⚠ Für große Auslenkungen brauchen wir eine genauere Rechnung!

(3) Kinetische Energie $\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2$, potentielle Energie $mg\ell(1-\cos\varphi)$.

Die **Gesamtenergie** $E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + mg\ell(1-\cos\varphi)$ bleibt erhalten:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m\ell^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mg\ell\dot{\varphi}\sin\varphi = m\ell^2\dot{\varphi}\left[-\frac{g}{\ell}\sin\varphi(t)\right] + mg\ell\dot{\varphi}\sin\varphi = 0$$

Zum Vergleich der harmonische Oszillator: $E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mg\ell\varphi^2$

Das mathematische Pendel

Q504
Ausführung

(4) Zustand $(x_1, x_2) = (\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \in \mathbb{R}^2$. Der Zustandsraum ist hier $\mathbb{R}^2$.
Das Bewegungsgesetz darauf lautet: $\dot{x}_1 = x_2$ und $\dot{x}_2 = -g/\ell\sin(x_1)$.

(5) Für $\ell = 9.81\text{m}$ erhalten wir $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = f(x_1, x_2) = (x_2, -\sin(x_1))$.
Dieses Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist in folgenden Graphiken dargestellt.

☺ Dank Energieerhaltung können wir sofort die Lösungskurven als Äquipotentiallinien $E = \text{const}$ einzeichnen! Leider sieht man diesen Kurven ihre zeitliche Parametrisierung oder Periodendauer nicht an.

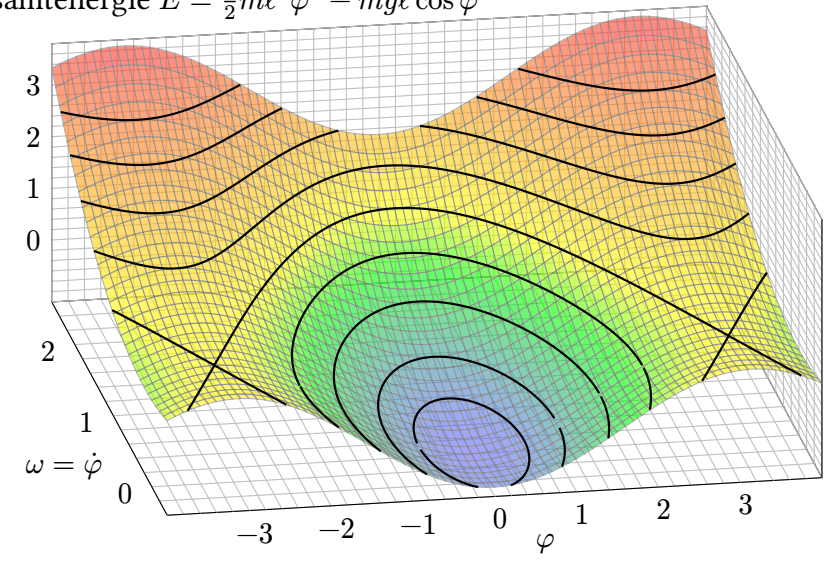
(6) Zeitlich parametrisierte Lösungen $[0, T] \to \mathbb{R}^2$ berechnen wir näherungsweise durch das Euler–Verfahren und lesen die Zeit ab:
Ein Viertelumlauf benötigt $\approx 1.85\text{s}$, eine ganze Periode also $\approx 7.4\text{s}$.
Das ist etwa 18% länger als die Periode des linearisierten Modells.

⚠ Die Näherung akkumuliert Approximationsfehler und entfernt sich von der Energieniveaulinie. Für kleine Zeiten scheint die Abweichung gerade noch akzeptabel. Für eine ernsthafte Rechnung müssen wir die Schrittweite verkleinern oder das gesamte Verfahren verbessern: Fehlerschranken, Effizienz und Präzision erfordern harte Arbeit!

Das mathematische Pendel: Energiefläche

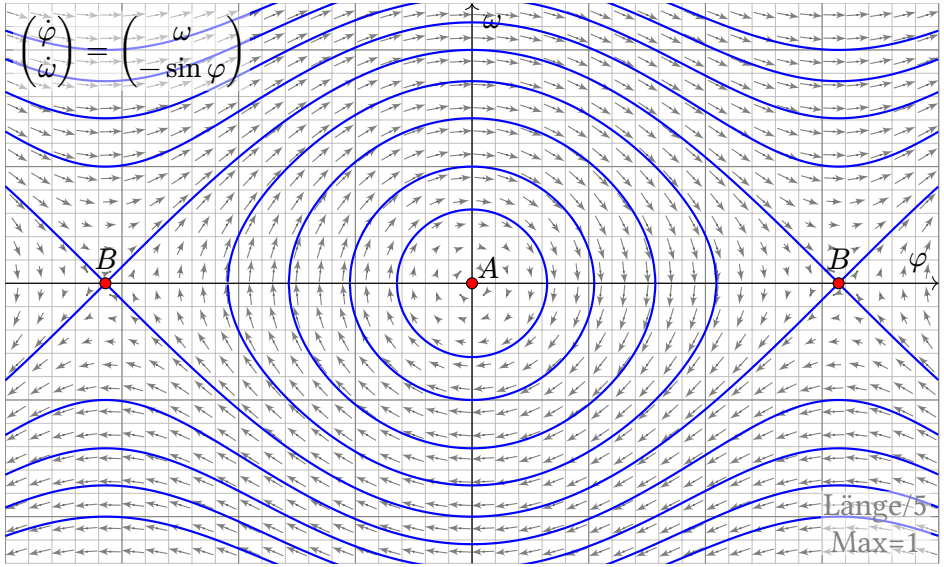
Q505

Gesamtenergie $E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 - mg\ell\cos\varphi$



Das mathematische Pendel: Lösungskurven

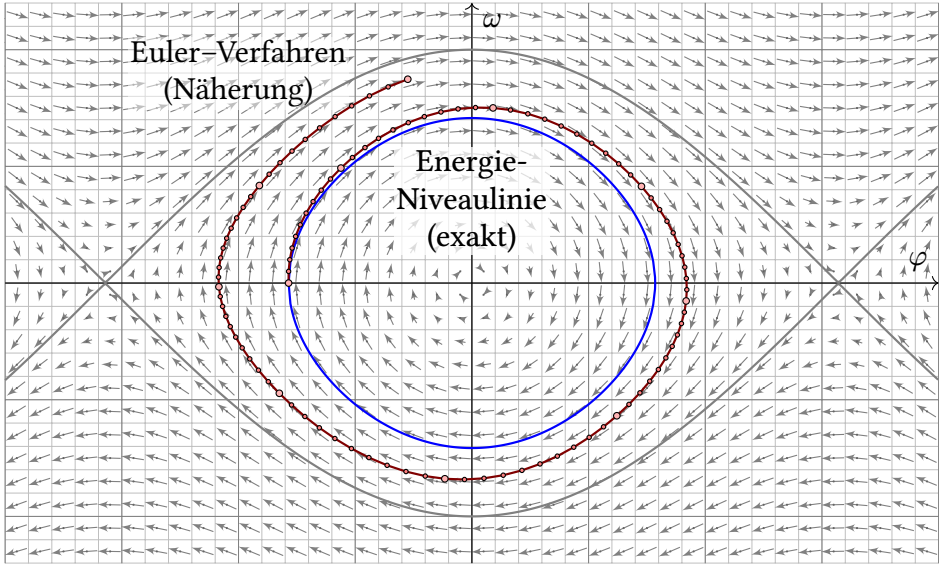
Q506



Wir erkennen harmonische Oszillation um das untere Gleichgewicht A.
Der obere Scheitelpunkt B hingegen ist ein instabiles Gleichgewicht.

Das mathematische Pendel: Trajektorien

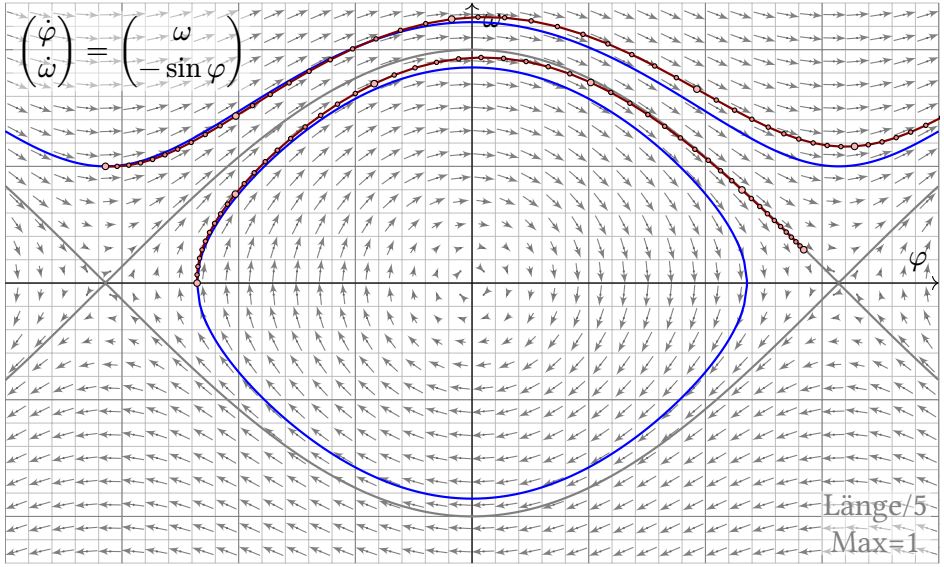
Q507
Ausführung



Die Periode dauert etwa $4 \cdot 1.85\text{s} = 7.4\text{s}$: Länger als im linearen Modell!
Das ist physikalisch plausibel: Kraft und Beschleunigung sind geringer.

Das mathematische Pendel: Trajektorien

Q508
Ausführung



Wir erkennen deutlich die Abweichungen der Euler–Approximation.
Wie erreichen wir möglichst hohe Präzision bei geringem Aufwand?

Näherungsverfahren: von Euler zu Runge–Kutta

Das Euler–Verfahren wird hier zu didaktischen Zwecken vorgestellt: Es ist besonders einfach. Leider ist es wenig präzise, wie bereits obige Experimente zeigen, und für ernsthafte Anwendungen nicht geeignet!

Auf zwei Weisen können wir die Präzision der Näherung verbessern:

- Wir können kleinere Schritte wählen und so feiner diskretisieren. Das erhöht den Rechenaufwand, der Computer läuft langsamer.
- Wir können ein Verfahren höherer Konvergenzordnung wählen. Das erhöht den Theorieaufwand, der Computer rechnet schneller.

Die numerische Approximation von Differentialgleichungen ist in naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen allgegenwärtig. Es gibt hierzu zahlreiche Verfahren, ständig werden weitere entwickelt, auf spezielle Anwendungen angepasst, untersucht und verbessert.

Das bekannteste ist vermutlich das klassische Runge–Kutta–Verfahren (der Ordnung 4, kurz „RK4“). Es ist in der Praxis sehr weit verbreitet und erfreut sich großer Beliebtheit, denn es ist ebenso einfach zu implementieren wie das Euler–Verfahren, aber wesentlich präziser!

Näherungsverfahren: von Euler zu Runge–Kutta

Bildquelle: wikimedia.org

Carl Runge (1856–1927)

Bildquelle: wikimedia.org

Wilhelm Kutta (1867–1944)

Entwickelt hat dieses Verfahren 1895 Carl Runge. Er war 1904–1925 in Göttingen Deutschlands erster Professor für angewandte Mathematik. Weiterentwickelt hat es 1901 Wilhem Kutta, 1912–1935 Professor für Mathematik in Stuttgart. Vor hundert Jahren hätten Sie Ihre Mathematik vermutlich bei ihm gehört. Viele Studierende erinnerten sich später, so heißt es, mit großer Bewunderung an seine einzigartigen Vorlesungen.

Näherungsverfahren: von Euler zu Runge–Kutta

Numerisch zu lösen ist $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$. Gegeben ist zur Zeit t der Zustand $x = x(t)$. Gesucht ist nach Zeitschritt h der Zustand $x(t+h)$. Zur Erinnerung das einfach-naive **Euler–Verfahren** (Ordnung 1):

$$x(t+h) \approx x(t) + hk_1 \quad \text{mit Zuwachs} \quad k_1 = f(t, x)$$

Hier das **Runge–Kutta–Verfahren** (der Ordnung 4, kurz „RK4“):

$$x(t+h) \approx x(t) + h\,\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} k_1 = f(t, x) \\ k_2 = f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(t + h, x + hk_3) \end{cases}$$

Diese raffinierte Rechnung verringert den Approximationsfehler. Die Numerik erklärt wie genau das geht. Zunächst ist k_1 der Zuwachs gemäß des Tangentenvektors zur Zeit t im Punkt x wie bei Eulers Verfahren, dann ist k_2 der Zuwachs zur Mitte des Zeitschritts im Punkt $x + h/2 \cdot k_1$, sodann k_3 der Zuwachs zur Mitte des Zeitschritts aber im Punkt $x + h/2 \cdot k_2$, schließlich ist k_4 der Zuwachs am Ende des Zeitschritts im Punkt $x + hk_3$. Die vier Zuwächse werden gemittelt, wobei die beiden mittleren doppelt zählen. Wenn $f(t, x)$ nur von t und nicht von x abhängt, dann ist dies die numerische Integration gemäß Simpson, auch Keplers Fassregel genannt.

Näherungsverfahren: von Euler zu Runge–Kutta

Die nachfolgenden Graphiken vergleichen Euler und Runge–Kutta. Das Euler–Verfahren, aka RK1, ist **erster Ordnung**, kurz $O(h)$:

$$\text{GlobalerFehler(Euler)} \le C_{\mathrm{E}}(f) \cdot h$$

Die Konstante hängt von der Funktion f und dem Zeitintervall ab. Der Fehler $O(h)$ sinkt für $h \to 0$ linear mit der Schrittweite: Halbe Schrittweite bringt doppelte Genauigkeit.

Das Runge–Kutta–Verfahren ist **vierter Ordnung**, kurz $O(h^4)$:

$$\text{GlobalerFehler(RK4)} \le C_{\mathrm{RK}}(f) \cdot h^4$$

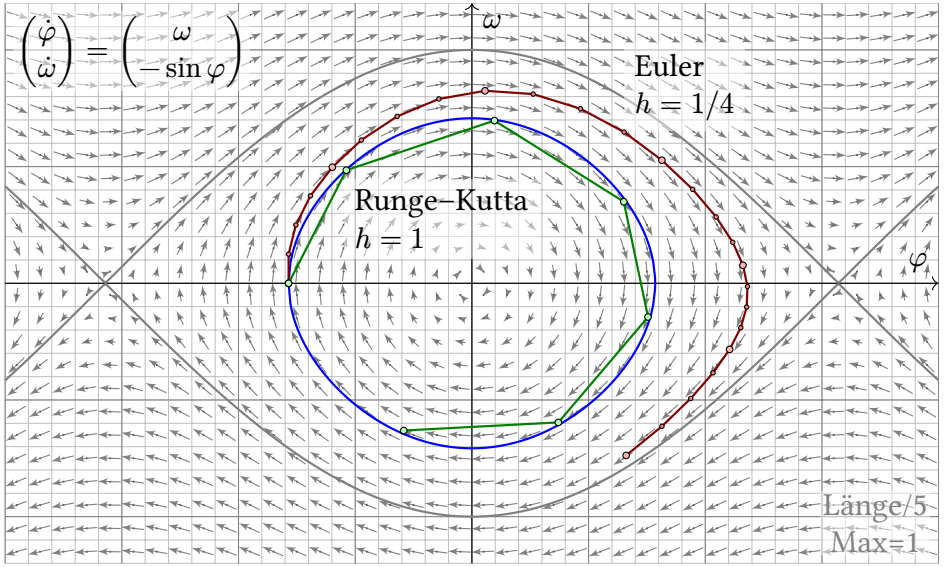
Im Vergleich zu $O(h)$ sinkt der Fehler $O(h^4)$ wesentlich schneller: Halbe Schrittweite bringt sechzehnfache Genauigkeit! Das ist eine dramatische Verbesserung. Die folgenden Graphiken illustrieren dies.

Für jeden Schritt h wertet RK4 viermal aus. Zur Fairness gebe ich Euler die gerechte Schrittweite $h/4$. Dennoch ist Runge–Kutta weit überlegen!

Runge-Kutta is so much better than Euler. `youtu.be/dShtlMl69kY`

Näherungsverfahren: von Euler zu Runge–Kutta

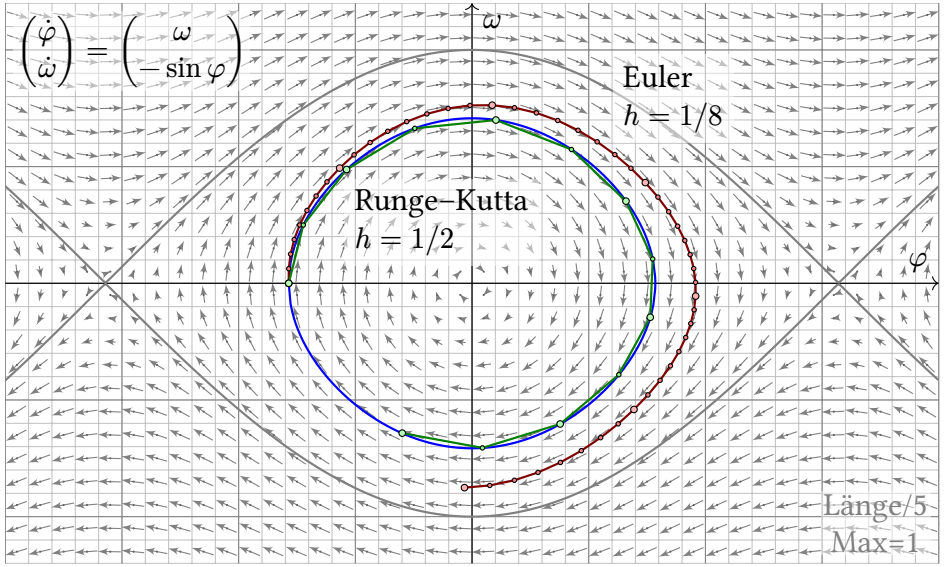
Q513



Das Euler–Verfahren (rot) entfernt sich schnell von der exakten Lösung (blau). Das Runge–Kutta–Verfahren (grün) ist bereits recht präzise!

Näherungsverfahren: von Euler zu Runge–Kutta

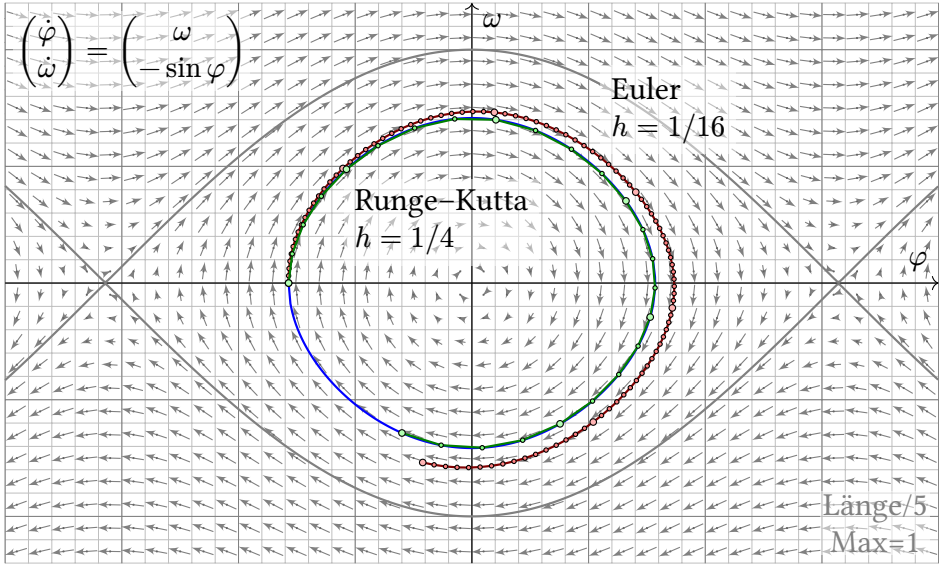
Q514
Ausführung



Halbierung der Schrittweite: Das Euler–Verfahren (rot) wird besser. Das Runge–Kutta–Verfahren (grün) scheint weitgehend exakt (blau).

Näherungsverfahren: von Euler zu Runge–Kutta

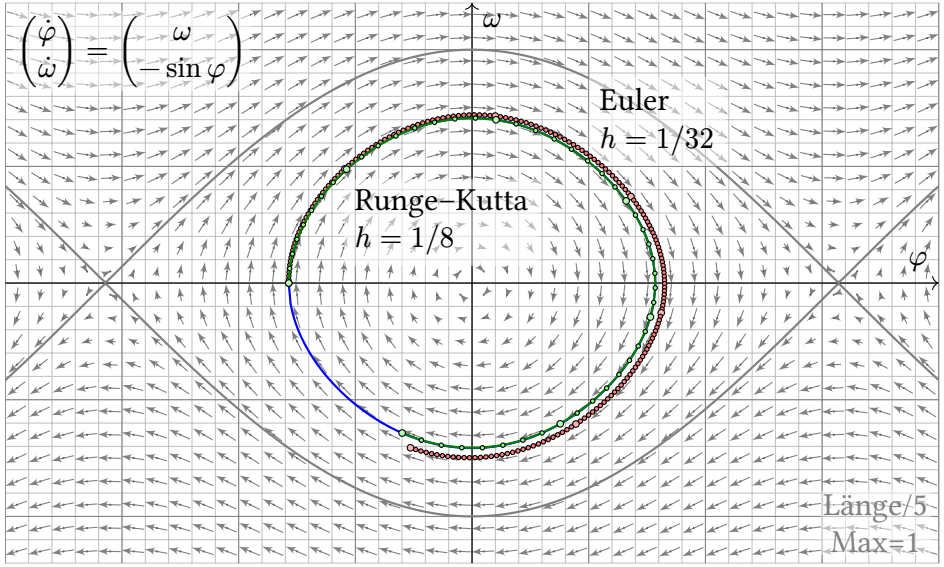
Q515
Ausführung



Halbe Schrittweite: Das Euler–Verfahren (rot) halbiert seinen Fehler. Das Runge–Kutta–Verfahren (grün) scheint weitgehend exakt (blau).

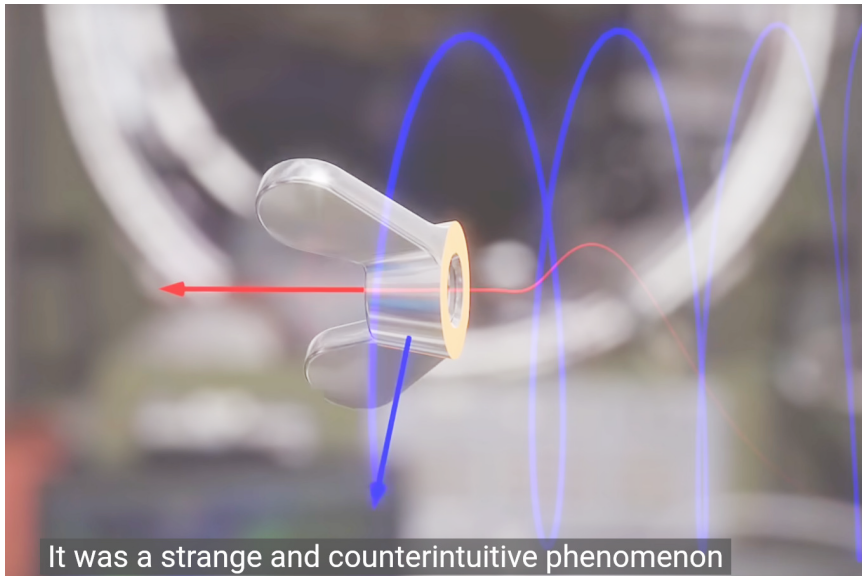
Näherungsverfahren: von Euler zu Runge–Kutta

Q516
Ausführung



Halbe Schrittweite: Das Euler–Verfahren (rot) halbiert seinen Fehler. Das Runge–Kutta–Verfahren (grün) scheint weitgehend exakt (blau).

Der torkelnde Tennisschläger / *intermediate axis theorem*



The bizarre behavior of rotating bodies
Veritasium, `youtu.be/1VPfZ_XzisU`

Der torkelnde Tennisschläger / *intermediate axis theorem*

Wir betrachten einen rotierenden Körper (in körperfesten Koordinaten), etwa ein Handy (gefährlich) oder einen Tennisschläger (empfohlen). Bevor wir rechnen, machen Sie sich bitte mit dem Phänomen vertraut. Nur so bekommen Sie ein Gespür dafür, wie wahrhaft erstaunlich es ist.

Die Masseverteilung bestimmt das Trägheitsmoment $\Theta \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
Die Drehbewegung wird beschrieben durch die **Euler–Gleichungen**:

$$\boxed{\Theta\dot\omega = (\Theta\omega)\times\omega + M}$$

Zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ ist $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$ die Winkelgeschwindigkeit und $M(t) \in \mathbb{R}^3$ das angewendete Drehmoment; wir setzen fortan $M(t) = 0$. Hierbei ist $L = \Theta\omega$ der Drehimpuls, wir haben also $\dot L = L \times \omega + M$.

Die mechanischen Grundlagen importieren als Formeln aus der Physik. Die mathematische Untersuchung hingegen können wir ausführen dank Analysis (Diffentialgleichungen, dynamische Systeme, Stabilität) und Linearer Algebra (Koordinaten, Eigenbasen, Hauptachsen).

Der torkelnde Tennisschläger / *intermediate axis theorem*

Aufgabe: Gegeben sei ein (kompakter) Körper $K \subseteq \mathbb{R}^3$ und seine (stetige) Massendichte $\varrho : K \to \mathbb{R}$. Wie berechnen Sie daraus die Gesamtmasse $m \in \mathbb{R}$, den Schwerpunkt $s \in \mathbb{R}^3$ und das Trägheitsmoment $\Theta \in \mathbb{R}^{3\times 3}$?

$$m = \int_K \varrho(x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{d}(x_1,x_2,x_3)$$

$$s = \frac{1}{m}\int_K \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \varrho(x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{d}(x_1,x_2,x_3)$$

$$\Theta = \int_K \begin{bmatrix} x_2^2+x_3^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ -x_2x_1 & x_1^2+x_3^2 & -x_2x_3 \\ -x_3x_1 & -x_3x_2 & x_1^2+x_2^2 \end{bmatrix} \varrho(x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{d}(x_1,x_2,x_3)$$

Daraus erhalten wir den Drehimpuls $L = \Theta\omega$ und die Energie $E = \omega^\intercal\Theta\omega$.

☺ Ähnliche Rechnungen nutzen wir in der Wahrscheinlichkeitstheorie für Erwartung und Varianz einer WVerteilung, $\varrho \geq 0$ mit Masse $m = 1$.

Der torkelnde Tennisschläger / *intermediate axis theorem*

Im Allgemeinen sind Drehgeschwindigkeit ω und Drehimpuls $L = \Theta\omega$ nicht parallel, daher gilt $\dot L = L \times \omega \neq 0$: Der rotierende Körper „eiert“ bei freier Bewegung oder zeigt „Unwucht“ bei fester Drehachse. Parallelität gilt bei Rotation um eine der Hauptträgheitsachsen. In diesem Falle bleibt nicht nur die Länge von L erhalten, sondern auch die Richtung.

Das Trägheitsmoment $\Theta \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalisieren wir in **Hauptachsen**:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{bmatrix}$$

(symmetrisch $\Longrightarrow$ orthogonal diagonalisierbar)
Koordinatenweise ausgeschrieben erhalten wir unser nicht-lineares DGSystem erster Ordnung:

$$\begin{bmatrix} \theta_1\dot\omega_1 \\ \theta_2\dot\omega_2 \\ \theta_3\dot\omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1\omega_1 \\ \theta_2\omega_2 \\ \theta_3\omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\theta_2-\theta_3)\omega_2\omega_3 + M_1 \\ (\theta_3-\theta_1)\omega_3\omega_1 + M_2 \\ (\theta_1-\theta_2)\omega_1\omega_2 + M_3 \end{bmatrix}$$

Aufgabe: Sei $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$. Bestimmen Sie Fixpunkte und Stabilität.

Der torkelnde Tennisschläger / *intermediate axis theorem*

Lösung: (1) Es gibt genau die Fixpunkte $(\omega_1, 0, 0)$, $(0, \omega_2, 0)$, $(0, 0, \omega_3)$.
(2) Wir linearisieren, dazu berechnen wir zunächst die Jacobi–Matrix:

$$\begin{bmatrix}\dot\omega_1\\ \dot\omega_2\\ \dot\omega_3\end{bmatrix} = f\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} := \begin{bmatrix}\alpha_1\omega_2\omega_3\\ \alpha_2\omega_3\omega_1\\ \alpha_3\omega_1\omega_2\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad f'\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \alpha_1\omega_3 & \alpha_1\omega_2\\ \alpha_2\omega_3 & 0 & \alpha_2\omega_1\\ \alpha_3\omega_2 & \alpha_3\omega_1 & 0\end{bmatrix}$$

Linearisiert um den Fixpunkt $(0, \omega_2, 0)$ erhalten wir $\dot u = Au$:

$$A = f'\begin{pmatrix}0\\ \omega_2\\ 0\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & \alpha_1\omega_2\\ 0 & 0 & 0\\ \alpha_3\omega_2 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \begin{aligned}\det(A-\lambda E) &= -\lambda(\lambda^2 - \alpha_1\alpha_3\omega_2^2)\\ &= -\lambda(\lambda^2 - \omega_2^2(\theta_3-\theta_2)(\theta_2-\theta_1)/\theta_1\theta_3)\end{aligned}$$

Eigenwerte sind 0 und $\pm\omega_2\sqrt{(\theta_3-\theta_2)(\theta_2-\theta_1)/\theta_1\theta_3}$. Daraus folgt:

Satz Q5A: torkelnder Tennisschläger / *intermediate axis theorem*

Wir untersuchen die kräftefreie Bewegung eines starren Körpers mit Trägheitsmomenten $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ bezüglich seiner Hauptachsen.

Die Rotation um die mittlere Achse ist instabil: Jede kleine Störung wird exponentiell verstärkt mit $e^{\lambda t}$ und $\lambda = |\omega_2|\sqrt{(\theta_3-\theta_2)(\theta_2-\theta_1)/\theta_1\theta_3}$.

Der torkelnde Tennisschläger / *intermediate axis theorem*

Um $(\omega_1, 0, 0)$ linearisiert finden wir $0, \pm i\omega_1\sqrt{(\theta_2-\theta_1)(\theta_3-\theta_1)/\theta_2\theta_3} \in i\mathbb{R}$.
Um $(0, 0, \omega_3)$ linearisiert finden wir $0, \pm i\omega_3\sqrt{(\theta_3-\theta_1)(\theta_3-\theta_2)/\theta_1\theta_2} \in i\mathbb{R}$.

⚠ Das Eigenwertkriterium können wir hier leider nicht anwenden!
Die In/Stabilität lässt sich allein aus diesen Daten noch nicht schließen; dazu sind genauere Untersuchungen nötig, dank Lyapunov–Funktionen:

$$V_1 = (\theta_2-\theta_1)\theta_2\omega_2^2 + (\theta_3-\theta_1)\theta_3\omega_3^2 \ge 0,\ \ V_1 = 0 \Leftrightarrow \omega_2 = \omega_3 = 0,\ \ \dot V_1 = 0$$
$$V_3 = (\theta_3-\theta_1)\theta_1\omega_1^2 + (\theta_3-\theta_2)\theta_2\omega_2^2 \ge 0,\ \ V_3 = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_2 = 0,\ \ \dot V_3 = 0$$

☺ Diese Invarianten zeigen, dass die Rotation um die erste bzw. dritte Achse stabil ist. Letzteres gilt nur bei Energieerhaltung, wie eingangs vereinfachend angenommen. Bei Dissipation gilt $\dot V_1 \ge 0$ und $\dot V_3 \le 0$.

⚠ Die Rotation um die kleine Achse wird dann ebenfalls instabil.
Die NASA erfuhr dies 1958 schmerzlich mit Explorer 1, ihrem ersten künstlichen Erdsatelliten, siehe `en.wikipedia.org/wiki/Explorer_1`.

📖 Colley: *The tumbling box.* Amer. Math. Monthly 94 (1987) 62–68
Marsden, Ratiu: *Mechanics and Symmetry.* Springer 1999, §15.9

Der torkelnde Tennisschläger / *intermediate axis theorem*

? Warum zelebriere ich dieses schöne Beispiel so ausführlich?
Meiner Überzeugung nach verbinden sich hier mehrere faszinierende Erzählstränge zu grundlegender Mathematik und ihren Anwendungen. Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Anwendungen.

Einerseits können Sie das Phänomen des torkelnden Tennisschlägers selbst erfahren und ausprobieren, gerne auch anderen vorführen und gemeinsam testen. Das Problem ist verblüffend und unmittelbar spürbar. Eine anschauliche Erklärung ist jedoch keineswegs offensichtlich.

Andererseits haben wir die Methoden der Linearen Algebra, die hier vorbildlich zum Einsatz kommen und die Analysis wunderbar ergänzen. Dabei erkennen wir ein typisches Muster: Reale Probleme sind meist sehr kompliziert. Zwecks Vereinfachung versuchen wir, sie zu linearisieren.

In günstigen Fällen wird das Problem dadurch gelöst, so wie hier.
Auf Ihre mathematischen Werkzeuge dürfen Sie daher stolz sein!

Der torkelnde Tennisschläger / *intermediate axis theorem*

Sie verfügen nun über die nötigen Werkzeuge zur Behandlung von (linearisierten) Stabilitätsfragen, erfreulich allgemein und quantitativ. Als Ergänzung bietet das obige Video anschauliche Erklärungen. Beide Sichtweisen sind willkommen und ergänzen sich gegenseitig.

Ich warne vor einem häufigen Missverständnis: Anschauung und Intuition sind wunderbar als *Ergänzung* zum formal-quantitativen Rechnen. Als *Ersatz* führen sie allzu oft in die Irre, gar Katastrophe. Schulen und nutzen Sie also stets beides, Intuition und Präzision!

Eine geübte Intuition gibt Ihnen schnell einen ersten Anhaltspunkt. Wie üben Sie Ihre Intution? Durch Erfahrung, praktisch und theoretisch! Die formal-algebraische Rechnung präzisiert, sicher ab und quantifiziert. Theorie wirkt auch dort, wo die naive Anschauung versagt.

Der torkelnde Tennisschläger ist ein hervorragendes Beispiel. Er belohnt unsere erste linearisierte Untersuchung und jede weitere Vertiefung.

Kapitel R

Lineare Algebra über $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{K}[X]$: Elementarteilersatz und Anwendungen

Zwar hatte Herr Fourier die Meinung, das Hauptziel der Mathematik sei der Gemeinnutzen (l'utilité publique) und die Erklärung der Naturphänomene; aber ein Philosoph wie er hätte wissen müssen, dass das einzige Ziel der Wissenschaft die Ehre des menschlichen Geistes ist und bei diesem Anspruch eine Frage über Zahlen ebensoviel wert ist wie eine Frage über das Weltsystem.
Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) an Adrien-Marie Legendre (1752–1833)

Inhalt dieses Kapitels R

Dieses schöne Thema ist suspendiert.

Kapitel R

Bonusmaterial

Argent, Machinisme, Algbèbre.
Les trois monstres de la civilisation actuelle.
Machine : la méthode se trouve dans la chose, non dans l'esprit.
Algèbre : la méthode se trouve dans les signes, non dans l'esprit.
Simone Weil (1909–1943), zitiert nach Laurent Lafforgue

Inhalt dieses Kapitels R

Dieses schöne Thema ist suspendiert.

Kapitel S

Skalarprodukt und Isometrien

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^{(J)} \arrow[rr, "y\mapsto x=Ay"] \arrow[dr, "\cong"', "\Phi_{\mathcal{V}}"] & & \mathbb{K}^{(I)} \\
& V \arrow[r, "v\mapsto u=\alpha(v)"] \arrow[u, bend left=60, "\cong", "T"] \arrow[d, bend right=60, "\cong"', "S"] & U \arrow[ur, "\Phi_{\mathcal{U}}"', "\cong"] \\
\mathbb{K}^{(J)} \arrow[rr, "y'\mapsto x'=A'y'"] \arrow[ur, "\cong", "\Phi_{\mathcal{V}'}"'] & & \mathbb{K}^{(I)} \arrow[u, bend right=60, "\cong"', "\Phi_{\mathcal{U}'}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(J)} \arrow[rr, "(x,y)\mapsto x^\dagger B\, y"] \arrow[dr, "\cong"', "\Phi_{\mathcal{U}}\times\Phi_{\mathcal{V}}"] & & \mathbb{K} \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_{\mathbb{K}}"] \\
& U \times V \arrow[r, "(u,v)\mapsto\beta(u,v)"] \arrow[u, bend left=60, "\cong", "S\times T"] \arrow[d, bend right=60, "\cong"', "\Phi_{\mathcal{U}'}\times\Phi_{\mathcal{V}'}"] & \mathbb{K} \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_{\mathbb{K}}"] \\
\mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(J)} \arrow[rr, "(x',y')\mapsto x'^\dagger B'\, y'"] \arrow[ur, "\cong", "\Phi_{\mathcal{U}'}\times\Phi_{\mathcal{V}'}"'] & & \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

Unsere Allergrößten, wie Archimedes, Newton, Gauß,
haben stets Theorie und Anwendungen gleichmäßig umfasst.
Felix Klein (1849–1925): *Elementarmathematik* (1909)

Inhalt dieses Kapitels S

1. Hermitesche Sesquilinearformen über $(\mathbb{K}, \sigma)$
   - Sesquilinearformen und Orthogonalität
   - Hermitesche Formen und Diagonalisierung
2. Skalarprodukte über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$
   - Skalarprodukte und Cauchy–Schwarz–Ungleichung
   - Vom Skalarprodukt zur Norm, von der Norm zur Metrik
3. Orthonormalisierung und Bestapproximation
   - Orthogonale Familien und orthogonale Projektion
   - Gram–Schmidt–Verfahren und die QR–Zerlegung
   - Bestapproximation durch Orthogonalprojektion
   - Näherungslösung überbestimmter Gleichungssysteme
4. Isometrien und unitäre Endomorphismen
   - Givens–Rotationen und Householder–Spiegelungen
   - Rotationen des dreidimensionalen Raumes

Motivation und Überblick

Wir untersuchen in diesem Kapitel reelle und komplexe Vektorräume mit einem Skalarprodukt. Damit messen wir Winkel, Längen und Abstände, wir betreiben also **Geometrie** im wörtlichen Sinne von „Landmessung“. Lineare Algebra und Analytische Geometrie ergänzen sich wunderbar, getreu unserem Slogan: Mathematik ist wunderschön und nützlich!

Erste Ideen und praktische **Anwendungen** kennen Sie aus der Schule. Darüber hinaus spielen Skalarprodukte, gern geeignet verallgemeinert, die zentrale Rolle in der Untersuchung von gekrümmten Flächen und allgemein in der Riemannschen Geometrie auf Mannigfaltigkeiten, bis hin zur speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie.

Skalarprodukte begegnen Ihnen ebenfalls in der **Analysis**, zunächst als euklidisches Skalarprodukt bei der Untersuchung der metrischen und topologischen Eigenschaften des vertrauten euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$, später dann in der faszinierenden Fourier–Theorie bei der Zerlegung periodischer Funktionen in harmonische Grundschwingungen, sowie allgemein in Hilbert–Räumen und ihren zahlreichen Anwendungen.

Motivation und Überblick

Ebenso wie die Analysis nutzt auch die **Numerik** Skalarprodukte, Normen und Metriken zur Messung von Abständen und Fehlern, zur Kontrolle von Näherungen und zur Definition der Konvergenz.

Auch die **Methode der kleinsten Quadrate** beruht auf der Technik von Skalarprodukten und wird überall eingesetzt, wo fehlerbehaftete Daten verarbeitet werden, insbesondere linearisiert oder ähnlich geglättet.

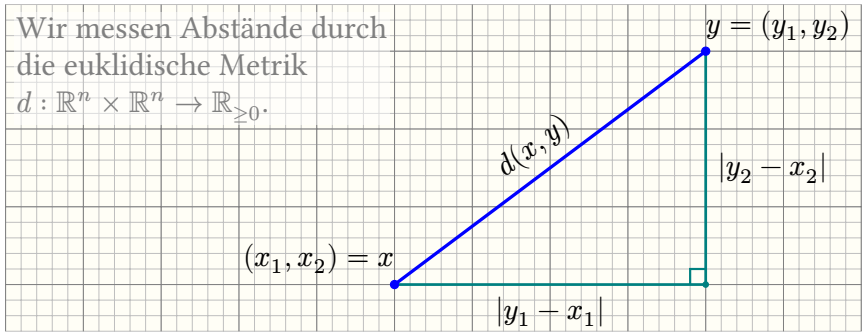
In der **Stochastik** verhält sich die Co/Varianz reeller Zufallsvariablen wie ein Skalarprodukt, und die lineare Regression nutzt die Methode der kleinsten Quadrate zur Untersuchung linearer Zusammenhänge.

In der **Physik** schließlich beruht die Quantenmechanik auf dem Modell, dass die Zustände eines Systems beschrieben werden durch Vektoren in einem Hilbert–Raum, also einem $\mathbb{C}$–Vektorraum mit Skalarprodukt.

⚠ Wir arbeiten möglichst anwendungsfreundlich, das heißt: abstrakt! Um der faszinierenden Vielfalt der Anwendungen gerecht zu werden, bauen wir die Theorie sorgsam auf, vom Allgemeinen zum Speziellen. Das erfordert geduldiges Erlernen grundlegender Begriffe und Techniken.

Euklidische Metrik: Abstand zwischen zwei Punkten im $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}^n$ aller reellen n–Tupel $x = (x_1, \dots, x_n)$.



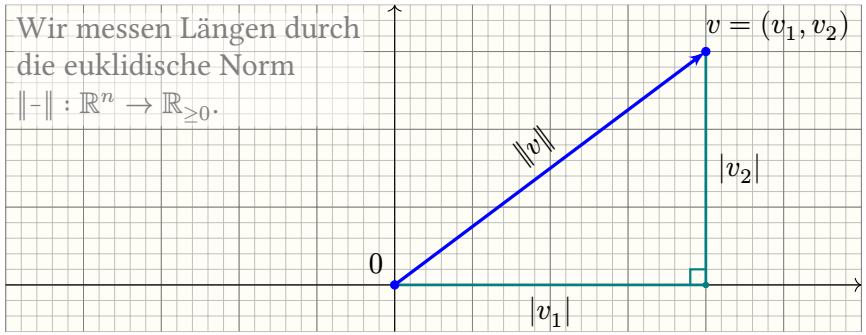
Die **euklidische Metrik** $d(x, y)$ misst den Abstand vom Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ zum Punkt $y \in \mathbb{R}^n$, also die Länge des Vektors $y - x$. Dank Pythagoras gilt:

$$\boxed{d(x, y) = \sqrt{|y_1 - x_1|^2 + \dots + |y_n - x_n|^2}}$$

Unsere Skizze zeigt dies für $n = 2$. **Übung:** Skizzieren und begründen Sie dies ebenso für $n = 3$. Der allgemeine Fall $n \in \mathbb{N}$ gelingt per Induktion.

Euklidische Norm: Länge eines Vektors im $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.



Die **euklidische Norm** $\|v\|$, kurz $|v|$, misst die Länge des Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ als den Abstand vom Ursprung 0 zum Punkt v. Dank Pythagoras gilt:

$$\boxed{|v| = \|v\| = \sqrt{|v_1|^2 + \dots + |v_n|^2}}$$

Das Normquadrat $\|v\|^2 = v_1^2 + \dots + v_n^2$ ist eine **quadratische Form**.
Die zugehörige Bilinearform ist das **euklidische Skalarprodukt**.

Das euklidische Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

Das **euklidische Skalarprodukt** von zwei Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\boxed{\langle u \,|\, v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.}$$

Übliche Schreibweisen sind $\langle u \,|\, v \rangle = \langle u, v \rangle = u \bullet v = u \cdot v = u^\top v = \dots$.
Für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gilt demnach $\langle v \,|\, v \rangle = v_1^2 + \dots + v_n^2 \geq 0$.
Die **euklidische Norm** des Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\boxed{|v| = \|v\| := \sqrt{\langle v \,|\, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.}$$

Übliche Schreibweisen sind $|v| = |v|_2 = \|v\| = \|v\|_2 = \|v\|_{\ell^2} = \dots$.
Der **euklidische Abstand** zwischen zwei Punkten $u, v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\boxed{d(u, v) := |u - v| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}.}$$

Alternative Schreibweisen für Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ und ihre Länge $|v| \in \mathbb{R}$:
Vektorpfeil $\vec{v}$ und $v = |\vec{v}|$ oder Unterstrich $\underline{v}$ und $v = |\underline{v}|$, oder Fettdruck.
Schnörkel helfen als Gedächtnisstütze, sind ansonsten aber entbehrlich.

Das euklidische Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

Das Skalarprodukt ermöglicht uns, in $\mathbb{R}^n$ Längen und Winkel zu messen.
Damit gewinnen wir auf $\mathbb{R}^n$ die bewährten geometrischen Werkzeuge:

- **Orthogonalität:** $u, v \in \mathbb{R}^n$ stehen senkrecht gdw $\langle u \,|\, v \rangle = 0$.
- **Norm:** Die Länge eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ ist $|v| = \|v\| = \sqrt{\langle v \,|\, v \rangle}$.
- **Cauchy–Schwarz–Ungleichung:** Immer gilt $|\langle u \,|\, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
- **Winkel** $\alpha = \sphericalangle(u, v) \in [0, \pi]$ bedeutet $\langle u \,|\, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\alpha)$.
- **Dreiecksungleichung:** Für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
- **Metrik:** Der Abstand zweier Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ ist $d(u, v) = \|u - v\|$.
- **Konvergenz** $v_k \to v$ in $\mathbb{R}^n$ bedeutet $\|v_k - v\| \to 0$ in $\mathbb{R}$ für $k \to \infty$.
- **Stetigkeit** von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt, aus $v_k \to v$ folgt $f(v_k) \to f(v)$.

Beispiel: Die Vektoren $e_1, \dots, e_n$ sind orthonormal, also $\langle e_i \,|\, e_j \rangle = \delta_{ij}$.
Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ folgt $x = \sum_{i=1}^n e_i x_i$ mit den Koeffizienten $x_i = \langle e_i \,|\, x \rangle$.

☺ Diese Technik bewährt sich schon für $n = 2, 3$ und in jeder Dimension $n \in \mathbb{N}$, später sogar für Funktionen als Grundlage der Fourier–Theorie!

Verallgemeinerung von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$

Wir nutzen Skalarprodukte nicht nur über $\mathbb{R}$, auch über $\mathbb{C}$, sogar $\mathbb{H}$.
Zur Erinnerung: Auf dem Körper $\mathbb{R}$ haben wir die **triviale Konjugation**

$$\operatorname{conj}_{\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \alpha \mapsto \overline{\alpha} = \alpha$$

Demnach gilt $|\alpha|^2 = \overline{\alpha}\alpha = \alpha\overline{\alpha} = \alpha^2 \geq 0$, mit Gleichhheit gdw $\alpha = 0$.

Auf $\mathbb{C} = \{\, z = \alpha + \mathrm{i}\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,\}$ haben wir die **komplexe Konjugation**

$$\operatorname{conj}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z = \alpha + \mathrm{i}\beta \mapsto \overline{z} = \alpha - \mathrm{i}\beta$$

Demnach gilt $|z|^2 = \overline{z}z = z\overline{z} = \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$, mit Gleichhheit gdw $z = 0$.

Auf $\mathbb{H} = \{\, q = \alpha + \mathrm{i}\beta + \mathrm{j}\gamma + \mathrm{k}\delta \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \,\}$ haben wir entsprechend

$$\operatorname{conj}_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \to \mathbb{H} : q = \alpha + \mathrm{i}\beta + \mathrm{j}\gamma + \mathrm{k}\delta \mapsto \overline{q} = \alpha - \mathrm{i}\beta - \mathrm{j}\gamma - \mathrm{k}\delta$$

Es gilt $|q|^2 = q\overline{q} = \overline{q}q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \geq 0$, mit Gleichhheit gdw $q = 0$.

Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $\overline{\overline{x}} = x$ sowie $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$ und $\overline{x \cdot y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$. Dies setzen wir fort auf Matrizen $A \in \mathbb{K}^{I \times J}$ durch $A^\dagger := \overline{A}^\top = (\overline{a_{ij}})_{ji} \in \mathbb{K}^{J \times I}$.

Verallgemeinerung von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$

Wir formulieren systematisch diese drei Fälle gemeinsam. Es lohnt sich!
Denkökonomie: Arbeit über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, gar $\mathbb{H}$, verläuft weitgehend parallel.
In ihrem Zusammenspiel und im Kontrast können wir viel lernen!

Grundlegend ist der reelle Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dieser ist insbesondere in kleiner Dimension $n = 2, 3$ wunderbar anschaulich. Davon wollen wir ausgehen und auf beliebige (auch unendliche) Dimension verallgemeinern.

Für viele Anwendungen (in Mathematik, Physik, Ingenieurwesen, uvm.) reichen die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht aus, daher nutzen wir die Erweiterung zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Das gilt insbesondere für Skalarprodukte.

Die Quaternionen $\mathbb{H}$ werden erfahrungsgemäß nicht so häufig genutzt wie $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$, oft genug sind sie jedoch eine sehr hilfreiche Ergänzung.

Den reellen Fall versteht man besser, wenn man auch komplex denkt, und fürs Komplexe hilft es, die Quaternionen im Hinterkopf zu haben.

Kurzum: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind oft nicht genug, die Quaternionen $\mathbb{H}$ sind manchmal zu viel, die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind meist genau richtig.

Das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Beispiel S1A: das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Auf $V = \mathbb{K}^n$ definieren wir das **Standardskalarprodukt**

$$\langle -|- \rangle : V \times V \to \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u \,|\, v \rangle := \overline{u_1}v_1 + \cdots + \overline{u_n}v_n = u^\dagger v.$$

Für alle Vektoren $u, v, w \in V$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

S0: positive Semidefinitheit, $\langle u \,|\, u \rangle \geq 0 = \langle 0 \,|\, 0 \rangle$

S1: positive Definitheit, $\langle u \,|\, u \rangle > 0$ für $u \neq 0$

S2: konjugierte Symmetrie, $\langle v \,|\, u \rangle = \overline{\langle u \,|\, v \rangle}$

S3: Linearität rechts, $\langle u \,|\, v\lambda + w\mu \rangle = \langle u \,|\, v \rangle\lambda + \langle u \,|\, w \rangle\mu$

Aus (S2&3) folgt konjugierte Linearität in der ersten Variablen:

S4: Semilinearität links, $\langle u\lambda + v\mu \,|\, w \rangle = \overline{\lambda}\langle u \,|\, w \rangle + \overline{\mu}\langle v \,|\, w \rangle$

Eigenschaften (S3&4) heißen **sesquilinear** (lat. *sesqui*, 'anderthalb'), und (S2) heißt **hermitesch** zu Ehren von Charles Hermite (1822–1901). Über $\mathbb{R}$ mit $\operatorname{conj}_{\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ heißt (S2) **symmetrisch** und (S3&4) **bilinear**.

Das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Wir nennen dies das **euklidische** oder **Standardskalarprodukt** auf $\mathbb{K}^n$.
Allgemein über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist es eine **hermitesche Sesquilinearform**, speziell über $\mathbb{R}$ eine **symmetrische Bilinearform**, zudem **positiv definit**.

Dank (S2) gilt $\langle u \,|\, u \rangle \in \mathbb{R}$ für alle $u \in V$, wir können also die Ordnung von $\mathbb{R}$ nutzen und von Positivität sprechen: (S0) fordert $\langle u \,|\, u \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, und (S1) ergänzt stärker $\langle u \,|\, u \rangle \neq 0$ für alle $u \neq 0$, also $\langle u \,|\, u \rangle \in \mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe: Rechnen Sie die hier gemachten Aussagen (S0–4) nach.

Lösung: Wir nutzen die Anordnung der reellen Zahlen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}$:

(S0) Für jeden Koeffizienten $u_i \in \mathbb{K}$ gilt $\overline{u_i}u_i = |u_i|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Für jeden Vektor $u \in \mathbb{K}^n$ folgt $\langle u \,|\, u \rangle = |u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2 \geq 0$.

(S1) Im Falle $u \neq 0$ gilt $u_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Daraus folgt sofort die strikte Ungleichung $\langle u \,|\, u \rangle \geq |u_i|^2 > 0$.

Wir nutzen, dass $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ein Ring ist und die Konjugation $x \mapsto \overline{x}$ ein Ringantiautomorphismus. Damit rechnen Sie (S2–4) geduldig nach.
Da $\mathbb{H}$ nicht-kommutativ ist, achten wir auf die Reihenfolge der Faktoren.

Das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$

Warnung: Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist $(u,v) \mapsto u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$ positiv definit, auf $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{H}^n$ jedoch nicht, denn $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1 < 0$.

⚠ Zur Korrektur müssen wir *eine* der beiden Variablen konjugieren. Ich plädiere entschieden für die erste, dadurch werden Formeln schöner. Diese Konvention ist in der physikalischen Literatur weitgehend üblich.

⚠ Manche Kolleg:innen konjugieren traditionell die zweite Variable. So findet es sich vor allem in der älteren, mathematischen Literatur. Beide Konventionen sind per Konjugation ineinander umzurechnen.

☺ Wir legen uns auf eine Konvention fest und befolgen diese fortan.

Bemerkung: Es gilt $\langle u \,|\, 0 \rangle = 0$ dank (S3) und $\langle 0 \,|\, v \rangle = 0$ dank (S4). Insbesondere gilt demnach immer $\langle 0 \,|\, 0 \rangle = 0$, und aus (S1) folgt (S0).

Die Formulierung der Eigenschaften (S0–3) ist daher etwas redundant; ich möchte damit die positive Definitheit (S1) besonders hervorheben.

Gilt in späteren Anwendungen statt positiver Definitheit (S1) nur die schwächere Eigenschaft (S0), so nennen wir $\langle \text{-} | \text{-} \rangle$ **positiv semidefinit**.

Anwendungen von Skalarprodukt, Norm und Metrik

☺ Mit dem Skalarprodukt $\langle \text{-} | \text{-} \rangle$ messen wir in V Längen und Winkel. Daraus gewinnen wir für V über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ geometrische Werkzeuge:

- **Orthogonalität:** $u, v \in V$ stehen senkrecht gdw $\langle u \,|\, v \rangle = 0$.
- **Norm:** Die Länge eines Vektors $v \in V$ ist $|v| = \|v\| = \sqrt{\langle v \,|\, v \rangle}$.
- **Cauchy–Schwarz–Ungleichung:** Es gilt $|\langle u \,|\, v \rangle| \le \|u\| \cdot \|v\|$.
- **Winkel** $\alpha = \sphericalangle(u,v) \in [0,\pi]$ bedeutet $\operatorname{re}\langle u \,|\, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\alpha)$.
- **Dreiecksungleichung:** Für alle $u, v \in V$ gilt $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$.
- **Metrik:** Der Abstand zweier Vektoren $u, v \in V$ ist $d(u,v) = \|u - v\|$.
- **Konvergenz** $v_n \to v$ in V bedeutet $\|v_n - v\| \to 0$ in $\mathbb{R}$ für $n \to \infty$.
- **Vollständigkeit** bedeutet: Jede Cauchy–Folge in V konvergiert in V.
- **Stetigkeit** von $f : V \to W$ heißt, aus $v_n \to v$ folgt $f(v_n) \to f(v)$.
- **Differenzierbarkeit**, lineare und höhere Approximation, uvm…

☺ Wir wollen dies möglichst allgemein erklären und effizient nutzen. Dazu erheben wir die wesentlichen Eigenschaften (S1–3) zur Definition.

Anwendungen fordern (symmetrische) Bilinearformen

Für ein reelles Skalarprodukt fordern wir wirkungsstarke Eigenschaften: Es ist eine symmetrische Bilinearform (S2&3), zudem positiv definit (S1).

Es gibt auch viele Anwendungen, in denen symmetrische Bilinearformen auftreten, die jedoch nicht positiv definit sind, sondern nur semidefinit order gar indefinit. Auch diese wollen und müssen wir angemessen und systematisch behandeln. Dazu untersuchen wir allgemein symmetrische Bilinearformen und kommen dann gerne auf Skalarprodukte zurück.

Darüber hinaus begegnen uns oft auch interessante Bilinearformen, die nicht symmetrisch sind. Diese wollen wir uns nicht verbieten, sondern auch hierfür gleich die nötigen Grundlagen bereitstellen. Abstraktion vereinfacht: Weniger Voraussetzung ist mehr Anwendung.

Es lohnt sich daher, den Blick nicht allzu früh einzuengen, sondern eher zu weiten und die Begriffe sorgsam einzuführen und zu untersuchen. Das ist das vertraute und bewährte Vorgehen umsichtiger Mathematik: Wir erreichen nachhaltige Effizienz durch systematische Grundlagen.

Anwendungen fordern (hermitesche) Sesquilinearformen

Viele Anwendungen nutzen den Körper $\mathbb{C}$ und komplexe Skalarprodukte. In all diesen Fällen spielt die komplexe Konjugation $\operatorname{conj}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z = x + \mathrm{i}y \mapsto \overline{z} = x - \mathrm{i}y$ für $x, y \in \mathbb{R}$ eine zentrale Rolle in Rechnungen, wie oben bereits zu erkennen in unserem Paradebeispiel S1A.

Daher wollen wir auch hermitesche Sesquilinearformen gebührend benennen und behandeln. Dies gelingt möglichst elegant und effizient, wenn wir jeweils nur die wirklich benötigten Eigenschaften voraussetzen. Darüber hinaus begegnen uns auch interessante Sesquilinearformen, die nicht hermitesch sind. Diese wollen wir uns nicht verbieten.

Wir arbeiten dazu allgemeinen über einem Ring $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit Involution. Abstraktion vereinfacht: Weniger Voraussetzung ist mehr Anwendung.

Die wichtigsten Beispiele sind die komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, \operatorname{conj}_{\mathbb{C}})$ und weiterhin die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ mit der trivialen Konjugation. Die Quaternionen $(\mathbb{H}, \operatorname{conj}_{\mathbb{H}})$ führe ich mit als illustrative Begleitung, besonders gerne überall dort, wo dies keinen Mehraufwand erfordert.

Was ist ein Ring mit Involution?

Wir arbeiten typischerweise über $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$. Hierbei ist σ eine Involution, $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$, also eine selbstinverse Abbildung, und zudem ein Anti-Automorphismus des Grundrings $\mathbb{K}$. Ausführlich:

♦ Definition D1G: involutiver Ring, kurz *Ring

Sei $(\mathbb{K}, +, 0, \cdot, 1)$ ein Ring. Eine **Involution** $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K} : a \mapsto a^\sigma = a^*$ erfüllt $(a^\sigma)^\sigma = a$ sowie $(a+b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma$ und $(a \cdot b)^\sigma = b^\sigma \cdot a^\sigma$ für alle $a, b \in \mathbb{K}$, somit $0^\sigma = 0$ und $1^\sigma = 1$. Das Paar $(\mathbb{K}, \sigma)$ heißt dann **involutiver Ring**.

Beispiele: (0) Jeder kommutative Ring $\mathbb{K}$ ist involutiv mit $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$.

(1) Auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist die **Konjugation** $\mathrm{conj}_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ eine Involution. Soweit möglich fasse ich diese klassischen Fälle $(\mathbb{K}, \mathrm{conj}_{\mathbb{K}})$ zusammen.

(2) Ist $(\mathbb{K}, \sigma)$ ein involutiver Ring, so auch $(\mathbb{K}^{n\times n}, {}^\dagger)$ mit $A^\dagger = (A^\sigma)^\top$, der Matrixring mit **Adjunktion**, aka Transkonjugation $(a_{ij})_{ij} \mapsto (a_{ij}^\sigma)_{ji}$.

Dies ist sowohl ein zentrales Beispiel als auch ein wichtiges Werkzeug und in vielen Anwendungen prominent, insbesondere über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Spätestens hier müssen wir uns von der Kommutativität verabschieden!

Was ist ein Ring mit Involution?

Die Involution nennen wir auch **Konjugation** oder **Adjunktion**; zu $a \in \mathbb{K}$ ist $a^\sigma \in \mathbb{K}$ das **konjugierte** oder **adjungierte** Element. Nach dem Vorbild von Matrizen nennen wir $a \in \mathbb{K}$ **selbstadjungiert** oder **hermitesch** falls $a^\sigma = a$ gilt, **unitär** falls $a^\sigma = a^{-1}$, und **normal** falls $a \cdot a^\sigma = a^\sigma \cdot a$.

Ein **Homomorphismus** $f : (R, \rho) \to (S, \sigma)$ involutiver Ringe ist ein Ringhomomorphismus $f : R \to S$ mit $f(a^\rho) = f(a)^\sigma$ für alle $a \in R$. Beispiele sind die Inklusionen $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}}) \hookrightarrow (\mathbb{C}, \mathrm{conj}_{\mathbb{C}}) \hookrightarrow (\mathbb{H}, \mathrm{conj}_{\mathbb{H}})$ und zu $f : (R, \rho) \to (S, \sigma)$ die Matrixfortsetzung $f : (R^{n\times n}, {}^\dagger) \to (S^{n\times n}, {}^\dagger)$.

Weitere involutive Ringe begegnen Ihnen je nach Anwendungsgebiet:

Beispiele: Sei $(\mathbb{K}, \sigma)$ involutiv. (3) Der Polynomring $\mathbb{K}[X]$ ist involutiv bezüglich $\sigma_\pm : X \mapsto \pm X$, ausgeschrieben $\sum_{k=0}^n c_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^n c_k^\sigma (\pm 1)^k X^k$.

(4) Jeder Gruppenring $\mathbb{K}G$ ist involutiv mit $(\sum_g c_g \cdot g)^\sigma = \sum_g c_g^\sigma \cdot g^{-1}$. Ebenso: Ist (G, σ) ein involutives Monoid, so ist $\mathbb{K}G$ ein involutiver Ring.

(5) Sei $q \in \mathbb{N}$ eine Primzahlpotenz und $\mathbb{F}_{q^2}$ ein Körper mit q^2 Elementen. Die Frobenius–Abbildung $\mathfrak{f} : \mathbb{F}_{q^2} \to \mathbb{F}_{q^2} : x \mapsto x^q$ ist eine Involution. (K1R)

Was ist eine semilineare Abbildung?

Definition S1B: semilineare Abbildung über einem *Ring $(\mathbb{K}, \sigma)$

Sei $(V, +, \cdot)$ rechtslinear und $(W, +, \circ)$ linkslinear über $\mathbb{K}$. Wir nennen $f : V \to W$ **semilinear** über $(\mathbb{K}, \sigma)$, falls f additiv ist und $(\mathbb{K}, \sigma)$–homogen:

$$f(v + v') = f(v) + f(v'), \qquad f(v \cdot \lambda) = \lambda^\sigma \circ f(v)$$

für alle Vektoren $v, v' \in V$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{K}$. Diese Eigenschaft heißt auch **konjugiert-linear** oder **antilinear** oder kurz **σ–linear** über $\mathbb{K}$.

Beispiel: Sei $(\mathbb{K}, \sigma)$ ein involutiver Ring, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$. Die Matrixadjunktion ${}^\dagger : \mathbb{K}^{I\times J} \to \mathbb{K}^{J\times I} : A^\dagger = (A^\sigma)^\top$ ist semilinear:

$$(A+B)^\dagger \overset{\text{Def}}{=} (A+B)^{\sigma\top} \overset{\text{Conj}}{=} (A^\sigma + B^\sigma)^\top \overset{\text{Tran}}{=} A^\dagger + B^\dagger$$
$$(A \cdot \lambda)^\dagger \overset{\text{Def}}{=} (A \cdot \lambda)^{\sigma\top} \overset{\text{Conj}}{=} (\lambda^\sigma \circ A^\sigma)^\top \overset{\text{Tran}}{=} \lambda^\sigma \circ A^\dagger.$$

Über $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ ist die Adjunktion nur die Konjugation, und diese ist linear. Über $(\mathbb{C}, \mathrm{conj}_{\mathbb{C}})$ müssen wir dabei zusätzlich den Skalar λ konjugieren, über $(\mathbb{H}, \mathrm{conj}_{\mathbb{H}})$ zudem die Reihenfolge der Multiplikation umkehren.

Konjugation von rechts nach links und umgekehrt

Mit der Involution $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ tauschen wir elegant links und rechts:

Bemerkung S1C: Konjugation von rechts nach links und umgekehrt

Weiter sei $(\mathbb{K}, \sigma)$ ein involutiver Ring, etwa $(\mathbb{K}, \mathrm{id}_{\mathbb{K}})$ mit $\mathbb{K}$ kommutativ.

(0) Dann ist $(\sigma, \sigma) : \mathbb{K} \cong \mathbb{K}^{\mathrm{op}}$ ein Ringisomorphismus zwischen dem Ring $\underline{\mathbb{K}} = (\mathbb{K}, +, \cdot)$ und dem entgegengesetzten $\underline{\mathbb{K}}^{\mathrm{op}} = (\mathbb{K}, +, \circ)$ mit $a \circ b = b \cdot a$.

(1) Wir können jeden $\mathbb{K}$–rechtslinearen Raum $\underline{V} = (V, +, \cdot)$ zu einem $\mathbb{K}$–linkslinearen Raum $\underline{V}^\sigma = (V, +, \circ)$ konjugieren durch $\lambda \circ v := v \cdot \lambda^\sigma$.

Ebenso umgekehrt von links nach rechts, dabei gilt involutiv $(V^\sigma)^\sigma = V$. Insbesondere ist $(\mathrm{id}_V, \mathrm{id}_V) : V \cong V^\sigma$ ein semilinearer Isomorphismus.

(2) Ist die Abbildung $f : V \to W$ linear über $\mathbb{K}$, so auch $f : V^\sigma \to W^\sigma$. Ist $f : V \to W$ semilinear, so ist $f : V^\sigma \to W$ linear, ebenso $f : V \to W^\sigma$.

Übung: Schreiben Sie dies sorgsam aus und rechnen Sie es nach!

Beispiel: Für $(\mathbb{K}, \mathrm{id}_{\mathbb{K}})$ ist der Ring $\mathbb{K}$ kommutativ und wir müssen links und rechts nicht unterscheiden, kurz $\lambda \circ v = v \cdot \lambda$ für $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Was ist eine Sesquilinearform?

Eine Abbildung mit Werten im Grundring $\mathbb{K}$ heißt traditionell **Form**.

Beispiel: Sei $U = \mathbb{K}^{(I)}$ und $V = \mathbb{K}^{(J)}$. Zu jeder Matrix $B \in \mathbb{K}^{I\times J}$ haben wir die Form $\beta : U \times V \to \mathbb{K}$ mit $\beta(u,v) = u^\dagger B\, v = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_i^\sigma\, b_{ij}\, v_j$. Rechts: Zu u ist $v \mapsto \beta(u,v)$ linear. Links: Zu v ist $u \mapsto \beta(u,v)$ semilinear.

Definition S1D: Sesquilinearform über einem *Ring $(\mathbb{K},\sigma)$

(1) Seien U, V rechtslineare Räume über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\beta : U \times V \to \mathbb{K}$ ist **sesquilinear** über $(\mathbb{K},\sigma)$, wenn sie linear in V und semilinear in U ist:

$$\beta(u, v+v') = \beta(u,v) + \beta(u,v'), \qquad \beta(u, v\cdot\mu) = \beta(u,v)\,\mu$$
$$\beta(u+u', v) = \beta(u,v) + \beta(u',v), \qquad \beta(u\cdot\lambda, v) = \lambda^\sigma\,\beta(u,v),$$

für alle Vektoren $u, u' \in U$ und $v, v' \in V$ sowie alle Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Wir nennen β eine **Sesquilinearform** oder kurz **SForm** und definieren

$$\mathrm{SF}_{(\mathbb{K},\sigma)}(U,V) := \{\beta : U \times V \to \mathbb{K} \mid \beta \text{ ist sesquilinear}\}.$$

Beliebte Schreibweisen: $\beta(u,v) = (u\,|\,v) = \langle u\,|\,v\rangle = \langle u, v\rangle = u \bullet v = \ldots$

Von Sesqui- zu Bilinearformen

Zunächst interessieren uns Skalarprodukte über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, und daher allgemein Sesquilinearformen über $(\mathbb{K},\sigma)$. Noch genauer untersuchen wir später den Spezialfall $\sigma = \mathrm{id}_\mathbb{K}$ und bilineare Abbildungen, Stichworte sind quadratische Formen und Quadriken, Dualität und Tensorprodukte.

Beispiel: Sei $\mathbb{K}$ ein Ring und $A \in \mathbb{K}^{p\times q}$ eine Matrix. Die Abbildung

$$\beta : \mathbb{K}^{s\times p} \times \mathbb{K}^{q\times r} \to \mathbb{K}^{s\times r} : (u,v) \mapsto u\,A\,v$$

ist bilinear über $S = \mathbb{K}^{s\times s}$ von links und $R = \mathbb{K}^{r\times r}$ von rechts. Allgemein seien ${}_SU$ und V_R sowie ${}_SW_R$ lineare Räume. Wir nennen $\beta : U \times V \to W$ eine **bilineare Abbildung**, falls sie linear in beiden Argumenten ist:

$$\beta(u+u', v) = \beta(u,v) + \beta(u',v), \qquad \beta(\lambda u, v) = \lambda\beta(u,v),$$
$$\beta(u, v+v') = \beta(u,v) + \beta(u,v'), \qquad \beta(u, v\mu) = \beta(u,v)\mu$$

für alle Vektoren $u, u' \in U$ und $v, v' \in V$ sowie Skalare $\lambda \in S$ und $\mu \in R$. Im Falle $S = R = \mathbb{K} = W$ nennen wir $\beta : U \times V \to \mathbb{K}$ eine **Bilinearform**. Diesen wichtigen Spezialfall wollen wir vorerst fokussieren.

Was ist eine Bilinearform?

Beispiel: Für $U = \mathbb{K}^{(I)}$ und $V = \mathbb{K}^{(J)}$ über einem Ring $\mathbb{K}$ haben wir die Form $\beta : U \times V \to \mathbb{K}$ mit $\beta(u,v) = u^\intercal B\, v = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_i\, b_{ij}\, v_j$. Zu u ist $v \mapsto \beta(u,v)$ rechtslinear. Zu v ist $u \mapsto \beta(u,v)$ linkslinear.

Definition S1D: Bilinearform aka Paarung über einem Ring $\mathbb{K}$

(2) Über dem Ring $\mathbb{K}$ sei $(U, +, \cdot)$ linkslinear und $(V, +, \cdot)$ rechtslinear. Eine Abbildung $\beta : U \times V \to \mathbb{K}$ heißt **bilinear** über $\mathbb{K}$, falls gilt:

$$\beta(u, v+v') = \beta(u,v) + \beta(u,v'), \qquad \beta(u, v\cdot\mu) = \beta(u,v)\,\mu,$$
$$\beta(u+u', v) = \beta(u,v) + \beta(u',v), \qquad \beta(\lambda\cdot u, v) = \lambda\,\beta(u,v)$$

für alle Vektoren $u, u' \in U$ und $v, v' \in V$ sowie alle Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Wir nennen β eine **Bilinearform** oder kurz **BForm** und definieren

$$\mathrm{BF}_\mathbb{K}(U,V) := \{\beta : U \times V \to \mathbb{K} \mid \beta \text{ ist bilinear}\}.$$

Ist $(\mathbb{K},\sigma)$ ein involutiver Ring, so gilt $\mathrm{SF}_{(\mathbb{K},\sigma)}(U,V) = \mathrm{BF}_\mathbb{K}(U^\sigma, V)$. Für $\sigma = \mathrm{id}_\mathbb{K}$ ist $\mathbb{K}$ kommutativ und wir betrachten U und U^σ als gleich.

Bilinearform vs Sesquilinearform

Im Falle $(\mathbb{K}, \mathrm{id}_\mathbb{K})$ ist die Konjugation *trivial*, also der Ring $\mathbb{K}$ kommutativ. Dies gilt zum Beispiel für $(\mathbb{R}, \mathrm{conj}_\mathbb{R})$. In diesem Falle betrachten wir jeden $\mathbb{K}$–linearen Raum als zentral, also $\lambda v = v\lambda$ für alle Vektoren $v \in V$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{K}$, und Sesquilinearformen sind dasselbe wie Bilinearformen.

Es gibt jedoch wichtige Anwendungen, in denen die Konjugation *nicht* trivial ist. Dies gilt insbesondere über den komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, \mathrm{conj}_\mathbb{C})$. Um nicht alles zweimal aufzurollen, möchte ich von Anfang sowohl Bilinearformen als auch Sesquilinearformen gleich behandeln.

Diese doppelte Zielsetzung gelingt uns elegant und schmerzfrei mit dem oben eingeführten Begriff des involutiven Rings $(\mathbb{K},\sigma)$. Dieser fasst alle Fälle zusammen und erlaubt uns eine einheitliche Sicht- und Sprechweise. Wie so oft, wir freuen uns erneut über **Effizienz durch Abstraktion**.

Abstrahieren heißt nicht ignorieren. Bilinearformen über $(\mathbb{K},\sigma)$ sind oft der einfachste Fall und meist besonders wichtig, je nach Anwendung. Sie sind also immer eingeladen, den Spezialfall $\sigma = \mathrm{id}_\mathbb{K}$ mitzudenken, oder wenn Sie dies lieber mögen, ihn als leuchtendes Vorbild zu nehmen.

Darstellende Gram–Matrix einer Sesquilinearform

Satz S1E: Gram–Matrix einer Sesquilinearform

Seien $\mathcal{U} = (u_i)_{i\in I}$ und $\mathcal{V} = (v_j)_{j\in J}$ Basen von U und V über $\mathbb{K}$.

(0) Jede Sesquilinearform $\beta : U \times V \to \mathbb{K}$ über $(\mathbb{K}, \sigma)$ definiert ihre darstellende **Gram–Matrix** $B = \mathrm{G}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\beta) \in \mathbb{K}^{I\times J}$ durch Auswertung,

$$b_{ij} := \beta(u_i, v_j) \quad \text{für } i \in I \text{ und } j \in J.$$

(1) Umgekehrt definiert jede Matrix $B \in \mathbb{K}^{I\times J}$ eine Sesquilinearform $\beta = \mathrm{F}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(B) : U \times V \to \mathbb{K}$ durch **sesquilineare Fortsetzung**:

$$\beta\big(\textstyle\sum_{i\in I} u_i x_i, \sum_{j\in J} v_j y_j\big) := x^\dagger B\, y \quad \text{für } x \in \mathbb{K}^{(I)} \text{ und } y \in \mathbb{K}^{(J)}$$

(2) Dies stiftet einen Isomorphismus zwischen SFormen und Matrizen:

$$\boxed{(\mathrm{G}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}, \mathrm{F}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}) : \mathrm{SF}_{(\mathbb{K},\sigma)}(U, V) \cong \mathbb{K}^{I\times J} : \beta \leftrightarrow B}$$

Beispiel: Sei $(\mathbb{K}^n, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ das Standardskalarprodukt über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Für die Standardbasis $(e_1, \dots, e_n)$ gilt $\langle e_i \,|\, e_j\rangle = \delta_{ij}$, also $B = 1_{n\times n}$.

Darstellende Gram–Matrix einer Sesquilinearform

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(J)} \arrow[r, "(x,y)\mapsto x^\dagger B\, y"'] \arrow[d, "\cong"', "\Phi_{\mathcal{U}}\times\Phi_{\mathcal{V}}"] \arrow[dr, phantom, "\Updownarrow"] & \mathbb{K} \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_{\mathbb{K}}"] \\
U \times V \arrow[r, "(u,v)\mapsto\beta(u,v)"'] & \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

Beweis: (1) Die Koordinaten $\Phi_{\mathcal{U}} : \mathbb{K}^{(I)} \xrightarrow{\sim} U : (x_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} u_i x_i$ und $\Phi_{\mathcal{V}} : \mathbb{K}^{(J)} \xrightarrow{\sim} V : (y_i)_{j\in J} \mapsto \sum_{j\in J} v_j y_j$ sind $\mathbb{K}$–lineare Isomorphismen. Daher ist $\beta : (u, v) \mapsto \Phi_{\mathcal{V}}^{-1}(u)^\dagger \cdot B \cdot \Phi_{\mathcal{V}}^{-1}(v)$ sesquilinear über $(\mathbb{K}, \sigma)$.

(2) Es gilt $\mathrm{F} \circ \mathrm{G} = \mathrm{id}$: Für $\beta \in \mathrm{SF}(U, V)$ und $B = \mathrm{G}(\beta)$ erhalten wir

$$\mathrm{F}(B)(u, v) \overset{\text{Def}}{=} \textstyle\sum_i \sum_j x_i^\sigma\, \beta(v_i, v_j)\, y_j \overset{\text{Sesq}}{=} \beta(u, v).$$

Umgekehrt gilt $\mathrm{G} \circ \mathrm{F} = \mathrm{id}$: Zu $B \in \mathbb{K}^{I\times J}$ und $\beta = \mathrm{F}(B)$ erhalten wir

$$\mathrm{G}(\beta)_{ij} \overset{\text{Def}}{=} \beta(u_i, v_j) \overset{\text{Def}}{=} e_i^\dagger B\, e_j = b_{ij}.$$

Die Bijektion $(\mathrm{G}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}, \mathrm{F}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}) : \mathrm{SF}_{(\mathbb{K},\sigma)}(U, V) \cong \mathbb{K}^{I\times J}$ ist linear über dem Zentrum $Z(\mathbb{K}) \leq \mathbb{K}$ und erfüllt $\mathrm{G}(\beta^\dagger) = \mathrm{G}(\beta)^\dagger$ und $\mathrm{F}(B^\dagger) = \mathrm{F}(B)^\dagger$. $\boxed{\text{QED}}$

Darstellende Gram–Matrizen und Basiswechsel

Endliche Dimension benötigen wir für diese Konstruktion noch nicht. In konkreten Anwendungen ergibt sie sich meist aus dem Kontext. Basiswechsel können wir als kommutatives Diagramm darstellen:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(J)} \arrow[r, "(x,y)\mapsto x^\dagger B\, y"] \arrow[dr, "\cong"', "\Phi_{\mathcal{U}}\times\Phi_{\mathcal{V}}"] & \mathbb{K} \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_{\mathbb{K}}"] \\
U \times V \arrow[r, "(u,v)\mapsto\beta(u,v)"] \arrow[u, bend left, "\cong", "S\times T"'] & \mathbb{K} \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_{\mathbb{K}}"] \\
\mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(J)} \arrow[r, "(x',y')\mapsto x'^\dagger B'\, y'"] \arrow[u, "\cong", "\Phi_{\mathcal{U}'}\times\Phi_{\mathcal{V}'}"'] & \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

Koordinatenwechsel für den Weltfrieden!

Wie können Alice und Bob ihre willkürlich gewählten Koordinaten nun verlustfrei ineinander umrechnen?

Aufgabe: Formulieren Sie den Satz zu Gram–Matrix und Basiswechsel für Sesquilinearformen $\beta : U \times V \to \mathbb{K}$. Anschließend vergleichen Sie dies mit der vertrauten Darstellung von linearen Abbildung durch Matrizen. Sie erhalten die folgende lehrreiche Zusammenschau. Das hilft Ihnen, Verwechslungen zu vermeiden zwischen Ähnlichkeit und Kongruenz.

Darstellende Gram–Matrizen und Basiswechsel

Ziel: Durch geschickte Wahl einer Basis wollen wir die Gram–Matrix möglichst weit vereinfachen, am besten diagonalisieren, siehe S1F/S1R.

Satz S1E: Basiswechsel für Gram–Matrizen

(3) Die Sesquilinearform $\beta : U \times V \to \mathbb{K}$ über $(\mathbb{K}, \sigma)$ stellen wir dar durch die beiden Gram–Matrizen $B = \mathrm{G}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\beta)$ und $B' = \mathrm{G}_{\mathcal{U}',\mathcal{V}'}(\beta)$ bezüglich der Basen $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ von U und $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ von V. Hierzu sei $S = \mathrm{T}_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{U}} \in \mathrm{GL}_I(\mathbb{K})$ und $T = \mathrm{T}_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}} \in \mathrm{GL}_J(\mathbb{K})$ die Basiswechselmatrizen. Dann gilt:

$$\boxed{B' = S^\dagger B T}$$

Beweis: Zu je zwei Vektoren $u, v \in V$ betrachten wir die Koordinaten $x = \Phi_{\mathcal{U}}^{-1}(u)$, $x' = \Phi_{\mathcal{U}'}^{-1}(u) \in \mathbb{K}^{(I)}$ sowie $y = \Phi_{\mathcal{V}}^{-1}(v)$, $y' = \Phi_{\mathcal{V}'}^{-1}(v) \in \mathbb{K}^{(J)}$. Nach Definition der Gram–Matrizen $B, B' \in \mathbb{K}^{I\times J}$ gilt:

$$x'^\dagger B'\, y' \overset{\text{Def}}{=} \beta(u, v) \overset{\text{Def}}{=} x^\dagger B\, y \overset{\text{Trafo}}{=} (Sx')^\dagger B\,(Ty') \overset{\text{Ass}}{=} x'^\dagger (S^\dagger B T)\, y'.$$

Daraus folgt $B' = S^\dagger B T$ mit $x' = e_i$ und $y' = e_j$ für $i \in I$ und $j \in J$. $\boxed{\text{QED}}$

Synopsis: Homomorphismen vs Sesquilinearformen

Sei $(\mathbb{K}, \sigma)$ ein Ring mit Involution, etwa $\mathbb{K}$ kommutativ und $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$, und darüber U, V rechtslineare Räume mit Basen $\mathcal{U} = (u_i)_{i\in I}$ und $\mathcal{V} = (v_j)_{j\in J}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^{(J)} \arrow[r, "y\mapsto x=Ay"] \arrow[d, "\cong"', "\Phi_{\mathcal{V}}"] \arrow[dr, phantom, "\Updownarrow"] & \mathbb{K}^{(I)} \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{U}}"', "\cong"] \\
V \arrow[r, "v\mapsto u=\alpha(v)"] & U
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(J)} \arrow[r, "(x,y)\mapsto x^\dagger B\, y"] \arrow[d, "\cong"', "\Phi_{\mathcal{U}}\times\Phi_{\mathcal{V}}"] \arrow[dr, phantom, "\Updownarrow"] & \mathbb{K} \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_{\mathbb{K}}"] \\
U \times V \arrow[r, "(u,v)\mapsto\beta(u,v)"] & \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

(1) Wir können jede $\mathbb{K}$–lineare Abbildung $\alpha : V \to U$ darstellen als Matrix $A = \mathrm{M}^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}(\alpha) \in \mathbb{K}^{(I)\times J}$. Dies definiert den $Z(\mathbb{K})$–Isomorphismus

$$\boxed{(\mathrm{M}^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}, \mathrm{L}^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}) : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U) \cong \mathbb{K}^{(I)\times J} : \alpha \leftrightarrow A.}$$

(2) Wir können jede $(\mathbb{K}, \sigma)$–Sesquilinearform $\beta : U \times V \to \mathbb{K}$ darstellen als Matrix $B = \mathrm{G}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\beta) \in \mathbb{K}^{I\times J}$. Dies definiert den $Z(\mathbb{K})$–Isomorphismus

$$\boxed{(\mathrm{G}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}, \mathrm{F}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}) : \mathrm{SF}_{\mathbb{K}}(U, V) \cong \mathbb{K}^{I\times J} : \beta \leftrightarrow B.}$$

☺ Mit Matrizen können wir wunderbar rechnen, explizit und effizient.

Synopsis: Homomorphismen vs Sesquilinearformen

⚠ Wir nutzen hier Matrizen A und B für zwei ganz verschiedene Dinge! Auf den ersten Blick scheinen lineare Abbildungen $\alpha : V \to U$ und bilineare Formen $\beta : U \times V \to \mathbb{K}$ recht ähnlich. Beide können wir durch Matrizen darstellen, doch diese verhalten sich sehr verschieden unter Basiswechseln. Abstrakt gesehen entspricht β einer linearen Abbildung in den Dualraum, $\beta_1 : U \to V^* : u \mapsto \beta(u, \text{-})$ bzw. $\beta_2 : V \to U^* : v \mapsto \beta(\text{-}, v)$.

(1) Gegeben ist im ersten Fall eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung $\alpha : V \to U$. Für die darstellende Matrix $A = \mathrm{M}^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}(\alpha) \in \mathbb{K}^{(I)\times J}$ schreiben wir zu jedem Basisvektor v_j sein Bild $\alpha(v_j) = \sum_{i\in I} u_i a_{ij}$ als Linearkombination der Basis $\mathcal{U}$ im Zielraum U. Dies definiert die darstellende Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$.

(2) Gegeben ist im zweiten Falle eine $\mathbb{K}$–Sesquilinearform $\beta : U \times V \to \mathbb{K}$. Die darstellende Gram–Matrix $B = \mathrm{G}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\beta)$ ist $b_{ij} = \beta(u_i, v_j)$ für alle i, j. Dies definiert die darstellende Matrix $B \in \mathbb{K}^{I\times J}$, aber mit einer völlig anderen Herkunft und ganz anderen Bedeutung als im ersten Fall.

⚠ Dies gelingt jeweils sogar für unendliche Basen; hier zeigen sich erste Unterschiede. Diese sehen wir besonders deutlich bei Basiswechseln!

Synopsis: Homomorphismen vs Sesquilinearformen

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^{(J)} \arrow[r, "y\mapsto x=Ay"] \arrow[d, "\cong"', "\Phi_{\mathcal{V}}"] & \mathbb{K}^{(I)} \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{U}}"', "\cong"] \\
V \arrow[r, "v\mapsto u=\alpha(v)"] & U \\
\mathbb{K}^{(J)} \arrow[r, "y'\mapsto x'=A'y'"] \arrow[u, bend left=60, "\cong"] \arrow[u, "\cong"', "\Phi_{\mathcal{V}'}"] & \mathbb{K}^{(I)} \arrow[u, bend right=60, "\cong"'] \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{U}'}", "\cong"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(J)} \arrow[r, "(x,y)\mapsto x^\dagger B\, y"] \arrow[d, "\cong"', "\Phi_{\mathcal{U}}\times\Phi_{\mathcal{V}}"] & \mathbb{K} \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_{\mathbb{K}}"] \\
U \times V \arrow[r, "(u,v)\mapsto\beta(u,v)"] & \mathbb{K} \\
\mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(J)} \arrow[r, "(x',y')\mapsto x'^\dagger B'\, y'"] \arrow[u, bend left=60, "\cong"] \arrow[u, "\cong"', "\Phi_{\mathcal{U}'}\times\Phi_{\mathcal{V}'}"] & \mathbb{K} \arrow[u, equal, "\mathrm{id}_{\mathbb{K}}"]
\end{tikzcd}$$

Basiswechsel: $x = Sx' = (\Phi_{\mathcal{U}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{U}'})(x')$ und $y = Ty' = (\Phi_{\mathcal{V}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{V}'})(y')$
Homomorphismus: $x = A\,y \Leftrightarrow (Sx') = A(Ty') \Leftrightarrow x' = (S^{-1}A\,T)\,y'$
Sesquilinearform: $x^\dagger B\,y = (Sx')^\dagger B\,(Ty') = x'^\dagger (S^\dagger B\,T)\,y'$

Die Bedeutung diktiert das jeweilige **Transformationsverhalten**:

$$\boxed{A' = S^{-1}A\,T \qquad \text{vs} \qquad B' = S^\dagger B\,T}$$

Speziell für $U = V$ mit gemeinsamen Basen $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ und $\mathcal{U}' = \mathcal{V}'$ folgt:

$$\boxed{\textbf{Ähnlichkeit}\ \ A \sim A' = S^{-1}A\,S \quad \text{vs} \quad \textbf{Kongruenz}\ \ B \simeq B' = S^\dagger B\,S}$$

Synopsis: Endomorphismen vs Sesquilinearformen

Die Zusammenschau schenkt Überblick und vermeidet Verwechslungen. Es lohnt sich, dies im Folgenden immer konsequent vor Augen zu halten. Wir erklären Isomorphie für Endomorphismen und Sesquilinearformen:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "v\mapsto u=\alpha(v)"] \arrow[d, shift right, "h"'] & V \arrow[d, shift right, "h"'] \\
V' \arrow[r, "u'\mapsto v'=\alpha'(u')"] \arrow[u, shift right, "h'"'] \arrow[ur, phantom, "\cong"] & V' \arrow[u, shift right, "h'"'] \arrow[ul, phantom, "\cong"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V \times V \arrow[r, "(u,v)\mapsto\beta(u,v)"] \arrow[d, shift right, "h\times h"'] & \mathbb{K} \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_{\mathbb{K}}"] \\
V' \times V' \arrow[r, "(u',v')\mapsto\beta'(u',v')"] \arrow[u, shift right, "h'\times h'"'] \arrow[ur, phantom, "\cong"] & \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

Zwei Endomorphismen $\alpha : V \to V$ und $\alpha' : V' \to V'$ über $\mathbb{K}$ heißen **isomorph** oder **äquivalent**, falls ein Isomorphismus $(h, h') : V \cong V'$ mit $h \circ \alpha = \alpha' \circ h$ existiert, also $\alpha = h^{-1} \circ \alpha' \circ h$ bzw. $\alpha' = h \circ \alpha \circ h^{-1}$.

Zwei Sesquilinearformen $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ und $\beta' : V' \times V' \to \mathbb{K}$ heißen **isomorph** oder **isometrisch**, falls ein Isomorphismus $(h, h') : V \cong V'$ mit $\beta = \beta' \circ (h \times h)$ existiert, also $\beta(u, v) = \beta'(h(u), h(v))$ für alle $u, v \in V$.

Klassifikation: Wie erkennen wir Isomorphie möglichst effizient? Hier helfen uns **Invarianten** und idealerweise **Normalformen**!

Sesquilinearformen in Gauß–Normalform (GNF)

Satz S1F: Gauß–Normalform über einem *DRing $(\mathbb{K}, \sigma)$

(1) Zu jeder Matrix $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ konstruieren wir dank Gauß–Algorithmus einen **Basiswechsel** durch $S \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ und $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ so, dass gilt:

$$S^\dagger BT = D^r_{m\times n} = \begin{bmatrix} 1_{r\times r} & 0_{r\times k} \\ 0_{\ell\times r} & 0_{\ell\times k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

(2) Zu jeder endlich-dim. Sesquilinearform $\beta : U \times V \to \mathbb{K}$ konstruieren wir so **reziproke Basen** $(u_i)_{i=1}^m$ von U und $(v_j)_{j=1}^n$ von V, für die gilt:

$$\beta(u_i, v_j) = 1 \quad \text{falls } i = j \le r, \text{ sonst } 0.$$

☺ Sesquilinearformen sind in diesem Sinne einfach und übersichtlich über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, allgemein über jedem involutiven Divisionsring $(\mathbb{K}, \sigma)$.

Sesquilinearformen in Gauß–Normalform (GNF)

Wiederholung: (1) Erklären Sie den vertrauten Algorithmus M3C zur Gauß–Normalform $S^{-1}AT = D^r_{m\times n}$. Dieser Basiswechsel entspricht der Matrixdarstellung von Homomorphismen, wie oben erklärt.

(2) Die Adjunktion $^\dagger : \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{K}^{n\times m} : S \mapsto S^\dagger = (S^\sigma)^T$ ist semilinear über $(\mathbb{K}, \sigma)$, erfüllt also $(A\lambda + B\mu)^\dagger = \lambda^\sigma A^\dagger + \mu^\sigma B^\dagger$ gemäß S1B, und zudem antimultiplikativ, erfüllt also $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ gemäß D1G. Auf dem Matrixring $(\mathbb{K}^{n\times n}, +, 0_{n\times n}, \cdot, 1_{n\times n})$ erhalten wir somit eine Involution.

(3) Auf der Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ist die Adjunktion † ein Antiautomorphismus.

Lösung: (3) Sind A und B invers, so auch A^σ und B^σ: Aus $AB = 1$ folgt $1 = 1^\sigma = (AB)^\sigma = B^\sigma A^\sigma$. Aus $BA = 1$ folgt $1 = 1^\sigma = (BA)^\sigma = A^\sigma B^\sigma$. Ist A also invertierbar durch B, so auch A^σ durch B^σ.

Beweis des Satzes: (1) Wir wenden den üblichen Gauß–Algorithmus M3C zunächst naiv auf B an und erhalten $\tilde{S}^{-1}BT = D^r_{m\times n}$. Mit der Korrektur $S = (\tilde{S}^{-1})^\dagger$ gilt dann $\tilde{S}^\dagger BT = D^r_{m\times n}$. Dieser Basiswechsel entspricht der Matrixdarstellung von Sesquilinearformen, wie oben erklärt.

Sesquilinearformen in Gauß–Normalform (GNF)

? Warum gelingt das so leicht? Ist Diagonalisierung nicht bekannt als ein eher schwieriges Geschäft, wie in den vorigen Kapiteln gesehen?

⚠ Ja, die Diagonalisierung eines **Endomorphismus** $f : V \to V$ ist schwierig, da wir dieselbe Basis $\mathcal{B}$ in Start und Ziel verwenden und daher viel weniger Spielraum haben. Hier ist eine Eigenbasis das Idealziel, wo das nicht gelingt begnügen wir uns dankend mit einer Jordan–Basis.

☺ Für **Homomorphismen** $\alpha : V \to U$ jedoch ist alles leichter, denn wir dürfen zwei getrennte Basen in Start und Ziel wählen. Damit haben wir viel mehr Spielraum, und der Gauß–Algorithmus nutzt dies geschickt. Die Gauß–Normalform ist daher unsere universelle Modellmatrix.

☺ Für **Sesquilinearformen** $\beta : U \times V \to \mathbb{K}$ gelingt es ähnlich leicht. Wenn wir darstellende Matrizen A zu α und B zu β betrachten, so ist das Vorgehen im Gauß–Algorithmus sogar identisch, nur die abschließende Interpretation als $S^{-1}AT$ bzw. $S^\dagger BT$ ist naturgemäß verschieden.

⚠ Die Synopsis S127 erklärt die beiden Formeln für Basiswechsel.

Sesquilinearformen in Gauß–Normalform (GNF)

? Was bedeutet der vorige Satz geometrisch?

☺ Die Basen $(u_i)_{i=1}^m$ von U und $(v_j)_{j=1}^n$ von V erfüllen

$$\beta(u_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \le r, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sie sind in diesem Sinne „orthonormal“ zueinander, hier vom Rang r. In diesem allgemeinen Rahmen ist dieser Begriff traditionell eher nicht üblich, daher sage ich hier vorsichtigerweise „reziprok“.

Orthogonalität interessiert uns besonders im Falle $U = V$. Doch auch der allgemeine Fall erweist sich als wichtig. Daher führen wir die nötigen Begriffe allgemein aus.

Anfangs müssen wir vorsichtig rechts und links unterscheiden. Später fokussieren wir **hermitesche** oder allgemein **reflexive** Sesquilinearformen, wo diese Unterscheidung entfällt (S1J).

Vor allem diese Spezialisierungen erweisen sich als wesentlich.

Orthogonalität bezüglich einer Sesquilinearform

Wir übertragen bewährte Begriffe von Skalarprodukten soweit möglich auf beliebige sesquilineare Formen, insbesondere die Orthogonalität:

Definition S1G: orthogonal aka senkrecht bezüglich β

Sei $\beta : U \times V \to \mathbb{K}$ eine sesquilineare Form über $(\mathbb{K}, \sigma)$. Vektoren $u \in U$ und $v \in V$ heißen **orthogonal**, geschrieben $u \perp_\beta v$, falls $\beta(u, v) = 0$ gilt:
„Die Vektoren u und v sind orthogonal / stehen senkrecht zueinander."
„Der Vektor u ist orthogonal zu / steht senkrecht auf den Vektor v."

Teilmengen $X \subseteq U$ und $Y \subseteq V$ heißen **orthogonal**, geschrieben $X \perp_\beta Y$, falls $u \perp_\beta v$ für alle $u \in X$ und $v \in Y$. Wir schreiben $X \perp \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\{u_1, \dots, u_m\} \perp Y$ sowie $\{u_1, \dots, u_m\} \perp \{v_1, \dots, v_n\}$ auch ohne Klammern.

☺ Wir wollen Orthogonalität meist als symmetrische Relation nutzen, mit $U = V$ und β anti/hermitesch, anti/symmetrisch oder alternierend. Zum besseren Verständnis der Zusammenhänge buchstabiere ich vorab den allgemeinen, eventuell asymmetrischen Fall aus; er erweist sich ebenso als nützlich, sowohl systematisch als auch didaktisch.

Orthogonalität bezüglich einer Sesquilinearform

Definition S1G: Orthogonalraum (rechts)

Zu jeder Menge $X \subseteq U$ definieren wir den (Rechts-)**Orthogonalraum**

$$X^\perp := \{v \in V \mid X \perp v\} = \{v \in V \mid \forall u \in X : \beta(u, v) = 0\} \leq V.$$

Für $u \in U$ definieren wir $u^\perp := \{u\}^\perp \leq V$. Damit gilt $0^\perp = \{0\}^\perp = V$.

In V ist $X^\perp$ ein Teilraum: Für $v, v' \in X^\perp$ und $\mu, \mu' \in \mathbb{K}$ gilt $v\mu + v'\mu' \in X^\perp$, denn für alle $u \in X$ haben wir $\beta(u, v\mu + v'\mu') = \beta(u, v)\mu + \beta(u, v')\mu' = 0$. Ebenso gilt $X^\perp = \langle X \rangle_\mathbb{K}^\perp$, daher können wir X zu $\langle X \rangle_\mathbb{K}$ abschließen.

Wir nennen $\operatorname{Ker} \beta := U^\perp \leq V$ den (Rechts-)**Kern** von $\beta : U \times V \to \mathbb{K}$ oder auch das (Rechts-)**Radikal** oder den (Rechts-)**Ausartungsraum**.

Berechnung: Wir wählen Basen $(u_i)_{i=1}^m$ von U und $(v_j)_{j=1}^n$ von V. Sei $B = \beta(u_i, v_j)_{ij} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ die zugehörige Gram–Matrix. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \beta &\overset{\text{Def}}{=} \{v \in V \mid U \perp v\} \overset{\text{Def}}{=} \{v \in V \mid \forall u \in U : \beta(u, v) = 0\} \\ &\overset{\text{Gram}}{=} \{v_1\mu_1 + \dots + v_n\mu_n \mid \mu \in \mathbb{K}^n \wedge B\mu = 0\} \cong \operatorname{Ker} B \leq \mathbb{K}^n \end{aligned}$$

Orthogonalität bezüglich einer Sesquilinearform

☺ So können wir all unsere Werkzeuge des Matrixkalküls einsetzen, etwa den beliebten Gauß–Algorithmus über jedem Divisionsring $\mathbb{K}$ oder die elegante Determinante über jedem kommutativen Ring $\mathbb{K}$.

Gilt $U^\perp = \{0\}$, so nennen wir die Form β (rechts-)**regulär**, das heißt, zu jedem Verdächtigen $v \in V \setminus \{0\}$ existiert ein Zeuge $u \in U$ mit $\beta(u, v) \neq 0$.

Andernfalls heißt β (rechts-)**singulär** oder **ausgeartet** oder **degeneriert**. Jeder (rechts-)**singuläre Vektor** $v \in U^\perp$ erfüllt $\beta(u, v) = 0$ für alle $u \in U$.

Aufgabe: Formulieren Sie alle Begriffe ebenso links in U wie rechts in V. Besonders elegant gelingt dies durch Übergang von β zur adjungierten Sesquilinearform $\beta^\dagger : V \times U \to \mathbb{K}$ mit $\beta^\dagger(v, u) = \beta(u, v)^\sigma$, siehe S145.

Zu jeder Menge $Y \subseteq V$ definieren wir den (Links-)**Orthogonalraum**

$${}^\perp Y := \{u \in U \mid u \perp Y\} = \{u \in U \mid \forall v \in Y : \beta(u, v) = 0\} \leq U.$$

Für $v \in V$ definieren wir ${}^\perp v := {}^\perp\{v\} \leq U$. Damit gilt ${}^\perp 0 = {}^\perp\{0\} = U$.

Orthogonalität bezüglich einer Sesquilinearform

Auch ${}^\perp V \leq U$ ist ein $\mathbb{K}$–linearer Teilraum. Weiter gilt ${}^\perp Y = {}^\perp\langle Y \rangle_\mathbb{K}$.
Übung: Zeigen Sie dies erneut für β... oder nutzen Sie geschickt $\beta^\dagger$.

Wir nennen $\operatorname{Ker} \beta^\dagger = {}^\perp V \leq U$ den (Links-)**Kern** von $\beta : U \times V \to \mathbb{K}$ oder auch das (Links-)**Radikal** oder den (Links-)**Ausartungsraum**.

☺ Auch hier können wir alle Werkzeuge des Matrixkalküls einsetzen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \beta^\dagger &\overset{\text{Def}}{=} \{u \in U \mid u \perp V\} \overset{\text{Def}}{=} \{u \in U \mid \forall v \in V : \beta(u, v) = 0\} \\ &\overset{\text{Gram}}{=} \{u_1\lambda_1 + \dots + u_m\lambda_n \mid \lambda \in \mathbb{K}^n \wedge \lambda^\dagger B = 0\} \cong \operatorname{Ker} B^\dagger \leq \mathbb{K}^m \end{aligned}$$

Gerne nutzen wir den Gauß–Algorithmus und die Determinante.

Gilt ${}^\perp V = \{0\}$, so nennen wir die Form β (links-)**regulär**, das heißt, zu jedem Verdächtigen $u \in U \setminus \{0\}$ existiert ein Zeuge $v \in V$ mit $\beta(u, v) \neq 0$.

Andernfalls heißt β (links-)**singulär** oder **ausgeartet** oder **degeneriert**. Jeder (links-)**singuläre Vektor** $u \in {}^\perp V$ erfüllt $\beta(u, v) = 0$ für alle $u \in V$.

Wie bestimmen wir Kern und Regularität?

Sei $\beta : U \times V \to \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform mit Gram–Matrix

$$\mathrm{G}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\beta) = D^r_{m\times n} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}.$$

bezüglich reziproker Basen $(u_i)_{i=1}^m$ von U und $(v_j)_{j=1}^n$ von V. Dank Satz S1F können wir jede endlich-dim. Sesquilinearform β so darstellen!

Aufgabe: Was ist hier der Kern von β? Wann genau ist β regulär?

Lösung: Der Rechtskern von β ist hier $\operatorname{Ker}\beta = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle^!_{\mathbb{K}} \le V$.
Genau dann ist β rechtsregulär, wenn $\operatorname{Ker}\beta = \{0\}$ gilt, hier also $r = n$.

Der Linkskern von β ist entsprechend $\operatorname{Ker}\beta^\dagger = \langle u_{r+1}, \dots, u_m \rangle^!_{\mathbb{K}} \le U$.
Genau dann ist β linksregulär, wenn $\operatorname{Ker}\beta^\dagger = \{0\}$ gilt, hier also $r = m$.

Vergleich zu Homomorphismen

Sei $\alpha : V \to U$ eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung mit darstellender Matrix

$$\mathrm{M}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}(\alpha) = D^r_{m\times n} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}.$$

bezüglich geeigneter Basen $(u_i)_{i=1}^m$ von U und $(v_j)_{j=1}^n$ von V. Dank Satz M3C können wir jeden endlich-dim. Homomorphismus α so darstellen!

Aufgabe: Was ist hier der Kern von α? Wann genau ist α regulär?

Lösung: Der Kern von α ist hier $\operatorname{Ker}\alpha = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle^!_{\mathbb{K}} \le V$.
Genau dann ist α injektiv, wenn $\operatorname{Ker}\alpha = \{0\}$ gilt, hier also $r = n$.

Der Cokern von α ist $\operatorname{Coker}\alpha = U/\operatorname{Im}(\alpha) = \langle q(u_{r+1}), \dots, q(u_m) \rangle^!_{\mathbb{K}}$.
Genau dann ist α surjektiv, wenn $\operatorname{Coker}\alpha = \{0\}$ gilt, hier also $r = m$.

Synopsis: Sesquilinearformen vs Homomorphismen

☺ Matrizen sind das Universalwerkzeug der Linearen Algebra.
Hier sehen wir zwei ähnliche, doch verschiedene Verwendungen:

- Einerseits: Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ codiert eine lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m : v \mapsto u = Av$. Nach Basiswahl können wir jede lineare Abbildung $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$ so darstellen, siehe N1G.
- Andererseits: Jede Matrix $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ codiert eine Sesquilinearform $\mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} : (u, v) \mapsto u^\dagger A\, v$. Nach Basiswahl können wir jede Sesquilinearform $\beta \in \mathrm{SF}_{\mathbb{K}}(U, V)$ so darstellen, siehe S1E.

Für Matrizen haben wir universell einsetzbare Methoden, allen voran den Gauß–Algorithmus zur Zeilenstufenform, zur Spaltenstufenform, oder am besten wie hier zur Gauß–Normalform (Satz S1F).

Damit lösen wir typische Anwendung für Homomorphismen und Sesquilinearformen, wie den Kern oder die Regularität zu bestimmen. Dabei achten wir jeweils genau darauf, *was* unsere Matrix darstellt, denn dieser Kontext diktiert das richtige Transformationsverhalten.

Orthogonalität und lineare Gleichungssysteme

Wir betrachten Zeilenvektoren $U = \mathbb{K}^{1\times n}$ und Spaltenvektoren $V = \mathbb{K}^{n\times 1}$ mit der Matrixpultiplikation aka Auswertung als kanonischer Paarung:

$$\boxed{\beta : \mathbb{K}^{1\times n} \times \mathbb{K}^{n\times 1} \to \mathbb{K} : (u, v) \mapsto uv}$$

Der Ring $\mathbb{K}$ ist beliebig, auch ohne Involution. Der Raum U ist linkslinear, der Raum V ist rechtslinear, und die Abbildung β ist bilinear über $\mathbb{K}$.
Jedes lineare Gleichungssystem hat die Form $Av = 0$ mit

$$A = \begin{bmatrix} \text{—} & a_1 & \text{—} \\ & \vdots & \\ \text{—} & a_m & \text{—} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}.$$

Der Lösungsraum… ist der Kern … ist der Orthogonalraum:

$$\{v \in \mathbb{K}^{n\times 1} \mid Av = 0\} \overset{\text{Def}}{=} \operatorname{Ker} A \overset{\text{Def}}{=} \{a_1, \dots, a_m\}^\perp$$

Jede Lösung $v \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ muss *jede* Gleichung des Systems erfüllen, also $a_1 v = \dots = a_m v = 0$. Somit steht v senkrecht auf $a_1, \dots, a_m$ bezüglich β.

Orthogonalität und lineare Gleichungssysteme

☺ Auch unendliche Gleichungssysteme sind natürlich und nützlich!

$$\beta : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i v_i$$

Aufgabe: Bestimmen Sie $u^\perp \le \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ zu der Folge $u = (1, 1, 1, \dots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Lösung: Wir finden $u^\perp = \{ v \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \mid \sum_{i\in\mathbb{N}} v_i = 0 \} = \langle e_i - e_{i-1} \mid i \ge 1 \rangle^!_{\mathbb{K}}$.

Aufgabe: Sei $\mathbb{K} \ge \mathbb{Q}$ und $v_i := ie_i - e_{i-1} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ für alle $i \ge 1$. Bestimmen Sie zur Menge $Y = \{ v_i \mid i \ge 1 \} \subset \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ den Orthogonalraum ${}^\perp Y \le \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Lösung: Für $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ gilt $u \perp Y$ gdw $0 = \beta(u, v_i) = iu_i - u_{i-1}$ für alle $i \ge 1$. Für $i \ge 1$ gilt rekursiv $u_i = u_{i-1}/i$ und somit $u_i = u_0/i!$, ausgeschrieben:

$${}^\perp Y = \langle \exp \rangle^!_{\mathbb{K}}$$

Hier betrachten wir $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathbb{K}[\![X]\!]$ als den formalen Potenzreihenring in der Variablen X und $\exp = \sum_{i\in\mathbb{N}} X^i/i! = (1/i!)_{i\in\mathbb{N}}$ als die Exponentialreihe.

☺ Gleiches gilt für jede rekursiv definierte Folge $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathbb{K}[\![X]\!]$: Jede Gleichung wird codiert durch $v_i \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, idealerweise $v_i \in \mathbb{K}[X]^\times_i$

Orthogonalität und lineare Gleichungssysteme

Wir betrachten weiterhin $U = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ und $V = \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ mit der Bilinearform

$$\beta : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i v_i .$$

Aufgabe: Bestimmen Sie Rechtskern und Linkskern dieser Bilinearform.

Lösung: (1) Für den Rechtskern zeigen wir $\operatorname{Ker} \beta = U^\perp = \{0\}$.

Angenommen $v \in U^\perp$. Wäre $v_i \ne 0$ für ein $i \in \mathbb{N}$, so hätten wir $e_i \in U$ mit $\beta(e_i, v) = v_i \ne 0$. Also gilt $v_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$, somit $v = 0$.

(2) Für den Linkskern zeigen wir ebenso $\operatorname{Ker} \beta^\intercal = {}^\perp V = \{0\}$.

Angenommen $u \in {}^\perp V$. Wäre $u_i \ne 0$ für ein $i \in \mathbb{N}$, so hätten wir $e_i \in V$ mit $\beta(u, e_i) = u_i \ne 0$. Also gilt $u_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$, somit $u = 0$.

☺ Die Räume $V = \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} = \mathbb{K}[X]$ und $U = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathbb{K}[\![X]\!]$ sind zwar drastisch verschieden, dennoch ist unsere Bilinearform $\beta : U \times V \to \mathbb{K}$ regulär und verknüpft die beiden. Das ermöglicht Anwendungen wie die vorigen.

Bilinearformen und Dualität führen wir in §W2 weiter aus.

Der Biorthogonalraum ${}^\perp X^\perp$

Satz S1G: der Biorthogonalraum

Sei $\beta : U \times V \to \mathbb{K}$ bilinear oder sesquilinear über dem DRing $(\mathbb{K}, \sigma)$.

(1) Für jede Teilmenge $X \subseteq U$ gilt ${}^\perp(X^\perp) \supseteq \langle X \rangle_{\mathbb{K}} + {}^\perp V$.

(2) Im Allgemeinen gilt nur „$\supseteq$“, nicht Gleichheit „$=$“.

(3) Gleichheit gilt falls $\dim_{\mathbb{K}}(\langle X \rangle_{\mathbb{K}} + {}^\perp V)/{}^\perp V < \infty$.

Dasselbe gilt für $Y \subseteq V$ und $({}^\perp Y)^\perp \supseteq \langle Y \rangle_{\mathbb{K}} + V^\perp$.

Beispiel: Aus $\dim_{\mathbb{K}} \langle X \rangle_{\mathbb{K}} < \infty$ folgt ${}^\perp(X^\perp) = \langle X \rangle_{\mathbb{K}} + {}^\perp V$. Gilt zudem Regularität, ${}^\perp V = 0$, so folgt ${}^\perp(X^\perp) = \langle X \rangle_{\mathbb{K}}$.

Aufgabe: Beweisen Sie diesen Satz. (Dualität ist ein wiederkehrendes Thema, siehe orthogonales Komplement S1Q und später Bidual W1L.)

Hinweis: Frage (1) ist eine einfache doch lehrreiche Fingerübung zum Verständnis der Definitionen. Frage (3) ist anspruchsvoll, doch ebenso lehrreich. Ist die Gleichheit nicht „plausibel“ und „anschaulich klar“? O nein! Wie erkennen wir, dass es wirklich etwas zu beweisen gibt? Vor verlockenden Trugschlüssen warnen uns heilsame Gegenbeispiele.

Der Biorthogonalraum ${}^\perp X^\perp$

Beweis: (1) Dies ist eine einfache doch lehrreiche Fingerübung zum Verständnis der Definitionen: Sei $u \in \langle X \rangle_{\mathbb{K}} + {}^\perp V$, also $u = x + y$ mit $x \in \langle X \rangle_{\mathbb{K}}$ und $y \perp V$. Wir wollen nun $u \in {}^\perp(X^\perp)$ zeigen, also $u \perp X^\perp$. Lezteres testen wir mit jedem Vektor $v \in X^\perp$, also $v \in V$ mit $X \perp v$: Damit gilt $\beta(u, v) = \beta(x, v) + \beta(y, v) = 0 + 0 = 0$.

(2) Wir inspirieren uns an unseren obigen Beispielen und betrachten $\beta : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i v_i$ und darin $X = \{ e_i \mid i \in \mathbb{N} \} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Damit gilt $X^\perp = V$, also ${}^\perp(X^\perp) = {}^\perp V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, jedoch $\langle X \rangle_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} < \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

(3) Wir dürfen ${}^\perp V = \{0\}$ annehmen. Notfalls gehen wir zu $U' = U/{}^\perp V$ über und wohldefinieren $\beta' : U' \times V \to \mathbb{K}$ durch $\beta'(u + {}^\perp V, v) = \beta(u, v)$. Sei $\langle X \rangle_{\mathbb{K}} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle^!_{\mathbb{K}}$. Dank Gauß–Normalform S1F existiert dazu eine duale Familie $y_1, \dots, y_n \in V$ mit $\beta(x_i, y_j) = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Sei $u \in {}^\perp(X^\perp)$, also $u \in U$ mit $u \perp X^\perp$. Wir wollen $u \in \langle X \rangle_{\mathbb{K}}$ zeigen. Dazu genügt es, $\tilde{u} \in {}^\perp V = \{0\}$ zu zeigen für $\tilde{u} := u - \sum_{i=1}^n \beta(u, y_i) x_i$. Für $v \in V$ und $\tilde{v} := v - \sum_{j=1}^n y_j \beta(x_j, v)$ gilt $\beta(x_i, \tilde{v}) = 0$, also $\tilde{v} \in X^\perp$. Es folgt $0 = \beta(u, \tilde{v}) = \beta(\tilde{u}, v)$, somit $\tilde{u} \in {}^\perp V = \{0\}$, also $\tilde{u} = 0$. QED

Was ist die adjungierte Sesquilinearform?

Ist $\beta : U \times V \to \mathbb{K}$ sesquilinear über $(\mathbb{K}, \sigma)$, so auch ihre **Adjungierte**

$$\boxed{\beta^\dagger : V \times U \to \mathbb{K} : (v, u) \mapsto \beta^\dagger(v, u) = \beta(u, v)^\sigma.}$$

Das enspricht der Transkonjugation $\beta^\dagger = (\beta^\sigma)^\top = (\beta^\top)^\sigma$ gebildet aus der Transposition $\beta \mapsto \beta^\top$ mit $\beta^\top(v, u) = \beta(u, v)$ und der Konjugation mit σ.

Beweis: Offensichtlich ist $\beta^\dagger$ biadditiv, dank $\beta(u\lambda, v\mu) = \lambda^\sigma \beta(u, v)\mu$ und $\beta^\dagger(v\mu, u\lambda) = \beta(u\lambda, v\mu)^\sigma = (\lambda^\sigma \beta(u, v)\mu)^\sigma = \mu^\sigma \beta^\dagger(v, u)\lambda$ auch sesquilinear.

Beispiel: Sei $U = \mathbb{K}^{(I)}$ und $V = \mathbb{K}^{(J)}$. Zur Matrix $B \in \mathbb{K}^{I \times J}$ haben wir

$$\beta : U \times V \to \mathbb{K} : (u, v) \mapsto u^\dagger B v = \textstyle\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_i^\sigma b_{ij} v_j$$

mit der Adjungierten $\beta^\dagger(v, u) = \beta(u, v)^\sigma = (u^\dagger B v)^\sigma = (u^\dagger B v)^\dagger = v^\dagger B^\dagger u$.

Beispiel: Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_\mathbb{K}$ ist das Standardskalarprodukt

$$\langle \text{-}|\text{-} \rangle : \mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(I)} \to \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u \,|\, v \rangle = u^\dagger v = \textstyle\sum_{i \in I} \overline{u_i} v_i.$$

Hier gilt $\langle \text{-}|\text{-} \rangle^\dagger = \langle \text{-}|\text{-} \rangle$, denn $\langle v \,|\, u \rangle^\dagger = \langle u \,|\, v \rangle^\sigma = \langle v \,|\, u \rangle$ für alle u und v.

Was ist eine hermitesche Form?

Definition S1H: hermitesch aka selbstadjungiert

(1) Sei $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform auf dem Raum V über $(\mathbb{K}, \sigma)$. Das Paar (V, β) nennen wir einen **sesquilinearen Raum**. Wir nennen β

hermitesch,	falls $\beta = \beta^\dagger$,	also $\beta(v, u) = \beta(u, v)^\sigma$,
antihermitesch,	falls $\beta = -\beta^\dagger$,	also $\beta(v, u) = -\beta(u, v)^\sigma$,

gilt für alle Vektoren $u, v \in V$. Hermitesch heißt auch **selbstadjungiert**.

Wir sagen kurz **anti/hermitesche Form**, das beinhaltet stets sesquilinear. Das Paar (V, β) nennen wir einen **anti/hermiteschen Raum** über $(\mathbb{K}, \sigma)$.

(2) Jede Matrix $B \in \mathbb{K}^{I \times I}$ definiert ihre SForm $\beta : \mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(I)} \to \mathbb{K}$ durch $\beta(u, v) = u^\dagger B v$. Für diesen Raum schreiben wir kurz $(\mathbb{K}^{(I)}, \beta) =: \langle B \rangle$. Wir nennen B anti/hermitesch, falls β dies ist, also $B^\dagger = \pm B$ gilt.

Über $(\mathbb{C}, \mathrm{conj}_\mathbb{C})$ ist A antihermitesch, B hermitesch, C symmetrisch:

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 2\mathrm{i} + 1 \\ 2\mathrm{i} - 1 & \mathrm{i} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 - 4\mathrm{i} \\ 3 + 4\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 + 4\mathrm{i} \\ 3 + 4\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}$$

Was ist eine anti/symmetrische Form?

Definition S1H: anti/symmetrisch, alternierend

(3) Im Spezialfall $\sigma = \mathrm{id}_\mathbb{K}$ ist der Grundring $\mathbb{K}$ kommutativ und die Form $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ bilinear. Wir nennen β

symmetrisch,	falls $\beta = \beta^\top$,	also $\beta(v, u) = \beta(u, v)$,
antisymmetrisch,	falls $\beta = -\beta^\top$,	also $\beta(v, u) = -\beta(u, v)$,
alternierend,	falls $\beta(v, v) = 0$,	für alle Vektoren $u, v \in V$.

Wir sagen kurz **symmetrische Form** für symmetrische bilineare Form, ebenso für alternierend und antisymmetrisch (aka schiefsymmetrisch).

(4) Jede Matrix $B \in \mathbb{K}^{I \times I}$ definiert $\beta : \mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(I)} \to \mathbb{K} : (u, v) \mapsto u^\top B v$. Wir nennen B anti/symmetrisch oder alternierend, falls β dies ist.

Erinnerung: Alternierend impliziert antisymmetrisch:

$$0 \overset{\text{alt}}{=} \beta(u + v, u + v) \overset{\text{add}}{=} \beta(u, u) + \beta(u, v) + \beta(v, u) + \beta(v, v)$$

Aus Antisymmetrie folgt $2\beta(v, v) = 0$, falls 2 kürzbar ist also $\beta(v, v) = 0$.

Alternierend vs antisymmetrisch

Beispiel: Ist $\det : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ alternierend? Was ist ihre Gram–Matrix?

$$\det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Beispiele: Die Matrix $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist anti/symmetrisch, also $B^\top = \pm B$, gdw ihre BForm $\beta : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} : (u, v) \mapsto u^\top B v$ dies ist, also $\beta^\top = \pm\beta$.

Genau dann ist die BForm β alternierend, wenn die Matrix B dies ist, also antisymmetrisch, d.h. $b_{ji} = -b_{ij}$, und hohl, d.h. $b_{ii} = 0$ für alle i, j.

Beweis: „$\Leftarrow$“: Dies folgt direkt aus $v^\top B v = \sum_i b_{ii} v_i^2 + \sum_{i<j} (b_{ij} + b_{ji}) v_i v_j$.
„$\Rightarrow$“: Mit $v = e_i$ folgt $b_{ii} = 0$. Mit $v = e_i + e_j$ für $i < j$ folgt $b_{ij} + b_{ji} = 0$.

Beispiel: Über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ bedeuten antisymmetrisch und symmetrisch dasselbe. Doch nicht jede solche Form ist alternierend, etwa

$$\beta : \mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2 : (u, v) \mapsto u^\top v \quad \text{zur Gram–Matrix } I_n.$$

Daher ist die Forderung „alternierend“ stärker… und meist besser.
Wir kennen dies bereits gut aus der Theorie der Determinanten.

Welche Struktur hat die Menge der Sesquilinearformen?

Bemerkung S1I: lineare Struktur auf $\mathrm{SF}(V)$

Sei $\mathrm{SF}(V)$ die Menge aller Sesquilinearformen auf V über $(\mathbb{K}, \sigma)$.

(1) Dann ist $(\mathrm{SF}(V), +, 0)$ eine abelsche Gruppe bezüglich punktweiser Addition, ausgeschrieben $(\beta + \gamma)(u, v) = \beta(u, v) + \gamma(u, v)$ für $u, v \in V$.

(2) Zudem ist $(\mathrm{SF}(V), +, \cdot)$ ein linearer Raum über $Z(\mathbb{K})$ bezüglich punktweiser Skalierung, ausgeschrieben $(\beta \cdot \lambda)(u, v) = \beta(u, v) \cdot \lambda$.

(3) Mit β ist auch $\beta^\dagger$ sesquilinear, wobei $\beta^\dagger(u, v) = \beta(v, u)^\sigma$.
Genau dann ist β anti/hermitesch, wenn $\beta^\dagger = \pm\beta$ gilt.

(4) Die Teilmengen $\mathrm{SF}_\pm(V) \leq \mathrm{SF}(V)$ aller anti/hermiteschen Formen sind Untergruppen, zudem linear über $Z(\mathbb{K})^\sigma$. Wir setzen $\mathrm{HF} := \mathrm{SF}_+$.

(5) Gilt $2 \in \mathbb{K}^\times$, so können wir $\beta \in \mathrm{SF}(V)$ zerlegen in $\beta = \beta_+ + \beta_-$ mit $\beta_+ = \frac{1}{2}(\beta + \beta^\dagger)$ hermitesch und $\beta_- = \frac{1}{2}(\beta - \beta^\dagger)$ antihermitesch:

$$\boxed{\mathrm{SF}(V) = \mathrm{HF}(V) \oplus \mathrm{SF}_-(V)}$$

Welche Struktur hat die Menge der Sesquilinearformen?

Übung: Schreiben Sie dies sorgsam aus und rechnen Sie es nach!
Das ist eine routinierte Fingerübung und konsolidiert die Definitionen.

⚠ Der Raum $\mathrm{SF}(V)$ ist linear über dem Zentrum $Z(\mathbb{K})$, die Adjunktion $\beta \mapsto \beta^\dagger$ hingegen ist nur semilinear. Sie ist jedoch linear über dem Fixring

$$Z(\mathbb{K})^\sigma = \mathrm{fix}(Z(\mathbb{K}), \sigma) = \{\, z \in Z(\mathbb{K}) \mid z^\sigma = z \,\}$$

Der Fixraum $\mathrm{HF}(V) = \mathrm{SF}(V)^\dagger$ ist nur linear über dem Fixring $Z(\mathbb{K})^\sigma$.

⚠ Dasselbe gilt für den Raum $\mathbb{K}^{I \times I}$ der quadratischen Matrizen und darin den Teilraum $\mathbb{K}^{I \times I}_{\mathrm{herm}}$ der hermiteschen Matrizen.

Beispiel: Sei $\mathbb{C}^{n \times n}_{\mathrm{herm}}$ die Menge der hermiteschen Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, mit $A^\dagger = A$. Dieser Raum ist linear über $\mathbb{R}$, nicht jedoch über $\mathbb{C}$.
Ist A hermitesch, so ist $\mathrm{i}A$ antihermitesch, und umgekehrt.

Beispiel: Sei $\mathbb{H}^{n \times n}_{\mathrm{herm}}$ die Menge der hermiteschen Matrizen $A \in \mathbb{H}^{n \times n}$, mit $A^\dagger = A$. Dieser Raum ist linear über $\mathbb{R} = Z(\mathbb{H}) = Z(\mathbb{H})^\sigma$.

Was ist eine reflexive Form?

Definition S1J: reflexive Sesquilinearform aka orthosymmetrisch

Eine Sesquilinearform $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ über $(\mathbb{K}, \sigma)$ heißt **reflexiv**, falls

$$u \perp v \iff v \perp u \qquad \text{für alle } u, v \in V \text{ gilt.}$$

Wir fordern also, dass Orthogonalität $\perp$ eine symmetrische Relation ist.
In diesem Falle nennen wir (V, β) einen **reflexiven Raum** über $(\mathbb{K}, \sigma)$.

Die hiesige Verwendung des Wortes „reflexiv“ hat nichts mit seinen sonst üblichen Bedeutungen zu tun. Besser wäre hier „orthosymmetrisch“.

Typische Anwendungen sind $\beta^\dagger = \pm\beta$ anti/hermitesch über $(\mathbb{K}, \sigma)$ und $\beta^\intercal = \pm\beta$ anti/symmetrisch über $(\mathbb{K}, \mathrm{id}_\mathbb{K})$ sowie β alternierend.

Daraus folgt offensichtlich reflexiv. Wir beweisen später, dass diese drei Fälle im Wesentlichen alle Möglichkeiten reflexiver Formen ausschöpft.

☺ Reflexivität erleichtert unsere Arbeit sowie Denk- und Sprechweise: Wir müssen für Orthogonalität, Orthogonalräume, Kerne, Regularität, etc. nicht weiter zwischen rechts und links unterscheiden!

Orthogonalität bezüglich einer reflexiven Form

Definition S1J: Orthogonalraum und Kern → allgemein S1G

Sei (V, β) ein reflexiver Raum über dem *Ring $(\mathbb{K}, \sigma)$.

Zu jeder Menge $X \subseteq V$ definieren wir bezüglich β den **Orthogonalraum**

$$X^\perp := \{\, v \in V \mid X \perp v \,\} = \{\, v \in V \mid \forall u \in X : \beta(u, v) = 0 \,\} \leq V.$$

Der **Kern** (das **Radikal**, der **Ausartungsraum**) von β ist

$$\mathrm{Ker}\, \beta := V^\perp = \{\, v \in V \mid \forall u \in V : \beta(u, v) = 0 \,\}.$$

Gilt $\mathrm{Ker}\, \beta = \{0\}$, so heißt die Form β **regulär**, das bedeutet zu jedem Verdächtigen $v \in V \setminus \{0\}$ existiert ein Zeuge $u \in V$ mit $\beta(u, v) \neq 0$.

Andernfalls heißt β **singulär** (oder **ausgeartet** oder **degeneriert**).
Jeder **singuläre Vektor** $v \in V^\perp$ erfüllt $\beta(u, v) = 0$ für alle $u \in V$.

Beispiele: Genau dann ist $\beta : (u, v) \mapsto u^\dagger B v$ regulär, wenn B regulär ist.
Jedes Skalarprodukt $\langle \text{-} | \text{-} \rangle$ ist regulär, denn aus $v \neq 0$ folgt $\langle v \mid v \rangle > 0$.
Ist $\det : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ regulär? Ja, denn $\det \left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix}\right] = a$ und $\det \left[\begin{smallmatrix} a & -1 \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right] = b$.

Von der hermiteschen Form zur quadratischen Form

Definition S1K: quadratische Form

$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[rr, "\beta"] & & \mathbb{K} \\ & V \arrow[ul, "\Delta", "(v,v)\leftarrow v"'] \arrow[ur, "q", "v\mapsto\beta(v,v)"'] & \end{tikzcd}$$

Sei (V, β) hermitesch über $(\mathbb{K}, \sigma)$. Die Abbildung

$$q = q_\beta : V \to \mathbb{K} : v \mapsto q(v) = \beta(v, v)$$

nennen wir die **quadratische Form** zu β. Dies ist die Sesquilinearform β eingeschränkt auf die Diagonale $v \mapsto (v, v)$. Für alle $v \in V$ gilt demnach

$$q(v)^\sigma = \beta(v, v)^\sigma = \beta(v, v) = q(v).$$

Das Bild von q liegt somit im Fixring $\mathbb{K}^\sigma = \operatorname{fix}(\mathbb{K}, \sigma) = \{\, a \in \mathbb{K} \mid a^\sigma = a \,\}$. Wir nennen (V, q) den **quadratischen Raum** zur hermiteschen Form β.

Beispiel: Für $(\mathbb{K}^n, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ gilt $q(v) = v^\dagger v = \|v\|^2 \in \mathbb{R}$.

Für Skalarprodukte kennen wir die quadratische Form als Normquadrat. Da $(\mathbb{R}, \leq)$ ein geordneter Körper ist, können wir hier noch mehr sagen: Genau dann ist die hermitesche Form β positiv semidefinit, wenn $q \geq 0$, und positiv definit, wenn zudem $q(v) > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$ gilt.

Von der quadratischen Form zurück zur hermiteschen Form

Können wir allein aus der quadratischen Form $q : V \to \mathbb{K} : q(v) = \beta(v, v)$ die hermitesche Form $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ rekonstruieren? Oft gelingt dies! Wir zeigen zunächst, dass die Zuordnung $\beta \mapsto q = q_\beta$ injektiv ist:

Lemma S1L: eindeutige Rekonstruierbarkeit

(0) Der involutive Ring $(\mathbb{K}, \sigma)$ sei nullteilerfrei und $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$.
Für alle $\beta, \gamma \in \operatorname{HF}(V)$ über $(\mathbb{K}, \sigma)$ gilt: Aus $q_\beta = q_\gamma$ folgt $\beta = \gamma$.

Beweis: Dank $q_\beta - q_\gamma = q_{\beta-\gamma}$ genügt zu zeigen: Aus $q_\beta = 0$ folgt $\beta = 0$. Seien $u, v \in V$ beliebige Vektoren. Wir wählen $\lambda = \beta(u, v)^\sigma$ und erhalten $0 = q_\beta(u + v\lambda) - q_\beta(u) - q_\beta(v\lambda) = \beta(u, v\lambda) + \beta(u, v\lambda)^\sigma = 2\beta(u, v)\beta(u, v)^\sigma$. Dank $2 \neq 0$ und Nullteilerfreiheit folgt daraus $\beta(u, v) = 0$. QED

Beispiel: Im klassischen Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \operatorname{conj}_\mathbb{K}$ wissen wir noch wesentlich mehr: Aus der quadratischen Form $q(v) = \|v\|^2$ können wir $\beta(u, v) = \langle u \mid v \rangle$ rekonstruieren dank expliziter Polarisierungsformel S2I. Das beinhaltet und perfektioniert die eindeutige Rekonstruierbarkeit S1L.

Was sind quadratische Formen über $(\mathbb{K}, \mathrm{id}_\mathbb{K})$?

Gemäß (0) ist die Zuordnung $\beta \mapsto q = q_\beta$ injektiv. Können wir ihr Bild charakterisieren? Vereinfachend betrachten wir den symmetrischen Fall:

Im Spezialfall $\sigma = \mathrm{id}_\mathbb{K}$ ist $\mathbb{K}$ kommutativ. Für $q = q_\beta : V \to \mathbb{K}$ gilt:

- Q1: Homogenität, $q(v\lambda) = q(v)\lambda^2$ für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.
- Q2: Polarisierung, $\beta_q(u, v) := q(u + v) - q(u) - q(v)$ ist bilinear.

Die Rechnung ergibt hier nämlich $\beta_q(u, v) = \beta(u, v) + \beta(v, u) = 2\beta(u, v)$.

Lemma S1L: Polarisierung, explizte Polarisierungsformel

Eine **quadratische Form** $q : V \to \mathbb{K}$ über $(\mathbb{K}, \mathrm{id}_\mathbb{K})$ erfüllt (Q1&2). Wir nennen dann (V, q) einen **quadratischen Raum** über $\mathbb{K}$.

$$\operatorname{QF}(V) := \{\, q : V \to \mathbb{K} \mid \text{Q1\&2} \,\}.$$

(1) Die Zuordnung $\operatorname{BF}(V) \to \operatorname{QF}(V) : \beta \mapsto q = q_\beta$ ist injektiv, falls $2 \in \mathbb{K}$ kürzbar ist, und bijektiv, falls $2 \in \mathbb{K}^\times$ invertierbar ist, dank **Polarisierung**

$$\beta(u, v) = \tfrac{1}{2}\big[q(u + v) - q(u) - q(v)\big].$$

Quadratische und bilineare Formen

Über jedem Körper $(\mathbb{K}, \mathrm{id}_\mathbb{K})$ der Charakteristik $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$ können wir also alternativ die quadratischen Formen als Ausgangspunkt wählen, denn sie entsprechen bijektiv den symmetrischen Bilinearformen. Wenn man's recht bedenkt, ist das recht erstaunlich.

Eine Bilinearform erklärt das Zusammenspiel von *zwei* Vektoren, eine quadratische Form hingegen codiert nur Eigenschaften *eines* Vektors. Auf den ersten Blick beschreiben dies unterschiedliche Eigenschaften.

Beispiel: Mit dem Standardskalarprodukt $\beta = \langle\text{-}|\text{-}\rangle$ auf dem Raum $\mathbb{R}^n$ erklären wir Orthogonalität und messen den Winkel zwischen Vektoren. Die zugehörige quadratische Form $q = \|\text{-}\|^2$ misst nur das Längenquadrat von Vektoren. Die Polarisierungsformel erlaubt die Rekonstruktion.

Bilinearformen treten in der Mathematik häufig auf. Mal begegnen sie Ihnen offenkundig bilinear, mal erst versteckt als quadratische Form. Dank Polarisierung finden Sie (über einem Körper der Charakteristik ungleich 2) zu jeder quadratischen Form ihre zugehörige Bilinearform.

Einschränkung auf Teilräume

Definition S1M: Einschränkung einer Sesquilinearform

Sei (V,β) ein Raum V mit Sesquilinearform $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ über $(\mathbb{K},\sigma)$.
Auf jedem $\mathbb{K}$–linearen Teilraum $U \leq (V,\beta)$ erhalten wir (U,β_U) durch Einschränkung der Sesquilinearform β zu $\beta_U = \beta|_{U\times U} : U \times U \to \mathbb{K}$.

Ebenso: Ist (V,q) ein quadratischer Raum, so auch (U,q_U).

Aufgabe: Wenn (V,β) regulär ist, gilt dies dann auch für (U,β_U)?

Lösung: Nein! Auf $V = \mathbb{K}^2$ ist $\beta(u,v) = \det(u,v) = u_1v_2 - u_2v_1$ regulär,

$$\mathrm{G}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Auf $U = \langle e_1 \rangle_{\mathbb{K}}$ bzw. $\langle e_2 \rangle_{\mathbb{K}}$ ist die Einschränkung $\beta_U = 0$ jedoch singulär.

Anschaulich: (V,β) regulär bedeutet, zu jedem Verdächtigen $v \in V \smallsetminus \{0\}$ existiert ein Zeuge $u \in V$ mit $\beta(u,v) \neq 0$. Bei Einschränkung von V auf U haben wir weniger Verdächtige $v \in U$, aber auch weniger Zeugen $u \in U$. Das kann manchmal gut gehen, manchmal auch nicht, so wie hier.

An/isotrope Vektoren und Räume

Die „Panne“ des vorigen Beispiels wollen wir möglichst verhindern:

Definition S1M: isotrope Vektoren und Teilräume

Sei (V,β) ein Raum V mit Sesquilinearform $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ über $(\mathbb{K},\sigma)$.
Gilt $u \perp u$, also $q(u) = \beta(u,u) = 0$, so nennen wir den Vektor u **isotrop**.
Gilt dies für mindestens ein $u \in V \smallsetminus \{0\}$, so heißt der Raum (V,β) **isotrop**.
Sind alle Vektoren $u \in V$ isotrop, also $q = 0$, so heißt (V,β) **total isotrop**.
Gilt $q(u) = \beta(u,u) \neq 0$ für alle $u \in V \smallsetminus \{0\}$, so heißt (V,β) **anisotrop**.

Beispiel: Euklidisch $(\mathbb{K}^n, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ ist 0 der einzige isotrope Vektor, dann für $v \in \mathbb{K}^n \smallsetminus \{0\}$ gilt $\langle v \,|\, v \rangle > 0$ dank positiver Definitheit.

Der Raum (V,β) ist anisotrop gdw jeder Teilraum (U,β_U) regulär ist.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Zu jedem Verdächtigen $v \in U \smallsetminus \{0\}$ existiert ein geeigneter Zeuge $u \in U$ mit $\beta(u,v) \neq 0$, denn dank Anisotropie genügt bereits $u = v$.
„$\Leftarrow$“: Zu $v \in V \smallsetminus \{0\}$ betrachten wir $U = \langle v \rangle$. Dank Regularität existiert $u \in U$ mit $\beta(u,v) \neq 0$, also $u = \lambda v$ mit $\lambda\beta(v,v) \neq 0$, somit $\beta(v,v) \neq 0$. QED

Regularität und Diskriminante

Satz S1N: Regularität und Diskriminante

Sei $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ eine sesquilineare Form über $(\mathbb{K},\sigma)$ sowie $(v_1,\dots,v_n)$ eine Basis und $B = \beta(v_i,v_j)_{ij} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die zugehörige Gram–Matrix.

(1) Ist der Ring $\mathbb{K}$ ein Körper (DRing oder CRing), so sind äquivalent:

(a) $\operatorname{Ker}\beta = 0$, (b) $\operatorname{Ker} B = 0$, (c) $B \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$, (d) $\det B \in \mathbb{K}^\times$.

(2) Die Determinante $\det(B) \in \mathbb{K}$ ändert sich unter **Basiswechsel** zu

$$\det(S^\dagger BS) = \det(S)^\sigma \det(B)\det(S).$$

Demnach ist „$\det\beta$“ nur wohldefiniert modulo der **Normgruppe**

$$N = N(\mathbb{K},\sigma) := \{\, a^\sigma a \,|\, a \in \mathbb{K}^\times \,\} \leq \mathbb{K}^\times.$$

Wir definieren die **Diskriminante** $\operatorname{disc}(\beta) := [\det(B)]$ in $\mathbb{K}/N$.

Beispiel: Euklidisch über $\mathbb{K} = \mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$ gilt $N(\mathbb{K},\sigma) = \mathbb{R}_{>0}$.
Ist (V,β) hermitesch über $(\mathbb{K},\sigma)$, so gilt $\det B \in \mathbb{R}$ und $\operatorname{disc}\beta \in \{[\pm 1],[0]\}$.

Regularität und Diskriminante

Beweis: (1) Dank Definition S1G wissen wir über jedem Ring $\mathbb{K}$:

$$\operatorname{Ker}\beta \;=\; \{\, v_1\lambda_1 + \dots + v_n\lambda_n \,|\, \lambda \in \mathbb{K}^n \wedge B\lambda = 0 \,\} \;\cong\; \operatorname{Ker} B.$$

Die Äquivalenz „(b) $\Leftrightarrow$ (c)“ gilt über jedem Divisionsring dank D2M.
Die Äquivalenz „(b) $\Leftrightarrow$ (d)“ gilt über jedem kommutativen Ring dank O2R.

(2) Den Basiswechsel von B zu $S^\dagger BS$ verdanken wir Satz S1E. Hier gilt Kongruenz statt Ähnlichkeit! Die Determinante ist multiplikativ (O2O) und transpositionsinvariant (O2L). Die Involution $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ist ein Ringautomomorphismus, also gilt $\det(B^\dagger) = \det(B^\sigma) = \det(B)^\sigma$. QED

Bemerkung: Hier spüren wir erneut einen deutlichen Unterschied zu Darstellungsmatrizen von Endomorphismen $\alpha : V \to V$. Nach Wahl einer Basis $\mathcal{V} = (v_i)_{i=1}^n$ für V erhalten wir die Darstellung $A = \mathrm{M}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(\alpha) \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Basiswechsel führt von A zu $A' = T^{-1}AT$. Die Determinante ändert sich dabei nicht, denn $\det(A') = \det(T)^{-1}\det(A)\det(T) = \det(A)$. Somit ist $\det : \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V) \to \mathbb{K}$ wohldefiniert durch $\det(\alpha) = \det(A)$, siehe Satz O3D.
Für Sesquilinearformen haben wir schwächer $\operatorname{disc} : \mathrm{SF}_{(\mathbb{K},\sigma)}(V) \to \mathbb{K}/N$.

Reguläre Familien und Fourier–Koeffizienten

Definition S1o: reguläre Familie

(0) Eine endliche Familie $(u_i)_{i\in I}$ in (V,β) über $(\mathbb{K},\sigma)$ heißt **regulär**, wenn ihre Gram–Matrix $B = \beta(u_i,u_j)_{ij} \in \mathbb{K}^{I\times I}$ invertierbar ist.

Ist I unendlich, so fordern wir Regularität für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$. Folgende Rechnung gilt dann eingeschränkt auf $J = \operatorname{supp}\lambda \subseteq I$.

Lemma S1o: Fourier–Koeffizienten

Sei $(u_i)_{i\in I}$ in (V,β) regulär. Zu jeder Linearkombination $v = \sum_{j\in I} u_j\lambda_j$ erhalten wir die Koeffizienten $\lambda \in \mathbb{K}^{(I)}$ durch $\lambda = B^{-1}\mu$ mit $\mu_i = \beta(u_i,v)$.

Beweis: Für $\mu_i = \beta(u_i,v) = \beta(u_i,\sum_j u_j\lambda_j) = \sum_j \beta(u_i,u_j)\lambda_j$ gilt $\mu = B\lambda$.

Jede reguläre Familie $(u_i)_{i\in I}$ in (V,β) ist $\mathbb{K}$–linear unabhängig, somit eine Basis von $U := \langle u_i \mid i\in I\rangle^!_{\mathbb{K}} \leq V$, und (U,β_U) ist regulär.

Beweis: Sei $v = \sum_{j\in I} u_j\lambda_j$. Aus $v = 0$ folgt $\mu = 0$ und $\lambda = B^{-1}\mu = 0$. QED

Orthogonale und orthonormale Familien

Definition S1o: orthogonale Familie

(1) Ein Vektor u in (V,β) heißt **normiert**, falls $q(u) = \beta(u,u) = 1$.

(2) Eine Familie $(u_i)_{i\in I}$ in V heißt **orthogonal**, kurz OS, falls $\beta(u_i,u_j) = 0$ für alle $i \neq j$ in I gilt, und **orthonormal**, kurz ONS, falls zudem $q(u_i) = 1$:

$$\beta(u_i,u_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{falls } i\neq j\text{:} \quad \text{paarweise orthogonal,} \\ 1 & \text{falls } i = j\text{:} \quad \text{individuell normiert.} \end{cases}$$

OS steht für **Orthogonalsystem** und ONS für **Orthonormalsystem**, d.h. die Gram–Matrix $\beta(u_i,u_j)_{ij}$ ist diagonal bzw. die Einheitsmatrix.

Wir nennen $(u_i)_{i\in I}$ kurz **orthoregulär**, falls orthogonal und $q(u_i) \in \mathbb{K}^\times$.

(3) Ist die Familie $(u_i)_{i\in I}$ zudem eine Basis von $U \leq V$, so nennen wir dies eine **Orthogonalbasis**, kurz OB, bzw. eine **Orthonormalbasis**, kurz ONB.

Beispiel: Euklidisch $(\mathbb{K}^n,\langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ ist $(e_1,\dots,e_n)$ eine Orthonormalbasis. Ist $(e_i)_{i\in I}$ orthonormal und $v = \sum_j e_j\lambda_j$ mit $\lambda \in \mathbb{K}^{(I)}$, so gilt $\lambda_i = \langle e_i \mid v\rangle$.

Orthogonale Summe, extern

Definition S1p: externe orthogonale Summe

(1) Sind (V_1,β_1) und (V_2,β_2) sesquilineare Räume, so auch

$$(\,V = V_1 \oplus V_2,\ \beta = \beta_1 \oplus \beta_2\,) \quad \text{mit} \quad \beta(u,v) = \beta_1(u_1,v_1) + \beta_2(u_2,v_2).$$

für alle Vektorpaare $u = (u_1,u_2)$ und $v = (v_1,v_2)$ im Raum $V = V_1 \times V_2$.

Zu Basen $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \sqcup \mathcal{V}_2$ von $V = V_1 \oplus V_2$ sind die Gram–Matrizen dann

$$B = B_1 \oplus B_2 =: \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}.$$

Wir schreiben kurz $(V,\beta) =: (V_1,\beta_1) \oplus (V_2,\beta_2)$ oder zu kurz $V = V_1 \oplus V_2$.

Ebenso für beliebig viele Summanden $(V_i,\beta_i)_{i\in I}$: Die **orthogonale Summe**

$$\textstyle\bigoplus^{\text{ext}}_{i\in I}(V_i,\beta_i) := (V,\beta) \quad \text{mit} \quad V = \bigoplus^{\text{ext}}_{i\in I} V_i \quad \text{und} \quad \beta = \bigoplus_{i\in I}\beta_i$$

bedeutet direkte Summe mit der SForm $\beta(u,v) = \sum_{i\in I}\beta_i(u_i,v_i)$ für alle I–Tupel $u = (u_i)_{i\in I}$ und $v = (v_i)_{i\in I}$ im Summenraum $V = \bigoplus^{\text{ext}}_{i\in I} V_i$.

Orthogonale Summe, intern

Dieselbe Notation nutzen wir auch umgekehrt für die interne Summe:

Definition S1p: interne orthogonale Summe

(2) Sei (V,β) ein sesquilinearer Raum über $(\mathbb{K},\sigma)$ und $V = \bigoplus^{\text{int}}_{i\in I} V_i$ eine interne Summenzerlegung in paarweise orthogonale Teilräume $V_i \leq V$.

Das bedeutet Orthogonalität $V_i \perp V_j$ aller Teilräume für $i \neq j$, also elementweise $\beta(v_i,v_j) = 0$ für alle $v_i \in V_i$ und $v_j \in V_j$ mit $i \neq j$.

Mit den Einschränkungen $\beta_i = \beta|_{V_i\times V_i} : V_i \times V_i \to \mathbb{K}$ schreiben wir:

$$(V,\beta) = \textstyle\bigoplus^{\text{int}}_{i\in I}(V_i,\beta_i)$$

oder kurz $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$, wenn alle Formen aus dem Kontext klar sind.

Beispiel: Euklidisch $(\mathbb{K}^n,\langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ gilt intern $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^n e_i\mathbb{K}$ (Achsen), und ebenso extern $(\mathbb{K}^n,\langle\text{-}|\text{-}\rangle) = \bigoplus_{i=1}^n(\mathbb{K},\langle\text{-}|\text{-}\rangle) = \bigoplus_{i=1}^n\langle 1\rangle$, siehe S1H.

☺ Wie bei Summen üblich und lang vertraut, extern vs intern entspricht zusammensetzen vs zerlegen, vornehm gesagt Synthese vs Analyse.

Satz S1Q: orthogonales Komplement und Projektion

Sei $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform auf V über $(\mathbb{K}, \sigma)$ und regulär auf $U = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{K}}^{!} \leq V$, das heißt $B = (\beta(e_i, e_j))_{ij} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Dann gilt:

$$\boxed{V = U \oplus U^\perp = U \oplus U^\perp}$$

(1) Ausführlich: Wir können jeden Vektor $v \in V$ bezüglich U eindeutig **orthogonal zerlegen** in $(v_\parallel, v_\perp) \in U \times U^\perp$ mit $v = v_\parallel + v_\perp$. Explizit gilt

$$\boxed{\begin{array}{l} v_\parallel = \mathrm{P}_U^\parallel(v) := \sum_{j=1}^n e_j \lambda_j \quad \text{und} \quad v_\perp = \mathrm{P}_U^\perp(v) := v - v_\parallel \\ \text{mit den Fourier–Koeffizienten } \lambda = B^{-1}\mu \text{ und } \mu_i = \beta(e_i, v). \end{array}}$$

Ist die Basis $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormal, also $B = 1_{n \times n}$, so gilt $\lambda_i = \beta(e_i, v)$. Die so definierten Abbildungen $\mathrm{P}_U^\parallel, \mathrm{P}_U^\perp : V \to V$ sind linear und heißen die **orthogonale Projektion** auf U bzw. auf das **Orthokomplement** $U^\perp$.

(2) Ist zudem $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ regulär, so auch $\beta : {}^\perp U \times U^\perp \to \mathbb{K}$.
(3) Aus Letzterem folgt ${}^\perp(U^\perp) = U$ und ebenso $({}^\perp U)^\perp = U$.

Beweis: (1) Wir suchen $v_\parallel = \sum_{j=1}^n e_j \lambda_j$ mit $\lambda \in \mathbb{K}^n$ und $v_\perp = v - v_\parallel \in U^\perp$. Genau dann gilt $U \perp v_\perp$, wenn für jeden Index $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$0 \overset{!}{=} \beta(e_i, v_\perp) \overset{\text{Lin}}{=} \beta(e_i, v) - \textstyle\sum_{j=1}^n \beta(e_i, e_j)\lambda_j$$

Wir erhalten das lineare Gleichungssystem $B\lambda = \mu$ mit $\mu_i = \beta(e_i, v)$. Dank $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ existiert hierzu genau eine Lösung $\lambda = B^{-1}\mu \in \mathbb{K}^n$.

Das beweist die eindeutige Summenzerlegung, $V = U \oplus U^\perp$, sowie die angegebenen expliziten Formeln für die beiden Projektionen $\mathrm{P}_U^\parallel$ und $\mathrm{P}_U^\perp$. Diese sind offensichtlich linear, da Komposition linearer Abbildungen. Alternativ folgt Linearität auch aus der eindeutigen Summenzerlegung. Ebenso zerlegen wir in $U \times {}^\perp U$. Reflexiv gilt ${}^\perp U = U^\perp$, das vereinfacht.

(2) Zu jedem $v \in {}^\perp U \setminus \{0\}$ existiert $w \in V$ mit $\beta(v, w) \neq 0$. Wir zerlegen $w = w_\parallel + w_\perp$ mit $(w_\parallel, w_\perp) \in U \times U^\perp$ und erhalten $0 \neq \beta(v, w) = \beta(v, w_\perp)$.

(3) Klar ist $U \subseteq {}^\perp(U^\perp)$, denn $U \perp U^\perp$. Wir zeigen „$\supseteq$“: Sei $v \in {}^\perp(U^\perp)$, also $v \in V$ mit $v \perp U^\perp$. Wir zerlegen $v = {}_\parallel v + {}_\perp v$ mit $({}_\parallel v, {}_\perp v) \in U \times {}^\perp U$. Für alle $w \in U^\perp$ gilt $0 = \beta(v, w) = \beta({}_\perp v, w)$. Dank (2) folgt ${}_\perp v = 0$. $\boxed{\text{QED}}$

Beispiel: Euklidisch $(\mathbb{K}^3, \langle \text{-}|\text{-} \rangle)$ gilt $\langle e_1 \rangle^\perp = \langle e_2, e_3 \rangle$ und $\mathbb{K}^3 = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_1 \rangle^\perp$.

☺ Orthogonalität ist hier anschaulich, und wir können sie algebraisch effizient berechnen! Dabei treten die besonders schönen Eigenschaften des Skalarprodukts deutlich hervor. Insbesondere ist es hermitesch, somit reflexiv, daher müssen wir links-/rechts-orthogonal nicht unterscheiden.

⚠ Allgemein gilt zu $U \leq (V, \beta)$ weder $V = U + U^\perp$ noch $U \cap U^\perp = \{0\}$. Heilsame Enttäuschung! Einfaches Gegenbeispiel über jedem Ring $(\mathbb{K}, \sigma)$:

$$\beta : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 : (u, v) \mapsto u^\dagger B v \quad \text{mit} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Hier gilt $\langle e_1 \rangle_{\mathbb{K}}^\perp = \langle e_2 \rangle_{\mathbb{K}}$ und $\langle e_2 \rangle_{\mathbb{K}}^\perp = \langle e_1 \rangle_{\mathbb{K}}$ sowie $\mathbb{K}^2 = \langle e_1 \rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle e_2 \rangle_{\mathbb{K}}$.

Der Vektor $u = (1, 1)^\intercal \in \mathbb{K}^2$ erfüllt $\beta(u, u) = 0$, ist also isotrop.
Für $U = \langle u \rangle_{\mathbb{K}}$ gilt $U^\perp = \mathrm{Ker}(u^\dagger B) = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \langle u \rangle_{\mathbb{K}}$.
Der Orthogonalraum $U^\perp$ ist hier kein Komplement zu U:
Es gilt weder $\mathbb{K}^2 = U + U^\perp$ noch $U \cap U^\perp = \{0\}$.

☺ Im vorigen Satz gelingt uns die orthogonale Zerlegung $V = U \oplus U^\perp$, da wir die Einschränkung / den URaum (U, β_U) als regulär voraussetzen. Unser voriges, extremes Gegenbeispiel hingegen ist total isotrop, $\beta_U = 0$.

Aufgabe: Konstruieren Sie alle hermiteschen Formen β auf $\mathbb{K}^3$ über $\mathbb{K}$ mit
(a) $\langle e_1 \rangle_{\mathbb{K}}^\perp = \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{K}}$, (b) $\langle e_2 \rangle_{\mathbb{K}}^\perp = \langle e_1, e_3 \rangle_{\mathbb{K}}$, (c) $\langle e_3 \rangle_{\mathbb{K}}^\perp = \langle e_2, e_1 - e_3 \rangle_{\mathbb{K}}$.

Lösung: Wir stellen β bezüglich der Standardbasis (e_1, e_2, e_3) durch die Gram–Matrix $B \in \mathbb{K}^{3 \times 3}$ dar. Bedingung (a) bedeutet $\mathrm{Ker}(e_1^\dagger B) = \langle e_1, e_2 \rangle$:

$$B = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \overset{(a)}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & ? & ? \\ \overline{a} & ? & ? \end{bmatrix} \overset{(b)}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ \overline{a} & 0 & ? \end{bmatrix} \overset{(c)}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$$

Hierbei sind $a, b \in \mathbb{K}$ kürzbare Ringelemente, also keine Nullteiler, sowie hermitesch, $a = \overline{a}$ und $b = \overline{b}$, also Elemente des Fixrings $\mathbb{K}^\sigma$.
Im Beispiel $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ bedeutet das $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wenn wir zudem $q(e_3) = q(e_2) = 1$ fordern, so sind dadurch $a = b = 1$ eindeutig festgelegt.

Diagonalisierung hermitescher Formen

Satz S1R: Diagonalisierung einer hermiteschen Form

Sei $(\mathbb{K}, \sigma)$ ein Divisionsring $\mathbb{K}$ mit Involution σ und $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$.

(1) Sei (V, β) ein hermitescher Raum über $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit $\dim_{\mathbb{K}} V = n \in \mathbb{N}$. Dann existiert zu (V, β) eine Orthogonalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, also

$$(\beta(v_i, v_j))_{ij} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & b_n \end{bmatrix}$$

(2) Jede hermitesche Matrix ist kongruent zu einer Diagonalmatrix:

$$A^\dagger = A \in \mathbb{K}^{n \times n} \quad \Longrightarrow \quad \exists S \in \mathrm{GL}_n \mathbb{K} : S^\dagger A S = \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_n)$$

(3) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \operatorname{conj}_{\mathbb{K}}$ erreichen wir $b_1, \dots, b_n \in \{0, \pm 1\}$.

Wir geben zwei Beweise, (1) per Induktion und (2) als Algorithmus S1R. Aussagen (1) und (2) sind äquivalent dank Basis-Wahl-und-Wechsel (S1E).

Übung: Daraus folgt (3) durch Skalierung $\tilde{v}_j = v_j / \sqrt{|\beta(v_j, v_j)|}$ wo nötig.

Diagonalisierung hermitescher Formen

Beweis: Wir führen Induktion über $n = \dim_{\mathbb{K}} V$. Der Fall $n \leq 1$ ist klar. Sei $n \geq 1$ und $q(v) = \beta(v, v)$ die quadratische Form. Ist $q = 0$, so auch $\beta = 0$ dank Polarisierung S1L; dann ist *jede* Basis von V orthogonal.

Im Falle $q \neq 0$ wählen wir einen Vektor $v_1 \in V$ mit $q(v_1) \neq 0$.
Die orthogonale Projektion S1Q zu $V_1 = \langle v_1 \rangle_{\mathbb{K}}^!$ liefert $V = V_1 \oplus U$.
Das Komplement $U = V_1^\perp$ hat demnach Dimension $n - 1$, siehe M2T.

Nach Induktionsvoraussetzung existiert zu $(U, \beta|_U)$ eine Orthogonalbasis $v_2, \dots, v_n \in U$, also $U = \langle v_2, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{K}}^!$ mit $\beta(v_i, v_j) = 0$ für alle $i, j \geq 2$.
Dank $V_1 \perp U$ gilt zudem $\beta(v_1, v_i) = \beta(v_i, v_1) = 0$ für alle $i = 2, \dots, n$.
Somit ist $v_1, v_2, \dots, v_n$ eine Orthogonalbasis von (V, β). QED

☺ Diese Konstruktion ist raffiniert doch zugleich einfach und elegant. Zur konkreten Berechnung ist der Schritt „Wir wählen v_1, …“ noch nicht explizit genug. Diesen Baustein ergänzen wir im folgenden Algorithmus!

☺ Damit berechnen Sie die Diagonalisierung ebenso leicht und effizient, wie Sie dies vom Gauß–Algorithmus gewöhnt sind, als Implementierung auf dem Computer oder in Hausaufgaben und auch in Klausuren.

Der hermitesche Gauß–Algorithmus über $(\mathbb{K}, \sigma)$

Eingabe: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hermitesch, also $A^\dagger = A$ über dem *DRing $(\mathbb{K}, \sigma)$

Ausgabe: $B = S^\dagger A S$ mit $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $b_{i1} = 0 = b_{1i}$ für alle $i \geq 2$

Methode: Gilt $a_{i1} = 0 = a_{1i}$ für alle $i \geq 2$, so sind wir fertig.

(1) Gilt $a_{11} \neq 0$, so eliminiere die erste Spalte und Zeile; damit fertig.

$$A = \begin{bmatrix} \blacksquare & * \\ * & * \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \blacksquare & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} = B$$

(2) Gilt $a_{11} = 0$, aber $a_{ii} \neq 0$, so tausche dies zu $a'_{11} \neq 0$; weiter mit (1).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & \blacksquare \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \blacksquare & * \\ * & 0 \end{bmatrix} = A' = P_{1i} A P_{i1}$$

(3) Gilt $0 = a_{11} = \dots = a_{nn}$, aber $x := a_{i1} \neq 0$, so addiere das x^σ-fache der i-ten Zeile zur ersten, ebenso das x-fache der i-ten Spalte zur ersten:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x^\sigma \\ x & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2x^\sigma x & x^\sigma \\ x & 0 \end{bmatrix} = A' = T_{i1}(x^\sigma) A T_{1i}(x)$$

Damit gilt $a'_{11} = 2xx^\sigma \neq 0$, da nullteilerfrei und $2 \neq 0$; weiter mit (1).

Der hermitesche Gauß–Algorithmus über $(\mathbb{K}, \sigma)$

Wir operieren auf Spalten von rechts mit S und auf Zeilen von links mit $S^\dagger$. Daher bleibt A stets hermitesch, und wir erhalten B wie gewünscht.

☺ Im symmetrischen Spezialfall $(\mathbb{K}, \mathrm{id}_{\mathbb{K}})$ genügt in (3), ganz einfach die i-te Spalte / Zeile zur ersten zu addieren; so erhalten wir $a'_{11} = 2x \neq 0$. Allgemein multiplizieren wir mit den konjugierten Elementen x^σ bzw. x. Das führt zu $a'_{11} = 2xx^\sigma \neq 0$, und wir können mit Schritt (1) fortfahren.

☺ Mit diesem Verfahren räumen wir die erste Spalte und Zeile auf. Dies können wir für alle weiteren Zeilen und Spalten wiederholen. So erhalten wir schließlich $A \simeq B = S^\dagger A S = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

☺ Das entspricht dem Gauß–Algorithmus, wobei wir Zeilen und Spalten hermitesch gleich behandeln. Daher nenne ich dies das „hermitesche Gauß–Verfahren“, für $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$ das „symmetrische Gauß–Verfahren“.

☺ Sie erkennen die Technik des abstrakt-eleganten Existenzbeweises: Schritt (1) entspricht der orthogonalen Projektion zu v_1 mit $q(v_1) \neq 0$. Schritt (2) entspricht der Wahl eines anisotropen *Basis*vektors. Dieser muss eventuell in Schritt (3) erst hergestellt werden.

Der hermitesche Gauß–Algorithmus über $(\mathbb{K}, \sigma)$

Wie im klassischen Gauß–Algorithmus benötigen wir einen DRing $\mathbb{K}$. Dieser trägt nun zusätzlich eine Involution σ, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$. Zusammengefasst erhalten wir den folgenden Algorithmus:

Algo S1R: Gauß–Hermite über einem *DRing $(\mathbb{K}, \sigma)$

Eingabe: eine hermitesche Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, also $A^\dagger = A$
Ausgabe: eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$ mit $S^\dagger A\, S = \mathrm{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$

1: Eliminiere die erste Zeile und Spalte wie oben erklärt.
2: Wiederhole dies für die Untermatrix B auf $\{2, \dots, n\}^2$.

Bemerkung: Die Spalten der Matrix $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ bilden eine Orthonormalbasis des hermiteschen Raums $(\mathbb{K}^n, \beta_A)$, wie gewünscht.

☺ Der hermitesche Gauß–Algorithmus beweist erneut den Satz S1R! Jeder der beiden Beweise hat seine Vorzüge: Der erste ist elegant und kurz, dafür aber nicht explizit oder konstruktiv. Der Algorithmus ist explizit und konstruktiv, dafür etwas rechenaufwändiger im Detail.

Der hermitesche Gauß–Algorithmus über $(\mathbb{C}, \mathrm{conj}_{\mathbb{C}})$

Aufgabe: Diagonalisieren Sie über $(\mathbb{C}, \mathrm{conj}_{\mathbb{C}})$ die hermitesche Form

$$\beta : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} : (u, v) \mapsto u^\dagger A\, v \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}.$$

Lösung: Wir berechnen schrittweise Matrizen (B_i, S_i) mit $B_i = S_i^\dagger A\, S_i$ und $S_i \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ von der Startmatrix $(B_0, S_0) = (A, 1)$ bis zur Zielmatrix $(B_n, S_n) = (D, S)$ mit D diagonal und $S = (b_1, b_2, b_3)$ somit β–orthogonal.

$$\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} R_1 \leftarrow R_1 - \mathrm{i} \cdot R_2 \\ C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \cdot \mathrm{i} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -\mathrm{i} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mathrm{i}}{2} \\ \mathrm{i} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} R_2 \leftarrow R_2 - \frac{\mathrm{i}}{2} \cdot R_1 \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_2 \cdot \frac{\mathrm{i}}{2} \end{matrix}$$

? Haben A und $B = S^\dagger A\, S$ dieselbe Determinante? Woran liegt das?

Der symmetrische Gauß–Algorithmus über $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$

Aufgabe: Über $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ sei $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die quadratische Form

$$q(v) = 4v_2^2 + v_3^2 + 6v_1v_3 + 4v_2v_3.$$

(1) Bestimmen Sie die zu q gehörige symmetrische Bilinearform β und ihre Gram–Matrix A bezüglich der Standardbasis (e_1, e_2, e_2).
(2) Bestimmen Sie zu β eine Orthogonalbasis (b_1, b_2, b_3) von $\mathbb{R}^3$.
Nennen Sie dazu alle Rechenschritte in nachvollziehbarer Form.

Lösung: (1) Wir finden

$$\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (u, v) \mapsto u^\intercal A\, v \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) Wir berechnen schrittweise (B_i, S_i) mit $B_i = S_i^\intercal A\, S_i$ und $S_i \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ von der Startmatrix $(B_0, S_0) = (A, 1)$ bis zur Zielmatrix $(B_n, S_n) = (D, S)$ mit D diagonal und $S = (b_1, b_2, b_3)$ somit β–orthogonal. Zur Sicherheit führen wir sorgsam die Zeilenoperation und die Spaltenoperation aus.

Der symmetrische Gauß–Algorithmus über $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1) \leftrightarrow (2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3) - \tfrac{1}{2} \cdot (1)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2) + (3)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3) - \tfrac{1}{2} \cdot (2)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Wie ändert sich die Determinante?

Aufgabe: Vergleichen Sie in den beiden vorigen Beispielen über $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$ die Determinaten von A am Anfang und von $B = S^\dagger A\, S$ am Ende des Algorithmus. Wie ändert sich die Determinante? Woran liegt das?

Lösung: Der hermitesche Gauß–Algorithmus S1R benötigt als Umformungen nur Transvektionen $T_{ij}(\lambda)$ und Vertauschungen P_{ij}. Diese haben Determinante $\det T_{ij}(\lambda) = 1$ bzw. $\det P_{ij} = -1$.

Wenn wir also streng dem hermiteschen Gauß–Algorithmus S1R folgen, dann hat die so entstehende Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ immer die Determinante ± 1. Demnach gilt $\det B = \det A$.

Die dritte Art der Umformung, nämlich Skalierungen $S_i(\mu)$, ist zwar ebenso möglich, und hermitesch durchaus erlaubt, wird aber für die Diagonalisierung nicht benötigt.

Skalierung einer Zeile mit $S_i(\mu)$ von links und einer Spalte mit $S_i(\overline{\mu})$ von rechts ändert die Determiante um den Faktor $|\mu|^2 > 0$, wie in Satz S1N. Als Invariante bleibt uns nur die Diskriminante $\operatorname{disc}(A) \in \{[\pm 1], [0]\}$.

Wie skalieren wir Diagonaleinträge zu $\pm 1, 0$?

Aufgabe: Wie können Sie über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ die Diagonaleinträge der gefundenen Diagonalmatrix schließlich auf $\pm 1, 0$ skalieren? Ändert sich dabei die Determinante? Ändert sich ihr Vorzeichen?

Lösung: In unserer Orthogonalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ gilt $\beta(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$. Die Diagonaleinträge $\beta(v_i, v_i) = b_i \in \mathbb{K}$ sind zunächst noch beliebig. Die Matrix A ist hermitesch, also auch $B = S^\dagger A\, S$, somit gilt $b_i \in \mathbb{R}$.

Im Falle $b_i \neq 0$ skalieren wir v_i zu $\tilde{v}_i := v_i / \sqrt{|b_i|}$. Im Falle $b_i = 0$ behalten wir den Vektor $\tilde{v}_i := v_i$. Damit ist auch $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ eine Basis von V und ebenso orthogonal, also $\beta(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) = 0$ für $i \neq j$. Zusätzlich gilt nun $\beta(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = 0$ oder sonst $\beta(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = b_i / \sqrt{|b_i|}^2 \in \{\pm 1\}$, wie gewünscht. (Dazu müssen wir die Wurzel ziehen, über $\mathbb{Q}$ gelingt dies nicht immer.)

⚠ Nur diese abschließenden Skalierungen ändern die Determinante! Skalierung einer Zeile mit $S_i(\mu)$ von links und einer Spalte mit $S_i(\overline{\mu})$ von rechts ändert die Determiante um den Faktor $|\mu|^2 > 0$, wie in Satz S1N. Als Invariante bleibt uns nur die Diskriminante $\operatorname{disc}(A) \in \{[\pm 1], [0]\}$.

Gaël: symmetrischer Gauß–Algorithmus über $(\mathbb{Q}, \mathrm{id}_\mathbb{Q})$

Sicher möchten Sie mit diesem eleganten Algorithmus selbst ein Wenig experimentieren, um ihn noch besser zu verstehen und zu trainieren. Mit Stift & Papier empfehle ich nachdrücklich die obige Schreibweise!

Wenn Sie handschriftlich geübt sind, wollen Sie vielleicht mit Gaël noch mehr ausprobieren oder Ihre Handrechnungen unabhängig nachprüfen. Gaël bietet die Option „symmetrische Operationen“ und übernimmt für Sie die Buchführung. Zur Transformation von A zu $B = S^\dagger A\, S$ schreiben wir die Matrix S unterhalb, darauf wirken dann alle Spaltenoperationen.

	C1	C2	C3
R1	0	0	3
R2	0	4	2
R3	3	2	1
R4	1	0	0
R5	0	1	0
R6	0	0	1

This appears to be any old matrix, nothing special or noteworthy.
Your Operations: Init.

	C1	C2	C3
R1	4	0	2
R2	0	0	3
R3	2	3	1
R4	0	1	0
R5	1	0	0
R6	0	0	1

This appears to be any old matrix, nothing special or noteworthy.
Your Operations: Init. R2 ↔ R1. C2 ↔ C1.

	C1	C2	C3
R1	4	0	0
R2	0	0	3
R3	0	3	0
R4	0	1	0
R5	1	0	-1/2
R6	0	0	1

This appears to be any old matrix, nothing special or noteworthy.
Your Operations: Init. R2 ↔ R1. C2 ↔ C1. R3 ← R3-1/2·R1. C3 ← C3-1/2·C1.

	C1	C2	C3
R1	4	0	0
R2	0	6	3
R3	0	3	0
R4	0	1	0
R5	1	-1/2	-1/2
R6	0	1	1

This appears to be any old matrix, nothing special or noteworthy.
Your Operations: Init. R2 ↔ R1. C2 ↔ C1. R3 ← R3-1/2·R1. C3 ← C3-1/2·C1. R2 ← R2+1·R3. C2 ← C2+1·C3.

	C1	C2	C3
R1	4	0	0
R2	0	6	0
R3	0	0	-3/2
R4	0	1	-1/2
R5	1	-1/2	-1/4
R6	0	1	1/2

This matrix is in column echelon form (cef).
Your Operations: Init. R2 ↔ R1. C2 ↔ C1. R3 ← R3-1/2·R1. C3 ← C3-1/2·C1. R2 ← R2+1·R3. C2 ← C2+1·C3. R3 ← R3-1/2·R2. C3 ← C3-1/2·C2.

$$A \simeq \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

Gaël: symmetrischer Gauß–Algorithmus über $(\mathbb{Q}, \mathrm{id}_\mathbb{Q})$

Übung: Diagonalisieren Sie die obige Matrix $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$, indem Sie im ersten Schritt statt $(1) \leftrightarrow (2)$ nun $(1) \leftrightarrow (3)$ als Vertauschung wählen. Die Rechnung verläuft etwas anders, benötigt einen Schritt mehr, doch dafür können wir am Ende sogar über $\mathbb{Q}$ zu $\pm 1, 0$ skalieren!

	C1	C2	C3
R1	0	0	3
R2	0	4	2
R3	3	2	1
R4	1	0	0
R5	0	1	0
R6	0	0	1

This appears to be any old matrix, nothing special or noteworthy.
Your Operations: Init.

	C1	C2	C3
R1	1	2	3
R2	2	4	0
R3	3	0	0
R4	0	0	1
R5	0	1	0
R6	1	0	0

This appears to be any old matrix, nothing special or noteworthy.
Your Operations: Init. R3 ↔ R1. C3 ↔ C1.

	C1	C2	C3
R1	1	0	3
R2	0	0	-6
R3	3	-6	0
R4	0	0	1
R5	0	1	0
R6	1	-2	0

This appears to be any old matrix, nothing special or noteworthy.
Your Operations: Init. R3 ↔ R1. C3 ↔ C1. R2 ← R2-2·R1. C2 ← C2-2·C1.

	C1	C2	C3
R1	1	0	0
R2	0	0	-6
R3	0	-6	-9
R4	0	0	1
R5	0	1	0
R6	1	-2	-3

This appears to be any old matrix, nothing special or noteworthy.
Your Operations: Init. R3 ↔ R1. C3 ↔ C1. R2 ← R2-2·R1. C2 ← C2-2·C1. R3 ← R3-3·R1. C3 ← C3-3·C1.

	C1	C2	C3
R1	1	0	0
R2	0	-9	-6
R3	0	-6	0
R4	0	1	0
R5	0	0	1
R6	1	-3	-2

This appears to be any old matrix, nothing special or noteworthy.
Your Operations: Init. R3 ↔ R1. C3 ↔ C1. R2 ← R2-2·R1. C2 ← C2-2·C1. R3 ← R3-3·R1. C3 ← C3-3·C1. R3 ← R2. C3 ← C2.

	C1	C2	C3
R1	1	0	0
R2	0	-9	0
R3	0	0	4
R4	0	1	-2/3
R5	0	0	1
R6	1	-3	0

This matrix is in column echelon form (cef).
Your Operations: Init. R3 ↔ R1. C3 ↔ C1. R2 ← R2-2·R1. C2 ← C2-2·C1. R3 ← R3-3·R1. C3 ← C3-3·C1. R3 ← R2. C3 ← C2. R3 ← R3-2/3·R2. C3 ← C3-2/3·C2.

	C1	C2	C3
R1	1	0	0
R2	0	-1	0
R3	0	0	4
R4	0	1/3	-2/3
R5	0	0	1
R6	1	-1	0

This matrix is in column echelon form (cef).
Your Operations: Init. R3 ↔ R1. C3 ↔ C1. R2 ← R2-2·R1. C2 ← C2-2·C1. R3 ← R3-3·R1. C3 ← C3-3·C1. R3 ← R2. C3 ← C2. R3 ← R3-2/3·R2. C3 ← C3-2/3·C2. R2 ← 1/3·R2. C2 ← 1/3·C2.

	C1	C2	C3
R1	1	0	0
R2	0	-1	0
R3	0	0	1
R4	0	1/3	-1/3
R5	0	0	1/2
R6	1	-1	0

This matrix is in column echelon form (cef).
Your Operations: Init. R3 ↔ R1. C3 ↔ C1. R2 ← R2-2·R1. C2 ← C2-2·C1. R3 ← R3-3·R1. C3 ← C3-3·C1. R3 ← R2. C3 ← C2. R3 ← R3-2/3·R2. C3 ← C3-2/3·C2. R2 ← 1/3·R2. C2 ← 1/3·C2. R3 ← 1/2·R3.

$$A \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gauß–Hermite für anisotrope hermitesche Formen

Satz S1s: Anisotrop wird Gauß–Hermite zu Gram–Schmidt.

Sei $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ hermitesch über dem *DRing $(\mathbb{K}, \sigma)$.

(1) Zudem sei β anisotrop, das heißt, es gelte

$$\boxed{\beta(u,u) \neq 0 \quad \text{für alle } u \in V \smallsetminus \{0\}.}$$

Im Gauß–Hermite–Algorithmus S1R genügt dann allein Schritt (1).
Wir erhalten so den folgenden Gram–Schmidt–Algorithmus S3C:

(2) Sei $b_1, \dots, b_n \in V$ eine Basis des Unterraums $U_n = \langle b_1, \dots, b_n \rangle_{\mathbb{K}}^{!}$.
Hierzu existiert genau eine Orthogonalbasis $u_1, \dots, u_k$ von U_k mit $b_k - u_k \in U_{k-1}$ für alle $k = 1, \dots, n$. Diese erhalten wir rekursiv:

$$\boxed{u_k := b_k - \sum_{j=1}^{k-1} u_j \lambda_{jk} \quad \text{mit den eindeutigen Fourier–Koeffizienten} \quad \lambda_{jk} := \frac{\langle u_j \mid b_k \rangle}{\langle u_j \mid u_j \rangle}}$$

(3) Das Verfahren gelingt für jede abzählbare Basis $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von $U \leq V$.

Gauß–Hermite für anisotrope hermitesche Formen

Aufgabe: Alles liegt explizit vor Ihnen. Rechnen Sie es sorgsam nach!

Beweis: (1) Anisotrop genügt in S1R das Aufräumen der ersten Spalte.
Auf der Basis liefert das genau den Gram–Schmidt–Algorithmus S3C:

(2) Wir führen Induktion über k. Für $k = 1$ ist die Aussage klar.
Sei nun $k \geq 2$. Im Unterraum $U_{k-1} \leq V$ haben wir die gegebene Basis $(b_1, \dots, b_{k-1})$ bereits zur Orthogonalbasis $(u_1, \dots, u_{k-1})$ transformiert.
Im Unterraum U_k erhalten wir aus der Basis $(b_1, \dots, b_{k-1}, b_k)$ zunächst $(u_1, \dots, u_{k-1}, b_k)$ und dann $(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k)$ mit $u_k := b_k - \sum_{j=1}^{k-1} u_j \lambda_{jk}$.
Für $j = 1, \dots, k-1$ fordern wir $0 \overset{!}{=} \langle u_j \mid u_k \rangle = \langle u_j \mid b_k \rangle - \langle u_j \mid u_j \rangle \lambda_{jk}$.
Die Differenz verschwindet genau für $\lambda_{jk} = \langle u_j \mid b_k \rangle / \langle u_j \mid u_j \rangle$.

(3) Dasselbe Verfahren gelingt für jede abzählbare Basis $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$:
Aus $b_0, b_1, b_2, \dots$ konstruieren wir rekursiv $u_0, u_1, u_2, \dots$ wie zuvor.
Jeder Schritt benötigt nur die bisher berechneten Vektoren.

Das zeigt: Jeder Vektorraum (V, β) mit anisotroper hermitescher Form und höchstens abzählbarer Dimension besitzt eine Orthogonalbasis. QED

Gauß–Hermite für diagonaldominante Matrizen

Satz S1T: Gauß–Hermite für diagonaldominante Matrizen → D7G

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hermitesch, also $A^\dagger = A$, und strikt diagonaldominant (D7F), das heißt, in jeder Spalte $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\boxed{|a_{jj}| > \textstyle\sum_{i \neq j} |a_{ij}|}$$

Im Gauß–Hermite–Algorithmus S1R genügt dann allein Schritt (1):

1. Umordnungen sind nicht nötig, Transvektionen genügen.
2. Diagonaldominanz bleibt erhalten für die Untermatrix.
3. Die Vorzeichen der Diagonaleinträge bleiben erhalten.

Anwendung: Die Indefinitheit oder (positive oder negative) Definitheit unserer Matrix A können wir direkt an den Diagonaleinträgen ablesen.

☺ Die Voraussetzung ist leicht zu prüfen, Die Folgerung (3) ist praktisch und bequem. Wir beweisen sie in Kor. T2F erneut mit Gerschgorin P6A.

Aufgabe: Beweisen Sie Satz S1T nach dem Vorbild von Satz D7G.

Gauß–Hermite für diagonaldominante Matrizen

Beweis: (1) Aus $|a_{11}| > \sum_{i=2}^{n} |a_{i1}| \geq 0$ folgt $a_{11} \neq 0$.
Wir können und werden also a_{11} als Pivot wählen.

(2) Wir räumen damit in der Matrix A die erste Spalte auf zu $\left[\begin{smallmatrix} a_{11} & * \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right]$.
In jeder Zeile $i \geq 2$ erhalten wir so den Eintrag $b_{ij} = a_{ij} - a_{i1} a_{11}^{-1} a_{1j}$.
In der ersten Spalte $j = 1$ führt dies zu $b_{i1} = 0$, wie gewünscht.

Wir rechnen nun nach, dass auch B strikt diagonaldominant ist.
Wir summieren in Spalte $j \in \{2, \dots, n\}$ über $i \in I := \{2, \dots, n\} \smallsetminus \{j\}$:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i \in I} |b_{ij}| &\overset{\text{Def}}{=} \textstyle\sum_{i \in I} |a_{ij} - a_{i1} a_{11}^{-1} a_{1j}| \\
&\overset{\Delta}{\leq} \textstyle\sum_{i \in I} (|a_{ij}| + |a_{i1}||a_{11}^{-1}||a_{1j}|) \\
&\overset{\text{dd}}{<} |a_{jj}| - |a_{1j}| + (|a_{11}| - |a_{j1}|)|a_{11}^{-1}||a_{1j}| \\
&\overset{\mathbb{K}}{=} |a_{jj}| - |a_{j1}||a_{11}^{-1}||a_{1j}| \overset{\nabla}{\leq} |a_{jj} - a_{j1} a_{11}^{-1} a_{1j}| \overset{\text{Def}}{=} |b_{jj}|
\end{aligned}$$

(3) Auf der Diagonale (für $i = j$) finden wir $b_{jj} = a_{jj} - a_{j1} a_{11}^{-1} a_{1j}$ mit $|a_{j1} a_{11}^{-1} a_{1j}| < |a_{1j}| < |a_{jj}|$. Somit haben a_{jj} und b_{jj} dasselbe Vorzeichen.
Anschließendes Aufräumen der ersten Zeile ändert B nicht. QED

Das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

♦ **Beispiel S1A:** das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Auf $V = \mathbb{K}^n$ definieren wir das **Standardskalarprodukt**

$$\langle \text{-}|\text{-} \rangle : V \times V \to \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u \,|\, v \rangle := \overline{u_1} v_1 + \cdots + \overline{u_n} v_n = u^\dagger v.$$

Für alle Vektoren $u, v, w \in V$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

S0: positive Semidefinitheit, $\langle u \,|\, u \rangle \geq 0 = \langle 0 \,|\, 0 \rangle$

S1: positive Definitheit, $\langle u \,|\, u \rangle > 0$ für $u \neq 0$

S2: konjugierte Symmetrie, $\langle v \,|\, u \rangle = \overline{\langle u \,|\, v \rangle}$

S3: Linearität rechts, $\langle u \,|\, v\lambda + w\mu \rangle = \langle u \,|\, v \rangle \lambda + \langle u \,|\, w \rangle \mu$

Aus (S2&3) folgt konjugierte Linearität in der ersten Variablen:

S4: Semilinearität links, $\langle u\lambda + v\mu \,|\, w \rangle = \overline{\lambda} \langle u \,|\, w \rangle + \overline{\mu} \langle v \,|\, w \rangle$

Eigenschaften (S3&4) heißen **sesquilinear** (lat. *sesqui*, 'anderthalb'), (S2) heißt **hermitesch** zu Ehren von Charles Hermite (1822–1901).

Über $\mathbb{R}$ mit $\mathrm{conj}_\mathbb{R} = \mathrm{id}_\mathbb{R}$ heißt (S2) **symmetrisch** und (S3&4) **bilinear**.

Hermitesche Formen und Skalarprodukte

Das sind die grundlegenden Eigenschaften jedes Skalarprodukts!
Wir erheben genau diese Eigenschaften nun zur allgemeinen Definition.
Das ist ein mutiger Schritt der Abstraktion und wird sich bewähren:
Die gesamte Theorie bauen wir auf diesen wenigen Axiomen auf.

Definition S2A: Skalarprodukt über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_\mathbb{K}$

Ein **Skalarprodukt** auf einem $\mathbb{K}$–Vektorraum V ist eine positiv definite, hermitesche Sesquilinearform $\langle \text{-}|\text{-} \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, erfüllt also (S1,2,3).
Für $\|v\|^2 := \langle v \,|\, v \rangle$ gilt dann $\|v\|^2 \in \mathbb{R}$ dank (S2) und $\|v\|^2 \geq 0$ dank (S1).

Die zugehörige **Norm** ist dann $\|\text{-}\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0} : v \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v \,|\, v \rangle}$ und die zugehörige **Metrik** ist $d : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0} : (x, y) \mapsto d(x, y) = \|y - x\|$.

Für ein **Semiskalarprodukt** oder „semidefinites Skalarprodukt" fordern wir nur (S0,2,3). Dazu gehört die **Seminorm** $\|\text{-}\|$ und die **Semimetrik** d.

Für eine **hermitesche sesquilineare Form** fordern wir nur (S2,3).
Sie heißt **indefinit**, falls $\langle u \,|\, u \rangle > 0 > \langle v \,|\, v \rangle$ für geeignete $u, v \in V$ gilt.
Dann haben wir zwar nicht $\|v\|$, doch immerhin $\|v\|^2 = q(v) := \langle v \,|\, v \rangle \in \mathbb{R}$.

Algebraisches Beispiel: die Produktsumme

Beispiel S2B: die Produktsumme über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_\mathbb{K}$

(1) Auf $V = \mathbb{K}^{(I)}$ über $\mathbb{K}$ haben wir das Standardskalarprodukt (S1A)

$$\langle u \,|\, v \rangle_{\ell^2} := u^\dagger v = \textstyle\sum_{i \in I} \overline{u_i}\, v_i.$$

(2) Zu Konstanten $a \in \mathbb{K}^I$ erhalten wir die Sesquilinearform

$$\langle u \,|\, v \rangle_{\ell^2, a} := u^\dagger \,\mathrm{diag}(a)\, v = \textstyle\sum_{i \in I} \overline{u_i}\, a_i\, v_i.$$

Diese Sesquilinearform ist genau dann hermitesch, wenn $a_i \in \mathbb{R}$ gilt, und positiv semi/definit, wenn $a_i \geq 0$ bzw. $a_i > 0$ gilt für alle $i \in I$.

(3) Zu jeder Matrix $B \in \mathbb{K}^{I \times I}$ erhalten wir die Sesquilinearform

$$\langle u \,|\, v \rangle_{\ell^2, B} := u^\dagger B\, v = \textstyle\sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \overline{u_i}\, b_{ij}\, v_j.$$

Diese Form ist genau dann hermitesch, wenn die Matrix hermitesch ist.
Positive Semi/Definitheit erkennen wir dank Diagonalisierung S1R.

Algebraisches Beispiel: die Produktsumme

(1) Dieses Standardskalarprodukt haben wir eingangs erläutert (S1A) speziell für die Indexmenge $I = \{1, \ldots, n\}$. Allgemein darf I beliebig sein. Die Vektoren $u, v \in \mathbb{K}^{(I)}$ sind I–Tupel $u, v : I \to \mathbb{K}$ mit endlichem Träger, alle Summen sind somit endlich. Die Analysis erweitert dies zu Reihen.

Zu $A \in \mathbb{K}^{I \times J}$ ist $A^\dagger := \overline{A}^\intercal$ die **adjungierte Matrix**, also transkonjugiert.
Damit schreiben wir das Standardskalarprodukt abkürzend $\langle u \,|\, v \rangle = u^\dagger v$.

(2) Diese Form auf $V = \mathbb{K}^{(I)}$ ist sesquilinear. Wiederholung / Übung!
Sie ist hermitesch gdw $\overline{a_i} = a_i$ für alle $i \in I$ gilt, also $a_i \in \mathbb{R}$.
Sie ist ein Semiskalarprodukt gdw $a_i \geq 0$ für alle $i \in I$.
Sie ist ein Skalarprodukt gdw $a_i > 0$ für alle $i \in I$.

(3) Dies ist eine Sesquilinearform. Sie ist hermitesch gdw $B^\dagger = B$ gilt.
Eine solche Matrix nennen wir **hermitesch** oder **selbstadjungiert**.

Positivität ist eine nicht-triviale, wichtige Frage. Im endlichen Falle $I = \{1, \ldots, n\}$ können wir die Matrix $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ diagonalisieren dank S1R. Wir führen das Problem so auf das vorige Beispiel (2) zurück und können daran Semi/Definitheit ablesen, kurz $\beta \succeq 0$ / $B \succeq 0$ bzw. $\beta \succ 0$ / $B \succ 0$.

Algebraisches Beispiel: die Produktsumme

Aufgabe: Über $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ betrachten wir

$$\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (u, v) \mapsto u^\top A\, v \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ist β bilinear? symmetrisch? positiv definit / semidefinit / indefinit?

Lösung: Bilinearität ist offensichtlich dank $\beta(u, v) = u^\top A\, v$.
Symmetrie ist offensichtlich dank $A^\top = A$. Gilt In/Definitheit?
Das wird offensichtlich durch Diagonalisierung, siehe Seite S175:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \simeq S^\dagger A S = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Unsere symmetrische Form β ist demnach indefinit:
Für den Vektor $u = Se_1$ gilt $\beta(u, u) = u^\top A\, u = 4 > 0$.
Für den Vektor $v = Se_3$ gilt $\beta(v, v) = v^\top A\, v = -\frac{3}{2} < 0$.

Algebraisches Beispiel: die Produktsumme

Aufgabe: Über $(\mathbb{C}, \mathrm{conj}_{\mathbb{C}})$ betrachten wir

$$\beta : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} : (u, v) \mapsto u^\dagger A\, v \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ist β sesquilinear? hermitesch? positiv definit / semidefinit / indefinit?

Lösung: Sesquilinearität ist offensichtlich dank $\beta(u, v) = u^\dagger A\, v$.
Hermitizität ist offensichtlich dank $A^\dagger = A$. Gilt In/Definitheit?
Das wird offensichtlich durch Diagonalisierung, siehe S174:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \simeq S^\dagger A S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Unsere hermitesche Form β ist demnach indefinit:
Für den Vektor $u = Se_1$ gilt $\beta(u, u) = u^\dagger A\, u = 2 > 0$.
Für den Vektor $v = Se_2$ gilt $\beta(v, v) = v^\dagger A\, v = -\frac{1}{2} < 0$.

☺ Positive Definitheit ist zunächst eine schwierige Frage.
Warum geht hier alles so leicht? Dank wirksamer Werkzeuge!

Algebraisches Beispiel: die Produktsumme

☺ Wir haben die nötigen Werkzeuge dank gründlicher Vorbereitung.
Beim Thema Skalarprodukte möchte ich mich eigentlich gleich ins Vergnügen stürzen und sofort mit interessanten Beispielen beginnen.
Doch dann könnten wir die Beispiele noch nicht recht verstehen…

Daher erweist es sich als klug, zunächst den allgemeinen Rahmen abzustecken, das nötige Vokabular und erste Werkzeuge zu erklären, zumindest bis zur Diagonalisierung, denn damit können wir fortan praktisch rechnen und die Frage der In/Definitheit direkt beantworten.

Übung: Jede hermitesche Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$ erfüllt $v^\dagger A\, v \in \mathbb{R}$ für alle $v \in \mathbb{K}^n$. (Warum?) Wir nennen A **positiv definit**, geschrieben $A \succ 0$, falls zudem $v^\dagger A\, v > 0$ gilt für alle $v \in \mathbb{K}^n \smallsetminus \{0\}$. Basiswechsel $S \in \mathrm{GL}_n\, \mathbb{K}$ ergibt $B = S^\dagger A S$. Zeigen Sie $A \succ 0$ gdw $B \succ 0$. Für $B = \mathrm{diag}(b_1, \dots, b_n)$ gilt $B \succ 0$ gdw $b_1, \dots, b_n > 0$.

Das Standardskalarprodukt für Matrizen

Beispiel S2c: Frobenius–Skalarprodukt über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$

Auf dem Matrixraum $V = \mathbb{K}^{m \times n}$ haben wir das Standardskalarprodukt

$$\langle A \mid B \rangle_F := \mathrm{tr}(A^\dagger B) = \textstyle\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \overline{a_{ji}} b_{ij}.$$

Wir nennen dies das **Frobenius–Skalarprodukt**. Die davon abgeleitete Matrixnorm ist die **Frobenius–Norm** $|-|_F = \|-\|_F : \mathbb{K}^{m \times n} \to \mathbb{R}$:

$$\|A\|_F := \mathrm{tr}(A^\dagger B)^{1/2} = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

Das entspricht dem euklidischen Skalarprodukt und seiner Norm.

Aufgabe: Beweisen Sie, dass dies tatsächlich ein Skalarprodukt ist.

Beweis: Die Spur $\mathrm{tr} : \mathbb{K}^{n \times n} \to \mathbb{K} : M \mapsto \sum_{i=1}^n M_{ii}$ ist $\mathbb{K}$–linear.
Wir setzen das Matrixprodukt $M = A^\dagger B$ ein, also $m_{ik} = \sum_{j=1}^m \overline{a_{ij}} b_{jk}$.
So finden wir die obige explizite Formel $\mathrm{tr}(A^\dagger B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \overline{a_{ji}} b_{ij}$.
Auf $\mathbb{K}^{mn}$ ist dies das bereits vertraute Standardskalarprodukt S1A. QED

Analytisches Beispiel: das Produktintegral

Beispiel S2D: das Produktintegral über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$

(1) Auf $V = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ über $\mathbb{K}$ haben wir das Standardskalarprodukt

$$\boxed{\langle f \,|\, g \rangle_{L^2} := \tfrac{1}{b-a} \int_{t=a}^{b} \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t.}$$

(2) Zum Gewicht $w \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ erhalten wir die Sesquilinearform

$$\boxed{\langle f \,|\, g \rangle_{L^2,w} := \int_{t=a}^{b} \overline{f(t)}\, w(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t.}$$

Diese ist genau dann hermitesch, wenn $w(t) \in \mathbb{R}$ gilt, und positiv semi/definit, wenn $w(t) \geq 0$ bzw. $w(t) > 0$ gilt für (fast) alle $t \in [a,b]$.

(3) Zum Integralkern $k \in \mathscr{C}([a,b]^2,\mathbb{K})$ erhalten wir die Sesquilinearform

$$\boxed{\langle f \,|\, g \rangle_{L^2,k} := \int_{s=a}^{b} \int_{t=a}^{b} \overline{f(s)}\, k(s,t)\, g(t)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s.}$$

Diese ist genau dann hermitesch, wenn der Kern hermitesch ist, $k^\dagger = k$. Die Frage der Semi/Definitheit klärt der folgende Satz von Mercer.

Analytisches Beispiel: das Produktintegral

Hierzu sei $a < b$ in $\mathbb{R}$ und $V = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ der $\mathbb{K}$–Vektorraum aller stetigen Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{K}$ auf dem reellen Intervall $[a,b]$.

Beweis: (1) Die Eigenschaften (S2,3) sind klar, denn das Integral ist linear. Auch Semidefinitheit (S0) ist klar, denn es gilt $\langle f \,|\, f \rangle = \int_{t=a}^{b} |f(t)|^2\, \mathrm{d}t \geq 0$. Für positive Definitheit (S1) müssen wir jedoch genauer hinschauen!

Sei $f \neq 0$, also $f(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in [a,b]$, und somit $\delta := |f(t_0)|^2 > 0$. Wir können $t_0 \in \,]a,b[$ annehmen, die Randfälle $t_0 \in \{a,b\}$ sind analog. Dank der Stetigkeit von f existiert ein hinreichend kleines $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $|f(t)|^2 \geq \delta/2$ für alle $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subseteq [a,b]$ gilt. Daraus folgt $\langle f \,|\, f \rangle = \int_{t=a}^{b} |f(t)|^2\, \mathrm{d}t \geq \varepsilon\delta > 0$. QED

⚠ Stetigkeit ist tatsächlich nötig für Definitheit. Als Gegenbeispiel betrachten wir $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ mit $f(x_0) = 1$ an einer Stelle $x_0 \in [a,b]$, überall sonst $f(x) = 0$ für $x \neq x_0$. Damit gilt $f \neq 0$, aber $\langle f \,|\, f \rangle = 0$.

☺ Die Vervollständigung $L^2([a,b],\mathbb{K})$ dieses Raumes untersuchen Sie in der Analysis und nutzen dies insbesondere für die Fourier–Theorie.

Analytisches Beispiel: das Produktintegral

? Wann ist obige hermitesche Form $\langle \text{-} | \text{-} \rangle_{L^2,k}$ positiv semi/definit? Diese Frage klärt der folgende, erfreulich elegante Satz von Mercer.

Satz S2D: James Mercer 1909

Genau dann ist die oben definierte hermitesche Form $\langle \text{-} | \text{-} \rangle_{L^2,k}$ auf $V = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ positiv semi/definit, wenn alle aus dem Integralkern $k \in \mathscr{C}([a,b]^2,\mathbb{K})$ gebildeten Matrizen $K(t_i,t_j)_{i,j\in I} \in \mathbb{K}^{I\times I}$ dies sind.

(0) Positiv semidefinit bedeutet, für alle $t \in [a,b]^n$ und $u \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i\, K(t_i,t_j)\, u_j \geq 0.$$

(1) Positiv definit bedeutet zudem, für alle $u \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ gilt

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i\, K(t_i,t_j)\, u_j > 0.$$

☺ Für uns sind diese Integrale zunächst schöne Beispiele als Ergänzung zu Summen. Sie werden gerne angewendet in der Funktionalanalysis und in der Physik, jüngst auch im Maschinellen Lernen als *kernel methods*.

Analytisches Beispiel: das Produktintegral

Wir erkennen ein wiederkehrendes Motiv: Wir können einer Form β meist leicht ansehen, ob sie sesquilinear und hermitesch ist, etwa für

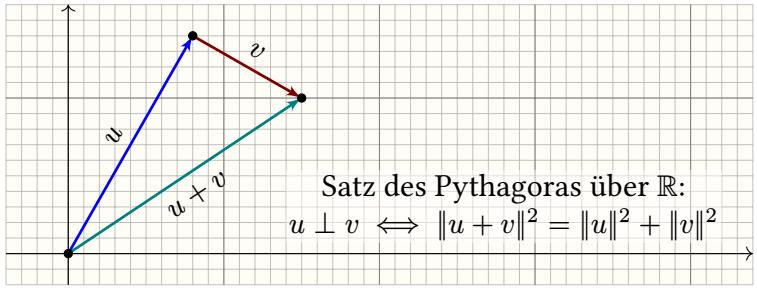
$$\langle u \,|\, v \rangle_{\ell^2,B} := u^\dagger B\, v = \textstyle\sum_{i\in I} \sum_{j\in I} \overline{u_i}\, b_{ij}\, v_j,$$
$$\langle f \,|\, g \rangle_{L^2,k} := \int_{s=a}^{b} \int_{t=a}^{b} \overline{f(s)}\, k(s,t)\, g(t)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s.$$

Positive Definitheit ist jedoch weit schwieriger, daher sind wir für wirksame Werkzeuge immer dankbar. Sie ist die zentrale Grundlage für alle tieferliegenden Sätze und Anwendungen zu Skalarprodukten.

Einige der folgenden Sätze zu Skalarprodukten auf V kommen auch mit etwas schwächeren Voraussetzungen aus, etwa positive Semidefinitheit auf V und Definitheit auf einem endlich-dimensionalen Teilraum $U \leq V$. Ich versuche dies anwendungsfreundlich zu formulieren, sowohl klar und einfach, als auch angemessen allgemein. Wir gehen nachhaltig vor und nehmen jeweils nur so viele Forderungen auf, wie wir wirklich brauchen.

Das zahlt sich in Anwendungen aus, schon bei Fourier–Polynomen §S6.1.

Der Satz des Pythagoras



☺ In Worten: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Normquadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Normquadrate der Katheten.

☺ Speziell über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt zu dieser Implikation auch die Umkehrung: Aus der Gleichung $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ folgt die Orthogonalität $u \perp v$. So können Sie numerisch die Rechtwinkligkeit eines Dreiecks prüfen!

Beispiel: Das **Maurerdreieck** mit Seitenlängen $3, 4, 5$ ist rechtwinklig, denn es gilt $3^2 + 4^2 = 5^2$. Wenn Sie also ein Seil in $12 = 3 + 4 + 5$ gleich lange Strecken unterteilen, entsteht daraus ein rechtwinkliges Dreieck.

Der Satz des Pythagoras

Satz S2E: Pythagoras mit Umkehrung

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit hermitescher Form $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$. Allgemein steht $\|v\|^2$ für $q(v) = \langle v \,|\, v\rangle \in \mathbb{R}$, egal ob positiv oder nicht.

(0) Für je zwei Vektoren $u, v \in V$ gilt die binomische Formel:

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &\overset{\text{Def}}{=} \langle u+v \,|\, u+v\rangle \\
&\overset{(S4)}{=} \langle u \,|\, u+v\rangle + \langle v \,|\, u+v\rangle \\
&\overset{(S3)}{=} \langle u \,|\, u\rangle + \langle v \,|\, u\rangle + \langle u \,|\, v\rangle + \langle v \,|\, v\rangle \\
&\overset{(S2)}{=} \|u\|^2 + 2\,\mathrm{re}\langle u \,|\, v\rangle + \|v\|^2
\end{aligned}$$

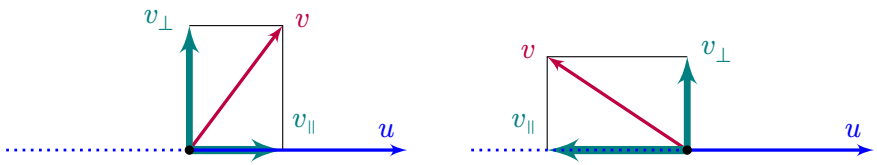
Zur Erinnerung: $\mathrm{re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \in \mathbb{R}$ ist der Realteil von $z \in \mathbb{K}$.

(1) Stehen u und v senkrecht zueinander, so entfällt der gemischte Term:

$$\boxed{u \perp v \quad \Longrightarrow \quad \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2}$$

(2) Speziell über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt hierzu auch die Umkehrung „$\Longleftarrow$“.

Orthogonale Zerlegung



Satz S2F: orthogonale Zerlegung von v bezüglich u

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit hermitescher Form $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$.

Sei $u \in V$ mit $\langle u \,|\, u\rangle \neq 0$. Jeder Vektor $v \in V$ hat genau eine Zerlegung $(v_\parallel, v_\perp)$ als Summe $v = v_\parallel + v_\perp$ mit $v_\parallel \in \langle u\rangle_{\mathbb{K}}$ und $v_\perp \in \langle u\rangle_{\mathbb{K}}^\perp$. Explizit gilt:

$$\boxed{v_\perp = v - v_\parallel \quad \text{und} \quad v_\parallel = u\lambda \quad \text{mit} \quad \lambda = \langle u \,|\, v\rangle / \langle u \,|\, u\rangle.}$$

Beweis: Wir finden $0 \overset{!}{=} \langle u \,|\, v_\perp\rangle \overset{\text{Def}}{=} \langle u \,|\, v - u\lambda\rangle \overset{(S3)}{=} \langle u \,|\, v\rangle - \langle u \,|\, u\rangle\lambda$. QED

In Worten: Wir setzen $v_\parallel = u\lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$ an. Für $v_\perp = v - v_\parallel$ verlangen wir $u \perp v_\perp$, also $\langle u \,|\, v_\perp\rangle = 0$. Die einzige Lösung ist $\lambda = \langle u \,|\, v\rangle / \langle u \,|\, u\rangle$.

☺ Das ist der eindimensionale Spezialfall der Orthogonalprojektion S1Q.

Orthogonale Zerlegung von v bezüglich u

L „Diese algebraische Formel löst ein geometrisches Problem: Wir fällen das Lot vom Punkt v senkrecht auf die Gerade $u\,\mathbb{K}$.“

P „Richtig, und das nicht nur in der Ebene $\mathbb{R}^2$ oder im Raum $\mathbb{R}^3$, sondern ganz allgemein im $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ (und wer's mag, sogar $\mathbb{H}^n$).“

I „Alles wunderbar: Die Lösung ist eindeutig, die Formel explizit, die Rechnung leicht. Zudem gelingt dies für jedes Skalarprodukt.“

M „Es gilt für jede hermitesche Form, wir benötigen nur $\langle u \,|\, u\rangle \neq 0$. Wir werden diesen universellen Trick überall anwenden können.“

Notation: Wir behandeln die drei Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ möglichst einheitlich. Dabei sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ kommutativ, $\mathbb{H}$ nicht. Daher operieren die Skalare auf den Vektoren immer von rechts. Das erfordert zwar etwas Disziplin, sortiert aber alle Formeln in ihre richtige Form, natürlich und ästhetisch.

Der Nenner $\|u\|^2 = \langle u \,|\, u\rangle$ ist reell, liegt also immer im Zentrum von $\mathbb{K}$. Daher spielt für den Faktor $\langle u \,|\, u\rangle^{-1}$ links oder rechts hier keine Rolle und wir können den Term $\langle u \,|\, u\rangle \in \mathbb{R}_{>0}$ bequem als Nenner schreiben. Bei einem Skalarprodukt gilt $\langle u \,|\, u\rangle \neq 0 \Leftrightarrow \langle u \,|\, u\rangle > 0 \Leftrightarrow u \neq 0$.

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung

Satz S2G: Cauchy–Schwarz–Ungleichung (CSU)

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \text{-} | \text{-} \rangle$.

(1) Für alle Vektoren $u, v \in V$ gilt die **Cauchy–Schwarz–Ungleichung**:

$$\boxed{|\langle u \,|\, v\rangle|^2 \le \langle u \,|\, u\rangle \langle v \,|\, v\rangle \quad \text{kurz} \quad |\langle u \,|\, v\rangle| \le \|u\| \cdot \|v\|}$$

(2) Gleichheit gilt genau dann, wenn u, v über $\mathbb{K}$ linear abhängig sind.

(3) Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung (1) gilt allgemein ebenso für jedes Semiskalarprodukt, dann allerdings ohne die genannte Umkehrung (2).

Geometrischer Beweis: (1) Für $u = 0$ ist alles klar. Fortan sei $u \neq 0$. Dank (S1) gilt $\langle u \,|\, u\rangle > 0$. Wir zerlegen $v = v_\parallel + v_\perp$ gemäß Satz S2F:

$$\|v\|^2 \overset{\text{S2E}}{=} \|v_\parallel\|^2 + \|v_\perp\|^2 \overset{\text{(S0)}}{\ge} \|v_\parallel\|^2 \overset{\text{S2F}}{=} |\langle u \,|\, v\rangle|^2 / \|u\|^2$$

Daraus folgt die erste Ungleichung. Die zweite folgt dank Monotonie der Wurzelfunktion $\sqrt{} : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$. (2) Gleichheit entspricht Parallelität.

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung

(2) Ausführlich: Aus $v \in u\,\mathbb{K}$ folgt die Projektion $v_\parallel = v$ mit $v_\perp = 0$. Umgekehrt, aus Gleichheit folgt $v_\perp = 0$, also $v = v_\parallel$, somit $v \in u\,\mathbb{K}$.

(3) Für $\|u\| > 0$ gelingt die Rechnung wie zuvor, ebenso für $\|v\| > 0$. Wir untersuchen den kritischen Fall $\|u\| = \|v\| = 0$. Für alle $\mu \in \mathbb{K}$ gilt

$$0 \overset{\text{(S0)}}{\le} \|u - v\mu\|^2 \overset{\text{S2E}}{=} \|u\|^2 - 2\,\mathrm{re}(\langle u \,|\, v\rangle \mu) + \|v\|^2 |\mu|^2.$$

Speziell für $\mu = \langle v \,|\, u\rangle$ folgt $|\langle u \,|\, v\rangle|^2 \le 0$, also $\langle u \,|\, v\rangle = 0$. QED

☺ Wir legen gemäß Definition S2A nur die drei Eigenschaften (S1,2,3) zugrunde und erhalten daraus wichtige geometrische Anwendungen: Pythagoras S2E, orthogonale Zerlegung S2F und Cauchy–Schwarz S2G!

☺ All diese Eigenschaften gelten nicht nur für das euklidische, sondern für jedes beliebige Skalarprodukt… Ihnen werden noch viele begegnen. Abstraktion kostet anfänglich Mühe, doch dann trägt sie reiche Früchte!

Prove once, apply everywhere!

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung

L „Dieser Beweis ist trickreich elegant und erfreulich allgemein. Wie kann ich das Argument für den Schulunterricht reduzieren?“

In der Schule rechnet man ganz unbedarft über $\mathbb{R}$, derzeit selten über $\mathbb{C}$, und ganz sicher nicht über $\mathbb{H}$. Konzentrieren wir uns also gleich auf das euklidische Skalarprodukt $\langle u \,|\, v\rangle = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$ auf dem Raum $\mathbb{R}^n$.

Der folgende genial-einfache Argument benötigt nur quadratische Gleichungen über $\mathbb{R}$ und die allseits beliebte Mitternachtsformel:

Reeller Beweis der CSU: Vorgelegt seien $u, v \in \mathbb{R}^n$. Für $u = 0$ ist alles klar. Sei also $u \neq 0$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$0 \overset{\text{(S1)}}{\le} \langle ut + v \,|\, ut + v\rangle \overset{\text{(S2,3)}}{=} \underbrace{\langle u \,|\, u\rangle}_{a \in \mathbb{R}_{\ge 0}} t^2 + 2 \underbrace{\langle u \,|\, v\rangle}_{b \in \mathbb{R}} t + \underbrace{\langle v \,|\, v\rangle}_{c \in \mathbb{R}_{\ge 0}}$$

(1) Im Falle $a > 0$ ist die Diskriminante nicht positiv: $b^2 - ac \le 0$. Das ist genau die ersehnte Ungleichung: $|\langle u \,|\, v\rangle|^2 \le \langle u \,|\, u\rangle \langle v \,|\, v\rangle$

(2) Eine Nullstelle t existiert genau dann, wenn $b^2 - ac = 0$. Aus positiver Definitheit (S1) folgt dann $0 = ut + v$. QED

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung

M „Der vorige Trick funktioniert leider nur über $\mathbb{R}$. Wie können wir dieses schöne Argument einheitlich über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ formulieren?“

Das gelingt mit einem hilfreichen Kniff, den ich hier gerne ausführe.

Algebraischer Beweis der CSU: Vorgelegt seien $u, v \in V$. Wir setzen $z = ut + v\mu$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{K}$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{\text{(S0)}}{\le} \langle z \,|\, z\rangle \overset{\text{Def}}{=} \langle ut + v\mu \,|\, ut - v\mu\rangle \\ &\overset{\text{(S3,4)}}{=} \langle u \,|\, u\rangle t^2 + 2\,\mathrm{re}(\langle u \,|\, v\rangle \mu) t + \langle v \,|\, v\rangle |\mu|^2 \end{aligned}$$

Wir wählen $\mu \in \mathbb{K}$ nun so, dass $|\mu| = 1$ und $\langle u \,|\, v\rangle \mu = |\langle u \,|\, v\rangle|$ gilt:

$$0 \le \underbrace{\langle u \,|\, u\rangle}_{a \ge 0} t^2 + 2 \underbrace{|\langle u \,|\, v\rangle|}_{b \ge 0} t + \underbrace{\langle v \,|\, v\rangle}_{c \ge 0}$$

(1) Im Falle $a > 0$ ist die Diskriminante nicht positiv: $b^2 - ac \le 0$.
(3) Im Sonderfall $a = 0$ folgt $b = 0$, und somit gilt $b^2 = 0 = ac$.
(2) Eine Nullstelle t existiert genau dann, wenn $b^2 - ac = 0$.
Aus positiver Definitheit (S1) folgt dann $0 = ut + v\mu$. QED

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung

Beispiele: (1) Für alle reellen Zahlen $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n|^2 \;\le\; (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$$

(2) Für alle stetigen Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|^2 \;\le\; \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x$$

Der französische Mathematiker Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) bewies 1821 die Summenungleichung (1). Die Integralungleichung (2) veröffentlichte 1859 der russische Mathematiker Viktor Bunyakovsky (1804–1889) und erneut 1884, unabhängig 25 Jahre später, der deutsche Mathematiker Hermann Armandus Schwarz (1843–1921). Daher heißt (1) auch **Cauchy–Ungleichung** und (2) **Bunyakovsky–Ungleichung** oder **Schwarz–Ungleichung**. Die gemeinsame Verallgemeinerung S2G heißt historisch korrekt **Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz–Ungleichung** (CBS). Auch wenn sie historisch etwas ungerecht sein mag, folge ich dennoch der traditionellen Benennung **Cauchy–Schwarz–Ungleichung** (CSU).

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung

In unserem ursprünglichen Beispiel des euklidischen Skalarprodukts bedeutet die Cauchy–Schwarz–Ungleichung ganz konkret und explizit:

$$(u_1^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + \cdots + v_n^2) \ge (u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n)^2$$

für alle reellen Zahlen $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$.

Übung: Bitte versuchen Sie, diese Ungleichung möglichst „direkt“ zu zeigen, ohne „Umweg“ über die allgemeine Theorie der Skalarprodukte.

Vermutlich werden Sie spüren, dass diese ganz konkret und harmlos erscheinende Ungleichung alles andere als leicht zu beweisen ist.

Nach eigenen Versuchen werden Sie feststellen, dass der oben erklärte allgemeine Begriff des Skalarprodukts und der so entwickelte Beweis gar kein Umweg ist, sondern eine Abkürzung! Ich betone daher erneut:

Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle.

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung ist eine der zentralen und universell nützlichen Ungleichungen in der Mathematik und ebenso für die Physik. Sie findet Anwendungen in der Geometrie, der Analysis, der Stochastik und der Quantenmechanik (etwa als Heisenbergs Unschärferelation).

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) veröffentlichte seine berühmte Ungleichung 1821 und in seinem Lehrbuch *Cours d'Analyse Algébrique*, dem wohl ersten, aus heutiger Sicht strengen Aufbau der Analysis.

Victor Yacovlevich Bunyakovsky (1804–1889) studierte in Paris bei Cauchy und übertrug dessen Ungleichung von Summen auf Integrale, veröffentlicht 1859 in St. Petersburg, allerdings noch ohne Beweis.

Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) arbeitete 1885 in Göttingen an Flächen minimaler Krümmung und benötigte dazu auch Cauchys Ungleichung für Integrale. Ihm gelang die allgemeine Formulierung, und der obige reelle Beweis geht im Wesentlichen auf Schwarz zurück.

☺ Eine genial-einfache Abstraktion liefert alle nötigen Informationen.

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung

Im deutschsprachigen Raum ist die Bezeichnung *Cauchy–Schwarz–Ungleichung* üblich. In englisch-sprachigen Texten findet man häufig nur *Schwarz's inequality*, in französisch-sprachigen entsprechend *l'inegalité de Schwarz*, die russische Tradition hingegen bevorzugt *Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz Ungleichung*. Alle drei Sichtweisen haben ihre Gründe; historische Gerechtigkeit ist meist schwierig.

Die gesamte Analysis beruht zu weiten Teilen auf Ungleichungen, und die Cauchy–Schwarz–Ungleichung ist hier ein erstes wichtiges Ergebnis sowie Vorbild für zahlreiche nachfolgende Ungleichungen. Wenn Sie mal Lust zum Schmökern haben, dann empfehle ich folgende Lektüre:

📖 J.M. Steele: *The Cauchy–Schwarz master class. An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities.* Cambridge University Press 2004.

Übung: Sei $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Skalarprodukt und $u, v \in V$.
(1) Orthogonalität $u \perp v$ ist äquivalent zu $\|u + tv\| \ge \|u\|$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
(2) Machen Sie eine Skizze und interpretieren Sie dies geometrisch.

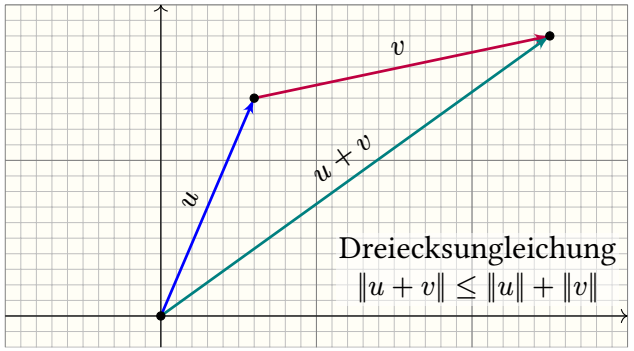
Was sind die wesentlichen Eigenschaften der Norm?

Die zum Skalarprodukt zugehörige Norm misst die **Länge von Vektoren**:

$$\|\text{-}\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0} : v \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v \,|\, v \rangle}$$

Wir nutzen die Wurzelfunktion $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto \sqrt{x}$. Sie erfüllt $\sqrt{0} = 0$, ist streng monoton, $x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$, und multiplikativ, $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.

? Was sind demnach die wesentlichen Eigenschaften der Norm?



Was sind die wesentlichen Eigenschaften der Norm?

Satz S2H: Eigenschaften der Norm

Zu jedem Skalarprodukt $\langle \text{-}|\text{-} \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ gehört seine Norm:

$$\|\text{-}\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0} : v \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v \,|\, v \rangle}$$

Sie erfreut sich folgender Eigenschaften für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$:

N0:	positive Semidefinitheit,	$\|u\| \geq 0 = \|0\|$
N1:	positive Definitheit,	$\|u\| > 0$ für $u \neq 0$
N2:	absolute Homogenität,	$\|u\lambda\| = \|u\| \cdot \|\lambda\|$
N3:	Dreiecksungleichung,	$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Beweis: Aus (S1,2,3) folgt (N1,2). Die Ungleichung (N3) folgt dank CSU:

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &\overset{\text{Def}}{=} \langle u+v \,|\, u+v \rangle \overset{\text{Bil}}{=} \langle u \,|\, u \rangle + \langle u \,|\, v \rangle + \langle v \,|\, u \rangle + \langle v \,|\, v \rangle \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \|u\|^2 + 2\,\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 \overset{\text{Bin}}{=} (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

Dank Monotonie von $x \mapsto \sqrt{x}$ folgt daraus $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$. QED

Was sind die wesentlichen Eigenschaften der Norm?

Wir erheben die wesentlichen Eigenschaften zur allgemeinen Definition:

Definition S2H: Skalarprodukt und Norm

(1) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Ein **Skalarprodukt** auf V oder **inneres Produkt** ist eine Abbildung $\langle \text{-}|\text{-} \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, die (S1–3) erfüllt.

Das Paar $(V, \langle \text{-}|\text{-} \rangle)$ heißt dann **$\mathbb{K}$–Vektorraum mit Skalarprodukt** oder **unitärer Raum** (über $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$) oder **euklidischer Raum** (speziell über $\mathbb{R}$).

In der Analysis wird $(V, \langle \text{-}|\text{-} \rangle)$ auch **Prä–Hilbert–Raum** über $\mathbb{K}$ genannt und bei metrischer Vollständigkeit schließlich **Hilbert–Raum** über $\mathbb{K}$.

(2) Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\|\text{-}\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die (N1–3) erfüllt.

Das Paar $(V, \|\text{-}\|)$ heißt dann **normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum**, auch kurz **normierter Raum** über $\mathbb{K}$, in der Analysis **Prä–Banach–Raum** und bei Vollständigkeit schließlich **Banach–Raum** über $\mathbb{K}$.

Für eine **Seminorm** $\|\text{-}\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ fordern wir nur (N2,3).
Für eine **Pseudonorm** erlauben wir $\|\text{-}\| : V \to [0, \infty]$.

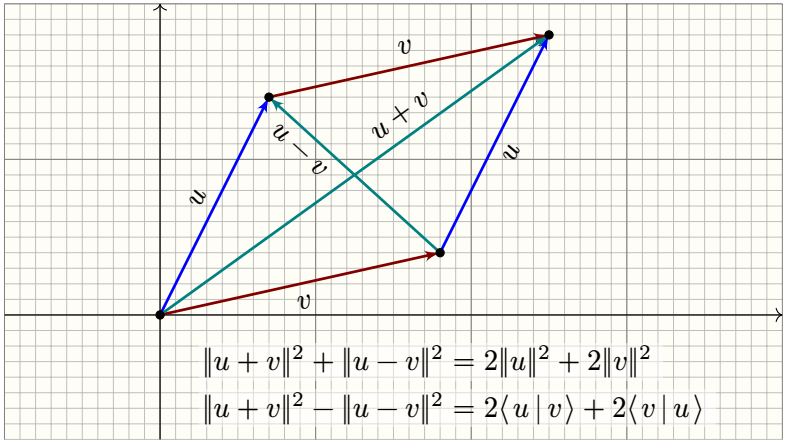
Was sind die wesentlichen Eigenschaften der Norm?

Beispiel: Jedes Skalarprodukt definiert eine Norm $\|v\| = \sqrt{\langle v \,|\, v \rangle}$. Dies folgt aus der Cauchy–Schwarz–Ungleichung, siehe Satz S2H. Es gibt auch Normen, die nicht zu Skalarprodukten gehören.

Bemerkung: Anders als eine Norm kann eine Seminorm einem Vektor $v \neq 0$ die Länge $\|v\| = 0$ beimessen. Ihr Kern $V_0 = \{ v \in V \,|\, \|v\| = 0 \} \leq V$ ist dann ein Untervektorraum, dank der Dreiecksungleichung. Auf dem Quotientenvektorraum V/V_0 induziert die ursprüngliche Seminorm dann eine Norm $\|\text{-}\| : V/V_0 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, das heißt (N1) ist nun erfüllt. Seminormen treten insbesondere in der Integrationstheorie ganz natürlich auf.

Bemerkung: In Anwendungen tritt auch der Wert $\|v\| = \infty$ natürlich auf. Auch wenn man ihn schließlich vermeiden will, so ist es meist bequem, ihn zunächst zuzulassen. Zur Abgrenzung nennen wir dies **Pseudonorm**. Nimmt die Norm nur reelle Werte an, so sprechen wir zur Betonung von einer **endlichen Norm**. Dank der Dreiecksungleichung ist die Menge $V_{<\infty} = \{ v \in V \,|\, \|v\| < \infty \} \leq V$ ein Untervektorraum. Hierauf ist die Einschränkung $\|\text{–}\| : V_{<\infty} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine endliche Norm.

Parallelogramm und Polarisierung



☺ In Worten: In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der vier Seiten gleich der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen.

☺ Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt für Orthogonalität $u \perp v \;\Leftrightarrow\; \|u+v\| = \|u-v\|$.
Jede:r gute Handwerker:in kennt diesen Test zur Rechtwinkligkeit.

Parallelogramm und Polarisierung

Satz S2I: Parallelogramm und Polarisierung

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit hermitescher Form $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$.

(0) Für je zwei Vektoren $u, v \in V$ gilt die binomische Formel S2E:

$$\boxed{\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\,\mathrm{re}\langle u \,|\, v\rangle + \|v\|^2}$$

(1) Daraus folgt die Parallelogrammgleichung:

$$\boxed{\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2}$$

(2) Allein aus dem Normquadrat $\|\text{-}\|^2$ rekonstruieren wir die Form $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$:

$$\boxed{\mathrm{re}(\langle u \,|\, v\rangle) = \left[\, \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 \,\right]/4}$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\mathbb{R}$–Basis $B = \{1\}, \{1, \mathrm{i}\}, \{1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}\}$ gilt damit:

$$\boxed{\langle u \,|\, v\rangle = \textstyle\sum_{\varepsilon \in B} \mathrm{re}(\langle u \,|\, v/\varepsilon\rangle)\, \varepsilon}$$

Parallelogramm und Polarisierung

Beweis: (0) Die binomische Formel haben wir in S2E nachgerechnet.
(1) Daraus folgt sofort $\|u+v\| + \|u-v\| = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.
(2) Ebenso folgt sofort $\|u+v\| - \|u-v\| = 4\,\mathrm{re}\langle u \,|\, v\rangle$.

Wir erhalten die Polarisierungsformeln für den Realteil:

$$\begin{aligned}
\mathrm{re}\langle u \,|\, v\rangle &= \left[\, \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 \,\right]/4 \\
&= \left[\, \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 \,\right]/2 \\
&= \left[\, \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2 \,\right]/2
\end{aligned}$$

Allgemein gilt $\langle u \,|\, v\rangle = \sum_{\varepsilon \in B} c_\varepsilon \varepsilon$ mit reellen Koeffizienten $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$.
Diese rekonstruieren wir dank $c_\varepsilon = \mathrm{re}(\langle u \,|\, v\rangle/\varepsilon) = \mathrm{re}(\langle u \,|\, v/\varepsilon\rangle)$, also

$$\langle u \,|\, v\rangle = \textstyle\sum_{\varepsilon \in B} \mathrm{re}(\langle u \,|\, v/\varepsilon\rangle)\, \varepsilon = \sum_{\varepsilon \in B} \mathrm{re}(\langle u \,|\, v\varepsilon\rangle)/\varepsilon.$$

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist die Polarisierungsformel besonders einfach. Über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ polarisieren wir zweimal, jeweils einmal für Realteil und Imaginärteil, über $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ entsprechend viermal, je einmal für $\varepsilon = 1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$. QED

Welche Normen kommen von Skalarprodukten?

Als mathematische Grundlage der Quantenmechanik spielen $\mathbb{C}$–lineare Räume mit Skalarprodukt eine zentrale Rolle. In diesem Zusammenhang fanden Pascual Jordan und John von Neumann folgendes Ergebnis:

Satz S2J: Jordan–von Neumann, 1935

Für jede Norm $\|\text{-}\| : V \to \mathbb{R}$ auf V über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sind äquivalent:

1. Die Norm $\|\text{-}\|$ erfüllt die Parallelogrammgleichung S2I.
2. Es existiert ein Skalarprodukt $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$ mit $\|v\|^2 = \langle v \,|\, v\rangle$ für alle $v \in V$.

In diesem Fall ist das Skalarprodukt eindeutig dank Polarisierung S2I.

Quantitative Formulierung: Wir definieren $\delta : V^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}$ durch

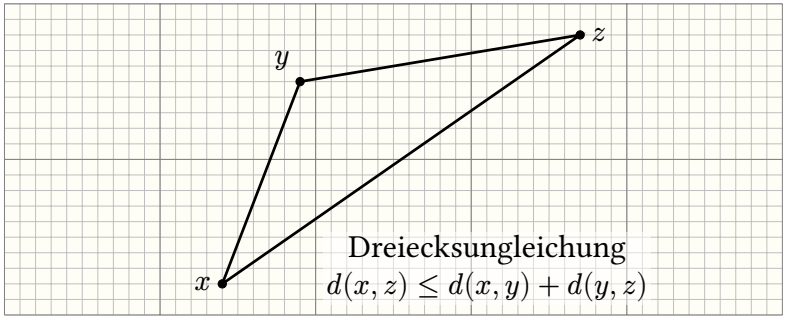
$$\delta(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{\|x\| + \|y\|}.$$

Für $a := \inf \delta$ und $b := \sup \delta$ gilt dann $1/2 \le a \le 1 \le b \le 2$ sowie $ab = 1$.
Genau dann kommt die Norm von einem Skalarprodukt, wenn $a = b = 1$.

Was sind die wesentlichen Eigenschaften der Metrik?

Die zur Norm zugehörige Metrik misst den **Abstand von Punkten**:

$$d : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0} : (x, y) \mapsto d(x, y) = \|y - x\|$$



Die Dreiecksungleichung besagt anschaulich: Der Weg von x nach z wird nicht kürzer, wenn wir einen Umweg über y gehen. Das ist eine plausible und nützliche Eigenschaft, die wir von jedem Abstandsbegriff erwarten. Zunächst ist jedoch nicht offensichtlich, warum etwa die euklidische Metrik tatsächlich diese Eigenschaft hat. Wir können es nun beweisen!

Was sind die wesentlichen Eigenschaften der Metrik?

Satz S2K: Eigenschaften der Metrik

Zu jeder Norm $\|\text{-}\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gehört ihre Metrik:

$$d : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0} : (x, y) \mapsto d(x, y) = \|y - x\|$$

Sie erfreut sich folgender Eigenschaften für alle $x, y, z \in V$:

M0:	positive Semidefinitheit,	$d(x,y) \geq 0 = d(x,x)$
M1:	positive Definitheit,	$d(x,y) > 0$ für $x \neq y$
M2:	Symmetrie,	$d(x,y) = d(y,x)$
M3:	Dreiecksungleichung,	$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Beweis: Aus (N1,2,3) folgt (M1,2,3), hier ausführlich für (M3):

$$\begin{aligned} d(x,z) &\overset{\text{Def}}{=} \|z - x\| \overset{\text{Vek}}{=} \|z - y + y - x\| \\ &\overset{\text{(N3)}}{\leq} \|z - y\| + \|y - x\| \overset{\text{Def}}{=} d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

Das zeigt $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, wie behauptet. QED

Was sind die wesentlichen Eigenschaften der Metrik?

Wir erheben die wesentlichen Eigenschaften zur allgemeinen Definition:

Definition S2K: Metrik

Eine **Metrik** auf einer Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty]$, die (M1–3) erfüllt. Das Paar (X, d) heißt dann ein **metrischer Raum**.

Für eine **Halbmetrik** $d : X \times X \to [0, \infty]$ fordern wir nur (M2,3); sie darf also verschiedenen Punkten $x \neq y$ den Abstand $d(x, y) = 0$ beimessen.

Beispiel: Das wichtigste Beispiel ist der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ mit seinem euklidischen Skalarprodukt $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$ und daraus abgeleitet, wie oben gezeigt, seine euklidischen Norm $\|\text{-}\|$ und seine euklidische Metrik d.

Die Dreiecksungleichung ist zwar anschaulich plausibel, aber im ersten Anlauf nicht leicht zu beweisen. Versuchen Sie es! Durch die allgemeine Betrachtung S2A haben wir die Cauchy–Schwarz–Ungleichung S2G herausgearbeitet und daraus die Dreiecksungleichung abgeleitet.

Der scheinbare Umweg ist in Wahrheit eine Abkürzung!

Von Skalarprodukt zu Norm zu Metrik... und zurück?

Beispiel: Auf jeder Menge X haben wir die **diskrete Metrik**

$$d : X \times X \to \{0, 1\} \subset \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Kommt sie auf $X = \mathbb{K}^{(I)}$ von einer Norm? Nur für $I = \emptyset$ und $X = \{0\}$!

Beispiel: Auf $\mathbb{K}^{(I)}$ haben wir die **Taxinorm** und die **Maximumsnorm**:

$$|x|_1 = \textstyle\sum_{i \in I} |x_i| \quad \text{und} \quad |x|_\infty = \max_{i \in I} |x_i|$$

Kommen sie von einem Skalarprodukt? Nur für $X = \{0\}$ oder $X \cong \mathbb{K}$!

Wie zeigen wir, dass unser gesetztes Ziel erreichbar ist? Am besten *konstruktiv*, indem wir es explizit tun! Wie zeigen wir hingegen, dass es unerreichbar ist? Etwa, indem wir es *nicht* tun und frustriert aufgeben? Das beweist zur Sache herzlich wenig. Die Unmöglichkeit beweisen wir, indem wir ein Hindernis angeben! Hier die Parallelogrammungleichung.

Übung: Führen Sie die obigen Beispiele sorgsam aus.

Reelle Winkel dank Cauchy–Schwarz–Ungleichung

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \text{-} | \text{-} \rangle$.
Folgerung aus der CSU: Für je zwei Vektoren $u, v \in V \smallsetminus \{0\}$ gilt

$$\frac{|\langle u \,|\, v \rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|} \le 1, \qquad \text{insbesondere} \qquad \frac{\operatorname{re}\langle u \,|\, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \in [-1, 1].$$

Daher existiert genau eine reelle Zahl $\theta \in [0, \pi]$ mit

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{re}\langle u \,|\, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

So definieren wir den **Winkel** zwischen den Vektoren u und v durch

$$\boxed{\sphericalangle(u, v) := \arccos\left(\frac{\operatorname{re}\langle u \,|\, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}\right).}$$

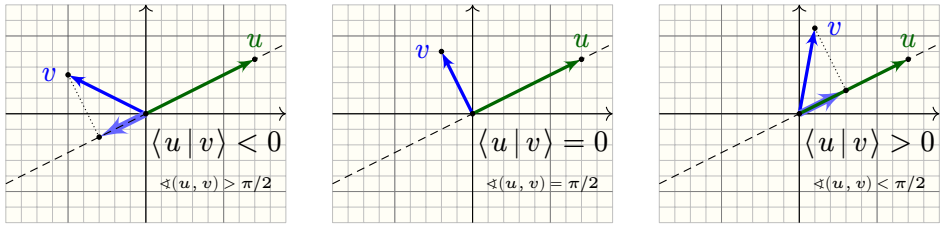
So überführen wir unsere geometrische Intuition in eine solide Definition und bequeme Rechnung: Damit können wir Winkel effizient berechnen. Die obige Formel ist vollkommen explizit und sofort bereit zum Einsatz.

Reelle Winkel dank Cauchy–Schwarz–Ungleichung

Speziell über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt die nützliche Gleichung

$$\boxed{\langle u \,|\, v \rangle \;=\; \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\sphericalangle(u, v).}$$

Diese Winkelformulierung ist Ihnen aus der Schulmathematik vertraut. Damit können Sie den Winkel zwischen den Vektoren u und v ermitteln oder aus den Längen und dem Winkel umgekehrt das Skalarprodukt.



Im orthogonalen Falle $u \perp v$ gilt $\langle u \,|\, v \rangle = 0$, also $\sphericalangle(u, v) = \pi/2 = 90°$.
Allgemein ist $\|v\| \cos\sphericalangle(u, v)$ die Länge der Projektion von v parallel zu u.
Das reelle Skalarprodukt $\langle u \,|\, v \rangle$ ist also die Länge $\|u\|$ des Vektors u multipliziert mit der Länge $\|v_{\parallel}\|$ des parallelen Anteils des Vektors v.

Reelle Winkel dank Cauchy–Schwarz–Ungleichung

☺ Das ist eine genial-einfache Idee und elegante Definition. Wie sonst sollten wir den Winkel zwischen zwei Vektoren u und v ermitteln? Speziell in der euklidischen Ebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gelingt dies mit dem Bogenmaß und den trigonometrischen Funktionen sin und cos.

Noch informativer ist hier der **orientierte Winkel** $\alpha \in \,]-\pi, \pi]$ gemäß

$$\frac{v}{\|v\|} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,\frac{u}{\|u\|} \quad \text{also} \quad \frac{1}{\|v\|}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\|u\|}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

☺ Die oben erklärte Gleichung $\langle u \,|\, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta$ genügt nur, um den **absoluten Winkel** $\theta = |\alpha| \in [0, \pi]$ zu bestimmen. Das **Vorzeichen** entspricht der Orientierung des Winkels und gelingt nur in der Ebene, wo wir Links- und Rechtsdrehung unterscheiden vermöge $\det(u, v) \ge 0$ oder $\det(u, v) < 0$. Schon im Raum $\mathbb{R}^3$ ist dies nicht mehr möglich.

In höherdimensionalen Räumen verlässt uns die Anschauung vollends. Wie wollen Sie den Winkel zwischen zwei Vektoren im $\mathbb{R}^{100}$ messen? So gesehen ist die obige Definition wirklich einfach und elegant.

Reelle Winkel dank Cauchy–Schwarz–Ungleichung

⚠ Den Winkel $\sphericalangle(u, v)$ können wir nur für Vektoren $u, v \in V$ definieren, die ungleich Null sind, da wir durch die Normen $\|u\|$ und $\|v\|$ dividieren.

☺ Orthogonalität $u \perp v$ hingegen können wir für je zwei beliebige Vektoren $u, v \in V$ definieren durch die einfache Bedingung $\langle u \,|\, v \rangle = 0$.

Orthogonalität wird im Folgenden eine große Rolle spielen, sowohl für die Entwicklung der Theorie als auch in der Anwendung der Methoden.

Als zwei einfache doch eindrückliche Beispiele diskutieren wir den Satz des Pythagoras und die Parallelogrammgleichung.

Eingangs haben wir das euklidische Skalarprodukt durch Pythagoras motiviert und hergeleitet. Schön zu sehen und beruhigend zu wissen, dass dieser wichtige Satz bei unserer Abstraktion nicht verloren geht. Im Gegenteil, er erhält nun seine gebührend allgemeine Formulierung.

⚠ Über $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ bestimmt der Winkel nur den Realteil $\operatorname{re}\langle u \,|\, v \rangle$. Das ist manchmal nützlich, doch leider nur ein Teil der Information. Winkel sind daher vor allem über $\mathbb{R}$ gebräuchlich, selten über $\mathbb{C}, \mathbb{H}$.

Die Gram–Matrix einer Sesquilinearform

Sesquilinearformen können wir bequem durch Matrizen darstellen (S1E)
Wir spezialisieren $(\mathbb{K}, \sigma)$ nun zu $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$.

♦ Satz S1E: Gram–Matrix einer Sesquilinearform

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit Sesquilinearform $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$.
Zur Basis $(v_i)_{i\in I}$ definieren wir die **Gram–Matrix** $G \in \mathbb{K}^{I\times I}$ durch

$$g_{ij} = \langle v_i \,|\, v_j \rangle.$$

Daraus können wir die Form rekonstruieren: Für alle $x, y \in \mathbb{K}^{(I)}$ gilt

$$\Big\langle \sum_{i\in I} v_i x_i \,\Big|\, \sum_{j\in I} v_j y_j \Big\rangle \overset{\text{Sesq}}{=} \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} \overline{x_i}\,\langle v_i, v_j\rangle\, y_j \overset{\text{Def}}{=} x^\dagger G\, y$$

Diese Sesquilinearform $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$ ist genau dann hermitesch, wenn die Matrix G hermitesch ist, also $G^\dagger = G$ erfüllt. Die SForm ist genau dann positiv definit, also $\langle u \,|\, u\rangle > 0$ für alle $u \in V \smallsetminus \{0\}$, wenn die Gram–Matrix G dies ist, also $x^\dagger G\, x > 0$ für alle $x \in \mathbb{K}^{(I)} \smallsetminus \{0\}$ erfüllt.

Die Gram–Matrix einer Sesquilinearform

Aufgabe: Wir betrachten $V = \mathbb{R}[X]$ über $\mathbb{R}$ mit Monombasis $\mathcal{B} = (X^i)_{i\in\mathbb{N}}$.
Bestimmen Sie dazu die Gram–Matrix $G \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ des Skalarprodukts

$$\langle\text{-}|\text{-}\rangle : V \times V \to \mathbb{R} : (P, Q) \mapsto \int_{x=0}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lösung: Für die Basispolynome X^i und X^j finden wir

$$g_{ij} := \langle X^i \,|\, X^j \rangle = \int_{x=0}^{1} x^i x^j\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^{i+j+1}}{i+j+1}\Big]_{x=0}^{1} = \frac{1}{i+j+1}.$$

☺ Aus $G = (g_{ij})$ lässt sich $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$ rekonstruieren, wie in Satz S1E erklärt.
Die gesamte Matrix $G \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ ist hier unendlich groß, das kommt vor.
Auf $\mathbb{R}[X]_{<n}$ erhalten wir die berühmt-berüchtigte **Hilbert–Matrix**:

$$\Big(\frac{1}{i+j+1}\Big)_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \frac12 & \cdots & \frac1n \\ \frac12 & \frac13 & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac1n & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

Die Gram–Matrix einer Sesquilinearform

Aufgabe: Berechnen Sie das Skalarprodukt $\int_{x=0}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$ der beiden Polynome $P(x) = 2 - 3x + x^2$ und $Q(x) = 5 - x + 2x^2$ zum Vergleich einmal (1) direkt und alternativ (2) mit der Gram–Matrix.

Lösungen: (1) Wir können direkt ausmultiplizieren und integrieren:

$$P(x)Q(x) = 10 - 17x + 12x^2 - 7x^3 + 2x^4$$

$$\int_{x=0}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x = \Big[10x - \frac{17}{2}x^2 + 4x^3 - \frac74 x^4 + \frac25 x^5\Big]_{x=0}^{1} = \frac{83}{20}$$

(2) Wir nutzen die Koordinaten und die obige Gram–Matrix, siehe S302:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} 1 & \frac12 & \frac13 \\ \frac12 & \frac13 & \frac14 \\ \frac13 & \frac14 & \frac15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{83}{20}$$

☺ Dieses nette Zahlenbeispiel illustriert das allgemeine Basisprinzip:
Die Gram–Matrix codiert die Bilinearform, hier das Integral der Monome.
Damit können wir bequem in Koordinaten rechnen.

Orthogonale und orthonormale Familien

♦ Definition S1O: Orthonormalbasis

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit hermitescher Form $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$.

(1) Ein Vektor $u \in V$ heißt **normiert**, falls $\|u\|^2 = 1$ gilt, somit $\|u\| = 1$.
Gilt $\|v\|^2 > 0$, so können wir v **normieren** zu $u = v/\|v\|$ mit $\|u\| = 1$.

(2) Eine Familie $(u_i)_{i\in I}$ in V heißt **orthogonal**, kurz OS, falls $\langle u_i \,|\, u_j\rangle = 0$ für alle $i \neq j$ in I gilt, und **orthonormal**, kurz ONS, falls zudem $\|u_i\| = 1$:

$$\langle u_i \,|\, u_j\rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j\text{:} \quad \text{paarweise orthogonal,} \\ 1 & \text{falls } i = j\text{:} \quad \text{individuell normiert.} \end{cases}$$

D.h. die Gram–Matrix $\beta(u_i, u_j)_{ij}$ ist diagonal bzw. die Einheitsmatrix.

(3) Ist die Familie $(u_i)_{i\in I}$ zudem eine Basis von $U \leq V$, so nennen wir dies eine **Orthogonalbasis**, kurz OB, bzw. eine **Orthonormalbasis**, kurz ONB.

Beispiel: Die Standardbasis $(e_1, \dots, e_n)$ im Raum $\mathbb{K}^n$ ist orthonormal bezüglich des euklidischen Standardskalarprodukts $\langle u \,|\, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} v_i$.

Satz des Pythagoras

Satz S3A: Pythagoras mit n Summanden → S2E

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit hermitescher Form $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$.
(1) Sind $u_1, \dots, u_n \in V$ orthogonal, also $\langle u_i \,|\, u_j \rangle = 0$ für $i \neq j$, so gilt

$$\boxed{\|u_1 + \dots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \dots + \|u_n\|^2.}$$

(2) Sind $e_1, \dots, e_n \in V$ orthonormal und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, so gilt demnach

$$\boxed{\|e_1\lambda_1 + \dots + e_n\lambda_n\|^2 = |\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_n|^2.}$$

Beweis: (1) Das Normquadrat erhalten wir aus dem Skalarprodukt:

$$\left\|\textstyle\sum_k u_k\right\|^2 \overset{\text{Def}}{=} \left\langle \textstyle\sum_k u_k \,\middle|\, \sum_\ell u_\ell \right\rangle \overset{(S3,4)}{=} \textstyle\sum_k \sum_\ell \langle u_k \,|\, u_\ell \rangle \overset{\text{OS}}{=} \sum_k \|u_k\|^2$$

(2) Dies ist ein Spezialfall: Die Familie $u_k = e_k\lambda_k$ ist orthogonal, denn

$$\langle u_i \,|\, u_j \rangle = \overline{\lambda_i}\, \langle e_i \,|\, e_j \rangle\, \lambda_j = 0$$

für alle $i \neq j$, mit Norm $\|u_k\|^2 = \|e_k\|^2\, |\lambda_k|^2 = |\lambda_k|^2$. QED

Orthogonalbasis und positive Semi/Definitheit

☺ Daraus erhalten wir einen einfachen Test für Semi/Definitheit:

Satz S3A: Semi/Definitheit → Diagonalisierung S1R

(3) Sei $(u_i)_{i\in I}$ eine Orthogonalbasis des Unterraums $U \leq V$.
(a) Gilt $\langle u_i \,|\, u_i \rangle > 0$ für alle $i \in I$, so ist $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$ auf U positiv definit.
(b) Gilt $\langle u_i \,|\, u_i \rangle \geq 0$ für alle $i \in I$, so ist $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$ auf U positiv semidefinit.

Beweis: Jeder Vektor $u \in U$ schreibt sich $u = \sum_{i\in I} u_i\lambda_i$ mit $\lambda \in \mathbb{K}^{(I)}$.
Dank Orthogonalität erhalten wir nach Pythagoras (Satz S3A):

$$\|u\|^2 \overset{\text{S3A}}{=} \textstyle\sum_{i\in I} \|u_i\|^2\, |\lambda_i|^2$$

Daraus folgen sofort die Ungeichungen (a) und (b). QED

Bemerkung: Alle hier angegebenen Summen sind endlich, dank $\lambda \in \mathbb{K}^{(I)}$.
Ist die Orthogonalbasis $(u_i)_{i\in I}$ zudem normiert, so gilt (a) offensichtlich.
Gilt (a), so können wir $(u_i)_{i\in I}$ normieren zu einer Orthonormalbasis.
Zur Konstruktion einer Orthonormalbasis siehe die Verfahren S3C/S1R.

Fourier–Koeffizienten

Satz S3B: Fourier–Koeffizienten → allgemein S1O

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit hermitescher Form $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$.
Sei $(e_i)_{i\in I}$ in V eine orthogonale Familie mit $\langle e_i \,|\, e_i \rangle \neq 0$ für alle $i \in I$.
(1) Für jede Linearkombination $v = \sum_{i\in I} e_i v_i$ über $\mathbb{K}$ gilt dann

$$\boxed{v_i = \frac{\langle e_i \,|\, v \rangle}{\langle e_i \,|\, e_i \rangle}.}$$

Insbesondere ist die Familie $(e_i)_{i\in I}$ in V über $\mathbb{K}$ linear unabhängig.
Ist die Familie $(e_i)_{i\in I}$ orthonormal, so gilt vereinfacht $v_i = \langle e_i \,|\, v \rangle$.

☺ Das Skalarprodukt filtert den gewünschten Koeffizienten heraus!

Beweis: (1) Die Koeffizientenformel folgt dank Orthogonalität:

$$\langle e_i \,|\, v \rangle = \left\langle e_i \,\middle|\, \textstyle\sum_j e_j v_j \right\rangle = \textstyle\sum_j \langle e_i \,|\, e_j \rangle\, v_j = \langle e_i \,|\, e_i \rangle\, v_i$$

Unabhängigkeit: Gilt $v = 0$, so folgt $v_i = 0$ für alle $i \in I$. QED

Parseval–Gleichung

Satz S3B: Parseval–Gleichung

(2) Sei $(e_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von V. Für alle Vektoren $u, v \in V$ gilt

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \textstyle\sum_{i\in I} e_i u_i && \text{mit } u_i = \langle e_i \,|\, u \rangle \in \mathbb{K}, \\ v &= \textstyle\sum_{i\in I} e_i v_i && \text{mit } v_i = \langle e_i \,|\, v \rangle \in \mathbb{K}, \\ \langle u \,|\, v \rangle &= \textstyle\sum_{i\in I} \overline{u_i} v_i && = \textstyle\sum_{i\in I} \langle u \,|\, e_i \rangle \langle e_i \,|\, v \rangle, \end{aligned}}$$

Daraus folgt erneut Pythagoras $\|u\|^2 = \sum_{i\in I} |u_i|^2$ und $\|v\|^2 = \sum_{i\in I} |v_i|^2$.

Beweis: (2) Die Parseval–Gleichung folgt dank Orthonormalität:

$$\langle u \,|\, v \rangle = \left\langle \textstyle\sum_i e_i u_i \,\middle|\, \sum_j e_j v_j \right\rangle = \textstyle\sum_i \sum_j \overline{u_i} \langle e_i \,|\, e_j \rangle v_j = \sum_i \overline{u_i} v_i$$

Speziell für $u = v$ erhalten wir erneut den Satz des Pythagoras S3A. QED

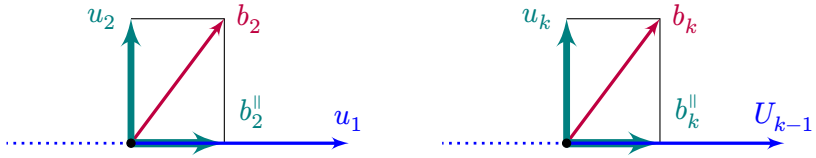
Bemerkung: Alle angegebenen Summen sind endlich, da $(u_i), (v_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$.
In der Theorie der Hilbert–Räume führt man zusätzlich Grenzwerte ein und erlaubt statt (endlicher) Summen auch (abzählbare) Reihen.

Orthonormalisierung nach Gram–Schmidt

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \text{-} | \text{-} \rangle$.
Hat V eine Basis? Ja, dank Basis-Auswahl-und-Ergänzungssatz M2K.
Hat V eine Orthonormalbasis? mit möglichst expliziter Konstruktion?

Gegeben sei eine Basis $b_1, \dots, b_n$ von V über $\mathbb{K}$. Wie formen wir daraus
(1) ... eine Orthogonalbasis $u_1, \dots, u_n$? mit $u_k = \sum_{j \le k} b_j \lambda_{jk}$ und $\lambda_{kk} = 1$!
(2) ... eine Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_n$? mit $e_k = \sum_{j \le k} b_j \mu_{jk}$ und $\mu_{kk} > 0$!

Für zwei Vektoren kennen wir die orthogonale Zerlegung S2F:



Das ist ein genial-einfacher Trick. Das **Gram–Schmidt–Verfahren** verallgemeinert ihn für beliebige Familien, ganz einfach durch Iteration. Damit erhalten wir unmittelbar das folgende genial-einfache Verfahren. Es ist die geometrische Inkarnation des Gauß–Hermite–Algorithmus S1R.

Orthonormalisierung nach Gram–Schmidt

Satz S3c: Laplace 1816, Gram 1883, Schmidt 1907 – Basisversion

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \text{-} | \text{-} \rangle$.
Sei $b_1, \dots, b_n \in V$ eine Basis des Unterraums $U_n = \langle b_1, \dots, b_n \rangle_{\mathbb{K}}^{!}$.
(1) Hierzu existiert genau eine Orthogonalbasis $u_1, \dots, u_k$ von U_k mit $b_k - u_k \in U_{k-1}$ für alle $k = 1, \dots, n$. Diese erhalten wir rekursiv:

$$u_k := b_k - \sum_{j=1}^{k-1} u_j \lambda_{jk} \quad \text{mit den eindeutigen Fourier–Koeffizienten} \quad \lambda_{jk} := \frac{\langle u_j \,|\, b_k \rangle}{\langle u_j \,|\, u_j \rangle}$$

(2) Normiert zu $e_k := u_k / \|u_k\|$ erhalten wir eine Orthonormalbasis, also

$$\langle u_k \,|\, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq j, \\ \|u_k\|^2 > 0 & \text{für } k = j, \end{cases} \quad \text{und} \quad \langle e_k \,|\, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq j, \\ 1 & \text{für } k = j. \end{cases}$$

(3) Das Verfahren gelingt für jede abzählbare Basis $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von $U \le V$.
(4) Das zeigt insbesondere: Jeder Vektorraum mit Skalarprodukt und höchstens abzählbarer Dimension besitzt eine Orthonormalbasis.

Orthonormalisierung nach Gram–Schmidt

Aufgabe: Alles liegt explizit vor Ihnen. Rechnen Sie es sorgsam nach! (Das Vorbild $n = 2$ kennen Sie als orthogonale Zerlegung aus Satz S2F.)

Beweis: (1) Wir führen Induktion über k. Für $k = 1$ ist die Aussage klar.

Sei nun $k \ge 2$. Im Unterraum $U_{k-1} \le V$ haben wir die gegebene Basis $(b_1, \dots, b_{k-1})$ bereits zur Orthogonalbasis $(u_1, \dots, u_{k-1})$ transformiert.
Im Unterraum U_k erhalten wir aus der Basis $(b_1, \dots, b_{k-1}, b_k)$ zunächst $(u_1, \dots, u_{k-1}, b_k)$ und dann $(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k)$ mit $u_k := b_k - \sum_{j=1}^{k-1} u_j \lambda_{jk}$.
Für $j = 1, \dots, k-1$ fordern wir $0 \overset{!}{=} \langle u_j \,|\, u_k \rangle = \langle u_j \,|\, b_k \rangle - \langle u_j \,|\, u_j \rangle \lambda_{jk}$.
Die Differenz verschwindet genau für $\lambda_{jk} = \langle u_j \,|\, b_k \rangle / \langle u_j \,|\, u_j \rangle$ dank S1Q.

(2) Da $(u_1, \dots, u_n)$ eine Basis von U_n ist, gilt insbesondere $u_n \neq 0$.
Normierung zu $e_n := u_n / \|u_n\|$ liefert also eine Orthonormalbasis.

(3) Dasselbe Verfahren gelingt für jede abzählbare Basis $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$:
Aus $b_0, b_1, b_2, \dots$ konstruieren wir $u_0, u_1, u_2, \dots$ und $e_0, e_1, e_2, \dots$.
Jeder Schritt benötigt nur die bisher berechneten Vektoren.

(4) Wir wählen eine Basis und orthonormalisieren sie. QED

Orthonormalisierung nach Gram–Schmidt

Bemerkung: Erfolgstrunken und überoptimistisch könnte man vermuten:
(3) Das Verfahren gelingt für jede wohlgeordnete Indexmenge $(I, \le)$.
(4) Jeder Vektorraum mit Skalarprodukt besitzt eine Orthonormalbasis.

Beides ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir den Hilbert–Raum

$$V = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \,\middle|\, \textstyle\sum_{k \in \mathbb{N}} |f(k)|^2 < \infty \right\}$$

mit seinem (wohldefinierten!) Skalarprodukt $\langle f \,|\, g \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{f(k)} g(k)$.
Hierin ist $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine orthonormale Familie, aber keine Basis, denn ihr Aufspann $U = \langle e_i : i \in \mathbb{N} \rangle_{\mathbb{R}}^{!}$ enthält nur Folgen mit endlichem Träger.
Zum Beispiel liegt $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} : k \mapsto 2^{-k}$ zwar in V, aber nicht in U.

(3) Wenn wir auf f und $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ das Gram–Schmidt–Verfahren anwenden, erhalten wir $\langle e_i \,|\, f \rangle = 2^{-i} \neq 0$ für alle $i \in I$. Doch unendliche Summen können wir derzeit nicht verarbeiten. Hier übernimmt die Analysis!

(4) Allgemein gilt sogar: Wir können $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ um keinen orthonormalen Vektor $v \in V$ erweitern, denn $\langle e_i \,|\, v \rangle = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ bedeutet $v = 0$.
Die Theorie der Hilbert–Räume löst dieses Rätsel in Wohlgefallen auf.

Orthonormalisierung nach Gram–Schmidt

Bemerkung: Geometrisch besagt das Gram–Schmidt–Verfahren

$$\begin{aligned}
u_1 &= b_1, & e_1 &= \mathrm{N}(u_1),\\
u_2 &= b_2 - \mathrm{P}^{\parallel}_{u_1}(b_2), & e_2 &= \mathrm{N}(u_2),\\
u_3 &= b_3 - \mathrm{P}^{\parallel}_{u_1}(b_3) - \mathrm{P}^{\parallel}_{u_2}(b_3), & e_3 &= \mathrm{N}(u_3),\\
&\vdots\\
u_n &= b_n - \mathrm{P}^{\parallel}_{u_1}(b_n) - \dots - \mathrm{P}^{\parallel}_{u_{n-1}}(b_n), & e_n &= \mathrm{N}(u_n).
\end{aligned}$$

Dabei nutzen wir sowohl die Parallelprojektion $\mathrm{P}^{\parallel}_u(v) = u\,\langle u \,|\, v\rangle / \langle u \,|\, u\rangle$ als auch die Normalisierung $\mathrm{N}(v) = v/\|v\|$. Äquivalent dazu erhalten wir:

$$\begin{aligned}
u_1 &= b_1, & e_1 &= u_1/\|u_1\|,\\
u_2 &= b_2 - e_1\,\langle e_1 \,|\, b_2\rangle, & e_2 &= u_2/\|u_2\|,\\
u_3 &= b_3 - e_1\,\langle e_1 \,|\, b_3\rangle - e_2\,\langle e_2 \,|\, b_3\rangle, & e_3 &= u_3/\|u_3\|,\\
&\vdots\\
u_n &= b_n - e_1\,\langle e_1 \,|\, b_n\rangle - \dots - e_{n-1}\,\langle e_{n-1} \,|\, b_n\rangle, & e_n &= u_n/\|u_n\|.
\end{aligned}$$

Orthonormalisierung nach Gram–Schmidt

Die Orthogonalisierung von $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ zu $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n) \in V^n$ erfüllt $b_k = \sum_{j \le k} u_j \lambda_{jk}$ mit $\lambda_{kk} = 1$ und $\lambda_{jk} = \langle u_j \,|\, b_k\rangle / \langle u_j \,|\, u_j\rangle$ für $j < k$:

$$\mathcal{B} = \mathcal{U}\Lambda \quad \text{mit} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{G}^1_n(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{n\times n}$$

Zur Normalisierung nutzen wir $\Delta = \operatorname{diag}(\|u_1\|, \dots, \|u_n\|) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Für die Orthonormalbasis $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n) \in V^n$ gilt demnach:

$$\mathcal{E} = \mathcal{U}\Delta^{-1} \quad \text{also} \quad \mathcal{B} = \mathcal{U}\Lambda = \mathcal{E}\Delta\Lambda = \mathcal{E}R$$

$$\text{mit} \quad R = \Delta\Lambda = \begin{bmatrix} + & * & \dots & * \\ 0 & + & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & + \end{bmatrix} \in \mathbb{G}^{>0}_n(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{n\times n}$$

Diese Schreibweise entspricht der QR–Zerlegung in Satz S3E.
Hier steht „+“ abkürzend für einen Diagonaleintrag aus $\mathbb{R}_{>0}$.

Robuste Orthonormalisierung nach Gram–Schmidt

Robust heißt: Wir müssen lineare Unabhängigkeit nicht vorab prüfen!

Algo S3D: robuste Orthonormalisierung nach Gram–Schmidt

Eingabe: ein Erzeugendensystem $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ des Unterraums U
Ausgabe: eine Orthonormalbasis $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_k)$ des Unterraums U

1: $k \leftarrow 0$
2: for ℓ from 1 to n do
3: $\quad k \leftarrow k+1;\ b'_k \leftarrow b_\ell;\ u_k \leftarrow b'_k - \sum_{j=1}^{k-1} e_j\,\langle e_j \,|\, b'_k\rangle$
4: $\quad$ if $u_k \neq 0$ then $e_k \leftarrow u_k/\|u_k\|$ else $k \leftarrow k-1$
5: return $(e_1, \dots, e_k)$

Dieser Algorithmus extrahiert aus $\mathcal{B}$ drei interessante Basen von U:
(1) die Teilfamilie $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_k)$ wie im Basisauswahlsatz M2K,
(2) hieraus abgeleitet die Orthogonalbasis $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_k)$
(3) und daraus die Orthonormalbasis $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_k)$.

⚠ In der Numerik müssen wir immer mit Rundungsfehlern rechnen!
Statt $u_k \neq 0$ prüft man besser $\|u_k\| > \varepsilon$ mit geeigneter Toleranz $\varepsilon > 0$.

Robuste Orthonormalisierung nach Gram–Schmidt

☺ Wir können jede endliche orthonormale Familie in V erweitern zu einer Orthonormalbasis, vorausgesetzt die Dimension ist abzählbar.

Korollar S3D: orthonormale Ergänzung zu einer Basis

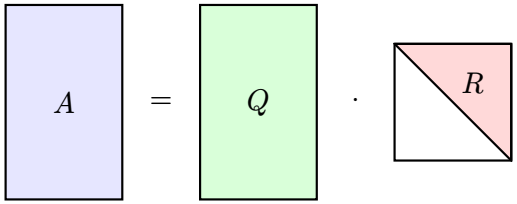
Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$ und zudem abzählbar erzeugt, also $V = \langle v_i : i \in I\rangle_{\mathbb{K}}$ mit I abzählbar.

Dann kann jede endliche orthornormale Familie $(e_1, \dots, e_n)$ zu einer orthonormalen Basis $(e_j)_{j\in J}$ erweitert werden, wobei $\{1, \dots, n\} \subseteq J \subseteq \mathbb{N}$.

Beweis: Ohne Einschränkung sei $I \subseteq \mathbb{N}_{>n}$. Wir wenden den Gram–Schmidt–Algorithmus S3D auf $(e_1, \dots, e_n, v_i : i \in I)$ an. QED

Bemerkung: Damit das Gram–Schmidt–Verfahren S3C hier gelingt, streichen wir jeden Vektor v_i, der sich als Linearkombination seiner Vorgänger schreiben lässt (wie in M2K). Geschickt optimieren wir dazu unser Verfahren wie in S3D so, dass es diese Aufgabe von selbst erledigt. Das entspricht dem vertrauten Algorithmus zum Basisauswahlsatz M2K!

Die QR–Zerlegung



Satz S3E: QR–Zerlegung, Existenz und Eindeutigkeit

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit linear unabhängigen Spalten, also $\operatorname{rang} A = n \le m$. Dazu existiert genau eine Zerlegung der Form

$$\boxed{A = QR}$$

wobei $Q \in \mathbb{K}^{m\times n}$ orthonormale Spalten hat, also $Q^\dagger Q = I_n$ erfüllt, und $R \in \mathbb{M}_n^{>0}(\mathbb{K})$ eine obere Dreiecksmatrix ist, also $r_{i,j} = 0$ für $i > j$, und positive Diagonaleinträge hat, also $r_{i,i} > 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Insbesondere gilt $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $\det(R) = r_{1,1} \cdots r_{n,n} > 0$. Quadratisch, mit $m = n$, gilt $\det(A) = \det(Q)\det(R)$ mit Orientierung $\det(Q) \in \{\pm 1\}$.

Die QR–Zerlegung nach Gram–Schmidt

Aufgabe: Folgern Sie Satz S3E aus dem Gram–Schmidt–Verfahren S3C.

Kurzfassung: Die Bedingungen $A = QR$ mit $Q^\dagger Q = 1$ und R in PZSF entsprechen Fourier–Koeffizienten und Normierung wie im Algorithmus. Das zeigt Eindeutigkeit, der Algorithmus $A \mapsto (Q, R)$ garantiert Existenz.

Beweis: (1) Die **Eindeutigkeit** von (Q, R) folgt per Induktion über n. Angenommen, es gilt $A = QR$. In den Spalten von A und Q heißt das:

$$\begin{aligned} a_1 &= q_1 r_{1,1} \\ a_2 &= q_1 r_{1,2} + q_2 r_{2,2} \\ &\vdots \\ a_n &= q_1 r_{1,n} + \dots + q_{n-1} r_{n-1,n} + q_n r_{n,n} \end{aligned}$$

Hierbei seien $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{K}^m$ orthonormal und $r_{i,i} > 0$ für alle i. Dann sind (Q, R) die Daten aus dem Gram–Schmidt–Verfahren: Für $k < n$ folgt $\langle q_k \mid a_n \rangle = \langle q_k \mid q_n \rangle r_{n,n} + \sum_{\ell=1}^{n-1} \langle q_k \mid q_\ell \rangle r_{\ell,n} = r_{k,n}$. Wir setzen $b_n := a_n - \sum_{k=1}^{n-1} q_k \langle q_k \mid a_n \rangle$ und erhalten $b_n = q_n r_{n,n}$. Wegen $\|q_n\| = 1$ und $r_{n,n} > 0$ gilt $r_{n,n} = \|b_n\|$ und $q_1 = b_1 / \|b_1\|$.

Die QR–Zerlegung nach Gram–Schmidt

(2) Wir beweisen die **Existenz** von (Q, R) zu A durch Konstruktion. Dank Gram–Schmidt konstruieren wir aus den Spalten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^m$ der Matrix A eine orthonormale Familie $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{K}^m$ wie folgt:

$$\begin{aligned} b_1 &:= a_1, & q_1 &:= b_1 / \|b_1\|, \\ b_2 &:= a_2 - q_1 \langle q_1 \mid a_2 \rangle, & q_2 &:= b_2 / \|b_2\|, \\ &\vdots & &\vdots \\ b_n &:= a_n - \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} q_k \langle q_k \mid a_n \rangle, & q_n &:= b_n / \|b_n\|. \end{aligned}$$

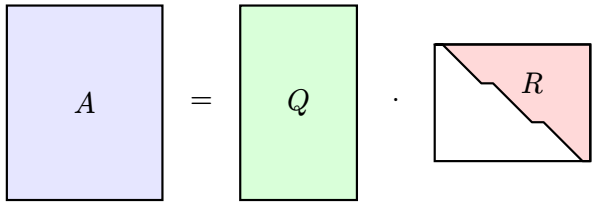
Umgekehrt gelesen erhalten wir daraus $A = QR$, denn

$$\begin{aligned} a_1 &= q_1 \|b_1\|, \\ a_2 &= q_2 \|b_2\| + q_1 \langle q_1 \mid a_2 \rangle, \\ &\vdots \\ a_n &= q_n \|b_n\| + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} q_k \langle q_k \mid a_n \rangle. \end{aligned}$$

Dabei ist $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ orthonormal und $R \in \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ mit $r_{i,i} = \|b_i\| > 0$ sowie $r_{i,j} = 0$ für $i > j$ und $r_{i,j} = \langle q_i \mid a_j \rangle$ für $i < j$.

Die QR–Zerlegung

Wir können das Gram–Schmidt–Verfahren robust formulieren (S3D):



Satz S3E: QR–Zerlegung, Existenz und Eindeutigkeit

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit Rang $\operatorname{rang} A = r$. Dazu existiert genau eine Zerlegung $A \mapsto (Q, R)$ der Form

$$\boxed{A = QR}$$

wobei $Q \in \mathbb{K}^{m\times r}$ orthonormale Spalten hat, also $Q^\dagger Q = I_r$ erfüllt, und $R \in \mathbb{K}^{r\times n}$ positive Zeilenstufenform (PZSF, mit Pivoteinträgen in $\mathbb{R}_{>0}$).

Speziell: Aus $r = m$ folgt $Q \in \mathrm{GU}_n(\mathbb{K})$. Aus $r = n$ folgt $R \in \mathbb{M}_n^{>0}(\mathbb{K})$.

Die QR–Zerlegung: Numerik

☺ Die QR–Zerlegung ist in der Numerik ein wichtiges Werkzeug, etwa zur Berechnung einer Orthonormalbasis (wie oben S3D / S3E) oder zur Behandlung von linearen Ausgleichsproblemen. (S3H)

Die Zerlegung $A = QR$ ist eindeutig, also eine Abbildung $A \mapsto (Q, R)$. Sie kann jedoch mit verschiedenen Algorithmen berechnet werden! Die bekanntesten sind neben dem obigen Gram–Schmidt–Verfahren S3D vor allem Givens–Rotationen S4L und Householder–Spiegelungen S4P. Ersteres wird üblicherweise in der Linearen Algebra benutzt, da es geometrisch anschaulich ist und leicht zu erklären.

In der oben angegebenen Standardform ist es leider numerisch instabil: Es kann Eingabefehler und Rundungsfehler ungünstig verstärken. In der Numerik werden Sie daher weitere Verfahren zur QR–Zerlegung kennenlernen und ihre Eigenschaften noch genauer analysieren. Die Grundlage hierzu ist der Existenz- und Eindeutigkeitssatz S3E; er erklärt, was wir erreichen wollen, und dass es eindeutig möglich ist.

Die QR–Zerlegung: Algorithmen

☺ Die QR–Zerlegung $A \leftrightarrows (Q, R)$, wie oben spezifiziert, ist eindeutig! Der Rechenweg hingegen ist es nicht. Das Gram–Schmidt–Verfahren ist ein möglicher Weg zum Ziel, aber bei Weitem nicht der einzige. Freuen Sie sich auf die genauere Untersuchung in der Numerik!

Übung: Es gibt drei Varianten des Gram–Schmidt–Verfahrens:

1. Orthogonalisieren (ohne Normalisieren der Vektoren),
2. Orthonormalisieren mit sofortigem Normalisieren und
3. Orthonormalisieren mit abschließendem Normalisieren.

Erklären Sie diese drei Varianten und schreiben Sie jede explizit als Algorithmus. Warum ergeben alle drei dasselbe Ergebnis? Welcher Rechenweg scheint Ihnen vorteilhaft, speziell für die Handrechnung?

Übung: Zählen Sie die benötigten Operationen im Grundkörper $\mathbb{K}$. Vergleichen Sie Gram–Schmidt S3D mit Gauß D2H zur RZSF sowie mit Gauß–Hermite S1R, siehe S324.

Die QR–Zerlegung: Stetigkeit

Die QR–Zerlegung ist sowohl theoretisch als auch praktisch relevant. Aus geometrisch-topologischer Sicht stiftet sie die Bijektion

$$\mathrm{GO}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{S}_n^{>0}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : (Q, R) \leftrightarrows A = QR$$
$$\mathrm{GU}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{S}_n^{>0}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : (Q, R) \leftrightarrows A = QR$$

Das Produkt $(Q, R) \mapsto A = QR$ ist stetig, koordinatenweise eine Summe von Produkten. (Alles sind Teilmengen des euklidischen Raumes $\mathbb{K}^{n \times n}$.) Kleine Änderungen in Q und R bewirken nur kleine Änderungen in A.

Die Umkerung, also unsere QR-Zerlegung $A \mapsto (Q, R)$, ist ebenfalls stetig, wie unsere expliziten Formel zeigen. Wir haben daher nicht nur eine *Bijektion* der obigen Mengen, sondern sogar einen *Homöomorphismus*.

Ausblick: Hierbei ist die Menge $\mathbb{S}_n^{>0}(\mathbb{K})$ sternförmig zum Punkt 1. Wir können diesen Faktor daher auf den Punkt 1 zusammenziehen. Aus topologischer Sicht ist die „unnötig große“ Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ äquivalent zur „kleinen“ Gruppe $\mathrm{GU}_n(\mathbb{K})$. Letztere ist kompakt!

Vergleich Gram–Schmidt vs Gauß–Hermite

Aufgabe: Vergleichen Sie diese beiden Verfahren zur Orthogonalisierung. Inwiefern tun beide genau dasselbe? Was machen sie unterschiedlich?

Lösung: Beide berechnen einen Basiswechsel zu einer Orthogonalbasis.

(1) Gauß–Hermite S1R gelingt immer, über jedem *DRing mit $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$, und erlaubt über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ insbesondere, In/Definitheit auszurechnen. Gram–Schmidt S3C verlangt $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und immer positive Definitheit. Ohne diese Voraussetzung gilt: Führt Gram–Schmidt erfolgreich zu einer OBasis mit $\langle u_i \mid u_i \rangle > 0$ für alle i, so ist die Form positiv definit (Satz S1R).

(2) Startet man Gauß–Hermite S1R mit einer anisotropen Form, etwa einem Skalarprodukt, so sind die Reparaturen (2,3) niemals notwendig, und der Rechenschritt (1) auf der Gram–Matrix ist genau derselbe wie Gram–Schmidts Orthogonalprojektion des aktuellen Basisvektors (S1S).

(3) Gram–Schmidt arbeitet direkt auf der *Basis* mit Basiswechseln, doch Gauß–Hermite arbeitet auf der *Gram–Matrix* mit Basiswechseln. Betrachtet man beides zugleich, so entsprechen sich die Daten perfekt. ☺ Kurzum: Beide Algorithmen sind Varianten derselben Methode.

Zahlenbeispiel zur QR–Zerlegung

Aufgabe: Orthonormalisieren Sie die Spalten der Matrix A nach Gram–Schmidt. Lesen Sie daraus die QR–Zerlegung $A = QR$ ab.

$$\underbrace{\begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \overset{(1)}{=\!=} \begin{array}{cc} u_1 & a_2 \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{(2)}{=\!=} \underbrace{\begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{array}{cc} & \lambda_{12} \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Lambda}$$

☺ Orthogonalisierung erfordert nur Bruchrechnung in $\mathbb{K}$.

$$\overset{(3)}{=\!=} \begin{array}{cc} e_1 & u_2 \\ \end{array}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \\ 0 & 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{(4)}{=\!=} \underbrace{\begin{array}{cc} e_1 & e_2 \\ \end{array}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{R}$$

☺ Lästige Wurzeln? Wir normalisieren erst ganz am Ende!

Zahlenbeispiel zur QR–Zerlegung

☺ Die vorgebene Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ hat n linear unabhängige Spalten. Wir können also gefahrlos die Gram–Schmidt–Basisversion S3C nutzen.

Wir notieren hier $A = Q_i R_i$ von der Startmatrix $(Q_0, R_0) = (A, 1)$ über die Orthogonalisierung $(Q_n, R_n) = (U, \Lambda)$ mit $U^\dagger U \in \mathbb{D}_n^{>0}$ und $\Lambda \in \mathbb{R}_n^1$ in normierter ZSF bis zur Orthonormalisierung $(Q_{2n}, R_{2n}) = (Q, R)$ mit den ersehnten Eigenschaften $Q^\dagger Q = 1_{n\times n}$ und $R \in \mathbb{R}_n^{>0}$ in positiver ZSF.

Schritt 1: Wir übernehmen die erste Spalte $u_1 = a_1$.
Die Normierung verschieben wir lieber ans Ende.

Schritt 2: Von der zweiten Spalte a_2 subtrahieren wir das λ–Fache der ersten Spalte u_1 also $u_2 = a_2 - u_1\lambda_{12}$ mit $\lambda_{12} = \langle u_1 \mid a_2\rangle / \langle u_1 \mid u_1\rangle = 2$.

☺ Damit haben wir die Orthogonalisierung $A = U\Lambda$ gefunden.

Schritt 3: Wir normieren die erste Spalte zu $e_1 = u_1/\|u_1\|$.

Schritt 4: Wir normieren die zweite Spalte zu $e_2 = u_2/\|u_2\|$.

☺ Damit haben wir die Orthonormalisierung $A = QR$ gefunden.

Zahlenbeispiel zur QR–Zerlegung

Aufgabe: Orthonormalisieren Sie die Spalten der Matrix A nach Gram–Schmidt. Lesen Sie daraus die QR–Zerlegung $A = QR$ ab.

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \overset{(1)}{=\!=} \underbrace{\begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\overset{(2)}{=\!=} \underbrace{\begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 5\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}}_{R}$$

Robust heißt: Wir müssen lineare Unabhängigkeit nicht vorab prüfen, dies erledigt das robuste Gram–Schmidt–Verfahren gleich mit.

Zahlenbeispiel zur QR–Zerlegung

⚠ Die Spalten der Matrix A sind hier offensichtlich linear abhängig. Die Basisversion S3C von Gram–Schmidt ist darauf nicht vorbereitet. Wir nutzen frohgemut das robuste Gram–Schmidt–Verfahren S3D.

Die drei Spalten a_1, a_3, a_5 werden von den jeweils vorigen erzeugt. Das robuste Gram–Schmidt–Verfahren erkennt dies korrekt und nimmt diese redundanten Vektoren nicht in die Basis auf. Es bleiben die Spalten a_2 und a_4. Hier sehen wir die Rechnung aus dem vorigen Zahlenbeispiel.

Die Matrix $Q = (e_1, e_2)$ ist dieselbe wie zuvor. Lediglich Λ hat nun fünf Spalten, um damit die fünf Spalten von A darzustellen. Die relevanten Spalten / Pivotspalten sind grün hinterlegt, die redundanten Spalten / freien Spalten sind weiß grundiert. Wie versprochen ist R in PZSF.

☺ Wir sehen daran nochmal: Das robuste Gram–Schmidt–Verfahren S3D kombiniert den wohlvertrauten Basisauswahlsatz M2K nach Gauß mit anschließender Orthonormalisierung S3C in der Basisversion.

Zahlenbeispiel zur QR–Zerlegung

Beispiel: Zur weiteren Anschauung hier eine reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, zunächst orthogonalisiert zu (U, Λ), dann orthonormalisiert zu (Q, R).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{6} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Übung: Rechnen Sie es selbst! Wie finden Sie die Koeffizienten Λ?
☺ Orthogonalisierung erfordert nur Bruchrechnung in $\mathbb{K}$, hier $\mathbb{R}$.
☺ Lästige Wurzeln? Wir normalisieren erst ganz am Ende!
Übung: Machen Sie die Probe! Was genau ist hier zu prüfen?

Zahlenbeispiel zur QR–Zerlegung

Beispiel: Zur Anschauung hier eine kleine komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, zunächst orthogonalisiert zu (U, Λ), dann orthonormalisiert zu (Q, R).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+3\mathrm{i}}{2} \\ \mathrm{i} & \frac{3-\mathrm{i}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-\mathrm{i}}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1+3\mathrm{i}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \frac{3-\mathrm{i}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Übung: Rechnen Sie es selbst! Wie finden Sie die Koeffizienten Λ?
☺ Orthogonalisierung erfordert nur Bruchrechnung in $\mathbb{K}$, hier $\mathbb{C}$.
☺ Lästige Wurzeln? Wir normalisieren erst ganz am Ende!

☺ Wenn nur Q gefragt ist, dann kann man bei der Berechnung von U alle Nenner wegskalieren und das Gegenstück in Λ ignorieren.
Übung: Machen Sie die Probe! Was genau ist hier zu prüfen?

Zahlenbeispiel zur QR–Zerlegung

Beispiel: Zur Anschauung zwei quaternionale Matrizen $A, B \in \mathbb{H}^{2\times 2}$, zunächst orthogonalisiert zu (U, Λ), dann orthonormalisiert zu (Q, R).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{j} & \mathrm{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{j} & \mathrm{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\mathrm{j}}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{k}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{j} \\ \mathrm{i} & \mathrm{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \mathrm{j}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

☺ Hier sind die Spalten von A schon orthogonal, auch das kommt vor. Das nehmen wir gerne mit, dadurch wird die Rechnung sehr einfach.

☺ Die Spalten von B sind $\mathbb{H}$–linear abhängig, genauer gilt $b_1 \cdot \mathrm{j} = b_2$. Dem robusten Gram–Schmidt–Verfahren S3D entgeht nichts!

⚠ Zwar sind A und B transponiert, doch A ist invertierbar und B nicht! Quaternionen liefern heilsame Gegenbeispiele und schulen die Präzision.

Zahlenbeispiel zur QR–Zerlegung

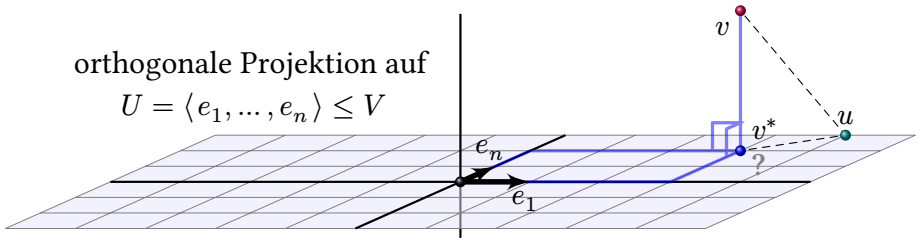
Beispiel: Hier eine dritte quaternionale Matrix $C \in \mathbb{H}^{3\times 2}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{j} \\ 1 & \mathrm{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{+2\mathrm{i}-\mathrm{j}-\mathrm{k}}{3} \\ 1 & \frac{-\mathrm{i}+2\mathrm{j}-\mathrm{k}}{3} \\ 1 & \frac{-\mathrm{i}-\mathrm{j}+2\mathrm{k}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k}}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{+2\mathrm{i}-\mathrm{j}-\mathrm{k}}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-\mathrm{i}+2\mathrm{j}-\mathrm{k}}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-\mathrm{i}-\mathrm{j}+2\mathrm{k}}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k}}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Übung: Rechnen Sie es selbst! Wie finden Sie die Koeffizienten Λ?
Mit etwas Übung spüren Sie erfreut, Quaternionen sind nicht schwer.
Anfangs war $\mathbb{R}$ ungewohnt, dann $\mathbb{C}$, nun $\mathbb{H}$, doch üben hilft rasch.
Möglichst vielfältige Beispiele illustrieren und erhellen.

Bestapproximation durch Orthogonalprojektion



Approximationsproblem: Zu $v \in V$ suchen wir den / einen Vektor $v^* \in U$, der v am nächsten liegt. Existenz? eindeutig? effektiv? effizient?

Hierzu sei V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$ und Norm $\|\text{-}\|$. Darin sei $U \le V$ ein endlich-dim. Untervektorraum, $\dim U = n < \infty$.

Lösung: Wir projizieren v orthogonal auf U zum Vektor $v^* = \mathrm{P}^{\parallel}_U(v)$.

☺ Schon $V = \mathbb{R}^2$ und $n = 1$ ist interessant, ebenso $V = \mathbb{R}^3$ und $n = 1, 2$. Die geometrischen Argumente gelten ganz allgemein: Der Raum V darf beliebig groß sein, etwa ein unendlich-dimensionaler Funktionenraum. Lediglich der Unterraum U muss (vorerst) endlich-dimensional bleiben.

Bestapproximation durch Orthogonalprojektion

Übung: Wie berechnen Sie im Raum $\mathbb{R}^3$ den euklidischen Abstand des Punktes p zu einer Geraden $G = \langle u_1 \rangle^!$? zu einer Ebenen $E = \langle u_1, u_2 \rangle^!$? Welche Rechentechniken und Beweisargumente kennen Sie hierzu?

Beispiel: Vorgelegt ist eine Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, etwa $f(x) = x^2$. Zu $n \in \mathbb{N}$ gesucht ist die/eine Bestapproximation $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$, die den mittleren quadratischen Fehler $\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 \, \mathrm{d}x$ minimiert.

Aufgabe: Wie bestimmen Sie die Parameter $c_k \in \mathbb{C}$ möglichst effizient?

Lösung: Als Fourier–Koeffizienten, also $c_k = \langle e_k \,|\, f \rangle$! Dass dies eine optimale Lösung ist, sogar die einzige, verdanken wir folgendem Satz.

Den Approximationsfehler, also die verbleibende Differenz $f_n - f$, können wir auf viele verschiedene Weisen messen und bewerten, etwa durch das Supremum $\sup|f_n - f|$ oder $\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^p \, \mathrm{d}x$. Diese Normen sind in Analysis, Numerik und Optimierung wichtig, erfordern jedoch sehr aufwändig maßgeschneiderte Methoden. Nur für $p = 2$ haben wir eine so schöne und einfache Antwort!

Bestapproximation durch Orthogonalprojektion

Satz S3F: Gauß 1795, Bessel 1818

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit hermitescher Form $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$. Sei $U \le V$ ein Unterraum mit einer Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_n$ oder allgemein einer Orthogonalbasis mit $\langle e_k \,|\, e_k \rangle > 0$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$.

(1) **Orthogonalprojektion**: Zu jedem $v \in V$ existiert genau ein Vektor $v^* = \sum_{k=1}^{n} e_k v_k \in U$ mit $(v - v^*) \perp U$. Dieser ist explizit gegeben durch

$$v_k = \langle e_k \,|\, v \rangle / \langle e_k \,|\, e_k \rangle, \quad \text{seine Fourier–Koeffizienten.}$$

(2) **Bestapproximation**: Für alle Konkurrenten $u \in U \smallsetminus \{v^*\}$ gilt

$$\|v - u\|^2 \;=\; \|v - v^*\|^2 + \|v^* - u\|^2 \;>\; \|v - v^*\|^2.$$

(3) **Bessel–Gleichung**: Dank $v = v^* + (v - v^*)$ und Pythagoras S3A gilt

$$\|v\|^2 \;=\; \|v^*\|^2 \;+\; \|v - v^*\|^2 \;\; \text{(Approximationsfehler)}$$

(4) Zusammen mit $\|v - v^*\|^2 \ge 0$ folgt $\|v\|^2 \ge \|v^*\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|e_k\|^2 |v_k|^2 \ge 0$.

Bestapproximation durch Orthogonalprojektion

Beweis: (1) Genau dann gilt $(v - v^*) \perp U$, wenn für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$0 \overset{!}{=} \langle e_k \,|\, v - v^* \rangle \overset{\text{Lin}}{=} \langle e_k \,|\, v \rangle - \textstyle\sum_j \langle e_k \,|\, e_j \rangle \, v_j \overset{\text{ONB}}{=} \langle e_k \,|\, v \rangle - \langle e_k \,|\, e_k \rangle \, v_k$$

Es gibt genau eine Lösung: $v^* = \sum_{k=1}^{n} e_k v_k$ mit $v_k = \langle e_k \,|\, v \rangle / \langle e_k \,|\, e_k \rangle$.

(2) Für jeden Konkurrenten $u \in U$ gilt $u = v^* + \sum_k e_k \mu_k$ mit $\mu \in \mathbb{K}^n$, also

$$\|v - u\|^2 \overset{\text{Def}}{=} \big\|(v - v^*) - \textstyle\sum_k e_k \mu_k\big\|^2 \overset{\text{S3A}}{=} \|v - v^*\|^2 + \textstyle\sum_k \|e_k\|^2 |\mu_k|^2$$

(3) Dies folgt aus der orthogonalen Zerlegung $v = v^* + (v - v^*)$. $\boxed{\text{QED}}$

☺ Approximation interessiert uns in jedem $\mathbb{K}$–Vektorraum V mit Norm. Speziell für ein Skalarprodukt genügt hierzu die Orthogonalprojektion! Ich formuliere den Satz umsichtig mit minimalen Voraussetzungen:

☺ Für die Aussagen (1–3) genügt eine hermitesche Form $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$. Dank der vorausgesetzten Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_n$ ist sie positiv definit auf U. Für (1) genügt schon $\langle e_k \,|\, e_k \rangle \neq 0$, erst für (2) benötigen wir $\langle e_k \,|\, e_k \rangle > 0$. Für die Ungleichung (4) genügt, dass $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$ auf V positiv semidefinit ist.

Näherungslösung eines überbestimmten Gleichungssystems

Problemstellung: Zu lösen sei über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ das Gleichungssystem

$$\boxed{Ax = b}$$

mit $b \in \mathbb{K}^m$ und $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ von vollem Rang $\operatorname{rang} A = n \le m$.

(0) Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^m$ die Spalten von A und $U = \langle a_1, \dots, a_n \rangle_{\mathbb{K}}^! \le \mathbb{K}^m$ der Spaltenraum von A. Genau dann ist $Ax = b$ lösbar, wenn $b \in U$ gilt.

(1) Allgemein suchen wir Näherungslösungen $x^* \in \mathbb{K}^n$. Der Fehlervektor

$$\boxed{v = Ax^* - b}$$

soll dabei möglich klein sein, wir wollen also die Norm $\|v\|$ minimieren. Nach Satz S3F ist dies äquivalent zu $v \perp U$, und somit zu $v \perp a_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, kurz $A^\dagger v = 0$. Ausgeschrieben bedeutet das:

$$\boxed{A^\dagger A x^* = A^\dagger b}$$

☺ Statt unserer ursprünglichen, eventuell überbestimmten Gleichung $Ax = b$ lösen wir diese Umformung; die Letztere ist eindeutig lösbar.

Näherungslösung eines überbestimmten Gleichungssystems

Lemma S3G: die hermitesche Matrix $A^\dagger A$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ist $A^\dagger A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ hermitesch (symmetrisch über $\mathbb{R}$) und erfüllt $\operatorname{Ker}(A^\dagger A) = \operatorname{Ker} A$ und somit $\operatorname{rang}(A^\dagger A) = \operatorname{rang} A$.

Beweis: Es gilt $(A^\dagger A)^\dagger = A^\dagger (A^\dagger)^\dagger = A^\dagger A$. Wir zeigen $\operatorname{Ker}(A^\dagger A) = \operatorname{Ker} A$:

Klar ist „$\supseteq$“. Wir zeigen „$\subseteq$“: Hierzu sei $v \in \operatorname{Ker}(A^\dagger A)$, also $A^\dagger A v = 0$. Dann gilt $0 = v^\dagger (A^\dagger A v) = (Av)^\dagger (Av)$, also $Av = 0$, somit $v \in \operatorname{Ker} A$.

Daraus folgt $\operatorname{rang}(A^\dagger A) = \operatorname{rang} A$ dank Rangsatz M1v. QED

Bemerkung: Wir nutzen hier wesentlich $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und die positive Definitheit des euklidischen Skalarprodukts $\langle u \mid v \rangle = u^\dagger v$.

Über beliebigen Körpern gilt diese Aussage nicht! Als einfaches Gegenbeispiel betrachte man die Matrix $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{F}_2^2$ mit $A^\top A = 0$.

? Was tut hier die Moore–Penrose–Pseudoinverse $A^+ = (A^\dagger A)^{-1} A^\dagger$? Ganz einfach: orthogonale Projektion auf das Bild $\operatorname{Im} A$, dann Urbild.

☺ Diese elegante Technik bauen wir in §T5.2 in voller Allgemeinheit aus.

Näherungslösung eines überbestimmten Gleichungssystems

Satz S3H: Näherungslösung eines überbestimmten Gleichungssystems

Zu lösen sei über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ das lineare Gleichungssystem

$$\boxed{Ax = b}$$

mit $b \in \mathbb{K}^m$ und $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ von vollem Rang $\operatorname{rang} A = n \le m$.

(0) Dank S3F existiert dann genau eine Bestapproximation $x^* \in \mathbb{K}^n$ mit minimaler Fehlernorm $\|Ax^* - b\|$, gegeben durch $A^\dagger A x^* = A^\dagger b$.

(1) Dank des vorigen Lemmas ist $A^\dagger A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar, also gilt:

$$\boxed{x^* = (A^\dagger A)^{-1} A^\dagger b}$$

(2) Die QR–Zerlegung $A = QR$ dank Satz S3E vereinfacht dies zu

$$\boxed{Rx^* = Q^\dagger b}$$

Diese Gleichung kann durch Rückwärtseinsetzen leicht gelöst werden.

Näherungslösung eines überbestimmten Gleichungssystems

Beweis: Die Aussagen (0) und (1) haben wir zuvor schon nachgerechnet.

(2) Wir zerlegen $A = QR$ in $Q \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit $Q^\dagger Q = E_n$ und $R \in \mathbb{R}_n^{>0}(\mathbb{K})$. Aus $A^\dagger A x^* = A^\dagger b$ folgt $R^\dagger Q^\dagger Q R x^* = R^\dagger Q^\dagger b$, also $Rx^* = Q^\dagger x$. QED

☺ Wir nennen $A^+ = (A^\dagger A)^{-1} A^\dagger$ daher die **Pseudoinverse** zu A. Zur Gleichung $Ax = b$ berechnet sie die Näherungslösung $x^* = A^+ b$.

Ist die Matrix A invertierbar, so auch $A^\dagger$, und dann gilt $A^+ = A^{-1}$. In diesem Falle ist unsere Näherungslösung die exakte Lösung.

Aus der QR–Zerlegung $A = QR$ folgt $A^+ = R^{-1} Q^\dagger$. Das ist besonders elegant und einfach zu rechnen.

☺ Die QR–Zerlegung ist ein Standardverfahren der (numerischen) Linearen Algebra und in jeder guten Softwarebibliothek professionell implementiert. Darauf können und sollten wir bewusst zurückgreifen.

Daher ist es sinnvoll, ein gegebenes Problem, hier unser $Ax = b$, auf ein solches, bewährtes Standardverfahren zurückzuführen. Sobald uns dies gelingt, ist unser Problem gelöst.

Die Methode der kleinsten Quadrate

Die hier gezeigte Technik heißt **Methode der kleinsten Quadrate**, denn sie minimiert die Summe der Fehlerquadrate: Zu $x^* \in \mathbb{K}^n$ lässt $y^* = Ax^*$ den Fehler $\varepsilon = y^* - b$. Wir minimieren $\|Ax^* - b\|^2 = \sum_{i=1}^m |\varepsilon_i|^2 =: \varepsilon^2$.

Sie ist ein wunderbar-geniales Universalwerkzeug, beginnend mit der Bestapproximation S3F nach Gauß–Bessel, über die Näherungslösung S3H eines überbestimmten Gleichungssystems dank der Pseudoinversen $A^+ = (A^\dagger A)^{-1} A^\dagger$, hin zu zahlreichen Varianten und Anwendungen der Ausgleichsrechnung etwa in der Numerik (siehe §T5.2), der Statistik oder jüngst im Maschinellen Lernen. Abstrakt heißt vielseitig anwendbar!

Überbestimmte Gleichungssysteme $Ax = b$ treten typischerweise wie folgt auf: Wir interessieren uns für eine (kleine) Anzahl von Kenngrößen $x_1, \dots, x_n$. Zu ihrer Bestimmung haben wir eine (große) Anzahl von Messungen $b_1, \dots, b_m$. Bei jedem Messvorgang treten unvermeidliche Messfehler auf, daher ist es im Prinzip vorteilhaft, möglichst viele Messungen zu machen. Andererseits können wir dann nicht mehr erwarten, hierzu eine exakte Lösung x zu finden.

Die Methode der kleinsten Quadrate

Die Methode der kleinsten Quadrate wurde unabhängig von Gauß und Legendre entwickelt (Legendre veröffentlichte sie 1805, Gauß 1809). Beide nutzten dieses Verfahren, um astronomische Umlaufbahnen anhand von Beobachtungsdaten möglichst genau zu bestimmen. Ungenauigkeiten bei der astronmischen Messung sind unvermeidbar und bereiten notorisch numerische Probleme. Die Methode löst sie alle!

Am Neujahrstag 1801 entdeckte der Astronom Giuseppe Piazzi den Zwergplaneten Ceres. Vierzig Tage lang konnte er seine Bahn verfolgen, doch dann verschwand Ceres schon hinter der Sonne. Viele Astronomen versuchten erfolglos, anhand von Piazzis ersten Beobachtungensdaten die Bahn zu berechnen und zu verfolgen, doch Ceres bleib verschwunden.

Dem 24-jährigen Gauß gelang der Durchbruch, die Bahn wesentlich genauer zu berechnen, indem er zur Ausgleichsrechnung die Methode der kleinsten Quadrate nutzte. Ausgehend von Gauß' Vorhersage konnte der Astronom Franz Xaver von Zach nach beinahe einem ganzen Jahr, am 7. und 31. Dezember 1801 Ceres tatsächlich wiederfinden.

Die Methode der kleinsten Quadrate

Ceres befand sich etwa 7° von der zuvor vermuteten Stelle, also mehr als 13 Vollmondbreiten. Das illustriert die schwierige Datenlage und die durchschlagende Verbesserung durch Mathematik und neue Verfahren. Dieser sensationelle Erfolg machten Gauß und seine Methode berühmt.

Übrigens nutzte Gauß im Zuge seiner astronomischen Berechnungen ganz systematisch noch ein weiteres wichtiges Werkzeug: die Lösung linearer Gleichungssysteme durch sukzessive Elimination der Variablen. Diese Rechenmethode war zuvor schon benutzt worden, doch Gauß führte sie virtuos zu höchster Blüte. Seine erste Veröffentlichung zu diesem Thema stammt aus dem Jahr 1810. Die Mathematik allgemein, und speziell die Lineare Algebra, entspringt und nützt direkt praktischen Anwendungen. Sie als abstrakt zu beschimpfen zeugt von Ignoranz.

Sowohl das Ausgleichs- als auch das Eliminationsverfahren wurden in der Folgezeit in der Geodäsie zur Landvermessung eingesetzt. Daher ist der zweite Namensgeber des Gauß–Jordan–Verfahrens nicht etwa der Mathematiker Camille Jordan, sondern der Geodät Wilhelm Jordan.

Die Methode der kleinsten Quadrate

Als Podcast `www.deutschlandfunk.de/sternzeit-15-juli-2026-piazzi`

Dieser historische Rückblick ist in sich schon eine faszinierende Geschichte. Zudem sehen wir daran erneut überaus eindrücklich, dass die scheinbar so abstrakten Methoden der Linearen Algebra auf ganz konkrete Fragestellungen und Bedürfnisse antworten.

> *Es gibt immer noch Hochschullehrer, die jede Beschäftigung mit Anwendungen als „Banausentum" nicht genug verachten können. Der Hochmut, der in solchen Ansichten liegt, muß aufs schärfste bekämpft werden. […] Unsere Allergrößten, wie Archimedes, Newton, Gauß, haben stets Theorie und Anwendungen gleichmäßig umfasst.*
>
> Felix Klein (1849–1925): *Elementarmathematik* (1909)

Mathematik ist immer beides: sowohl abstrakte Theorie als auch konkrete Anwendung; sie sind keine Gegensätze, sie ergänzen sich, die eine kann nur mit der anderen dauerhaft erfolgreich sein.

Am besten, Sie erlernen und beherrschen beides!

Isometrische Homomorphismen erhalten die Form.

Definition S4A: Isometrie sesquilinearer Räume

Ein **isometrischer Homomorphismus** $f : (U, \alpha) \to (V, \beta)$ sesquilinearer Räume über $(\mathbb{K}, \sigma)$ ist eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung, die die Formen erhält:

$$\beta(f(u), f(v)) = \alpha(u, v) \quad \text{für alle } u, v \in U$$

Ist f zudem injektiv, so nennen wir f eine **isometrische Einbettung**.
Ist f sogar bijektiv, so nennen wir f einen **isometrischen Isomorphismus**.

Beispiel: Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n : v \mapsto Av$.
Isometrie $u^\dagger A^\dagger A\, v = u^\dagger v$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^m$ bedeutet $A^\dagger A = 1_{m\times m}$.
Die Spalten von A sind demnach orthonormal (S10), somit insbesondere linear unabhängig (S10), und demnach ist f injektiv.

Aufgabe: Ist α regulär, so ist jede Isometrie $f : (U, \alpha) \to (V, \beta)$ injektiv.

Beweis: Regulär bedeutet, zu jedem Verdächtigen $v \in U \setminus \{0\}$ existiert ein Zeuge $u \in U$ mit $\alpha(u, v) \neq 0$. Es folgt $\beta(f(u), f(v)) \neq 0$, also $f(v) \neq 0$.
(Ist α sogar anisotrop, so genügt $u = v$ als Zeuge, denn $\alpha(v, v) \neq 0$.)

Isometrische Homomorphismen erhalten die Form.

☺ Im Raum (V, β) verbinden sich *zwei* Strukturen: Der lineare Raum V über dem Grundring $(\mathbb{K}, \sigma)$, und die sesquilineare Form $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$. Erst mit der Form β können wir anfangen, Geometrie zu treiben, etwa Orthogonalität $u \perp v$ erklären durch $\beta(u, v)$ und noch viel Schönes mehr. Diese geometrischen Begriffe haben allein im linearen Raum V noch keinen Sinn, erst die Form β erschließt uns die geometrische Welt.

☺ Zu Recht möchten Sie einwenden, dass Sie hier beim besten Willen noch keine Geometrie sehen. Beginnen wir also mit dem vertrauten und konkreten Raum $(\mathbb{R}^n, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ und seinen großen Brüdern $(\mathbb{C}^n, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ und $(\mathbb{H}^n, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$. Hier spüren Sie den geometrischen Zugewinn sehr deutlich!

Mutig und selbstbewusst erlauben wir über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$ hinaus einen beliebigen *Ring $(\mathbb{K}, \sigma)$, und über das anschaulich vertraute Standardskalarprodukt hinaus ganz allgemein sesquilineare Formen. Dieser Mut wird belohnt. Er fordert sorgsame Grundlagen, präzise Begriffe und wirksame Werkzeuge. Das ist nach anfänglicher Mühe ein Gewinn: Wir verstehen genauer und können allgemeiner anwenden.

Isometrische Homomorphismen erhalten die Form.

Ein Homomorphismus ist eine strukturerhaltende Abbildung.
Hier, für sesquilineare Räume, nennen wir dies kurz **Isometrie**.

Satz S4A: Identität und Komposition und Umkehrung

(1) Für jeden sesquilinearen Raum (V, β) ist $\mathrm{id}_V : V \to V$ eine Isometrie.

(2) Sind $f : (U, \alpha) \to (V, \beta)$ und $g : (V, \beta) \to (W, \gamma)$ Isometrien, so auch ihre Komposition $g \circ f : (U, \alpha) \to (W, \gamma)$.

(3) Ist $f : (U, \alpha) \to (V, \beta)$ eine Isometrie und bijektiv, so auch die Umkehrung $g = f^{-1} : (V, \beta) \to (U, \alpha)$.

Beweis: (1) Wir haben $\mathrm{id}_V \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$ und für alle $u, v \in V$ gilt:

$$\beta(\mathrm{id}_V(u), \mathrm{id}_V(v)) = \beta(u, v)$$

(2) Wir haben $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, W)$ und für alle $u, v \in U$ gilt:

$$\gamma((g \circ f)(u), (g \circ f)(v)) = \gamma(g(f(u)), g(f(v))) = \beta(f(u), f(v)) = \alpha(u, v)$$

(3) Wir haben $f^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$ und für alle $u, v \in V$ gilt:

$$\alpha(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) = \beta(f(f^{-1}(u)), f(f^{-1}(v))) = \beta(u, v)$$

Isometrische Homomorphismen erhalten die Form.

Das sind die vertrauten Rechenregeln, wie wir sie von Homomorphismen nun schon lange kennen und lieben: Lineare Räume / Vektorräume und lineare Abbildungen, zuvor Ringe / Körper und ihre Homomorphismen, ebenso Monoide / Gruppen und ihre Homomorphismen. Kurzum:

Sesquilineare Räume (V, β) und ihre Isometrien bilden eine Kategorie. Das bedeutet, es gelten die Eigenschaften (1) und (2) des Satzes.

Die Denkweise in strukturerhaltenden Abbildungen ist ein Leitmotiv moderner Mathematik. Selbst wenn man diese nicht in den Mittelpunkt des Interesses rückt, so sind sie doch immer und überall präsent als unsere universellen Werkzeuge und freundlichen Helferlein – überall wo Abbildungen komponiert und invertiert werden.

Diese Rechenregeln sind zugegeben noch nicht besonders tiefsinnig und ihr Beweis ist nahezu mühelose Routine, dennoch es lohnt sich, sie explizit festzuhalten und sich früh bewusst zu machen, allein schon um die nötigen Definitionen zu festigen. Wir werden sie nämlich erstaunlich oft nutzen, dann also besser sicher-bewusst als unsicher-unbewusst.

Isometrische Homomorphismen erhalten die Form.

Seien (U, α) und (V, β) hermitesche Räume über dem *Ring $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit ihren quadratischen Formen $p(u) = \alpha(u, u)$ und $q(v) = \beta(v, v)$. Eine **Isometrie** $f : (U, p) \to (V, q)$ quadratischer Räume ist eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung $f : U \to V$ mit $p(u) = q(f(u))$ für alle $u \in U$.

Satz S4B: Die quadratische Form genügt.

Der *Ring $(\mathbb{K}, \sigma)$ sei nullteilerfrei und $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$.
Jede Isometrie $f : (U, p) \to (V, q)$ quadratischer Räume über $(\mathbb{K}, \sigma)$ ist eine Isometrie $f : (U, \alpha) \to (V, \beta)$ der zugehörigen hermiteschen Räume.

Beweis: Wir definieren die SForm $\gamma : U \times U \to \mathbb{K}$ durch die Differenz $\gamma(u, v) = \alpha(u, v) - \beta(f(u), f(v))$. Da α und β hermitesch über $(\mathbb{K}, \sigma)$ sind, gilt dies auch für γ. Ihre quadratische Form ist $r(u) = p(u) - q(f(u)) = 0$. Dank Polarisierung S1L folgt $\gamma = 0$, also $\alpha(u, v) = \beta(f(u), f(v))$. QED

Beispiel: Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n : v \mapsto Av$ linear. Ist f normerhaltend, also $\|f(u)\| = \|u\|$ für alle $u \in \mathbb{K}^m$, so ist f formerhaltend $\langle f(u) \mid f(v) \rangle = \langle u \mid v \rangle$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^m$, also eine euklidische Isometrie.

Isometrische Homomorphismen erhalten die Form.

Die Polarisierung kennen wir in zwei Härtegraden, siehe S1L: Über $(\mathbb{K}, \mathrm{id})$ haben wir Bilinearformen β. Ihre zugehörigen quadratischen Formen q können wir präzise beschreiben, sowie explizit die jeweilige Bilinearform rekonstruieren (sofern $2 \in \mathbb{K}^\times$ gilt, wir also halbieren können).

Allgemein über $(\mathbb{K}, \sigma)$ ist die Zuordnung $\beta \mapsto q$ immerhin noch injektiv (sofern $2 \neq 0$ und $\mathbb{K}$ nullteilerfrei ist). Diese allgemeine Rekonstruktion ist nicht explizit, daher weniger befriedigend, aber ebenso nützlich, wie wir hier erneut sehen. Sie erlaubt uns, quadratische Formen über allen Körpern $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit $\operatorname{char} K \neq 2$ einheitlich zu beantworten.

Die wichtigsten Anwendungen finden wir natürlich über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$. Hier können wir mit etwas Scharfsinn explizit polarisieren, und das ist für die Geometrie überaus hilfreich: Allein aus der Norm $\|\text{-}\|$ oder dem Normquadrat $\|\text{-}\|^2$ können wir dank Parallelogrammgleichung das Skalarprodukt $\langle \text{-} | \text{-} \rangle$ rekonstruieren, siehe Satz S2I. Wenn man es recht bedenkt, ist das schon höchst erstaunlich und soll hier zitierfähig festgehalten und gebührend zelebriert werden.

Isometrische Homomorphismen erhalten alle Abstände.

Korollar S4B: Isometrie bezüglich Skalarprodukt, Norm, Metrik

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung zwischen unitären Räumen $(V, \langle \text{-} | \text{-} \rangle_V)$ und $(U, \langle \text{-} | \text{-} \rangle_U)$. Dann sind äquivalent:

(1) Die lineare Abbildung $f : V \to U$ erhält alle Skalarprodukte:

$$\boxed{\langle f(v) \mid f(v') \rangle_U = \langle v \mid v' \rangle_V \quad \text{für alle } v, v' \in V}$$

(2) Die lineare Abbildung $f : V \to U$ erhält alle Normen:

$$\boxed{\|f(v)\|_U = \|v\|_V \quad \text{für alle } v \in V}$$

(3) Die lineare Abbildung $f : V \to U$ erhält alle Abstände:

$$\boxed{d_U(f(v), f(v')) = d_V(v, v') \quad \text{für alle } v, v' \in V}$$

Beweis: Für „(1) ⇐ (2)“ nutzen wir Polarisierung S2I über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Die anderen Implikationen „(1) ⇒ (2) ⇔ (3)“ sind trivial. QED

Isometrische Homomorphismen erhalten alle Abstände.

Das Skalarprodukt $\langle \text{-} | \text{-} \rangle$ auf V ist das stärkste dieser drei Werkzeuge: Damit messen wir in V insbesondere Winkel, Längen und Abstände.

Die Norm $\|\text{-}\|$ misst nur noch die Längen von Vektoren, aber keine Winkel mehr. Das ist also deutlich schwächer.

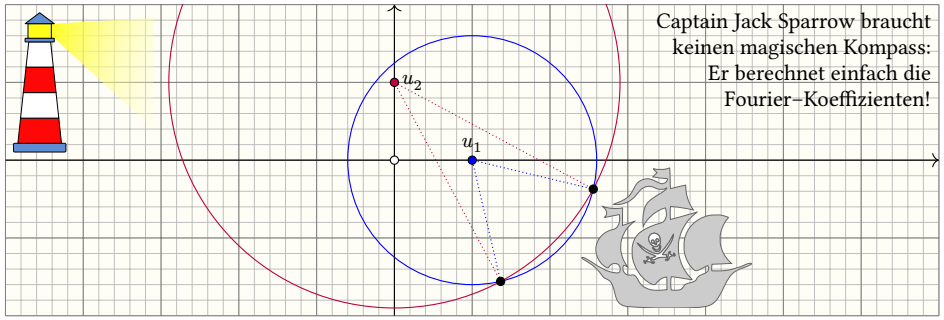
Die Metrik d schließlich misst nur noch Abstände und nutzt die lineare Struktur überhaupt nicht.

Das Skalarprodukt $\langle \text{-} | \text{-} \rangle$ auf V induziert die Norm $\|\text{-}\|$, und diese induziert die Metrik d. Der Informationsgehalt nimmt dabei scheinbar strikt ab. Klar ist: Jede Abbildung, die alle Abstände erhält, erhält auch alle Längen $\|v\| = d(0, v)$. Bemerkenswert ist hingegen: Jede lineare Abbildung, die die Norm erhält, erhält automatisch immer auch das Skalarprodukt.

Erinnerung: Die eindeutige Rekonstruierbarkeit (2) ⇒ (1) gilt über jedem involutiven Ring $(\mathbb{K}, \sigma)$, der nullteilerfrei ist und $2 \neq 0$ erfüllt, siehe S1L.

☺ Speziell über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ haben wir die Parallelogrammgleichung und daraus die elegant-explizite Polarisierung S2I.

Globale Positionsbestimmung



Wir finden $\|x-u_i\|^2 = \langle x-u_i \,|\, x-u_i\rangle = \|x\|^2 - 2\langle u_i \,|\, x\rangle + \|u_i\|^2$, umgestellt also $\langle u_i \,|\, x\rangle = [d(0,u_i)^2 + d(0,x)^2 - d(u_i,x)^2]/2$.

Satz S4c: Positionsbestimmung aka *global positioning system* / GPS

(0) Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Orthonormalbasis $(u_1,\dots,u_n)$. Jeder Punkt $x = \sum_{i=1}^n u_i\lambda_i$ ist bestimmt durch seine Abstände zu $0, u_1, \dots, u_n$ dank

$$\boxed{\lambda_i = \langle u_i \,|\, x\rangle = (1 + d(0,x)^2 - d(u_i,x)^2)/2.}$$

Globale Positionsbestimmung

Zahlenbeispiel: Finden Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}^3$ mit folgenden Abständen:

$$d(x,0) = \sqrt{35},\quad d(x,e_1) = \sqrt{30},\quad d(x,e_2) = \sqrt{38},\quad d(x,e_3) = \sqrt{26}.$$

Lösung: Dank unserer Vorbereitung lesen wir die Koordinaten ab:

$$\begin{aligned} x_1 &= (1+35-30)/2 = 3 \\ x_2 &= (1+35-38)/2 = -1 \\ x_3 &= (1+35-26)/2 = 5 \end{aligned}$$

Eindeutigkeit: Dank S4c ist dies die einzig mögliche Lösung.
Existenz: Der Punkt $x = (3,-1,5)$ erfüllt die geforderten Abstände.
Machen Sie flink die Probe, indem Sie die vier Abstände ausrechnen!

Übung: Klar ist, dass die *drei* Koordinaten in $\mathbb{R}^3$ die *vier* Abständen in $\mathbb{R}^4_{\ge 0}$ definieren. Aber warum gelingt dies *eindeutig* auch umgekehrt? Sind je $n+1$ Abstände in $\mathbb{R}^{n+1}_{\ge 0}$ durch einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ realisierbar? Diskutieren Sie für $n = 1,2,3$ möglichst einfache Gegenbeispiele!

Globale Positionsbestimmung

Im Allgemeinen sind die Referenzpunkte keine Orthonormalbasis. Zum Glück kennen wir die Berechnung der Fourier–Koeffizienten S1o.

Aufgabe: Formulieren und beweisen Sie dies für jede affin reguläre Basis!

Satz S4c: Positionsbestimmung aka Fourier–Koeffizienten

(1) Sei (V,β) ein symmetrischer Raum über dem CRing $\mathbb{K}$ mit $2 \in \mathbb{K}^\times$.

Gegeben seien Punkte $u_0, u_1, \dots, u_n \in V$ als $\mathbb{K}$–affine Basis, das heißt, $(u_1-u_0, \dots, u_n-u_0)$ ist eine $\mathbb{K}$–lineare Basis von V. Zudem sei ihre Gram–Matrix $B = \beta(u_i-u_0, u_j-u_0)_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar.

Jeder Punkt $x = u_0 + \sum_{i=1}^n (u_i-u_0)\lambda_i$ in V ist eindeutig bestimmt durch seine „Abstände“ $q(x-u_i)$ zu den Referenzpunkten $u_0, u_1, \dots, u_1$.

Beweis: Wir dürfen $u_0 = 0$ annehmen, notfalls verschieben wir um u_0.
Wir finden $q(x-u_i) = \beta(x-u_i, x-u_i) = q(x) - 2\beta(x,u_i) + q(u_i)$.
Damit erhalten wir $\mu_i := \beta(u_i,x) = (q(u_i) + q(x) - q(x-u_i))/2$.
Dank S1o gilt $\mu = B\lambda$, wir erhalten so $\lambda = B^{-1}\mu \in \mathbb{K}^n$. QED

Globale Positionsbestimmung

Das ist die bewährte Polarisierung, dank *zweiter* binomischer Formel. Eine allgemeine Konfiguration verlangt Inversion der Gram–Matrix B. Im Spezialfall einer Orthonormalbasis, mit $B = 1$, entfällt dieser Schritt, und die Positionsbestimmung (0) wird rechnerisch verblüffend einfach.

Die obige Graphik zeigt: Nur n Referenzpunkte genügen noch *nicht*, um durch Abstandsmessung im $\mathbb{R}^n$ die Position eindeutig festzulegen. Mit $n+1$ affin unabhängigen Referenzpunkten gelingt es jedoch! Das ist die Grundlage der GPS-Navigation, siehe Seite S413.

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ schneiden wir Kreise, im Raum $\mathbb{R}^3$ Sphären, etc. Auf den ersten Blick müssen wir also fürchten, quadratische Ausdrücke auflösen zu müssen (oder gar noch Schlimmeres). Die genial-einfache Polarisierung reduziert dies jedoch effizient auf lineare Gleichungen.

Wir erkennen hierin ein erfreuliches Leitmotiv der Linearen Algebra: Quadratische und bilineare Formen lagern noch so nahe zur Linearität, dass wir die bewährten lineare Methoden auch hier einsetzen können. Das ist wunderschön und nützlich, sehr geschickt und effizient!

Genauigkeit und Messfehler bei der Satellitennavigation

Einsteins Relativität wird verehrt als Inbegriff einer genialen Theorie, sie genießt Kultstatus in der Popkultur. Wie jede mathematische Theorie gilt sie vielen jedoch als nutzlos-abstrakt und fern alltäglichen Lebens. Das Gegenteil ist der Fall: Wir alle nutzen die Relativitätstheorie täglich! Sie ist nicht nur Grundlage der modernen Astronomie, von schwarzen Löchern bis Gravitationswellen, sondern mitten im Alltag angekommen, insbesondere in den Milliardenprojekten rund um Satellitennavigation.

Flugzeuge, Schiffe, Autos, Mobiltelephone nutzen Satellitennavigation, genauer das **Global Navigation Satellite System** (GNSS) und speziell das US-amerikanische **NAVSTAR Global Positioning System** (GPS). Relativität ist dabei nicht bloß eine unwichtige Spitzfindigkeit, sondern ihr genaues Verständnis und ihre praktische Anwendung sind essentiell.

Die GPS-Konfiguration besteht aus (mindestens) 24 Satelliten, sodass von jedem Punkt der Erde zu jeder Zeit mindestens vier sichtbar sind. Jeder Satellit S_i sendet ständig seine aktuelle Position und Systemzeit. Aus der Signallaufzeit berechnet der Empfänger die Entfernung r_i zu S_i.

Genauigkeit und Messfehler bei der Satellitennavigation

Die Entfernung r_1 zu einem ersten Satelliten S_1 genügt noch nicht: Der Empfänger findet sich irgendwo auf der Sphäre um S_1 mit Radius r_1. Die Entfernung r_2 zu einem zweiten Satelliten S_2 schränkt weiter ein: Schnittmenge zweier Sphären (in allgemeiner Lage) ist eine Kreislinie. Die Entfernung r_3 zu einem dritten Satelliten S_3 lässt als Schnittmenge nur noch zwei Punkte. Eine der beiden Lösungen liegt weit über der Erde, somit ist die andere als richtige erkennbar. Diese quadratischen Gleichungen werden in kartesischen Koordinaten gelöst und geozentrisch in Kugelkoordinaten umgerechnet zu geographischer Länge φ, Breite ϑ, Höhe $h = r - r_E$.

Wir benötigen Präzision! Jeder Satellit trägt eine Atomuhr mit einer wöchentlichen Genauigkeit von $\theta \approx 1\,\mathrm{ns} = 10^{-9}\,\mathrm{s}$. Im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit $c \approx 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ entspricht das der räumlichen Entfernung $c\,\theta = 30\,\mathrm{cm}$. Handelsübliche mobile GPS-Empfänger haben jedoch keine langzeitstabile Atomuhr, sondern nur eine lokale Messgenauigkeit um 10 ns, also etwa 3 m. Hinzu kommen zufällige Störungen und Messfehler. Die erreichte Genauigkeit ist bemerkenswert und liegt bei etwa 10 m! Im Auto genügt dies gerade noch für Position und Geschwindigkeit.

Räumlich genügen die Abstände zu drei Satelliten. GPS-Empfänger führen keine ausreichend genaue absolute Uhrzeit, um die Laufzeiten präzise genug zu messen. Deshalb wird zusätzlich das Signal eines vierten Satelliten genutzt, und so die obige Rechnung statt im euklidischen $\mathbb{R}^3$ in der vierdimensionalen Minkowski–Raumzeit $\mathbb{R}^{3+1}$ durchgeführt. Das Prinzip ist dasselbe.

Siehe G. Strang, K. Borre: *Linear Algebra, Geodesy, and GPS* (1997) sowie für technische Spezifikationen `www.navcen.uscg.gov/sites/default/files/pdf/gps/sigspec/gpssps1.pdf` Damit können Sie die konkreten Daten einsetzen und selbständig alle Rechnungen prüfen. Die Mühe lohnt sich, denn GPS ist ein mathematisch-physikalisch-technisches Meisterwerk.

Genauigkeit und Messfehler bei der Satellitennavigation

Um die nötige extreme Präzision zu gewährleisten, müssen vermeidbare Fehler als solche erkannt und möglichst behoben werden. Dazu zählen insbesondere relativistische Effekte, diese sind hier deutlich spürbar! Ein Objekt mit Geschwindigkeit v im Erdgravitationsfeld GM/r hat eine Eigenzeit $\Delta\tau$ im Vergleich zur Referenzzeit Δt weit außerhalb der Erde:

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} \approx 1 - \left(\frac{v^2}{2c^2} + \frac{GM}{rc^2}\right)$$

Im Vergleich zwischen Satellit S und Empfänger E erhalten wir somit:

$$\frac{\Delta\tau_S}{\Delta\tau_E} \approx 1 - \left(\frac{v_S^2}{2c^2} + \frac{GM}{r_S\,c^2}\right) + \left(\frac{v_E^2}{2c^2} + \frac{GM}{r_E\,c^2}\right)$$

Für GPS-Satelliten gilt $r_S \approx 26580\,\mathrm{km}$ und $v_S \approx 3872\,\mathrm{m/s}$. Am Äquator haben wir $r_E \approx 6380\,\mathrm{km}$ und $v_E \approx 464\,\mathrm{m/s}$. Die Korrekturen sind also:

$$\begin{aligned}
\text{SRT:}\quad & \frac{v_E^2}{2c^2} - \frac{v_S^2}{2c^2} && \approx\ -8.3 \cdot 10^{-11} && \approx\ -7.2\,\mu\mathrm{s/day} \\
\text{GRT:}\quad & \frac{GM}{r_E c^2} - \frac{GM}{r_S c^2} && \approx\ 5.31 \cdot 10^{-10} && \approx\ 45.9\,\mu\mathrm{s/day}
\end{aligned}$$

Genauigkeit und Messfehler bei der Satellitennavigation

Aufgrund spezieller Relativität (SRT) gehen Satellitenuhren um 7200 ns pro Tag nach, aufgrund allgemeiner Relativität (GRT) um 45900 ns vor, in der Summe also 38600 ns vor. Wir benötigen aber eine Genauigkeit im Bereich von wenigen Nanosekunden! Dazu wird ein genial-einfacher Trick angewendet: Die Satellitenuhren werden nicht auf ihre nominelle Frequenz 10.23 Mhz geeicht, sondern auf 10.229999995453 Mhz. Das erledigt die relativistisch nötige Korrektur! Von der Erde aus gesehen ticken die Satelliten mit der gewünschten Frequenz von 10.23 Mhz.

Die Physik arbeitet seit über hundert Jahren mit Einsteins spezieller Relativitätstheorie (1905) und seiner allgemeinen Relativitätstheorie (1915). Beide sind in vielen Situationen mit großer Genauigkeit experimentell überprüft worden, zum Beispiel durch astronomische Beobachtungen, beim Müon-Zerfall in der Erdatmosphäre, in Teilchenbeschleunigern, und vielen mehr. Die sehr genauen Zeitmessungen des GPSystems sind eine weitere beeindruckende Illustration. Hier wirkt die Theorie auch umgekehrt auf ingenieurstechnische Fragen der Konstruktion: Um die nötige Zeitgenauigkeit zu garantieren, wurden die Satelliten sorgfältig relativistisch korrekt konstruiert. Damit ist Einsteins Relativitätstheorie innerhalb eines Jahrhunderts alltagsrelevant geworden.

Fake science? In Diskussionsforen tobt die Debatte, ob die relativistischen Korrekturen für das Funktionieren des GPSystems *absolut notwendig* sind, oder ob es auch *irgendwie anders* ginge: Speziell für die Positionsbestimmung könnte der Empfänger die Absolutzeit überflüssig machen, indem er nur Laufzeit*differenzen* misst und verrechnet. Das ist eine alternative Herangehensweise, zur (polemischen?) Ausführung siehe `www.alternativephysics.org/book/GPSmythology.htm`. Klar ist und bleibt dabei: Die Zeitdilatation ist real, sie wird im GPSystem tatsächlich gemessen, und ihre Korrektur ist zur *globalen* Kalibrierung der GPSystemzeit notwendig. *Science works!*

Isometrische Abbildungen erhalten paarweise Abstände.

Definition S4D: isometrische Abbildung

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$. Eine **isometrische Abbildung**

(1) ... $f : (V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle_V) \to (U, \langle\text{-}|\text{-}\rangle_U)$ zwischen unitären Räumen ist eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung $f : V \to U$, die alle Skalarprodukte erhält.

(2) ... $f : (V, \|\text{-}\|_V) \to (U, \|\text{-}\|_U)$ zwischen normierten Räumen ist eine $\mathbb{K}$–lineare Abbildung $f : V \to U$, die alle Normen erhält.

(3) ... $f : (V, d_V) \to (U, d_U)$ zwischen metrischen Räumen ist eine (beliebige) Abbildung $f : V \to U$, die alle Abstände erhält.

Ein **Isometriepaar** $(f, g) : (V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle_V) \cong (U, \langle\text{-}|\text{-}\rangle_U)$ besteht aus isometrischen $\mathbb{K}$–Homomorphismen $f : V \to U$ und $g : U \to V$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$ und $f \circ g = \mathrm{id}_U$, ebenso für Normen und Metriken.

Für metrische Räume (3) sind V und U beliebige Mengen, und $f : V \to U$ eine beliebige Abbildung, die lediglich die Abstände erhalten muss. Der folgende Satz rekonstruiert Linearität über $\mathbb{R}$ falls möglich.

Isometrische Abbildungen erhalten paarweise Abstände.

Wenn wir von „Geometrie“ sprechen oder „metrische Eigenschaften“ nutzen, so gibt es hierzu mindestens drei Geschmacksrichtungen: Skalarprodukt, Norm, Metrik (von stark zu schwach, von speziell zu allgemein). Für jede Sichtweise gibt es den passenden Isometriebegriff. Das sind die Homomorphismen in der jeweils betrachteten Kategorie.

Übung: In allen drei Fällen gelten die vertrauten Rechenregeln aus dem obigen Satz S4A, wir erhalten also jeweils eine Kategorie:

1. Unitäre Räume $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle_V)$ und ihre Isometrien
2. Normierte Räume $(V, \|\text{-}\|)$ und ihre Isometrien
3. Metrische Räume (V, d) und ihre Isometrien

☺ Das ist ein weiterer Vorteil der kategoriellen Denkweise: Sie ermutigt, ja zwingt uns dazu, die betrachteten Strukturen explizit zu benennen. Insbesondere hier, wo mehrere Interpretationen nebeneinander möglich und sinvoll sind, führt uns dies geradwegs zu präziser Sprache und klarer Unterscheidung „in welcher Kategorie“ wir gerade arbeiten.

Rigididät euklidischer Isometrien

Eine **affine Abbildung** $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist von der Form $f(x) = Ax + b$ mit linearem Anteil $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und Verschiebungsvektor $b \in \mathbb{R}^n$.

Satz S4E: Rigidität euklidischer Isometrien

Wir betrachten $(\mathbb{R}^m, d)$ und $(\mathbb{R}^n, d)$ mit ihrer euklidischen Metrik.

(1) Eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax + b$ ist isometrisch gdw die Matrix A orthonormale Spalten hat, also $A^\intercal A = 1_{m\times m}$ erfüllt.

(2) Jede isometrische Abbildung $f : (\mathbb{R}^m, d) \to (\mathbb{R}^n, d)$ ist affin-linear wie in (1) angegeben, also von der Form $f(x) = Ax + b$ mit $A^\intercal A = 1_{m\times m}$. Die affine Linearität von f wird hier nicht gefordert, sondern gefolgert!

Bewegung starrer Körper: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^m$ eine beliebige Teilmenge, darin gebe es $x_0, x_1, \dots, x_m \in X$ affin unabhängig, das heißt $x_1 - x_0, \dots, x_m - x_0$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$. Das gilt zum Beispiel falls $\{0, e_1, \dots, e_m\} \subseteq X$.

(3) Dann lässt sich jede isometrische Abbildung $g : (X, d) \to (\mathbb{R}^n, d)$ eindeutig fortsetzen zu einer Isometrie $f : (\mathbb{R}^m, d) \to (\mathbb{R}^n, d)$ wie in (2).

Rigididät euklidischer Isometrien

Sie kennen lineare Abbildungen $g : U \to V$ zwischen linearen Räumen. Affine Abbildungen $f : U \to V$ sind von der Form $f(u) \mapsto g(u) + v_0$, wir erweitern unsere Möglichkeiten um den Verschiebungsvektor $v_0 \in V$. Jede lineare Abbildung g erfüllt zwangsweise $g(0) = 0$, wie sie wissen. Nach Verschiebung erreichen wir nun flexibler $f(0) = g(0) + v_0 = v_0$.

Für viele praktische Anwendungen sind affin-lineare Abbildungen der passende Begriff. Wenn wir zum Beispiel die Bewegung eines Körpers im $\mathbb{R}^3$ beschreiben wollen, etwa ein Fahrzeug, so benötigen wir dazu die Position / Verschiebung und zudem die Orientierung / Drehung im Raum. Genau das leistet eine affine Isometrie wie in (1) erklärt.

Überaus bemerkenswert ist hier die obige Umkehrung (2):
Allein aus (rein metrischer) Isometrie folgt die Linearität!
Das beweisen wir dank obiger Positionsbestimmung S4C.
Es entspricht unserer Erfahrung mit starren Körpern.

Rigididät euklidischer Isometrien

Beispiele: Als vertraute Isometrien des $\mathbb{R}^n$ kennen wir Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen, und somit auch alle Kompositionen davon.

Auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ erhält die Konjugation $\operatorname{conj}_{\mathbb{C}}$ als Spiegelung an der reellen Achse zwar alle Abstände, ist aber nicht $\mathbb{C}$–linear, sondern nur $\mathbb{R}$–linear.

Aufgabe: Aussage (1) haben wir bereits in Korollar S4B bewiesen. Führen Sie das Argument aus, nun zusätzlich mit Verschiebung.

Beweis: (1) Für alle $x \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\begin{aligned} d(0,x)^2 &= |x|^2 &&= x^\top 1_{m\times m}\, x, \\ d(f(0),f(x))^2 &= \left|Ax\right|^2 &&= x^\top A^\top A\, x. \end{aligned}$$

Gleichheit für alle x ist äquivalent zu $A^\top A = 1_{m\times m}$. **Nachrechnen:** Die Implikation „$\Leftarrow$“ ist klar. Wir zeigen „$\Rightarrow$“: Wir vergleichen die quadratischen Formen $p(x) = x^\top 1_{m\times m}\, x$ und $q(x) = x^\top A^\top A\, x$ auf $\mathbb{R}^m$. Beide sind gleich, dank Polarisierung sind auch ihre Bilinearformen gleich, somit auch die darstellenden Matrizen: $1_{m\times m} = A^\top A$.

Rigididät euklidischer Isometrien

(2) Ist $f : (\mathbb{R}^m, d) \to (\mathbb{R}^n, d)$ eine Isometrie, so auch $g : (\mathbb{R}^m, d) \to (\mathbb{R}^n, d)$ verschoben zu $g(x) = f(x) - b$. Wir setzen $b = f(0)$ und erhalten $g(0) = 0$.

(2a) Sei $u_1, \dots, u_m$ in $\mathbb{R}^m$ eine Orthonormalbasis, etwa die kanonische. Die Abstände zwischen $0, u_1, \dots, u_m$ sind $d(0,u_i)^2 = |u_i|^2 = \langle u_i \mid u_i \rangle = 1$, $d(u_i,u_j)^2 = |u_i - u_j|^2 = \langle u_i - u_j \mid u_i - u_j \rangle = |u_i|^2 - 2\langle u_i \mid u_j \rangle + |u_j|^2 = 2$. Dasselbe gilt für ihre Bilder $v_1 = g(u_1), \dots, v_m = g(u_m)$ in $\mathbb{R}^n$, also sind auch diese orthonormal. Wir ergänzen zu einer ONB $v_1, \dots, v_m, \dots, v_n$.

(2a) Für $x \in \mathbb{R}^m$ gilt $x = \sum_{i=1}^m u_i x_i$ mit $x_i = (1 + d(x,0)^2 - d(x,u_i)^2)/2$. Für $y = g(x)$ gilt ebenso $y = \sum_{i=1}^n v_i y_i$ mit $y_i = (1 + d(y,0)^2 - d(y,v_i)^2)/2$. Da g alle Abstände erhält, wissen wir dank Positionsbestimmung S4C:

$$x_i = \frac{1 + d(x,0)^2 - d(x,u_i)^2}{2} = \frac{1 + d(g(x),g(0))^2 - d(g(x),g(u_i))^2}{2} = y_i$$

Es gilt $\sum_{i=1}^m x_i^2 = d(x,0)^2 = d(y,0)^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$, also $y_i = 0$ für $i > m$. Wir schließen daraus $g(u_1x_1 + \dots + u_mx_m) = v_1x_1 + \dots + v_mx_m$. Das zeigt die Behauptung: g ist linear, somit f affin-linear. QED

Rigididät euklidischer Isometrien

Alternativer Beweis: (2) Ist $f : (\mathbb{R}^m, d) \to (\mathbb{R}^n, d)$ eine Isometrie, so auch $g : (\mathbb{R}^m, d) \to (\mathbb{R}^n, d)$ mit $g(x) = f(x) - f(0)$. Zudem gilt nun $g(0) = 0$.

(2a) Die Standardbasis $e_1, \dots, e_m$ des Raum $(\mathbb{R}^m, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ ist orthonormal. Die Abstände zwischen $0, e_1, \dots, e_m$ sind $d(e_i,0)^2 = |e_i|^2 = \langle e_i \mid e_i \rangle = 1$, $d(e_i,e_j)^2 = |e_i - e_j|^2 = \langle e_i - e_j \mid e_i - e_j \rangle = |e_i|^2 - 2\langle e_i \mid e_j \rangle + |e_j|^2 = 2$. Dasselbe gilt für ihre Bilder $v_1 = g(e_1), \dots, v_m = g(e_m)$ in $\mathbb{R}^n$, also sind auch diese orthonormal. Wir ergänzen zu einer ONB $v_1, \dots, v_m, \dots, v_n$.

(2b) Dies beschert uns eine Drehmatrix $T = (v_1, \dots, v_n) \in \mathrm{GO}_n(\mathbb{R})$. Somit ist auch die Komposition $h = T^{-1} \circ g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, nun mit $h(e_i) = e_i$ für alle $i = 1, \dots, m$. Dank Positionsbestimmung S4C folgt $h(x) = (x, 0)$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$. Wir schließen daraus zurück auf $g(x) = Ax$ mit $A = (v_1, \dots, v_m)$ und $f(x) = Ax + b$ mit $b = f(0)$. QED

☺ Dieses raffinierte Argument ist besonders elegant und effizient: Im zweiten Teil nutzen wir die Gruppeneigenschaft von $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Das hilft spürbar: Mehr Struktur heißt weniger Mühsal.

Rigididät euklidischer Isometrien

Wer schon mal Möbel geschleppt oder andere starre Körper bewegt hat, kennt die Rigidität: Die Referenzpunkte $0, e_1, e_2, e_3$ werden starr bewegt, alle anderen Punkte folgen ebenso starr dank Positionsbestimmung S4C.

Der Rigiditätssatz ist einerseits anschaulich physikalisch plausibel, bei genauer Betrachtung jedoch mathematisch höchst erstaunlich. Wie gewinnen wir aus wenig Struktur (hier die Abstände der Metrik) gratis viel Struktur (hier zusätzlich die ersehnte affine Linearität)?

Die erste Schwierigkeit dabei ist, die Aussage zu formulieren, die zweite dann, einen tragfähigen Beweis auszuarbeiten. Beides gelingt Ihnen nun dank wirksamer Werkzeuge.

Kontrast: Ist jede metrische Isometrie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ automatisch $\mathbb{C}$–linear? Nein! Auf $\mathbb{C}$ erhält die Konjugation $\operatorname{conj}_{\mathbb{C}}$ als Spiegelung an der reellen Achse zwar alle Abstände, ist aber nicht $\mathbb{C}$–linear, sondern nur $\mathbb{R}$–linear. Linearität ist also keineswegs automatisch. Für $\mathbb{C}^1$ über $\mathbb{C}$ genügt hierzu nicht allein die Abstandstreue, wir benötigen auch Orientierungstreue.

Übung: Formulieren und beweisen Sie die Rigidität für $\mathbb{C}^n$ über $\mathbb{C}$!

Die unitäre Gruppe $\mathrm{GU}(V,\beta) \trianglerighteq \mathrm{SU}(V,\beta)$

Definition S4F: die unitäre Gruppe

Sei (V,β) ein hermitescher Raum über $(\mathbb{K},\sigma)$, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.
Ein $\mathbb{K}$–linearer Endomorphismus $f : V \to V$ heißt **Automorphismus**, wenn er invertierbar ist. Diese bilden die **allgemeine lineare Gruppe**

$$\boxed{\mathrm{GL}(V) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V) := \{\, f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \mid f \text{ ist invertierbar} \,\}.}$$

Ist der Automorphismus f zudem isometrisch, so nennen wir f **unitär**, das bedeutet ausgeschrieben $\beta(f(u), f(v)) = \beta(u,v)$ für alle $u, v \in V$. Diese bilden die **Isometriegruppe** oder (allgemeine) **unitäre Gruppe**

$$\boxed{\mathrm{GU}(V,\beta) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V,\beta) = \{\, f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V) \mid f \text{ ist isometrisch} \,\}.}$$

Ist $\dim_{\mathbb{K}}(V)$ endlich und $\mathbb{K}$ kommutativ, so haben wir die Determinante $\det : \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \to \mathbb{K}$ (O2G). Dies definiert die **spezielle unitäre Gruppe**

$$\boxed{\mathrm{SU}(V,\beta) = \mathrm{SAut}_{\mathbb{K}}(V,\beta) = \{\, f \in \mathrm{GU}(V,\beta) \mid \det f = 1 \,\}.}$$

Die unitäre Gruppe $\mathrm{GU}(V,\beta) \trianglerighteq \mathrm{SU}(V,\beta)$

Aufgabe: Damit ist $\mathrm{GU} = \mathrm{GU}_{\mathbb{K}}(V,\beta) \leq (\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V), \circ, \mathrm{id}_V)$ eine UGruppe. Wiederholung: Was genau ist hierzu noch zu zeigen? Zeigen Sie es!

Beweis: (1) Es gilt $\mathrm{id}_V \in \mathrm{GU}$, denn

$$\beta(\mathrm{id}_V(u), \mathrm{id}_V(v)) = \beta(u,v).$$

(2) Für $f, g \in \mathrm{GU}$ gilt $f \circ g \in \mathrm{GU}$, denn

$$\beta((g \circ f)(u), (g \circ f)(v)) = \beta(g(f(u)), g(f(v))) = \beta(f(u), f(v)) = \beta(u,v).$$

(3) Für $f \in \mathrm{GU}$ gilt $f^{-1} \in \mathrm{GU}$, denn

$$\beta(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) = \beta(f(f^{-1}(u)), f(f^{-1}(v))) = \beta(u,v).$$

☺ Das ist eine Spezialisierung des Satzes S4A zu Identität und Komposition und Inversion. Dasselbe gilt somit in jeder Kategorie.

Übung: Ebenso ist $\mathrm{SU} = \mathrm{SU}_{\mathbb{K}}(V,\beta) \trianglelefteq (\mathrm{GU}(V,\beta), \circ, \mathrm{id}_V)$ eine UGruppe, sogar eine normale Untergruppe als Kern des Homomorphismus det.

Die unitäre Gruppe $\mathrm{GU}(V,\beta) \trianglerighteq \mathrm{SU}(V,\beta)$

Als unser Leitbeispiel betrachten wir:

$$\boxed{(V,\beta) = \langle B \rangle}$$

Über $(\mathbb{K},\sigma)$ sei also $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine hermitesche Matrix. Auf $V = \mathbb{K}^n$ definiert dies die hermitesche Form $\beta : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} : (u,v) \mapsto u^\dagger B\, v$

Aufgabe: Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Wann ist $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : v \mapsto Av$ isometrisch?

Lösung: Isometrie heißt, für alle Vektoren $u, v \in \mathbb{K}^n$ gilt:

$$u^\dagger B\, v = \beta(u,v) = \beta(Au, Av) = (Au)^\dagger B\,(Av) = u^\dagger A^\dagger B\, Av$$

Daraus folgt $B = A^\dagger BA$, indem wir $u = e_i$ und $v = e_j$ betrachten für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Für die unitäre Gruppe bedeutet das zusammengefasst:

$$\boxed{\mathrm{GU}(V,\beta) = \{\, A \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K} \mid A^\dagger BA = B \,\}}$$

Triviales Beispiel: Für $B = 0_{n\times n}$ gilt $\beta = 0$ und $\mathrm{GU}(\mathbb{K}^n, 0) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Die unitäre Gruppe $\mathrm{GU}(V,\beta) \trianglerighteq \mathrm{SU}(V,\beta)$

Allgemein haben wir:

$$\boxed{(V,\beta) \cong \langle B \rangle}$$

Sei (V,β) ein hermitescher Raum über $(\mathbb{K},\sigma)$. Darin sei $(b_1, \dots, b_n)$ eine Basis und $B = \beta(b_i, b_j)_{ij} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die zugehörige Gram–Matrix.

Jeden Endomorphismus $f : V \to V$ stellen wir dar durch seine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $x = \sum_i b_i u_i \mapsto f(x) = \sum_i b_i u'_i$ wobei $u' = Au$. Ebenso $y = \sum_i b_i v_i \mapsto f(y) = \sum_i b_i v'_i$ mit $v' = Av$. Isometrie bedeutet nun:

$$u^\dagger Bv = \beta(x,y) = \beta(f(x), f(y)) = (Au)^\dagger B\,(Av) = u^\dagger A^\dagger B\, Av$$

Daraus folgt $B = A^\dagger BA$, indem wir $u = e_i$ und $v = e_j$ betrachten für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Somit ist die lineare Abbildung f eine Isometrie genau dann, wenn die darstellende Matrix A die Gleichung $A^\dagger BA = B$ erfüllt:

$$\boxed{\mathrm{GU}(V,\beta) \cong \{\, A \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K} \mid A^\dagger BA = B \,\}}$$

Unitäre Matrix, orthogonale Matrix

Definition S4G: unitäre Matrix, orthogonale Matrix

Sei $(\mathbb{K}, \sigma)$ ein *Körper, *DRing oder *CRing, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\operatorname{conj}_{\mathbb{K}}$. Die kanonische Sesquilinearform auf $\mathbb{K}^n$ über $(\mathbb{K}, \sigma)$ ist $\beta : (u, v) \mapsto u^\dagger v$. Hier haben unitäre Automorphismen eine besonders einfache Form:

(1) Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über $(\mathbb{K}, \sigma)$ heißt **unitär**, falls gilt:

$$\boxed{A^\dagger A = I}$$

Es folgt $AA^\dagger = I$, also $A \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$ mit $A^{-1} = A^\dagger$. Beispiel: $(\mathbb{C}, \operatorname{conj}_{\mathbb{C}})$.

(2) Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über $(\mathbb{K}, \mathrm{id}_{\mathbb{K}})$ heißt **orthogonal**, falls gilt:

$$\boxed{A^\intercal A = I}$$

Es folgt $AA^\intercal = I$, also $A \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$ mit $A^{-1} = A^\intercal$. Beispiel: $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$.

☺ Sind die Spalten orthonormal, so auch die Zeilen, und umgekehrt!

Unitäre Matrix, orthogonale Matrix

Bezüglich der Standardform β bedeutet $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ isometrisch:
$u^\dagger v = \beta(u, v) = \beta(Au, Av) = (Au)^\dagger(Av) = uA^\dagger Av$, also $A^\dagger A = I$.
☺ Sind die Spalten orthonormal, so auch die Zeilen, und umgekehrt!

Wiederholung: Wie folgt aus $A^\dagger A = I$ die Gleichung $AA^\dagger = I$?
Warum genügt hierzu, dass $\mathbb{K}$ ein Körper ist? ein DRing? ein CRing?
Hier zahlt sich erneut Ihre solide Vorbereitung der Grundlagen aus!

Lösung: (1) Über jedem Divisionsring $\mathbb{K}$ haben wir dank D2O starke und effiziente Invertierbarkeitskriterien für quadratische Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$: Jede Linksinverse zu A ist eine Rechtsinverse zu A und umgekehrt.
☺ Hier ist $A^\dagger$ zu A linksinvers, $A^\dagger A = I$, also auch rechtsinvers, $AA^\dagger = I$.

(2) Über jedem kommutativen Ring $\mathbb{K}$ haben wir die Determinante O2G, die Adjunkte und die Inversionsformel O2R. Damit folgt insbesondere: Genau dann ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar, wenn $\det A \in \mathbb{K}$ invertierbar ist.
☺ Aus $A^\dagger A = I$ folgt $\det(A)^\sigma \det(A) = 1$, also $\det(A) \in \mathbb{K}^\times$, demnach $A \in \mathrm{GL}_n$, somit $A^{-1} = A^\dagger$ dank Eindeutigkeit der Inversen (J1K).

Die klassischen Gruppen: orthogonal, unitär, symplektisch

Definition S4G: die klassischen Matrixgruppen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

In jeder Dimension $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ haben wir den Matrixring $\mathbb{K}^{n\times n}$ und hierin

$$\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K} = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid \det A \neq 0\}, \quad \mathrm{SL}_n\,\mathbb{K} = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid \det A = 1\}$$

Die Matrizen, die das Skalarprodukt erhalten, bilden Untergruppen:

$$\mathrm{GU}_n\,\mathbb{K} = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid A^\dagger A = I\}, \quad \mathrm{SU}_n\,\mathbb{K} = \{A \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{K} \mid \det A = 1\}$$

Dies sind die **klassischen Matrixgruppen**. Traditionelle Bezeichnung:

$$\begin{aligned}
\mathrm{GO}_n\,\mathbb{R} &= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^\intercal A = I\}, & \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R} &= \{A \in \mathrm{GO}_n\,\mathbb{R} \mid \det A = 1\},\\
\mathrm{GU}_n\,\mathbb{C} &= \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid A^\dagger A = I\}, & \mathrm{SU}_n\,\mathbb{C} &= \{A \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{C} \mid \det A = 1\},\\
\mathrm{Sp}_n\,\mathbb{H} &= \{A \in \mathbb{H}^{n\times n} \mid A^\dagger A = I\}. & &\text{(keine Determinante über } \mathbb{H})
\end{aligned}$$

$\mathrm{GO}_n\,\mathbb{R}$ bzw. $\mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}$ ist die **allgemeine / spezielle orthogonale Gruppe**, $\mathrm{GU}_n\,\mathbb{C}$ bzw. $\mathrm{SU}_n\,\mathbb{C}$ die **allgemeine / spezielle unitäre Gruppe** über $\mathbb{C}$ und schließlich $\mathrm{Sp}_n\,\mathbb{H}$ die **symplektische Gruppe** über $\mathbb{H}$.

Orthogonale und unitäre Gruppen

Ich plädiere dafür, „unitär“ inklusiv zu gebrauchen für alle drei Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, und „orthogonal“ zur Betonung des Spezialfalls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Eigentlich sollte eine Matrix $A \in \mathrm{GO}_n\,\mathbb{R}$ nicht „orthogonal“ heißen, sondern „orthonormal“, das wäre logisch, ist aber leider nicht üblich.

Auch für Matrizen $A \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{C}$ über $\mathbb{C}$ sind die Spalten orthonormal, solche komplexen Matrizen heißen jedoch traditionell unitär. Nun gut.

Im reellen Falle $A \in \mathrm{GO}_n\,\mathbb{R}$ gilt $\det A \in \{\pm 1\}$, denn

$$1 = \det(1_{n\times n}) = \det(A^\intercal A) = \det(A)^2.$$

Wir haben die Zerlegung $\mathrm{GO}_n = \mathrm{GO}_n^+ \sqcup \mathrm{GO}_n^-$, wobei $\mathrm{GO}_n^+ = \mathrm{SO}_n$: mit $\det A = +1$ orientierungserhaltend, umkehrend mit $\det A = -1$.

Im komplexen Falle $A \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{C}$ gilt entsprechend $\det A \in \mathbb{S}^1$, denn

$$1 = \det(1_{n\times n}) = \det(A^\dagger A) = |\det(A)|^2.$$

Da $\mathbb{H}$ nicht kommutativ ist, haben wir hier keine Determinante.

Kleine orthogonale und unitäre Gruppen

Satz S4H: kleine orthogonale und unitäre Gruppen

Für $n = 1$ haben wir $\mathrm{GL}_1\,\mathbb{K} = \mathbb{K}^\times$ sowie hierin jeweils

$$\begin{aligned} \mathrm{GO}_1\,\mathbb{R} &= \{a \in \mathbb{R} \mid a^2 = 1\} = \{\pm 1\} &&= \mathbb{S}^0, \\ \mathrm{GU}_1\,\mathbb{C} &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1\} &&= \mathbb{S}^1. \end{aligned}$$

Trivial sind hierin $\{1\} = \mathrm{SL}_1\,\mathbb{R} = \mathrm{SO}_1\,\mathbb{R} = \mathrm{SL}_1\,\mathbb{C} = \mathrm{SU}_1\,\mathbb{C}$. Für $n = 2$ gilt

$$\mathrm{GO}_2\,\mathbb{R} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b\lambda \\ b & a\lambda \end{bmatrix} \middle| \begin{matrix} a, b \in \mathbb{R},\ \lambda = \pm 1, \\ a^2 + b^2 = 1 \end{matrix} \right\} \quad \text{allgemein und speziell}$$

$$\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| \begin{matrix} a, b \in \mathbb{R}, \\ a^2 + b^2 = 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{S}^1,$$

$$\mathrm{GU}_2\,\mathbb{C} = \left\{ \begin{bmatrix} z & -\overline{w}\lambda \\ w & \overline{z}\lambda \end{bmatrix} \middle| \begin{matrix} z, w, \lambda \in \mathbb{C}, \\ |z|^2 + |w|^2 = 1 = |\lambda| \end{matrix} \right\} \quad \text{allgemein und speziell}$$

$$\mathrm{SU}_2\,\mathbb{C} = \left\{ \begin{bmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + \mathrm{i}b & -c + \mathrm{i}d \\ c + \mathrm{i}d & a - \mathrm{i}b \end{bmatrix} \middle| \begin{matrix} a, b, c, d \in \mathbb{R}, \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \end{matrix} \right\} \cong \mathbb{S}^3.$$

Kleine orthogonale und unitäre Gruppen

Aufgabe: Beweisen Sie die behaupteten Mengengleichheiten!

Beweis: Die Aussagen für $n = 1$ sind klar nach Definition. Sei also $n = 2$. Wir können die beiden Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ gleich gemeinsam behandeln:

„$\supseteq$“: Jede Matrix $A = \left[\begin{smallmatrix} z & -\overline{w}\lambda \\ w & \overline{z}\lambda \end{smallmatrix}\right]$ mit $z, w \in \mathbb{K}$ hat orthonormale Spalten, also $A \in \mathrm{GU}_2\,\mathbb{K}$. Allgemein gilt $\det A = \lambda$, speziell für $\lambda = 1$ also $A \in \mathrm{SU}_2\,\mathbb{K}$.

„$\subseteq$“: Für $A \in \mathrm{GU}_2\,\mathbb{K}$ gilt $A = \left[\begin{smallmatrix} z & -\overline{w}\lambda \\ w & \overline{z}\lambda \end{smallmatrix}\right]$: Die erste Spalte definiert $z, w \in \mathbb{K}$. Da sie normiert ist, gilt $|z|^2 + |w|^2 = 1$. Die zweite Spalte ist senkrecht zur ersten, also ein Vielfaches von $\left[\begin{smallmatrix} -\overline{w} \\ \overline{z} \end{smallmatrix}\right]$. Da auch sie normiert ist, gilt $|\lambda| = 1$. Allgemein gilt $\det A = \lambda$, speziell für $A \in \mathrm{SU}_2\,\mathbb{K}$ also $\lambda = 1$. $\boxed{\text{QED}}$

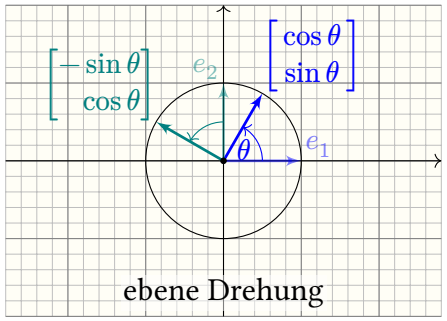
☺ Dank Satz E3B gilt $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}_{\geq 0}\,\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$, somit $\mathbb{S}^1 = \mathrm{GU}_1\,\mathbb{C} \cong \mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$.
☺ Dank Satz E3E gilt $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}_{\geq 0}\,\mathrm{SU}_2\,\mathbb{C}$, somit $\mathbb{S}^3 = \mathrm{GU}_1\,\mathbb{H} \cong \mathrm{SU}_2\,\mathbb{C}$.

Bemerkenswert: Die drei Sphären $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3$ sind demnach Gruppen, sogar *topologische Gruppen*, denn Multiplikation und Inversion sind hier stetig.

Überaus erstaunlich: Unter allen Sphären $\mathbb{S}^n$ beliebiger Dimension $n \in \mathbb{N}$ sind diese drei die einzigen mit einer topologischen Gruppenstruktur!

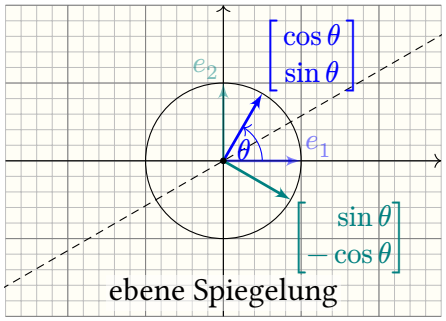
Ebene Drehungen und Spiegelungen

Wir haben die Zerlegung $\mathrm{GO}_2 = \mathrm{GO}_2^+ \sqcup \mathrm{GO}_2^-$, speziell $\mathrm{GO}_2^+ = \mathrm{SO}_2$:
Jede Matrix $A \in \mathrm{GO}_2$ mit $\det A = +1$ ist orientierungserhaltend,
mit $\det A = -1$ entsprechend orientierungsumkehrend, siehe O3E.
In der Ebene erkennen wir darin Drehungen und Spiegelungen!
Wir fertigen hilfreiche Skizzen an und lesen die Koordinaten ab:



ebene Drehung

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in \mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$$



ebene Spiegelung

$$S_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \in \mathrm{GO}_2^-\,\mathbb{R}$$

Was ist eine Drehung?

Definition S4I: Drehung aka Rotation

(0) Jedes Element $A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ und $A \in \mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ nennen wir **Drehung**.
Darunter interessieren uns besonders die einfachen Drehungen:

(1) Jeder Winkel $\theta \in \mathbb{R}$ definiert die zugehörige **ebene Drehung**:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$$

(2) Je zwei orthonormale Vektoren u, v in $(\mathbb{R}^n, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ und ein Drehwinkel $\theta \in \mathbb{R}$ definieren die **einfache Drehung** $R_\theta^{u,v} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ mit der Matrix

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}\, R_\theta^{u,v} = \begin{bmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Hierzu sei $\mathcal{B} = (u, v, \ldots)$ eine Orthonomalbasis von $\mathbb{R}^n$: Auf $\langle u, v\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \cong \mathbb{R}^2$ ist $R_\theta^{u,v}$ die ebene Drehung R_θ, und auf $W = \langle u, v\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ die Identität.

(4) Ebenso in jedem unitären Vektorraum $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. (S440)

Wie beschreiben wir Drehungen?

Orthogonale Matrizen $\mathrm{GO}_n(\mathbb{K})$ können wir über jedem Ring $\mathbb{K}$ erklären. Ist $\mathbb{K}$ kommutativ, so haben wir die Determinante und damit $\mathrm{SO}_n(\mathbb{K})$. Dies gelingt insbesondere über dem Ring $\mathbb{Z}$ und über dem Körper $\mathbb{Q}$, und ist ein steter Quell der Freude und algebraischer Schönheit.

Über $\mathbb{R}$ profitieren wir zudem von starken analytischen Werkzeugen: Vollständigkeit, Zwischenwertsatz, spezielle reelle Funktionen, uvm. Insbesondere haben wir die trigonometischen Funktionen $\sin, \cos$ und können damit die Kreislinie $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ parametrisieren.

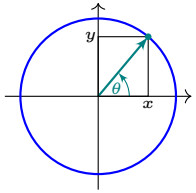
Analytische Geometrie können wir über jedem Körper betreiben, etwa über $\mathbb{Q}$ oder je nach vorliegende Anwendung auch gerne über $\mathbb{F}_q$. Allerdings fehlen uns schmerzhaft Winkel und Längen und ähnliches. Erst die Werkzeuge von $\mathbb{R}$ machen daraus ein äußerst lukratives Geschäft.

Über $\mathbb{Z}$ und über $\mathbb{Q}$, ohne die analytischen Werkzeuge von $\mathbb{R}$, stehen die arithmetischen Eigenschaften der Gruppen $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{Z}$, $\mathrm{SL}_n\,\mathbb{Z}$, ...und $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{Q}$, $\mathrm{SL}_n\,\mathbb{Q}$, ...im Vordergrund. Auch das ist eine interessante Sichtweise!

Wie beschreiben wir Drehungen?

In der Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ definieren wir die **Einheitskreislinie**:

$$\mathbb{S}^1 := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}.$$



Diese können wir trigonometrisch *parametrisieren*:

$$\mathbb{S}^1 = \{\, (\cos\theta, \sin\theta) \mid \theta \in \mathbb{R} \,\} \quad (\subseteq, \supseteq)$$

☺ Die Definition grenzt ein und entscheidet per Punktprobe.
Die Parametriserung hingegen füllt aus und liefert Probepunkte.
Diese Parametrisierung ist nicht eindeutig, sondern 2π–periodisch.
Wir erhalten eine Bijektion durch Einschränkung auf $\theta \in [0, 2\pi[$:

$$\mathbb{S}^1 = \{\, (\cos\theta, \sin\theta) \mid \theta \in [0, 2\pi[\,\}^{!}$$

☺ Oft ist eindeutige Darstellung gewünscht: Wenn wir die betrachtete Abbildung umkehren wollen, hier etwa für eindeutige Polarkoordinaten, dann benötigen wir gerade die Bijektivität! Diese betone ich durch „!“, das ist kurz und prägnant, eine ebenso dezente wie effiziente Erinnerung.

Wie beschreiben wir Drehungen?

Dieselbe allgegenwärtige Dualität zwischen Definieren / Eingrenzen und Parametrisieren / Ausschöpfen finden wir für die klassischen Gruppen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R} &:= \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; \begin{matrix} A^\intercal A = 1_{2\times 2} \\ \det A = 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} a, b \in \mathbb{R}, \\ a^2 + b^2 = 1 \end{matrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{S}^1 := \mathrm{GU}_1\,\mathbb{C}, \\
\mathrm{SU}_2\,\mathbb{C} &:= \left\{ A \in \mathbb{C}^{2\times 2} \;\middle|\; \begin{matrix} A^\dagger A = 1_{2\times 2} \\ \det A = 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} z, w \in \mathbb{C}, \\ |z|^2 + |w|^2 = 1 \end{matrix} \right\} \\
&\cong \mathbb{S}^3 := \mathrm{GU}_1\,\mathbb{H}.
\end{aligned}$$

Wie prüfen Sie, ob eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ unitär ist? Sie setzen A einfach in die Definition ein und prüfen die Gleichungen! Wir können Sie eine / alle unitären Matrizen herstellen? Dazu nutzen Sie die Parametrisierung!

Wir wollen allgemein Drehungen $\mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}$ und $\mathrm{SU}_n\,\mathbb{C}$ verstehen. Dazu ist es hilfreich, mit $n = 1$ und $n = 2$ anzufangen. Wir zeigen anschließend, wie diese kleinen ebenen Drehungen bereits alle Drehungen erzeugen.

Wie beschreiben wir Drehungen?

Aufgabe: Erklären Sie die **einfachen Drehungen** eines unitären Vektorraums $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ über $\mathbb{C}$ nach dem Vorbild S41 über $\mathbb{R}$.

Lösung: (1) Jedes Paar komplexer Zahlen $(z, w) \in \mathbb{S}^3$, also $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z|^2 + |w|^2 = 1$, beschreibt eindeutig eine ebene Drehung über $\mathbb{C}$:

$$R_{z,w} = \begin{bmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}_2\,\mathbb{C}$$

(2) Zusammen mit je zwei orthonormalen Vektoren u, v in $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ definiert dies die **einfache Drehung** $R^{u,v}_{z,w} \in \mathrm{SU}(V)$ mit der Matrix

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}\, R^{u,v}_{z,w} = \begin{bmatrix} z & -\overline{w} & 0 \\ w & \overline{z} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Hierzu sei $\mathcal{B} = (u, v, \ldots)$ eine Orthonomalbasis von V: Auf $\langle u, v\rangle^{!}_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}^2$ ist $R^{u,v}_{z,w}$ obige ebene Drehung, und auf $W = \langle u, v\rangle^{\perp}_{\mathbb{C}}$ die Identität.
Das ist analog zum reellen Fall S41, nur ein wenig komplexer.

Givens–Rotationen sichern freie Beweglichkeit.

Können wir jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ in die positive x–Achse $e_1\mathbb{R}_{>0}$ drehen? Ja! Das gelingt elegant-explizit durch seine **Givens–Rotation**

$$G_v := \frac{1}{\|v\|}\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ -v_2 & v_1 \end{bmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \quad \text{denn} \quad G_v \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|v\| \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wir können die Drehmatrix direkt hinschreiben, auch ohne Winkel. Allgemein: Jeder Vektor $v \in \mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\}$ definiert seine **Givens–Rotation**

$$G_v := \frac{1}{\|v\|}\begin{bmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} \\ -v_2 & v_1 \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}), \quad \text{denn} \quad G_v \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|v\| \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Übung: Prüfen Sie $G_v \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ oder gleich $G_v \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ direkt nach! Für $v \in e_1\mathbb{R}_{>0}$ gilt $G_v = 1$. Im Sonderfall $v = 0$ setzen wir $G_0 := 1$.

Lemma S4J: Givens–Rotation von v zu $u_1\mathbb{R}_{\geq 0}$ in der Ebene $\langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{K}}$

Seien u_1, u_2 orthonormal in $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Zu jedem Vektor $v \in \langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{K}}$ existiert eine Rotation $G_v \in \mathrm{GU}(V)$ mit $G_v(v) \in u_1\mathbb{R}_{\geq 0}$ als einfache Drehung in der Ebene $\langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{K}}$ und Identität auf $\langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp}$.

Der Gauß–Algorithmus mit Koordinatendrehungen

Verlauf des Gauß–Givens–Algorithmus: Hier steht „$\oplus$“ für einen Eintrag aus $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Zur Vereinfachung des Beispiel seien die Spalten unabhängig. Wir nutzen den Gauß–Algorithmus mit unitären Zeilenoperationen:

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} * & * & * \\ \oplus & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & \oplus \end{bmatrix} = R$$

Algo S4K: Gauß–Givens–Algorithmus zur QR–Zerlegung

Eingabe: eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$
Ausgabe: (Q, R) mit $A = QR$ und $Q \in \mathrm{GU}_m(\mathbb{K})$ und $R \in \mathbb{K}^{m\times n}$ in PZSF

1: Lösche jede Spalte von unten nach oben mit Rotationen $R_\theta^{e_i, e_{i+1}}$
2: Für ein Pivot a in der letzten Zeile skaliere mit $\overline{a}/|a| \in \mathbb{S}^1$.
3: So bringen wir $Q^\dagger A = R$ in PZSF. return(Q, R)

Die Korrektur (2) ist notwendig, um auch den letzten Diagonaleintrag zu positivieren. Als Preis dafür geht Q von $\mathrm{SU}_n(\mathbb{K})$ nach $\mathrm{GU}_n(\mathbb{K})$ über.

Geometrische Anwendung: Euler–Winkel

Satz S4L: Euler–Winkel

Jede Drehung $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ ist Produkt von drei Koordinatendrehungen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

mit geeigneten Winkeln $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wir nutzen obigen Gauß–Givens–Algorithmus zu $A = QR$.

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma} \begin{bmatrix} * & * & * \\ \oplus & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{\beta} \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha} \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & \oplus \end{bmatrix} = R \overset{!}{=} I$$

Dank $\det(A) = 1$ ist der letzte Pivoteintrag positiv. Somit hat $Q \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ die obige Produktform. Dank $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ gilt auch $R = Q^\intercal A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Orthonormalität der Spalten erzwingt dann $R = I$, also $A = Q$. QED

Einfache Drehungen erzeugen alle Drehungen.

Wir wollen beliebige Drehungen $A \in \mathrm{SU}_n(\mathbb{K})$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ verstehen. Ist jede Drehung des Raumes $\mathbb{K}^n$ einfach? Für $\mathbb{R}^2$ ist dies klar. Für $\mathbb{R}^3$ ist es wahr, aber nicht offensichtlich, siehe S4M. Für $\mathbb{R}^4$ ist es definitiv falsch!

Gauß–Givens zeigt, wie wir A durch einfache Drehungen erzeugen:

Satz S4L: Einfache Drehungen erzeugen die Gruppe $\mathrm{SU}_n(\mathbb{K})$.

(1) Jede Matrix $A \in \mathrm{SU}_n\,\mathbb{K}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ kann erzeugt werden durch Koordinatendrehungen $R_\theta^{e_{i-1}, e_i}$, davon genügen $\leq n(n-1)/2 = \binom{n}{2}$.

(2) Es genügen bereits $\leq n-1$ einfache Drehungen $R_\theta^{u,v}$, indem wir im obigen Gauß–Algorithmus die i-te Spalte v_i direkt auf e_i drehen.

Analogie: Jede Permutation $\pi \in \mathrm{S}_n$ wird erzeugt von Transpositionen.

(1) Dies gelingt uns bereits mit den elementaren Transpositionen $(1,2), (2,3), \ldots, (n-1, n) \in \mathrm{S}_n$, davon genügen $\leq n(n-1)/2$. (O1D)

(2) Mit beliebigen Transpositionen $(i,j) \in \mathrm{S}_n$ genügen $\leq n-1$. (O1F)
Das ist verblüffend, doch Daten und Algorithmen ähneln sich.

Genügen schon zwei Drehungen?

Aufgabe: Jede Drehung $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ des Raumes $\mathbb{R}^3$ lässt sich durch *zwei* einfache Drehungen erzeugen. Erklären Sie dies formal und anschaulich!

Formal: Wir können bei Gauß–Givens S4K wie oben kleinschrittig vorgehen und jeweils benachbarte Zeilenpaare bearbeiten; das benötigt $\binom{3}{2} = 3$ Koordinatendrehungen. Noch effizienter können wir jede Spalte durch eine einzige Drehung aufräumen. So genügen zwei Drehungen:

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{\theta} \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha} \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & \oplus \end{bmatrix} = R \overset{!}{=} I$$

Anschaulich? Wir drehen um die x–Achse mit Winkel α. Dann drehen wir die x–Achse auf jede gewünschte Achse $u\mathbb{R}$ in einem Winkel θ dazu.

Es scheint durchaus plausibel, dass wir damit jede Drehung erreichen. Experimentieren und fuchteln Sie lange genug mit Ihrer Hand herum… so richtig überzeugend wird es nicht. Die Rechnung ist leichter und klarer und sie beweist allgemein: Zwei einfache Drehungen genügen bereits.

Genügt schon eine Drehung?

Das bringt uns zu der spannenden Frage: Können wir *jede* Drehung $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ als eine *einfache* Drehung $R_\theta^{v,w}$ darstellen? Genauer gesagt: In $\mathbb{R}^3$ wählen wir eine positive Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (u, v, w)$, somit die positiv orthonormale Matrix $T = (u, v, w) \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, und zudem einen Drehwinkel $\theta \in \mathbb{R}$. Die Daten (u, v, w, θ) definieren die einfache Drehung

$$R_\theta^{v,w} := T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} T^{-1}.$$

In Worten: Unsere Drehung $R_\theta^{v,w}$ fixiert die Achse $\langle u \rangle_\mathbb{R}$ und dreht die dazu orthogonale Ebene $\langle u \rangle_\mathbb{R}^\perp = \langle v, w \rangle_\mathbb{R}^!$ um den gewünschten Winkel θ.

Fraglich bleibt: Lässt sich jede Drehung $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ so darstellen? Intuitiv rufen manche optimistisch „Ja, klar!“, andere ebenso überzeugt „Nein, eine einfache Drehung genügt offensichtlich nicht immer!“

⚠ In $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ ist es trivial, in $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ offensichtlich falsch. (Übung!) Was gilt für $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$? Klärung schafft der folgende Satz vom Fußball.

Der Satz vom Fußball: Gibt es Fixpunkte?

Zu Beginn des Spiels liegt der Fußball auf dem Mittelpunkt. Dann wird er 45 Minuten lang getreten, verschoben, gedreht. Anfangs der zweiten Halbzeit liegt er wieder exakt auf dem Mittelpunkt. Gibt es einen Punkt auf der Oberfläche des Balls, der sich wieder genau an derselben Stelle des umgebenden Raumes befindet? Ja, immer mindestens zwei!

Satz S4M: der Satz vom Fußball

(1) Jede Matrix $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ hat den Eigenwert 1, also eine Fixgerade $u\mathbb{R} \subseteq \mathrm{fix}(A)$ mit $u \in \mathbb{S}^2$ und $Au = u$.

Beweis: Aus $Av = v\lambda$ folgt $\langle v \mid v \rangle = \langle Av \mid Av \rangle = \langle v\lambda \mid v\lambda \rangle = |\lambda|^2 \langle v \mid v \rangle$. Somit zerfällt $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ in $\chi_A = (X - \lambda)(X - \mu)(X - \nu)$ mit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{S}^1$. Zudem gilt $1 = \det A = \lambda\mu\nu$. Echt komplex haben wir $\nu = \overline{\mu}$, also $1 = \lambda$. Rein reell gilt $\lambda, \mu, \nu \in \{\pm 1\}$, also können nicht alle gleich -1 sein. QED

⚠ Für A in $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ oder $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ gilt dies nicht. In gerader Dimension ist das einfachste Gegenbeispiel die Punktspiegelung $A = \mathrm{diag}(-1, \dots, -1)$.

Drehungen des Raumes $\mathbb{R}^3$: Genügen einfache Drehungen?

Satz S4M: der Satz vom Fußball

(2) Zu jeder orthogonalen Matrix $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ existiert ein orthogonaler Basiswechsel $T \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ und ein Drehwinkel $\theta \in [0, \pi]$ so, dass gilt:

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

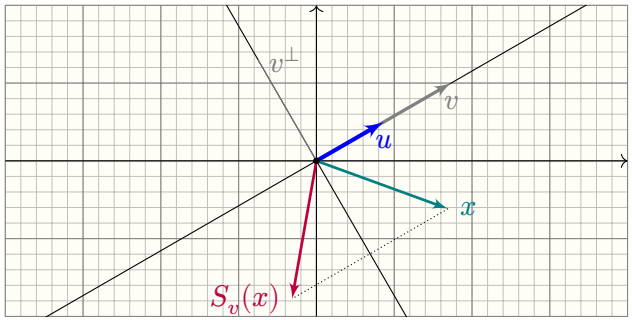
Beweis: Dank (1) finden wir $u \in \mathrm{Eig}(A, 1)$ normiert, damit eine positive Orthonormalbasis (u, v, w) dank Gram–Schmidt S3C oder via $w = u \times v$ gemäß Satz S4R. So erhalten wir $T := (u, v, w) \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ und

$$\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \ni T^{-1}AT \overset{(1)}{=} \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

mit $\theta \in [-\pi, \pi]$. Im Falle $\theta < 0$ wählen wir $T = (-u, -v, w)$ und $-\theta$. QED

Was ist eine Spiegelung?

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist anschaulich, was Spiegelungen sein sollen (E209):



Jeder Vektor $v \in V \smallsetminus \{0\}$ definiert die hierzu orthogonale Hyperebene $v^\perp$. An dieser spiegeln wir: Alle orthogonalen Vektoren $x \in v^\perp$ bleiben fix. Jeder parallele Vektor $x = v\lambda$ hingegen wird auf $-x$ gespiegelt.

Über $\mathbb{C}$ haben wir hier noch einen weiteren Freiheitsgrad $\mu \in \mathbb{S}^1$ und spiegeln damit $u = v/\|v\|$ zu $u\mu$. Für $\mu = -1$ ist dies die reelle Spiegelung. Für $\mu = +1$ ist dies die Identität. Allgemein verschiebt μ nur die Phase.

Was ist eine Spiegelung?

Definition S4N: die Spiegelung S_v zum Vektor v

Sei $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ ein unitärer Raum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, etwa $V = \mathbb{K}^n$. Jeder Vektor $v \in V \smallsetminus \{0\}$, normiert zu $u = v/\|v\|$, definiert die Spiegelung

$$S_v : V \to V : x \mapsto x - 2 \cdot u \langle u \,|\, x \rangle = x - 2/\langle v \,|\, v \rangle \cdot v \langle v \,|\, x \rangle$$

Sie ist unitär mit $S_v^2 = \mathrm{id}_V$. In jeder ONB $\mathcal{B} = (u, \dots)$ gilt $\mathrm{M}_\mathcal{B}\, S_v = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right]$. Kanonisch für $V = \mathbb{K}^n$ mit Standard-ONB $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ erhalten wir:

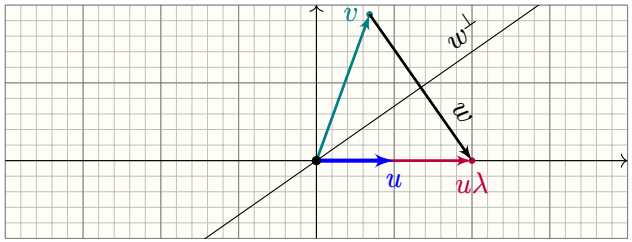
$$\mathrm{M}_\mathcal{E}\, S_v = 1_{n\times n} - 2 \cdot u\, u^\dagger = 1_{n\times n} - 2/(v^\dagger v) \cdot v\, v^\dagger$$

Beweis: Linearität über $\mathbb{K}$ ist klar, als Komposition linearer Abbildungen. Für $x \perp u$ gilt $S_v(x) = x$. Für $x = u\lambda$ gilt $S_v(x) = x - 2 \cdot u\lambda = -x$. QED

Über $\mathbb{C}$ nutzen wir für $v \in V \smallsetminus \{0\}$ und $\mu \in \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{1\}$ die **komplexe Spiegelung** $S_{v,\mu} : x \mapsto x - v(1-\mu)\langle v \,|\, x \rangle / \langle v \,|\, v \rangle$, also $\mathrm{M}_\mathcal{B}\, S_{v,\mu} = \left[\begin{smallmatrix} \mu & 0 \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right]$ und explizit als Spiegelungsmatrix $\mathrm{M}_\mathcal{E}\, S_{v,\mu} = 1_{n\times n} - v\,(1-\mu)\, v^\dagger/(v^\dagger v)$.

Householder–Spiegelungen sichern freie Beweglichkeit.

? Wie spiegeln wir $v \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus e_1\mathbb{R}_{\geq 0}$ in die positive x–Achse $e_1\mathbb{R}_{>0}$?



Lemma S4O: Householder–Spiegelung

Sei $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ euklidisch über $\mathbb{R}$. Sei $u \in V$ normiert und $v \in V \smallsetminus u\mathbb{R}_{\geq 0}$. Für den Vektor $w = u\lambda - v$ mit $\lambda = \|v\|$ gilt dann $S_w(v) \in u\mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe: Anschaulich ist es klar dank Skizze. Rechnen Sie es nach!

Beweis: Wir zerlegen $v = p + q$ und $u\lambda = p - q$ in $p = (u\lambda + v)/2$ und $q = (v - u\lambda)/2$. Es gilt $p \perp w$, denn $\langle u\lambda + v \,|\, u\lambda - v \rangle = \|u\|^2\lambda^2 - \|v\|^2 = 0$. Damit folgt $S_w(v) = S_w(p+q) = p - q = u\lambda$. QED

Householder–Spiegelungen sichern freie Beweglichkeit.

☺ Diese erfreulich einfache Formel gilt speziell über $\mathbb{R}$. Gleiches ist auch über $\mathbb{C}$ möglich, doch dazu benötigen wir eine komplexe Spiegelung $S_{w,\mu}$ und müssen dabei den noch freien Phasenfaktor $\mu \in \mathbb{S}^1$ richtig einstellen.

Über $\mathbb{C}$ genügt $w = u\lambda + v\mu$ mit $\mu \in \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{1\}$, sodass $\langle u \,|\, v \rangle\, \mu \in \mathbb{R}$ gilt.

Das lässt eine oder zwei Wahlen; numerisch vorteilhaft ist $\|w\|$ maximal.

Beweis: Wir zerlegen unseren Start $v = p + q$ und das Ziel $u\lambda = p + q\mu$ in $p = (u\lambda - v\mu)/(1-\mu)$ und $q = (v - u\lambda)/(1-\mu)$. Wir erhalten $p \perp w$, denn $\langle u\lambda - v\mu \,|\, u\lambda + v\mu \rangle = \|u\|^2\lambda^2 - \|v\|^2|\mu|^2 + \lambda\langle u \,|\, v\rangle\mu - \overline{\mu}\langle v \,|\, u\rangle\lambda = 0$. Damit folgt $S_{w,\mu}(v) = S_{w,\mu}(p+q) = p + q\mu = u\lambda$. ☺ Mathemagisch!

☺ Householder–Spiegelungen sind nicht nur geometrisch erfreulich, sondern werden auch gerne in der Numerik genutzt zur Berechnung der QR–Zerlegung. Die Grundidee ist verblüffend einfach, daher formuliere ich sie hier als eine weitere schöne Variante des Gauß–Verfahrens. Freuen Sie sich auf Fortführung und Anwendung in der Numerik!

Der Gauß–Algorithmus mit Householder–Spiegelungen

Verlauf des Gauß–Householder–Algorithmus: Hier steht „$\oplus$“ für einen Eintrag aus $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Im Beispiel sind die Spalten zudem linear unabhängig.

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & \oplus \end{bmatrix} = R \underset{\mathrm{GO}}{\overset{?}{=}} I$$

Algo S4P: Gauß–Housholder–Algorithmus zur QR–Zerlegung

Eingabe: eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$
Ausgabe: (Q, R) mit $A = QR$ und $Q \in \mathrm{GU}_m(\mathbb{K})$ und $R \in \mathbb{K}^{m\times n}$ in PZSF

1: Liegt die erste Spalte noch nicht in $e_1\mathbb{R}_{\geq 0}$, so spiegele sie dorthin.
2: Verfahre rekursiv ebenso mit der verbleibenden Untermatrix.
3: So bringen wir $Q^\dagger A = R$ in PZSF. return(Q, R)

Auch hier gibt es zwei Varianten: Wir können wie bei Gauß–Givens S4K kleinschrittig vorgehen und jeweils benachbarte Zeilenpaare bearbeiten, oder effizienter jede Spalte durch eine einzige Spiegelung aufräumen.

Der Gauß–Algorithmus mit Householder–Spiegelungen

☺ Die reellen Spiegelungen sind uns vertraut und recht anschaulich, die komplexen ergeben sich aus den Anforderungen des Gauß–Algorithmus. Sie sind Helferinnen in der Numerik und Stars in der Gruppentheorie.

Wir können jede Spiegelung dank S4N explizit als Matrix darstellen, reell mit $\mu = -1$, komplex etwas flexibler mit $\mu \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$:

$$H_{v,\mu} = 1_{n\times n} - v\,v^\dagger \cdot (1-\mu)/(v^\dagger v) \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{K}$$

Naiv kann man die $n-1$ verwendeten Spiegelungen so ausmultiplizieren zu $Q \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{K}$. Es ist jedoch meist effizienter, direkt die geometrischen Daten v, μ zu speichern. Die Berechnung $x \mapsto Qx$ gelingt damit ebenso leicht, da wir sukzessive nur $n-1$ Spiegelungen anwenden gemäß

$$S_{v,\mu} : V \to V : x \mapsto x - v\,(1-\mu)\langle v \,|\, x\rangle / \langle v \,|\, v\rangle.$$

☺ Wir sehen hier, dass die geometrische Anschauung sich wunderbar übersetzt in algebraische Formeln und weiter in effiziente Algorithmen. Alle Aspekte der Mathematik arbeiten erneut harmonisch zusammen!

Spiegelungen erzeugen die Gruppe $\mathrm{GO}_n(\mathbb{R})$.

Satz S4Q: Spiegelungen erzeugen die Gruppe $\mathrm{GO}_n(\mathbb{R})$.

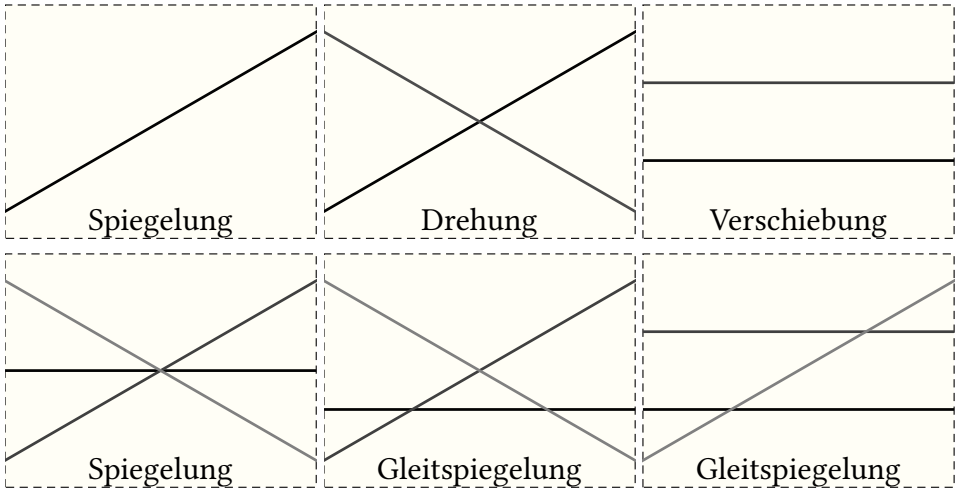
(1) Jede Matrix $A \in \mathrm{GO}_n\,\mathbb{R}$ kann erzeugt werden durch n Spiegelungen.
(2) Jede Isometrie $f : (\mathbb{R}^n, d) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n, d)$ des euklidischen Raumes $(\mathbb{R}^n, d)$ ist eine Komposition von höchstens $n+1$ affinen Spiegelungen.

Übung: Folgern Sie dies sorgsam aus den oben vorbereiteten Ergebnissen. Für $n = 2$ erhalten wir den Dreispiegelungssatz aus der Schulgeometrie:

Jede Isometrie der Ebene ist Komposition höchstens dreier Spiegelungen.

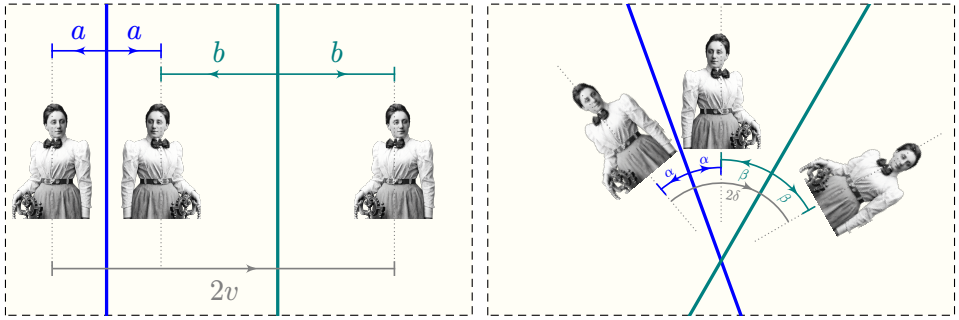
☺ So lässt sich die Geometrie auf Symmetrie aufbauen. Felix Klein erhob dies 1872 zum Erlanger Programm: Dual zu Objekten (Punkte, Geraden, Strecken, Winkel, Figuren, ...) betonte er strikt die Symmetriegruppe: Welche Symmetrien gelten? Hierzu ein Lehrbuch und ein Schulbuch:
📖 F. Bachmann: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff.* Springer, zweite ergänzte Auflage 1973. (Der Klassiker zum Thema.)
📖 J. Kratz, K. Wörle: *Geometrie 1&2.* Bayerischer Schulbuchverlag 1980.

Dreispiegelungssatz für die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$



Übung: Warum ergibt die Komposition von zwei Spiegelungen eine Drehung oder eine Verschiebung? Was passiert bei drei Spiegelungen? Zeichnen Sie illustrative Beispiele! Rechnen Sie es systematisch nach!

Komposition von zwei ebenen Spiegelungen

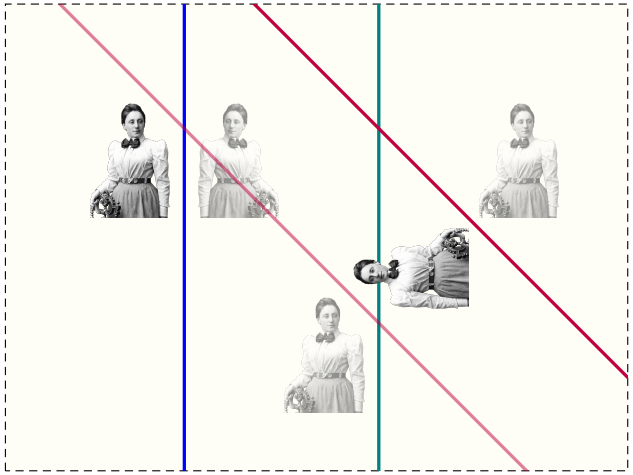


(1) Die Komposition von zwei Spiegelungen an parallelen Geraden mit Abstand v ergibt eine Verschiebung um $2v$, und jede beliebige Verschiebung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto x + 2v$ lässt sich so darstellen.

(2) Die Komposition von zwei Spiegelungen an Geraden, die sich im Winkel δ schneiden, ergibt eine Drehung um den Winkel 2δ, und jede beliebige Drehung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lässt sich so darstellen.

Übung: Zeichnen Sie selbst Beispiele! Rechnen Sie es systematisch nach!

Komposition von drei ebenen Spiegelungen



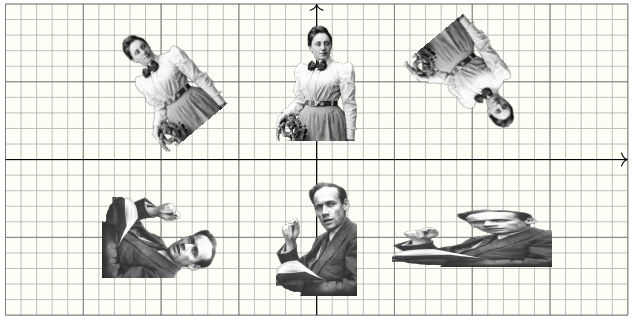
(3) Die Komposition von drei Spiegelungen ergibt eine Gleitspiegelung, und jede beliebige Gleitspiegelung lässt sich so darstellen.

Übung: Wie stellen Sie all diese Bewegungen in Koordinaten dar? Warum bilden die Bewegungen mit ihrer Komposition eine Gruppe?

Anwendung der Linearen Algebra in der Computergraphik

Computergraphik nutzt Koordinaten, Transformationen, Isometrien, etc.

In LaTeX nutzen Sie die die Sprachen PGF/TikZ zur effizienten Erstellung von hochwertigen Vektorgrafiken.



Alles wird in Koordinaten berechnet, dazu gehören auch affin-lineare Koordinatentransformationen!

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad \text{kurz} \quad f(x) = Ax + b$$

```
\node[cm={     1.0,     0.0,     0.0,     1.0, (+0.0, -1.0) }]{\Emil};
\node[cm={     0.0,    -1.0,     1.0,     0.0, (-2.0, -1.0) }]{\Emil};
\node[cm={     2.0,     0.0,     0.0,     0.5, (+2.0, -1.0) }]{\Emil};
\node[cm={ cos( 0), sin( 0),-sin( 0), cos( 0), (+0.0, +1.0) }]{\Emmy};
\node[cm={ cos(40), sin(40),-sin(40), cos(40), (-2.0, +1.0) }]{\Emmy};
\node[cm={ cos(40), sin(40), sin(40),-cos(40), (+2.0, +1.0) }]{\Emmy};
```

Analytische vs synthetische Geometrie

Die Lineare Algebra folgt René Descartes (1596–1650) in der überaus erfolgreichen Vorgehensweise der **analytischen Geometrie**: Wir stellen Punkte durch Koordinaten $x \in \mathbb{R}^n$ dar und leiten daraus alles Weitere ab: affin-lineare Abbildungen, euklidische Abstände und Bewegungen, etc.

Die **synthetische Geometrie** beginnt direkt mit den geometrischen Objekten (Punkt, Geraden, Ebenen, etc.) und ihren Beziehungen (Inzidenz, Symmetrie). Diese werden meist axiomatisch formuliert, idealerweise als Konstruktionen oder Operationen. Daraus entstehen schließlich die algebraischen Strukturen (Koordinaten, Isometriegruppe).

L In der Schulgeometrie sind beide Zugänge fest verankert: Sowohl das Rechnen in Koordinaten, später zur Darstellung von Funktionen, als auch das koordinatenfreie Zeichnen, etwa beim Verschieben, Drehen, Spiegeln, zur hohen Kunst entwickelt als **Konstruktionen mit Zirkel und Lineal**, jüngst fortgeführt in dynamischer Geometriesoftware wie GeoGebra.

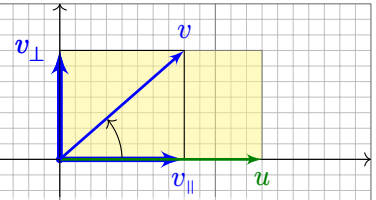
☺ Koordinatisierung baut die Brücke zwischen Geometrie und Algebra! Wir betreiben erfolgreich **Lineare Algebra und analytische Geometrie**.

Skalarprodukt und Kreuzprodukt in der Ebene $\mathbb{R}^2$

Für $u, v \in \mathbb{R}^2$ sind **Skalarprodukt** und **Kreuzprodukt** gegeben durch

$$\begin{aligned} u \cdot v &:= u_1 v_1 + u_2 v_2 &&= |u| \cdot |v| \cdot \cos \sphericalangle(u,v) &&= \pm |u| \cdot |v_\parallel| \\ u \times v &:= u_1 v_2 - u_2 v_1 &&= |u| \cdot |v| \cdot \sin \sphericalangle(u,v) &&= \pm |u| \cdot |v_\perp| \end{aligned}$$

Geometrische Erklärung:
$u \cdot v$ misst nur den parallelen Anteil.
$u \times v$ misst nur den senkrechten Anteil.



Für $u = (u_1, 0)$ längs der x–Achse ist die cos–sin–Formel klar.
Allgemein können wir unsere Vektoren in diese Lage drehen.

Die vier Fälle $\sphericalangle(u,v) \in \{0°, 90°, 180°, 270°\}$ sind besonders wichtig:

parallel:	$u \parallel v$	$\iff$	$u \cdot v = \pm\lvert u\rvert \cdot \lvert v\rvert$	$\iff$	$u \times v = 0$
senkrecht:	$u \perp v$	$\iff$	$u \cdot v = 0$	$\iff$	$u \times v = \pm\lvert u\rvert \cdot \lvert v\rvert$

Skalarprodukt und Kreuzprodukt in der Ebene $\mathbb{R}^2$

Bezüglich u zerlegen wir den Vektor $v = v_\parallel + v_\perp$ in seinen tangentialen Anteil $v_\parallel$ parallel zu u und seinen normalen Anteil $v_\perp$ senkrecht zu u.

Diese orthogonale Zerlegung von v bezüglich u ist (für $u \neq 0$) eindeutig; sie ist der Anfang des berühmten Gram–Schmidt–Verfahrens, gemäß

$$v_\parallel = u \frac{u \cdot v}{u \cdot u} \quad \text{und} \quad v_\perp = v - v_\parallel, \quad \text{somit} \quad u \cdot v_\perp = 0.$$

Damit erhalten wir allgemein folgende geometrische Umformulierung:

$$\begin{aligned} u \cdot v &= \pm\,|u| \cdot |v_\parallel| && \text{(positiv / negativ parallel)} \\ u \times v &= \pm\,|u| \cdot |v_\perp| && \text{(positiv / negativ orthogonal)} \end{aligned}$$

☺ Das Skalarprodukt $u \cdot v$ misst von v nur den tangentialen Anteil $v_\parallel$ parallel zu u (bzw. symmetrisch hierzu den Anteil von u parallel zu v).

☺ Das Kreuzprodukt $u \times v$ misst von v nur den normalen Anteil $v_\perp$ senkrecht zu u (bzw. symmetrisch hierzu von u senkrecht zu v).

Das komplexe Skalarprodukt: vorne konjugiert, hinten linear

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ schreibt sich eindeutig $z = (x, y) = x + \mathrm{i}y$.
Wir nennen $\mathrm{Re}(z) := x$ den **Realteil** und $\mathrm{Im}(z) := y$ den **Imaginärteil**.

Die zu $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ **komplex konjugierte Zahl** ist $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.
Es gilt $\overline{w + z} = \overline{w} + \overline{z}$ und $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$, sowie $\overline{\overline{z}} = z$ und $z\overline{z} = x^2 + y^2$.

Die Länge $|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ heißt **Betrag** oder **Norm** von z.
Das **komplexe Skalarprodukt** von $w = u + \mathrm{i}v$ und $z = x + \mathrm{i}y$ in $\mathbb{C}$ ist

$$\langle w \,|\, z \rangle := \overline{w}\, z = (u - \mathrm{i}v)(x + \mathrm{i}y) = (ux + vy) + \mathrm{i}(uy - vx)$$

Realteil ist das reelle Skalarprodukt, Imaginärteil ist das Kreuzprodukt:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ux + vy, \qquad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = uy - vx.$$

☺ Algebraische Aussagen und Rechnungen in $\mathbb{C}$ entsprechen so geometrischen Aussagen und Rechnungen in der Ebene $\mathbb{R}^2$. S461

Das komplexe Skalarprodukt: vorne konjugiert, hinten linear

Das ist eine der Stellen, an denen Konjugation im ersten Argument etwas schönere Formeln liefert als Konjugation im zweiten Argument: Hier entsteht das Kreuzprodukt gleich mit dem richtigen Vorzeichen! (Das Skalarprodukt im Realteil spürt natürlich keinen Unterschied.)

Ein weiterer Vorteil: Es passt zu unseren sonstigen Konventionen.
Für die Matrix A angewendet auf den Vektor v schreiben wir Av.
Daher erhalten wir für die Gram–Matrix $\beta(u, v) = u^\dagger B\, v$.
Andersseitige Konjugation erfordert $u^\intercal B\, \overline{v}$, wie hässlich!

Zu diesen mathematisch-ästhetischen Argumenten kommt eine starke Tradition: In der modernen Physik, etwa im Quantum Computing, ist die Konvention eindeutig festgelegt seit Schrödinger und Dirac und gefestigt durch 100 Jahre gute Erfahrung: linear im zweiten, konjugiert im ersten!

In der Mathematik werden beide Konventionen uneinheitlich verwendet.
Konsequent wäre: Statt $f(x)$ schreibe $(x)f$, statt Av dann vA, statt $u^\dagger Av$ dann $vAu^\dagger$ statt $\langle u\lambda \,|\, v\mu \rangle = \overline{\lambda}\langle u \,|\, v \rangle \mu$ dann $\langle \mu v \,|\, \lambda u \rangle = \mu \langle v \,|\, u \rangle \overline{\lambda}$.

Das Kreuzprodukt von Vektoren im Raum $\mathbb{R}^3$

Satz S4R: das Kreuzprodukt aka Vektorprodukt in Dimension 3

Speziell in Dimension 3 haben wir das **Kreuzprodukt** aka **Vektorprodukt**:

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & e_1 \\ u_2 & v_2 & e_2 \\ u_3 & v_3 & e_3 \end{vmatrix}$$

(1) Das Produkt $(u, v) \mapsto u \times v$ ist antisymmetrisch, $v \times u = -(u \times v)$, und bilinear, also $u \times (v\lambda + v'\mu) = (u \times v)\lambda + (u \times v')\mu$, ebenso in u.

(2) Für je drei Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle u \times v \,|\, w \rangle = \det(u, v, w)$. Insbesondere gilt $0 = \langle u \times v \,|\, u \rangle = \langle u \times v \,|\, v \rangle$, also $u \times v \in \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$.

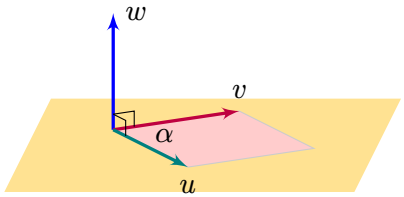
(3) Für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$ und $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ gilt $(Au) \times (Av) = A(u \times v)$.

Beweis: Eigenschaften (1) und (2) sind klar. (3) Für alle $w \in \mathbb{R}^3$ haben wir $\langle (Au) \times (Av) \,|\, Aw \rangle \overset{(2)}{=} \det(Au, Av, Aw) \overset{\text{Mul}}{=} \det(A) \det(u, v, w) \overset{\text{SO}}{=} \det(u, v, w) \overset{(2)}{=} \langle u \times v \,|\, w \rangle \overset{\text{SO}}{=} \langle A(u \times v) \,|\, Aw \rangle$. Das zeigt $(Au) \times (Av) = A(u \times v)$. QED

Das Kreuzprodukt von Vektoren im Raum $\mathbb{R}^3$

Für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$ und $w = u \times v$ gilt $w \perp u$ und $w \perp v$ sowie

$$|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \sphericalangle(u, v)$$



Nach geeigneter Drehung haben wir:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 v_2 \end{bmatrix}$$

Der Vektor $w = u \times v$ steht senkrecht auf u und v. Die Orientierung von (u, v, w) ist positiv, denn wir haben $\det(u, v, w) = \langle w \,|\, w \rangle = |w|^2 \geq 0$.

Die obige Rechnung zeigt: Die Norm $|w|$ ist der Flächeninhalt des von u und v aufgespannten Parallelogramms, also $|w| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \sphericalangle(u, v)$.

Daher gilt $w = 0$ genau dann, wenn u und v linear abhängig sind, und umgekehrt $w \neq 0$ genau dann, wenn u und v linear unabhängig sind.

Das $(n-1)$-fache Vektorprodukt im Raum $\mathbb{R}^n$

Das $(n-1)$-fache Kreuzprodukt $\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definieren wir durch $\langle v_1 \times \ldots \times v_{n-1} \,|\, v_n \rangle = \det(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ für alle $v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n \in \mathbb{R}^n$.

$$v_1 \times \ldots \times v_{n-1} = \det \begin{bmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{n-1,1} & e_1 \\ v_{1,2} & \cdots & v_{n-1,2} & e_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{1,n} & \cdots & v_{n-1,n} & e_n \end{bmatrix}$$

Für $n = 3$ erhalten wir das dreidimensionale Kreuzprodukt:

$$x \times y = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & e_1 \\ x_2 & y_2 & e_2 \\ x_3 & y_3 & e_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - y_2 x_3 \\ x_3 y_1 - y_3 x_1 \\ x_1 y_2 - y_2 x_1 \end{bmatrix}$$

Für $n = 2$ erhalten wir die $90°$–Linksdrehung:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} v_1 & e_1 \\ v_2 & e_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} =: \circlearrowleft v$$

Die Rodrigues–Rotationsformel

Satz S4S: die elegante Rotationsformel nach Rodrigues

Zu jeder Drehachse $u \in \mathbb{S}^2$ und Drehwinkel $\theta \in [0, \pi] \subset \mathbb{R}$ definieren wir die zugehörige Drehung $\rho(u, \theta) \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ nach **Rodrigues** durch

$$\rho(u, \theta) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto x + \sin(\theta) \cdot u \times x + (1 - \cos(\theta)) \cdot u \times (u \times x).$$

Diese Abbildung $\rho : \mathbb{S}^2 \times [0, \pi] \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ ist stetig und surjektiv und beinahe injektiv: Es gilt $\rho(u, \theta) = \rho(u', \theta')$ genau dann, wenn $(u, \theta) = (u', \theta')$ oder $\theta = \theta' = 0$ oder $(u', \theta') = (-u, -\theta) \in \mathbb{S}^2 \times \{\pm\pi\}$.

Diese Formel zu *finden* erfordert Kreativität. Steht sie erst einmal vor uns, so können wir sie leicht *beweisen*; zum Nachrechnen genügt Handwerk:

Beweis: Wir ergänzen unser u zu einer ONB $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ mit $u \times v = w$. In dieser Basis lesen wir ab: $u \mapsto u$ sowie $v \mapsto \cos(\theta) v + \sin(\theta) w$ und $w \mapsto -\sin(\theta) v + \cos(\theta) w$. Somit gilt $\rho(u, \theta) = R_\theta^{v,w}$. Nach Konstruktion ist ρ stetig. Surjektivität verdanken wir S4M. Es gilt $\rho(s, 0) = \mathrm{id}$. Für $\theta \in]0, \pi]$ ist die Drehachse eindeutig, für $\theta \in]0, \pi[$ auch die Richtung. QED

Permutationsmatrizen sind orthogonal und unitär.

Sei $(\mathbb{K}, +, 0, \cdot, 1)$ ein Ring mit $0 \neq 1$. Jede Transformation $\tau \in \mathrm{T}_n$, also $\tau : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$, definiert ihre zugehörige Matrix

$$P_\tau := (e_{\tau(1)}, \dots, e_{\tau(n)}) \in \mathbb{K}^{n \times n},$$

also $P_\tau e_i = e_{\tau(i)}$. Permutationen interessieren uns besonders. Beispiele:

$$\tau = (1,2,3) = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{S}_3 \quad \Longrightarrow \quad P_\tau = (e_2, e_3, e_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}$$

$$\tau = (2,3) = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{S}_3 \quad \Longrightarrow \quad P_\tau = (e_1, e_3, e_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}$$

♦ Satz J5B: Permutationsmatrizen sind orthogonal.

(1) Wir erhalten den Homomorphismus (von Monoiden bzw. Gruppen)

$$P : (\mathrm{T}_n, \circ, \mathrm{id}) \to (\mathbb{K}^{n\times n}, \cdot, 1_{n\times n}) : \tau \mapsto P_\tau,$$
$$(\mathrm{S}_n, \circ, \mathrm{id}) \to (\mathrm{GL}_n \mathbb{K}, \cdot, 1_{n\times n}).$$

(2) Orthogonalität: Für jede Permutation $\tau \in \mathrm{S}_n$ gilt $P_\tau^\intercal = P_\tau^{-1} = P_{\tau^{-1}}$.

(3) Darstellungssatz von Cayley J3F: Jede endliche Gruppe $(G, \cdot, 1)$ der Ordnung $n = |G|$ bettet ein gemäß $G \hookrightarrow \mathrm{S}_n \hookrightarrow \mathrm{GO}_n \mathbb{K} \leq \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$.

Permutationsmatrizen sind orthogonal und unitär.

Aufgabe: Übertragen Sie dies von der endlichen Menge $I = \{1, \dots, n\}$ sorgsam auf eine beliebige Menge I, egal ob endlich oder unendlich.

Satz S4T: Permutationen als unitäre Automorphismen.

Über $(\mathbb{K}, \sigma)$ betrachten wir den Koordinatenraum $V = \mathbb{K}^{(I)}$ zur Menge I. Seine Standardbasis $(e_i)_{i\in I}$ erfüllt $e_i(j) = \delta_{ij}$, also $e_i(i) = 1$ und $e_i(j) = 0$ für $j \neq i$. Seine Standardform $\langle\text{-}|\text{-}\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ ist $\langle u \,|\, v\rangle = \sum_{i\in I} u_i^\sigma v_i$.

(0) Jede Abbildung $\tau : I \to I$ können wir dank PLF N1B eindeutig fortsetzen zur $\mathbb{K}$–linearen Abbildung $P_\tau : \mathbb{K}^{(I)} \to \mathbb{K}^{(I)}$ mit $P_\tau(e_i) = e_{\tau(i)}$.

(1) Wir erhalten den Homomorphismus (von Monoiden bzw. Gruppen)

$$P : (\mathrm{T}_I, \circ, \mathrm{id}) \to (\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{(I)}), \circ, \mathrm{id}) : \tau \mapsto P_\tau,$$
$$(\mathrm{S}_I, \circ, \mathrm{id}) \to (\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{(I)}), \circ, \mathrm{id}), \quad P_\tau^{-1} = P_{\tau^{-1}}.$$

(2) Zur Bijektion $\tau \in \mathrm{S}_I$ erhalten wir die Isometrie $P_\tau \in \mathrm{GO}(\mathbb{K}^{(I)}, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$.

(3) Jede Gruppe G bettet ein gemäß $G \hookrightarrow \mathrm{S}_G \hookrightarrow \mathrm{GO}(\mathbb{K}^{(G)}) \leq \mathrm{GL}(\mathbb{K}^{(G)})$.

Permutationsmatrizen sind orthogonal und unitär.

Beispiel: Für $I = \{1, \dots, n\}$ und $\tau \in \mathrm{S}_n$ wird $P_\tau : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ dargestellt durch obige Permutationsmatrix. Auf $I = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $\tau : i \mapsto i + 1$ ist P_τ die zirkuläre Verschiebung, in Koordinaten $(P_\tau(u))_i = u_{i-1}$, sic!

Ein unendliches Beispiel ist $I = \mathbb{Z}$ mit $\tau : i \mapsto i + 1$. Hier ist $P_\tau : e_i \mapsto e_{i+1}$ die Verschiebung nach rechts, in Koordinaten $(P_\tau(u))_i = u_{i-1}$, sic!

Aufgabe: Alles liegt explizit vor. Rechnen Sie die Behauptungen nach.

Beweis: Es gilt $P_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}_V$. (1a) Wir rechnen $P_\tau \circ P_\pi = P_{\tau\circ\pi}$ direkt nach. Links gilt $e_i \mapsto e_{\pi(i)} \mapsto e_{\tau(\pi(i))}$, rechts gilt $e_i \mapsto e_{(\tau\circ\pi)(i)}$ für alle $i \in I$. Beide Seiten sind $\mathbb{K}$–linear, also $P_\tau \cdot P_\pi = P_{\tau\circ\pi}$ dank Vergleich N1A. Das zeigt die Multiplikativität, also die ersehnte Homomorphie.

(2) Für $\tau \in \mathrm{S}_I$ und $u \in \mathbb{K}^{(I)}$ gilt $(P_\tau(u))_i = u_{\tau^{-1}(i)}$, also $P_\tau \in \mathrm{GO}(\mathbb{K}^{(I)})$, denn $\langle P_\tau(u) \,|\, P_\tau(v)\rangle = \sum_{i\in I} u^\sigma_{\tau^{-1}(i)} v_{\tau^{-1}(i)} = \sum_{j\in I} u_j^\sigma v_j = \langle u \,|\, v\rangle$.

(3) Darstellungssatz von Cayley J3F: Jede Gruppe $(G, \cdot, 1)$, egal ob endlich oder unendlich, bettet ein gemäß $G \hookrightarrow \mathrm{S}_G \hookrightarrow \mathrm{GO}(\mathbb{K}^{(G)}) \leq \mathrm{GL}(\mathbb{K}^{(G)})$. $\boxed{\text{QED}}$

Permutationsmatrizen sind orthogonal und unitär.

Aufgabe: Nennen Sie alle Matrizen $A \in \mathrm{GO}_2 \mathbb{R}$ mit Einträgen in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

Lösung: (a) Die erste Spalte ist normiert, also gleich $(1,0)^\intercal$ oder $(0,1)^\intercal$. Die zweite Spalte ist ebenfalls normiert und orthogonal zur ersten, also

$$\mathbb{N}^{2\times 2} \cap \mathrm{GO}_2 \mathbb{R} \ni \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Ebenso über $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z}^{2\times 2} \cap \mathrm{GO}_2 \mathbb{R} \ni \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Die erste Spalte $(a/c, b/c)^\intercal$ enspricht einem pythagoreischen Tripel $(a, b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{>0}$ mit $a^2 + b^2 = c^2$ und $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 1$.

$$\mathbb{Q}^{2\times 2} \cap \mathrm{GO}_2 \mathbb{R} \ni \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

Aufgabe: Wie viele Matrizen $A \in \mathrm{GU}_n \mathbb{C}$ haben Einträge in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}[\mathrm{i}], \mathbb{Q}$?

Lösung: Wir finden (a) $n!$, (b) $n!2^n$, (c) $n!4^n$, (d) unendlich viele für $n \geq 2$.

Aufgabe: Im euklidischen Raum $(V = \mathbb{R}^n, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ definiert jeder Vektor $v \in V \smallsetminus \{0\}$ eine Spiegelung $S_v : V \to V : x \mapsto x - 2v\,\langle v \,|\, x\rangle / \langle v \,|\, v\rangle$.

(1) Schreiben Sie S_v als Matrix M bezüglich einer ONB $(v, v_2, \dots, v_n)$.

(2) Ist $\varrho \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ mit $e_1 \mapsto e_2,\ e_2 \mapsto e_3,\ e_3 \mapsto e_1$ eine Spiegelung?

(3) Seien $y, z \in V$ mit $|y| = |z|$. Nennen Sie einen Vektor v mit $S_v : y \mapsto z$.

(4) Seien $\varphi \in \mathrm{GO}(\mathbb{R}^n)$ sowie $x \in \mathrm{fix}(\varphi)$ und $y \in V \smallsetminus \mathrm{fix}(\varphi)$.
Wir setzen $v = \varphi(y) - y$. Zeigen Sie $S_v(x) = x$.

(5) Zeigen Sie damit folgenden schönen Satz:

Satz S4U: Cartan–Dieudonné

Jedes $\varphi \in \mathrm{GO}(\mathbb{R}^n)$ ist Komposition von $\le n$ Spiegelungen. Genauer: Gilt $\dim \mathrm{fix}(\varphi) = n - k$, so ist φ Komposition von $\le k$ Spiegelungen.

Das ist nochmal Satz S4Q, dort haben wir mit Gauß–Householder gezeigt: Spiegelungen erzeugen die Isometriegruppe $\mathrm{GO}_n(\mathbb{R})$. Hier beweisen wir dies ohne Matrizen direkt mit Isometrien per Induktion über k.

Lösung: (1) Wir finden die darstellende Matrix $M = \mathrm{diag}(-1, 1, \dots, 1)$, denn es gilt $S_v : v \mapsto -v$ und $S_v : u \mapsto u$ für $u \perp v$.

(2) Es gilt $\det(\varrho) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$, aber jede Spiegelung hat Determinante -1. (Zwar ist ρ eine Isometrie, aber keine Spiegelung, sondern eine Drehung.)

(3) Wir wählen $v = z - y \neq 0$. (Siehe Householder–Spiegelungen S4O.)

(4) Für $v = \varphi(y) - y$ gilt nach Definition

$$S_v(x) = x - 2v\,\frac{\langle v \,|\, x\rangle}{\langle v \,|\, v\rangle}$$

Wir berechnen den Zähler des Bruchs:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(y) - y \,|\, x\rangle &= \langle \varphi(y) \,|\, x\rangle - \langle y \,|\, x\rangle \\ &\overset{(a)}{=} \langle \varphi(y) \,|\, \varphi(x)\rangle - \langle y \,|\, x\rangle \\ &\overset{(b)}{=} \langle y \,|\, x\rangle - \langle y \,|\, x\rangle = 0 \end{aligned}$$

Dabei nutzen wir (a) $x \in \mathrm{fix}(\varphi)$ und (b) $\varphi \in \mathrm{GO}(\mathbb{R}^n)$. Das zeigt $S_v(x) = x$.

Beweis des Satzes S4U: Wir führen Induktion über $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Für $k = 0$ gilt $\dim \mathrm{fix}(\varphi) = n = \dim V$, also $\mathrm{fix}(\varphi) = V$ und somit $\varphi = \mathrm{id}_V$. Das ist eine Komposition von 0 Spiegelungen.

Sei $1 \le k \le n$. Wir nehmen an, dass die Behauptung für $k' < k$ gilt. Wir wählen $y \in V \smallsetminus \mathrm{fix}(\varphi)$ und setzen $v = \varphi(y) - y$ sowie $\psi := S_v \circ \varphi$.

Für $x \in \mathrm{fix}(\varphi)$ gilt $\psi(x) = (S_v \circ \varphi)(x) = S_v(x) \overset{(4)}{=} x$, also $\mathrm{fix}(\varphi) \le \mathrm{fix}(\psi)$. Die bisherigen Fixpunkte werden also weiterhin fest gehalten.

Außerdem ist $\psi(y) = (S_v \circ \varphi)(y) = S_v(\varphi(y)) = y$, da die Spiegelung S_v die beiden Vektoren y und $\varphi(y)$ vertauscht. Also gilt zusätzlich $y \in \mathrm{fix}(\psi)$.

Somit gilt $\mathrm{fix}(\varphi) \oplus \langle y \rangle \subseteq \mathrm{fix}(\psi)$, daher ist $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{fix}(\psi)) > \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{fix}(\varphi))$, also $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{fix}(\psi)) = n - k'$ mit $k' < k$. Dank Induktionsannahme können wir ψ als Komposition von weniger als k Spiegelungen schreiben und daher $\varphi = S_v \circ \psi$ als Komposition von höchstens k Spiegelungen. QED

☺ Alternativ gelingt dies mit Matrizen, wie in Satz S4Q.

Übung: Vergleichen Sie den eher algorithmischen Beweis von Satz S4Q mittels Gauß–Householder per Induktion über die Spalten der Matrix und den eher geometrischen Beweise von Satz S4U mit Spiegelungen und Induktion über die Kodimension k des Fixraums. Tun beide dasselbe?

Hier eine gemeinsame Formulierung: Wir wählen eine ONB $v_1, \dots, v_{n-k}$ von $\mathrm{fix}(\varphi)$ und ergänzen zu einer ONB $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_{n-k}, \dots, v_n)$ von V. Für $y = v_{n-k+1}$ gilt $y \neq \varphi(y)$. Wir setzen $v = \varphi(y) - y$. Die Komposition $\psi = S_v \circ \varphi$ fixiert weiterhin $v_1, \dots, v_k$ und zudem $y = v_{n-k+1}$. Somit ist ψ Komposition von $< k$ Spiegelungen und $\varphi = S_v \circ \psi$ von $\le k$ Spiegelungen.

☺ Geschrieben als Matrix bezüglich $\mathcal{B}$ ist das Gauß–Housholder! Der algorithmische und der geometrische Beweis tun dasselbe, nur die Sicht- und Schreibweise sind leicht verschieden.

☺ Gauß–Householder spielt in der Numerik eine wichtige Rolle, Cartan–Dieudonné in der Geometrie und Gruppentheorie: Verschiedene Namen für dieselbe schöne Mathematik!

Kapitel S

Bonusmaterial

"Should you just be an algebraist or a geometer?"
is like saying "Would you rather be deaf or blind?"
[...] On the whole, we prefer to have both faculties.
Sir Michael Atiyah (1929–2019)

Inhalt dieses Kapitels S

5 Ausgleichsrechnung durch Bestapproximation
- Ausgleichsrechnung und lineare Regression
- Datenbeispiel: Venus Express

6 Harmonische Schwingungen und Analyse von Signalen
- Die trigonometrische Orthonormalbasis
- Fourier–Analyse periodischer Funktionen

7 Isometriegruppen regulärer Polyeder
- Rigidität euklidischer Isometrien
- Die fünf platonischen Körper

Rückblick auf schöne Ergebnisse

Wie immer muss zunächst eine Vielfalt neuer Ideen bewältigt werden, doch sofort bieten Sesquilinearformen wunderschöne und wirksame Werkzeuge: Orthogonale Projektion S1Q, Diagonalisierung hermitescher Formen S1R, Skalarprodukte S2A und die Cauchy–Schwarz–Ungleichung S2G, Orthogonalisierung S3C und die QR–Zerlegung S3E / S4L / S4P, Bestapproximation S3F und Näherungslösung aka Pseudoinverse S3H, Fourier–Analyse S6A, Positionsbestimmung S4C und Rigidität S4E, orthogonale und unitäre Gruppen S4G, Givens–Rotationen S4K und Householder–Spiegelungen S4P, Vektorprodukt S4R und Rodrigues S4S.

Wiederholung: Erklären Sie diese Ergebnisse in eigenen Worten!

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung ist fundamental und eine der wichtigsten Ungleichungen der Mathematik. Sie tritt in nahezu allen Gebieten und in zahlreichen Varianten auf, nicht nur in Geometrie und Analysis, sondern zum Beispiel auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik für die Co/Varianz und in der Quantenmechanik in Form von Heisenbergs Unschärferelation.

Klassifikation der unitären Vektorräume

Übung: Wir arbeiten über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$. Wie klassifizieren sie endlich-dimensionale Vektorräume V? mit Skalarprodukt $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$? Welche Modellräume kennen Sie? Wann sind zwei Räume isomorph?

Satz S4A: Klassifikation der unitären Vektorräume

(1) Haben zwei Vektorräume U und V über $\mathbb{K}$ dieselbe Dimension, so existiert ein $\mathbb{K}$–linearer Isomorphismus $(\varphi, \psi) : U \cong V$.

(2) Haben unitäre Vektorräume $(U, \langle\text{-}|\text{-}\rangle_U)$ und $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle_V)$ über $\mathbb{K}$ selbe abzählbare Dimension, so existiert ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis: (1) Dank Basissatz M2K existieren Basen $(u_i)_{i\in I}$ von U und $(v_j)_{j\in J}$ von V. Jedes Bijektionspaar $(\mu, \nu) : I \cong J$ können wir linear fortsetzen zu einem Isomorphismuspaar $(\varphi, \psi) : U \cong V$ über $\mathbb{K}$.

(2) Dank Gram–Schmidt S3C können wir abz. Basen orthonormalisieren. Für ONBasen $(u_i)_{i\in I}$ und $(v_j)_{j\in J}$ wird aus $(\mu, \nu) : I \cong J$ nun die Isometrie $(\varphi, \psi) : (U, \langle\text{-}|\text{-}\rangle_U) \cong (V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle_V) : u_i \leftrightarrows v_i$ dank Parseval S3B. QED

Abstand zwischen Mengen

Definition S4B: Abstand zwischen Punkten und Mengen

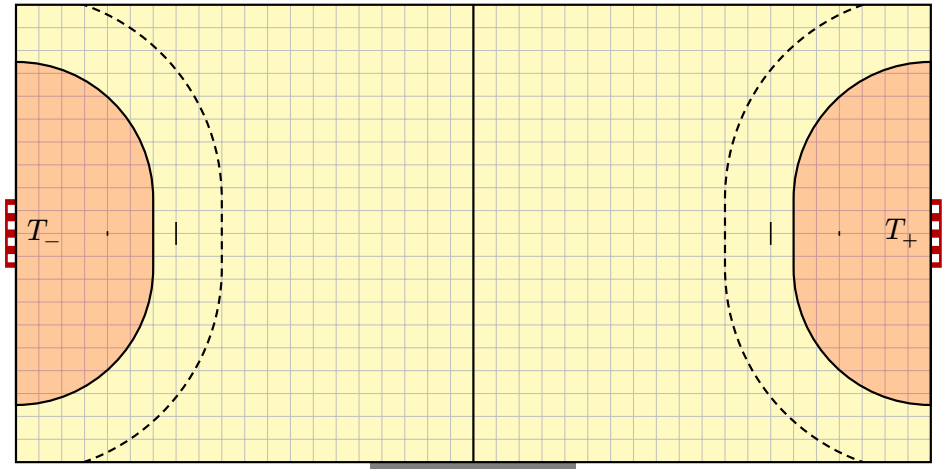
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir messen den Abstand zwischen Punkten und Mengen als das Infimum der punktweisen Abstände:

$$\begin{aligned}
d &: X \times \mathfrak{P}X \to [0,\infty], & d(a,B) &:= \inf\{\, d(a,y) \mid y \in B \,\} \\
d &: \mathfrak{P}X \times X \to [0,\infty], & d(A,b) &:= \inf\{\, d(x,b) \mid x \in A \,\} \\
d &: \mathfrak{P}X \times \mathfrak{P}X \to [0,\infty], & d(A,B) &:= \inf\{\, d(x,y) \mid x \in A,\ y \in B \,\} \\
\operatorname{diam} &: \mathfrak{P}X \to [0,\infty], & \operatorname{diam}(A) &:= \sup\{\, d(x,y) \mid x,y \in A \,\}
\end{aligned}$$

Aufgabe: Zeichnen Sie ein Handballfeld gemäß Regel 1 der *International Handball Federation* (IHF, `www.ihf.info`), aber jeweils in der ℓ^p–Metrik:

$X = [-20,20] \times [-10,10] \subseteq \mathbb{R}^2$	die Spielfläche
$T = \{-20,20\} \times [-1.5,1.5]$	die beiden Torlinien
$S = \{\, x \in X \mid d(x,T) = 6 \,\}$	Sechs-Meter-Linie („Kreis“)
$N = \{\, x \in X \mid d(x,T) = 9 \,\}$	Neun-Meter-Linie („Freiwurflinie“)

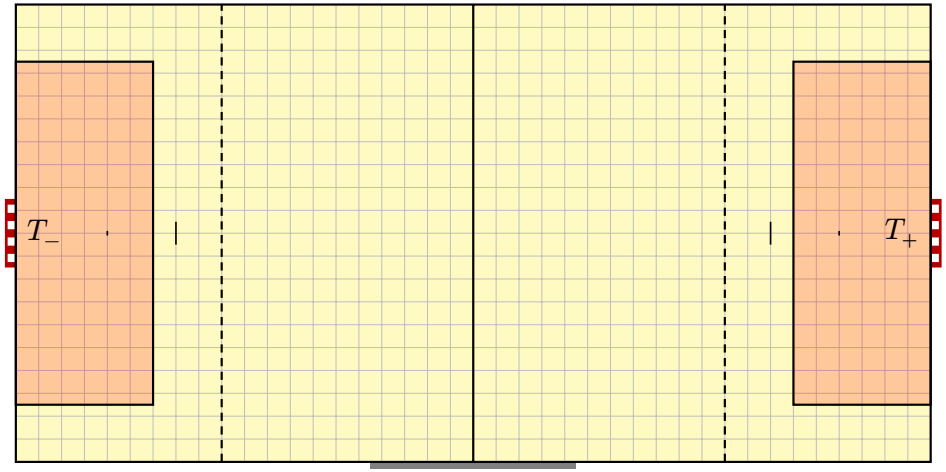
Handballfeld in der euklidischen Metrik aka ℓ^2–Metrik



☺ Der sogenannte „Kreis“ ist gar keiner! Die Sechs-Meter-Linie besteht gemäß IHF-Regel 1:4 aus zwei Viertelkreisen und einem Geradenstück.

? Gibt es zwischen je zwei Punkten einen kürzesten Weg? Mehrere?

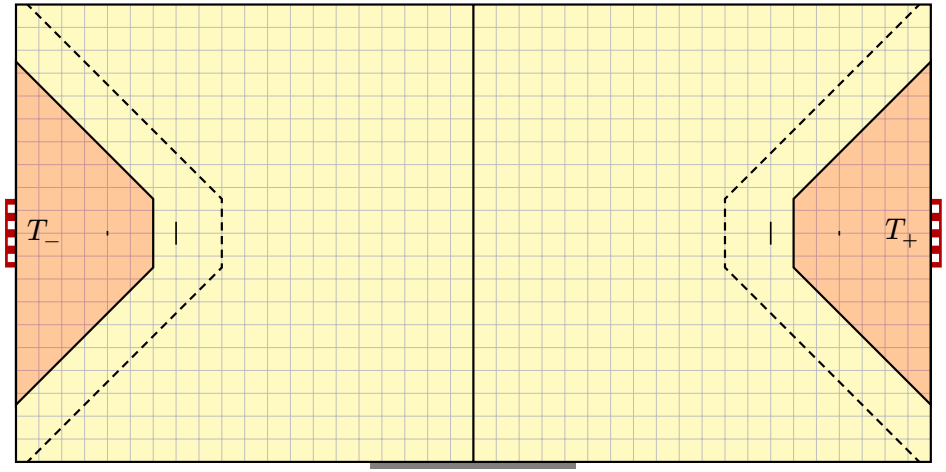
Handballfeld in der Maximumsmetrik aka ℓ^∞–Metrik



☺ In der Maximumsmetrik ist die Sechs-Meter-Linie ein Rechteck.
Fun fact: Im Fußball folgen Tor- und Strafraum dieser Konvention.

? Gibt es zwischen je zwei Punkten einen kürzesten Weg? Mehrere?

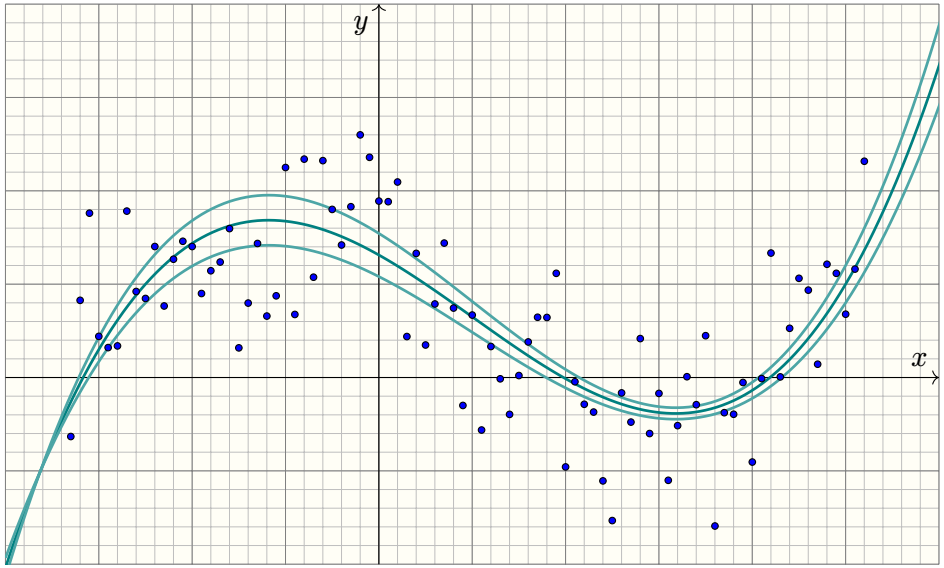
Handballfeld in der Taximetrik aka ℓ^1–Metrik



☺ In der Taximetrik ist die Sechs-Meter-Linie ein Trapez.
Das sieht ulkig aus und illustriert eindrücklich diese Metrik.

? Gibt es zwischen je zwei Punkten einen kürzesten Weg? Mehrere?

Ausgleichsrechnung [*curve fitting*]



Welche Kurve $y = p(x)$ approximiert die Datenpunkte am besten?
Als Kandidaten betrachten wir hierzu Polynome $p = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i \in \mathbb{R}[x]_{\le n}$.

Ausgleichsrechnung [*curve fitting*]

Gegeben sind Datenpunkte $(x_i, y_i)_{i=0}^m$ in $\mathbb{R}^2$. Wir wollen ein Polynom $y = p(x) := a_0 + xa_1 + \ldots + x^n a_n$ vom Grad $\le n$ bestmöglich anpassen. Gesucht sind also $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, sodass $y_i \approx p(x_i)$ möglichst gut gilt. Es bleibt ein Fehler $\varepsilon_i = p(x_i) - y_i$. Wir wollen $\varepsilon^2 = \sum_{i=0}^m \varepsilon_i^2$ minimieren!

Aufgabe: Gibt es eine Lösung? Ist sie eindeutig? Wie berechnen Sie diese?

Lösung: Wir bestapproximieren das (überbestimmte) LGS $Xa = y$ mit

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & \ldots & x_m^n \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Wir nutzen Satz S3H. Wir fordern genug Datenpunkte für vollen Rang: Hier gilt $\operatorname{rang} X = \min(n, \sharp\{x_0, \ldots, x_m\})$; wir brauchen mindestens $n+1$ verschiedene x–Werte, damit folgt $\operatorname{rang} X = n$. Sodann existiert genau eine Bestapproximation $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit minimaler Fehlernorm $\|Xa - y\|$, nämlich $X^\top Xa = X^\top y$. Die QR–Zerlegung $X = QR$ liefert $a = R^{-1}Q^\top y$.

Extremer Fall: Lagrange–Interpolation

Wiederholung: Was gilt im Extremfall $m = n$ und $x_0 < x_1 < \ldots < x_m$?

Lösung: In diesem Falle ist $X = (x_i^j)_{i=0,\ldots,n}^{j=0,\ldots,n}$ die **Vandermonde–Matrix** und invertierbar dank Satz D5B. Die Ausgleichsrechnung zu $Xa = y$ ist nun die lange vertraute Lagrange–Interpolation C2F und gelingt immer exakt: Zu jedem Vektor $y = (y_i)_{i=0}^n \in \mathbb{R}^{n+1}$ von Messwerten existiert genau eine Lösung $a = (a_j)_{j=0}^n \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $Xa = y$, nämlich $a = X^{-1}y$.

⚠ Realistischerweise wollen wir den Polynomgrad n klein halten, doch die Anzahl m der gemessenen Datenpunkte möglichst groß. Faustformel: Je mehr Messungen, desto besser die Genauigkeit.

Im Idealfall liegen alle Datenpunkte $(x_i, y_i)_{i=1}^m$ exakt auf genau einer Polynomkurve vom Grad $\le n$. Dann gelingt die Approximation fehlerfrei. Das gilt im obigen Extremfall immer. Es ist aber auch für $m > n$ möglich. In diesem Falle genügt die Lagrange–Interpolation bezüglich je n dieser Stützstellen wie oben. Alle weiteren Datenpunkte sind damit redundant; sie tragen nichts zur Berechnung bei, sie bestätigen lediglich die Kurve.

Einfachster Fall: der Mittelwert

Aufgabe: Explizieren Sie die Ausgleichsrechnung speziell für Grad 0.

Lösung: (0) Gegeben sind die Datenpunkte $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ in $\mathbb{R}^2$. Wir suchen die beste Konstante $a_0 \in \mathbb{R}$, die den Fehler $\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^n (a_0 - y_i)^2$ minimiert. Wir bestapproximieren also das (überbestimmte) LGS $Xa = y$ mit

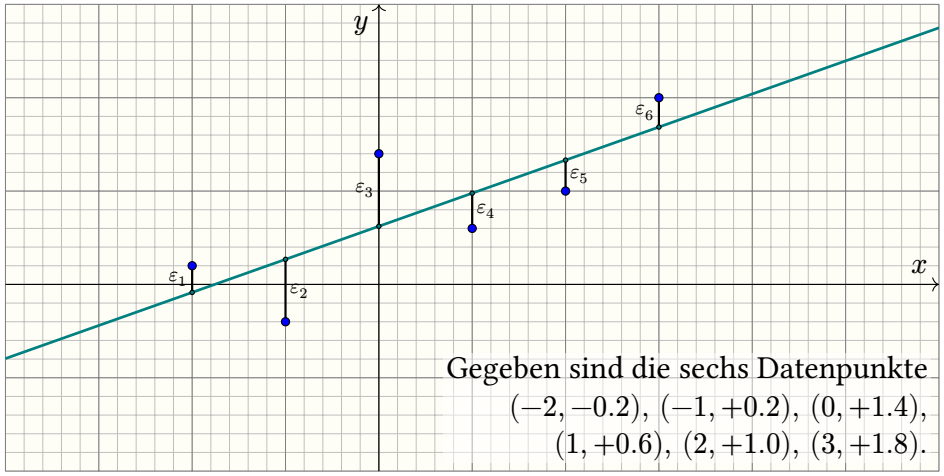
$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Dank Satz S3H lösen wir $Xa = y$ durch $X^\top Xa = X^\top y$ und erhalten:

$$\boxed{a_0 = \bar{y} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i}$$

Die Bestapproximation ist der **arithmetische Mittelwert**. Dies der Wert $a_0 \in \mathbb{R}$, der die Fehlerquadratsumme $\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^n (a_0 - y_i)^2$ minimiert. Alternativ: $\partial\varepsilon^2/\partial a_0 = \sum_{i=1}^n 2(a_0 - y_i)$ verschwindet für $a_0 = \bar{y}$.

Anwendung: lineare Regression



Welche Gerade $p(x) = a_0 + a_1 x$ approximiert die Daten am besten?
Hier finden wir die Ausgleichsgerade $p(x) = 0.623 + 0.354x$.

Anwendung: lineare Regression

Aufgabe: Explizieren Sie die Ausgleichsrechnung speziell für Grad 1.

Lösung: (1) Gegeben sind die Datenpunkte $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ in $\mathbb{R}^2$.
Wir suchen für $p(x) = a_0 + a_1 x$ die optimalen Koeffizienten $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, die die Fehlerquadratsumme $\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2$ minimieren.
Wir bestapproximieren also das (überbestimmte) LGS $Xa = y$ mit

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Dank Satz S3H lösen wir $Xa = y$ durch $X^\top X a = X^\top y$, ausgeschrieben:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{bmatrix}$$

Wir können nun die Daten einsetzen und das LGS numerisch lösen.
Alternativ können wir die allgemeine Formel weiter vereinfachen.

Anwendung: lineare Regression

☺ Dieses Gleichungssystem können wir erfreulich explizit auflösen:

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \cdots \cdots = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \cdots \cdots = \bar{y} - a_1 \bar{x}$$

Hier stehen $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ und $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ für die Mittelwerte.

☺ Diese schlüsselfertigen **Regressionsformeln** können Sie nun leicht und bequem nutzen, etwa auf einem Computer implementieren. Sie finden sich in jeder numerischen Bibliothek, so auch in Python:

```python
import numpy as np
x = np.array([-2.0, -1.0, 0.0, 1.0, 2.0, 3.0])
y = np.array([+0.2, -0.4, 1.4, 0.6, 1.0, 2.0])
a1, a0 = np.polyfit(x, y, 1) # degree 1 fitting
print(f"Regression line: y = {a0:.5f} + {a1:.5f} x")
# Output -- Regression line: y = 0.62286 + 0.35429 x
```

Anwendung: lineare Regression

Aufgabe: Finden Sie die Bestapproximation alternativ durch Ableiten.

Lösung: Wir wollen die Fehlerquadratsumme $\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2$ minimieren. Die beiden partiellen Ableitungen nach a_0, a_1 sind:

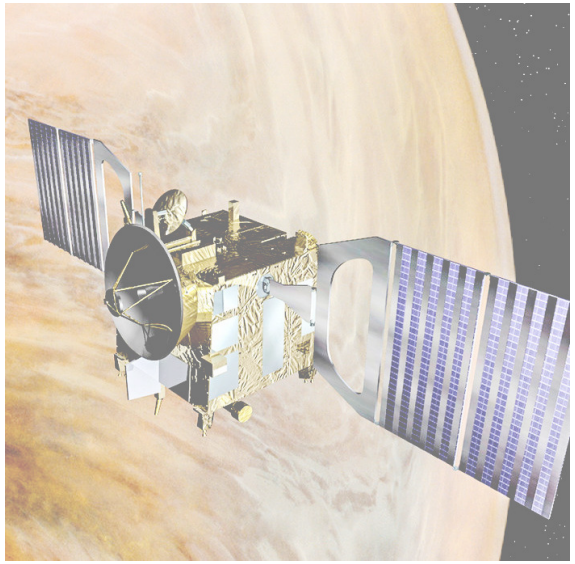
$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^n 2(a_0 + a_1 x_i - y_i) \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^n 2(a_0 + a_1 x_i - y_i) x_i \overset{!}{=} 0$$

Die erste verschwindet offensichtlich genau für $a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$.
Dies können wir in die zweite Gleichung einsetzen und auflösen.
Nach kurzer Rechnung erhalten wir erneut die obige Formel für a_1:

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ a_0 &= \bar{y} - a_1 \bar{x} \end{aligned}}$$

Mars & Venus Express



Zwei Missionen der ESA:

Start Jun. 2003 in Baikonur
Mars-Orbit ab Jan. 2004
→ Suche nach Wasser

Start Nov. 2005 in Baikonur
Venus-Orbit ab Apr. 2006
→ Atmosphäre der Venus

Orbiter: Masse 633kg leer plus Treibstoff (MMH+NTO)

Acht Steuertriebwerke mit je 10N Schub (im Labor)

Fortsetzung oder Ende: Wie lange reicht der Sprit?

Siehe `en.wikipedia.org/wiki/Mars_Express` und `/Venus_Express`

Mars & Venus Express

Design erfordert Entscheidungen und meist Kompromisse. Die ESA hat auf Messgeräte für die Tankfüllung verzichtet. Zum geplanten Ende der Mission stellt sich die Frage: Kann die Mission verlängert werden? Ist dazu noch genug Treibstoff im Tank? Wie kann man das mit ausreichender Sicherheit herausfinden? Idee: Die ESA verfügt über alle bisherigen Positions- und Steuerdaten. Hieraus könnte man jeweils die Trägheit berechnen und indirekt die Gesamtmasse! Geht das?

Realistische Analogie: Heutige Autos haben eine Masse von etwa 1.2 bis 1.6 Tonnen bei einem Tankvolumen von 50 bis 70 Litern. Sie fahren ein Auto ohne Tankanzeige, die Tankfüllung erspüren Sie in Kurven, beim Gasgeben und Abbremsen. Ist das verrückt? Ja. Ist das möglich? Schwierig! Man muss genau und sehr häufig messen – und dann die Messfehler rausfiltern!

Vereinfachte Analogie: Sie haben eine Gasflasche für einen Herd oder Grill: Leergewicht 6kg, Inhalt 0-5kg Propan, ebenfalls ohne Anzeige des Füllstandes. Sie können durch Schütteln recht gut erspüren, wie voll die Gasflasche ist. Probieren Sie es bei Gelegenheit mal aus!

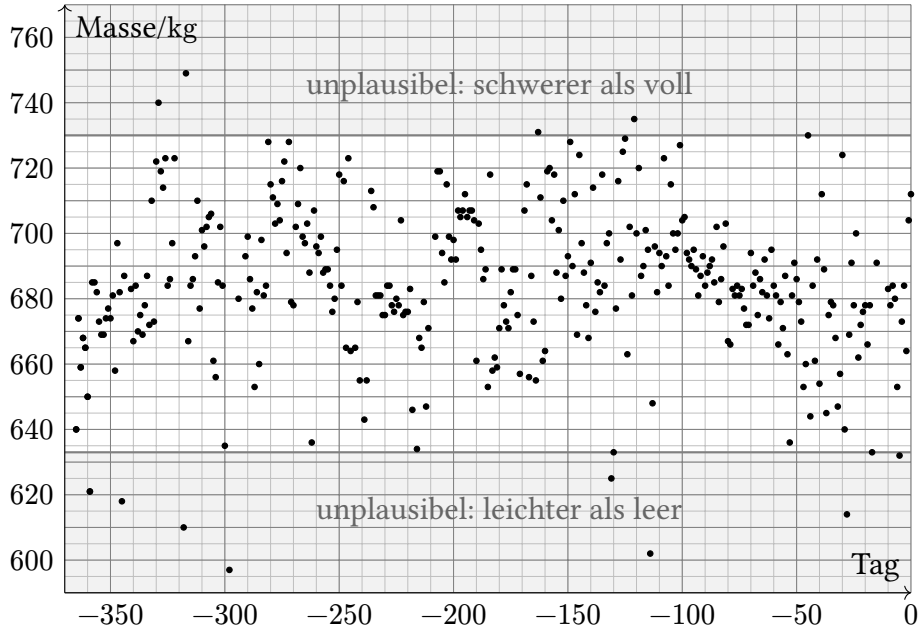
Jede Messung ist mit Fehlern behaftet: systematische müssen wir erkennen und dann korrigieren, bei zufälligen können wir dies nicht direkt! Wir müssen lernen, sie geschickt rauszufiltern, um ein möglichst verlässliches Ergebnis zu erhalten. Das ist das Ziel der mathematischen Statistik.

Es geht um rationale Entscheidungen unter Unsicherheit. Dafür genügt es nicht, eine willkürliche Schätzung auszuspucken! Die Anwendung ist ernst, es geht um Geld, wir müssen überzeugen. Wir wollen nicht nur eine gute Schätzung, sondern auch die Güte der Schätzung berechnen!

Hierzu will ich Sie mit meiner Einführung anleiten. Wer darüber hinaus ernsthafte statistische Analysen betreiben will/muss, kann sich darauf aufbauend in die Spezialliteratur einarbeiten.

Venus Express: Wieviel Treibstoff ist noch im Tank?

Aus Steuermanövern errechnete Masse für 366 Tage bis 31.12.2012.



Venus Express: Wieviel Treibstoff ist noch im Tank?

Impuls-Messungs-Methode (*Impulse Measurement Method*, IMM):
Aus Positions- und Steuerdaten errechnet man Werte für die Masse;
folgende Daten finden Sie unter `eiserm.de/lehre/HM3/VEX2012.txt`.

Tag	Datum	Masse
1	01.01.2012	640
2	02.01.2012	674
3	03.01.2012	659
...	...	...

Tag	Datum	Masse
...	...	...
364	29.12.2012	664
365	30.12.2012	704
366	31.12.2012	712

Datengewinnung ist mühsam, erfordert Umsicht und Sachkenntnis! Diese Daten stellt uns freundlicherweise Herr Çağlayan Gürbüz zur Verfügung. Er hat 2012 die Höhere Mathematik 3 belegt, dann am IRS / ESOC seine Bachelor-Arbeit zum Mars & Venus Express geschrieben.

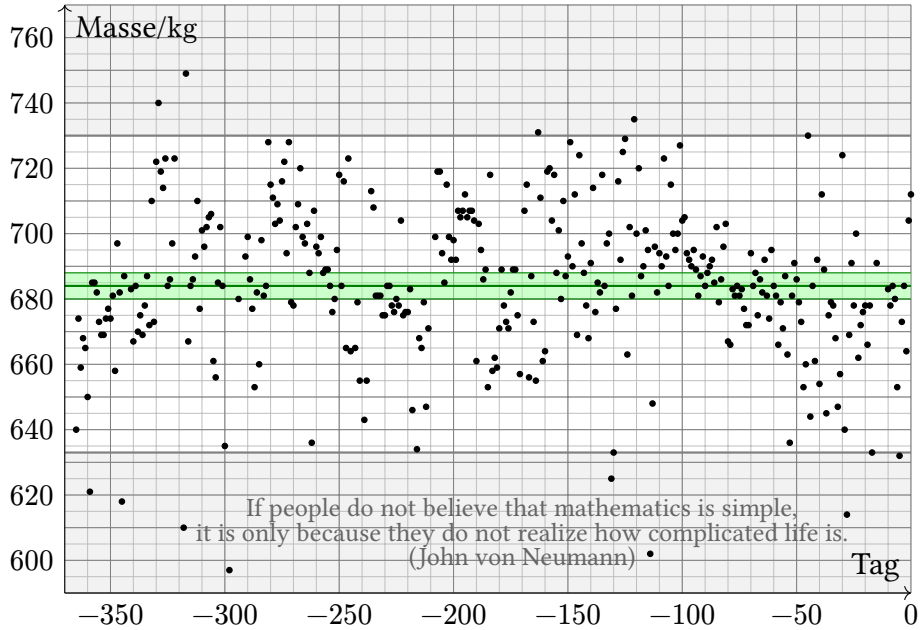
Rationale Entscheidung: Kann und sollte man die Mission verlängern? Grundlose Schätzung ist sinnlos, wir wollen nachvollziehbare Sicherheit!

Math. Methoden: Erwartung und Streuung, Stichproben und Schätzung, Gesetz der großen Zahlen, zentraler Grenzwertsatz, Konfidenzintervall!

☺ *This is rocket science.* Mathematische Statistik zeigt, wie es geht.

Mathematische Statistik: Konfidenzintervalle

Jahresmittelwert der Gesamtmasse mit 3σ–Konfidenzintervall.



Mathematische Statistik: Konfidenzintervalle

Aufgabe: Wie groß war der Tankinhalt im Jahresmittel 2012?
Geben Sie das 3σ–Konfidenzintervall an (für 99%ige Sicherheit).

Lösung: Unser Datensatz liefert Mittelwert und Streuung:
Der Stichprobenmittelwert ist $\hat{m} = 684$kg. Dies schätzt die Masse m.
Die Stichprobenstreuung ist $\hat{\sigma}_m = 24.6$kg. Dies schätzt die Streuung.

Bei $n = 345$ Datenpunkten gilt $\hat{\sigma}_{\hat{m}} = \hat{\sigma}_m/\sqrt{n} = 1.33$kg. Großes n hilft!
Das 3σ–Intervall $[\hat{m} \pm 3\hat{\sigma}_{\hat{m}}] = [680; 688]$kg ist erstaunlich schmal!
Der Tankinhalt betrug demnach $[47; 55]$kg mit 99%iger Sicherheit.

☹ Messdaten sind voller Messfehler und anderer Ungenauigkeiten.

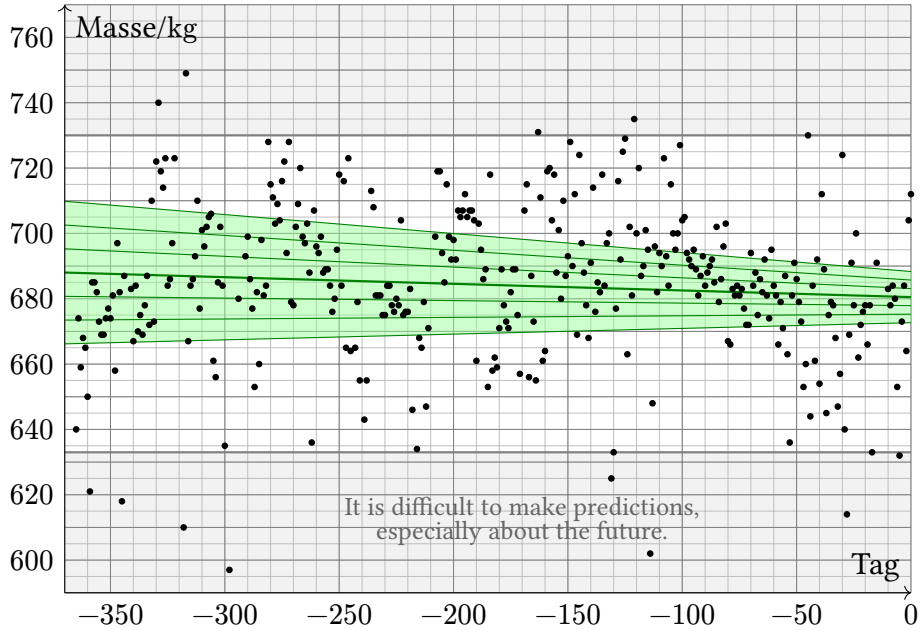
☺ Unsere Daten sind schmutzig doch glücklicherweise sehr zahlreich:
Wir können Gesetze der großen Zahlen und Grenzwertsätze nutzen!

☺ Dank passender Technik können Sie so präzise Schlüsse ziehen!
Dank Statistik fördern Sie Information zutage, die zuvor verborgen war.

⚠ Jede Prognose ist höchstens so gut wie ihre zugrundeliegenden Daten!
Zufällige Fehler können wir durch große Messreihen rausfiltern,
systematische Fehler nicht; hier helfen nur Umsicht und Sachkenntnis!

Mathematische Statistik: lineare Regression

Regressionsgerade mit Konfidenzintervallen: 1σ, 2σ, 3σ.



Mathematische Statistik: lineare Regression

Aufgabe: Wie groß war der Tankinhalt Ende 2012?
Wie lange reicht es noch? Wie sicher ist Ihre Prognose?

Lösung: Unser Datensatz liefert die Regressionsgerade $y = \hat{a} + \hat{b}\,x$:
Ende 2012 ist die Gesamtmasse $\hat{a} = 680.5$kg mit Streuung $\hat{\sigma}_{\hat{a}} = 2.6$kg.
Im Tank verbleiben $\hat{t} = 47.5$kg Treibstoff mit Streuung $\hat{\sigma}_{\hat{t}} = 2.6$kg.
Der Verbrauch ist $\hat{b} = -20.3$g/Tag mit Streuung $\hat{\sigma}_{\hat{b}} = 12.6$g/Tag.

Sehr grobe Prognose der verbleibenden Missionsdauer: 2300 Tage.
Wie verlässlich ist diese Prognose aufgrund unserer Messdaten?

Mit 95% Sicherheit reicht der Treibstoff noch für über 930 Tage:
Tank $[\hat{t} \pm 2\hat{\sigma}_{\hat{t}}] \subseteq [42.3; 52.7]$kg, Verbrauch $[\hat{b} \pm 2\hat{\sigma}_{\hat{b}}] \subseteq [-45.5; 4.9]$g/Tag.

Mit 99% Sicherheit reicht der Treibstoff noch für über 680 Tage:
Tank $[\hat{t} \pm 3\hat{\sigma}_{\hat{t}}] \subseteq [39.7; 55.3]$kg, Verbrauch $[\hat{b} \pm 3\hat{\sigma}_{\hat{b}}] \subseteq [-58.1; 17.5]$g/Tag.

☺ Wir extrahieren sorgsam, was die vorliegenden Daten hergeben!
⚠ Systematische Fehler? physikalische Annahmen? Alternativen?
War 2012 ein typisches Jahr? Wenn man Sprit spart, reicht er länger!
VEX wird 2013/14 tiefer in Atmosphäre abgesenkt, der Verbrauch steigt.
Die Mission endet im Dezember 2014 wegen Treibstoffmangels. Wow!

Die trigonometrische Orthonormalbasis

Für Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit Periode T nutzen wir das **Skalarprodukt**

$$\boxed{\langle f \,|\, g \rangle := \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t.}$$

Sei $\omega = 2\pi/T$. Als **Basisfunktion** $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$\boxed{e_k(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} = \cos(k\omega t) + \mathrm{i}\sin(k\omega t).}$$

Ihre Linearkombinationen sind die **trigonometrischen Polynome**:

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}, \quad g(t) = \sum_{\ell=-n}^{n} \hat{g}(\ell)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\omega t} \quad \text{mit} \quad \hat{f}(k), \hat{g}(\ell) \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe: Wie bestimmt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ihr Spektrum $\hat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$?
Wir nutzen Orthonormalität: Berechnen Sie hierzu die Skalarprodukte

(0) $\langle 1 \,|\, e_n \rangle$, (1) $\langle e_k \,|\, e_\ell \rangle$, (2) $\langle e_k \,|\, g \rangle$, (3) $\langle f \,|\, g \rangle$, (4) $\langle f \,|\, f \rangle$.

(5) Entwickeln Sie $f(t) = \sin^2 t$ und $g(t) = \cos^3 t$ in Fourier–Polynome.

(6) Berechnen Sie daraus $\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \sin^4 t \,\mathrm{d}t$ und $\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \cos^6 t \,\mathrm{d}t$.

Die trigonometrische Orthonormalbasis

Lösung: (0) Wir berechnen $\langle 1 \,|\, e_n \rangle$. Für $n = 0$ ist es besonders leicht:

$$\langle 1 \,|\, e_0 \rangle \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}0\omega t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} 1\, \mathrm{d}t = 1.$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$ nutzen wir den HDI und $\omega T = 2\pi$:

$$\langle 1 \,|\, e_n \rangle \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\, \mathrm{d}t \overset{\text{HDI}}{=} \frac{1}{T} \Big[\frac{1}{\mathrm{i}n\omega} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t} \Big]_{t=0}^{T} = 0.$$

(1) **Orthonormalität** — Wir berechnen die gesuchten Skalarprodukte:

$$\langle e_k \,|\, e_\ell \rangle \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \overline{e_k(t)}\, e_\ell(t)\, \mathrm{d}t \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\omega t}\, \mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{Exp}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ell-k)\omega t}\, \mathrm{d}t \overset{(0)}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell, \\ 1 & \text{für } k = \ell. \end{cases}$$

☺ Die Basis $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ist orthonormal bezüglich des Skalarprodukts!
Das ist analog zur Geometrie des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$.

☺ Im Komplexen ist alles halb so schwer und doppelt so schön!

Die trigonometrische Orthonormalbasis

(2) **Fourier** — Dank Linearität und Orthonormalität erhalten wir:

$$\langle e_k \,|\, g \rangle \overset{\text{Def}}{=} \Big\langle e_k \,\Big|\, \sum_{\ell=-n}^{n} \hat{g}(\ell)\, e_\ell \Big\rangle \overset{\text{Lin}}{=} \sum_{\ell=-n}^{n} \hat{g}(\ell)\, \langle e_k \,|\, e_\ell \rangle \overset{(1)}{=} \hat{g}(k)$$

☺ Das Skalarprodukt filtert den gewünschten Koeffizienten heraus!

(3) **Parseval** — Dank Bilinearität und Orthonormalität erhalten wir:

$$\langle f \,|\, g \rangle \overset{\text{Def}}{=} \Big\langle \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e_k \,\Big|\, \sum_{\ell=-n}^{n} \hat{g}(\ell)\, e_\ell \Big\rangle \overset{\text{Lin}}{=} \sum_{k=-n}^{n} \overline{\hat{f}(k)} \Big\langle e_k \,\Big|\, \sum_{\ell=-n}^{n} \hat{g}(\ell)\, e_\ell \Big\rangle$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} \sum_{k=-n}^{n} \sum_{\ell=-n}^{n} \overline{\hat{f}(k)}\, \hat{g}(\ell)\, \langle e_k \,|\, e_\ell \rangle \overset{(1)}{=} \sum_{k=-n}^{n} \overline{\hat{f}(k)}\, \hat{g}(k).$$

☺ Diese Rechnung gilt allgemein für Orthonormalbasen wie im $\mathbb{R}^n$.

(4) **Energiegleichung** — Für das Normquadrat gilt Pythagoras (S3A):

$$\langle f \,|\, f \rangle \overset{(3)}{=} \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2$$

☺ Das Normquadrat ist die Summe der Koeffizientenquadrate.

Die trigonometrische Orthonormalbasis

(5) Wir entwickeln f und g dank der Euler–Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$:

$$f(t) = \sin(t)^2 = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}} \right)^2 = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$$

$$g(t) = \cos(t)^3 = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t} + \frac{3}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \frac{3}{8}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t}$$

$$= \frac{3}{4}\cos(t) + \frac{1}{4}\cos(3t)$$

☺ Dank Orthonormalität (1) lesen wir die Fourier–Koeffizienten ab (2).

(6) Wir nutzen die Energiegleichung (4) und Fourier–Koeffizienten (5):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \sin^4 t\, \mathrm{d}t \overset{\text{Def}}{=} \langle f \,|\, f \rangle \overset{(4)}{=} \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2 \overset{(5)}{=} \frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \cos^6 t\, \mathrm{d}t \overset{\text{Def}}{=} \langle g \,|\, g \rangle \overset{(4)}{=} \sum_{k=-n}^{n} |\hat{g}(k)|^2 \overset{(5)}{=} \frac{5}{16}$$

☺ Die Energiegleichung gilt allgemein für Fourier–Reihen!

Satz S6A: trigonometrische Orthonormalbasis

Die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{C}$–Vektorraum. Hierin ist die Teilmenge aller T–periodischen Funktionen ein Untervektorraum. Als Basisfunktion $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $\omega = 2\pi/T$ definieren wir

$$\boxed{e_k(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} = \cos(k\omega t) + \mathrm{i}\sin(k\omega t).}$$

Diese erzeugen den Unterraum $V = \{\sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \mid n \in \mathbb{N},\ c_k \in \mathbb{C}\}$ der trigonometrischen Polynome. Hierauf haben wir das Skalarprodukt

$$\boxed{V \times V \to \mathbb{C} : (f,g) \mapsto \langle f \mid g\rangle := \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \overline{f(t)}\, g(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Damit gelten die Orthonormalitätsrelationen

$$\boxed{\langle e_k \mid e_\ell\rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell: \quad \text{paarweise Orthogonalität,} \\ 1 & \text{für } k = \ell: \quad \text{Normierung auf Länge 1.} \end{cases}}$$

Korollar S6B: Fourier–Koeffizienten durch Skalarprodukt

(1) Wir betrachten ein trigonometrisches Polynom:

$$f(t) = \sum_{\ell=-n}^{n} c_\ell\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell\cos(\ell\omega t) + b_\ell\sin(\ell\omega t)$$

Die Funktion f bestimmt die Koeffizienten durch Fourier–Integrale:

$$c_k = \langle e_k \mid f\rangle = \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \mid f\rangle = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t}\, f(t)\,\mathrm{d}t,$$

bzw.

$$a_k = \langle 2\cos(k\omega t) \mid f\rangle = \frac{2}{T}\int_{t=0}^{T} \cos(k\omega t)\, f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$b_k = \langle 2\sin(k\omega t) \mid f\rangle = \frac{2}{T}\int_{t=0}^{T} \sin(k\omega t)\, f(t)\,\mathrm{d}t.$$

☺ Die Formeln für die Koeffizienten c_k sind besonders schön, da die Funktionen $\mathrm{e}_k(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$ orthonormal sind. Hingegen sind $\cos(k\omega t)$ und $\sin(k\omega t)$ zwar orthogonal, aber mit L^2–Norm $\sqrt{2}/2$ statt Normierung 1.

☺ Dieselben Gleichungen nutzen wir allgemein für Fourier–Reihen.

☺ Das Fourier–Integral filtert den gewünschten Koeffizienten heraus!

☺ Das Skalarprodukt beschert uns Struktur, Klarheit und Übersicht.

☺ Die Orthonormalität der Basis $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ vereinfacht die Rechnung.

Korollar S6B: Jede Funktion bestimmt ihre Koeffizienten.

(2) Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ seien gegeben als Fourier–Polynome

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \quad \text{und} \quad g(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{g}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}.$$

(2a) Aus $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ für alle $k = -n, \dots, n$ folgt offensichtlich $f = g$.

(2b) Umgekehrt folgt aus $f = g$ auch $\hat{f} = \hat{g}$, dank der Fourier–Integrale:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t}\, f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t}\, g(t)\,\mathrm{d}t = \hat{g}(k)$$

☺ Koeffizientenvergeich! Dazu genügt bereits $f = g$ fast überall.

Korollar S6B: Norm und Skalarprodukt

(3) Koeffizienten $\hat{f}(k), \hat{g}(k) \in \mathbb{C}$ definieren trigonometrische Polynome

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \quad \text{und} \quad g(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{g}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}.$$

Für ihre Norm und ihr Skalarprodukt gilt nach Pythagoras (S3A)

$$\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2, \qquad \text{kurz} \quad \|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2},$$

$$\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \overline{f(t)}\, g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-n}^{n} \overline{\hat{f}(k)}\,\hat{g}(k), \qquad \text{kurz} \quad \langle f \mid g\rangle_{L^2} = \langle \hat{f} \mid \hat{g}\rangle_{\ell^2}.$$

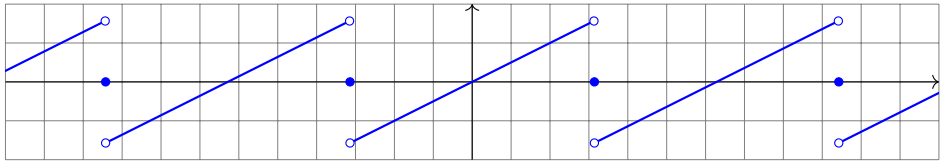
☺ Diese Isometrie ist eine zentrale Eigenschaft der Fourier–Theorie. Für trigonometrische Polynome folgt dies direkt aus der Orthonormalität der Basis $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Erfreulicherweise gilt dies nach Vervollständigung ganz allgemein für alle quadrat-integrierbaren Funktionen!

Anwendung: Fourier–Entwicklung der Sägezahnfunktion

Sei V der $\mathbb{C}$–Vektorraum aller 2π–periodischen, stückweise stetigen Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit dem (semidefiniten) Skalarprodukt

$$\boxed{\langle f \,|\, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(t) \,\mathrm{d}x.}$$

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade und 2π–periodisch mit $f(x) = x/2$ für $|x| < \pi$. Der erste Teil der Übung ist wie immer, die Funktion zu skizzieren:



Aufgabe: Berechnen Sie die Bestapproximation $f_n \in U_n$ im Unterraum $U_n = \langle e_k \,|\, -n \le k \le n \rangle \le V$ der Fourier–Polynome vom Grad $\le n$.

☺ Das scheint zunächst ein verblüffend schwieriges Problem zu sein, doch dank Satz S3F wird alles leicht! Integration aus der Schule genügt.

Anwendung: Fourier–Entwicklung der Sägezahnfunktion

Lösung: Der Fourier–Koeffizient c_0 ist der Mittelwert über eine Periode:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}0kx} \, \frac{x}{2} \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{(ungerader Integrand)}$$

Für $k \neq 0$ nutzen wir partielle Integration:

$$\begin{aligned} c_k &\overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, x \,\mathrm{d}x \overset{\text{part}}{=} \frac{1}{4\pi} \left(\left[\frac{\mathrm{i}}{k} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, x \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{i}}{k} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{4\pi k} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi k} \, \pi - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi k} \, \pi \right] = (-1)^k \, \frac{\mathrm{i}}{2k} \end{aligned}$$

Damit haben wir zu $f \in V$ die Bestapproximation $f_n \in U_n$ gefunden:

$$\boxed{\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \, \mathrm{i} \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{2k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k} \\ &= \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \end{aligned}}$$

Anwendung: Fourier–Entwicklung der Sägezahnfunktion

Umrechnung der Koeffizienten für die Sinus-Cosinus-Reihe:

$$a_k = c_k + c_{-k} = 0, \qquad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) = (-1)^{k+1} \, \frac{1}{k}.$$

Zum Vergleich nochmal direkt die Integrale für a_k, b_k mit $k \ge 1$:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \cos(kx) \,\mathrm{d}x \qquad \text{(ungerader Integrand)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[x \, \frac{\sin(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(kx)}{k} \,\mathrm{d}x \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \sin(kx) \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[x \, \frac{-\cos(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kx)}{k} \,\mathrm{d}x \right) = (-1)^{k+1} \, \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Zur Berechnung von a_k, b_k sind zwei reelle Integrale nötig, für c_k nur ein komplexes; die Wahl des Rechenwegs ist meist Geschmackssache. Die Umrechnung zwischen a_k, b_k und c_k gelingt jedenfalls leicht.

Anwendung: Fourier–Entwicklung der Sägezahnfunktion

☺ Die Fourier–Koeffizienten a_k, b_k, c_k sind hier leicht zu berechnen. Da f reell ist, gilt $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ und $c_{-k} = \overline{c_k}$. Da f ungerade, gilt $a_k = 0$.

☺ Die folgenden Graphiken zeigen hierzu die **Fourier–Polynome** f_n. Wir wollen verstehen, ob und in welchem Sinne f_n gegen f konvergiert.

☺ Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}$ gilt augenscheinlich $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$: In den Punkten $x = 0$ und $x = \pi$ ist dies klar, ansonsten keineswegs!

☹ Die Koeffizienten klingen nur langsam ab ($\sim 1/k$), das heißt auch hohe Frequenzen tragen noch deutlich bei: Die Fourier–Reihe ist „rau“.

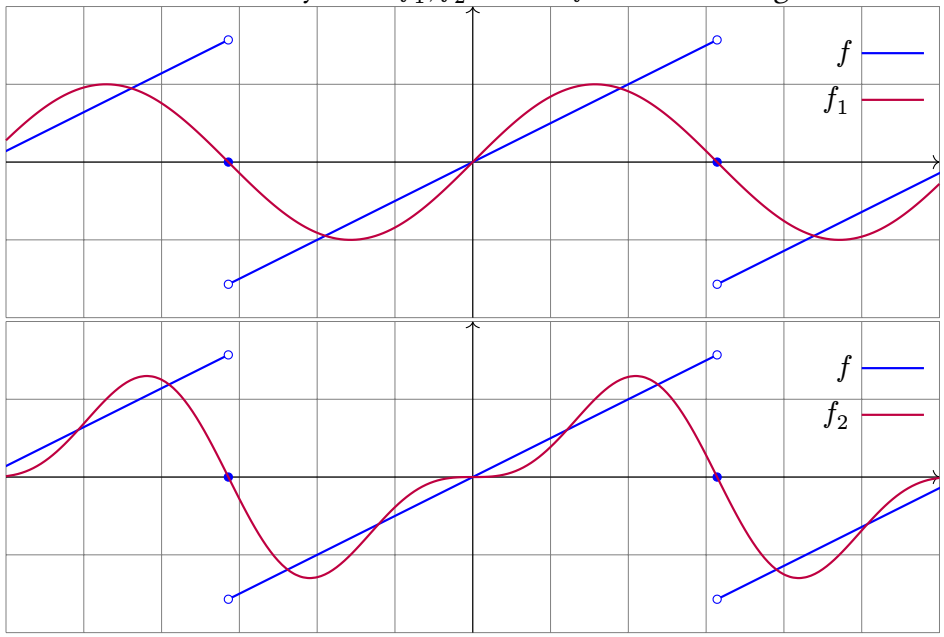
⚠ Wir sehen recht eindringlich das sogenannte **Gibbs–Phänomen**: Die Funktionen f_n überschwingen in Sprungstellen um ca. 9%.

☹ Es gilt daher **keine gleichmäßige Konvergenz** $f_n \to f$ auf $\mathbb{R}$: Ein kleiner ε–Schlauch um f enthält nicht alle f_n für $n \ge n_0$.

☺ Auf jedem Intervall $I = [-\pi + \delta, \pi - \delta]$ **abseits der Sprungstellen** konvergiert f_n gleichmäßig gegen f: Zu jedem $\varepsilon > 0$ liegen schließlich alle f_n im ε–Schlauch um f auf I. Auch das ist bemerkenswert!

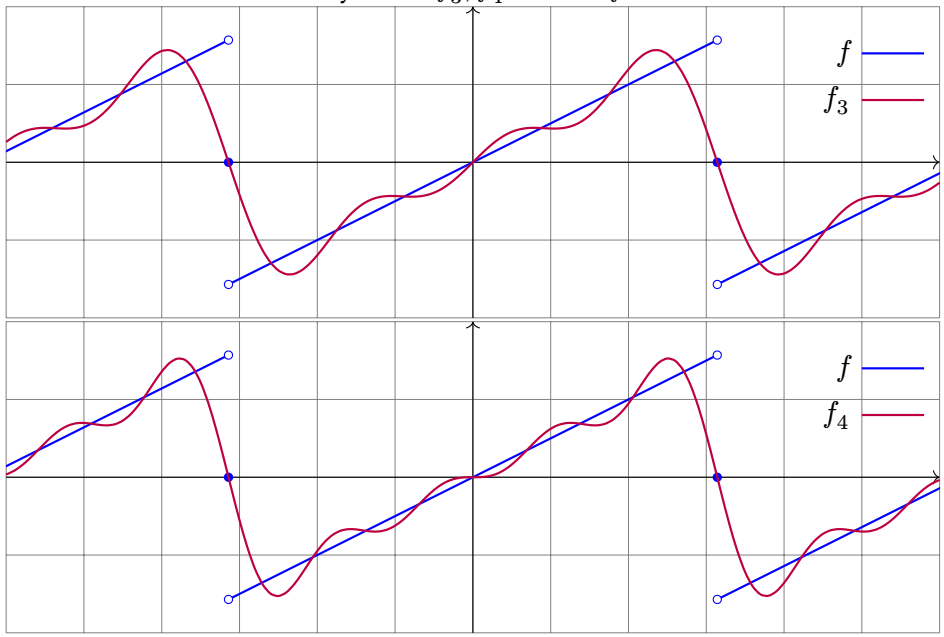
Anwendung: Fourier–Entwicklung der Sägezahnfunktion

Die ersten Fourier–Polynome f_1, f_2 ähneln f zunächst nur grob:



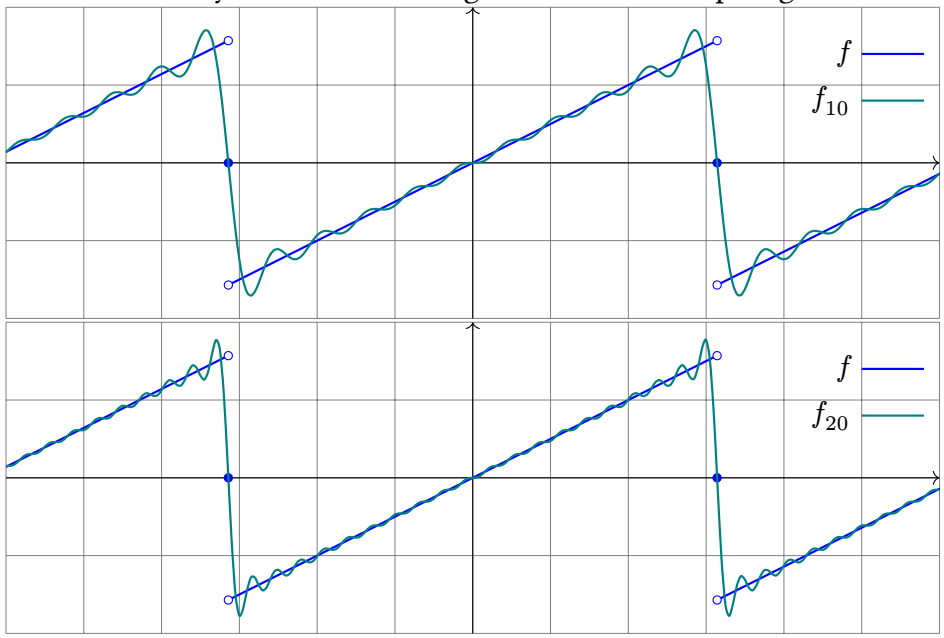
Anwendung: Fourier–Entwicklung der Sägezahnfunktion

Die nächsten Fourier–Polynome f_3, f_4 ähneln f schon etwas mehr:



Anwendung: Fourier–Entwicklung der Sägezahnfunktion

Die Fourier–Polynome überschwingen bis zu 9% der Sprunghöhe:



Was bedeutet Konvergenz der Fourier–Reihe?

Wir haben die Sägezahnfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch Fourier–Polynome $f_1, f_2, f_3, \ldots : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ angenähert: Dies ist die **L^2–Bestapproximation**! Die gezeigten Graphiken suggerieren, dass dies erstaunlich gut gelingt. Obwohl f unstetig ist, nähern sich die Funktionen f_n doch recht gut an.

Ich habe dieses Beispiel so weit getrieben, wie es mit den Werkzeugen der Linearen Algebra (und etwas Integration aus der Schule) möglich ist. Die genauere Untersuchung lernen Sie in der Analysis. Als Ausblick will ich die Antworten auf die Konvergenzfrage wenigstens kurz skizzieren.

Es gilt **Konvergenz im quadratischen Mittel**: Für jede 2π–periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\|f\| < \infty$ gilt $\|f - f_n\| \searrow 0$, somit $\|f_n\| \nearrow \|f\|$. Bezüglich der L^2–Norm gilt also: Jede quadrat-integrierbare Funktion f lässt sich beliebig gut durch ihre Fourier–Polynome f_n approximieren.

Die Frage der **punktweisen Konvergenz** $|f(x) - f_n(x)| \to 0$ oder der **gleichmäßigen Konvergenz** $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \to 0$ ist kniffliger. Hierzu nenne ist das folgende berühmte Kriterium von Dirichlet, das für viele praktischen Anwendungen genügt.

Konvergenz im quadratischen Mittel

Satz S6c: Konvergenz bezüglich der L^2–Norm

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar auf $[0, T]$ und T–periodisch.

Die **Fourier–Analyse** zerlegt das Signal f in sein Spektrum $\hat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ gegeben durch die Koeffizienten $\hat{f}(k) := \langle e_k \mid f \rangle = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Dabei gilt die **Parseval–Gleichung**, auch **Energiegleichung** genannt:

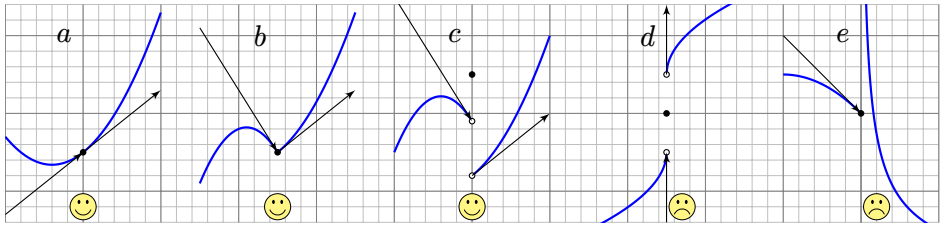
$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$$

Ist f quadrat-integrierbar, also $\|f\| < \infty$, so konvergieren die Fourier–Polynome f_n bezüglich der L^2–Norm, also $\|f - f_n\| \searrow 0$ für $n \to \infty$.

Beispiel: Die Sägezahnfunktion liefert die bemerkenswerte Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Punktweise Konvergenz von Fourier–Reihen



Links-/rechtsseitiger Grenzwert und Ableitungen von f im Punkt x:

$$f(x-) := \lim_{\xi \nearrow x} f(\xi), \qquad f(x+) := \lim_{\xi \searrow x} f(\xi),$$

$$f'(x-) := \lim_{\xi \nearrow x} \frac{f(\xi) - f(x-)}{\xi - x}, \qquad f'(x+) := \lim_{\xi \searrow x} \frac{f(\xi) - f(x+)}{\xi - x}.$$

Die **Dirichlet–Bedingung** fordert, dass alle vier Grenzwerte existieren.
Wir nennen f **sprungnormiert**, falls $f(x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$ gilt.

Stetigkeit im Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist äquivalent zu $f(x+) = f(x-) = f(x)$.
Im Falle $f(x+) \neq f(x-)$ hat f in x eine **Sprungstelle** (siehe Skizze).

Differenzierbarkeit im Punkt x impliziert Stetigkeit und ist äquivalent zu Dirichlet mit $f(x+) = f(x-) = f(x)$ und $f'(x+) = f'(x-) = f'(x)$.

Punktweise Konvergenz von Fourier–Reihen

Satz S6D: Dirichlet–Kriterium für Fourier–Reihen

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar auf $[0, 2\pi]$ und 2π–periodisch.

(1) Angenommen, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ erfüllt die Dirichlet–Bedingung im Punkt x, d.h. beide Grenzwerte $f(x\pm)$ und beide Ableitungen $f'(x\pm)$ existieren. Dann konvergiert in diesem Punkt x die Fourier–Reihe $f_n(x)$ gemäß

$$f_n(x) = \textstyle\sum_{k=-n}^{n} c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \quad \to \quad \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Spezialfälle: (1a) Es gilt $f_n(x) \to f(x)$ falls f in x sprungnormiert ist, also $f(x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$, oder sogar stetig, also $f(x\pm) = f(x)$.

(1b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar und überall stetig bzw. sprungnormiert, dann konvergiert $f_n(x) \to f(x)$ in jeden Punkt $x \in \mathbb{R}$.

(2) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar mit $|f'| \le L$, so konvergiert die Fourier–Reihe $f_n \to f$ sogar gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$:

$$|f_n(x) - f(x)| \quad \le \quad 2L \cdot \ln(n)/n \quad \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

Punktweise Konvergenz von Fourier–Reihen

Beispiel: Unsere Sägezahnfunktion erfüllt die Dirichlet–Bedingung in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ (Übung!) und ist zudem sprungnormiert. Daher gilt in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ die Konvergenz $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$.

☺ Damit haben wir die Funktion f in ihre Fourier–Reihe entwickelt!
Das ist kein Fourier–Polynom mehr, sondern eine unendliche Reihe:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\, \mathrm{i}\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k} \\ &= \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} \mp \ldots \end{aligned}$$

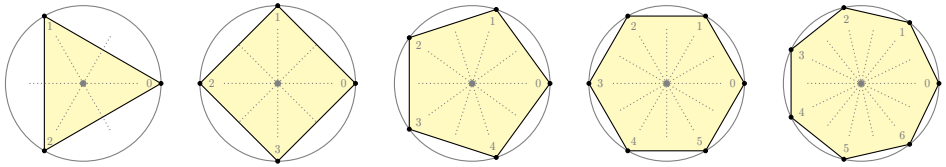
☺ Daraus können wir für erstaunliche Reihen den Grenzwert ablesen.
Die Auswertung im Punkt $x = \pi/2$ bzw. $x = \pi/3$ zum Beispiel ergibt:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots = \frac{\pi}{4} \qquad = 0.7853981633\ldots$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \ldots \quad = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0.6045997880\ldots$$

Die Diedergruppe als Isometrien des regulären n–Ecks

Wir betrachten das reguläre n–Eck $P_n \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, wobei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$:



Zur Konstruktion von $P_n = [W_n] \subset \mathbb{C}$ wählen wir als Eckpunktmenge $W_n = \{\, w_k = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/n} \mid k \in \mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\} \,\}$ die n-ten Einheitswurzeln. Das ausgefüllte Polygon $P_n = [W_n]$ entsteht aus W_n als konvexe Hülle.

Die gesuchte Isometriegruppe können wir nun bequem definieren:

$$D_n^{\mathrm{I}} := \mathrm{Isom}(\mathbb{C}, W_n) \overset{(1)}{\cong} \mathrm{Isom}(W_n)$$

Ausgehend von dieser Definition können nun beweisen:

$$D_n^{\mathrm{I}} \overset{(2)}{=} \{\, \underbrace{\rho_k : z \mapsto z\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/n}}_{\text{genau } n \text{ Drehungen}},\ \underbrace{\sigma_k : z \mapsto \overline{z}\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/n}}_{\dots \text{ und } n \text{ Spiegelungen}} \mid k = 0, \dots, n-1 \,\}$$

Die Diedergruppe als Isometrien des regulären n–Ecks

Aufgabe: Erklären Sie den Isomorphismus (1) und die Gleichheit (2).

Beweis: (1) „→“: Jede Isometrie $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ mit $g(W_n) = W_n$ können wir einschränken zur Isometrie $f = g|_{W_n}^{W_n} \in \mathrm{Isom}(W_n)$. Diese Zuordnung ist ein Gruppenhomomorphismus.

„←“: Die Umkehrung verdanken wir der Rigidität S4E(3): Wegen $n \geq 3$ enthält W_n drei affin unabhängige Punkt, etwa w_0, w_1, w_2. Daher lässt sich jede isometrische Abbildung $f : W_n \to W_n$ eindeutig fortsetzen zu einer Isometrie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der gesamten euklidischen Ebene mit $g|_{W_n}^{W_n} = f$.

Diese ist affin linear dank S4E(2), also $g(z) = Az + v$. Der Schwerpunkt $0 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} w_n$ wird von f erhalten, da f die Eckpunkte W_n permutiert. Also erhält auch g den Schwerpunkt, das heißt $g(0) = 0$. Somit gilt $v = 0$.

(2) „⊆“: Wir wissen $A^{\mathsf{T}} A = 1$, also $A \in \mathrm{GO}_2(\mathbb{R})$. Dank S4H kennen wir alle Möglichkeiten: Drehung $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, z$ oder Spiegelung $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, \overline{z}$. Für $f(W_n) = W_n$ bleibt nur noch $\theta = 2\pi k/n$ für $k = 0, \dots, 1$.

Die Umkehrung „⊇“ ist klar. QED

Die Diedergruppe in Matrixdarstellung

In der Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{C})$ ist $\mathrm{Isom}(\mathbb{C}, W_n) = D_n^{\mathrm{I}}$ eine **Untergruppe**: Es gilt $\mathrm{id} = \rho_0 \in D_n^{\mathrm{I}}$, und zu $f, g \in D_n^{\mathrm{I}}$ gilt $f \circ g \in D_n^{\mathrm{I}}$ sowie $f^{-1} \in D_n^{\mathrm{I}}$.

Drehungen und Spiegelungen können wir durch Matrizen darstellen:

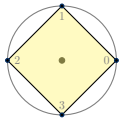
$$R_k = \begin{bmatrix} \cos(2\pi k/n) & -\sin(2\pi k/n) \\ \sin(2\pi k/n) & \cos(2\pi k/n) \end{bmatrix}, \quad S_k = \begin{bmatrix} \cos(2\pi k/n) & \sin(2\pi k/n) \\ \sin(2\pi k/n) & -\cos(2\pi k/n) \end{bmatrix}$$

Diese $2n$ Matrizen fassen wir zusammen zur **Dieder-Matrixgruppe**:

$$D_n^{\mathrm{M}} = \{\, \mathrm{id} = R_0, R_1, \dots, R_{n-1}, S_0, S_1, \dots, S_{n-1} \,\} \leq \mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}$$

Beispiel: Die acht Elemente der Diedergruppe $D_4^{\mathrm{M}} \leq \mathrm{GL}_2\,\mathbb{Z}$ sind

$$R_0 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right], \quad R_1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right], \quad R_2 = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right], \quad R_3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right],$$
$$S_0 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right], \quad S_1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right], \quad S_2 = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right], \quad S_3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right].$$



In der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}$ ist D_n^{M} eine **Untergruppe**: Es gilt $E = R_0 \in D_n^{\mathrm{M}}$, und zu $A, B \in D_n^{\mathrm{M}}$ gilt $A \cdot B \in D_n^{\mathrm{M}}$ sowie $A^{-1} \in D_n^{\mathrm{M}}$.

Die Diedergruppe in Permutationsdarstellung

Wir können $\mathrm{Isom}(W_n)$ durch Permutationen der Ecken darstellen:

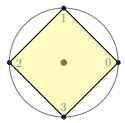
$$r_k : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n : x \mapsto k + x, \qquad s_k : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n : x \mapsto k - x$$

Diese fassen wir zusammen zur **Dieder-Permutationsgruppe**:

$$D_n^{\mathrm{P}} = \{\, \mathrm{id} = r_0, r_1, \dots, r_{n-1}, s_0, s_1, \dots, s_{n-1} \,\} \leq \mathrm{S}_n$$

Beispiel: Die acht Permutationen der Diedergruppe $D_4^{\mathrm{P}} < \mathrm{S}_4$ sind

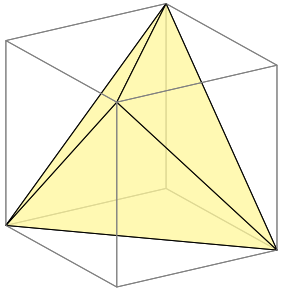
$$r_0 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right], \quad r_1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{smallmatrix}\right], \quad r_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right], \quad r_3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right],$$
$$s_0 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right], \quad s_1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right], \quad s_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right], \quad s_3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right].$$



In der symmetrischen Gruppe $(\mathrm{S}_n, \circ, \mathrm{id}, {}^{-1})$ ist D_n^{P} eine **Untergruppe**: Es gilt $\mathrm{id} = r_0 \in D_n^{\mathrm{P}}$, und zu $a, b \in D_n^{\mathrm{P}}$ gilt $a \circ b \in D_n^{\mathrm{P}}$ sowie $a^{-1} \in D_n^{\mathrm{P}}$.

☺ Alle drei Darstellungen beschreiben dieselbe Diedergruppe in isomorphen Inkarnationen. Jede hat ihre Vorzüge. Ihre Isomorphie beruht auf dem Rigiditätssatz S4E für euklidische Isometrien.

Wie viele Symmetrien hat das Tetraeder?

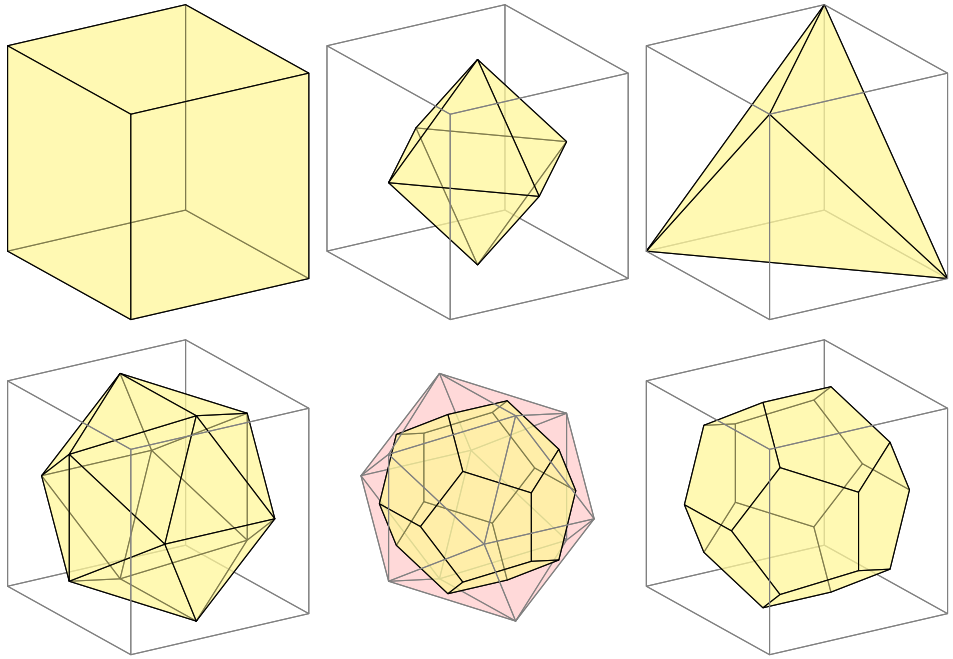


Wir betrachten die Isometrien (also Drehungen und Spiegelungen) des Tetraeders T auf seinen 4 Ecken und erhalten $\mathrm{Isom}^{\pm}(\mathbb{R}^3, T) \hookrightarrow \mathrm{S}_4$.

$$G = \mathrm{Isom}^{+}(\mathbb{R}^3, T) \quad \Longrightarrow \quad |G| = |Gv| \cdot |G_v| = 4 \cdot 3 = 12$$
$$H = \mathrm{Isom}^{\pm}(\mathbb{R}^3, T) \quad \Longrightarrow \quad |H| = |Hv| \cdot |H_v| = 4 \cdot 6 = 24$$

☺ Damit sind auch $\mathrm{Isom}^{\pm}(\mathbb{R}^3, T) \cong \mathrm{S}_4$ und $\mathrm{Isom}^{+}(\mathbb{R}^3, T) \cong \mathrm{A}_4$ vertraut. Wir erkennen die volle Isometriegruppe $\mathrm{Isom}^{\pm}(\mathbb{R}^3, T)$ des Tetraeders als symmetrische Gruppe S_4; sie sind nicht gleich, aber immerhin isomorph! Die alternierende Gruppe A_n besteht aus den geraden Permutationen.

Die fünf platonischen Körper



Die fünf platonischen Körper

❓ Was ist das Besondere an diesen fünf wunderschönen Beispielen? Sie sind offensichtlich besonders symmetrisch. Was heißt das genau? Gibt es weitere Beispiele? Oder kennen wir bereits alle Möglichkeiten? Die Antwort ist der Höhepunkt von Euklids epochalem Werk *Elemente*:

Satz S7A: Klassifikation regulärer 3–Polytope, Euklid 3. Jh. v.u.Z.

(1) Symmetrie: Jeder dieser fünf platonischen Körper $P \subset \mathbb{R}^3$ ist regulär, d.h. die Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3, P)$ operiert transitiv auf den Fahnen.

Ausführlich: Jede Fahne $(E < K < F < P)$, bestehend aus einer Ecke E in einer Kante K in einer Facette F des Polytops P, kann durch eine Isometrie des Raumes $\mathbb{R}^3$ in jede andere Fahne überführt werden.

(2) Diese Liste ist vollständig: Jedes reguläre 3–Polytop $Q \subset \mathbb{R}^3$ ist ähnlich zu genau einem unserer fünf platonischen Körper.

Ausführlich: Von Q zum Modell P führt eine Ähnlichkeitsabbildung $h : (\mathbb{R}^3, Q) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^3, P) : x \mapsto \lambda A x + v$ mit einem Streckfaktor $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und einer Verschiebung $v \in \mathbb{R}^3$.

Die fünf platonischen Körper

Aufgabe: Bestimmen Sie zu jedem der fünf platonischen Körper $P \subset \mathbb{R}^3$ die Ordnung seiner vollen Isometriegruppe $H = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3, P)$. Anleitung:
☹ Ohne Werkzeug ist es möglich, aber unübersichtlich und mühsam
☺ Mit dem Orbit-Stabilisator-Satz J3N wird es kinderleicht!

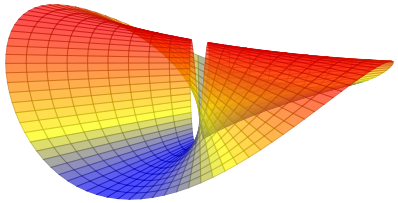
Lösung: Wir lassen die Gruppe H jeweils auf der Eckenmenge operieren! Diese Operation ist transitiv, mit der Bahnlänge $n = |Hv| = 8, 6, 4, 12, 20$. Als Standgruppe erkennen wir die Diedergruppe $H_v \cong D_k$, wobei k die Anzahl der Nachbarecken ist. So erhalten wir die ersehnte Ordnung:

$$\begin{aligned}
&\text{Hexaeder:} && |H| = |Hv| \cdot |H_v| = 8 \cdot 6 &&= 48\\
&\text{Oktaeder:} && |H| = |Hv| \cdot |H_v| = 6 \cdot 8 &&= 48\\
&\text{Tetraeder:} && |H| = |Hv| \cdot |H_v| = 4 \cdot 6 &&= 24\\
&\text{Ikosaeder:} && |H| = |Hv| \cdot |H_v| = 12 \cdot 10 &&= 120\\
&\text{Dodekaeder:} && |H| = |Hv| \cdot |H_v| = 20 \cdot 6 &&= 120
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Dopplungen sind kein numerischer Zufall! Hexaeder und Oktaeder sind dual zueinander, wie skizziert, ihre Isometriegruppen daher isomorph, gar gleich. Ebenso sind Ikosaeder und Dodekaeder dual.

Kapitel T

Spektralsatz und erste Anwendungen



„Was hat Sie [an der Quantenphysik] dermaßen fasziniert?“
— „Die wunderschöne Mathematik, die verwendet wurde.“
Anton Zeilinger, Physik-Nobelpreis 2022

Inhalt dieses Kapitels T

1. Spektralsatz über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$
   - Selbstadjungierte Endomorphismen
   - Spektralsatz I: selbstadjungierte Endomorphismen
   - Schur–Zerlegung: unitäre Trigonalisierung
   - Spektralsatz II: normale Endomorphismen
   - Anwendung auf reelle Isometrien
2. Definitheit dank Spektralsatz
   - Positive Semi/Definitheit
   - Cholesky und Hauptminoren
   - Eigenwerte und Gerschgorin
3. Matrixkalkül dank Spektralsatz
   - Singulärwertzerlegung
   - Operatornorm und Frobenius–Norm
   - SPSD-Wurzeln und Polarzerlegung

Motivation und Überblick

Die vorigen Kapitel P und S zeigen zwei überall wirksame Werkzeuge:

1. Eigenbasen zur Diagonalisierung von Endomorphismen
2. Orthonormalbasen zur Diagonalisierung eines Skalarprodukts

Wir verbinden diese beiden Themen nun zur perfekten Harmonie:
Wäre es nicht am schönsten, orthonormale Eigenbasen zu finden?

? Welche Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind unitär trigonalisierbar? Dies erklärt die Schur–Zerlegung T1L. Stärker, wann ist A unitär diagonalisierbar?

Spektralsatz I, T1I: Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist jede *selbstadjungierte* Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ unitär diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten: Zu $A = A^\dagger$ existiert $Q \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{K}$ so, dass $Q^\dagger A\,Q = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Spektralsatz II, T1O: Genau dann ist eine komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär diagonalisierbar, also $Q^\dagger A\,Q = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $Q \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{C}$, wenn A *normal* ist, also die Kommutation $A^\dagger A = AA^\dagger$ erfüllt.

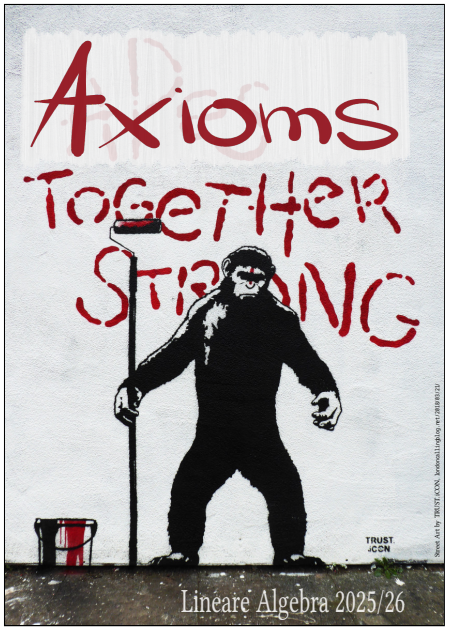
Motivation und Überblick

☺ Hier fügen sich Algebra und Geometrie harmonisch zusammen.
Dieses Kapitel empfinde ich als einen weiteren schönen Höhepunkt, als den zentralen Kreuzungspunkt von mathematischer Theorie und spektakulären Anwendungen in Numerik, Statistik, Physik uvm.

Sie sehen hier das starke Zusammenspiel der Linearen Algebra (die eleganten Grundlagen zunächst über beliebigen Körpern) und den bilinearen Methoden der euklidischen Geometrie (dies speziell über den Körpern $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, gerne auch $\mathbb{H}$).

Wir ernten reiche Resultate, allen voran den Spektralsatz,
I für selbstadjungierte und II für normale Endomorphismen.
Wir illustrieren dies mit ersten beeindruckenden Beispielen.
Die Anwendungen reichen weit über die Lineare Algebra hinaus!

Dies mobilisiert all unsere bisher erarbeiteten Werkzeuge,
die nun fulminant zusammenwirken. *Axioms together strong!*



Der Spektralsatz ist fundamental für die Quantenmechanik, denn ihre gesamte mathematische Struktur baut auf selbstadjungierten Operatoren. Insbesondere der Begriff der *Messung* entspricht dem Spektralsatz: Messung bedeutet orthogonale Projektion auf Eigenräume.

Historical fun fact: Die Quantenmechanik hat als „Matrizenmechanik“ begonnen. Nach ihren sensationellen Erfolgen in den ersten 100 Jahren, etwa von 1925 bis 2025, ist diese Sichtweise heute relevanter denn je. Das Quantum Computing betont die endlich-dimensionalen Systeme, das ist physikalisch angewandte Lineare Algebra *par excellence!*

Industrielle Implementierung ist eine enorme technisch-physikalische Herausforderung, sie ist weiterhin hochaktuell und bleibt spannend. Erstaunlicherweise wird Quantum Computing wesentlich einfacher, wenn man die Physik ausblendet und sich auf die (relativ einfache!) mathematische Struktur fokussiert. Daher das Eingangszitat.

Anwendungen in der Statistik. Der Spektralsatz spielt als Werkzeug in der Statistik eine zentrale Rolle, denn nahezu alle relevanten statistischen Objekte werden durch symmetrische reelle Matrizen beschrieben. Dazu liefert der Spektralsatz die vollständige Strukturtheorie.

Optimierungsprobleme nutzen meist die Methode der kleinsten Quadrate, etwa zur linearen Regression. Die Singulärwertzerlegung wird in der Datenanalyse angewendet, etwa zur Hauptkomponentenanalyse (PCA); Kovarianzmatrizen beschreiben Korrelationen, insbesondere bei Gauß–Verteilungen: Der Spektralsatz entkoppelt Zufallsvariablen.

In den letzten Jahren entwickelt sich die Datenanalyse explosionsartig, damit wächst auch die zentrale Bedeutung mathematischer Methoden. Für *Big Data* und jüngst im *Machine Learning* ist der Spektralsatz wichtig, da er komplizierte hochdimensionale Daten strukturiert: kernbasierte Lernmethoden, PCA, Clustering, Empfehlungssysteme, uvm.

Der Spektralsatz wird in der Linearen Algebra für endlich-dimensionale Vektorräume untersucht und in diesem Rahmen vollständig geklärt.

Viele Anwendungen erfordern Funktionenräume, und diese haben meist unendliche Dimension. Hier übernimmt die Funktionalanalysis und führt den Spektralsatz fort zu einer sensationell ausgefeilten Theorie!

Die numerische Mathematik geht den umgekehrten Weg: Zur effektiven Implementierung auf dem Computer wird das in der Analysis idealisierte Modell geschickt diskretisiert und somit wieder endlich-dimensional!

Sie ahnen bei diesen Stichworten bereits, wie sehr die Lineare Algebra hierzu wichtige Grundlagen und effiziente Werkzeuge bereitsstellt.

Allein schon die innermathematische Schönheit rechtfertigt jede Mühe: Algebra, Geometrie, Numerik arbeiten hier vorzüglich zusammen.

Ebenso rechtfertigen allein die Anwendungen die solide Investition. Freuen Sie sich und nießen Sie beides!

Selbst/adjungierte Matrizen

Definition T1A: selbst/adjungierte Matrix → SFormen S1H

Sei $(\mathbb{K}, \sigma)$ ein involutiver Ring, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$.

(1) Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ definieren wir die **adjungierte Matrix**

$$\boxed{A^\dagger := \overline{A}^\intercal \in \mathbb{K}^{n\times m} \quad \text{durch} \quad A = (a_{ij})_{ij} \mapsto A^\dagger = (a_{ij}^\sigma)_{ji}.}$$

Wir verbinden Transposition und Konjugation zur „Transkonjugation“. Im Spezialfall $\sigma = \mathrm{id}$ ist $A \mapsto A^\dagger = A^\intercal$ ganz einfach die Transposition.

(2) Gilt $A^\dagger = A$, so heißt die Matrix A **selbstadjungiert** oder **hermitesch**. Im Spezialfall $\sigma = \mathrm{id}$ nennen wir die Matrix $A = A^\intercal$ **symmetrisch**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2+\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \\ 5 & 1 \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} 2-\mathrm{i} & 5 \\ -3\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{symmetrisch } S = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{hermitesch } H = \begin{bmatrix} 3 & 2+\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 5 \end{bmatrix}.$$

Selbst/adjungierte Matrizen

Beispiel: Auf $V = \mathbb{K}^n$ betrachten wir die hermitesche Standardform:

$$\langle \text{-}|\text{-} \rangle_{\mathbb{K}^n} : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u \,|\, v \rangle := u^\dagger v = \textstyle\sum_{i=1}^n u_i^\sigma v_i$$

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ sowie $u \in \mathbb{K}^m$ und $v \in \mathbb{K}^n$ gilt:

$$\boxed{\langle u \,|\, A\,v \rangle_{\mathbb{K}^m} = \langle A^\dagger u \,|\, v \rangle_{\mathbb{K}^n}}$$

Beweis: Dank Matrixkalkül können wir dies leicht nachrechnen:

$$\langle A^\dagger u \,|\, v \rangle_{\mathbb{K}^n} \overset{\text{Def}}{=} (A^\dagger u)^\dagger v \overset{\text{Ad}}{=} (u^\dagger A)\, v \overset{\text{Ass}}{=} u^\dagger (A\,v) \overset{\text{Def}}{=} \langle u \,|\, A\,v \rangle_{\mathbb{K}^m}$$

☺ Wir können also A zu $A^\dagger$ und zurück „umwälzen“ auf die andere Seite! Ist A selbstadjungiert, so können wir $A = A^\dagger$ unverändert umwälzen: Wir erhalten dasselbe Skalarprodukt, egal wo wir A anwenden!

Die Operation $A \mapsto A^\dagger$ heißt **Adjunktion**. Sie ist semilinear und antimultiplikativ, d.h. $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$. Das passt zum Umwälzen:

$$\langle u \,|\, A\,B\,v \rangle = \langle A^\dagger u \,|\, B\,v \rangle = \langle B^\dagger A^\dagger u \,|\, v \rangle$$

Selbst/adjungierte Matrizen

⚠ Bitte verwechseln Sie niemals die *adjungierte* Matrix $A^\dagger$ aus T1A mit der *adjunkten* Matrix $A' = \mathrm{adj}(A)$ aus Cramers Inversionsformel O2R. Das ist etwas ganz anderes! Die sprachliche Nähe ist unglücklich, doch die Tradition lässt sich leider nicht mehr ändern.

Man nennt $A^\dagger$ auch die „hermitesch transponierte Matrix“ oder auch die „transponiert-konjugierte Matrix“, was etwas länger aber auch klarer ist. Kurz doch treffend scheint „transkonjugiert“ als guter Kompromiss.

In der Literatur sind die Schreibweisen $A^\dagger = A^* = A^H = \ldots$ üblich. Das Symbol „†“ heißt engl. „Dagger“, LaTeX `\dagger`, dt. „Dolch“.

Die Adjunktion $^\dagger : \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{K}^{n\times m} : A \mapsto A^\dagger$ ist selbstinvers $(A^\dagger)^\dagger = A$, und semilinear gemäß $(A\lambda)^\dagger = \lambda^\sigma A^\dagger$, additiv ein Isomorphismus, doch multiplikativ ein Anti-Isomorphismus, da sie die Reihenfolge umdreht.

Ist $(\mathbb{K}, \sigma)$ ein involutiver Ring, so auch $(\mathbb{K}^{n\times n}, {}^\dagger)$ mit $A^\dagger = (A^\sigma)^\intercal$. Spur, Determinante und Eigenwerte werden dabei konjugiert.

Selbst/adjungierte Matrizen

Wir wollen nun von Matrizen übergehen zu linearen Abbildungen. Hierzu seien $(V, \langle \text{-}|\text{-} \rangle_V)$ und $(U, \langle \text{-}|\text{-} \rangle_U)$ hermitesche Räume über $(\mathbb{K}, \sigma)$. Wir denken an Vektorräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$ und einem Skalarprodukt, insbesondere an $\mathbb{K}^n$ mit dem Standardskalarprodukt.

Zwei lineare Abbildungen $(f, g) : V \rightleftarrows U$ heißen **adjungiert**, falls

$$\langle u \,|\, f(v) \rangle_U = \langle g(u) \,|\, v \rangle_V$$

gilt für alle $u \in U$ und $v \in V$. Anschaulich: Wir können f zu g und zurück „umwälzen“ auf die andere Seite. In der folgenden Definition müssen wir allerdings besonders sorgsam und vorsichtig vorgehen: Weder Existenz noch Eindeutigkeit einer Adjungierten g zu f sind selbstverständlich

Für beliebige Sesquilinearformen müssten wir genauer sagen, $g : U \to V$ ist linksadjungiert zu $f : V \to U$, und ebenso f ist rechtsadjungiert zu g. Da die hier betrachteten Formen jedoch hermitesch sind, müssen wir dies nicht unterscheiden, denn die Involution liefert sofort das Gegenstück:

$$\langle f(v) \,|\, u \rangle_U = \langle v \,|\, g(u) \rangle_V$$

Definition T1B: selbst/adjungierte Homomorphismen

Seien $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle_V)$ und $(U, \langle\text{-}|\text{-}\rangle_U)$ hermitesche Räume über $(\mathbb{K}, \sigma)$, also $\mathbb{K}$–lineare Räume ausgestattet mit hermiteschen Sesquilinearformen. Wir denken an $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$ und Räume mit Skalarprodukt.

(1) Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt **selbstadjungiert**, falls gilt:

$$\langle u \,|\, f(v)\rangle_V = \langle f(u) \,|\, v\rangle_V \quad \text{für alle } u, v \in V$$

Wir nennen f dann auch **hermitesch**, im Spezialfall $\sigma = \mathrm{id}$ **symmetrisch**.

(2) Ein Paar $(f, g) : V \rightleftarrows U$ von $\mathbb{K}$–linearen Abbildungen $f : V \to U$ und $g : U \to V$ heißt zueinander **adjungiert**, falls gilt:

$$\langle u \,|\, f(v)\rangle_U = \langle g(u) \,|\, v\rangle_V \quad \text{für alle } u \in U \text{ und } v \in V.$$

Dank Konjugation mit σ ist dies äquivalent zu $\langle v \,|\, g(u)\rangle_V = \langle f(v) \,|\, u\rangle_U$. Demnach ist auch das umgedrehte Paar $(g, f) : U \rightleftarrows V$ adjungiert.

(3) Ist $\langle\text{-}|\text{-}\rangle_V$ regulär, etwa ein Skalarprodukt, so ist g eindeutig.

Beweis: (3) Seien $g, \tilde{g} : U \to V$ adjungiert zu f und $u \in U$. Dann gilt

$$\langle g(u) \,|\, v\rangle_V = \langle u \,|\, f(v)\rangle_U = \langle \tilde{g}(u) \,|\, v\rangle_V$$

für alle $v \in V$, somit $\langle g(u) - \tilde{g}(u) \,|\, v\rangle = 0$ also $g(u) = \tilde{g}(u)$. QED

🙂 Meist betrachten wie Skalarprodukte, daraus folgt Regularität. Im Beweis testen wir dann ganz einfach mit $v = g(u) - \tilde{g}(u)$ und erhalten damit $\|g(u) - \tilde{g}(u)\|^2 = 0$, also $g(u) = \tilde{g}(u)$.

Wir nennen dann $g = f^\dagger$ den **adjungierten Homomorphismus** zu f. Entsprechend ist $f = g^\dagger$ *der* adjungierte Homomorphismus zu g.

Zur Betonung sagen wir auch **euklidisch / hermitesch adjungiert**, um den Bezug zu den verwendeten Skalarprodukten $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$ zu betonen und mögliche Verwechslung mit anderen Adjunktionsbegriffen zu vermeiden.

⚠ Eindeutigkeit und Existenz sind keineswegs selbstverständlich. Im obigen Beweis der Eindeutigkeit ist die Regularität wesentlich.

❓ Woher wissen wir, dass diese Vorsicht objektiv notwendig ist und nicht bloß ein Artefakt unserer umständlichen Argumentation?

Beispiele: Als heilsame Warnung hier zwei extreme Gegenbeispiele.

(1) Wir betrachten $U = \mathbb{K}^m$ mit $\langle\text{-}|\text{-}\rangle = 0$ und $V = \mathbb{K}^n$ mit $\langle\text{-}|\text{-}\rangle = 0$. Hier ist *jedes* Homomorphismenpaar $(f, g) : V \rightleftarrows U$ adjungiert, denn es erfüllt $\langle u \,|\, f(v)\rangle_U = 0 = \langle g(u) \,|\, v\rangle_V$ für alle $u \in U$ und $v \in V$.

(2) Wir betrachten $U = \mathbb{K}^m$ mit $\langle\text{-}|\text{-}\rangle = u^\dagger v$ und $V = \mathbb{K}^n$ mit $\langle u, v\rangle = 0$.

(2a) Zu $f = 0 : V \to U$ ist *jede* lineare Abbildung $g : U \to V$ adjungiert. denn hier gilt $\langle u \,|\, f(v)\rangle_U = 0 = \langle g(u) \,|\, v\rangle_V$ für alle $u \in U$ und $v \in V$.

(2b) Zu $f \neq 0 : V \to U$ ist *keine* lineare Abbildung $g : U \to V$ adjungiert, denn hier gilt $\langle u \,|\, f(v)\rangle_U \neq 0 = \langle g(u) \,|\, v\rangle_V$ für geeignete $u \in U$ und $v \in V$.

Beispiel T1c: adjungierte Homomorphismen

(1) Wir betrachten $U = \mathbb{K}^{(\mathbb{Z})}$ mit Standardform $\langle u, v\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k^\sigma v_k$. Für $(f, g) : U \rightleftarrows U$ mit $f(v)_k = v_{k+1}$ und $g(u)_k = u_{k-1}$ gilt $f^\dagger = g = f^{-1}$.

(2) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ betrachten wir diesen Raum $U = \mathbb{K}^{(\mathbb{Z})}$ und seine Vervollständigung $V = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{K}) = \{v : \mathbb{Z} \to \mathbb{K} \,|\, \|v\|_2^2 := \sum_{k\in\mathbb{Z}} |v_k|^2 < \infty\}$. Zur Inklusion $f : U \hookrightarrow V$ existiert keine Adjungierte $g : V \to U$.

Beweis: (1) Übung! (2) Im Raum $U = \mathbb{K}^{(\mathbb{Z})}$ haben wir die ONBasis $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Auf V ist $\langle u, v\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k^\sigma v_k$ absolut konvergent dank Cauchy–Schwarz: Es gilt $\sum_{|k|\le n} |u_k^\sigma v_k| \le (\sum_{|k|\le n} |u_k|^2)^{1/2} \cdot (\sum_{|k|\le n} |v_k|^2)^{1/2} \le \|u\|_2 \|v\|_2$, also $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k^\sigma v_k| \le \|u\|_2 \|v\|_2 < \infty$. Somit ist $\langle\text{-}|\text{-}\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ wohldefiniert. Dies ist ein Skalarprodukt: sesquilinear, hermitesch, positiv definit.

Wir wählen nun $v \in V$ mit unendlichem Träger, etwa $v = (2^{-|k|})_{k\in\mathbb{Z}} \in V$. Wäre $g : V \to U$ adjungiert, so $\langle g(v) \,|\, e_k\rangle_U = \langle v \,|\, f(e_k)\rangle_V = \langle v \,|\, e_k\rangle_V = v_k$. Demnach hätte $g(v) \in \mathbb{K}^{(\mathbb{Z})}$ unendlichen Träger, ein Widerspruch! QED

Adjungierte Homomorphismen und ihre Matrizen

Seien $\mathcal{U} = (u_i)_{i=1}^m$ zu U und $\mathcal{V} = (v_j)_{j=1}^n$ zu V Orthonormalbasen über $\mathbb{K}$.

Dies erreichen wir etwa durch das Gram–Schmidt–Verfahren S3c. Damit:
Für $f : V \to U$ linear mit Darstellungsmatrix $A = \mathrm{M}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(f) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gilt

$$\langle u_i \,|\, f(v_j)\rangle \overset{\text{Def}}{=} \langle u_i \,|\, \textstyle\sum_{k=1}^m u_k a_{kj}\rangle \overset{\text{Lin}}{=} \textstyle\sum_{k=1}^m \langle u_i \,|\, u_k\rangle\, a_{kj} \overset{\text{ONB}}{=} a_{ij}.$$

Ebenso für $g : U \to V$ linear mit $B = \mathrm{M}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(g) \in \mathbb{K}^{n\times m}$ gilt $b_{ji} = \langle v_j \,|\, g(u_i)\rangle$.

Satz T1D: adjungierte Homomorphismen und ihre Matrizen

(1) Genau dann ist das Paar $(f, g) : V \rightleftarrows U$ adjungiert, kurz $g = f^\dagger$, wenn ihre ONB-Darstellungsmatrizen adjungiert sind, also $B = A^\dagger$.

Genau dann ist $f : V \to V$ selbstadjungiert, kurz $f^\dagger = f$, wenn die ONB-Darstellungsmatrix $A = \mathrm{M}_{\mathcal{V}}(f)$ selbstadjungiert ist, also $A^\dagger = A$.

(2) Zu jedem Homomorphismus $f : V \to U$, mit endlichen ONBasen, existiert genau ein adjungierter Homomorphismus $f^\dagger : U \to V$,

Adjungierte Homomorphismen und ihre Matrizen

Aufgabe: Rechnen Sie dies sorgsam nach! **Beweis:** (1) „⇒“: Wir finden

$$b_{ji} \overset{\text{ONB}}{=} \langle v_j \,|\, g(u_i)\rangle \overset{\text{S2}}{=} \overline{\langle g(u_i) \,|\, v_j\rangle} \overset{\text{Ad}}{=} \overline{\langle u_i \,|\, f(v_j)\rangle} \overset{\text{ONB}}{=} \overline{a_{ij}}.$$

„⇐“: Für je zwei Vektoren $u = \sum_{i=1}^m u_i\lambda_i \in U$ und $v = \sum_{j=1}^n v_j\mu_j \in V$ gilt $\langle g(u) \,|\, v\rangle = \sum_{i,j,k}\langle v_k b_{ki}\lambda_i \,|\, v_j\mu_j\rangle = \sum_{i,j,k} \overline{b_{ki}\lambda_i}\langle v_k \,|\, v_j\rangle\mu_j = (B\lambda)^\dagger\mu$ und $\langle u \,|\, f(v)\rangle = \sum_{i,j,\ell}\langle u_i\lambda_i \,|\, u_\ell a_{\ell j}\mu_j\rangle = \sum_{i,j,\ell} \overline{\lambda_i}\langle u_i \,|\, u_\ell\rangle a_{\ell j}\mu_j = \lambda^\dagger(A\mu)$.
Aus $A = B^\dagger$ folgt $\langle u \,|\, f(v)\rangle = \langle g(u) \,|\, v\rangle$ für alle $u \in U$ und $v \in V$.

(2) Eindeutigkeit T1B(3) gilt allgemein für reguläre HFormen. Existenz: In endlicher Dimension gelingt uns die Konstruktion mit ONBasen $\mathcal{U} = (u_i)_{i=1}^m$ zu U und $\mathcal{V} = (v_j)_{j=1}^n$, etwa dank Gram–Schmidt S3c:
Wir stellen $f : V \to U$ durch die Matrix $A = \mathrm{M}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(f) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ dar.
Die adjungierte Matrix $B = A^\dagger \in \mathbb{K}^{n\times m}$ stellt $g = f^\dagger : U \to V$ dar. QED

Woher wissen wir, dass diese Vorsicht objektiv notwendig ist und nicht bloß ein Artefakt unserer umständlichen Argumentation?

⚠ Adjungierte existieren nicht immer, siehe Gegenbeispiel T1c(2).

Reelles Spektrum und orthogonale Eigenräume

Satz T1E: reelles Spektrum und orthogonale Eigenräume

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ unitär und $f : V \to V$ selbstadjungiert.

(1) Jeder Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ von f ist reell, kurz $\sigma(f; \mathbb{K}) \subseteq \mathbb{R}$.

(2) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal:
Gilt $f(u) = u\lambda$ und $f(v) = v\mu$ für $u, v \in V$ und $\lambda \neq \mu$ in $\mathbb{R}$, so folgt $u \perp v$.

(3) Ist $U \leq V$ invariant, also $f(U) \subseteq U$, so auch $U^\perp \leq V$, also $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

Beweis: (1) Für $f(v) = v\lambda$ mit $v \in V \smallsetminus \{0\}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\langle v \,|\, v\rangle\lambda \overset{\text{Lin}}{=} \langle v \,|\, v\lambda\rangle \overset{\text{Eig}}{=} \langle v \,|\, f(v)\rangle \overset{\text{sad}}{=} \langle f(v) \,|\, v\rangle \overset{\text{Eig}}{=} \langle v\lambda \,|\, v\rangle \overset{\text{slin}}{=} \overline{\lambda}\langle v \,|\, v\rangle$$

Dank $\langle v \,|\, v\rangle \in \mathbb{R}_{>0}$ schließen wir $\lambda = \overline{\lambda}$, also $\lambda \in \mathbb{R}$. (2) Wir rechnen:

$$0 \overset{\text{sad}}{=} \langle f(u) \,|\, v\rangle - \langle u \,|\, f(v)\rangle \overset{\text{Eig}}{=} \langle u\lambda \,|\, v\rangle - \langle u \,|\, v\mu\rangle \underset{(1)}{\overset{\text{Lin}}{=}} (\lambda - \mu)\langle u \,|\, v\rangle$$

Dank $\lambda \neq \mu$ folgt $\langle u \,|\, v\rangle = 0$, also $u \perp v$. (3) Aus $v \in U^\perp$ folgt $f(v) \in U^\perp$:
Für alle $u \in U$ gilt $\langle u \,|\, f(v)\rangle \overset{\text{sad}}{=} \langle f(u) \,|\, v\rangle \overset{\text{inv}}{=} 0$ dank $f(u) \in U$. QED

Reelles Spektrum und orthogonale Eigenräume

Zur Betonung diese wichtige Erkenntnis in poetischen Worten:
Jeder selbstadjungierte Endomorphismus hat ausschließlich reelle Eigenwerte und zueinander orthogonale Eigenräume.

Über $\mathbb{R}$ ist (1) trivial, daher betrachten wir gleich den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Die Aussage (2) hingegen ist in beiden Fällen $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wichtig!
Der Orthogonalraum (3) wird uns zur Induktion verhelfen.

Erinnerung: Zu $U \leq V$ haben wir den Orthogonalraum S1G

$$U^\perp := \{v \in V \,|\, \forall u \in U : \langle u \,|\, v\rangle = 0\} \leq V.$$

Gilt zudem $\dim U < \infty$, so folgt $V = U \oplus U^\perp$ dank S1Q.

Da es keinen Mehraufwand kostet, führe ich das Beispiel $\mathbb{H}$ weiter mit.
Die wichtigen Anwendungen betreffen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, doch allgemein den Dreischritt $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mitzudenken gemahnt uns zur sauberen Arbeit.

☺ Bislang haben wir noch nicht endliche Dimension benötigt.
Zur Illustration nenne ich ein unendlich-dimensionales Beispiel.

Beispiel: reelles Spektrum und orthogonale Eigenräume

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ betrachten wir $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt $\langle u \,|\, v \rangle = u^\top v$.
Die folgenden Matrizen A, B, C sind symmetrisch, also selbstadjungiert.
Aufgabe: Finden Sie zu A, B, C jeweils eine orthonormale Eigenbasis!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A: Hier gilt $\operatorname{Eig}(A, k) = \langle e_k \rangle_{\mathbb{R}}$ für $k = 1, 2, 3$, also $\mathbb{R}^3 = \bigoplus_{k=1}^3 \operatorname{Eig}(A, k)$.
B: Für $u = (1, 1, 1)^\top$ gilt $Bu = 3u$. Für $v = (1, -1, 0)^\top$ gilt $Bv = 0v$.
Für $w = u \times v = (1, 1, -2)^\top$ gilt $Bw = 0w$. Orthonormale Eigenbasis:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad Q^\top Q = I, \quad Q^\top B Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C: Hier gilt $C = B + 2I$, also $Q^\top C Q = Q^\top B Q + 2I = \operatorname{diag}(5, 2, 2)$.

Beispiel: reelles Spektrum und orthogonale Eigenräume

Schon lange, seit Satz P1A, wissen wir für Endomorphismen $f : V \to V$:
Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Dank Satz T1E wissen wir nun noch wesentlich mehr:
Jeder selbstadjungierte Endomorphismen $f : V \to V$
hat reelle Eigenwerte und orthogonale Eigenräume.

☺ Dies können wir unmittelbar nutzen, wie im obigen Zahlenbeispiel, für symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ oder hermitesche Matrizen über $\mathbb{C}$.

☺ Beliebter Trick speziell in Dimension 3: Haben wir zu $A = A^\top \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ bereits zwei linear unabhängige Eigenvektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$ gefunden, $Au = u\lambda$ und $Av = v\mu$, so erhalten wir einen dritten durch $w = u \times v$.

Aufgabe: Warum erfüllt $w = u \times v$ die Eigengleichung $Aw = w\nu$?

Lösung: Wir haben $\chi_A = (X - \lambda)(X - \mu)(X - \nu)$ mit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Sind alle drei λ, μ, ν verschieden, so gilt $\operatorname{Eig}(A, \lambda) = \langle u \rangle_{\mathbb{R}}^!$ und $\operatorname{Eig}(A, \mu) = \langle v \rangle_{\mathbb{R}}^!$ und als dritter orthogonaler Summand $\operatorname{Eig}(A, \mu) = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}^!$. Ebenso gelingt jeder der Fälle $\lambda = \mu \neq \nu$ und $\lambda = \nu \neq \mu$ und $\lambda \neq \nu = \mu$ und $\lambda = \mu = \nu$.

Beispiel: Hat die Ableitung eine Adjungierte?

Hat jeder Endomorphismus eine Adjungierte? Allgemein nicht:

Beispiel T1F: Ableitung und Adjunktion

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ betrachten wir den Raum $U = \mathscr{C}^\infty([0, 1], \mathbb{K})$
aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $f, g : [0, 1] \to \mathbb{K}$
mit ihrem Standardskalarprodukt $\langle f \,|\, g \rangle = \int_{t=0}^1 \overline{f(t)}\, g(f)\, \mathrm{d}t$.

(0) Die Ableitung $\partial = \mathrm{d}/\mathrm{d}t : U \to U$ hat keine Adjungierte $\partial^\dagger : U \to U$.

Beweis: Angenommen, $\partial^\dagger : U \to U$ wäre adjungiert zu $\partial : U \to U$.
Nach Definition bedeutet das $\langle \partial^\dagger f \,|\, g \rangle = \langle f \,|\, \partial g \rangle$. Ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^1 \overline{\partial^\dagger f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t &\overset{\text{Ad}}{=} \int_{t=0}^1 \overline{f(t)}\, g'(t)\, \mathrm{d}t \\ &\overset{\text{part}}{=} \Big[\overline{f(t)}\, g(t)\Big]_{t=0}^1 - \int_{t=0}^1 \overline{f'(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

☺ Auf dem Teilraum $V = \{ f \in U \,|\, f(0) = f(1) \} \leq U$ aller Funktionen f mit periodischer Randbedingung $f(0) = f(1)$ ist $\partial^\dagger = -\partial$ die Adjungierte!

Beispiel: Hat die Ableitung eine Adjungierte?

Wir zeigen, dass die Ableitung ∂ auf ganz U keine Adjungierte $\partial^\dagger$ hat.
Zu jedem $f \in U$ hätten wir dann $h = (\partial^\dagger + \partial) f$ mit der mirakulösen Eigenschaft $\int_{t=0}^1 \overline{h(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t = \overline{f(1)} g(1) - \overline{f(0)} g(0)$ für alle $g \in U$.
Speziell für $f(t) = t - 1$ erhalten wir $f(0) = -1$ und $f(1) = 0$.

Problem: Wir suchen $h \in U$ mit $\int_{t=0}^1 \overline{h(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t = g(0)$ für alle $g \in U$.
Daraus folgt $h(x) = 0$ in jedem Punkt $x \in]0, 1]$, also ein Widerspruch!

Beweis dazu: Angenommen, es gäbe $x \in]0, 1]$ mit $h(x) =: a \neq 0$, also $h(x)\,\overline{a} = 2\delta$ mit $\delta = |a|^2/2 > 0$. Dank Stetigkeit existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass $\operatorname{Re}(h(t)\,\overline{a}) \geq \delta > 0$ für alle $t \in [x \pm \varepsilon]$ gilt. Dazu existiert eine Testfunktion $g \in U$ mit $g(0) = 0$ sowie $g \geq 0$ und $\operatorname{supp} g \subseteq [x \pm \varepsilon]$ und Gesamtmasse $\int_{t=0}^1 g(t)\, \mathrm{d}t = 1$. Es folgt $\operatorname{Re}(\int_{t=0}^1 \overline{h(t)}\, a g(t)\, \mathrm{d}t) \geq \delta > 0$.
Das zeigt $\langle h \,|\, ag \rangle \neq 0$. Wir folgern $h(x) = 0$ für alle $x \in]0, 1]$.

Daraus folgt $\langle h \,|\, g \rangle = 0$ für alle $g \in U$, also $\langle h \,|\, g \rangle \neq g(0)$ für $g = 1 \in U$.
Zu $f(t) = t - 1$ existiert die ersehnte Funktion $h = (\partial^\dagger + \partial) f$ also nicht.
Somit hat die Ableitung $\partial : U \to U$ keine Adjungierte $\partial^\dagger : U \to U$. $\boxed{\text{QED}}$

Beispiel: die Ableitung periodischer Funktionen

Beispiel T1F: Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit Periode $T > 0$

(1) Die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{C}$–Vektorraum und die Teilmenge aller T–periodischen Funktionen ein Untervektorraum. Da wir zudem differenzieren wollen, betrachten wir den Unterraum

$$V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid T\text{–periodisch und beliebig oft diff'bar} \}.$$

Kennen Sie Beispiele solcher Funktionen? Ja! Die Allerschönsten sind:

$$e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \quad \text{mit } \omega = 2\pi/T \text{ und } k \in \mathbb{Z}$$

Weitere Beispiele sind $\operatorname{Re} e_k(t) = \cos(k\omega t)$ und $\operatorname{Im} e_k(t) = \sin(k\omega t)$.

(2) Kennen Sie auf dem Raum V über $\mathbb{C}$ ein Skalarprodukt? Ja!

$$V \times V \to \mathbb{C} : (f, g) \mapsto \langle f \mid g \rangle := \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Dies ist tatsächlich sesquilinear, hermitesch und positiv definit. (S2D)

Beispiel: die Ableitung periodischer Funktionen

Beispiel T1F: Die Ableitung $\frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ ist selbstadjungiert.

(3) Ist der Ableitungsoperator $\frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} : V \to V$ selbstadjungiert?

$$\left\langle f \,\middle|\, \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \,\middle|\, g \right\rangle$$

Ja! Dies gelingt erfreulich leicht dank partieller Integration:

$$\frac{1}{\mathrm{i}} \int_{t=0}^{T} \overline{f(t)}\, g'(t)\, \mathrm{d}t \overset{\text{part}}{=} \frac{1}{\mathrm{i}} \Big[\overline{f(t)}\, g(t) \Big]_{t=0}^{T} - \frac{1}{\mathrm{i}} \int_{t=0}^{T} \overline{f'(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t$$

(4) Sind $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ Eigenfunktionen? zudem paarweise orthogonal?

$$\frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} = k\omega\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$$

Die Eigenfunktionen $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ haben reelle Eigenwerte $(k\omega)_{k\in\mathbb{Z}}$ und sind demnach orthogonal dank Satz T1E – oder direkt nachrechnen S601!

Beispiel: der Ableitungsoperator auf Fourier–Polynomen

☺ Das ist die genial-einfache Grundidee der Fourier–Theorie:

1. Die Eigenfunktionen $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ als Basis von $U = \langle e_k \mid k \in \mathbb{Z} \rangle_{\mathbb{C}}^{!} \leq V$ diagonalisieren die Ableitung $\frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} : U \to U$ dank $\frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e_k = k\omega e_k$.
2. Auf V über $\mathbb{C}$ haben wir das Skalarprodukt $\langle \text{-} | \text{-} \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$. Der Ableitungsoperator erweist sich nun als selbstadjungiert.
3. Fourier–Analyse heißt Bestapproximation in $U_n = \langle e_k \mid -n < k < n \rangle_{\mathbb{C}}^{!}$. Die Fourier–Koeffizienten erhalten wir effizient durch Integration.

Damit zerlegen wir Signale in ihre harmonische Grundschwingungen, als explizites Zahlenbeispiel kennen Sie die Sägezahnkurve S609.

Beispiel: der Ableitungsoperator auf Fourier–Polynomen

☺ Funktionenräume sind besonders lehrreiche Beispiele:

1. Sie sind relevant in der Analysis und vielen Anwendungen.
2. Wir rechnen nicht unmittelbar in einem Koordinatenraum.
3. Viele unserer Techniken greifen selbst hier erfreulich effizient!

Ich betone dabei zunächst die linear-algebraische Sichtweise.
Die Analysis ergänzt dies durch wirksame Konvergenzsätze.
Die Numerik liefert Rechenverfahren und Fehlerabschätzungen.
Dies gipfelt schließlich in effizienten Algorithmen, siehe FFT (§E7).
Alle Aspekte der Mathematik arbeiten erneut harmonisch zusammen!

Woher bekommen wir ein erstes Eigenpaar?

Lemma T1G: Existenz eines ersten Eigenpaars

(1) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ unitär und $f : V \to V$ selbstadjungiert. Gilt $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, so existiert ein Eigenpaar $(v, \lambda) \in V \times \mathbb{R}$.

(2) Jede selbstadjungierte Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ hat einen reellen Eigenwert.

Nach Wahl einer ONBasis sind (1) und (2) äquivalent dank Satz T1D.

Algebraischer Beweis: (a) Komplexer Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Zu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ zerfällt das Polynom $\chi_A \in \mathbb{C}[X]^1_n$ über $\mathbb{C}$ dank FTA E3C. Wegen $n \geq 1$ existiert ein Eigenpaar $(v, \lambda) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ (P2A). Dank $A^\dagger = A$ gilt $\lambda \in \mathbb{R}$ (T1E).

(b) Reeller Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Wir betrachten $A \in \mathbb{R}^{n\times n} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$. Dank (a) existiert $(v, \lambda) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ mit $Av = v\lambda$. Konjugation ergibt $A\overline{v} = \overline{v}\lambda$. Für $u = \operatorname{Re}(v) = \frac{1}{2}(v + \overline{v}) \in \mathbb{R}^n$ erhalten wir $Au = u\lambda$.

(c) Quaternionaler Fall $\mathbb{K} = \mathbb{H}$: Wir betrachten $V = \mathbb{H}^n$ als $\mathbb{C}$–Vektorraum und darauf $A : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n : x \mapsto Ax$ als $\mathbb{C}$–linear. Nun genügt (a). QED

Woher bekommen wir ein erstes Eigenpaar?

Im Folgenden wollen wir orthonormale Eigenbasen konstruieren. Das geschieht am besten induktiv. Als Start benötigen wir dazu ein ersten Eigenpaar (v, λ). Der Schritt ist dann leicht: Abspalten, *rinse and repeat!*

Das erinnert uns stark an den Fundamentalsatz der Algebra (FTA E3C): Wir wollen jedes Polynom $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]^1_n$ in Linearfaktoren zerlegen gemäß $P = \prod_{j=1}^n (X - \lambda_j)$. Dazu genügt uns, eine erste Nullstelle $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ zu finden. Der Schritt ist dann leicht: Abspalten, *rinse and repeat!*

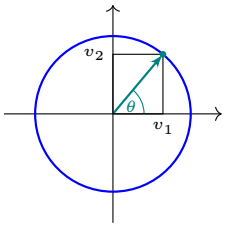
Unser algebraischer Beweis über $\mathbb{C}$ ist inzwischen bewährte Routine: Gerne nutzen wir, dass der Körper $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, also jedes Polynom über $\mathbb{C}$ zerfällt. Speziell für Eigenpaare selbstadjungierter Abbildungen gibt es jedoch eine faszinierende geometrische Alternative:

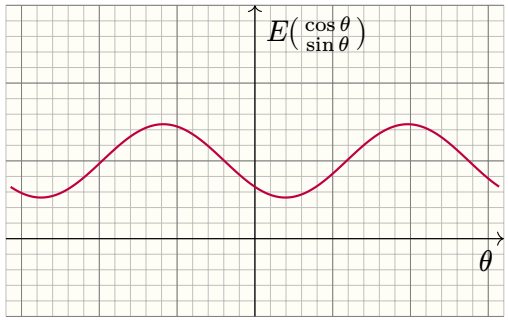
Geometrisch-physikalisch-analytischer Beweis: Die folgende elegante Energiemethode beweist die Existenz eines Eigenpaares $(v, \lambda) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{R}$ einheitlich in allen drei Fällen $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Der Fundamentalsatz E3C wird dabei durch ein geniales Kompaktheitsargument ersetzt.

Quadratische Form als Energiefunktion

Jedem normierten Vektor v weisen wir seine Energie $E(v) = v^\dagger A\, v$ zu. Das ist die quadratische Form eingeschränkt auf die Einheitssphäre:

$$\mathbb{S}(\mathbb{K}^n) := \{\, v \in \mathbb{K}^n \mid \|v\| = 1 \,\}, \qquad \text{hier} \quad A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$E : \mathbb{S} \to \mathbb{R} : v \mapsto v^\dagger A\, v,$$



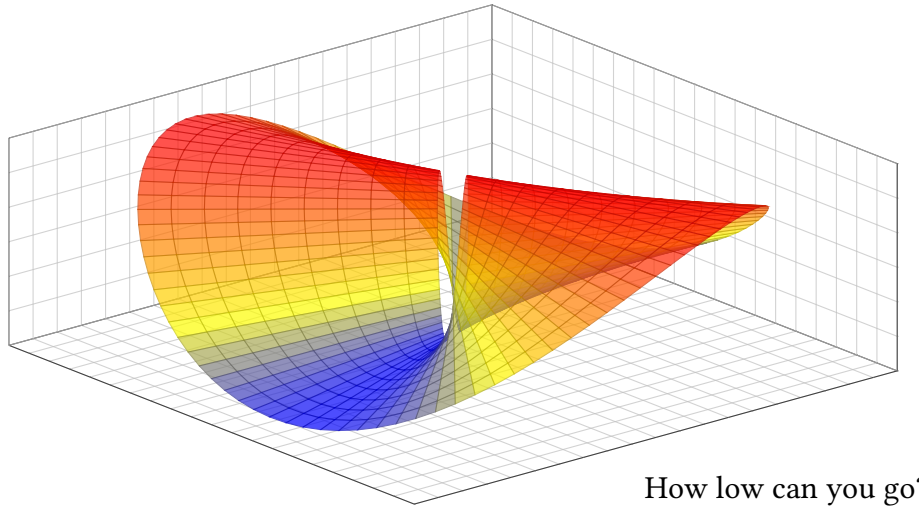


Hier ist $\mathbb{S}(\mathbb{K}^n) := \{\, v \in \mathbb{K}^n \mid \|v\| = 1 \,\}$ die Einheitssphäre, also die Menge aller normierten Vektoren, der Länge 1. In unserem Beispiel ist $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ die Einheitskreislinie; diese parametrisieren wir durch $\theta \mapsto \left(\begin{smallmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{smallmatrix}\right)$.

Quadratische Form als Energiefunktion

Wir erklären die Energie für alle Vektoren $v \neq 0$ durch Normierung:

$$E : \mathbb{K}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R} : E(v) = \frac{v^\dagger A\, v}{v^\dagger v}$$



How low can you go?

Satz T1H: Energiemethode

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ unitär und $f : V \to V$ selbstadjungiert.

(0) Wir betrachten die Sphäre $\mathbb{S}(V) := \{\, x \in V \mid \|x\| = 1 \,\}$ und darauf

$$E : V \supset \mathbb{S} \to \mathbb{R} \subset \mathbb{K} : x \mapsto E(x) = \langle x \mid f(x) \rangle.$$

(1) Ist $u \in \mathbb{S}$ eine Minimalstelle, also $E(u) \le E(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}$, dann ist u ein Eigenvektor, also $f(u) = u\lambda$ mit $\lambda = E(u) \in \mathbb{R}$.

(2) Für $V = \mathbb{K}^n$ nimmt E auf $\mathbb{S}$ Minimum und Maximum an, somit existiert zu f mindestens ein Eigenpaar $(u, \lambda) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}$.

Beweis: (0) Es gilt $E(x) \in \mathbb{R}$, denn $\overline{\langle x \mid f(x) \rangle} = \langle f(x) \mid x \rangle = \langle x \mid f(x) \rangle$.
(1) Wir zerlegen $f(u) = u\lambda + v$ orthogonal mit $\lambda = \langle u \mid f(u) \rangle$ und $v \perp u$.

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto E\left(\frac{u + vt}{\|u + vt\|}\right) = \cdots \cdots = \frac{\lambda + 2t\|v\|^2 + t^2 \langle v \mid f(v) \rangle}{1 + t^2 \|v\|^2} =: h(t)$$

Es gilt $h'(0) = 2\|v\|^2 / \|u\|^2$. Ist u extremal, so folgt $h'(0) = 0$, also $v = 0$.

Aufgabe: Rechnen Sie (1) sorgsam nach und begründen Sie (2).

Lösung: Wir zerlegen $f(u) = u\lambda + v$. Der Fourier–Koeffizient $\lambda = \langle u \mid f(u) \rangle$ garantiert $v \perp u$, siehe S2F. Wir rechnen geduldig:

$$E\left(\frac{u + vt}{\|u + vt\|}\right) \overset{\text{Def}}{=} \frac{\langle u + vt \mid f(u + vt) \rangle}{\langle u + vt \mid u + vt \rangle} \overset{\text{Vor}}{=} \frac{\langle u + vt \mid u\lambda + v + f(v)t) \rangle}{\|u\|^2 + \|v\|^2 t^2}$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} \frac{\|u\|^2 \lambda + \langle u \mid v \rangle + \langle u \mid f(v) \rangle t + \langle vt \mid u\lambda \rangle + \|v\|^2 t + \langle v \mid f(v) \rangle t^2}{\|u\|^2 + \|v\|^2 t^2}$$

$$\overset{\text{sad}}{=} \frac{\lambda + 2t\|v\|^2 + t^2 \langle v \mid f(v) \rangle}{1 + t^2 \|v\|^2}$$

Im letzten Schritt nutzen wir erneut, dass f selbstadjungiert ist:

$$\langle u \mid f(v) \rangle \overset{\text{sad}}{=} \langle f(u) \mid v \rangle \overset{\text{Vor}}{=} \langle u\lambda + v \mid v \rangle \overset{\text{Vor}}{=} \|v\|^2$$

(2) Wir nutzen dankbar die Werkzeuge der Analysis / Topologie des $\mathbb{R}^N$: Für $V = \mathbb{K}^n$ ist die Sphäre $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt. Darauf ist $E : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ stetig. Daher nimmt die Funktion E ihr Infimum und ihr Supremum an. $\boxed{\text{QED}}$

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ unitär und $f : V \to V$ selbstadjungiert. Somit ist die Form $(u, v) \mapsto \langle u \mid f(v) \rangle$ sesquilinear und hermitesch, denn

$$\overline{\langle u \mid f(v) \rangle} \overset{\text{S2}}{=} \langle f(v) \mid u \rangle \overset{\text{Ad}}{=} \langle v \mid f(u) \rangle.$$

Aus $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$ mit f bilden wir so $\langle\text{-} \mid f\text{-}\rangle$ und die **quadratische Form**

$$q_f : V \to \mathbb{R} : x \mapsto \langle x \mid f(x) \rangle.$$

Für $x \in V \setminus \{0\}$ ist dann die **Energie** aka der **Rayleigh-Quotient**

$$E : V \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\langle x \mid f(x) \rangle}{\langle x \mid x \rangle}.$$

Dieser Wert ist invariant unter Skalierung mit $\lambda \in \mathbb{K}^\times$:

$$E(x\lambda) = \frac{\langle x\lambda \mid f(x\lambda) \rangle}{\langle x\lambda \mid x\lambda \rangle} = \frac{\langle x \mid f(x) \rangle \cdot |\lambda|^2}{\langle x \mid x \rangle \cdot |\lambda|^2} = E(x)$$

Daher genügt es, E auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}(V)$ zu betrachten.

Diese Sichtweise ist insbesondere in der Physik beliebt und bewährt, daher kommt auch unsere sprechende Bezeichnung als „Energie“.

Ein quantenmechanisches System beschreiben wir durch einen unitären Raum $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ über $\mathbb{C}$. Jedes Element $x \in V$ beschreibt einen Zustand. Die selbstadjungierte Abbildung $f : V \to V$ beschreibt eine Observable oder Messung. Im Zustand $x \in V$ ist der erwartete Messwert $E(x) \in \mathbb{R}$.

Genauer beschreiben x und $x\lambda$ denselben physikalischen Zustand. Daher normieren wir jeden Zustand x standardmäßig zu $x/\|x\| \in \mathbb{S}$. Auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}$ vereinfacht sich die Energieformel zu

$$E : \mathbb{S} \to \mathbb{R} : E(x) = \langle x \mid f(x) \rangle.$$

So viel als Hintergrund zur physikalischen Allgemeinbildung. Schon die mathematischen Eigenschaften sind wunderschön und nützlich, darauf dürfen Sie sich gerne fokussieren. In endlicher Dimension ist die Sphäre $\mathbb{S}$ kompakt, daher nimmt die Energie E ihre Extrema an.

Satz T1I: Spektralsatz I, selbstadjungierte Endomorphismen

(1) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist jede selbstadjungierte Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ unitär diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten: Zu $A = A^\dagger$ existiert ein unitärer Basiswechsel $Q \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{K}$ so, dass

$$Q^\dagger A\,Q = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{mit} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

(2) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ unitär mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n \in \mathbb{N}$. Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus $f : V \to V$ existiert eine orthonormale Eigenbasis $(v_1, \dots, v_n)$ mit reellen Eigenwerten.

Äquivalenz: Wir haben „(2) ⇒ (1)“ mit $Q = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ dank T1D, ONB heißt $Q^\dagger Q = I$, Eigenbasis heißt $Q^{-1} A\,Q = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

☺ Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist unsere Basiswechselmatrix $Q \in \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}$ orthogonal.
Jede symmetrische reelle Matrix lässt sich orthogonal diagonalisieren.

☺ Über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist unsere Basiswechselmatrix $Q \in \mathrm{SU}_n\,\mathbb{C}$ unitär.
Jede hermitesche komplexe Matrix lässt sich unitär diagonalisieren.

☺ Allein schon die Diagonalisierbarkeit ist überaus bemerkenswert. Für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist sie keineswegs selbstverständlich! Erstens muss das charakteristische Polynom zerfallen, zweitens muss für jeden Eigenwert die geometrische die algebraische Vielfachheit erreichen.

☺ Hier gelingt Diagonalisierung *unitär*, durch unitären Basiswechsel. Speziell über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ folgt: Das charakteristische Polynom $\chi_f \in \mathbb{K}[X]$ zerfällt bereits über $\mathbb{R}$ gemäß $\chi_f(X) = (X - \mu_1)^{n_1} \cdots (X - \mu_k)^{n_k}$ mit reellen Nullstellen $\mu_1 < \dots < \mu_k$ und Vielfachheiten $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

☺ Das charakteristische Polynom einer reellen symmetrischen Matrix zerfällt in *reelle* Linearfaktoren. Das ist höchst bemerkenswert!

Der Vektorraum zerfällt in die orthogonale Summe der Eigenräume:

$$V = \operatorname{Eig}(f, \mu_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Eig}(f, \mu_k)$$

Der Anfang ist wesentlich: Es existiert ein Eigenpaar (v, λ).
Der Schritt gelingt dann leicht dank orthogonalem Komplement!

Beweis: (2) Wir führen Induktion über n. Für $n \leq 1$ ist die Aussage klar. Sei nun $n \geq 2$ und die Behauptung für $n - 1$ sei bereits bewiesen.

Dank T1G/T1H existiert zu $f : V \to V$ ein Eigenpaar $(v_1, \lambda_1) \in V \times \mathbb{R}$. Wir normieren den Eigenvektor $v_1 \neq 0$ zur Länge $\|v_1\| = 1$.

Die Gerade $\langle v_1 \rangle_{\mathbb{K}}$ ist invariant, also auch $U := \langle v_1 \rangle_{\mathbb{K}}^\perp$ dank T1E(3). Es gilt $V = \langle v_1 \rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle v_1 \rangle_{\mathbb{K}}^\perp$ dank S1Q, somit $\dim_{\mathbb{K}}(U) = n - 1$.

Die Einschränkung $g = f|_U^U : U \to U$ ist weiterhin selbstadjungiert, denn $\langle u \,|\, g(v) \rangle \overset{\text{Def}}{=} \langle u \,|\, f(v) \rangle \overset{\text{Ad}}{=} \langle f(u) \,|\, v \rangle \overset{\text{Def}}{=} \langle g(u) \,|\, v \rangle$ für alle $u, v \in U$.

IV: Zu g existiert eine orthonormale Eigenbasis $(v_2, \dots, v_n)$ von U. Damit ist $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ eine orthonormale Eigenbasis zu f. QED

☺ Entscheidend ist die Existenz eines ersten Eigenpaares (v, λ). Der Schritt gelingt dann leicht dank orthogonalem Komplement! Dieses genial-einfache Argument ist ebenso elegant wie effizient. Denselben Trick nutzen wir zur unitären Trigonalisierung T1L.

Algo T1J: unitäre Diagonalisierung, orthgonale Eigenbasis

Eingabe: eine selbstadjungierte Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$
Ausgabe: eine orthonormale Eigenbasis $(v_1, \dots, v_n)$ zu A

1: Zerfälle das charakteristische Polynom $\chi_A = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{n_i}$ über $\mathbb{R}$.
2: Konstruiere eine Orthonormalbasis für jeden Eigenraum $\operatorname{Eig}(A, \lambda_i)$.
3: Füge diese zur Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ von $\mathbb{K}^n$ zusammen.
4: return $(v_1, \dots, v_n)$

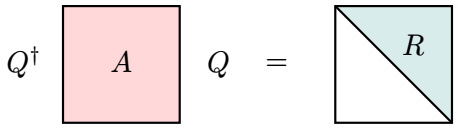
Aufgabe: Warum ist dieser Algorithmus korrekt, gelingt also immer?

Beweis: Dank Spektralsatz T1I zerfällt $\mathbb{K}^n$ in die orthogonale Summe

$$\mathbb{K}^n = \operatorname{Eig}(A, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Eig}(A, \lambda_k).$$

Wir haben demnach genügend Eigenvektoren zur Diagonalisierung. Zudem stehen die Eigenräume paarweise orthogonal zueinander, der Algorithmus liefert uns also eine orthonormale Eigenbasis, wie in seiner Spezifikation versprochen! QED

Welche Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind unitär trigonalisierbar?



Gegeben ist eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Wir suchen einen unitären Basiswechsel $Q \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{K}$ zur Dreiecksform $Q^\dagger A Q = R \in \mathbb{T}_n\,\mathbb{K}$. Wegen $Q^\dagger = Q^{-1}$ bedeutet das zugleich Ähnlichkeit $Q^{-1} A\, Q = R$.

Notwendige Bedingung über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Das Polynom $\chi_A \in \mathbb{R}[X]^1_n$ zerfällt.
Freudige Überraschung über $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$: Es gibt keine Einschränkung!

⚠ Die Schur–Zerlegung ist durch A nicht eindeutig bestimmt. In der Ausführung des Algorithmus müssen wir Wahlen treffen, und diese beeinflussen das Endergebnis. Über $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind immerhin die Eigenwerte von A immer eindeutig, und diese lesen wir auf der Diagonalen von R.

⚠ Eine Schur–Zerlegung (Q, R) von A zu berechnen ist mühsam.
Für die Theorie genügt uns meist zu wissen, dass eine existiert.
Für die numerische Praxis gibt es hierzu raffinierte Verfahren.

Woher bekommen wir ein erstes Eigenpaar?

Lemma T1K: Existenz eines ersten Eigenpaars

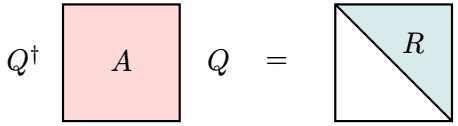
Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ unitär mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$; über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ habe $\chi_f \in \mathbb{R}[X]^1_n$ eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dann existiert ein Eigenpaar $(v, \lambda) \in V \times \mathbb{K}$, zudem normiert zu $\|v\| = 1$.

Beweis: (a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Wir haben einen ersten Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dazu existiert ein Eigenvektor $v \in \mathrm{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\}$, siehe P2B.

(b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Das Polynom $\chi_f \in \mathbb{C}[X]^1_n$ zerfällt über $\mathbb{C}$ dank FTA E3C, das heißt ausgeschrieben $\chi_f = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.
Da wir $n \geq 1$ voraussetzen, existiert mindestens ein Eigenwert $\lambda = \lambda_1$.
Dazu existiert ein Eigenvektor $v \in \mathrm{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\}$, erneut dank P2B.

(c) $\mathbb{K} = \mathbb{H}$: Wir betrachten V als $\mathbb{C}$–Vektorraum. Nun genügt (b):
Demnach existiert ein Eigenpaar (v, λ) mit $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$.
Quaternion fun fact: Weitere Lösungen sind $(vq, q^{-1}\lambda q)$ mit $q \in \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$.
Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $\mathrm{j}^{-1}\lambda\mathrm{j} = \overline{\lambda}$; wir können also immer $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$ erreichen. QED

Schur–Zerlegung: unitäre Trigonalisierung



Satz T1L: Schur–Zerlegung, unitäre Trigonalisierung

(1) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix;
über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ fordern wir zudem, dass $\chi_A \in \mathbb{R}[X]^1_n$ über $\mathbb{R}$ zerfällt.

Dann ist A unitär trigonalisierbar: Zu A existiert ein unitärer Basiswechsel $Q \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{K}$ zur Dreiecksform $Q^\dagger A\, Q = R \in \mathbb{T}_n\,\mathbb{K}$.

(2) Sei $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ unitär mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$;
über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ fordern wir zudem, dass $\chi_f \in \mathbb{R}[X]^1_n$ über $\mathbb{R}$ zerfällt.

Dann existiert eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V, in der f Dreiecksform hat, $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathbb{T}_n\,\mathbb{K}$. Wir nennen dies eine **Schur–Basis**.

Äquivalenz: Wir haben „(2) ⇒ (1)“ mit $Q = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$, denn ONBasis heißt $Q^\dagger Q = I$. Es genügt daher, die Aussage (2) zu beweisen.

Schur–Zerlegung: unitäre Trigonalisierung

$$A = \mathrm{M}_{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & & & \\ 0 & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \implies R = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Beweis: (2) Wir führen Induktion über n. Für $n \leq 1$ ist die Aussage klar.
Sei nun $n \geq 2$ und die Behauptung für $n - 1$ sei bereits bewiesen.

Dank T1K existiert ein erstes Eigenpaar $(v_1, \lambda_1) \in V \times \mathbb{K}$.
Wir normieren den Eigenvektor $v_1 \neq 0$ zur Länge $\|v_1\| = 1$.

Zum Orthgonalraum $U := \langle v_1 \rangle^\perp_{\mathbb{K}}$ wählen wir eine Basis $(u_2, \dots, u_n)$.
Bezüglich der Basis $\mathcal{A} = (v_1, u_2, \dots, u_n)$ hat f obige Blockform.

Die Untermatrix B definiert den Endomorphismus $g : U \to U$.
Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Es gilt $\chi_f = (X - \lambda_1) \cdot \chi_g$, also zerfällt auch χ_g.

IV: Zu g existiert eine Schur–Basis $(v_2, \dots, v_n)$ von U.
Damit ist $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ eine Schur–Basis zu f. QED

Welche Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind unitär diagonalisierbar?

Die selbstadjungierten gehören dazu, dank dem ersten Spektralsatz T1I. Sind dies bereits alle? Wie können wir solche Matrizen leicht erkennen?

Angenommen, $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ wird durch $Q \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{K}$ diagonalisiert zu

$$Q^\dagger A\,Q = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \boxslash_n\,\mathbb{K}.$$

Dann kommutiert A mit $A^\dagger$:

$$\begin{aligned} A \cdot A^\dagger &= Q\Lambda Q^\dagger \cdot Q\Lambda^\dagger Q^\dagger &= Q\,\Lambda\Lambda^\dagger\,Q^\dagger, \\ A^\dagger \cdot A &= Q\Lambda^\dagger Q^\dagger \cdot Q\Lambda Q^\dagger &= Q\,\Lambda^\dagger\Lambda\,Q^\dagger, \end{aligned}$$

Für jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\overline{\lambda}\lambda = \lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2 \in \mathbb{R}$. Demnach gilt $\Lambda^\dagger\Lambda = \Lambda\Lambda^\dagger$, also $A^\dagger A = AA^\dagger$. Eine Matrix mit dieser Eigenschaft nennen wir **normal**.

Diese einfache Rechnung gibt uns die gesuchte notwendige Bedingung! Sie ist leicht und bequem zu prüfen durch zwei Matrixmultiplikationen.

Müssen wir weitere Bedingungen prüfen? Erstaunlicherweise nicht! Wir zeigen nachfolgend, dass Normalität bereits hinreichend ist.

Welche Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind unitär diagonalisierbar?

Definition T1M: normale Endomorphismen

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ unitär und $(f, f^\dagger) : V \rightleftarrows V$ adjungiert.

(1) Wir nennen $f : V \to V$ **normal**, falls $f^\dagger$ existiert und mit f kommutiert:

$$\boxed{f \circ f^\dagger = f^\dagger \circ f}$$

(2) Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt **normal**, falls gilt:

$$\boxed{A \cdot A^\dagger = A^\dagger \cdot A}$$

Beispiele: (a) Jeder anti/hermitesche Endomorphismus erfüllt $f^\dagger = \pm f$.
(b) Jeder orthogonale / unitäre Automorphismus erfüllt $f^\dagger = f^{-1}$, also $f^\dagger \circ f = f \circ f^\dagger = \mathrm{id}_V$. In beiden Fällen folgt daraus, dass f normal ist.

Diese merkwürdige Bedingung motiviert sich aus der vorigen Rechnung. Der traditionelle Name „normal“ ist leider vollkommen nichtssagend, doch wie so manche unglückliche Tradition wohl kaum zu ändern.

Normale Matrizen: erste Eigenschaften

⚠ Die Definition ist leicht, doch ihre tiefere Bedeutung keineswegs. Sie wird sich im Folgenden erst durch die Nutzung voll entfalten. Wir beginnen mit einfachen Beobachtungen zum Einüben.

Wir haben Normalität erreicht, ich wiederhole, wir haben Normalität erreicht. Alles, womit du jetzt noch immer nicht fertig wirst, ist folglich dein Problem.
Douglas Adams (1952–2001), *Per Anhalter durch die Galaxis*

Aufgabe: Sei $Q \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{K}$. Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ normal, so auch $B = Q^\dagger A\,Q$.
Lösung: Wir vergleichen $B^\dagger B = Q^\dagger A^\dagger A\,Q$ und $BB^\dagger = Q^\dagger AA^\dagger Q$.

Aufgabe: Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit Skalarprodukt $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$ und einer Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Genau dann ist $f : V \to V$ normal, wenn die darstellende Matrix $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ normal ist.

Lösung: Dank Satz T1D wissen wir $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f^\dagger) = A^\dagger$ in jeder ONBasis. Demnach gilt $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f \circ f^\dagger) = A \cdot A^\dagger$ und $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f^\dagger \circ f) = A^\dagger \cdot A$, denn Darstellungsmatrizen vertragen sich mit Komposition, siehe N1I. Daraus folgt: Es gilt $f \circ f^\dagger = f^\dagger \circ f$ gdw $A \cdot A^\dagger = A^\dagger \cdot A$.

Normale Matrizen: erste Eigenschaften

Aufgabe: Bestimmen Sie alle normalen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Lösung: Für $A = \left[\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right]$ gilt $A^\intercal = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ und somit

$$AA^\intercal - A^\intercal A = \begin{bmatrix} b^2 - c^2 & (a-d)(c-b) \\ (a-d)(c-b) & c^2 - b^2 \end{bmatrix}.$$

Demnach sind genau zwei Fälle möglich: $b = c$ oder ($c = -b$ und $a = d$).

$$\text{Symmetrisch} \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \text{Drehstreckung} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Übung: (1) Jede Diagonalmatrix $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist normal.
(2) Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ normal, so auch jede unitär ähnliche Matrix $B = Q^\dagger A\,Q$.
(3) Sind $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ normal, so nicht unbedingt ihre Summe $A + B$.

Z.B. sind $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ und $B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ unitär, doch $A + B$ nicht normal.
Ebenso sind $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ und $B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ normal, doch $A + B$ nicht.

☺ Die Summe $A + B$ ist normal, falls A und B normal sind und zudem (4) $A^\dagger B = BA^\dagger$ erfüllen oder (5) $AB = BA$ erfüllen, also kommutieren.

Normal und trigonal bedeutet...

Aufgabe: Wann ist die Matrix $M = \left[\begin{smallmatrix} A & C \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{K}^{(p+q)\times(p+q)}$ normal?
Wir betrachten $A, B, C \in \mathbb{K}$ oder besser gleich eine Blockmatrix:
Hierbei sei $A \in \mathbb{K}^{p\times p}$ und $B \in \mathbb{K}^{q\times q}$ sowie $C \in \mathbb{K}^{p\times q}$ und $0 = 0_{q\times p}$.

Lösung: Wir setzen die Definition ein und vergleichen

$$M^\dagger \cdot M = \begin{bmatrix} A^\dagger & 0 \\ C^\dagger & B^\dagger \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^\dagger A & A^\dagger C \\ C^\dagger A & C^\dagger C + B^\dagger B \end{bmatrix},$$

$$M \cdot M^\dagger = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^\dagger & 0 \\ C^\dagger & B^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^\dagger + CC^\dagger & CB^\dagger \\ BC^\dagger & BB^\dagger \end{bmatrix}.$$

Aus Gleichheit $M^\dagger M = MM^\dagger$ folgt $A^\dagger A = AA^\dagger + CC^\dagger$. Die Spur ergibt:

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \overline{a_{ij}} a_{ij} \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\overline{a_{ij}} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} c_{ik}\overline{c_{ik}},$$

Notwendig ist also $\sum_{i,k}|c_{ik}|^2 = 0$, somit $C = 0$, sowie A und B normal.
Umgekehrt ist dies offensichtlich auch hinreichend. QED

Normal und trigonal bedeutet... diagonal!

Aus diesem Beispiel erhalten wir per Induktion folgenden schönen Satz:

Satz T1N: Normal und trigonal bedeutet diagonal.

(1) Eine Dreiecksmatrix

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

ist genau dann normal, $M^\dagger M = MM^\dagger$, wenn sie diagonal ist.

(2) Allgemein, eine Blockdreiecksmatrix

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & A_{nn} \end{bmatrix}$$

ist genau dann normal, wenn sie blockdiagonal ist mit $A_{ii}^\dagger A_{ii} = A_{ii} A_{ii}^\dagger$.

Normal und trigonal bedeutet... diagonal!

Aufgabe: Führen Sie die Induktion sorgsam aus! **Lösung:** Wir beweisen die allgemeine Aussage (2). Für $n = 1$ ist alles klar. Für $n \geq 2$ zerlegen wir

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad A = A_{11}.$$

Dank obigem Beispiel gilt $M^\dagger M = MM^\dagger$ genau dann, wenn $C = 0$ sowie $A^\dagger A = A^\dagger A$ und $B^\dagger B = BB^\dagger$. Per Induktion gilt $B = \operatorname{diag}(A_{22}, \dots, A_{nn})$ mit $A_{ii}^\dagger A_{ii} = A_{ii} A_{ii}^\dagger$. Somit ist M blockdiagonal mit allen A_{ii} normal. QED

☺ Damit können wir unsere Frage umfassend beantworten:
Welche Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind unitär diagonalisierbar?

⚠ Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ muss zunächst das charakteristische Polynom zerfallen. Über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist dies keine Einschränkung, denn jedes Polynom in $\mathbb{C}[X]$ zerfällt in Linearfaktoren. Über dem Schiefkörper $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ haben wir *keine* zufriedenstellende Determinante und somit auch kein charakteristisches Polynom. Dank Lemma T1K können wir uns jedoch mit $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ behelfen.

Welche Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind unitär diagonalisierbar?

Satz T1O: Spektralsatz II, normale Endomorphismen

(1) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix;
über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ fordern wir zudem, dass $\chi_A \in \mathbb{R}[X]_n^1$ über $\mathbb{R}$ zerfällt.
Genau dann ist A unitär diagonalisierbar, also $Q^\dagger A Q = \Lambda \in \mathbb{D}_n \mathbb{K}$ mit $Q \in \mathrm{GU}_n \mathbb{K}$, wenn A normal ist, also $A^\dagger A = AA^\dagger$ erfüllt.

Erster Beweis: (1) Die Implikation „$\Rightarrow$“ haben wir oben nachgerechnet, „$\Leftarrow$“ folgt dank Schur T1L: Zu A existiert $Q \in \mathrm{GU}_n \mathbb{K}$ mit $Q^\dagger A Q = R$ trigonal. Ist A normal, so auch R. Dank T1N ist R diagonal. QED

(2) Sei $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ unitär mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n \in \mathbb{N}$ und $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$;
über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ fordern wir zudem, dass $\chi_f \in \mathbb{R}[X]_n^1$ über $\mathbb{R}$ zerfällt.
Genau dann erlaubt f eine orthonormale Eigenbasis $(v_1, \dots, v_n)$, mit $f(v_i) = v_i \lambda_i$ und $\lambda_i \in \mathbb{K}$, wenn f normal ist.

(3) Dabei ist A bzw. f unitär gdw $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_n| = 1$,
ebenso ist A bzw. f selbstadjungiert gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Rekursive Konstruktion einer orthonormalen Eigenbasis

Aussagen (1) und (2) sind offensichtlich äquivalent. Damit ist (3) klar. Aussage (1) folgern wir leicht dank Schur–Zerlegung T1L. Bonus: Für diesen wichtigen Spektralsatz geben wir einen zweiten Beweis.

Zweiter Beweis: (2) „$\Leftarrow$“: Wir führen Induktion über n. Für $n \le 1$ ist alles klar. Sei nun $n \ge 2$ und die Behauptung für $n-1$ sei bereits bewiesen.

Dank T1K existiert zu $f : V \to V$ ein Eigenpaar $(v_1, \lambda_1) \in V \times \mathbb{K}$, zudem normiert zu $\|v\| = 1$. Sei $U = \langle v_1 \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp} \le V$. Für $v \in U$ gilt $f(v) \in U$, denn

$$\langle v_1 \,|\, f(v) \rangle \overset{\text{Ad}}{=} \langle f^\dagger(v_1) \,|\, v \rangle \overset{\text{T1P}}{=} \langle v_1 \overline{\lambda_1} \,|\, v \rangle \overset{\text{S4}}{=} \lambda_1 \langle v_1 \,|\, v \rangle \overset{\perp}{=} 0.$$

Wir erhalten so $g = f|_U^U : U \to U$, ebenso $g^\dagger = f^\dagger|_U^U$, denn

$$\langle u \,|\, g(v) \rangle \overset{\text{Def}}{=} \langle u \,|\, f(v) \rangle \overset{\text{Ad}}{=} \langle f^\dagger(u) \,|\, v \rangle \overset{\text{Def}}{=} \langle g^\dagger(u) \,|\, v \rangle$$

Da f normal ist, also $f^\dagger \circ f = f \circ f^\dagger$ erfüllt, gilt dies auch für g.
Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Es gilt $\chi_f = (X - \lambda_1) \cdot \chi_g$, also zerfällt auch χ_g.
IV: Zu g existiert eine orthonormale Eigenbasis $(v_2, \dots, v_n)$ von U.
Damit ist $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ eine orthonormale Eigenbasis zu f. QED

Normale Endomorphismen: charakteristische Eigenschaften

Lemma T1P: charakteristische Eigenschaften

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ unitär und $(f, f^\dagger) : V \rightleftarrows V$ adjungiert.
(1) Äquivalent sind die folgenden drei Eigenschaften:
(1a) Der Endomorphismus f ist normal, erfüllt also $f \circ f^\dagger = f^\dagger \circ f$.
(1b) Es gilt $\langle f(u) \,|\, f(v) \rangle = \langle f^\dagger(u) \,|\, f^\dagger(v) \rangle$ für alle $u, v \in V$.
(1c) Es gilt $\|f(u)\| = \|f^\dagger(u)\|$ für alle $u \in V$.

Beweis: Wir setzen die Definitionen ein und vergleichen:

$$\begin{array}{ccc} \langle f(u) \,|\, f(v) \rangle & \overset{\text{Ad}}{=} & \langle u \,|\, (f^\dagger \circ f)(v) \rangle \\ \|\text{Ⓢ} & \Longleftrightarrow & \|\text{Ⓢ} \\ \langle f^\dagger(u) \,|\, f^\dagger(v) \rangle & \overset{\text{Ad}}{=} & \langle u \,|\, (f \circ f^\dagger)(v) \rangle \end{array}$$

Aus (a) folgt (b). Umgekehrt: Aus (b) folgt $0 = \langle u \,|\, (f \circ f^\dagger - f^\dagger \circ f)(v) \rangle$ für alle $u, v \in V$, somit $0 = f \circ f^\dagger - f^\dagger \circ f$, also (a). Die Implikation „(b) $\Rightarrow$ (c)“ ist klar. Die Umkehrung „(c) $\Rightarrow$ (b)“ folgt durch Polarisierung, Satz S2I.

Normale Endomorphismen: charakteristische Eigenschaften

(2) Ist $(f, f^\dagger) : V \to V$ normal, so folgt $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^\dagger)$.

Beweis: Das folgt unmittelbar aus (1c).

(3) Ist $(f, f^\dagger) : V \to V$ normal, so auch das Paar $(g, g^\dagger) : V \to V$ mit $g(v) = f(v) - v\lambda$ und $g^\dagger(v) = f^\dagger(v) - v\lambda^\dagger$ für jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$.

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ sind $(g, g^\dagger)$ nur noch $\mathbb{R}$–linear. Das genügt uns.

Beweis: Wir setzen die Definitionen ein und vergleichen:

$$\begin{aligned} (g \circ g^\dagger)(v) &\overset{\text{Def}}{=} g(f^\dagger(v) - v\lambda^\dagger) \overset{\text{Def}}{=} (f \circ f^\dagger)(v) - f(v)\lambda^\dagger - f^\dagger(v)\lambda + v\lambda^\dagger\lambda \\ (g^\dagger \circ g)(v) &\overset{\text{Def}}{=} g^\dagger(f(v) - v\lambda) \overset{\text{Def}}{=} (f^\dagger \circ f)(v) - f(v)\lambda^\dagger - f^\dagger(v)\lambda + v\lambda\lambda^\dagger \end{aligned}$$

Dank (2) wissen wir $\operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Ker}(g^\dagger)$. Daraus folgt:

(4) Sei $(f, f^\dagger) : V \to V$ normal. Aus $f(v) = v\lambda$ folgt $f^\dagger(v) = v\lambda^\dagger$.
Ist (v, λ) ein Eigenpaar von f, so ist $(v, \lambda^\dagger)$ ein Eigenpaar von $f^\dagger$.

Normale Endomorphismen minimieren die Frobenius–Norm.

Korollar T1Q: Frobenius–Norm und Eigenwerte

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$. Dann gilt $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \ge \sum_i |\lambda_i|^2$.
Gleichheit gilt genau dann, wenn A normal ist.

Aufgabe: Zeigen Sie dies mit der Schur–Zerlegung.

Beweis: Unitäre Ähnlichkeit $A \mapsto B = Q^\dagger A Q$ mit $Q \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{C}$ erhält die Eigenwerte, denn $Q^\dagger = Q^{-1}$, und ebenso das Frobenius–Normquadrat: Linksmultiplikation mit $Q^\dagger$ wirkt auf jeder Spalte, doch erhält ihre Länge. Rechtsmultiplikation mit Q wirkt auf jeder Zeile, doch erhält ihre Länge. Erhalten bleibt also die Frobenius–Norm $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_{i,j} |b_{ij}|^2$.

Dank Schur–Zerlegung T1L können wir Q so wählen, dass B trigonal ist. In diesem günstigen Fall sind die Diagonaleinträge $b_{11}, \dots, b_{nn}$ gerade die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, geeignet umgeordnet. Die beweist die Ungleichung. Gleichheit gilt genau dann, wenn B diagonal ist, also A normal. QED

Welche Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind orthogonal diagonalisierbar?

☺ Diese Frage beantworten wir sofort mit dem ersten Spektralsatz T1I:

Korollar T1R: Spektralsatz I, orthogonale Diagonalisierbarkeit

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$ und $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n < \infty$.

(1) Genau dann existiert zu $f : V \to V$ eine orthonormale Eigenbasis $\mathcal{B}$, mit reellen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, wenn f selbstadjungiert ist.

(2) Genau dann existiert zu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $S^\top A S = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, wenn die Matrix A symmetrisch ist.

(3) Zudem ist f bzw. A orthogonal, wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \{\pm 1\}$ gilt.

Aufgabe: Folgern Sie dies aus dem ersten Spektralsatz T1I.

Lösung: Aussage (1) ist äquivalent zu (2).

(2) „$\Rightarrow$“: Für $A = S\Lambda S^\top$ gilt $A^\top = S\Lambda^\top S^\top = S\Lambda S^\top = A$.
„$\Leftarrow$“: Dies folgt aus dem ersten Spektralsatz T1I.

(3) Sei $A = S\Lambda S^\top$ wie in (2). Die Bedingung $A^\top A = I$ ist dann äquivalent zu $\overline{\Lambda}\Lambda = I$, also $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \{\pm 1\}$. QED

Welche Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sind unitär diagonalisierbar?

☺ Diese Frage beantworten wir mit dem zweiten Spektralsatz T1O:

Korollar T1S: Spektralsatz II, normale Endomorphismen

Sei V ein $\mathbb{C}$–Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$ und $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n < \infty$.

(1) Genau dann ist ein Endomorphismus $f : V \to V$ normal, wenn eine orthonormale Eigenbasis $\mathcal{B}$ existiert mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

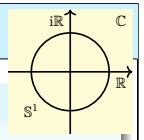
(2) Genau dann ist eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal, wenn eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert, sodass $U^\dagger A U = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ gilt.

(3) Genau dann ist f bzw. A unitär, wenn zudem $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{S}^1$ gilt. Genau dann ist f bzw. A selbstadjungiert, wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gilt.

Beweis: (2) „$\Leftarrow$“: Für $A = U^\dagger \Lambda U$ gilt $A^\dagger = U^\dagger \overline{\Lambda} U$.
Daraus erhalten wir $A^\dagger A = U^\dagger \overline{\Lambda}\Lambda U = U^\dagger \Lambda \overline{\Lambda} U = A A^\dagger$.

(3) Die Bedingung $AA^\dagger = 1$ entspricht $\Lambda\overline{\Lambda} = 1$, also $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{S}^1$, und $A = A^\dagger$ entspricht $\Lambda = \overline{\Lambda}$, also $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. QED

Zusammenfassung: normale Matrizen über $\mathbb{C}$



Korollar T1T: normale Matrizen über $\mathbb{C}$

Für jede komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gelten folgende Äquivalenzen:

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ normal} \\ A^\dagger A = A A^\dagger \end{array}\right\} \overset{\text{T1O}}{\iff} \exists Q \in \mathrm{SU}_n\,\mathbb{C} : Q^\dagger A Q \in \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{C} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ unitär} \\ A^\dagger = A^{-1} \end{array}\right\} \overset{\text{T1O}}{\iff} \exists Q \in \mathrm{SU}_n\,\mathbb{C} : Q^\dagger A Q \in \begin{bmatrix} \mathbb{S}^1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{S}^1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ antihermitesch} \\ A^\dagger = -A \end{array}\right\} \overset{\text{T1O}}{\iff} \exists Q \in \mathrm{SU}_n\,\mathbb{C} : Q^\dagger A Q \in \begin{bmatrix} \mathrm{i}\mathbb{R} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i}\mathbb{R} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ hermitesch} \\ A^\dagger = A \end{array}\right\} \overset{\text{T1I}}{\iff} \exists Q \in \mathrm{SU}_n\,\mathbb{C} : Q^\dagger A Q \in \begin{bmatrix} \mathbb{R} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{R} \end{bmatrix}$$

Zusammenfassung: normale Matrizen über $\mathbb{C}$

Wiederholung: Wie konstruieren Sie eine orthonormale Eigenbasis? Wie kommen wir vom Basiswechsel $T \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{C}$ speziell zu $Q \in \mathrm{SU}_n\,\mathbb{C}$?

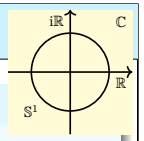
Beweis: (1) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal, $A^\dagger A = A A^\dagger$. Dank Spektralsatz T1O existiert eine orthonormale Eigenbasis $(v_1, \dots, v_n)$. Der Basiswechsel $T = (v_1, \dots, v_n)$ erfüllt somit $T \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{C}$. Zudem gilt $\mu = \det T \in \mathbb{S}^1$, somit $Q = (v_1, \dots, v_n/\mu) \in \mathrm{SU}_n\,\mathbb{C}$. Wir haben $Q^\dagger A Q = \Lambda$ wie gewünscht.

(2) Ist unsere Matrix A unitär, $A^\dagger A = I$, so auch die Diagonalmatrix Λ, denn $\Lambda^\dagger \Lambda = Q A^\dagger Q^\dagger \cdot Q A Q^\dagger = I$. Die Umkehrung gilt ebenso.
Unitär bedeutet demnach $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{S}^1$.

Ist unsere Matrix A anti/hermitesch, also $A^\dagger = \pm A$, so auch $\Lambda = Q A Q^\dagger$, denn $\Lambda^\dagger = Q A^\dagger Q^\dagger = \pm\Lambda$. Die Umkehrung gilt ebenso.
(3) Hermitsch bedeutet also $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.
(4) Antihermitsch bedeutet $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathrm{i}\mathbb{R}$. QED

☺ Für *normale* Matrizen können wir diese wichtigen Eigenschaften somit direkt und bequem an den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ablesen.

Zusammenfassung: normale Matrizen über $\mathbb{R}$



Korollar T1U: normale Matrizen über $\mathbb{R}$

Für jede reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gelten folgende Äquivalenzen:

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ normal} \\ A^\intercal A = AA^\intercal \end{array}\right\} \overset{\text{T1O}}{\iff} \begin{array}{l} \exists Q \in \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R} : Q^\intercal A\, Q = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B_\ell \end{bmatrix} \\ B_k \in \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}_{>0}\, \mathrm{SO}_2^\bullet\,\mathbb{R} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ orthogonal} \\ A^\intercal = A^{-1} \end{array}\right\} \overset{\text{T1O}}{\iff} \begin{array}{l} \exists Q \in \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R} : Q^\intercal A\, Q \in \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B_\ell \end{bmatrix} \\ B_k \in \{\pm 1\} \sqcup \mathrm{SO}_2^\bullet\,\mathbb{R} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ antisymmetrisch} \\ A^\intercal = -A \end{array}\right\} \overset{\text{T1O}}{\iff} \begin{array}{l} \exists Q \in \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R} : Q^\intercal A\, Q \in \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B_\ell \end{bmatrix} \\ B_k \in \{0\} \sqcup \mathbb{R}^\times \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ symmetrisch} \\ A^\intercal = A \end{array}\right\} \overset{\text{T1I}}{\iff} \exists Q \in \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R} : Q^\intercal A\, Q \in \begin{bmatrix} \mathbb{R} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{R} \end{bmatrix}$$

Zusammenfassung: normale Matrizen über $\mathbb{R}$

Hier steht $\mathrm{SO}_2^\bullet\,\mathbb{R}$ für $\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$ ohne die beiden Diagonalmatrizen $\pm\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, denn diese zerfallen bereits in zwei kleinere Blöcke der Form ± 1.

Wiederholung: Wie „reellifizieren“ Sie eine orthonormale Eigenbasis? Wie kommen wir vom Basiswechsel $T \in \mathrm{GO}_n\,\mathbb{R}$ speziell zu $Q \in \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}$?

Beweis: (1) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ normal, $A^\dagger A = AA^\dagger$. Wir betrachten die Matrix zunächst komplex, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Wir im vorigen Korollar T1U existiert zu A eine orthonormale Eigenbasis $(v_1, \dots, v_n)$ von $\mathbb{C}^n$. Wir sortieren reelle Eigenpaare nach vorne. Jeder echt komplexe Eigenwert λ_k kommt mit seinem Konjugierten $\overline{\lambda_k}$. Wir haben konjugierte Eigenvektoren $v_k, \overline{v_k}$.

Wir reellifizieren zu $u_k := (v_k + \overline{v_k})/\sqrt{2}$ und $u'_k := (v_k - \overline{v_k})/\mathrm{i}\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}^n$. Die Rücktransformation ist $v_k = (u_k + \mathrm{i}u'_k)/\sqrt{2}$ und $\overline{v_k} = (u_k - \mathrm{i}u'_k)/\sqrt{2}$. So erhalten wir eine Basis von $\mathbb{R}^n$, zudem orthonormal. (Nachrechnen!)

Die Basiswechselmatrix $T = (v_1, \dots, v_{\ell-1}, u'_\ell, u_\ell, \dots, u'_m, u_m)$ erfüllt somit $T \in \mathrm{GO}_n\,\mathbb{R}$. Zudem gilt $\mu = \det T \in \mathbb{S}^0$, somit $Q = (*, \dots, */\mu) \in \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}$. Wir erhalten damit $Q^\dagger A\, Q$ in der oben gezeigten Form. (Nachrechnen! Wir kennen die Rechnung aus Satz Q1Q für die reelle Jordan–Form.) $\boxed{\text{QED}}$

Der Satz vom n–dimensionalen Fußball

Korollar T1U: Satz vom n–dimensionalen Fußball → S4M

Ausgeschrieben: Zu jeder orthogonalen Matrix $A \in \mathrm{GO}_n\,\mathbb{R}$ existiert ein orthogonaler Basiswechsel $Q \in \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}$ in folgende Normalform:

$$Q^\intercal A\, Q = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & -s_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_k & -s_k \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_k & c_k
\end{bmatrix}$$

mit $(c_i, s_i) = (\cos\theta_i, \sin\theta_i)$ für Drehwinkel $\theta_i \in \,]-\pi, 0[\, \cup \,]0, +\pi[$.

Der Satz vom n–dimensionalen Fußball

🙂 Orthogonale Matrizen $A \in \mathrm{GO}_n\,\mathbb{R}$ interessieren uns ganz besonders, daher schreibe ich das Ergebnis hier in voller Schönheit aus. Dabei steht

$$\begin{bmatrix} c_i & -s_i \\ s_i & c_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}$$

für eine Drehung um den Winkel $\theta_i \in \,]-\pi, 0[\, \cup \,]0, \pi[\, \subset \mathbb{R} \smallsetminus \pi\mathbb{Z}$. In den Sonderfällen $\theta_i \in \{0, \pi\}$ erhalten wir $\pm\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, also kleinere Blöcke ± 1.

Zu jeder Matrix $A \in \mathrm{GO}_n\,\mathbb{R}$ existiert eine angepasste Orthonormalbasis, auf der A in elegant-einfachster Weise wirkt: als Identität oder Negation in einer Koordinate, oder als ebene Drehung in einem Koordinatenpaar.

Besonders schön: Speziell jede Drehung $A \in \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}$ ist eine Komposition von höchstens $\lfloor n/2 \rfloor$ Drehungen in orthogonalen Koordinatenebenen.

Das ist der Satz vom n–dimensionalen Fußball. Den Fall $n = 3$ haben wir bereits in Satz S4M separat bewiesen. Der Spektralsatz beschert uns nun den allgemeinen Fall ebenso übersichtlich und zudem erfreulich leicht!

Positive und negative Definitheit

Definition T2A: Definitheit über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$

Sei $(V, \beta) \overset{\text{Bsp}}{=} \langle A \rangle$ ein hermitescher Raum, $\beta^\dagger = \beta$, zum Beispiel $V = \mathbb{K}^{(I)}$ und $\beta(u, v) = u^\dagger A\, v$ mit $A \in \mathbb{K}^{I \times I}$ hermitesch, $A^\dagger = A$. Für alle $v \in V$ ist dann $q(v) := \beta(v, v)$ reell, denn $\beta(v, v) = \overline{\beta(v, v)}$. Wir nennen β, A, q

positiv semidefinit (spsd), $\beta \succeq 0$, $A \succeq 0$, $q \succeq 0$, falls $q(v) \geq 0$,
negativ semidefinit, $\beta \preceq 0$, $A \preceq 0$, $q \preceq 0$, falls $q(v) \leq 0$,

für alle $v \in V$ gilt. Stärker auf $V \neq \{0\}$ nennen wir β, A, q

positiv definit (spd), $\beta \succ 0$, $A \succ 0$, $q \succ 0$, falls $q(v) > 0$,
negativ definit, $\beta \prec 0$, $A \prec 0$, $q \prec 0$, falls $q(v) < 0$,

für alle $v \in V \smallsetminus \{0\}$ gilt. **Indefinit** $\beta \not\succeq 0$, $A \not\succeq 0$, $q \not\succeq 0$ bedeutet, es existieren Vektoren $u, v \in V$ mit $q(u) < 0 < q(v)$.

Beispiel: Für $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ gilt $q(v) = \lambda_1 |v_1|^2 + \dots + \lambda_n |v_n|^2$, also $A \succeq 0$ gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ und $A \succ 0$ gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

Positive und negative Definitheit

Wir nutzen weiterhin „hermitesch“ und „selbstadjungiert“ als synonym. Daher steht „spsd“ bzw. „spd“ für **selbstadjungiert positiv semi/definit**.

Für Definitheit $\beta, A, q \succ 0$ bzw. $\beta, A, q \prec 0$ fordern wir explizit $V \neq \{0\}$; es gibt tatsächlich Vektoren $v \in V$, die $q(v) > 0$ bzw. $q(v) < 0$ bezeugen.

Für $n = 1$ vergleichen wir einfach nur reelle Zahlen. Daher der Slogan: Hermitesche Matrizen bzw. Formen verhalten sich wie reelle Zahlen.

Offensichtlich gilt $\beta \preceq 0 \Leftrightarrow -\beta \succeq 0$ und $\beta \prec 0 \Leftrightarrow -\beta \succ 0$. Allgemein:

Definition T2A: partielle Ordnung hermitescher Formen

Für hermitesche Formen $\beta, \gamma \in \mathrm{HF}(V)$ definieren wir die Relationen

$$\begin{aligned}
\beta \succ \gamma \quad &\Leftrightarrow \quad \beta - \gamma \succ 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta(v, v) > \gamma(v, v) \\
\beta \succeq \gamma \quad &\Leftrightarrow \quad \beta - \gamma \succeq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta(v, v) \geq \gamma(v, v) \\
\beta \preceq \gamma \quad &\Leftrightarrow \quad \beta - \gamma \preceq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta(v, v) \leq \gamma(v, v) \\
\beta \prec \gamma \quad &\Leftrightarrow \quad \beta - \gamma \prec 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta(v, v) < \gamma(v, v)
\end{aligned}$$

für alle $v \in V \smallsetminus \{0\}$. Bei Unvergleichbarkeit schreiben wir $\beta \not\succeq \gamma$.

Positive und negative Definitheit

Definition T2A: Einschränkung auf einen Teilraum

Sei (V, β) ein hermitescher Raum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$. Auf jedem $\mathbb{K}$–linearen Teilraum $U \leq V$ ist die Einschränkung

$$\beta|_U := \beta|_{U \times U} : U \times U \to \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \beta(u, v)$$

ebenfalls eine hermitesche Form. Die so definierte Abbildung

$$\text{-}|_U : \mathrm{HF}(V) \to \mathrm{HF}(U) : \beta \mapsto \beta|_U$$

ist isoton, $\beta \succeq \gamma \Rightarrow \beta|_U \succeq \gamma|_U$. Für $U \neq \{0\}$ gilt sogar $\beta \succ \gamma \Rightarrow \beta|_U \succ \gamma|_U$.

Gilt $\beta|_U \succ 0$, so sagen wir **die Form β ist positiv definit auf dem Raum U**, oder umgekehrt **der Teilraum U ist positiv bezüglich der Form β**. Ebenso für positiv semidefinit, negativ semidefinit, negativ definit und indefinit.

Ebenso für die Einschränkung einer quadratischen Form $q : V \to \mathbb{R}$ zu $q|_U : U \to \mathbb{R}$ auf einem Teilraum $U \leq V$, und einer hermiteschen Matrix $A \in \mathbb{K}^{I \times I}$ zur Untermatrix $A|_{J \times J}$ auf einer Teilmenge $J \subseteq I$

Positive und negative Definitheit

Wir nutzen $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$. Der Fixkörper $\mathbb{R} = \mathrm{fix}(\mathbb{K}, \sigma) \leq \mathbb{K}$ ist geordnet, zudem vollständig, erfüllt also den Zwischenwertsatz (ZWS).

Für einfache Grundbegriffe genügt bereits ein beliebiger *Ring $(\mathbb{K}, \sigma)$. Für Vergleiche wie $\beta, A, q \succ 0$ benötigen wir zudem, dass der Fixring $\mathrm{fix}(\mathbb{K}, \sigma) \leq \mathbb{K}$ geordnet ist. Nützliche Beispiele sind $(\mathbb{Z}, \mathrm{id})$ und $(\mathbb{Q}, \mathrm{id})$. Manche Anwendungen fordern Vollständigkeit, so kommen wir zu $\mathbb{R}$.

Beispiel: Über $\mathbb{R}$ ist $q(x, y) = x^2 - 2y^2$ indefinit, denn $q(1, 0) = 1 > 0$ und $q(0, 1) = -2 < 0$. Dank Zwischenwertsatz existiert ein isotroper Vektor.

Über $\mathbb{Q}$ ist die Form $q(x, y) = x^2 - 2y^2$ ebenso indefinit, aber anisotrop: Es gibt keinen isotropen Vektor, denn $q(x, y) \neq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$.

Definition T2A: positiv semi/definiter Endomorphismus

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle \text{-}|\text{-} \rangle)$ unitär. Ein Endomorphismus $f : V \to V$ ist **selbstadjungiert**, $f^\dagger = f$, wenn seine Form $\beta(\text{-}, \text{-}) = \langle \text{-} \mid f(\text{-}) \rangle$ dies ist. Zudem nennen wir f **positiv semi/definit** etc., falls β dies ist.

Wie erkennen wir Definitheit? ... dank Gauß–Hermite!

An jeder Diagonalmatrix $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ können wir In/Definitheit leicht ablesen in allen fünf Fällen $A \succ 0$, $A \succeq 0$, $A \prec 0$, $A \preceq 0$, $A \not\succeq 0$.
Im Allgemeinen jedoch ist In/Definitheit nicht leicht zu erkennen.

? Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert, $A^\dagger = A$. Wie erkennen wir Definitheit?
Eine erste Möglichkeit bietet der **hermitesche Gauß–Algorithmus** S1R:

$$A = A^\dagger \in \mathbb{K}^{n\times n} \quad \Longrightarrow \quad \exists S \in \mathrm{GL}_n \mathbb{K} : S^\dagger A\, S = B = \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_n)$$

☺ An B können wir die In/Definitheit leicht ablesen! Allgemein gilt:

Lemma T2B: Kongruenz, allgemein und unitär

Quadratische Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißen (allgemein) **kongruent**, kurz $A \simeq B$, falls eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ existiert mit $B = S^\dagger A\, S$.

Sie heißen **unitär konkruent**, falls $B = S^\dagger A\, S$ für ein $S \in \mathrm{GU}_n \mathbb{K}$ gilt.
Wegen $S^\dagger = S^{-1}$ heißt das **unitär ähnlich**, $B = S^{-1} A\, S$ mit $S \in \mathrm{GU}_n \mathbb{K}$.

(1) Kongruenz (allgemein oder unitär) ist eine Äquivalenzrelation.
(2) Positive Semi/Definitheit ist invariant unter Kongruenz.

Wie erkennen wir Definitheit? ... dank Gauß–Hermite!

Wir transformieren A mit $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ zu $S^\dagger A\, S = B = \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_n)$
Daran können wir die In/Definitheit von B und A bequem ablesen:

Auch B ist selbstadjungiert, das heißt $B^\dagger = B$, also gilt $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.
Dann gilt $B \succ 0$ gdw $b_1, \dots, b_n > 0$ und $B \succeq 0$ gdw $b_1, \dots, b_n \geq 0$

Dasselbe gilt dann auch für unsere ursprüngliche Matrix A.
Dahinter steckt das obige einfache, aber nützliche Lemma!

Aufgabe: Beweisen Sie das Lemma zur Wiederholung der Begriffe!

Beweis: (1) Dies gilt allgemein für jede Gruppenoperation (Lemma J3G).
Reflexivität: Es gilt $A \simeq A$, also $A = S^\dagger A\, S$ mit $S = I$.
Symmetrie: Aus $B = S^\dagger A\, S$ folgt $A = T^\dagger B\, T$ dank $T = S^{-1}$.
Transitivität: Aus $B = S^\dagger A\, S$ und $C = T^\dagger B\, T$ folgt $C = (ST)^\dagger A\, (ST)$.

(2) Sei $A \succeq 0$, also $x^\dagger A\, x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$. Für $B = S^\dagger A\, S$ folgt $B \succeq 0$, denn für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt hier $x^\dagger B\, x = x^\dagger (S^\dagger A\, S)\, x = (Sx)^\dagger A\, (Sx) \geq 0$.
Dank Symmetrie gilt ebenso die Umkehrung: $B \succeq 0 \Rightarrow A \succeq 0$. QED

⚠ Zu den Begriffen „ähnlich“ vs „kongruent“ siehe S127.

Wie erkennen wir Definitheit? ... dank Faktorisierung!

Lemma T2C: schwache Faktorisierung $A = S^\dagger S$ in $\mathbb{K}^{n\times n}$

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ gilt:
(0) SPSD: $A = A^\dagger$ ist positiv semidefinit gdw $A = S^\dagger S$ mit $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
(1) SPD: $A = A^\dagger$ ist positiv definit gdw $A = S^\dagger S$ mit $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Beweis: „⇐“: Aus $A = S^\dagger S$ folgt $A^\dagger = (S^\dagger S)^\dagger = S^\dagger (S^\dagger)^\dagger = S^\dagger S = A$.
(0) „⇐“: Für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt $x^\dagger A\, x = x^\dagger S^\dagger\, S x = (Sx)^\dagger (Sx) \geq 0$.
(1) „⇐“: Für $x \in \mathbb{K}^n \smallsetminus \{0\}$ gilt $Sx \neq 0$, also $x^\dagger A\, x = (Sx)^\dagger (Sx) > 0$.
(0) „⇒“: Gauß–Hermite S1R konstruiert $T \in \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ mit

$$A = T^\dagger B\, T \quad \text{und} \quad B = \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_n).$$

Aus $A \succeq 0$ folgt $B \succeq 0$ dank T2B, wir haben also $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Wir setzen $B^{1/2} := \operatorname{diag}(b_1^{1/2}, \dots, b_n^{1/2})$. Für $S := B^{1/2} T$ gilt dann

$$S^\dagger S \overset{\text{Def}}{=} T^\dagger B^{1/2} \cdot B^{1/2} T \overset{\text{Def}}{=} T^\dagger B\, T \overset{\text{Vor}}{=} A.$$

(1) „⇒“: Ebenso, dank $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt nun $S \in \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$. QED

Wie erkennen wir Definitheit? ... dank Faktorisierung!

Bemerkung: Unsere Rechnung für „⇐“ zeigt noch etwas mehr:
(0) Für $S \in \mathbb{K}^{m\times n}$ beliebig ist $A = S^\dagger S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ spsd.
(1) Für $S \in \mathbb{K}^{m\times n}$ injektiv ist $A = S^\dagger S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ spd.

Alternative für (1) „⇒“: Sei A selbstadjungiert und positiv definit.
Dann ist die Form $\beta : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} : (x, y) \mapsto x^\dagger A\, y$ ein Skalarprodukt.

Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Orthonormalbasis des unitären Raums $(\mathbb{K}^n, \beta) = \langle A \rangle$.
Eine solche existiert etwa dank dem Gram–Schmidt–Verfahren S3C.

Wir haben $v_i^\dagger A\, v_j = \delta_{ij}$. Die Basiswechselmatrix $T = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ erfüllt also $T^\dagger A\, T = I$. Für $S = T^{-1}$ folgt $A = S^\dagger I\, S = S^\dagger S$. QED

☺ Gauß–Hermite S1R und Gram–Schmidt S3C sind zwei Varianten derselben Rechnung, zwei Inkarnationen derselben Technik, siehe S324.

Gauß–Hermite S1R gelingt immer, über jedem *DRing mit $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$, und erlaubt über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ insbesondere, In/Definitheit auszurechnen.

Gram–Schmidt S3C setzt $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und positive Definitheit voraus, das passt hier bestens und ist keine weitere Einschränkung.

Wie erkennen wir Definitheit? ... dank Cholesky!

Analogie: Eine Zahl $a \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist positiv, also $a \in \mathbb{R}_{>0}$, gdw $a = \bar{r}r$ für ein $r \in \mathbb{K}^\times$, und dies gelingt eindeutig mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$.
☺ Analog für Matrizen fand Cholesky eine elegante Faktorisierung:

Satz T2c: Cholesky–Zerlegung $A = R^\dagger R$ in $\mathbb{K}^{n\times n}$

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sind äquivalent:

1. SPD: Die Matrix A ist selbstadjungiert und positiv definit.
2. Cholesky: Es gilt $A = R^\dagger R$ für genau eine Matrix $R \in \mathbb{S}_n^{>0}(\mathbb{K})$.
3. Cholesky: Es gilt $A = LL^\dagger$ für genau eine Matrix $L \in \mathbb{S}_n^{>0}(\mathbb{K})$.

Die eindeutig bestimmte Dreiecksmatrix $R = L^\dagger$ bzw. $L = R^\dagger$ mit positiver Diagonale ist der rechte / linke **Cholesky–Faktor** von A.

Beweis: „(1) ⇐ (2)“ folgt aus Lemma T2c, da $R \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$.
„(1) ⇒ (2)“: Dank Lemma T2c haben wir $A = S^\dagger S$ mit $S \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$.
Die QR–Zerlegung S3E liefert $S = QR$ mit $Q \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{K}$ und $R \in \mathbb{S}_n^{>0}(\mathbb{K})$.
Wir erhalten $A = S^\dagger S = R^\dagger Q^\dagger QR = R^\dagger R$. Das beweist die *Existenz!*

Wie erkennen wir Definitheit? ... dank Cholesky!

Eindeutigkeit dank Berechnung: Der Fall $n = 1$ ist klar. Sei $n \geq 2$:

$$R = \begin{bmatrix} u & v^\dagger \\ 0 & S \end{bmatrix} \quad \text{mit } u \in \mathbb{R}_{>0} \text{ und } v^\dagger \in \mathbb{K}^{1\times(n-1)} \text{ und } S \in \mathbb{S}_{n-1}^{>0}\,\mathbb{K}$$

$$R^\dagger R = \begin{bmatrix} u & 0 \\ v & S^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v^\dagger \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^2 & uv^\dagger \\ vu & vv^\dagger + S^\dagger S \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} c & d^\dagger \\ d & B \end{bmatrix} = A$$

Die Matrix A bestimmt somit eindeutig $u = \sqrt{c}$ und $v = d/u$, und per Induktion ebenso S mit $vv^\dagger + S^\dagger S = B$. Genauer ergibt Gauß:

$$T := \begin{bmatrix} 1/u & -v^\dagger/u \\ 0 & I \end{bmatrix} \implies RT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad T^\dagger A T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B - dd^\dagger/c \end{bmatrix}$$

Dies zeigt die *Eindeutigkeit!* Die *Existenz* haben wir oben gezeigt. QED

Kurios: Existenz folgt erneut, wenn wir die Gleichung weiter auflösen.
Das entspricht wie zu erwarten der QR–Zerlegung nach Gram–Schmidt.
? Warum ist die Untermatrix $U := B - dd^\dagger/c$ weiterhin positiv definit?

Wie erkennen wir Definitheit? ... mit Hauptminoren!

? Können wir positive Definitheit mit Determinanten charakterisieren?
☺ Ja! Die obige Rechnung offenbart noch eine freudige Überraschung:

Satz T2D: Hauptminorenkriterium nach Hurwitz–Sylvester

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert, $A^\dagger = A$. Für $\ell = 1, \dots, n$ betrachten wir die Untermatrix $A_\ell := A|_{\{1,\dots,\ell\}^2} \in \mathbb{K}^{\ell\times\ell}$. Man nennt $\det(A_\ell)$ den **führenden Hauptminor ℓter Ordnung**. Äquivalent sind:

1. Die Matrix A ist positiv definit, kurz $A \succ 0$.
2. Alle Hauptminoren sind positiv, $\Delta_\ell := \det(A_\ell) > 0$ für $\ell = 1, \dots, n$.

Beispiel: $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist positiv definit gdw $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$.

$A = \left[\begin{smallmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist positiv definit gdw $a > 0$, $ac - b^2 > 0$, $\det A > 0$.

Beispiel: $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ist positiv definit gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.
Das ist äquivalent zu $\det(A_\ell) = \lambda_1 \cdots \lambda_\ell > 0$ für alle $\ell = 1, \dots, n$.

⚠ Können wir positive Semidefinitheit ebenso testen durch $\det A_\ell \geq 0$?
O nein! Gegenbeispiele sind $A = \operatorname{diag}(0, -1)$ oder $A = \operatorname{diag}(+1, 0, -1)$.

Wie erkennen wir Definitheit? ... mit Hauptminoren!

Beweis: „(1) ⇒ (2)“: Dank Cholesky T2c haben wir

$$A = R^\dagger R \quad \text{mit} \quad R \in \mathbb{S}_n^{>0}(\mathbb{K}).$$

Dank der Dreiecksform von R gilt $A_\ell = R_\ell^\dagger R_\ell$ für alle $\ell = 1, \dots, n$, also

$$\det A_\ell = \det(R_\ell^\dagger)\det(R_\ell) = (r_{11} \cdots r_{\ell\ell})^2 > 0.$$

„(1) ⇐ (2)“: Wir führen Induktion über n. Der Fall $n = 1$ is klar. Sei $n \geq 2$.
In obiger Berechnung von R müssen wir $S^\dagger S \overset{!}{=} B - dd^\dagger/c =: U$ lösen.

$$T := \begin{bmatrix} 1/u & -v^\dagger/u \\ 0 & I \end{bmatrix} \implies T^\dagger A T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} = 1 \oplus U$$

Dank der Dreiecksform von T gilt $A_\ell \mapsto T_\ell^\dagger A_\ell T_\ell = 1 \oplus U_{\ell-1}$, denn dies skaliert die erste Zeile & Spalte und addiert Vielfache zu allen weiteren.
Das zeigt $\det(U_\ell) = \det(A_{\ell+1})/\det(A_1) > 0$ für alle $\ell = 1, \dots, n-1$.
Per Induktion ist U positiv definit. Somit lässt sich $S^\dagger S = U$ lösen.
Wir erhalten $R \in \mathbb{S}_n^{>0}\,\mathbb{K}$ mit $A = R^\dagger R$. Also ist A positiv definit. QED

Beispiel: die berühmte Bandmatrix

$$B_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{n\times n}.$$

Aufgabe: Bestimmen Sie Determinante $\Delta_n = \det(B_n)$ und Definitheit.

Lösung: (1) Wir finden $\Delta_0 = 1$ und $\Delta_1 = 2$, dann $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$.
(2) Wir erhalten so die Werte $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ und behaupten $\Delta_n = n + 1$.

Beweis per Induktion: Anfangs für $n = 0, 1$ gilt die Behauptung.
Für $n \geq 2$ gilt induktiv $\Delta_n \overset{(1)}{=} 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \overset{\text{IV}}{=} [2n - (n-1)] \overset{\mathbb{Z}}{=} n + 1$.

☺ Dank Hauptminorenkriterium T2D ist B_n somit positiv definit!

Diese berühmte Bandmatrix taucht überall auf, meist als diskrete Form der zweiten Ableitung, manchmal mit umgekehrten Vorzeichen (O508).

Beispiel: die berühmte Bandmatrix

Übung: Berechnen Sie die Cholesky–Zerlegung $B_n = R_n^\dagger R_n$.

Lösung: Wir machen einen Bandansatz und erhalten folgendes Ergebnis:

$$R_n = \begin{bmatrix} d_1 & r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & r_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & r_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\sqrt{\frac{n-1}{n}} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \sqrt{\frac{n+1}{n}} \end{bmatrix}$$

Anleitung: Wir wollen $R_n^\dagger R_n = B_n$. Auf der Diagonale finden wir $d_1^2 = 2$, dann $d_k^2 + r_{k-1}^2 = 2$ für $k \geq 2$. Für die Nebendiagonale gilt $d_k r_k = -1$, also $d_k^2 = 2 - d_{k-1}^{-1}$. Die ersten Werte $d_k^2 = {}^2/_1, {}^3/_2, {}^4/_3, \dots$ führen uns zur Vermutung $d_k^2 = (k+1)/k$. Diese beweist man nun leicht per Induktion.

Alternative: Der obige Satz T2C zur Cholesky–Zerlegung ist konstruktiv. Folgen Sie der Konstruktion. Das Ergebnis ist eindeutig, also das obige.

Wie erkennen wir Definitheit? … mit Hauptminoren!

☺ Die Cholesky–Zerlegung T2C ist elegant, doch mitunter aufwändig. Das vorige Beispiel $B_n = R_n^\dagger R_n$ gibt einen ersten realistischen Eindruck. Sobald wir sie einmal berechnet haben, ist sie uns eine wertvolle Hilfe.

Manchmal benötigen wir nicht die Berechnung, es genügt ihre Existenz…

☺ Sie hilft uns auch bereits, ohne sie explizit berechnen zu müssen. Wir folgern aus Cholesky T2C hier das Hauptminorenkriterium T2D, und dieses lässt sich oft bequem nutzen, so wie im vorigen Beispiel!

Korollar T2D: Hauptminorenkriterium nach Hurwitz–Sylvester

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert, $A^\dagger = A$. Äquivalent sind:

1. Die Matrix A ist negativ definit, kurz $A \prec 0$, also $-A \succ 0$.
2. Die Hauptminoren erfüllen $(-1)^\ell \det(A_\ell) > 0$ für alle $\ell = 1, \dots, n$.

Beweis: Dies folgt aus $0 < \det(-A_\ell) = (-1)^\ell \det(A_\ell)$. QED

Wie erkennen wir Definitheit? … dank Cholesky!

Die Cholesky–Zerlegung ist eine der klassischen Matrix–Zerlegungen, sehr beliebt in der numerischen Mathematik und ihren Anwendungen.

Anwendung: Wie lösen Sie $Ax = b$ mit Cholesky?

Lösung: Dies gelingt durch das bewährte Vorwärts-Rückwärts-Einsetzen: Wir lösen $R^\dagger Rx = b$ zunächst durch $R^\dagger y = b$ und dann durch $Rx = y$.

☺ Cholesky ist eine weitere schöne Variante des Gauß–Algorithmus! Die Cholesky–Zerlegung optimiert die allgemeine LR–Zerlegung D7.2.

Übung: Beweisen Sie die folgenden naheliegenden Varianten.

♦ **Satz T2C:** Cholesky–Zerlegung $A = R^\dagger DR$ in $\mathbb{K}^{n\times n}$

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sind äquivalent:

1. SPD: Die Matrix A ist selbstadjungiert und positiv definit.
4. Cholesky: Es gilt $A = R^\dagger DR$ mit $D \in \mathbb{D}_n^{>0}\,\mathbb{K}$ und $R \in \mathbb{R}_n^1(\mathbb{K})$.
5. Cholesky: Es gilt $A = LDL^\dagger$ mit $D \in \mathbb{D}_n^{>0}\,\mathbb{K}$ und $L \in \mathbb{L}_n^1(\mathbb{K})$.

Wie erkennen wir Definitheit? ... an den Eigenwerten!

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert, $A^\dagger = A$. Wie erkennen wir Definitheit? Eine zweite Möglichkeit bietet die **unitäre Diagonalisierung** T1I:

$$A = A^\dagger \in \mathbb{K}^{n\times n} \quad \Longrightarrow \quad \exists Q \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{K} : Q^\dagger A\,Q = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Auch Λ ist selbstadjungiert, also $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Vorteil: Dank $Q^\dagger = Q^{-1}$ gilt nun auch $Q^{-1} A\,Q = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Das bewahrt die Eigenwerte!

Satz T2E: Eigenwertkriterium für positive Semi/Definitheit

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert, $A^\dagger = A$.
Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die (stets reellen!) Eigenwerte.

(1) Es gilt $A \succ 0$ gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.
Es gilt $A \succeq 0$ gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$.

(2) Es gilt $A \prec 0$ gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n < 0$.
Es gilt $A \preceq 0$ gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 0$.

(3) Es gilt $A \succsim 0$ gdw $\lambda_i < 0 < \lambda_j$ für ein Paar i, j.

Wie erkennen wir Definitheit? ... an den Eigenwerten!

Können wir jeder Matrix ihre Eigenwerte ansehen? Zumindest grob?
Hier können wir wunderbar die Gerschgorin–Kreise nutzen! (§P6)
Grob gesagt: Die Eigenwerte liegen nahe bei den Diagonalwerten.

Korollar T2F: In/Definitheit bei strikter Diagonaldominanz → S1T

Sei $A = A^\dagger \in \mathbb{C}^{n\times n}$ selbstadjungiert und strikt **diagonaldominant**:

$$|a_{ii}| > r_i := \textstyle\sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

in jeder Zeile $i = 1, \dots, n$. In Worten: Jeder Diagonaleintrag a_{ii} ist größer als die Summe aller anderen Einträge seiner Zeile (jeweils im Betrag). Dank $A^\dagger = A$ ist dies äquivalent zu Diagonaldominanz in jeder Spalte.

Dann können wir In/Definitheit bequem an der Diagonale ablesen:

(1) Es gilt $A \succ 0$ gdw $a_{11}, \dots, a_{nn} > 0$. („⇒“ gilt immer.)
(2) Es gilt $A \prec 0$ gdw $a_{11}, \dots, a_{nn} < 0$. („⇒“ gilt immer.)
(3) Es gilt $A \succsim 0$ gdw $a_{ii} < 0 < a_{jj}$ für ein Paar i, j. („⇐“ gilt immer.)

Wie erkennen wir Definitheit? ... an den Eigenwerten!

Beweis: „⇒“: Aus $A \succ 0$ folgt $a_{ii} = e_i^\dagger A e_i > 0$, aus $A \prec 0$ ebenso $a_{ii} < 0$.
„⇐“: Dank Gerschgorin P6A liegt jeder Eigenwert in einem der Intervalle $[a_{ii} - r_i, a_{ii} + r_i] \subset \mathbb{R}^\times$. Das beweist (1) und (2). Daraus folgt (3). QED

Beispiele: Wo das Kriterium greift, ist es wunderbar effizient:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & -6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Für die Vorzeichen genügt uns hier die grobe Lage der Eigenwerte.
Übung: Beweisen Sie folgende Variante für schwache Diagonaldominanz.

Sei $A = A^\dagger \in \mathbb{C}^{n\times n}$ selbstadjungiert und **schwach diagonaldominant**:

$$|a_{ii}| \geq r_i := \textstyle\sum_{j\neq i} |a_{ij}| \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

(1) Es gilt $A \succeq 0$ gdw $a_{11}, \dots, a_{nn} \geq 0$. („⇒“ gilt immer.)
(2) Es gilt $A \preceq 0$ gdw $a_{11}, \dots, a_{nn} \leq 0$. („⇒“ gilt immer.)

Wie erkennen wir Definitheit? ... an den Eigenwerten!

Wie erkennen wir, ob selbstadjungierte Matrizen unitär ähnlich sind?

Aufgabe: Die Familie der (stets reellen!) Eigenwerte $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ in $\mathbb{R}$ ist eine vollständige Invariante der $\mathrm{GU}_*\,\mathbb{K}$–Ähnlichkeit:

Satz T2G: Klassifikation zur $\mathrm{GU}_*\,\mathbb{K}$–Ähnlichkeit über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert. Genau dann sind A und B unitär ähnlich, also $B = S^\dagger A\,S$ mit $S \in \mathrm{GU}_n(\mathbb{K})$, wenn $\chi_A = \chi_B$.

Beweis: „⇒“: Sei $B = S^\dagger A\,S$ mit $S \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{K}$, das bedeutet $S^\dagger = S^{-1}$. Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom (P2F).

„⇐“: Sei $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ die Diagonalmatrix mit $\chi_\Lambda = \chi_A = \chi_B$. Dank Spektralsatz T1I existieren $P, Q \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{K}$ mit $P^\dagger A\,P = \Lambda$ und $Q^\dagger B\,Q = \Lambda$. Transitivät T2B ergibt $S^\dagger A\,S = B$ mit $S = PQ^\dagger$. QED

Mit unseren wirksamen Werkzeugen gelingt dies nun leicht.
Ihre Herstellung war anstrengend, doch es hat sich gelohnt.
Diese und viele weitere Anwendungen sind nun zugänglich.

Zusammenfassung zur Diagonalisierung

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix über dem *Ring $(\mathbb{K}, \sigma)$.
Wir denken insbesondere an die Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$.
Hierzu haben wir zwei wichtige Äquivalenzrelationen kennengelernt:

Ähnlichkeit $A \sim S^{-1} A\, S$ vs **Kongruenz** $A \simeq S^{\dagger} A\, S$

mit $S \in \mathrm{GL}_n\, \mathbb{K}$. Wir haben also zwei Betrachtungsweisen, siehe S127:
(1) Matrizen als lineare Abbildungen; Basiswechsel bedeutet Ähnlichkeit.
(2) Matrizen zu Sesquilinearformen; Basiswechsel bedeutet Kongruenz.

⚠ Das sind zwei verschiedene Anwendungen und Werkzeugkästen:
Ähnlichkeit für Endomorphismen vs Kongruenz für Sesquilinearformen.

☺ Speziell für unitäre Basiswechsel $S \in \mathrm{GU}_n\, \mathbb{K}$ gilt jedoch $S^{\dagger} = S^{-1}$.

Daher ist **unitäre Kongruenz** dasselbe wie **unitäre Ähnlichkeit**.
In diesem glücklichen Fall können wir beide Sichtweisen gleichzeitig nutzen und somit gemeinsam aus beiden Werkzeugkästen schöpfen, siehe zum Beispiel Eigenwertkriterium T2E und Klassifikation T2G.

Zusammenfassung zur Diagonalisierung

Diagonaliserung von Endomorphismen: Falls das charakteristische Polynom von A über $\mathbb{K}$ zerfällt und zudem die geometrische Vielfachheit die algebraische erreicht, dann finden wir eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_n\, \mathbb{K}$, sodass $T^{-1} A\, T = \Lambda$ diagonal ist. (Sonst Jordan…)

In diesem Falle sind die Matrizen A und Λ ähnlich. In Λ stehen auf der Diagonalen die Eigenwerte von A. Die Diagonalmatrix Λ ist demnach durch A eindeutig bestimmt bis auf Reihenfolge der Eigenwerte.
Die Matrizen A und Λ haben dasselbe charakteristische Polynom, insbesondere dieselben Eigenwerte sowie Spur und Determinante.

Orthgonalbasen zu hermiteschen Formen: Nun sei $A = A^{\dagger} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ selbstadjungiert das heißt symmetrisch über $\mathbb{R}$ bzw. hermitesch über $\mathbb{C}$. Dann finden wir eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n\, \mathbb{K}$, sodass $S^{\dagger} A\, S = B$ in Diagonalform ist. In diesem Falle sind A und B kongruent. Die Matrix B ist nicht eindeutig, aber immerhin haben A und B denselben Rang. (Später: auch dieselbe Signatur dank Trägheitssatz von Sylvester.)

Zusammenfassung zur Diagonalisierung

☺ Das bemerkenswerte Ergebnis des Spektralsatzes T1I/T1O:
Wir können in gewissen Situationen beide Sichtweisen vereinen!

I: Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert, so finden wir eine unitäre Matrix $Q \in \mathrm{GU}_n\, \mathbb{K}$ so, dass $Q^{\dagger} A\, Q = Q^{-1} A\, Q = \Lambda \in \boxtimes_n\, \mathbb{R}$ in Diagonalform ist.

II: Allgemein, ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ normal, so finden wir eine unitäre Matrix $Q \in \mathrm{GU}_n\, \mathbb{K}$ so, dass $Q^{\dagger} A\, Q = Q^{-1} A\, Q = \Lambda \in \boxtimes_n\, \mathbb{K}$ in Diagonalform ist.

Dann sind A und Λ unitär äquivalent, insbesondere sind sie sowohl kongruent als auch ähnlich, daher haben unsere Matrizen A und Λ dieselben Eigenwerte, dieselbe Spur und dieselbe Determinante.
Beide Sichtweisen werden so zusammengeführt.

⚠ Determinante und Eigenwerte können sich unter GL_n–Kongruenz ändern, sie sind also nicht invariant, nicht einmal für 1×1–Matrizen.
Erst unitär, also GU_n–Kongruenz garantiert ihre Invarianz.

Zusammenfassung zur Diagonalisierung

Diese Zusammenfassung ist bisher „konkret“ für Matrizen formuliert.
Wir können alles ebenso „abstrakt“ beschreiben in der flexibleren und allgemeineren Sprache der Sesquilinearformen und Endomorphismen.
(Je nach Vorliebe kann man die Adjektive auch umgekehrt zuordnen.)

Letztere hat den Vorteil, dass wir damit auch unendlichdimensionale Vektorräume untersuchen können, erste Ausblicke illustrieren dies.
Dies ist allerdings nur ansatzweise Aufgabe der Linearen Algebra; hier übernimmt später dann insbesondere die Funktionalanalysis.

Am besten nutzen wir beide Sichtweisen! Die didaktischen Vorteile sind sofort spürbar: Matrizen können wir universell nutzen, das ist gerade ihr phantastischer Erfolg. Homomorphismen und Sesquilinearformen hingegen erklären unmissverständlich, was wir eigentlich wollen.

⚠ Die Matrix allein kann nicht wissen, welche Transformation gerade die jeweils richtige ist, der Anwendungskontext hingegen zeigt es uns:
Ähnlichkeit für Endomorphismen vs Kongruenz für hermitesche Formen.

Erinnerung: Gauß–Normalform (GNF)

Mit Gauß wandeln wir jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ zur Modellmatrix $D^r_{m\times n}$:

$$\begin{array}{ccc} A \in \mathbb{K}^{m\times n} & & B = S^{-1}A \\ \begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 & -6 & -1 \\ -2 & -4 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 7 & 1 \end{bmatrix} & \xleftrightarrow[\text{operationen}]{\text{Zeilen-}} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Spalten- operationen} \updownarrow & & \text{Spalten- operationen} \updownarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \xleftrightarrow[\text{operationen}]{\text{Zeilen-}} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & & D = S^{-1}AT \end{array}$$

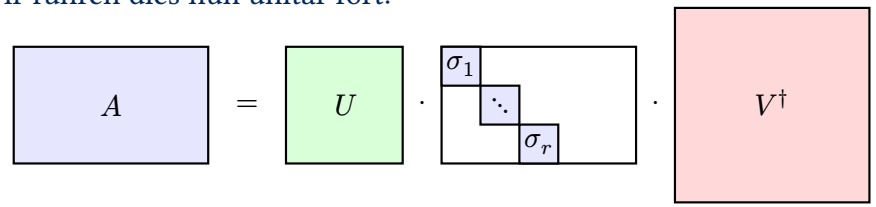
An $SD = AT$ mit $S \in \mathrm{GL}_m\,\mathbb{K}$ und $T \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$ lesen wir Bild und Kern ab:

$$\operatorname{Im} D = \langle e_1, \dots, e_r \rangle^!_{\mathbb{K}}, \qquad \operatorname{Ker} D = \langle e_{r+1}, \dots, e_n \rangle^!_{\mathbb{K}},$$
$$\operatorname{Im} A = \langle Se_1, \dots, Se_r \rangle^!_{\mathbb{K}}, \qquad \operatorname{Ker} A = \langle Te_{r+1}, \dots, Te_n \rangle^!_{\mathbb{K}}.$$

Erinnerung: Gauß–Normalform (GNF)

☺ So zerlegen wir jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ als Produkt $A = SDT^{-1}$. Die Basiswechsel $S \in \mathrm{GL}_m\,\mathbb{K}$ und $T \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$ sind immer invertierbar, und $D = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gestalten wir so einfach wie möglich: Dies ist nur eine Projektion entlang der Koordinatenachsen!

☺ Insbesondere lesen wir so bequem den Rang $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} D = r$ ab. Dieser erweist sich als vollständige Invariante dieser Äquivalenz (M3E). Wir führen dies nun unitär fort:



? Können wir dies entsprechend mit unitären Basiswechseln erreichen? Demnach wirkt $v \mapsto u = Av$ als eine Isometrie $V^\dagger$ gefolgt von einer Streckung / Projektion Σ entlang der Achsen und einer Isometrie U. Diese Idee führt uns direkt zum Begriff der Singulärwertzerlegung.

Singulärwertzerlegung (SVD)

Definition T3A: Singulärwertzerlegung (*singular value decomposition*)

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Eine **Singulärwertzerlegung**

$$\boxed{(u_i, \sigma_i, v_i)_{i=1}^r \quad \text{erfüllt} \quad A = \textstyle\sum_{i=1}^r u_i \sigma_i v_i^\dagger}$$

mit orthonormalen Vektoren $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{K}^m$ und $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{K}^n$ und reellen Zahlen $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. Dabei ist r der Rang unserer Matrix A. Wir nennen σ_i **Singulärwert** und u_i, v_i **(Links-,Rechts-)Singulärvektor**.

Orthonormal ergänzt gilt $A = U\Sigma V^\dagger$ mit $U = (u_1, \dots, u_m) \in \mathrm{GU}_m$ und $V = (v_1, \dots, v_n) \in \mathrm{GU}_n$ und $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots) \in \mathbb{K}^{m\times n}$. **Beispiel:**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{u_1} \cdot \underbrace{5}_{\sigma_1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{v_1^\dagger} = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{V^\dagger}$$

Analog zu Eigenvektoren $Aw_i = w_i\lambda_i$ gilt hier für die Singulärvektoren rechts $Av_i = u_i\sigma_i$ und links $u_i^\dagger A = \sigma_i v_i^\dagger$ für $i = 1, \dots, r$, also $A^\dagger u_i = v_i\sigma_i$.

Singulärwertzerlegung (SVD)

(1) Die Vektoren $u_1, \dots, u_r$ sind eine ONB des Spaltenraums der Matrix A,
(2) und $u_{r+1}, \dots, u_m$ sind eine ONB von $\operatorname{Ker} A^\dagger = \{u \in \mathbb{K}^m \mid A^\dagger u = 0\}$.
(3) Die Vektoren $v_1^\dagger, \dots, v_r^\dagger$ sind eine ONB des Zeilenraums der Matrix A,
(4) und $v_{r+1}, \dots, v_n$ sind eine ONB von $\operatorname{Ker} A = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = 0\}$.

Aufgabe: Warum gilt nach Ergänzung $\sum_{i=1}^r u_i\sigma_i v_i^\dagger = U\Sigma V^\dagger$?

Lösung: Beide Seiten definieren dieselbe lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Wir prüfen dies auf der Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_n$: Rechts finden wir

$$v_i \overset{V^\dagger}{\longmapsto} e_i \overset{\Sigma}{\longmapsto} e_i\sigma_i \overset{U}{\longmapsto} u_i\sigma_i.$$

Links finden wir ebenso $v_i \mapsto u_i\sigma_i$ für $i \in \{1, \dots, r\}$, sonst $v_i \mapsto 0$. $\boxed{\text{QED}}$

☺ Aus dieser Rechnung folgen sofort die obigen Aussagen (1) und (4). Symmetrisch hierzu gelten dieselben Aussagen (3) und (2) für $A^\dagger$.

☺ Geometrisch gesehen ist die Abbildung $v \mapsto u = Av$ eine Isometrie $V^\dagger$ gefolgt von einer Streckung Σ entlang der Achsen und einer Isometrie U.

Singulärwertzerlegung (SVD)

Satz T3B: Singulärwertzerlegung (*singular value decomposition*, SVD)

(1) Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ hat eine Singulärwertzerlegung $(u_i, \sigma_i, v_i)_{i=1}^r$.
(2) Die Singulärwerte $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ sind durch A eindeutig bestimmt.

Beweis: (2) *Eindeutigkeit:* Aus $A = \sum_{i=1}^r u_i\sigma_i v_i^\dagger$ folgt $A^\dagger A = \sum_{i=1}^r v_i\sigma_i^2 v_i^\dagger$. Also sind $\sigma_1^2 \geq \ldots \geq \sigma_r^2 > 0$ die positiven Eigenwerte von $A^\dagger A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

(1) *Konstruktion:* $A^\dagger A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist selbstadjungiert und positiv semidefinit (T2C). Dank erstem Spektralsatz T1I existiert zu $A^\dagger A$ eine orthonormale Eigenbasis $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^n$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Wir setzen $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i}$ und sortieren $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0 = \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_n$. Für $i \in \{1, \ldots, r\}$ setzen wir $u_i := Av_i/\sigma_i \in \mathbb{K}^m$ und erhalten ein ONS:

$$\langle u_i \,|\, u_j\rangle \overset{\text{Def}}{=} \langle Av_i/\sigma_i \,|\, Av_j/\sigma_j\rangle \overset{\text{Ad}}{=} \langle v_i \,|\, A^\dagger A v_j\rangle/\sigma_i\sigma_j \overset{\text{Eig}}{=} \langle v_i \,|\, v_j\rangle\sigma_j/\sigma_i \overset{\text{ONB}}{=} \delta_{ij}$$

Somit ist $A = \sum_{i=1}^r u_i\sigma_i v_i^\dagger$ die ersehnte Singulärwertzerlegung. QED

Singulärwertzerlegung (SVD)

Aufgabe: Warum gilt im letzten Schritt die Gleichheit $A = \sum_{i=1}^r u_i\sigma_i v_i^\dagger$?

Lösung: Beide Seiten definieren dieselbe lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Wir prüfen dies auf der Basis $v_1, \ldots, v_n$ und finden $v_i \mapsto Av_i = u_i\sigma_i$ für $i \in \{1, \ldots, r\}$, sonst $Av_i = 0$. Die rechte Seite tut dasselbe. QED

Bemerkung: Die Singulärwerte $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ sind eindeutig dank (2), die Vektoren $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{K}^m$ und $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^n$ in (1) hingegen nicht!

(a) Das ONS $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{K}^m$ bestimmt $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{K}^n$, und umgekehrt, durch $Av_i = u_i\sigma_i$ bzw. $A^\dagger u_i = v_i\sigma_i$. Orthonormale Basisergänzungen $u_{r+1}, \ldots, u_m$ und $v_{r+1}, \ldots, v_n$ jedoch sind willkürlich und unabhängig.

(b) Die Wahl des ONS $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{K}^m$ und $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{K}^n$ ist nie ganz eindeutig: Für $\mu_i \in \mathbb{K}$ mit $|\mu_i| = 1$ setzen wir $\tilde{u}_i = u_i\mu_i$ und $\tilde{v}_i = v_i\mu_i$. Mit $(u_i, \sigma_i, v_i)_{i=1}^r$ ist auch $(\tilde{u}_i, \sigma_i, \tilde{v}_i)_{i=1}^r$ eine Singulärwertzerlegung.

(c) Generisch, für $\sigma_1 > \ldots > \sigma_r > 0$, ist dies die einzige Mehrdeutigkeit. Allgemein: Singulärwerte der Vielfachheit ℓ gehören zu einem Eigenraum der Dimension ℓ, und je zwei ONB unterscheiden sich durch $\mu \in \mathrm{GU}_\ell\,\mathbb{K}$.

Singulärwertzerlegung (SVD)

Einfachster Fall: Welche Matrizen sind unitär diagonalisierbar?
Über $\mathbb{R}$: Jede symmetrische Matrix ist orthogonal diagonalisierbar! (T1I)
Über $\mathbb{C}$: Jede normale Matrix ist unitär diagonalisierbar! (T1O)

Korollar T3C: SVD aus unitärer Diagonalisierung

Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ unitär diagonalisierbar zu $Q^\dagger A Q = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $Q \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{K}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, so gilt $\sigma_i = |\lambda_i|$ absteigend sortiert.

Beweis: Wir haben

$$A \overset{(1)}{=} Q\Lambda Q^\dagger \overset{(2)}{=} \underbrace{Q\Delta^{-1}}_{U} \cdot \underbrace{\Delta\Lambda}_{\Sigma} \cdot \underbrace{Q^\dagger}_{V^\dagger}.$$

Wir positivieren $\Lambda \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\Delta \in \mathbb{K}^{n\times n}$ zu $\Delta\Lambda = \operatorname{diag}(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|)$ mit $\Delta_{ii} = |\lambda_i|\lambda_i^{-1}$ falls $\lambda_i \neq 0$, sonst $\Delta_{ii} = 1$ und $\Delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$.
Die Spalten von Q sind orthonormal, weiterhin nach Skalierung zu $Q\Delta^{-1}$.
Somit ist $(U, \Sigma, V^\dagger) = (Q\Delta^{-1}, \Delta\Lambda, Q^\dagger)$ eine Singulärwertzerlegung von A.
Die Singulärwerte $\sigma_i = |\lambda_i|$ sind eindeutig nach Sortierung. QED

Singulärwertzerlegung (SVD)

Gauß–Normalform (GNF, Satz M3E): Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ über einem Divisionsring $\mathbb{K}$ sind genau dann $\mathrm{GL}_*\,\mathbb{K}$–äquivalent, wenn sie denselben Rang r haben. Diese Klassifikation verfeinern wir nun:

Korollar T3D: Klassifikation zur $\mathrm{GU}_*\,\mathbb{K}$–Äquivalenz über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ sind genau dann $\mathrm{GU}_*\,\mathbb{K}$–äquivalent, wenn sie dieselben Singulärwerte haben (und somit denselben Rang).

Beweis: „$\Leftarrow$“: Dank SVD T3B haben wir $U^\dagger AV = \Sigma$ und $\tilde{U}^\dagger B\tilde{V} = \tilde{\Sigma}$. Aus Geichheit $\Sigma = \tilde{\Sigma}$ folgt die Äquivalenz gemäß $A = (U\tilde{U}^\dagger)B(\tilde{V}V^\dagger)$.
„$\Rightarrow$“: Gilt $B = UAV^\dagger$, so haben $A^\dagger A$ und $B^\dagger B = VA^\dagger AV^\dagger$ dieselben Eigenwerte, also haben A und B dieselben Singulärwerte. QED

☺ Unser Existenzbeweis zu Satz T3B ist konstruktiv und liefert einen expliziten Algorithmus zur Berechnung einer Singulärwertzerlegung! Damit können Sie direkt arbeiten und jede Matrix singulärzerlegen.

☺ In der Numerik erarbeiten Sie hierzu weitere Verfahren, die eine Singulärwertzerlegung auch für große Matrizen effizient annähern.

Singulärwertzerlegung und Operatornorm

Korollar T3E: Operatornorm

(1) Der größte Singulärwert σ_1 von $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ist die **Operatornorm**:

$$\boxed{\sigma_1 \;=\; \|A\| := \sup\{\,|Ax|_{\mathbb{K}^m}\;;\; x \in \mathbb{K}^n,\; |x|_{\mathbb{K}^n} \le 1\,\}}$$

Beweis: (1) Sei $A = U\Sigma V^\dagger = \sum_{i=1}^r u_i\sigma_i v_i^\dagger$ eine Singulärwertzerlegung. Für $x \in \mathbb{K}^n$ gilt $x = \sum_{j=1}^n v_j x_j$ mit $x_j \in \mathbb{K}$, somit $v_i^\dagger x = x_i$, also

$$|Ax|^2_{\mathbb{K}^m} \overset{\text{SVD}}{=} \left|\textstyle\sum_{i=1}^r u_i\sigma_i x_i\right|^2_{\mathbb{K}^m} \overset{\text{ONS}}{=} \textstyle\sum_{i=1}^r \sigma_i^2|x_i|^2 \;\le\; \sigma_1^2|x|^2_{\mathbb{K}^n}.$$

Aus $|x| \le 1$ folgt $|Ax| \le \sigma_1$. Zudem gilt $|Av_1| = \sigma_1$. Also $\|A\| = \sigma_1$. QED

Die Operatornorm $\|A\|$ ist die größtmögliche Streckung durch $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Sie heißt auch **Spektralnorm**, denn $\sigma_1^2 = \max\sigma(A^\dagger A)$, wie hier zu sehen. Die kleinstmögliche Streckung σ_n ist gegeben durch $\sigma_n^2 = \min\sigma(A^\dagger A)$. Diese Daten spielen in der Analysis und der Numerik eine wichtige Rolle. Die **Kondition** $\operatorname{cond}(A) := \|A\|\cdot\|A^{-1}\| = \sigma_1/\sigma_n \ge 1$ misst, wie das Lösen von $Ax = y$ kleine Fehler verstärkt. Es gilt $\operatorname{cond}(A) = 1$ gdw $A^\dagger A = I$.

Singulärwertzerlegung und Operatornorm

Wir setzen hier stillschweigend $n \ge 1$ voraus. Unsere Rechnung zeigt: Das Supremum wird tatsächlich angenommen, ist also ein Maximum!

Für $T : V \to U$ linear zwischen normierten Räumen ist die Operatornorm:

$$\|T\|_{U,V} \;:=\; \sup\{\,|T(x)|_U\;;\; x \in V,\; |x|_V \le 1\,\}$$

In Dimension $n = \dim V > 0$ können wir auf Norm $|x| = 1$ skalieren. In Dimension $0 < n < \infty$ wird das Supremum auf der Sphäre angenommen, die Operatornorm ist also das Maximum $\|T\| = \max\{\,|T(x)|_U\;;\; |x|_V = 1\,\}$.

Dahinter steckt ein fundamentales Ergebnis der Analysis / Topologie: Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^N$ sind Ball $\mathbb{B} = \{\,x \in \mathbb{K}^n\;;\; |x| \le 1\,\}$ und Sphäre $\mathbb{S} = \{\,x \in \mathbb{K}^n\;;\; |x| = 1\,\}$ *kompakt*. Jede stetige Funktion $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ darauf nimmt ihre Extrema an, zuvor die Energie $E(x) = x^\dagger A\,x$ (T1H), hier nun

$$f(x) = |Ax|^2 = \langle\, Ax \mid Ax\,\rangle = \langle\, x \mid A^\dagger A\,x\,\rangle = x^\dagger A^\dagger A\,x.$$

⚠ In unendlicher Dimension hingegen kann $\|f\| = \infty$ auftreten.

Übung: Was ist $\|\partial : \mathscr{C}^\infty \to \mathscr{C}^\infty\|$? Testen Sie dies mit $f_n(x) = \sin(nx)$.

Singulärwertzerlegung und Frobenius–Norm

Korollar T3E: Frobenius–Norm

(2) Das Frobenius–Normquadrat von $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ist die Quadratsumme aller Matrixeinträge und zugleich aller Singulärwerte:

$$\boxed{\textstyle\sum_{i=1}^r \sigma_i^2 \;=\; |A|_F^2 := \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

Erinnerung: Das Frobenius–Normquadrat $|A|_F^2$ ist die Quadratsumme aller Elementnormen, also ebenso die Quadratsumme der euklidischen Spaltennormen und die Quadratsumme der euklidischen Zeilennormen. Diese Norm ist naheliegend zu definieren und besonders leicht zu nutzen, daher wird sie in der numerischen linearen Algebra gerne verwendet.

Beweis: Seien $(a_1, \dots, a_n)$ die Spalten von $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Für $U \in \mathrm{GU}_m\,\mathbb{K}$ gilt dann $U^\dagger A = (U^\dagger a_1, \dots, U^\dagger a_n)$. Die euklidischen Spaltennormen ändern sich dabei nicht, $|U^\dagger a_j|_F^2 = |a_j|_F^2$, also auch nicht die Frobenius–Norm.

Gleiches gilt zeilenweise für die Operation $A \mapsto AV$ mit $V \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{K}$. Somit erhalten wir $|A|_F^2 = |U^\dagger AV|_F^2 = |\Sigma|_F^2 = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2$. QED

Singulärwertzerlegung und Frobenius–Norm

Die Operatornorm $\|A\|$ ist wichtig, wenn wir A als Operator betrachten, also wie gewohnt als die lineare Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m : x \mapsto Ax$. Die Frobenius–Norm $|A|_F$ ist besonders bequem und direkt, als Summe aller Absolutquadrate, oder der euklidischen Normquadrate aller Zeilen, oder aller Spalten. Das ist leichter zu berechnen als die Operatornorm.

☺ Beide erlauben eine wunderschöne Formulierung mit Singulärwerten. Diese Zusammenhänge sind ebenso elegant wie erleuchtend, zudem erfreulich effizient in konkreten Rechnungen. Wir sehen etwa $\|A\| \le |A|_F$.
Übung: Folgern Sie dies direkt aus der Cauchy–Schwarz–Ungleichung.

☺ Die jeweilige Anwendung fordert passende Normen, oft die Operator- oder die Frobenius–Norm oder weitere maßgeschneiderte Normen. Zu jedem Exponenten $p \in [1, \infty[$ haben wir die **Schatten–p–Norm**

$$\|A\|_p := \operatorname{tr}\big[(A^\dagger A)^{p/2}\big]^{1/p} = \big[\textstyle\sum_{i=1}^r \sigma_i^p\big]^{1/p} = \|(\sigma_i)_{i=1}^r\|_p$$

Für $p = 2$ ist dies die Frobenius–Form, für $p \to \infty$ die Operatornorm. Für $p = 1$ gilt $\|A\|_1 = \operatorname{tr}\sqrt{A^\dagger A} = \sum_{i=1}^r \sigma_i$. Dazu hilft folgender Satz.

Eindeutige SPSD-Wurzel $\sqrt[r]{A}$

Satz T3F: Wurzel quadratischer Matrizen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert und positiv semidefinit (kurz spsd).
Zu $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ existiert genau eine spsd Matrix $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $B^r = A$.
Für diese schreiben wir dann $B =: \sqrt[r]{A} = A^{1/r}$.

Beweis: Dank erstem Spektralsatz T1I haben wir $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^k \operatorname{Eig}(A, \lambda_i)$ mit $0 \leq \lambda_1 < \ldots < \lambda_k$ in $\mathbb{R}$. Auf $\operatorname{Eig}(A, \lambda_i)$ wirkt A als Skalierung mit λ_i, also B mit $\mu_i = \lambda_i^{1/r}$. Das beweist Eindeutigkeit und Existenz. QED

Explizite Berechnung als Matrix: Dank erstem Spektralsatz T1I haben wir $A = Q\Lambda Q^\dagger$ mit $Q \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{K}$ und $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wir erhalten $M = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ mit $\mu_i = \lambda_i^{1/r}$. Für $B := QMQ^\dagger$ gilt die ersehnte Gleichung $B^r = QMQ^\dagger \cdots QMQ^\dagger = QM^rQ^\dagger = Q\Lambda Q^\dagger = A$. QED

☺ Slogan: Selbstadjungierte Matrizen verhalten sich wie reelle Zahlen, und selbstadjungierte positiv definite (spd) wie positive reelle Zahlen.

Eindeutige SPSD-Wurzel $\sqrt[r]{A}$

⚠ Im obigen Satz ist die SPSD–Bedingung wesentlich.
Wurzeln von Matrizen sind im Allgemeinen nicht eindeutig.

Beispiel: In $\mathrm{GO}_2\,\mathbb{R}$ hat $X^2 = I$ unendlich viele Lösungen! Neben Identität $+I$ und 180°–Drehung $-I$ erfüllt jede Spiegelung S die Gleichung $S^2 = 1$.
Übung: Warum sind das bereits alle Lösungen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$? Minimalpolynom!

Beispiel: In $\mathrm{SU}_2\,\mathbb{C} = \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$ hat $X^2 = -I$ unendlich viele Lösungen: neben $\pm\mathrm{i}, \pm\mathrm{j}, \pm\mathrm{k}$ jede Quaternion $q \in \langle \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}\rangle_{\mathbb{R}}$ mit Länge $|q| = 1$.
Übung: Für $A \in \mathrm{SU}_2\,\mathbb{C}$ gilt $A^2 = -I$ gdw $\operatorname{tr} A = 0$. Spektralsatz!

? Für welche Funktionen f und Matrizen A können wir $f(A)$ erklären?
Zunächst für alle $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und alle Polynome $f(x) = \sum_{k=0}^n f_k x^k \in \mathbb{K}[X]$, dann für alle konvergenten Potenzreihen wie $\exp(x) = \sum_{k=0}^\infty x^k/k!$.
☺ Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert, $Q^\dagger A\, Q = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathrm{D}_n\,\mathbb{R}$.
Für jede Funktion $f : \mathbb{R} \supset \sigma(A) \to \mathbb{R}$ haben wir $f(A) := Q\, f(\Lambda)\, Q^\dagger$ mit $f(\Lambda) = \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))$. In Satz T3F gilt $f = \sqrt[r]{} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Polarzerlegung $A = QP$

Jeden Skalar $a \in \mathbb{K}^\times$ können wir **polar zerlegen** gemäß $a = qp = pq$ in Länge $p = |a|$ und Richtung $q = a/|a| \in \mathrm{GU}_1\,\mathbb{K} = \{a \in \mathbb{K}\,;\, |a| = 1\}$.
Über $\mathbb{R}$ ist $p = |a|$ der Betrag und $q \in \mathrm{GU}_1\,\mathbb{R} = \mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ das Vorzeichen.
Über $\mathbb{C}$ ist $q \in \mathrm{GU}_1\,\mathbb{C} = \mathbb{S}^1$ die Richtung, über $\mathbb{H}$ ebenso $q \in \mathrm{GU}_1\,\mathbb{H} = \mathbb{S}^3$.

Satz T3G: Polarzerlegung quadratischer Matrizen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ erlaubt eine (rechte/linke) **Polarzerlegung**

$$\boxed{A = QP = P'Q}$$

mit $P, P' \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert positiv semidefinit und $Q \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{K}$.
Dabei sind P, P' immer eindeutig, falls A invertierbar ist auch Q.

Beweis: *Existenz:* Aus jeder Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^\dagger$ gewinnen wir zugehörige Polarzerlegungen $A = (UV^\dagger)\cdot(V\Sigma V^\dagger) = (U\Sigma U^\dagger)\cdot(UV^\dagger)$.
Eindeutigkeit: Aus $A = QP$ folgt $A^\dagger A = P^\dagger Q^\dagger QP = P^2$, also $P = \sqrt{A^\dagger A}$.
Ist A invertierbar, so auch P, demnach ist $Q = AP^{-1}$ eindeutig. QED

Polarzerlegung $A = QP$

☺ Slogan: Selbstadjungierte Matrizen verhalten sich wie reelle Zahlen, und selbstadjungierte positiv definite (spd) wie positive reelle Zahlen.

☺ Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ können wir gemäß $A = QP$ polar zerlegen in ihre „Richtung“ $Q \in \mathrm{GU}_n\,\mathbb{K}$ und ihren „Betrag“ P, Letzterer ist spsd.

Für $n = 1$ erhalten wir die eingangs motivierende skalare Situation:
Jeden Skalar $a \in \mathbb{K}^\times$ können wir polar zerlegen gemäß $a = qp = pq$ in Länge $p = |a|$ und Richtung $q = a/|a| \in \mathrm{GU}_1\,\mathbb{K} = \{a \in \mathbb{K}\,;\, |a| = 1\}$.

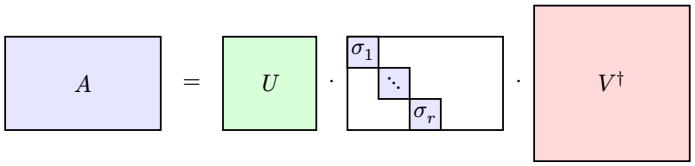
Speziell für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ haben wir $\mathbb{S}^1 = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi[\}$. So erhalten wir die vertraut-bewährte Polardarstellung komplexer Zahlen, siehe Seite E309:

$$a = p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = p\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

Dasselbe gilt nun für alle Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.
Ebenso wie im skalaren Vorbild ist der „Betrag“ P immer eindeutig, doch die „Richtung“ $Q = AP^{-1}$ nur falls A invertierbar ist.

Kapitel T

Bonusmaterial



We have normality. I repeat, we have normality.
Anything you still can't cope with is therefore your own problem.
Douglas Adams (1952–2001), *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*

Inhalt dieses Kapitels T

5 Übungsaufgaben und Anwendungsbeispiele
- Simultane unitäre Diagonalisierung
- Die Pseudoinverse nach Moore–Penrose
- Die Trilogie $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ im Rückblick

Spektralsatz: Rückblick und Ausblick

Der Spektralsatz ist einer der Höhepunkte der Linearen Algebra. Diese gute Investition wird Ihnen sicher oft nützen, egal wo Sie sich betätigen, ob in einer der vielen klassischen Anwendungen oder in aktuellen Entwicklungen wie Machine Learning oder Quantencomputing.

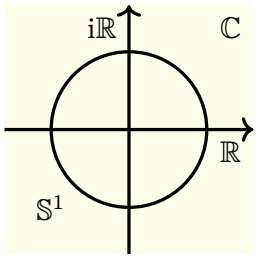
Mathematik ist wunderschön und nützlich, hier erfahren Sie dies *par excellence*. Mathematik ist anstrengend und lohnend, sogar sehr, auch diese beiden Aspekte spüren Sie deutlich: Der Spektralsatz mobilisiert nahezu alle zuvor erarbeiteten Werkzeuge. Darauf dürfen Sie stolz sein.

Der Spektralsatz verwirklicht unser seit Kapitel P gestecktes Ziel: Wir wollen jede lineare Abbildung möglichst einfach darstellen. Jede normale Matrix können wir in einer orthonormalen Eigenbasis darstellen, also durch einen unitären Basiswechsel diagonalisieren.

Seine Anwendungen sind überaus vielfältig und geradezu allgegenwärtig, wie bereits eingangs skizziert, innerhalb und außerhalb der Mathematik, von Quantenmechanik über Fourier–Analysis zur Datenanalyse uvm., und arbeitet als treue Hilfe in jeder numerisch basierten Software.

Ist das normal oder kann das weg?

Wiederholung: Was bedeutet für eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Eigenschaft N: normal, S: symmetrisch, A: antisymmetrisch, O: orthogonal?



Welche acht der sechzehn Kombinationen sind für mindestens eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ möglich? Geben Sie jeweils ein Beispiel oder ein Gegenargument.

In dieser Übung wiederholen Sie die zentralen Begriffe, geben konkrete Beispiele und verstehen so die Zusammenhänge. Ist jede Matrix normal? Wie sehen Gegen/Beispiele aus? Die drei wichtigen Beispielklassen sind anti/symmetrische und orthogonale Matrizen. Welche dieser schönen Eigenschaften können gleichzeitig gelten? Gibt es normale Matrizen, die keine dieser drei Eigenschaften haben? Die Skizze hilft! Ach ja, und natürlich der Spektralsatz: Er verschafft uns den vollständigen Überblick.

Komplex über $\mathbb{C}$ ist vieles leichter, reell über $\mathbb{R}$ vielleicht anschaulicher. In dieser Übung verbinden und verstehen Sie beides.

Simultane unitäre Diagonalisierung

In vielen Anwendungen, etwa in der Physik, arbeiten wir mit mehreren Endomorphismen gleichzeitig und wollen diese simultan diagonalisieren:

♦ Satz P7B: simultane Diagonalisierung von Endomorphismen

Seien $f_1, \dots, f_\ell : V \to V$ linear über dem Körper $\mathbb{K}$. Äquivalent sind:

1. Die Endomorphismen $(f_1, \dots, f_\ell)$ sind simultan diagonalisierbar.
2. Jeder Endomorphismus $f_1, \dots, f_\ell$ ist einzeln diagonalisierbar und je zwei kommutieren, also $f_j \circ f_k = f_k \circ f_j$ für alle $j, k \in \{1, \dots, \ell\}$.

Korollar T5A: simultane unitäre Diagonalisierung von Endomorphismen

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sei der Raum $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ zudem unitär. Äquivalent sind:

1. Die Familie $(f_1, \dots, f_\ell)$ ist simultan unitär diagonalisierbar.
2. Jeder Endomorphismus $f_1, \dots, f_\ell$ ist einzeln unitär diagonalisierbar und je zwei kommutieren, also $f_j \circ f_k = f_k \circ f_j$ für alle $j, k \in \{1, \dots, \ell\}$.

Unitäre Diagonalisierbarkeit beherrschen wir dank Spektralsatz T1I/T1O!

Simultane unitäre Diagonalisierung

Übung: Wiederholen Sie Satz P7B und folgern Sie Korollar T5A
Höchst erfreulich: Das Korollar erfordert nun kaum weitere Mühe!
Wie stellen Sie sicher, dass die simultane Eigenbasis orthonormal ist?
Bonus: Über $\mathbb{H}$ gilt „(2) ⇔ (1) mit kommutierenden Eigenwerten“.

☺ Kommutation $f_j \circ f_k = f_k \circ f_j$ können wir meist direkt prüfen.
Wie prüfen Sie, ob $f_1, \dots, f_\ell$ einzeln unitär diagonalisierbar sind?
Über $\mathbb{R}$: Jede symmetrische Matrix ist orthogonal diagonalisierbar! (T1I)
Über $\mathbb{C}$: Jede Matrix ist unitär diagonalisierbar gdw normal! (T1O)

Die Quantenphysik beschreibt Zustände durch Vektoren $v \in V \setminus \{0\}$.
Jeder selbstadjungierte Operator $A = A^\dagger$ entspricht einer Messung,
seine Eigenwerte sind die dabei als Ergebnis möglichen Messwerte.

Kommutierende Operatoren können gemeinsam gemessen werden.
Der Kommutator $[A, B] := AB - BA \overset{?}{=} 0$ misst die Abweichung.

Ort und Impuls entsprechen Operatoren Q und P, die nicht kommutieren.
So wird $[Q, P] \neq 0$ zum Ursprung von Heisenbergs Unschärferelation!

Spektralsatz, von I zu II

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Der erste Spektralsatz T1I besagt: Ist A hermitesch, $A = A^\dagger$, so existiert zu A eine orthonormale Eigenbasis mit reellen Eigenwerten.

Wir wollen daraus direkt den zweiten Spektralsatz T1O folgern: Ist A normal, $A^\dagger A = AA^\dagger$, so existiert zu A eine orthonormale Eigenbasis.

Aufgabe: Beweisen Sie dies mit Hilfe des folgenden Lemmas.

Lemma T5B: Normalität und hermitesche Zerlegung

Wir zerlegen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gemäß $A = B + \mathrm{i}C$ mit $B = (A + A^\dagger)/2$ und $C = (A - A^\dagger)/2\mathrm{i}$ hermitesch. Damit gilt $A^\dagger A = AA^\dagger$ gdw $BC = CB$.

Beweis: Es gilt $A^\dagger = B - \mathrm{i}C$ und $A^\dagger A - AA^\dagger = 2\mathrm{i}(BC - CB)$. QED

Dritter Beweis des zweiten Spektralsatzes T1O: Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal, so haben wir $A = B + \mathrm{i}C$ mit $B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch und $BC = CB$. Dank T1I & T5A existiert zu B, C eine simultane orthonormale Eigenbasis $(v_1, \dots, v_n)$ mit reellen Eigenwerten β_k für B und γ_k für C. Dies ist somit eine Eigenbasis zu $A = B + \mathrm{i}C$ mit Eigenwerten $\alpha_k = \beta_k + \mathrm{i}\gamma_k$. QED

Simultane unitäre Diagonalisierung

☺ Simultane Diagonalisierbarkeit, gerne unitär, ist überall hilfreich.
Hier eine geometrisch-räumlich anschauliche Illustration:

Übung: Wir betrachten zu $\alpha, \beta \in [0, 2\pi[$ die beiden Drehungen

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}.$$

Wann sind A und B über $\mathbb{C}$ simultan unitär diagonalisierbar?
Welche Möglichkeiten sind offensichtlich? Sind dies bereits alle?

Übung: Wir betrachten zu $\alpha, \beta \in [0, 2\pi[$ die beiden Spiegelungen

$$A = \begin{bmatrix} -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & \sin\beta & -\cos\beta \end{bmatrix}.$$

Wann sind A und B über $\mathbb{R}$ simultan orthogonal diagonalisierbar?
Welche Möglichkeiten sind offensichtlich? Sind dies bereits alle?

Die Pseudoinverse nach Moore–Penrose

T507
Übung

Manchmal müssen wir invertieren,
können aber nicht, und tun es trotzdem!

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. In dieser Übung schreiben wir lieber A^* statt $A^\dagger$ für $\overline{A}^\top \in \mathbb{K}^{n\times m}$; das ist insbesondere handschriftlich klarer.

(a) Leitbeispiel. Sei $A = \Sigma = \left[\begin{smallmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ mit $D = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r\times r}$ und $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. Zeigen Sie: Für die aus A gebildete Matrix $A^+ = \Sigma^+ := \left[\begin{smallmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ gelten die **Moore–Penrose–Axiome**:

(1) $AA^+A = A$,	(3) $(AA^+)^* = AA^+$,
(2) $A^+AA^+ = A^+$,	(4) $(A^+A)^* = A^+A$.

Zwei Matrizen (A, A^+) über $\mathbb{K}$ mit diesen Eigenschaften (1–4) heißen **pseudoinvers** zueinander (nach E.H. Moore 1920, Roger Penrose 1955).

Die Pseudoinverse nach Moore–Penrose

T508
Erläuterung

In der Linearen Algebra 1 lernen Sie als Grundlage, wann und wie Sie eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über einem Körper $\mathbb{K}$ invertieren können. Dazu kennen Sie inzwischen erfreulich viele Kriterien und Methoden, allen voran Gauß–Verfahren D2M und Determinante O2G. (Verblüffend nützlich ist Diagonaldominanz D7G/P6C über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.) Damit sind Sie auf alle typischen Anwendungen vorbereitet.

Nun wollen wir auch nicht-invertierbare Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ invertieren. Sie lesen richtig: sogar nicht-quadratische! Das kann streng genommen nicht gelingen, daher werden wir die Forderung $A^{-1}A = A\,A^{-1} = E$ an eine solche Inverse geeignet abschwächen. Im Leitbeispiel (a) ist alles wunderbar klar und einfach. Die daraus extrahierten Eigenschaften (1–4) formulieren nun unsere neuen bescheideneren Wünsche, als Axiome!

☺ Die richtige Abstraktion sorgt für vielseitige Anwendbarkeit! (Anwendungen diskutieren wir unten, nach den Grundlagen.)

? Lässt sich jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ pseudoinvertieren? Die positive Antwort geben Sie in dieser Übung!

Die Pseudoinverse nach Moore–Penrose

T509
Übung

(b) Eindeutigkeit. Zeigen Sie, dass zu jeder beliebigen Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ die Pseudoinverse $A^+ \in \mathbb{K}^{n\times m}$ eindeutig ist. *Anleitung:* Nehmen Sie an, dass es zwei solche Matrizen A_1^+ und A_2^+ gibt. Zeigen Sie $AA_1^+ = AA_2^+$ mit (1,3) und $A_1^+A = A_2^+A$ mit (1,4) und folgern Sie mit (2) daraus $A_1^+ = A_2^+$.

(c) Existenz. Zeigen Sie, dass zu jeder beliebigen Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ tatsächlich eine Pseudoinverse $A^+ \in \mathbb{K}^{n\times m}$ existiert. *Konstruktion:* Ist $A = U\Sigma V^*$ eine Singulärwertzerlegung, so genügt $A^+ = V\Sigma^+U^*$, wobei wir Σ^+ schon kennen gemäß unserem Leitbeispiel (a).

(d) Warum hängt das Ergebnis in (c) nicht von den möglichen Wahlen ab?
(e) Was ist demnach die Pseudoinverse A^+ für $A \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$? für $A = 0$? Für A injektiv gilt $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$, wie bei der Bestapproximation S3H.

Tipp: Bis auf eine sind alle Fragen leicht und direkt lösbar. Allein (b) ist knifflig und erfordert (langes?) geduldiges Ausprobieren. Versuchen Sie $AA_1^+ = \dots = A_2^{+*}A^*A_1^{+*}A^* = \dots = AA_2^+$, mit diesem Zwischenschritt sind die möglichen Umformungen wesentlich leichter zu erkunden!

Die Pseudoinverse nach Moore–Penrose

T510
Erläuterung

QR–Zerlegung, Spektralsatz, Singulärwertzerlegung, Pseudoinverse, ..., all dies sind wunderbare Universalwerkzeuge weit über die LinA hinaus. Sie sehen hier erste erfolgverheißende Anwendungen, und wir hoffen, Sie sind beeindruckt und begeistert. Falls nicht, so liegt das sicher nicht an Theorie oder Anwendungen, die sind phantastisch, sondern vermutlich an der händischen Berechnung, die ist zugegeben meist mühselig.

Doch Rettung naht, hier übernimmt die Numerik ab dem 3. Semester: Wir haben Existenz und Eindeutigkeit bewiesen, nun geht es darum, möglichst effiziente Methoden zur Berechnung zu finden und diese auf einem Computer zu implementieren bzw. sachgerecht zu nutzen.

Damit haben Sie schließlich das Beste aus beiden Welten: präzise Sätze und nachvollziehbare Beweise zusammen mit effizienten Algorithmen und sorgsam implementierten Softwarepaketen. Der Anfang ist gemacht, auf diesem soliden Fundament können Sie getrost aufbauen, mit diesen Werkzeugen rüsten Sie sich für anspruchsvolle Anwendungen. Nur Mut!

Anwendung zur Pseudoinversen

Wir kennen die Lösung,
nun suchen wir das Problem.

Übung: Zu $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$ wollen wir $Ax = b$ mit minimalem quadratischen Fehler lösen. Dies gelingt mit der Pseudoinversen A^+ wie oben definiert, selbst wenn die Matrix A Rang $< n$ hat. Zeigen Sie:

(f) Die Menge $M = \{\, x = A^+b + (E_n - A^+A)y \in \mathbb{K}^n \mid y \in \mathbb{K}^n \,\}$ ist die Menge der Elemente $x \in \mathbb{K}^n$, die die Fehlernorm $\|Ax - b\|$ minimieren, das heißt für alle Konkurrenten $z \in \mathbb{K}^n$ gilt $\|Ax - b\| \le \|Az - b\|$.

(g) Der Vektor $x_0 = A^+b$ ist das Element von M mit kleinster Norm.

Anleitung: Zeigen Sie (f,g) zunächst für die Singulärwertzerlegung $A = E_m \Sigma E_n^*$, dann allgemein durch unitären Koordinatenwechsel.

Anwendung der Pseudoinversen

In Kapitel S haben wir die Methode der kleinsten Quadrate diskutiert. Die Bestapproximation S3H zeigt, wie Sie zu jedem überbestimmten Gleichungssystem $Ax = b$ (die) eine Näherungslösung finden, die den quadratischen Fehler minimiert. Dabei hatten wir vorausgesetzt, dass die Spalten der Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ linear unabhängig sind, also $\operatorname{rang} A = n$. In diesem Fall gibt es genau eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ mit minimalem Fehler, und es gilt $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$, mit oder ohne Singulärwertzerlegung.

Sind die Spalten von A nun nicht mehr linear unabhängig, dann gibt es mehrere fehlerminimierende Lösungen. Für diese Problemstellung ist die Pseudoinverse prädestiniert. Die explizite Lösungsmenge M zeigt, dass diese nicht irgendeine amorphe Teilmenge des $\mathbb{K}^n$ ist, sondern ein affiner Unterraum. Wir minimieren daher auch noch die Länge von $x \in M \subseteq \mathbb{K}^n$.

Mit diesem universellen Verfahren können Sie nicht nur den Fehler in einem *unlösbaren* linearen Gleichungssystem minimieren, Sie können *alle* linearen Gleichunssysteme lösen (auch wenn das umständlich sein mag).

Zahlenbeispiel zur Pseudoinversen

Die Pseudoinverse löst
$Ax = b$ durch $x = A^+b$.

Konkurrenz für Gauß? Probieren Sie es aus!

Übung: Wir wollen $Ax = b$ lösen mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(1) Finden Sie eine Singulärwertzerlegung von A wie oben erklärt.
(2) Berechnen Sie damit die Pseudoinverse A^+ von A wie oben erklärt.
(3) Lösen Sie $Ax = b$ mit Hilfe der Pseudoinversen wie oben erklärt.

Zahlenbeispiel zur Pseudoinversen

Diese Übung illustriert mit einem konkreten Zahlenbeispiel, was Sie in der vorigen Aufgabe allgemein vorbereitet haben und nun schlüsselfertig als universelles Verfahren anwenden.

Das Gleichungssystem $Ax = b$ können Sie vermutlich inzwischen mit bloßem Hinschauen lösen. (Das ist eine weitere valide Methode.) Kommen Sie mit Hilfe der Pseudoinversen auf dasselbe Ergebnis?

Zur Einordnung siehe Ausgleichsrechnung und lineare Regression §S5.
Das bietet zudem schöne geometrisch-graphische Interpretationen.

Unsere Beispiele dienen natürlich nur als leichte Illustration und sind deshalb unrealistisch klein. Für realistische große und effiziente Anwendungen freuen Sie sich auf die Numerik!

Elegante Theorie oder effiziente Anwendung? Ja, gerne beides!

Zahlenbeispiel zum Spektralsatz

Aufgabe: Existiert in $\mathbb{H}^2$ über $\mathbb{H}$ eine orthonormale Eigenbasis zu

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{j} & \mathrm{k} \end{bmatrix}? \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{j} \\ \mathrm{i} & \mathrm{k} \end{bmatrix}?$$

Lösung: (2) Zunächst für B: Wir prüfen $B^\dagger B \overset{?}{=} BB^\dagger$. Hier finden wir

$$B^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{j} & -\mathrm{k} \end{bmatrix}, \quad B^\dagger B = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{j} \\ -\mathrm{j} & 1 \end{bmatrix}, \quad BB^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}.$$

Somit gilt $B^\dagger B \neq BB^\dagger$, also existiert *keine* orthonormale Eigenbasis.

(1) Die Matrix A erweist sich als viel interessanter:

$$A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{j} \\ -\mathrm{i} & -\mathrm{k} \end{bmatrix}, \quad A^\dagger A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad AA^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dank $A^\dagger A = AA^\dagger$ ist A normal, genauer sogar unitär, $A \in \mathrm{GU}_2\,\mathbb{H}$.
Dank Spektralsatz T10 existiert eine orthonormale Eigenbasis.

Zahlenbeispiel zum Spektralsatz

So weit, so gut, so elegant, so abstrakt. Ambitionierter fragen wir nun:
Können wir zu A eine orthonormale Eigenbasis explizit angeben?

Über den Körpern $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben wir einen umfangreichen Werkzeugkasten: die Determinante, das charakteristische Polynom, etc. Über $\mathbb{H}$ stocken wir schon beim ersten Schritt: Wie finden wir ein erstes Eigenpaar?

Wir folgen Lemma T1K und arbeiten über $\mathbb{C}$: Unser Raum $\mathbb{H}^2$ hat die $\mathbb{H}$–Basis $\mathcal{E} = (1;0),\ (0;1)$, also die $\mathbb{C}$–Basis $\mathcal{B} = (1;0),\ (\mathrm{j};0),\ (0;1),\ (0;\mathrm{j})$.

$$C = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(A) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & -1 & 0 & -\mathrm{i} \\ 1 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

Statt $A \in \mathbb{H}^{2\times 2}$ über $\mathbb{H}$ betrachten wir lieber $C \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ über $\mathbb{C}$.
Der Faktor $1/\sqrt{2}$ sorgt für ortho*normale* Spalten, das ist schön.

Zahlenbeispiel zum Spektralsatz

Über $\mathbb{C}$ haben wir alle bewährten Werkzeuge! Wir folgenden dem ChaPo–Verfahren und berechnen das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \chi_C(X) &= \det(XI - C) \\ &= X^4 - \sqrt{2}X^3 + X^2 - \sqrt{2}X + 1 \\ &= (X^2 - \tfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}X + 1)(X^2 - \tfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}X + 1) \\ &= (X - \lambda_1)(X - \overline{\lambda_1})(X - \lambda_2)(X - \overline{\lambda_2}) \end{aligned}$$

Als komplexe Eigenwerte finden wir damit:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/12} \\ \lambda_2 &= \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \mathrm{i}\,\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}7/12} \end{aligned}$$

Das ist nicht mehr ganz so simpel, aber es gelingt gerade noch.
Die Eigenwerte haben Betrag 1, so wie es für $C \in \mathrm{GU}_4\,\mathbb{C}$ sein muss.

Zahlenbeispiel zum Spektralsatz

Zu λ_1, λ_2 gehören komplexe Eigenvektoren $u_1, u_2 \in \mathbb{C}^4$ und zurückübersetzt quaternionale Eigenvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{H}^2$.
Normiert erhalten wir so unseren unitären Basiswechsel $Q = (q_1, q_2) \in \mathrm{GU}_2\,\mathbb{H}$ und die ersehnte Diagonalisierung:

$$Q^\dagger \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{j} & \mathrm{k} \end{bmatrix} \cdot Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Über dem Schiefkörper $\mathbb{H}$ haben wir leider nicht mehr all die starken Werkzeuge, die wir über Körpern gerne nutzen, speziell über $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$.

Glücklicherweise liegen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ noch nah genug, um auch über $\mathbb{H}$ effizient arbeiten zu können. Das sehen Sie hier in Aktion.

Im Vergleich zu $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ spüren wir über $\mathbb{H}$ einen großen Nachteil: Uns fehlen die Determinante und das charakteristische Polynom!

Aufgabe: Die Rettung ist verblüffend einfach und elegant:

Satz T5c: quaternionale Matrizen und ihre Polynome

(1) Für jede Matrix $A \in \mathbb{H}^{n\times n}$ haben wir das charakteristische Polynom $\chi_A^{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}[X]^1_{2n}$ über $\mathbb{C}$. Es ist immer reell, es gilt also $\chi_A^{\mathbb{C}} \in \mathbb{R}[X]^1_{2n}$.
(2) Wir haben das Minimalpolynom $\mu_A^{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}[X]^1_m$ über $\mathbb{R}$.
Es ist immer ein Teiler von $\chi_A^{\mathbb{C}}$, also vom Grad $m \le 2n$.

☺ Damit gewinnen wir alle bewährten Werkzeuge von $\mathbb{C}$ auch über $\mathbb{H}$. Lineare Algebra über $\mathbb{H}$ verläuft damit ebenso erfolgreich wie über $\mathbb{C}$: Diagonalisierung, Jordanisierung, Spektralsätze, uvm.

Beweis: (1) Das charakteristische Polynom $\chi_A^{\mathbb{C}}$ unseres Endomorphismus $f_A : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ über $\mathbb{C}$ ist unabhängig von der Basiswahl, dank Satz P2F. Wir schreiben $A = R + \mathrm{j}S$ mit $R, S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und wählen die $\mathbb{C}$–Basen $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n, \mathrm{j}e_1, \dots, \mathrm{j}e_n)$ und $\mathcal{C} = (\mathrm{j}e_1, \dots, \mathrm{j}e_n, -e_1, \dots, -e_n)$. Damit:

$$B = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{bmatrix} R & -\overline{S} \\ S & \overline{R} \end{bmatrix} \quad \text{vs} \quad C = \mathrm{M}_{\mathcal{C}}(f_A) = \begin{bmatrix} \overline{R} & -S \\ \overline{S} & R \end{bmatrix}$$

Ähnlichkeit $C \sim B$ zeigt $\chi_C = \chi_B$. Konjugation $C = \overline{B}$ zeigt $\chi_C = \overline{\chi_B}$. Wir erhalten so unser (reelles!) Polynom $\chi_A^{\mathbb{C}} := \chi_B \in \mathbb{R}[X]^1_{2n}$.

(2) Über $\mathbb{R}$ haben wir das Minimalpolynom $\mu_A^{\mathbb{R}} = \mu_B^{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}[X]^1_m$.
Dank Cayley–Hamilton P3H über $\mathbb{C}$ gilt $\chi_B(B) = 0$.
Dank $\chi_B \in \mathbb{R}[X]^1_{2n}$ folgt $\mu_B^{\mathbb{R}} \mid \chi_B$, somit $m \le 2n$. QED

M Denkökonomie: Die Arbeit über $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ verläuft weitgehend parallel. In ihrem Zusammenspiel und im Kontrast können wir viel lernen!

P Grundlegend ist der reelle Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Auf diesem bauen wir auf. Für viele Anwendungen (in Mathematik, Physik, Ingenieurwesen, uvm.) reichen die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht aus, daher nutzen wir die Erweiterung zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Das gilt insbesondere für Skalarprodukte.

I Quaternionen $\mathbb{H}$ werden erfahrungsgemäß nicht so häufig genutzt wie $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$, oft genug sind sie jedoch eine sehr hilfreiche Ergänzung. Für Drehungen (in Physik, Computergraphik, uvm.) sind Quaternionen und $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R} \twoheadleftarrow \mathrm{SU}_2\,\mathbb{C} = \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$ effizient und bei Anwender:innen beliebt.

L Den reellen Fall versteht man besser, wenn man auch komplex denkt, und fürs Komplexe hilft es, die Quaternionen im Hinterkopf zu haben. Kurzum: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind oft nicht genug, die Quaternionen $\mathbb{H}$ sind manchmal zu viel, die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind meist genau richtig.

? „Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind überall nötig, die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ lasse ich mir noch gefallen, aber Quaternionen scheinen mir suspekt.“ Einverstanden, Sie dürfen sich gerne auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ konzentrieren. Zwar sind Quaternionen nicht schwer, aber man kommt auch ohne gut aus.

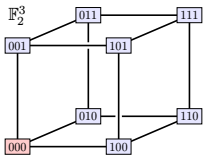
Ich habe in diesem Kurs neben $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ stillschweigend auch $\mathbb{H}$ mitgeführt. Im Rückblick sehen Sie warum. Lohnt sich die Mühe?

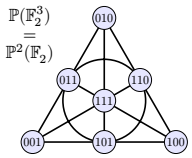
Ich empfinde einige mathematische Vorteile: Unsere Rechnungen über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ werden nicht schwerer über $\mathbb{H}$. Ganz im Gegenteil zwingt uns die einheitliche Behandlung von $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sanft zu guten Entscheidungen: Wenn Matrizen von links wirken, dann Skalare von rechts, usw.

Ich glaube an einige didaktische Vorteile: Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind nicht der Endgegner, der Ausblick auf $\mathbb{H}$ lässt $\mathbb{C}$ recht harmlos erscheinen. Für Polynome und Determinante benötigen wir Kommutativität, dies wissen wir erst wirklich zu schätzen im Kontrast zu $\mathbb{H}$.

Kapitel U

Affine und projektive Räume





Aus dem K–linearen Raum $(V, +, 0, -)$ entsteht der K–affine Raum $\mathbb{A}(V) = (V, +, -)$ über V, indem wir seinen Ursprung 0 vergessen.

Im projektiven Raum $\mathbb{P}(V) = (V \smallsetminus \{0\})/(K \smallsetminus \{0\})$ ignorieren wir die Skalierung: Geraden sind die neuen Punkte!

Inhalt dieses Kapitels U

1 Von linearen zu affinen Räumen
- Affine Räume, affine Abbildungen
- Affine Unterräume, affine Basen
- Erste Beispiele und Anwendungen

2 Affinitäten und Bewegungen
- Affine Isomorphismen und $\mathrm{AGL}_n(K)$
- Affine Isometrien und $\mathrm{AGO}_n(\mathbb{R})$
- Beispiele zu reellen Quadriken

3 Von linearen zu projektiven Räumen
- Geraden sind die neuen Punkte!
- Die projektive lineare Gruppe $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{K})$
- Kegelschnitte: affine Karten im projektiven Raum

Motivation und Überblick

In der Linearen Algebra untersuchen wir hauptsächlich lineare Räume und lineare Abbildungen. Dies ist eine wunderschöne und nützliche algebraische Struktur, sie erlaubt eine starke Theorie und effiziente Algorithmen, zudem anschaulich-geometrische Interpretationen.

Einige geometrische Anwendungen fordern jedoch eine etwas andere Herangehensweise. Die Punkte auf einer Landkarte, zum Beispiel, bilden zunächst keinen Vektorraum, zumindest solange noch kein Ursprung „0“ ausgezeichnet ist. Doch von a zu b auf unserer Landkarte führt genau ein Verschiebungsvektor v. So werden Punkte $a, b \in X$ und Vektoren $v \in U$ auf raffinierte Art verwoben. Diese Idee wollen wir nun präzisieren mit dem Begriff des affinen Raums X über dem linearen Raum U.

Aufbauend auf der linearen Theorie erweist sich diese affine Anwendung als erfreulich leicht, unsere soliden Grundlagen zahlen sich erneut aus. Affinitäten $\mathrm{AGL}_n(K)$ und Bewegungen $\mathrm{AGO}_n(\mathbb{R})$ sind hier zunächst Werkstücke und anschließend Werkzeuge für das folgende Kapitel.

Motivation und Überblick

Lineare Räume haben als Geschwister die affinen Räume und ebenso die projektiven Räume. Letztere entstanden zuerst in der Renaissance aus der Untersuchung perspektivischer Darstellung in Malerei und Architektur, durch *Projektion* einer dreidimensionalen Szene auf die Bildebene.

Ein früher Vorläufer der projektiven Sichtweise sind Kegelschnitte: Sie bündeln quadratische Kurven wie Kreise, Ellipsen, Parabeln Hyperbeln. Diese faszinieren seit der griechischen Antike, sind klassischer Schulstoff und überall nützliche Werkzeuge von Architektur bis Astronomie.

Die daraus destillierten mathematischen Strukturen sind ebenso einfach und elegant wie abstrakt und nützlich. Wir werden hierzu die allerersten Schritte unternehmen, um unsere geometrische Anschauung zu schulen. *In vielen Anwendungen gilt: Fast nichts ist linear. Nahezu alles ist affin.*

Wir bereiten diese schönen Begriffe in diesem Kapitel behutsam vor, damit wir sie im nächsten Kapitel dann vertraut anwenden können, wenn wir Quadriken als geometrische Objekte klassifizieren.

Erinnerung: Was sind lineare Räume?

Was sind K–lineare Räume? Homomorphismen? Unterräume?
Sei $(K, +, 0, \cdot, 1)$ ein Körper; als Grundlage genügt zunächst ein Ring.

Ein **linearer Raum** $(V, +, 0, \cdot)$ über K ist eine **abelsche Gruppe** $(V, +, 0)$ mit **Skalierung** $(V, +, 0) \curvearrowleft (K, +, 0, \cdot, 1)$ als distributiver Operation (L1A).

Seien U, V lineare Räume über K. Eine **K–lineare Abbildung** $f : U \to V$ ist additiv, $f(x + y) = f(x) + f(y)$, und K–homogen, $f(x\lambda) = f(x)\lambda$ für alle $x, y \in U$ und alle $\lambda \in K$. Wir nennen f einen **K–Homomorphismus**. Identität, Komposition, Umkehrung ergeben Homomorphismen (L1J).

Ein **K–linearer Unterraum** $U \leq (V, +, \cdot)$ ist eine Teilmenge $U \subseteq V$ mit $0 \in U$ und $U + U \subseteq U$ und $U \cdot K \subseteq U$. Durch Einschränkung ist $(U, +, \cdot)$ selbst ein K–linearer Raum und $\mathrm{inc} : U \hookrightarrow V$ ein K–Homomorphismus.

⚠ In jedem linearen Raum $(V, +, 0_V)$ ist der Ursprung 0_V ausgezeichnet.
Jede lineare Abbildung $f : U \to V$ schickt 0_U auf 0_V.
Jeder lineare Unterraum $U \leq V$ enthält $0_U = 0_V$.

Erinnerung: Was sind lineare Räume?

⚠ Anwendungen erfordern meist mehr Flexibilität, oft ist es vorteilhaft, alle Punkte gleichberechtigt zu behandeln. Diese Idee führen wir nun gebührend aus und kommen so von *linearen* Räumen zu *affinen* Räumen. Wir erhalten damit auch allgemeinere Abbildungen und Unterräume.

Das lohnt sich in physikalischen und mathematischen Anwendungen, zuvörderst als euklidische Bewegung in der Hauptachsentransformation. Es beschert uns zudem eine anwendungsfreundliche Klärung natürlicher Begriffe wie *Punkt* vs *Vektor* oder *fester Vektor* vs *beweglicher* Vektor etc.

Dies führt uns zur abstrakten Definition eines affinen Raumes.
Zuvor erinnere ich an einige vertraute Beispiele. Diese illustrieren, dass Sie schon lange mit affinen (Unter)Räumen arbeiten, etwa als Lösungsmengen von inhomogenen linearen Gleichungssystemen.

Dieses Kapitel schließt so gesehen eine Lücke von der linearen Theorie zur affinen Anwendung. Wir fixieren dazu präzise Begriffe und passende Rechenregeln, so dass Sie diese fortan guten Gewissens nutzen können.

Algebraisches Beispiel: Lösungsmenge eines LGS

Zu $f : V \to W$ linear und $y \in W$ betrachten wir die Lösungsmenge

$$L = \{x \in V \mid f(x) = y\}.$$

Speziell für $V = K^n$ und $W = K^m$ und $f(x) = Ax$ mit $A \in K^{m \times n}$ gilt:

$$L = \{x \in K^n \mid Ax = y\}.$$

Ist $L \subseteq V$ ein **linearer Unterraum**? (Wir schreiben dann $L \leq V$.)
☺ Für $y = 0$, ja! Dies ist der wohlvertraute Kern $\mathrm{Ker}(f) \leq V$.
☹ Für $y \neq 0$, nein! Es gilt nicht einmal $0 \in L$, also $L \not\leq V$.

Ist alle Hoffnung verloren? Ist die Menge L völlig strukturlos? O nein!
Für jede Lösung $v_0 \in L$ gilt $L = v_0 + \mathrm{Ker}\, f$. Das ist ein **affiner Unterraum**!

leere Menge:	$L = \emptyset$,	$\dim_K(\mathrm{Ker}\, f) = ?$
ein Punkt:	$L = \{v_0\}$,	0
eine Gerade:	$L = \{v_0 + v_1 t_1 \mid t_1 \in K\}^!$,	1
eine Ebene:	$L = \{v_0 + v_1 t_1 + v_2 t_2 \mid t_1, t_2 \in K\}^!$,	2

Algebraisches Beispiel: Lösungsmenge eines LGS

Das ist unsere algebraische und inzwischen wohlvertraute Motivation, affine (Unter)Räume $L \sqsubseteq V$ zu betrachten, und geradezu ihre Definition.

Jeder lineare Unterraum $U \leq V$ ist auch ein affiner Unterraum $U \sqsubseteq V$.
Jeder affine Unterraum $X \sqsubseteq V$ ist entweder leer oder von der Form $X = v + U$ mit $U \leq V$, also ein um v verschobener linearer Raum.

Vornehm gesagt ist $X = v + U$ eine Nebenklasse von $U \leq V$.
Diese Nebenklassen bilden die Elemente des Quotientenraums

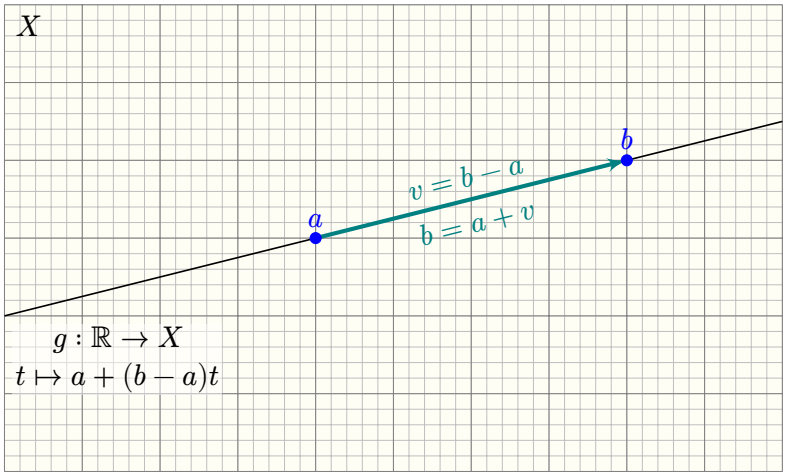
$$V/U := \{v + U \mid v \in V\}.$$

Aufgabe: Umgekehrt ist ein K–affiner Unterraum $X = v + U \sqsubseteq V$ genau dann ein K–linearer Unterraum, $X \leq V$, wenn $v \in U$ gilt.

Lösung: „$\Rightarrow$“: Ist $X = v + U$ ein K–linearer Unterraum in V, kurz $X \leq V$, so gilt definitionsgemäß $0 \in X$ und $X + X \subseteq X$ und $X \cdot K \subseteq X$.
Demnach existiert zu v ein $u \in U$ mit $v + u = 0$, also $v = -u \in X$.

„$\Leftarrow$“: Ist $U \leq V$ ein K–linearer Unterraum und $v \in U$, so folgt $v + U = U$, denn zu jedem $u \in U$ gilt $v + u \in U$ (also „$\subseteq$“) und $-v + u \in U$ (somit „$\supseteq$“).

Geometrisches Beispiel: ein Blatt Papier



Sie betrachten ein leeres Blatt Papier X und darauf zwei Punkte $a \neq b$. Ohne „Ursprung“ ist es sinnlos, a und b zu „addieren“ oder mit $\lambda \neq 1$ zu „skalieren“. Wir können jedoch den Richtungsvektor $v = b - a$ bilden und die Verbindungsgerade G parametrisieren durch $g : \mathbb{R} \to X : t \mapsto a + vt$.

Geometrisches Beispiel: ein Blatt Papier

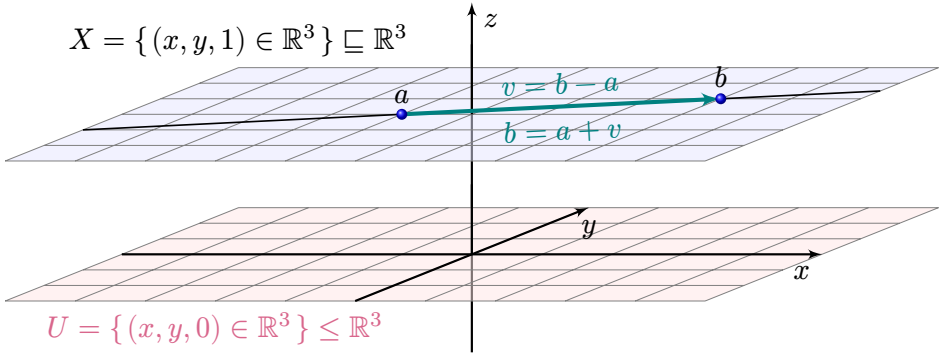
In Anwendungen der Linearen Algebra betrachtet man oft und ganz ohne Skrupel den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ als „die Zeichenebene“ und ebenso den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ als den uns umgebenden „physikalischen Raum“. Das ist eine praktisch-bequeme Kurzform, aber auch recht engstirnig.

Genau besehen ist das ein Akt der Willkür: Wir *wählen* einen Ursprung O und eine Basis $v_1, \dots, v_n$ aller Richtungen und zwingen so dem Raum X unsere Koordinaten $\Phi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} X : (x_1, \dots, x_n) \mapsto O + v_1 x_1 + \dots + v_n x_n$ auf. Anschließend rechnen wir statt im Raum X im Koordinatenraum $\mathbb{R}^n$.

⚠ Meistens jedoch gibt es keinen ausgezeichneten Ursprung und keine fest eingebauten Koordinatenachsen. Solcherart Koordinaten sind eine zusätzliche Hilfskonstruktion! Ebenso möglich ist jede andere Wahl von Koordinaten. Sie kennen und nutzen bereits Koordinatenwechsel.

☺ „Nieder mit Willkür und Privilegien!“ In einem *affinen Raum* sind alle Punkte gleichberechtigt. Koordinaten sind manchmal gar nicht nötig. Wenn sie nötig sind, dann wollen wir sie nicht willkürlich wählen, sondern dem vorliegenden Problem möglichst geschickt anpassen.

Geometrisches Beispiel: die Tischebene



Sie betrachten die Tischebene X, etwa für physikalische Anwendungen. Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ beschreiben wir dies durch eine *affine Ebene* $X \sqsubseteq \mathbb{R}^3$, etwa als Teilmenge $X = \{ (x, y, 1) \mid x, y \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^3$ wie oben skizziert.

Im Raum X ist es sinnlos, Punkte a und b zu „addieren“ oder mit $\lambda \neq 1$ zu „skalieren“. Wir können jedoch den Richtungsvektor $v = b - a$ bilden und die Verbindungsgerade G parametrisieren durch $g : \mathbb{R} \to X : t \mapsto a + vt$. Sie läuft, wie gewünscht, durch die Punkte $a = g(0)$ und $b = g(1)$.

Geometrisches Beispiel: die Tischebene

Sei $(V, +, 0, \cdot)$ ein **linearer Raum** über dem Ring K. Wir können Vektoren $a, b \in V$ addieren und mit $\lambda \in K$ skalieren. Dabei gelten die vereinbarten Rechenregeln L1A. Demnach hat V den Nullpunkt 0 als ausgezeichneten Ursprung. Das ist wunderschön und nützlich, damit können wir rechnen. Für viele Anwendungen ist das jedoch schon zu viel verlangt!

In einem **affinen Raum** gibt es keinen besonderen Punkt, den Sie als Ursprung auszeichnen. Alle Punkte sind gleichgerechtigt! Was bleibt?

Translation: Wir können jeden Punkt $a \in X$ durch einen Vektor $v \in V$ verschieben und erhalten einen neuen Punkt $b = a + v$ im Raum X.

Differenz: Umgekehrt können wir vom Punkt $a \in X$ zum Punkt $b \in X$ den Verschiebungsvektor $v = b - a$ in V bestimmen, so dass $a + v = b$ gilt.

Humorvoll zugespitzt formuliert es der beliebte Slogan:

Ein affiner Raum ist wie ein linearer Raum,
der seinen Ursprung verloren hat.

Was ist ein affiner Raum?

Definition U1A: K–affiner Raum

Sei $(V,+,0,\cdot)$ ein K–linearer Raum. Ein **K–affiner Raum** $(X,+,-)$ **über** V besteht aus einer Menge $X \neq \emptyset$ mit zwei Operationen

$$+ : X \times V \to X : (a,v) \mapsto b = a + v \quad \text{Verschiebung um } v,$$
$$- : X \times X \to V : (b,a) \mapsto v = b - a \quad \text{Differenzvektor } \overrightarrow{ab},$$

sodass für alle Punkte $a, b \in X$ und alle Vektoren $u, v \in V$ gilt:

$$\left.\begin{array}{lc} \text{A0:} & a + 0 = a \\ \text{A1:} & (a+u)+v = a+(u+v) \\ \text{A2:} & a+v=b \;\Leftrightarrow\; v = b-a \end{array}\right\} \quad X \overset{+}{\curvearrowleft} V \text{ operiert transitiv und frei.}$$

Die zugrundeliegende Menge X heißt **Punktmenge** oder **Punktraum**. Jedes Element $a \in X$ nennen wir einen **Punkt** des affinen Raums X.

Für jeden Punkt $a \in X$ gilt $V = \{b - a \mid b \in X\}$; dies ist die Menge aller **Differenzvektoren**, **Verschiebungsvektoren** oder **Richtungen**.

Was ist ein affiner Raum?

(A01) Die Gruppe $(V,+,0,-)$ operiert auf der Menge X durch $X \overset{+}{\curvearrowleft} V$;
(A2) transitiv / frei / beides bedeutet, von jedem $a \in X$ kommen wir zu jedem $b \in X$ mit mindestens / höchstens / genau einem Vektor $v \in V$.

⚠ Die leere Menge $X = \emptyset$ erfüllt dies für *jeden* K–linearen Raum V. Den leeren Raum behandeln wir separat, daher fordern wir hier $X \neq \emptyset$.

(1) Sei $(V,+,0,\cdot)$ ein K–linearer Raum. Der **affine Standardraum** $\mathbb{A}(V) = (V,+,-)$ über V besteht aus der Menge $X = V$ mit der üblichen Addition $+ : X \times V \to X$ und Subtraktion $- : X \times X \to V$ von Vektoren.

⚠ Auf dem affinen Raum $\mathbb{A}(V)$ haben wir weniger Struktur als auf dem zugrundeliegenden linearen Raum V: Wir vergessen den Nullpunkt und die Skalierung, es bleiben nur Addition und Subtraktion, geometrisch als Verschiebung und Differenzvektor. Ist das zu spitzfindig? Natürlicher ist:

(2) Sei $U \leq V$ ein K–linearer Unterraum. Zu jedem Fußpunkt $a \in V$ ist die Menge $X = a + U \sqsubseteq V$ ein K–affiner Raum über U, mit der üblichen Addition $+ : X \times U \to X$ und Subtraktion $- : X \times X \to U$ von Vektoren.

Translationen, Karten und Parametrisierungen

Elemente $a, b \in X$ nennen wir **Punkte**. Jeder Vektor $v \in V$ definiert die zugehörige **Translation** $\tau_v : X \to X : a \mapsto b = a + v$. Dazu ist τ_{-v} invers:

$$\tau_{-v} \circ \tau_v : a \mapsto (a+v)+(-v) \overset{\text{A1}}{=} a + (v + (-v)) \overset{\text{Grp}}{=} a + 0 \overset{\text{A0}}{=} a$$
$$\tau_v \circ \tau_{-v} : a \mapsto (a+(-v))+v \overset{\text{A1}}{=} a + ((-v)+v) \overset{\text{Grp}}{=} a + 0 \overset{\text{A0}}{=} a$$

Jeder Fußpunkt $a \in X$ definiert seine **Karte** $\varphi_a : X \to V : b \mapsto v = b - a$. Invers hierzu ist die **Parametrisierung** $\psi_a : V \to X : v \mapsto b = a + v$.

$$\psi_a \circ \varphi_a : b \mapsto a + (b - a) \overset{\text{A2}}{=} b$$
$$\varphi_a \circ \psi_a : v \mapsto (a+v) - a \overset{\text{A2}}{=} v$$

Dadurch versehen wir unseren **Punktraum** X mit **Koordinaten** in V. Manchmal unterscheidet man „Ortsvektoren“ und „freie Vektoren“.

Ein **Ortsvektor** des Punktes $b \in X$ bezüglich des Fußpunktes $a \in X$ ist der Vektor $v = b - a$. Hier fungiert a als (willkürlich gewählter) Ursprung.

Ein **freier Vektor** $v \in V$ entspricht der Translation $\tau_v : x \mapsto y = x + v$: Wir können v in jedem Punkt $x \in X$ anheften und erhalten $y = x + v$.

Addition und Subtraktion bedingen sich gegenseitig.

Dank (A2) können wir die Subtraktion aus der Addition rekonstruieren. Wir fordern dann nur $(X,+)$ mit (A01), also eine Operation der Gruppe $(V,+)$ auf X, mit der zusätzlichen Eigenschaft (A2'): Zu jedem Paar von Punkten $a, b \in X$ existiert genau ein Vektor $v \in V$, der $a + v = b$ erfüllt. Dies definiert $v =: b - a$, und $- : X \times X \to V$ erfüllt (A2). Übung!

Alternativ können wir die Addition aus der Subtraktion rekonstruieren. Wir fordern dann $(X,-)$ als Menge X mit der Differenz als einer äußeren Verknüpfung $- : X \times X \to V$ und den folgenden beiden Eigenschaften:
(A0'): Für je drei Punkte $a, b, c \in X$ gilt $(c - b) + (b - a) = c - a$.
(A1'): Zu jedem $a \in X$ und $v \in V$ existiert genau ein $b \in X$ mit $b - a = v$.
Dies definiert $b =: a + v$, und $+ : X \times V \to X$ erfüllt (A01). Übung!

Beide Kurzformen $(X,+)$ und $(X,-)$ sind in der Literatur üblich; die jeweils andere Verknüpfung $-$ bzw. $+$ wird dann rekonstruiert. Dies verschiebt die Definition etwas von Strukturen zu Eigenschaften. Ich plädiere in Definition U1A, wie immer, für die explizite Angabe aller Strukturen; unsere Axiome (A012) sind dadurch einfache Allaussagen.

Was ist eine affine Abbildung?

Beispiel: Jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ definiert ihre K–lineare Abbildung $f : K^n \to K^m : u \mapsto Au$, und zusammen mit einem Fußpunkt $b \in \mathbb{A}(K^m)$ die K–affine Abbildung $g : \mathbb{A}(K^n) \to \mathbb{A}(K^m) : 0 + u \mapsto b + Au$. Allgemein:

Definition U1B: K–affine Abbildung

Gegeben seien K–affine Räume $X \neq \emptyset$ über U und $Y \neq \emptyset$ über V.
Eine Abbildung $g : X \to Y$ heißt **K–affin**, falls für jeden Punkt $a \in X$ die Differenzabbildung $f_a : U \to V : u \mapsto g(a+u) - g(a)$ linear ist.

Somit gilt $g(a+u) = g(a) + f_a(u)$ für jeden Vektor $u \in U$, mit f_a linear.

Gilt dies für *einen* Punkt $a \in X$, so für *jeden* Punkt $b \in X$, denn $f_b = f_a$.
Dadurch ist $f = f_a$ wohldefiniert, unabhängig vom Fußpunkt $a \in X$.
Wir nennen f den **Linearteil** von g und sagen g ist affin über f.

Beweis: Für alle $u \in U$ gilt $g(a+u) = g(a) + f_a(u)$. Mit f_a linear folgt
$g(b+u) \overset{\text{Aff}}{=} g(a + (b-a) + u) \overset{\text{Lin}}{=} g(a) + f_a(b-a) + f_a(u) \overset{\text{Vor}}{=} g(b) + f_a(u)$.
Somit gilt $f_b(u) = g(b+u) - g(b) = f_a(u)$ für alle $u \in U$, also $f_b = f_a$. QED

Was ist eine affine Abbildung?

Die präzise Sprechweise zu linearen Räumen und linearen Abbildungen ist Ihnen inzwischen geläufig und hat sich vielfach bewährt, sowohl im Aufbau der zugrundeliegenden Theorie als auch in ihren Anwendungen. Ganz genau so ist es nun für affine Räume und ihre affinen Abbildungen. Je nach Situation sagt man statt „affin“ zur Betonung auch „affin-linear“.

L In der Schule und manchen Anwendungen nennt man Abbildungen der Form $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax + b$ gern „linear“, obwohl hier eigentlich „affin-linear“ oder kurz „affin“ richtig wäre. Dieser Zusammenprall gegenläufiger Traditionen ist unschön, aber nicht mehr zu ändern.

	orthodox	alternativ
f	linear	homogen linear
g	affin(-linear)	(inhomogen) linear

☺ Erfreulich selten entstehen dadurch ernsthafte Schwierigkeiten; wo wir Verwechslungen befürchten, klären wir im Kontext, was gemeint ist.

Vertraute Beispiele: Lineare Algebra

Beispiel: (0) Jede **K–lineare** Abbildung $f : K^n \to K^m$ ist von der Form

$$f(v) = Av \quad \text{mit} \quad A \in K^{m\times n}.$$

(1) Jede **affine Abbildung** $g : \mathbb{A}(K^n) \to \mathbb{A}(K^m)$ ist von der Form

$$g(0+v) = b + Av \quad \text{mit} \quad b \in K^m.$$

Die Abbildung $f : v \mapsto Av$ ist der **Linearteil** von $g : 0 + v \mapsto b + Ax$.
Wir können f allein aus g rekonstruieren dank $f(v) = g(v) - g(0)$.
Der Verschiebungsvektor $b = g(0)$ ist der **Translationsteil** von g.
Die affine Abbildung g ist genau dann linear, wenn $g(0) = 0$ gilt.

Ein affiner Raum ist wie ein linearer Raum,
der seinen Ursprung verloren hat.
Eine affine Abbildung ist wie eine lineare Abbildung,
die den Ursprung verschieben darf.

Vertraute Beispiele: Analysis

(2) Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m$ ist **differenzierbar** im Punkt $a \in D$, wenn sie sich linearisieren lässt, also affin-linear approximieren gemäß

$$\underbrace{f(a+x)}_{\text{unsere Funktion}} = \underbrace{f(a) + Ax}_{\text{affine Approximation}} + \underbrace{\varepsilon(x)}_{\text{Fehler}} \qquad \underbrace{\text{mit } \|\varepsilon(x)\|/\|x\| \to 0 \text{ für } x \to 0.}_{\text{Der Fehler ist von höherer Ordnung, kurz } \varepsilon \in o(x).}$$

Der Linearteil $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist die Ableitung, geschrieben $f'(a) = A$.

Durch $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto f(a) + Ax$ wird der (affine!) **Tangentialraum** an f im Punkt a parametrisiert. Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist g eine Schmiegegerade, für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Schmiegeebene an den Funktionsgraphen von f.

Allgemein beschreibt $g(a+x) = f(a) + Ax$ die affin-lineare Abbildung, die f am besten approximiert, das heißt sich am besten anschmiegt.
Genau das besagt der Fehlergrenzwert $\|\varepsilon(x)\|/\|x\| \to 0$ für $x \to 0$.

☺ **Differentialrechnung** verbindet Grenzwerte mit Linearer Algebra!
Das ist das Fundament und das geniale Erfolgsrezept der Analysis.
Dazu „linearisieren“ wir $f : \mathbb{A}(\mathbb{R}^n) \supseteq D \to \mathbb{A}(\mathbb{R}^m)$ so gut wie möglich.

Was ist ein affiner Unterraum?

Beispiel: Zu jedem K–linearen Unterraum $U \leq K^n$ und Punkt $a \in K^n$ erhalten wir den K–affinen Unterraum $X = a + U \sqsubseteq \mathbb{A}(K^n)$. Allgemein:

Definition U1c: K–affiner Unterraum $X \sqsubseteq Y$

Sei $(Y, +, -)$ ein K–affiner Raum über V. Eine Teilmenge $\emptyset \neq X \subseteq Y$ ist ein **K–affiner Unterraum**, geschrieben $X \sqsubseteq Y$, falls für jeden Punkt $a \in X$ die Differenzmenge $U_a = X - a$ ein linearer Unterraum ist, $U_a \leq V$.

Somit gilt $X = a + U_a$ mit $U_a \leq V$ linear, wie im motivierenden Beispiel.

Gilt dies für *einen* Punkt $a \in X$, so für *jeden* Punkt $b \in X$, denn $U_b = U_a$. Dadurch ist $U = U_a$ wohldefiniert, unabhängig vom Fußpunkt $a \in X$.

So wird X selbst ein K–affiner Raum über U durch die Einschränkung von $+ : Y \times V \to Y$ zu $X \times U \to X$ und $- : Y \times Y \to V$ zu $X \times X \to U$. Die Inklusionsabbildung $g : X \hookrightarrow Y$ ist affin über $f : U \hookrightarrow V$.

Beweis: Zu $U_a = X - a$ äquivalent ist $X = a + U_a$. Dank $U_a \leq V$ folgt $b + U_a \overset{\text{Aff}}{=} a + (b - a) + U_a \overset{\text{Lin}}{=} a + U_a \overset{\text{Vor}}{=} X$, also $U_b = X - b = U_a$. QED

Was ist ein affiner Unterraum?

So prüfen wir bequem, ob $X \subseteq Y$ ein affiner Unterraum ist, kurz $X \sqsubseteq Y$: Für *einen* Punkt $a \in X$ muss $U = X - a \leq V$ ein linearer Unterraum sein. Daraus folgt sofort $U = X - b$, somit $X = b + U$, für *alle* Punkte $b \in X$.

Alle Punkte sind gleichberechtigt. Einer für alle, alle für einen. Der Beweis ist einfach und erspart uns Arbeitsaufwand.

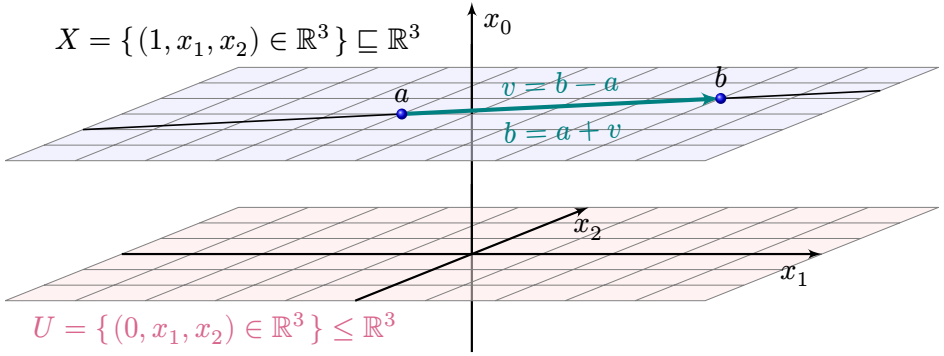
Beispiel: Für $X = K \times \{0\} \cup \{0\} \times K$ gilt $\{b - a \mid a, b \in X\} = K^2$. Ist $X \subseteq K^2$ also ein affiner Unterraum? O nein! Und das ist gut so.

Beispiel: Zu jedem Punkt $a \in Y$ und $U \leq V$ erhalten wir $X = a + U \sqsubseteq Y$. In Worten: Der affine Unterraum $X \sqsubseteq Y$ über $U \leq V$ entsteht, indem wir an einem festen Punkt $a \in Y$ alle Vektoren $u \in U$ des linearen Unterraums $U \leq V$ abtragen. Jeder affine Unterraum $X \sqsubseteq Y$ hat genau diese Form!

(0) Insbesondere gilt $\{a\} \sqsubseteq Y$ über $\{0\} \leq V$ und $Y \sqsubseteq Y$ über $V \leq V$.
(1) Ist $U \leq V$ eindimensional, so ist $X = a + U$ eine **affine Gerade**.
(2) Ist $U \leq V$ zweidimensional, so ist $X = a + U$ eine **affine Ebene**.

Wir setzen dabei voraus, dass die Dimension über K wohldefiniert ist. Dies gilt über jedem Körper K, es genügt DRing D2M oder CRing O3A.

Vertrautes Beispiel: die Tischebene



Hier nochmal die obige Tischebene U107 mit schönen Koordinaten:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3, \quad U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\} \overset{\text{lin}}{<} V, \quad X = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\} \overset{\text{aff}}{\sqsubset} V.$$

Im $\mathbb{R}$–linearen Raum V ist $U < V$ ein $\mathbb{R}$–linearer Unterraum. Im $\mathbb{R}$–affinen Raum $\mathbb{A}(V)$ über V ist $X \sqsubset \mathbb{A}(V)$ ein $\mathbb{R}$–affiner Unterraum über $U < V$.

Vertraute Beispiele: Geraden und Ebenen

Viele der affinen Begriffe sind Ihnen aus der Schulgeometrie vertraut und begegnen Ihnen ebenso in vielen geometrischen Anwendungen:

Beispiele: Durch je zwei Punkte $a, b \in X$, die nicht gleich sind, geht genau eine Gerade, nämlich $G = a + (b - a)K \sqsubseteq X$.

Durch je drei Punkte $a, b, c \in X$, die nicht auf einer Geraden liegen, geht genau eine Ebene, nämlich $E = a + (b - a)K + (c - a)K \sqsubseteq X$.

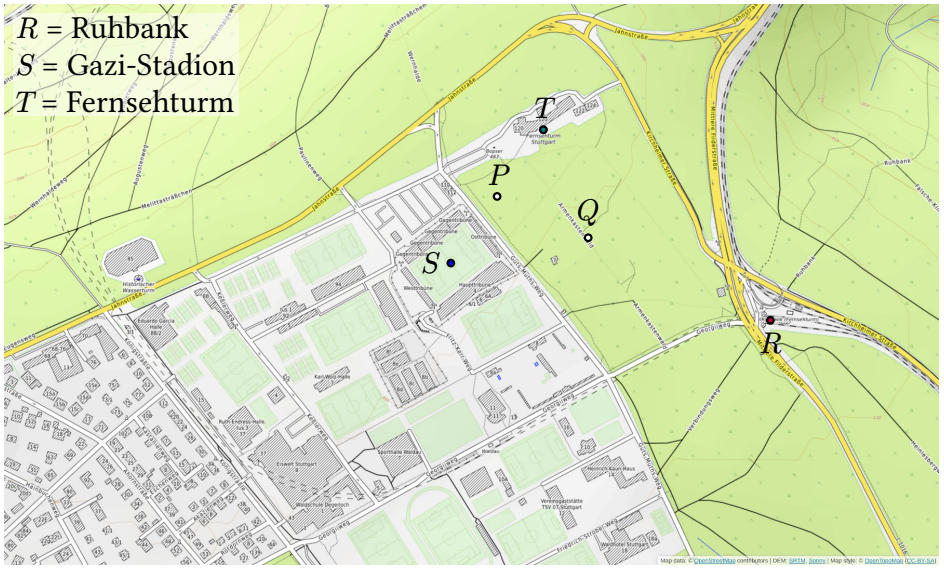
Entsprechendes gilt natürlich in jeder Dimension. Wir kommen so ganz anschaulich zu einem wichtigen Begriff: Die aufspannenden Punkte sollen „in allgemeiner Lage“ sein. Dies präzisieren wir nachfolgend als **affin unabhängige Familie** bzw. als eine **affine Basis** des Unterraums.

Aufgabe: Sei $X = a + U \sqsubseteq \mathbb{A}(V)$ ein K–affiner Unterraum über $U \leq V$. Genau dann ist $X \leq V$ ein linearer Unterraum, wenn $0 \in X$ gilt.

Lösung: „$\Rightarrow$“: Klar, jeder lineare Unterraum $X \leq V$ enthält 0.
„$\Leftarrow$“: Auch klar, aus $0 \in X$ folgt $X = 0 + U = U \leq V$.

Affine Koordinaten: Geocaching rund um den Fernsehturm

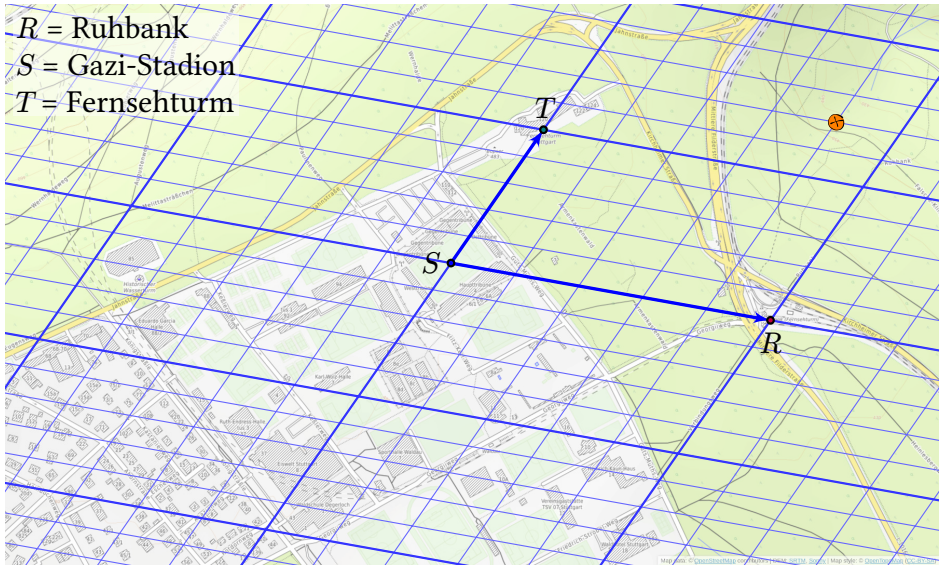
U121



☹ Wo liegt $2S$? oder $S+T$? oder $S-T$? Unsinn, das sind keine Punkte!
☺ Sinnvoll sind Affinkombinationen wie $\frac{1}{2}S+\frac{1}{2}T$ oder $\frac{1}{3}R+\frac{1}{3}S+\frac{1}{3}T$.

Affine Koordinaten: Geocaching rund um den Fernsehturm

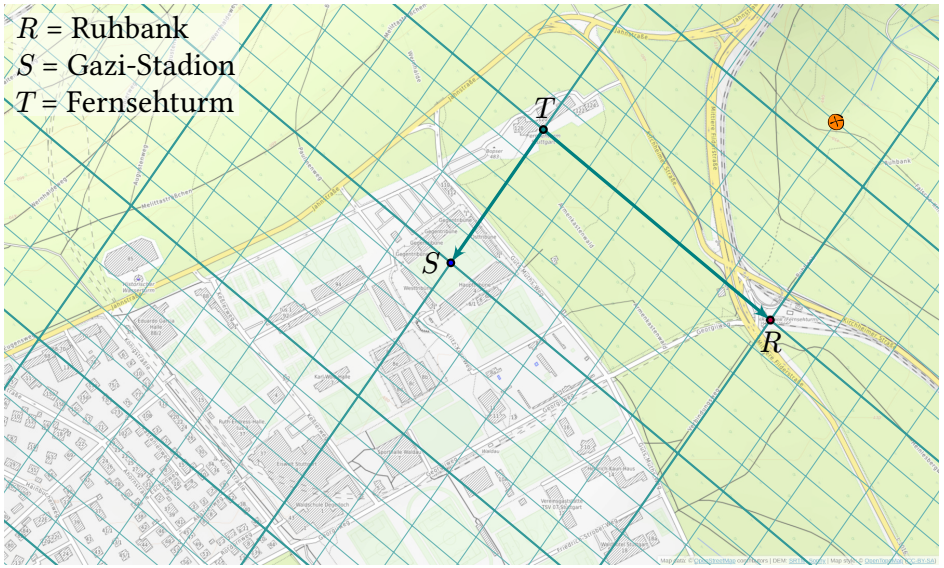
U122



☺ Der Schatz befindet sich im Punkt $X = 0.8 \cdot R - 1.2 \cdot S + 1.4 \cdot T$, vom Punkt S ausgehend bedeutet das $X = S + 0.8(R-S) + 1.4(T-S)$.

Affine Koordinaten: Geocaching rund um den Fernsehturm

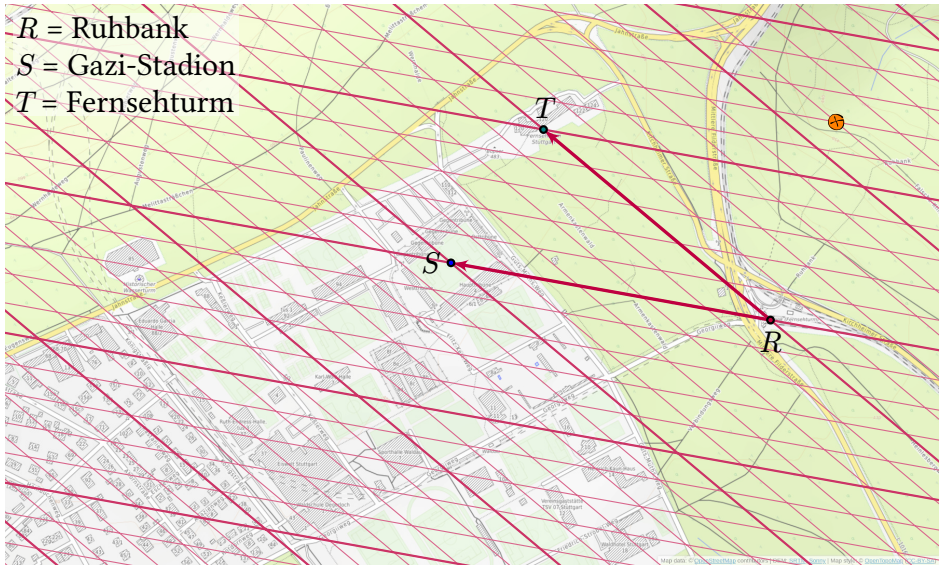
U123



☺ Der Schatz befindet sich im Punkt $X = 0.8 \cdot R - 1.2 \cdot S + 1.4 \cdot T$, vom Punkt T ausgehend bedeutet das $X = T + 0.8(R-T) - 1.2(S-T)$.

Affine Koordinaten: Geocaching rund um den Fernsehturm

U124



☺ Der Schatz befindet sich im Punkt $X = 0.8 \cdot R - 1.2 \cdot S + 1.4 \cdot T$, vom Punkt R ausgehend bedeutet das $X = R + 1.4(T-R) - 1.2(S-R)$.

Was sind Affinkombinationen?

Sei X über U ein K–affiner Raum. Gegeben seien Punkte $a_0, \dots, a_n \in X$ und Skalare $t_0, \dots, t_n \in K$ mit Gesamtmasse $t_0 + \dots + t_n = 1$. Dann ist

$$\varphi(a) := a + (a_0 - a)t_0 + \dots + (a_n - a)t_n \in X$$

unabhängig vom Fußpunkt $a \in X$, also $\varphi(a) = \varphi(b)$ für alle $a, b \in X$.

Beweis: Wir zeigen $\varphi(a+u) = \varphi(a)$ für alle $u \in U$:

$$\begin{aligned} \varphi(a+u) &\overset{\text{Def}}{=} a + u + \textstyle\sum_{i=0}^n [a_i - (a+u)]\, t_i \\ \varphi(a) &\overset{\text{Def}}{=} a + u + \textstyle\sum_{i=0}^n [(a_i - a) - u]\, t_i \end{aligned}$$

Die Terme sind paarweise gleich, denn $(a+u) - a_i = (a - a_i) + u$. QED

Übung: Führen Sie die vielen kleinen Zwischenschritte sorgsam aus.

Definition U1D: Affinkombination und baryzentrische Koordinaten

Diesen Punkt $\varphi(a)$ nennen wir die **Affinkombination** von $(a_i, t_i)_{i=0}^n$:

$$\textstyle\sum_{i=0}^n a_i t_i := \varphi(a_0) = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i - a_0) t_i$$

Warum sind Affinkombinationen wohldefiniert?

Bei unserer Definition $b = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i - a_0) t_i$ haben wir willkürlich a_0 als Fußpunkt gewählt und somit die natürliche Symmetrie gebrochen. Die skizzierte Rechnung zeigt, dass jeder Fußpunkt dasselbe Ergebnis liefert. Insbesondere können wir jeden Punkt a_j als Fußpunkt wählen:

$$b = a_j + \textstyle\sum_{i \neq j} (a_i - a_j) t_i$$

Ausführung: (0) Warum gilt $(a+u) - a_i = (a - a_i) + u$? Wir berechnen

$$a_i + [(a - a_i) + u] \overset{\text{A1}}{=} [a_i + (a - a_i)] + u \overset{\text{A2}}{=} a + u.$$

Dank (A2) folgt somit $(a+u) - a_i = (a - a_i) + u$, wie behauptet.

(1) Wesentlich ist schließlich die Geamtmasse $t_0 + \dots + t_n = 1$.

$$\begin{aligned} \varphi(a+u) &\overset{\text{Def}}{=} a + u + \textstyle\sum_{i=0}^n [a_i - (a+u)]\, t_i \\ &\overset{(0)}{=} a + u + \textstyle\sum_{i=0}^n [(a_i - a) - u]\, t_i \\ &\overset{(1)}{=} a + u + \textstyle\sum_{i=0}^n (a_i - a)\, t_i - u \overset{\text{Def}}{=} \varphi(a) \end{aligned}$$

Das beweist die ersehnte Unabhängigkeit vom Fußpunkt a. QED

Affinkombinationen sind wohldefiniert!

☺ Wir wollen, wie eingangs erklärt, alle Punkte gleich behandeln.

Dieses demokratische Prinzip hat jedoch seinen Preis: Für viele handfeste Konstruktionen müssen wir die natürliche Symmetrie zunächst brechen und in willkürlich gewählten „subjektiven“ Koordinaten rechnen.

Anschließend stellen wir dann erleichtert fest, dass das Ergebnis unserer Rechnung tatsächlich wohldefiniert ist, also unabhängig von unseren willkürlichen Wahlen, und somit „objektiv“. Am Ende wird alles gut.

Der Punkt $b \in X$ ist das **Baryzentrum** der Punkte $a_0, a_1, \dots, a_n \in X$ zu den **baryzentrischen Koordinaten** $t_0, t_1, \dots, t_n \in K$. Anschaulich stellt man sich diese Koeffizienten als Massen oder Ladungen vor, die unsere Punkte „gewichten“ (gr. βαρύς [barýs], ‘schwer von Gewicht, lastend’).

Speziell über dem geordneten Körper $\mathbb{R}$ erhalten wir als Teilmenge alle **Konvexkombinationen** zu $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1$. Diese interpretieren wir als Wkten, etwa $t_i = 1/(n+1)$ für $i = 0, \dots, n$, damit ist b der „Schwerpunkt“ von $a_0, \dots, a_n$, siehe obige Graphik U121.

Affinkombinationen sind wohldefiniert!

☺ Das klärt unser Beispiel zum Geocaching: Wie finden wir den Schatz? Die Koordinaten sind baryzentrisch gegeben. Wie bestimmen wir damit den zugehörigen Punkt? Warum ist er eindeutig, also wohldefiniert?

Zu Punkten $a_0, a_1, \dots, a_n \in X$ und Koeffizienten $t_0, t_1, \dots, t_n \in R$ mit Summe $t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1$ definieren wir die Affinkombination

$$a_0 t_0 + a_1 t_1 + \dots + a_n t_n := a_0 + (a_1 - a_0) t_1 + \dots + (a_n - a_0) t_n$$

Wir verschieben den Punkt a_0 um $v = (a_1 - a_0) t_1 + \dots + (a_n - a_0) t_n$. Ebenso können wir *jeden* beliebigen Punkt $a \in X$ als Start auswählen, insbesondere jeden der gegebenen Referenzpunkte $a = a_0, a_1, \dots, a_n$, und dann um den Vektor $v = \sum_{i=0}^n (a_i - a) t_i$ verschieben.

⚠ Weiterhin gilt, dass wir Punkte in X weder addieren noch skalieren können. Affinkombinationen hingegen können wir bilden wie gezeigt. Im wohlwissenden Rückblick scheint das klar oder gar selbstverständlich, doch beim ersten Kontakt wie oben wirkt es wie ein Wunder.

Was ist eine affine Basis?

Definition U1E: affine Basis und Dimension

Weiterhin sei Y über V ein K–affiner Raum.

(1) Beliebige Punkte $a_0, a_1, \dots, a_n \in Y$ **erzeugen** den affinen Unterraum

$$X := \{\, a_0 + (a_1 - a_0)\lambda_1 + \dots + (a_n - a_0)\lambda_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \,\} \sqsubseteq Y$$

über dem linearen Unterraum $U := \langle a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0 \rangle_K \le V$.

Wir schreiben hierfür kurz $X = \operatorname{aff}_K(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

(2) Wir nennen $a_0, a_1, \dots, a_n \in Y$ **affin unabhängig**, wenn die Differenzen $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0 \in V$ linear unabhängig sind, also eine Basis von U.

(3) Gilt (1&2), so nennen wir $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ eine **affine Basis** von X.

$$\Phi : K^n \xrightarrow{\sim} X : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto a_0 + (a_1 - a_0)\lambda_1 + \dots + (a_n - a_0)\lambda_n$$

Wir nennen dann $\dim_K X := \dim_K U = n$ die affine **Dimension** von X.

Wir setzen dabei voraus, dass die Dimension über K wohldefiniert ist. Dies gilt über jedem Körper K, es genügt DRing D2M oder CRing O3A.

Was ist eine affine Basis?

Aufgabe: Warum ist die obige Abbildung $\Phi : K^n \to X$ bijektiv?

In Worten: Jeder Punkt $a \in X$ lässt sich auf genau eine Weise schreiben als Affinkombination $a = a_0 + (a_1 - a_0)\lambda_1 + \dots + (a_n - a_0)\lambda_n$ mit $\lambda \in K^n$.

Lösung: Sei $X \sqsubseteq Y$ über $U \le V$ ein K–affiner Unterraum.
Für jede Familie $a_0, a_1, \dots, a_n \in X$ haben wir die Abbildung

$$\Phi : K^n \to X : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto a_0 + (a_1 - a_0)\lambda_1 + \dots + (a_n - a_0)\lambda_n$$

Sie ist die Komposition der beiden Abbildungen

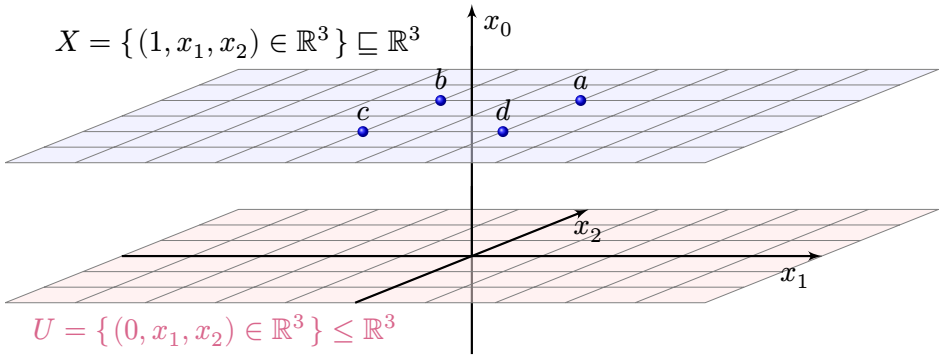
$$\varphi : K^n \to U : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto (a_1 - a_0)\lambda_1 + \dots + (a_n - a_0)\lambda_n$$
$$\psi : U \xrightarrow{\sim} X : \quad u \mapsto a = a_0 + u$$

Der Fußpunkt $a_0 \in X$ definiert seine **Parametrisierung** $\psi : U \xrightarrow{\sim} X$ durch $u \mapsto a = a_0 + u$, mit der Umkehrung $a \mapsto u = a - a_0$, siehe Seite U111.

Genau dann sind φ und $\Phi = \psi \circ \varphi$ surjektiv / injektiv / bijektiv, wenn die Familie $(a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0)$ in U erzeugend / frei / eine Basis ist.

Beispiel: die Tischebene

Die hier erklärten affinen Eigenschaften (1–3) bleiben erhalten unter Umordnung der Familie $a_0, a_1, \dots, a_n$, siehe U1D. Das ist bemerkenswert.



Welche Teilmengen $A \subseteq \{(1, \pm 1, \pm 1)\}$ erzeugen die affine Ebene X?
Welche sind affin unabhängig in $\mathbb{R}^3$? Wie viele affine Basen erhalten Sie?

Lösung: Je drei dieser Punkte erzeugen $X \sqsubseteq \mathbb{R}^3$, aber zwei genügen nicht.
Je drei dieser Punkte sind affin unabhängig in $\mathbb{R}^3$, aber nicht alle vier.
Wir können aus $\{(1, \pm 1, \pm 1)\}$ genau $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ affine Basen wählen.

Beispiel: die Tischebene

☺ Wir profitieren hier von unserer soliden Vorbereitung zu linearen Räumen, insbesondere Basis und Dimension.
All dies übertragen wir nun bequem auf affine Räume.

⚠ Man beachte die genaue Anzahl: Für einen n–dimensionalen affinen Raum X hat jede Basis $a_0, a_1, \dots, a_n$ genau $n + 1$ Elemente. Das entspricht einem Fußpunkt $a_0 \in X$ und daran angeheftet die n linear unabhängigen Richtungsvektoren $u_1 = a_1 - a_0, \dots, u_n = a_n - a_0 \in U$.

⚠ Basen sind Familien, nicht bloß Mengen, das ist vielfach vorteilhaft. Schon für jede Basis $(u_1, \dots, u_n)$ eines linearen Raumes U über K ist die Reihenfolge der Vektoren ein nützlicher Teil der Daten. Zwar ist jede Umordnung ebenso eine Basis, doch wir wollen explizit Koordinaten $\Phi : K^n \xrightarrow{\sim} U$ einführen, und dazu ist die feste Indizierung wesentlich.

Dasselbe gilt nun für jede affine Basis $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ von X über U.
Man kann es anders vereinbaren, doch geordnet ist meist besser.

Beispiel: Polynome vom Grad $\leq n$

Beispiel: Über dem Ring K betrachten wir Polynome vom Grad $< n$:

$$V = K[X], \quad U = K[X]_{<n}, \quad A = K[X]_n^1, \quad B = K[X]_n.$$

Welche dieser Mengen sind lineare Unter/Räume? affine Unter/Räume?

Beweis: (0) Die Polynome bilden den K–linearen Raum $(V, +, 0, \cdot)$.

(1) Darin ist $U = K[X]_{<n} = \{\sum_{k=0}^{n-1} p_k X^k\}$ ein linearer Unterraum, denn definitionsgemäß gilt $0 \in U$ und $U + U \subseteq U$ und $U \cdot K \subseteq U$.

(2) Hingegen ist $A = \{X^n + \sum_{k=0}^{n-1} p_k X^k\}$ kein K–linearer Unterraum, dies scheitert bereits an $0 \notin A$, ebenso an $U + U \not\subseteq U$ und $U \cdot K \not\subseteq U$.

Jedoch ist A ein K–affiner Unterraum über U, denn $A = X^n + U \sqsubset V$.

(3) Schließlich ist $B = \{\sum_{k=0}^{n} p_k X^k \mid p_n \neq 0\}$ kein linearer Unterraum, denn $0 \notin B$, und für $\sharp K \geq 3$ auch kein affiner Unterraum. Warum?

Aufgabe: Ist das anschaulich plausibel? Wie beweisen Sie es?
Das ist eine gute Fingerübung und Probe unserer Werkzeuge!

Beispiel: Polynome vom Grad $\leq n$

Anschaulich klar ist zunächst: $B \subseteq V$ ist kein affiner Raum über $U \leq V$. Zwar haben wir $+ : B \times U \to B : (p, u) \mapsto q = p + u$. Aber von einem Punkt $p \in B$ ausgehend erreichen wir nicht jeden anderen Punkt $q \in B$ durch Translation mit $u \in U$. Anders gesagt, wir haben nicht die erforderliche Differenz $- : B \times B \to U : (p, q) \mapsto u = q - p$.

Lösung: Für $\sharp K = 1$ gilt $K = \{0\}$ und $\{0\} = V = U = A$, doch $B = \emptyset$. Für $\sharp K = 2$ gilt $K = \{0, 1\}$ und $V > U$, doch ausnahmsweise $A = B$. Für $\sharp K \geq 3$ zeigen wir schließlich die allgemeine Behauptung $B \not\subseteq V$. Gemäß Definition U1c untersuchen wir die Differenzmenge $W = B - X^n$.

(3a) Gilt $2 \neq 0$ in K, so folgt $2X^n \in B$, somit $W \ni 2X^n - X^n = X^n$.

(3b) Gilt $2 = 0$ in K, aber $\sharp K \geq 3$, so können wir ein beliebiges Element $a \in K \smallsetminus \{0, 1\}$ wählen und erhalten daraus $b = a + 1 \in K^*$. Wir haben also $B \ni aX^n, bX^n \in B$ und somit erneut $W \ni bX^n - aX^n = X^n$.

Wäre $W \leq V$ ein K–linearer Unterraum, so folgt aus $W \ni X^n$ auch $W \ni -X^n$, also $B \ni X^n + (-X^n) = 0$. ↯ Das beweist $W \not\leq V$ und $B \not\sqsubset V$.

Anwendung: Lösungsmenge linearer Gleichungen

♦ Satz L2B: Lösungsmenge linearer Gleichungen → Merkregel D223

Sei $f : V = K^n \to W = K^m : x \mapsto Ax$ eine K–lineare Abbildung.
(0) Dann ist der Kern ein K–linearer Unterraum:

$$\boxed{U := \operatorname{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\}) \leq V}$$

(1) Zu jedem Zielpunkt $w \in W$ ist die Lösungsmenge

$$\boxed{L = f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}}$$

entweder leer, $L = \emptyset$, oder ein K–affiner Unterraum $L \sqsubseteq V$ über $U \leq V$. Letztenfalls gilt explizit $L = v + U \sqsubseteq V$ für jede beliebige Lösung $v \in L$.

„Allgemeine Lösung = partikuläre Lösung + homogene Lösungen."
Demnach ist $f : V \to W$ injektiv gdw $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$ gilt, siehe J2U.

Ich folge hier zähneknirschend der Konvention, dass $L = \emptyset$ *kein* affiner Raum ist. Dadurch wird in (1) leider eine Fallunterscheidung nötig. Das ist zwar etwas unschön, aber insgesamt der kleinere Preis.

Anwendung: Lösungsmenge linearer Differentialgleichungen

♦ Satz Q3D: Struktursatz für lineare Differentialgleichungssysteme

Gegeben sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $b : I \to \mathbb{K}^n$ stetig auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Wir untersuchen die Lösungsmenge $L = \{u \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K}^n) \mid \dot{u} = Au + b\}$.

(0) **Globale Existenz und Eindeutigkeit**: Zu jedem Anfangsdatum $(t_0, v_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung $u \in L$ mit $u(t_0) = v_0$ dank Satz Q3c. Die Auswertung in t_0 stiftet also eine Bijektion:

$$\boxed{\Psi_{t_0} : L \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n : u \mapsto u(t_0)}$$

(1) $L_0 = \{u \mid \dot{u} = Au\}$ ist ein **$\mathbb{K}$–linearer URaum** der Dimension n. Wir finden ein **Fundamentalsystem** $u_1, \dots, u_n \in L_0$, etwa dank Q3c:

$$\boxed{L_0 = \{c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\}^! \cong \mathbb{K}^n}$$

(2) $L = \{u \mid \dot{u} = Au + b\}$ ist ein **$\mathbb{K}$–affiner URaum** der Dimension n. Für jede **Partikulärlösung** $u_0 \in L$, etwa dank Q3c, gilt demnach:

$$\boxed{L = u_0 + L_0 = \{u_0 + c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\}^!}$$

Affinkombinationen und affine Unterräume

Weiterhin sei V ein linearer Raum über dem Ring K. Zur Erinnerung:

☺ Eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist genau dann ein K–linearer Unterraum, wenn sie nicht-leer ist und abgeschlossen unter Linearkombinationen:

$$u_0\lambda_0 + \ldots + u_n\lambda_n \in U$$

für alle Längen $n \in \mathbb{N}$, Vektoren $u_0, \ldots, u_n \in U$ und Skalare $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in K$. Hierzu genügt bereits, Linearkombinationen der Länge $n = 1$ zu prüfen.

Ein ebenso praktisches Kriterium gilt für K–affine Unterräume:

Satz U1F: Charakterisierung K–affiner Unterräume

Sei Y ein K–affiner Raum über V. Genau dann ist eine Teilmenge $X \subseteq Y$ ein K–affiner Unterraum, wenn X nicht-leer ist und abgeschlossen unter Affinkombinationen. Das bedeutet ausgeschrieben, es gilt

$$a_0\lambda_0 + \ldots + a_n\lambda_n \in X$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_n \in X$ und $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $\lambda_0 + \ldots + \lambda_n = 1$. Hierzu genügt bereits, Affinkombinationen der Länge $n = 1$ zu prüfen.

Affinkombinationen und affine Unterräume

☺ Diese Sichtweise vereint die linearen und die affinen Begriffe.
Aufgabe: Beweisen Sie diese Charakterisierungen, linear und affin.

Affinkombinationen und affine Abbildungen

Seien U und V lineare Räume über dem Ring K. Zur Erinnerung:

☺ Eine Abbildung $f : U \to V$ ist genau dann K–linear, wenn sie Linearkombinationen erhält. Das bedeutet ausgeschrieben

$$f(u_0\lambda_0 + \ldots + u_n\lambda_n) = f(u_0)\lambda_0 + \ldots + f(u_n)\lambda_n$$

für alle Längen $n \in \mathbb{N}$, Vektoren $u_0, \ldots, u_n \in U$ und Skalare $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in K$. Hierzu genügt bereits, Linearkombinationen der Länge $n = 1$ zu prüfen.

Ein ebenso praktisches Kriterium gilt für K–affine Abbildungen:

Satz U1G: Charakterisierung K–affiner Abildungen

Gegeben seien K–affine Räume X über U und Y über V.
Eine Abbildung $g : X \to Y$ ist genau dann K–affin, wenn sie Affinkombinationen erhält. Das bedeutet ausgeschrieben

$$f(u_0\lambda_0 + \ldots + u_n\lambda_n) = f(u_0)\lambda_0 + \ldots + f(u_n)\lambda_n$$

für alle $a_0, \ldots, a_n \in X$ und alle $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $\lambda_0 + \ldots + \lambda_n = 1$.
Hierzu genügt bereits, Affinkombinationen der Länge $n = 1$ zu prüfen.

Affinkombinationen und affine Abbildungen

☺ Diese Sichtweise vereint die linearen und die affinen Begriffe.
Aufgabe: Beweisen Sie diese Charakterisierungen, linear und affin.

Die K–affinen Abbildungen bilden eine Kategorie:

Satz U1H: Identität und Komposition und Umkehrung

Gegeben seien K–affine Räume X über U und Y über V und Z über W.

(1) Die Identität $\mathrm{id}_X : X \to X$ eine K–affine Abbildung.

(2) Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ affine Abbildungen,
so auch ihre Komposition $g \circ f : X \to Z$.

(3) Ist $f : X \to Y$ eine K–affine Abbildung und bijektiv,
so auch ihre Umkehrung $g = f^{-1} : Y \to X$.

Übung: Beweisen Sie dies nach dem Vorbild L1J linearer Räume.
Hinweis: Es gelingt besonders elegant mit obiger Charakterisierung U1G.

Satz U1I: Transport von Unterräumen

Sei $g : X \to Y$ eine K–affine Abbildung.
(1) Ist $A \sqsubseteq X$ ein K–affiner Unterraum, so auch $B := g(A) \sqsubseteq Y$.
(2) Ist $B \sqsubseteq Y$ ein K–affiner Unterraum, so auch $A := g^{-1}(B) \sqsubseteq X$
falls nicht-leer. Auch hier entsteht leider der lästige Sonderfall.

Übung: Beweisen Sie dies nach dem Vorbild L2B linearer Unterräume.
Hinweis: Es gelingt besonders elegant mit obiger Charakterisierung U1F.

Übung: In $\mathbb{R}^n$ betrachten wir den Einheitsball $\mathbb{D}^n = \{\, x \in \mathbb{R}^n \;;\; \|x\| \le 1 \,\}$ und die Einheitsphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \;;\; \|x\| = 1 \,\}$. Sind dies $\mathbb{R}$–affine Räume? Anschaulich wohl kaum. Wie beweisen Sie es? Prüfen Sie die Definition! Glücklicherweise ist diese schlüsselfertig für Sie formuliert.

Übung: Erfinden Sie möglichst diverse Gegen/Beispiele affiner Räume.
Ist $X = \mathbb{R} \times \{1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ein $\mathbb{R}$–affiner Unterraum? $\mathbb{Q}$–affin? $\mathbb{Z}$–affin?
Ist $Y = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subseteq \mathbb{R}^2$ ein $\mathbb{R}$–affiner Unterraum? $\mathbb{Q}$–affin? $\mathbb{Z}$–affin?
Ist $Z = \mathbb{R} \times (1 + 2\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{R}^2$ ein $\mathbb{R}$–affiner Unterraum? $\mathbb{Q}$–affin? $\mathbb{Z}$–affin?

Affine Basis als Matrixbedingung

Satz U1J: affine Basis als Matrixbedingung

(1) Sei K ein Ring. Genau dann sind die Punkte $a_0, a_1, \dots, a_m \in K^n$ eine affine Basis von $\mathbb{A}(K^n)$, wenn die folgende Matrix A invertierbar ist:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{01} & a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0n} & a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in K^{(1+n)\times(1+m)}$$

(2) Ist K kommutativ, so ist dies äquivalent zu $m = n$ und $\det A \in K^\times$.

Die Spalten sind die erweiterten Vektoren $a_i' = (1, a_{i1}, \dots, a_{in})^\intercal \in K^{1+n}$.
Zur Matrix A gehört die lineare Abbildung $\Phi : K^{1+m} \to K^{1+n} : \lambda \mapsto A\lambda$.

(3) Genau dann ist $a_0, a_1, \dots, a_m$ affin unabhängig, wenn Φ injektiv ist.
(4) Genau erzeugt $a_0, a_1, \dots, a_m$ affin K^n, wenn $\{1\} \times K^n \subseteq \operatorname{Im}\Phi$ gilt.

Aufgabe: Beweisen Sie diesen Satz! O wie schön zu sehen, dass unsere soliden Grundlagen der *linearen* Algebra nun ebenso *affin* wirken!

Affine Basis als Matrixbedingung

Lösung: (1) Durch Spaltenoperationen ist A äquivalent zur Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{01} & a_{11} - a_{01} & \dots & a_{m1} - a_{01} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0n} & a_{1n} - a_{0n} & \dots & a_{mn} - a_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & C \end{bmatrix}$$

Demnach gilt: A invertierbar $\Leftrightarrow$ B invertierbar $\Leftrightarrow$ C invertierbar
$\Leftrightarrow$ Die Familie $(a_1 - a_0, \dots, a_m - a_0)$ ist eine Basis von K^n über K.
$\Leftrightarrow$ Die Familie $(a_0, a_1, \dots, a_m)$ ist eine K–affine Basis von $\mathbb{A}(K^n)$.

☺ Die Matrix A formuliert dies demokratisch-symmetrisch,
zur Rechnung in B brechen wir willkürlich diese Symmetrie.

(2) Dies ist die Aussage der Determinanten-Inversionsformel O2R.

Die Aussagen (3) und (4) präzisieren die beiden Teilbedingungen:
Wir betrachten $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in K^{1+m}$ mit $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$.
Damit gilt $\Phi(\lambda) = A\lambda = (1; a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 + \dots + a_m\lambda_m) \in \{1\} \times K^m$.
Affine Unabhängigkeit / Erzeugung bedeutet Φ ist injektiv / surjektiv.

Eine Familie in allgemeiner Lage: die Momentkurve

Aufgabe: Konstruieren Sie eine Familie $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ in allgemeiner Lage, d.h. $v(t_0), \dots, v(t_n)$ in $\mathbb{R}^n$ sind affin unabhängig für alle $t_0 < \dots < t_n$ in $\mathbb{R}$

Auf den ersten Blick ist eine Lösung nicht offensichtlich.
Ebenso einfach wie elegant ist die folgende Konstruktion:

Beispiel U1K: die Momentkurve

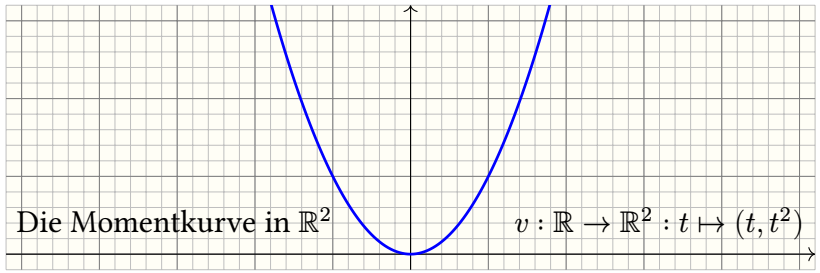
Die Momentkurve $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : t \mapsto (t^1, \dots, t^n)$ hat diese Eigenschaft.

Beweis: Für $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ in $\mathbb{R}$ ist die Vandermonde–Matrix

$$V := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_0 & t_1 & & t_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_0^n & t_1^n & \dots & t_n^n \end{bmatrix}$$

invertierbar. Dies folgt dank Lagrange–Interpolation, Satz D5B, oder mit der Determinante $\det V = \prod_{i<j}(t_j - t_i) \neq 0$, siehe Satz O5A. QED

Eine Familie in allgemeiner Lage: die Momentkurve



Die Formulierung „allgemeine Lage“ bedeutet maximal affin unabhängig: Keine zwei Punkte dieser Familie sind gleich, keine drei Punkte liegen auf einer Geraden, keine vier Punke liegen in einer Ebene, usw. Dies wird nur durch die Dimension begrenzt: Je $n + 2$ Punkte im $\mathbb{R}^n$ sind affin abhängig.

Anschaulich: Die Momentkurve $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ schneidet jede Hyperebene $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$ in höchstens n Punkten, denn das Polynom $a_0 + a_1t^1 + \dots + a_nt^n$ hat höchstens n Nullstellen.
Das ist die Polynom-Sichtweise der obigen Vandermonde–Matrix.

Der Einbettungstrick

Sei $(K,+,0,\cdot,1)$ ein Körper; als Grundlage genügt weiterhin ein Ring.
Als n–dimensionalen K–linearen Raum haben wir $U=(K^n,+,0,-,\cdot)$.
Der zugehörige K–affine Raum ist $X=\mathbb{A}(U)=(K^n,+,-)$ über U.

Als Standareinbettung $\mathbb{A}(K^n)\hookrightarrow K^{1+n}$ nutzen wir erweiterte Vektoren:

$$\mathbb{A}(K^n)\ni x=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1\\ x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=x'\in K^{n'},\quad n'=1+n$$

Jede affine Abbildung $f:K^n\to K^m:x\mapsto b+Ax$ schreibt sich nun erfreulich bequem als die Einschränkung der linearen Abbildung

$$f':K^{n'}\to K^{m'}:\begin{bmatrix}1\\ x\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1\\ b+Ax\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\ b&A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ x\end{bmatrix}.$$

Hierbei ist $A\in K^{m\times n}$ der Linearteil und $b\in K^m$ der Translationsteil.
Beides wird raffiniert in der erweiterten Matrix A' zusammengefasst.

Der Einbettungstrick

☺ Der Matrixkalkül hilft uns schon lange *linear*, nun auch *affin*!

Wir erweitern jeden Punkt $x\in K^n$ zum Vektor $x'=(1;x)\in K^{n'}$, jeden Punkt $y\in K^m$ zum Vektor $y'=(1;y)\in K^{m'}$, und jede K–affine Abbildung $f:K^n\to K^m:x\mapsto b+Ax$ zur K–linearen Abbildung $f':K^{n'}\to K^{m'}:x'\mapsto y'=A'x'$ mit der Darstellungsmatrix

$$A'=\begin{bmatrix}1&0\\ b&A\end{bmatrix}\in K^{m'\times n'}.$$

Übung: (1) Die Identität $\mathrm{id}':x'\mapsto x'$ ist eine affine Abbildung, mit der Einheitsmatrix $I'=\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&I\end{smallmatrix}\right]$ als darstellender Matrix.

(2) Die Komposition von zwei affinen Abbildungen $f':x'\mapsto y'=A'x'$ und $g':y'\mapsto z'=B'y'$ ist die affine Abbildung $g'\circ f':x'\mapsto z'=B'A'x'$, wobei $\left[\begin{smallmatrix}1&0\\v&B\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}1&0\\u&A\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}1&0\\w&C\end{smallmatrix}\right]$ mit $C=BA$ und $w=v+Bu$ gilt. Wie schön!

(3) Genau dann ist $A'\in K^{n'\times n'}$ invertierbar, wenn $A\in K^{n\times n}$ dies ist. In diesem Falle gilt $A'^{-1}=\left[\begin{smallmatrix}1&0\\-A^{-1}b&A^{-1}\end{smallmatrix}\right]\in K^{n'\times m'}$. Rechnen Sie es nach!

Affinitäten und $\mathrm{AGL}_n(K)$

Definition U2A: Affinitäten und $\mathrm{AGL}_n(K)$

Gegeben seien K–affine Räume X über U und Y über V.

(0) Ein **K–affiner Isomorphismus** $(f,g):X\cong Y$ ist ein Paar zueinander inverser K–affiner Abbildungen $f:X\to Y$ und $g:Y\to X$, das heißt $g\circ f=\mathrm{id}_X$ und $f\circ g=\mathrm{id}_Y$. (Es genügt f oder g bijektiv, siehe U1H)

(1) Eine **Affinität** $f:X\xrightarrow{\sim}X$ ist ein affiner Automorphismus.
Die Affinitäten von X bilden die Gruppe $(\mathrm{AGL}(X),\circ,\mathrm{id}_X)$ mit

$$\mathrm{AGL}(X)=\{f:X\xrightarrow{\sim}X\}\le(\mathrm{Sym}(X),\circ,\mathrm{id}_X).$$

(2) Speziell für $X=\mathbb{A}(K^n)$ erhalten wir die **allgemeine affine Gruppe**

$$\mathrm{AGL}_n(K):=\left\{A'=\left[\begin{smallmatrix}1&0\\b&A\end{smallmatrix}\right]\,\middle|\,A\in\mathrm{GL}_n(K),\ b\in K^n\right\}\le\mathrm{GL}_{n+1}(K).$$

Darin liegt, als normale Untergruppe, die **spezielle affine Gruppe**

$$\mathrm{ASL}_n(K):=\left\{A'=\left[\begin{smallmatrix}1&0\\b&A\end{smallmatrix}\right]\,\middle|\,A\in\mathrm{SL}_n(K),\ b\in K^n\right\}\le\mathrm{SL}_{n+1}(K).$$

Affinitäten und $\mathrm{AGL}_n(K)$

Übung: Rechnen Sie die hier gemachten Behauptungen sorgsam nach.

Speziell für $X=K^n$ haben wir die erfreulich explizite Darstellung:

$$\mathrm{AGL}(K^n)=\{f:K^n\xrightarrow{\sim}K^n:x\mapsto b+Ax\mid A\in\mathrm{GL}_n(K),\ b\in K^n\}$$

Dank Einbettungtrick ist diese Gruppe von Abbildungen isomorph zur Matrixuntergruppe $\mathrm{AGL}_n\le\mathrm{GL}_{n+1}$. Ebenso $\mathrm{ASL}_n\le\mathrm{SL}_{n+1}$.

Übung: Wir erhalten zwei kurze exakte Sequenzen von Gruppen:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & (K^n,+) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, equal] & \mathrm{AGL}_n(K) \arrow[r, two heads, shift left, "p"] & \mathrm{GL}_n(K) \arrow[l, hook', shift left, "j"] \arrow[r] & 1 \arrow[d, equal] \\
1 \arrow[r] & (K^n,+) \arrow[r, hook, "i"] & \mathrm{ASL}_n(K) \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, shift left, "p"] & \mathrm{SL}_n(K) \arrow[l, hook', shift left, "j"] \arrow[u, hook] \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

mit $i(b)=\left[\begin{smallmatrix}1&0\\b&I\end{smallmatrix}\right]$ und $p(\left[\begin{smallmatrix}1&0\\b&A\end{smallmatrix}\right])=A$ sowie $j(A)=\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&A\end{smallmatrix}\right]$. Speziell für $n=1$ gilt $\mathrm{AGL}_1(K)=\{\left[\begin{smallmatrix}1&0\\b&a\end{smallmatrix}\right]\mid a\in K^\times,\ b\in K\}$ und $\mathrm{ASL}_1(K)=\{\left[\begin{smallmatrix}1&0\\b&1\end{smallmatrix}\right]\mid b\in K\}$.

Affin-euklidische Räume: Motivation

Sei X über U ein $\mathbb{R}$–affiner Raum. Trägt der $\mathbb{R}$–Vektorraum U die Norm $\|\text{-}\| : U \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, so trägt der $\mathbb{R}$–affine Raum X über U die induzierte Metrik

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0} : (a, b) \mapsto d(a, b) = \|b - a\|.$$

Die Norm misst die Länge von Vektoren. Die Metrik misst den Abstand von Punkten. Sie ist translationsinvariant, denn $d(a + u, b + u) = d(a, b)$. Das können wir umgekehrt betrachten und zur Definition verwenden:

Ein n–dimensionaler **affin-euklidischer Raum** (X, d) ist ein metrischer Raum, der isometrisch zum euklidischen Modellraum $(\mathbb{R}^n, d)$ ist.

Jede solche Isometrie $\varphi : (X, d) \cong (\mathbb{R}^n, d)$ macht X zu einem $\mathbb{R}$–affinen Raum über $\mathbb{R}^n$ durch $\varphi(a + u) = \varphi(a) + u$ und $b - a = \varphi(b) - \varphi(a)$.

Jede weitere Isometrie $\psi : (X, d) \cong (\mathbb{R}^n, d)$ unterscheidet sich nur durch eine affine Isometrie von $\mathbb{R}^n$ dank euklidischer Rigidität S4E.

Wir vereinbaren in Definition U2B eine feste Isometrie, das ist einfacher.

Affin-euklidische Räume: Motivation

Beispiel: Die Erde ist eine Scheibe… zumindest lokal gilt dies in guter Näherung für kleine Umgebungen (M, d) wie die Waldau auf Seite U121. Wir erhalten eine Punktmenge M mit physikalisch gemessener Metrik d, und diese lässt sich recht präzise euklidisch zweidimensional einbetten, wir finden also $(M, d_M) \hookrightarrow (\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$. Die Erdkrümmung ist selbst hier nicht exakt Null, aber der Effekt bleibt lokal noch so extrem klein, dass wir ihn aus praktischer Sicht getrost vernachlässigen können.

Wenn wir also in der Geographie eine Karte erstellen oder verwenden, dann nutzen wir heimlich das Modell eines affin-euklidischen Raumes, selbst wenn die Übereinstimmung nur lokal und approximativ ist.

An dieser Stelle ist es verlockend, aber allzu voreilig zu schließen: „Was im Kleinen recht genau gilt, besteht genauso auch im Großen.“ Dieser naiven Logik zufolge wäre die Erdoberfläche auch global flach, vielleicht sogar isometrisch zu $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$. Das ist zwar ein *mögliches* mathematisches Modell, entspricht aber nicht der Beobachtung!

Affin-euklidische Räume: Motivation

Beispiel: Unser Universum erscheint uns dreidimensional, zumindest lokal in unserer unmittelbaren Umgebung scheint diese Idealisierung eine gute Näherung für unsere alltägliche Erfahrung.

Genauer können wir zwischen je zwei Punkten a und b den räumlichen Abstand $d(a, b) = ct$ messen: Licht bewegt sich mit Geschwindigkeit c auf kürzestem Wege von a nach b in der Zeit t. So vermessen wir unsere lokale Umgebung (M, d) und erhalten eine Punktmenge M mit physikalisch gemessener Metrik d. Diese lässt sich recht präzise euklidisch einbetten, wir finden so $(M, d) \hookrightarrow (\mathbb{R}^3, d_{\mathbb{R}^3})$.

Ist das uns umgebende Universum auch global isometrisch zu $(\mathbb{R}^3, d_{\mathbb{R}^3})$? Das ist ein *mögliches* mathematische Modell, aber keineswegs zwingend! Selbst ohne Krümmung sind global verschiedene Räume denkbar. Im Gegenteil, genauere Messungen zeigen, dass der uns umgebende Raum tatsächlich gekrümmt ist (genauer: die Raumzeit), und bestätigt Einsteins flexibleres Modell der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Affin-euklidische Räume: Motivation

Diese beiden Beispiele, Geographie und Kosmologie zeigen zweierlei:

Erstens, das euklidische Modell $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ ist unschlagbar einfach und wo es (hinreichend genau) zutrifft auch wunderbar effizient. Dies motiviert im Folgenden, sich eingehend damit zu beschäftigen.

Zweitens, in der physikalischen Interpretation müssen wir meist extrem vorsichtig sein, wenn wir aus lokalen Daten globale Schlüsse ziehen. Das ist im Folgenden nicht unser Problem, aber wichtig zu wissen.

Wir wollen im Folgenden das mathematische Modell $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ nutzen und damit arbeiten lernen. Die Anwendbarkeit auf konkrete Situationen, etwa in der Physik, ist eine Frage der betrachteten Anwendungsdomäne.

So ist es immer: Die Mathematik stellt mögliche Modelle und zugehörige Werkzeuge zur Verfügung, doch die passende Auswahl und konkrete Anwendung ist naturgemäß die Aufgabe der Anwender:innen.

Affin-euklidische Räume

Definition U2B: affin-euklidischer Raum

(0) Ein **affin-euklidischer Raum** $(X, +, -)$ ist ein $\mathbb{R}$–affiner Raum über einem euklidischen $\mathbb{R}$–Vektorraum $(U = \mathbb{R}^n, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$. Bis auf Isomorphie genügt uns hierzu der Modellraum $U = \mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt.

(1) Damit können wir Abstände messen dank der Metrik

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0} : (a, b) \mapsto d(a, b) = \|b - a\|.$$

Dadurch wird (X, d) zu einem metrischen Raum gemäß S2K.

(2) Zudem können wir den (absoluten) Winkel messen vermöge

$$\sphericalangle(a, z, b) := \arccos\left(\frac{\langle a - z \,|\, b - z\rangle}{\|a - z\| \cdot \|b - z\|}\right) \in [0, \pi].$$

Hierbei ist $z \in X$ der Scheitelpunkt, und die Schenkel des Winkels sind gegeben durch zwei weitere Punkte $a, b \in X$ mit $a \neq z \neq b$.

(3) Wir erklären Orthogonaliät durch $\langle a - z \,|\, b - z\rangle = 0$.

Affin-euklidische Isometrien

☺ Jede euklidische Isometrie ist automatisch immer affin, das bekommen wir geschenkt! (Naja, wir haben es *bewiesen*, das war ehrliche Arbeit, nun können wir es getrost *nutzen*.)

Übung: Wiederholen Sie den Rigiditätssatz und seinen Beweis.

♦ **Satz S4E:** Rigidität euklidischer Isometrien

Wir betrachten $(\mathbb{R}^m, d)$ und $(\mathbb{R}^n, d)$ mit ihrer euklidischen Metrik.

(1) Eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax + b$ ist isometrisch gdw die Matrix A orthonormale Spalten hat, also $A^\top A = 1_{m\times m}$ erfüllt.

(2) Jede isometrische Abbildung $f : (\mathbb{R}^m, d) \to (\mathbb{R}^n, d)$ ist affin-linear wie in (1) angegeben, also von der Form $f(x) = Ax + b$ mit $A^\top A = 1_{m\times m}$. Die affine Linearität von f wird hier nicht gefordert, sondern gefolgert!

☺ Euklidische Isometrien sind überall nützlich und wichtig. Die folgende Definition fixiert die relevanten Bezeichnungen.

Affin-euklidische Isometrien

Definition U2C: isometrische Affinität aka affin-euklidische Isometrie

Gegeben seien affin-euklidische Räume X über U und Y über V.

(0) Eine **affine Isometrie** $(f, g) : X \cong Y$ ist ein Paar zueinander inverser $\mathbb{R}$–affiner, metrikerhaltender Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$

(1) Eine **isometrische Affinität** ist ein isometrischer Automorphismus $f : X \xrightarrow{\sim} X$. Diese bilden die Gruppe $(\mathrm{AGO}(X), \circ, \mathrm{id}_X)$ mit

$$\mathrm{AGO}(X) = \{\, f : X \xrightarrow{\sim} X \,\} \leq (\mathrm{Sym}(X), \circ, \mathrm{id}_X).$$

(2) Speziell für $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n'}$ erhalten wir die **affin-orthogonale Gruppe**

$$\mathrm{AGO}_n(\mathbb{R}) := \left\{\, A' = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{smallmatrix}\right] \,\middle|\, A \in \mathrm{GO}_n(\mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^n \,\right\} \leq \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Darin liegt, normal, die **spezielle affin-orthogonale Gruppe**

$$\mathrm{ASO}_n(\mathbb{R}) := \left\{\, A' = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{smallmatrix}\right] \,\middle|\, A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^n \,\right\} \leq \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Affin-euklidische Isometrien

Übung: Erklären Sie $\mathrm{AGO}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GO}_{n+1}(\mathbb{R}) = \mathrm{GO}_n(\mathbb{R})$, ebenso SO.

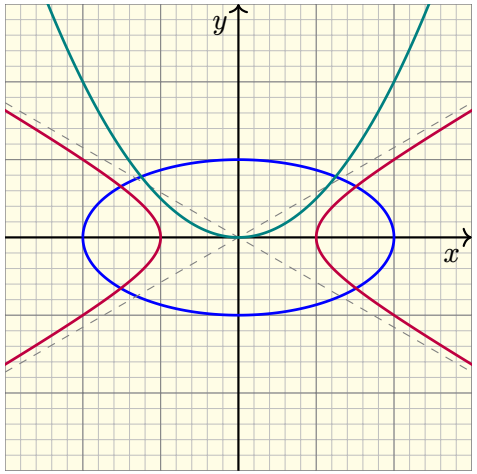
⚠ Wir haben in Definition U2A zunächst allgemeine **Affinitäten** erklärt als invertierbare affine Abbildungen $f : X \xrightarrow{\sim} X$. Nun statten wir X mit einer Metrik d aus. Von einer Affinität verlangen wir dann, die Metrik zu erhalten. Dies nennen wir daher **euklidisch-isometrische Affinität** oder auch **affin-euklidische Isometrie**. Man nennt dies anschaulich auch eine **euklidische Bewegung** und denkt an Drehungen und Verschiebungen.

Euklidische Affinitäten nutzen wir immer dort als Transformationen, wo wir Abstände und Winkel erhalten wollen, also isometrisch arbeiten. Allgemeine Affinitäten sind bequemer, diese nutzen wir daher gerne in allen Anwendungen, wo uns Abstände und Winkel nicht wichtig sind oder diese als zusätzliche Struktur gar nicht definiert sind.

Zur Illustration zeige ich das an Quadriken in der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ (Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln) und im reellen Raum $\mathbb{R}^3$.

Beispiele zu ebenen Quadriken – in Hauptachsen

Aufgabe: Zeichnen Sie $x^2/4 + y^2 = 1$ und $x^2 - 3y^2 = 1$ und $x^2 = 2y$ in $\mathbb{R}^2$.



Gemeint ist damit die Lösungsmenge $E = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/4 + y^2 = 1\,\}$ und $H = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 = 1\,\}$ und $P = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 2y\,\}$.

Beispiele zu ebenen Quadriken – in Hauptachsen

Wie zeichnen Sie E? Wir betrachten zunächst Schnitte mit den Achsen: Für $y = 0$ gilt $x = \pm 2$. Für $x = 0$ gilt $y = \pm 1$. Wir können weitere Punkte berechnen, oder nun nutzen, dass E eine Ellipse in Hauptachsenform ist!

Wie zeichnen Sie H? Für $y = 0$ gilt $x = \pm 1$. Für $x = 0$ gibt es gar keine Lösung. Wir können hier jedoch bequem auflösen zu $x = \pm\sqrt{1 + 3y^2}$. Asymptotisch gilt $x = \pm\sqrt{3}y$. Diese Asymptoten helfen beim Zeichnen!

Wie zeichnen Sie P? Das ist die gute alte Parabel! Diese ist mit $y = x^2/2$ bereits nach y aufgelöst, Sie können also ein paar Werte für x einsetzen, dann verbinden Sie diese Punkte $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ zur Parabel $P \subseteq \mathbb{R}^2$.

Wir haben auf Seite U121 mit Beispielen der Geographie begonnen. Nun wenden wir allgemeine und euklidische Affinitäten der Ebene $\mathbb{R}^2$ ebenso auf mathematische Objekte an, hier im Beispiel auf die Ellipse E, die Hyperbel H und die Parabel P in der affin-euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$.

Beispiele zu ebenen Quadriken – allgemeine Affinität

Aufgabe: Schreiben Sie diese Gleichungen und zeichnen Sie diese Kurven in den neuen Koordinaten $u = 2 + x$ und $v = 1 + y + x/2$.

Lösung: Dies ist eine (nicht isometrische!) Affinität $T \in \mathrm{AGL}_2\,\mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

Übung: Rechnen Sie es nach! Einsetzen und Nennerlöschen ergibt:

$$\begin{aligned} E: &\quad 0 = u^2 - 2uv + 2v^2 - 2u, \\ H: &\quad 0 = u^2 + 12uv - 12v^2 - 16u + 12, \\ P: &\quad 0 = u^2 - 3u - 2v + 4. \end{aligned}$$

Dieser algebraischen Umformung der Gleichung entspricht die folgende geometrische Transformation der Lösungsmenge.

Übung: Prüfen Sie Graphik und Rechnung soweit möglich nach. Wie lesen Sie daran die Umkehrtransformation graphisch ab?

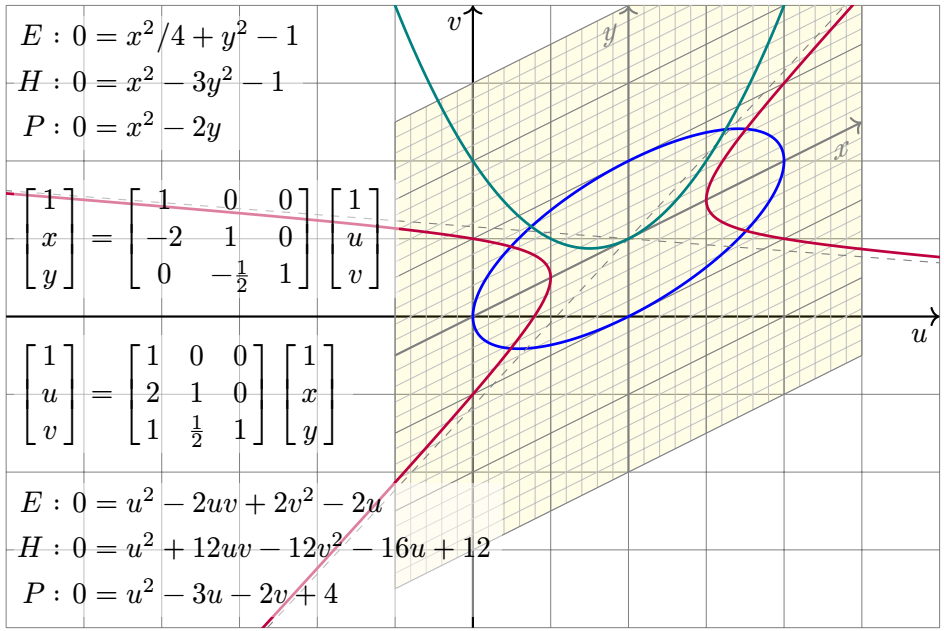
Beispiele zu ebenen Quadriken – allgemeine Affinität

$E: 0 = x^2/4 + y^2 - 1$
$H: 0 = x^2 - 3y^2 - 1$
$P: 0 = x^2 - 2y$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

$E: 0 = u^2 - 2uv + 2v^2 - 2u$
$H: 0 = u^2 + 12uv - 12v^2 - 16u + 12$
$P: 0 = u^2 - 3u - 2v + 4$



Beispiele zu ebenen Quadriken – euklidische Affinität

Aufgabe: Schreiben Sie diese Gleichungen und zeichnen Sie diese Kurven in den neuen Koordinaten $u = 2 + (x-y)/\sqrt{2}$ und $v = 1 + (x+y)/\sqrt{2}$.

Lösung: Dies ist eine (euklidisch-isometrische!) Affinität $T \in \mathrm{AGO}_2\,\mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix}1\\u\\v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x\\y\end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix}1\\x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\u\\v\end{bmatrix}$$

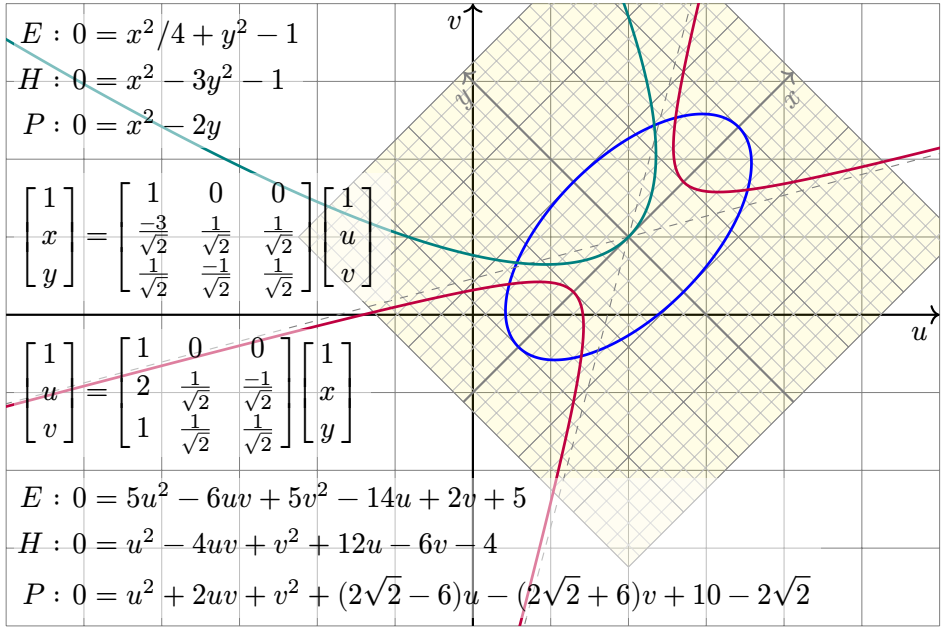
Übung: Rechnen Sie dies nach! Einsetzen und Nennerlöschen ergibt:

$$\begin{aligned} E:&\quad 0 = 5u^2 - 6uv + 5v^2 - 14u + 2v + 5,\\ H:&\quad 0 = u^2 - 4uv + v^2 + 12u - 6v - 4,\\ P:&\quad 0 = u^2 + 2uv + v^2 + (2\sqrt{2}-6)u - (2\sqrt{2}+6)v + 10 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Diese Affinität ist euklidisch: Sie erhält Abstände und Winkel!
Dies ist in der folgenden Graphik sehr schön zu erkennen.

Übung: Prüfen Sie Graphik und Rechnung soweit möglich nach.
Wie lesen Sie daran die Umkehrtransformation graphisch ab?

Beispiele zu ebenen Quadriken – euklidische Affinität



Ausblick: Klassifikation der ebenen Quadriken

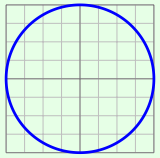
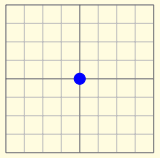
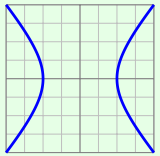
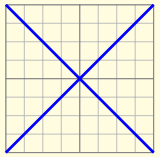
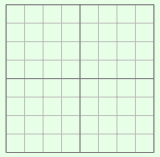
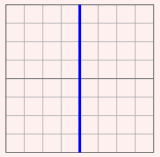
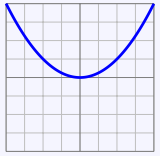
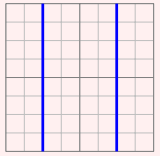
In diesen Beispielen beginnen wir mit Quadriken in Hauptachsenform, also besonders schön und übersichtlich. Die Koordinatentransformation macht sie unschön und unübersichtlich. Das ist möglich, illustrativ und lehrreich, doch meist wollen wir genau umgekehrt vorgehen!

Unser Ziel im nächsten Kapitel ist genau diese Klassifikation:
Was sind Quadriken und welche Normalformen gibt es für sie?
(a) Wie kommen wir affin zu bestens angepassten Koordinaten?
(b) Wir kommen wir affin-euklidisch sogar zu Hauptachsen?

In diesem Kapitel haben wir zunächst die Werkzeuge bereit gelegt: allgemeine und euklidische Affinitäten. So können Sie sich diese schon vorab in Ruhe anschauen und im Quiz einüben und sich vorbereiten. Dann sind Sie bestens vorbereitet auf die kommende Klassifikation.

Ich zeige dazu noch ein schönes dreidimensionales Beispiel,
das Sie vermutlich überraschen und erheitern und erhellen wird.

Ausblick: Klassifikation der ebenen Quadriken

Ellipse $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$		Punkt $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 0$	
Hyperbel $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$		schneidendes Geradenpaar $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0$	
leere Menge $-\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$		Gerade $\frac{x^2}{\alpha^2} = 0$	
Parabel $\frac{x^2}{\alpha^2} = 2y$		paralleles Geradenpaar $\frac{x^2}{\alpha^2} = 1$	

Beispiel: zwei reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$

Aufgabe: (1) Zeichnen Sie die Flächen $z = x^2 - y^2$ und $z = uv$ in $\mathbb{R}^3$, gemeint ist jeweils in $\mathbb{R}^3$ die Lösungsmenge der genannten Gleichung:

$$P = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\,\},$$
$$Q = \{\,(u,v,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = uv\,\}.$$

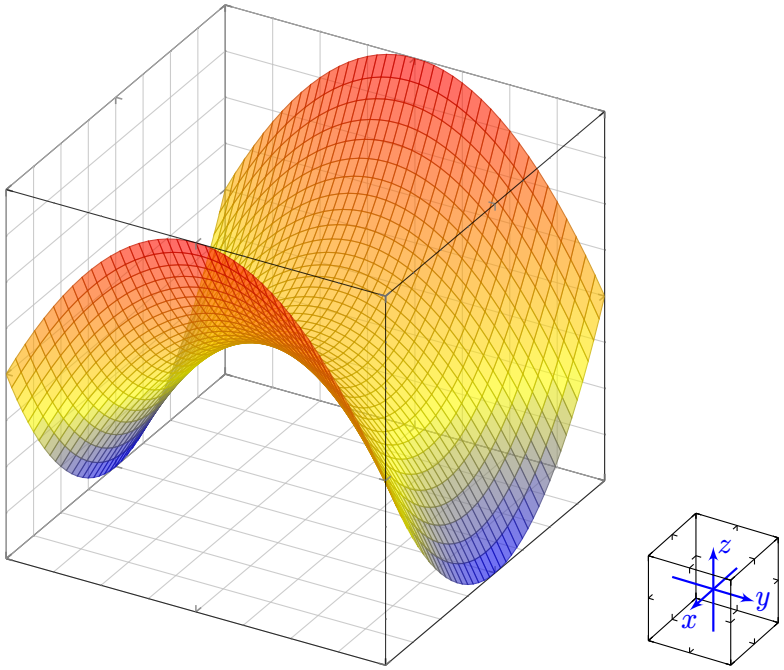
⚠ Zeichnen braucht Übung! Hilfreicher Trick, vor allem wenn Sie per Hand zeichnen: Ebene Zeichnungen sind wesentlich leicher! Wir zeichnen daher zunächst einige Schnitte mit Koordinatenebenen, etwa $z = 0, \pm 1, \ldots$, oder $y = 0, \pm 1, \ldots$, oder $x = 0, \pm 1, \ldots$.

☺ Letztlich tut der Computer beim Plotten auch nichts anderes. Bitte üben Sie es zuerst einmal selbst, bis Sie genug Routine haben. Dann können Sie es guten Gewissens an den Computer delegieren. Ebenso *prüfen* Sie damit Zeichnungen, etwa die beiden Folgenden.

Was Sie hier zeichnen und bewundern heißt **hyperbolisches Paraboloid**. In einer Sichtweise besteht es aus Parabeln, in der anderen aus Geraden!

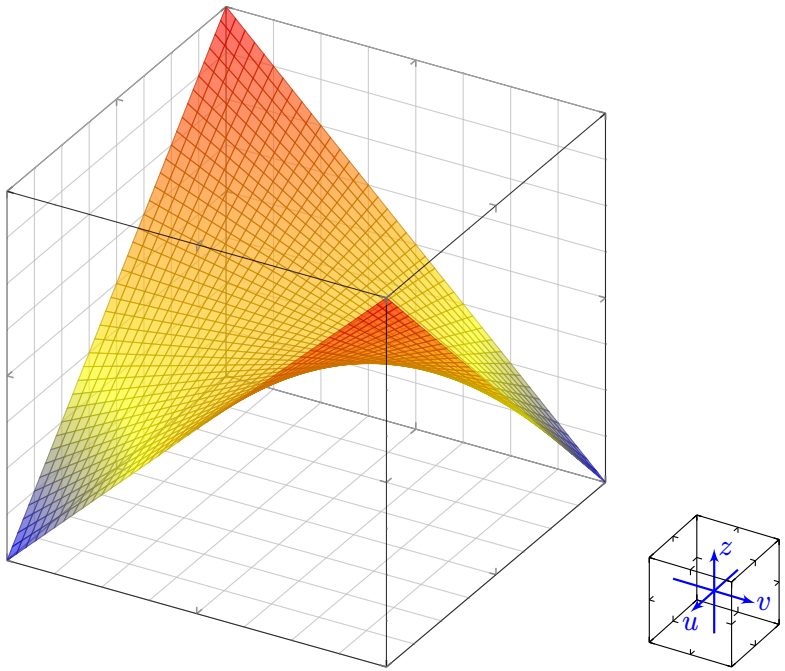
Beispiel: zwei reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$

$z = x^2 - y^2$



Beispiel: zwei reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$

$z = uv$



Beispiel: zwei reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$

Aufgabe: (1) Zeichnen Sie die Flächen $z = x^2 - y^2$ und $z = uv$ in $\mathbb{R}^3$.
(2) In welchem Sinne ist das dieselbe Fläche in anderen Koordinaten?

Lösung: Wir erhalten $(\mathbb{R}^3, P) \cong (\mathbb{R}^3, Q)$ durch die Transformation

$$\left.\begin{aligned} u &= x + y \\ v &= x - y \end{aligned}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{aligned} x &= \tfrac{u+v}{2} \\ y &= \tfrac{u-v}{2} \end{aligned}\right.$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

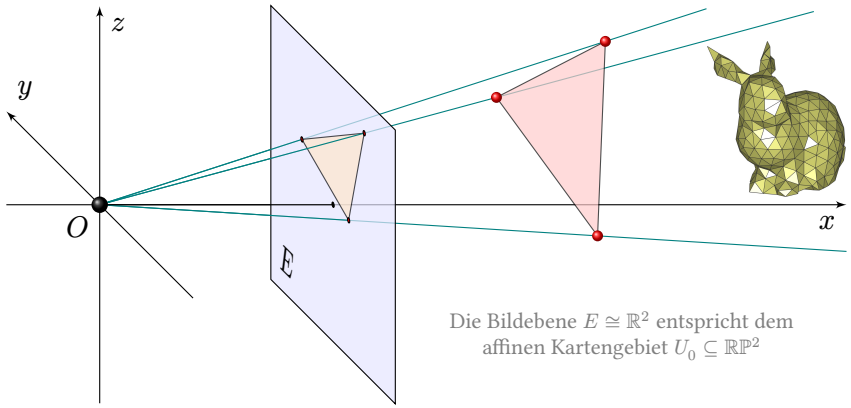
Alternative: Das ähnliche Beispiel $z = x^2 - y^2 = 2uv$ transformieren wir durch eine euklidische Isometrie:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Solche Transformationen können wir auf zwei Arten interpretieren:
Passiv: Wir ändern unsere Koordinaten, doch betrachten dasselbe Objekt.
Aktiv: Wir transformieren unser Objekt, behalten aber feste Koordinaten.

Perspektive: Geraden werden zu Punkten.

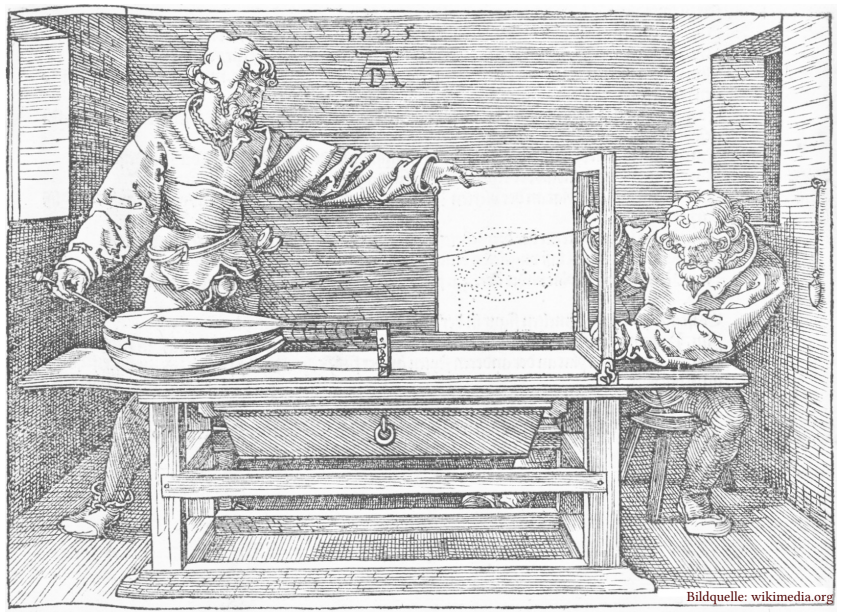
Auge oder Kamera nutzen die Zentralprojektion auf eine Bildebene E:
Alle Punkte auf einer Ursprungsgeraden werden zu einem Bildpunkt.



Die Projektion löscht die Tiefeninformation: Die dreidimensionale Szene wird zum zweidimensionalen Bild projiziert, perspektivische Darstellung. Zusätzliche Tiefeninformation ist wichtig für praktische Anwendungen: Astronomie (Parallaxe), Photographie (Tiefenschärfe), Computer Vision.

Perspektive: Geraden werden zu Punkten.

Erforschung der Grundlagen perspektivischer Darstellung in der Renaissance...



Bildquelle: wikimedia.org

In den letzten Jahrzehnten hat die Computergraphik diese Technik perfektioniert.

Albrecht Dürers *Underweysung* zum Perspektivproblem

Projektive Räume: Geraden sind die neuen Punkte!

Definition U3A: der projektive Raum $\mathbb{P}(V)$

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Seine multiplikative Gruppe ist $\mathbb{K}^\times = \mathbb{K} \smallsetminus \{0\}$.

Diese operiert durch Skalierung $V \circlearrowleft \mathbb{K}^\times$ auf jedem $\mathbb{K}$–Vektorraum V, ebenso $V^\sharp \circlearrowleft \mathbb{K}^\times$ auf der Menge $V^\sharp = V \smallsetminus \{0\}$ aller Nicht-Null-Vektoren.

Jede Bahn / Äquivalenzklasse ist eine Gerade (jeweils ohne Nullpunkt). Wir definieren den **projektiven Raum** $\mathbb{P}(V)$ als den Quotienten:

$$q : V^\sharp \twoheadrightarrow \mathbb{P}(V) := V^\sharp/\mathbb{K}^\times : x \mapsto q(x) = [x] = x\mathbb{K}^\times$$

Der Übergang von V zu $\mathbb{P}(V)$ heißt **Projektiv(is)ierung**.

Genau dann erzeugen zwei Vektoren $x, y \in V^\sharp$ dieselbe Gerade $x\mathbb{K} = y\mathbb{K}$, geschrieben $x \sim y$, wenn ein Skalar $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ mit $x\lambda = y$ existiert.
Dies ist eine Äquivalenzrelation auf $V^\sharp$. Die Äquivalenzklasse $x\mathbb{K}^\times$ ist die von x aufgespannte Gerade (hier immer ohne den Nullpunkt 0).
Der Quotientenraum $V^\sharp/_\sim$ ist der oben definierte projektive Raum $\mathbb{P}(V)$.
Kurz gesagt, als Slogan: Die Punkte von $\mathbb{P}(V)$ sind die Geraden von V.

Projektive Räume: homogene Koordinaten

Als kanonisches Beispiel betrachten wir den **Koordinatenraum**

$$V = \mathbb{K}^{n+1} = \{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \mid x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \}.$$

Den **projektiven Raum** schreiben wir dann $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{KP}^n$ mit

$$q : \mathbb{K}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{KP}^n : (x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_0 : x_1 : \dots : x_n] = x\mathbb{K}^\times.$$

Diese Schreibweise nennen wir **homogene Koordinaten**. Für $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ gilt:

$$[x_0\lambda : x_1\lambda : \dots : x_n\lambda] = [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$$

☺ Speziell im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ trägt $\mathbb{K}^{n+1}$ die euklidische Topologie, $\mathbb{K}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ ist ein Teilraum, und $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{KP}^n$ der Quotientenraum. Diese Räume $\mathbb{RP}^n$ und $\mathbb{CP}^n$ untersuchen wir in der Topologie genauer.

Diese Quotientenkonstruktion ist wunderbar einfach, konkret, explizit. Schwierig ist allein die globale Form des Quotientenraumes, dazu später.

Die Projektivierung können wir auf jeden Vektorraum anwenden, auch auf unendlich-dimensionale Vektorräume und auf Untervektorräume.

Projektive Räume: Teilräume

Projektivierung respektiert Teilräume: Ist $U \leq V$ ein Untervektorraum, so operiert $\mathbb{K}^\times$ auf der Teilmenge $U^\sharp \subseteq V^\sharp$, und wir erhalten $\mathbb{P}(U) \subseteq \mathbb{P}(V)$.

Für die Koordinatenräume haben wir die kanonischen Einbettungen:

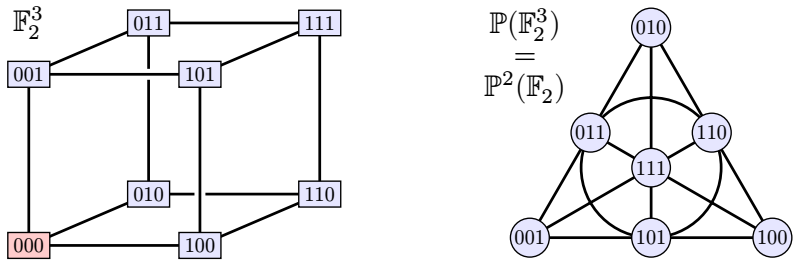
$$\begin{aligned} \mathrm{inc} : \mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}^{n+1} &: \quad (x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{n-1}, 0) \\ \mathrm{inc} : \mathbb{KP}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{KP}^n &: [x_0 : \dots : x_{n-1}] \mapsto [x_0 : \dots : x_{n-1} : 0] \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^1 \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] & \mathbb{K}^2 \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] & \mathbb{K}^3 \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] & \mathbb{K}^4 \arrow[r, hook] & \dots \\
\mathbb{K}^1 \smallsetminus \{0\} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] \arrow[d, two heads] & \mathbb{K}^2 \smallsetminus \{0\} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] \arrow[d, two heads] & \mathbb{K}^3 \smallsetminus \{0\} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] \arrow[d, two heads] & \mathbb{K}^4 \smallsetminus \{0\} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & \dots \\
\mathbb{KP}^0 \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] & \mathbb{KP}^1 \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] & \mathbb{KP}^2 \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] & \mathbb{KP}^3 \arrow[r, hook] & \dots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{KP}^n \supset \mathbb{KP}^{n-1} &= \{\, [x_0 : \dots : x_{n-1} : 0] \,\}, \quad \text{also} \\ \mathbb{KP}^n \smallsetminus \mathbb{KP}^{n-1} &= \{\, [x_0 : \dots : x_{n-1} : 1] \,\} \cong \mathbb{K}^n \\ \mathbb{KP}^n \qquad\qquad &\cong \mathbb{K}^0 \sqcup \mathbb{K}^1 \sqcup \mathbb{K}^2 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{K}^n \end{aligned}$$

Projektive Räume: die Fano–Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$

Ein schönes Beispiel erhalten wir für den Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ und $n = 2$:



Hier besteht $V = \mathbb{F}_2^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ aus acht Vektoren, also $V^\sharp = \mathbb{F}_2^3 \smallsetminus \{0\}$ aus sieben. Jeder Vektor $v \in V^\sharp$ spannt die Gerade $\{0, v\} \subseteq \mathbb{F}_2^3$ auf, seine Äquivalenzklasse ist also $\{v\}$. Die sieben Geraden in $\mathbb{F}_2^3$ sind die Punkte des projektiven Raumes $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^3) = \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$.

Die obige Illustration zeigt $\mathbb{F}_2^3$ als Würfel und $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^3)$ als **Fano–Ebene**. Die sieben Ebenen in $\mathbb{F}_2^3$ betrachten wir als Geraden in $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^3) = \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$. Dies ist ein berühmt-elegantes Minimalmodell der **Inzidenzgeometrie**. Je zwei Punkte inzidieren mit genau einer Geraden, und umgekehrt.

Projektive Räume über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$

Beispiel / Übung U3B: endliche projektive Räume

Wie viele Elemente hat $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$? Wie erklären Sie das geometrisch?

☺ Die Menge $\mathbb{F}_q^{n+1}$ hat q^{n+1} Elemente. Jede Gerade $\mathbb{F}_q \cdot v$ hat q Elemente.
? Dies ist *keine* Zerlegung, da alle Geraden den Nullpunkt enthalten.

Lösung: Die Menge $V^\sharp = \mathbb{F}_q^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ hat genau $q^{n+1} - 1$ Elemente. Jede Gerade $\mathbb{F}_q^\times v$ hat genau $q - 1$ Elemente. Dies ist eine Zerlegung!

$$\sharp\mathbb{P}(V) = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

Beispiele:

$$\sharp\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2) = \frac{8 - 1}{2 - 1} = 7 = 1 + 2 + 4$$

$$\sharp\mathbb{P}^3(\mathbb{F}_5) = \frac{625 - 1}{5 - 1} = 156 = 1 + 5 + 25 + 125$$

Dahinter steckt die affine Zerlegung $\mathbb{KP}^n \cong \mathbb{K}^0 \sqcup \mathbb{K}^1 \sqcup \mathbb{K}^2 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{K}^n$.

Projektive Räume über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$

☺ Wir nutzen dankend die Bahnengleichung, hier frei.
Touristin fragt Schäfer: „Wie zählen Sie so schnell Ihre Schafe?“
— „Das ist ganz einfach, ich zähle die Beine und teile durch vier.“

☺ Hinter der geometrischen Summe steckt tatsächlich Geometrie!

$$\begin{aligned} \mathbb{KP}^n \supset \mathbb{KP}^{n-1} &= \{\, [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{KP}^n \mid x_n = 0 \,\}, \quad \text{also} \\ \mathbb{KP}^n \smallsetminus \mathbb{KP}^{n-1} &= \{\, [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{KP}^n \mid x_n = 1 \,\} \cong \mathbb{K}^n. \end{aligned}$$

Aus der kanonischen **Filtrierung** $\mathbb{KP}^0 \subseteq \mathbb{KP}^1 \subseteq \mathbb{KP}^2 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{KP}^n$ gewinnen wir die **Zellzerlegung** $\mathbb{KP}^n \cong \mathbb{K}^0 \sqcup \mathbb{K}^1 \sqcup \mathbb{K}^2 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{K}^n$.

☺ Dies erklärt die Formel $\sharp\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ geometrisch: Die abstrakten Zahlen $1, q, q^2, \dots, q^n$ entsprechen konkreten Mengen! Ja, Sie lesen richtig: Zahlen sind abstrakt, Mengen sind konkret.

☺ Das ist eine Illustration für algebraisch-geometrischen Zahlenzauber. Diese Art der **Konkretisierung** ist oft nützlich und überaus erfolgreich. Vornehm heißt dies **Kategorifizierung**: Unsere abstrakt-algebraische Rechnung wird in einer konkreten Kategorie erklärt und interpretiert.

Die Gruppe $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$ operiert auf $\mathbb{K}^n$.

U309

Bemerkung: (0) Sei $A \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$. Für $x \in \mathbb{K}^n$ gilt $Ax \in \mathbb{K}^n$.

$$\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K} \curvearrowright \mathbb{K}^n : (A, x) \mapsto Ax$$

(1) Aus $x \neq 0$ folgt $Ax \neq 0$. Somit operiert A auf $\mathbb{K}^n \smallsetminus \{0\}$.

$$\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K} \curvearrowright \mathbb{K}^n \smallsetminus \{0\} : (A, x) \mapsto Ax$$

(2) Für $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ gilt $A(\lambda x) = \lambda(Ax)$. Somit operiert A auf $\mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$.

$$\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K} \curvearrowright \mathbb{P}(\mathbb{K}^n) : (A, [x]) \mapsto [Ax]$$

(3) Dabei operieren A und λA gleich: $[(\lambda A)x] = [\lambda(Ax)] = [Ax]$.

$$\mathrm{PGL}_n\,\mathbb{K} \curvearrowright \mathbb{P}(\mathbb{K}^n) : ([A], [x]) \mapsto [Ax]$$

Wir nennen daher zwei Matrizen $A, A' \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$ **projektiv äquivalent**, $A \sim A'$, wenn $A' = \lambda A$ mit $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ gilt. Dies ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$ und zudem verträglich mit der Matrixmultiplikation, denn $(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)AB$. Der Quotient ist die **projektive lineare Gruppe**.

Die projektive lineare Gruppe PGL

U310

Definition U3c: die projektive lineare Gruppe

Sei $\mathbb{K}$ ein kommutativer Ring und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$ hat das Zentrum $\mathrm{ZGL}_n\,\mathbb{K} = \{\,\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{K}^\times\,\} \cong \mathbb{K}^\times$.

Die Quotientengruppe ist die **projektive allgemeine lineare Gruppe**

$$\begin{aligned} \mathrm{PGL}_n\,\mathbb{K} \;&:=\; \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K} \,/\, \mathrm{ZGL}_n\,\mathbb{K} \\ &\quad\text{mit}\quad \mathrm{ZGL}_n\,\mathbb{K} = \{\,\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{K}^\times\,\}. \end{aligned}$$

Entsprechend definieren wir die **projektive spezielle lineare Gruppe**

$$\begin{aligned} \mathrm{PSL}_n\,\mathbb{K} \;&:=\; \mathrm{SL}_n\,\mathbb{K} \,/\, \mathrm{ZSL}_n\,\mathbb{K} \\ &\quad\text{mit}\quad \mathrm{ZSL}_n\,\mathbb{K} = \{\,\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{K}^\times,\ \lambda^n = 1\,\}. \end{aligned}$$

Wiederholung: Was ist das Zentrum $Z(\mathbb{K}^{n\times n})$ des Matrixrings? (K1T)
Zeigen Sie $Z(\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}) = \mathrm{ZGL}_n\,\mathbb{K}$ und $Z(\mathrm{SL}_n\,\mathbb{K}) = \mathrm{ZSL}_n\,\mathbb{K}$ wie behauptet.

Die projektive orthogonale Gruppe PGO

U311
Ausführung

Definition U3c: die projektive orthogonale Gruppe

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ haben wir die **projektive allgemeine orthogonale Gruppe**

$$\begin{aligned} \mathrm{PGO}_n\,\mathbb{R} \;&:=\; \mathrm{GO}_n\,\mathbb{R} \,/\, \mathrm{ZGO}_n\,\mathbb{R} \\ &\quad\text{mit}\quad \mathrm{ZGO}_n\,\mathbb{R} = \{\,\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}\,\} \end{aligned}$$

Ebenso definieren wir die **projektive spezielle orthogonale Gruppe**

$$\begin{aligned} \mathrm{PSO}_n\,\mathbb{R} \;&:=\; \mathrm{SO}_n\,\mathbb{R} \,/\, \mathrm{ZSO}_n\,\mathbb{R} \\ &\quad\text{mit}\quad \mathrm{ZSO}_n\,\mathbb{R} = \{\,\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{S}^0,\ \lambda^n = 1\,\} \end{aligned}$$

Übung: Zeigen Sie $Z(\mathrm{GO}_n\,\mathbb{R}) = \mathrm{ZGO}_n\,\mathbb{R}$ und $Z(\mathrm{SO}_n\,\mathbb{R}) = \mathrm{ZSO}_n\,\mathbb{R}$.
Die letzte Gruppe ist $\{\pm 1\}$ für n gerade, doch nur $\{1\}$ für n ungerade.
Zum Beispiel gilt $\mathrm{PGO}_2\,\mathbb{R} = \mathrm{GO}_2\,\mathbb{R}/\{\pm 1\}$ und $\mathrm{PSO}_2\,\mathbb{R} = \mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}/\{\pm 1\}$.
Hingegen gilt $\mathrm{PGO}_3\,\mathbb{R} = \mathrm{GO}_3\,\mathbb{R}/\{\pm 1\}$, doch $\mathrm{PSO}_3\,\mathbb{R} = \mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}/\{1\}$.

Die projektive unitäre Gruppe PGU

U312
Ausführung

Definition U3c: die projektive unitäre Gruppe

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ haben wir die **projektive allgemeine unitäre Gruppe**

$$\begin{aligned} \mathrm{PGU}_n\,\mathbb{C} \;&:=\; \mathrm{GU}_n\,\mathbb{C} \,/\, \mathrm{ZGU}_n\,\mathbb{C} \\ &\quad\text{mit}\quad \mathrm{ZGU}_n\,\mathbb{C} = \{\,\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{S}^1\,\} \end{aligned}$$

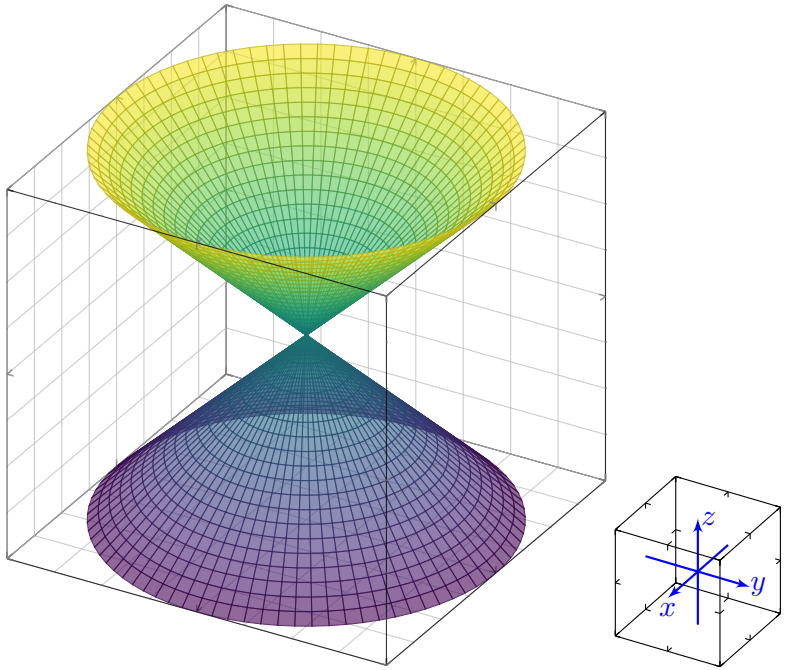
Ebenso definieren wir die **projektive spezielle unitäre Gruppe**

$$\begin{aligned} \mathrm{PSU}_n\,\mathbb{C} \;&:=\; \mathrm{SU}_n\,\mathbb{C} \,/\, \mathrm{ZSU}_n\,\mathbb{C} \\ &\quad\text{mit}\quad \mathrm{ZSU}_n\,\mathbb{C} = \{\,\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{S}^1,\ \lambda^n = 1\,\} \end{aligned}$$

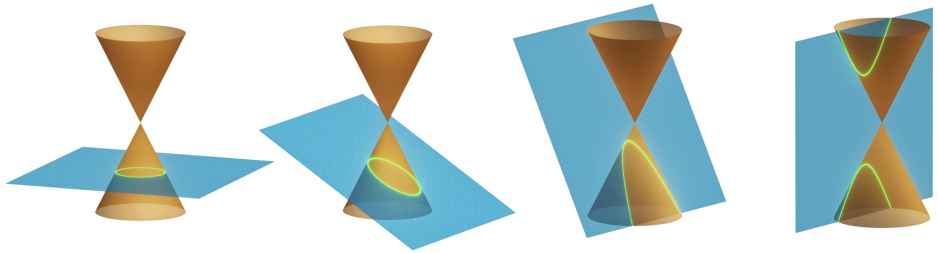
Übung: Zeigen Sie $Z(\mathrm{GU}_n\,\mathbb{C}) = \mathrm{ZGU}_n\,\mathbb{C}$ und $Z(\mathrm{SU}_n\,\mathbb{C}) = \mathrm{ZSU}_n\,\mathbb{C}$.
Die letzte Gruppe besteht somit genau aus den n-ten Einheitswurzeln.
Zum Beispiel gilt $\mathrm{PGU}_2\,\mathbb{C} = \mathrm{GU}_2\,\mathbb{C}/\,\mathrm{GU}_1\,\mathbb{C}$ und $\mathrm{PSU}_2\,\mathbb{C} = \mathrm{SU}_2\,\mathbb{C}/\{\pm 1\}$.

Kegelschnitte: affine Karten im projektiven Raum

$x^2 + y^2 = z^2$



Kegelschnitte: affine Karten im projektiven Raum



Aufgabe: (0) Zeichnen Sie die Quadrik $x^2 + y^2 = z^2$ in $\mathbb{R}^3$.
Zeichnen Sie jeweils den Schnitt mit folgenden affinen Ebenen:
(1) $(u, v, 1)$ (2) $(u, v, 1 + u/2)$ (3) $(u, v, 1 + u)$ (4) $(1, v, u)$

Lösungsskizze: (1) $u^2 + v^2 = 1$ ist ein Kreis.
(2) $u^2 + v^2 = 1 + u + u^2/4$ ist eine Ellipse.
(3) $u^2 + v^2 = 1 + 2u + u^2$ ist eine Parabel.
(4) $1 + v^2 = u^2$ ist eine Hyperbel.

Kegelschnitte: affine Karten im projektiven Raum

Bei Kegelschnitten wirken all unsere bisherigen geometrischen Begriffe, lineare und affine und projektive Räume, wunderbar zusammen.

Das definierende Polynom $P(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ist homogen vom Grad 2, das bedeutet $P(x\lambda, y\lambda, z\lambda) = P(x, y, z)\lambda^2$. Die Nullstellenmenge $Q = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid P(x, y, z) \,\}$ können wir also projektiv betrachten, als Teilmenge in $\mathbb{RP}^2$. Global mag dies zunächst noch schwierig sein, doch leicht können wir sie lokal betrachten, jeweils in affinen Karten. Genau das dürfen Sie in dieser Aufgabe selbst ausprobieren!

Übung: Sie sehen oben zunächst die Skizze, führen Sie dies genauer aus: Zeichnen Sie Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel in der u–v–Ebene. Welche der ebenen Quadriken von Seite U220 können Sie erzeugen?

Übung: Alles nochmal euklidisch: Wie parametrisieren Sie die vier affinen Ebenen euklidisch-isometrisch? Wie bringen Sie Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel dann euklidisch-isometrisch in Hauptachsen?

Vieles können Sie schon jetzt. Das nächste Kapitel erklärt es allgemein.

Kegelschnitte: affine Karten im projektiven Raum

☺ Kreise, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln sind vertraute Objekte.
Die dreidimensionale Sichtweise als Kegelschnitte lehrt eindrücklich:
Diese scheinbar sehr verschiedenen Objekte sind in Wirklichkeit
nur variierende affine Aspekte derselben projektiven Kurve!

The introduction of numbers as coordinates [...] is an act of violence whose only practical vindication is the special calculatory manageability.
Hermann Weyl (1885–1955), *Philosophy of Mathematics and Natural Science*

Wir betrachten den Kegel von verschiedenen Seiten,
das heißt wie oben: in verschiedenen affinen Karten.
Je nach Karte entstehen verschiedene ebene Quadriken,
alle gemeinsam fügen sich zum Kegel zusammen.

Verschiedene Sichtwinkel zeigen nur einen Ausschnitt des Gesamtbildes.
Das erinnert an die Weisen, die je nur einen Teil der Wahrheit erfassen.
Kunstvoll-listig erzählt dies das Gedicht von John Godfrey Saxe (1872),
hinreißend gesungen von Natalie Merchant (2009), `youtu.be/3lyJLFMSVbY`.

Homogene Polynome

In dem Beispiel zu Kegelschnitten steckt sowohl elegante Einfachheit als auch profunde Raffinesse, auf die ich hier kurz eingehen möchte.

Wir betrachten den Polynomring $R = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ in den Variablen $X_1, \dots, X_n$ über dem CRing $\mathbb{K}$. Zum Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ hat das Monom $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ den Totalgrad $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Wir setzen dazu

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^n_{\leq d} &:= \{\alpha \in \mathbb{N}^n \,;\, |\alpha| \leq d\}, \\ \mathbb{N}^n_d &:= \{\alpha \in \mathbb{N}^n \,;\, |\alpha| = d\}. \end{aligned}$$

Ein **homogenes Polynom vom Totalgrad d** hat die Form

$$P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n_d} p_\alpha X^\alpha \quad \text{mit } p_\alpha \in \mathbb{K}.$$

Für jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt demnach Homogenität, $P(X\lambda) = P(X)\lambda^d$.

Homogenisierung

Hat das Polynom $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ den Totalgrad $\leq d$, so können wir es **homogenisieren** zu $h_d(P) \in \mathbb{K}[X_0, X_1, \dots, X_n]$ vom Totalgrad d durch

$$P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n_{\leq d}} p_\alpha X^\alpha \quad \mapsto \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n_{\leq d}} p_\alpha X^\alpha X_0^{d-|\alpha|} = h_d(P).$$

Beispiel: Wie homogenisieren Sie in $\mathbb{R}[x, y, z]$ mit z zum Grad 2?

Ellipse:	$x^2/4 + y^2 - 1$	$\mapsto$	$x^2/4 + y^2 - z^2$
Hyperbel:	$x^2 - 3y^2 - 1$	$\mapsto$	$x^2 - 3y^2 - z^2$
Parabel:	$x^2 - 2y$	$\mapsto$	$x^2 - 2yz$

Wir spendieren zu $X_1, \dots, X_n$ eine weitere Variable X_0 und nutzen diese dazu, alle Monome $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ mit $|\alpha| \leq d$ auf den Totalgrad d zu heben.

Affine und projektive Nullstellenmenge

Jedes Polynom $P \in \mathbb{K}[X_0, X_1, \dots, X_n]$ definiert seine **Nullstellenmenge**

$$V(P; \mathbb{K}^{n+1}) = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid P(x_0, \dots, x_n) = 0\}.$$

Ist das Polynom P homogen, so ist seine Nullstellenmenge V ein **Kegel**: Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in V$ gilt $x\lambda \in V$, denn $P(x\lambda) = P(x)\lambda^d = 0$.

Daraus erhalten wir zu P die **projektive Nullstellenmenge**

$$V(P; \mathbb{KP}^n) = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{KP}^n \mid P(x_0, \dots, x_n) = 0\}.$$

⚠ Das Polynom P definiert die Funktion $f_P : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K} : x \mapsto P(x)$. Auf $\mathbb{KP}^n$ hingegen erhalten wir aus P keine wohldefinierte Abbildung, denn $P(\lambda x) = \lambda^d P(x)$. Dennoch ist die Nullstellenmenge wohldefiniert.

Affine und projektive Nullstellenmenge

⚠ Für ein beliebiges Polynom $P \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ ergibt es keinen Sinn zu fragen, ob ein Punkt $[x] \in \mathbb{KP}^n$ eine Nullstelle von P ist, also $P(x) = 0$, denn diese Eigenschaft ist zwar für Punkte $x \in \mathbb{K}^{n+1}$ definiert, aber nicht invariant unter Skalierung. Für homogene Polynome gelingt es!

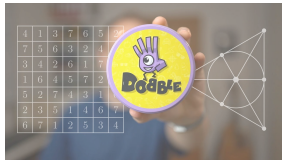
Beispiel: Die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ definiert als Lösungsmenge den Kreis $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Homogenisierung ergibt die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ und somit den Kegel $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$.

Im obigen Beispiel zu Kegelschnitten sind wir vom Kegel $x^2 + y^2 = z^2$ ausgegangen. Als Schnitt mit der affinen Ebene $(x, y, 1)$ erhalten wir den Kreis $x^2 + y^2 = 1$. Durch Homogenisierung gelangen wir vom Kreis $x^2 + y^2 = 1$ in der affinen Ebene zurück zum Kegel $x^2 + y^2 = z^2$ im $\mathbb{R}^3$. Dies interpretieren wir als Kurve in der projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$.

Slogan: Homogenisierung macht affine Kurven zu projektiven Kurven.

Kapitel U

Bonusmaterial

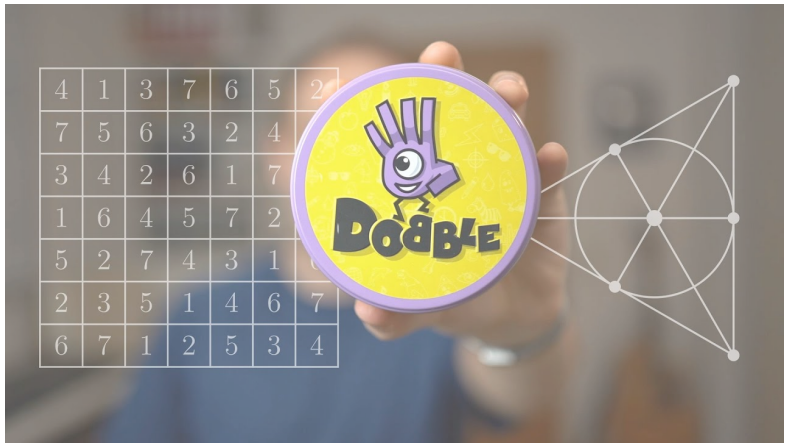


Man muß jederzeit an Stelle von „Punkten, Geraden, Ebenen“ „Tische, Stühle, Bierseidel“ sagen können.
David Hilbert (1862–1943) zur Axiomatik der Geometrie

Inhalt dieses Kapitels U

5 Analytische und synthetische Geometrie
- Projektive Geometrie nach Veblen–Young
- Projektive Ebenen und die Primpotenzvermutung
- Die Jagd nach projektiven Ebenen der Ordnung 10

Dobble spielt auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^2\mathbb{F}_7$.



Stand-Up Maths, `youtu.be/VTDKqW_GLkw`. DorFuchs, `youtu.be/vyYSEDGUdlg`.

Dobble ist ein Kartenspiel aus $55 \leq 57$ Karten mit je 8 Symbolen.
Je zwei *verschiedene* Karten haben *genau ein* Symbol gemeinsam.
Wer das Symbol zuerst findet, gewinnt. Konstruktion: Wie geht das?

Das Kartenspiel *Set* beruht auf dem affinen Raum $\mathbb{F}_3^4$.

Hinter dem beliebten Kartenspiel *Set* verbirgt sich der affine Raum $\mathbb{F}_3^4$.
Spielen Sie's mit Friederike Stoll! Numberphile, `youtu.be/EkFX9jUJPKk`.

Die Fortsetzung heißt *ProSet* für *Projective Set*, `projectiveset.jonemo.de`.
Die Spieler:innen suchen dabei Ebenen in $\mathbb{F}_2^6$, also Geraden in $\mathbb{P}^5\mathbb{F}_2$.

Von analytischer zur synthetischen Geometrie

Sei V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum. Der projektive Raum $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ besteht aus allen Geraden p von V, also allen 1–dimensionalen linearen Unterräumen. Die Menge $\mathbb{L} = \mathbb{L}(V)$ enthalte alle Ebenen g von V, also alle 2–dimensionalen linearen Unterräume. Dies definiert den **projektiven Raum** $\Pi = (\mathbb{P}, \mathbb{L}, <)$; Elemente von $\mathbb{P}$ heißen (projektive) Punkte, Elemente von $\mathbb{L}$ heißen (projektive) Geraden, Inzidenz $p < g$ in Π bedeutet $p \subset g$ in V.

Übung: Zeigen Sie, dass für $\Pi = (\mathbb{P}, \mathbb{L}, <)$ folgende Axiome gelten:

Definition U5A: projektive Geometrie nach Veblen–Young 1910

(P1) *Verbindungsgerade.* Zu je zwei verschiedenen Punkten $p \neq q$ in $\mathbb{P}$ gibt es genau eine Gerade $g \in \mathbb{L}$ mit $p, q < g$. Wir schreiben hierfür $g =: p \vee q$.

(P2) *Veblen–Young–Axiom.* Sind a, b, c, d paarweise verschiedene Punkte, und schneiden sich die Geraden $a \vee b$ und $c \vee d$, dann auch $a \vee d$ und $b \vee c$.

(P3) *Reichhaltigkeit.* Auf jeder Geraden liegen mindestens drei Punkte: Für alle $g \in \mathbb{L}$ gibt es drei verschiedene Punkte $p, q, r \in \mathbb{P}$ mit $p, q, r < g$.

Von analytischer zur synthetischen Geometrie

Wir haben zwei komplementäre Ansätze, projektive Räume zu definieren:

(1) Wir geben eine Konstruktion an, etwa wie in §U3 als Quotienten. Geraden werden dabei zu Punkten, analog werden Ebenen zu Geraden.

(2) Wir geben uns wünschenswerte Eigenschaften als Axiome vor, etwa:
(2a) Durch je zwei verschiedene Punkte $p \neq q$ läuft genau eine Gerade g.
(2b) Je zwei verschiedene Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

Die erste Eigenschaft wünschen wir uns von jedem projektiven Raum, die zweite zudem von jeder projektiven Ebene (U5D). Hat man sich auf ein Axiomensystem festgelegt, so ist zunächst nicht klar, was genau man da eigentlich beschrieben hat: Gibt es ein Modell? oder keins? oder mehr? Kann man Axiome weglassen? Damit beschäftigt sich die synthetische Geometrie. Hier prüfen Sie die Konstruktion aus §U3 auf obige Axiome.

An adequate knowledge of geometry cannot be obtained without attention to the foundations. [...] it is natural to take the foundations of projective geometry as the foundations of all geometry. (Veblen, Young, 1910)

Von synthetischer zurück zur analytischen Geometrie

Die obigen Axiome (P123) nutzen nur die Menge $\mathbb{P}$ der Punkte und die Menge $\mathbb{L}$ der Geraden sowie eine Inzidenzrelation $<$, die sagt, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt. Jeder Vektorraum V liefert ein Modell $(\mathbb{P}(V), \mathbb{L}(V), <)$, das diese Axiome erfüllt. Genau das ist obige Übung.

Erstaunlicherweise gilt hierzu die folgende berühmte Umkehrung:

Satz U5B: Koordinatisierung, Veblen–Young 1910

Sei $\Pi = (\mathbb{P}, \mathbb{L}, <)$ ein projektiver Raum im Sinne obiger Axiome (P123). Seine Dimension sei mindestens 3, das heißt es gibt zwei Geraden g, h, die sich nicht schneiden. Dann ist Π isomorph zum projektiven Raum $\Pi(V)$ eines Vektorraums V über einem Divisionsring $\mathbb{K}$.

Aus der „rein kombinatorischen“ Inzidenzstruktur $(\mathbb{P}, \mathbb{L}, <)$ können wir also einen Divisionsring $\mathbb{K}$ rekonstruieren und Koordinaten einführen. Aus scheinbar wenig erhalten wir sehr viel, das ist höchst erstaunlich.

📖 Albrecht Beutelspacher, Ute Rosenbaum: *Projektive Geometrie: von den Grundlagen bis zu den Anwendungen.* Vieweg 2004.

Projektive Geometrie als Teilraumverband

Übung: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper (mit q Elementen). Zum Vektorraum $V = \mathbb{K}^{n+1}$ betrachten wir $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ und dazu $\mathbb{S} = \{\mathbb{P}(U) \mid U \leq V\}$ mit Dimension $\dim \mathbb{P}(U) := \dim_{\mathbb{K}}(U) - 1$. Zeigen Sie, dass folgende Axiome gelten:

Definition U5C: projektive Geometrie nach Birkhoff 1935

Eine **projektive Geometrie** $(\mathbb{P}, \mathbb{S}, \dim)$ der Dimension n (und Ordnung q) besteht aus einer Menge $\mathbb{P}$ von *Punkten* und einer Menge $\mathbb{S} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{P})$ von *Teilräumen* mit einer Surjektion $\dim : \mathbb{S} \twoheadrightarrow \{-1, 0, 1, \dots, n\}$. Dabei gelte:

0. Es gilt $\emptyset \in \mathbb{S}$. Für $S \in \mathbb{S}$ gilt $\dim(S) = -1$ gdw $S = \emptyset$.
1. Für alle $x \in \mathbb{P}$ gilt $\{x\} \in \mathbb{S}$. Es gilt $\dim S = 0$ gdw $S = \{x\}$.
2. Die geordnete Menge $(\mathbb{S}, \subseteq)$ ist ein Verband: Zu jedem Paar $S, T \in \mathbb{S}$ existiert in $(\mathbb{S}, \subseteq)$ das Infimum $S \wedge T$ und das Supremum $S \vee T$.
3. Dabei gilt $\dim(S) + \dim(T) = \dim(S \wedge T) + \dim(S \vee T)$.
4. Für (ein und somit) alle $S \in \mathbb{S}$ mit $\dim(S) = 1$ gilt $|S| = q + 1$.

Übung: Die Axiome U5C für $(\mathbb{P}, \mathbb{S}, \dim)$ implizieren U5A für $(\mathbb{P}, \mathbb{S}_1, \in)$.

Projektive Ebenen: Axiome

Projektive Räume der Dimension ≥ 3 sind geklärt dank Veblen–Young U5B. Projektive Ebenen sind überraschend vielfältig und schwierig!

Definition U5D: projektive Ebene, axiomatische Sichtweise

Eine **projektive Ebene** $(\mathbb{P}, \mathbb{L}, <)$ besteht aus einer Menge $\mathbb{P}$ von *Punkten* und einer Menge $\mathbb{L}$ von *Geraden* mit *Inzidenz* $(<) \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{L}$, sodass gilt:

(Π1) *Verbindungsgerade.* Zu je zwei verschiedenen Punkten $p \neq q$ in $\mathbb{P}$ gibt es genau eine Gerade $g \in \mathbb{L}$ mit $p, q < g$. Wir schreiben hierfür $g =: p \vee q$.

(Π2) *Schnittpunkt.* Zu je zwei verschiedenen Geraden $g \neq h$ in $\mathbb{L}$ gibt es genau einen Punkt $p \in \mathbb{P}$ mit $p < g, h$. Wir schreiben hierfür $p =: g \wedge h$.

(Π3) *Reichhaltigkeit.* Es gibt vier Punkte, keine drei auf einer Geraden.

Übung: Aus (Π123) folgt (Π4): Es gibt vier Geraden, von denen sich keine drei in einem gemeinamen Punkt schneiden. Das enthüllt eine Dualität: Ist $\Pi = (\mathbb{P}, \mathbb{L}, <)$ eine projektive Ebene, so auch ihr Dual $\Pi^\intercal = (\mathbb{L}, \mathbb{P}, >)$. Die Fano–Ebene $\Pi(\mathbb{F}_2^3)$ ist selbst-dual, ebenso $\Pi(\mathbb{K}^3)$ über jedem *DRing.

Projektive Ebenen: Ordnung

Übung: Zeigen Sie folgende bemerkenswerte numerische Folgerung:

Proposition U5E: Ordnung einer endlichen projektiven Ebene

Sei $\Pi = (\mathbb{P}, \mathbb{L}, <)$ eine endliche projektive Ebene. Dann existiert $q \in \mathbb{N}$, genannt die **Ordnung** von Π, mit folgender Eigenschaft: Jeder Punkt liegt auf genau $q + 1$ Geraden, jede Gerade verläuft durch genau $q + 1$ Punkte, und ihre gemeinsame Anzahl ist $|\mathbb{P}| = |\mathbb{L}| = q^2 + q + 1$.

Beispiel: Zu $q = p^d$ mit $p \in \mathbb{N}$ prim und $d \geq 1$ existiert ein Körper $\mathbb{F}_q$ mit q Elementen. Dann ist $\mathbb{P}^2\mathbb{F}_q = \mathbb{P}(\mathbb{F}_q^3)$ eine projektive Ebene der Ordung q. Kleinstes Beispiel: Für $q = 2$ erhalten wir die Fano–Ebene mit 7 Punkten.

Ab Ordnung 9 gibt es exotische Beispiele von projektiven Ebenen, doch in allen bekannten Beispielen ist q eine Primpotenz. Dies führt uns zu:

Vermutung U5F: Primpotenzvermutung für projektive Ebenen

Jede endliche projektive Ebene hat als Ordnung q eine Primpotenz, also $q \in \{2, 3, 4, 5, \cancel{6}, 7, 8, 9, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \cancel{14}, \cancel{15}, 16, 17, \cancel{18}, 19, \cancel{20}, \cancel{21}, \cancel{22}, 23, \ldots\}$.

Projektive Ebenen: exotische Modelle

Dies illustriert eine allgegenwärtige Dualität: Die Untersuchung von Axiomen und die Konstruktion von Modellen arbeiten Hand in Hand. Speziell projektive Ebenen faszinieren viele Menschen, weil sie so einfach zu definieren sind, doch erstaunlich vielfältige Modelle erlauben.

📖 Charles Weibel: *Survey of Non-Desarguesian Planes.* Notices of the AMS 54 (2007) 1294–1303. `www.ams.org/notices/200710/tx071001294p.pdf`

> *The abstract study of projective geometry first arose in the work of J.-V. Poncelet (1822) and K. von Staudt (1847). About 100 years ago, axiomatic frameworks were developed by several people, including G. Fano, D. Hilbert, E.H. Moore, I. Schur, and O. Veblen. It was a very active branch of mathematics during 1900–1935, and a partial list of people then in this field reads like a "Who's Who of Mathematics": A. Albert, E. Artin, Dickson, Jacobson, Jordan, Moufang, Wedderburn, Zassenhaus, and Zorn. It was reinvigorated by R. Baer and M. Hall about 50 years ago. To my delight, it has many connections to modern mathematics.*

Projektive Ebenen: Ordnung 6

Die Primpotenzvermutung U5F ist bis heute offen und gilt als schwierig. (Erdős Problem 723, `www.erdosproblems.com/723`) Viele Mathematiker:innen haben daran gearbeitet, doch leider waren die Fortschritte bislang gering. Ein sensationell berühmtes Ergebnis zu dieser Frage lautet:

Satz U5G: Bruck–Ryser 1949

Sei $\Pi = (\mathbb{P}, \mathbb{L}, <)$ eine endliche projektive Ebene. Ihre Ordnung q erfülle zudem $q \operatorname{rem} 4 \in \{1, 2\}$. Dann ist q eine Summe von zwei Quadraten.

Daraus folgt die Unmöglichkeit der Ordnungen $6, 14, 21, 22, \ldots$.
Nicht ausgeschlossen sind hingegen $10 = 1^2 + 3^2$ und $18 = 3^2 + 3^2$.
Davon unberüht sind ebenso $12 \operatorname{rem} 4 = 0$ und $15 \operatorname{rem} 4 = 3$.

📖 Richard H. Bruck, Herbert J. Ryser: *The nonexistence of certain finite projective planes.* Canadian Journal of Mathematics 1 (1949) 88–93.

Bereits 1901 konnte Gaston Tarry die Ordnung 6 ausschließen, als er Eulers kombinatorisches *Problem der 36 Offiziere* löste. Den Zusamenhang erkannte allerdings erst Raj C. Bose 1938.

Projektive Ebenen: Ordnung 10

Jahrzehntelang suchten Afficionados nach einer projektiven Ebene der Ordnung 10. Zu dieser Zeit wurden zunehmend Computer ein mögliches Werkzeug zur Lösung kombinatorischer Probleme. Die optimistische Hoffnung war daher, das Problem zu lösen durch eine Kombination von cleveren Stift-und-Papier-Methoden mit Brute-Force-Suchprogrammen.

Wie können wir eine systematische Suche angehen?

Starke Struktur: Jede projektive Ebene $\Pi = (\mathbb{P}, \mathbb{L}, <)$ der Ordnung $q = 10$ hat $q^2 + q + 1 = 111$ Punkte und ebenso viele Geraden. Die Inzidenz ist somit eine Matrix $A \in \{0,1\}^{\mathbb{P}\times\mathbb{L}} \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{P}\times\mathbb{L}}$ mit genau $q + 1 = 11$ Einsen in jeder Zeile und Spalte, sonst Nullen. Die obigen Axiome (Π12) bedeuten: Es gilt $AA^\intercal = A^\intercal A = B$ mit Einträgen $q + 1$ auf der Diagonalen und Eins überall sonst. Der Suchraum ist zwar endlich, doch leider riesig groß!

Mit genau diesem Ansatz und (Linearer) Algebra konnten Bruck und Ryser ihr berühmtes Theorem U5G beweisen. Damit lässt sich auch die Ordnung $q = 10$ angreifen, sowohl obstruktiv als auch konstruktiv.

Projektive Ebenen: Ordnung 10

Die Ordnung $q = 10$ wurde erst 1988 gelöst: Eine erschöpfende Suche per Computer zeigt, dass keine projektive Ebene der Ordnung 10 existiert.

Dieses Ergebnis jahrzehntelanger Suche hat damals hohe Wellen geschlagen und fasziniert bis heute. Die New York Times titelte im Dezember 1988 dazu: „Is a math proof a proof if no one can check it?“ Computerbeweise waren zunächst kontrovers, inzwischen verbreitet. Das Ergebnis wurde 2021 mit aktuellen Methoden geprüft und zertifiziert.

Clement W. H. Lam: *The search for a finite projective plane of order 10.* Amer. Math. Monthly 98 (1991) 305–318. C. Bright, K.K.H. Cheung, B. Stevens, I. Kotsireas, V. Ganesh: *A SAT-based Resolution of Lam's Problem.* AAAI Conference on Artificial Intelligence (2021) 3669–3676.

Wie Lam erklärt, konnten sie mit cleverer Mathematik ihre Suche so weit optimieren, dass eine erschöpfende maschinelle Suche möglich wurde. Das ist die ersehnte Win-Win-Situation: Ein Gegenbeispiel zu finden wäre sensationell. Kein Gegenbeispiel auch. Der Rest ist Rechnen…

Projektive Ebenen: höhere Ordnung?

Die Un/Möglichkeit von Ordnung $q = 12$ ist offen. Falls uns jemand ein Gegenbeispiel vorlegt, in Form einer Matrix $A \in \{0,1\}^{157\times157}$, so wäre es leicht zu *prüfen*. Es bleibt allerdings schwer zu *finden*. Sollten Sie darauf eine Forschungskarriere aufbauen? Das ist ein Fall von *high risk, high gain* und daher für den Anfang einer Karriere nicht zu empfehlen.

When I was a graduate student looking for a thesis topic, Herbert Ryser advised me not to work on the projective plane of order 10. Even though he was extremely interested in this subject, he believed that it was too difficult and that I might get nowhere with it. I took his advice and chose another problem. Somehow, this problem has a beauty that fascinates me as well as many other mathematicians. Finally in 1980, I succumbed to the temptation and started working on it with some of my colleagues. We eventually managed to get somewhere, but unfortunately, Dr. Ryser is no longer with us to hear of the final result. This is an expository article describing the evolution of the problem and how computers were used to solve it.

C.W.H. Lam: *The search for a finite projective plane of order 10.*

Projektive Ebenen: höhere Ordnung?

Andererseits gibt es kein verlässliches Maß dafür, dass eine offene Frage wie die Primpotenzvermutung U5F wirklich schwer ist. Vielleicht gibt es ein einfaches Gegenbeispiel und uns fehlt lediglich die nötige Phantasie? (So geschehen mit der im Juli 2026 plötzlich gelösten Jacobi–Vermutung.)

As with many long-standing open problems, we actually do not really know if they are difficult and why, until somebody solves the problem and even then it is not always clear. […] As for the Prime Power Conjecture, for all we know, some smart undergraduate student can construct a counter-example.

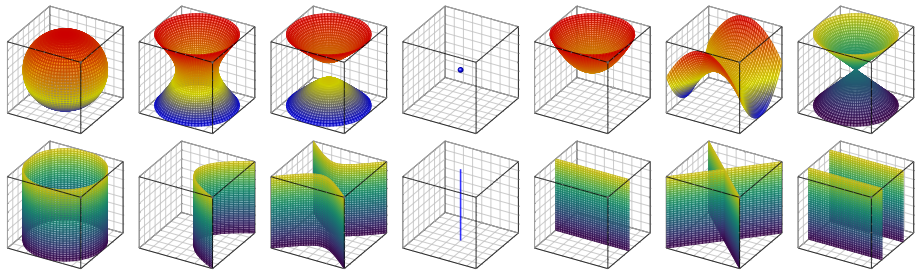
Moishe Kohan, `math.stackexchange.com/questions/3516166`

Für den Anfang scheint daher ratsam: Lassen Sie Ihrer Kreativität freien Lauf, entwickeln Sie gleichzeitig mehrere Ideen, die Sie begeistern und Aussicht auf Erfolg haben, streuen Sie das Risiko und verfolgen Sie mehrere Fragen, arbeiten Sie ernsthaft, aber nicht allzu verbissen.

Kurzum: *Be yourself, don't try to be a pink unicorn.*
Except, if you are a pink unicorn, then be just that.

Kapitel V

Quadratische Polynome und Quadriken



Bildung ist nicht nur das Lernen von Fakten,
sondern die Schulung des Geistes zu denken.
Albert Einstein (1879–1955)

Inhalt dieses Kapitels V

1 Quadratische Formen und ihre Klassifikation
- Der Trägheitssatz von Sylvester über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$
- Klassifikation hermitescher Formen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$
- Klassifikation quadratischer Formen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

2 Quadratische Polynome und ihre Klassifikation
- Affine Klassifikation reeller Quadriken
- Euklidische Klassifikation reeller Quadriken
- Anwendungsbeispiele und Übungsaufgaben

Von linearen zu quadratischen Gleichungen

Bislang haben wir sehr erfolgreich **Lineare Algebra** untersucht: lineare Räume $V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$ und lineare Abbildungen $f : V \to W : x \mapsto Ax$.

Die Lösungsmenge L jedes linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ bzw. $Ax = y$ können wir effizient berechnen mit dem Gauß–Algorithmus.

Zudem kennen wir Form und Größe von L: Dies ist ein **linearer bzw. affiner Unterraum** von V, und wir können seine Dimension bestimmen.

Strukturell gilt dasselbe für den Kern $\operatorname{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\}) \le V$ und die Urbildmenge $f^{-1}(\{y\}) \sqsubseteq V$ jeder linearen Abbildung $f : V \to W$.

Über *affin-lineare* Abbildungen hinaus können wir allgemein *Polynome* von Grad $1, 2, 3, \ldots$ betrachten und deren Nullstellenmengen untersuchen. Das ist ein riesiges Gebiet, traditionell verwurzelt und zugleich modern.

Als ein wichtiges Beispiel kennen wir die Determinante $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$. Sie ist multilinear in den Spalten bzw. Zeilen von A, insgesamt also ein homogenes Polynom von Grad n in den Koeffizienten von A. Seine Nullstellenmenge sind die nicht-invertierbaren Matrizen, es gilt $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K} = \{\, A \mid \det A \neq 0 \,\}$ und $\mathrm{SL}_n\,\mathbb{K} = \{\, A \mid \det A = 1 \,\}$.

Von linearen zu quadratischen Gleichungen

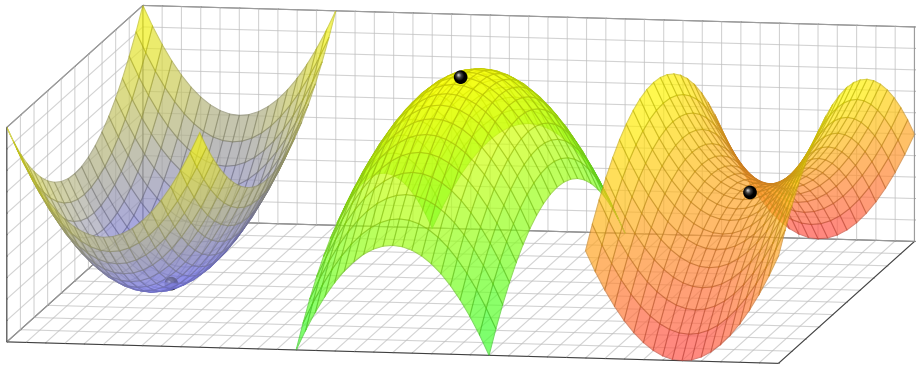
In diesem Kapitel geht es grundlegend um **quadratische Polynome**; deren Nullstellenmengen heißen **Quadriken**. Erfreulicherweise sind quadratische Polynome nahe genug am linearen Fall, und wir können die bewährten Methoden der Linearen Algebra wunderbar anwenden.

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ gelingt uns damit vollständig die **affine Klassifikation** aller Quadriken im Raum $\mathbb{K}^n$ bis auf Affinität, also Koordinatenwechsel. Wollen wir Abstände erhalten, so nutzen wir euklidische Affinitäten. Das führt uns zur zweiten und feineren **euklidischen Klassifikation**.

Die Klassifikation der reellen Quadriken ist ein Kleinod der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie. Sie ist ein weiterer würdiger Höhepunkt und mobilisiert dazu alle Techniken der vorigen Kapitel. Das klingt manchen wie ein Fluch, bitte betrachten Sie es als Segen!

Schon in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und dann im Raum $\mathbb{R}^3$ begegnet uns dabei ein Zoo von bewundernswerter Vielfalt, wie auf der obigen Titelseite skizziert und ab Seite V222 ausgeführt. Die Klassifikation schafft Überblick und wohltuende Klarheit, dazu passt Einsteins Eingangszitat dieses Kapitels.

Motivation 1: reelle quadratische Formen verstehen



Erste Beispiele: $f(x,y) = x^2 + y^2,\ g(x,y) = -x^2 - y^2,\ h(x,y) = x^2 - y^2.$

Normalform: Für $p + q + r = n$ in $\mathbb{N}$ haben wir die Modellabbildung

$$f_{p,q,r} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2.$$

Der Nullpunkt ist ein lokales Minimum gdw $q = 0$, strikt gdw $p = n$.
Der Nullpunkt ist ein lokales Maximum gdw $p = 0$, strikt gdw $q = n$.

Motivation 1: reelle quadratische Formen verstehen

Im Allgemeinen kommt das Problem nicht in Normalform, sondern

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \textstyle\sum_{i,j} x_i a_{ij} x_j = x^\top A\, x$$

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist vorgegeben, meist symmetrisch, $A^\top = A$.
Die Modellabbildung entspricht $A = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$.
Der Matrixkalkül erweist sich hier erneut als wunderbar effizient!

Damit stellen sich uns zwei zentrale Fragen, theoretisch wie praktisch:

❓ Können wir g in eine Normalform $f_{p,q,r}$ bringen? Wie gelingt dies?
Das symmetrische Gauß–Verfahren S1R diagonalisiert die Matrix A.

❓ Ist das Signaturtripel (p,q,r) wohldefiniert, eindeutig, unabhängig von der Wahl der Koordinaten? Ja, dank Sylvesters Trägheitssatz V1C.

Wir haben hier also eine typische Frage von Existenz und Eindeutigkeit, allgemein der Klassifikation: Können wir jede quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$ in geeigneten Koordinaten diagonalisieren und so eine Signatur (p,q,r) ablesen? Ist diese eindeutig, wohldefiniert, unabhängig vom Rechenweg?

Definitheit als wichtiger Extremfall

☺ In den Extremfällen ist die Invarianz der Signatur offensichtlich.
Zur Einstimmung ist es sicher hilfreich, sich das klar zu machen:

Aufgabe: Gilt die Signatur $(n,0,0)$ in einem Koordinatensystem, so auch in jedem anderen. **Lösung:** Diese Signatur ist die einzige, in der 0 ein striktes Minimum ist. Dies bleibt in jedem Koordinatensystem erhalten.

Aufgabe: Gilt die Signatur $(0,n,0)$ in einem Koordinatensystem, so auch in jedem anderen. **Lösung:** Diese Signatur ist die einzige, in der 0 ein striktes Maximum. Dies bleibt in jedem Koordinatensystem erhalten.

Aufgabe: Gilt die Signatur $(0,0,n)$ in einem Koordinatensystem, so auch in jedem anderen. **Lösung:** Diese Signatur ist die einzige, in der g konstant ist. Dies bleibt in jedem Koordinatensystem erhalten.

⚠ Für alle anderen Signaturen ist die Invarianz nicht so offensichtlich.
Sylvesters Trägheitssatz V1C löst dieses Problem, elegant und einheitlich.

Definitheit als wichtiger Extremfall

☺ Für Definitheit haben wir erfreulich effiziente Werkzeuge, siehe §T2.

Ausgehend von der quadratischen Form $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto x^\top A\, x$ können wir dank Gauß–Hermite S1R eine OBasis konstruieren und positive / negative Definitheit an den Vorzeichen der Diagonaleinträge ablesen.

Wir haben das Hauptminorenkriterium T2D nach Hurwitz–Sylvester.
Das bietet manchmal eine effiziente Lösung, etwa für Bandmatrizen, sobald wir die Hauptminoren gut berechnen können.

Dank Spektralsatz T1I können wir unitär diagonalisieren und an den Eigenwerte positive / negative Definitheit ablesen (T2E).
Damit stehen uns alle Werkzeuge für Eigenwerte zur Verfügung.

Falls anwendbar sind Gerschgorin–Kreise T2F wunderbar effizient.
Für jede strikt diagonaldominante Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ können wir so In/Definitheit direkt an ihren Diagonaleinträgen $a_{11}, \dots, a_{nn}$ ablesen.
Das folgt sogar erfreulich direkt aus Gauß–Hermite, siehe Satz S1T.

Motivation 2: quadratische Gleichungen lösen

(1) Wie sieht die Lösungsmenge $L \subseteq \mathbb{K}^n$ einer linearen Gleichung aus?

$$E = \{ x \in \mathbb{K}^n \mid b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n + c = 0 \}$$

Für $b \neq 0$ ist E ein Unterraum der Dimension $n-1$, linear für $c = 0$, affin für $c \neq 0$. Für $b = 0$ und $c = 0$ gilt $E = \mathbb{K}^n$, für $b = 0$ und $c \neq 0$ gilt $E = \emptyset$.

(2) Wie sieht die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung aus?

$$\text{Quadrik} \quad Q = \{ x \in \mathbb{K}^n \mid \textstyle\sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j + \sum_i b_i x_i + c = 0 \}$$

Allgemein, zu gegebenen Polynomen $P_1, \dots, P_\ell \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ suchen wir die Nullstellenmenge $V = \{ x \in \mathbb{K}^n \mid P_1(x) = \cdots = P_\ell(x) = 0 \} \subseteq \mathbb{K}^n$. Der lineare Fall $\deg P_i \leq 1$ ist leicht, dank Gauß! Der quadratische Fall $\deg P_1 = 2$ und $\ell = 1$ gelingt uns in diesem Kapitel noch recht leicht. Mit $\deg P_i \geq 3$ beginnt die Wunderwelt der algebraischen Geometrie!

Mitternachtsformel (B109) für $n = 1$: Zu $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gilt

$$\underbrace{\{ x \in \mathbb{R} \mid \overbrace{ax^2 + bx + c = 0}^{\text{quadratische Gleichung}} \}}_{\text{Lösungsmenge}} = \begin{cases} \left\{ \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} & \text{falls } b^2 - 4ac \geq 0, \\ \emptyset & \text{falls } b^2 - 4ac < 0. \end{cases}$$

Motivation 2: quadratische Gleichungen lösen

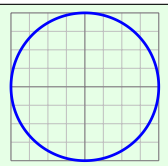
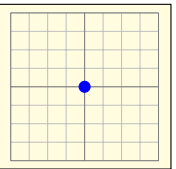
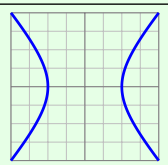
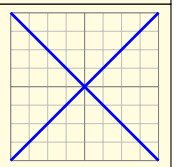
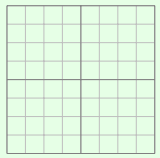
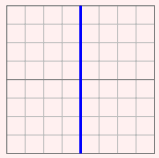
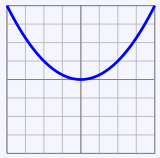
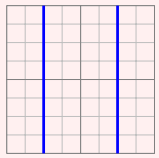
Quadriken sind ein schönes Thema. Wie immer braucht es Übung.

Nach einer wahren Begebenheit, vor der Mensa und kurz vor der Klausur. „Herr Professor, was sind Quadriken?“ fragte ein aufgeschreckter Student. Kurz vor der Klausur war die Frage kaum noch sinnvoll zu beantworten. Nimmt man sich jedoch die nötige Zeit, so ist es nicht besonders schwer. Ich würde eine erste motivierende Beschreibung so einleiten:

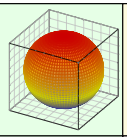
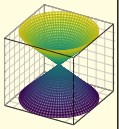
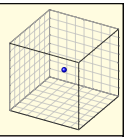
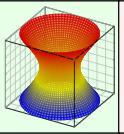
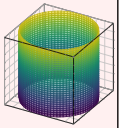
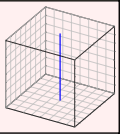
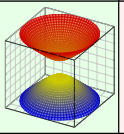
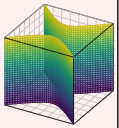
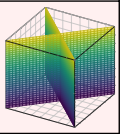
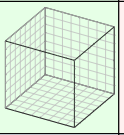
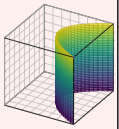
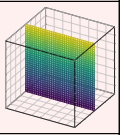
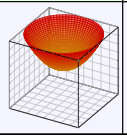
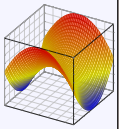
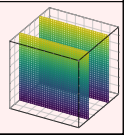
„Wissen Sie, was ein quadratisches Polynom ist?“ – „Ja, klar!“ – „Können Sie sich das in mehreren Variablen vorstellen?“ – „Hm, ja, doch, schon.“ – „Wie sieht die Nullstellenmenge aus?“ – „Tja, auf den ersten Blick ist das schwer zu sagen. Vermutlich gibt es da unendlich viele Möglichkeiten.“ – „Genau das sind die Quadriken! Und die Klassifikation löst Ihr Problem.“

Die folgenden beiden Folien zeigen das Ergebnis im Überblick / Ausblick. Polynome *zweiten* Grades sind zwar *nicht linear*, doch gerade noch durch Matrizen darstellbar. Das ist ein genial-einfacher Trick. Die Werkzeuge der Linearen Algebra greifen hier noch und verhelfen uns zur Lösung. Davon handelt das Kapitel: quadratische Polynome als *bilineare Algebra*.

Ausblick: reelle Quadriken in der Ebene $\mathbb{R}^2$

Ellipse $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	Punkt $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 0$ 
Hyperbel $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	schneidendes Geradenpaar $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 0$ 
leere Menge $-\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	Gerade $\dfrac{x^2}{\alpha^2} = 0$ 
Parabel $\dfrac{x^2}{\alpha^2} = 2y$ 	paralleles Geradenpaar $\dfrac{x^2}{\alpha^2} = 1$ 

Ausblick: reelle Quadriken im Raum $\mathbb{R}^3$

Ellipsoid $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} + \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1$ 	elliptischer Doppelkegel $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} - \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 0$ 	Punkt $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} + \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 0$ 
einschaliges Hyperboloid $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} - \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1$ 	elliptischer Zylinder $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	Gerade $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 0$ 
zweischaliges Hyperboloid $-\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} + \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1$ 	hyperbolischer Zylinder $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	schneidendes Ebenenpaar $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 0$ 
leere Menge $-\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} - \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1$ 	parabolischer Zylinder $\dfrac{x^2}{\alpha^2} = 2y$ 	Ebene $\dfrac{x^2}{\alpha^2} = 0$ 
elliptisches Paraboloid $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 2z$ 	hyperbolisches Paraboloid $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 2z$ 	paralleles Ebenenpaar $\dfrac{x^2}{\alpha^2} = 1$ 

Orthogonale und orthopseudonormale Familien

Wie für Skalarprodukte (gemäß S1o) vereinbaren wir nun allgemein:

Definition V1A: orthopseudonormale Familie → orthonormal S1o

Sei (V, β) ein hermitescher Raum über $(\mathbb{K}, \operatorname{conj}_{\mathbb{K}})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, und zu $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$. sei $q(v) = \beta(v, v)$ die quadratische Form.

(1) Ein Vektor $u \in V$ heißt **pseudonormiert**, falls $q(u) \in \{\pm 1, 0\}$ gilt. Gilt $q(v) \neq 0$, so können wir v **pseudonormieren** zu $u = v/\sqrt{|q(v)|}$.

(2) Eine Familie $(u_i)_{i \in I}$ in V heißt **orthogonal**, falls $\beta(u_i, u_j) = 0$ für alle $i \neq j$ in I gilt, und **orthopseudonormal**, falls zudem pseudonormiert:

$$\beta(u_i, u_j) \begin{cases} = 0 & \text{falls } i \neq j\text{: paarweise orthogonal,} \\ \in \{\pm 1, 0\} & \text{falls } i = j\text{: individuell pseudonormiert.} \end{cases}$$

In Worten: Die Gram–Matrix ist diagonal mit $\pm 1, 0$ auf der Diagonalen.

(3) Ist die Familie $(u_i)_{i \in I}$ zudem eine Basis von $U \leq V$, so nennen wir dies eine **Orthogonalbasis** bzw. eine **Orthopseudonormalbasis** von U.

Orthogonale und orthopseudonormale Familien

Erinnerung (S2A): Für jedes Skalarprodukt fordern wir zudem positive Definitheit. In jedem unitären Raum $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ gilt für jeden Vektor $v \neq 0$ daher $\langle v \,|\, v \rangle > 0$, und daher können wir v normieren zu $u = v/\sqrt{\langle v \,|\, v \rangle}$. Das ist ungemein praktisch, insbesondere für Orthonormalbasen S1o:

$$\beta(u_i, u_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j\text{: paarweise orthogonal,} \\ 1 & \text{falls } i = j\text{: individuell normiert.} \end{cases}$$

Im allgemeinen Fall haben wir nur eine hermitesche Form $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$. Wir wissen zwar $q(v) := \beta(v, v) \in \mathbb{R}$, doch fehlt uns positive Definitheit. Daher können wir nur auf eine der drei „Längen“ $\pm 1, 0$ normieren. Um keine Verwechslung zu riskieren, sage ich pseudonormiert.

Bemerkung: Diagonalisierung dank Gauß–Hermite S1R gelingt über jedem *DRing $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$. Skalierung von v_i zu $u_i = v_i a_i$ ergibt $\beta(u_i, u_i) = a_i^\sigma \beta(v_i, v_i) a_i$. Um hier weiter zu kommen, sollte der Fixkörper $\mathbb{K}^\sigma = \operatorname{fix}(\mathbb{K}, \sigma)$ zentral in $\mathbb{K}$ sein. Wir normieren dann bezüglich der Normgruppe $N(\mathbb{K}, \sigma) := \{ a^\sigma a \,|\, a \in \mathbb{K}^\times \}$, siehe Diskriminante S1N.

Orthopseudonormalisierung und Signatur der Basis

Satz V1B: Orthopseudonormalisierung → Gauß–Hermite S1R

Sei $(\mathbb{K}, \sigma)$ ein Divisionsring $\mathbb{K}$ mit Involution σ und $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$.

(0) Sei (V, β) ein hermitescher Raum über $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit $\dim_{\mathbb{K}} V = n \in \mathbb{N}$. Dann existiert zu (V, β) eine Orthogonalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$.

(1) Über $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und $\sigma = \operatorname{conj}_{\mathbb{K}}$ können wir unsere OBasis $\mathcal{B}$ zudem pseudonormieren und sortieren zu

$$(\beta(v_i, v_j))_{ij} = \begin{bmatrix} 1_{p \times p} & 0_{p \times q} & 0_{p \times r} \\ 0_{q \times p} & -1_{q \times q} & 0_{q \times r} \\ 0_{r \times p} & 0_{r \times q} & 0_{r \times r} \end{bmatrix}$$

Wir nennen $\operatorname{Sign}(\mathcal{B}) := (p, q, r) \in \mathbb{N}^3$ die **Signatur** der Basis $\mathcal{B}$ in (V, β).

Die Signatur (p, q, r) heißt auch **Signaturtripel** oder **(Trägheits)Index** mit **Positivrang** p und **Negativrang** q und **Nullität** $\operatorname{null}(\beta) := r = \dim \operatorname{Ker} \beta$.

? Wie ändert sich die Signatur (p, q, r) mit der Wahl der Basis $\mathcal{B}$?
Es gibt viele Basen! Welche Signaturtripel haben sie? Alle dasselbe!

Orthopseudonormalisierung und Signatur der Basis

Manche bezeichnen die Differenz $\operatorname{sign}(\mathcal{B}) = p - q \in \mathbb{Z}$ als **Signatur**, das ist in manchen Kontexten eine sinnvolle, passendere Definition. Zwecks Betonung nennen wir dann $\operatorname{Sign}(\mathcal{B}) = (p, q, r)$ **Signaturtripel**, es enthält alle für uns relevanten Informationen wie $n = p + q + r$.

Bislang ist (p, q, r) eine Eigenschaft der Basis $\mathcal{B}$, nicht der Form β! Es gibt verschiedene Orthogonalbasen zu (V, β), im Allgemeinen unendlich viele, und zu ihrer Herstellung noch mehr Rechenwege. Der Trägheitssatz garantiert, dass die Signatur immer dieselbe ist.

Erst dadurch können wir die Signatur der Form β definieren durch

$$\operatorname{Sign}(\beta) := \operatorname{Sign}(\mathcal{B}).$$

Diese raffinierte Definition / Konstruktion der *Signatur* erinnert uns an die ebenso raffinierte *Dimension*, siehe M201ff: Zur Dimension benötigen wir die Existenz einer Basis (M2K) und Invarianz der Basislänge (M2G). Genauso ist verhält es sich hier: Zur Signatur benötigen wir die Existenz einer OBasis (V1B) und Invarianz der Signatur dank Trägheitssatz (V1C).

Satz V1c: Sylvesters Trägheitssatz für Orthogonalbasen

Sei (V, β) ein hermitescher Raum über $(\mathbb{K}, \mathrm{conj}_{\mathbb{K}})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

(1) Sind $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_n)$ Orthogonalbasen, dann sind ihre Signaturen $\mathrm{Sign}(\mathcal{B}) = (p, q, r)$ und $\mathrm{Sign}(\mathcal{B}') = (p', q', r')$ gleich.

Damit definieren wir die **Signatur** der hermiteschen Form β durch

$$\boxed{\mathrm{Sign}(\beta) := \mathrm{Sign}(\mathcal{B}).}$$

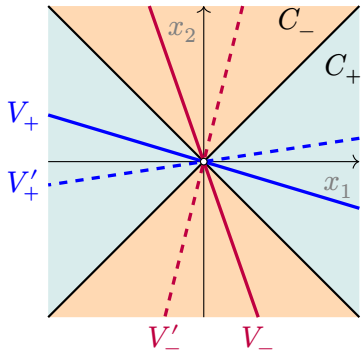
Sie ist wohldefiniert, da unabhängig von der gewählten Orthogonalbasis.

Beweis: (1) Es gilt $r = r' = \dim \operatorname{Ker} \beta$. Wir zeigen $p = p'$ und $q = q'$. Wir pseudonormieren und sortieren die Basen wie in Satz V1B.

Auf $V'_+ = \langle v'_1, \dots, v'_{p'} \rangle^!_{\mathbb{K}}$ gilt $\beta \succ 0$. Warum? Dank Pythagoras, Satz S3A!
Auf $U = \langle v_{p+1}, \dots, v_n \rangle^!_{\mathbb{K}}$ gilt $\beta \preceq 0$. Warum? Dank Pythagoras, Satz S3A!

Es folgt $V'_+ \cap U = \{0\}$: Für $v \in (V'_+ \cap U) \smallsetminus \{0\}$ wäre $\beta(v, v) > 0 \geq \beta(v, v)$.

Aus $V'_+ \oplus U \leq V = V_+ \oplus U$ folgt $p' \leq p$. Mit vertauschten Rollen folgt $p \leq p'$, also $p = p'$. Für $-\beta$ folgt $q = q'$. Also $(p, q, r) = (p', q', r')$. QED



$$C_+ := \{x \in V \mid q(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| > |x_2|\}$$

$$C_0 := \{x \in V \mid q(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| = |x_2|\}$$

$$C_- := \{x \in V \mid q(x) < 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| < |x_2|\}$$

Geometrische Anschauung im Beispiel: Auf $V = \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ haben wir $\beta : V \times V \to \mathbb{K} : (x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ und $q(x) = \beta(x, x) = x_1^2 - x_2^2$. Dies zerlegt V in drei Kegel C_+, C_0, C_-. Die Räume V_+, V'_+ liegen im Kegel C_+, die Räume V_-, V'_- liegen im Kegel C_-. Das lässt noch viel Spielraum! Die obige Skizze illustriert dies im einfachsten Beispiel (V, β).

☺ Unsere Rechnung zeigt jedoch: Ihre Dimensionen sind eindeutig! Das ist Sylvesters Trägheitssatz und die Definition der Signatur!

☺ Wir haben Sylvesters Trägheitssatz zunächst in endlicher Dimension formuliert und bewiesen. Wir führen die Beweisidee nun allgemein aus.

Satz V1c: Sylvesters Trägheitssatz, basisfrei

(2) Gegeben seien Summenzerlegungen $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0 = V'_+ \oplus V'_- \oplus V_0$ mit $\beta \succ 0$ auf V_+ und V'_+ sowie $\beta \prec 0$ auf V_- und V'_-, zudem $V_0 = \operatorname{Ker} \beta$. Dann gilt $\dim V_+ = \dim V'_+$ und $\dim V_- = \dim V_-$.

Beweis: (2) Auf $U := V_0 \oplus V_-$ gilt $\beta \preceq 0$, denn für $u \in V_0$ und $v \in V_-$ gilt $\beta(u + v, u + v) = \beta(u, u) + \beta(u, v) + \beta(v, u) + \beta(v, v) \leq 0$. Daraus folgt $V'_+ \cap U = \{0\}$, denn für $v \in (V'_+ \cap U) \smallsetminus \{0\}$ wäre $\beta(v, v) > 0 \geq \beta(v, v)$.

Sei $j'_+ : V'_+ \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V_+$ die Inklusion $i'_+ : V'_+ \hookrightarrow V$ gefolgt von der Projektion $\pi_+ : V \twoheadrightarrow V_+$. Dank $\operatorname{Ker} \pi_+ = U$ ist j'_+ injektiv.

Aus $j'_+ : V'_+ \hookrightarrow V_+$ folgt die Ungleichung $\dim V'_+ \leq \dim V_+$.
Mit vertauschten Rollen folgt $\dim V_+ \leq \dim V'_+$.
Angewendet auf $-\beta$ folgt $\dim V_- = \dim V'_-$. QED

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, two heads, "\pi_+"] & V_+ \arrow[d, hook, "+\mathrm{id}"] \\
V'_+ \arrow[u, hook, "i'_+"] \arrow[r, hook, shift left, "j'_+"] & V \arrow[l, two heads, shift left, "\pi'_+"] \arrow[l, hook, shift left, "j_+"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, two heads, "\pi_-"] & V_- \arrow[d, hook, "-\mathrm{id}"] \\
V'_- \arrow[u, hook, "i'_-"] \arrow[r, hook, shift left, "j'_-"] & V \arrow[l, two heads, shift left, "\pi'_-"] \arrow[l, hook, shift left, "j_-"]
\end{tikzcd}$$

Die entscheidende Aussage ist die Injektivität von $j'_+ : V'_+ \to V_+$. Unsere Rechnung zeiget, dass das Bild $\mathrm{Im}(i'_+) = V'_+$ den Kern $\operatorname{Ker}(\pi_+) = U$ trivial schneidet. Für $0 \neq v \in V'_+$ haben wir $\pi_+(v) \neq 0$.

Wesentlich nutzen wir dann: Aus $V'_+ \hookrightarrow V_+$ folgt $\dim V'_+ \leq \dim V_+$. In endlicher Dimension (1) gelingt dies durch Basisergänzung M2K, in beliebiger Dimension (2) durch Steinitz' Austauschsatz M2M.

Übung: Gehen Sie die Argumente sorgsam durch und zeigen Sie:

Korollar V1D: Sylvesters Trägheitssatz, allgemein

Satz V1C und Beweis gelten über jedem involutiven DRing $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit *geordnetem* Fixkörper $(\mathrm{fix}(\mathbb{K}, \sigma), \leq)$, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{Q}[\mathrm{i}], \mathbb{Q}[\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}]$.

Klassifikation hermitescher Formen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Satz V1E: Klassifikation hermitescher Formen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Wir arbeiten weiterhin über $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$.

(1) Sei (V, β) ein hermitescher Raum mit Dimension $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n \in \mathbb{N}$.
(a) Dann existiert eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}$, jede mit $\mathrm{Sign}(\mathcal{B}) = \mathrm{Sign}(\beta)$.
(b) Eine Isometrie $(V, \beta) \cong (V', \beta')$ existiert gdw $\mathrm{Sign}(\beta) = \mathrm{Sign}(\beta')$.

(2) Jede hermitesche Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ erlaubt Basiswechsel $S \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$
(a) zu einer Diagonalmatrix $S^\dagger A\, S = B$, jede mit $\mathrm{Sign}(B) = \mathrm{Sign}(A)$.
(b) Eine Kongruenz $A \simeq A'$ existiert gdw $\mathrm{Sign}(A) = \mathrm{Sign}(A')$.

Beweis: (1a) Dank Satz V1B existiert eine OBasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V, pseudonormiert und sortiert. Dank Sylvesters Trägheitssatz V1C hat jede andere OBasis $\mathcal{B}'$ dieselbe Signatur, also $\mathrm{Sign}(\mathcal{B}') = \mathrm{Sign}(\mathcal{B}) =: \mathrm{Sign}(\beta)$.

(1b) Aus einer Isometrie $(\varphi, \psi) : (V, \beta) \cong (V', \beta')$ folgt nach Basiswahl $\mathrm{Sign}(\beta) = \mathrm{Sign}(\beta')$. Umgekehrt, Gleichheit $\mathrm{Sign}(\beta) = \mathrm{Sign}(\beta')$ garantiert OBasen $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_n)$ wie in (1a), und damit die Isometrie $(\varphi, \psi) : (V, \beta) \cong (V', \beta') : v_i \leftrightarrows v'_i$ dank PLF N1B, S1E. QED

Klassifikation hermitescher Formen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Übung: Sylvesters Trägheitssatz gilt über jedem *DRing $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit *geordnetem* Fixkörper $(\mathbb{K}^\sigma = \mathrm{fix}(\mathbb{K}, \sigma), \leq)$, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{Q}[\mathrm{i}], \mathbb{Q}[\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}]$.

Für die Klassifikation V1E benötigen wir zusätzlich, dass jedes positive Element ein Quadrat ist: Zu jedem $a \in \mathbb{K}^\sigma_{\geq 0}$ existert eine Wurzel $w \in \mathbb{K}^\sigma_{\geq 0}$ mit $w^2 = a$. Wir nennen $\mathbb{K}^\sigma$ dann einen **euklidisch geordneten Körper**.

☺ Die Ordnung auf $(\mathbb{K}^\sigma, +, \cdot, \leq)$ kann dann allein aus der Körperstruktur rekonstruiert werden, denn in $\mathbb{K}^\sigma$ gilt $a \leq b$ gdw $\exists c \in \mathbb{K}^\sigma$ mit $a + c^2 = b$.

Übung: Zeigen Sie damit abschließend folgende Verallgemeinerung:

Korollar V1F: Klassifikation hermitescher Formen

Die hermitesche Klassifikation V1E gilt über jedem involutiven DRing $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit *euklidisch geordnetem, zentralen* Fixkörper $\mathbb{K}^\sigma = \mathrm{fix}(\mathbb{K}, \sigma)$.

Beispiele: Der geordnete Körper $\mathbb{R}$ ist euklidisch, $\mathbb{Q}$ dagegen nicht. Den kleinsten euklidisch geordneten Körper $\mathbb{Q} < K < \mathbb{R}$ erhalten wir durch wiederholte Adjunktion alle Wurzeln positiver Elemente.

Klassifikation hermitescher Formen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Aufgabe: Wie viele (reguläre) hermitesche Formen β gibt es auf $\mathbb{K}^n$? Wie viele (reguläre) hermitesche Matrizen $A = A^\dagger \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt es? Wir zählen Isomorphieklassen bzw. $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$–Kongruenzklassen.

Lösung: (1) Reguläre Signaturen sind $(n, 0, 0)$, $(n-1, 1, 0)$, ..., $(0, n, 0)$. Das sind genau $n + 1$ Äquivalenzklassen. (2) Für jeden Rang $r = 0, \dots, n$ haben wir $r + 1$ Äquivalenzklassen, insgesamt also $\sum_{r=0}^{n} (r + 1) = \binom{n+2}{2}$.

Beispiel: Wie viele symmetrische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gibt es bis auf $\mathrm{GL}_3\,\mathbb{R}$–Kongruenz? Es gibt genau $\binom{5}{2} = 10$ Äquivalenzklassen!

$$\begin{array}{llll} [+,+,+], & [+,+,-], & [+,-,-], & [-,-,-], \\ & [+,+,0], & [+,-,0], & [-,-,0], \\ & & [+,0,0], & [-,0,0], \\ & & & [0,0,0]. \end{array}$$

Hier steht $[+,+,+]$ für die Klasse aller symmetrischen positiv definiten Matrizen (SPD). Diese entsprechen Skalarprodukten $\langle x \,|\, y \rangle = x^\top A\, y$. Die Klasse $[0, 0, 0]$ enthält nur ein Element: die Nullmatrix $0_{3 \times 3}$.

Unitäre Klassifikation hermitescher Formen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Beispiel: Die spezielle Relativitätstheorie nutzt die „Raumzeit“ $\mathbb{R}^4$ mit Pseudoskalarprodukt $\langle x \,|\, y \rangle = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$ der Signatur $(+, -, -, -)$, als typische Konvention in der Quantenphysik, alternativ $(-, +, +, +)$, als typische Konvention in der allgemeinen Relativität.

☺ Signatur ist eine vollständige Invariante für $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$–Kongruenz über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$ dank unserer hermiteschen Klassifikation V1E.

☺ Noch feiner klassifiziert $\mathrm{GU}_n\,\mathbb{K}$–Kongruenz / unitäre Ähnlichkeit. Invarianten sind hier die (reellen!) Eigenwerte $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ in $\mathbb{R}$, also nicht bloß ihre Vorzeichen, sondern auch ihre Beträge! Das führen wir fort in der euklidischen Klassifikation V2E. quadratischer Polynome.

Übung: Wiederholen Sie den Spektralsatz T1I zu selbstadjungierten Endomorphismen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$ und folgern Sie:

♦ **Satz T2G:** Klassifikation zur $\mathrm{GU}_n\,\mathbb{K}$–Ähnlichkeit über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hermitesch. Genau dann sind A und B unitär ähnlich, also $B = S^\dagger A\, S$ mit $S \in \mathrm{GU}_n(\mathbb{K})$, wenn $\chi_A = \chi_B$ in $\mathbb{R}[X]^1_n$.

Was ist eine quadratische Form?

Beispiel:

$$q(X,Y) = aX^2 + 2bXY + cY^2 = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

Definition V1G: quadratische Form als Polynom → QForm S1L

Eine **quadratische Form** (kurz **QForm**) über dem kommutativen Ring $\mathbb{K}$ in den Variablen $X_1, \dots, X_n$ ist ein homogenes Polynom vom Grad 2:

$$q(X) = \textstyle\sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} X_i X_j \quad \in \quad \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{K}$ für alle $1 \le i \le j \le n$ und $a_{ij} = 0$ für $1 \le j < i \le n$.

Wir setzen fortan $2 \in \mathbb{K}^\times$ voraus und definieren $B = \frac{1}{2}(A + A^\top)$ als die zu q gehörige **symmetrische Koeffizientenmatrix**. Damit gilt

$$q(X) = X^\top A\, X = X^\top B\, X.$$

Die zu q gehörige **symmetrische Bilinearform** ist demnach

$$\beta : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} : (u,v) \mapsto u^\top B\, v.$$

Was ist eine quadratische Form?

☺ Die hier gezeigte Symmetrisierung von A zu $B = \frac{1}{2}(A + A^\top)$ ist die Matrixversion der Polarisierung $\beta(u,v) := \bar{q}(u+v) - \bar{q}(u) - \bar{q}(v)$ von der quadratischen Form $\bar{q} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ zur Bilinearform $\beta : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ (S1L).

⚠ Das quadratische Polynom $q \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ wird stillschweigend identifiziert mit der quadratischen Polynomfunktion $\bar{q} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$.

Erinnerung: Jedes Polynom $p \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ definiert seine zugehörige Polynomfunktion $\bar{p} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} : x \mapsto p(x)$. Das sind verschiedene Dinge! Über jedem unendlichen Körper $\mathbb{K}$ ist diese Zuordnung $p \mapsto \bar{p}$ injektiv, aber nicht surjektiv: Nicht jede Funktion ist eine Polynomfunktion! Über jedem endlichen Körper $\mathbb{K}$ ist $p \mapsto \bar{p}$ surjektiv, aber nicht injektiv: Es gibt Polynome $p \neq 0$ mit $\bar{p} = 0$, über $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ etwa $p = X^2 + X$.

Aufgabe: Für quadratische Formen tritt das Problem nicht auf. Warum?

Lösung: Wir arbeiten mit Polynomen vom Grad 2 in Charakteristik $\neq 2$. Das Polynom $q = X^\top B\, X$ definiert die Funktion $\bar{q}$, diese die Bilinearform β, und diese die Gram–Matrix B. Keine Information geht verloren!

Wie vereinfachen wir eine quadratische Form?

♦ Satz S1R: Diagonalisierung einer quadratischen Form

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$ und $q(X) = X^\top A\, X$ mit $A = A^\top$. Dann existiert eine Variablensubstitution $U = T X$ mit $T \in \mathrm{GL}_n\, \mathbb{K}$ und

$$q(X_1, \dots, X_n) = b_1 U_1^2 + \dots + b_n U_n^2$$

Beispiele: Für $n = 2$ kennen Sie dies als „quadratisches Ergänzen“:

$$q(X,Y) := aX^2 + 2bXY + cY^2 \overset{a \neq 0}{=} a(X + \tfrac{b}{a}Y)^2 + (c - \tfrac{b^2}{a})Y^2$$

Dies ist diagonal in den Variablen $U = X + \frac{b}{a}Y$ und $V = Y$. Ebenso:

$$q(X,Y) := XY = \left(\tfrac{X+Y}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{X-Y}{2}\right)^2$$

☺ Zu $q(X) = X^\top A X$ organisiert die Matrix A effizient die Koeffizienten.

Übung: Beweisen Sie dies zur Wiederholung. Über jedem *DRing $(\mathbb{K}, \sigma)$ konstruiert Gauß–Hermite S1R einen Basiswechsel $S = T^{-1} \in \mathrm{GL}_n\, \mathbb{K}$ von A zu $B = S^\dagger A\, S = \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_n)$. Nun ist $\sigma = \mathrm{id}_\mathbb{K}$ und $\mathbb{K}$ ein Körper.

Wie vereinfachen wir eine quadratische Form?

☺ Gauß–Hermite S1R gelingt erfreulich einfach und universell, über jedem Körper $\mathbb{K}$ mit $2 \in \mathbb{K}^\times$, sogar über jedem *DRing $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit $2 \in \mathbb{K}^\times$.

? Können wir die Konstanten $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ noch weiter vereinfachen? Ja, sicher: Für $U_i = \mu_i V_i$ erhalten wir $q(X) = \sum_i b_i U_i^2 = \sum_i b_i \mu_i^2 V_i^2$.

Somit genügt ein Vertretersystem $R \subseteq \mathbb{K}$ modulo $\mathbb{K}^{\times 2} = \{\, \mu^2 \mid \mu \in \mathbb{K}^\times \,\}$. Wir können diagonalisieren $q(X) = \sum_i b_i U_i^2$ mit $b_1, \dots, b_n \in R \subseteq \mathbb{K}$.

Beispiel: Für $\mathbb{R}$ wählen wir $R = \{-1, 0, 1\}$. Für $\mathbb{C}$ wählen wir $R = \{0, 1\}$. Daraus erhalten wir die folgenden vollständigen Klassifikationssätze.

⚠ Die Voraussetzung $2 \in \mathbb{K}^\times$ wird überall dringend benötigt!

Aufgabe: (1) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und hierüber $q : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K} : x \mapsto x_1 x_2$. Ist q eine quadratische Form? Über welchen Körpern $\mathbb{K}$ existiert eine symmetrische Bilinearform $\beta : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ mit $q(x) = \beta(x,x)$?

(2) Zeigen Sie, dass über $\mathbb{F}_2$ die Bilinearform zur Gram–Matrix $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ keine Orthogonalbasis besitzt. Warum versagt hier Gauß–Hermite S1R? Über welchen CRingen $\mathbb{K}$ ist A kongruent zu einer Diagonalmatrix?

Klassifikation quadratischer / symmetrischer Formen über $\mathbb{R}$

Satz V1H: Klassifikation symmetrischer Bilinearformen über $\mathbb{R}$

(1) Zu jeder symmetrischen Bilinearform $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$ von endlicher Dimension n existiert eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V mit

$$(\beta(v_i, v_j))_{ij} \;=\; \begin{bmatrix} 1_{r_+ \times r_+} & 0_{r_+ \times r_-} & 0_{r_+ \times r_0} \\ 0_{r_- \times r_+} & -1_{r_- \times r_-} & 0_{r_- \times r_0} \\ 0_{r_0 \times r_+} & 0_{r_0 \times r_-} & 0_{r_0 \times r_0} \end{bmatrix}$$

(2) Jede symmetrische Matrix $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$–kongruent zu einer solchen Modellmatrix: Es existiert $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, sodass

$$A \simeq B = S^\top A\, S \;=\; \mathrm{diag}(+1, \dots, +1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0).$$

Die quadratische Form wird mit $X = SY$ diagonalisiert zu

$$q(X) \;=\; X^\top A\, X \;=\; Y^\top B Y \;=\; Y_1^2 + \dots + Y_{r_+}^2 - Y_{r_+ + 1}^2 - \dots - Y_{r_+ + r_-}^2$$

(3) Genau dann sind zwei symmetrische Bilinearformen β, β' über $\mathbb{R}$ isometrisch, bzw. zwei symmetrische Matrizen A, A' über $\mathbb{R}$ kongruent, wenn Sie dasselbe Signaturtripel haben, $(r_+, r_-, r_0) = (r'_+, r'_-, r'_0)$.

Klassifikation quadratischer / symmetrischer Formen über $\mathbb{R}$

Aufgabe: Beweisen Sie dies mit unseren zuvor erarbeiteten Werkzeugen.

Beweis: Das ist Klassifikation V1E hermitescher Formen über $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_\mathbb{R})$, hier detailliert ausformuliert. Dank trivialer Involution $\sigma = \mathrm{id}_\mathbb{R}$ gilt dies für jede *symmetrische* Bilinearform β und jede *symmetrische* Matrix A sowie jede *quadratische Form* q im Sinne obiger Definition V1G. QED

Übung: Die Klassifikation gilt ebenso über jedem geordneten Körper $(\mathbb{K}, \leq)$, in dem jedes positive Element $a > 0$ ein Quadrat ist, siehe V1F.

☺ Die Klassifikation V1E gilt ebenso über $(\mathbb{C}, \mathrm{conj}_\mathbb{C})$ mit Konjugation für jede *hermitesche* Bilinearform β und jede *hermitesche* Matrix A und die zugehörige (konjugiert!) quadratische Form $q(X) = \overline{X}^\top A\, X$.

⚠ Diese quadratische Form $q(X) = \overline{X}^\top A\, X$ entspricht dann jedoch *nicht* der obigen Definition V1G eines Polynoms von Grad 2 in den Variablen $X_1, \dots, X_n$. Wir betrachten daher dezidiert $(\mathbb{C}, \mathrm{id}_\mathbb{C})$ im folgenden Satz, also den Körper $\mathbb{C}$ mit $\sigma = \mathrm{id}_\mathbb{C}$ statt der üblichen Konjugation $\mathrm{conj}_\mathbb{C}$.

⚠ Hier spielt $\mathbb{C}$ eine Doppelrolle, $(\mathbb{C}, \mathrm{conj}_\mathbb{C})$ vs $(\mathbb{C}, \mathrm{id}_\mathbb{C})$.

Klassifikation quadratischer / symmetrischer Formen über $\mathbb{C}$

Satz V1I: Klassifikation symmetrischer Bilinearformen über $(\mathbb{C}, \mathrm{id}_\mathbb{C})$

(1) Zu jeder symmetrischen Bilinearform $\beta : V \times V \to \mathbb{C}$ über $(\mathbb{C}, \mathrm{id}_\mathbb{C})$ von endlicher Dimension n existiert eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V mit

$$(\beta(v_i, v_j))_{ij} \;=\; \begin{bmatrix} 1_{r \times r} & 0_{r \times d} \\ 0_{d \times r} & 0_{d \times d} \end{bmatrix}$$

(2) Jede symmetrische Matrix $A = A^\top \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist kongruent über $(\mathbb{C}, \mathrm{id}_\mathbb{C})$ zu einer solchen Modellmatrix: Es existiert $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, sodass

$$A \simeq B = S^\top A S \;=\; \mathrm{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0).$$

Die quadratische Form wird mit $X = SY$ diagonalisiert zu

$$q(X) \;=\; X^\top A\, X \;=\; Y^\top B Y \;=\; Y_1^2 + \dots + Y_r^2$$

(3) Genau dann sind zwei symmetrische Bilinearformen β, β' über $(\mathbb{C}, \mathrm{id}_\mathbb{C})$ isometrisch, bzw. zwei symmetrische Matrizen A, A' über $(\mathbb{C}, \mathrm{id}_\mathbb{C})$ kongruent, wenn Sie dieselbe Dimension n und denselben Rang r haben.

Klassifikation quadratischer / symmetrischer Formen über $\mathbb{C}$

Aufgabe: Beweisen Sie dies mit unseren zuvor erarbeiteten Werkzeugen.

⚠ Über $(\mathbb{C}, \mathrm{conj}_\mathbb{C})$ mit komplexer Konjugation haben wir wie zuvor die *hermitesche* Klassifikation V1E. Wir arbeiten hier jedoch über $(\mathbb{C}, \mathrm{id}_\mathbb{C})$.

☺ Die Klassifikation V1I gilt wörtlich genau so über jedem Körper $(\mathbb{K}, \mathrm{id}_\mathbb{K})$, in dem jedes Element ein Quadrat ist. Dies gilt insbesondere über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper, etwa $(\mathbb{C}, \mathrm{id}_\mathbb{C})$.

Beweis: (1) Dank V1B existiert zu β eine OBasis $(u_1, \dots, u_n)$ von V mit $\beta(u_i, u_j) \in \mathbb{K}^\times$ für $i = j \in \{1, \dots, r\}$, sonst $\beta(u_i, u_j) = 0$. Für $i = 1, \dots, r$ wählen wir eine der beiden Quadratwurzeln $a_i \in \mathbb{K}$ mit $a_i^2 = \beta(u_i, u_i)$ und setzen $v_i := u_i / a_i$. Damit gilt $\beta(v_i, v_i) = 1$. Sonst $v_i := u_i$ für $i > r$.

(2) Dies ist die äquivalente Matrixformulierung der Aussage (1).

(3) „$\Rightarrow$“: Die Dimension und der Rang sind Invarianten unter Isometrie symmetrischer Bilinearformen bzw. Kongruenz symmetrischer Matrizen.

„$\Leftarrow$“: Haben β, β' selbe Dimension und Rang, so finden wir OBasen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ wie in (1) und damit die Isometrie $(\varphi, \psi) : (V, \beta) \cong (V', \beta') : v_i \leftrightarrows v'_i$, wie immer dank linearer Fortsetzung N1B und S1E. QED

Zusammenfassung zu quadratischen Formen

V201

Sei $\mathbb{K}$ ein kommutativer Ring, etwa ein Körper, zum Beispiel $\mathbb{R}$.
Eine **quadratische Form** ist ein homogenes Polynom vom Grad 2:

$$q(X_1,\dots,X_n) \;=\; \underbrace{\textstyle\sum_{i=1}^n a_{ii}X_i^2}_{\text{quadratische Terme}} + \underbrace{\textstyle\sum_{1\le i<j\le n} \tilde a_{ij}X_iX_j}_{\text{gemischte Terme}} \;\in\; \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$$

(1) Matrixschreibweise: $q(X) = X^\top A\,X$ mit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $A^\top = A$.
Hierzu benötigen wir $2 \in \mathbb{K}^\times$ und setzen $a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2}\tilde a_{ij}$ für $i<j$.
(2) Wir diagonalisieren $A \simeq S^\top A\,S = \operatorname{diag}(b_1,\dots,b_n)$. Für $X = SY$ gilt:

$$q(X) = b_1Y_1^2 + \dots + b_nY_n^2$$

Das symmetrische Gauß–Verfahren S1R benötigt dazu einen Körper $\mathbb{K}$.
(3) Speziell über $\mathbb{R}$ können wir pseudonormieren und sortieren (V1H) zu $A \simeq T^\top A\,T = \operatorname{diag}(+1,\dots,+1,-1,\dots,-1,0,\dots,0)$. Für $X = TZ$ gilt:

$$q(X) = +Z_1^2 + \dots + Z_{r_+}^2 - Z_{r_++1}^2 - \dots - Z_{r_++r_-}^2$$

Das ist die pseudonormierte Diagonalform. Einfacher geht es nicht!

Anwendung in der Optimierung

V202
Erläuterung

Eine erste wichtige Anwendung kennen Sie aus der Analysis. Hierzu sei $f : U \to \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar.
☺ Um jeden Punkt $a \in U$ können wir f entwickeln zu

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + x^\top f''(a)\,x + \text{h.o.t.}$$

Hier ist $f'(a) = ((\partial_i f)(a))_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{1\times n}$ **die Ableitung**. Wir nennen a einen **kritischen Punkt**, wenn die Ableitung verschwindet, also $f'(a) = 0$ gilt.
? Ist a ein Minimum? Maximum? Sattelpunkt? Darüber entscheidet nun die **Hesse–Matrix** $f''(a) = ((\partial_j\partial_i f)(a))_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Sie ist symmetrisch dank Satz von Schwartz. Wir betrachten sie am besten in Diagonalform:
☺ In einer OBasis wie oben gilt für $x = Sy$ die Diagonalform

$$f(a+x) = f(a) + y_1^2 + \dots + y_{r_+}^2 - y_{r_++1}^2 - \dots - y_{r_++r_-}^2.$$

Der Punkt a ist ein **lokales Minimum** gdw $r_- = 0$, **strikt** gdw $r_+ = n$.
Der Punkt a ist ein **lokales Maximum** gdw $r_+ = 0$, **strikt** gdw $r_- = n$.
Für Definitheit haben wir erfreulich effiziente Werkzeuge, siehe §T2.

Was ist eine Quadrik?

V203

Definition V2A: Quadrik

Eine **Quadrik** $Q = \{\,x \in \mathbb{K}^n \mid P(x) = 0\,\} \subseteq \mathbb{K}^n$ ist die Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms $P \in \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]_{\le 2}$, ausgeschrieben:

$$P \;=\; \underbrace{\textstyle\sum_{i=1}^n a_{ii}X_i^2}_{\text{quadratische Terme}} + \underbrace{2\textstyle\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}X_iX_j}_{\text{gemischte Terme}} + \underbrace{2\textstyle\sum_{i=1}^n a_{i0}X_i}_{\text{lineare Terme}} + \underbrace{a_{00}}_{\text{Konstante}}$$

Die Koeffizienten fassen wir in zwei symmetrischen Matrizen zusammen:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ \hline a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} A' &:= (a_{ij})_{i=0,\dots,n}^{j=0,\dots,n} \in \mathbb{K}^{n'\times n'} \\ A &:= (a_{ij})_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^{n\times n} \end{aligned}$$

So gilt $P = X'^\top A'X'$ in homogenen Koordinaten $X' = (1, X_1,\dots,X_n)^\top$.
Hier ist $X^\top A\,X$ die quadratische Form als homogener Teil von Grad 2.
Im Falle $A = 0$ ist P nur ein Polynom vom Grad ≤ 1, also affin-linear.

Ziel: Wir bringen P in eine möglichst einfache Standardform, wie in folgenden Beispielen, durch die geschickte Wahl affiner Koordinaten.

Vom quadratischen Polynom zur symmetrischen Matrix

V204

Beispiel: Schreiben Sie folgende Polynome als symmetrische Matrizen:

$$\begin{bmatrix}1\\u\\v\end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\u\\v\end{bmatrix} = u^2 - 2uv + 2v^2 - 2u$$

$$\begin{bmatrix}1\\u\\v\end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix}12 & -8 & 0\\ -8 & 1 & 6\\ 0 & 6 & -12\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\u\\v\end{bmatrix} = u^2 + 12uv - 12v^2 - 16u + 12$$

$$\begin{bmatrix}1\\u\\v\end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix}4 & -3/2 & -1\\ -3/2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\u\\v\end{bmatrix} = u^2 - 3u - 2v + 4$$

☺ Diese genial-einfache Matrixschreibweise $P = X'^\top A'\,X'$ verbindet quadratische Polynome $P \in \mathbb{K}[X]_{\le 2}$ mit symmetrischen Matrizen A'.
☺ Damit erschließen wir die bewährten Werkzeuge des Matrixkalküls! Das ist der Grund für die erfolgreiche Klassifikation der Quadriken.
⚠ Für Polynome von Grad ≥ 3 gibt es nichts Vergleichbares.

Erinnerung zu ebenen Quadriken – allgemeine Affinität

V205

$E: 0 = x^2/4 + y^2 - 1$

$H: 0 = x^2 - 3y^2 - 1$

$P: 0 = x^2 - 2y$

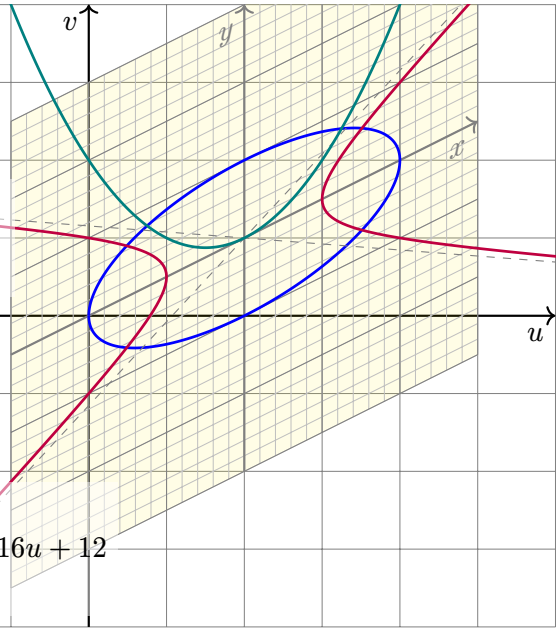
$$\begin{bmatrix}1\\x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&-\frac12&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\u\\v\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\u\\v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&\frac12&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x\\y\end{bmatrix}$$

$E: 0 = u^2 - 2uv + 2v^2 - 2u$

$H: 0 = u^2 + 12uv - 12v^2 - 16u + 12$

$P: 0 = u^2 - 3u - 2v + 4$



Erinnerung zu ebenen Quadriken – allgemeine Affinität

V206 Erläuterung

Wir kennen dieses Beispiel von Seite U213ff aus dem letzten Kapitel U. Dort diente es uns zur Illustration affiner Abbildungen, denn es zeigt die Wirkung einer Affinität auf geometrische Objekte wie Quadriken.

Allgemeine Affinität: Wir betrachten $\mathbb{K}^n$ über $\mathbb{K}$ als affinen Raum. Als Abbildungen erlauben wir dementsprechend Affinitäten (U2A):

$$\mathrm{AGL}_n(\mathbb{K}) := \left\{ T' = \left[\begin{smallmatrix}1&0\\v&T\end{smallmatrix}\right] \,\middle|\, T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ v \in \mathbb{K}^n \right\} \le \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K}).$$

Graphik und Daten überblicken Sie hier in einem Gesamtkunstwerk, als Zusammenfassung unserer schrittweisen Konstruktion (U213ff).
Wiederholung: Wie entsprechen sich Matrizen S', T' und Koordinaten?

Dabei sind wir von einer Quadrik in Hauptachsenform ausgegangen, und haben die Koordinaten x, y in neue Koordinaten u, v überführt. Aus einer schön einfachen Quadrik wird so eine unschön komplizierte Quadrik.

In diesem Kapitel gehen wir nun den schwierigeren umgekehrten Weg: Vorgelegt ist eine Quadrik, meist noch unschön und daher kompliziert. Wir bringen sie in affine Normalform V2D oder Hauptachsenform V2E.

Erinnerung zu ebenen Quadriken – euklidische Affinität

V207

$E: 0 = x^2/4 + y^2 - 1$

$H: 0 = x^2 - 3y^2 - 1$

$P: 0 = x^2 - 2y$

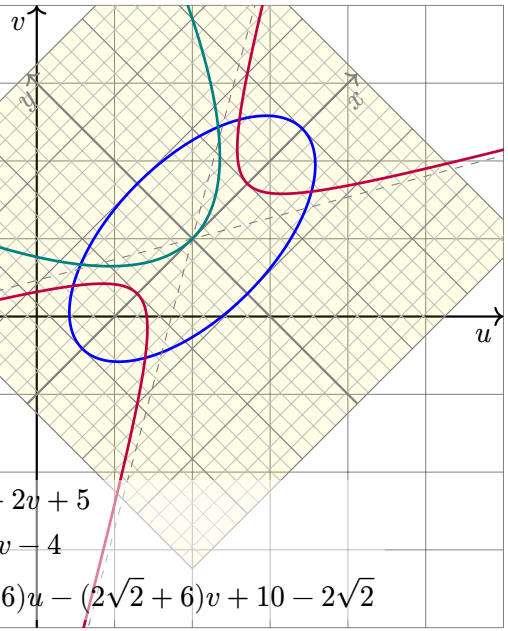
$$\begin{bmatrix}1\\x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{-3}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\u\\v\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\u\\v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\2&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt2}\\1&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x\\y\end{bmatrix}$$

$E: 0 = 5u^2 - 6uv + 5v^2 - 14u + 2v + 5$

$H: 0 = u^2 - 4uv + v^2 + 12u - 6v - 4$

$P: 0 = u^2 + 2uv + v^2 + (2\sqrt2 - 6)u - (2\sqrt2 + 6)v + 10 - 2\sqrt2$



Erinnerung zu ebenen Quadriken – euklidische Affinität

V208 Erläuterung

Auch dieses Beispiel kennen wir von Seite U213ff des vorigen Kapitels U. Dort diente es uns zur Illustration von affin–euklidischen Abbildungen.

Wir betrachten hierbei $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ nicht nur als affinen Raum, sondern als affin-euklidischen Raum mit Metrik $d(a,b) = \|b - a\|$. Als metrikerhaltende Abbildungen erlauben wir dementsprechend **euklidische Affinitäten** aka affin-euklidische Isometrien (U2C):

$$\mathrm{AGO}_n(\mathbb{R}) := \left\{ T' = \left[\begin{smallmatrix}1&0\\v&T\end{smallmatrix}\right] \,\middle|\, T \in \mathrm{GO}_n(\mathbb{R}),\ v \in \mathbb{R}^n \right\} \le \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Graphik und Daten überblicken Sie hier in einem Gesamtkunstwerk, als Zusammenfassung unserer schrittweisen Konstruktion (U213ff). Sie sehen deutlich, dass Abstände und Winkel erhalten werden.

In diesem Kapitel gehen wir nun den schwierigeren umgekehrten Weg: Vorgelegt ist eine Quadrik, meist noch unschön und daher kompliziert. Wir wollen sie euklidisch isometrisch in Hauptachsenform bringen.

Wiederholung: Erklären Sie diese Graphiken, Matrizen und Rechnungen, sich selbst und gerne auch anderen, so klar und präzise wie möglich.

Wie transformieren wir Quadriken?

Wir wollen die Nullstellenmenge $Q = \{x \in \mathbb{K}^n \mid P(x) = 0\}$ verstehen.
Dazu transformieren wir das Polynom $P = X'^\top A'\, X' \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]_{\le 2}$.
Je nach Anwendung stellen sich hier zwei verschiedene Aufgaben.
Die (allgemein-)**affine Klassifikation** über $\mathbb{K}$ ist flexibel großzügig:

Definition V2A: skaliert-affine Kongruenz $A' \mathrel{\dot\simeq} B'$ in $\mathbb{K}^{n' \times n'}$

(1) Wir erlauben **Skalierung** $A' \mapsto B' = \mu A'$ mit $\mu \in \mathbb{K}^\times$ und
affine Kongruenz $A' \mapsto B' = S'^\top A'\, S'$ mit $S' \in \mathrm{AGL}_n\,\mathbb{K}$.

$$\mathrm{AGL}_n(\mathbb{K}) := \left\{ T' = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ v & T \end{smallmatrix}\right] \,\middle|\, T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ v \in \mathbb{K}^n \right\} \le \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$$

Die (isometrisch-)**euklidische Klassifikation** über $\mathbb{R}$ ist streng restriktiv:

Definition V2A: skaliert-euklidische Kongruenz $A' \mathrel{\dot\cong} B'$ in $\mathbb{R}^{n' \times n'}$

(2) Wir erlauben **Skalierung** $A' \mapsto B' = \mu A'$ mit $\mu \in \mathbb{R}^\times$ und
euklidische Kongruenz $A' \mapsto B' = S'^\top A'\, S'$ mit $S' \in \mathrm{AGO}_n\,\mathbb{R}$.

$$\mathrm{AGO}_n(\mathbb{R}) := \left\{ T' = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ v & T \end{smallmatrix}\right] \,\middle|\, T \in \mathrm{GO}_n(\mathbb{R}),\ v \in \mathbb{R}^n \right\} \le \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Wie transformieren wir Quadriken?

Mit diesen Umformungen bringen wir jedes quadratische Polynom in eine möglichst einfache Standardform. Prägnant zusammengefasst:

Affin: $A \mathrel{\dot\simeq} B' = \mu\, S'^\top A'\, S'$ mit $\mu \in \mathbb{K}^\times$ und $S' \in \mathrm{AGL}_n\,\mathbb{K}$
Euklidisch: $A \mathrel{\dot\cong} B' = \mu\, S'^\top A'\, S'$ mit $\mu \in \mathbb{R}^\times$ und $S' \in \mathrm{AGO}_n\,\mathbb{R}$

Aufgabe: Dies sind Äquivalenzrelationen. Führen Sie es aus!

Beweis: Die Äquivalenzeigenschaften folgen direkt aus der zugrunde liegenden Gruppenoperation von $\mathbb{K}^\times \times \mathrm{AGL}_n\,\mathbb{K}$ und $\mathbb{R}^\times \times \mathrm{AGO}_n\,\mathbb{R}$. Lemma J3G erklärt dies allgemein. Hier ausgeführt zur Erinnerung:

Reflexivität: Es gilt $A' = \mu\, S'^\top A'\, S'$ dank $S' = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right]$ und $\mu = 1$.

Symmetrie: Aus $B' = \mu\, S'^\top A'\, S'$ folgt $A' = \lambda\, T'^\top B'\, T'$ dank der Inversen $T' = S'^{-1}$ und $\lambda = \mu^{-1}$.

Transitivität: Aus $B' = \lambda\, S'^\top A'\, S'$ und $C' = \mu\, T'^\top B'\, T'$ folgt $C' = \nu\, U'^\top A'\, U$ dank der Produkte $U' = S'T'$ und $\nu = \mu\lambda$, denn $\mu\lambda\, T'^\top S'^\top A'\, S'\, T' = \mu\, T'^\top B'\, T' = C'$. QED

Transformation von Quadrik und Polynom

Bemerkung V2A: Transformation von Quadrik und Polynom

Sei $Q = \{x \in \mathbb{K}^n \mid x'^\top A'\, x' = 0\}$ die Quadrik zur sym. Matrix $A' \in \mathbb{K}^{n' \times n'}$.
Sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : x' \mapsto y' = T'x'$ die Affinität zur Matrix $T' \in \mathrm{AGL}_n\,\mathbb{K}$ mit Inverser $S' = T'^{-1}$. Dann ist auch die Bildmenge $f(Q) \subseteq \mathbb{K}^n$ eine Quadrik, nämlich $f(Q) = \{y \in \mathbb{K}^n \mid y'^\top B' y' = 0\}$ mit $B' = S'^\top A' S'$.

⚠ Die Transformationen S' des Polynoms $P = X'^\top A'\, X \in \mathbb{K}[X]_{\le 2}$ und T' der zugehörigen Quadrik $Q \subseteq \mathbb{K}^n$ wirken entgegengesetzt!

Beweis: Für $x \mapsto y = f(x)$ gilt hin $y' = T'x'$ und zurück $x' = S'y'$.

$$\begin{aligned} y \in f(Q) \quad &\iff \quad x = f^{-1}(y) \in Q \\ &\iff \quad x'^\top A'\, x' = 0 \\ &\iff \quad (S'y')^\top A'\, (S'y') = 0 \\ &\iff \quad y'^\top (S'^\top A'\, S')\, y' = 0 \quad \iff \quad y'^\top B'\, y' = 0 \end{aligned}$$

Also gilt $f(Q) = \{y \in \mathbb{K}^n \mid y'^\top B' y' = 0\}$, wie behauptet. QED

Transformation von Quadrik und Polynom

☺ Unsere Definition V2A zur Frage „Was ist eine Quadrik $Q \subseteq \mathbb{K}^n$?“ ist unabhängig von den willkürlich gewählten affinen Koordinaten: Das Bild einer Quadrik $Q \subseteq \mathbb{K}^n$ unter einer Affinität $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ist wieder eine Quadrik. Genau so soll es auch sein!

☺ Die Nullstellenmenge $Q = \{x \in \mathbb{K}^n \mid P(x) = 0\}$ ändert sich nicht, wenn wir das Polynom P mit einem Skalar $\mu \in \mathbb{K}^\times$ multiplizieren. Neben Koordinatenwechsel durch Affinitäten erlauben wir daher im Folgenden auch Skalierungen $P \mapsto \mu P$, also $A' \mapsto \mu A'$ mit $\mu \in \mathbb{K}^\times$.

? Wir suchen im Folgenden eine Klassifikation aller Quadriken $Q \subseteq \mathbb{K}^n$, besser: der definierenden quadratischen Polynome $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]_{\le 2}$. Warnender Slogan: *Die Quadrik Q ist nur der Schatten des Polynoms P.*

☺ Die folgende Klassifikation verschafft uns eine einfache Übersicht, zunächst allgemein über jedem Körper der Charakteristik $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$.

☺ Anschließend wollen wir dies speziell für $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ präzisieren, indem wir die Formel weiter vereinfachen und so eindeutig machen.

Affine Klassifikation der Quadriken

Satz V2B: affine Klassifikation der Quadriken, Standardform

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper der Charakteristik $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$. Wir untersuchen die Quadrik $Q = \{\, x \in \mathbb{K}^n \mid x'^{\mathsf{T}} A' x' = 0 \,\}$ zur symmetrischen Matrix

$$A' = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{0*} \\ a_{*0} & A \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n' \times n'}.$$

(0) Für $r := \operatorname{rang} A$ und $r' := \operatorname{rang} A'$ gilt $\delta := r' - r \in \{0, 1, 2\}$.

(1) Dazu finden wir eine Affinität $f : \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n : x' \mapsto y' = T' x'$ mit $T' = S'^{-1} \in \mathrm{AGL}_n \mathbb{K}$, sodass die Bildquadrik $f(Q) \subseteq \mathbb{K}^n$ gegeben ist durch die Gleichung $y'^{\mathsf{T}} B' y' = 0$ mit $B' = \mu\, S'^{\mathsf{T}} A'\, S'$ in Standardform:

$$\underbrace{b_1 y_1^2 + \cdots + b_r y_r^2}_{=:\, q(y_1, \dots, y_r)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \delta = 0 \quad \text{(kegeliger Typ)}, \\ 1 & \text{falls } \delta = 1 \quad \text{(zentraler Typ)}, \\ 2y_{r+1} & \text{falls } \delta = 2 \quad \text{(parabolischer Typ)}. \end{cases}$$

Diese Form ist noch nicht ganz eindeutig: Wir können umsortieren, Quadrate rausziehen, und im Falle $\delta \in \{0, 2\}$ zudem global skalieren.

Affine Klassifikation der Quadriken

$$A' = \left[\begin{array}{c|cccc} * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{array}\right] \xrightarrow{(a)} \left[\begin{array}{c|cccc} * & * & * & * & * \\ \hline * & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(b)} \left[\begin{array}{c|cccc} * & 0 & 0 & * & * \\ \hline 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(c)} \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ oder } \left[\begin{array}{c|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ oder } \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Algo V2B: skaliert-affine Transformation von A' zu einer Standardform

(a) Dank Gauß–Hermite S1R diagonalisieren wir die quadratische Form A.
(b) Mit jedem Diagonaleintrag $b_{ii} \neq 0$ löschen wir $b_{i0} = b_{0i}$ links & oben.
(c) Wir vereinfachen die nullte Spalte und Zeile, je nach $\delta \in \{0, 1, 2\}$.

Aufgabe: Führen Sie diese zusammenfassende Skizze detailliert aus.

Affine Klassifikation quadratischer Polynome

⚠ Wir nutzen für die Zeilen und Spalten von A' die Indizes $0, 1, 2, \dots, n$, und nennen sie daher konsequent die „nullte“, „erste“, „zweite“, usw. Die nullte Zeile und Spalte spielt eine Sonderrolle gemäß Definition V2A.

Beweis: (a) Dank Gauß–Hermite S1R diagonalisieren wir zunächst A: Wir konstruieren $S \in \mathrm{GL}_n \mathbb{K}$ mit $B = S^{\mathsf{T}} A\, S = \operatorname{diag}(b_{11}, \dots, b_{rr}, 0, \dots, 0)$. Wir setzen $S' = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right]$ und $B' = S'^{\mathsf{T}} A'\, S'$. Damit arbeiten wir weiter.

(b) Mit jedem Diagonaleintrag $b_{ii} \neq 0$ löschen wir $b_{i0} = b_{0i}$ links & oben. Das entspricht $T' = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ v & S \end{smallmatrix}\right]$ und $C' = T'^{\mathsf{T}} A'\, T'$. Damit arbeiten wir weiter.

(c0) Verschwindet die nullte Spalte und Zeile, so folgt $\delta = 0$, und fertig.

(c1) Gilt $c_{00} \neq 0$, sonst $c_{i0} = c_{0i} = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, so folgt $\delta = 1$. Wir skalieren die gesamte Matrix C, sodass $d_{00} = -1$ gilt, damit fertig.

(c2) Andernfalls haben wir $c_{i0} = c_{0i} \neq 0$ für manche $i \in \{r+1, \dots, n\}$. Sei $i = r + 1$, notfalls tauschen wir $i \leftrightarrow r + 1$ in Zeilen und Spalten. Wir skalieren zu $d_{i0} = d_{0i} = -1$ und löschen $d_{j0} = d_{0j}$ für $j \neq i$. Das zeigt $\delta = 2$. Damit sind wir fertig. QED

Affine Klassifikation quadratischer Polynome

Wir untersuchen Quadriken $Q = \{\, x \in \mathbb{K}^n \mid P(x) = 0 \,\}$ zu $P(x) = x'^{\mathsf{T}} A'\, x'$. Genauer gesagt, haben wir die quadratischen Polynome P klassifiziert:

(1a) Die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$–kongruent über $(\mathbb{K}, \mathrm{id}_{\mathbb{K}})$ zu einer Diagonalmatrix: Dank S1R existiert $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ mit

$$A \simeq B = S^{\mathsf{T}} A\, S = \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_r, 0, \dots, 0).$$

(1b) Weiter existiert eine Affinität $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : x' \mapsto y' = T'^{-1} x'$ mit $T' = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ u & S \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{AGL}_n(\mathbb{K})$, sodass $C' = T'^{\mathsf{T}} A'\, T'$ gegeben ist durch

$$y'^{\mathsf{T}} C'\, y' = c_1 y_1^2 + \cdots + c_r y_r^2 - \{\, 0,\ c,\ 2y_{r+1} \,\}.$$

(1c) Skalierung ergibt $D' = \mu\, U'^{\mathsf{T}} A'\, U'$ mit $U' \in \mathrm{AGL}_n(\mathbb{K})$ und

$$z'^{\mathsf{T}} D'\, z' = d_1 z_1^2 + \cdots + d_r z_r^2 - \{\, 0,\ 1,\ 2z_{r+1} \,\}.$$

Im Falle $\delta = 1$ nutzen wir $\mu = c^{-1}$ und $U' = T'$. Im Falle $\delta \neq 1$ können wir $\mu \in \mathbb{K}^\times$ beliebig wählen; für $\delta = 2$ kompensieren wir durch $z_{r+1} = \mu y_{r+1}$.

Affine Klassifikation quadratischer Polynome

☺ Für die Quadrik Q sind Skalierungen des Polynoms P unerheblich. Für das Polynom P selbst macht es jedoch einen Unterschied.

⚠ Vorsicht, hier irrt das Lernbuch von Fischer (in der aktuellen 4. Auflage von 2019), da es die Aussagen (1) und (2,3,4) vermischt.

Allein durch Affinität ist die Standardform (4) *für das Polynom* nicht zu erreichen. Dennoch resümiert Fischer auf Seite 430 etwas kryptisch:

> **Affine Normalform der Gleichung eines Kegelschnitts** *Ist $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein Kegelschnitt, so kann man seine Gleichung durch eine affine Transformation auf genau eine der oben angegebenen Normalformen bringen.*
>
> *Gemeint ist eine affine Bijektion, also eine Affinität.*
>
> *Wann sind zwei Gleichungen gleich? Ist hier das Polynom gemeint? Dann wäre es falsch.*

☺ Wir klassifizieren anschließend alle Quadriken über $\mathbb{R}$, illustriert im Überblick V221 & V222. Dabei können wir die Konstanten $\alpha, \beta, \gamma > 0$ frei wählen. Zur affinen Normalform setzen wir überall $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

⚠ Vorsicht, auch auf Seite 436 irrt das Lernbuch von Fischer: Das Signaturtripel ist nur im Falle $\delta = 1$ eindeutig festgelegt. Im Falle $\delta \neq 1$ können wir durch Skalierung mit -1 alle Vorzeichen umklappen.

Affine Klassifikation quadratischer Polynome

Bemerkung: Für $\delta = 1$ müssen wir die Matrix einmal global skalieren. Andernfalls, für $\delta \in \{0, 2\}$, bleibt globale Skalierung noch frei wählbar. Im Fall $\delta = 0$ ist das offensichtlich, da wieder eine Standardform entsteht. Im Fall $\delta = 2$ können wir global mit $\mu \in \mathbb{K}^\times$ skalieren und dies mit der lokalen Skalierung μ^{-1} in Zeile und Spalte $r + 1$ kompensieren.

☺ Wir interessieren uns letztlich nur für die Nullstellenmenge Q, und eine globale Skalierung $A' \mapsto \mu A'$ mit $\mu \in \mathbb{K}^\times$ ändert diese nicht. Wir nutzen diese zusätzliche Freiheit gerne, um auch die Konstanten in unserer obigen Standardform soweit möglich aufzuhübschen.

⚠ Wir sprechen ganz bewusst von *einer* Standardform und nicht von „der Normalform“, denn das Endergebnis ist noch nicht ganz eindeutig.

☺ Über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ können wir auch die letzten Freiheiten noch ausnutzen und tatsächlich eine (nun gänzlich eindeutige!) Normalform gewinnen. Das vollendet die affine Klassifikation in den Sätzen V2C und V2D.

Übung: Führen Sie diesen letzten Schritt sorgsam aus. An welchen Stellen wird der generische Algorithmus V2B über $\mathbb{K}$ verbessert für $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$?

Affine Klassifikation quadratischer Polynome über $\mathbb{C}$

Satz V2C: affine Klassifikation quadratischer Polynome über $\mathbb{C}$ ↔ V1I

Jedes quadratische Polynom $P = X'^\top A' X' \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_{\leq 2}$ können wir darstellen durch seine symmetrische Matrix $A' = \left[\begin{smallmatrix} * & * \\ * & A \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{C}^{n' \times n'}$.

(0) Für $r := \operatorname{rang} A$ und $r' := \operatorname{rang} A'$ gilt $\delta := r' - r \in \{0, 1, 2\}$.

(1) Durch Affinität und Skalierung zu $\mu\, S'^\top A' S'$ können wir unser Polynom P überführen in genau eine der folgenden Normalformen:

$$Y_1^2 + \dots + Y_r^2 - \begin{cases} 0 & \text{falls } \delta = 0 \quad \text{(kegeliger Typ)}, \\ 1 & \text{falls } \delta = 1 \quad \text{(zentraler Typ)}, \\ 2Y_{r+1} & \text{falls } \delta = 2 \quad \text{(parabolischer Typ)}. \end{cases}$$

(2) Die beiden Zahlen (r, δ) bilden somit ein vollständiges System von Invarianten für diese skaliert-affine Klassifikation über $\mathbb{C}$.

☺ Im Vergleich zu Satz V2B erhalten wir über $\mathbb{C}$ zwei Verbesserungen: Erstens, die Gleichungen für Quadriken werden noch weiter vereinfacht. Zweitens, die oben angegebene Normalform ist nun sogar eindeutig!

Affine Klassifikation quadratischer Polynome über $\mathbb{R}$

Satz V2D: affine Klassifikation quadratischer Polynome über $\mathbb{R}$ ↔ V1H

Jedes quadratische Polynom $P = X'^\top A' X' \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]_{\leq 2}$ können wir darstellen durch seine symmetrische Matrix $A' = \left[\begin{smallmatrix} * & * \\ * & A \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^{n' \times n'}$.

(0) Für $r := \operatorname{rang} A$ und $r' := \operatorname{rang} A'$ gilt $\delta := r' - r \in \{0, 1, 2\}$.

(1) Durch Affinität und Skalierung zu $\mu\, S'^\top A' S'$ können wir unser Polynom P überführen in genau eine der folgenden Normalformen:

$$Y_1^2 + \dots + Y_p^2 - Y_{p+1}^2 - \dots - Y_r^2 - \begin{cases} 0 & \text{falls } \delta = 0, \\ 1 & \text{falls } \delta = 1, \\ 2Y_{r+1} & \text{falls } \delta = 2. \end{cases}$$

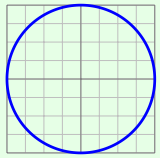
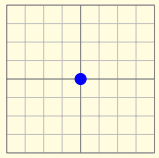
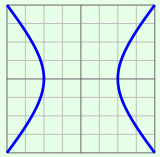
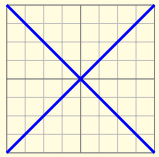
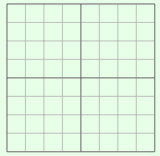
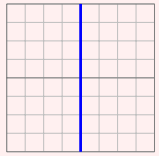
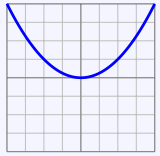
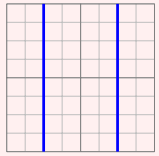
Dabei gilt $0 \leq p \leq r$ falls $\delta = 1$ und $r/2 \leq p \leq r$ falls $\delta \in \{0, 2\}$.

(2) Die drei Zahlen (p, r, δ) bilden somit ein vollständiges System von Invarianten für diese skaliert-affine Klassifikation über $\mathbb{R}$.

☺ Im Vergleich zu Satz V2C erhalten wir über $\mathbb{R}$ zudem die Signatur $\operatorname{sign}(A) = 2p - r$ für $\delta = 1$ bzw. ihren Betrag $|\operatorname{sign}(A)|$ für $\delta \in \{0, 2\}$.

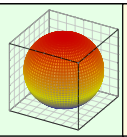
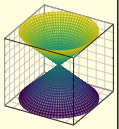
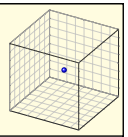
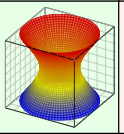
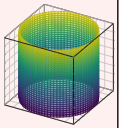
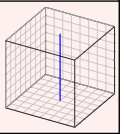
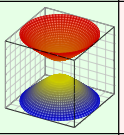
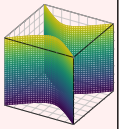
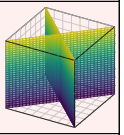
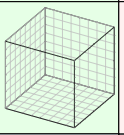
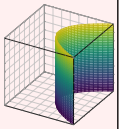
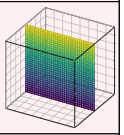
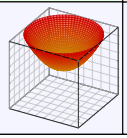
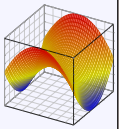
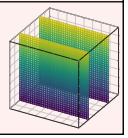
Klassifikation der reellen Quadriken in der Ebene $\mathbb{R}^2$

V221

Ellipse $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ 	Punkt $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=0$ 
Hyperbel $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ 	schneidendes Geradenpaar $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=0$ 
leere Menge $-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ 	Gerade $\frac{x^2}{\alpha^2}=0$ 
Parabel $\frac{x^2}{\alpha^2}=2y$ 	paralleles Geradenpaar $\frac{x^2}{\alpha^2}=1$ 

Klassifikation der reellen Quadriken im Raum $\mathbb{R}^3$

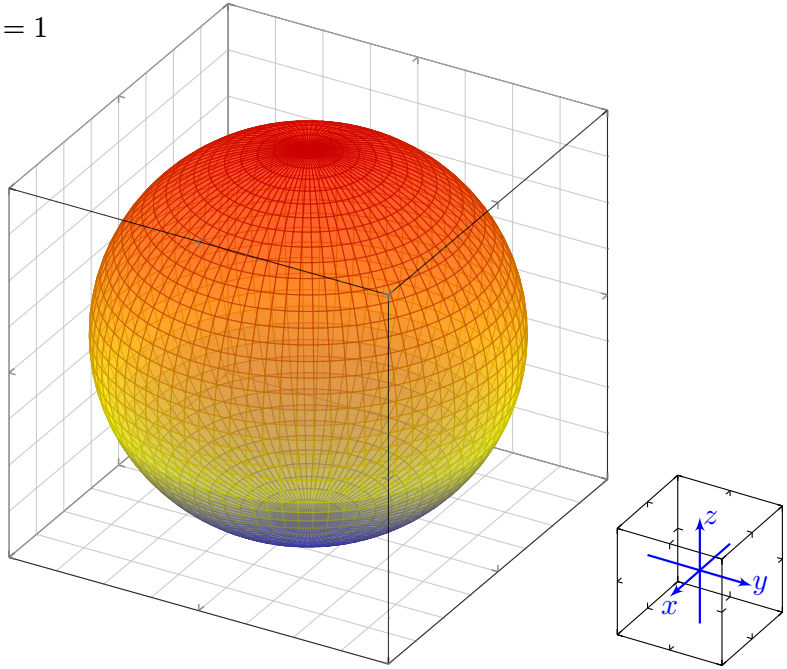
V222

Ellipsoid $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ 	elliptischer Doppelkegel $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0$ 	Punkt $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=0$ 
einschaliges Hyperboloid $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ 	elliptischer Zylinder $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ 	Gerade $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=0$ 
zweischaliges Hyperboloid $-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ 	hyperbolischer Zylinder $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ 	schneidendes Ebenenpaar $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=0$ 
leere Menge $-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ 	parabolischer Zylinder $\frac{x^2}{\alpha^2}=2y$ 	Ebene $\frac{x^2}{\alpha^2}=0$ 
elliptisches Paraboloid $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=2z$ 	hyperbolisches Paraboloid $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=2z$ 	paralleles Ebenenpaar $\frac{x^2}{\alpha^2}=1$ 

Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: Ellipsoid

V223

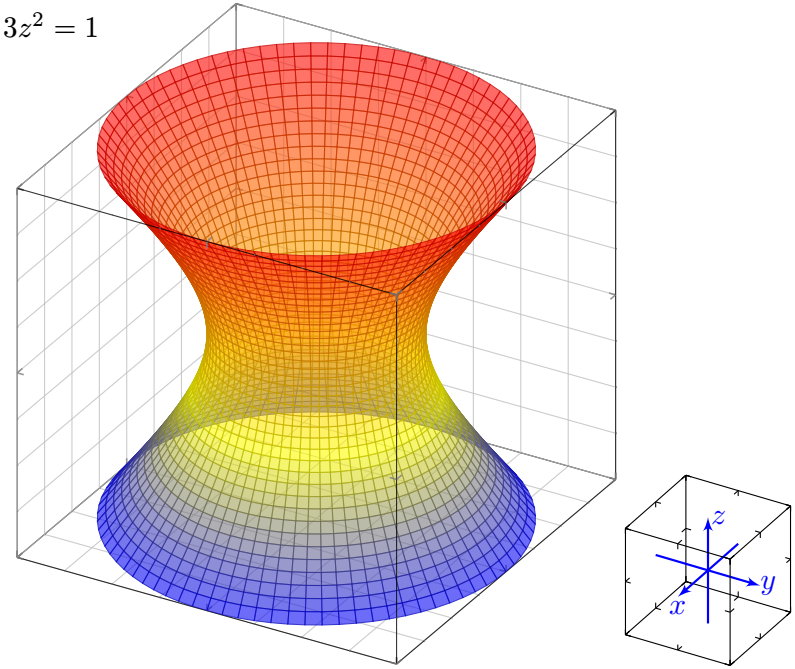
$x^2+y^2+z^2=1$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: einschaliges Hyperboloid

V224

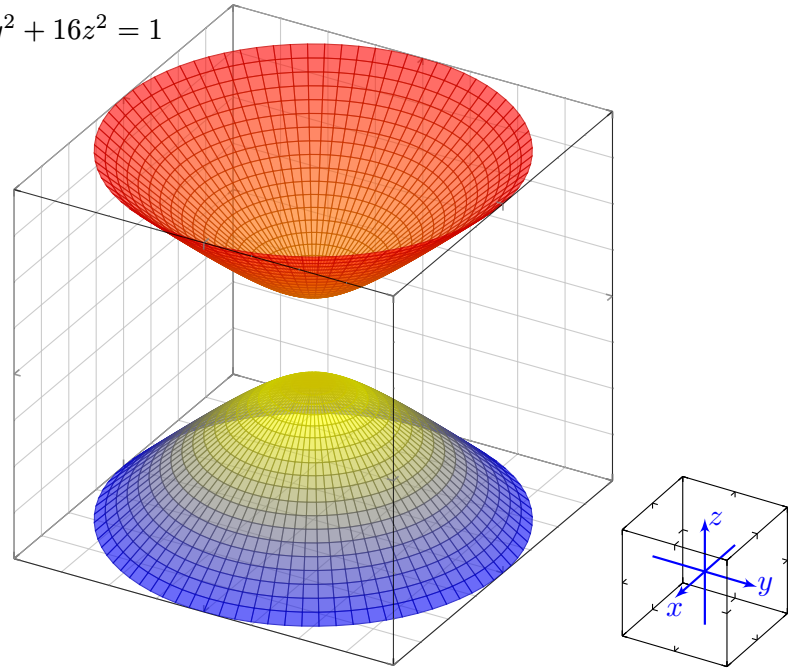
$4x^2+4y^2-3z^2=1$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: zweischaliges Hyperboloid

V225

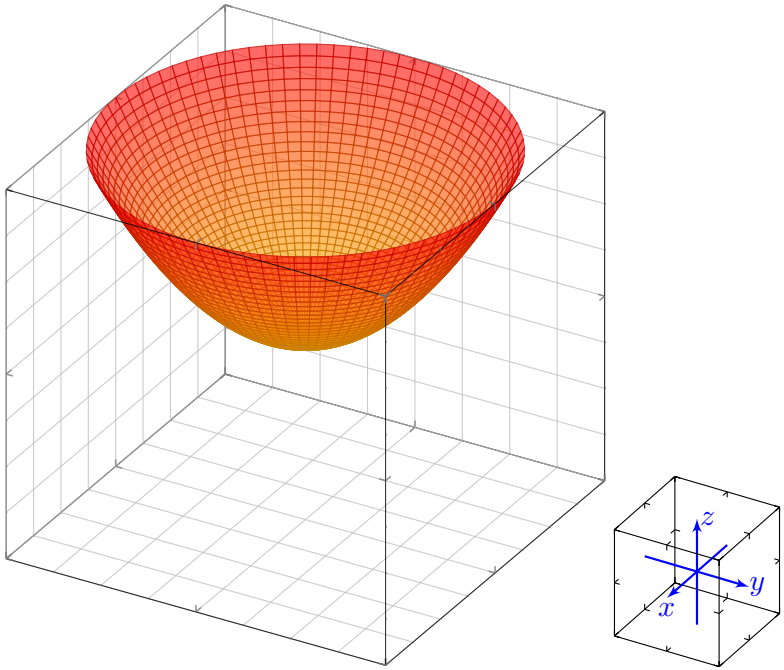
$-15x^2 - 15y^2 + 16z^2 = 1$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: elliptisches Paraboloid

V226

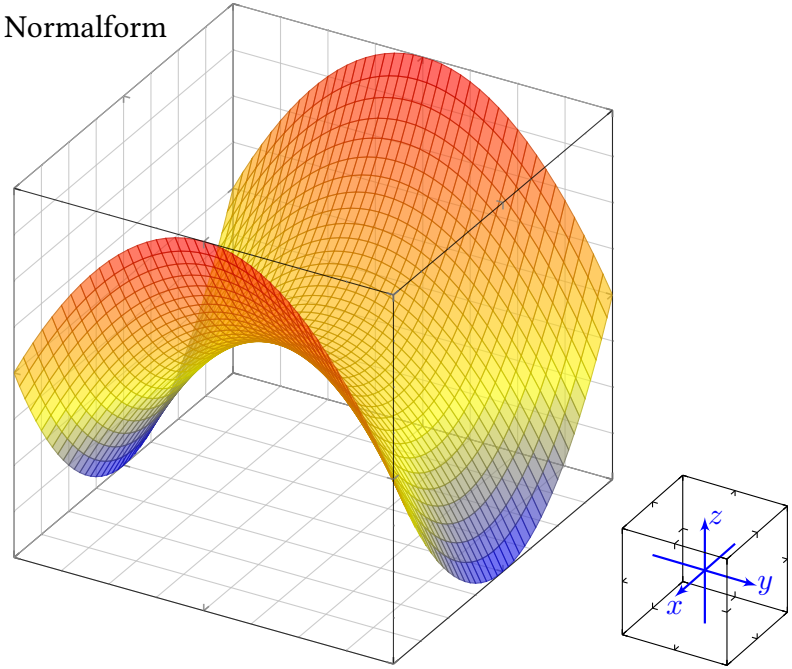
$z = x^2 + y^2$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: hyperbolisches Paraboloid

V227

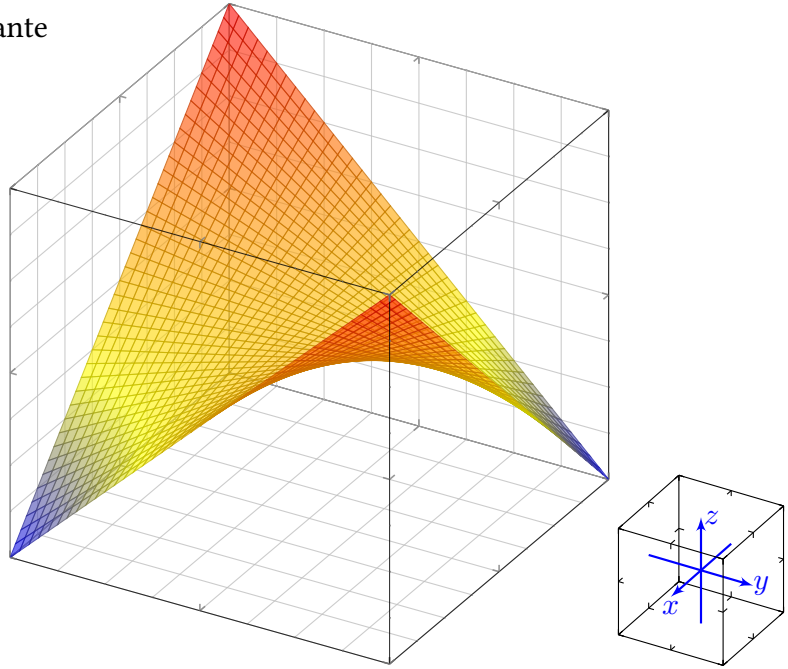
$z = x^2 - y^2$, Normalform



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: hyperbolisches Paraboloid

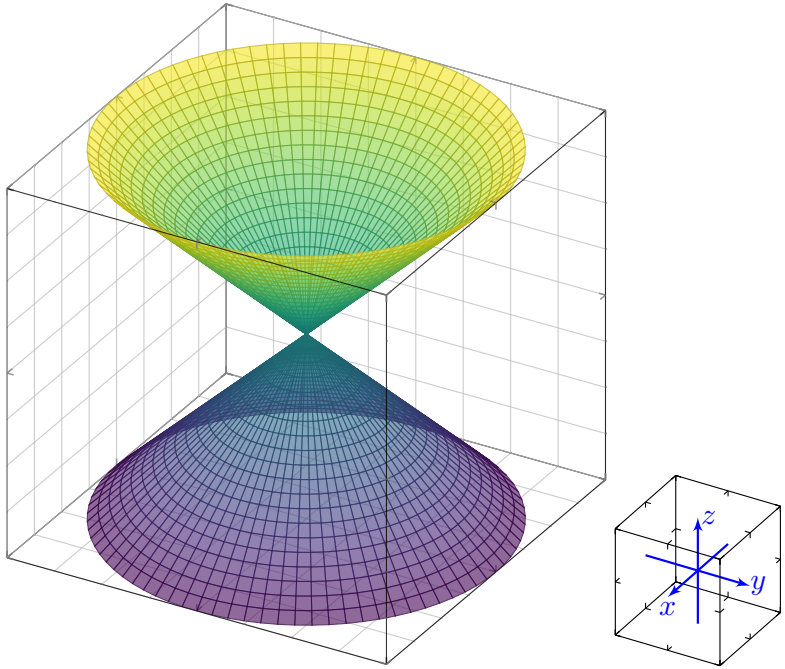
V228

$z = xy$, Variante

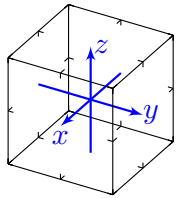


Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: elliptischer Doppelkegel

$z^2 = x^2 + y^2$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$



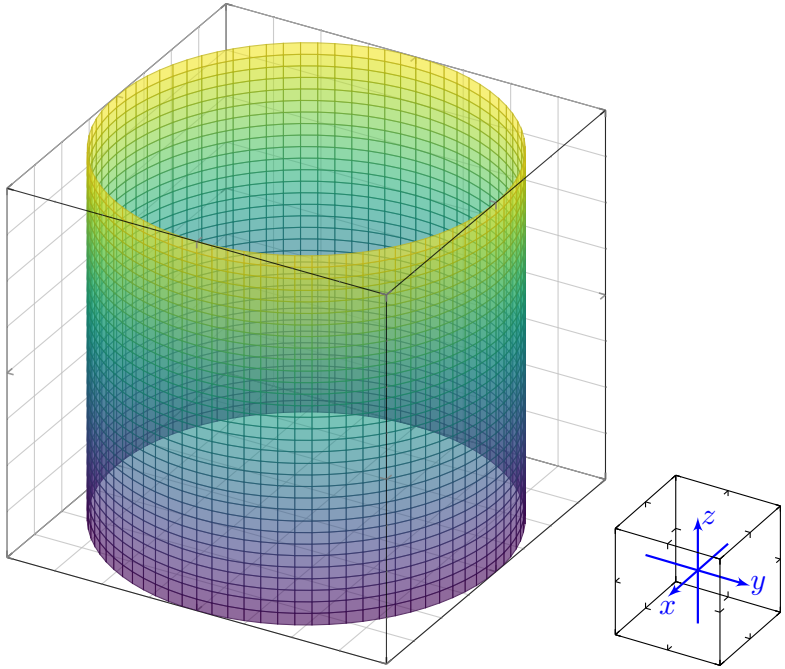
Alle Graphiken zeigen den Standardwürfel $[-1,1]^3$. Der Ästhetik halber spare ich alle Beschriftungen, da sie sich ohne jede Mühe rekonstruieren lassen. Die Skalierungskonstanten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ wähle ich jeweils so, dass ein harmonisches Bild entsteht.

Unter einer typischen Quadrik im $\mathbb{R}^3$ stellen wir uns eine Fläche vor. Die leere Menge, Punkt und Gerade sehen jedoch recht mager aus. Es gibt in diesen Fällen allerdings noch viele Punkte im Komplexen, also Lösungen in $\mathbb{C}^3$, die wir im Schnitt mit $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$ nicht sehen.

Die folgenden Polynome enthalten nicht alle drei Variablen x, y, z, sondern nur zwei Variablen x, y oder gar nur noch eine Variable x. (Ganz ohne Variablen könnten wir auch noch 0 und 1 hinzufügen.) Die zugehörige Quadrik ist daher ein Zylinder über einer Quadrik in kleinerer Dimension. Wir erkennen hier die zuvor diskutierte Klassifikation der reellen Quadriken in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

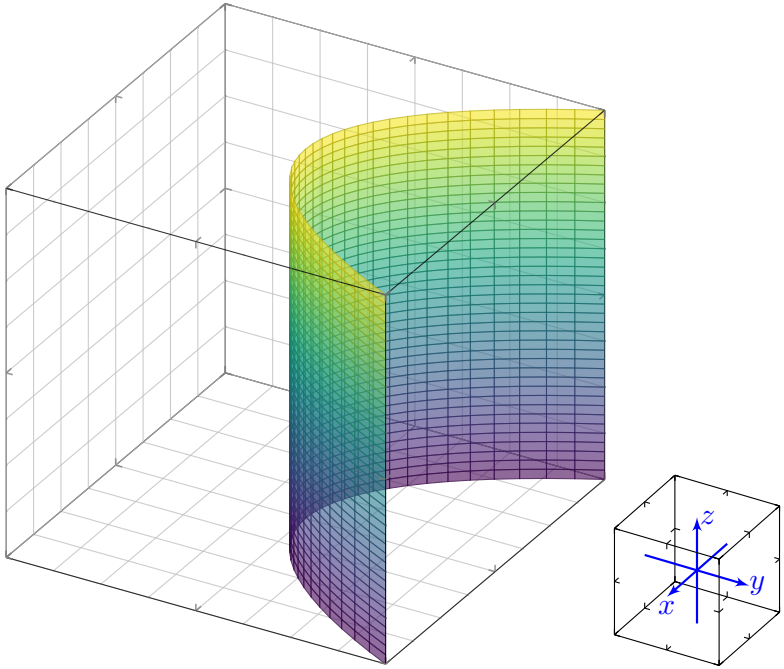
Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: elliptischer Zylinder

$x^2 + y^2 = 1$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: parabolischer Zylinder

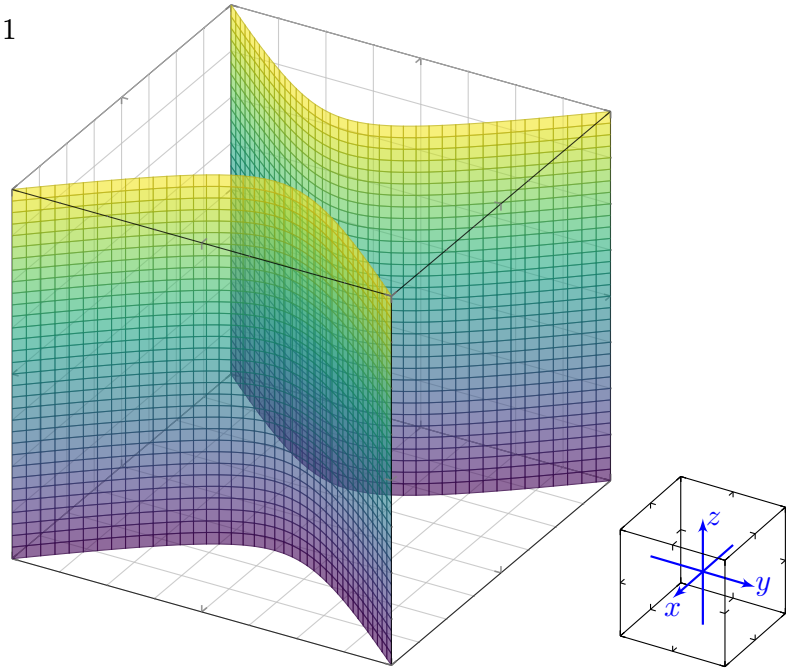
$y = x^2$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: hyperbolischer Zylinder

V233

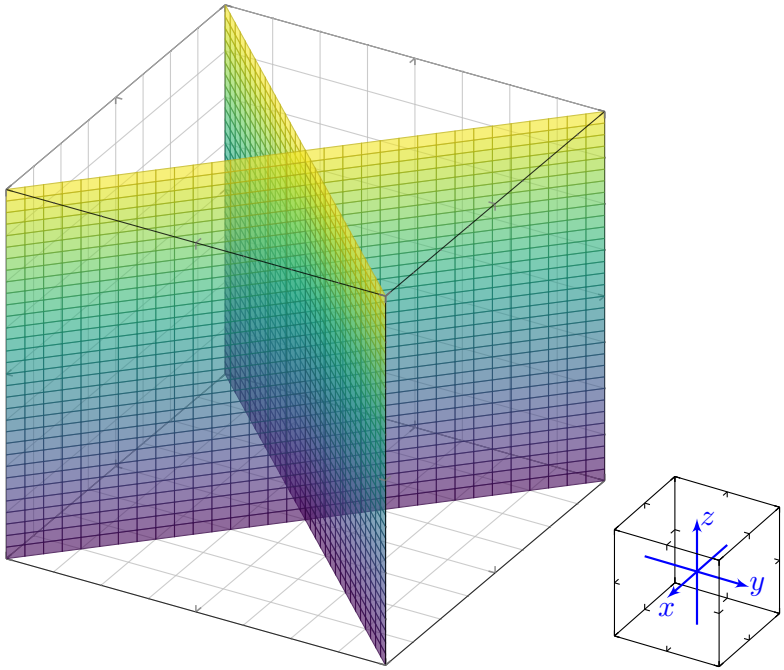
$9x^2 - 8y^2 = 1$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: schneidendes Ebenenpaar

V234

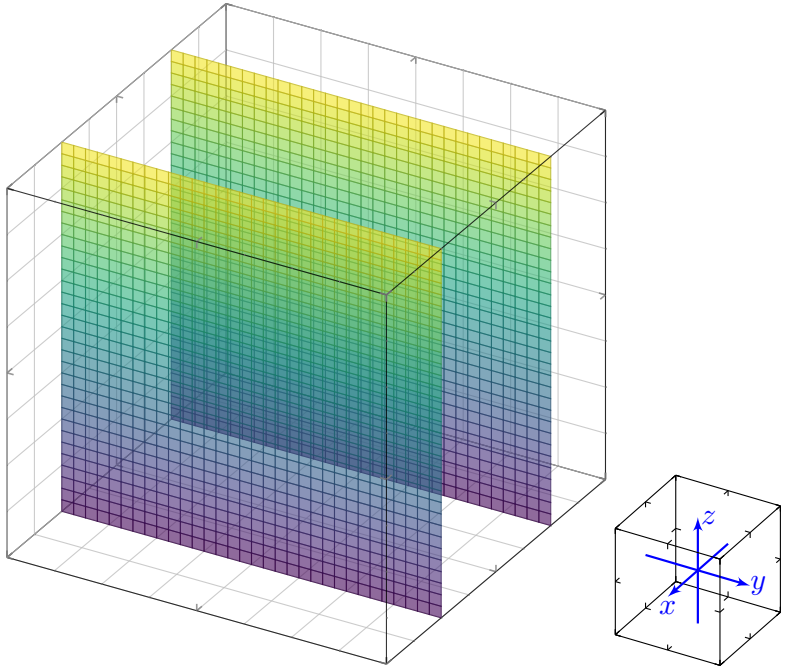
$x^2 - y^2 = 0$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: paralleles Ebenenpaar

V235

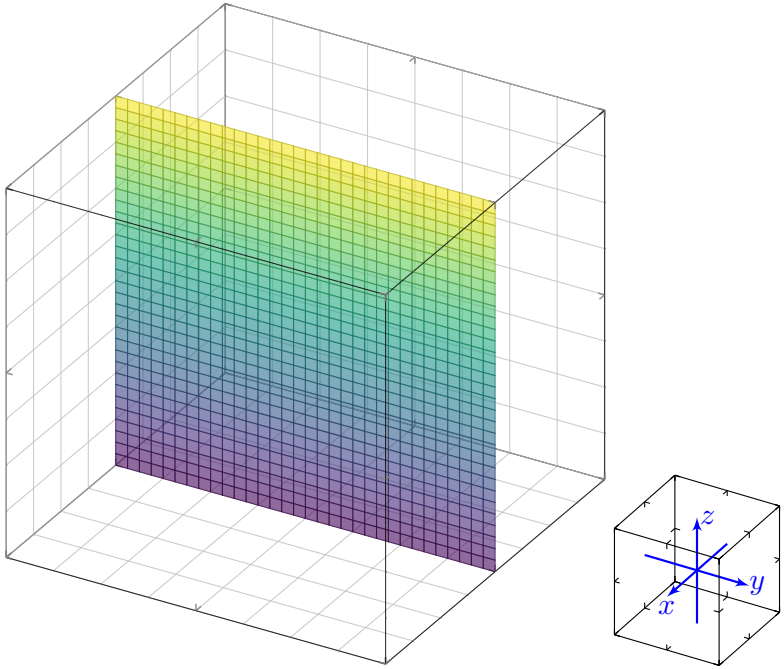
$4x^2 = 1$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: Ebene

V236

$x^2 = 0$



Die affine Klassifikation der reellen Quadriken

Übung: Machen Sie sich mit der Klassifikation V222 vertraut: Nehmen Sie sich die Liste aller Normalformen und fertigen Sie jeweils selbst eine Skizze an. Umgekehrt: Übersetzen Sie die Abbildungen in Gleichungen.

Anleitung zum Zeichnen von solchen Nullstellen- / Lösungsmengen: Lege eine Koordinate fest, etwa $z = \text{const}$, und zeichne den Schnitt; wiederhole so oft wie nötig oder gewünscht, bis ein Bild entsteht.

Übung: Sind wirklich alle Fälle aus der Klassifikation V2D abgebildet? Welche Quadriken fehlen? Welche Quadriken treten mehrfach auf? Beschreiben $z = x^2 - y^2$ und $z = xy$ affin-äquivalente Quadriken?

Übung: Bei Quadriken $x'^{\top}A'x' = 0$ verlangen wir normalerweise $A \neq 0$. Welche Quadriken kommen noch hinzu, falls wir auch $A = 0$ erlauben? Schule: Klassifizieren Sie alle Quadriken $Q \subseteq \mathbb{R}^1$ in Dimension 1.

Übung: Welche Quadriken $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ sind Vereinigung von Geraden? Bei den meisten ist dies offensichtlich, doch bei zweien überraschend! Hinweis: Es gibt eine mit $(r, r') = (3, 4)$ und eine mit $(r, r') = (2, 4)$. Diese sind in Architektur und Ingenieurwesen besonders beliebt.

Die affine Klassifikation der reellen Quadriken

Für $n = 1, 2, 3$ betrachten wie die Klassifikation von $A' \in \mathbb{R}^{n' \times n'}$ modulo der Äquivalenz $\doteq$ unter Affinitäten und Skalierungen, wie in V2A erklärt.

Übung: Bestimmen Sie jeweils $r = \operatorname{rang} A$ und $r' = \operatorname{rang} A'$ sowie $s = |\operatorname{sign} A|$ und $s' = |\operatorname{sign} A'|$. Sind dies Invarianten unter Äquivalenz? Können Sie damit bereits alle Äquivalenzklassen $[A']$ unterscheiden?

Übung: Wenn Sie die Koeffizienten der Matrix A' zufällig wählen (unabhängig, stetig verteilt), welchen Typ $\delta \in \{0, 1, 2\}$ erwarten Sie?

Übung: Welche Äq'klassen $[A']$ sind stabil unter kleinen Störungen? Das heißt: Liegt B' genügend nahe bei A', so ist B' äquivalent zu A'.

Übung: Wir sagen $[A']$ liegt im Rand von $[C']$ wenn gilt: Es gibt beliebig kleine Änderungen von A' zu einem B', sodass B' äquivalent zu C' ist.

Anschaulich sagen wir auch: Die Klasse $[C']$ degeneriert zu $[A']$. Beispiel: Beide Hyperboloide degenerieren zum Doppelkegel.

(1) Diese Relation ist reflexiv und transitiv, also eine Präordnung (I1A).
(2) Bestimmen Sie diese Präordnung für die obigen $3, 8, 15$ Klassen.

Warum und wozu wollen wir Dinge klassifizieren?

☺ Klassifikation schärft Verständnis, schafft Ordnung und Überblick. Idealerweise sollte sie so einfach wie möglich sein, doch so detailliert wie die Sachlage erfordert, insgesamt vollständig und redundanzfrei.

Bei Quadriken entsteht ein kleiner Zoo von bewundernswerter Vielfalt. Gerade deshalb ist es wichtig, den *Satz* zur Entstehung der Klassifikation zu verstehen, das ist viel leichter und klarer, effizient und nachhaltig!

Bildung ist nicht nur das Lernen von Fakten,
sondern die Schulung des Geistes zu denken.
Albert Einstein (1879–1955)

Als heiteren Kontrast nenne ich die berühmte *Klassifikation der Tiere* des argentinischen Schriftstellers Jorge Luis Borges (1899–1986) aus seinem Essayband *Otras inquisiciones* (1952). Borges karikiert damit willkürliche Taxonomien. Bekannt wurde sie durch den französischen Philosophen Michel Foucault (1926–1984), der damit sein Buch *Die Ordnung der Dinge* beginnt (*Les mots et les choses*, 1966), ebenso zitiert von Marcus du Sautoy: *Counting p–groups and nilpotent groups.* Publ. IHÉS 92 (2000) 63–112.

Zum heiteren Kontrast: Borges' Klassifikation der Tiere

Die Tiere werden wie folgt klassifiziert:	*Los animales se dividen en:*
(a) dem Kaiser gehörig,	*(a) pertenecientes al Emperador,*
(b) einbalsamiert,	*(b) embalsamados,*
(c) gezähmt,	*(c) amaestrados,*
(d) Milchferkel,	*(d) lechones,*
(e) Meerjungfrauen,	*(e) sirenas,*
(f) Fabeltiere,	*(f) fabulosos,*
(g) herrenlose Hunde,	*(g) perros sueltos,*
(h) in dieser Klassifikation enthalten,	*(h) incluidos en esta clasificación,*
(j) wie verrückt herumtollend,	*(i) que se agitan como locos,*
(j) unzählbare,	*(j) innumerables,*
(k) mit einem ganz feinen Kamelhaarpinsel gemalte,	*(k) dibujados con un pincel finísimo de pelo de camello,*
(l) und so weiter,	*(l) etcétera,*
(m) die soeben die Vase zerbrachen,	*(m) que acaban de romper el jarrón,*
(n) die von fern Fliegen ähneln.	*(n) que de lejos parecen moscas.*

Die euklidische Klassifikation der reellen Quadriken

Ziel: Wir wollen Quadriken in ihre **euklidische Normalform** bringen.
Dabei nutzen wir nur **euklidische Bewegungen**, also Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen; dadurch werden Längen und Winkel erhalten.
Erinnerung: Die **affine Klassifikation** über $\mathbb{K}$ ist flexibel großzügig:

♦ Definition V2A: skaliert-affine Kongruenz $A' \simeq B'$ in $\mathbb{K}^{n'\times n'}$

(1) Wir erlauben **Skalierung** $A' \mapsto B' = \mu A'$ mit $\mu \in \mathbb{K}^\times$ und
affine Kongruenz $A' \mapsto B' = S'^\top A'\, S'$ mit $S' \in \mathrm{AGL}_n\,\mathbb{K}$.

$$\mathrm{AGL}_n(\mathbb{K}) := \left\{ T' = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ v & T \end{smallmatrix}\right] \,\middle|\, T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ v \in \mathbb{K}^n \right\} \le \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$$

Die (isometrisch-)**euklidische Klassifikation** über $\mathbb{R}$ ist streng restriktiv:

♦ Definition V2A: skaliert-euklidische Kongruenz $A' \cong B'$ in $\mathbb{R}^{n'\times n'}$

(2) Wir erlauben **Skalierung** $A' \mapsto B' = \mu A'$ mit $\mu \in \mathbb{R}^\times$ und
euklidische Kongruenz $A' \mapsto B' = S'^\top A'\, S'$ mit $S' \in \mathrm{AGO}_n\,\mathbb{R}$.

$$\mathrm{AGO}_n(\mathbb{R}) := \left\{ T' = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ v & T \end{smallmatrix}\right] \,\middle|\, T \in \mathrm{GO}_n(\mathbb{R}),\ v \in \mathbb{R}^n \right\} \le \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Die euklidische Klassifikation der reellen Quadriken

Satz V2E: euklidische Klassifikation quadratischer Polynome über $\mathbb{R}$

Jedes quadratische Polynom $P = X'^\top A'\, X' \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]_{\le 2}$ können wir darstellen durch seine symmetrische Matrix $A' = \left[\begin{smallmatrix} * & * \\ * & A \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^{n'\times n'}$.

(0) Für $r := \operatorname{rang} A$ und $r' := \operatorname{rang} A'$ gilt $\delta := r' - r \in \{0, 1, 2\}$.

(1) Durch euklidische Affinität und Skalierung zu $\mu\, S'^\top A'\, S'$ können wir unser Polynom P überführen in genau eine der folgenden Normalformen:

$$\frac{Y_1^2}{\alpha_1^2} + \dots + \frac{Y_p^2}{\alpha_p^2} - \frac{Y_{p+1}^2}{\alpha_{p+1}^2} - \dots - \frac{Y_r^2}{\alpha_r^2} - \begin{cases} 0 & \text{falls } \delta = 0 \text{ (kegeliger Typ)}, \\ 1 & \text{falls } \delta = 1 \text{ (zentraler Typ)}, \\ 2Y_{r+1} & \text{falls } \delta = 2 \text{ (parabolisch)}. \end{cases}$$

Dabei gilt $0 \le p \le r$ falls $\delta = 1$, sonst $r/2 \le p \le r$ und ggf. Normierung.
Hier sind $\alpha_1 \ge \dots \ge \alpha_p > 0 < \alpha_{p+1} \le \dots \le \alpha_r$ die **Hauptachsenlängen**.
(2) Somit ist $(\alpha_1, \dots, \alpha_p;\ \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_r;\ \delta)$ ein vollständiges System von Invarianten für diese skaliert-euklidische Klassifikation über $\mathbb{R}$.

☺ Im Vergleich zur affinen Klassifikation V2D erhalten wir die Längen!

Die euklidische Klassifikation der reellen Quadriken

$$A' = \left[\begin{array}{c|cccc} * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{array}\right] \xrightarrow{(a)} \left[\begin{array}{c|cccc} * & * & * & * & * \\ \hline * & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(b)} \left[\begin{array}{c|cccc} * & 0 & 0 & * & * \\ \hline 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(c)} \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ oder } \left[\begin{array}{c|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ oder } \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Algo V2E: skaliert-euklidische Transformation von A' zur Normalform

(a) Dank Spektralsatz T1I können wir A orthogonal diagonalisieren zu B.
(b) Mit jedem Diagonaleintrag $b_{ii} \neq 0$ löschen wir $b_{i0} = b_{0i}$ links & oben.
(c) Wir vereinfachen die nullte Spalte und Zeile, je nach $\delta \in \{0, 1, 2\}$.

Aufgabe: Beweisen Sie dies nach Vorbild der affinen Klassifikation V2D.

Die euklidische Klassifikation der reellen Quadriken

Beweis: Dank Spektralsatz T1I können wir A orthogonal diagonalisieren:
Wir finden $Q \in \mathrm{GO}_n\,\mathbb{R}$ mit $B = Q^\top A\, Q = \operatorname{diag}(b_{11} \ge \dots \ge b_{rr},\ 0,\ \dots,\ 0)$.
Wir setzen $Q' = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{smallmatrix}\right]$ und $B' = Q'^\top A'\, Q'$. Damit arbeiten wir weiter.

(b) Mit jedem Diagonaleintrag $b_{ii} \neq 0$ löschen wir $b_{i0} = b_{0i}$ links & oben.
Das entspricht $S' = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ v & I \end{smallmatrix}\right]$ und $C' = S'^\top B'\, S'$. Damit arbeiten wir weiter.

(c0) Verschwindet die nullte Spalte und Zeile, so folgt $\delta = 0$, und fertig.

(c1) Gilt $c_{00} \neq 0$, sonst $c_{i0} = c_{0i} = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, so folgt $\delta = 1$.
Wir skalieren die gesamte Matrix C, sodass $d_{00} = -1$ gilt, damit fertig.

(c2) Andernfalls haben wir $c_{i0} = c_{0i} \neq 0$ für manche $i \in \{r+1, \dots, n\}$.
Mit Givens S4J / Householder S4O erreichen wir $d_{i0} = d_{0i} = -1$ für $i = r+1$ und $d_{j0} = d_{0j} = 0$ für $j \neq i$. Das zeigt $\delta = 2$, damit fertig. $\boxed{\text{QED}}$

⚠ Vorsicht, das Lernbuch von Fischer kehrt (c2) unter den Teppich:
Auf Seite 483 wird vereinfachend „nur der Fall $r = n - 1$“ betrachtet.
Für kleine Matrizen mag das oft genügen, doch es scheint allzu bequem.
Dafür haben wir Givens–Rotationen und Householder–Spiegelungen!

Zahlenbeispiel zur euklidischen Klassifikation (Klausur 2021)

Wir betrachten die reelle Quadrik $Q = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid P(x) = 0 \,\}$ mit

$$\boxed{P(x) = 3x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2 + 6\sqrt{2}x_1 - 10\sqrt{2}x_2 - 2.}$$

Aufgabe: (0) Schreiben Sie dies als symmetrische Matrix $A' \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $P(x) = x'^{\mathsf{T}} A'\, x'$ gilt für alle Punkte $x' = (1, x_1, x_2)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3$.

(1) Hierzu existiert eine euklidische Isometrie $T' \in \mathrm{AGO}_2\,\mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R}^\times$, sodass die Matrix $B' = \mu\, T'^{\mathsf{T}} A'\, T'$ euklidische Normalform annimmt. Bestimmen Sie die Normalform B' sowie T' und μ.

(2) Um welchen Typ von Quadrik handelt es sich gemäß Klassifikation?

(3) Skizzieren Sie die Quadrik $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ in den Koordinaten $x = (x_1, x_2)$.

Lösung: (0) Wir finden:

$$A' = \left[\begin{array}{c|cc} -2 & 3\sqrt{2} & -5\sqrt{2} \\ \hline 3\sqrt{2} & 3 & -5 \\ -5\sqrt{2} & -5 & 3 \end{array}\right]$$

Zahlenbeispiel zur euklidischen Klassifikation (Klausur 2021)

⚠ In Schritt (1a) unterscheiden sich affine vs euklidische Klassifikation!

(1a) Wir bestimmen eine orthonormale Eigenbasis von $A = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{smallmatrix}\right]$:

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det(XI - A) &&= (3 - X)(3 - X) - 25 \\ &= X^2 - 6X - 16 &&= (X - 8)(X + 2) \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind demnach 8 und -2. (Orthonormal-)Basen für die Eigenräume erhalten wir (ohne weitere Rechnung) aus den Matrizen

$$A - 8I = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A + 2I = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}(A, 8) &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =: v_1 \right\rangle \\ \mathrm{Eig}(A, -2) &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =: v_2 \right\rangle \end{aligned}$$

Ab hier verwenden wir Gauß–Hermite S1R mit $\mathrm{AGO}_n\,\mathbb{R}$–Kongruenz.

☺ Den Schritt (1b) nutzen affine und euklidische Klassifikation ähnlich.

Zahlenbeispiel zur euklidischen Klassifikation (Klausur 2021)

(1b) Gauß S1R mit $\mathrm{AGO}_n\,\mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} -2 & -8 & -2 \\ 8 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -10 & 0 & -2 \\ 8 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (0) - 1 \cdot (1)$$

$$\begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (0) - 1 \cdot (2)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = B' \qquad = T' \qquad \text{global } \mu = \tfrac{1}{8}$$

Zahlenbeispiel zur euklidischen Klassifikation (Klausur 2021)

Bemerkung: Gefragt war in dieser Aufgabe die *euklidische* Normalform. Viele haben dies mit der *affinen* Normalform verwechselt, die jeweiligen Rechenmethoden wild gemischt und falsch angewendet. Bitte lernen Sie genau, welche Umformungen was tun und wann sie angebracht sind. Wie können Sie das wissen? Die freundliche Vorlesung erklärt es! (V2A)

⚠ Die nullte Zeile/Spalte spielt eine Sonderrolle. Es ergibt keinen Sinn, die nullte Zeile/Spalte zu skalieren. Ebenso darf ein Vielfaches der nullten Zeile/Spalte nicht auf eine andere addiert werden. (V2A)

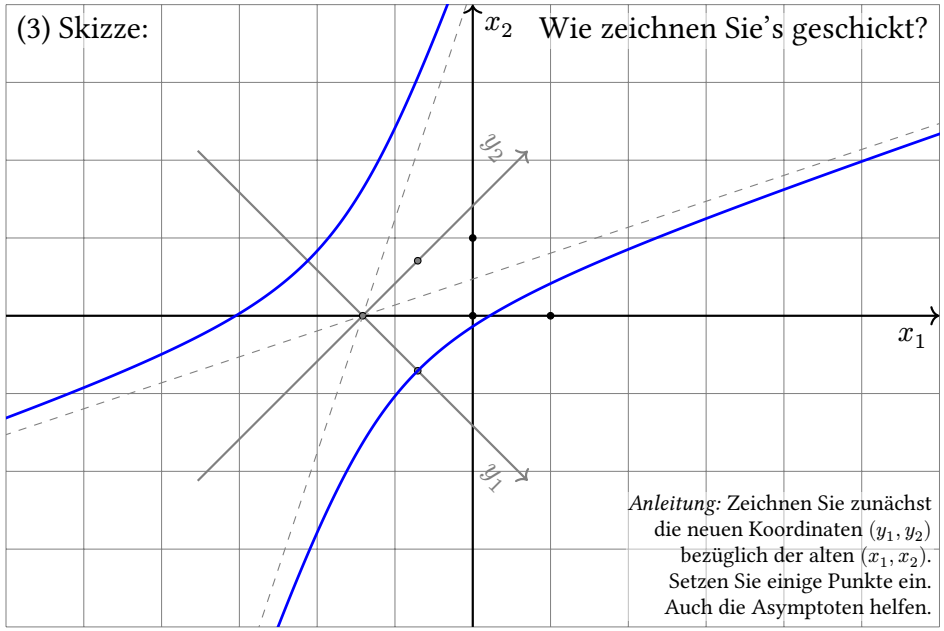
⚠ Eine Skalierung der folgenden Zeilen/Spalten ist keine Isometrie! Allgemein affin ist das erlaubt, euklidisch hingegen nicht. (V2A)

(2) Unsere Quadrik $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ ist demnach eine Hyperbel, $y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 = 1$.

Bemerkung: Der ursprünglichen Gleichung $P(x) = 0$ sieht man die Form der Lösungsmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ (meist) nicht sofort an. In der Normalform $y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 = 1$ gelingt es hingegen leicht. Die Klassifikation verschafft uns so einen guten Überblick über alle Möglichkeiten. Zudem können wir die gegebene Quadrik ganz konkret darstellen, wie in der folgenden Skizze.

Zahlenbeispiel zur euklidischen Klassifikation (Klausur 2021)

(3) Skizze: Wie zeichnen Sie's geschickt?



Zahlenbeispiel zur euklidischen Klassifikation (Klausur 2021)

(3) Die obige Skizze zeigt $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ und beide Koordinatensysteme.

Bemerkung: (3a) Zuerst zeichnen wir den Ursprung $b = (-\sqrt{2}, 0)^\top$ des transformierten Koordinatensystems ein. Von diesem Punkt aus werden die Richtungsvektoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^\top$ und $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^\top$ abgetragen. So erhalten wir das neue Koordinatensystem, dargestellt im alten.

(3b) Wir arbeiten nun statt mit x_1, x_2 in den neuen Koordinaten y_1, y_2. Die Gleichung $y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 = 1$ beschreibt eine Standardhyperbel, die um den Faktor 2 in y_2-Richtung gestreckt ist. Wie zeichnen wir das geschickt? Asymptotisch gilt $y_1 \approx \pm\frac{1}{2}y_2$. Diese Asymptoten helfen beim Zeichnen!

☺ Damit lässt sich unsere Quadrik Q schließlich leicht zeichnen. Genau für diese einfache Darstellung haben wir die Koordinaten transformiert, daher ist die graphische Darstellung ein schöner, krönender Abschluss.

☺ Das korrekte Vorgehen und die saubere Zeichnung erfordern Übung. Versuchen Sie es selbst! Die freundliche Vorlesung erklärt Ihnen die Theorie und leitet Sie zur Praxis an. Der Rest ist Üben, Üben, Üben.

Zahlenbeispiel zur euklidischen Klassifikation (Klausur 2021)

Übung: Starten Sie mit einem leeren Blatt Papier und lösen Sie die obige Klausuraufgabe nochmal selbständig, bis zur abschließenden Zeichnung.

Wiederholung der Grundlagen zur Vorbereitung zur Klausur:

Aufgabe: Erklären Sie in eigenen Worten, kurz aber präzise:

(0) Was ist eine Quadrik Q? ein quadratisches Polynom P?
Wie stellen Sie das Polynom P als symmetrische Matrix A' dar?

(1) Welche Transformationen sind erlaubt, affin vs euklidisch?
Was bedeutet das konkret für die erlaubten Rechenschritte?
Zum Kontrast: Welche Rechenschritte sind *nicht* erlaubt?

(2) Euklidisch: Was ist die Normalform $B' = \mu\, T'^\top A'\, T'$? Wie verläuft der Algorithmus? Welche Ergebnisse sind möglich? Wie heißen die ebenen Quadriken? Welche dreidimensionalen Quadriken können Sie benennen?

(3) Affin: Was ist die (vereinfachte, affine) Normalform $B' = \mu\, T'^\top A'\, T'$? Wie verläuft der Algorithmus? Welche Ergebnisse sind noch möglich? In welchen Schritten ist affin einfacher als euklidisch?

Zahlenbeispiel zur euklidischen Klassifikation (Klausur 2021)

Quadriken sind ein schönes Thema. Wie immer braucht es Übung. Ich habe dazu alle Techniken vor Ihnen ausgebreitet mit illustrativen Beispielen und hilfreichen Hinweisen. Wie jedesmal ist es nun an Ihnen, die Werkzeuge in die Hand zu nehmen und ihren Gebrauch einzuüben.

Die Klassifikation der reellen Quadriken ist ein Kleinod der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie. Sie ist ein weiterer würdiger Höhepunkt und mobilisiert dazu alle Techniken der vorigen Kapitel. Das klingt manchen wie ein Fluch, bitte betrachten Sie es als Segen!

- Diagonalisierung und Eigenbasen.
- Skalarprodukte und euklidische Isometrien.
- Spektralsatz und orthonormale Eigenbasen.
- Affine Transformationen, allgemein und euklidisch.
- Klassifikation der quadratische Polynome und Quadriken.

Das macht Quadriken zu einem beliebten Thema… auch in Klausuren. Nur Mut! Mit der nötigen Übung ist jeder einzelne Schritt relativ leicht.

Zahlenbeispiel zur affinen Klassifikation (Klausur 2021)

Wir betrachten die reelle Quadrik $Q = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid P(x) = 0 \,\}$ mit

$$\boxed{P(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 8x_2 + 8.}$$

Aufgabe: (0) Schreiben Sie dies als symmetrische Matrix $A' \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $P(x) = x'^{\mathsf{T}} A'\, x'$ gilt für alle Punkte $x' = (1, x_1, x_2)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3$.

(1) Hierzu existiert eine (allgemeine) Affinität $T' \in \mathrm{AGL}_2\,\mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R}^\times$, sodass die Matrix $B' = \mu\, T'^{\mathsf{T}} A'\, T'$ affine Normalform annimmt. Bestimmen Sie die Normalform B' sowie T' und μ.

(2) Um welchen Typ von Quadrik handelt es sich gemäß Klassifikation?

(3) Skizzieren Sie die Quadrik $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ in den Koordinaten $x = (x_1, x_2)$.

(4) *Bonus:* Lesen Sie daran $\min \mathrm{pr}_1(Q)$ und $\min \mathrm{pr}_2(Q)$ ab.

Lösung: (0) Wir finden:

$$A' = \left[\begin{array}{c|cc} 8 & 0 & -4 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Zahlenbeispiel zur affinen Klassifikation (Klausur 2021)

(1) Gauß S1R mit $\mathrm{AGL}_n\,\mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2) + 1\cdot(1)$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)\cdot\tfrac{1}{4}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad (0) + 4\cdot(2)$$

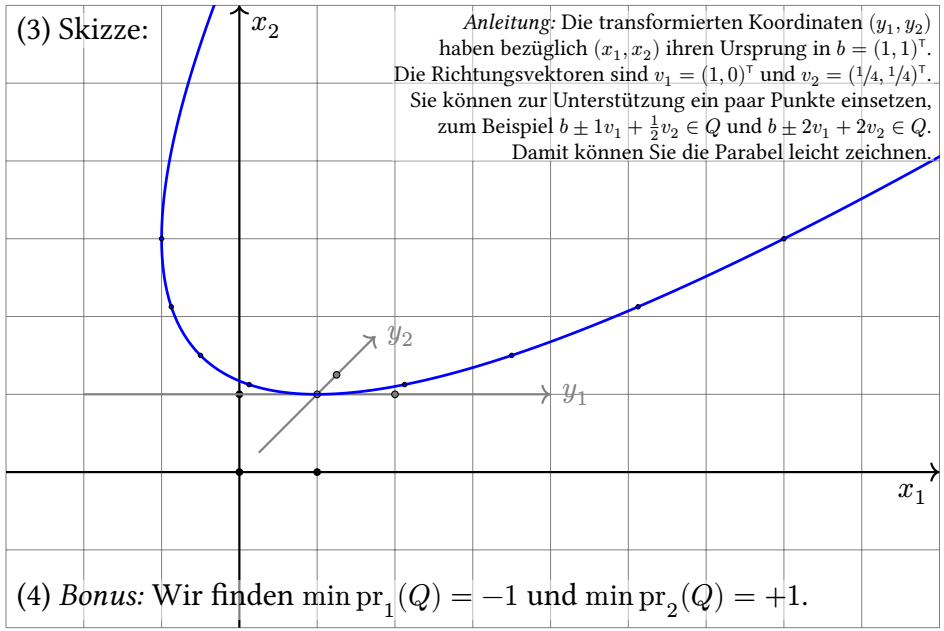
$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$= B' \qquad = T'$$

(2) Unsere Quadrik $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ ist demnach eine Parabel, $y_1^2 = 2y_2$.

Zahlenbeispiel zur affinen Klassifikation (Klausur 2021)

(3) Skizze:



Anleitung: Die transformierten Koordinaten (y_1, y_2) haben bezüglich (x_1, x_2) ihren Ursprung in $b = (1,1)^{\mathsf{T}}$. Die Richtungsvektoren sind $v_1 = (1,0)^{\mathsf{T}}$ und $v_2 = (1/4, 1/4)^{\mathsf{T}}$. Sie können zur Unterstützung ein paar Punkte einsetzen, zum Beispiel $b \pm 1v_1 + \frac{1}{2}v_2 \in Q$ und $b \pm 2v_1 + 2v_2 \in Q$. Damit können Sie die Parabel leicht zeichnen.

(4) *Bonus:* Wir finden $\min \mathrm{pr}_1(Q) = -1$ und $\min \mathrm{pr}_2(Q) = +1$.

Zahlenbeispiel zur affinen Klassifikation (Klausur 2021)

(1) Alternativer Rechenweg:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2) + 1\cdot(1)$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (0) + 1\cdot(2)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{global } \mu = \tfrac{1}{4}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1)\cdot 2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ist die affine Normalform eindeutig? Ja!

Sie haben nun die wunderbare Klassifikation quadratischer Polynome über $\mathbb{R}$, affin gemäß Satz V2D, euklidisch dank Satz V2E. Erste Beispiele zeigen die Anwendung, nach etwas Übung gelingt Ihnen dies routiniert.

⚠ In der zweiten Aufgabe war die affine Normalform gefragt, in der ersten Aufgabe hingegen die euklidische Normalform. Das sind zwei verschiedene Ziele und dementsprechende Methoden. Bitte lernen Sie genau, welche Umformungen was tun und wann sie angebracht sind.

☺ Die affine Normalform B' ist eindeutig dank unserer Vereinbarung. Wir sortieren die Diagonaleinträge nach der bewährten Konvention: erst $+1$, dann -1, eventuelle Nullen am Ende. In Übungen und Klausuren bereitet dies erfahrungsgemäß beiderseits keinerlei Schwierigkeiten.

⚠ Im Falle $\delta \in \{0, 2\}$ haben wir eine globale Skalierung $\mu \in \mathbb{R}^\times$ frei. Auch dazu fixieren wir schließlich noch eine passende Konvention: Wir vermeiden eine negative Mehrheit. Falls nötig skalieren wir mit -1 und sorgen so für mindestens soviele positive wie negative Einträge.

Ist die affine Transformation eindeutig? Nein!

⚠ Die affine Normalform B' ist zwar eindeutig, doch der Rechenweg erlaubt Varianten. Dies haben wir in der vorigen Aufgabe gesehen.

⚠ Selbst die so konstruierte Transformationsmatrix T' ist nicht immer eindeutig. Wie Sie in den Übungen diskutieren, siehe V5.2, operiert hier die Stabilisatorgruppe, sie codiert genau die verbleibende Mehrdeutigkeit.

☺ Wir dürfen daher zwar von *der* affinen Normalform B' sprechen, aber vorsichtig nur von *einer* passenden Transformation (μ, T').

Warum bin ich hier so pedantisch genau? Ich fühle zwei Gründe:

- Wir wollen lernen, uns bequem doch korrekt ausdrücken, ich in meiner Vorlesung, Sie in Ihren Übungen, wir alle in Prüfungen.
- Ich möchte ehrlich bleiben, Ihre berechtigten Fragen nicht unter den Teppich kehren, sondern mit gutem Beispiel vorangehen.

Dasselbe gilt sinngemäß für die euklidische Normalform, aber subtiler… Da diese Frage von Studierenden gestellt wird, führe ich dies gerne aus. (Keine Sorge, in Klausuren droht keine Gefahr, wir folgen der Neugier.)

Ist die euklidische Normalform eindeutig? Ja! (fast)

☺ Die euklidische Normalform B' ist eindeutig… zumindest fast. Bei einfachen Eigenwerten, so wie hier, können wir höchstens noch die Eigenbasis umsortieren. Wir sortieren die Eigenwerte auf der Diagonalen nach der bewährten Konvention: Nullen hinten, vorne absteigend.

⚠ Im Falle $\delta \in \{0, 2\}$ haben wir eine globale Skalierung $\mu \in \mathbb{R}^\times$ frei. Auch dazu fixieren wir schließlich noch eine passende Konvention… Dazu müssen wir uns entscheiden, wie viele Haare wir spalten wollen.

Laxe Sichtweise: Wir vermeiden eine negative Mehrheit, wie immer. Die letzte Skalierung, nun noch mit $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$, fixieren wir nicht genauer.

Analogie 1: Zur Zykelschreibweise einer Permutation $\tau \in \mathrm{S}_n$ erklärt Satz H1D die eindeutige Zerlegung. Beim Aufschreiben, etwa in einer Klausur, erlauben wir uns zudem die offensichtlichen (und harmlosen) Freiheiten.

Analogie 2: Bei der Jordan–Form sind die Jordan–Blöcke eindeutig, doch ihre Anordnung untereinander dürfen wir noch beliebig wählen. Auch dies könnten wir genauer fixieren, aber das scheint übertrieben.

Ist die euklidische Normalform eindeutig? Ja! (fast)

Strenge Sichtweise: Wir fixieren auch noch die letzte Skalierung.

Analogie 3: Wenn Sie diese oder ähnliche Klassifiationen auf dem Computer implementieren, dann sollte dazu genau spezifiert werden, wer welche Wahlfreiheiten hat. Andernfalls verlässt sich womöglich eine Abnehmerin auf eine Normierung, die ein Lieferant gar nicht einhält.

☺ Also gut, für alle, die es ganz genau nehmen wollen, hier mein ultimativer Vorschlag zur Normierung quadratischer Polynome in ihrer euklidischen Klassifikation im letzten noch verbleibenden Falle $\delta \in \{0, 2\}$.

(1) Wir skalieren global so, dass $\max_{i=1}^r \alpha_i^2 = 1$ gilt, oder $\sum_{i=1}^r \alpha_i^2 = 1$, o.ä. Die Hauptachsenlängen sind nicht absolut, sondern nur relativ gegeben.

(2) Wir vermeiden wie üblich eine negative Mehrheit. Das fixiert das noch fragliche Vorzeichen, allerdings selbst das nicht immer…

(3) Bleibt nur ein letztes Haar zu spalten: Was tun, wenn es ebenso viele positive wie negative Eigenwerte gibt? Wir maximieren lexikographisch. (Es scheint mir übertrieben, aber es beschert uns Eindeutigkeit. Uff!)

Kapitel V

Bonusmaterial

$(+,-,-,-)$ H. Minkowski $(-,+,+,+)$

Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.
Hermann Minkowski (1864–1909), *Raum und Zeit* (1909)

Inhalt dieses Kapitels V

5 Übungsaufgaben
- Zahlenbeispiele zur Übung
- Stabilisatorgruppe einer Quadrik
- Was unterscheidet Kreis und Parabel?

Zahlenbeispiele zur Übung

☺ Quadriken sind beliebt… auch in Hausaufgaben und in Klausuren. Wir haben für Sie ein paar schöne Beispiele ausgesucht. Auch wenn die Zahlen am Anfang groß erscheinen, löst sich vieles in Wohlgefallen auf.

Übung: (1) Bringen Sie $P = 6X_1^2 + 9X_2^2 - 4X_1X_2 + 16X_1 - 22X_2 + 9$ über $\mathbb{R}$ in euklidische Normalform. (2) Skizzieren Sie die zugehörige Quadrik $Q = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid P(x) = 0 \,\}$ in neuen und alten Koordinaten.

Übung: (1) Bestimmen Sie die affine Normalform und eine Affinität für $P = 9X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 6X_1X_2 - 6X_1X_3 + 2X_2X_3 - 6X_1 - 2X_2 - 2X_3 + 1$. (2) Um welche Quadrik handelt es sich (als Name gemäß V222)?

Wenn wir vor einer solchen Gleichung stehen, fragen wir uns: Wie sieht die Nullstellenmenge dieser Gleichung aus? Das sieht man dem Polynom nicht direkt an. Zu dieser Frage hilft meist nur Ausrechnen! In Normalform lässt sich die Quadrik sogar von Hand leicht skizzieren.

Tipp: Machen Sie die beliebte *Punktprobe* und setzen Sie Punkte, die in Ihrer Skizze auf der Quadrik liegen, in die definierende Gleichung ein.

Zahlenbeispiele zur Übung

Übung: (1) Überführen Sie das Polynom $P = 23X_1^2 - 16X_2^2 - 16X_3^2 + 52X_1X_2 + 52X_1X_3 - 104X_2X_3 - 144X_1 - 72x_3 + 504 \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$ in euklidische Normalform. (2) Bestimmen Sie die Rotationsachse. (3) Skizzieren Sie Q in transformierten Koordinaten.

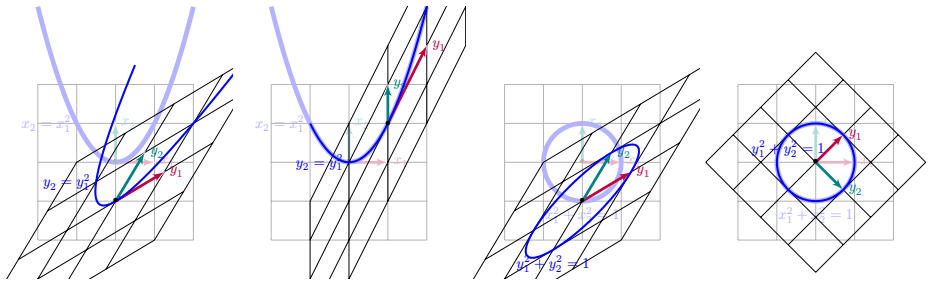
Tipp: Wenn Ihnen Wurzeln suspekt sind, können Sie hier tatsächlich ohne Wurzeln auskommen! Suchen Sie Eigenvektoren der Länge 3, die nur die Einträge $\pm 1, \pm 2$ haben. Wenn Ihnen die Zahlen zu groß werden, nutzen Sie einen Computer für Matrizenmultiplikationen.

Übung: (1) Bestimmen Sie die affine Normalform und eine Affinität für das Polynom $P = -8X_1^2 + 4X_1X_2 - X_2^2 + 4X_1 - 6X_2 - 9 \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ (2) Skizzieren Sie die Quadrik $Q = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid P(x) = 0 \,\}$ von Hand, zunächst bequem im transformierten Koordinatensystem (y_1, y_2), schließlich im ursprünglichen Koordinatensystem (x_1, x_2). (3) Erstellen Sie die Graphiken mit `Affine-Transformation.tex`.

Tipp: Machen Sie die beliebte *Punktprobe* und setzen Sie Punkte, die in Ihrer Skizze auf der Quadrik liegen, in die definierende Gleichung ein.

Eine Parabel ist eine Parabel ist eine Parabel.

Zur Illustration hier ein paar ebene Affinitäten,
die Parabel und Kreis festlassen oder auch nicht:



☺ Der Kreis hat erwartungsgemäß viele euklidische Symmetrien.
☺ Die Parabel hat viel mehr affine Symmetrien als erwartet!

Diese Bilder wurden mit LaTeXund TikZ erzeugt. Zum Experimentieren stellen wie Ihnen die Vorlage `Affine-Transformation.tex` zur Verfügung. Damit können Sie leicht Parabel und Kreis und Hyperbel transformieren und so natürlich auch Ihre Ergebnisse überprüfen.

Eine Parabel ist eine Parabel ist eine Parabel.

? Wissen Sie alles zur Parabel? Lassen Sie sich überraschen!

Vorgelegt sei eine Menge $Q \subseteq \mathbb{K}^n$, etwa eine Quadrik. Wir betrachten die **Stabilisatorgruppe** $G = \mathrm{AGL}(\mathbb{K}^n, Q) := \{\, f \in \mathrm{AGL}(\mathbb{K}^n) \mid f(Q) = Q \,\}$. Man zeigt leicht, dass $G \leq (\mathrm{AGL}(\mathbb{K}^n), \circ, \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n})$ eine Untergruppe ist.

Aufgabe: Wir betrachten die Parabel $P = \{\, (x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \,\}$.
(1) Bestimmen Sie möglichst explizit die Stabilisatorgruppe $\mathrm{AGL}(\mathbb{R}^2, P)$.
(2) Seien $p_1, p_2 \in P$. Wie viele $f \in \mathrm{AGL}(\mathbb{R}^2, P)$ gibt es mit $f(p_1) = p_2$?
(3) Seien $p_1, p_2, q_1, q_2 \in P$ zwei Punktpaare mit $p_1 \neq p_2$ und $q_1 \neq q_2$.
Wie viele Affinitäten $f \in \mathrm{AGL}(\mathbb{R}^2, P)$ gibt es mit $f(p_1) = q_1$, $f(p_2) = q_2$?

Aufgabe: Nun betrachten wir den Kreis $K = \{\, (x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}$.
(1) Bestimmen Sie möglichst explizit die Stabilisatorgruppe $\mathrm{AGL}(\mathbb{R}^2, K)$.
Tipp: Ab hier können Sie anschaulich-geometrisch argumentieren:
(2) Zu $p_1, p_2 \in K$ existieren genau zwei $f \in \mathrm{AGL}(\mathbb{R}^2, K)$ mit $f(p_1) = p_2$?
(3) Seien $p_1, p_2, q_1, q_2 \in K$ zwei Punktpaare mit $p_1 \neq p_2$ und $q_1 \neq q_2$.
Wie viele Affinitäten $f \in \mathrm{AGL}(\mathbb{R}^2, K)$ gibt es mit $f(p_1) = q_1$, $f(p_2) = q_2$?

Was unterscheidet Kreis und Parabel?

Aufgabe: Seien $Q, Q' \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei Quadriken, sowie $q \in Q$ und $q' \in Q'$.
Sei $g : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ eine Affinität mit $g(Q) = Q'$ und $g(q) = q'$.
Wir setzen $\mathrm{AGL}(\mathbb{R}^n, Q, q) = \{\, f \in \mathrm{AGL}(\mathbb{R}^n, Q) \mid f(q) = q \,\}$. Zeigen Sie:
(1) Ist $f \in \mathrm{AGL}(\mathbb{R}^n, Q)$, dann ist $g \circ f \circ g^{-1} \in \mathrm{AGL}(\mathbb{R}^n, Q')$.
(2) Ist $f \in \mathrm{AGL}(\mathbb{R}^n, Q, q)$, dann ist $g \circ f \circ g^{-1} \in \mathrm{AGL}(\mathbb{R}^n, Q', q')$.
(3) Die Abbildung $\mathrm{AGL}(\mathbb{R}^n, Q, q) \to \mathrm{AGL}(\mathbb{R}^n, Q', q') : f \mapsto g \circ f \circ g^{-1}$
ist eine Bijektion, genauer gesagt ein Gruppenisomorphismus.
(4) Folgern Sie, dass es keine Affinität $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt mit $g(K) = P$.

Bemerkung: Parabel und Kreis sind wesentlich verschieden: Es gibt keine Affinität der Ebene $\mathbb{R}^2$, die den Kreis in die Parabel überführt. Vermutlich hätten Sie das auch erwartet, denn der Kreis ist beschränkt, die Parabel jedoch ist unbeschränkt, sie entkommt ins Unendliche. Der Kreis hat in jeder Richtung eine Tangente, die Parabel in genau einer Richtung nicht. Es gibt demnach viele Möglichkeiten, Kreis und Parabel zu unterscheiden, hier schauen wir auf die Symmetrien.

Dreh dich nicht nur im Kreis, reflektiere auch dein Wirken.

Jedes quadratische Polynom $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]_{\leq 2}$ beschreibt eindeutig eine Quadrik $Q \subseteq \mathbb{K}^n$. Umgekehrt jedoch gilt nicht, dass jede Quadrik durch ein eindeutiges Polynom beschrieben wird: Skalieren wir P mit $\mu \in \mathbb{K}^\times$ zu μP, so bleibt die Nullstellenmenge dieselbe. Auch quadratische Polynome, die nicht skalare Vielfache voneinander sind, können dieselbe Quadrik definieren. Zum Beispiel in der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ beschreiben $x_1^2 + x_2^2 = 0$ und $x_1^2 + 2x_2^2 = 0$ beide dieselbe Quadrik $Q = \{0\}$.

? Können wir also überhaupt sicher sein, dass es zu zwei Quadriken $Q, Q' \subseteq \mathbb{R}^n$ mit verschiedener Normalform nicht doch eine Affinität gibt, die die eine Quadrik auf die andere abbildet? Als Beispiel betrachten wir hier Parabel und Kreis. Um diese Quadriken zu unterscheiden, suchen wir Invarianten, die unter Affinitäten nicht verändert werden. Ein häufig genutztes Werkzeug, Objekte zu unterscheiden, sind Symmetriegruppen jeglicher Art. Hier betrachten wir die Affinitäten, die die Quadrik festlassen und ggf. noch einen ausgezeichneten Punkt der Quadrik.

Kapitel W

Linearformen und Dualität

Duality gives two different points of view of looking at the same object.
Sir Michael Atiyah (1929–2019), *Duality in Mathematics and Physics*

A coconut is just a nut.

Inhalt dieses Kapitels W

1. Linearformen und Dualraum
   - Der Dualraum V^* zu V
   - Duale Familien in V^* und V
   - Die duale Familie $\mathcal{B}^*$ einer Basis $\mathcal{B}$
   - Der natürliche Homomorphismus von V zum Bidual V^{**}
2. Dualität und Bilinearformen
   - Der Annullator $X^\circ \leq V^*$ einer Teilmenge $X \subseteq V$
   - Bilinearformen und Dualität
   - Perfekte Bilinearformen
   - Skalarprodukte
3. Duale Homomorphismen
   - Der duale Homomorphismus $f^* : V^* \to U^*$ zu $f : U \to V$
   - Matrizen und duale Abbildung $f^* : u \mapsto uA$ zu $f : v \mapsto Av$
   - Bild und Kern und exakte Sequenzen

Dualräume: einfach und wirksam

In diesem Kapitel behandeln wir die sagenhaften Dualräume. Dies ist ein grundlegendes und letztlich einfaches Konzept. Sie nutzen schon längst die Dualität zwischen Gleichungen und Lösungen, meist noch ohne sie zu benennen. Das holen wir nun nach mit unseren geschärften Werkzeugen.

Wir werden dabei gute alte Bekannte wiedertreffen: lineare Räume und lineare Abbildungen, Koordinatenräume und Matrizen, Basen und das Prinzip der linearen Fortsetzungen, in/sur/bijektive Abbildungen, uvm. Dualräume sind ein ideales Testfeld für all unsere bisherigen Techniken!

In studentischer Folklore gelten Dualräume traditionell als schwierig. Beim ersten Kontakt kann ich das gut verstehen, denn die Begriffe sind neu und allgemein, kurz abstrakt. Nach ausreichend Übung weicht das „Hä?“ einem erleichterten „Achso!“, denn es ist wirklich nicht schwer.

Neben präzisen Vokabeln und sorgsamen Rechnungen gibt es hier keine wirklichen mathematischen Schwierigkeiten. Wohl gibt es die üblichen lernpsychologischen Hürden, wie oft bei neuen ungewohnten Begriffen. Hier helfen Ihnen Stift und Papier, eigenes Rechnen und gute Betreuung.

Dualräume: einfach und wirksam

In diesem Kapitel arbeiten wir durchweg über einem beliebigen Ring R. Um Trivialitäten zu vermeiden, fordern wir lediglich $0 \neq 1$, also $R \supsetneq \{0\}$. Unser Ring R muss dabei kein Körper sein, ja nicht einmal kommutativ; mögliche Beispiele sind $R = \mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{K}^{r\times r}, \ldots$ und viele mehr.

Ich habe mich hier ganz bewusst zu dieser Allgemeinheit entschlossen, teils aus mathematischen Motiven, vor allem als psychologische Hilfe:

1. Oft kostet Allgemeinheit mehr Mühe, hier jedoch ist es umgekehrt: Alle Beweise sind im allgemeinen Fall keinen Deut schwieriger, sondern im Gegenteil wesentlich klarer und dadurch leichter.
2. Der nicht-kommutative Fall zwingt uns zu Links-Rechts-Disziplin. Dadurch gibt es keine Wahlmöglichkeiten und keine Abzweigungen. Es gibt nur genau eine Formulierung, und diese ist dann die richtige!
3. Wir erhalten gratis ein riesiges Repertoire hilfreicher Gegen/Beispiele. Diese illustrieren eindrücklich alle Feinheiten und Besonderheiten, die einem allzu eingeschränkten Blick sonst leicht entgehen.

Wo Divisionsringe oder Körper verlangt sind, sage ich dies dazu.

Bei theoretischen Grundlagen plädiere ich für logischen Minimalismus; nicht immer, aber hier; nicht dogmatisch, sondern aus guter Erfahrung: Wer nur das Allernötigste voraussetzt, kann zwar nur wenig damit tun, doch zum Glück auch nur wenig Unfug treiben und kaum Irrwege gehen.

Bei den Beispielen, Illustrationen und Anwendungen hingegen plädiere ich dafür, aus dem Vollen zu schöpfen, neben der Linearen Algebra auch die Analysis, die Numerik, die Physik und vieles mehr zu bewundern. Dazu habe ich im Folgenden einige Ausblicke zumindest skizziert.

Wir gehen den langen Weg und schmähen weder Satz noch Beispiel. Das ist mathematisch ehrlich und didaktisch hilfreich, so hoffe ich! Die Theorie strukturiert und vereinfacht, hier sollte alles klar sein. In den Anwendungen jedoch tobt das Leben, prall und verwirrend.

Manche Studierende skandieren „Wir wollen keine abstrakte Theorie, sondern nur Beispiele!“ Ich denke, die gute Mischung macht den Erfolg. Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle.

Seien Sie versichert: Linearformen und Dualität sind nicht esoterisch, sondern allgegenwärtige Phänomene, in vielfältiger Erscheinung!

Sie sehen dies bereits in der Schule, wenn Sie eine (affine) Ebene $E \sqsubseteq \mathbb{R}^3$ im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ beschreiben wollen oder bestimmen müssen: Dies gelingt auf zwei duale Weisen, explizit durch eine **Parametrisierung**

$$E = \{\, p_0 + t_1(p_1 - p_0) + t_2(p_2 - p_0) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \,\}$$

oder implizit als Lösungsmenge einer affin-linearen **Gleichung**

$$E = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \,\}.$$

Diese **dualen Darstellungen** lassen sich ineinander umrechnen, und jede hat ihre eigenen Vorzüge. Sie lösen zwei zueinander duale Probleme:

1. Geben Sie ein (beliebiges, willkürliches) Element $x \in E$ explizit an.
2. Prüfen Sie zu einem (vorgegebenen) Punkt $x \in \mathbb{R}^3$, ob $x \in E$ gilt.

Die erste Frage ist in der ersten Darstellung leicht, in der zweiten schwer. Für die zweite Frage ist es umgekehrt. Beide ergänzen sich wunderbar!

Wir betrachten lineare Abbildungen $f : V \to W$ über einem Ring R. Speziell beim Zielraum $W = R$ nennen wir dies eine **Linearform**.

Linearformen werden tatsächlich überall genutzt, wo gerechnet wird, meist ganz natürlich, ohne es zu merken oder besonders zu erwähnen. Ich nenne einige spektakuläre Anwendungen in Mathematik und Physik:

Algebraisch-numerische Anwendungen:

- Dualität zwischen Gleichungssystemen und Lösungsräumen (§M3)
- Dualität in der Optimierung, insb. für lineare Ungleichungen (§Z1)

Analytisch-geometrische Anwendungen:

- mehrdimensionale Differential- und Integralrechnung (§Y2)
- Differentialgeometrie, Krümmung, Relativitätstheorie

Anwendungen in der Funktionalanalysis:

- Dualräume mit Topologie / Norm / Skalarprodukt
- Distributionen als Dualraum der Testfunktionen

Wie so oft wurden und werden viele *theoretische* Entwicklungen der Mathematik angetrieben durch ganz handfeste *konkrete* Bedürfnisse ersehnter Anwendungen. Im vorliegenden Falle ist dies ganz genauso! Das Abstrakte hilft dem Konkreten, und umgekehrt, so wie es sein soll. Effizientes Anwenden lebt von der Theorie als verlässlicher Grundlage.

Allgegenwärtige Anwendungen in der Physik:

- Distributionen als verallgemeinerte Funktionen
- Mechanik, Wegintegrale über Differentialformen
- Thermodynamik, Wegintegrale über Differentialformen
- Elektrodynamik, das Vektorpotential als Differentialform
- Ko/Vektoren in spezieller und allgemeiner Relativitätstheorie
- Quantenmechanik, Bra und Ket als duale Vektoren

Ich werde dazu im Folgenden die grundlegenden Begriffe entwickeln und zugleich illustrative Beispiele skizzieren. Sie werden dabei sehen: Die Theorie ist leicht, Beispiele sind komplex. So und nicht umgekehrt.

Was ist eine Linearform?

Jede **affin-lineare Gleichung** über dem Ring R hat die Form

$$u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n = c.$$

In Matrixnotation (D121) schreiben wir $u \cdot v = c$ als Zeile mal Spalte:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad u \cdot v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$$

Anschaulich ist v ein **Vektor** und dual hierzu ist u ein **Kovektor**. Insbesondere können wir u und v als **Linearformen** interpretieren:

$$\varphi_u : R^{n\times 1} \to R : v \mapsto u \cdot v \qquad \text{vs} \qquad \psi_v : R^{1\times n} \to R : u \mapsto u \cdot v$$

Albert Einstein (1879–1955) führte 1916 seine **Summenkonvention** ein: Kovektor $u = (u^i)$ mal Vektor $v = (v_i)$ ergibt den Skalar $u^i v_i := \sum_i u^i v_i$.
Paul Dirac (1902–1984) erfand hierzu 1939 seine **Bra-Ket-Notation**: Aus Bra $\langle u|$ und Ket $|v\rangle$ wird durch Auswertung der Skalar $\langle u \,|\, v\rangle$.

Was ist eine Linearform?

Definition W1A: Linearformen auf einem linearen Raum V über R

Sei $(R, +, 0, \cdot, 1)$ ein Ring und darüber $(V, +, \cdot)$ ein rechtslinearer Raum. Eine **Linearform** auf V ist eine rechtslineare Abbildung $\varphi : V \to R$ in den Grundring R, das heißt für alle $u, v \in V$ und $\lambda, \mu \in R$ gilt:

$$\varphi(u\lambda + v\mu) = \varphi(u)\lambda + \varphi(v)\mu.$$

Dasselbe gilt entsprechend für linkslineare Räume und Abbildungen.

Beispiel: Die Spur $\operatorname{tr} : R^{n\times n} \to R : (a_{ij}) \mapsto \sum_i a_{ii}$ ist eine Linearform, nicht jedoch die Determinante $\det : R^{n\times n} \to R$ für $n \geq 2$, siehe O2P.

Beispiel: Auf dem Funktionenraum $V = \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ haben wir die folgenden Linearformen, auch **lineare Funktionale** genannt:

$\delta_a : V \to \mathbb{R} : f \mapsto f(a),$	Auswertung im Punkt a
$\delta'_a : V \to \mathbb{R} : f \mapsto -f'(a),$	Ansteig/Abfall im Punkt a
$\iota_a : V \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_{x=0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$	Integral bis zum Punkt a

Beispiel: numerische Integration nach Gauß–Legendre

Beispiel: Auf $V = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ ist das Integral eine Linearform:

$$I : V \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Diese wollen wir numerisch approximieren, möglichst gut und günstig. Sei $n \geq 1$. Zu Stützstellen $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$ und Gewichten $(w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}$ definieren wir die **Abtastung** (engl. *sampling*)

$$S_x^w : V \to \mathbb{R} : f \mapsto (b - a) \textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i).$$

Wir können und wollen vereinfachend $[a, b] = [-1, 1]$ annehmen dank der affinen Transformation $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (2x - a - b)/(b - a)$.

Berühmte Beispiele sind die Mittelpunktsregel ($n = 1$, $x_1 = 0$, $w_1 = 1$), die Trapezregel ($n = 2$, $x = (-1, 1)$, $w = (1/2, 1/2)$), die Keplersche Fassregel ($n = 3$, $x = (-1, 0, 1)$, $w = (1/6, 4/6, 1/6)$) und viele weitere.

Diese sind in der numerischen Integration wichtig und allgegenwärtig. Gäbe es Linearformen noch nicht, wir erfänden sie in der Numerik neu!

Beispiel: numerische Integration nach Gauß–Legendre

☺ Jedes S_x^w ist eine Linearform, also ein Element des Dualraums V^*. Wir suchen (x, w), sodass S_x^w das Integral I möglichst gut approximiert.

Newton–Cotes: Der erste und einfachste Fall entsteht, wenn wir die Stützstellen fest vorschreiben, etwa äquidistant $x_k = a + (b - a) \cdot k/n$. Dann können wir die Gewichte $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}$ so wählen, dass exakte Gleichheit $I(f) = S_x^w(f)$ für alle Polynome vom Grad $< n$ gilt. (Übung!) Die obige Trapezregel und die Fassregel sind genau von dieser Form.

Gauß–Legendre: Es erweist sich als vorteilhaft, die Stützstellen nicht äquidistant zu wählen, sondern je nach Bedarf ihre Lage zu optimieren. Es existiert genau eine Lösung (x, w), sodass Gleichheit $I(f) = S_x^w(f)$ für alle Polynome vom Grad $< 2n$ gilt. Mehr hierzu in der Numerik! Zudem ist Gleichheit bis Grad $\leq 2n$ nachweislich nicht möglich.

☺ Das antwortet auf die eingangs gestellte Optimierungsfrage: Unter allen Abtastungen mit höchstens n Auswertungen ist Gauß–Legendre die beste Approximation, also wie gewünscht: möglichst gut und günstig.

Linearformen sind auch Vektoren.

Definition W1B: der Dualraum V^* zum Raum V

Der **Dualraum** V^* von V ist die Menge aller Linearformen auf V:

$$\boxed{V^* = \mathrm{Hom}_R(V,R) = \{\varphi : V \to R \mid \varphi \text{ ist rechtslinear}\}}$$

Dies ist ein linkslinearer Raum $(V^*, +, \cdot)$ mit punktweiser Verknüpfung:

$$\begin{aligned} &\text{Addition} && + : V^* \times V^* \to V^* : (\varphi+\psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v), \\ &\text{Skalierung} && \cdot : R \times V^* \to V^* : (\alpha\varphi)(v) = \alpha\varphi(v). \end{aligned}$$

Ist ${}_SV_R$ linear über (S,R), so ist $V^* = \mathrm{Hom}_R(V,R)$ linear über (R,S). Entsprechendes gilt bei Vertauschung von rechts und links.

♦ **Satz L2K:** Auch Homomorphismen sind Vektoren.

Ist ${}_SV_R$ ein linearer Raum über (S,R) und ${}_TW_R$ ein linearer Raum über (T,R), so ist $\mathrm{Hom}_R(V,W) \le W^V$ ein linearer Raum über (T,S). Für $T = W = R$ erhalten wir den Dualraum $V^* = \mathrm{Hom}_R(V,R) \le R^V$.

Linearformen sind auch Vektoren.

Beweis: Wir haben $0 \in \mathrm{Hom}_R(V,R)$. Sind $\varphi, \psi : V \to R$ rechtslinear, so auch $\alpha\varphi + \beta\psi : V \to R$ für $\alpha, \beta \in R$, denn für $u, v \in V$ und $\lambda, \mu \in R$ gilt:

$$\begin{aligned} (\alpha\varphi+\beta\psi)(u\lambda+v\mu) &\overset{\text{Def}}{=} \alpha\varphi(u\lambda+v\mu) + \beta\psi(u\lambda+v\mu) \\ &\overset{\text{Lin}}{=} \alpha\varphi(u)\lambda + \alpha\varphi(v)\mu + \beta\psi(u)\lambda + \beta\psi(v)\mu \\ &\overset{\text{Def}}{=} (\alpha\varphi+\beta\psi)(u)\lambda + (\alpha\varphi+\beta\psi)(v)\mu \end{aligned}$$

Somit ist $V^* = \mathrm{Hom}_R(V,R) \le R^V$ linkslinear über R. Für $\sigma \in S$ gilt:

$$\begin{aligned} (\varphi\sigma)(u\lambda+v\mu) &\overset{\text{Def}}{=} \varphi(\sigma u\lambda + \sigma v\mu) \\ &\overset{\text{Lin}}{=} \varphi(\sigma u)\lambda + \varphi(\sigma v)\mu \\ &\overset{\text{Def}}{=} (\varphi\sigma)(u)\lambda + (\varphi\sigma)(v)\mu \end{aligned}$$

Somit ist V^* rechtslinear über S. QED

Bemerkung: Ist der Ring R kommutativ, zum Beispiel ein Körper, so brauchen wir links und rechts hier nicht weiter zu unterscheiden. Der nicht-kommutative Fall zwingt uns zu Links-Rechts-Disziplin.

Der Zeilenraum $R^{1\times n}$ ist dual zum Spaltenraum $R^{n\times 1}$.

Beispiel W1C: Spaltenraum $V = R^{n\times 1}$ und Zeilenraum $V^* \cong R^{1\times n}$

Sei R ein Ring und hierüber $V = R^{n\times 1}$ der Raum der Spaltenvektoren. Der Dualraum $V^* \cong R^{1\times n}$ ist isomorph zum Raum der Zeilenvektoren.

Genauer: Zu $a \in R^{1\times n}$ definieren wir $\varphi_a : V \to R$ durch $\varphi_a(x) = a \cdot x$.
(1) Die Abbildung φ_a ist rechtslinear, also $\varphi_a \in \mathrm{Hom}_R(V,R) =: V^*$.
(2) Die Abbildung $\varphi : R^{1\times n} \to V^* : a \mapsto \varphi_a$ ist linkslinear.
(3) Sie ist zudem bijektiv, also ein Isomorphismus.

Aufgabe: Rechnen Sie die hier gemachten Behauptungen sorgsam nach.

Beweis: *Matrixkalkül!* Die Matrixmultiplikation $R^{p\times q} \times R^{q\times r} \to R^{p\times r}$, hier für $(p,q,r) = (1,n,1)$, ist (1) linear rechts und (2) linear links. (§D1)

(3) *Matrixdarstellung!* Jede rechtslineare Abbildung $\varphi : V \to R$ können wir eindeutig als Matrix $a \in R^{1\times n}$ darstellen (Satz D1J), also $\varphi = \varphi_a$. QED

☺ Wir werden diese Dualität in W2E noch eleganter formulieren, nämlich gleichberechtigt in $R^{n\times 1} = V$ und $R^{1\times n} \cong V^*$.

Der Zeilenraum $R^{1\times n}$ ist dual zum Spaltenraum $R^{n\times 1}$.

Bemerkung: Sei R ein Ring und hierüber $V = R^{1\times n}$ der linkslineare Raum der Zeilenvektoren. Der Dualraum $V^* \cong R^{1\times n}$ ist isomorph zum rechtslinearen Raum der Spaltenvektoren. Der Beweis verläuft genauso. Bitte führen Sie dies zur Übung der Begriffe selbst nochmals sorgsam aus!

Formal erhalten wir dieses Ergebnis durch Transposition von Matrizen. Dabei müssen wir allerdings zusätzlich auch alle Faktoren vertauschen: Das gelingt automatisch über jedem kommutativen Ring; über einem nicht kommutativen Ring benötigen wir einen Anti-Automorphismus.

Wie versprochen sind Linearformen und Dualräume ein einfaches und grundlegendes Konzept. Einzig die Abstraktion mag etwas schrecken.

Zeilen- und Spaltenvektoren sind ein simples, doch hilfreiches Beispiel, aber längst noch nicht alles! Zur Illustration betone ich zudem einige Beispiele der Analysis, der Numerik, dem Obsthandel und der Physik.

Wem das doch zu naiv-angewandt und verwirrend-anschaulich ist, der genieße die einfache Theorie und Anwendungen erst später.

Beispiel: Äpfel und Birnen

Ein Obstladen führt Bestandslisten, etwa für Einkauf und Verkauf:

$$v = v_1\,\text{Apfel} + v_2\,\text{Birne} + \ldots + v_n\,\text{Zitrone}$$

Solche Bestandslisten über $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$ bilden einen linearen Raum:

$$V = \langle \text{Obst} \rangle_R^! \quad \text{mit Basis} \quad \text{Obst} = \{\text{Apfel}, \text{Birne}, \ldots, \text{Zitrone}\}$$

☹ Ein Skalarprodukt ist sinnlos, es würde Äpfel mit Birnen vergleichen:

$$\langle v \,|\, v \rangle = v_1^2\,\text{Apfel}^2 + v_2^2\,\text{Birne}^2 + \ldots + v_n^2\,\text{Zitrone}^2$$

Dual zu Bestandslisten sind Preislisten (etwa in Euro pro Obst):

$$u = u_1/\text{Apfel} + u_2/\text{Birne} + \ldots + u_n/\text{Zitrone}$$

Auch Preislisten über R bilden einen linearen Raum:

$$V^* = \langle \text{Obst}^{-1} \rangle_R^! \quad \text{mit Basis} \quad \text{Obst}^{-1} = \{1/\text{Apfel}, 1/\text{Birne}, \ldots\}$$

☺ Die Auswertung $\beta : V^* \times V \to R : (u, v) \mapsto u \cdot v$ ist bilinear über R.

Beispiel: Äpfel und Birnen

Diese Illustration klingt etwas albern, ist aber sprechend und nützlich. Dasselbe Phänomen finden Sie in der Physik, dort seriös ausgeführt.

Wir betrachten hierbei unsere Basiselemente Apfel, Birne, … , Zitrone als physikalische Einheiten und führen sie daher in der Notation explizit mit.

Für den Kovektor sind die physikalischen Einheiten dann die Kehrwerte 1/Apfel, 1/Birne, … , 1/Zitrone. Das ist sehr natürlich und anschaulich.

Dies betont den Unterschied zwischen den beiden Räumen V und V^*: Sie codieren duale Daten, daher verhalten sie sich entgegengesetzt.

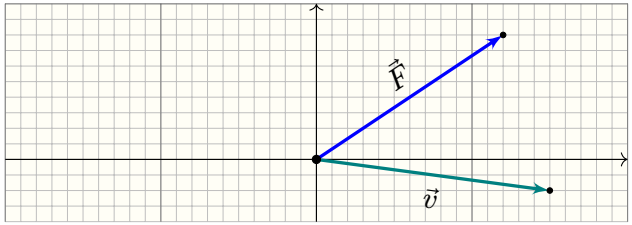
Auf V haben wir kein sinnvolles Skalarprodukt. Stattdessen haben wir jedoch die Auswertung $\beta : V^* \times V \to R$ von Kovektoren auf Vektoren.

Diese Sichtweise ist zunächst nicht ganz so anschaulich und vertraut, doch sie ist eine universelle Konstruktion und bietet viele Vorteile:

Anders als Skalarprodukte benötigen wir dazu keine zusätzliche Struktur: Zu jedem linearen Raum V haben wir den zugehörigen Dualraum V^* und die Auswertung $\beta : V^* \times V \to R$. Dies wollen wir nun nutzen lernen!

Beispiel: Leistung gleich Kraft mal Geschwindigkeit

Aus der Schulphysik kennen wir die anschaulichen Merkregeln „Arbeit = Kraft mal Weg“ und „Leistung = Arbeit durch Zeit“.



Daraus folgt „Leistung = Kraft mal Geschwindigkeit“. Ausgeschrieben:

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}, \qquad \vec{v} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}, \qquad P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Letzteres sieht aus wie ein Skalarprodukt, ist aber eine Auswertung!

$$B : V^* \times V \to \mathbb{R} : (\vec{F}, \vec{v}) \mapsto \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Hier ist $\vec{v} \in V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ ein Vektor und $\vec{F} \in V^* \cong \mathbb{R}^{1\times 3}$ ein Kovektor.

Beispiel: Leistung gleich Kraft mal Geschwindigkeit

Wie im vorigen Beispiel sollten wir nicht Äpfel mit Birnen vergleichen! Die Verschiebung $\Delta\vec{s}$ und Geschwindigkeit $\vec{v} = \Delta\vec{s}/\Delta t$ sind Vektoren, die Kraft $\vec{F}$ wirkt hierauf als Kovektor. Die Auswertung ergibt dann die Arbeit $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}$ bzw. die Leistung $P = \Delta W/\Delta t = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Auch hier sind die physikalischen Einheiten hilfreich zum Verständnis: Unsere beiden physikalischen Größen *Geschwindigkeit* $\vec{v}$ und *Kraft* $\vec{F}$ haben verschiedene „Dimensionen“ (ein sehr unglücklicher Name!), das heißt: verschiedene Maßeinheiten. Wir messen Geschwindigkeit in $1\,\mathrm{m/s}$ und Kraft in $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg\,m/s^2}$. Demnach liegen $\vec{v}$ und $\vec{F}$ nicht im selben Vektorraum: Wir können sie nicht einmal sinnvoll addieren! Die Auswertung $\vec{F} \cdot \vec{s}$ kann demnach kein Skalarprodukt sein.

Hingegen können wir wunderbar $\vec{F}$ auf $\vec{s}$ auswerten, und umgekehrt: Die zugehörigen Vektorräume V^* und V sind dual zueinander.

(Natürlich haben wir für Geschwindigkeitsvektoren ein Skalarprodukt. Dies nutzen wir insbesondere in der Formel für die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \vec{v}^{\,2}$, wobei $\vec{v}^{\,2} = \langle \vec{v} \,|\, \vec{v} \rangle$ eine skalare Größe ergibt.)

Duale Familien in V^* und V

Satz W1D: duale Familien

Gegeben sei eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ im rechtslinearen Raum V über R und eine Familie $(\varphi_i)_{i\in I}$ im linkslinearen Dualraum $V^* = \mathrm{Hom}_R(V,R)$.

Die Familien $(\varphi_i)_{i\in I}$ und $(v_i)_{i\in I}$ sind **dual** zueinander, falls gilt:

$$\boxed{\varphi_i(v_j) = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}}$$

In diesem Falle ist $(v_i)_{i\in I}$ in V linear unabhängig, ebenso $(\varphi_i)_{i\in I}$ in V^*.

Beweis: *Duale Familien bezeugen gegenseitig ihre lineare Unabhängigkeit!*

(1a) Für $v = \sum_{j\in I} v_j\mu_j$ mit $\mu \in R^{(I)}$ gilt $\varphi_i(v) \overset{\text{lin}}{=} \sum_{j\in I}\varphi_i(v_j)\mu_j \overset{\text{dual}}{=} \mu_i$.
(1b) Aus $v = 0$ folgt $\mu_i \overset{(1a)}{=} \varphi_i(v) \overset{\text{lin}}{=} 0$ für alle $i \in I$.

(2a) Für $\varphi = \sum_{i\in I}\lambda_i\varphi_i$ mit $\lambda \in R^{(I)}$ gilt $\varphi(v_j) \overset{\text{lin}}{=} \sum_{i\in I}\lambda_i\varphi_i(v_j) \overset{\text{dual}}{=} \lambda_j$.
(2b) Aus $\varphi = 0$ folgt $\lambda_j \overset{(2a)}{=} \varphi(v_j) \overset{\text{lin}}{=} 0$ für alle $j \in I$. QED

Beispiel: Monome und Ableitungen à la Tyalor

Aufgabe: Sei $\Omega =]-\varepsilon,\varepsilon[\subset \mathbb{R}$ ein reelles Intervall vom Radius $\varepsilon > 0$. Im $\mathbb{R}$–Vektorraum $V = \mathscr{C}^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ betrachten wir zu jedem $k \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$\boxed{g_k : \mathbb{R} \supseteq \Omega \to \mathbb{R} : x \mapsto x^k/k!.}$$

Linearkombination mit $a \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ergibt die Funktion $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k/k!$. Ist $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig? Finden Sie eine duale Familie $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$!

Lösung: Die Ableitung $\partial : V \to V$ definiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ die Linearform

$$\boxed{\psi_k : f \mapsto (\partial^k f)(0).}$$

Für alle Indizes $k,\ell \in \mathbb{N}$ gilt nach Konstruktion (und kurzer Rechnung)

$$\psi_k(g_\ell) = \delta_{k,\ell} := \begin{cases} 1 & \text{falls } k = \ell, \\ 0 & \text{falls } k \neq \ell. \end{cases}$$

Also ist $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in V linear unabhängig, ebenso $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im Dualraum V^*.

Beispiel: Monome und Ableitungen im $\mathbb{R}^n$ à la Tyalor

Beispiel W1E: Monome und Ableitungen im $\mathbb{R}^n$

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ betrachten wir um 0 einen offenen Ball $\Omega = B(0,\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \varepsilon\}$ mit beliebig kleinem Radius $\varepsilon > 0$.

(1) Im $\mathbb{R}$–Vektorraum $V = \mathscr{C}^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ betrachten wir die Monomfunktion

$$\boxed{f_k : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R} : x = (x_1,\dots,x_n) \mapsto x^k = x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}}$$

zum Multiindex $k = (k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{N}^n$. Linearkombination mit $a \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N}^n)}$ ergibt die n–dimensionalen Polynomfunktion $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^n} a_k x^k$.

(2) Dual hierzu betrachten wir die Linearform $\varphi_k \in V^*$ gegeben durch

$$\boxed{\varphi_k : V \to \mathbb{R} : f \mapsto \frac{(\partial^k f)(0)}{k!} \quad \text{mit } \partial^k = \partial_1^{k_1}\cdots\partial_n^{k_n} \text{ und } k! = k_1!\cdots k_n!}$$

Für alle Multiindizes $k,\ell \in \mathbb{N}^n$ gilt nach Konstruktion $\varphi_k(f_\ell) = \delta_{k,\ell}$.

(3) Dank W1D folgt: Die Familie $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ in V ist linear unabhängig, und die duale Familie $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ im Dualraum V^* ist linear unabhängig.

Beispiel: Monome und Ableitungen im $\mathbb{R}^n$ à la Tyalor

Bemerkung: Beachten Sie die geschickte Wahl der Konstanten:
Dual zu $(f_k : x \mapsto x^k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ ist wie oben $(\varphi_k : f \mapsto (\partial^k f)(0)/k!)_{k\in\mathbb{N}}$.
Dual zu $(g_k : x \mapsto x^k/k!)_{k\in\mathbb{N}^n}$ ist entsprechend $(\psi_k : f \mapsto (\partial^k f)(0))_{k\in\mathbb{N}}$.

Diese einfache Beobachtung ist der Ausgangspunkt eines wichtigen Kapitels der Analysis: die Theorie der Taylor–Polynome und –Reihen. Zur Funktion $f \in \mathscr{C}^m(\Omega,\mathbb{R})$ um den Punkt 0 gehört das **Taylor–Polynom**

$$\boxed{(T_m^0 f)(x) = \textstyle\sum_{|k|\le m} c_k x^k \quad \text{mit seinen Koeffizienten} \quad c_k = (\partial^k f)(0)/k!.}$$

Dies ist das Polynom vom Grad $\le m$ mit denselben Ableitungen bis Grad $\le m$ wie f im Punkt 0. Entsprechendes gilt verschoben um jeden Punkt $a \in \mathbb{R}^n$. Für $m = 1$ beschreibt dies die Tangentialebene (affin-linear), für $m = 2$ die Schmiegequadrik (als quadratisches Polynom). Dies nutzt man zur Untersuchung kritischer Stellen, insbesondere Minima und Maxima.

Das Restglied $(\varepsilon_m^0 f)(x) = f(x) - (T_m^0 f)(x)$ gibt Auskunft über den Fehler in jedem Punkt $x \in \Omega$. In günstigen Fällen gilt Konvergenz $|\varepsilon_m^0 f| \to 0$ für $m \to \infty$, und wir erhalten so die Darstellung von f als Taylor–Reihe.

Die duale Familie $\mathcal{B}^*$ einer Basis $\mathcal{B}$

Satz W1H: die duale Familie $\mathcal{B}^* = (v_i^*)_{i\in I}$ einer Basis $\mathcal{B} = (v_i)_{i\in I}$

Sei V ein linearer Raum über R. (1) Zu jeder Basis $\mathcal{B} = (v_i)_{i\in I}$ von V existiert genau eine duale Familie $\mathcal{B}^* = (v_i^*)_{i\in I}$ in $V^* = \mathrm{Hom}_R(V, R)$.

(2) Ist I zudem endlich, so ist $\mathcal{B}^* = (v_i^*)_{i\in I}$ eine Basis von V^*.
Wir nennen dies kurzerhand die duale Basis zur Basis $\mathcal{B} = (v_i)_{i\in I}$.

(3) Ist I jedoch unendlich, so ist $\mathcal{B}^* = (v_i^*)_{i\in I}$ keine Basis von V^*.
Die Familie $(v_i^*)_{i\in I}$ in V^* ist linear unabhängig, aber nicht erzeugend.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, dashed, "\exists!\, v_i^* : v_j \mapsto \delta_{i,j}", "\mathrm{PLF}"'] & & R \\
& I \arrow[ul, "v_j \mapsto j", "\mathrm{Basis}"'] \arrow[ur, "j \mapsto \delta_{i,j}", "\mathrm{Vorgabe}"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis: (1) Prinzip der linearen Fortsetzung (Satz N1B): Zu jedem Index $i \in I$ existiert genau eine lineare Abbildung $v_i^* : V \to R$ mit $v_i^*(v_j) = \delta_{i,j}$ für alle $j \in I$. Diese ist explizit gegeben durch $v_i^*(\sum_{j\in I} v_j\mu_j) = \mu_i$.

Die duale Familie einer Basis

Die duale Familie $(v_i^*)_{i\in I}$ in V^* ist ebenfalls linear unabhängig (W1D).
(2,3) Sie erzeugt den Dualraum V^* genau dann, wenn I endlich ist:

„$\Leftarrow$“: Sei I endlich. Zu $\varphi \in V^*$ sei $\psi := \sum_{i\in I} \varphi(v_i)\, v_i^* \in \langle v_i^* : i \in I\rangle_R$.
Für $j \in I$ gilt $\psi(v_j) \overset{\text{lin}}{=} \sum_{i\in I} \varphi(v_i)\, v_i^*(v_j) \overset{\text{dual}}{=} \varphi(v_j)$, also $\psi = \varphi$ dank N1A.

„$\Rightarrow$“: Dank PLF N1B existiert $\varphi : V \to R$ linear mit $\varphi(v_j) = 1$ für alle $j \in I$.

Alternativ, $\varphi : V \to R : v \mapsto \sum_{i\in I} v_i^*(v)$ ist wohldefiniert und linear, also $\varphi \in V^*$. Sie erfüllt $\varphi(v_j) = 1$ für alle $j \in I$. Für jeden Vektor $v = \sum_{j\in I} v_j\mu_j$ mit $\mu \in R^{(I)}$ folgt $\varphi(v) \overset{\text{Def}}{=} \sum_{i\in I} v_i^*(v) \overset{\text{Lin}}{=} \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} v_i^*(v_j)\mu_j \overset{\text{dual}}{=} \sum_{i\in I} \mu_i$.

Nach Voraussetzung existieren Koeffizienten $\lambda \in R^{(I)}$ mit $\varphi = \sum_{i\in I} \lambda_i v_i^*$.
Für alle $j \in I$ folgt $1 \overset{\text{Def}}{=} \varphi(v_j) \overset{\text{Vor}}{=} \sum_{i\in I} \lambda_i v_i^*(v_j) \overset{\text{dual}}{=} \lambda_j$, also ist I endlich. $\boxed{\text{QED}}$

♦ **Beispiel W6A:** Polynome und Auswertung

Der Raum $V = \mathbb{R}[X]$ aller Polynome über $\mathbb{R}$ hat die Monombasis $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Im Dualraum V^* ist ihre duale Familie $(\varphi_k : f \mapsto (\partial^k f)(0)/k!)_{k\in\mathbb{N}}$ (W1E).
Die Auswertung $\mathrm{ev}_1 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} : f \mapsto f(1)$ liegt nicht in $\langle \varphi_k \mid k \in \mathbb{N}\rangle_{\mathbb{R}}^!$.

Beispiel: duale Familie einer Basis

Aufgabe: Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2\times 1}$ über $\mathbb{R}$ vergleichen wir zwei Basen,

$$\mathcal{A} = \left(a_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ a_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \left(b_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ b_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right).$$

Bestimmen Sie die hierzu dualen Basen des Dualraums $V^* \cong \mathbb{R}^{1\times 2}$.

Lösung: Nach Definition der dualen Familie finden wir

$$a_1^* = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},\ a_2^* = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b_1^* = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix},\ b_2^* = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}.$$

⚠ Beachten Sie die Tücke der Notation: Es gilt $a_1 = b_1$, doch $a_1^* \neq b_1^*$.

Merke: Die Konstruktion der Linearform $v_i^* : V \to R : v_j \mapsto \delta_{i,j}$ in $\mathcal{B}^*$ hängt nicht nur von v_i ab, sondern von der *gesamten* Basis $\mathcal{B} = (v_j)_{j\in I}$.

Bemerkung: Zu der linear unabhängigen Familie $(a_1) = (b_1)$ in V existieren mehrere duale Familien in V^*, etwa $(a_1^*) \neq (b_1^*)$.
Zur Eindeutigkeit in Satz W1H benötigen wir eine Basis!

Beispiel: duale Familie einer Basis

❓ Wie lösen Sie die vorige Aufgabe effizient? Matrixdualität! (M3)

Aufgabe: Sei $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$ eine Basis im Spaltenraum $V = R^{n\times 1}$.
Wie berechnen Sie die duale Basis $\mathcal{B}$ = im Zeilenraum $V^* \cong R^{1\times n}$?

Lösung: Wir bilden die Matrix $A \in R^{n\times n}$ mit Spalten $a_1, \dots, a_n$.
Gesucht ist die inverse Matrix $B \in R^{n\times n}$ mit Zeilen $b_1, \dots, b_n$,
sodass $BA = 1_{n\times n}$ gilt, also $b_i \cdot a_j = \delta_{i,j}$ für alle Indizes i, j.

☺ Über jedem Divisionsring R löst dies der Gauß–Algorithmus.
Erfolgreiche Inversion bezeugt gegenseitig die Basiseigenschaft.

Wiederholung: Gegeben sei eine (un/endliche) Basis $(v_i)_{i\in I}$ von V.
Wie berechnen Sie $v_i^*(v)$ für einen beliebigen Vektor $v \in V$?

Lösung: Es gilt $v = \sum_{j\in I} v_j\mu_j$ mit eindeutigen Koeffizienten $\mu \in R^{(I)}$.
Daraus folgt $v_i^*(v) \overset{\text{lin}}{=} \sum_{j\in I} v_i^*(v_j)\mu_j \overset{\text{dual}}{=} \mu_i$. Voilà!

☺ Die Linearform v_i^* filtert den zugehörigen Koeffizienten μ_i heraus.
Diese Eigenschaft ist theoretische Grundlage und praktischer Nutzen!

Beispiel: der Koordinatenraum $R^{(I)}$ und sein Dualraum R^I

Beispiel W1I: der Koordinatenraum $R^{(I)}$ und sein Dualraum R^I

Über dem Ring R betrachten wir $V = R^{(I)}$ als rechtslinearen Raum. Der Dualraum $V^* = \mathrm{Hom}_R(V, R)$ ist dann linkslinear über R (W1A). Dank PLF (N1B) haben wir den R–linearen Isomorphismus

$$V^* \cong R^I : \varphi \mapsto u = (\varphi(e_i))_{i\in I}$$

Die Umkehrung $u \mapsto \varphi$ ist explizit gegeben durch $\varphi(v) := \sum_{i\in I} u_i v_i$.

(0) Zur Standardbasis $(e_i)_{i\in I}$ in V gehört die duale Familie $(e_i^*)_{i\in I}$ in V^*. Diese erzeugt den Dualraum V^* genau dann, wenn I endlich ist. (W1H)

(1) Speziell für $I = \{1, \dots, n\}$ finden wir erneut das Eingangsbeispiel von Spaltenvektoren $V = R^{n\times 1} \cong R^n$ und Zeilenvektoren $V^* \cong R^{1\times n} \cong R^n$.

(2) Für $I = \mathbb{N}$ ist $V = R^{(\mathbb{N})} \cong R[X]$ der Raum der Folgen mit *endlichem* Träger. Hingegen ist $V^* \cong R^{\mathbb{N}} \cong R[\![X]\!]$ der Raum *aller* Folgen, siehe W6A.

⚠ Für I unendlich sind $V = R^{(I)}$ und $V^* \cong R^I$ deutlich verschieden!

Beispiel: der Koordinatenraum $R^{(I)}$ und sein Dualraum R^I

Zur Erinnerung: R^I ist der Raum aller Abbildungen $v : I \to R : i \mapsto v_i$, wobei Addition und Skalierung punktweise erklärt sind (L2D). Darin ist $R^{(I)} = \{ v \in R^I \mid \sharp\,\mathrm{supp}(v) < \infty \}$ der Unterraum aller Abbildungen $v : I \to R$ mit endlichem Träger $\mathrm{supp}(v) = \{ i \in I \mid v_i \neq 0 \}$, siehe L2D.

Ist R ein Körper oder ein Divisionsring, so hat jeder R–Vektorraum V eine Basis $(v_i)_{i\in I}$, ist also isomorph zu unserem Koordinatenraum $R^{(I)}$. Dieser einfache Koordinatenraum ist somit das zentrale Beispiel und über einem Divisionsring sogar repräsentativ für *alle* linearen Räume.

Jeder R–Vektorraum V sieht also aus wie ein Koordinatenraum $R^{(I)}$, und der Dualraum V^* ist demnach isomorph zu R^I. Das ist konkret. Mit diesen vertrauten Räumen haben wir durchgehend gearbeitet und schon viele gute Erfahrungen gemacht, so auch hier.

⚠ Die duale Familie $(v_i^*)_{i\in I}$ in $V^* \cong R^I$ ist linear unabhängig (W1D), erzeugt aber in V^* nur den Unterraum $U^* := \langle v_i^* : i \in I \rangle_R \cong R^{(I)} \leq R^I$. Genau dann gilt $U^* = V^*$, wenn I endlich ist. Dies führen wir nun aus.

Sind der Raum V und sein Dualraum V^* isomorph?

Wie oben gesehen ist V ein rechtslinearer Raum über R und daher V^* ein linkslinearer Raum über R, oder umgekehrt bei Bedarf. Im Allgemeinen kann es daher keinen Isomorphismus geben, selbst wenn beide Räume selbe Dimension haben. Mit etwas mehr Struktur gelingt dies jedoch:

Korollar W1J: nicht-kanonische Isomorphie zwischen V und V^*

Sei (R, σ) ein involutiver Ring (D1G), etwa kommutativ (R, id_R) oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$ oder $R = \mathbb{K}^{r\times r}$ mit $\sigma : A \mapsto A^\dagger$.

Sei V ein rechtslinearer Raum über R mit endlicher Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$. Dann ist V^* ein linkslinearer Raum mit dualer Basis $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$.

Dann erhalten wir den semilinearen Isomorphismus (S1B)

$$(\Psi_{\mathcal{B}}, \Psi_{\mathcal{B}}^*) : V \cong V^* : \textstyle\sum_{i\in I} v_i \mu_i \mapsto \sum_{i\in I} \mu_i^\sigma v_i^*.$$

Über jedem kommutativen Ring R, insbesondere über jedem Körper, müssen wir rechts und links nicht streng unterscheiden. Somit existiert ein Isomorphismus $V \cong V^*$. Er ist nicht natürlich, sondern willkürlich. nicht objektiv, sondern subjektiv, abhängig von der gewählten Basis.

Sind der Raum V und sein Dualraum V^* isomorph?

⚠ Der Isomorphismus $(\Psi_{\mathcal{B}}, \Psi_{\mathcal{B}}^*) : V \cong V^*$ ist nicht natürlich, insbesondere müssen wir links und rechts zurechtbiegen.

⚠ Der Isomorphismus $(\Psi_{\mathcal{B}}, \Psi_{\mathcal{B}}^*) : V \cong V^*$ ist nicht kanonisch, sondern hängt von der willkürlich gewählten Basis $\mathcal{B}$ ab.

⚠ Ohne Vorgabe einer Basis können wir herzlich wenig sagen.

Beispiel W1K: Raum und Dualraum sind nicht immer isomorph.

Wir betrachten die abelsche Gruppe $V = \mathbb{Z}/n$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$
(1) Als linearer Raum über dem Ring $\mathbb{Z}$ gilt $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}) = 0$.
(2) Über dem Ring $\mathbb{Z}/n$ hingegen gilt $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/n}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/n) \cong \mathbb{Z}/n$.

Beweis: (1) Jeder Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}$ ist trivial, denn für $a = \varphi(1) \in \mathbb{Z}$ mit Ordnung n bleibt nur $a = 0$, also $\varphi = 0$.

(2) Wir haben $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/n}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/n) \cong \mathbb{Z}/n : \varphi \mapsto \varphi(1)$. Das ist Beispiel W1I im Spezialfall $I = \{1\}$: Jeder Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n$ hat die Form $\varphi : x \mapsto ax$ mit $a = \varphi(1)$. Diese Zuordnung $\varphi \mapsto \varphi(1)$ ist $\mathbb{Z}/n$–linear und bijektiv, also ein Isomorphismus über $\mathbb{Z}/n$. QED

Der natürliche Homomorphismus von V zum Bidual V^{**}

Satz W1L: der natürliche Homomorphismus von V zum Bidual V^{**}

Sei V ein rechtslinearer Raum über dem Ring R.
Der Dualraum $V^* = \mathrm{Hom}_R(V, R)$ ist ein linkslinearer Raum.
Der Bidualraum $V^{**} = (V^*)^* = \mathrm{Hom}_R(V^*, R)$ ist wieder rechtslinear.

(0) Wir haben die natürliche Abbildung

$$\boxed{\iota : V \to V^{**} : v \mapsto \iota(v) \quad \text{mit} \quad \iota(v)(\varphi) := \varphi(v).}$$

(1) Diese Abbildung ι ist rechtslinear, kurz $\iota \in \mathrm{Hom}_R(V, V^{**})$.

(2) Hat V eine Basis $(v_i)_{i\in I}$, so ist ι injektiv, kurz $\iota : V \hookrightarrow V^{**}$.

(3) Hat V eine endliche Basis $(v_i)_{i\in I}$, so ist ι bijektiv, $\iota : V \xrightarrow{\sim} V^{**}$.

Beispiel: Für $V = R^{n\times 1}$ über R gilt $V^* \cong R^{1\times n}$ und dann $V^{**} \cong R^{n\times 1}$.
In dieser Darstellung ist der natürliche Isomorphismus ι die Identität.

Aufgabe: Weisen Sie die Aussagen des Bidualsatzes sorgsam nach!
Alle Daten liegen explizit vor. Es genügt gewissenhaftes Nachrechnen.

Der natürliche Homomorphismus von V zum Bidual V^{**}

Beweis: (0) Die Abbildung $\iota(v) : V^* \to R : \varphi \mapsto \varphi(v)$ ist linkslinear (W1B).
Somit erhalten wir tatsächlich $\iota(v) \in \mathrm{Hom}_R(V^*, R) = (V^*)^* = V^{**}$.

(1) Die so definierte Abbildung $\iota : V \to V^{**} : v \mapsto \iota(v)$ ist rechtslinear.
Warum? Nachrechnen! Für alle $u, v \in V$ und $\lambda, \mu \in R$ sowie $\varphi \in V^*$ gilt:

$$\begin{aligned} \iota(u\lambda + v\mu)(\varphi) &\overset{\text{Def}}{=} \varphi(u\lambda + v\mu) \\ &\overset{\text{Lin}}{=} \varphi(u)\lambda + \varphi(v)\mu \overset{\text{Def}}{=} \iota(u)(\varphi)\lambda + \iota(v)(\varphi)\mu \end{aligned}$$

Dank Extensionalität schließen wir $\iota(u\lambda + v\mu) = \iota(u)\lambda + \iota(v)\mu$.

(2) Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V und $(v_i^*)_{i\in I}$ die duale Familie in V^* (W1H).
Die Bildfamilie $(\iota(v_i))_{i\in I}$ in V^{**} ist dual zu $(v_i^*)_{i\in I}$ in V^*, denn wir haben $\iota(v_j)(v_i^*) \overset{\text{Def}}{=} v_i^*(v_j) \overset{\text{dual}}{=} \delta_{i,j}$. Somit ist $(\iota(v_i))_{i\in I}$ linear unabhängig (W1D), also $\iota : V \to V^{**} : \sum_i v_i\mu_i \mapsto \sum_i \iota(v_i)\mu_i$ injektiv (M1A).

(3) Ist $(v_i)_{i\in I}$ eine endliche Basis von V, so auch dual $(v_i^*)_{i\in I}$ in V^* (W1H) und bidual $(v_i^{**})_{i\in I}$ in V^{**}; dank Eindeutigkeit gilt $\iota(v_i) = v_i^{**}$ (W1H).
Somit ist $\iota : V \to V^{**} : \sum_i v_i\mu_i \mapsto \sum_i v_i^{**}\mu_i$ bijektiv (M1A). QED

Der natürliche Homomorphismus von V zum Bidual V^{**}

☺ Bisher sind Beweise und Rechnungen zur Dualität alle „lokal-trivial“:
Wir müssen nur die Definitionen genau und gewissenhaft anwenden.

🤔 Wie kommt das? Das verdanken wir, wie so oft, der Abstraktion!

☺ Die geläuterten Grundlagen erlauben nur das absolut nötige Minimum an Rechenregeln. Unser Suchraum ist deshalb winzig, oft gibt es nur eine einzige sinnvolle Umformung, und diese ist dann natürlich die richtige.

Aufgabe: Gehen Sie jeden Schritt durch und prüfen sie die Argumente kritisch, zum Beispiel: Warum gilt die Gleichheit $\iota(v_i) = v_i^{**}$ in Schritt (3)?

Lösung: Wir haben die Basis $(v_i^*)_{i\in I}$ in V^* dank W1H. Hierzu dual ist sowohl $(v_i^{**})_{i\in I}$, erneut dank W1H, als auch $(\iota(v_i))_{i\in I}$, denn wir haben $\iota(v_i)(v_j^*) \overset{\text{Def}}{=} v_j^*(v_i) \overset{\text{dual}}{=} \delta_{i,j} \overset{\text{Def}}{=} v_i^{**}(v_j^*)$ für alle $j \in I$. Dank Vergleichslemma N1A und Extensionalität gilt $\iota(v_i) = v_i^{**}$. Genau das war nachzurechnen.

Bemerkung: Unser Homomorphismus $\iota : V \to V^{**}$ ist *natürlich*!
Im Gegensatz zu W1J gelingt die Konstruktion von ι ohne willkürliche Wahlen, insbesondere ohne die Wahl einer Basis. Die Existenz einer Basis garantiert die Injektivität, eine endliche Basis sogar die Bijektivität.

Der natürliche Homomorphismus von V zum Bidual V^{**}

In diesem Kapitel arbeiten wir zunächst über einem beliebigen Ring R.
Um Trivialitäten zu vermeiden, fordern wir lediglich $0 \neq 1$, also $R \supsetneq \{0\}$.
Dadurch schließen wir lediglich den Nullring $R = \{0\}$ mit $0 = 1$ aus.
Somit enthält $\delta_{i,j} \in \{0, 1\}$ genau die gewünschte Information.

Das ist schwindelerregend allgemein, doch zum Ausgleich betrachten wir meist nur freie Räume, also mit einer Basis, das vereinfacht enorm.
So können wir alle *Definitionen* ganz bequem allgemein formulieren, doch die *Rechnungen* vereinfachen wir durch Annahme einer Basis.

Über einem Körper oder Divisionsring ist jeder Vektorraum frei (M2K), unsere Sätze gelten in diesen Fällen also ohne jede Einschränkung.
Wie gesehen genügt für viele Sätze bereits die Annahme einer Basis, und die Beweise sind wörtlich dieselben; daher bleibt R allgemein.

Es gibt im Folgenden ein paar Aussagen, für die wir tatsächlich mehr benötigen; in diesen Fällen setze ich dann einen Divisionsring voraus.
Solange es weder Aussage noch Beweis verkompliziert, verzichte ich auf diese Einschränkung und formuliere so allgemein wie möglich.

Gibt es eine anschauliche Interpretation?

⚠ Die wichtige Warnung vorweg: Suchen Sie nicht krampfhaft (nur) anschaulich zu verstehen, gerade bei Linearformen ist es viel leichter, formal zu rechnen. Investieren Sie Ihre liebevolle Mühe anfangs besser in die wenigen Definitionen und Sätze und die lehrreichen Beweise.

Wir stellen uns einen Vektor $v \in V$ als **physikalische Größe** vor, zum Beispiel eine Verschiebung im $\mathbb{R}^3$ oder eine Geschwindigkeit. Jeder Kovektor $u \in V^*$ ist dual dazu ein **Messgerät** für Vektoren $v \in V$. Die Messung ist die Auswertung von u auf v: Der Kovektor u nimmt als Eingabe den Vektor v und gibt als Ausgabe den **skalaren Messwert** $u(v)$. Hierzu haben wir bereits vielfältige Anwendungsbeispiele skizziert:

- Zeilenvektor u mal Spaltenvektor v (D121)
- Auswertung / Abtastung einer Funktion f (W103)
- Preisliste ausgewertet auf einer Bestandsliste (W109)
- Auswertung einer Kraft auf einer Geschwindigkeit (W111)
- Anwendung einer Ableitung auf einen Tangentialvektor
- Integral eines Kovektorfeldes entlang eines diff'baren Weges.

Gibt es eine anschauliche Interpretation?

Wie können wir uns den Bidualraum V^{**} anschaulich vorstellen? Seine Elemente $\psi \in V^{**}$ sind Messgeräte für Kovektoren $u \in V^*$. Was also bedeuten solche „Kokovektoren"? 🥥 möglichst konkret? Ist das abstrakter Kokolores? Nein, wir können konkret damit rechnen!

Am einfachsten können wir Messgeräte $u \in V^*$ messen, indem wir sie auf ein und dieselbe Datenlage $v \in V$ anwenden. Das ist die oben erklärte Abbildung $\iota : V \to V^{**} : \iota(v)(u) = u(v)$.

Die gute Nachricht des sagenhaft eleganten Bidualsatzes W1L lautet:
(0) Zu jedem Vektor $v \in V$ erhalten wir so den Kokovektor $\iota(v) \in V^{**}$.
(1) Die so definierte Zuordnung $\iota : V \to V^{**}$ ist eine lineare Abbildung.
(2) Hat der Raum V eine Basis $(v_i)_{i\in I}$, so ist ι injektiv, kurz $\iota : V \hookrightarrow V^{**}$.
(3) Hat V eine endliche Basis $(v_i)_{i\in I}$, so ist ι bijektiv, $\iota : V \xrightarrow{\sim} V^{**}$.

In endlicher Dimension verliert das Bidual V^{**} also seinen Schrecken: Wir können uns *jeden* Kokovektor als einen Vektor $v \in V$ vorstellen. Die Anwendung von $v \in V$ auf $u \in V^*$ ist schlicht die Auswertung $u(v)$. Damit wird das gefürchtete Bidual schließlich wunderbar leicht.

Anschaulich oder formal? Ja, gerne beides!

Mit dieser kurzen Skizze zur Anschauung lasse ich es bewenden. Ich gebe gerne anschauliche Illustrationen, das mag manchmal helfen. Sie *ergänzen* die Definitionen, doch *ersetzen* diese keinesfalls. Lernen Sie beides zu nutzen, wie linke und rechte Hand.

Viele mathematische Probleme scheinen nur von ferne schwer; sie lösen sich in Wohlgefallen auf, sobald Sie sie ernsthaft durcharbeiten. Nochmal: Suchen Sie nicht krampfhaft (nur) anschaulich zu verstehen, gerade bei Linearformen ist es wesentlich leichter, formal zu rechnen.

Stattdessen betone ich lieber meine tiefe Überzeugung und Rat: Linearformen und Dualräume sind naturgemäß sehr einfach, Sie müssen wie immer „nur" die Definitionen genau lernen und gewissenhaft anwenden. Hier üben Sie diese Sorgfalt!

Der Appetit kommt mit dem Essen.
Das Verstehen kommt mit dem Üben.
Die Sicherheit kommt mit dem Rechnen.
Die Anschauung kommt mit der Erfahrung.

Anschaulich oder formal? Ja, gerne beides!

Ist das „abstrakt" und „schwer"? Nein, wenn Sie es recht betrachten, eigentlich nicht: Die Definition erklärt Ihnen ganz genau, wie Sie mit Linearformen rechnen, so werden diese recht leicht und sehr konkret! Dualräume sind neu und ungewohnt, das schon, aber mehr auch nicht.

Mit linearen Abbildungen haben Sie bislang gute Erfahrungen gemacht, und Linearformen sind hierzu der einfachste Spezialfall. Das kann nicht wirklich schwierig sein, es erfordert lediglich Sorgfalt und Einübung. Genau dazu sind Grundfragen wie Linearformen eine gute Diagnose.

Also, fassen Sie guten Mut und packen Sie es professionell an! Nach zwei Semestern Mathestudium wissen Sie, wie es gelingt. Hier können Sie Ihr solides Grundlagenwissen einbringen, und wo noch etwas fehlt die Lücken endlich schließen.

Freuen Sie sich auf Quiz und Übung! Sie werden anschließend erfreut feststellen: Die eingehende Beschäftigung mit Linearformen verfestigt und vertieft Ihr Verständnis. Wir beleuchten im Folgenden vielfältige Aspekte: Annullator, Bilinearformen, duale Abbildungen, usw.

Der Annullator einer Teilmenge / eines Teilraums

Definition W2A: der Annullator einer Teilmenge / eines Teilraums

Über R sei V ein linearer Raum und $V^* = \mathrm{Hom}_R(V, R)$ sein Dualraum. Zu jeder Teilmenge $X \subseteq V$ ist der **Annullator** $X^\circ \subseteq V^*$ definiert durch

$$\boxed{X^\circ := \{\varphi \in V^* \mid \forall v \in X : \varphi(v) = 0\}.}$$

Die Bedingung „$\varphi(v) = 0$ für alle $v \in X$“ schreiben wir kurz $\varphi(X) = 0$.

Es gilt $X^\circ \leq V^*$. Aus $X \subseteq Y \subseteq U := \langle X \rangle_R$ folgt $X^\circ = Y^\circ = U^\circ \leq V^*$.

Beweis: (1) Es gilt $\mathrm{const}_V^0 = 0 \in X^\circ$. Aus $\varphi, \varphi' \in X^\circ$ und $\lambda, \lambda' \in R$ folgt $\lambda\varphi + \lambda'\varphi' \in X^\circ$, denn für jeden Vektor $x \in X \subseteq V$ gilt

$$(\lambda\varphi + \lambda'\varphi')(x) \overset{\text{Def}}{=} \lambda\varphi(x) + \lambda'\varphi'(x) \overset{\text{Vor}}{=} 0.$$

(2) Die Inklusionen $X^\circ \supseteq Y^\circ \supseteq U^\circ$ sind klar. Zudem gilt $X^\circ \subseteq U^\circ$: Für $\varphi \in X^\circ$ gilt $X \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$, und daraus folgt $U = \langle X \rangle_R \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$, denn der Kern ist ein Unterraum (L2B). Das bedeutet $\varphi \in U^\circ$. QED

Der Annullator einer Teilmenge / eines Teilraums

Bemerkung: Beachten Sie die Ähnlichkeit, aber auch den Unterschied zum Orthogonalraum $X^\perp$ bezüglich eines Skalarprodukts $\langle \text{-} | \text{-} \rangle$ auf V.

$$X^\perp := \{v \in V \mid \forall u \in X : \langle u \mid v \rangle = 0\} \leq V$$

Der Annullator X° der Teilmenge $X \subseteq X$ liegt im Dualraum V^*, der Orthogonalraum $X^\perp$ hingegen ist immer ein Unterraum von V. Die beiden können also niemals *gleich* sein, bestenfalls *isomorph*.

Im nächsten Abschnitt werden wir die beiden Sichtweisen versöhnen und mit Hilfe einer Bilinearform einen Isomorphismus konstruieren.

Gemäß $X^\perp = \langle X \rangle_R^\perp$ können wir auch hier zum erzeugten Teilraum $U = \langle X \rangle_R \leq V$ übergehen. Bei einem Skalarprodukt gilt $V = U \oplus U^\perp$, und wir nennen dann $U^\perp$ das orthogonale Komplement zu U in V.

☺ Dualität ist, wie bereits eingangs motiviert, die natürliche Verallgemeinerung von Bilinearformen und Skalarprodukten. Auch das nächste Beispiel illustriert dies sehr eindrücklich.

Beispiel zum Annullator

Aufgabe: Gegeben sind die folgenden Vektoren in $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ über $\mathbb{R}$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie zu $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ den Annullator X° in $V^* \cong \mathbb{R}^{1\times 3}$.

Lösung: Wir schreiben die Spalten v_1, v_2, v_3, v_4 in die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Wir suchen alle $u \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ mit $uA = 0$. Mit Spaltenoperationen bringen wir A in reduzierte Spaltenstufenform (RSSF) $C = AT$ mit $T \in \mathrm{GL}_4\,\mathbb{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{RSSF}]{\text{Gauß}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

Demnach gilt $uA = 0$ genau dann, wenn $uC = 0$. Daraus lesen wir ab:

$$X^\circ = \langle u_1 \rangle_{\mathbb{R}}^{!} \quad \text{mit} \quad u_1 = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

☺ Anschaulich ist $\langle X \rangle \leq \mathbb{R}^3$ eine Ebene, und u_1 steht hierzu senkrecht.
☺ Allgemein: $\dim\langle X \rangle = 2$ und $\dim X^\circ = 1$ addieren sich zu $\dim V = 3$.

Beispiel zum Annullator

⚠ Statt dem Rechtskern berechnen wir hier den Linkskern von A.

Meist schreiben wir lineare Gleichungssysteme in der vertrauten Konvention $Ax = y$ mit $x \in R^{n\times 1}$ und $y \in R^{m\times 1}$ als Spaltenvektoren und der Koeffizientenmatrix $A \in R^{m\times n}$. Mit Zeilenoperationen D2H bringen wir A in reduzierte *Zeilenstufenform* $B = SA$ mit $S \in \mathrm{GL}_m\,R$. Statt $Ax = y$ lösen wir die äquivalente, leichtere Gleichung $SAx = Sy$.

Im vorliegenden Falle bietet sich jedoch die Schreibweise $uA = 0$ an, mit $u \in R^{1\times m}$ und $0 \in R^{1\times n}$ als Zeilenvektoren. Mit Spaltenoperationen bringen wir A in reduzierte *Spaltenstufenform* $C = AT$ mit $T \in \mathrm{GL}_n\,R$. Statt $uA = 0$ lösen wir die äquivalente, leichtere Gleichung $uAT = 0$. Das Gauß–Verfahren ist in beiden Situationen vollkommen analog.

Über jedem involutiven Ring (R, σ), können Sie die beiden Probleme und Lösungsverfahren ineinander umrechnen: Aus $Ax = y$ wird $x^\dagger A^\dagger = y^\dagger$ und umgekehrt. Ist unser Ring R nicht involutiv, so gilt dies nicht, daher scheint mir hier die nötige Links-Rechts-Disziplin natürlich und hilfreich. Über jedem kommutativen Ring (R, id_R) ist Umwälzen besonders leicht.

Dimension und Struktur des Annullators

Satz W2B: Dimension und Struktur des Annullators

Sei V ein R–linearer Raum, $U \leq V$ ein Unterraum, dazu $U^\circ \leq V^*$.

(1) Ist R ein Divisionsring, so gilt die Dimensionsformel

$$\boxed{\dim_R(U) + \dim_R(U^\circ) = \dim_R(V).}$$

(2) Allgemein über jedem Ring R gilt die folgende Implikation:

$$\boxed{V = U \oplus \langle v_1, \dots, v_k \rangle_R^! \quad \Longrightarrow \quad U^\circ = \langle v_1^*, \dots, v_k^* \rangle_R^! \leq V^*}$$

Hier ist $v_i^* : V \to R$ definiert durch $v_i^*(v_j) = \delta_{i,j}$ und $v_i|_U = 0$ für alle i, j.

(3) Aus dem Quotienten $q : V \twoheadrightarrow V/U$ erhalten wir den Isomorphismus

$$\boxed{q^* : (V/U)^* \xrightarrow{\sim} U^\circ : \psi \mapsto \psi \circ q.}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, two heads, "q"'] & R \\ V/U \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Letzteres folgt aus der linearen Faktorisierung über die Surjektion $q : V \twoheadrightarrow V/U$ (Satz L3c).

Dimension und Struktur des Annullators

Die Dimensionsformel (1) ist haben wir im vorigen Beispiel beobachtet. Die Gleichheit dort war tatsächlich kein Zufall, sondern gilt allgemein. Um allgemein von Dimension sprechen zu können, benötigen wir einen Divisionsring, wir denken insbesondere an Körper wie $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_q, \dots$.

Die Aussage (2) gilt allgemeiner über jedem Ring R, allerdings müssen wir eine Basis voraussetzen, hier in der Form $V = U \oplus \langle v_1, \dots, v_k \rangle_R^!$. Wenn U eine Basis hat, kurz $U = \langle v_i \mid i \in J \rangle_R^!$ mit $\dim U = \sharp J =: j$, dann folgt die Dimensionsformel (1), denn wir haben $\dim V = j + k$.

Für die Aussage (2) spielt jedoch die Struktur von U gar keine Rolle, wir benötigen lediglich ein Komplement mit einer endlichen Basis. Die griffige Formel lautet dann als Slogan: Die Dimension des Annullators $U^\circ \leq V^*$ ist die Codimension des Unterraums $U \leq V$.

Die Aussage (3) ist die allgemeinste Formulierung dieser drei Aussagen, denn sie impliziert unmittelbar die Gleichung (2) und damit auch (1). Der Preis für diese Allgemeinheit ist die etwas höhere Abstraktion, doch diese Investition zahlt sich aus in Klarheit, Effizienz und Eleganz.

Dimension und Struktur des Annullators

Beweis: Diese schönen Rechenregeln beweisen Sie in den Übungen! Bitte nutzen Sie diese gute Gelegenheit, die Grundlagen des ersten Semesters handfest zu wiederholen und etwaige Lücken zu schließen.

Hier lohnt sich, dabei die Reihenfolge umzudrehen, vom Allgemeinen zum Speziellen vorzugehen, und dadurch Einsparungen zu nutzen:

(3) Die Abbildung $q^* : (V/U)^* \to U^\circ : \psi \mapsto \psi \circ q$ ist ein R–linearer Isomorphismus. Wiederholen Sie dazu die Faktorisierung über eine Surjektion, sie ist genau darauf zugeschnitten. Damit ist es leicht.

(2) Wir nehmen an, dass U ein Komplement W mit R–Basis $(v_1, \dots, v_k)$ besitzt, also $V = U \oplus W$ wie oben angegeben. Die dualen Basisvektoren $\tilde{v}_i^* \in W^*$ setzen wir fort zu Linearformen $v_i^* \in V^*$ durch $v_i^*(w) = \tilde{v}_i^*(w)$ für $w \in W$ und $v_i^*(u) = 0$ für $u \in U$. Dann ist $(v_1^*, \dots, v_k^*)$ eine Basis von U°.

(1) Ist R ein Divisionsring, so folgt aus (3) oder (2) die Dimensionsformel

$$\boxed{\dim_R(U) + \dim_R(U^\circ) = \dim_R(V).}$$

Dimension und Struktur des Annullators

Aufgabe: Sei R ein Divisionsring und $V = R^n$ ein Koordinatenraum. Übersetzen Sie obige Gleichung $\dim_R(U) + \dim_R(U^\circ) = \dim_R(V)$ in ein äquivalentes Matrixergebnis, das Ihnen aus der LinA1 vertraut ist.

☺ Das vorige Zahlenbeispiel W203 führt uns zur allgemeinen Regel:

Lösung: Zu jedem Unterraum $U \leq V$ finden wir eine Basis $(a_1, \dots, a_\ell)$ dank Basisauswahlsatz M2K. Dabei gilt $\ell \leq n$ dank Ergänzungssatz M3O.

Für die daraus gebildete Matrix $A = (a_1, \dots, a_\ell) \in R^{n \times \ell}$ gilt demnach $U = \operatorname{Im}(A) = AR^\ell = \langle a_1, \dots, a_\ell \rangle_R^!$. Der (Spalten)Bildraum ist $U \leq \mathbb{R}^n$. Der (Spalten)Kern von A ist $\{0\}$, da die Spalten linear unabhängig sind.

Der Spaltenrang von A ist ℓ, also auch der Zeilenrang (Satz M3I). Der Zeilenkern $\{ u \in R^n \mid uA = 0 \} \cong U^\circ$ hat somit Dimension $n - \ell$. Das ist genau die obige Gleichung $\dim_R(U) + \dim_R(U^\circ) = \dim_R(V)$.

☺ Die abstrakte Sichtweise ist elegant und allgemein, dazu ergänzend konkretisiert sie sich in Koordinaten zur vertrauten Matrizenrechnung. Konkret oder abstrakt? Anschaulich oder formal? Ja, gerne beides!

Rechenregeln für den Annullator

Satz W2c: Rechenregeln für den Annullator

Über R sei V ein linearer Raum und $V^* = \mathrm{Hom}_R(V, R)$ sein Dualraum.

(1a) Der Übergang zum Annullator kehrt alle Inklusionen um:

$$\boxed{A \subseteq B \subseteq V \quad \Longrightarrow \quad B^\circ \leq A^\circ \leq V^*}$$

(1b) Für den kleinsten bzw. größten Unterraum gilt dabei

$$\{0\}^\circ = V^* \quad \text{und} \quad V^\circ = \{0\}.$$

(2a) Für Summe $A + B$ und Schnitt $A \cap B$ von $A, B \leq V$ gilt:

$$\boxed{(A+B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ \quad \text{und} \quad (A \cap B)^\circ \supseteq A^\circ + B^\circ}$$

(2b) Allgemein gilt für jede Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Unterräumen $A_i \leq V$:

$$\textstyle(\sum_{i\in I} A_i)^\circ = \bigcap_{i\in I} A_i^\circ \quad \text{und} \quad (\bigcap_{i\in I} A_i)^\circ \supseteq \sum_{i\in I} A_i^\circ$$

Gleichheit gilt hier, falls R ein Divisionsring ist und die Menge I endlich.

Rechenregeln für den Annullator

Beweis: (1a) Sei $A \subseteq B \subseteq V$. Für $\varphi \in B^\circ$ gilt $\varphi(B) = 0$, also $\varphi(A) = 0$, und somit $\varphi \in A^\circ$. Das zeigt $B^\circ \leq A^\circ$. (1b) Die Spezialfälle sind klar.

(2b) Wir zeigen $(\sum_{i\in I} A_i)^\circ = \bigcap_{i\in I} A_i^\circ$.

„$\subseteq$“: Aus $\varphi \in (\sum_{i\in I} A_i)^\circ$ folgt insbesondere $\varphi \in A_i^\circ$ für alle $i \in I$.

„$\supseteq$“: Aus $\varphi \in \bigcap_{i\in I} A_i^\circ$ folgt $\varphi \in A_i^\circ$ für alle $i \in I$, also $\varphi(A_i) = 0$, somit $\varphi(\sum_{i\in I} A_i) = 0$ dank Additivität von φ, und das heißt $\varphi \in (\sum_{i\in I} A_i)^\circ$.

(2b) Wir zeigen $(\bigcap_{i\in I} A_i)^\circ \supseteq \sum_{i\in I} A_i^\circ$.

„$\supseteq$“: Sei $\varphi \in \sum_{i\in I} A_i^\circ$ eine endliche Summe $\varphi = \sum_{i\in I} \varphi_i$ mit $\varphi_i \in A_i^\circ$. Auf $B = \bigcap_{i\in I} A_i$ gilt $\varphi_i(B) = 0$, also auch $\varphi(B) = 0$, somit $\varphi \in B^\circ$.

„$\subseteq$“: Sei I endlich. Wir betrachten $f : V \to \prod_{i\in I} V/A_i = \bigoplus_{i\in I} V/A_i$. Der Kern ist $\bigcap_{i\in I} A_i$. Wir nutzen nun $(\mathrm{Ker}\, f)^\circ = \mathrm{Im}(f^*)$, siehe W3K. QED

Beispiel: Sei $V = R^{(I)}$ und $A_i = \{v \in V \mid v_i = 0\}$, also $V = A_i \oplus \langle e_i \rangle_R^!$. Dann gilt $B := \bigcap_{i\in I} A_i = \{v \in V \mid \forall i \in I : v_i = 0\} = \{0\}$, also $B^\circ = V^*$. Hingegen gilt $A_i^\circ = \langle e_i^* \rangle_R^!$ (W2B), also $C := \sum_{i\in I} A_i^\circ = \langle e_i \mid i \in I \rangle_R^!$. Gleichheit $B^\circ = C$ gilt hier nur, falls die Menge I endlich ist! (W1I)

Rechenregeln für den Annullator

Satz W2c: Rechenregeln für den Annullator

(3a) Für direkte Summen gilt:

$$\boxed{V = A \oplus B \quad \Longrightarrow \quad V^* = B^\circ \oplus A^\circ}$$

(3b) Für allgemeine direkte Summen gilt:

$$V = \textstyle\bigoplus_{i\in I} V_i \quad \Longrightarrow \quad V^* = \prod_{i\in I} V_i^*$$

mit $V_i^* \cong (\sum_{j\neq i} V_j)^\circ$. Ist I zudem endlich, so folgt:

$$V = \textstyle\bigoplus_{i\in I} V_i \quad \overset{I \text{ endlich}}{\Longrightarrow} \quad V^* = \bigoplus_{i\in I} V_i^*$$

(4) Für jeden Unterraum $A \leq V$ gilt

$$\boxed{(A^\circ)^\circ \supseteq \iota(A).}$$

Gleichheit gilt im Falle $V = A \oplus B$ und $A = \langle v_1, \dots, v_k \rangle_R^!$.

Rechenregeln für den Annullator

Beweis: (3b) Sei $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$. Jede Linearform $\varphi : V \to R$ entspricht einer Familie $(\varphi_i)_{i\in I}$ von Linearformen $\varphi : V_i \to R$, und umgekehrt.

Für die Projektion $p_i : V \twoheadrightarrow V_i$ gilt $\mathrm{Ker}\, p_i = \sum_{j\neq i} V_j$. Dies induziert $V/\mathrm{Ker}\, p_i \cong V_i$. Dank W2B folgern wir daraus $V_i^* \cong (\sum_{j\neq i} V_j)^\circ$.

Ist die Indexmenge I endlich, so haben wir $\prod_{i\in I} V_i^* = \bigoplus_{i\in I} V_i^*$. Diesen besonders sympathischen Fall heben wir in (3a) hervor.

(4) Die Inklusion $(A^\circ)^\circ \supseteq \iota(A)$ gilt immer und ist offensichtlich: Für alle $v \in A$ und $\varphi \in A^\circ$ gilt nach Definition $\iota(v)(\varphi) = \varphi(v) = 0$.

Angenommen, es gilt zusätzlich $V = A \oplus B$ und $A = \langle v_1, \dots, v_k \rangle_R^!$. Dank (3) und W2B gilt dann $V^* = B^\circ \oplus A^\circ$ mit $B^\circ = \langle v_1^*, \dots, v_k^* \rangle_R^!$. Ebenso folgt $(V^*)^* = (A^\circ)^\circ \oplus (B^\circ)^\circ$ mit $(A^\circ)^\circ = \langle v_1^{**}, \dots, v_k^{**} \rangle_R^!$. Somit ist $\iota : A \hookrightarrow (A^\circ)^\circ : v_i \mapsto v_i^{**}$ ein Isomorphismus. QED

Beispiel: Zur Illustration betrachten wir $A = V = \langle v_i \mid i \in I \rangle_R^!$. Hier gilt offensichtlich $A^\circ = \{0\} \leq V^*$ und demnach $(A^\circ)^\circ = V^{**}$. Gleichheit $\iota(A) = (A^\circ)^\circ$ gilt nur, falls die Menge I endlich ist! (W1I)

Anwendungsbeispiel der Rechenregeln

Aufgabe: Wir betrachten erneut folgende Vektoren in $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ über $\mathbb{R}$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Diese erzeugen die Unterräume $A = \langle v_1 \rangle^!_{\mathbb{R}}$ und $B = \langle v_2 \rangle^!_{\mathbb{R}}$. Berechnen und vergleichen Sie $(A+B)^\circ$ und $A^\circ \cap B^\circ$ sowie $(A \cap B)^\circ$ und $A^\circ + B^\circ$.

Lösung: Wir haben $A + B = \langle v_1, v_2 \rangle^!_{\mathbb{R}}$ und finden $(A+B)^\circ = \langle u_1 \rangle^!_{\mathbb{R}}$ mit $u_1 = (-2, 5, -1) \in \mathbb{R}^{1\times 3} \cong V^*$ dank Gauß–Algorithmus (W203). Anschaulich ist $A + B$ eine Ebene, und u_1 steht hierzu senkrecht.

Dagegen gilt $A^\circ = \langle u_1, e_2^* \rangle^!_{\mathbb{R}}$, $B^\circ = \langle u_1, e_1^* \rangle^!_{\mathbb{R}}$ und $A^\circ \cap B^\circ = \langle u_1 \rangle^!_{\mathbb{R}}$. Geometrisch ist dies der Schnitt von zwei Ebenen in einer Geraden. Rechnerisch lohnt sich hier bereits die Gleichung $A^\circ \cap B^\circ = (A+B)^\circ$.

Weiter finden wir den Schnitt $A \cap B = \{0\}$, also $(A \cap B)^\circ = V^*$, sowie $A^\circ + B^\circ = \langle e_1^*, e_2^*, u_1 \rangle = V^*$. Das bestätigt $(A \cap B)^\circ = A^\circ + B^\circ$.

Anwendungsbeispiel der Rechenregeln

☺ Die Rechenregeln W2c für den Annullator entsprechen intuitiv anschaulichen Gesetzmäßigkeiten für lineare Gleichungssysteme. Die abstrakte Formulierung fasst konkrete Anwendungen zusammen.

☺ Der Schnitt $V_1 \cap \dots \cap V_k$ von Unterräumen $V_1, \dots, V_k \le V := \mathbb{R}^{n\times 1}$ ist zunächst nicht leicht zu berechnen. Das ändert sich schlagartig, wenn jeder als Kern $V_i = \operatorname{Ker} M_i$ einer Matrix $M_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$ gegeben ist. Dann ist

$$V_1 \cap \dots \cap V_k = \operatorname{Ker} M \quad \text{mit} \quad M = \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Hier betrachten wir $U = \mathbb{R}^{1\times n}$ als Raum der Zeilenvektoren.
Die Zeilen der Matrix M_i spannen hierin den Unterraum $U_i \le U$ auf.
Der Dualraum $U^* \cong \mathbb{R}^{n\times 1}$ ist dann der Raum der Spaltenvektoren.
Darin liegt der Unterraum $V_i = \operatorname{Ker} M_i = \{ v \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid M_i v = 0 \} = U_i^\circ$.

☺ Wir nutzen dankend $V_1 \cap \dots \cap V_k = (U_1 + \dots + U_k)^\circ$: Wir wollen die linke Seite berechnen, die rechte beherrschen wir bestens dank Gauß.

Anwendungsbeispiel zum Annullator

Aufgabe: Sei $R \ge \mathbb{Q}$. Im Raum $V := R^{(\mathbb{N})}$ sei $v_i := ie_i - e_{i-1}$ für alle $i \ge 1$. Bestimmen Sie zur Menge $X = \{ v_i \mid i \ge 1 \}$ den Annullator X° in $V^* \cong R^{\mathbb{N}}$.

Lösung: Wir lösen ein unendliches Gleichungssystem! Für $u \in R^{\mathbb{N}}$ gilt $u \in X^\circ$ gdw $0 = u(v_i) = iu_i - u_{i-1}$ für alle $i \ge 1$. Für $i \ge 1$ gilt rekursiv $u_i = u_{i-1}/i$ und somit $u_i = u_0/i!$, ausgeschrieben: $X^\circ = \langle \exp \rangle^!_R$. (S141)

☺ Wir sehen, spüren und verstehen in diesen Sätzen deutlich, dass unendlich-dimensionale Räume oft nur schwache Werkzeuge zulassen (wie im Beispiel zwar keine Matrizen, dafür manchmal Rekursion o.ä.). Dennoch scheint mir das allgemeine Vorgehen und der so geschärfte Kontrast von endlicher vs unendlicher Dimension überaus lehrreich:

1. Wir lernen die Besonderheiten wahrzunehmen und wertzuschätzen, hier die Existenz endlicher Basen und ihrer guten Eigenschaften. Wir verstehen das Besondere besser im allgemeinen Kontext.
2. Der unendlich-dimensionale Fall wird in der Funktionalanalysis mit analytisch-topologischen Methoden „repariert“, soweit möglich. Auch diese Fortführung können wir hier bereits motivieren.

Anwendungsbeispiel zum Annullator

☺ Der Dualraum V^* zu V und der Annullator $X^\circ \le V^*$ zu $X \subseteq V$ verallgemeinern (formalisieren, abstrahieren, verschönern) lineare Gleichungssysteme! Das entspricht der konkreten Matrixdualität! (M3)

Vielleicht sind Sie dennoch unsicher, ob sich der erhöhte Aufwand lohnt, oder fragen sich, ob das alles nicht auch irgendwie einfacher geht.

In diesem Falle können Sie sich gerne selbst überzeugen, dass über einem Körper und in endlicher Dimension die Formulierungen nicht einfacher und die Beweise nicht kürzer werden (eher im Gegenteil, so die Gefahr). Es fallen lediglich lehrreiche Gegen/Beispiele weg, was eher schade ist.

Ich denke, das allgemeine Vorgehen lohnt langfristig und bereits jetzt: Der schöne Spezialfall wird klarer verständlich im allgemeinen Kontext. Das erfordert natürlich erhöhte Konzentration und Präzision. Bitte sehen Sie das nicht als Fluch, sondern als Segen.

Bilinearformen und Dualität

Ist V ein rechtslinearer Raum über R, so ist der Dualraum $U := V^*$ linkslinear (W1B), und wir haben die gegenseitige **Auswertung**

$$\beta : U \times V \to R : (u, v) \mapsto u(v).$$

Dies ist eine Bilinearform (W1B), rechtslinear in V, linkslinear in U:

$$\beta(u, v + v') = \beta(u, v) + \beta(u, v'), \qquad \beta(u, v \cdot \mu) = \beta(u, v)\,\mu,$$
$$\beta(u + u', v) = \beta(u, v) + \beta(u', v), \qquad \beta(\lambda \cdot u, v) = \lambda\,\beta(u, v).$$

für alle Vektoren $v, v' \in V$ und $u, u' \in U$ sowie alle Skalare $\lambda, \mu \in R$.

♦ Definition S1D: Bilinearform aka Paarung

Über R sei U ein linkslinearer Raum und V ein rechtslinearer Raum sowie

$$\beta : U \times V \to R : (u, v) \mapsto \beta(u, v).$$

Dies ist eine **Bilinearform**, falls für alle $u \in U$ und $v \in V$ gilt:

$\beta_1(u) = \beta(u, -) : V \to R : v \mapsto \beta(u, v)$ ist rechtslinear, also $\beta_1(u) \in V^*$,
$\beta_2(v) = \beta(-, v) : U \to R : u \mapsto \beta(u, v)$ ist linkslinear, also $\beta_2(v) \in U^*$.

Bilinearformen und Dualität

Wir erinnern und präzisieren die bewährten Begriffe zu Bilinearformen:

Definition W2D: Bilinearform aka Paarung

Jede Bilinearform β definiert lineare Abbildungen in die Dualräume:

$$\beta_1 : U \to V^* : u \mapsto \beta_1(u) = \beta(u, -) \quad \text{linkslinear,}$$
$$\beta_2 : V \to U^* : v \mapsto \beta_2(v) = \beta(-, v) \quad \text{rechtslinear.}$$

Der **Linkskern** und der **Rechtskern** von β sind die Unterräume

$$\operatorname{Ker} \beta_1 = {}^{\perp}V = \{ u \in U \mid \forall v \in V : \beta(u, v) = 0 \} \leq U,$$
$$\operatorname{Ker} \beta_2 = U^{\perp} = \{ v \in V \mid \forall u \in U : \beta(u, v) = 0 \} \leq V.$$

Wir nennen β **regulär**, wenn β_1 und β_2 injektiv sind.

- $\operatorname{Ker} \beta_1 = \{0\}$: Zu jedem $u \in U \setminus \{0\}$ existiert $v \in V$ mit $\beta(u, v) \neq 0$.
- $\operatorname{Ker} \beta_2 = \{0\}$: Zu jedem $v \in V \setminus \{0\}$ existiert $u \in U$ mit $\beta(u, v) \neq 0$.

Wir nennen β **perfekt**, wenn β_1 und β_2 sogar Isomorphismen sind.
In Worten: Vermittelt durch β ist U dual zu V, und V ist dual zu U.

Nochmal Zeilenraum $R^{1\times n}$ und Spaltenraum $R^{n\times 1}$

Beispiel W2E: Zeilenraum $R^{1\times n}$ und Spaltenraum $R^{n\times 1}$

Über jedem Ring R haben wir die Paarung durch **Matrixmultiplikation**:

$$\boxed{\beta : R^{1\times n} \times R^{n\times 1} \to R : (u, v) \mapsto u \cdot v = \textstyle\sum_{i=1}^{n} u_{1,i} \cdot v_{i,1}}$$

Dies definiert die beiden Isomorphismen W1C zu den Dualräumen:

$$\beta_1 : R^{1\times n} \xrightarrow{\sim} (R^{n\times 1})^* : u \mapsto \beta_1(u) = [\beta(u, -) : v \mapsto u \cdot v]$$
$$\beta_2 : R^{n\times 1} \xrightarrow{\sim} (R^{1\times n})^* : v \mapsto \beta_2(v) = [\beta(-, v) : u \mapsto u \cdot v]$$

☺ Dies präzisiert den Isomorphismus, den wir seit W1C gerne nutzen. Zudem wird dies nun wunderbar elegant und symmetrisch formuliert dank Schönfinkeln der Bilinearform $\beta(-, -)$ zu $\beta(u, -)$ und zu $\beta(-, v)$.

Zum Raum $V = R^{n\times 1}$ der Spaltenvektoren ist $V^* = \operatorname{Hom}_R(V, R)$ nicht *gleich* dem Raum $R^{1\times n}$ der Zeilenvektoren, doch immerhin kanonisch isomorph: Die obige Paarung β stiftet den ersehnten Isomorphismus.

Nochmal Zeilenraum $R^{1\times n}$ und Spaltenraum $R^{n\times 1}$

☹ Können wir nicht zur Vereinfachung Zeilenvektoren $u \in U := R^{1\times n}$ und Spaltenvektoren $v \in V := R^{n\times 1}$ als gleich betrachten, kurzum:

$$R^{1\times n} \underset{i}{\overset{?}{=}} R^n \underset{i}{\overset{?}{=}} R^{n\times 1}$$

☹ Nun ja, das geht, aber nur willkürlich und mit brutaler Gewalt.

☺ Besser: Sei (R, σ) ein involutiver Ring (D1G), etwa kommutativ (R, id_R) oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$ oder $R = \mathbb{K}^{r\times r}$ mit $\sigma : A \mapsto A^{\dagger}$. Dann haben wir die Adjunktion $({}^{\dagger}, {}^{\dagger}) : R^{1\times n} \cong R^{n\times 1}$, also die vertraute Transposition-Konjugation, als semilinearen Isomorphismus (W1J).

☺ Wir betrachten den Spaltenraum $V = R^{n\times 1}$ als rechtslinear über R. Hierzu ist der Dualraum $V^* = \operatorname{Hom}_R(V, R) \cong R^{1\times n}$ dann linkslinear. Ebenso betrachten wir den Zeilenraum $U = R^{1\times n}$ als linkslinear über R. Hierzu ist der Dualraum $U^* = \operatorname{Hom}_R(U, R) \cong R^{n\times 1}$ dann rechtslinear.

☺ Dies wird nun elegant zusammengefasst durch die perfekte Paarung $\beta : U \times V \to R$. Gleichberechtigt gilt nun $\beta_1 : U \xrightarrow{\sim} V^*$ und $\beta_2 : V \xrightarrow{\sim} U^*$.

Beispiel W2F: der Koordinatenraum $R^{(I)}$ und sein Dualraum R^I

Über jedem Ring R haben wir die Paarung durch **Auswertung**:

$$\beta : R^I \times R^{(I)} \to R : (u,v) \mapsto \beta(u,v) = \textstyle\sum_{i\in I} u_i v_i$$

(1) Diese Bilinearform ist regulär: β_2 ist injektiv, β_1 sogar bijektiv. (W1I)
(2) Ist die Menge I endlich, so ist auch β_2 bijektiv, also β perfekt. (W1I)
(3) Umgekehrt: Ist R ein Divisionsring und β perfekt, so ist I endlich.

Aufgabe: Rechnen Sie dies sorgsam nach! Die Aussagen (1) und (2) folgen aus unseren vorigen Überlegungen, allein (3) ist noch etwas trickreich.

? Gilt die schöne Äquivalenz „β perfekt gdw I endlich“ nicht allgemein, über jedem beliebigen Ring? O nein, es gibt verrückte Gegenbeispiele:

♦ Satz M1Z: Specker 1950

Über $\mathbb{Z}$ ist die Paarung $\beta : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{Z} : (u,v) \mapsto \sum_{i\in I} u_i v_i$ perfekt, induziert also $\beta_1 : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}, \mathbb{Z})$ und $\beta_2 : \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$.

Beweis: Wir nutzen die Definition und unsere vorigen Überlegungen:

(1a) Sei $u \in U \smallsetminus \{0\}$. Es gilt $u_i \neq 0$ für ein $i \in I$, also $\beta(u, e_i) = u_i \neq 0$.
(1b) Sei $v \in V \smallsetminus \{0\}$. Es gilt $v_i \neq 0$ für ein $i \in I$, also $\beta(e_i, v) = v_i \neq 0$.

(2a) Die Abbildung $\beta_1 : R^I \to (R^{(I)})^*$ ist ein Isomorphismus (W1I).
(2b) Ist I endlich, so ist auch β_2 ein Isomorphismus (W1I, W1H).

(3) Wir nehmen Satz W1H zum Vorbild und adaptieren den Beweis.
Unser Koordinatenraum $V := R^{(I)}$ hat die Standardbasis $(e_i)_{i\in I}$.

Fortan sei R ein Divisionsring. Dann hat auch $U := R^I$ eine Basis, genauer können wir $(e_i)_{i\in I}$ ergänzen zu einer Basis $(e_i)_{i\in J}$ mit $J \supseteq I$.

Wir definieren $\psi : U \to R$ durch $\psi(\sum_{i\in J} \lambda_i e_i) = \sum_{i\in J} \lambda_i$. Die Summe ist wohldefiniert, da endlich getragen. Zudem ist ψ linkslinear, also $\psi \in U^*$.

Angenommen, $\beta_2 : V \to U^*$ ist surjektiv. Dann existiert zu ψ ein $v \in V$, also $v = \sum_{i\in I} v_i \mu_i$ mit $\mu \in R^{(I)}$, sodass $\psi = \beta_2(v) = \beta(\text{-}, v)$. Für alle $j \in I$ folgt $1 \overset{\text{Def}}{=} \psi(e_j) \overset{\text{Vor}}{=} \beta(e_j, v) \overset{\text{lin}}{=} \sum_{i\in I} \beta(e_j, e_i)\mu_i \overset{\text{dual}}{=} \mu_j$, also ist I endlich. $\boxed{\text{QED}}$

Der lineare Raum $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ über $\mathbb{Z}$ ist frei dank der Standardbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
Der Raum $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ ist hierzu dual, gemäß W1I, und viel größer. Ist er frei?
Der folgende Satz von Reinhold Baer ist überaus erstaunlich:

♦ Satz M1Z: Baer 1937

Der Folgenraum $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ über $\mathbb{Z}$ ist nicht frei, erlaubt also keine Basis.

Das alleine ist schon bemerkenswert und lehrreich.

Es kommt noch verrückter: Die Paarung $\beta : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{Z}$ ist perfekt… wider intuitive Erwartung! Der Isomorphismus β_1 gilt allgemein (W1I), doch der Isomorphismus $\beta_2 : \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$ ist völlig unerwartet! Wir erwarten für $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$ einen noch größeren Raum als $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, doch erhalten nur den viel kleineren Raum $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} < \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.

Der Beweis ist elementar, aber erwartungsgemäß recht trickreich.
Wenn Sie mal Zeit dazu haben, gerne staunen und dazulernen, genießen Sie ihn; alle Argumente liegen in Ihrer Reichweite.

Mathematische Abstraktion ist etwas Gutes, Sie sollen sie nicht fürchten, sondern schätzen und nutzen lernen. Im Idealfall bedeutet sie nicht Anwendungsferne, sondern im Gegenteil vielseitige Anwendbarkeit. (Ich muss dies betonen, weil allzu oft das Gegenteil behauptet wird.)

Lernen Sie also beides zu schätzen und zu nutzen: Theorie und Praxis. Naheliegende Fragen führen genau betrachtet zu tiefsinnigen Antworten. Auch scheinbar simple Grundlagen können immer wieder überraschen: Wenn wir nur genauer hinsehen, entdecken wir viel Schönes.

Dieses Kapitel beginnt mit dem grundlegenden Begriff der Linearform, illustriert ihn mit ersten einfachen Beispielen für den Alltagsgebrauch, auch mit ernsthaften Sätzen und raffiniert-anspruchsvollen Beweisen. Die Abstraktion ist hier leicht, schwierig sind die konkreten Beispiele!

Das Angebot an Beispielen ist reich, hier wählen und dosieren Sie selbst. Studierenden mute ich damit viel Eigenständigkeit zu, und sie lohnt sich! Bei einem ersten Durchgang folgen Sie dem blauen Faden. Für weitere Durchgänge habe ich die tieferliegenden Beispiele eingewoben.

Perfekte Bilinearformen

☺ Perfekte Paarungen existieren nur in endlicher Dimension:

Satz W2G: Perfektion, Injektion und Dimension

Sei R ein Divisionsring und hierüber $\beta : U \times V \to R$ eine Bilinearform.

(1) Ist β regulär, so sind folgende Aussagen äquivalent:
(a) β ist perfekt. (b) $\dim_R(U) < \infty$. (c) $\dim_R(V) < \infty$.

Beweis: „(c) ⇒ (b,a)“: Sei $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung sind die Homomorphismen $\beta_1 : U \to V^*$ und $\beta_2 : V \to U^*$ injektiv. Daraus folgt:

$$\dim U \overset{\text{M2Y}}{\leq} \dim V^* \underset{\text{(c)}}{\overset{\text{W1H}}{=}} \dim V \overset{\text{M2Y}}{\leq} \dim U^* \underset{\text{(b)}}{\overset{\text{W1H}}{=}} \dim U$$

Demnach haben alle vier Räume U, U^*, V, V^* dieselbe Dimension n. Somit sind β_1 und β_2 nicht nur injektiv, sondern sogar bijektiv (M2Y).

Ebenso beweist man „(b) ⇒ (c,a)“. (Übung zur Wiederholung!)
Die Umkehrung „(a) ⇒ (b,c)“ erhalten wir aus der folgenden Verschärfung,
die ich zwecks Klarheit und angemessener Betonung separat formuliere.
Wir müssen besonders sorgsam arbeiten und werden reichlich belohnt!

Perfekte Bilinearformen

Satz W2G: Perfektion, Surjektion und Dimension

(2) Sind $\beta_1 : U \to V^*$ und $\beta_2 : V \to U^*$ surjektiv, so folgt:
(a) $\dim_R(U) < \infty$, (b) $\dim_R(V) < \infty$, (c) β ist perfekt.

Beweis: (a) Sei $(u_i)_{i\in I}$ eine Basis von U (M2K). Wir nutzen $\beta_2 : V \twoheadrightarrow U^*$:
Zu jedem $j \in I$ existiert $v_j \in V$ mit $\beta(\text{-}, v_j) = u_j^*$, also $\beta(u_i, v_j) = \delta_{i,j}$.
Wir nutzen $\beta_1 : U \twoheadrightarrow V^*$: Die Bildfamilie $(v_i^* = \beta(u_i, \text{-}))_{i\in I}$ erzeugt V^*.
Es gilt Dualität $v_i^*(v_j) \overset{\text{Def}}{=} \beta(u_i, v_j) \overset{\text{Def}}{=} \delta_{i,j}$, also lineare Unabhängigkeit.
Dank PLF N1F existiert $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(v_j) = 1$ für alle $j \in I$. Dazu existiert $\lambda \in R^{(I)}$ mit $\varphi = \sum_{i\in I} \lambda_i v_i^*$. Hierbei gilt $1 \overset{\text{Def}}{=} \varphi(v_j) \overset{\text{Vor}}{=} \sum_{i\in I} \lambda_i v_i^*(v_j) \overset{\text{dual}}{=} \lambda_j$ für alle $j \in I$. Also ist die Menge I endlich, das heißt $\dim U < \infty$.

(b) Ebenso zeigt man $\dim V < \infty$. (Übung: Vergleiche mit Satz W1H!)

(c) Daraus schließen wir die Gleichheit aller vier Dimensionen:

$$\dim U \overset{\text{M2Y}}{\geq} \dim V^* \underset{\text{(b)}}{\overset{\text{W1H}}{=}} \dim V \overset{\text{M2Y}}{\geq} \dim U^* \underset{\text{(a)}}{\overset{\text{W1H}}{=}} \dim U$$

Somit sind β_1 und β_2 nicht nur surjektiv, sondern bijektiv (M2Y). QED

Perfekte Bilinearformen

Das ist ein recht elegantes und bemerkenswertes Ergebnis
über allen Divisionsringen, insbesondere über allen Körpern:
Perfekte Paarungen existieren nur in endlicher Dimension!

Der Beweis ist ebenso elegant und sehr scharfsinnig.
Bitte gehen Sie alle Argumente noch einmal sorgsam durch,
anschließend versuchen Sie es zur Kontrolle selbst ohne Vorlage.
Sie werden sehen, es ist eine wunderbare Übung zur Wiederholung.

Hier spielen alle Grundbegriffe erneut harmonisch zusammen:
lineare Räume und lineare Abbildungen, lineare Unabhängigkeit,
Erzeugendensysteme, Basen, Basisauswahl und -Ergänzung, etc.
Es ist daher schön, dies im Rückblick aufzugreifen und zu vertiefen.

Umgekehrt kann man Satz W2G als allzu einschränkend empfinden.
Die Funktionalanalysis bricht aus dem Käfig endlicher Dimension aus
und verfeinert den Begriff des Dualraums analytisch-topologisch.
Dadurch entstehen wichtige neue perfekte Paarungen in unendlicher
Dimension und diese erweisen sich als erfreulich starke Werkzeuge.

Perfekte Bilinearformen

Über jedem Körper oder Divisionsring R gilt zusammenfassend:

Perfekte Paarungen existieren nur in endlicher Dimension,
und in endlicher Dimension sind sie leicht zu erkennen.

Wiederholung: Beweisen Sie dazu die folgenden Umformulierungen.

Korollar W2H: Kriterien für die Perfektion einer Paarung

Sei R ein Divisionsring und darüber $\beta : U \times V \to R$ eine Bilinearform endlich-dimensionaler Vektorräume U und V. Dann sind äquivalent:

1. Die Bilinearform β ist perfekt.
2. Die Bilinearform β ist regulär aka nicht-ausgeartet.
3. $\dim U = \dim V$ und β ist linksregulär, also $\beta_1 : U \to V^*$ injektiv.
4. $\dim U = \dim V$ und β ist rechtsregulär, also $\beta_2 : V \to U^*$ injektiv.
5. Zu jeder Basiswahl von U und V ist die Gram–Matrix invertierbar.
6. Zu einer Basiswahl von U und V ist die Gram–Matrix invertierbar.

Vive l'involution!

Wir erinnern uns:

♦ Definition D1G: involutiver Ring, kurz *Ring

Sei $(R, +, 0, \cdot, 1)$ ein Ring. Eine **Involution** $\sigma : R \to R : a \mapsto a^\sigma = \overline{a}$ erfüllt $(a^\sigma)^\sigma = a$ sowie $(a+b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma$ und $(a \cdot b)^\sigma = b^\sigma \cdot a^\sigma$ für alle $a, b \in R$, somit $0^\sigma = 0$ und $1^\sigma = 1$. Das Paar (R, σ) heißt dann **involutiver Ring**.

Beispiele: (0) Jeder kommutative Ring $\mathbb{K}$ ist involutiv mit $\sigma = \mathrm{id}_\mathbb{K}$.
(1) Auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist die Konjugation $\mathrm{conj}_\mathbb{K} : a \mapsto \overline{a}$ eine Involution.
(2) Ist $(\mathbb{K}, \sigma)$ ein involutiver Ring, so auch $(R = \mathbb{K}^{n\times n}, {}^\dagger)$ mit $A^\dagger = (A^\sigma)^\top$, der Matrixring mit Adjunktion, aka Transkonjugation $(a_{ij})_{ij} \mapsto (a_{ij}^\sigma)_{ji}$.

♦ Bemerkung S1C: Konjugation von rechts nach links und umgekehrt

Wir können jeden R–rechtslinearen Raum $(U, +, \bullet)$ zu einem R–linkslinearen Raum $(U, +, \circ)$ konjugieren durch $\lambda \circ u := u \bullet \overline{\lambda}$.
Wir schreiben diese Räume $(U, +, \bullet)$ und $(U, +, \circ)$ kurz U und $\overline{U}$.
Ebenso umgekehrt von links nach rechts, dabei gilt involutiv $\overline{\overline{U}} = U$.

Vive l'involution!

☺ Ringinvolution ist uns von Matrizen vertraut und sehr oft nützlich, ganz wesentlich ist sie etwa bei Skalarprodukten über $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

Aufgabe: Was ist zu der Bemerkung noch zu zeigen? Beweisen Sie es! Wiederholen Sie die Definition L1A eines (links/rechts)linearen Raumes.

Beweis: Wir rechnen die Behauptung nach für $u, v \in U$ und $\lambda, \mu \in R$:

$$\begin{array}{lllll}
\text{(L1)} & 1 \circ u & \overset{\text{Def}}{=} u \bullet \overline{1} & \overset{\text{Inv}}{=} u \bullet 1 & \overset{\text{(R1)}}{=} u \\
\text{(L2)} & (\lambda \cdot \mu) \circ u & \overset{\text{Def}}{=} u \bullet (\overline{\lambda \cdot \mu}) & \overset{\text{Inv}}{=} u \bullet (\overline{\mu} \cdot \overline{\lambda}) & \overset{\text{(R2)}}{=} (u \bullet \overline{\mu}) \bullet \overline{\lambda} \\
 & & & & \overset{\text{Def}}{=} \lambda \circ (\mu \circ u) \\
\text{(L3)} & (\lambda + \mu) \circ u & \overset{\text{Def}}{=} u \bullet (\overline{\lambda + \mu}) & \overset{\text{Inv}}{=} u \bullet (\overline{\lambda} + \overline{\mu}) & \overset{\text{(R3)}}{=} u \bullet \overline{\lambda} + u \bullet \overline{\mu} \\
 & & & & \overset{\text{Def}}{=} \lambda \circ u + \mu \circ u \\
\text{(L4)} & \lambda \circ (u + v) & \overset{\text{Def}}{=} (u + v) \bullet (\overline{\lambda}) & \overset{\text{(R4)}}{=} u \bullet \overline{\lambda} + v \bullet \overline{\lambda} & \overset{\text{Def}}{=} \lambda \circ u + \lambda \circ v
\end{array}$$

Beispiel: Für jeden kommutativen Ring (R, id_R) nutzen wir $\overline{\lambda} = \lambda$ und wälzen so die Skalare von rechts nach links und umgekehrt.

Vive l'involution!

Bemerkung: Genau dann ist $\beta : U \times V \to R$ **sesquilinear**,

$$\begin{aligned}
\beta(u, v + v') &= \beta(u, v) + \beta(u, v'), & \beta(u, v \bullet \mu) &= \beta(u, v) \cdot \mu, \\
\beta(u + u', v) &= \beta(u, v) + \beta(u', v), & \beta(u \bullet \lambda, v) &= \overline{\lambda} \cdot \beta(u, v),
\end{aligned}$$

wenn die Abbildung $\beta : \overline{U} \times V \to R$ **bilinear** ist,

$$\begin{aligned}
\beta(u, v + v') &= \beta(u, v) + \beta(u, v'), & \beta(u, v \bullet \mu) &= \beta(u, v) \cdot \mu, \\
\beta(u + u', v) &= \beta(u, v) + \beta(u', v), & \beta(\lambda \circ u, v) &= \lambda \bullet \beta(u, v).
\end{aligned}$$

Erinnerung: Gilt speziell $U = V$ und $\beta(u, v) = \overline{\beta(v, u)}$ für alle $u, v \in V$, so nennen wir β **hermitesch** oder **konjugiert-symmetrisch**. (S1H)

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \times & V \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[rr, "\beta:(u,v)\mapsto\beta(u,v)"] & & R \arrow[d, "\lambda\mapsto\overline{\lambda}"] \\
V & \times & V \arrow[rr, "\beta:(v,u)\mapsto\beta(v,u)"] & & R
\end{tikzcd}$$

Vive l'involution!

Die Konjugation auf dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen mussten wir in das Skalarprodukt einführen, um positive Definitheit zu erreichen. Das wirkte anfangs etwas lästig und erschien als notdürftige Reparatur. Hier nun sehen wir, wie sich alles elegant und natürlich zusammenfügt.

Wie versprochen zahlt sich unsere Links-Rechts-Disziplin sofort aus, und das sogar für kommutative Ringe wie hier für den Körper $\mathbb{C}$! Die gute Notation denkt für uns mit, sie verhindert Rechenfehler, sie macht den Weg frei und nimmt uns einen Teil der Arbeit ab.

Aufgabe: Ist $\beta : U \times V \to R$ eine Bilinearform, so auch $\beta^\dagger : \overline{V} \times \overline{U} \to R$ mit $\beta^\dagger(v, u) = \overline{\beta(u, v)}$. Genau dann ist β hermitesch, wenn $\beta^\dagger = \beta$ gilt.

Lösung: Additivität ist klar. Für $u \in U$ und $v \in V$ sowie $\lambda, \mu \in R$ gilt:

$$\begin{aligned}
\beta^\dagger(\lambda \circ v, u \circ \mu) &\overset{\text{Def}}{=} \beta^\dagger(v \bullet \overline{\lambda}, \overline{\mu} \bullet u) \overset{\text{Def}}{=} \overline{\beta(\overline{\mu} \bullet u, v \bullet \overline{\lambda})} \\
&\overset{\text{Bil}}{=} \overline{\overline{\mu} \cdot \beta(u, v) \cdot \overline{\lambda}} \overset{\text{Inv}}{=} \overline{\overline{\lambda}} \cdot \overline{\beta(u, v)} \cdot \overline{\overline{\mu}} \overset{\text{Inv}}{=} \lambda \cdot \beta^\dagger(v, u) \cdot \mu
\end{aligned}$$

Das Standardskalarprodukt ist eine perfekte Paarung.

Beispiel W2I: das Standardskalarprodukt als perfekte Paarung

(1) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist $V = \mathbb{K}^n = \mathbb{K}^{n\times 1}$ ein rechtslinearer Raum mit

$$\langle\text{-}|\text{-}\rangle : V \times V \to \mathbb{K} : (u,v) \mapsto \langle u \,|\, v\rangle = u^\dagger v = \textstyle\sum_{i=1}^n \overline{u_i} \cdot v_i.$$

Das Skalarprodukt ist eine positiv-definite hermitesche Sesquilinearform.
Somit ist die Abbildung $\beta : \overline{V} \times V \to \mathbb{K} : (u,v) \mapsto \langle u \,|\, v\rangle$ bilinear:

$$\begin{aligned}\beta(\lambda \circ u, v) &\overset{\text{Def}}{=} \beta(u \bullet \overline{\lambda}, v) \overset{\text{Def}}{=} \textstyle\sum_{i=1}^n \overline{(u_i \cdot \overline{\lambda})} \cdot v_i \overset{\text{Inv}}{=} \textstyle\sum_{i=1}^n (\lambda \cdot \overline{u_i}) \cdot v_i \\ &\overset{\text{Ass}}{=} \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda \cdot (\overline{u_i} \cdot v_i) \overset{\text{Dst}}{=} \lambda \cdot \textstyle\sum_{i=1}^n \overline{u_i} \cdot v_i \overset{\text{Def}}{=} \lambda \cdot \beta(u,v)\end{aligned}$$

Diese induziert lineare Abbildungen in die Dualräume:

$$\begin{aligned}\beta_1 &: \overline{V} \xrightarrow{\sim} V^* : u \mapsto \beta_1(u) = \langle u \,|\, \text{-}\rangle, \qquad \overline{\mathbb{K}^{n\times 1}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{1\times n} : u \mapsto u^\dagger, \\ \beta_2 &: V \xrightarrow{\sim} \overline{V}^* : v \mapsto \beta_2(v) = \langle \text{-} \,|\, v\rangle, \qquad \mathbb{K}^{n\times 1} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{K}^{1\times n}} : v \mapsto v^\dagger.\end{aligned}$$

Diese sind injektiv dank positiver Definitheit des Skalarprodukts, daher bijektiv dank Satz W2G. Somit ist β eine perfekte Paarung.

Das Standardskalarprodukt ist eine perfekte Paarung.

Wie üblich betrachten wir $V = \mathbb{K}^{n\times 1}$ als Raum der Spaltenvektoren und dual hierzu $V^* \cong \mathbb{K}^{1\times n}$ als Raum der Zeilenvektoren (W1C).

Zudem haben wir das obige Skalarprodukt $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$ bzw. die Bilinearform $\beta : \overline{V} \times V \to \mathbb{K}$. Die zugehörigen Isomorphismen haben dann die Form

$$\begin{aligned}\beta_1 &: \overline{\mathbb{K}^{n\times 1}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{1\times n} : u \mapsto u^\dagger = \overline{u}^\top, \\ \beta_2 &: \mathbb{K}^{n\times 1} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{K}^{1\times n}} : v \mapsto v^\dagger = \overline{v}^\top.\end{aligned}$$

☺ Diese sind statt *semilinear* nun *linear* dank Umwälzen der Skalare:
Nach Konstruktion gilt $\lambda \circ u = u \bullet \overline{\lambda} \mapsto \lambda \bullet u^\dagger$ und $\lambda \bullet v \mapsto v^\dagger \bullet \overline{\lambda} = \lambda \circ v^\dagger$.

☺ Die beiden Isomorphismen $\beta_1 : \overline{V} \xrightarrow{\sim} V^*$ und $\beta_2 : V \xrightarrow{\sim} \overline{V}^*$ entsprechen hier der vertrauten Adjunktion, also Transposition-Konjugation.

Bemerkung: In Diracs Bra-Ket-Notation wird aus dem Ket-Vektor $|v\rangle \in V$ der Bra-Kovektor $\langle v| = |v\rangle^\dagger \in V^*$. Umgekehrt wird entsprechend aus dem Bra-Kovektor $\langle u| \in V^*$ der Ket-Vektor $|u\rangle = \langle u|^\dagger \in V$. Dies sind semilineare Isomorphismen, denn Skalare werden dabei konjugiert.

Allgemeines Skalarprodukt als reguläre Paarung

Beispiel W2I: Skalarprodukt als reguläre Paarung

(2) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein rechtslinearer Raum mit Skalarprodukt

$$\langle\text{-}|\text{-}\rangle : V \times V \to \mathbb{K} : (u,v) \mapsto \langle u \,|\, v\rangle.$$

Wir betrachten dies als bilineare Abbildung

$$\beta : \overline{V} \times V \to \mathbb{K} : (u,v) \mapsto \langle u \,|\, v\rangle.$$

Diese induziert lineare Abbildungen in die Dualräume:

$$\begin{aligned}\beta_1 &: \overline{V} \to V^* : u \mapsto \beta_1(u) = \langle u \,|\, \text{-}\rangle \\ \beta_2 &: V \to \overline{V}^* : v \mapsto \beta_2(v) = \langle \text{-} \,|\, v\rangle\end{aligned}$$

Beide sind injektiv, also β regulär, dank positiver Definitheit:

$$\forall v \in V \setminus \{0\} : \langle v \,|\, v\rangle > 0$$

Genau dann ist β perfekt, wenn V endlich-dimensional ist. (W2G)

Allgemeines Skalarprodukt als reguläre Paarung

In Teil (2) dieses Beispiels betrachten wir ein beliebiges Skalarprodukt, gemäß Definition S2A, auf einem Vektorraum V über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.
Dank positiver Definitheit ist dies weiterhin eine reguläre Bilinearform, doch perfekt ist sie nur in endlicher Dimension, genau wie in Teil (1).

Wie angekündigt verallgemeinert die duale Paarung $V^* \times V \to R$ über R die altbewährten Skalarprodukte $\langle\text{-}|\text{-}\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.
Mit diesem abschließenden Beispiel sehen Sie, wie sich die vertrauten Begriffe zu Skalarprodukten in diesen allgemeineren Kontext einbetten.

Bemerkung: In W1J haben wir zu jeder Basis $\mathcal{B}$ von V den antilinearen Isomorphismus $(\Psi_\mathcal{B}, \Psi^*_\mathcal{B}) : V \cong V^*$ konstruiert. Dieser ist jedoch nicht kanonisch, denn er hängt ab von der willkürlich gewählten Basis $\mathcal{B}$.
Im Gegensatz hierzu ist der Isomorphismus $\beta_1 : \overline{V} \xrightarrow{\sim} V^*$ kanonisch, sobald der Raum V mit einem Skalarprodukt β ausgestattet ist.

Übung: Es gilt $\beta_1 = \Psi_\mathcal{B}$ für jede Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V.
Die Konstruktion aus W1J war also nicht vergebens.

Darstellungssatz von Riesz

Wiederholung: Was bedeutet die Bijektivität von β_1 und β_2 konkret? Formulieren Sie dies so präzise und zugleich so dramatisch wie möglich.

Satz W2J: Darstellungssatz von Riesz für perfekte Paarung

Sei $\beta : U \times V \to R$ eine perfekte Paarung über R. Dann gilt:

(1) Jede beliebige Linearform $\varphi : V \to R$ ist konkret gegeben durch $\varphi = \beta(u, \text{-})$ für genau einen darstellenden Vektor $u \in U$.

(2) Jede beliebige Linearform $\psi : U \to R$ ist konkret gegeben durch $\psi = \beta(\text{-}, v)$ für genau einen darstellenden Vektor $v \in V$.

Beispiel: Über $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und Konjugation $\sigma = \mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$ ist das Standardskalarprodukt $\langle \text{-} | \text{-} \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ mit $\langle u \,|\, v \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i$ eine perfekte Paarung. Somit ist jede Linearform $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ von der Form $\varphi = \langle u \,|\, \text{-} \rangle$ für genau einen darstellenden Vektor $u \in \mathbb{K}^n$.

Wiederholung: Führen Sie dies explizit aus. Wie berechnen Sie u? Das führt uns zu folgendem schönen Ergebnis....

Darstellungssatz von Riesz

Satz W2J: Darstellungssatz von Riesz für endliche ONB

Sei $(V, \langle \text{-} | \text{-} \rangle)$ ein hermitescher Raum über $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Jede Linearform $\varphi : V \to \mathbb{K}$ lässt sich dann durch genau einen Vektor $u \in V$ darstellen als $\varphi = \langle u \,|\, - \rangle$. Für alle $v \in V$ gilt also:

$$\boxed{\varphi(v) = \langle u \,|\, v \rangle}$$

Dieser Vektor ist explizit gegeben durch $u = e_1 \overline{\varphi(e_1)} + \dots + e_n \overline{\varphi(e_n)}$.

Beweis: *Eindeutigkeit:* Ist $u = \sum_{i=1}^n e_i \mu_i$ mit $\mu \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung, so gilt:

$$\mu_j \overset{\text{ONB}}{=} \langle e_j \,|\, u \rangle \overset{\text{S2}}{=} \overline{\langle u \,|\, e_j \rangle} \overset{\text{Vor}}{=} \overline{\varphi(e_j)}$$

Existenz: Wir setzen $u := \sum_{j=1}^n e_j \overline{\varphi(e_j)}$. Für $v = \sum_{j=1}^n e_j \lambda_j \in V$ gilt dann:

$$\langle u \,|\, v \rangle \overset{\text{Lin}}{=} \sum_i \sum_j \varphi(e_i) \langle e_i \,|\, e_j \rangle \lambda_j \overset{\text{ONB}}{=} \sum_i \varphi(e_i) \lambda_i \overset{\text{Lin}}{=} \varphi\left(\sum_i e_i \lambda_i\right) \overset{\text{Def}}{=} \varphi(v)$$

Die angegebene Formel liefert also die eindeutige Lösung. $\boxed{\text{QED}}$

Vektoren dualisieren?

Wiederholung: Sei V ein rechtslinearer Raum über dem *Ring (R, σ).
(0) Wie dualisieren Sie eine Basis $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ von V?
(1) Können Sie einen Vektor $v \in V$ dualisieren zu $v^* \in V^*$?
(2) Gelingt dies für (V, β) mit Bilinearform β auf dem Raum V?

Lösung: (0) Dank Satz W1H existiert zur Basis $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ von V genau eine duale Familie $\mathcal{B}^* = (v_i^*)_{i \in I}$ in V^*. Diese ist charakterisiert durch die definierende Eigenschaft $v_i^*(v_j) = \delta_{i,j}$ für alle $i, j \in I$. Existenz und Eindeutigkeit folgen aus dem Prinzip der linearen Fortsetzung (PLF N1B).

Vektoren dualisieren?

(1) Nein, die Linearform „v^*“ hat keinen wohldefinierten Sinn. Wir haben keine natürliche Abbildung $V \to V^*$. Warum sprechen wir dennoch von v_i^* wie in (0)? Beachten Sie die Tücke der Notation: Die Konstruktion der Linearform $v_i^* : V \to R : v_j \mapsto \delta_{i,j}$ in $\mathcal{B}^*$ hängt nicht nur vom einzelnen Vektor v_i ab, sondern von der *gesamten* Basis $\mathcal{B} = (v_j)_{j \in I}$, siehe W119.

(2) Mit der Bilinearform $\beta : \overline{V} \times V \to R$ als zusätzlicher Struktur gelingt es, zudem erfreulich leicht: Wir haben nun $\beta_1 : \overline{V} \to V^* : v \mapsto v^* := \beta(v, \text{-})$. Diese Konstruktion hängt von β ab, aber dies ist nun Teil der Daten.

Skalarprodukt vs duale Paarung

Skalarprodukt über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$	Dualität über jedem Ring $\mathbb{K}$
linearer Raum V über $\mathbb{K}$	Dualraum $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$
Skalarprodukt $\langle\text{-}\,\vert\,\text{-}\rangle$: $V \times V \to \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u \,\vert\, v \rangle$	duale Paarung $\langle\text{-}\,\vert\,\text{-}\rangle_V$: $V^* \times V \to \mathbb{K} : (u, v) \mapsto u(v)$
orthonormale Familie $(v_i)_{i\in I}$ mit $\langle v_i \,\vert\, v_j \rangle = \delta_{i,j}$ für alle i, j	duale Familien $(v_i)_{i\in I}$ und $(v_i^*)_{i\in I}$ mit $v_i^*(v_j) = \delta_{i,j}$ für alle i, j
Koordinatenraum $\mathbb{K}^n$, $\langle u \,\vert\, v \rangle = u^\dagger v = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i$	$V \cong \mathbb{K}^{n\times 1}$ und $V^* \cong \mathbb{K}^{1\times n}$, $V^* \times V \to \mathbb{K} : (u, v) \mapsto u \cdot v$
Standardbasis $(e_i)_{i=1}^n$	Standardbasen $(e_i)_{i=1}^n$ und $(e_i^*)_{i=1}^n$
Orthogonalraum zu $X \subseteq V$, $X^\perp = \{ u \in V \,\vert\, \forall v \in X : \langle u \,\vert\, v \rangle = 0 \}$	Annullator von $X \subseteq V$, $X^\circ = \{ u \in V^* \,\vert\, \forall v \in X : u(v) = 0 \}$
Adjungierte $f^\dagger : V \to U$ zu $f : U \to V$ gemäß $\langle v \,\vert\, f(u) \rangle_V = \langle f^\dagger(v) \,\vert\, u \rangle_U$	duale Abbildung $f^* : V^* \to U^*$ zu $f : U \to V$ gemäß $\langle \varphi \,\vert\, f(u) \rangle_V = \langle f^*(\varphi) \,\vert\, u \rangle_U$

Skalarprodukt vs duale Paarung

Die duale Paarung $V^* \times V \to R : \langle u \,\vert\, v \rangle = u(v)$ über jedem Ring R verallgemeinert Skalarprodukte.

☺ Erstaunlicherweise gelingt uns dies über *jedem* beliebigen Ring R. Um Trivialitäten zu vermeiden, fordern wir lediglich $0 \neq 1$, also $R \supsetneq \{0\}$.

Die Allgemeinheit fordert anfangs etwas Mut, gelingt dann aber leicht. Im Gegenteil ist die strukturelle Einfachheit selbst besonders lehrreich. Der Rückblick erklärt zudem manche Besonderheit von Skalarprodukten, im allgemeinen Rahmen verstehen wir auch das Besondere besser.

Die obige Tabelle führt die Entsprechung der Begriffe genauer aus. Alles fügt sich sehr erfreulich, elegant und effizient zusammen.

Wir erklären nun das letzte fehlende Puzzlestück: duale Abbildungen. Auch diese erfordern weiterhin erhöhte Konzentration und Präzision. Sie mobilisieren und wiederholen damit viele schöne Methoden.

Motivation: die Adjunktionsformel

Sei R ein Ring. Hierüber sei V ein rechtslinearer Raum. Der Dualraum V^* ist linkslinear (W1B). Beide sind verknüpft durch die **duale Paarung**:

$$V^* \times V \to R : (\varphi, v) \mapsto \langle \varphi \,\vert\, v \rangle_V = \varphi(v)$$

Dieselbe Situation finden wir für jeden weiteren R–linearen Raum U:

$$U^* \times U \to R : (\psi, u) \mapsto \langle \psi \,\vert\, u \rangle_U = \psi(u)$$

Zu jeder linearen Abbildung $f : U \to V$ wünschen wir uns eine duale Abbildung $f^* : V^* \to U^*$, sodass die vertraute **Adjunktionsformel** gilt:

$$\langle \varphi \,\vert\, f(u) \rangle_V = \langle f^*(\varphi) \,\vert\, u \rangle_U$$

für alle $\varphi \in V^*$ und $u \in U$. Dies gelingt auf genau eine Weise:

$$\boxed{f \mapsto f^*, \quad f^*(\varphi) := \varphi \circ f}$$

Die Linearform φ auf V wird so zurückgezogen zu $\varphi \circ f$ auf U. Die hier gefundene Formel erheben wir nun zur Definition.

Motivation: die Adjunktionsformel

☺ Die duale Abbildung $f^* : V^* \to U^*$ zu $f : U \to V$ ist zunächst leicht zu *definieren*: Wir setzen $f^*(\varphi) := \varphi \circ f$. Was könnte einfacher sein?

⚠ Diese Abbildung zu *verstehen* ist jedoch wesentlich schwieriger. Wir erstellen im Folgenden Rechenregeln, Beispiele und Anwendungen.

In der Geschichte der Mathematik zeigt sich uns ein großer Reichtum in der Entstehung verschiedenartiger Strukturen, die sich entfalten, durchdringen und vereinen. Die besonders einfachen und grundlegenden Strukturen treten dabei oft erst zum Schluss hervor.

So ist es auch mit der linearen Algebra. Mit einem Alter von vielleicht hundert Jahren ist sie noch jung, und ihr Gegenstand ist eine besonders einfache Struktur, die Bestandteil vieler anderer und sehr viel komplexerer Strukturen in anderen Gebieten ist.

Das Studium dieser Struktur steht daher heute mit Recht am Anfang des Studiums der Mathematik überhaupt.

Egbert Brieskorn (1936–2013),
Lineare Algebra und Analytische Geometrie (1983)

Der duale Homomorphismus $f^* : V^* \to U^*$ zu $f : U \to V$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f^*(\varphi)=\varphi\circ f"'] & V \arrow[d, "\varphi"] \\ & R \end{tikzcd}$$

Definition W3A: die duale Abbildung

(0) Jede lineare Abbildung $f : U \to V$ induziert ihre **duale Abbildung**

$$\boxed{f^* : V^* \to U^* : \varphi \mapsto \varphi \circ f.}$$

(1) Ist f rechtslinear, so ist f^* linkslinear. Wir erhalten

$$\boxed{{}^* : \mathrm{Hom}_R(U,V) \to \mathrm{Hom}_R(V^*,U^*) : f \mapsto f^*.}$$

(2) Die Dualisierung * ist ein Homomorphismus der additiven Gruppen.
(3) Ist der Ring R kommutativ, so ist die Dualisierung * sogar R–linear.
(4) Ist (R,σ) involutiv, so ist die Dualisierung * immerhin semilinear.

Der duale Homomorphismus $f^* : V^* \to U^*$ zu $f : U \to V$

Beweis: (0) Sind $f : U \to V$ und $\varphi : V \to R$ rechtslinear, so auch $\varphi \circ f$. (L1J)
Das zeigt $f^*(\varphi) \in U^*$, also ist $f^* : V^* \to U^* : \varphi \mapsto \varphi \circ f$ wohldefiniert.
Wir sagen: Die Linearform φ auf V wird zurückgezogen zu $\varphi \circ f$ auf U.
(1) Für alle Linearformen $\varphi, \psi \in V^*$ und Skalare $\lambda, \mu \in R$ gilt:

$$f^*(\lambda\varphi + \mu\psi) \overset{\text{Def}}{=} (\lambda\varphi + \mu\psi) \circ f \overset{\text{DR}}{=} \lambda(\varphi \circ f) + \mu(\psi \circ f) \overset{\text{Def}}{=} \lambda f^*(\varphi) + \mu f^*(\psi)$$

Somit ist die Abbildung $f^* : V^* \to U^* : \varphi \mapsto \varphi \circ f$ tatsächlich linear.
(2) Die Zuordnung $^* : \mathrm{Hom}_R(U,V) \to \mathrm{Hom}_R(V^*,U^*) : f \mapsto f^*$ ist additiv:

$$(f+g)^*(\varphi) \overset{\text{Def}}{=} \varphi \circ (f+g) \overset{\text{DL}}{=} (\varphi \circ f) + (\varphi \circ g) \overset{\text{Def}}{=} f^*(\varphi) + g^*(\varphi)$$

für alle $\varphi \in V^*$. Dank Extensionalität gilt Additivität $(f+g)^* = f^* + g^*$.
(4) Wir zeigen $(f\lambda)^* = \lambda^\sigma f^*$. Für $\varphi \in V^*$ und $u \in U$ gilt:

$$\begin{aligned} (f\lambda)^*(\varphi)(u) &\overset{\text{Def}}{=} (\varphi \circ (f\lambda))(u) \overset{\text{Def}}{=} \varphi((f\lambda)(u)) \overset{\text{Def}}{=} \varphi(f(u)\lambda) \\ &\overset{\text{Lin}}{=} \varphi(f(u))\lambda \overset{\text{Def}}{=} f^*(\varphi)(u)\lambda \overset{\text{Def}}{=} (\lambda^\sigma f^*(\varphi))(u) \end{aligned}$$

Die Dualisierung $f \mapsto f^*$ ist demnach semilinear über (R,σ). $\boxed{\text{QED}}$

Komposition von Homomorphismen

☺ Merkregel: Die Dualisierung kehrt alle Pfeile und Kompositionen um:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "k = g\circ f"'] & V \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U^* & V^* \arrow[l, "f^*"'] & W^* \arrow[l, "g^*"'] \arrow[ll, bend left, "k^* = f^*\circ g^*"] \end{tikzcd}$$

Satz W3B: Dualisierung ist ein kontravarianter Funktor.
(1) Dual zur Identität $\mathrm{id}_V : V \to V$ ist $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_{V^*} : V^* \to V^*$.
(2) Dual zur Komposition $k = g \circ f$ ist $k^* = f^* \circ g^*$.

Beweis: (1) Für $\mathrm{id}_V : V \to V$ und alle $\varphi \in V^*$ gilt:

$$\mathrm{id}_V^*(\varphi) \overset{\text{Def}}{=} \varphi \circ \mathrm{id}_V \overset{\text{Id}}{=} \varphi \overset{\text{Def}}{=} \mathrm{id}_{V^*}(\varphi)$$

(2) Für $f : U \to V$ und $g : V \to W$ und alle $\varphi \in W^*$ gilt:

$$(g \circ f)^*(\varphi) \overset{\text{Def}}{=} \varphi \circ (g \circ f) \overset{\text{Ass}}{=} (\varphi \circ g) \circ f \overset{\text{Def}}{=} f^*(g^*(\varphi)) \overset{\text{Def}}{=} (f^* \circ g^*)(\varphi)$$

Dank Extensionalität gilt $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_{V^*}$ und $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. $\boxed{\text{QED}}$

Komposition von Homomorphismen

In Worten: Die Linearform φ auf W wird zurückgezogen zu $\varphi \circ g$ auf V und weiter zu $\varphi \circ g \circ f$ auf U. Ergänzend als kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_V^*(\varphi)=\varphi\circ\mathrm{id}_V"'] & V \arrow[d, "\varphi"] \\ & R \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "f^*(g^*(\varphi))=\varphi\circ g\circ f"'] & V \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g^*(\varphi)=\varphi\circ g"] & W \arrow[d, "\varphi"] \\ & & R \end{tikzcd}$$

Zusammengefasst: Jedem linearen Raum V ordnen wir seinen dualen Raum $V^* = \mathrm{Hom}_R(V,R)$ zu und jeder linearen Abbildung $f : U \to V$ ihre duale Abbildung $f^* : V^* \to U^* : \varphi \mapsto \varphi \circ f$. Die Zuordnung $f \mapsto f^*$ ist additiv, über (R,σ) sogar semilinear, respektiert Identitäten gemäß $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_{V^*}$ und kehrt Kompositionen um gemäß $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

☺ Diese Rechenregeln sind zwar sehr einfach, aber umso öfter nützlich.
Vornehm gesagt: Die Dualisierung ist ein **kontravarianter Funktor**.

Dualer Homomorphismus in Matrixdarstellung

Gegeben seien über R Basen $(u_1, \dots, u_n)$ von U und $(v_1, \dots, v_m)$ von V sowie dual $(u_1^*, \dots, u_n^*)$ von U^* und $(v_1^*, \dots, v_m^*)$ von V^* dank Satz W1H.

Jede rechtslineare Abbildung $f : U \to V$ stellen wir dar durch ihre Matrix $A \in R^{m\times n}$ mit $f(u_j) = \sum_{i=1}^m v_i a_{ij}$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Die linkslineare Abbildung $f^* : V^* \to U^*$ stellen wir dar durch ihre Matrix $B \in R^{m\times n}$ mit $f^*(v_i^*) = \sum_{j=1}^n b_{ij} u_j^*$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$.

Aufgabe: Wie berechnen Sie aus der Matrix A die Matrix B?

Lösung: *Calculemus!* Für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\langle v_i^* \mid f(u_j)\rangle_V \overset{\text{Vor}}{=} v_i^*\big(\textstyle\sum_{k=1}^m v_k a_{kj}\big) \overset{\text{Lin}}{=} \textstyle\sum_{k=1}^m v_i^*(v_k) a_{kj} \overset{\text{dual}}{=} a_{ij}$$
$$\langle f^*(v_i^*) \mid u_j\rangle_U \overset{\text{Vor}}{=} \big(\textstyle\sum_{k=1}^n b_{ik} u_k^*\big)(u_j) \overset{\text{Lin}}{=} \textstyle\sum_{k=1}^n b_{ik} u_k^*(u_j) \overset{\text{dual}}{=} b_{ij}$$

☺ Die (linkslinear!) darstellende Matrix von f^* ist demnach $B = A$.

Alternative: Über jedem *Ring (R, σ) können wir auch $f^* : V^* \to U^*$ rechtslinear betrachten, nun mit $f^*(v_i^*) = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j^* = \sum_{j=1}^n u_j^* a_{ij}^\sigma$.

⚠ Die (rechtslinear!) darstellende Matrix von f^* ist dann $A^\dagger = \overline{A}^\intercal$.

Dualer Homomorphismus in Matrixdarstellung

Satz W3C: dualer Homomorphismus in Matrixdarstellung

Seien U und V rechtslineare Räume über R mit endlichen Basen $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$ und $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_m)$. Dann haben wir:

$$\begin{tikzcd}
R^{n\times 1} \arrow[r, "A", "x\mapsto y = Ax"'] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{A}}"', "\cong"] & R^{m\times 1} \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"', "\cong"] \\
U \arrow[r, "f", "u\mapsto v = f(u)"'] & V
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R^{1\times n} \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{A}^*}"', "\cong"] & R^{1\times m} \arrow[l, "A", "y^*A = x^* \leftarrow\!\shortmid y^*"'] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}^*}"', "\cong"] \\
U^* & V^* \arrow[l, "f^*", "f^*(v^*) = u^* \leftarrow\!\shortmid v^*"']
\end{tikzcd}$$

(1) Jede lineare Abbildung $f : U \to V$ und ihr Dual $f^* : V^* \to U^*$ werden durch dieselbe Matrix A dargestellt: Im ersten Falle wirkt A von links auf Spaltenvektoren, im zweiten Falle von rechts auf Zeilenvektoren.

(2) Über jedem DRing gilt $\operatorname{rang}(f) \overset{\text{Def}}{=} \operatorname{sr}(A) \overset{\text{M3I}}{=} \operatorname{zr}(A) \overset{\text{Def}}{=} \operatorname{rang}(f^*)$ dank M3I.

☺ Das ist die natürliche Darstellung mit Zeilen- und Spaltenvektoren. Falls gewünscht können wir, über jedem *Ring (R, σ), Zeilenvektoren zu Spaltenvektoren transponieren. Dann wird f^* durch $A^\dagger$ dargestellt.

Matrixdualität

Aufgabe: Zu $A \in R^{m\times n}$ sei $f_A : U = R^{n\times 1} \to V = R^{m\times 1} : u \mapsto Au$. Beschreiben Sie das Dual $f_A^* : V^* \to U^*$ ebenfalls durch eine Matrix.

Lösung: Wir identifizieren jeden Zeilenvektor $v^* \in R^{1\times m} \cong V^*$ mit der Linearform $[v^*] : V \to R : v \mapsto v^* \cdot v$, ebenso $R^{1\times n} \cong U^*$. Damit gilt $f_A^*([v^*]) \overset{\text{Def}}{=} [v^*] \circ f_A \overset{\text{Vor}}{=} [v^* A] : U \to R : u \mapsto Au \mapsto v^*(Au) = (v^* A)u$.

Satz W3D: Matrixdarstellung und Dualität

(1) Für $U = R^{n\times 1}$ und $V = R^{m\times 1}$ sowie $U^* \cong R^{1\times n}$ und $V^* \cong R^{1\times m}$ gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} f_A &: R^{n\times 1} \to R^{m\times 1} : u \mapsto A \cdot u \quad \Longrightarrow \\ f_A^* &: R^{1\times m} \to R^{1\times n} : v^* \mapsto v^* \cdot A \end{aligned}}$$

(2) Ist R ein Divisionsring, so können wir die Dimensionen betrachten. In endlicher Dimension können wir f und f^* wie oben durch eine Matrix $A \in R^{m\times n}$ darstellen. Spaltenrang und Zeilenrang sind dann gleich (M3I):

$$\boxed{\operatorname{rang}(f) \overset{\text{Def}}{=} \operatorname{sr}(A) \overset{\text{M3I}}{=} \operatorname{zr}(A) \overset{\text{Def}}{=} \operatorname{rang}(f^*)}$$

Matrixdualität

Beispiel / Übung: Über $\mathbb{R}$ sei $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^9$ linear mit $\dim \operatorname{Ker}(f) = 2$. Wie folgt daraus $\dim \operatorname{Ker}(f^*) = 5$? Welche Sätze nutzen Sie dazu?

Alternative: Über jedem *Ring (R, σ) können wir auch U^* und V^* als Spaltenvektoren darzustellen und $f^* : V^* \to U^*$ rechtslinear betrachten:

$$f : R^n \to R^m : u \mapsto A \cdot u \quad \Longrightarrow \quad f^* : R^m \to R^n : (v^*)^\dagger \mapsto A^\dagger \cdot (v^*)^\dagger$$

Die duale Abbildung f^* wird in dieser Schreibweise durch die adjungierte Matrix $A^\dagger = \overline{A}^\intercal$ dargestellt. Das ist möglich, wenn auch etwas künstlich.

☺ Das nutzt man gerne über jedem kommutativen Ring (R, id_R), insbesondere über jedem Körper. Hier genügt Transposition.

☺ Für $(\mathbb{K}, \mathrm{conj}_{\mathbb{K}})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ nutzen wir die Konjugation $\mathrm{conj}_{\mathbb{K}}$. Die zu f duale Abbildung f^* wird in dieser Schreibweise durch die transponiert-konjugierte Matrix dargestellt. Auch das ist oft nützlich.

☺ Die natürliche und allgemeine Schreibweise zeigt unser Satz W3D: Transformation von Zeilen- zu Spaltenvektoren wird dabei vermieden. Sie ist möglich, manchmal nützlich, aber auch immer etwas künstlich.

Matrixdualität

Aufgabe: Wir betrachten die folgenden Sequenzen über $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z}^{2\times 1} \xrightarrow[f]{\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}} \mathbb{Z}^{3\times 1} \xrightarrow[g]{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}} \mathbb{Z}^{3\times 1}, \qquad 0 \xrightarrow[h]{[0]} \mathbb{Z} \xrightarrow[k]{[2]} \mathbb{Z}$$

(1) Sind diese Sequenzen exakt, gilt hier also „Bild = Kern“?
(2) Wie sehen die dualen Sequenzen aus? Sind diese exakt?

Lösung: (1) Wir vergleichen Bild und Kern:
(a) Es gilt $\operatorname{Im}(f) = \langle e_2, e_3 \rangle_{\mathbb{Z}}^{!} = \operatorname{Ker}(g)$, also exakt.
(b) Hier gilt $\operatorname{Im}(h) = \{0\} = \operatorname{Ker}(k)$, also ebenfalls exakt.

(2) Die dualen Sequenzen können wir wie folgt darstellen:

$$\mathbb{Z}^{1\times 2} \xleftarrow[f^*]{\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}} \mathbb{Z}^{1\times 3} \xleftarrow[g^*]{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}} \mathbb{Z}^{1\times 3}, \qquad 0 \xleftarrow[h^*]{[0]} \mathbb{Z} \xleftarrow[k^*]{[2]} \mathbb{Z}$$

(a) Links gilt $\operatorname{Im}(g^*) = \langle e_1^* \rangle_{\mathbb{Z}}^{!} = \operatorname{Ker}(f^*)$, also exakt.
(b) Rechts gilt $\operatorname{Im}(k^*) = 2\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z} = \operatorname{Ker}(h^*)$, also *nicht* exakt!

Matrixdualität

Konkrete Beispiele wie diese zeigen eindrücklich: Nach Klärung der Grundbegriffe erhalten wir ganz handfeste Objekte und Rechnungen. Insbesondere mit Matrizen können wir weiterhin wunderbar rechnen!

☺ Wie im obigen Satz stellen wir die rechtslinearen Räume durch Spaltenvektoren dar und dual hierzu die linkslinearen Räume durch Zeilenvektoren. Wir „kippen“ also die Vektoren, dafür bleiben die Matrizen unverändert. Das vermeidet Fehler und ist narrensicher.

Die Matrizen wirken allerdings verschieden: Im ersten Falle von links auf Spaltenvektoren, nach dem Dualisieren von rechts auf Zeilenvektoren!

☺ Wer möchte kann alles transponieren und so die Matrizen weiterhin von links wirken lassen; das war bisher unsere übliche Konvention. Über jedem kommutativen Ring so wie hier $(\mathbb{Z}, \mathrm{id}_{\mathbb{Z}})$ ist dies erlaubt.

⚠ Über dem Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist die Dualisierung nicht exakt: Aus manchen exakten Sequenzen macht sie nicht-exakte Sequenzen. Diesem Problem wollen wir nun auf den Grund gehen.

Matrixdualität

Bemerkung: In Diracs Bra-Ket-Notation wird die lineare Abbildung A als Operator zwischen dem Bra-Kovektor $\langle u|$ und dem Ket-Vektor $|v\rangle$ geschrieben, wie der Sandwichbelag zwischen den beiden Brothälften:

$$\boxed{\langle u \,|\, A \,|\, v \rangle}$$

Die geschickte Notation entspricht sowohl der rechtslinearen Abbildung

$$f : V \to V : |v\rangle \mapsto A\,|v\rangle$$

auf den Ket-Vektoren als auch der dualen linkslinearen Abbildung

$$f^* : V^* \to V^* : \langle u| \mapsto \langle u|\,A$$

auf den Bra-Kovektoren. Diese Schreibweise ist genial einfach!

📖 P.A.M. Dirac: *A new notation for quantum mechanics.* Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 35 (1939) 416–418.

Die Bra-Ket-Notation ist inzwischen in der Quantentheorie fest etabliert. Ihr Nutzen entfaltet sich jüngst und besonders in der Quanteninformatik.

Matrixdualität

☺ Die gute Notation denkt für uns mit. Daher habe ich in Satz W3D die natürliche Schreibweise mit Zeilen- und Spaltenvektoren betont. Wir *können* zu Spaltenvektoren transponieren (und ggf. konjugieren), aber wir *müssen* es nicht, und meist *wollen* wir dies auch nicht.

Aufgabe: Formulieren Sie Riesz' Darstellung W2J in Diracs Schreibweise.

Lösung: Sei $(V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$ ein hermitescher Raum über $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit endlicher Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Mit $|e_i\rangle = e_i$ und $\langle e_i| = e_i^*$ gilt dann:

$$\boxed{\mathrm{id}_V = \textstyle\sum_{i=1}^n |e_i\rangle\langle e_i|}$$

Wie ist die Gleichung zu verstehen? Die rechte Seite $f : V \to V$ ist linear und erfüllt $f(e_j) = \sum_{i=1}^n |e_i\rangle\langle e_i \,|\, e_j\rangle = e_j$ für $j = 1, \dots, n$, also $f = \mathrm{id}_V$.

$$\boxed{\mathrm{id}_{V^*} = \textstyle\sum_{i=1}^n |e_i\rangle\langle e_i|}$$

Selbe Matrix, neue Interpretation: Die rechte Seite $g : V^* \to V^*$ wirkt von rechts, somit $g(e_j^*) = \sum_{i=1}^n \langle e_j \,|\, e_i\rangle\langle e_i| = e_j^*$ für $j = 1, \dots, n$, also $g = \mathrm{id}_{V^*}$.

Satz W3E: Dualität und Bi/Sur/Injektivität

Seien $f : U \to V$ und $g : V \to U$ linear über dem Ring R.

(1) Ist $(f, g) : U \rightleftarrows V$ ein Retraktionspaar, so auch $(g^*, f^*) : U^* \rightleftarrows V^*$.
(2) Ist $(f, g) : U \cong V$ ein Isomorphismus, so auch $(g^*, f^*) : U^* \cong V^*$.

(3) Ist $f : U \to V$ bijektiv, so ist $f^* : V^* \to U^*$ bijektiv.
(4) Ist $f : U \to V$ surjektiv, so ist $f^* : V^* \to U^*$ injektiv.

Für die folgende Aussage sei R ein Divisionsring:
(5) Ist $f : U \to V$ injektiv, so ist $f^* : V^* \to U^*$ surjektiv.

Beispiel: Über beliebigen Ringen, bereits über $\mathbb{Z}$, ist Aussage (5) falsch: Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}$ ist injektiv, aber $f^* : \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z}$ nicht surjektiv.

Beweis: (1) Aus $g \circ f = \mathrm{id}_U$ folgt $f^* \circ g^* = \mathrm{id}_{U^*}$ dank Funktorialität W3B.

(2) Aus $g \circ f = \mathrm{id}_U$ und $f \circ g = \mathrm{id}_V$ folgt $f^* \circ g^* = \mathrm{id}_{U^*}$ und $g^* \circ f^* = \mathrm{id}_{V^*}$.

(3) Ist $f : U \to V$ linear und bijektiv, so auch $g = f^{-1} : V \to U$ (Satz L1J). Aus $(f, g) : U \cong V$ folgt $(g^*, f^*) : U^* \cong V^*$ dank (2), also ist f^* bijektiv.

(4) Seien $\varphi, \psi \in V^*$. Aus $f^*(\varphi) = f^*(\psi)$ folgt $\varphi \circ f = \psi \circ f$, gekürzt $\varphi = \psi$. Ausführlich (B1G): Zu jedem $v \in V$ existiert ein Urbild $u \in U$ mit $f(u) = v$, somit $\varphi(v) = \varphi(f(u)) = \psi(f(u)) = \psi(v)$, also $\varphi = \psi$ dank Extensionalität.

(5) Sei R ein Divisionsring und hierüber $f : U \to V$ linear und injektiv. Wir wollen zeigen, dass die duale Abbildung $f^* : V^* \to U^*$ surjektiv ist. Hierzu konstruieren wir eine Retraktion $(f, g) : U \rightleftarrows V$ und nutzen (1).

Wir wählen eine Basis $(u_i)_{i \in J}$ von U. (M2K) Dann ist $(v_i := f(u_i))_{i \in J}$ in V linear unabhängig. (M1R) Wir ergänzen zu einer Basis $(v_i)_{i \in J \sqcup K}$ von V.

Dank PLF (N1B) existiert $g : V \to U$ linear mit $v_i \mapsto u_i$ für $i \in J$ ergänzt durch $v_i \mapsto 0$ für $i \in K$. Damit gilt $g \circ f = \mathrm{id}_U$, also $(f, g) : U \rightleftarrows V$. Daraus folgt $f^* \circ g^* = \mathrm{id}_{U^*}$. Somit ist $f^* : V^* \to U^*$ surjektiv. (B1G) QED

Ausführlich: Zu $\psi \in U^*$ konstruieren wir $\varphi : V \to R$ durch $\varphi = \psi \circ g$. Damit gilt $f^*(\varphi) = \psi$, denn $f^*(\varphi) = (\psi \circ g) \circ f = \psi \circ (g \circ f) = \psi \circ \mathrm{id}_V = \psi$. Erinnerung: f^* ist **rrr**echtsinvertierbar, also insbesondere su**rrr**jektiv. Ebenso ist g^* ist **lll**inksinvertierbar, also insbesondere **iii**njektiv.

Die Aussagen (1–5) sind nach aufsteigender Schwierigkeit sortiert. Die Beweise sind eine gute Fingerübung und Wiederholung der Begriffe.

Warum sind die Aussagen (1) und (2) so leicht zu beweisen? Das liegt gerade an der Funktorialität W3B der Dualisierung: Gleichungen wie $g \circ f = \mathrm{id}_U$ werden durch den Funktor * in ebensolche Gleichungen $f^* \circ g^* = \mathrm{id}_{U^*}$ überführt.

Auch die Aussage (3) zu Bijektionen ist leicht zu beweisen, dank (2): Jede bijektive lineare Abbildung $f : U \to V$ ist ein Isomorphismus (L1J), lässt sich also zu einem Isomorphismuspaar $(f, g) : U \cong V$ ergänzen. Das verdanken wir dem erfreulichen Satz L1J, dass die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ selbst wieder linear ist! Anschließend genügt (2).

Auch (4) ist noch leicht, allein für (5) müssen wir ernsthaft arbeiten. Die Aussage ohne weitere Voraussetzungen wäre falsch; schon das deutet bereits darauf hin, dass hier ernsthaft etwas zu beweisen ist: Wir nutzen Basisauswahl und Basisergänzung (M2K).

⚠ Benötigen wir für (5) wirklich einen Divisionsring oder ist dies ein Artefakt eines ungeschickten Beweises? Dies klärt ein Gegenbeispiel:

Beispiel W3F: Dualisieren über dem Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

Über dem Ring $\mathbb{Z}$ betrachten wir den linearen Raum $V = \mathbb{Z}^{n \times 1}$ und

$$f : V \to V : v \mapsto Av \quad \text{mit} \quad A \in \mathbb{Z}^{n \times n}.$$

Dual hierzu haben wir $V^* \cong \mathbb{Z}^{1 \times n}$ und $f^* : V^* \to V^* : u \mapsto uA$.

(1) Genau dann ist f (bzw. f^*) injektiv, wenn $\det A \neq 0$ gilt.
(2) Genau dann ist f^* (bzw. f) surjektiv, wenn $\det A = \pm 1$ gilt.

Die beiden Eigenschaften (1) und (2) klaffen also auseinander!

Das kleinste Gegenbeispiel entsteht für $n = 1$ und $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : v \mapsto 2 \cdot v$. Dieser Homomorphismus ist injektiv, doch der duale Homomorphismus $f^* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : u \mapsto u \cdot 2$ ist nicht surjektiv, denn 1 wird nicht getroffen.

☺ Über jedem Körper schließt sich diese Lücke, wie in W3E bewiesen.

Dualität und Exaktheit

Satz W3G: Dualität und Exaktheit

Wir betrachten eine Sequenz von R–linearen Abbildungen und ihr Dual:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & U \arrow[r, "f"] & V \arrow[r, "g"] & W \arrow[r] & \cdots \\ \cdots & U^* \arrow[l] & V^* \arrow[l, "f^*"'] & W^* \arrow[l, "g^*"'] & \cdots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

(1) Aus $g \circ f = 0$ folgt $f^* \circ g^* = 0$. Also:

$$\boxed{\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(g) \implies \operatorname{Ker}(f^*) \supseteq \operatorname{Im}(g^*)}$$

(2) Spaltet zudem $W = \operatorname{Im}(g) \oplus W'$, so folgt umgekehrt:

$$\boxed{\operatorname{Im}(f) \supseteq \operatorname{Ker}(g) \implies \operatorname{Ker}(f^*) \subseteq \operatorname{Im}(g^*)}$$

(3) Über jedem Divisionsring R ist die Voraussetzung (2) erfüllt (M3O).
Aus Exaktheit $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(g)$ folgt somit Exaktheit $\operatorname{Ker}(f^*) = \operatorname{Im}(g^*)$.

Dualität und Exaktheit

Nochmal die Daten zur Erinnerung:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & U \arrow[r, "f"] & V \arrow[r, "g"] & W \arrow[r] & \cdots \\ \cdots & U^* \arrow[l] & V^* \arrow[l, "f^*"'] & W^* \arrow[l, "g^*"'] & \cdots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Beweis: (1) Gegeben ist $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(g)$. Das bedeutet $g \circ f = 0$.
Dualisieren ergibt $f^* \circ g^* = 0$, und das bedeutet $\operatorname{Ker}(f^*) \supseteq \operatorname{Im}(g^*)$.

(2) Wir setzen nun $W = \operatorname{Im}(g) \oplus W'$ voraus.
Aus $\operatorname{Im}(f) \supseteq \operatorname{Ker}(g)$ folgern wir $\operatorname{Ker}(f^*) \subseteq \operatorname{Im}(g^*)$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, two heads, "g"'] & R \\ \operatorname{Im}(g) \arrow[ur, "\bar\varphi"] \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] & W \arrow[u, "\tilde\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Sei $\varphi \in \operatorname{Ker}(f^*)$, also $\varphi \in V^*$ mit $0 = f^*(\varphi) = \varphi \circ f$.
Daraus folgt $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi)$, also $\operatorname{Ker}(g) \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi)$.

Dank Faktorisierung (Satz L3C) existiert $\bar\varphi : \operatorname{Im}(g) \to R$ mit $\varphi = \bar\varphi \circ g$,
und dank $W = \operatorname{Im}(g) \oplus W'$ die Fortsetzung $\tilde\varphi : W \to R$ mit $\tilde\varphi|_{W'} = 0$.

Somit gilt $g^*(\tilde\varphi) \overset{\text{Def}}{=} \tilde\varphi \circ g \overset{\text{Def}}{=} \bar\varphi \circ g \overset{\text{Def}}{=} \varphi$, also $\varphi \in \operatorname{Im}(g^*)$. $\boxed{\text{QED}}$

Nochmal Dualität und Sur/In/Bijektivität

Beispiel W3H: nochmal Dualität und Sur/In/Bijektivität

Sei $f : U \to V$ linear über R und $f^* : V^* \to U^*$ dual hierzu.

(1) Ist f surjektiv, so ist f^* injektiv:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & V \arrow[r, "0"] & 0 & \text{exakt} \\ U^* & V^* \arrow[l, "f^*"'] & 0 \arrow[l, "0"'] & \text{exakt} \end{tikzcd}$$

(2) Ist f injektiv mit $V = \operatorname{Im}(f) \oplus V'$, so ist f^* surjektiv:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] & U \arrow[r, "f"] & V & \text{exakt} \\ 0 & U^* \arrow[l, "0"'] & V^* \arrow[l, "f^*"'] & \text{exakt} \end{tikzcd}$$

(3) Ist f bijektiv, so auch f^*:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] & U \arrow[r, "f"] & V \arrow[r, "0"] & 0 & \text{exakt} \\ 0 & U^* \arrow[l, "0"'] & V^* \arrow[l, "f^*"'] & 0 \arrow[l, "0"'] & \text{exakt} \end{tikzcd}$$

Nochmal Dualität und Sur/In/Bijektivität

🙂 Die Schreibweise als exakte Sequenz bündelt nützliche Information.
Nun erhalten wir damit nützliche Dualitätsregeln für exakte Sequenzen.
Sur/In/Bijektivität sind wichtige Spezialfälle und werden hier betont.

⚠ In (2) ist die zusätzliche Voraussetzung $V = \operatorname{Im}(f) \oplus V'$ zwar lästig, aber doch wesentlich. Andernfalls finden wir Gegenbeispiele:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0", "h"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "2", "k"'] & \mathbb{Z} & \text{exakt} \\ 0 & \mathbb{Z} \arrow[l, "0", "h^*"'] & \mathbb{Z} \arrow[l, "2", "k^*"'] & \text{nicht exakt} \end{tikzcd}$$

Hier erlaubt das Bild $\operatorname{Im}(k) = 2\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ kein Komplement. Tatsächlich ist die duale Sequenz nicht exakt, denn es gilt $\operatorname{Im}(k^*) = 2\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z} = \operatorname{Ker}(h^*)$.

🙂 Über einem Divisionsring R ist die Voraussetzung (2) immer erfüllt:
Jeder Untervektorraum $U \leq V$ hat ein Komplement U', d.h. $V = U \oplus U'$.
Das verdanken wir dem Basisauswahl-und-Ergänzungssatz, siehe M3O.
Dualisierung überführt also exakte Sequenzen in exakte Sequenzen.

Beispiel: Einschränkung auf $U \leq V$

Beispiel W3I: Einschränkung auf $U \leq V$

(0) Die Inklusion $\iota = \mathrm{inc}_U^V : U \hookrightarrow V : u \mapsto u$ induziert die Einschränkung

$$\iota^* : V^* \to U^* : \varphi \mapsto \varphi \circ \iota = \varphi|_U.$$

(1) Ihr Kern ist der Annullator

$$\mathrm{Ker}(\iota^*) = \{\varphi \in V^* \mid \varphi|_U = 0\} = U^\circ.$$

(2) Wir erhalten so die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow U^\circ \xhookrightarrow{\mathrm{inc}} V^* \xrightarrow{\iota^*} U^*.$$

(3) Gilt zudem $V = U \oplus U'$, so erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow U^\circ \xhookrightarrow{\mathrm{inc}} V^* \xrightarrow{\iota^*} U^* \longrightarrow 0.$$

(4) Über einem Divisionsring gilt Letzteres immer.

Beispiel: Einschränkung auf $U \leq V$

Übung: Rechnen Sie die genannten Beispiele sorgsam nach.
Welche Definitionen und Sätze nutzen Sie dazu?

☺ Die Inklusion $\iota : U \hookrightarrow V$ und die Einschränkung $\iota^* : V^* \to U^*$ sind besonders nützlich, anschaulich und einfach zu verstehen.

Insbesondere finden wir hier erneut den Annullator $\mathrm{Ker}(\iota^*) = U^\circ$. Auch dieser Begriff reiht sich so in unseren Werkzeugkasten ein.

Diesen Zusammenhang nutzen wir im folgenden Korollar und Anwendungsbeispiel zu den Rechenregeln für den Annullator.

☺ Wir sehen daran sehr schön: Es gibt hier zwei Stufen von Beweisen.

Die einen sind „lokal-trivial“: Es genügt, die Definitionen einzusetzen, und an jeder Stelle im Beweis gibt es nur eine sinnvolle Fortsetzung.

Die anderen benötigen wirklich einen Divisionsring, etwa zu Basiswahl, direktem Komplement oder Spaltung. Hier ist tatsächlich etwas zu tun, und dazu gibt es mehrere Möglichkeiten, der Suchraum sinnvoller Argumentationen ist (nicht riesig aber) spürbar größer.

Annullator des Kerns und Bild des Duals

Korollar W3J: Annullator des Kerns und Bild des Duals

Sei R ein Ring und $f : U \to V$ linear mit Spaltung $V = \mathrm{Im}(f) \oplus V'$.

(0) Ist R ein Divisionsring, so ist Letzteres immer erfüllt (Satz M3O).

(1) Dank Satz W3G erhalten wir zwei exakte Sequenzen:

$$\mathrm{Ker}(f) \xhookrightarrow{\iota} U \xrightarrow{f} V \qquad \text{(immer exakt)}$$

$$\mathrm{Ker}(f)^* \xleftarrow{\iota^*} U^* \xleftarrow{f^*} V^* \qquad \text{(dank Spaltung)}$$

(2) Für $\iota^* : \varphi \mapsto \varphi \circ \iota$ gilt $\mathrm{Ker}(\iota^*) \overset{\text{Def}}{=} \mathrm{Ker}(f)^\circ$. Daraus folgt:

$$\boxed{(\mathrm{Ker}\, f)^\circ = \mathrm{Im}(f^*)}$$

☺ Die letzte Gleichung erlaubt eine oft bequeme Umrechnung.
Ohne die Spaltung $V = \mathrm{Im}(f) \oplus W$ gilt immerhin $(\mathrm{Ker}\, f)^\circ \supseteq \mathrm{Im}(f^*)$.

Beispiel: Für $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto 2x$ gilt $(\mathrm{Ker}\, f)^\circ = \mathbb{Z} \supsetneq 2\mathbb{Z} = \mathrm{Im}(f^*)$.

Rechenregeln für den Annullator

☺ Mit unseren so geschärften Werkzeugen vollenden wir Satz W2C:

Beispiel W3K: Rechenregeln für den Annullator

Für jede Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Unterräumen $A_i \leq V$ gilt:

$$\left(\textstyle\sum_{i \in I} A_i\right)^\circ = \bigcap_{i \in I} A_i^\circ \quad \text{und} \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^\circ \supseteq \sum_{i \in I} A_i^\circ$$

Gleichheit gilt hier, falls R ein Divisionsring ist und die Menge I endlich.

Beweis: Nach Satz W2C zeigen wir nur noch die letzte Aussage.
Für den Quotienten $f_i : V \twoheadrightarrow V/A_i$ gilt $\mathrm{Ker}(f_i) \overset{\text{Def}}{=} A_i$, also $\mathrm{Im}(f_i^*) \overset{\text{W3J}}{=} A_i^\circ$.
Da die Indexmenge I endlich ist, können wir dies zusammensetzen zu

$$f : V \to \textstyle\prod_{i \in I} V/A_i = \bigoplus_{i \in I} V/A_i : v \mapsto (f_i(v))_{i \in I}.$$

Demnach gilt $\mathrm{Ker}(f) = \bigcap_{i \in I} A_i$. Dank W3J gilt $(\mathrm{Ker}\, f)^\circ = \mathrm{Im}(f^*)$, wobei

$$f^* : \textstyle\bigoplus_{i \in I} (V/A_i)^* \to V^* : (\varphi_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} f_i^*(\varphi_i).$$

Daraus erhalten wir $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^\circ = (\mathrm{Ker}\, f)^\circ = \mathrm{Im}(f^*) = \sum_{i \in I} A_i^\circ$. $\boxed{\text{QED}}$

Rechenregeln für den Annullator

Über jedem Divisionsring haben wir in Satz W3J gezeigt:

$$\boxed{(\operatorname{Ker} f)^\circ = \operatorname{Im}(f^*)}$$

Vermuten Sie hierzu eine duale Aussage? mit Bild und Kern vertauscht?

Bemerkung W3L: Annullator des Bildes und Kern des Duals

Für jede R–lineare Abbildung $f : U \to V$ gilt:

$$\boxed{(\operatorname{Im} f)^\circ = \operatorname{Ker}(f^*)}$$

Aufgabe: Beweisen Sie dies (und freuen Sie sich, wie leicht es geht).

Beweis: Nach Definition W3A haben wir $f^* : V^* \to U^* : \varphi \mapsto \varphi \circ f$, also

$$\operatorname{Ker}(f^*) \overset{\text{Def}}{=} \{\varphi \in V^* \mid \varphi \circ f = 0\} \overset{\text{Def}}{=} (\operatorname{Im} f)^\circ.$$

Warum gilt die letzte Gleichheit „nach Definition"? Ausführlich gilt:

$$\begin{aligned} \varphi \circ f = 0 &\overset{\text{Def}}{\iff} \forall u \in U : \varphi(f(u)) = 0 \\ &\overset{\text{Def}}{\iff} \forall v \in \operatorname{Im} f : \varphi(v) = 0 \overset{\text{Def}}{\iff} \varphi \in (\operatorname{Im} f)^\circ \end{aligned}$$

Rechenregeln für den Annullator

☺ Im Rückblick und in der sorgsamen Wiederholung sehen Sie:
Die meisten Beweise und Rechnungen zur Dualität sind „lokal-trivial".
Allerdings nicht alle: Manchmal müssen wir etwas ernsthafter arbeiten, etwa wenn wir Basen wählen oder Komplemente konstruieren.

Diese Konstruktionen gelingen glücklicherweise über jedem DRing, aber nicht über jedem Ring, wie hilfreiche Gegenbeispiele belegen.
Wie gut, dass wir Lineare Algebra nicht nur über Körpern betreiben, sondern mit Ringen ein reiches Repertoire an Gegen/Beispielen haben.

Ist das Fluch oder Segen? Manche halten die allgemeinere Sichtweise für einen Fluch. Ich plädiere für Segen: Nur anhand guter Gegen/Beispiele verstehen Sie, dass es wirklich etwas zu beweisen gibt. Das beginnt bei der Existenz von Basen und der Invarianz der Dimension und zieht sich seither wie ein roter Faden durch die gesamte Lineare Algebra.

Ich halte es daher für besser, Sie von Anfang an auf die nötige Vielfalt sanft vorzubereiten. Umso mehr schätzen wir die heile Welt der Körper.

Rechenregeln für den Annullator

Aufgabe: Wie interpretieren Sie $(\operatorname{Im} f)^\circ = \operatorname{Ker}(f^*)$ und $(\operatorname{Ker} f)^\circ \supseteq \operatorname{Im}(f^*)$ im konkret-vertrauten Rahmen der Matrixdualität?

Lösung: Zur Matrix $A \in R^{m\times n}$ betrachten wir die lineare Abbildung $f_A : R^{n\times 1} \to R^{m\times 1} : v \mapsto Av$ und dual $f_A^* : R^{1\times m} \to R^{1\times n} : u \mapsto uA$.

(1) Der Raum $\operatorname{Im} f_A \le R^{m\times 1}$ wird erzeugt von den Spalten der Matrix A. Der Annullator $(\operatorname{Im} f_A)^\circ \le R^{1\times m}$ besteht demnach aus allen Kovektoren $u \in R^{1\times m}$, die alle Spalten der Matrix A annullieren, also $uA = 0$ erfüllen. Das ist genau der Linkskern, also $\operatorname{Ker}(f_A^*)$. Das zeigt $(\operatorname{Im} f_A)^\circ = \operatorname{Ker}(f_A^*)$.

(2) Der Raum $\operatorname{Im}(f_A^*) \le R^{1\times n}$ wird erzeugt von den Zeilen der Matrix A. Der Annullator $(\operatorname{Ker} f)^\circ$ besteht aus den Kovektoren $u \in R^{1\times n}$, die alle Elemente $v \in \operatorname{Ker} f$ annullieren. Dazu gehört auch jede Zeile u von A, denn aus $Av = 0$ folgt insbesondere $uv = 0$. Das zeigt $(\operatorname{Ker} f_A)^\circ \supseteq \operatorname{Im}(f_A^*)$

☺ Das gilt soweit alles über jedem Ring R, hier speziell ausgeführt für Koordinatenräume und Matrizen. Auch das ist lehrreich.

Rechenregeln für den Annullator

☺ Auch für $(\operatorname{Ker} f)^\circ \supsetneq \operatorname{Im}(f^*)$ haben wir Beispiele in Matrixform.

Über dem Ring $R = \mathbb{Z}$ haben wir das Gegenbeispiel $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : v \mapsto 2v$, allgemein $f_A : \mathbb{Z}^{n\times 1} \to \mathbb{Z}^{n\times 1} : v \mapsto Av$ mit $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ und $|\det A| \ge 2$.
Hier ist f injektiv, also $\operatorname{Ker} f_A = \{0\} \le \mathbb{Z}^{n\times 1}$, daher $(\operatorname{Ker} f_A)^\circ = \mathbb{Z}^{1\times n}$.
Jedoch ist $f_A^* : \mathbb{Z}^{1\times n} \to \mathbb{Z}^{1\times n} : u \mapsto uA$ nicht surjektiv, sonst wäre A invertierbar und $\det A = \pm 1$. Das zeigt $(\operatorname{Ker} f)^\circ \supsetneq \operatorname{Im}(f^*)$.

☺ Spezialisierung auf Matrizen liefert konkretes Anschauungsmaterial.
Der Erfolg der Linearen Algebra beruht auf der effizienten Verbindung von allgemeiner Theorie mit Datenstrukturen und Algorithmen.

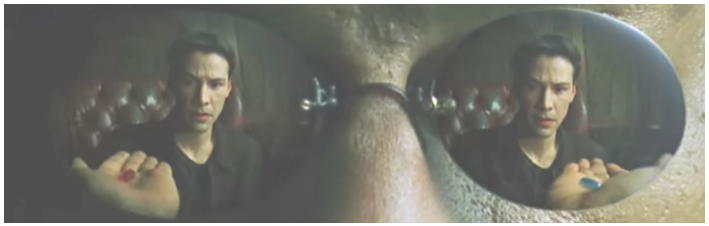
☹ Für die Nachweise der obigen Rechenregeln bieten Matrizen keine Vorteile, im Gegenteil: Sie schränken unnötig ein und die Rechnungen werden nicht kürzer, sondern mit unnötigem „Matrixzucker" überzogen.

☺ Daher arbeiten wir konkret, wo nützlich, und abstrakt, wo möglich.

Kapitel W

Bonusmaterial

A mathematician is a device for turning coffee into theorems.
A comathematician is a device for turning cotheorems into ffee.



Ist Dualität effiziente Denkökonomie oder nur Kokolores?

Inhalt dieses Kapitels W

5 Was heißt hier natürlich?
- Der natürliche Homomorphismus ist natürlich natürlich.
- Von Freiheit und Basen zu projektiver Erzeugung

6 Anwendungen in der Mathematik
- Polynome, Koeffizienten und Auswertungen
- Komplexe Funktionen und Cauchy–Wegintegral

7 Anwendungen in der Physik
- Diracs Bra-Ket-Notation für Ko/Vektoren
- Prozessgrößen in der Thermodynamik

Linearformen, praktisch und didaktisch

Lineare Abbildungen $f : V \to W$ über einem Ring R sind allgegenwärtig und Ihnen inzwischen wohlvertraut, algorithmisch etwa in Darstellung durch Matrizen $A \in R^{n\times m}$. Linearformen $f : V \to R$ sind der einfachste und sympathischste Fall: Hier ist der Zielraum $W = R$ unser Grundring. Sie sind in Anwendungen selbstverständlich ein universelles Werkzeug. Sie sind Standardstoff der Linearen Algebra und in Klausuren beliebt. Anfänger:innen finden dies zunächst schwer, Übung ändert es rasch.

Zusammengefasst: Jedem linearen Raum V ordnen wir seinen dualen Raum $V^* = \mathrm{Hom}_R(V, R)$ zu und jeder linearen Abbildung $f : U \to V$ ihre duale Abbildung $f^* : V^* \to U^* : \varphi \mapsto \varphi \circ f$. Die Zuordnung $f \mapsto f^*$ ist additiv, über (R, σ) sogar semilinear, respektiert Identitäten gemäß $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_{V^*}$ und kehrt Kompositionen um gemäß $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Linearformen sind erfahrungsgemäß ein bewährter Indikator, wie ernsthaft Sie mathematisches Denken bereits geübt haben und wie weit Sie die formale Arbeitsweise verinnerlichen konnten. Dann sind solche Fragen in Prüfungen leicht erarbeitete Punkte.

Linearformen, praktisch und didaktisch

Linearformen sind ebenso grundlegend wie praktisch:

Dualität von linearen Räumen und linearen Abbildungen verallgemeinert die Matrixdualität von Gleichungssystemen und ihre Lösungsräumen.

Bitte nutzen Sie Linearformen und Dualität jetzt als Ansporn. Sie mobilisieren und wiederholen damit viele schöne Methoden der Linearen Algebra (und bereiten sich so auf die Klausur vor). Was sie bisher vernachlässigt haben, sollen Sie nun nachholen!

Leider ist auch die Gegenstrategie weit verbreitet: Augen und Ohren fest verschließen, die Luft anhalten und hoffen, dass alles bald vorbei geht. Genau dazu sind Linearformen und ähnliche Fragen eine gute Diagnose. Jetzt ist Ihre letzte Gelegenheit, gute Gewohnheiten anzunehmen!

Auch beim Studieren und Praktizieren gilt eine Art Dualität: Nutzen Sie Theorie und Anwendung gleichermaßen, wie linke und rechte Hand. Vertrauen Sie, bleiben Sie mutig und neugierig und offen für beides! Sie werden sehen, es macht Freude: erkennen. beweisen. anwenden.

Der natürliche Homomorphismus ist natürlich natürlich.

Satz W5A: Natürlichkeit des natürlichen Homomorphismus

(1) Zu jeder R–linearen Abbildung $f : U \to V$ gilt $\iota_V \circ f = f^{**} \circ \iota_U$.

Übung: Beweisen Sie dies!

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_U"'] \arrow[dr, phantom, "!"] & V \arrow[d, "\iota_V"] \\ U^{**} \arrow[r, "f^{**}"'] & V^{**} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_U"'] \arrow[dr, phantom, "?"] & V \arrow[d, "\psi_V"] \\ U^{*} & V^{*} \arrow[l, "f^{*}"] \end{tikzcd}$$

Dual gelingt es nicht!

Wir betrachten erneut den **natürlichen Homomorphismus** $\iota_V : V \to V^{**}$ von jedem linearen Raum V in sein Bidual V^{**}, mit $\iota_V(v)(\varphi) = \varphi(v)$, kurz:

$$\iota_V : V \to V^{**} : v \mapsto [\varphi \mapsto \varphi(v)]$$

☺ Zunächst einmal bedeutet „natürlich“, ganz naiv anschaulich, dass es eine naheliegende Konstruktion ist (einfach, kanonisch, direkt), und wir dazu keine willkürlichen Wahlen treffen müssen (eine Basis wählen o.ä.) (Pseudopraktisches Geschwurbel ist beliebt: *You know it when you see it.*)

Der Nullabbildung ist natürlich natürlich, sonst nichts.

? Können wir diese vage Idee präzisieren? O ja: „natürlich“ bedeutet, dass ι mit allen hier relevanten Homomorphismen kommutiert, wie in (1). Genau das rechnen Sie in dieser Übung nach. Daher der irre Titel.

Aufgabe: Sei R ein Ring. Zu jedem R–linearen Raum V sei V^* sein Dual. Bestimmen Sie alle natürlichen Homomorphismen $\psi_\bullet = (\psi_V : V \to V^*)_V$.

Satz W5A: Natürlichkeit ist extrem stark.

(2) Die Nullabbildung $0_\bullet = (0_V : V \to V^*)_V$ ist natürlich, denn für jede lineare Abbildung $f : U \to V$ gilt $0_U = f^* \circ 0_V \circ f$. Weitere gibt es nicht!

Beweis: Seien $\psi_\bullet = (\psi_V : V \to V^*)_V$ Homomorphismen und natürlich. Für jede lineare Abbildung $f : U \to V$ bedeutet das $\psi_U = f^* \circ \psi_V \circ f$. Wir setzen $f = \mathbf{0}_V : V \to V$ ein und erhalten $\psi_V = \mathbf{0}_V^* \circ \psi_V \circ \mathbf{0}_V = 0_V$. $\boxed{\text{QED}}$

Wir ignorieren hier den formalen Unterschied, dass U, V rechtslinear und U^*, V^* linkslinear sind. Vereinfachend sei R kommutativ und alle Räume zentral. Das obige Argument gilt für beliebige Abbildungen $\psi_\bullet$.

Die natürliche Abbildung ins Dual… ist null!

☺ Sie sehen hier eine interessante Bewegung in der Mathematik:

Natürlichkeit ist zunächst eine gänzlich informelle Beobachtung, noch ohne präzise Definition, aber eine willkommene Eigenschaft. In Anwendungen tritt sie immer und immer wieder auf, und so langsam formt sich daraus ein Bild, was „natürlich“ bedeuten kann… und soll?

Für jeden Körper R und jeden endlich-dimensionalen K–Vektorraum V ist der natürliche Homomorphismus ein Isomorphismus. (Satz W1L)

Bemerkenswerter Kontrast: Es gibt keinen natürlichen Isomorphismus $\psi_V : V \xrightarrow{\sim} V^*$. Anschaulich-vage ist das klar: Es gibt zwar viele solcher Isomorphismen, doch zur Konstruktion eines konkreten Isomorphismus ψ_V müssen wir eine Basis wählen. Das fühlt sich nicht natürlich an.

Hier spüren wir die Notwendigkeit einer präzisen Definition: Wenn wir zeigen wollen, dass etwas möglich ist, so genügt es, dass wir es tun. Wenn wir zeigen wollen, dass es unmöglich ist, so genügt es nicht, es erfolglos zu versuchen und frustriert aufzugeben. Wir benötigen ein Hindernis!

Die natürliche Abbildung ins Dual… ist null!

? Wie können wir also *beweisen*, handfest und nachvollziehbar, dass kein natürlicher Isomorphismus $\psi_V : V \xrightarrow{\sim} V^*$ existiert?

Intuition ist schön, Erfahrung ist gut, doch beides kann täuschen: Nur weil wir es nicht geschafft haben, bedeutet das noch lange nicht, dass es unmöglich ist. Soviel Ehrlichkeit und Bescheidenheit muss sein.

„Ich kann es nicht, also kann es niemand.“ Das ist Beweis durch Mangel an Phantasie, außerhalb der Mathematik zwar beliebt, aber unzulässig!

Wir nehmen also unseren Mut zusammen, und definieren *Natürlichkeit*. Die obigen Beweise sind dann erfreulich leicht. Alles wird klar:

Satz W5A: Natürlichkeit ist extrem stark.

(3) Nur eine Abbildung $\psi_V : V \to V^*$ ist natürlich zu allen $f \in \mathrm{End}_R(V)$, im Sinne von $\psi_V = f^* \circ \psi_V \circ f$, nämlich die Nullabbildung $\psi_V = 0_V$.

Klarheit der Sprache, Klarheit des Denkens.

Duale Charakterisierung von Freiheit und Basis

Satz W5B: duale Charakterisierung von Freiheit und Basis

Sei R ein Divisionsring, darüber V ein linearer Raum mit Dualraum V^*. Vorgelegt sei eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ in V. Dann gilt:

(1) $(v_i)_{i\in I}$ ist frei. $\iff$ Es existiert mindestens eine duale Familie.
(2) $(v_i)_{i\in I}$ ist erzeugend. $\implies$ Es existiert höchstens eine duale Familie.
(3) $(v_i)_{i\in I}$ ist eine Basis. $\iff$ Es existiert genau eine duale Familie.

Aufgabe: Beweisen Sie die genannten Charakterisierungen und widerlegen Sie zudem die hierbei fehlende Implikation. (Diese reparieren wir unten durch projektive Erzeugung W5D.)

Beweis: (1) „$\Leftarrow$“: Diese Implikation kennen wir bereits aus Satz W1D: Duale Familien bezeugen gegenseitig ihre lineare Unabhängigkeit.

„$\Rightarrow$“: Dank Basisergänzungssatz M2K existiert eine Basis $(v_i)_{i\in J}$ mit $J \supseteq I$. Dank Satz W1H (PLF N1B) existiert (genau) eine duale Familie $(v_i^*)_{i\in J}$. Somit ist die Familie $(\varphi_i = v_i^*)_{i\in I}$ in V^* dual zu $(v_i)_{i\in I}$ in V.

Duale Charakterisierung von Freiheit und Basis

(2) „$\Rightarrow$“: Seien sowohl $(\varphi_i)_{i\in I}$ als auch $(\psi_i)_{i\in I}$ in V^* dual zu $(v_i)_{i\in I}$ in V. Für alle $i, j \in I$ gilt dann $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij} = \psi_i(v_j)$. Dank Vergleichslemma N1A folgt die Gleichheit $\varphi_i = \psi_i$ für alle $i \in I$.

⚠ Die Umkehrung „$\Leftarrow$“ gilt nicht! In $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ betrachten wir die Familie $(v_1 = e_1, v_2 = 2e_1)$. Da diese Vektoren linear abhängig sind, existiert *keine* duale Familie. Die Bedingung „höchstens eine“ ist hier erfüllt, dennoch erzeugt unsere Familie nicht den Raum $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$.

(3) „$\Rightarrow$“: Diese Implikation kennen wir bereits aus Satz W1H: Zu jeder Basis in V existiert genau eine duale Familie in V^*.

„$\Leftarrow$“: Hier gilt die Umkehrung! Wir setzen voraus, dass zu $(v_i)_{i\in I}$ in V *genau eine* duale Familie existiert. Zunächst ist $(v_i)_{i\in I}$ frei, siehe (1). Dank Basisergänzungssatz M2K existiert eine Basis $(v_i)_{i\in J}$ mit $J \supseteq I$. Im Falle $J \supsetneq I$ hätten wir zu $(v_i)_{i\in I}$ mindestens *zwei* duale Familien: einerseits $(\varphi_i)_{i\in I}$ mit $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$ für $j \in I$ und $\varphi_i(v_j) = 0$ für $j \in J \smallsetminus I$, andererseits $(\psi_i)_{i\in I}$ mit $\psi_i(v_j) = \delta_{ij}$ für $j \in I$ und $\psi_i(v_j) = 1$ für $j \in J \smallsetminus I$. Die Eindeutigkeit erzwingt also $J = I$. Somit ist $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis. QED

Der Raum $K^{s\times n}$ ist dual zu $K^{n\times s}$ über $R = K^{s\times s}$.

❓ Müssen wir rechts und links tatsächlich sorgsam unterscheiden? Ja! Zur Illustration ein grundlegendes Beispiel der Matrizenrechnung:

Beispiel W5C: der Raum $V = K^{n\times s}$ über dem Ring $R = K^{s\times s}$

Sei K ein Ring und $R = K^{s\times s}$ der Matrixring, wobei $s \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Über R ist $U = K^{s\times n}$ linkslinear, $V = K^{n\times s}$ rechtslinear, und Matrixmultiplikation

$$\boxed{\beta : K^{s\times n} \times K^{n\times s} \to K^{s\times s} : (u, v) \mapsto u \cdot v}$$

ist eine perfekte Paarung (W2D), das heißt wir haben die Isomorphismen

$$\beta_1 : K^{s\times n} \xrightarrow{\sim} (K^{n\times s})^* : u \mapsto \beta_1(u) = [\,\beta(u, -) : v \mapsto u \cdot v\,],$$
$$\beta_2 : K^{n\times s} \xrightarrow{\sim} (K^{s\times n})^* : v \mapsto \beta_2(v) = [\,\beta(-, v) : u \mapsto u \cdot v\,].$$

☺ Im Spezialfall $s = 1$ finden wir erneut unser Paradebeispiel W2E. Für $s \geq 2$ sind U und V über R i.A. nicht frei, dennoch ist β perfekt!

Aufgabe: Rechnen Sie die hier gemachten Behauptungen sorgsam nach. Das ist analog zum vorigen Beispiel, allein die Isomorphie ist kniffliger!

Der Raum $K^{s\times n}$ ist dual zu $K^{n\times s}$ über $R = K^{s\times s}$.

Beweis: Zunächst ist $\beta(u, v) = u \cdot v$ linkslinear in u und rechtslinear in v. Daraus erhalten wir β_1 linkslinear und β_2 rechtslinear wie angegeben.

Aus den Standardbasen $e_1, \dots, e_n \in K^{n\times 1}$ und $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_s \in K^{s\times 1}$ über K erhalten wir die Standardbasis $e_{ij} = e_i \tilde{e}_j^\top \in K^{n\times s}$ (Matrixeinheiten D1E).

Injektivität: Wir zeigen, dass $\beta_1 : u \mapsto [v \mapsto u \cdot v]$ injektiv ist. Sei $u \neq 0$, also $u_{ji} \neq 0$ für ein Indexpaar (j, i). Für $v = e_i \tilde{e}_j^\top$ folgt $(u \cdot v)_{jj} = u_{ij} \neq 0$.

Surjektivität: Wir zeigen, zu jedem $f : K^{n\times s} \to K^{s\times s}$ rechtslinear über $R = K^{s\times s}$ existiert ein $u \in K^{s\times n}$ mit $f(v) = u \cdot v$ für alle $v \in K^{n\times s}$.

Als Spalten der Matrix $u = (u_1, \dots, u_n)$ wählen wir $u_i := f(e_i \tilde{e}_1^\top)\tilde{e}_1$. Nachrechnen! Für die Zeilen jeder Matrix $v = (v_1; \dots; v_n) \in K^{n\times s}$ folgt

$$\begin{aligned} u \cdot v &\overset{\text{Def}}{=} \textstyle\sum_{i=1}^n u_i v_i \overset{\text{Def}}{=} \textstyle\sum_{i=1}^n f(e_i \tilde{e}_1^\top)\tilde{e}_1 v_i \\ &\overset{\text{Lin}}{=} f(\textstyle\sum_{i=1}^n e_i \tilde{e}_1^\top \tilde{e}_1 v_i) \overset{\text{Def}}{=} f(\textstyle\sum_{i=1}^n e_i v_i) \overset{\text{Def}}{=} f(v). \end{aligned}$$

Die Bijektivität von β_2 beweist man analog. QED

☺ Das ist zunächst trickreich, und dafür muss man etwas tüfteln. Liegt der Ansatz jedoch erst einmal vor, so ist die Rechnung leicht!

Beispiel: Zu jeder Basis $(b_i)_{i\in I}$ von V über R hat dank Satz W1H die duale Familie $(\varphi_i := b_i^*)_{i\in I}$ in V^* die folgenden beiden Eigenschaften:

1. Zu jedem $v \in V$ gilt $(\varphi_i(v))_{i\in I} \in R^{(I)}$, das heißt endlicher Träger,
2. und zudem $\sum_{i\in I} b_i \cdot \varphi_i(v) = v$, das heißt lineare Rekonstruktion.

Beweis: Zu jedem $v \in V$ existiert $\lambda \in R^{(I)}$ mit $v = \sum_{j\in I} b_j \cdot \lambda_j$. Somit folgt $\varphi_i(v) = b_i^*(\sum_{j\in I} b_j \cdot \lambda_j) = \sum_{j\in I} b_i^*(b_j) \cdot \lambda_j = \lambda_i$, also hat $(\varphi_i(v))_{i\in I} = \lambda$ endlichen Träger und erfüllt $\sum_{i\in I} b_i \cdot \varphi_i(v) = v$, wie gewünscht. QED

Definition W5D: projektive Erzeugung

Sei R ein Ring und darüber V ein rechtslinearer Raum. Ein **projektives Erzeugendensystem** ist eine Familie $(b_i, \varphi_i)_{i\in I}$ von Vektoren $b_i \in V$ mit Kovektoren $\varphi_i \in V^*$, die obige Eigenschaften (1) und (2) erfüllen.

Beispiel: Wie oben ist jede Basis ein projektives Erzeugendensystem. (Die nötige Ergänzung von $(b_i)_{i\in I}$ zu $(b_i, \varphi_i)_{i\in I}$ ist dabei eindeutig.) Die Umkehrung gilt nicht. Warum? Konstruieren Sie Gegenbeispiele, über einem DRing etwa ein Erzeugendensystem und echte Basisauswahl.

⚠ Traditionell sagen manche statt „projektives Erzeugendensystem“ $(b_i, \varphi_i)_{i\in I}$ lieber „projektive Basis“ oder manchmal sogar „duale Basis“. Beides finde ich unglücklich, denn es ist im Allgemeinen keine Basis!

Beispiel W5E: projektive Erzeugung von $V = K^{n\times s}$ über $R = K^{s\times s}$

(0) Der Raum $V = K^{n\times s}$ über dem Matrixring $R = K^{s\times s}$ ist frei für $s \mid n$, sonst nicht (wobei $s \geq 1$ gelte und die Invarianz der Dimension über K).
(1) Immer existiert jedoch ein projektives Erzeugendensystem $(b_i, \varphi_i)_{i\in I}$.
(2) Ebenso existiert $U = K^{m\times s}$ so, dass $U \oplus V \cong K^{(m+n)\times s}$ über R frei ist.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Behauptungen.

Beweis: (0) Für $n = s\ell$ gilt $K^{n\times s} = K^{s\ell\times s1} \cong (K^{s\times s})^{\ell\times 1} = R^{\ell\times 1} \cong R^\ell$.

Umgekehrt: Über $R = K^{s\times s}$ ist $V = K^{n\times s}$ endlich erzeugt. Wäre V über R frei, so hätten wir $V \cong R^{\ell\times 1}$ für ein $\ell \in \mathbb{N}$. Über K folgt $K^{n\times s} \cong K^{s\ell\times s1}$. Die Dimensionen ergeben also $ns = s^2\ell$. Nach Kürzung folgt $n = s\ell$.

(Nur an dieser Stelle benötigen wir die Invarianz der Dimension; dies gilt für jeden Körper K, ebenso jeden DRing und jeden CRing $K \supsetneq \{0\}$.)

Aus den Standardbasen $e_1, \dots, e_n \in K^{n\times 1}$ und $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_s \in K^{s\times 1}$ über K erhalten wir die Standardbasis $e_{ij} = e_i\tilde{e}_j^\top \in K^{n\times s}$ (Matrixeinheiten D1E).

(1) Über $R = K^{s\times s}$ wird $V = K^{n\times s}$ erzeugt von $b_i = e_i\tilde{e}_1^\top$ für $i = 1, \dots, n$. Als Kovektor betrachten wir $\varphi_i : K^{n\times s} \to K^{s\times s}$ mit $\varphi_i(v) = \tilde{e}_1 e_i^\top v$. Für die Zeilen jeder Matrix $v = (v_1; \dots; v_n) \in K^{n\times s}$ folgt

$$\textstyle\sum_{i=1}^n b_i \cdot \varphi_i(v) \overset{\text{Def}}{=} \sum_{i=1}^n e_i\tilde{e}_1^\top\tilde{e}_1 e_i^\top v \overset{\text{Def}}{=} 1_{n\times n} v \overset{\text{Def}}{=} v.$$

☺ Damit haben wir unser projektives Erzeugendensystem $(b_i, c_i)_{i=1}^n$ mit den Vektoren $b_i = e_i\tilde{e}_1^\top \in K^{n\times s}$ und den Kovektoren $c_i = \tilde{e}_1 e_i^\top \in K^{s\times n}$.

(2) Wir wählen $\ell \in \mathbb{N}$ groß genug mit $s\ell \geq n$ und setzen $m := s\ell - n \in \mathbb{N}$. Mit dem Summanden $U = K^{m\times s}$ ist dann $U \oplus V \cong K^{s\ell\times s}$ über R frei.

☺ Über R ist weder U noch V frei, doch ihre Summe $U \oplus V$ ist frei!

Aufgabe: Welche unserer Ergebnisse zur Dualität können Sie damit projektiv verallgemeinern? Formulieren und beweisen Sie dies für den natürlichen Homomorphismus $\iota : V \to V^{**} : v \mapsto [\iota(v) : \varphi \mapsto \varphi(v)]$.

Satz W5F: der natürliche Homomorphismus von V zum Bidual V^{**}

(0) Ist V über R projektiv erzeugt, durch $(b_i, \varphi_i)_{i\in I}$, so ist der natürliche Homomorphismus $\iota : V \to V^{**}$ injektiv.
(1) Sei V über R endlich projektiv erzeugt, durch $(b_i, \varphi_i)_{i=1}^n$.
(a) Dann ist auch V^* endlich projektiv erzeugt, durch $(\varphi_i, \iota b_i)_{i=1}^n$.
(b) Der natürliche Homomorphismus $\iota : V \to V^{**}$ ist ein Isomorphismus.

☺ Das verallgemeinert Satz W1L von Basen $(b_i)_{i\in I}$ zu $(b_i, \varphi_i)_{i\in I}$. Der Beweis wird nicht schwerer, sondern eher eleganter und leichter.

Beweis: (0) Aus $\iota(v)(\varphi_i) = \varphi_i(v)$ für $i \in I$ erhalten wir $\sum_{i\in I} b_i\varphi_i(v) = v$. Das zeigt, dass ι injektiv ist, denn aus $u, v \in V$ und $\iota(u) = \iota(v)$ folgt $u = v$.

(1a) Für jeden Kovektor $f \in V^*$, also $f : V \to R$, gilt $\sum_{i=1}^n f(b_i)\varphi_i = f$, denn Auswerten gibt $b_j \mapsto \sum_{i=1}^n f(b_i)\varphi_i(b_j) = f(\sum_{i=1}^n b_i\varphi_i(b_j)) = f(b_j)$.

(1b) Für jeden Kokovektor $w \in V^{**}$, gilt $\sum_{i=1}^n \iota(b_i)w(\varphi_i) = w$, denn Auswerten gibt $\varphi_j \mapsto \sum_{i=1}^n \varphi_j(b_i)w(\varphi_i) = w(\sum_{i=1}^n \varphi_j(b_i)\varphi_i) = w(\varphi_j)$. Das beweist, dass ι surjektiv ist, insgesamt also ein Isomorphismus. QED

Polynome: von Koeffizienten zur Auswertung

Beispiel W6A: Polynome und Auswertung

Der Raum $V = \mathbb{R}[X]$ aller Polynome über $\mathbb{R}$ hat die Monombasis $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Ihre duale Familie in V^* ist $(\varphi_k : f \mapsto (\partial^k f)(0)/k!)_{k\in\mathbb{N}}$. Für $a \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ liegt die Auswertung $\mathrm{ev}_a : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} : f \mapsto f(a)$ nicht in $\langle \varphi_k \mid k \in \mathbb{N}\rangle^!_{\mathbb{R}}$.

Aufgabe: (0) Ist $\mathrm{ev}_a : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ eine Linearform? Sei $U = \mathbb{R}[X]_{<n}$.
(1) Liegt $\mathrm{ev}_a : U \to \mathbb{R}$ in $\langle \varphi_k \mid k < n\rangle^!_{\mathbb{R}}$? Darstellung oder Hindernis!
(2) Liegt $\mathrm{ev}_a : V \to \mathbb{R}$ in $\langle \varphi_k \mid k \in \mathbb{N}\rangle^!_{\mathbb{R}}$? Darstellung oder Hindernis!

Lösung: (0) Ja! Die Auswertung ev_a ist linear, denn für alle $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{ev}_a(P\lambda + Q\mu) \overset{\text{Def}}{=} P(a)\lambda + Q(a)\mu \overset{\text{Def}}{=} \mathrm{ev}_a(P)\lambda + \mathrm{ev}_a(Q)\mu$.

(1) Bezüglich unserer Monombasis $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ schreibt sich jedes Polynom $P \in U$ als $P = \sum_{k=0}^{n-1} X^k p_k$ mit eindeutigen Koeffizienten $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{R}$. Dank Dualität gilt $\varphi_j(P) \overset{\text{Vor}}{=} \varphi_j(\sum_{k=0}^{n-1} X^k p_k) \overset{\text{lin}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_j(X^k) p_k \overset{\text{dual}}{=} p_j$. Wir haben also $\mathrm{ev}_a(P) \overset{\text{Def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a^k p_k \overset{\text{dual}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a^k \varphi_k(P)$, kurz:

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} : \mathrm{ev}_a|_U = \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k \varphi_k}$$

Polynome: von Koeffizienten zur Auswertung

(2) Lokal, für jedes Polynom $P \in V$, gilt $\mathrm{ev}_a(P) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a^k \varphi_k(P)$, denn diese Summe ist endlich getragen durch $k \in \{0, \dots, \deg P\}$.

☺ Wir nutzen auch global die schöne Formel $\mathrm{ev}_a = \sum_{k\in\mathbb{N}} a^k \varphi_k$.

⚠ Diese bequeme Schreibweise ist nur mit größter Vorsicht zu genießen! Lokal, angewendet auf jedes $P \in \mathbb{R}[X]$, ist die Summe immer endlich und daher wohldefiniert. Global gesehen ist diese Summe jedoch für $a \neq 0$ nicht endlich getragen, also *keine* Linearkombination!

Vielleicht haben wir uns nur ungeschickt angestellt? O weit gefehlt! Jede Linearkombination $\mathrm{ev}_a = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \varphi_k$ erzwingt $\lambda_k = \mathrm{ev}_a(X^k) = a^k$. Das zeigt, wir können ev_a nicht aus $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ linearkombinieren, kurz:

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} : \mathrm{ev}_a \in V^* \smallsetminus \langle \varphi_k \mid k \in \mathbb{N}\rangle^!_{\mathbb{R}}}$$

Die Auswertung an der Stelle $a = 0$ ist ein Sonderfall, hier gilt $\mathrm{ev}_0 = \varphi_0$.
☺ Das ist die konkrete Inkarnation von Satz W1H und seinem Beweis. Linearformen sind keineswegs abstrakt, sondern wunderbar konkret.

Polynome: von Auswertungen zu Koeffizienten

Aufgabe: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, darin $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}^! \subseteq \mathbb{K}$. Zu $U = \mathbb{K}[X]_{<n}$ über $\mathbb{K}$ haben wir die Basis $(X^i)_{i<n}$ und dual hierzu $(\varphi_i)_{i<n}$ von U^*. Ist jedes φ_i Linearkombination der Auswertungen $\mathrm{ev}_{x_0}, \dots, \mathrm{ev}_{x_{n-1}}$?

Lösung: Ja, das gelingt eindeutig dank Lagrange–Interpolation C2F oder als lineares Gleichungssystem mit der Vandermonde–Matrix D5B.

Wir betrachten speziell $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, darin die $n$te Einheitswurzel $\omega = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/n}$. Als Stützstellen wählen wir die Punktmenge $\{\omega^0, \dots, \omega^{n-1}\}^! \subset \mathbb{C}$.

Aufgabe: Wie berechnen Sie $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$ effizient aus $\mathrm{ev}_{\omega^0}, \dots, \mathrm{ev}_{\omega^{n-1}}$?

Lösung: Die vorige Aufgabe zeigt Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. Effizient gelingt es mit der schnellen Fourier–Transformation, siehe §E7.

☺ Die Fourier–Transformation ist hier ein Basiswechsel in U^*, zwischen den Koeffizienten φ_i und den Auswertungen ev_{ω^j}. Sie kann ebenso als Basiswechsel in U interpretiert werden.

Oft nutzt man stillschweigend Koordinaten $U \cong \mathbb{C}^n$ und $U^* \cong \overline{\mathbb{C}^n}$, und das Skalarprodukt $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{K} : (x, y) \mapsto x^\dagger y$ zwischen beiden.

Anwendungen in Analysis, Numerik, Physik, …

Linearformen sind in Anwendungen beliebt, von Analysis über Numerik zur Physik. Meist werden sie einfach stillschweigend genutzt, ausgiebig und erfolgreich, doch ohne besonderes Aufhebens, und das ist eigentlich auch gut so, denn sie sind ein naheliegendes und flexibles Werkzeug.

Zugleich behaupten manche, solch abstrakten Quatsch bräuchte ja wohl niemand, nutzen ihn aber zugleich fröhlich und alltäglich selbst. Nun ja.

Das scheint ein omnipräsentes Muster: Mathematische Ideen gelten als „abstrakt“ solange sie neu und ungewohnt sind. Sobald man sie eingeübt hat und sie nutzt, müsste jede:r die erste Bewertung aktualisieren von „abstrakt“ zu „konkret“, stattdessen wird „konkrete Mathematik“ zu „konkreter Anwendung“ umgedeutet und der Mathematik entrissen.

In dieser Sichtweise des Haters bleibt Mathematik also immer unnütz, denn sobald sie nützt, ist sie keine Mathematik mehr. Das ist zwar höchst unfair, aber beliebter *Hate Speech*. Das ist der feine Unterschied von „mathematischer Anwendung“ und „anwendbarer Mathematik“.

Beispiel W6B: Wirtinger Ableitungen

In der Zahlenebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ betrachten wir $x, y \in \mathbb{R}$ als reelle Variablen, hieraus bilden wir die komplexen Variablen $z = x + \mathrm{i}y$ und $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$. Genauer gesagt betrachten wir die Polynomringe $\mathbb{C}[x, y] \supseteq \mathbb{C}[z, \overline{z}]$.

(0) Wir definieren die **Wirtinger–Ableitungen** nach z und $\overline{z}$ durch

$$\partial_z := \tfrac{1}{2}(\partial_x - \mathrm{i}\partial_y) \quad \text{und} \quad \partial_{\overline{z}} := \tfrac{1}{2}(\partial_x + \mathrm{i}\partial_y).$$

(1) Folgende Regeln rechnet man durch Einsetzen direkt nach:

$$\partial_z(z) = 1, \quad \partial_z(\overline{z}) = 0, \quad \partial_{\overline{z}}(z) = 0, \quad \partial_{\overline{z}}(\overline{z}) = 1.$$

(2) Die vertrauten Ableitungen ∂_x, ∂_y sind linear und erfüllen Produkt- und Kettenregel; dasselbe gilt daher auch für $\partial_z, \partial_{\overline{z}}$.

(3) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\partial_z(z^n) = nz^{n-1}$ und $\partial_{\overline{z}}(z^n) = 0$ sowie entsprechend $\partial_{\overline{z}}(\overline{z}^n) = n\overline{z}^{n-1}$ und $\partial_z(\overline{z}^n) = 0$.

Aufgabe: Rechnen Sie die hier gemachten Behauptungen nach.

Aufgabe: In der Ebene $\mathbb{R}^2$ betrachten wir um 0 einen offenen Ball $\Omega = B(0, \varepsilon) := \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varepsilon \,\}$ mit beliebig kleinem Radius $\varepsilon > 0$. Im $\mathbb{C}$–Vektorraum $V = \mathscr{C}^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ betrachten wir die Monomfunktion

$$f_{a,b} : \Omega \to \mathbb{C} : (x, y) \mapsto z^a \overline{z}^b$$

mit Exponenten $a, b \in \mathbb{N}$. Linearkombination ergibt die Polynome $f(x, y) = \sum_{a,b \in \mathbb{N}} c_{a,b}\, z^a \overline{z}^b$ mit komplexen Koeffizienten $c \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N}^2)}$. Ist $(f_{a,b})_{(a,b) \in \mathbb{N}^2}$ linear unabhängig? Finden Sie eine duale Familie!

Lösung: Zu jedem Paar $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ haben wir die Ableitungen

$$\varphi_{k,\ell} : f \mapsto \frac{1}{k!\ell!}(\partial_z^k \partial_{\overline{z}}^\ell f)(0)$$

Für alle Indizes $(k, \ell), (a, b) \in \mathbb{N}^2$ gilt nach Konstruktion

$$\varphi_{k,\ell}(f_{a,b}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (k, \ell) = (a, b), \\ 0 & \text{falls } (k, \ell) \neq (a, b). \end{cases}$$

Daraus folgt sofort: Die Familie $(f_{a,b})_{(a,b) \in \mathbb{N}^2}$ in V ist linear unabhängig, und die duale Familie $(\varphi_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2}$ im Dualraum ist linear unabhängig.

Beispiel W6C: Laurent–Polynome und Cauchy–Wegintegral

In $\mathbb{C}$ betrachten wir $\Omega := B(0, \varepsilon) \smallsetminus \{0\} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \varepsilon \,\}$ mit Radius $\varepsilon > 0$. Im $\mathbb{C}$–Vektorraum $V = \mathscr{C}(\Omega, \mathbb{C})$ liegt die Monomfunktion

$$f_k : \Omega \to \mathbb{C} : z \mapsto z^k$$

mit Exponent $k \in \mathbb{Z}$. Zum Radius $0 < r < \varepsilon$ betrachten wir den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \Omega : t \mapsto r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ und das zugehörige Cauchy–Wegintegral

$$\varphi : V \to \mathbb{C} : f \mapsto \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dies ist eine Linearform auf V. Die Auswertung von φ auf f_k ergibt

$$\varphi(f_k) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{t=0}^{2\pi} r^k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\; r\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\;\mathrm{d}t = \frac{r^{k+1}}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)t}\;\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{für } k = -1, \\ 0 & \text{für } k \neq -1. \end{cases}$$

Linearkombination ergibt das Laurent–Polynom $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$ mit $c \in \mathbb{C}^{(\mathbb{Z})}$. Die Koeffizienten rekonstruieren wir dank $c_k = \varphi(f(z)/z^{k+1})$.

Der Weg $\gamma(t) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ durchläuft den Kreis vom Radius r um den Punkt 0. Der Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(t) = r\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ist der um $\pi/2 \mathrel{\hat{=}} 90^\circ$ nach links gedrehte Ortsvektor, also mit i multipliziert. Das Wegintegral $\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ durchläuft $z = \gamma(t)$ für $t \in [0, 2\pi]$, daher substituieren wir $\mathrm{d}z = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$.

Das erklärt die Definition des Wegintegral entlang γ wie oben gezeigt:

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Bemerkenswerterweise ist das Integral unabhängig vom Radius r: Das Ergebnis der Auswertung ist $\varphi(f_k) = 1$ für $k = -1$ und $= 0$ sonst. Das liegt daran, dass $f(z) = z^k$ die Stammfunktion $F(z) = z^{k+1}/(k+1)$ hat, außer für $k = -1$. Die Funktion $z \mapsto 1/z$ ist überaus interessant!

☺ Dies ist der Ausgangspunkt einer sensationell schönen Theorie: Die komplexe Analysis untersucht komplex-differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$. Hier ist das Cauchy–Wegintegral die Grundlage für die Darstellung durch Laurent–Reihen und Cauchys Residuensatz.

? Können wir Vektoren und Kovektoren nicht einfach gleichsetzen? Leider nein. Diese scheinbare Abkürzung erweist sich rasch als Irrweg.

Sei R ein Körper und $V \supsetneq \{0\}$ ein R–Vektorraum. Gemäß W1J stiftet jede Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ einen Isomorphismus $(\Psi_{\mathcal{B}}, \Psi^*_{\mathcal{B}}) : V \cong V^*$.

Übung: Zeigen Sie, dass dieser Isomorphismus von der Basis abhängt. Konstruieren Sie zwei Basen, die verschiedene Isomorphismen ergeben. In welchen Ausnahmefällen ist der Isomorphismus tatsächlich eindeutig?

L P I M „Lohnt sich die Mühe der mathematischen Präzision?“ O ja! Sorgfalt kostet anfänglich Mühe, doch solide Grundlage trägt nachhaltig.

Diese rein mathematischen Beziehungen sind vielen Lehrkräften nicht sehr vertraut [...] Konzepte wie der Dualraum eines Vektorraums sind ohnehin vielen Studierenden der Physik eher suspekt. [...] Dabei sind meist nur sehr wenige und einfache Regeln zu beachten, denen man außerdem eine anschauliche Deutung geben kann.

Thomas Filk: *Die Bra-Ket-Notation*, `physikdidaktik.uni-freiburg.de`

A NEW NOTATION FOR QUANTUM MECHANICS

By P. A. M. DIRAC

***Received* 29 April 1939**

In mathematical theories the question of notation, while not of primary importance, is yet worthy of careful consideration, since a good notation can be of great value in helping the development of a theory, by making it easy to write down those quantities or combinations of quantities that are important, and difficult or impossible to write down those that are unimportant. The summation convention in tensor analysis is an example, illustrating how specially appropriate a notation can be.

📖 P.A.M. Dirac: *A new notation for quantum mechanics.* Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 35 (1939) 416–418.

Dieses Kapitel erklärt Definitionen, Sätze und Beweise und zugleich eine gute Notation, ebenso bequem-praktisch wie formal-präzise. Das dritte Ziel, die intuitve Anschauung und gute Erfahrung, lässt sich leider nicht so leicht *vermitteln*, sondern nur durch eigene Anwendung *aufbauen*.

Dirac bringt es auf den Punkt: Mathematische *Notation* ist der definierten *Bedeutung* eigentlich nachgeordnet. Lange Erfahrung zeigt jedoch, dass gute Notation wichtig ist für Lehre und Praxis, für Didaktik und Kalkül. Wir sehen und spüren dies überall... und ganz besonders bei Dualität.

Albert Einstein (1879–1955) führte 1916 seine **Summenkonvention** ein: Kovektor $u = (u^i)$ mal Vektor $v = (v_i)$ ergibt den Skalar $u^i v_i := \sum_i u^i v_i$. Hier zeigt die raffinierte Stellung des Index den Typ als Ko/Vektor an. *Fun fact:* Einstein erhielt 1921 den Physik-Nobelpreis, nicht für seine Relativitätstheorie (speziell 1905, allgemein 1915), sondern für seine quantenmechanische Erklärung des photoelektrischen Effekts (1905).

Paul Dirac (1902–1984) erfand hierzu 1939 seine **Bra-Ket-Notation**: Aus Bra $\langle u|$ und Ket $|v\rangle$ wird durch Auswertung der Skalar $\langle u\,|\,v\rangle$. *Fun fact:* Paul Dirac erhielt 1933 gemeinsam mit Erwin Schrödinger den Physik-Nobelpreis für seine Verbindung von Quantenmechanik mit spezieller Relativität. Seine Dirac–Gleichung sagte die Möglichkeit von Antimaterie voraus, was anschließend experimentell bestätigt wurde.

☺ Gute Notation soll bequem-kurz sein und zugleich präzise-informativ, sie soll möglichst das Richtige erleichtern und das Falsche erschweren. Diracs Notation erfüllt diese praktischen und ästhetischen Wünsche.

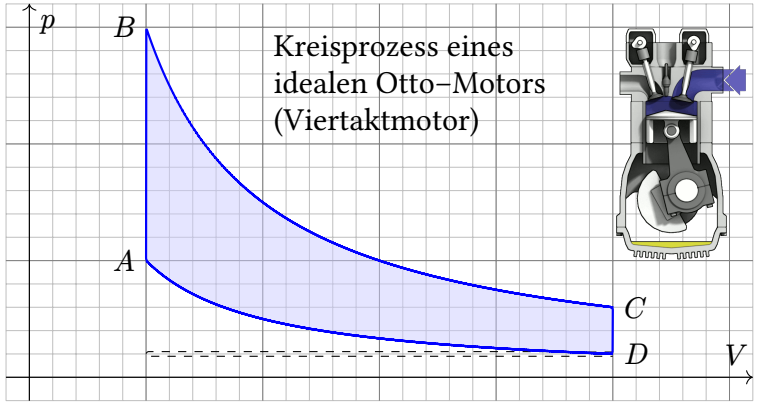
Weitergedacht gilt dies in allen Bereichen der Mathematik, in der LinA etwa wohlgeformte Formeln in der Logik, Polynome, Matrixkalkül, uvm. Syntaktische Disziplin verhindert blühenden Unsinn, sie ist ein erster Test zur Plausibilität, garantiert aber allein noch nicht die Richtigkeit.

Besonders stark spürbar entfaltet sich diese radikale Idee in modernen Programmiersprachen! Compilierte Sprachen nutzen gerne eine Art von Typisierung, die syntaktisch schon bei Compilation geprüft werden kann.

Extrem auf die Spitze treiben dies Beweisassistenten: Als Beweis einer Aussage gilt (nur) die Konstruktion eines Terms vom geforderten Typ.

In dieser Strenge erfüllt der Typenkalkül Diracs Ideal: Es ist unmöglich, etwas Falsches zu schreiben. Alles, was typkorrekt ist, ist auch richtig.
☺ Je informeller die Mathematik, desto mehr muss man selber denken.

Beispiel: Prozessgrößen in der Thermodynamik



In der Thermodynamik (etwa für ideale Gase) gibt es **Zustandsgrößen** wie den Druck p und das Volumen V: Diese beschreiben den Zustand $\gamma(t) = (p(t), V(t), \dots)$ des Systems in einem Zustandsraum $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Daneben gibt es **Prozessgrößen** wie die geleistete Arbeit $\mathrm{d}W = p\,\mathrm{d}V$. Diese hängen ab von der Zustandsänderung, also $\partial_t\gamma = (\partial_t p, \partial_t V, \dots)$. Die Auswertung ergibt $\partial_t W = \mathrm{d}W(\partial_t\gamma) = p\,\partial_t V$ und $\Delta W = \int_\gamma \mathrm{d}W$.

Beispiel: Prozessgrößen in der Thermodynamik

Der Kreisprozess eines **Otto–Motors** verläuft idealisiert wie skizziert:
Verdichten: Der Kolben komprimiert Kraftstoff-Luft-Gemisch von D bis A.
Arbeitstakt: Bei A wird das Gas gezündet, der Druck steigt schlagartig bis B an, dadurch dehnt sich der Kolben bis C aus und verrichtet Arbeit.
Zwei weitere Takte: Ausstoß des Abgases, Ansaugen des Gemisches.

Der **Wirkungsgrad** des Motors ist die geleistete Arbeit dividiert durch die eingesetzte Verbrennungsenergie, also den Treibstoffverbrauch.
Die oben skizzierte Formel liefert den zu maximierenden Wert ΔW.
Solche immens praktischen Fragen der Optimierung von Maschinen waren im 19. Jahrhundert der Ausgangspunkt der Thermodynamik.

Heute ist die **Thermodynamik** eine fundamentale Wissenschaft und hat überaus wichtige technische Anwendungen: Sie dient zum Verständnis von Kraftmaschinen (wie Motoren, Turbinen, etc.) und Arbeitsmaschinen (Pumpen, Verdichter) sowie in der Klimatechnik (Heizungen, Kühlung).
Daran erahnen wir bereits, dass sie einerseits fundamental wichtig ist, andererseits mathematisch-konzeptuell erstaunlich anspruchsvoll.

Beispiel: Prozessgrößen in der Thermodynamik

Den **Zustand** $\gamma(t)$ des Systems zur Zeit $t \in [t_0, t_1]$ beschreiben wir dabei durch den Druck $p(t)$, das Volumen $V(t)$ und evtl. weitere Größen.
Das entspricht einem Punkt $x = \gamma(t)$ im Zustandsraum $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Eine **Zustandsfunktion** hängt vom aktuellen Zustand $\gamma(t)$ des Systems ab, nicht jedoch von der Historie, also dem durchlaufenen Weg: Zum Beispiel ist die Wärmeenergie eines idealen Gases gleich $U = fpV = f\nu RT$.
Hier ist U = Wärmemenge, p = Druck, V = Volumen, ν = Stoffmenge, R = universelle Gaskonstante, T = absolute Temperatur. Der Faktor $f = 3/2$ entspricht der mikroskopischen Struktur eines einatomigen Gases wie Helium; für zweiatomige wie Wasserstoff gilt $f \approx 5/2$.

Eine **Prozessfunktion** hingegen hängt vom durchlaufenen Weg ab, wie etwa die geleistete Arbeit $\Delta W = \int_\gamma \mathrm{d}W$ in der obigen Formel.
Den Verlauf des Prozesses beschreiben wir als Weg $\gamma : [t_0, t_1] \to \Omega$ im Zustandsraum. Der momentane Zustand ist $x = \gamma(t)$ und die Ableitung $\dot{x} = \partial_t\gamma(t)$ ist die momentane Änderungsgeschwindigkeit.
Bei einem Kreisprozess gilt $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ und dennoch $\Delta W \neq 0$!

Beispiel: Prozessgrößen in der Thermodynamik

Angeheftet in jedem Punkt $x = (p, V, \dots)$ des Zustandsraumes $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist der Tangentialraum $T_x\Omega \cong \mathbb{R}^n$ der Änderungsgeschwindigkeiten.
Hierauf ist $\mathrm{d}W = p\,\mathrm{d}V : T_x\Omega \to \mathbb{R}$ eine Linearform, also $\mathrm{d}W \in T_x^*\Omega$.
Wie hier zu sehen, hängt $(\mathrm{d}W)_x$ vom Punkt $x \in \Omega$ ab, zudem glatt.
Daher sprechen wir genauer von einer **Differentialform**, siehe §Y2.

Prof. Hermann Karcher (`www.math.uni-bonn.de/people/karcher`) erklärte es prägnant treffend in der Notiz *Differentialformen für die Thermodynamik*:

> *Die Vektoranalysis lebt davon, dass wir den Raum $\mathbb{R}^3$ nicht bloß als Vektorraum, sondern als euklidischen Raum, mit einem Skalarprodukt, betrachten und nutzen können. In der Thermodynamik gibt es jedoch kein Skalarprodukt, das eine physikalische Bedeutung hätte. Deshalb können Kurvenintegrale nicht Integranden haben, die Skalarprodukt aus einem Vektorfeld mit dem Tangentialvektor der Kurve sind. Wir müssen daher lernen, die Ableitung von Funktionen und deren Anwendung auf Tangentialvektoren von Kurven ohne ein bequemes Skalarprodukt zu beschreiben. Genau hierzu dienen Differentialformen.*

Kapitel X

Tensorprodukt

Was ist das Tensorprodukt? Da stellen wir uns ganz dumm.
Jede:r weiß, dass wir Vektoren untereinander addieren können,
aber allgemein nicht multiplizieren. Wir tun es einfach trotzdem!
frei nach Günter Harder (1938–2025)

Inhalt dieses Kapitels X

1. Das Tensorprodukt für Eilige
   - Direkte Summe $\oplus$ und Tensorprodukt $\otimes$ über einem Körper
   - Vertraute Beispiele: Matrizen, Polynome, Wahrscheinlichkeit
   - Erste spektakuläre Anwendung: das No-Cloning-Theorem
2. Das Tensorprodukt über beliebigen Ringen
   - Tensorprodukt dank universeller Eigenschaft
   - Eindeutigkeit und Existenz des Tensorprodukts
   - Das mehrfache Tensorprodukt dank UAE
3. Nützliche Rechenregeln für das Tensorprodukt
   - Neutrales, Assoziativität, Kommutativität, Distributivität
   - Die Tensor-Hom-Adjunktion durch Schönfinkeln
   - Funktorialität und Kronecker–Produkt
4. Erste Anwendungen
   - Homomorphismen als Tensoren
   - Erweiterung des Grundrings
   - Tensorieren mit $\mathbb{Q}$ und mit $\mathbb{Z}/p$

Tensorprodukte: universell anwendbar

Wir sind auf der Zielgeraden dieser Vorlesung zur Linearen Algebra. Zum krönenden Abschluss behandeln wir das Tensorprodukt, zunächst über Körpern (X1), das vereinfacht, dann über beliebigen Ringen (X2). Die Grundidee ist im Eingangszitat kurz und listig zusammengefasst:

Wir multiplizieren Vektoren, naiv-mutig und so allgemein wie möglich. Als Motto zitiere ich aus meinem Gedächtnis, wie Prof. Günter Harder in seinen Bonner Algebra-Vorlesungen das Tensorprodukt motivierte. So habe ich es einst empfangen, so möchte ich es an Sie weitergeben.

Technisch präziser gesagt, das Tensorprodukt realisiert folgendes Ziel:

> *Wir betrachten bilineare oder allgemein multilineare Abbildungen; mit dem Tensorprodukt „linearisieren“ wir diese, frei und universell.*

Wie jedes neue Werkzeug kostet das Tensorprodukt anfangs Mühe, doch wie immer in der LinA lohnt sich auch hier die langfristige Investition. Um auch kurzfristig schon erste schöne Anwendungen zu erreichen, beginne ich über einem Körper mit dem „Tensorprodukt für Eilige.“

Tensorprodukte: universell anwendbar

Ich wage den Blick über den Tellerrand und diskutiere Anwendungen in der Quantenmechanik. Das illustriert unser vertrautes Mantra:

1. Die mathematischen Grundlagen sind oft vergleichsweise leicht. Gerade die Abstraktion ermöglicht uns vielseitige Anwendungen.
2. Anwendungen sind erfreulich reichhaltig und erstaunlich komplex. Die abstrakte Sichtweise schärft unseren Blick für das Wesentliche.

Schon die ersten Anwendungen sind spektakulär. Wer diese dennoch nicht wünscht oder braucht, kann die physikalische Einkleidung auch ignorieren und sich ganz auf den mathematischen Kern konzentrieren. Abfragen werde ich sie nicht, anbieten will ich sie Ihnen auf jeden Fall.

Erfahrungsgemäß ist es nämlich hilfreich, zu mathematischen Begriffen auch geometrische Anschauung und physikalische Intuition zu schulen. Dies dient Ihrer naturwissenschaftlich-technischen Allgemeinbildung und hilft beim Erlernen auch Ihrem mathematischen Verständnis.

Mathematik (gr. μαθηματικὴ τέχνη) ist die ‘Kunst des Lernens’. Freuen wir uns auf einen weiteren mathematischen Höhepunkt!

Woher kommen Tensoren?

X005
Überblick

Wie viele fundamentale Begriffe wurden **Tensoren** zunächst in der Physik eingeführt und genutzt und erst später mathematisch präzise gefasst. Das ist kein Makel, sondern ein Beleg ihrer tiefliegenden Bedeutung. Ihr gehen wir nun auf den Grund, erst anschaulich, dann systematisch.

In der theoretischen Physik werden „Tensoren“ seit langem verwendet, da sie zur effizienten Modellbildung nützen und in Rechnungen helfen. Dabei werden diese „Tensoren“ zunächst ganz pragmatisch durch ihre **Rechenregeln** eingeführt… der Erfolg heiligt bekanntlich die Mittel.

Diesen Zugang „für Eilige“ möchte ich in X1 als erstes vorstellen. Das entspricht recht genau der ideengeschichtlichen Entwicklung, und auch heute noch antwortet es aus didaktisch-physikalischer Sicht sehr direkt und auch motivierend auf die Frage: Was sind Tensoren?

Persönliche Begebenheit: Der Einstieg dieses Kapitels entstand 2021 auf die sorgenvolle Frage meines Sohnes, was mit Tensoren anzufangen sei… Wir wollen und können Tensoren anpacken und sofort damit rechnen!

Wo werden Tensoren genutzt?

X006
Überblick

Aus **mathematischer Sicht** dauerte es hingegen deutlich länger, bis es Mathematiker:innen endlich gelang, für diese praktischen „Tensoren“ eine befriedigende theoretische Grundlage zu finden und zu erklären.

Seither werden sie auch in der Mathematik vielseitig genutzt und gerne angewendet, insbesondere in der Algebra und der Differentialgeometrie, zudem in den Ingenieurwissenschaften (etwa der Mechanik, Elastizität, Strömungslehre, Elektrodynamik, …) und überall in der theoretischen Physik, von der Quantenmechanik bis zur Relativitätstheorie. Überall!

Dabei werden Tensoren kurzerhand zu Tensorfeldern verallgemeinert, die abkürzend-schludrig meist ebenfalls Tensoren genannt werden. Ein Tensorfeld ordnet jedem Punkt des Raums einen Tensor zu. Das zugehörige mathematische Teilgebiet heißt Tensoranalysis.

Viele naturwissenschaftliche Modelle und physikalische Theorien nutzen Tensorfelder, allen voran die allgemeine Relativitätstheorie, die damit die Geometrie einer gekrümmten Raumzeit beschreibt.

Tensoren als physikalische Größen mit Indizes

X007
Ausführung

Koordinaten nutzen wir ganz selbstverständlich schon seit Schulzeiten. **Tensorkoordinaten** als Hilfsmittel beschreiben das dahinterliegende Objekt, das uns eigentlich interessiert, etwa einen Vektor, eine lineare Abbildung, eine Bilinearform, etc. Das Ergebnis unserer Rechnungen soll dabei invariant sein, also dasselbe liefern in *jedem* Koordinatensystem.

0. Stufe: Wir beginnen viele unserer Rechnungen mit einem Skalar a: Dies ist einfach ein Element des Grundkörpers K, etwa $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

1. Stufe: Eine Folge $b = (b_1, \dots, b_k)$ solcher Skalare fassen wir zu einem neuen Objekt zusammen und rechnen damit als vektorielle Größe. Solch ein Vektor $b = (b_i)_i \in K^n$ hat dabei einen einzigen Index i.

2. Stufe: Eine Folge von Vektoren $c = (c_{ij})_{ij}$ hat demnach zwei Indizes. Warum sagen wir nicht einfach „Matrix“? Tensoren sind allgemeiner! Auch diese können wir koordinatenweise addieren und skalieren.

3. Stufe: Ein Tensor $d = (d_{ijk})_{ijk}$ kann drei (oder mehr) Indizes haben, wie etwa das Levi-Civita-Symbol $\varepsilon_{ijk} = \operatorname{sign}(i,j,k)$ für $i,j,k \in \{1,2,3\}$. Anschaulich gesagt: Tensoren sind „Matrizen beliebiger Stufe $s \in \mathbb{N}$“.

Wie erklären wir Tensoren mathematisch?

X008
Ausführung

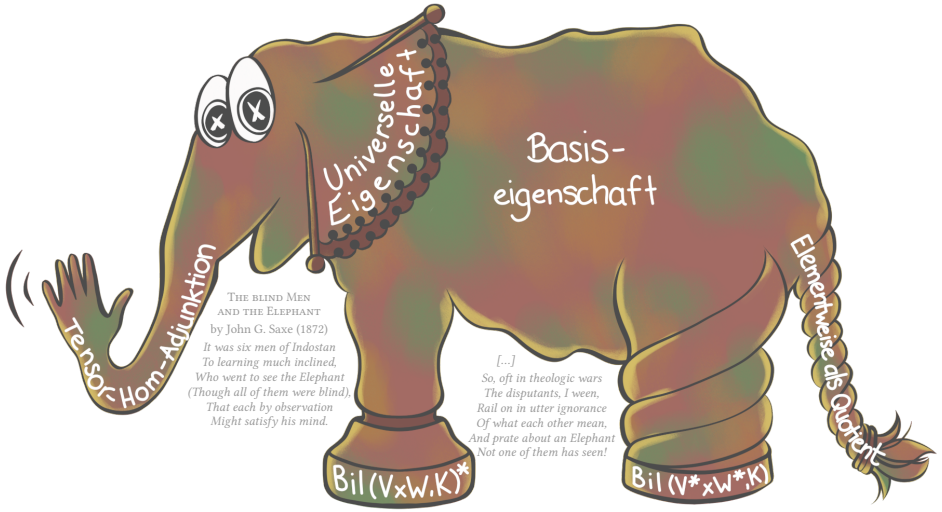
Tensoren sind ein vielseitiges und nützliches Werkzeug der Mathematik. Es lohnt sich daher, Zeit in diesen grundlegenden Begriff zu investieren, gerade zum Übergang von „koordinatengebunden“ zu „koordinatenfrei“. Das ist präzise und hilfreich, zugleich aber auch abstrakt und mutig.

Zur Motivation beginne ich mit meiner kurzen Vorschau „für Eilige“: Zum pragmatischen Einstieg betone ich daher die **Basiseigenschaft** X1D; sie liegt vielen Rechnungen zugrunde und ermöglicht sofortigen Zugang. Als erste spektakuläre Anwendung in der Quantenmechanik erhalten wir das sogenannte No-Cloning-Theorem (X1I). Soviel Physik muss sein!

Anschließend beschäftigen wir uns, nun sorgsam und geduldig, mit der mathematischen Grundlegung: Der bewährte Ausgangspunkt ist hier die **universelle Abbildungseigenschaft** (UAE X2A). Anschließend erarbeiten wir ihre segensreichen Konsequenzen, darunter die Basiseigenschaft X2C. Die UAE erweist sich dabei als unser geschmeidig-effizientes Werkzeug.

Dabei gehe ich den langen Weg und beginne so allgemein wie möglich: Wir legen das Thema breit an und spezialisieren dann schrittweise.

Das Tensorprodukt ist hilfreich und ein Elefant!



Im September 2023 durften wir unser legendäres **Sesquinar zu Tensoren** veranstalten, `eiserm.de/lehre/2023/Tensoren`. (Was sind Tensoren? Geduld, das kommt gleich. Was ist ein Sesquinar? Wie ein Seminar, nur dreimal so schön: absolut einmalig und garantiert frei von Leistungspunkten!)

Unsere zwölf Vorträge zeigten eindrucksvoll, dass Tensoren extrem divers und oft genutzt werden, etwa in der Physik, Differentialgeometrie und Relativität, Komplexitätstheorie, Algebra und Darstellungstheorie, uvm. Es lohnt sich also, das Kunsthandwerk der Tensoren zu erlernen.

Ebenso vielfältig sind die möglichen Zugänge, Tensoren zu erklären, wie im indischen Gleichnis von den Blinden, die einen Elefanten beschreiben, den sie nur stückweise ertasten können. „Ein Elefant ist wie eine Säule.“, sagt der Blinde, der am Bein beginnt. „Nein, ein Elefant ist wie ein Arm.“, erwidert die Blinde am Rüssel. „Wohl eher wie ein Seil!“, am Schweif. „Wie ein Fächer!“, am Ohr. „O nein, wie eine Wand!“, am Rumpf.

Kunstvoll-listig erzählt dies das Gedicht von John Godfrey Saxe (1872), hinreißend gesungen von Natalie Merchant (2009), `youtu.be/3lyJLFMSVbY`.

Dies illustriert, dass wir ein und dieselbe Realität sehr unterschiedlich auffassen können, je nachdem, welche Perspektive wir einnehmen.

So ist es auch mit dem Tensorprodukt! Es gibt erstaunlich viele Zugänge; einige nur speziell zur bequemen Abkürzung, wenige ganz allgemein zur langfristigen Investition; manche sehr konkret, andere eher abstrakt. Alle beschreiben wichtige Aspekte des Tensorfanten, und im Sesquinar haben wir daraus ein gutes Gesamtbild zusammengesetzt. Danke an alle Teilnehmer:innen für ihr großes, vollkommen freiwilliges Engagement!

In Anwendungen werden die grundlegenden mathematischen Werkzeuge gerne so weit wie nur irgend möglich vereinfacht, manchmal aber auch einen Schritt zu weit. Folgender Unsinn hat inzwischen Kultstatus:

> *“Spin is like a ball that’s spinning,*
> *except it’s not a ball and it’s not spinning.”*
> *— “A vector is an element of a vector space.”*
> *— “A tensor is a thing that transforms like a tensor.”*

The introduction of numbers as coordinates is an act of violence. [...]
In geometric and physical applications, it always turns out that a quantity is characterized not only by its tensor order, but also by symmetry.
Hermann Weyl (1885–1955)

Für ein vollständiges Bild diskutieren wir mehrere Zugänge, alle nützlich:

1. Die Basiseigenschaft X1D erlaubt konkretes Rechnen in Koordinaten. Dies ist in der Physik beliebt: ☺ Im Vorderung stehen Koordinaten und Basiswechsel. ☹ Der eigentliche Tensor steht im Hintergrund.
2. Die universelle Abbildungseigenschaft (X2A) ist die genial-einfache, mathematische Sichtweise. ☺ Sie gelingt über beliebigen Ringen.
3. Elementweise Konstruktion als Quotient (X2E) sichert die Existenz.
4. Tensor-Hom-Adjunktion (X3F) ist die elegant-abstrakte Sichtweise.
5. Das Dual des Tensorprodukts entspricht Multilinearformen (Y5D). Speziell für endlich-dimensionale Vektorräume erhalten wir daraus die trickreich-bequeme Abkürzung als Dualraum der Multilinearformen.

The blind Men and the Elephant

It was six men of Indostan / To learning much inclined,
Who went to see the Elephant / (Though all of them were blind),
That each by observation / Might satisfy his mind.

The First approached the Elephant, / And happening to fall
Against his broad and sturdy side, / At once began to bawl:
"God bless me! — but the Elephant / Is very like a wall!"

The Second, feeling of the tusk, / Cried: "Ho! — what have we here
So very round and smooth and sharp? / To me 't is mighty clear
This wonder of an Elephant / Is very like a spear!"

The Third approached the animal, / And happening to take
The squirming trunk within his hands, / Thus boldly up and spake:
"I see," quoth he, "the Elephant / Is very like a snake!"

The Fourth reached out his eager hand, / And felt about the knee.
"What most this wondrous beast is like / Is mighty plain," quoth he;
"'T is clear enough the Elephant / Is very like a tree!"

The blind Men and the Elephant

The Fifth, who chanced to touch the ear, / Said: "E'en the blindest man
Can tell what this resembles most; / Deny the fact who can,
This marvel of an Elephant / Is very like a fan!"

The Sixth no sooner had begun / About the beast to grope,
Than, seizing on the swinging tail / That fell within his scope,
"I see," quoth he, "the Elephant / Is very like a rope!"

And so these men of Indostan / Disputed loud and long,
Each in his own opinion / Exceeding stiff and strong,
Though each was partly in the right, / And all were in the wrong!

So, oft in theologic wars / The disputants, I ween,
Rail on in utter ignorance / Of what each other mean,
And prate about an Elephant / Not one of them has seen!

John Godfrey Saxe (1816–1887)
`en.wikipedia.org/wiki/John_Godfrey_Saxe`

Die sechs Blinden und der Elefant

Sechs Männer fern in Industan, voll Neugier wie es schien,
Erstrebten, obschon blind sie war'n, den Elefant zu sehn,
Dass jeder durch den Augenschein könnt' dieses Tier verstehn.

Der Erste, von Natur aus forsch, sich naht dem Elefant,
Befühlt die Seite des Geschöpfs und hat sogleich erkannt:
„Mein Gott, dies ist ein Ungetüm; es ist wie eine Wand!"

Der Zweite nun den Stoßzahn fühlt und fragt: „Wo kommt das her?
So rund und glatt und spitz am End? Die Lösung ist nicht schwer;
Dies Ding von einem Elefant ist gleich als wie ein Speer!"

Darauf der Dritte sich nun naht, ergreift – ihm ward nicht bange –
Den Rüssel vorn am Kopf mit Kraft, und zögert auch nicht lange,
Den andern Blinden kundzutun: „Das Biest ist eine Schlange!"

Darob der Vierte nun erfühlt – beinahe wie im Traum –
Das linke Bein der Kreatur; umfasst es aber kaum:
Und spricht: „Es ist mir sonnenklar: Das Ding ist wie ein Baum."

Die sechs Blinden und der Elefant

Der Fünfte nun berührt das Ohr am Elefantenschädel
Und sagt: „Sogar ein blinder Mann und auch ein blindes Mädel
Weiß doch auf Anhieb, dass dies ist ein großer breiter Wedel."

Der Sechste tastet sich nun vor, grad bis zum Hinterteil,
Und sucht, dort wo der Schwanz sich regt, nun ebenfalls sein Heil,
Ruft dann, sobald er ihn erfasst: „Das Tier ist wie ein Seil!"

Sechs Blinde fern in Industan, nun stritten lang und laut,
ob dem, was jeder nur für sich als Elefant geschaut –
doch hatten, wiewohl teils im Recht, sie alle nur auf Sand gebaut.

So oft im Theologenstreit geschieht's im Handumdrehn
Dass Disputanten – scheinbar taub – sich einfach nicht versteh'n
Und zanken um 'nen Elefant, den niemand je geseh'n.

poetisch übersetzt von Kurt Bangert (1946–)
`www.kurtbangert.de/gedichte.html`

Dieses wunderbare Gleichnis trifft nicht nur auf Religionen zu, sondern selbst in Gebieten der Wissenschaft und der Technik, auch in der Mathematik, und hier besonders auf Tensoren.

Die Seite `deepai.org/machine-learning-glossary-and-terms/tensor` erklärt den Begriff „Tensor“ anschaulich wie folgt (aufgerufen am 18.09.2026):

Understanding Tensors in Machine Learning and Deep Learning. *In the realms of machine learning and deep learning, the term “tensor” has become a buzzword, often thrown around in discussions about algorithms, neural networks, and data representation. But what exactly is a tensor, and why is it so crucial in these fields?*

At its core, a tensor is a mathematical object that generalizes the concept of scalars, vectors, and matrices to higher dimensions. In the context of data science, tensors are multi-dimensional arrays of numbers that represent complex data. They are the fundamental data structures used in machine learning and deep learning frameworks like TensorFlow and PyTorch.

To appreciate tensors, it’s helpful to start with the basics. A scalar is simply a single number, such as 7 or -3.2. A vector is a one-dimensional array of numbers, such as [2, 4, 6], and a matrix extends this idea into two dimensions, like so:

[[1, 2, 3],
[4, 5, 6],
[7, 8, 9]]

When we extend this concept into three or more dimensions, we enter the realm of tensors. For instance, a 3D tensor could look like a cube of numbers, and a 4D tensor could be visualized as a series of cubes stacked together.

Why Use Tensors? *Tensors are particularly useful for handling complex data such as images, audio, and text. For example, a color image can be represented as a 3D tensor with dimensions corresponding to height, width, and color channels (red, green, and blue). Similarly, a video can be represented as a 4D tensor with time being the additional dimension.*

Operations on Tensors. *Just like with vectors and matrices, you can perform various mathematical operations on tensors. These include addition, multiplication, and dot products. In deep learning, operations like convolution are also applied to tensors to extract features from data.*

In machine learning libraries, tensors are used to store and manipulate data. These frameworks provide tools to create tensors, perform computations on them efficiently, and automatically calculate gradients – which are essential for training models using backpropagation. [… The “shape” of a tensor is the size of each dimension; for the above matrix the shape is thus (3,3).]

TensorFlow, by Google, and PyTorch, by Facebook, are two of the most popular deep learning frameworks. As their names suggest, they are built around tensors. These frameworks handle the creation and manipulation of tensors and use them to build and train complex neural network models.

Conclusion. *Tensors are the backbone of modern machine learning and deep learning applications. They provide a way to represent and compute on high-dimensional data efficiently.*

As you delve deeper into machine learning, a solid understanding of tensors and their operations will be invaluable. Whether you’re training a neural network to recognize images, process natural language, or analyze complex patterns, tensors will be at the core of your algorithms.

As the field continues to evolve, the use of tensors will likely become even more prevalent, making them a key concept for any aspiring data scientist or machine learning engineer to master.

Das ist eine gelungene Zusammenfassung der informatischen Sichtweise, die physikalische betont zudem Transformationen unter Basiswechseln, die mathematische betont vor allem die Linearität in jedem Argument.

Tensoren glänzen in aktuellen Anwendungen

Article

Discovering faster matrix multiplication algorithms with reinforcement learning

https://doi.org/10.1038/s41586-022-05172-4
Received: 2 October 2021
Accepted: 2 August 2022
Published online: 5 October 2022
Open access
Check for updates

Alhussein Fawzi[1,2,*], Matej Balog[1,4], Aja Huang[1], Thomas Hubert[1], Bernardino Romera-Paredes[1], Mohammadamin Barekatain[1], Alexander Novikov[1], Francisco J. R. Ruiz[1], Julian Schrittwieser[1], Grzegorz Swirszcz[1], David Silver[1], Demis Hassabis[1] & Pushmeet Kohli[1]

Improving the efficiency of algorithms for fundamental computations can have a widespread impact, as it can affect the overall speed of a large amount of computations. Matrix multiplication is one such primitive task, occurring in many systems—from neural networks to scientific computing routines. The automatic discovery of algorithms using machine learning offers the prospect of reaching beyond human intuition and outperforming the current best human-designed algorithms. However, automating the algorithm discovery procedure is intricate, as the space of possible algorithms is enormous. Here we report a deep reinforcement learning approach based on AlphaZero[1] for discovering efficient and provably correct algorithms for the multiplication of arbitrary matrices. Our agent, AlphaTensor, is trained to play a single-player game where the objective is finding tensor decompositions within a finite factor space. AlphaTensor discovered algorithms that outperform the state-of-the-art complexity for many matrix sizes. Particularly relevant is the case of 4 × 4 matrices in a finite field, where AlphaTensor's algorithm improves on Strassen's two-level algorithm for the first time, to our knowledge, since its discovery 50 years ago[2]. We further showcase the flexibility of AlphaTensor through different use-cases: algorithms with state-of-the-art complexity for structured matrix multiplication and improved practical efficiency by optimizing matrix multiplication for runtime on specific hardware. Our results highlight AlphaTensor's ability to accelerate the process of algorithmic discovery on a range of problems, and to optimize for different criteria.

We focus on the fundamental task of matrix multiplication, and use deep reinforcement learning (DRL) to search for provably correct and efficient matrix multiplication algorithms. This algorithm discovery process is particularly amenable to automation because a rich space of matrix multiplication algorithms can be formalized as low-rank decompositions of a specific three-dimensional (3D) tensor[3], called the matrix multiplication tensor[3–7]. This space of algorithms contains the standard matrix multiplication algorithm and recursive algorithms such as Strassen's[2], as well as the (unknown) asymptotically optimal algorithm. Although an important body of work aims at characterizing the complexity of the asymptotically optimal algorithm[7–17], this does not yield practical algorithms[7]. We focus here on practical matrix multiplication algorithms, which correspond to explicit low-rank decompositions of the matrix multiplication tensor. In contrast to two-dimensional matrices, for which efficient polynomial-time algorithms computing the rank have existed for over two centuries[18], finding low-rank decompositions of 3D tensors (and beyond) is NP-hard[19] and is also hard in practice. In fact, the search space is so large that even the optimal algorithm for multiplying two 3 × 3 matrices is still unknown. Nevertheless, in a long-standing research effort, matrix multiplication algorithms have been discovered by attacking this tensor decomposition problem using human search[1,15,16], continuous optimization[17–19] and combinatorial search[20]. These approaches often rely on human-designed heuristics, which are probably suboptimal. We instead use DRL to learn to recognize and generalize over patterns in tensors, and use the learned agent to predict efficient decompositions.

We formulate the matrix multiplication algorithm discovery procedure (that is, the tensor decomposition problem) as a single-player game, called TensorGame. At each step of TensorGame, the player selects how to combine different entries of the matrices to multiply. A score is assigned based on the number of selected operations required to reach the correct multiplication result. This is a challenging game with an enormous action space (more than 10^{12} actions for most interesting cases) that is much larger than that of traditional board games such as chess and Go (hundreds of actions). To solve TensorGame and find efficient matrix multiplication algorithms, we develop a DRL agent, AlphaTensor. AlphaTensor is built on AlphaZero[1], where a neural network is trained to guide a planning procedure searching for efficient matrix multiplication algorithms. Our framework uses a single agent to decompose matrix multiplication tensors of various sizes, yielding

[1]DeepMind, London, UK. [*]These authors contributed equally: Alhussein Fawzi, Matej Balog, Aja Huang, Thomas Hubert and Bernardino Romera-Paredes. [4]e-mail: alhaz@deepmind.com

Tensoren und Maschinelles Lernen

Tensoren wurden als handliches Werkzeug zuerst in der Physik erfunden, aus den Bedürfnissen konkreter Rechnungen, dann in der Mathematik konsolidiert, ihre Theorie eingehend untersucht und optimiert.

Inzwischen sind Tensoren in der Informatik angekommen, etwa zur schnellen Matrixmultiplikation und jüngst im Maschinellen Lernen.

Erstaunlicherweise wirkt dies auch zurück: 2022 haben Forscher:innen von Googles KI-Labor *DeepMind* nach effizienten „Tensorzerlegungen“ zur schnellen Matrixmultiplikation gesucht. Ihr Erfolg mit *Reinforcement Learning* schlug hohe Wellen und schaffte es auf die Titelseite von *Nature*.

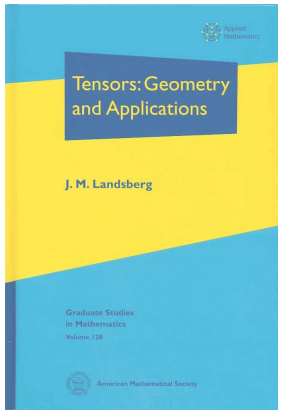
📖 A. Fawzi *et al.*: *Discovering faster matrix multiplication algorithms with reinforcement learning*. Nature 610 (2022) 47–53.

Schnelle Matrixmultiplikation ist überall willkommen in Physik, Ingenieurwesen, Informatik und speziell im Maschinellen Lernen. Wenn Sie Freude an dieser Verbindung von Mathematik und Informatik haben, dann bietet Ihnen das folgende Video eine schöne Einführung.

Tensoren und Computer-Algebra

Quanta Magazine, `youtu.be/fDAPJ7rvcUw`, zu schneller Matrixmultiplikation, Tensoren und Machine Learning.

Tensoren und Geometrie



Anwendung ist schön und gut und willkommen, doch manche mögen es solide mathematisch, lieber nachhaltig und möglichst allgemein.

Dazu zeigt Landsbergs Buch eine schöne Route. Kapitel 1&2 sind online frei zugänglich, siehe `people.tamu.edu/~jml/Tbookintro.pdf`.

🙂 Ja, es gibt ganze Lehrbücher, die sich Tensoren widmen!

🙂 Tensoren sind weiterhin ein schönes Thema für Proseminare, Seminare, Sesquinare, uvm.

❓ Lieber elegant abstrakt oder konkret anwendungsorientiert? Manche Studierende wünschen sich reale Anwendungen, denn sie helfen zur Anschauung und fördern die Motivation. Andere scheuen, ja fürchten reale Beispiele, denn sie sind naturgemäß kompliziert und anstrengend. Manche schaffen sogar beides, erst Beispiele fordern, dann verschmähen. Vertrauen Sie, bleiben Sie mutig und neugierig und offen für beides!

Erinnerung: externe Summe und direkte Summe

Definition X1A: externe Summe und direkte Summe ↔ L3J

Gegeben seien (zentrale) Vektorräume U, V und W über einem Körper K. Wir skalieren beidseits $\lambda v = v\lambda$ für alle Vektoren v und Skalare $\lambda \in K$.

(1) Eine **Summe** von U und V nach W ist eine **K–lineare Abbildung**

$$\oplus : U \times V \to W : (u, v) \mapsto w = u \oplus v.$$

Das heißt ausgeschrieben für alle $u, u' \in U$ und $v, v' \in V$ und $\lambda \in K$:

$$(u + u') \oplus (v + v') = (u \oplus v) + (u' \oplus v'), \quad (u\lambda) \oplus (v\lambda) = (u \oplus v)\lambda.$$

(2) **Basiseigenschaft**: Zu Basen $(u_i)_{i\in I}$ von U und $(v_j)_{j\in J}$ von V ist die Summenfamilie $\big((u_i \oplus 0)_{i\in I}, (0 \oplus v_j)_{j\in J}\big)$ eine Basis von W.

Gilt diese Basiseigenschaft, so nennen wir $\oplus : U \times V \to W$ **frei** oder eine **direkte Summe** von U und V in den Summenraum $W =: U \oplus V$.

Bei direkten Summen addieren sich die Dimensionen:

$$\dim(U \oplus V) = \dim(U) + \dim(V)$$

Erinnerung: externe Summe und direkte Summe

Triviale Summe: Zu je zwei Räumen U, V haben wir die triviale Summe

$$+ : U \times V \to \{0\} : (u, v) \mapsto 0$$

Sie ist nicht direkt, außer im trivialen Fall $U = V = \{0\}$.

Interne Summe: Für Unterräume $U, V \le W$ haben wir die interne Summe

$$+ : U \times V \to W : (u, v) \mapsto u + v.$$

Sie ist direkt gdw $U \cap V = \{0\}$ und $U + V = W$, kurz $W = U \oplus V$. (L3J)

Kanonisches Modell: Zu $I \cap J = \emptyset$ haben wir die direkte Summe

$$\oplus : K^{(I)} \times K^{(J)} \to K^{(I \sqcup J)} : (u, v) \mapsto u \sqcup v.$$

Implementierung auf dem Computer? Aneinanderhängen von Listen!

⚠ Wir erlauben, dass $u \in U$ und $v \in V$ und $u + v \in W$ in *verschiedenen* Räumen liegen, zur Betonung sprechen wir von einer *externen* Summe.

⚠ Externe Summen $\oplus : U \times V \to W$ gibt es im Allgemeinen sehr viele: Nennen Sie 1000 Summen $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$, davon 100 direkte, siehe X106.

Außenperspektive: die universelle Abbildungseigenschaft

☺ Mit Definition X1A können wir konkret rechnen, alles ist explizit! Wir können sofort in Koordinaten rechnen, denn für W haben wir die Summenbasis $(w_k)_{k\in I\sqcup J}$ mit $w_i = u_i \oplus 0$ für $i \in I$ und $w_j = 0 \oplus v_j$ für $j \in J$. (Alles gilt ebenso für freie Räume U, V über jedem beliebigen Ring K)

☺ Zudem erhalten wir nun mühelos weitere wichtige Eigenschaften, insbesondere K–lineare Abbildungen zwischen (direkten) Summen:

Satz X1B: universelle Abbildungseigenschaft einer direkten Summe

(0) Sei $\oplus : U \times V \to W$ eine direkte und $\oplus' : U \times V \to W'$ eine Summe. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $f : W \to W'$ mit $\oplus' = f \circ \oplus$.

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[d, "\exists! f", "\text{linear}"'] & (w_k)_{k\in I\sqcup J} \arrow[d, mapsto, "\text{PLF N1B}"'] \\
U \times V \arrow[ur, "\oplus", "\text{linear}"'] \arrow[r, "\oplus'", "\text{linear}"'] & W' & (w'_k)_{k\in I\sqcup J}
\end{tikzcd}$$

Existenz und Eindeutigkeit von f folgen sofort aus der Basiseigenschaft X1A dank dem Prinzip der linearen Fortsetzung (PLF, Satz N1B).

Außenperspektive: die universelle Abbildungseigenschaft

Satz X1B: Eindeutigkeit und Existenz der direkten Summe → X2D

(1) Zu je zwei direkten Summen $\oplus : U \times V \to W$ und $\oplus' : U \times V \to W'$ existiert genau ein Isomorphismus $(f, f') : W \cong W'$ mit $\oplus' = f \circ \oplus$.

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[loop right, "\mathrm{id}_W"] \arrow[d, shift right, "\exists! f"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
U \times V \arrow[ur, "\oplus", "\text{linear}"'] \arrow[r, "\oplus'", "\text{linear}"'] & W' \arrow[loop right, "\mathrm{id}_{W'}"] \arrow[u, shift right, "\exists! f'"']
\end{tikzcd}$$

Eindeutigkeit trotz Wahlfreiheit: Alice und Bob konstruieren ihre direkten Summen wie sie mögen. Je zwei direkte Summen lassen sich eindeutig übersetzen.

(2) Zu je zwei K–Vektorräumen U und V existiert eine direkte Summe; das kanonische Modell ist $\oplus : U \times V \to W := U \times V$ mit $u \oplus v = (u, v)$.

Beweis: (1) Dank (0) existieren eindeutige Kandidaten $f : W \to W'$ und $f' : W' \to W$. Dank Eindeutigkeit (0) gilt $f' \circ f = \mathrm{id}_W$ und $f \circ f' = \mathrm{id}_{W'}$.

(2) Das kartesische Produkt $U \times V$ mit koordinatenweiser Addition und Skalierung (L2D) erfüllt die ersehnte Basiseigenschaft X1A. QED

Erinnerung: das kartesische Produkt als direkte Summe

Satz X1c: das kartesische Produkt als direkte Summe → L2D

Gegeben seien (zentrale) Vektorräume U und V über einem Körper K.

(1) Zu U, V haben wir das kartesische Produkt als **direkte Summe**:

$$\begin{aligned} U \times V &:= \{(u,v) \mid u \in U,\, v \in V\} \;=\; U' + V' \\ \text{mit}\quad (i_1, p_1) &: U \cong U' := U \times \{0\} : u \mapsto (u,0) \\ \text{und}\quad (i_2, p_2) &: V \cong V' := \{0\} \times V : v \mapsto (0,v) \end{aligned}$$

Intern gilt $U \times V = U' + V'$ mit $U' \cap V' = \{0\}$, kurz $U \times V = U' \overset{\text{int}}{\oplus} V'$.
Extern haben wir $\oplus = \mathrm{id} : U \times V \to U \times V$, kurz $U \times V = U \overset{\text{ext}}{\oplus} V$.

(2) **Basiseigenschaft**: Zu Basen $(u_i)_{i\in I}$ von U und $(v_j)_{j\in J}$ von V ist ihre disjunkte Vereinigung $(w_k)_{k\in I\sqcup J}$ eine Basis des Raums $U \times V$, wobei $I \cap J = \emptyset$ und $w_i = (u_i, 0)$ für $i \in I$ und $w_j = (0, v_j)$ für $j \in J$.

☺ Damit können wir konkret rechnen, denn alles liegt explizit vor!
Alles gilt ebenso für freie Räume U, V über einem kommutativen Ring.

Erinnerung: das kartesische Produkt als direkte Summe

Aufgabe: Nennen Sie 1000 Summen $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$, davon 100 direkte.

Lösung: Die kanonische Summe $(x_1; x_2) \oplus (x_3; x_4; x_5) = (x_1; \dots; x_5)$ ist direkt. Jede Summe $\oplus'$ hat die Form $(x_1; x_2) \oplus' (x_3; x_4; x_5) = A(x_1; \dots; x_5)$ mit $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, dank UAE X1B. Die Summe $\oplus'$ ist direkt gdw $A \in \mathrm{GL}_5\,\mathbb{R}$.

Aus mengentheoretischer Sicht konstruieren wir den Raum $U \times V$ als kartesisches Produkt mit koordinatenweiser Addition und Skalierung. Aus Sicht der linearen Räume ist dies die kanonische direkte Summe.

Allgemein unterscheiden wir das (kartesische) Produkt $\prod_{i\in I} V_i$ und darin die (externe bzw. interne) direkte Summe $\bigoplus_{i\in I} V_i$. Allgemein gilt hierbei (nur) die Inklusion $\bigoplus_{i\in I} V_i \le \prod_{i\in I} V_i$, und Gleichheit gilt für jede endliche Indexmenge I. (L2D)

Die Konstruktion einer Basis durch Aneinanderhängen zeigt:
Die Dimension der Summe ist die Summe der Dimensionen.
Mit dieser Konstruktion können wir Vektorräume addieren.
Als nächstes wollen wir Vektorräume auch multiplizieren.

Produkte sind bilineare Abbildungen.

Sei $(R, +, \cdot)$ irgendein Ring und darin $K \le Z(R)$ ein zentraler Teilkörper, etwa der Polynomring $R = K[X]$ oder der Matrixring $R = K^{n\times n}$ über K. Dann ist $R = U = V = W$ ein K–Vektorraum und das Produkt K–bilinear:

$$\cdot : U \times V \to W : (u,v) \mapsto u \cdot v.$$

Für alle $u, u' \in U,\ v, v' \in V,\ \lambda \in K$ gilt:

(HM) $(u\lambda) \cdot v = u \cdot (\lambda v)$,
(AL) $(u + u') \cdot v = (u \cdot v) + (u' \cdot v)$, (HL) $(\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v)$,
(AR) $u \cdot (v + v') = (u \cdot v) + (u \cdot v')$, (HR) $u \cdot (v\lambda) = (u \cdot v)\lambda$.

Für K–lineare Teilräume $U, V \le R$ betrachten wir den Produktaufspann

$$W = U \odot_K V := \langle u \cdot v \mid u \in U,\, v \in V \rangle_K \le R$$

als K–Unterraum aller Produkte. Wir erhalten so das (externe) Produkt

$$\odot : U \times V \to W : (u,v) \mapsto u \odot v.$$

Auch diese eingeschränkte Abbildung ist weiterhin bilinear über K.

Produkte sind bilineare Abbildungen.

Beispiel: Im Polynomring $R = K[X]$ über dem Körper K betrachten wir

$$\odot : K[X]_{\le p} \times K[X]_{\le q} \to K[X]_{\le p+q} : (u,v) \mapsto u \cdot v.$$

Die Basen $(X^i)_{i\le p}$ von $U = K[X]_{\le p}$ und $(X^j)_{j\le q}$ von $V = K[X]_{\le q}$ werden abgebildet auf die Produktfamilie $(X^{i+j})_{i\le p}^{j\le q}$. Sie erzeugt $W = K[X]_{\le p+q}$.
Ist sie eine Basis? Das gilt gdw $(p+1)(q+1) = p+q+1$, also $pq = 0$.
☺ Nur für $p = 0$ oder $q = 0$ ist die Produktfamilie eine Basis.
☹ Für $p \ge 1$ und $q \ge 1$ ist die Produktfamilie keine Basis.

Beispiel: In $K[X]$ betrachten wir $U = \langle 1, X^3 \rangle_K^!$ und $V = \langle 1, X, X^2 \rangle_K^!$. Damit erhalten wir $W = U \odot_K V = \langle 1, X, \dots, X^5 \rangle_K^!$ und das Produkt

$$\odot : U \times V \to W : (u,v) \mapsto u \cdot v.$$

Die Basen $(X^i)_{i=0,3}$ von U und $(X^j)_{j=0,1,2}$ von V werden abgebildet auf die Produktfamilie $(X^{i+j})_{i=0,3}^{j=0,1,2}$. Sie erzeugt W über K und zudem frei!
☺ Diese wertvolle Basiseigenschaft erheben wir nun zur Definition!

Vorschau: das Tensorprodukt für Eilige

Definition X1D: das Tensorprodukt und seine Basiseigenschaft

Gegeben seien zentrale Vektorräume U, V und W über einem Körper K.

(1) Ein **Produkt** von U und V nach W ist eine **K–bilineare Abbildung**

$$\otimes : U \times V \to W : (u, v) \mapsto w = u \otimes v.$$

Für alle $u, u' \in U,\ v, v' \in V,\ \lambda \in K$ gilt:

(HM) $(u\lambda) \otimes v = u \otimes (\lambda v)$,

(AL) $(u + u') \otimes v = (u \otimes v) + (u' \otimes v)$,

(HL) $(\lambda u) \otimes v = \lambda(u \otimes v)$,

(AR) $u \otimes (v + v') = (u \otimes v) + (u \otimes v')$,

(HR) $u \otimes (v\lambda) = (u \otimes v)\lambda$.

(2) **Basiseigenschaft**: Zu Basen $(u_i)_{i\in I}$ von U und $(v_j)_{j\in J}$ von V ist die Produktfamilie $(u_i \otimes v_j)_{(i,j)\in I\times J}$ eine Basis von W.

Gilt diese Basiseigenschaft, so nennen wir $\otimes : U \times V \to W$ **frei** oder ein **Tensorprodukt** von U und V in den Tensorraum $W =: U \otimes_K V$.

Bei Tensorprodukten multiplizieren sich die Dimensionen:

$$\dim(U \otimes V) = \dim(U) \cdot \dim(V)$$

Vorschau: das Tensorprodukt für Eilige

(1) Homogenität mittig (HM) folgt aus (HL) und (HR) dank Zentralität:

$$(u\lambda) \otimes v \overset{\text{Znt}}{=} (\lambda u) \otimes v \overset{\text{HL}}{=} \lambda(u \otimes v) \overset{\text{Znt}}{=} (u \otimes v)\lambda \overset{\text{HR}}{=} u \otimes (v\lambda) \overset{\text{Znt}}{=} u \otimes (\lambda v)$$

(2) Die „eilige“ Definition X1D über die Basiseigenschaft ist die schnellste, doch nicht immer die beste. Wir optimieren und verallgemeinern sie später zur universellen Abbildungseigenschaft, siehe Definition X2A. Über einem Körper sind beide Eigenschaften äquivalent dank Satz X2C.

☺ Unter allen Produkten ist das Tensorprodukt das beste, das freiste. Damit können wir sofort konkret rechnen, denn wir haben eine Basis!

? Inwiefern sind Tensorprodukte eindeutig? Wir beweisen anschließend die Eindeutigkeit bis auf eindeutige Isomorphie X1G (basisfrei X2D).

? Existenz erfordert eine Konstruktion, etwa durch Matrizen X1E oder Polynome X1F, zusammengefasst X1G (später basisfrei als Quotient X2F).

☺ Definition X1D enthält vorab schon genug Information, um sofort damit rechnen zu können, daher der Slogan „Tensorprodukt für Eilige“.

Wie rechnen wir mit Tensoren?

Aufgabe: (0) Nennen Sie eine Basis des Tensorraums $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$.
(1) Sind darin die Tensoren $(0, 1) \otimes (1, 0)$ und $(1, 0) \otimes (0, 1)$ gleich?

Lösung: (0) Wir wählen die Standardbasis (e_1, e_2) für $U = V = \mathbb{R}^2$.
Im Tensorraum $W = U \otimes_{\mathbb{R}} V$ erhalten wir daraus die Produktbasis

$$(\, e_1 \otimes e_1,\ e_1 \otimes e_2,\ e_2 \otimes e_1,\ e_2 \otimes e_2\,).$$

(1) Damit können wir die Tensoren $e_2 \otimes e_1$ und $e_1 \otimes e_2$ vergleichen:

$$e_2 \otimes e_1 = 0 \cdot (e_1 \otimes e_1) + 0 \cdot (e_1 \otimes e_2) + 1 \cdot (e_2 \otimes e_1) + 0 \cdot (e_2 \otimes e_2)$$
$$e_1 \otimes e_2 = 0 \cdot (e_1 \otimes e_1) + 1 \cdot (e_1 \otimes e_2) + 0 \cdot (e_2 \otimes e_1) + 0 \cdot (e_2 \otimes e_2)$$

☺ Die Tensoren $e_2 \otimes e_1$ und $e_1 \otimes e_2$ in $W = U \otimes_{\mathbb{R}} V$ sind verschieden!

In diesem kleinen Beispiel stört nur der numerische Zufall $2 \cdot 2 = 2 + 2$.
Erinnerung: Beim Tensorprodukt multiplizieren sich die Dimensionen.
Das Tensorprodukt $\mathbb{R}^3 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^5$ etwa hat die Dimension $3 \cdot 5 = 15$,
die Summe $\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^5$ hingegen hat die Dimension $3 + 5 = 8$.

Wie rechnen wir mit Tensoren?

☺ Definition X1D(2) begründet das folgende Vergleichsverfahren:

Algo X1D: Vergleich von zwei Tensoren in $U \otimes_K V$

Eingabe: zwei Elemente w_1, w_2 des Tensorraums $U \otimes_K V$
Ausgabe: „gleich“ falls $w_1 = w_2$ oder „ungleich“ falls $w_1 \neq w_2$

1: Schreibe w_1 und w_2 in der gewählten Produktbasis von $U \otimes_K V$
2: Vergleiche diese Linearkombinationen koeffizientenweise

Mit diesem einfachen Trick X1D(2) haben wir die vorige Aufgabe gelöst, und genau so gelingt es für jedes Tensorprodukt über einem Körper.

Schon bei der Definition mathematischer Objekte $A, B, \ldots$ müssen wir insbesondere klären, wenn Gleichheit $A = B$ gilt und wann $A \neq B$.

Dies gilt beispielsweise für den Vergleich von Mengen, Funktionen, Zahlen, Polynomen, Matrizen, Vektoren, … und nun von Tensoren.

Zum effizienten Rechnen gehört wie immer als allererster Schritt, je zwei Elemente möglichst effizient auf Un/Gleichheit zu prüfen.

Einfache Tensoren und Tensorrang

Definition X1D: Tensoren, einfach vs verschränkt [*simple vs entangled*]

(3) Jedes Element $w \in U \otimes_K V$ des Tensorraums nennen wir einen **Tensor**.

Gilt $w = u \otimes v$ mit $u \in U$ und $v \in V$, so nennen wir den Tensor w **einfach** oder **elementar** oder **rein**, andernfalls heißt der Tensor w **verschränkt**.

Für $w \in U \otimes_K V$ gilt $w = \sum_{i=1}^r u_i \otimes v_i$ mit $r \in \mathbb{N}$ sowie $u_i \in U$ und $v_i \in V$. Wir sagen, w hat **Rang** $\le r$. Rang genau r bedeutet $\le r$, aber nicht $< r$.

Anders gesagt, die Menge der **einfachen Tensoren** ist das Bild der Produktabbildung $\otimes : U \times V \to U \otimes_K V$. Diese ist i.A. nicht surjektiv!

Der Tensorraum besteht aus allen **Summen** einfacher Tensoren; solche Summen sind im Allgemeinen keine einfachen Tensoren.

Übung: Für welche $r, s \in \mathbb{N}$ ist $\otimes : \mathbb{F}_q^r \times \mathbb{F}_q^s \to \mathbb{F}_q^r \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q^s$ surjektiv?

Der Tensorraum erlaubt immer eine **Basis** aus *einfachen* Tensoren, zum Beispiel jede Produktbasis. Es gibt viele weitere Möglichkeiten.

Übung: Finden Sie in $K^2 \otimes_K K^2$ eine Basis aus *verschränkten* Tensoren.

Einfache Tensoren und Tensorrang

Aufgabe: Im Tensorraum $W = K^2 \otimes_K K^2$ betrachten wir zu $a, b, c, d \in K$ den Tensor $w = a \cdot (e_1 \otimes e_1) + b \cdot (e_1 \otimes e_2) + c \cdot (e_2 \otimes e_1) + d \cdot (e_2 \otimes e_2)$. Genau dann ist w einfach, also $w = u \otimes v$, wenn $ad - bc = 0$ gilt.

Lösung: (1) Die Implikation „$\Rightarrow$“ ist klar, denn wir finden

$$\begin{aligned} w = u \otimes v &= (u_1 e_1 + u_2 e_2) \otimes (v_1 e_1 + v_2 e_2) \\ &= u_1 v_1 (e_1 \otimes e_1) + u_1 v_2 (e_1 \otimes e_2) + u_2 v_1 (e_2 \otimes e_1) + u_2 v_2 (e_2 \otimes e_2). \end{aligned}$$

Für diesen Tensor w gilt somit $ad - bc = u_1 v_1 \cdot u_2 v_2 - u_1 v_2 \cdot u_2 v_1 = 0$.

☺ Allgemein: Gilt $\dim U \ge 2$ und $\dim V \ge 2$, so ist die Produktabbildung $\otimes : U \times V \to U \otimes_K V$ nicht surjektiv, d.h. nicht jeder Tensor ist einfach.

(2) Auch die Umkehrung „$\Leftarrow$“ ist bemerkenswert. Der Fall $w = 0$ ist klar. Sei also $w \ne 0$, etwa $a \ne 0$. Für $u = ae_1 + ce_2$ und $v = 1e_1 + (b/a)e_2$ gilt dann $u \otimes v = w$. Die Fälle $b \ne 0$, $c \ne 0$, $d \ne 0$ sind analog.

☺ Für Tensoren der Form $t \in U \otimes_K V$ lässt sich der Rang bestimmen wie für Matrizen dank Gauß–Algorithmus X501. (Das gilt nur *zweiter* Stufe.)

Matrizen als vertrautes Beispiel

Beispiel X1E: Matrixmodell des Tensorprodukts

$$\boxed{\cdot : K^{p\times 1} \times K^{1\times q} \to K^{p\times q} : (u, v) \mapsto u \cdot v.}$$

Dieses Matrixprodukt bedeutet ausgeschrieben für $(p, q) = (3, 4)$:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 & u_1 v_4 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 & u_2 v_4 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 & u_3 v_4 \end{bmatrix}$$

Dies erfüllt die geforderten Eigenschaften eines Tensorprodukts:

1. Die Produktabbildung $\cdot$ ist bilinear über dem Grundkörper K. (§D1)
2. Aus den Basen $(e_1, \dots, e_p)$ von $K^{p\times 1}$ und $(e_1^\top, \dots, e_q^\top)$ von $K^{1\times q}$ erhalten wir die Produktbasis $(e_{i,j} = e_i \cdot e_j^\top)_{i=1,\dots,p}^{j=1,\dots,q}$ von $K^{p\times q}$.

So unterscheiden wir $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ und $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, siehe X111.

Effiziente Berechnung: Hier gilt Tensorrang gleich Matrixrang. (X501)

Matrizen als vertrautes Beispiel

Notation: Für dieses **dyadische Produkt** nutzt man üblicherweise die bequeme Schreibweise $\otimes : K^p \times K^q \to K^{p\times q} : (u_i)_i \otimes (v_j)_j = (u_i v_j)_{i,j}$. Dies verallgemeinern wir später zum Kronecker–Produkt X3H; hier sehen wir schon den Spezialfall $\otimes : K^{p\times 1} \times K^{1\times q} \to K^{p\times q}$.

☺ Wir nutzen dankend Matrixrang und Gauß–Algorithmus, siehe X501.

Aufgabe: Einfache Tensoren sind genau die Matrizen vom Rang ≤ 1.

Lösung: „$\Rightarrow$“: Für $u \in K^{p\times 1}$ und $v \in K^{1\times q}$ hat $w = uv$ den Rang ≤ 1, denn alle Spalten der Matrix w sind Vielfache des Spaltenvektors u. Ebenso: Alle Zeilen von $w = uv$ sind Vielfache des Zeilenvektors v. Wir erinnern uns an Satz M3I: Zeilenrang gleich Spaltenrang.

„$\Leftarrow$“: Hat $w \in K^{p\times q}$ den Rang 1, so enthält w einen Spaltenvektor $u \in K^{p\times 1} \setminus \{0\}$, und alle anderen Spalten sind Vielfache von u. Also existiert ein Zeilenvektor $v \in K^{1\times q} \setminus \{0\}$, sodass $w = uv$ gilt. Hat w den Rang 0, so gilt $w = 0$, also $w = uv$ mit $u = 0$ oder $v = 0$.

Übung: Sind Tensorprodukte über einem Körper nullteilerfrei?

Matrizen als vertrautes Beispiel

Wiederholung: Ist $K^n \times K^n \to K : (u,v) \mapsto u^\intercal v$ ein Produkt? gar ein Tensorprodukt? dagegen $K^n \times K^n \to K : (u,v) \mapsto uv^\intercal$? Allgemein:

Aufgabe: Hat die Matrixmultiplikation $\cdot : K^{p\times r} \times K^{r\times q} \to K^{p\times q}$ allgemein für $p,q,r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Eigenschaften eines Tensorprodukts?

Lösung: Nein. Das Produkt $\cdot : K^{p\times r} \times K^{r\times q} \to K^{p\times q}$ ist zwar bilinear über K, aber für $r \geq 2$ fehlt ihm die geforderte Basiseigenschaft!

Zu Basen $(u_i)_{i\in I}$ von $U = K^{p\times r}$ und $(v_j)_{j\in J}$ von $V = K^{r\times q}$ ist die Produktfamilie $(u_i \otimes v_j)_{(i,j)\in I\times J}$ keine Basis des Raums $W = K^{p\times q}$.

Wir sehen dies hier bereits an den Dimensionen, denn die erwartete Multiplikativität $pr \cdot rq \overset{!}{=} pq$ ist wegen $p,q \geq 1$ nur für $r = 1$ möglich.

☺ Für $r = 1$ erhalten wir gerade das obige dyadische Beispiel X1E. Für $r \geq 2$ hingegen hat das Matrixprodukt nicht die Basiseigenschaft! Für unser Repertoire an Gegen/Beispielen ist das ebenso nützlich. Das Kronecker–Produkt X3H erweist sich hier als Tensorprodukt.

Matrizen als vertrautes Beispiel

Aufgabe: Zeigen Sie, dass für je zwei endlich-dimensionale Räume U und V über K ein Tensorprodukt $\otimes : U \times V \to U \otimes_K V$ existiert.

Lösung: Nach Wahl von Basen (M2K) haben wir $U \cong K^p$ und $V \cong K^q$. Für die Modellräume K^p und K^q haben wir das obige Tensorprodukt

$$\otimes : K^p \times K^q \to K^{p\times q} : (u_i)_i \otimes (v_j)_j = (u_i v_j)_{i,j}.$$

Die zugehörige Komposition $U \times V \xrightarrow{\sim} K^p \times K^q \to K^{p\times q}$ ist bilinear über K und hat die Basiseigenschaft, ist also ein Tensorprodukt von U und V.

☺ Diese Konstruktion ist zwar korrekt, doch irgendwie *quick and dirty*. Die Wahl einer Basis ist immer ein Akt der Willkür, ganz besonders hier. Zudem gelingt dieser Trick zunächst nur in endlicher Dimension. Polynome zeigen, (Tensor)Produkte in unendlicher Dimension.

☺ Wir werden in Satz X2F eine allgemeine und basisfreie Konstruktion ausführen, statt *quick and dirty* ist sie besser *long-lasting and elegant*, also nachhaltig und elegant, allerdings auch etwas aufwändiger.

Polynome als vertrautes Beispiel

Beispiel X1F: Polynommodell des Tensorprodukts

Wir betrachten $U = K[X]$ und $V = K[Y]$ und $W = K[X,Y]$ mit

$$\boxed{\cdot : K[X] \times K[Y] \to K[X,Y] : (u,v) \mapsto u \cdot v.}$$

Dieses Polynomprodukt bedeutet ausgeschrieben:

$$\left(\textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i X^i\right) \cdot \left(\textstyle\sum_{j\in\mathbb{N}} v_j Y^j\right) = \textstyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_i v_j X^i Y^j$$

Dies erfüllt die geforderten Eigenschaften eines Tensorprodukts:

1. Die Produktabbildung $\cdot$ ist bilinear über dem Grundkörper K. (§C1)
2. Die Monombasen $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ von $U = K[X]$ und $(Y^j)_{j\in\mathbb{N}}$ von $V = K[Y]$ ergeben als Produkte $(X^i Y^j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ eine Basis von $W = K[X,Y]$.

Dasselbe gilt endlich-dimensional für $U = K[X]_{<p}$ und $V = K[Y]_{<q}$ mit $W = \langle X^i Y^j \mid i < p,\ j < q \rangle_K^!$ und entspricht obigem Matrixmodell X1E.

So interpretieren wir $(0,1) \otimes (1,0)$ als $(0X^0 + 1X^1) \cdot (1Y^0 + 0Y^1) = X$, hingegen $(1,0) \otimes (0,1)$ als $(1X^0 + 0X^1) \cdot (0Y^0 + 1Y^1) = Y$, siehe X111.

Polynome als vertrautes Beispiel

☺ Die Definition X1D über die Basiseigenschaft funktioniert problemlos auch für unendlich-dimensionale Räume, wie Polynome hier illustrieren.

Aufgabe: Hat die Polynommultiplikation $\cdot : K[X] \times K[X] \to K[X]$ in einer Variablen ebenfalls die Eigenschaften eines Tensorprodukts?

Lösung: Nein. Das Produkt $\cdot : K[X] \times K[X] \to K[X]$ ist zwar bilinear, aber ihm fehlt leider die geforderte Basiseigenschaft der Definition X1D:

⚠ Zu den Basen $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ von $U = K[X]$ und $(X^j)_{j\in\mathbb{N}}$ von $V = K[X]$ ist die Produktfamilie $(X^{i+j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ keine Basis des Raums $W = K[X]$.

⚠ Die beiden Familien $(X^{i+j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ und $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ erzeugen zwar denselben Teilraum in $K[X]$, sind aber dennoch sehr verschieden. Die zweite ist linear unabhängig, sogar eine Basis, die erste nicht!

☺ Oft hilft die endliche Dimension. Hier gelingt es auch allgemein. Die Forderungen an das Tensorprodukt bedeuten anschaulich: (1) Es ist tatsächlich ein Produkt, also bilinear. (2) Dieses Produkt ist so frei wie möglich, das heißt, es erfüllt die Basiseigenschaft.

Außenperspektive: die universelle Abbildungseigenschaft

☺ Mit Definition X1D können wir konkret rechnen, alles ist explizit! Insbesondere haben wir Basen und können in Koordinaten rechnen. (Alles gilt ebenso über jedem CRing K für freie, zentrale Räume U, V; zur Vereinfachung betrachte ich jedoch zunächst speziell Körper.)

☺ Zudem erhalten wir nun mühelos weitere wichtige Eigenschaften, insbesondere K–lineare Abbildungen zwischen (Tensor-)Produkten:

Satz X1G: universelle Abbildungseigenschaft des Tensorprodukts

(0) Sei $\otimes : U \times V \to W$ ein Tensorprodukt. Jedes Produkt $\odot : U \times V \to Z$ faktorisiert zu $\odot = f \circ \otimes$ mit genau einer linearen Abbildung $f : W \to Z$.

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[d, "\exists! f", "\text{linear}"'] & (u_i \otimes v_j)_{(i,j)\in I\times J} \arrow[d, mapsto, "\text{PLF N1B}"'] \\ U \times V \arrow[ur, "\otimes", "\text{bilinear}"'] \arrow[r, "\text{bilinear}", "\odot"'] & Z & (u_i \odot v_j)_{(i,j)\in I\times J} \end{tikzcd}$$

Existenz und Eindeutigkeit von f folgen sofort aus der Basiseigenschaft X1D dank dem Prinzip der linearen Fortsetzung (PLF, Satz N1B).

Außenperspektive: die universelle Abbildungseigenschaft

Satz X1G: Eindeutigkeit und Existenz des Tensorprodukts → X2D

(1) Zu je zwei Tensorprodukten $\otimes : U \times V \to W$ und $\otimes' : U \times V \to W'$ existiert genau ein Isomorphismus $(f, f') : W \cong W'$ mit $\otimes' = f \circ \otimes$.

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[loop right, "\mathrm{id}_W"] \arrow[d, shift right, "\exists! f"', "\cong"] \\ U \times V \arrow[ur, "\otimes", "\text{bilinear}"'] \arrow[r, "\text{bilinear}", "\otimes'"'] & W' \arrow[loop right, "\mathrm{id}_{W'}"] \arrow[u, shift right, "\exists! f'"'] \end{tikzcd}$$

Eindeutigkeit trotz Wahlfreiheit: Alice und Bob konstruieren ihre Tensorprodukte wie sie mögen. Je zwei Tensorprodukte lassen sich eindeutig übersetzen.

(2) Zu je zwei K–Vektorräumen U und V existiert ein Tensorprodukt; das kanonische Modell ist $K^{(I)} \times K^{(J)} \to K^{(I\times J)}$ mit $(u_i)_i \otimes (v_j)_j = (u_i v_j)_{i,j}$.

Beweis: (1) Dank (0) existieren eindeutige Kandidaten $f : W \to W'$ und $f' : W' \to W$. Dank Eindeutigkeit (0) gilt $f' \circ f = \mathrm{id}_W$ und $f \circ f' = \mathrm{id}_{W'}$.
(2) Der Koordinatenraum $K^{(I\times J)}$ mit koordinatenweiser Addition und Skalierung (L2D) erfüllt die ersehnte Basiseigenschaft X1D. QED

Rechenregeln für Summe und Produkt von Vektorräumen

♦ **Satz X3A:** Rechenregeln für direkte Summe und Tensorprodukt

Sei K ein Körper. Für die direkte Summe $\oplus$ und das Tensorprodukt $\otimes$ von K–Vektorräumen U, V, W gelten die folgenden vertrauten Rechenregeln. Abkürzend steht hier 0 für den Nullraum und 1 für den Raum K über K.

	direkte Summe $\oplus$	Tensorprodukt $\otimes$
Ntr	$0 \oplus U \cong U \cong U \oplus 0$	$1 \otimes U \cong U \cong U \otimes 1$
Ass	$(U \oplus V) \oplus W \cong U \oplus (V \oplus W)$	$(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$
Com	$U \oplus V \cong V \oplus U$	$U \otimes V \cong V \otimes U$
AL	$(U \oplus V) \otimes W \cong (U \otimes W) \oplus (V \otimes W)$,	$0 \otimes U = 0$
AR	$U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$,	$U \otimes 0 = 0$

Übung: Konstruieren Sie hierzu die „natürlichen“ Isomorphismen. Auf den Basen sind die gewünschten Bijektionen jeweils klar. Daraus folgen die Isomorphismen dank Prinzip der linearen Fortsetzung (PLF, Satz N1B). Wiederholen Sie dazu die entsprechenden Rechenregeln G3J für Mengen.

Rechenregeln für Summe und Produkt von Mengen

♦ **Satz G3J:** Rechenregeln für Summe und Produkt

Für die disjunkte Vereinigung $\sqcup$ und das kartesische Produkt $\times$ von Mengen X, Y, Z gelten die folgenden vertrauten Rechenregeln. Hier steht $0 = \emptyset$ für die leere und $1 = \{0\}$ für die einelementige Menge.

	disjunkte Vereinigung $\sqcup$	kartesisches Produkt $\times$
Ntr	$0 \sqcup X \cong X \cong X \sqcup 0$	$1 \times X \cong X \cong X \times 1$
Ass	$(X \sqcup Y) \sqcup Z \cong X \sqcup (Y \sqcup Z)$	$(X \times Y) \times Z \cong X \times (Y \times Z)$
Com	$X \sqcup Y \cong Y \sqcup X$	$X \times Y \cong Y \times X$
AL	$(X \sqcup Y) \times Z \cong (X \times Z) \sqcup (Y \times Z)$,	$0 \times X = 0$
AR	$X \times (Y \sqcup Z) \cong (X \times Y) \sqcup (X \times Z)$,	$X \times 0 = 0$

☺ Dies sind grundlegende und wohlvertraute Operationen für Mengen. Sie liefern direkte Summen und Tensorprodukte für Koordinatenräume: $K^{(X)} \oplus K^{(Y)} \cong K^{(X\sqcup Y)}$, $K^{(X)} \otimes K^{(Y)} \cong K^{(X\times Y)}$. Wir erhalten $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1)$ dank card auf $(\mathtt{FinSet}, \sqcup, 0, \times, 1)$ sowie $\dim_K$ auf $(\mathtt{FinVec}_K, \oplus, 0, \otimes, 1)$.

Vertraute Anwendung: unabhängige Zufallsexperimente

L „Begegnet uns dies schon in der Schule?“ Erstaunlicherweise ja: Das Tensorprodukt modelliert unabhängige Zufallsexperimente!

Sei $\Omega = \{a_1, \dots, a_n\}^! \neq \emptyset$ eine endliche Menge mit $n \geq 1$ Elementen.

Eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung** auf Ω, kurz WVerteilung, ist eine Abbildung $p : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $p(a) \geq 0$ für alle $a \in \Omega$ mit $|p| = \sum_{a\in\Omega} p(a) = 1$.

Jedem möglichen **Ergebnis** $a \in \Omega$ weisen wir die Elementarwkt $p(a)$ zu. Für jedes **Ereignis** $E \subseteq \Omega$ summieren wir die Wkt zu $\mathbf{P}(E) = \sum_{a\in E} p(a)$.

Wir nennen $(\Omega, \mathbf{P})$ einen endlichen **Wahrscheinlichkeitsraum** (WRaum). Aus $\mathbf{P}$ erhalten wir umgekehrt $p(a) = \mathbf{P}(\{a\}) \geq 0$ und $\sum_{a\in\Omega} p(a) = 1$.

Das **unmögliche Ereignis** $\emptyset$ hat die Wkt $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$. Das **sichere Ereignis** Ω hat die Wkt $\mathbf{P}(\Omega) = 1$. Für jedes Ereignis $E \subseteq \Omega$ gilt $0 \leq \mathbf{P}(E) \leq 1$.

Beispiel: Die **Gleichverteilung** auf Ω mit $|\Omega| = n$ ist gegeben durch $u(a) = 1/n$ für alle $a \in \Omega$. Für alle $E \subseteq \Omega$ gilt somit $\mathbf{U}(E) = |E|/|\Omega|$.

In Worten: Bei Gleichverteilung ist die Wkt eines Ereignisses $E \subseteq \Omega$ der Quotient von „günstigen Ergebnissen“ durch „mögliche Ergebnisse“.

Vertraute Anwendung: unabhängige Zufallsexperimente

Jeden WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$ können wir als ein **Zufallsexperiment** betrachten, etwa als einen Lostopf Ω mit Losen $a \in \Omega$ und zugehörigen Wkten $\mathbf{P}(E)$.

Beispiel: Wir betrachten Ergebnismengen $\Omega_1 = \{a, a'\}$ und $\Omega_2 = \{b, b'\}$, und auf $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(a,b), (a',b), (a,b'), (a',b')\}$ folgende Wkten:

Wkt $\mathbf{P}$	b	b'	ges. $\mathbf{P}_1$
a	0.28	0.12	0.40
a'	0.42	0.18	0.60
ges. $\mathbf{P}_2$	0.70	0.30	1.00

Wkt $\mathbf{Q}$	b	b'	ges. $\mathbf{Q}_1$
a	0.30	0.10	0.40
a'	0.40	0.20	0.60
ges. $\mathbf{Q}_2$	0.70	0.30	1.00

Hier ist $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2$ eine Produktwkt / einfacher Tensor, beschreibt also die unabhängige Ausführung der Experimente $(\Omega_1, \mathbf{P}_1)$ und $(\Omega_2, \mathbf{P}_2)$. Hingegen ist $\mathbf{Q}$ keine Produktwkt, denn $\mathbf{Q} \neq \mathbf{Q}_1 \otimes \mathbf{Q}_2$, siehe X114.

Allgemein seien $(\Omega_1, \mathbf{P}_1)$ und $(\Omega_2, \mathbf{P}_2)$ endliche WRäume / Experimente. Die **unabhängige Ausführung** beider Experimente entspricht dann der Ergebnismenge $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \in \Omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega_2\}$ mit der Produktwkt $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2$ gegeben durch $p(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1) \cdot p_2(\omega_2)$.

Vertraute Anwendung: unabhängige Zufallsexperimente

Zusammenfassend definieren wir zu jeder endlichen Ergebnismenge Ω die zugehörige Menge $[\Omega]$ aller WVerteilungen auf Ω, ausgeschrieben

$$[\Omega] := \{p : \Omega \to \mathbb{R} \mid p \geq 0 \wedge \textstyle\sum_{a\in\Omega} p(a) = 1\} \subset \mathbb{R}^\Omega.$$

Beispiel X1H: unabhängige Zufallsexperimente als Tensorprodukt

Zu je zwei endlichen Mengen Ω_1 und Ω_2 ist das Tensorprodukt

$$\otimes : \mathbb{R}^{\Omega_1} \times \mathbb{R}^{\Omega_2} \to \mathbb{R}^{\Omega_1\times\Omega_2} : (p_1, p_2) \mapsto p_1 \otimes p_2$$

gegeben durch die punktweise Multiplikation

$$(p_1 \otimes p_2)(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1) \cdot p_2(\omega_2).$$

Für endliche Wahrscheinlichkeiten schränken wir dies ein zu

$$\otimes : [\Omega_1] \times [\Omega_2] \to [\Omega_1 \times \Omega_2] : (p_1, p_2) \mapsto p_1 \otimes p_2.$$

☺ Ausgeschrieben als Wktstafel auf $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ entspricht dieses Tensorprodukt von Wkten genau dem dyadischen Matrixprodukt X1E.

Vertraute Anwendung: unabhängige Zufallsexperimente

M „Noch suggestiver ist die Schreibweise als Linearkombinationen $p = \sum_i p_i a_i$ und $q = \sum_j = q_j b_j$ und somit $p \otimes q = \sum_{i,j} p_i q_j\, a_i \otimes b_j$.“

L „In dieser Form sind Tensorprodukte sehr anschaulich und durch ihre Interpretation als Wkten ganz handfest und experimentell zugänglich.“

☺ Vierfeldertafeln, Matrizen und Polynome kennen Sie bereits aus der Schule und haben damit gute praktische Erfahrungen gesammelt.

☺ Seither nutzen Sie überall erfolgreich den Begriff der **stochastischen Unabhängigkeit**, also Produktwkten, und dies sind einfache Tensoren.

Wenn ich behaupte „Tensorprodukte kennen Sie bereits aus der Schule!“, meine ich, dass Sie schon damals erste einfache *Beispiele* genutzt haben. Die Schulbeispiele erkennen Sie nun vom höheren Standpunkt wieder!

Damals hat man Ihnen aus guten Gründen den allgemeinen Rahmen vorenthalten, dieser wäre für erste bescheidene Beispielrechnungen auch reichlich übertrieben und ermüdend. In der Schule wird das Vorgehen bestenfalls plausibilisiert. Immerhin, auch diese Beispiele sind illustrativ.

Exkurs: von klassischer Physik ⊕ zur Quantenphysik ⊗

P Die **klassische Physik** beschreibt den Zustand eines Systems durch deterministische Größen, etwa Massen $m_k \in \mathbb{R}$ mit Positionen $u_k \in \mathbb{R}^3$ und Geschwindigkeiten $v_k \in \mathbb{R}^3$ wie in **Newtons (Himmels-)Mechanik:**

$$\dot{u}_k \overset{(0)}{=} v_k, \quad \dot{v}_k \overset{(1)}{=} f_k(u) \overset{(2)}{=} \sum_{j \neq k} \gamma m_j \frac{u_j - u_k}{\|u_j - u_k\|^3}.$$

Zustandsraum ist einzeln $V_k = \mathbb{R}^6$, gemeinsam $\bigoplus_{k=1}^n V_k = \mathbb{R}^6 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}^6$.
Warum diese Beschreibung? Weil sie erfolgreich erklärt und vorhersagt!

Die **Quantenmechanik** beschreibt jeden Zustand durch einen Vektor

$$s \in (V, \langle\text{-}|\text{-}\rangle)$$

in einem $\mathbb{C}$–Vektorraum und Änderungen durch lineare Abbildungen.
Als kleinste Informationseinheit kann ein **Bit** nur den Zustand 0 oder 1 annehmen. Die Quantenmechanik erlaubt zudem **Überlagerungen**:

$$s = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle \quad \in \quad V = \langle |0\rangle, |1\rangle \rangle_{\mathbb{C}}^{!}$$

Warum diese Beschreibung? Weil sie erfolgreich erklärt und vorhersagt!

Exkurs: von klassischer Physik ⊕ zur Quantenphysik ⊗

Die Koeffizienten $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ heißen auch **Amplituden**. Alle möglichen Zustandsvektoren $s = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$ und der Nullvektor 0 bilden somit einen zweidimensionalen $\mathbb{C}$–Vektorraum $V \cong \mathbb{C}^2$.

Dieser trägt zudem ein Skalarprodukt mit Orthonormalbasis $(|0\rangle, |1\rangle)$. Die Absolutquadrate $|\alpha|^2$ und $|\beta|^2$ entsprechen Wahrscheinlichkeiten, dazu normieren wir den Zustand s, sodass $1 = \|s\| = |\alpha|^2 + |\beta|^2$ gilt.

Damit modelliert die Quantenmechanik Zufall, Superposition, Wellenphänomene und vieles mehr. Die hierzu verwendeten Rechenregeln formulieren wir in X7A als **Postulate der Quantenmechanik**.

Wie die Physiker:innen historisch, experimentell und theoretisch zu dieser raffinierten und sonderbaren Beschreibung gekommen sind, ist eine faszinierende Geschichte, leider auch lang und gewunden.

Ich will hier die Vogelperspektive einnehmen und mit ein paar groben Pinselstrichen skizzieren, wie unsere mathematischen Werkzeuge der Linearen Algebra hierbei wunderbar zum Einsatz kommen.

Anwendung: Tensoren im Quantencomputing

Wir betrachten zwei Teilchen, jedes mit zwei **Basiszuständen** $|0\rangle, |1\rangle$.
Das zusammengesetzte Zwei-Teilchen-System hat vier Basiszustände:

$$|00\rangle,\ |01\rangle,\ |10\rangle,\ |11\rangle \quad \in \quad V_1 \otimes V_2$$

Jeder Zustand ist eine **Überlagerungen** dieser Basiszustände, also

$$s = \alpha\,|00\rangle + \beta\,|01\rangle + \gamma\,|10\rangle + \delta\,|11\rangle$$

mit Koeffizienten $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$. Die möglichen Zustände und der Nullvektor bilden somit einen vierdimensionalen $\mathbb{C}$–Vektorraum.

☺ Aus n einzelnen Teilchen mit individuellen Zustandsräumen $V_1, \ldots, V_n$ entsteht das n–Teilchen-System mit Zustandsraum $V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

⚠ Hierbei werden die Dimensionen nicht addiert, sondern multipliziert.
Die Zustände der Teilchen bestehen nicht unabhängig nebeneinander, wie in $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$, sondern sind möglicherweise verschränkt (*entangled*).

⚠ Superposition ist ein fundamentales Prinzip der Quantenmechanik ohne klassische Entsprechung und daher ohne anschauliche Intuition.

Anwendung: Tensoren im Quantencomputing

Klassisch genügt zur Zustandsbestimmung von n Bits die Kenntnis der n Zustände $z_1, \ldots, z_n \in \{0, 1\}$. Dies ist ein Vektor $z \in \{0, 1\}^n$.
Die Menge der möglichen Zustände hat somit $N = 2^n$ Elemente,
Damit arbeiten klassische, binäre Computer sehr erfolgreich.

In der Quantenmechanik ist der Zustandsraum eines Systems ein $\mathbb{C}$–Vektorraum V. Ist $(v_1, \ldots, v_N)$ eine Basis, so können nicht nur diese Basiszustände auftreten, sondern auch Überlagerungen (Superpositionen), also alle $\mathbb{C}$–Linearkombinationen $s = \sum_{k=1}^N \alpha_k v_k$.

Die Zustandsbestimmung von n Quantenbits (Qubits) bedeutet somit die Kenntnis aller $N = 2^n$ komplexen Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{C}$.
Man kann sich fragen, wo die Natur die zusätzliche Speicher- und Rechenkapazität dafür hernimmt, aber so sind wohl die Spielregeln.

Dieses exponentielle Wachstum macht die Berechnung oder Simulation von Quantensystemen mit klassischen Computern nahezu unmöglich.
Umgekehrt schlug Richard Feynman 1982 vor, dies zur Entwicklung von Quantencomputern zu nutzen. Sie werden es wohl noch erleben.

Sind Anwendungsbeispiele ein Fluch oder ein Segen?

So manche:r stöhnt vermutlich: „Jetzt übertreibt der Prof: Wir müssen nicht nur Lineare Algebra lernen, jetzt auch noch Quantenmechanik!“

Ja, bitte nehmen Sie mögliche Anwendungen interessiert zur Kenntnis! Der Blick über den Tellerrand lohnt sich, gerade an der Uni Stuttgart.

Sind solche Exkurse übertrieben? ablenkend? oder gar überfordernd? Ich nenne drei Gründe für akademische Neugier und Abenteuerlust:

1. Wir sollten uns freuen, dass mathematische Begriffe und Techniken so überraschend vielseitig anwendbar sind: Was Sie in einem Gebiet lernen, können Sie in vielen anderen Gebieten erfolgreich wiederverwenden.

2. Speziell im Fall des Quantencomputing ist realistisch absehbar, dass dies Ihr Leben nachhaltig beeinflussen wird. Ich will daher nicht kommentarlos an diesem wichtigen Anwendungsbeispiel vorübergehen.

3. Das Studium mathematischer Grundlagen ist fundamental wichtig. Wir wollen abstrahieren, um zahlreiche Einzelfälle zusammenzufassen, zugleich auch motivieren, konkretisieren, illustrieren. Nur so geht es!

Sind Anwendungsbeispiele ein Fluch oder ein Segen?

Der Spagat zwischen diesen beiden Polen ist eine fragile Kunst: Einerseits die abstrakten Grundlagen: einfach, elegant, allgemein. Andererseits die konkreten Einzelfälle: verwirrend, sonderbar, speziell.

Manche vertauschen hier die Adjektive, das halte ich für einen Fehler. Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle.

Studierende fordern zu Recht motivierende Beispiele, Querverbindung zwischen den Themen und auch Bezug zu möglichen Anwendungen. Wir sollten uns also über jede Gelegenheit freuen, wo dies gelingt!

Be careful what you wish for, it might just come true!

Wird der Wunsch nach Beispielen und Anwendungen ernsthaft erfüllt, so fangen erfahrungsgemäß leider auch immer einige an zu jammern: Der Ruf nach Anwendungsbeispielen entsprang nicht ihrer Neugier, sondern der naiven Sehnsucht nach Einfachheit. Die ist oft unerfüllbar: Ehrliche Anwendungen sind meist nicht leichter zu verstehen, sondern komplizierter als die übergeordnete Theorie. Sie benötigen daher beides!

Sind Anwendungsbeispiele ein Fluch oder ein Segen?

Ich bin überzeugt, naturwissenschaftlich-technische Neugier und Allgemeinbildung sind wichtige Bildungsziele unserer Universität. Dazu möchte ich Gelegenheiten bieten, als wohlmeinendes Angebot. Sie *müssen* nicht lernen, Sie *wollen* lernen, und hier *dürfen* Sie es.

Man kann das Pferd zum Wasser führen, aber nicht zum Trinken zwingen.

Ich weiß auch, dass unser Bildungssystem zumeist nicht Neugier und Lernfreude fördert, sondern Auswendiglernen und Nachbeten erzwingt. Intrinsische Motivation gelingt nur aufwändig mit viel Mühe und Geduld, extrinsische Zwänge hingegen sind momentan und sehr billig zu haben. Auch hier macht die Mischung den Erfolg. Einseitige Lerndressur führt junge Menschen leider zu fatalistischem Desinteresse an ihrer Bildung:

Ein gutes Pferd springt nur so hoch, wie es muss.

Kurzum, bevor Sie fragen: Dieser Abschnitt ist nicht klausurrelevant. Bitte nutzen Sie Ihre Freiheiten weise und entscheiden Sie selbst!

Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!

Sind Anwendungsbeispiele ein Fluch oder ein Segen?

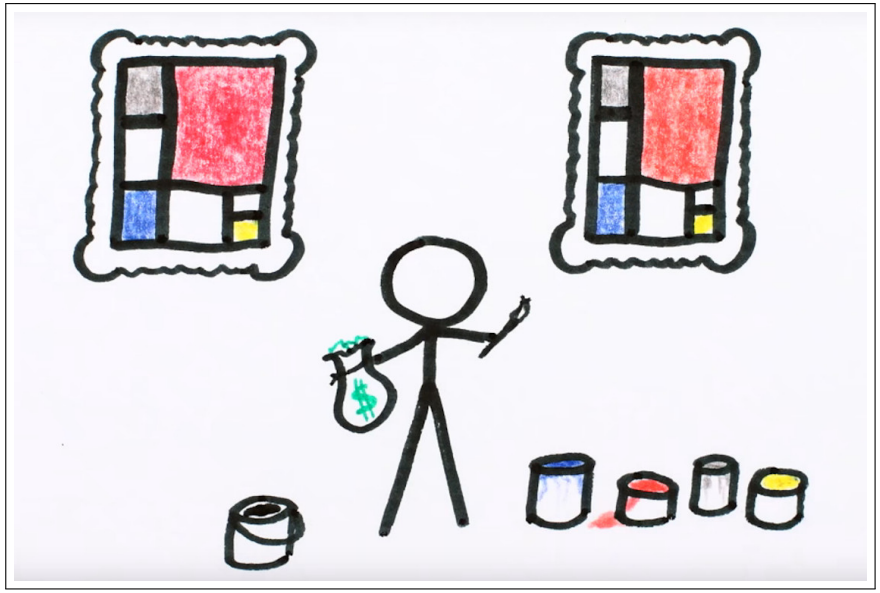
Unsere Gesellschaft lebt von technisch-wissenschaftlichem Verständnis, doch verstehen die meisten herzlich wenig, ja vermeiden und verachten es geradezu. Zum ewigen Scheinkonflikt von Theorie und Anwendung, zur Wechselwirkung von Grundlagenforschung und technischer Nutzung zitiere ich Albert Einstein aus seiner Rede anlässlich der Eröffnung der 7. Deutschen Funkausstellung in Berlin 1930 (siehe `youtu.be/VqvGRVM2jk8`).

Verehrte An- und Abwesende!

Wenn Ihr den Rundfunk höret, so denkt auch daran, wie die Menschen in den Besitz dieses wunderbaren Werkzeuges der Mitteilung gekommen sind. Der Urquell aller technischen Errungenschaften ist die göttliche Neugier und der Spieltrieb des bastelnden und grübelnden Forschers und nicht minder die konstruktive Phantasie des technischen Erfinders. […]

Sollen sich auch alle schämen, die gedankenlos sich der Wunder der Wissenschaft und Technik bedienen und nicht mehr davon geistig erfasst haben als die Kuh von der Botanik der Pflanzen, die sie mit Wohlbehagen frisst.

Anwendung: das No-Cloning-Theorem



Als wunderschönes Video von MinutePhysics, `youtu.be/owPC60Ue0BE` (10min).

Anwendung: das No-Cloning-Theorem

A single quantum cannot be cloned

If a photon of definite polarization encounters an excited atom, there is typically some nonvanishing probability that the atom will emit a second photon by stimulated emission. Such a photon is guaranteed to have the same polarization as the original photon. But is it possible by this or any other process to amplify a quantum state, that is, to produce several copies of a quantum system (the polarized photon in the present case) each having the same state as the original? If it were, the amplifying process could be used to ascertain the exact state of a quantum system: in the case of a photon, one could determine its polarization by first producing a beam of identically polarized copies and then measuring the Stokes parameters[1]. We show here that the linearity of quantum mechanics forbids such replication and that this conclusion holds for all quantum systems.

Abstract des vielzitierten Artikels von W.K. Wootters, W.H. Zurek: *A single quantum cannot be cloned.* Nature 299 (1982) 802–803.

In *Nature* ist selbst eine kurze Notiz eine beachtliche Publikation; zur Geschichte siehe `en.wikipedia.org/wiki/No-cloning_theorem`.

Anwendung: das No-Cloning-Theorem

Das berühmte **No-Cloning-Theorem** der Quantenmechanik besagt:

Es ist unmöglich, ein quantenmechanisches System perfekt auf ein zweites zu kopieren, ohne dabei das erste zu verändern.

Dies beruht auf einer einfachen Rechnung der Linearen Algebra:

Satz X1I: das No-Cloning-Theorem

Sei V ein K–Vektorraum der Dimension $\dim V \geq 2$ und $e \in V \setminus \{0\}$. Dann existiert keine K–lineare Abbildung $T : V \otimes V \to V \otimes V$ mit

$$|v\rangle \otimes |e\rangle \;\mapsto\; |v\rangle \otimes |v\rangle \quad \text{für alle } v \in V.$$

☺ Es genügen die grundlegenden Rechenregeln aus Definition X1D. Die *Rechnung* ist erschütternd einfach, die physikalische *Interpretation* ebenso erschütternd tiefsinnig, siehe hierzu das oben zitierte Video.

Übung: Versuchen Sie es bitte zunächst selbst, bevor Sie weiterlesen. Die physikalische Interpretation / Anschauung / Realisierung ist schwer. Die Mathematik hingegen ist erfreulich leicht und in Ihrer Reichweite.

Anwendung: das No-Cloning-Theorem

Beweis: Angenommen, es gäbe solch eine lineare Abbildung T. Wir wählen eine Basis $(a, b, \dots)$ von V und betrachten den Zustand

$$s := (|a\rangle + |b\rangle) \otimes |e\rangle \qquad \in V \otimes V.$$

Rechenweg 1: Wir multiplizieren erst aus und wenden dann T an.

$$\begin{aligned} s &\overset{\text{Bil}}{=} |a\rangle \otimes |e\rangle + |b\rangle \otimes |e\rangle \\ &\overset{\text{Lin}}{\mapsto} |a\rangle \otimes |a\rangle + |b\rangle \otimes |b\rangle \end{aligned}$$

Rechenweg 2: Wir wenden erst T an und multiplizieren dann aus.

$$\begin{aligned} s &\overset{\text{Def}}{=} (|a\rangle + |b\rangle) \otimes |e\rangle \overset{\text{Vor}}{\mapsto} (|a\rangle + |b\rangle) \otimes (|a\rangle + |b\rangle) \\ &\overset{\text{Bil}}{=} |a\rangle \otimes |a\rangle + |a\rangle \otimes |b\rangle + |b\rangle \otimes |a\rangle + |b\rangle \otimes |b\rangle \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich (dank X1D) führt zum Widerspruch. $\boxed{\text{QED}}$

☺ Scott Aaronson formuliert es prägnant, ebenso provokant wie wahr: *Quantum physics becomes much easier without physics. Stripped to its core, quantum computing is simply linear algebra and probability theory.*

Motivierendes Beispiel: die Multiplikation von Matrizen

Unser Vorbild ist die **Multiplikation** von Matrizen passender Größe:

$$\mu : K^{a\times b} \times K^{b\times c} \to K^{a\times c} : (u,v) \mapsto w = u\cdot v, \quad w_{ik} = \textstyle\sum_{j=1}^{b} u_{ij}\cdot v_{jk}$$

Hier ist $U = K^{a\times b}$ ein linearer Raum über dem Ring $T = K^{a\times a}$ von links und über dem Ring $S = K^{b\times b}$ von rechts, und beide sind verträglich:

$$(t\cdot u)\cdot s = t\cdot(u\cdot s) \quad \text{für alle } t\in T,\ u\in U,\ s\in S$$

Wir sagen ${}_TU_S$ ist ein **(T,S)–linearer Raum** oder **(T,S)–Bimodul** (L1A). Ebenso $V = K^{b\times c}$ über (S,R) mit $R = K^{c\times c}$ und $W = K^{a\times c}$ über (T,R)

Das Produkt μ ist **(T,S,R)–bilinear**:

(AL) $(u+u')\cdot v = (u\cdot v) + (u'\cdot v)$,

(AR) $u\cdot(v+v') = (u\cdot v) + (u\cdot v')$,

(HM) $(u\cdot s)\cdot v = u\cdot(s\cdot v)$,

(HL) $(t\cdot u)\cdot v = t\cdot(u\cdot v)$,

(HR) $u\cdot(v\cdot r) = (u\cdot v)\cdot r$.

für alle Vektoren $u,u'\in U$ und $v,v'\in V$ sowie Skalare $t\in T$, $s\in S$, $r\in R$. Wir nennen μ ist **additiv** rechts (AR) und links (AL), und **homogen** rechts (HR) und links (HL) und mittig (HM), Letzteres heißt auch **ausgeglichen**.

Motivierendes Beispiel: die Multiplikation von Matrizen

Wir betrachten Matrizen als zentrales Beispiel und extrahieren daraus die folgenden allgemeinen Begriffe. Die so entstehende Darlegung zu Tensorprodukten wird einerseits recht „einfach und konkret“ verlaufen: Was wir am zentralen Beispiel erkennen, formulieren wir nun allgemein.

Sie können, wenn Sie möchten, die folgenden Definitionen und Sätze auch ohne diese Einbettung in den konkreten Beispielkontext lesen. Das macht logisch keinen Unterschied, psychologisch hingegen schon: Die Darstellung wirkt dann vermutlich eher „abstrakt und schwierig“.

Ich plädiere dafür, wie bei nahezu allen mathematischen Themen, zunächst von gut gewählten, konkreten Beispielen auszugehen. Daraus schälen wir dann den allgemeingültigen, wahren Kern. Von diesem höheren Standpunkt schreiten wir zu Anwendungen.

Allgemein gilt der Erfahrungsgrundsatz: Ein gut verstandenes Beispiel nützt Ihnen mehr als drei schlecht verstandene Sätze. Umgekehrt gilt: Ein gut verstandener Satz bündelt 1003 Beispiele. Nutzen Sie beides!
Übung: Wiederholen Sie lineare Räume L1A, rechts, links, Bimoduln.

Was ist ein Produkt von U und V nach W?

Definition X2A: Produkt

Seien T,S,R Ringe und darüber ${}_TU_S$, ${}_SV_R$ und ${}_TW_R$ lineare Räume.

(1) Ein **Produkt** von ${}_TU_S$ und ${}_SV_R$ über (T,S,R) ist eine Abbildung

$$\otimes : U\times V \to W : (u,v)\mapsto u\otimes v,$$

die bilinear ist über (T,S,R) gemäß den obigen Axiomen (A) und (H).

$$\mathrm{Bil}_{(T,S,R)}(U,V;W) = \{\mu : U\times V\to W \text{ bilinear über } (T,S,R)\}$$

Zur Vereinfachung können wir T,R auslassen: Für ein **Produkt**

$$\otimes : U\times V\to W : (u,v)\mapsto u\otimes v$$

über S von U_S und ${}_SV$ nach W fordern wir als bilinear nur (A) und (HM).

$$\mathrm{Bil}_S(U,V;W) = \{\mu : U\times V\to W \text{ bilinear über } S\}$$

Allein über S oder ersatzweise mit $T = R = \mathbb{Z}$ gilt $\mathrm{Bil}_S = \mathrm{Bil}_{(\mathbb{Z},S,\mathbb{Z})}$.

Was ist ein Produkt von U und V nach W?

Beispiel: Ist $T = S = R$ kommutativ und U,V,W zentral über S, so gilt $s(u\otimes v) \overset{\text{HL}}{=} (su)\otimes v \overset{\text{Znt}}{=} (us)\otimes v \overset{\text{HM}}{=} u\otimes(sv) \overset{\text{Znt}}{=} u\otimes(vs) \overset{\text{HR}}{=} (u\otimes v)s \overset{\text{Znt}}{=} s(u\otimes v)$. Jede dieser sechs Eigenschaften folgt demnach aus den anderen fünf.

☺ Diese vereinfachte Sichtweise haben wir im vorigen Abschnitt §X1 eingenommen, als wir über einem Körper K mit zentralen Vektorräumen gearbeitet haben. Wie unser Matrixbeispiel motiviert, müssen wir im Allgemeinen auch verschiedene und nicht-kommutative Ringe erwarten. Ehrliche Notation ist etwas aufwändiger, die Mathematik bleibt dieselbe.

Erinnerung: $\mathbb{Z}$–lineare Räume und ihre $\mathbb{Z}$–linearen Abbildungen sind schlicht abelsche Gruppen und ihre Gruppenhomomorphismen. (L1K) Wenn wir T und R auslassen, so können wir einfach $T = R = \mathbb{Z}$ setzen, denn jede additive Abbildung ist automatisch $\mathbb{Z}$–linear und umgekehrt.

? Wann ist ein Produkt frei? Wir haben im Allgemeinen keine Basen, also ist auch nicht die Basiseigenschaft X1D. Glücklicherweise bleibt uns „dual“ die universelle Abbildungseigenschaft des Tensorprodukts X1G, und genau diese Außenperspektive erheben wir nun zur Definition!

Das Tensorprodukt und seine universelle Eigenschaft

Definition X2A: Tensorprodukt ↔ UAE X1G

(2) Ein **Tensorprodukt** des Paars (U, V) über (T, S, R) ist ein Produkt $\otimes : U \times V \to W$ mit der folgenden universellen Abbildungseigenschaft:

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[d, "\exists! f", "\text{linear}"'] \\ U \times V \arrow[ur, "\otimes", "\text{bilinear}"'] \arrow[r, "\odot", "\text{bilinear}"'] & Z \end{tikzcd}$$

Jedes Produkt $\odot : U \times V \to Z$ faktorisiert eindeutig über $\otimes$, das heißt es existiert genau eine (T, R)–lineare Abbildung $f : W \to Z$ mit $\odot = f \circ \otimes$. Vornehm gesagt ist dies äquivalent zur Bijektivität folgender Abbildung:

$$\Phi_{\otimes}^{Z} : \operatorname{Hom}_{(T,R)}(W, Z) \to \operatorname{Bil}_{(T,S,R)}(U, V; Z) : f \mapsto \odot = f \circ \otimes$$

Allein über S, ersatzweise mit $T = R = \mathbb{Z}$, ist f entsprechend nur additiv. Gilt dies, so heißt das Produkt $\otimes$ **frei** und $W =: U \otimes V$ sein **Tensorraum**.

Das Tensorprodukt und seine universelle Eigenschaft

🙂 Mit anderen Worten: (1) $\otimes$ ist ein Produkt und (2) $\otimes$ ist universell, das heißt, jedes Konkurrenzprodukt $\odot$ faktorisiert eindeutig über $\otimes$.

🙂 Die Bijektivität von $\Phi_{\otimes}^{Z}$ bedeutet, dass wir jede *bilineare* Abbildung $\otimes : U \times V \to Z$ in eine *lineare* Abbildung $f : W \to Z$ umrechnen können.

🙂 Sie sehen dreimal die UAE: als Diagramm, in Worten, als Bijektion.

In Satz X2D zeigen wir die Eindeutigkeit bis auf eindeutige Isomorphie. Für *das* Tensorprodukt von (U, V) über (T, S, R) schreiben wir dann

$$\otimes : U \times V \to U \otimes_S V : (u, v) \mapsto u \otimes v.$$

In dieser Schreibweise gilt $u \odot v = f(u \otimes v)$ für alle $u \in U$ und $v \in V$.

⚠ Das Symbol „$\otimes$“ hat zwei Bedeutungen: $u \otimes v$ ist das *Tensorprodukt* der Vektoren $u \in U$ und $v \in V$, andererseits ist $U \otimes_S V$ der *Tensorraum*. (Er ist *nicht* das Bild der Produktabbildung, wird aber davon *erzeugt*.)

Ausführlich $(U_S) \otimes_S ({}_S V)$ oder $U_S \otimes {}_S V$, kurz $U \otimes_S V$, allzu kurz $U \otimes V$. Wenn der Ring S aus dem Kontext klar ist, müssen wir ihn nicht explizit wiederholen. Erfahrungsgemäß ist dies jedoch anfangs meist hilfreich.

Einfache Tensoren und Tensorrang

Wir erinnern, nun nochmal allgemein, an die Begriffe aus Definition X1D:

Definition X2A: Tensoren, einfach vs verschränkt [*simple vs entangled*]

(3) Jedes Element $w \in U \otimes V$ des Tensorraums nennen wir einen **Tensor**.

Gilt $w = u \otimes v$ mit $u \in U$ und $v \in V$, so nennen wir den Tensor w **einfach** oder **elementar** oder **rein**, andernfalls heißt der Tensor w **verschränkt**.

Sei $w \in U \otimes V$. Gilt $w = \sum_{i=1}^{r} u_i \otimes v_i$ mit $r \in \mathbb{N}$ sowie $u_i \in U$ und $v_i \in V$, so sagen wir, w hat **Rang** $\leq r$. Rang genau r bedeutet $\leq r$, aber nicht $< r$.

Anders gesagt, die Menge der **einfachen Tensoren** ist das Bild der Produktabbildung $\otimes : U \times V \to U \otimes V$. Diese ist i.A. nicht surjektiv!

Korollar X2G garantiert: Jeder Tensor hat endlichen Rang. Das heißt:

Der Tensorraum besteht aus allen **Summen** einfacher Tensoren (X2G). Solche Summen $w = \sum_{i=1}^{r} u_i \otimes v_i$ sind im Allgemeinen nicht einfach.

Wir haben dies zuvor bereits im Anschluss an Definition X1D diskutiert und illustriert. Wir führen die Frage der Erzeugung fort in X2G/X2N.

Einfache Tensoren und Tensorrang

🙂 Über einem Körper K können wir jedes Tensorprodukt sehr konkret erklären durch die Basiseigenschaft, das war die Idee zur Definition X1D.

☹ Für lineare Räume über beliebigen Ringen verfügen wir meist nicht über Basen, daher ist diese Sichtweise allgemein nicht mehr hilfreich.

🙂 Wir vollziehen daher den nötigen Perspektivwechsel und nutzen zur allgemeinen Definition X2A die **universelle Abbildungseigenschaft**.

⚠ Statt einer expliziten Definition durch Konstruktion (wie etwa in X1C) folgen wir der inneren Logik und den äußeren Zwängen und formulieren eine implizite Definition durch eine charakterisierende Eigenschaft.

Das ist mathematisch gesehen der beste Weg: effizient und elegant. Beim ersten Kontakt ist es ungewohnt und bedarf der Gewöhnung. Wie immer gelingt Ihnen dies am besten durch aktive Einübung.

Die elegante Definition X2A mittels UAE zieht sofort Arbeit nach sich: Existenz und Eindeutigkeit müssen anschließend noch gezeigt werden. Auch mit diesen Konstruktionen üben Sie Verständnis und Anwendung.

Das Tensorprodukt und seine universelle Eigenschaft

Beispiel X2B: Polynommodell des Tensorprodukts → X1F, X1E

Über jedem CRing K betrachten wir $U = V = K[X]$ und vergleichen:

$$\begin{aligned} \odot &: K[X] \times K[X] \to Z := K[X] &&: (u,v) \mapsto u \odot v := u(X)\,v(X), \\ \otimes &: K[X] \times K[X] \to W := K[X,Y] &&: (u,v) \mapsto u \otimes v := u(X)\,v(Y). \end{aligned}$$

Beides sind Produkt, biadditiv (A) und homogen (H), $\odot$ ist das Übliche. Das zweite Produkt $\otimes$ hat die universelle Abbildungseigenschaft (X2c). Konkret das erste Konkurrenzprodukt $\odot$ faktorisiert eindeutig über $\otimes$:

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[d, "\exists! f", "\text{linear}"'] & X^iY^j \arrow[d, mapsto, "\text{PLF N1B}"'] \\ U \times V \arrow[ur, "\otimes", "\text{bilinear}"'] \arrow[r, "\odot", "\text{bilinear}"'] & Z & X^{i+j} \end{tikzcd}$$

Für jedes solche f gilt $f(X^iY^j) = f(X^i \otimes X^j) = X^i \odot X^j = X^{i+j}$.
Dank PLF N1B existiert $f : W \to Z : X^iY^j \mapsto X^{i+j}$ linear über K.

Das Tensorprodukt und seine universelle Eigenschaft

$v(Y)$					
v_3Y^3 +	$u_0v_3X^0Y^3$	$u_1v_3X^1Y^3$	$u_2v_3X^2Y^3$	$u_3v_3X^3Y^3$	$u_4v_3X^4Y^3$
v_2Y^2 +	$u_0v_2X^0Y^2$	$u_1v_2X^1Y^2$	$u_2v_2X^2Y^2$	$u_3v_2X^3Y^2$	$u_4v_2X^4Y^2$
v_1Y^1 +	$u_0v_1X^0Y^1$	$u_1v_1X^1Y^1$	$u_2v_1X^2Y^1$	$u_3v_1X^3Y^1$	$u_4v_1X^4Y^1$
v_0Y^0	$u_0v_0X^0Y^0$	$u_1v_0X^1Y^0$	$u_2v_0X^2Y^0$	$u_3v_0X^3Y^0$	$u_4v_0X^4Y^0$
$\cdot$	u_0X^0 +	u_1X^1 +	u_2X^2 +	u_3X^3 +	u_4X^4 $u(X)$

☺ Wir rechnen gleich in Satz X2c allgemein nach, dass unser Beispiel $\otimes : U \times V \to W$ tatsächlich die universelle Abbildungseigenschaft hat.

Konkret vergleichen wir $\otimes$ mit dem Konkurrenzprodukt $\odot : U \times V \to Z$ und konstruieren die geforderte lineare Abbildung f mit $\odot = f \circ \otimes$.

Alle Daten liegen explizit vor, daher gelingt uns diese Rechnung leicht: Sowohl die Eindeutigkeit als auch die Existenz von f sind offensichtlich.

☺ Hinter diesem schön einfachen Beispiel steht ein nützliches Prinzip…

Das Prinzip der bilinearen Fortsetzung

Satz X2c: Prinzip der bilinearen Fortsetzung und Freiheit

Seien T, R Ringe sowie darüber ${}_TU$, V_R und ${}_TW_R$ lineare Räume.

(1) Gegeben seien Basen $(u_i)_{i\in I}$ von U und $(v_j)_{j\in J}$ von V sowie eine beliebige Familie $(w_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ in W, die Gram–Matrix. Dann existiert genau eine bilineare Abbildung $\otimes : U \times V \to W : (u_i, v_j) \mapsto w_{ij}$, nämlich

$$\boxed{\left(\textstyle\sum_{i\in I} t_i u_i\right) \otimes \left(\textstyle\sum_{j\in J} v_j r_j\right) \;=\; \textstyle\sum_{(i,j)\in I\times J} t_i\, w_{ij}\, r_j}$$

für alle Linearkombinationen mit Koeffizienten $t \in R^{(I)}$ und $r \in T^{(J)}$.

(2) Vereinfachend sei $T = R$ kommutativ und alle Räume zentral über R. Genau dann ist $\otimes : U \times V \to W$ ein Tensorprodukt über R, erfüllt also die universelle Eigenschaft X2A, wenn $(w_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ eine Basis von W ist.

☺ Tensorprodukte sind leicht für Vektorräume über jedem Körper, und allgemein für alle freien, zentralen Moduln über jedem CRing.

⚠ Jedes Produkt $\otimes$ schickt $(u_i, 0)$ und $(0, v_j)$ in $U \times V$ nach 0 in W.

Das Prinzip der bilinearen Fortsetzung

Beweis: (1a) *Eindeutigkeit:* Sind $\otimes, \odot : U \times V \to W : (u_i, v_j) \mapsto w_{ij}$ bilinear, so folgt $\otimes = \odot$, denn für alle $u = \sum_i t_i u_i$ und $v = \sum_j v_j r_j$ gilt:

$$\begin{aligned} \left(\textstyle\sum_i t_i u_i\right) \otimes \left(\textstyle\sum_j v_j r_j\right) &\overset{\text{Bil}}{=} \textstyle\sum_i \sum_j t_i (u_i \otimes v_j) r_j \overset{\text{Vor}}{=} \textstyle\sum_{i,j} t_i\, w_{ij}\, r_j \\ \left(\textstyle\sum_i t_i u_i\right) \odot \left(\textstyle\sum_j v_j r_j\right) &\overset{\text{Bil}}{=} \textstyle\sum_i \sum_j t_i (u_i \odot v_j) r_j \overset{\text{Vor}}{=} \textstyle\sum_{i,j} t_i\, w_{ij}\, r_j \end{aligned}$$

(1b) *Existenz:* Diese Formel definiert eine Abbildung $\otimes : U \times V \to W$, sie erfüllt $(u_i, v_j) \mapsto w_{ij}$ für alle $(i,j) \in I \times J$ und ist (T,R)–bilinear.

(2a) „$\Leftarrow$“: Sei $(w_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ eine Basis von W. Sei $\odot : U \times V \to Z$ bilinear. Dank PLF N1B existiert genau eine R–lineare Abbildung $f : W \to Z$ mit $f(w_{ij}) = u_i \odot v_j$ für alle $(i,j) \in I \times J$. Dank (1a) gilt $\odot = f \circ \otimes$.

(2b) „$\Rightarrow$“: Angenommen, das Produkt $\otimes : U \times V \to W$ erfüllt die UAE X2A. Dasselbe gilt für $\odot : U \times V \to R^{(I\times J)}$ mit $(u_i, v_j) \mapsto e_{ij}$ dank (1b) & (2a).

Der folgende Satz konstruiert den R–Isomorphismus $(f, f') : W \cong R^{(I\times J)}$ mit $\otimes = f' \circ \odot$. Somit ist $(w_{ij} = f'(e_{ij}))_{(i,j)\in I\times J}$ eine R–Basis von W. $\boxed{\text{QED}}$

Das Tensorprodukt ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Satz X2D: Eindeutigkeit des Tensorprodukts

Seien T, S, R Ringe und darüber ${}_TU_S$, ${}_SV_R$ und ${}_TW_R$ lineare Räume.
Zu je zwei Tensorprodukten $\otimes : U \times V \to W$ und $\otimes' : U \times V \to W'$ existiert genau ein Isomorphismus $(f, f') : W \cong W'$ mit $\otimes' = f \circ \otimes$.

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[loop right, "\mathrm{id}_W"] \arrow[dd, shift right, "\exists! f"'] \\
U \times V \arrow[ur, "\otimes", "\text{bilinear}"'] \arrow[dr, "\otimes'"', "\text{bilinear}"] & \cong \\
 & W' \arrow[loop right, "\mathrm{id}_{W'}"] \arrow[uu, shift right, "\exists! f'"']
\end{tikzcd}$$

Eindeutigkeit trotz Wahlfreiheit: Alice und Bob konstruieren ihre Tensorprodukte wie sie mögen. Je zwei Tensorprodukte lassen sich eindeutig übersetzen.

Für *das* Tensorprodukt von (U, V) über (T, S, R) schreiben wir fortan

$$\boxed{\otimes : U \times V \to U \otimes_S V : (u, v) \mapsto u \otimes v,}$$

ausführlich $(U_S) \otimes_S ({}_SV)$ oder $U_S \otimes {}_SV$, kurz $U \otimes_S V$, allzu kurz $U \otimes V$.
Zur Vereinfachung können wir T, R auslassen, wie in X2A vereinbart.

Das Tensorprodukt ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Beweis: Wir konstruieren (f, f') durch vierfache Anwendung der UAE:

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dd, shift left, "\exists! f'"] \\
U \times V \arrow[ur, "\otimes"] \arrow[dr, "\otimes'"'] & \\
 & W' \arrow[uu, shift left, "\exists! f"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dd, shift right, "g"'] \\
U \times V \arrow[ur, "\otimes"] \arrow[dr, "\otimes"'] & \mathrm{id}_W \\
 & W \arrow[uu, shift right, "\mathrm{id}_W"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & W' \arrow[dd, shift right, "g'"'] \\
U \times V \arrow[ur, "\otimes'"] \arrow[dr, "\otimes'"'] & \mathrm{id}_{W'} \\
 & W' \arrow[uu, shift right, "\mathrm{id}_{W'}"']
\end{tikzcd}$$

(a) Dank der UAE des Tensorprodukts $\otimes$ angewendet auf $\otimes'$ existiert genau eine (T, R)–lineare Abbildung $f : W \to W'$ mit $\otimes' = f \circ \otimes$.

(b) Dank der UAE des Tensorprodukts $\otimes'$ angewendet auf $\otimes$ existiert genau eine (T, R)–lineare Abbildung $f' : W' \to W$ mit $\otimes = f' \circ \otimes'$.

(c) Für $g := f' \circ f$ gilt $g \circ \otimes \overset{(a)}{=} f' \circ \otimes' \overset{(b)}{=} \otimes \overset{\text{Ntr}}{=} \mathrm{id}_W \circ \otimes$, also $g = \mathrm{id}_W$ dank Eindeutigkeit / UAE des Tensorprodukts $\otimes$ angewendet auf $\otimes$.

(d) Für $g' := f \circ f'$ gilt $g' \circ \otimes' \overset{(b)}{=} f \circ \otimes \overset{(a)}{=} \otimes' \overset{\text{Ntr}}{=} \mathrm{id}_{W'} \circ \otimes'$, also $g' = \mathrm{id}_{W'}$ dank Eindeutigkeit / UAE des Tensorprodukts $\otimes'$ angewendet auf $\otimes'$.

Somit gilt $f' \circ f = \mathrm{id}_W$ und $f \circ f' = \mathrm{id}_{W'}$, also $(f, f') : W \cong W'$. QED

Erinnerung: die Rechenregeln für Tensoren

Seien T, S, R Ringe und darüber ${}_TU_S$, ${}_SV_R$ und ${}_TW_R$ lineare Räume.
Wir wissen, dass das Tensorprodukt $\otimes : U \times V \to U \otimes V$ eindeutig ist, genauer: Je zwei Tensorprodukte sind eindeutig isomorph. Wir wollen nun die *Existenz* eines solchen Tensorprodukts beweisen, durch eine geeignete Konstruktion. Zuvor erinnern wir uns nochmal an unser Ziel:

(1) Ein **Produkt** $\otimes : U \times V \to W$ erfüllt:

(HM) $(u \cdot s) \otimes v = u \otimes (s \cdot v)$,

(AL) $(u + u') \otimes v = (u \otimes v) + (u' \otimes v)$, (HL) $(t \cdot u) \otimes v = t \cdot (u \otimes v)$,

(AR) $u \otimes (v + v') = (u \otimes v) + (u \otimes v')$, (HR) $u \otimes (v \cdot r) = (u \otimes v) \cdot r$.

für alle Vektoren $u, u' \in U$ und $v, v' \in V$ sowie Skalare $t \in T$, $s \in S$, $r \in R$.

(2) Für ein **Tensorprodukt** fordern wir genau diese Eigenschaften, doch sonst keine weiteren, also überflüssigen Relationen (UAE).

☺ Das ist die Forderung der universellen Abbildungseigenschaft!
Genau so wollen wir daher in der folgenden Konstruktion vorgehen:
Wir bauen einen linearen Raum, der genau diese Forderungen erfüllt.
Dieser genial-einfache Trick ist naheliegend, aber erst im Rückblick.

Existenz des Tensorprodukts

Unser Ziel ist der folgende, wunderbar allgemeine Existenzsatz.

♦ **Satz X2F:** Existenz des Tensorprodukts

Zu $({}_TU_S, {}_SV_R)$ über (T, S, R) existiert ein Tensorprodukt $\otimes : U \times V \to W$.

☹ Dieser abstrakte Existenzsatz ist beruhigend, doch für sich alleine noch längst nicht so hilfreich, wie wir es gerne hätten und benötigen. Hermann Weyl (1885–1955) schrieb dazu in seinem berühmten Artikel *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik* 1921 die weisen Worte:

> *[Ein Existenzsatz zeigt] das Vorhandensein eines Schatzes, ohne jedoch zu verraten, an welchem Ort. [...] Nicht das Existenztheorem ist das Wertvolle, sondern die im Beweise geführte Konstruktion.*

☺ Die folgende Konstruktion erlaubt uns, den Schatz zu heben!
Während die Eindeutigkeit leicht durch den universellen Trick gelingt, müssen wir für die Existenz eine detaillierte Konstruktion anstrengen. Sie liefert eine explizite Präsentation durch Erzeuger und Relationen, und erlaubt uns damit eine genauere Untersuchung der Feinstruktur.

Existenz des Tensorprodukts durch explizite Konstruktion

Wir lassen zunächst die Ringe T, R außer Acht und fokussieren uns auf S:

Satz X2E: Existenz des Tensorprodukts, Teil 1 über S

Zu $(U_S, {}_SV)$ über S existiert ein Tensorprodukt $\otimes : U \times V \to W$.

Wir betrachten die Menge $U \times V$ aller Paare (u, v) mit $u \in U$ und $v \in V$. Sei $F = \mathbb{Z}^{(U \times V)}$ der $\mathbb{Z}$–lineare Raum mit Basis $U \times V$: Jedes Element $\sigma \in F$ ist eine (wie immer endliche) $\mathbb{Z}$–Linearkombination $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot (u_i, v_i)$ von Paaren $(u_i, v_i) \in U \times V$ mit Koeffizienten $\sigma_i \in \mathbb{Z}$. Hierin setzen wir

$$G := \left\langle \begin{matrix} (u+u', v) - (u, v) - (u', v) \\ (u, v+v') - (u, v) - (u, v') \\ (u \cdot s, v) - (u, s \cdot v) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} u, u' \in U \\ v, v' \in V \\ s \in S \end{matrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}} \leq F.$$

Wir erhalten die Quotientenabbildung $q : F \twoheadrightarrow W := F/G : \sigma \mapsto [\sigma]$.

(1) Damit ist $\otimes : U \times V \to W : (u, v) \mapsto u \otimes v := [(u, v)]$ ein Produkt
(2) und erfüllt zudem die universelle Abbildungseigenschaft X2A.

Existenz des Tensorprodukts durch explizite Konstruktion

🙂 Wir präsentieren hier $W = F/G$ durch **Erzeuger** und **Relationen**, als $\mathbb{Z}$–freier Raum F der Erzeuger $(u, v) \in U \times V$, ohne jegliche Relationen, und erzwingen die gewünschten Relationen G durch Quotientenbildung.

⚠ Wir müssen nun „nur“ noch sorgsam und geduldig nachrechnen, dass diese Konstruktion das gewünschte Ziel tatsächlich erreicht. Genau dies ist Gegenstand des im Folgenden ausgeführten Beweises.

🙂 Das ist eigentlich Routinearbeit – nachdem man es ein paar Mal durchexerziert hat. In diesem Zusammenhang schrieb Hermann Weyl:

Nicht im Beweis einer gegebenen Konstruktion,
sondern in der Erfindung der Konstruktion liegt
in den meisten Fällen die eigentliche Schwierigkeit.

Da dieser routinierte Nachweis für Sie eine der ersten Gelegenheiten ist, und Sie genau diese Sorgfalt und Routine erst noch erlernen sollen, möchte ich hier ein gutes Vorbild geben und dies für Sie vorführen. Zudem können Sie so etwaige Verständnisschwierigkeiten klären.

Existenz des Tensorprodukts durch explizite Konstruktion

Beweis: (1) Für alle $u, u' \in U$, $v, v' \in V$, $s \in S$ gilt nach Konstruktion:

$$\begin{aligned} &\text{(AL)} && (u + u') \otimes v = u \otimes v + u' \otimes v, \\ &\text{(AR)} && u \otimes (v + v') = u \otimes v + u \otimes v', \\ &\text{(HM)} && (u \cdot s) \otimes v = u \otimes (s \cdot v). \end{aligned}$$

Warum? Das sind genau die erzwungenen Relationen im Kern $G \leq F$.

(2) Unser Produkt $\otimes$ hat die universelle Abbildungseigenschaft X2A:

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[d, "\exists! f", "\text{linear}"'] \\ U \times V \arrow[ur, "\otimes", "\text{bilinear}"'] \arrow[r, "\odot", "\text{bilinear}"'] & Z \end{tikzcd}$$

Sei $\odot : U \times V \to Z$ ein weiteres Produkt. Wir zeigen, dass genau eine (T, R)–lineare Abbildung $f : W \to Z$ mit $\odot = f \circ \otimes$ existiert.

Existenz des Tensorprodukts durch explizite Konstruktion

(2a) *Eindeutigkeit:* Vorgelegt seien $f, g : W \to Z$ mit $\odot = f \circ \otimes = g \circ \otimes$, also $f(u \otimes v) = g(u \otimes v)$ für alle $(u, v) \in U \times V$. Daraus folgt $f = g$, denn W wird erzeugt von $(u \otimes v)_{(u,v) \in U \times V}$ (N1A).

$$\begin{tikzcd} & & W \arrow[dd, "\exists! f"] \\ U \times V \arrow[r, hook, "\iota", "\text{als Menge}"'] \arrow[urr, bend left, "\otimes", "\text{bilinear}"'] \arrow[drr, bend right, "\odot", "\text{bilinear}"'] & F \arrow[ur, two heads, "q"] \arrow[dr, two heads, "\exists! p"] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

(2b) *Existenz:* Wir nutzen $F = \mathbb{Z}^{(U \times V)}$ mit $\mathbb{Z}$–Basis $U \times V$. Dank PLF N1B existiert genau eine $\mathbb{Z}$–lineare Abbildung $p : F \to Z : (u, v) \mapsto u \odot v$. Da $\odot$ ein Produkt ist, gilt $G \subseteq \operatorname{Ker}(p)$. Dank L3C faktorisiert $p = f \circ q$ in unseren Quotienten q und eine $\mathbb{Z}$–lineare Abbildung $f : W \to Z$. $\boxed{\text{QED}}$

Diese genial-einfache Konstruktion ist naheliegend… im Rückblick! Jeder Konstruktionsschritt ist leicht, aber viele greifen ineinander.

Existenz des Tensorprodukts durch explizite Konstruktion

Die Konstruktion von $\otimes : U \times V \to W$ benötigt nur den mittleren Ring S. Wir können nun die Ringe T, R links und rechts wieder ins Spiel bringen.

Satz X2F: Existenz des Tensorprodukts, Teil 2 über (T, S, R)

Zu $({}_TU_S, {}_SV_R)$ über (T, S, R) existiert ein Tensorprodukt $\otimes : U \times V \to W$.

Genauer: Dank X2E haben wir die abelsche Gruppe $W = U \otimes_S V$.
(3) Diese wird aufgewertet zu einem (T, R)–linearen Raum durch

$$\cdot : T \times W \to W : t \cdot [(u, v)] = [(t \cdot u, v)],$$
$$\cdot : W \times R \to W : [(u, v)] \cdot r = [(u, v \cdot r)].$$

(4) Damit ist unser Produkt $\otimes : U \times V \to W$ nun bilinear über (T, S, R)
(5) und erfüllt zudem die universelle Abbildungseigenschaft X2A.

☺ Wir müssen unsere Konstruktion aus X2E nicht ändern, nur erweitern. Alle dazu nötigen Relationen sind bereits in ${}_TU$ und V_R codiert. Schön!

Aufgabe: Alle Daten liegen explizit vor, rechnen Sie es sorgsam nach! So gewinnen Sie Übung und Sicherheit mit dieser Konstruktion.

Existenz des Tensorprodukts durch explizite Konstruktion

Beweis: (3) *Wohldefiniertheit:* Auf $F = \mathbb{Z}^{(U \times V)}$ haben wir

$$\cdot : T \times F \to F : t \cdot (u, v) = (t \cdot u, v).$$

Für jeden Skalar $t \in T$ gilt $t \cdot G \subseteq G$, denn dies gilt auf den Erzeugern:

$$\begin{aligned}
t \cdot [(u + u', v) - (u, v) - (u', v)] &= (t \cdot u + t \cdot u', v) - (t \cdot u, v) - (t \cdot u', v) \\
t \cdot [(u, v + v') - (u, v) - (u, v')] &= (t \cdot u, v + v') - (t \cdot u, v) - (t \cdot u, v') \\
t \cdot [(u \cdot s, v) - (u, s \cdot v)] &= ((t \cdot u) \cdot s, v) - ((t \cdot u), s \cdot v)
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir auf $W = F/G$ die wohldefinierte Linksoperation

$$\cdot : T \times W \to W : t \cdot [(u, v)] = [(t \cdot u, v)].$$

Ebenso operiert der Ring R von rechts auf $W = F/G$ vermöge

$$\cdot : W \times R \to W : [(u, v)] \cdot r = [(u, v \cdot r)].$$

Damit ist W ein (T, R)–Bimodul: Rechnen Sie es nach!

Existenz des Tensorprodukts durch explizite Konstruktion

(3a) Die Linksoperation $\cdot : T \times F \to F : t \cdot (u, v) = (t \cdot u, v)$ erfüllt

$$1_T \cdot (u, v) = (u, v) \quad \text{und} \quad (t \cdot t') \cdot (u, v) = t \cdot (t' \cdot (u, v)).$$

Demnach folgt für $\cdot : T \times W \to W$ ebenso

$$1_T \cdot [(u, v)] = [(u, v)] \quad \text{und} \quad (t \cdot t') \cdot [(u, v)] = t \cdot (t' \cdot [(u, v)]).$$

Die Operation ist zudem links-distributiv auf F, also auch auf W:

$$t \cdot [\sigma + \sigma'] = [t \cdot \sigma + t \cdot \sigma'] = [t \cdot \sigma] + [t \cdot \sigma'] = t \cdot [\sigma] + t \cdot [\sigma']$$

Die Operation ist *nicht* rechts-distributiv auf F, sondern erst auf W:

$$\begin{aligned}
(t + t') \cdot [(u, v)] &= [(t \cdot u + t' \cdot u, v)] \\
&= [(t \cdot u, v)] + [(t' \cdot u, v)] = t \cdot [(u, v)] + t' \cdot [(u, v)]
\end{aligned}$$

(3b) Für die Rechtsoperationen $\cdot : F \times R \to F : (u, v) \cdot r = (u, v \cdot r)$ und $\cdot : W \times R \to W : [(u, v)] \cdot r = [(u, v \cdot r)]$ gilt entsprechend dasselbe.

(3c) Beide sind verträglich, offensichtlich auf F, somit auch auf W.

Existenz des Tensorprodukts durch explizite Konstruktion

(4) Unser $\otimes : U \times V \to W : (u, v) \mapsto u \otimes v := [(u, v)]$ ist ein Produkt, erfüllt also (AL), (AR), (HM) sowie nun zusätzlich (HL) und (HR).

☺ Die ersten drei erzwingen wir durch $W = F/G$. Die letzten beiden bekommen wir dank Konstruktion geschenkt. Rechnen Sie es nach!

(5) Unser Produkt $\otimes$ hat die universelle Abbildungseigenschaft X2A:

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[d, "\exists! f", "\text{linear}"'] \\
U \times V \arrow[ur, "\otimes", "\text{bilinear}"'] \arrow[r, "\text{bilinear}", "\odot"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Sei $\odot : U \times V \to Z$ ein Produkt über (T, S, R). Dank (2) existiert genau eine $\mathbb{Z}$–lineare Abbildung $f : W \to Z$ mit $\odot = f \circ \otimes$. Sie ist automatisch (T, R)–linear. Homogenität gilt für einfache Tensoren, also für alle (N1A): $f(t \cdot (u \otimes v) \cdot r) = f((t \cdot u) \otimes (v \cdot r)) = (t \cdot u) \odot (v \cdot r) = t \cdot (u \odot v) \cdot r = t \cdot f(u \otimes v) \cdot r$.

☺ Somit ist $\otimes : U \times V \to W$ ein Tensorprodukt, wie gewünscht. QED

Die einfachen Tensoren erzeugen den Tensorraum.

Korollar X2G: Einfache Tensoren erzeugen alle Tensoren.

Seien T, S, R Ringe und darüber ${}_TU_S$, ${}_SV_R$ und ${}_TW_R$ lineare Räume.

(1) Die einfachen Tensoren $u \otimes v$ erzeugen den Tensorraum $U \otimes_S V$.

Jeder beliebige Tensor $w \in U \otimes_S V$ ist eine Summe $w = \sum_{k=1}^{\ell} u_k \otimes v_k$ endlicher Länge $\ell \in \mathbb{N}$ mit Faktoren $u_1, \dots, u_\ell \in U$ und $v_1, \dots, v_\ell \in V$.

Beweis: (1) Das folgt aus der Konstruktion F/G in Satz X2F. QED

⚠ Die Darstellung ist i.A. nicht eindeutig, nicht einmal ihre Länge ℓ:

$$\begin{aligned} w = u \otimes v &= (u_1 + u_2) \otimes (v_1 + v_2) \\ &= (u_1 \otimes v_1) + (u_1 \otimes v_2) + (u_2 \otimes v_1) + (u_2 \otimes v_2). \end{aligned}$$

☺ Minimale Länge $\ell = 0$ entspricht dem Nullelement $w = 0$ in $U \otimes_S V$.

☺ Minimale Länge $\ell = 1$ entspricht einfachen Tensoren $w = u \otimes v \neq 0$.

Zu $w \in U \otimes V$ ist der **Tensorrang** $\operatorname{rang}(w)$ die minimale Länge $\ell \in \mathbb{N}$ aller Summendarstellungen $w = \sum_{k=1}^{\ell} u_k \otimes v_k$ durch einfache Tensoren.

Die einfachen Tensoren erzeugen den Tensorraum.

Korollar X2G: Einfache Tensoren erzeugen alle Tensoren.

(2) Angenommen, $(u_i)_{i \in I}$ erzeugt U über T und $(v_j)_{j \in J}$ erzeugt V über R, dann wird der Tensorraum $U \otimes_S V$ über (T, R) erzeugt von

$$(u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in I \times J}.$$

Jeder Tensor $w \in U \otimes_S V$ ist eine Summe $w = \sum_{k=1}^{\ell} t_k (u_{i_k} \otimes v_{j_k}) r_k$ mit endlicher Länge $\ell \in \mathbb{N}$ sowie $t_1, \dots, t_\ell \in T$ und $r_1, \dots, r_\ell \in R$.

Beweis: (2) Gemäß (1) ist w eine Summe einfacher Tensoren $u \otimes v$. Es gilt $u = \sum_{m=1}^{M} t_m u_{i_m}$ mit $t_m \in T$ und $v = \sum_{n=1}^{N} v_{j_n} r_n$ mit $r_n \in R$, also $u \otimes v = \sum_{m,n} t_m (u_{i_m} \otimes v_{j_n}) r_n$. QED

☺ So konstruieren wir geeignete Erzeugendensysteme von $U \otimes_S V$, am besten möglichst kurz und somit effizient für unsere Rechnungen.

☺ In günstigen Fällen erhalten wir sogar eine Basis (X2C), insbesondere zentral über einem CRing $R = S = T$, am schönsten über einem Körper.

Universelle Eigenschaft, Eindeutigkeit und Existenz

Das Tensorprodukt illustriert ein allgemein sehr nützliches Vorgehen:

1. Die universelle Eigenschaft X2A präzisiert, was wir eigentlich wollen.
2. Die Eindeutigkeit X2D zeigt, dass unser Ziel damit charakterisiert ist.
3. Die Konstruktion X2E/X2F zeigt, wie wir unser Ziel erreichen können.

Damit verfügen wir über zwei sich ergänzende Werkzeuge:

☺ Die Präsentation F/G ist konkret, aber leider schwer anzuwenden.

☺ Die universelle Eigenschaft ist abstrakt, dafür meist leicht zu nutzen.

Mathematische Objekte (Gruppen, lineare Räume, ...) lassen sich meist am besten verstehen und nutzen, wenn wir beide Sichtweisen anwenden: intern, konkret, Rechnen mit Elementen (Basen, Matrizen, ...) und extern, abstrakt, mit Abbildungen (Homomorphismen, PLF, ...).

Je nach Anwendung nutzen wir mehr die eine oder die andere, meist jedoch benötigen Sie beide Sichtweisen für die erfolgreiche Lösung.

☺ Lernen Sie beides zu nutzen, wie linke und rechte Hand.

Duale Perspektiven: intern vs extern

Mathematische Objekte betrachten wir oft auf zwei duale Weisen, die zueinander komplementär sind und sich wunderbar ergänzen.

Menge X mit Struktur	Objekt X mit Morphismen
interne Beschaffenheit von X: Beziehung zwischen Elementen	externe Eigenschaften von X: Beziehung zwischen Objekten
Datenstruktur, Implementierung: Was *ist* X? Wie ist X aufgebaut?	Verhalten, Semantik, Axiome: Was *tut* X? Was leistet X für uns?
konkret, zugleich theoretisch: explizite Bauanleitung	abstrakt, zugleich angewandt: bequeme Bedienungsanleitung
Erzeuger und Relationen: Konstruktion ⇒ Existenz	universelle Eigenschaft: Definition ⇒ Eindeutigkeit

Wiederholung: Erklären Sie, sowohl intern als auch extern, jedes Ihrer Lieblingsobjekte: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, (knifflig $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), $\mathbb{K}[X]$, $V = \langle \mathcal{B} \rangle_K^!$, $U \oplus V$, $U \otimes V$.

Mehrfache Produkte und Multilinearität

Genau wie für zwei Faktoren erklären wir das n-fache Tensorprodukt

$$\boxed{T = {}_{R_0}(U_1)_{R_1} \otimes {}_{R_1}(U_2)_{R_2} \otimes \cdots \otimes {}_{R_{n-1}}(U_n)_{R_n}.}$$

Gegeben seien hierzu Ringe $R_0, R_1, R_2, \dots, R_n$ und lineare Räume $U_1, U_2, \dots, U_n$, wobei U_i linear über (R_{i-1}, R_i) ist, wie oben vermerkt.

Übung zur Wiederholung: Formulieren Sie die Definition X2A und die anschließenden Sätze für das mehrfache Tensorprodukt.

☺ Alle Definitionen und Sätze verlaufen parallel zum vorigen Fall $n = 2$, mit gut gewählter Notation sogar noch etwas leichter und einheitlicher.

Warum, so fragen Sie, habe ich das nicht gleich allgemein ausgeführt? Nun ja, beim ersten Durchgang kostet schon der einfachste Fall $n = 2$ die wissbegierig Lernenden viel Mühe, und die zusätzliche Schreibarbeit für den allgemeinen Fall $n \in \mathbb{N}$ ist dabei nur Ballast ohne Mehrwert.

☺ Beim zweiten Durchgang ist der allgemeine Fall dann leicht, daher formuliere ich die Ausführung als lehrreiche Übung zur Wiederholung.

Mehrfache Produkte und Multilinearität

Definition X2H: multilineare Abbildung und interner Ausgleich

Sei $R = (R_0, R_1, \dots, R_n)$ eine Familie von Ringen und $U = (U_1, \dots, U_n)$ eine Familie linearer Räume über R, wobei U_i linear über (R_{i-1}, R_i) ist. Sei $\mu : \prod_{i=1}^n U_i \to W$ eine Abbildung in einen (R_0, R_n)–linearen Raum.

(1) Wir nennen μ **multiadditiv**, falls μ additiv in jedem U_i ist:

$$\mu(\dots, u_i + u_i', \dots) = \mu(\dots, u_i, \dots) + \mu(\dots, u_i', \dots)$$

(2) Wir nennen μ **multihomogen** über $R = (R_0, \dots, R_n)$ falls gilt:

$$\begin{aligned} \mu(r_0 \cdot u_1, u_2, \dots, u_n) &= r_0 \cdot \mu(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \mu(\dots, u_i \cdot r_i, u_{i+1}, \dots) &= \mu(\dots, u_i, r_i \cdot u_{i+1}, \dots) \\ \mu(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n \cdot r_n) &= \mu(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n) \cdot r_n \end{aligned}$$

an jeder Stelle $i \in \{1, \dots, n\}$, für alle Skalare $r_i \in R_i$ und Vektoren $u_i \in U_i$. Gilt (1) und (2), so nennen wir μ kurz **R–multilinear**:

$$\boxed{\mathrm{Mul}_R(U; W) = \{\mu : \textstyle\prod_{i=1}^n U_i \to W \text{ multilinear über } R\}}$$

Das mehrfache Tensorprodukt dank UAE

Beispiel: Gegeben sei ein kommutativer Ring R und zentrale lineare Räume $U_1, \dots, U_n, W$ über R. Wir betrachten eine n–stellige Abbildung

$$\mu : U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \to W.$$

Genau dann ist μ multihomogen über $(R, R, \dots, R)$ wie in (2), wenn gilt:

$$\mu(\dots, u_i \cdot r, \dots) = \mu(\dots, u_i, \dots) \cdot r$$

an jeder Stelle $i \in \{1, \dots, n\}$, für alle Skalare $r \in R$ und Vektoren $u_i \in U_i$.

Übung: Beweisen Sie diese Äquivalenz (zunächst für $n = 2, 3, \dots$).

☺ Über jedem kommutativen Ring R erhalten wir den vertrauten Begriff der Multilinearität, wie wir ihn von der Determinante (O2A) kennen.

⚠ Für nicht-kommutative Ringe müssen wir behutsamer vorgehen. Hier ist die oben formulierte Definition X2H(2) genau die Richtige.

☺ Im kommutativen Fall stimmen beide Definitionen überein. Somit fügt sich schließlich alles wunderbar zusammen.

Das mehrfache Tensorprodukt dank UAE

Definition X2I: das mehrfache Tensorprodukt

Sei $R = (R_0, R_1, \dots, R_n)$ eine Familie von Ringen und $U = (U_1, \dots, U_n)$ eine Familie linearer Räume über R, wobei U_i linear über (R_{i-1}, R_i) ist.

(1) Ein **Produkt** $\mu : \prod_{i=1}^n U_i \to Z$ ist eine R–multilineare Abbildung.

(2) Ein **Tensorprodukt** von U über R ist ein Produkt $\tau : \prod_{i=1}^n U_i \to W$ mit der folgenden universellen Abbildungseigenschaft:

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[d, "\exists! f", "\text{linear}"'] \\ U_1 \times \cdots \times U_n \arrow[ur, "\tau", "\text{multilinear}"'] \arrow[r, "\mu", "\text{multilinear}"'] & Z \end{tikzcd}$$

Jedes Produkt $\mu : \prod_{i=1}^n U_i \to Z$ faktorisiert eindeutig über τ, das heißt es existiert genau eine (R_0, R_n)–lineare Abbildung $f : W \to Z$ mit $\mu = f \circ \tau$. Vornehm gesagt ist dies äquivalent zur Bijektivität folgender Abbildung:

$$\boxed{\Phi_\tau^Z : \mathrm{Hom}_{(R_0, R_n)}(W, Z) \to \mathrm{Mul}_R(U; Z) : f \mapsto \mu = f \circ \tau}$$

Das mehrfache Tensorprodukt dank UAE

☺ Folgende Überlegungen übertragen sich leicht von $n = 2$ auf $n \in \mathbb{N}$:

Satz X2J: Prinzip der multilinearen Fortsetzung

Seien $U_1, \dots, U_n, W$ zentrale lineare Räume über dem CRing R.
Zu $i = 1, \dots, n$ sei $(u_{j_i})_{j_i \in J_i}$ eine Basis von U_i sowie $(w_j)_{j \in J}$ eine beliebige Familie in W, indiziert durch $J = J_1 \times \cdots \times J_n$.

(1) Dann existiert genau eine R–multilineare Abbildung

$$\tau : U_1 \times \cdots \times U_n \to W : (u_{j_1}, \dots, u_{j_n}) \mapsto w_{j_1,\dots,j_n}, \quad \text{nämlich}$$
$$\tau\big(\textstyle\sum_{j_1 \in J_1} \lambda_{1,j_1} u_{j_1}, \dots, \sum_{j_n \in J_n} \lambda_{n,j_n} u_{j_n} \big) = \sum_{j \in J} \lambda_{1,j_1} \cdots \lambda_{n,j_n} w_j$$

für alle Linearkombinationen mit Koeffizienten $\lambda_i \in R^{(J_i)}$ für $i = 1, \dots, n$.

(2) Genau dann ist τ ein Tensorprodukt, erfüllt also die universelle Abbildungseigenschaft X2I, wenn $(w_j)_{j \in J}$ eine Basis von W ist.

Übung: Beweisen Sie dies nach dem bilinearen Vorbild von Satz X2C. Schließen Sie daraus das folgende schöne Anwendungsbeispiel.

Das mehrfache Tensorprodukt dank UAE

Beispiel X2K: Polynommodell des mehrfachen Tensorprodukts

Über jedem kommutativen Ring K erhalten wir das Tensorprodukt von $U_1 = \cdots = U_n = K[X]$ durch die vertraute Polynommultiplikation

$$\tau : K[X] \times \cdots \times K[X] \to K[X_1, \dots, X_n]$$
$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto u_1(X_1) \cdots u_n(X_n).$$

Allgemein $\tau : \prod_{i=1}^n K^{(J_i)} \to K^{(J)}$ und $(u_i)_{i=1}^n \mapsto u$ mit $u(j) = \prod_{i=1}^n u_i(j_i)$.

Satz X2L: Eindeutigkeit des mehrfachen Tensorprodukts

Sei $R = (R_0, R_1, \dots, R_n)$ eine Familie von Ringen und $U = (U_1, \dots, U_n)$ eine Familie linearer Räume über R, wobei U_i linear über (R_{i-1}, R_i) ist.
Dann sind zu diesen Räumen je zwei Tensorprodukte $\tau : \prod_{i=1}^n U_i \to W$ und $\tau' : \prod_{i=1}^n U_i \to W'$ eindeutig isomorph, d.h. es existiert genau ein (R_0, R_n)–Isomorphismus $(f, f') : W \cong W'$ mit $\tau' = f \circ \tau$ und $\tau = f' \circ \tau'$.

Übung: Beweisen Sie dies nach dem bilinearen Vorbild von Satz X2D.

Das mehrfache Tensorprodukt dank UAE

Satz X2M: Existenz des mehrfachen Tensorprodukts

Sei $R = (R_0, R_1, \dots, R_n)$ eine Familie von Ringen und $U = (U_1, \dots, U_n)$ eine Familie linearer Räume über R, wobei U_i linear über (R_{i-1}, R_i) ist.
Zu U über R existiert ein Tensorprodukt $\tau : \prod_{i=1}^n U_i \to W =: \bigotimes_{i=1}^n U_i$.

Übung: Konstruieren Sie $W = F/G$ nach dem bilinearen Vorbild X2F. Aus dieser länglichen, aber erfreulich expliziten Konstruktion folgt:

Satz X2N: Einfache Tensoren erzeugen alle Tensoren.

(0) Jeder Tensor $w \in U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$ ist eine Summe $w = \sum_{j=1}^\ell u_{1,j} \otimes \cdots \otimes u_{n,j}$ mit Länge $\ell \in \mathbb{N}$ und Faktoren $u_{i,j} \in U_i$ für $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, \ell$.

In U_i sei $\mathscr{A}_i = (u_{j_i})_{j_i \in J_i}$ eine Familie von Vektoren $u_{j_i} \in U_i$ mit $j_i \in J_i$.
Ihr Produkt in $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$ ist $\mathscr{A} = (u_j = u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_n})_{j \in J = J_1 \times \cdots \times J_n}$.

(1) Gilt $U_i = \langle \mathscr{A}_i \rangle_{R_i}$ für $i = 1, \dots, n$, so folgt $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n = \langle \mathscr{A} \rangle_{R_n}$.

(2) Hat jede Familie $\mathscr{A}_i$ eine duale Familie $\mathscr{A}_i^*$, so ist $\mathscr{A}^*$ dual zu $\mathscr{A}$.

(3) Gilt $U_i = \langle \mathscr{A}_i \rangle_{R_i}^!$ für $i = 1, \dots, n$, so folgt $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n = \langle \mathscr{A} \rangle_{R_n}^!$.

Mehrfaches Tensorprodukt: Erzeugung, Freiheit, Basis

Aufgabe: Aussage (0) folgt aus der Konstruktion F/G. Aussagen (1,2,3) erfordern gute Buchführung. Zeigen Sie dies für $n = 2$, dann allgemein.

Lemma X2O: Erzeugung, Freiheit, Basis im zweifachen Tensorprodukt

Seien T, S, R Ringe und darüber ${}_TU_S$, ${}_SV_R$ lineare Räume.

(0) Jeder Tensor $w \in U \otimes_S V$ ist eine Summe $w = \sum_{j=1}^\ell u_j \otimes v_j$ mit endlicher Länge $\ell \in \mathbb{N}$ und Faktoren $u_j \in U$ und $v_j \in V$.

Sei $\mathscr{A} = (u_j)_{j \in J} \in U^J$ eine Familie von Vektoren $u_j \in U$ für $j \in J$.
Als Koordinaten für $U \otimes_S V$ nutzen wir die R–lineare Abbildung

$$\varphi : V^{(J)} \to U \otimes_S V : v \mapsto \textstyle\sum_{j \in J} u_j \otimes v_j.$$

(1) Wird $U = \langle \mathscr{A} \rangle_S$ über S erzeugt von $\mathscr{A}$, so ist φ surjektiv: Jeder Tensor $w \in U \otimes_S V$ ist Summe $w = \sum_{j \in J} u_j \otimes v_j$ mit Koeffizienten $(v_j)_{j \in J} \in V^{(J)}$.

(2) Hat die Familie $\mathscr{A}$ in U eine duale Familie $\mathscr{A}^*$ in U^*, so ist φ injektiv.

(3) Hat $U = \langle \mathscr{A} \rangle_S^!$ die S–Basis $\mathscr{A}$, so ist φ bijektiv: Jeder Tensor $w \in U \otimes_S V$ ist Summe $w = \sum_{j \in J} u_j \otimes v_j$ mit eindeutigen Koeffizienten $(v_j)_{j \in J} \in V^{(J)}$.

Mehrfaches Tensorprodukt: Erzeugung, Freiheit, Basis

Beweis des Lemmas: (0) Das folgt aus der Konstruktion F/G in Satz X2F.

(1) Dank (0) ist w eine Summe einfacher Tensoren $u \otimes v$ mit $u \in U$, $v \in V$. Dank der Voraussetzung $U = \langle \mathcal{A} \rangle_S$ gilt $u = \sum_{j\in J} u_j s_j$ mit $(s_j)_{j\in J} \in S^{(J)}$, also $u \otimes v \overset{\text{Vor}}{=} (\sum_{j\in J} u_j s_j) \otimes v \overset{\text{Bil}}{=} \sum_{j\in J} u_j \otimes s_j v \overset{\text{Def}}{=} \varphi((s_j v_j)_{j\in J})$. Demnach enthält der Bildraum $\operatorname{Im}(\varphi)$ alle einfachen Tensoren, somit alle Tensoren.

(2) Zunächst ist $g_i : U \times V \to V : (u, v) \mapsto u_i^*(u) \cdot v$ bilinear. Die UAE X2A gibt uns $f_i : U \otimes V \to V : u \otimes v \mapsto u_i^*(u) \cdot v$ linear. Für $w = \sum_{j=1}^{\ell} u_j \otimes v_j$ folgt $f_i(w) = \sum_{j=1}^{\ell} u_i^*(u_j) \cdot v_j = v_i$. Aus $w = 0$ folgt $v_i = 0$ für alle $i \in J$.

(3) Dies folgt aus (1) und (2) dank der dualen Familie $\mathcal{A}^*$ zu $\mathcal{A}$ (W1H). QED

Alternative: Wir konstruieren die Umkehrabbildung $\psi : U \otimes_S V \to V^{(J)}$. Hierzu nutzen wir $\psi : U \times V \to V^{(J)}$ mit $\psi(\sum_{j\in J} u_j s_j, v) = (s_j v)_{j\in J}$. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da $\mathcal{A}$ eine Basis ist, und $(\mathbb{Z}, S, R)$–bilinear. Dank UAE X2A induziert ψ die $(\mathbb{Z}, R)$–lineare Abbildung

$$\psi : U \otimes_S V \to V^{(J)} : (\textstyle\sum_{j\in J} u_j s_j) \otimes v \mapsto (s_j v)_{j\in J}.$$

Wir prüfen nun $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ und $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. Dank N1A genügen dazu einfache Tensoren. Hier finden wir $\varphi(\psi(\sum_{j\in J} u_j s_j \otimes v)) \overset{\text{Def}}{=} \varphi((s_j v)_{j\in J}) \overset{\text{Def}}{=} \sum_{j\in J} u_j \otimes s_j v \overset{\text{Bil}}{=} \sum_{j\in J} u_j s_j \otimes v$ und $\psi(\varphi((v_j)_{j\in J})) \overset{\text{Def}}{=} \psi(\sum_{j\in J} u_j \otimes v_j) \overset{\text{Lin}}{=} \sum_{j\in J} \psi(u_j \otimes v_j) \overset{\text{Def}}{=} \sum_{j\in J} e_j v_j \overset{\text{Lin}}{=} (v_j)_{j\in J}$.

Mehrfaches Tensorprodukt: Erzeugung, Freiheit, Basis

Beweis des Satzes: Wir beweisen (0,1,2,3) per Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 0$ ist hier nichts zu beweisen. Für $n = 1$ sind die Aussagen klar. Für $n \geq 2$ nutzen wir $U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_n \cong U_1 \otimes (U_2 \otimes \cdots \otimes U_n)$, siehe X3C. Die Aussagen (0,1,2,3) seien für $V_1 = U_2 \otimes \cdots \otimes U_n$ bereits bewiesen.

(0) In V_1 hat jeder Tensor demnach die Form $v_1 = \sum_{j=1}^{\ell} u_{2,j} \otimes \cdots \otimes u_{n,j}$, in $U_1 \otimes V_1$ jeder einfache demnach $u_1 \otimes v_1 = \sum_{j=1}^{\ell} u_1 \otimes u_{2,j} \otimes \cdots \otimes u_{n,j}$.

(1/2/3) Als Koordinaten nutzen wir die R_n–lineare Abbildung

$$\Phi : R_n^{(J)} \to U_1 \otimes \cdots \otimes U_n : r = (r_j)_{j\in J} \mapsto \textstyle\sum_{j\in J} u_{j_1} \otimes u_{j_2} \otimes \cdots \otimes u_{j_n} \cdot r_j.$$

In $U_1 \otimes V_1$ gilt demnach $\Phi(r) = \sum_{j_1\in J_1} u_{j_1} \otimes v_{j_1} = \varphi(v)$ mit der Familie $v = (v_{j_1})_{j_1\in J_1}$ und den Faktoren $v_{j_1} = \sum_{(j_2,\dots,j_n)\in J_2\times\cdots\times J_n} u_{j_2} \otimes \cdots \otimes u_{j_n} \cdot r_j$.

Nach Induktionsvoraussetzung hat jede Familie $v = (v_{j_1})_{j_1\in J_1}$ in V_1 mindestens / höchstens / genau eine solche Darstellung durch $r \in R_n^J$. Dank Lemma ist φ surjektiv / injektiv / bijektiv, somit auch Φ. Demnach ist $\mathcal{A}$ in $U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_n$ über R_n erzeugend / frei / eine Basis. QED

Mehrfaches Tensorprodukt: Erzeugung, Freiheit, Basis

Damit erhalten wir erneut die Basiseigenschaft, nun in voller Schönheit:

Satz X2P: Tensorprodukt und Basiseigenschaft

Sei $R = (R_0, R_1, \dots, R_n)$ eine Familie von Ringen und $U = (U_1, \dots, U_n)$ eine Familie linearer Räume über R, wobei U_i linear über (R_{i-1}, R_i) ist.

Sei $\tau : \prod_{i=1}^n U_i \to W$ ein Produkt. In U_i sei $\mathcal{A}_i = (u_{j_i})_{j_i\in J_i}$ eine R_i–Basis. Ihre Produktfamilie in W ist $\mathcal{W} = (w_j = \tau(u_{j_1}, \dots, u_{j_n}))_{j\in J = J_1\times\cdots\times J_n}$.

Genau dann ist τ ein Tensorprodukt, wenn $\mathcal{W}$ in W eine R_n–Basis ist.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Dies haben wir im vorigen Satz X2N nachgerechnet.

„$\Leftarrow$“: Sei $\mu : \prod_{i=1}^n U_i \to Z$ ein weiteres Produkt. Dank PLF N1B erhalten wir die R_n–lineare Abbildung $f : W \to Z$ mit $f(w_j) = \mu(u_{j_1}, \dots, u_{j_n})$ für alle $j \in J$, also $f \circ \tau = \mu$, d.h. unser Produkt τ erfüllt die UAE X2I. QED

☺ Am einfachsten ist $R_0 = \dots = R_n = R$ und darüber zentrale Räume. Der allgemeine Fall gelingt ebenso schön… mit etwas mehr Buchführung: Skalare können nach rechts durchreicht werden. Alles gilt ebenso links.

Das Tensorprodukt dank UAE

Auch bei der Tour de France ist die UAE sehr prominent und erfolgreich. Für ein mathematisches Konzept ist das ungewöhnlich, doch erfreulich!

Rechenregeln für Summe und Produkt linearer Räume

Satz X3A: Rechenregeln für direkte Summe und Tensorprodukt

Für direkte Summe $\oplus$ und Tensorprodukt $\otimes$, gelten über allen Ringen, wo nötig involutiven *Ringen, die folgenden vertrauten Rechenregeln. Hier steht 0 für den Nullraum und 1 für den jeweiligen Grundring.

	direkte Summe $\oplus$	Tensorprodukt $\otimes$
Ntr	$0 \oplus U \cong U \cong U \oplus 0$	$1 \otimes U \cong U \cong U \otimes 1$
Ass	$(U \oplus V) \oplus W \cong U \oplus (V \oplus W)$	$(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$
Com	$U \oplus V \cong V \oplus U$	$U \otimes V \cong V \otimes U$ ***
AL	$(U \oplus V) \otimes W \cong (U \otimes W) \oplus (V \otimes W)$,	$0 \otimes U = 0$
AR	$U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$,	$U \otimes 0 = 0$

Aufgabe: Konstruieren Sie hierzu die „natürlichen“ Isomorphismen. Auf Basen sind die gewünschten Bijektionen jeweils klar, siehe X123. Wir wollen dies nun gebührend allgemein und basisfrei nachrechnen.

Rechenregeln für Summe und Produkt linearer Räume

Bemerkung: Diese Regeln erinnern uns an Ringe, genauer: Halbringe! Diese schöne Beobachtung ist kein Zufall, weder singulär noch ephemer, sondern eine fundamentale Struktur, die überall im Leben auftritt.

Das herausragende Modell sind die natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1)$, die jede:r aus der Grundschule kennt. Aus ihnen entsteht das Zahlensystem, siehe §B2.1. Hier schließt sich der Kreis, von einem höheren Standpunkt.

Dieselben Rechenregeln gelten für Mengen (G3J). Wir erhalten daraus abstrahiert die natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1)$ als Kardinalität card auf $(\mathtt{FinSet}, \sqcup, 0, \times, 1)$ und nun als Dimension $\dim_K$ auf $(\mathtt{FinVec}_K, \oplus, 0, \otimes, 1)$.

Abstrakte Zahlen entsprechen konkreten Mengen, Räumen, Objekten. Ja, Sie lesen richtig: Zahlen sind abstrakt, doch Mengen sind konkret. Mit Mengen können Sie konkret arbeiten, Sie können darin Elemente nehmen, vergleichen, verknüpfen, abbilden, … und vieles mehr!

⚠ Die Rechenregeln versprechen nicht Gleichheit, sondern natürliche Isomorphismen. Diese müssen wir nun konstruieren und nachweisen.

Neutrales zum Tensorprodukt

Übung: Ich führe für Sie das Tensorprodukt aus und ermutige Sie, es mit der Summe selbst zu versuchen, als Fingerübung zum Aufwärmen oder später im Nachgang: Wie beweisen Sie Ntr, Ass, Com dank UAE?

Satz X3B: Neutrales zum Tensorprodukt

Zu linearen Räumen ${}_TU_S$ und ${}_SV_R$ haben wir das Tensorprodukt:

$$\tau_{U,V} : U \times V \to U \otimes_S V : (u, v) \mapsto u \otimes v$$

Dabei wirkt der Raum ${}_SS_S$ neutral bis auf natürliche Isomorphie:

$$(\mu, \mu') : U \otimes_S S \cong U : u \otimes s \rightleftarrows u \cdot s$$
$$(\mu, \mu') : S \otimes_S V \cong V : s \otimes v \rightleftarrows s \cdot v$$

Aufgabe: Konstruieren Sie dieses Isomorphismuspaar dank UAE.

⚠ Die explizit angegebenen Formeln sind zwar schön und suggestiv, so können Sie sie leicht erinnern und bequem zusammenfassen, doch zunächst ist erst einmal ihre Wohldefiniertheit zu klären!

Neutrales zum Tensorprodukt

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
U \times S \arrow[d, "\tau_{U,S}"'] \arrow[dr, "{(u,s)\mapsto u\cdot s}", "\tilde{\mu}"'] & \\
U \otimes_S S \arrow[r, shift left, "\mu"] & U \arrow[l, shift left, "\mu'", "u\otimes s \mapsfrom u\cdot s"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S \times V \arrow[d, "\tau_{S,V}"] \arrow[dl, "{s\cdot v\mapsfrom(s,v)}", "\tilde{\mu}"'] & \\
V \arrow[r, shift left, "\mu'", "s\cdot v \mapsfrom s\otimes v"'] & S \otimes_S V \arrow[l, shift left, "\mu"]
\end{tikzcd}$$

(1) Zum (T, S)–linearen Raum U ist die Skalierung mit S von rechts $\tilde{\mu} : U \times S \to U : (u, s) \mapsto u \cdot s$ bilinear über (T, S, S). Dank UAE X2A induziert sie die (T, S)–lineare Abbildung $\mu : U \otimes_S S : u \otimes s \mapsto u \cdot s$.

(2) Umgekehrt ist auch $\mu' : U \to U \otimes_S S : u \mapsto u \otimes 1_S$ linear über (T, S): Für $t \in T$, $u \in U$, $s \in S$ gilt $\mu'(t \cdot u) \overset{\text{Def}}{=} (t \cdot u) \otimes 1_S \overset{\text{HL}}{=} t \cdot (u \otimes 1_S) \overset{\text{Def}}{=} t \cdot \mu'(u)$ und $\mu'(u \cdot s) \overset{\text{Def}}{=} (u \cdot s) \otimes 1_S \overset{\text{HM}}{=} u \otimes s \overset{\text{HR}}{=} (u \otimes 1_S) \cdot s \overset{\text{Def}}{=} \mu'(u) \cdot s$.

(3) Klar ist $\mu \circ \mu' : u \overset{\text{Def}}{\mapsto} u \otimes 1_S \overset{\text{Def}}{\mapsto} u \cdot 1_S \overset{\text{Ntr}}{=} u$ für alle $u \in U$. Zudem gilt $\mu' \circ \mu : u \otimes s \overset{\text{Def}}{\mapsto} u \cdot s \overset{\text{Def}}{\mapsto} (u \cdot s) \otimes 1_S \overset{\text{HM}}{=} u \otimes (s \cdot 1_S) \overset{\text{Ntr}}{=} u \otimes s$ für alle $s \in S$. Gleichheit gilt auf den einfachen Tensoren, also auf allen Tensoren (X2G). Somit gilt $\mu \circ \mu' = \mathrm{id}$ und $\mu' \circ \mu = \mathrm{id}$ „nach Konstruktion“. QED

Assoziativität des Tensorprodukts

Satz X3c: Assoziativität des Tensorprodukts

Gegeben seien drei lineare Räume ${}_TU_S$ und ${}_SV_R$ und ${}_RW_Q$.

(0) Genau wie für zwei Faktoren (U,V) bzw. (V,W) haben wir auch für je drei Faktoren (U,V,W) das Tensorprodukt X2I:

$$\tau_{U,V,W} : U \times V \times W \to U \otimes_S V \otimes_R W$$

(1) Hierzu existieren eindeutig die natürlichen (T,Q)–Isomorphismen

$$\begin{array}{ccccc} (U \otimes_S V) \otimes_R W & \cong & U \otimes_S V \otimes_R W & \cong & U \otimes_S (V \otimes_R W), \\ (u \otimes v) \otimes w & \leftrightarrows & u \otimes v \otimes w & \leftrightarrows & u \otimes (v \otimes w). \end{array}$$

Das scheint plausibel. Was ist hier also wirklich noch zu zeigen? Erst scheint es trivial, dann schwer, schließlich rettet uns die UAE!

Die *Eindeutigkeit* ist klar, denn die einfachen Tensoren erzeugen den Tensorraum (X2G). Doch die *Existenz* der behaupteten Abbildungen muss sorgsam nachgewiesen werden. Das gelingt durch Konstruktion / UAE!

Assoziativität des Tensorprodukts

⚠ Die einfachen Tensoren erzeugen alle Tensoren, aber nicht frei! Wir können nicht einfach irgend etwas auf den einfachen Tensoren vorschreiben, sondern müssen zudem auch alle Relationen erfüllen. Sonst drohen Widersprüche wie im No-Cloning-Theorem X1I!

Beweis: Hier die Konstruktion zunächst übersichtlich als Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
(U \times V) \times W \arrow[r, shift left, "\tilde\alpha_\ell"] \arrow[r, leftrightarrows, shift right, "((u,v),w) \leftrightarrows (u,v,w)"'] \arrow[d, "\tau_{U,V}\times\mathrm{id}_W"'] \arrow[ddr, "p"] & U \times V \times W \arrow[l, shift left, "\tilde\alpha'_\ell"] \arrow[r, shift left, "\tilde\alpha_r"] \arrow[r, leftrightarrows, shift right, "(u,v,w) \leftrightarrows (u,(v,w))"'] \arrow[dd, "\tau_{U,V,W}"] \arrow[ddl, "p"'] & U \times (V \times W) \arrow[l, shift left, "\tilde\alpha'_r"] \arrow[d, "\mathrm{id}_U\times\tau_{V,W}"] \\
(U \otimes_S V) \times W \arrow[d, "\tau_{U\otimes V,W}"'] \arrow[dr, "q"] & & U \times (V \otimes_R W) \arrow[dl, "q"'] \arrow[d, "\tau_{U,V\otimes W}"] \\
(U \otimes_S V) \otimes_R W \arrow[r, shift left, "\alpha_\ell"] \arrow[r, leftrightarrows, shift right, "(u\otimes v)\otimes w \leftrightarrows u\otimes v\otimes w"'] \arrow[ur, "\bar q"] & U \otimes_S V \otimes_R W \arrow[l, shift left, "\alpha'_\ell"] \arrow[r, shift left, "\alpha_r"] \arrow[r, leftrightarrows, shift right, "u\otimes v\otimes w \leftrightarrows u\otimes(v\otimes w)"'] & U \otimes_S (V \otimes_R W) \arrow[l, shift left, "\alpha'_r"] \arrow[ul, "\bar q"']
\end{tikzcd}$$

Assoziativität des Tensorprodukts

Aufgabe: Beweisen Sie die Existenz durch Konstruktion dank UAE!

Sie wollen und müssen nicht bis zum Quotienten F/G absteigen. Die elementweise Konstruktion ist zwar möglich, aber recht mühselig.

Es ist effizienter und eleganter, jeweils die passende UAE zu nutzen! Die Konstruktion verläuft gemäß Diagramm von oben nach unten:

Beweis: Auf dem kartesischen Produkt haben wir die Assoziatoren $(\tilde\alpha_\ell, \tilde\alpha'_\ell) : (U \times V) \times W \cong U \times V \times W : ((u,v),w) \leftrightarrows (u,v,w)$.

Die Komposition $p = \tau_{U\otimes V,W} \circ (\tau_{U,V} \times \mathrm{id}_W) \circ \tilde\alpha'$ ist (T,S,R,Q)–trilinear, induziert dank UAE X2I also $\alpha'_\ell : u \otimes v \otimes w \mapsto (u \otimes v) \otimes w$, wie ersehnt.

Die Komposition $q = \tau_{U,V,W} \circ \tilde\alpha$ ist (T,S,R)–bilinear in $U \times V$, induziert dank UAE also $\bar q$. Letzteres ist (T,R,Q)–bilinear, induziert dank UAE also $\alpha_\ell : (u \otimes v) \otimes w \mapsto u \otimes v \otimes w$, wie ersehnt. Demnach gilt $\alpha'_\ell \circ \alpha_\ell = \mathrm{id}$ und $\alpha_\ell \circ \alpha'_\ell = \mathrm{id}$ auf einfachen Tensoren, also auf allen Tensoren (X2G). $\boxed{\text{QED}}$

Die „abstrakte“ UAE konstruiert Abbildungen, konkret und effizient!

Wie strukturieren Sie Ihre UAE-Beweise?

Wir diskutieren vertraute Rechenregeln, hier für das Tensorprodukt: Neutralität, Assoziativität, Kommutativität und Distributivität. Unter diesen ist die Assoziativität die aufwändigste; wir führen sie detailliert aus, die weiteren Rechnungen sind dann leichtere Übungen.

Ich leite Sie schrittweise an, solche Beweise in verschiedenen Formaten und Abstraktionsstufen durchzuführen. Idealerweise ergänzen sie sich:

- Das Diagramm gibt einen Überblick, graphisch zweidimensional. Es unterdrückt dabei viele Details, auch den zeitlichen Ablauf.
- Der Text erklärt alle Details, zumindest kann er das im Prinzip, insbesondere die logische Abfolge der Konstruktionsschritte.

Bitte üben Sie diese Präsentationsformen, beide arbeiten zusammen. Bitte wählen Sie die jeweils nötige Detailtiefe passend zur Zielgruppe. Idealerweise schreiben Sie es sich selbst genaustens auf, erklären aber dann im Überblick zunächst die tragenden Ideen, dann eine genauere Auflösung, auf Nachfrage schließlich gerne die *nitty-gritty* Details.

Kommutativität des Tensorprodukts

Beim Tensorprodukt $U \otimes_S V$ ist die Reihenfolge der Faktoren wichtig: Für $U \neq V$ gilt $U \otimes V \neq V \otimes U$. Auch für $U = V$ und $u, v \in V$ linear unabhängig, über S gilt $u \otimes v \neq v \otimes u$. Die Vertauschung stiftet jedoch einen natürlichen Isomorphismus, solange wir die Ringe mitnehmen:

Satz X3D: Kommutativität des Tensorprodukts

Seien ${}_TU_R$ und ${}_SV_R$ lineare Räume. (1) Ist $T = S = R$ kommutativ sowie darüber U und V zentral, so existiert der (R, R)–Isomorphismus

$$ {}_RU_R \otimes {}_RV_R \;\cong\; {}_RV_R \otimes {}_RU_R \;:\; u \otimes v \leftrightarrows v \otimes u. $$

(2) Für involutive Ringe T, S, R existiert der (R, T)–Isomorphismus

$$ \overline{{}_TU_S \otimes {}_SV_R} \;\cong\; {}_R\overline{V}_S \otimes {}_S\overline{U}_T \;:\; u \otimes v \leftrightarrows v \otimes u. $$

Typische Anwendungsbeispiele dieses allgemeineren, involutiven Falls sind die Konjugation auf $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ oder die Adjunktion von Matrizen.

Kommutativität des Tensorprodukts

Aufgabe: Konstruieren Sie diese Isomorphismen dank UAE.

Lösung: Es genügt statt (1) gleich den involutiven Fall (2) zu zeigen. Die Konstruktion verläuft von oben nach unten in folgendem Diagramm:

$$ \begin{tikzcd}
\overline{{}_TU_S \times {}_SV_R} \arrow[rr, shift left, "\tilde\sigma"] \arrow[rr, shift right, "\tilde\sigma'"'] \arrow[rr, "(u,v) \leftrightarrows (v,u)"'] \arrow[dr, "q"] \arrow[dd, "\tau_{U,V}"'] & & {}_R\overline{V}_S \times {}_S\overline{U}_T \arrow[dl, "q'"'] \arrow[dd, "\tau_{\overline{V},\overline{U}}"] \\
& & \\
\overline{{}_TU_S \otimes {}_SV_R} \arrow[rr, shift left, "\sigma"] \arrow[rr, shift right, "\sigma'"'] \arrow[rr, "u \otimes v \leftrightarrows v \otimes u"'] & & {}_R\overline{V}_S \otimes {}_S\overline{U}_T
\end{tikzcd} $$

Anleitung: Konstruieren Sie nach dem Vorbild der vorigen Beweise:
(1) Wie definieren Sie anfangs $\tilde\sigma$ und $\tilde\sigma'$? Sind diese (R, S, T)–linear?
(2) Wie erhalten Sie daraus σ und σ'? (3) Sind dies Isomorphismen?

☺ Oft genügen präzise Definition und sorgsame Buchführung.

Distributivität des Tensorprodukts

Satz X3E: Distributivität des Tensorprodukts

Gegeben seien lineare Räume ${}_T(U_i)_S$ für $i \in I$ und ${}_S(V_j)_R$ für $j \in J$.
(1) Dann ist das Tensorprodukt distributiv über die direkte Summe:

$$ \begin{aligned} (U_1 \oplus U_2) \otimes V &\cong (U_1 \otimes V) \oplus (U_2 \otimes V) \\ U \otimes (V_1 \oplus V_2) &\cong (U \otimes V_1) \oplus (U \otimes V_2) \end{aligned} $$

(2) Dies gilt ganz allgemein sogar für beliebige direkte Summen:

$$ \begin{aligned} (\textstyle\bigoplus_{i\in I} U_i) \otimes (\bigoplus_{j\in J} V_j) &\cong \textstyle\bigoplus_{(i,j)\in I\times J} (U_i \otimes V_j) \\ (\textstyle\sum_{i\in I} u_i) \otimes (\sum_{j\in J} v_j) &\mapsto \textstyle\sum_{(i,j)\in I\times J} (u_i \otimes v_j) \end{aligned} $$

Alle Tensorprodukte werden hier über dem mittleren Ring S gebildet. Ich schreibe statt $\otimes_S$ abkürzend $\otimes$, um die Symmetrie zu $\oplus$ zu betonen. Präzise Kommunikation ist eine Pflicht für die Sender:in, sie vermeidet Missverständnisse und Rätselraten für die Empfänger:in. Sind sich beide einig, so können sie fehlende Daten aus dem Kontext ergänzen.

Distributivität des Tensorprodukts

Slogan: *Das Tensorprodukt von Summen ist die Summe der Tensorprodukte.*
Als Ausgangspunkt dienen uns dabei die folgenden Abbildungen:

$$ \begin{aligned} (\textstyle\bigoplus_{i\in I} U_i) \times (\bigoplus_{j\in J} V_j) &\xrightarrow{\tilde\mu} \textstyle\bigoplus_{(i,j)\in I\times J} (U_i \otimes V_j) \\ ((\textstyle\sum_{i\in I} u_i), (\sum_{j\in J} v_j)) &\mapsto \textstyle\sum_{(i,j)\in I\times J} (u_i \otimes v_j) \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} (\textstyle\bigoplus_{i\in I} U_i) \otimes (\bigoplus_{j\in J} V_j) &\xleftarrow{\tilde\mu'} U_i \times V_j \\ ((u_i) \otimes (u_j)) &\leftarrow\!\shortmid (u_i, v_j) \end{aligned} $$

Anleitung: Konstruieren Sie nach dem Vorbild der vorigen Beweise:
(1) Wie definieren Sie anfangs $\tilde\mu$ und $\tilde\mu$? Sind diese (T, S, R)–linear?
(2) Wie erhalten Sie daraus μ und μ? (3) Sind dies Isomorphismen?

Aufgabe: Ganz leicht ist schließlich $U \otimes 0 = 0$ und $0 \otimes V = 0$.

Lösung: Der Raum $U \otimes 0$ wird erzeugt von den einfachen Tensoren $u \otimes 0 = u \otimes (0_S \cdot 0) = (u \cdot 0_S) \otimes 0 = 0_U \otimes 0$. Somit ist hat der Raum $U \otimes 0 = \{0_U \otimes 0\}$ nur ein einziges Element, ist also der Nullraum.

Potenzgesetze und Schönfinkeln

♦ Satz G3J: Potenzgesetze für Abbildungsmengen, Schönfinkel 1924

Für Abbildungsmengen $Y^X = \mathrm{Fun}(X,Y) = \{f : X \to Y\}$ haben wir:

$$\begin{aligned} Z^{(X \sqcup Y)} &\cong Z^X \times Z^Y &&: f \leftrightarrows (f|_X,\, f|_Y) \\ (X \times Y)^Z &\cong X^Z \times Y^Z &&: f \leftrightarrows (\mathrm{pr}_1 \circ f,\, \mathrm{pr}_2 \circ f) \\ Z^{X \times Y} &\cong (Z^Y)^X &&: f \leftrightarrows g \text{ mit } f(x,y) = g(x)(y) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} f : X \times Y &\to Z \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned}\right\} \underset{\longleftarrow}{\overset{f(x,y) = g(x)(y)}{\longrightarrow}} \left\{\begin{aligned} g &: X \to \mathrm{Fun}(Y,Z) \\ x &\mapsto [g(x) : Y \to Z] \end{aligned}\right.$$

☺ Somit ist $g(x)$ die partielle Abbildung $f(x,\text{-}) : Y \to Z : y \mapsto f(x,y)$. In Worten: Zu jedem festem $x \in X$ erhalten wir eine Funktion in $y \in Y$.

☺ Dieser genial-einfache Trick heißt in der Mathematik „Adjunktion“, in der Informatik kulinarisch „Currying“ nach Haskell Curry (1958), historisch korrekt „Schönfinkeln“ nach Moses Schönfinkel (1924).

Potenzgesetze und Schönfinkeln

Vervollständigt wird diese Liste durch $\emptyset \times X = \emptyset = X \times \emptyset$ und $X^\emptyset = \{\emptyset\}$ und $\emptyset^X = \emptyset$ für $X \neq \emptyset$ sowie $\{a\}^X = \{\mathrm{const}^a_X\}$ und $X^{\{a\}} \cong X : f \mapsto f(a)$.

☺ Für endliche Mengen übersetzt sich dies zu Elementezahlen in $\mathbb{N}$ dank der Kardinalität $\mathrm{card} : (\mathtt{FinSet}, \sqcup, 0, \times, 1, \hat{\ }) \to (\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1, \hat{\ })$:

♦ Satz B5B: Potenzgesetze für die natürlichen Zahlen

In den natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1, \hat{\ })$ gilt für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$:

(P0)	$x^0 = 1$	(P1)	$x^{y+z} = x^y \cdot x^z$
(P2)	$x^1 = x$	(P3)	$x^{y \cdot z} = (x^y)^z$
(P4)	$1^x = 1$	(P5)	$(x \cdot y)^z = x^z \cdot y^z$
(P6)	$0^x = 0$ für $x \neq 0$		

? Wie übertragen wir Schönfinkels Trick auf das Tensorprodukt? Erstaunlicherweise setzt sich auch diese Rechenregel von Mengen und Abbildungen direkt fort zu linearen Räumen und Homomorphismen!

Die Tensor-Hom-Adjunktion durch Schönfinkeln

Satz X3F: Tensor-Hom-Adjunktion

Gegeben seien Ringe T, S, R und lineare Räume ${}_TU_S$, ${}_SV_R$ und ${}_TW_R$.
(1) Ist $T = S = R$ kommutativ und darüber U, V, W zentral, so gilt:

$$\mathrm{Hom}_R(U \otimes_R V, W) \;\cong\; \mathrm{Hom}_R(U, \mathrm{Hom}_R(V, W))$$

Beispiel: Für freie Räume $U \cong R^{(I)}$ und $V \cong R^{(J)}$ gilt $U \otimes V \cong R^{(I \times J)}$, somit $\mathrm{Hom}_R(U \otimes_R V, W) \cong W^{I \times J} \cong (W^J)^I \cong \mathrm{Hom}_R(U, \mathrm{Hom}_R(V, W))$.

(2) Allgemein haben wir den natürlichen Isomorphismus:

$$\mathrm{Hom}_{(T,R)}({}_TU_S \otimes {}_SV_R, {}_TW_R) \;\cong\; \mathrm{Hom}_{(T,S)}({}_TU_S, \mathrm{Hom}_R({}_SV_R, {}_TW_R))$$

$$\left.\begin{aligned} f : U \otimes V &\to W \\ u \otimes v &\mapsto f(u \otimes v) \end{aligned}\right\} \underset{\longleftarrow}{\overset{f(u \otimes v) = g(u)(v)}{\longrightarrow}} \left\{\begin{aligned} g &: U \to \mathrm{Hom}(V, W) \\ u &\mapsto [g(u) : V \to W] \end{aligned}\right.$$

Somit ist $g(u)$ die partielle Abbildung $f(u \otimes \text{-}) : V \to W : v \mapsto f(u \otimes v)$.

Aufgabe: Dies folgt aus der UAE X2A. Schreiben Sie es sorgsam aus!

Die Tensor-Hom-Adjunktion durch Schönfinkeln

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{(T,R)}({}_TU_S \otimes {}_SV_R, {}_TW_R) \arrow[rr, dashed, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\text{UAE X2A}", "\cong"'] & & \mathrm{Hom}_{(T,S)}({}_TU_S, \mathrm{Hom}_R({}_SV_R, {}_TW_R)) \arrow[dl, leftrightarrow, "\text{Schönfinkeln}", "\cong"'] \\ & \mathrm{Bil}_{(T,S,R)}({}_TU_S, {}_SV_R; {}_TW_R) & \end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{aligned} h : U \times V &\to W \\ (u,v) &\mapsto h(u,v) \end{aligned}\right\} \underset{\longleftarrow}{\overset{h(u,v) = g(u)(v)}{\longrightarrow}} \left\{\begin{aligned} g &: U \to \mathrm{Hom}(V, W) \\ u &\mapsto [g(u) : V \to W] \end{aligned}\right.$$

Schönfinkeln definiert die Bijektion $h \leftrightarrows g$ der Abbildungen. Dabei wird jede (T,S,R)–bilineare Abbildung h zu einem (T,S)–Homomorphismus g in die R–Homomorphismen, und umgekehrt. Sorgsam nachrechnen:

(AR)	$g(u)(v + v') = g(u)(v) + g(u)(v')$,	(HR)	$g(u)(v \cdot r) = g(u)(v) \cdot r$,
(AL)	$g(u + u')(v) = g(u)(v) + g(u')(v)$,	(HL)	$g(t \cdot u)(v) = t \cdot g(u)(v)$,
		(HM)	$g(u \cdot s)(v) = g(u)(s \cdot v)$

Die universelle Abbildungseigenschaft X2A erledigt nun den Rest. QED

Satz X3G: Funktorialität des Tensorprodukts

(0) Zu $f : U \to U'$ linear über (T, S) und $g : V \to V'$ linear über (S, R) existiert als ihr Tensorprodukt genau eine (T, R)–lineare Abbildung

$$f \otimes g : U \otimes_S V \to U' \otimes_S V' : u \otimes v \mapsto f(u) \otimes g(v).$$

Slogan: *Das Tensorprodukt linearer Abbildungen wirkt faktorweise.*

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[r, "f\times g", "(u,v)\mapsto(f(u),g(v))"'] \arrow[d, "\tau", "u\otimes v \mapsfrom (u,v)"'] \arrow[dr, "\tau'\circ(f\times g)", "(u,v)\mapsto f(u)\otimes g(v)"'] & U' \times V' \arrow[d, "\tau'", "u'\otimes v' \mapsfrom (u',v')"'] \\
U \otimes V \arrow[r, "f\otimes g", "u\otimes v\mapsto f(u)\otimes g(v)"'] & U' \otimes V'
\end{tikzcd}$$

Beweis: Die Komposition $\tau' \circ (f \times g)$ ist (T, S, R)–bilinear und induziert dank UAE von τ die ersehnte (T, R)–lineare Abbildung $f \otimes g$. QED

Satz X3G: Funktorialität des Tensorprodukts

(1) Für die Identitäten gilt $\mathrm{id}_U \otimes \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_{U\otimes V}$.

(2) Für $f : U \to U'$ und $f' : U' \to U''$ linear über (T, S) sowie $g : V \to V'$ und $g' : V' \to V''$ linear über (S, R) gilt:

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$$

Slogan: *Die Komposition der Produkte ist das Produkt der Kompositionen.*

$$\begin{tikzcd}
U \otimes_S V \arrow[r, shift left, "\mathrm{id}_U\otimes\mathrm{id}_V"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}_{U\otimes V}"'] \arrow[rr, bend right, "(f'\otimes g')\circ(f\otimes g)"'] & U \otimes_S V \arrow[r, "f\otimes g"] & U' \otimes_S V' \arrow[r, "f'\otimes g'"] & U'' \otimes_S V''
\end{tikzcd}$$

Beweis: Die beiden (T, R)–linearen Abbildungen links und rechts sind bereits konstruiert, wir müssen sie nur noch vergleichen. Gleichheit gilt auf den einfachen Tensoren, also auf allen Tensoren (X2G). QED

Sind Basen gegeben, so können wir jede lineare Abbildung als Matrix darstellen, und ihr Tensorprodukt durch das Kronecker–Produkt X3H.

Definition X3H: Kronecker–Produkt

Für $A \in R^{m'\times m}$ und $B \in R^{n'\times n}$ definieren wir das **Kronecker–Produkt**

$$A \otimes B := \begin{bmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,m}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m',1}B & \dots & a_{m',m}B \end{bmatrix} \in R^{(m'n')\times(mn)}.$$

Ausgeschrieben:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix}
a_{1,1}b_{1,1} & \dots & a_{1,1}b_{1,n} & \dots & a_{1,m}b_{1,1} & \dots & a_{1,m}b_{1,n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{1,1}b_{n',1} & \dots & a_{1,1}b_{n',n} & \dots & a_{1,m}b_{n',1} & \dots & a_{1,m}b_{n',n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m',1}b_{1,1} & \dots & a_{m',1}b_{1,n} & \dots & a_{m',m}b_{1,1} & \dots & a_{m',m}b_{1,n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m',1}b_{n',1} & \dots & a_{m',1}b_{n',n} & \dots & a_{m',m}b_{n',1} & \dots & a_{m',m}b_{n',n}
\end{bmatrix}$$

Übung: Es gibt Spezialfälle, in denen das Kronecker–Produkt gleich dem üblichen Matrixprodukt ist. Welche sind das? Siehe Matrixmodell X1E!

Satz X3H: Kronecker–Produkt

Sei $T = S = R$ kommutativ, $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_m)$ eine Basis von U und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Dank X2C erhalten wir für $U \otimes V$ die Produktbasis $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = (u_1 \otimes v_1, \dots, u_1 \otimes v_n, \dots, u_m \otimes v_1, \dots, u_m \otimes v_n)$.

Für die Basen $\mathcal{A}' = (u'_1, \dots, u'_{m'})$ von U' und $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_{n'})$ von V' nutzen wir ebenso die lexikographische Ordnung für die Produktbasis $\mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}' = (u'_1 \otimes v'_1, \dots, u'_1 \otimes v'_{n'}, \dots, u'_{m'} \otimes v'_1, \dots, u'_{m'} \otimes v'_{n'})$ von $U' \otimes V'$.

Für R–lineare Abbildungen $f : U \to U'$ und $g : V \to V'$ gilt dann:

$$\boxed{\mathrm{M}^{\mathcal{A}'\otimes\mathcal{B}'}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}(f \otimes g) = \mathrm{M}^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}}(f) \otimes \mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(g)}$$

Die Matrix des Tensorprodukts ist das Kronecker–Produkt der Matrizen.

☺ Damit haben wir auch für $f \otimes g$ eine konkrete Darstellung als Matrix. Für Matrizen beherrschen wir unsere bewährten, effizienten Werkzeuge.

Übung: Formulieren und beweisen Sie ebenso die Kronecker–Summe $\oplus$.

Das Matrixprodukt ist ein Tensorprodukt!

♦ **Beispiel X1E:** Matrixmodell des Tensorprodukts

Über jedem Ring R ist das dyadische Produkt ein Tensorprodukt:

$$R^{p\times 1} \otimes_R R^{1\times q} \cong R^{p\times q} : u \otimes v \mapsto u \cdot v$$

Dieses Matrixprodukt bedeutet ausgeschrieben für $(p,q) = (3,4)$:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & u_1v_4 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & u_2v_4 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & u_3v_4 \end{bmatrix}$$

Satz X4A: Das Matrixprodukt ist ein Tensorprodukt.

Für jeden Ring R und $n,p,q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ haben wir den Isomorphismus:

$$R^{p\times n} \otimes_{R^{n\times n}} R^{n\times q} \cong R^{p\times q} : u \otimes v \mapsto u \cdot v$$

Das Matrixprodukt ist ein Tensorprodukt!

Übung: Beweisen Sie den behaupteten Isomorphismus aus Beispiel X1E.

Mit den üblichen Matrixoperationen ist $U_S = R^{p\times n}$ ein rechtslinearer Raum und ${}_SV = R^{n\times q}$ ein linkslinearer Raum über dem Ring $S = R^{n\times n}$.

Übung: Beweisen Sie den schönen Satz X4A, zunächst für $p = q = 1$.

(1) Die Abbildung $\mu : U_S \times {}_SV \to R : (u,v) \mapsto u \cdot v$ ist ein Produkt über S.

(2) Demnach existiert genau ein Gruppenhomomorphismus

$$f : (U_S) \otimes_S ({}_SV) \to R : u \otimes v \mapsto u \cdot v.$$

(3) Umgekehrt existiert der Gruppenhomomorphismus

$$g : R \to (U_S) \otimes_S ({}_SV) : r \mapsto \begin{bmatrix} r & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(4) Die Abbildungen f und g sind zueinander invers.

Übung: Wenn Sie diesen Fall gelöst haben, versuchen Sie es allgemein.
Tipp: Es gelingt erfreulich leicht dank der Umkehrung $g(e_{ij}) = e_{i1} \otimes e_{1j}$.

Das Matrixprodukt ist ein Tensorprodukt!

Sie haben schon oft Matrizen multipliziert, insbesondere Zeilen- mit Spaltenvektoren. Das Matrixprodukt ist tatsächlich ein Tensorprodukt!

☺ Speziell für $R^{p\times 1} \otimes_R R^{1\times q} \to R^{p\times q}$ wissen Sie das schon länger, etwa über jedem Körper R dank Basiseigenschaft des Matrixmodells X1E.

☺ Überraschung: Allgemein ist $R^{p\times n} \times R^{n\times q} \to K^{p\times q} : (u,v) \mapsto u \cdot v$ ein Tensorprodukt! Diesmal jedoch nicht über dem Grundring R (X117), sondern über dem hier passenden mittleren Matrixring $S = R^{n\times n}$. Das ist genau die Aussage des Isomorphismus von Satz X4A.

☺ Die Matrixmultiplikation X201 war leuchtendes Vorbild für Produkte, nun erweist sie sich im Nachgang selbst als ein Tensorprodukt.

☺ Hier beweisen Sie dies für $p = q = 1$, schon in diesem einfachsten Fall können Sie viel lernen… und dann den allgemeinen Fall verstehen.

Das Matrixprodukt ist ein Tensorprodukt!

Basen haben wir hier nicht, doch unsere Werkzeuge greifen weiterhin!

Wie gut, dass wir über Körpern arbeiten können, aber nicht müssen.
Wie gut, dass wir mit Basen arbeiten können, aber keineswegs müssen.
Wie gut, dass wir umsichtig und nachhaltig vorgehen und uns damit ein großes Repertoire an Beispielen und Anwendungen erschließen.

Matrixringe gehören zum Grundbestand der Linearen Algebra.
Wir wollen sie effizient nutzen lernen und gründlich verstehen.
Daher wären Körper allein allzu hasenfüßig und eindimensional,
Matrizen führen uns unweigerlich zu nicht-kommutativen Ringen.

Die Untersuchung von Matrizen liefert konkretes Anschauungsmaterial.
Der Erfolg der Linearen Algebra beruht auf der effizienten Verbindung von allgemeiner Theorie mit ihren Datenstrukturen und Algorithmen.
Dafür sind Matrizen und ihre Methoden die bewährte Grundlage.

Homomorphismen als Tensoren

Satz X4B: Darstellung von Homomorphismen als Tensoren

Seien U, V rechtslineare Räume über dem Ring R. Wir wohldefinieren

$$\Psi : V \otimes_R U^* \to \mathrm{Hom}_R(U,V) : \Psi(v \otimes \varphi)(u) = v \cdot \varphi(u).$$

(1) Hat U eine endliche Basis $(u_1, \dots, u_n)$, so ist Ψ bijektiv mit Inverser

$$\Phi : \mathrm{Hom}_R(U,V) \to V \otimes_R U^* : f \mapsto \textstyle\sum_{j=1}^n f(u_j) \otimes u_j^*.$$

(2) Hat V eine endliche Basis $(v_1, \dots, v_m)$, so ist Ψ bijektiv mit Inverser

$$\Phi : \mathrm{Hom}_R(U,V) \to V \otimes_R U^* : f \mapsto \textstyle\sum_{i=1}^m v_i \otimes f^*(v_i^*).$$

(3) Gilt (1) und (2) mit R kommutativ, so ist $(e_{i,j} = \Psi(v_i \otimes u_j^*))_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n}$ eine R–Basis von $\mathrm{Hom}_R(U,V) \cong R^{m\times n}$, wie von Matrizen vertraut.

(4) Ist R ein Körper, so ist Ψ injektiv, und das Bild in $\mathrm{Hom}_R(U,V)$ sind genau die Homomorphismen mit endlichem Rang $\le r \in \mathbb{N}$:

$$\textstyle\sum_{i=1}^r v_i \otimes \varphi_i \;\mapsto\; \sum_{i=1}^r \Psi(v_i \otimes \varphi_i)$$

Homomorphismen als Tensoren

☺ Das ist die bewährte Matrizenrechnung, nun befreit von Matrizen! Diese Schreibweise (1,2) ist übersichtlich und effizient, insbesondere wenn der Rang r klein ist gegenüber den Dimensionen m und n. In Matrixdarstellung (3) finden wir das dyadische Produkt X1E!

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & u_1v_4 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & u_2v_4 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & u_3v_4 \end{bmatrix}$$

Hierzu seien U und V frei mit endlichen Basen. Wie üblich stellen wir dann $V \cong R^{m\times 1}$ durch Spaltenvektoren dar, und ebenso $U \cong R^{n\times 1}$. Dual werden hieraus Zeilenvektoren $U^* = R^{1\times n}$. Der Isomorphismus $(\Psi, \Phi) : V \otimes_R U^* \cong \mathrm{Hom}_R(U,V)$ entspricht dann $R^{m\times 1} \otimes_R R^{1\times n} \cong R^{m\times n}$.

Übung: Alle Daten liegen explizit vor. Rechnen Sie Satz X4B nach!
(0) Warum ist Ψ wohldefiniert? (1,2) Gilt $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$ und $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$?
(3) Warum sind Ψ und Φ nun R–linear? (4) Was sind Kern und Bild?

Homomorphismen als Tensoren

Beispiel X4C: Singulärwertzerlegung

Die obige Darstellung kennen wir von der Singulärwertzerlegung T3A:

$$\textstyle\sum_{i=1}^r v_i\sigma_i \otimes u_i^* \;\mapsto\; \sum_{i=1}^r v_i\sigma_i u_i^*$$

Wir betrachten eine lineare Abbildung $f : U \to V$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Die beiden Vektorräume U und V tragen jeweils ein Skalarprodukt.

Zu f sind $\sigma_1 \ge \dots \ge \sigma_r > 0$ die Singulärwerte, die Singulärvektoren $v_1, \dots, v_r \in V$ und $u_1, \dots, u_r \in U$ bilden zwei orthonormale Familien, und $u_i^* = \langle u_i \,|\, - \rangle \in U^*$ ist die zu u_i gehörige Linearform.

Damit schreibt sich die lineare Abbildung f gemäß

$$f : U \to V : u \mapsto \textstyle\sum_{i=1}^r v_i\sigma_i \cdot \langle u_i \,|\, u \rangle.$$

Speziell für die euklidischen Räume $U = \mathbb{K}^m$ und $V = \mathbb{K}^n$ erhalten wir die Matrixdarstellung $\mathrm{M}(f) = \sum_{i=1}^r v_i\sigma_i u_i^\dagger$ bezüglich der Standardbasen.

Homomorphismen als Tensoren

Sind die filigranen Voraussetzungen von Satz X4B wirklich nötig? Wie immer helfen Gegen/Beispiele zur Illustration und Abgrenzung!

⚠ Die Abbildung $\Psi : V \otimes_R U^* \to \mathrm{Hom}_R(U,V)$ existiert immer, sie ist im Allgemeinen jedoch weder injektiv noch surjektiv.

Beispiel: Über dem Ring $\mathbb{Z}$ betrachten wir die Räume $U = V = \mathbb{Z}/2$. Hier gilt $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) = \{0, \mathrm{id}\}$. Als Dualraum finden wir $(\mathbb{Z}/2)^* = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) = \{0\}$ und somit $\mathbb{Z}/2 \otimes (\mathbb{Z}/2)^* = 0$.

Allgemein: Für jede endliche abelsche Gruppe $U = V \neq \{0\}$ über $\mathbb{Z}$ gilt $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(U,V) = \{0, \mathrm{id}, \dots\}$, jedoch $U^* = 0$ und somit $V \otimes U^* = 0$. Hier ist Ψ offensichtlich injektiv, aber nicht surjektiv.

Beispiel: Über dem Ring $\mathbb{Z}/4$ betrachten wir die Räume $U = V = 2\mathbb{Z}/4$. Hier gilt $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/4}(2\mathbb{Z}/4, 2\mathbb{Z}/4) = \{0, \mathrm{id}\}$. Auch als Dualraum finden wir $(2\mathbb{Z}/4)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/4}(2\mathbb{Z}/4, \mathbb{Z}/4) = \{0, \mathrm{inc}\}$ und als Tensorprodukt somit $2\mathbb{Z}/4 \otimes (2\mathbb{Z}/4)^* = \{0, 2 \otimes \mathrm{inc}\}^!$. Jedoch gilt diesmal $\Psi(2 \times \mathrm{inc}) = 0$, denn $\Psi(2 \otimes \mathrm{inc})(2) = 2 \cdot 2 = 0$. Hier ist Ψ weder injektiv noch surjektiv.

Reellifizierung und Komplexifizierung

Beispiel X4D: Reellifizierung und Komplexifizierung

(1a) Jeder $\mathbb{C}$–Vektorraum $V_{\mathbb{C}}$ wird zu einem $\mathbb{R}$–Vektorraum $V_{\mathbb{R}}$ durch Einschränkung der Skalare von $\mathbb{C}$ zu $\mathbb{R}$, also die Einschränkung von

$$\boxed{\bullet : V \times \mathbb{C} \to V \quad \text{zu} \quad \bullet : V \times \mathbb{R} \to V.}$$

(1b) Ist $(v_j)_{j\in J}$ eine $\mathbb{C}$–Basis von V, so ist $(v_j \bullet 1, v_j \bullet \mathrm{i})_{j\in J}$ eine $\mathbb{R}$–Basis. Für die Dimensionen folgt $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{C}}(V) \cdot \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2\dim_{\mathbb{C}}(V)$.

(1c) Jede $\mathbb{C}$–lineare Abbildung $f : V \to V'$ ist auch $\mathbb{R}$–linear.

(2a) Zu jedem $\mathbb{R}$–Vektorraum $U_{\mathbb{R}}$ erhalten wir den $\mathbb{C}$–Vektorraum

$$\boxed{V_{\mathbb{C}} := (U_{\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{R}} ({}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}_{\mathbb{C}}).}$$

(2b) Ist $(u_j)_{j\in J}$ eine $\mathbb{R}$–Basis von $U_{\mathbb{R}}$, dann ist $(v_j = u_j \otimes 1_{\mathbb{C}})_{j\in J}$ eine $\mathbb{C}$–Basis von $V_{\mathbb{C}}$. Für die Dimensionen folgt $\dim_{\mathbb{C}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(U)$.

(2c) Jede $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $f_{\mathbb{R}} : U_{\mathbb{R}} \to U'_{\mathbb{R}}$ induziert eine zugehörige $\mathbb{C}$–lineare Abbildung $g_{\mathbb{C}} = f_{\mathbb{R}} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} = U_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_{\mathbb{C}} \to U'_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_{\mathbb{C}} = V'_{\mathbb{C}}$.

Reellifizierung und Komplexifizierung

Die Übergang von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{R}$ ist leicht, hier genügt die Einschränkung. Umgekehrt ist die Erweiterung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ keineswegs offensichtlich! Warum wollen wir das? Der Körper $\mathbb{C}$ hat bessere Eigenschaften, insbesondere zerfällt jedes Polynom über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren.

Diesen Trick haben wir daher schon oft angewendet, mangels allgemeiner Werkzeuge jedoch zunächst noch recht hemdsärmelig: Wir stellen $f_{\mathbb{R}} : U_{\mathbb{R}} \to U'_{\mathbb{R}}$ als eine reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dar, und betrachten diese dann als eine komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

☺ Diesen Trick nutzen wir zur Diagonalisierung, Jordanisierung, uvm.

Hier sehen Sie nun, was wirklich dahinter steckt: Mit dem Tensorprodukt können wir die Komplexifizierung nun allgemein und basisfrei erklären! So erhalten wir nicht nur die komplexifizierte Matrix, sondern auch die $\mathbb{C}$–lineare Abbildung $g_{\mathbb{C}} = f_{\mathbb{R}} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} = U_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_{\mathbb{C}} \to U'_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_{\mathbb{C}} = V'_{\mathbb{C}}$

☺ Dieser Trick funktioniert allgemein für jede Ringerweiterung $S \le R$. Dies führt uns zum folgenden allgemeinen Satz.

Erweiterung des Grundrings

Satz X4E: Erweiterung des Grundrings

Sei $\eta : S \to R$ ein Ringhomomorphismus, etwa $S \le R$ und $\eta = \mathrm{inc}_S^R$; so wird ${}_SR$ ein linkslinearer Raum über S. Sei U_S ein rechtslinearer Raum.

(1) Die **Erweiterung der Skalare** ergibt einen linearen Raum über R:

$$\boxed{V_R := (U_S) \otimes_S ({}_SR_R)}$$

(2) Wir haben die natürliche S–lineare Abbildung (i.A. keine Einbettung)

$$\iota : U_S \rightsquigarrow U_S \otimes_S S \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\eta} U_S \otimes_S R = V_R : u \mapsto v = u \otimes 1_R.$$

(3) Freie Räume bleiben frei: Ist $(u_i)_{i\in I}$ eine Basis von U_S über S, dann ist $(v_i = u_i \otimes 1_R)_{i\in I}$ eine Basis von V_R über R, und ι ist injektiv.

(4) Jede S–lineare Abbildung $f_S : U_S \to U'_S$ induziert eine zugehörige R–lineare Abbildung $g_R = f_S \otimes \mathrm{id}_R : V_R = U_S \otimes_S R_R \to U'_S \otimes_S R_R = V'_R$.

(5) Die darstellenden Matrizen sind dieselben in $S^{m\times n} \le R^{m\times n}$.

Dasselbe gilt entsprechend für linkslineare Räume.

Die Erweiterung des Grundrings ist funktoriell.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\mathrm{id}_U"] & U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f'\circ f"'] & U' \arrow[r, "f'"] & U''
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
U \otimes_S R \arrow[r, shift left, "\mathrm{id}_U\otimes\mathrm{id}_R"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}_{U\otimes R}"'] & U \otimes_S R \arrow[r, "f\otimes\mathrm{id}_R"] \arrow[rr, bend right, "(f'\otimes\mathrm{id}_R)\circ(f\otimes\mathrm{id}_R)=(f'\circ f)\otimes\mathrm{id}_R"'] & U' \otimes_S R \arrow[r, "f'\otimes\mathrm{id}_R"] & U'' \otimes_S R
\end{tikzcd}$$

Satz X4E: Die Erweiterung des Grundrings ist funktoriell.

(6) Für die Identität $\mathrm{id}_U : U \to U$ gilt

$$\mathrm{id}_U \otimes \mathrm{id}_R = \mathrm{id}_{U\otimes R} = \mathrm{id}_V : V \to V.$$

(7) Für $f : U \to U'$ und $f' : U' \to U''$ und $f' \circ f : U \to U''$ gilt

$$(f' \otimes \mathrm{id}_R) \circ (f \otimes \mathrm{id}_R) = (f' \circ f) \otimes \mathrm{id}_R\,.$$

Übung: Alle Daten liegen explizit vor. Rechnen Sie es nach! Wie können Sie die bisherigen Ergebnisse geschickt als Werkzeuge einsetzen?

Tensorieren mit $\mathbb{Q}$ über $\mathbb{Z}$

Welche $\mathbb{Q}$–Dimension hat $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$? allgemein $(\mathbb{Z}/n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$?

Satz X4F: Tensorieren mit $\mathbb{Q}$

(1) Dank X3B haben wir den Isomorphismus

$$\boxed{\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q} : (a \otimes b) \mapsto ab.}$$

(2) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ hingegen gilt

$$\boxed{(\mathbb{Z}/n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0.}$$

Beweis: (2) Die einfachen Tensoren erzeugen den Tensorraum (X2G), und $[a] \otimes b \overset{\mathbb{Q}}{=} [a] \otimes (n \cdot b/n) \overset{\text{HM}}{=} ([a] \cdot n) \otimes (b/n) \overset{\mathbb{Z}/n}{=} 0 \otimes (b/n) \overset{\text{HM}}{=} 0.$ QED

Anwendungsbeispiel: Sei V eine endlich erzeugte abelsche Gruppe,

$$V \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/n_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_t \quad \text{mit } n_1, \dots, n_t \geq 2.$$

Daraus extrahiert das Tensorieren mit $\mathbb{Q}$ den freien Anteil (Satz X3A):

$$V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^r \quad \text{mit} \quad r = \dim_{\mathbb{Q}}(V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}).$$

Tensorieren mit $\mathbb{Q}$ über $\mathbb{Z}$

Unter diesem Isomorphismus wird die kanonische Basis $(e_1, \dots, e_r)$ von $\mathbb{Z}^r$ abgebildet auf die kanonische Basis $(e_1, \dots, e_r)$ von $\mathbb{Q}^r$.

Der Torsionsteil $\mathbb{Z}/n_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_t$ hingegen wird auf 0 abgebildet. Hierzu nutzen wir (2) und die Distributivität des Tensorprodukts (X3E).

Die natürliche Abbildung ι aus Satz X4E ist i.A. nicht injektiv! Wir illustrieren Ringerweiterungen hier mit dem Übergang von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$:

Über $\mathbb{Z}$ kann das Tensorieren mit $\mathbb{Q}$ wichtige Information vernichten. Manchmal möchten wir genau das, so wie hier illustriert: vereinfachen!

Über einem Körper wie $\mathbb{Q}$ hat jeder lineare Raum eine Basis. Über dem Ring wie $\mathbb{Z}$ hingegen gilt diese Eigenschaft leider nicht.

Zur Vereinfachung können wir daher über $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Q}$ tensorieren; wir verlieren dabei Information, aber gewinnen stärkere Sätze.

Diese grundlegende Beobachtung führt uns zu folgender Definition.

Der Rang einer abelschen Gruppe

Wie können wir den „Rang“ einer abelschen Gruppen erklären?

Definition X4G: Rang einer abelschen Gruppe

Sei $(V, +)$ eine abelsche Gruppe, also ein $\mathbb{Z}$–linearer Raum.
Der **Rang** von V, genauer der **$\mathbb{Q}$–Rang**, ist dann definiert durch

$$\boxed{\operatorname{rang}_{\mathbb{Q}}(V) := \dim_{\mathbb{Q}}(V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}).}$$

Dasselbe gilt für jeden Körper $\mathbb{K}$, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p$ mit p prim:

$$\boxed{\operatorname{rang}_{\mathbb{K}}(V) := \dim_{\mathbb{K}}(V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}).}$$

Anwendungsbeispiel: Für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe

$$V \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/n_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_t$$

mit $n_1, \dots, n_t \geq 2$ gilt $\operatorname{rang}_{\mathbb{Q}}(V) = r$ wie oben und zudem

$$\operatorname{rang}_{\mathbb{F}_p}(V) = r + \sharp\{\, i \in \{1, \dots, t\} \mid p \mid n_i \,\}.$$

Der Rang einer abelschen Gruppe

Wir gehen hier von $\mathbb{Z}$ zu einem Körper $\mathbb{K}$ über, die natürlichen Kandidaten hierzu sind neben dem Bruchkörper $\mathbb{Q} = \operatorname{Frac}(\mathbb{Z})$ vor allem die Quotientenkörper $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p = \mathbb{F}_p$ für p prim. Ebenso möglich wären $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, aber bescheiden genügt $\mathbb{Q}$.

Der Vorteil eines Körpers $\mathbb{K}$ ist, wie oben motiviert, dass wir allgemein über Basen verfügen und von der Dimension über $\mathbb{K}$ sprechen könnnen. Unsere gründliche Arbeit zu Vektorräumen zahlt sich hier aus! Das Tensorprodukt überträgt dies auf $\mathbb{Z}$–Moduln…

Beispiel: Für $V = \mathbb{Z}^7 \oplus \mathbb{Z}_2^4 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3^2 \oplus \mathbb{Z}_9$ gilt $\operatorname{rang}_{\mathbb{Q}}(V) = 7$ sowie $\operatorname{rang}_{\mathbb{F}_2}(V) = 12$ und $\operatorname{rang}_{\mathbb{F}_3}(V) = 10$ und $\operatorname{rang}_{\mathbb{F}_p}(V) = 7$ für alle $p \geq 5$.

Für die Rechnung benötigen wir das Tensorprodukt $(\mathbb{Z}/p) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/q)$. Dies führt uns zu dem nächsten schönen Satz.

Das Tensorprodukt $(\mathbb{Z}/p) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/q)$

Aufgabe: Wie viele Elemente hat $(\mathbb{Z}/5) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/9)$?

Lösung: Wir finden $5 \cdot 2 \equiv 1 \bmod 9$. In $(\mathbb{Z}/5) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/9)$ folgt daraus:

$$[a]_5 \otimes [b]_9 \overset{\mathbb{Z}/9}{=} [a]_5 \otimes (5 \cdot 2 \cdot [b]_9) \overset{\text{HM}}{=} ([a]_5 \cdot 5) \otimes (2 \cdot [b]_9) \overset{\mathbb{Z}/5}{=} 0 \otimes (2 \cdot [b]_9)$$

Daher gilt $(\mathbb{Z}/5) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/9) = 0$. Was steckt allgemein dahinter?

Satz X4H: das Tensorprodukt $(\mathbb{Z}/p) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/q)$

Zu $p, q \in \mathbb{N}$ und $r = \operatorname{ggT}(p, q)$ existiert der Isomorphismus

$$\boxed{(\mathbb{Z}/p) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/q) \;\cong\; (\mathbb{Z}/r) : [a]_p \otimes [b]_q \mapsto [ab]_r, \quad [c]_p \otimes [1]_q \mapsfrom [c]_r}$$

Wichtiger Spezialfall: Gilt $\operatorname{ggT}(p, q) = 1$, so folgt $(\mathbb{Z}/p) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/q) = 0$.

Aufgabe: Warum ist die Umkehrfunktion $[c]_p \otimes [1]_q \mapsfrom [c]_r$ wohldefiniert?

Lösung: Dank Bézout (B3E) existieren $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $r = pu + qv$. Damit gilt $[r]_r \mapsto [r]_p \otimes [1]_q \overset{\mathbb{Z}/p}{=} ([v]_p \cdot q) \otimes [1]_q \overset{\text{HM}}{=} [v]_p \otimes (q \cdot [1]_q) \overset{\mathbb{Z}/q}{=} [v]_p \otimes [0]_q \overset{\text{HM}}{=} 0$.

Das Tensorprodukt $\mathbb{Z}/p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/q$

☺ Beim Tensorprodukt multiplizieren sich die Dimensionen (X1D), denn das Tensorprodukt freier Räume ist frei über der Produktbasis.

🤔 Naiv würde man für $(\mathbb{Z}/5) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/9)$ vielleicht $5 \cdot 9 = 45$ Elemente vermuten; das gilt tatsächlich für das kartesische Produkt $(\mathbb{Z}/5) \times (\mathbb{Z}/9)$.

⚠ Das Tensorprodukt hingegen verhält sich deutlich anders! Hierzu rechnen wir sorgfältig mit Erzeugern und Relationen.

⚠ Dieselbe Notation $[\ldots]$ für Äquivalenzklassen bedeutet hier dreimal Verschiedenes! Zur Betonung habe ich die Indizes p, q, r hinzugefügt.

Aufgabe: Führen Sie die Konstruktion des ersehnten Isomorphismus $(\mu, \mu') : (\mathbb{Z}/p) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/q) \cong (\mathbb{Z}/r) : [a] \otimes [b] \rightleftarrows [ab]$ detailliert aus.

☺ Wie konstruieren wir μ? Wir beginnen mit der gewünschten Abbildung auf dem kartesischen Produkt und nutzen die UAE. Der bewährte Ansatz ist damit klar, also rechnen wir es aus!

Das Tensorprodukt $\mathbb{Z}/p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/q$

Beweis: Wir nutzen auch hier die universelle Abbildungseigenschaft. Die Konstruktion verläuft von oben nach unten in folgendem Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \arrow[rr, shift left, "\tilde{\mu}:(a,b)\mapsto ab"] \arrow[d, "\text{quo}\times\text{quo}"'] \arrow[ddrr, "g"] & & \mathbb{Z} \arrow[ll, shift left, "(c,1)\mapsfrom c:\tilde{\mu}'"] \arrow[d, "\text{quo}"] \arrow[dl, "f"'] \\
(\mathbb{Z}/p) \times (\mathbb{Z}/q) \arrow[d, "\tau"'] \arrow[drr, "h"] & & \\
(\mathbb{Z}/p) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/q) \arrow[rr, shift left, "\mu"] & & (\mathbb{Z}/r) \arrow[ll, shift left, "\mu'"]
\end{tikzcd}$$

Aufgabe: Formulieren Sie Konstruktion und Nachweis sorgsam aus. Das erlaubt konkrete Zahlenbeispiele, wie oben $(\mathbb{Z}/5) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/9) = 0$ und viele mehr. Zugleich üben Sie hier nochmals alle relevanten Techniken!

Das Tensorprodukt $\mathbb{Z}/p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/q$

☺ Solche Beweise gelingen immer nach demselben einfachen Muster. Doch um dies zu verstehen und zu verfestigen muss man genügend Beispiele selbst rechnen. Nur Mut, frisch gewagt ist halb gewonnen!

Beweis: Die Abbildung $\tilde{\mu} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : (a, b) \mapsto ab$ ist bilinear. Die Komposition $g = \text{quo} \circ \tilde{\mu}$ erfüllt zudem $g(a + pk, b + q\ell) = [ab]_r$, denn $(a + pk)(b + q\ell) = ab + aq\ell + pkb + pkq\ell \in ab + r\mathbb{Z}$ dank $r \mid p, q$.

Somit induziert g auf dem Quotienten die wohldefinierte Abbildung $h : (\mathbb{Z}/p) \times (\mathbb{Z}/q) \to (\mathbb{Z}/r) : ([a]_p, [b]_q) \mapsto [ab]_r$. Diese ist ebenfalls bilinear. Dank UAE erhalten wir $\mu : (\mathbb{Z}/p) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/q) \to (\mathbb{Z}/r) : [a]_p \otimes [b]_q \mapsto [ab]_r$.

Für $f : \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/p) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/q) : c \mapsto [c]_p \otimes [1]_q$ gilt $\operatorname{Ker}(f) \supseteq r\mathbb{Z}$, wie wir oben dank Bézout–Koeffizienten nachgerechnet haben. Sie induziert somit $\mu' : (\mathbb{Z}/r) \to (\mathbb{Z}/p) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/q) : [c]_r \mapsto [c]_p \otimes [1]_q$.

Damit gilt $\mu' \circ \mu = \text{id}$ und $\mu \circ \mu' = \text{id}$. Warum? Wir rechnen es sorgsam nach für $a, b, c \in \mathbb{Z}$: Klar ist $\mu \circ \mu' : [c]_r \overset{\text{Def}}{\mapsto} [c]_p \otimes [1]_q \overset{\text{Def}}{\mapsto} [c \cdot 1]_r \overset{\text{Ntr}}{=} [c]_r$. Zudem gilt $\mu' \circ \mu : [a]_p \otimes [b]_q \overset{\text{Def}}{\mapsto} [a \cdot b]_r \overset{\text{Def}}{\mapsto} [a \cdot b]_p \otimes [1]_q \overset{\text{HM}}{=} [a]_p \otimes [b]_q$. $\boxed{\text{QED}}$

Kapitel X

Bonusmaterial

Quantum physics becomes much easier without physics.
Stripped to its core, quantum computing is simply
linear algebra and probability theory.
frei nach Scott Aaronson

Inhalt dieses Kapitels X

5 Übungsaufgaben und Anwendungsbeispiele
- Wie berechnen wir den Tensorrang?
- Eigenschaften des Kronecker–Produkts
- Produkt der Dualräume vs Dualraum des Produkts

6 Rechenregeln als kommutative Diagramme
- Monoidaxiome vs Ringaxiome
- Links-/Rechts-Operationen

7 Lineare Algebra und Quantenmechanik
- Die Bell–Ungleichung als Spiel
- Postulate der Quantenmechanik

Tensorrang gleich Matrixrang

☺ Matrizenmultipliation X1E ist ein Modell des Tensorprodukts.
Damit eröffnen wir uns die effizienten Werkzeuge des Matrixkalküls!

Aufgabe: Gegeben seien $U = \langle a_1, \dots, a_p \rangle_K^!$ und $V = \langle b_1, \dots, b_q \rangle_K^!$.
Wie berechnen Sie den Rang eines Tensors $w \in W = U \otimes_K V$?

Lösung: Die gegebenen Basen liefern uns die Isomorphismen $U \cong K^{p\times 1}$ und $V \cong K^{1\times q}$ und somit $W \cong K^{p\times q}$. Ohne Einschränkung dürfen wir Gleichheit statt Isomorphie annehmen, wie im Matrixmodell X1E.

Jeder Tensor $\sum_i u_i \otimes v_i$ wird somit dargestellt als Matrix $w \in K^{p\times q}$.
Die Berechnung des Rangs gelingt uns durch folgende Beobachtung:

♦ Satz M3F: Matrixrang gleich Tensorrang → M3G

Für jede Matrix $A \in K^{p\times q}$ sind äquivalent: (1) Die Matrix A hat Rang r.
(2) Es gilt $A = UV$ mit Matrizen $U \in R^{p\times r}$ und $V \in R^{r\times q}$ von Rang r.
(3) Es gilt $A = \sum_{i=1}^r u_i v_i$ mit $u_1, \dots, u_r \in K^{p\times 1}$ und $v_1, \dots, v_r \in K^{1\times q}$ frei.

Wiederholung: Zeigen Sie die Äquivalenz und die Berechnung mit Gauß.

Tensorrang gleich Matrixrang

Erinnerung: Der Gauß–Algorithmus M3C liefert $S^{-1}AT = D^r_{p\times q}$ mit invertierbaren Matrizen $S \in \mathrm{GL}_p R$ und $T \in \mathrm{GL}_q R$. Daraus folgt:

$$A = SD^r_{p\times q}T^{-1} = \begin{bmatrix} U & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ * \end{bmatrix} = UV = u_1v_1 + \dots + u_rv_r.$$

Übung: Rechnen Sie dieses Argument „(1) ⇒ (2) ⇒ (3)“ sorgsam nach!
Erklären Sie „(2) ⇔ (3)“. Beweisen Sie die Implikation „(2) ⇒ (1)“.

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ betrachten wir $\mathbb{K}^n = \mathbb{K}^{n\times 1}$ mit Standardskalarprodukt.
☺ Die Rangfaktorisierung gemäß Satz M3F gelingt sogar orthonormal!

♦ Satz T3B: Singulärwertzerlegung / SVD über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{p\times q}$ erlaubt eine Singulärwertzerlegung

$$(u_i, \sigma_i, v_i)_{i=1}^r \quad \text{mit} \quad A = \textstyle\sum_{i=1}^r u_i \sigma_i v_i^\dagger$$

mit orthonormalen Vektoren $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{K}^p$ und $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{K}^q$ und reellen Zahlen $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. Dabei ist r der Rang unserer Matrix A.

Das Kronecker–Produkt von Matrizen

☺ Das Kronecker–Produkt X3H ist wunderbar explizit.
Zudem gelten für Matrizen viele nützliche Rechenregeln:

Übung: Es gilt $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$ aber i.A. $A \otimes B \neq B \otimes A$; Gleichheit gilt nach geeigneter Permutation der Basis (Zeilen&Spalten).

Bei Transposition gilt $(A \otimes B)^\intercal = A^\intercal \otimes B^\intercal$, bei gleicher Reihenfolge!

Beim Kronecker–Produkt erfüllt die Spur $\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A) \cdot \operatorname{tr}(B)$.
Für $A \in K^{m\times m}$ und $B \in K^{n\times n}$ gilt $\det(A \otimes B) = \det(A)^n \det(B)^m$.

Für die Spektren gilt: Aus $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ und $\sigma(B) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ folgt $\sigma(A \otimes B) = \{\lambda_i \mu_j \mid i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n\}$.

Für die zugehörigen Eigenräume gilt $\mathrm{E}(A;\lambda) \otimes \mathrm{E}(B;\mu) \subseteq \mathrm{E}(A \otimes B; \lambda\mu)$, somit gilt $\mathrm{E}(A \otimes B;\nu) \supseteq \bigoplus_{\lambda\mu=\nu} \mathrm{E}(A;\lambda) \otimes \mathrm{E}(B;\mu)$, aber i.A. nicht „$\subseteq$“.

Gegenbeispiel: Wir betrachten $A = B = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right]$. Dann ist neben $e_1 \otimes e_1$ auch $e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$ ein Eigenvektor von $A \otimes B$ zum Eigenwert λ^2.

Das Kronecker–Produkt von Matrizen

Übung: Angenommen, $f : U \to U$ und $g : V \to V$ sind diagonalisierbar. Gilt dies dann auch für $f \otimes g : U \otimes V \to U \otimes V$?

Man kann dies direkt angehen, zunächst f und g als Matrizen darstellen und dann diagonalisierende Basiswechsel betrachten. Wenn man es jedoch ungeschickt anpackt, wird es leider schnell unübersichtlich. Versuchen Sie es direkt mit der Konstruktion einer Eigenbasis!

Übung: (1) Wir nutzen $\mathbb{Z}^2$ als $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$–Bimodul. Zeigen Sie, dass genau eine $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$–lineare Abbildung $f : \mathbb{Z}^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} : \left[\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right] \otimes \left[\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right] \mapsto ad - bc$ existiert; konstruieren Sie dazu ein Produkt und nutzen Sie die UAE.
(2) Bestimmen Sie $\operatorname{Ker} f$, dual durch Basis und durch Gleichung.
(3) Ist $f : \mathbb{Z}^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ein Tensorprodukt $f = g \otimes h$?

Nicht immer ist das Tensorprodukt leicht zu berechnen. Tensorieren wir jedoch *freie* Räume, also zentrale Räume mit Basis, dann hat auch das Tensorprodukt eine Basis, nämlich die Produktbasis dank Satz X2C. Damit übersetzen wir lineare Abbildungen in Matrizen und zurück!

Produkt der Dualräume vs Dualraum des Produkts

Übung: Die vorige Übung arbeitet wunderschön konkret mit Matrizen. Wenn Sie es abstrakt mögen, dann wollen Sie vielleicht folgenden Satz beweisen und mit Tensorprodukten auch Dualräume wiederholen:

Satz X5A: Produkt der Dualräume vs Dualraum des Produkts

Sei K ein kommutativer Ring und darüber U, V zentrale lineare Räume.
(1) Es existiert genau eine lineare Abbildung

$$\Phi : U^* \otimes V^* \to (U \otimes V)^* \quad \text{mit} \quad \Phi(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u)\, g(v).$$

(2) Hat einer der Räume U oder V eine endliche Basis, so ist Φ bijektiv.

(3) Im Allgemeinen ist diese Abbildung Φ immerhin injektiv.

Hinweis: (1) Wie nutzen Sie geschickt die UAE X2A zur Konstruktion? Beginnen Sie wie immer mit möglichst einfachen Abbildungen, hier etwa $\Psi : U^* \times V^* \to \operatorname{Fun}(U \times V; K)$ mit $\Psi(f,g)(u,v) = f(u)g(v)$. Ist sie bilinear in u, v? Daraus erhalten Sie $U^* \times V^* \to \operatorname{Bil}(U \times V; K) \to \operatorname{Hom}(U \otimes V, K)$. Ist diese Abbildung nun wiederum bilinear in f, g? So erhalten Sie Φ.

Ist das kartesische Produkt ein Tensorprodukt? Ja!

Beispiel X5B: Das kartesische Produkt ist ein Tensorprodukt.

Zur Menge X ist $(\mathfrak{P}(X), \triangle, \emptyset, \cdot)$ ein $\mathbb{F}_2$–Vektorraum bzgl. symmetrischer Differenz $A \triangle B = (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A)$, siehe L160. Das kartesische Produkt $\times : \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(Y) \to \mathfrak{P}(X \times Y) : (A, B) \mapsto A \times B$ ist ein Tensorprodukt.

Aufgabe: Rechnen Sie dies nach! Wie gelingt dies am geschicktesten?

Lösung: Wir haben das (kanonische, natürliche) Bijektionspaar G3I

$$(\mathbf{1}, \operatorname{supp}) : \mathfrak{P}(X) \cong \mathbb{F}_2^X.$$

Dies ist ein Isomorphismus der hier betrachteten Gruppen, sogar der $\mathbb{F}_2$–Vektorräume dank Satz L1L. Diese Sichtweise vereinfacht alles enorm: Das kartesische Produkt entspricht dabei dem Produkt von Funktionen, $\mathbf{1}_{A\times B}(x,y) = \mathbf{1}_A(x) \cdot \mathbf{1}_B(y)$ in $\mathbb{F}_2^{X\times Y}$. Zur Vereinfachung seien die Mengen X und Y endlich. Die Basen $(e_x)_{x\in X}$ von $\mathbb{F}_2^X$ und $(e_y)_{y\in Y}$ von $\mathbb{F}_2^Y$ werden abgebildet auf die Basis $(e_{(x,y)})_{(x,y)\in X\times Y}$ von $\mathbb{F}_2^{X\times Y}$. Demnach gilt also die Basiseigenschaft X1D/X2P, und diese charakterisiert das Tensorprodukt.

Die Monoidaxiome als kommutative Diagramme

Aufgabe: (0) Wiederholen Sie die Definition eines Monoids (G, μ, η).
(1) Schreiben Sie dies als kommutative Diagramme in $(\mathtt{Set}, \times, 1)$.

Lösung: (0) Explizit geschrieben ist ein Monoid (G, μ, η) eine Menge G mit einem Produkt $\mu : G \times G \to G : (a, b) \mapsto a \cdot b$ und einem neutralen Element $\eta : 1 = \{0\} \to G : 0 \mapsto e$, sodass Assoziativität und Neutralität gelten, für eine Gruppe zudem Inversion, optional Kommutativität.

(2) Kommutative Diagramme in $\mathtt{Set}$ codieren *All-Aussagen* (siehe J169).

Ass(G, μ): Die Verknüpfung $\mu : G \times G \to G : (a, b) \mapsto a \cdot b$ ist assoziativ: Für alle $a, b, c \in G$ gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Als kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
(G \times G) \times G \arrow[d, "\mu \times \mathrm{id}"'] & G \times G \times G \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] & G \times (G \times G) \arrow[d, "\mathrm{id} \times \mu"] \\
G \times G \arrow[r, "\mu"] & G & G \times G \arrow[l, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

Wir identifizieren hier Tripel gemäß $((a, b), c) \leftrightarrows (a, b, c) \leftrightarrows (a, (b, c))$.

Die Monoidaxiome als kommutative Diagramme

Ntr(G, μ, η): Das Element $e = \eta(0) \in G$ ist beidseitig neutral bezüglich μ: Für alle $a \in G$ gilt $e \cdot a = a$ und $a \cdot e = a$. Als kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & G \times G \arrow[d, "\mu"] & \\
1 \times G \arrow[ur, "\eta \times \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & & G \times 1 \arrow[ul, "\mathrm{id} \times \eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\
 & G &
\end{tikzcd}$$

Com(G, μ): Das Monoid (G, μ, η) heißt *kommutativ*, wenn μ dies ist: Für alle $a, b \in G$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$. Als kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, leftrightarrow, "\tau_{G,G}"'] \arrow[d, "\mu"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\
G \arrow[r, equal] & G
\end{tikzcd}$$

Hierbei ist $\tau_{G,G} : G \times G \to G \times G : (a, b) \mapsto (b, a)$ die *Vertauschung*.
☺ So können wir in $(\mathtt{Set}, \times, 1)$ algebraische Strukturen codieren.

Die Ringaxiome als kommutative Diagramme

Aufgabe: (0) Wiederholen Sie die Definition eines Rings $(R, +, 0, \cdot, 1)$.
(1) Schreiben Sie dies als kommutative Diagramme in $(\mathtt{Ab}, \otimes, \mathbb{Z})$.

Lösung: (0) Die additive Struktur $(R, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe, oder gleichbedeutend ein $\mathbb{Z}$–linearer Raum. Distributivität bedeutet, das Produkt $\tilde{\mu} : R \times R \to R : (a, b) \mapsto a \cdot b$ ist $\mathbb{Z}$–bilinear. Es entspricht der induzierten $\mathbb{Z}$–linearen Abbildung $\mu : R \otimes_{\mathbb{Z}} R \to R : a \otimes b \mapsto a \cdot b$.

(2) Kommutative Diagramme in $\mathtt{Ab}$ codieren *All-Aussagen* (siehe J169).

Ass$(R, \tilde{\mu})$: Die Verknüpfung $\tilde{\mu} : R \times R \to R : (a, b) \mapsto a \cdot b$ ist assoziativ: Für alle $a, b, c \in R$ gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Als kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
(R \otimes R) \otimes R \arrow[d, "\mu \otimes \mathrm{id}"'] & R \otimes R \otimes R \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] & R \otimes (R \otimes R) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \mu"] \\
R \otimes R \arrow[r, "\mu"] & R & R \otimes R \arrow[l, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

Wir identifizieren hier gemäß $(a \otimes b) \otimes c \leftrightarrows a \otimes b \otimes c \leftrightarrows a \otimes (b \otimes c)$.

Die Ringaxiome als kommutative Diagramme

Ntr$(R, \tilde{\mu}, \eta)$: Das Element $1 = \eta(1) \in R$ ist beidseitig neutral bezüglich $\tilde{\mu}$: Für alle $a \in R$ gilt $1 \cdot a = a$ und $a \cdot 1 = a$. Als kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & R \otimes R \arrow[d, "\mu"] & \\
\mathbb{Z} \otimes R \arrow[ur, "\eta \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & R \otimes \mathbb{Z} \arrow[ul, "\mathrm{id} \otimes \eta"'] \arrow[dl, "\rho"] \\
 & R &
\end{tikzcd}$$

Com$(R, \tilde{\mu})$: Der Ring $(R, \tilde{\mu}, \eta)$ heißt *kommutativ*, wenn $\tilde{\mu}$ dies ist: Für alle $a, b \in R$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$. Als kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
R \otimes R \arrow[r, leftrightarrow, "\tau_{R,R}"'] \arrow[d, "\mu"] & R \otimes R \arrow[d, "\mu"] \\
R \arrow[r, equal] & R
\end{tikzcd}$$

Hierbei ist $\tau_{R,R} : R \otimes R \to R \otimes R : a \otimes b \mapsto b \otimes a$ die *Vertauschung*.
☺ So können wir in $(\mathtt{Ab}, \otimes, \mathbb{Z})$ algebraische Strukturen codieren.

Monoidoperation als kommutative Diagramme

Aufgabe: (2) Definieren Sie Monoidoperationen $G \curvearrowright X$ und $X \curvearrowleft G$.
(3) Schreiben Sie dies als kommutative Diagramme in $(\mathtt{Set}, \times, 1)$.

Lösung: (2) Eine Linksoperation des Monoids (G, μ, η) auf der Menge X ist eine Abbildung $\varphi : G \times X \to X : (a, x) \mapsto a \circ x$, für die Folgendes gilt: $e \circ x = x$ und $b \circ (a \circ x) = (b \cdot a) \circ x$ für alle $b, a \in G$ und alle $x \in X$. (J3A)

Entsprechend: Eine Rechtsoperation des Monoids (G, μ, η) auf der Menge X ist eine Abbildung $\psi : X \times G \to X : (x, a) \mapsto x \bullet a$, für die Folgendes gilt: $x \bullet e = x$ und $(x \bullet a) \bullet b = x \bullet (a \cdot b)$ für alle $a, b \in G$ und alle $x \in X$. (J3A)

(3) Die Rechtsoperation ψ erfüllt also zwei kommutative Diagramme:

$$\begin{tikzcd} X \times G \arrow[d, "\psi"] & X \times 1 \arrow[l, "\mathrm{id} \times \eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X \times G) \times G \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[d, "\psi \times \mathrm{id}"'] & X \times (G \times G) \arrow[d, "\mathrm{id} \times \mu"] \\ X \times G \arrow[r, "\psi"] & X \arrow[l, "\psi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \times G \arrow[r, leftrightarrow] & X \times G \end{tikzcd}$$

Entsprechendes gilt für die Linksoperation φ. Elegant und übersichtlich.

Monoidoperation als kommutative Diagramme

Aufgabe: (4) Was ist eine freie G–Operation $X \overset{\psi}{\curvearrowleft} G$ mit Basis $(x_i)_{i \in I}$?

Lösung: Wir nennen $X \overset{\psi}{\curvearrowleft} G$ auch eine G–Menge (von rechts). Zu jeder Menge I ist der **Koordinatenraum** $\bigsqcup_{i \in I} G = I \times G$ eine solche G–Menge, mit $(i, a) \bullet b = (i, a \cdot b)$. Wir nennen $X \curvearrowleft G$ **frei** mit Basis $(x_i)_{i \in I}$, falls die **Koordinatenabbildung** $\Phi : I \times G \to X : (i, a) \mapsto x_i \bullet a$ eine Bijektion ist.

$$I \times G \curvearrowleft G \qquad \begin{tikzcd} I \times G \arrow[r, "\Phi", "¿\cong ?"'] & X \end{tikzcd} \qquad X \curvearrowleft G$$

Dies ist eine G–homogene Abbildung, das heißt, wir haben Gleichheit von $\Phi(i, a) \bullet b \overset{\text{Def}}{=} (x_i \bullet a) \bullet b$ und $\Phi((i, a) \bullet b) \overset{\text{Def}}{=} \Phi(i, a \cdot b) \overset{\text{Def}}{=} x_i \bullet (a \cdot b)$.
Sie existiert immer, und ihre Bi/In/Surjektivität ist uns extrem wertvoll.

Für jede Gruppe G und $X \curvearrowleft G$ erhalten wir daraus den wundervollen Satz J3J von Lagrange und einen nie versiegenden Quell wirksamer Anwendungen. Das ist der Anfang der Theorie der Gruppen und sofort nutzbar, etwa für jegliche Art von Symmetrie bei Abzählaufgaben!

🙂 So führt uns *eine* elegante Theorie zu *vielen* effizienten Anwendungen. Bitte bewundern Sie die Analogie zu Ringen R und R–linearen Räumen.

Lineare Räume als kommutative Diagramme

Aufgabe: (2) Definieren Sie R–lineare Räume $R \curvearrowright V$ und $V \curvearrowleft R$.
(3) Schreiben Sie dies als kommutative Diagramme in $(\mathtt{Ab}, \otimes, \mathbb{Z})$.

Lösung: (2) Eine Linksoperation des Rings $(R, \tilde{\mu}, \eta)$ auf der abelschen Gruppe V ist eine distributive Operation $\varphi : R \times V \to V : (r, v) \mapsto r \circ v$ mit $1 \circ v = v$ und $s \circ (r \circ v) = (s \cdot r) \circ v$ für alle $s, r \in R$ und alle $v \in V$. (L1A)

Entsprechend: Eine Rechtsoperation des Rings $(R, \tilde{\mu}, \eta)$ auf der abelschen Gruppe V ist eine distributive Operation $\psi : V \times R \to V : (v, r) \mapsto v \bullet r$ mit $v \bullet 1 = v$ und $(v \bullet r) \bullet s = v \bullet (r \cdot s)$ für alle $r, s \in R$ und alle $v \in V$. (L1A)

(3) Die Rechtsoperation ψ erfüllt also zwei kommutative Diagramme:

$$\begin{tikzcd} V \otimes R \arrow[d, "\psi"] & V \otimes \mathbb{Z} \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes \eta"'] \arrow[dl, "\rho"] \\ V & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (V \otimes R) \otimes R \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[d, "\psi \otimes \mathrm{id}"'] & V \otimes (R \otimes R) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \mu"] \\ V \otimes R \arrow[r, "\psi"] & V \arrow[l, "\psi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \otimes R \arrow[r, leftrightarrow] & V \otimes R \end{tikzcd}$$

Entsprechendes gilt für die Linksoperation φ. Elegant und übersichtlich.

Lineare Räume als kommutative Diagramme

Aufgabe: (4) Was ist ein freier R–linearer Raum $V \overset{\psi}{\curvearrowleft} R$ mit Basis $(x_i)_{i \in I}$?

Lösung: Zu jeder Indexmenge I ist der **Koordinatenraum** $\bigoplus_{i \in I} R = R^{(I)}$ ein R–linearer Raum (von rechts), mit $(a_i)_{i \in I} \bullet b = (a_i \cdot b)_{i \in I}$. Wir nennen $V \curvearrowleft R$ **frei** mit Basis $(x_i)_{i \in I}$, falls die zugehörige **Koordinatenabbildung** $\Phi : R^{(I)} \to V : (a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} x_i \bullet a_i$ eine Bijektion ist.

$$R^{(I)} \curvearrowleft R \qquad \begin{tikzcd} R^{(I)} \arrow[r, "\Phi", "¿\cong ?"'] & V \end{tikzcd} \qquad V \curvearrowleft R$$

Dies ist eine R–lineare Abbildung, das heißt, wir haben Gleichheit von $\Phi((a_i)_i) \bullet b \overset{\text{Def}}{=} (\sum_i x_i \bullet a_i) \bullet b$ und $\Phi((a_i)_i \bullet b) \overset{\text{Def}}{=} \Phi((a_i \cdot b)_i) \overset{\text{Def}}{=} \sum_i x_i \bullet (a_i \cdot b)$.
Sie existiert immer, und ihre Bi/In/Surjektivität ist uns extrem wertvoll.

Für jeden DRing R und $V \curvearrowleft R$ erhalten wir die wundervollen Basissätze: Existenz von Basen, Invarianz der Dimension, damit Klassifikation aller R–Vektorräume. Zur Rechnung stellen wir R–lineare Abbildungen als Matrizen dar und nießen die sagenhaften Erfolge der Linearen Algebra!

🙂 So führt uns *eine* elegante Theorie zu *vielen* effizienten Anwendungen. Bitte bewundern Sie die Analogie zu Gruppen G und G–Mengen.

Die Bell–Ungleichung als Spiel: das EPR–Paradox

Wir erklären Bell–Ungleichung und Quanteninformation als Spiel.
Alice und Bob spielen gegen Einstein und zahlen dafür 40€. Einstein fragt zufällig $(f, g) \in \{X, Y, Z\}^2$, Alice antwortet auf f mit $a \in \{0, 1\}$, Bob antwortet auf g mit $b \in \{0, 1\}$. Ihr Ziel ist, verschiedene Fragen möglichst oft gleich zu beantworten, aber gleiche Fragen immer verschieden!
Auszahlung: $(\neq, =) \mapsto +90$, $(\neq, \neq) \mapsto 0$, $(=, \neq) \mapsto 0$, $(=, =) \mapsto -1000$.
Alice und Bob werden getrennt befragt, weit entfernt und gleichzeitig. Beide können sich daher nur *vor* der Befragung koordinieren, etwa so:

A \ B		x	y	z
	0€			
x	0	1	1	1
y	0	1	1	1
z	0	1	1	1

A \ B		x	y	z
	40€			
x	0	1	0	1
y	1	1	0	1
z	0	1	0	1

Hier gilt die **Bell–Ungleichung**: Der erwartete Gewinn ist $E \leq 40$€.
Können Alice und Bob mit **Quanteninformation** mehr gewinnen? Ja!

Die Bell–Ungleichung als Spiel: das EPR–Paradox

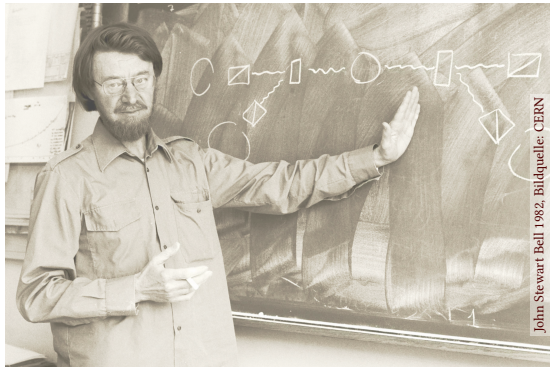
Aufgabe: Welche erwartete Auszahlung können Alice und Bob erreichen? Erreichen sie mehr, wenn sie randomisieren? (individuell, unabhängig) Können sie noch mehr gewinnen mit einem korrelierten Signalgeber? Hier gilt die **Bell–Ungleichung**: Der erwartete Gewinn ist $E \leq 40$€.

Eskalation: Alice und Bob planen eine Funkverbindung. Alice funkt Bob ihre Frage und Antwort. Bob antwortet optimal. Erwarteter Gewinn: 60€! Zur Abwehr dieses Betrugs befragt man beide gleichzeitig weit entfernt; zwischen Mars und Erde benötigen Signale zwischen 3 und 22 Minuten.

Mit klassischer Physik gilt weiterhin obige Bell–Ungleichung $E \leq 40$€. Können Alice und Bob mit Quantentechnologie mehr gewinnen? Ja! Einstein glaubte nicht an „spukhafte Fernwirkung“, genau damit können Alice und Bob gewinnen! Das ist das Einstein–Podolsky–Rosen–Paradox.

Veritasium: *Something faster than light.* `youtu.be/NIk_0AW5hFU#t=25m15s`
Alain Aspect, John Clauser und Anton Zeilinger erhielten dazu 2022 den Physik-Nobelpreis „for experiments with entangled photons, establishing the violation of Bell inequalities and pioneering quantum information.“

Die Bell–Ungleichung als Spiel: das EPR–Paradox



John Stewart Bell (1928–1990) war ein nordirischer Physiker. Er stammte aus armen Verhältnissen, studierte an der Queen's University of Belfast bis zum BSc 1948 in Experimentalphysik und 1949 in mathematischer Physik. Er promovierte 1956 an der University of Birmingham in Physik.

Ab 1960 arbeitete Bell am CERN in Genf im Bereich Teilchenphysik und Beschleunigerdesign. In seiner Freizeit forschte er über die Grundlagen der Quantenphysik, so auch 1963 während eines Sabbatjahrs in den USA. Seine berühmte Bellsche Ungleichung bewies und veröffentlichte er 1964. Er starb 1990 an Gehirnblutung. Kurz zuvor wurde er für den Nobelpreis nominiert, doch Nobelpreise werden nicht (mehr) posthum verliehen.

Die Bell–Ungleichung als Spiel: das EPR–Paradox

Physics Vol. 1, No. 3, pp. 195–200, 1964 Physics Publishing Co. Printed in the United States

ON THE EINSTEIN PODOLSKY ROSEN PARADOX*

J. S. BELL†
Department of Physics, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin

John Stewart Bell: *On the Einstein Podolsky Rosen paradox.* Physics 1 (1964) 195–200. `doi.org/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195`

Albert Einstein, Boris Podolsky, Nathan Rosen: *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* Physical Review 47 (1935) 777–780. `doi.org/10.1103/PhysRev.47.777`

Die Physik hinter dem EPR–Paradoxon ist faszinierend, das obige Video bietet einen lebhaften Einstieg. Der experimentelle Nachweis wurde 2022 mit dem Nobelpreis gewürdigt, `www.nobelprize.org/prizes/physics/2022`. Diese Grundlagen führen aktuell zum Quantum Computing.

Im Folgenden will ich den Kern des Phänomens als Spiel erklären. Die Mathematik wird dadurch erfreulich klar und einfach. Die physikalische Realisierung ist wesentlich komplizierter und wird hier nur angerissen.

Wie beschreiben wir Zufall? einfach als Lostopf!

Ein **n–Lostopf** (Ω, p) aka „endlicher WRaum“ besteht aus einer Menge $\Omega = \{0, \dots, n\}$ von $n+1$ Losen, jedes Los $i \in \Omega$ hat seine Wkt $p_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dabei gilt die Normierung $|p| := \sum_{i\in\Omega} p_i = 1$. Somit liegt p im Simplex

$$[\Omega] := \{p \in \mathbb{R}^{\Omega}_{\geq 0} : |p| = 1\} = \Delta^n.$$

Physikalische Realisierung: Das Los $i \in \Omega$ wird mit Wkt p_i gezogen. Dabei **kollabiert** der Zustand p zum neuen Zustand $e_i = (\dots, 0, 1, 0, \dots)$. Ziehung aka **Messung** ist kostengünstig und beliebig oft wiederholbar. Das Ergebnis ist „zufällig“ und „unabhängig“ vom Rest des Universums.

Vorbereitung: Wir können jedes $p \in [\Omega]$ herstellen. Uns genügt bereits $u \in \mathbb{R}^{\Omega}_{\geq 0}$ mit $|u| := \sum_{i\in\Omega} u_i > 0$, wir normieren dann zu $p = u/|u| \in [\Omega]$. Im einfachsten Fall $n = 1$ ist dies ein **Bernoulli–Experiment** $\Omega = \{0, 1\}$. mit Erfolgswkt $p_1 \in [0, 1]$ und Misserfolgswkt $p_0 = 1 - p_1$, z.B. Münzwurf.

Bei Gleichverteilung $p_0 = \dots = p_n$ ist dies ein **Laplace–Experiment**. Sie kennen das aus Spielen, meist in Form eines Würfels oder eines ähnlichen „Zufallsgenerators“, engl. *random number generator* (RNG).

Wie beschreiben wir Zufall? einfach als Lostopf!

☺ Aus Erfahrung ist Ihnen intuitiv klar, was ein Lostopf ist und wie er funktioniert. Dennoch ist es hilfreich, sich diesen einfachen Mechanismus klar zu machen, denn der klassische Lostopf dient uns als Analogon und Kontrast zum quantenmechanischen Qudit (engl. *quantum digit*).

Nach der Ziehung ist *dieser* Lostopf verbraucht. Wir können zwar ein *erneutes* Experiment durchführen, doch dazu müssen wir den Lostopf klonen, also wieder in seinen ursprünglichen Zustand (Ω, p) bringen. Damit können wir das Experiment *unabhängig* erneut ausführen.

Um es drastischer zu sagen: Unsere Messung ist zerstörend! Das können wir uns so vorstellen: Die Messung bestimmt das gezogene Los $i \in \Omega$, indem sie alle anderen vernichtet, Lose verbrennt oder Kugeln entfernt. Der Lostopf geht also von $p \in [\Omega]$ in den neuen Zustand $e_i \in [\Omega]$ über.

Die dramatische Darstellung als Projektion $p \mapsto e_i$ scheint mir hilfreich. Klassisch betont sie den Übergang zur bedingten Wkt und dass dieser Lostopf bei der Messung verbraucht wird. Mit Blick auf Qudits erklärt sie wunderbar anschaulich den Messprozess als „Kollaps“ des Zustands.

Produktwahrscheinlichkeit vs Korrelation

unabhängig / Produkt

Wkt	0	1	ges.
0	0.28	0.12	0.40
1	0.42	0.18	0.60
ges.	0.70	0.30	1.00

abhängig / korreliert / verschränkt

Wkt	0	1	ges.
0	0.30	0.10	0.40
1	0.40	0.20	0.60
ges.	0.70	0.30	1.00

Wkt	0	1	ges.
0	0.40	0.00	0.40
1	0.30	0.30	0.60
ges.	0.70	0.30	1.00

Alice misst 0 (Wkt 0.40) → bedingte Wkt

Wkt	0	1	ges.
0	0.75	0.25	1.00
1	0.00	0.00	0.00
ges.	0.75	0.25	1.00

Bob misst 1 (Wkt 0.30) → bedingte Wkt

Wkt	0	1	ges.
0	0.00	0.33	0.33
1	0.00	0.67	0.67
ges.	0.00	1.00	1.00

Bob misst 1 (Wkt 0.25) → bedingte Wkt

Wkt	0	1	ges.
0	0.00	1.00	1.00
1	0.00	0.00	0.00
ges.	0.00	1.00	1.00

Alice misst 0 (Wkt 0.33) → bedingte Wkt

Jede Messung j kollabiert / projiziert die gemessene Wkt p zur bedingten Wkt p^j.

Am Ende ist der Zustand determiniert, und unser Lostopf damit verbraucht.

Produktwahrscheinlichkeit vs Korrelation

Produkt: Alice hat den Lostopf (A, q), Bob hat (B, r), gemeinsam erhalten sie das kartesische Produkt $\Omega = A \times B$. Arbeiten beide unabhängig, so entspricht dies der Produktwkt $p(a, b) = q(a)r(b) \geq 0$ für alle $(a, b) \in \Omega$. Normierung: Hier gilt $|p| = |q| \cdot |r|$. Aus $|q| = |r| = 1$ folgt $|p| = 1$.

Gemeinsame Ziehung: Wir ziehen $(a, b) \in \Omega$ gemäß p und teilen Alice nur a mit sowie Bob nur b. Für Alice entspricht dies einer Ziehung aus (A, q), denn $\{a\} \times B$ hat Wkt $\sum_{b\in B} p(a, b) = q(a)$. Für Bob entspricht dies einer Ziehung aus (B, r), denn $A \times \{b\}$ hat Wkt $\sum_{a\in A} p(a, b) = r(a)$.

Unabhängigkeit: Wir erhalten so $[A] \times [B] \hookrightarrow [\Omega] : (q, r) \mapsto p =: q \otimes r$. Die ZVariablen $X : \Omega \to A : (a, b) \mapsto a$ und $Y : \Omega \to B : (a, b) \mapsto b$ haben die gewünschten Randverteilungen q und r und sind zudem unabhängig, denn im Inneren gilt ja gerade die Produktformel $p(a, b) = q(a)r(b)$.

Korrelation: Nicht alle Wkten p auf $\Omega = A \times B$ sind Produktwkten von der Form $p = q \otimes r$. Beispiel: Für $A = B = \{0, 1\}$ sei $p(0, 0) = p(1, 1) = 1/2$ und somit $p(0, 1) = p(1, 0) = 0$. Die Randverteilungen $q = r = (1/2, 1/2)$ sind die eines fairen Münzwurfs, doch die ZVariablen sind korreliert!

Zufall können wir berechnen! … und interpretieren?

Zufall ist allgegenwärtig, überall im Leben begegnet er uns alltäglich. Wir wollen lernen, mit dem Zufall rational und sachgerecht umzugehen. Daher lohnt es sich sehr, die mathematischen Werkzeugen zu erwerben, die handfesten Begriffe und Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Erfahrung lehrt: Mit dem Zufall können wir verlässlich rechnen!

On voit par cet Essai, que la théorie des probabilités
n'est, au fond, que le bon sens réduit au calcul.
[Die Theorie der Wahrscheinlichkeit ist im Grunde nichts anderes
als der gesunde Menschenverstand reduziert auf die Berechnung.]
Pierre-Simon de Laplace (1749–1827)

In einer typischen Vorlesung zur Wahrscheinlichkeit gilt Leibniz' Devise *Calculemus*: Nicht ergebnislos philosophieren, sondern konkret rechnen! Das hat seine klaren Vorzüge, besonders zu Beginn des Studiums, für die WTheorie in der Mathematik oder die WRechnung im Ingenieurwesen. In der Quantentheorie lautet der Aufruf rabiat: *Shut up and calculate!* (`www.nature.com/articles/505153a`, `hsm.stackexchange.com/questions/3615`)

Wie lernen wir Zufall? … mit Spielen!

In mathematics you don't understand things. You just get used to them.
John von Neumann (1903–1957)

In einer etwas späteren Phase des Lernens fragt man sich dann vielleicht, was Wahrscheinlichkeit eigentlich ist. Dies zu *fragen* ist allerdings erst dann erfolg- und ertragreich, wenn man schon damit *rechnen* kann. Langjährige Erfahrung überzeugt mich, dass Spiele eine ideale Arena bieten, um Mathematik konkret zu erfahren und motiviert zu erlernen.

Motivation: Im Spiel geht es unmittelbar um Gewinn und Verlust! (Sonst in der Lehre liegen Investition und Ertrag oft lang entfernt.)

Transparenz: Alle Spielregeln sind uns bekannt, explizit und detailliert! (Im Alltag dagegen sind uns Mechanismen und Parameter oft verborgen.)

Freiheit: Wir können Spiele selbst erschaffen und unsere Ideen erkunden! (Vorgegebene Realität legt unserer Kreativität allzu oft enge Fesseln an.)

Insbesondere können wir mit Bei-Spielen klein anfangen und zunächst einfache *toy examples* lösen und schrittweise weitere *levels* freischalten. So erklimmen wir spielerisch angeleitet die Stufen der Erkenntnis.

Wie berechnen und interpretieren wir Zufall?

Viele „Paradoxien" der Quantenmechanik gründen bereits in klassischer Wahrscheinlichkeit und ihrer naiv-vagen Interpretation. Die Messung „kollabiert" den Zustand? Diese Problematik entsteht schon klassisch!

Nach dem Ereignis hat es keinen Sinn,
nach Wahrscheinlichkeit zu fragen.
Albert Einstein (1879–1955)

Einstein's thoughts often turned philosophical. He told us once, "Life is finite. Time is infinite. The probability that I am alive today is zero. In spite of this, I am now alive. Now, how is that?" None of his students had an answer. After a pause, Einstein said, "Well, after the fact, one should not ask for probabilities."
Eugene Paul Wigner (1902–1995): *Recollections, as told to Andrew Szanton*
zitiert in Susan Holmes: *Statistical Proof?* Bulletin AMS 55 (2018) 31–55

Die Debatte, was Wkt wirklich ist und wie sie zu interpretieren sei, ob physikalisch-objektiv oder individuell-subjektiv, spaltet Anwender:innen in Frequentisten und Baysianer. Die Mathematik bleibt dazu agnostisch.
Weitz: *Was ist eigentlich Wahrscheinlichkeit?* `youtu.be/BYUKbEXXmG4`

Wie berechnen und interpretieren wir Zufall?

Im Folgenden wagen wir das – mathematisch leichte! – Upgrade vom klassischen Lostopf ($\Omega = \{0, \dots, n\}, p \in [\Omega]$) zu seiner $\mathbb{C}$–linearen Erweiterung, dem Qudit ($V = \mathbb{C}^\Omega, s \in |V|$). Um den Übergang zu ebnen, gehe ich zuvor noch etwas genauer auf die Ziehung aka „Messung" ein. Schon klassisch führt dies zum spannenden Begriff der bedingten Wkt.

Eine **Messvorschrift** ist eine Zerlegung $\Omega = \bigsqcup_{j=0}^k E^j$, zum Beispiel $E^j = \{j\}$ für $j \in \Omega = \{0, \dots, n\}$. Dies zerlegt $p = \sum_{j=0}^k p^j$ in $p^j = p\,\mathbf{1}_{E^j}$. Die **Messung** liefert einen Wert $j \in \{0, \dots, k\}$ mit Wkt $|p^j| = \sum_{i \in E^j} p_i$. Dabei **kollabiert** p zur bedingten Wkt p^j, renormiert $p^j/|p^j| \in [\Omega]$. Dieser Zustand kann für weitere Messungen verwendet werden.

Dies wird spürbar relevant im obigen Fall eines Produktraums $\Omega = A \times B$. Alice misst gemäß $\Omega = \bigsqcup_{a \in A} \{a\} \times B$. Bob misst gemäß $\Omega = \bigsqcup_{b \in B} A \times \{b\}$. Jede Messung kollabiert die Wkt p jeweils auf die bedingte Wkt $p^j/|p^j|$.

Müssen wir dabei durch Null dividieren? Das ist ein echtes Problem! Pragmatische Antwort: Es ist *möglich*, aber *unwahrscheinlich*, mit Wkt 0. (In der Spieltheorie sind diese Ausnahmen ein tiefliegendes Problem.)

Was ist ein Qudit? ein $\mathbb{C}$–linearer Lostopf!

Ein **n–Qudit** (V, s) aka „endlich-dim. Hilbert–Raum V mit Zustand $s \in V$“ besteht aus einem $\mathbb{C}$–Vektorraum $V = \mathbb{C}^\Omega$ mit einer Orthonormalbasis $|0\rangle, \dots, |n\rangle$ und einem Zustand $s = \sum_{i=0}^n |i\rangle s_i \in V$ mit $s_0, \dots, s_n \in \mathbb{C}$ und Norm $|s|_2^2 := \sum_{i=0}^n |s_i|^2 = 1$. Somit liegt s in der Einheitssphäre

$$|V| := \{\, s \in V : |s| = 1 \,\} = \mathbb{S}^{2n+1}.$$

Vorbereitung: Wir können jeden beliebigen Zustand $s \in |V|$ herstellen. Uns genügt bereits $u \in V$ mit $u \neq 0$, wir normieren dann zu $s = u/|u|$. Im einfachsten Fall $n = 1$ ist dies ein **Qubit** $(\mathbb{C}^2, s)$ mit $|s_0|^2 + |s_1|^2 = 1$.

Physikalische Realisierung: Eine **Messvorschrift** ist eine orthogonale Summenzerlegung $V = \bigoplus_{j=0}^k U^j$, zum Beispiel $U^j = |j\rangle\mathbb{C}$ für $j = 0, \dots, n$. Dies zerlegt den Zustand $s = \sum_{j=0}^k s^j$ in seine Projektionen $s^j \in U^j$.

Die **Messung** liefert einen Wert $j \in \{0, \dots, k\}$ mit Wkt $|s^j|_2^2 \in [0, 1]$. Dabei **kollabiert** s zum neuen Zustand s^j, renormiert $s^j/|s^j| \in |V|$. Dieser Zustand kann für weitere Messungen verwendet werden. Ein Qudit ist somit viel flexibler als ein klassischer Lostopf!

Was ist ein Qudit? ein $\mathbb{C}$–linearer Lostopf!

Wer diese „Spielregeln“ erstmals sieht, hält sie vermutlich für absurd. Nicht die *mathematische* Formulierung, so hoffe ich, denn hier geht es nur um Vektoren im Raum $\mathbb{C}^\Omega$. Nein, die *physikalische* Realisierung ist gänzlich unglaublich. Und doch, genau so verhält sich Quantenphysik!

> *If quantum mechanics hasn't profoundly shocked you, you haven't understood it yet.* (Niels Bohr, 1885–1962)

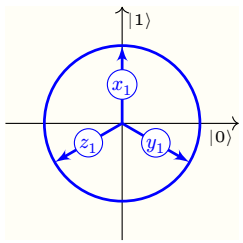
Ihr Vorteil: Sie beherrschen die mathematischen Werkzeuge und sehen nun erstaunt eine tiefsinnige Anwendung. Manchen geht es umgekehrt: Sie wollen die Anwendung verstehen und lernen dazu die Mathematik; auch gut! Hier finden wir uns alle zusammen und staunen gemeinsam.

Tensorprodukt: Alice hat ihr Qudit $(\mathbb{C}^A, q)$, Bob hat $(\mathbb{C}^B, r)$, gemeinsam erhalten sie das Tensorprodukt $V = \mathbb{C}^A \otimes \mathbb{C}^B = \mathbb{C}^{A\times B}$ mit ONBasis $|a, b\rangle$ für alle Paare $(a, b) \in A \times B$. Der **Produktzustand** $s = q \otimes r \in V$ entsteht dabei aus $q = \sum_a |a\rangle \cdot q_a$ und $r = \sum_b |b\rangle \cdot r_b$ durch $s = \sum_{(a,b)} |a, b\rangle \cdot q_a r_b$. Normierung: Hier gilt $|s|_2^2 = |q|_2^2 \cdot |r|_2^2$. Aus $|q|_2 = |r|_2 = 1$ folgt $|p|_2 = 1$.

Zwei Qubits: Tensorprodukt und Verschränkung

Alice und Bob erweitern ihre klassischen Lostöpfe $A = B = \{0, 1\}$ zu Qubits in $\mathbb{C}^A$ und $\mathbb{C}^B$, gemeinsam $V = \mathbb{C}^A \otimes \mathbb{C}^B = \mathbb{C}^{A\times B}$ mit ONBasis $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$. Sie präparieren den (verschränkten) Zustand

$$s = \tfrac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \in |V|.$$



Die Matrizen $X_1, Y_1, Z_1 \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ projizieren jeweils

auf $x_1 = \begin{bmatrix} \sin(0\pi/3) \\ \cos(0\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ gemäß $X_1 = x_1 x_1^\dagger$,

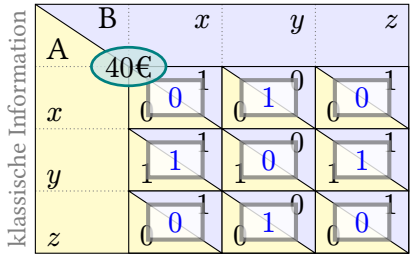
auf $y_1 = \begin{bmatrix} \sin(2\pi/3) \\ \cos(2\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$ gemäß $Y_1 = y_1 y_1^\dagger$,

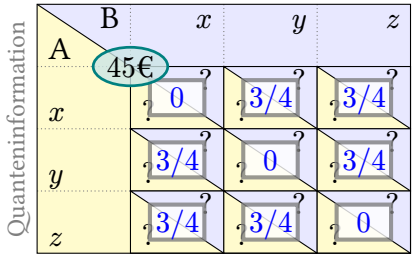
auf $z_1 = \begin{bmatrix} \sin(4\pi/3) \\ \cos(4\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$ gemäß $Z_1 = z_1 z_1^\dagger$,

Ebenso arbeiten wir mit den um 90° zurückgedrehten Vektoren x_0, y_0, z_0. Die Matrix $X_1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ erfüllt $X_1^\dagger = X_1$ und $X_1^2 = X_1$, ist also eine orthogonale Projektion: Sie zerlegt $\mathbb{C}^2 = x_0\mathbb{C} \oplus x_1\mathbb{C}$ in zwei Eigenräume, explizit $\operatorname{Ker}(X_1) = x_0\mathbb{C}$ mit $x_0 = |0\rangle$ und $\operatorname{Im}(X_1) = x_1\mathbb{C}$ mit $x_1 = |1\rangle$. Der zugehörige Messwert $x \in \{0, 1\}$ ist die Antwort auf die Frage X. Ebenso nutzen wir Y und Z. Wie groß ist nun die Gewinnerwartung?

Zwei Qubits: Tensorprodukt und Verschränkung

In $V = \mathbb{C}^A \otimes \mathbb{C}^B$ misst Alice ihren Faktor $\mathbb{C}^A$ mit $X \otimes I, Y \otimes I, Z \otimes I$.
In $V = \mathbb{C}^A \otimes \mathbb{C}^B$ misst Bob seinen Faktor $\mathbb{C}^B$ mit $I \otimes X, I \otimes X, I \otimes X$.
Die Wkt für gleiche Antworten, also Gewinn von 90€, ist insgesamt $1/2$!





Das ist besser als Wkt $4/9$ und Erwartung 40€: nicht viel, aber messbar. Kostet Teilnahme 40€, ist das Quantenergebnis unendlich viel besser! Die physikalische Realisierung ist knifflig, die Mathematik ist leicht:

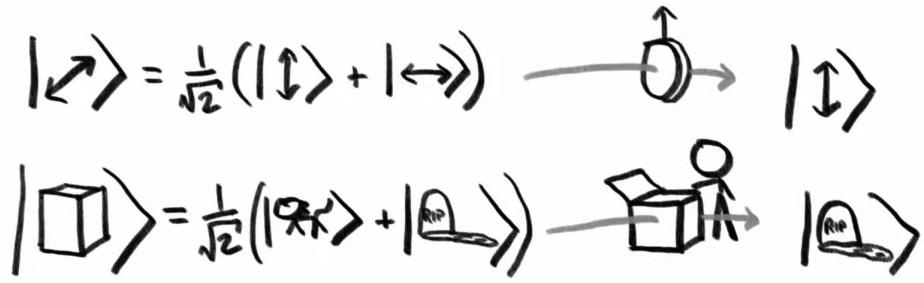
$$s \xmapsto{X_0\otimes I} \tfrac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle \xmapsto{I\otimes X_0} 0, \qquad s \xmapsto{X_0\otimes I} \tfrac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle \xmapsto{I\otimes Y_0} \tfrac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes (-\tfrac{\sqrt{3}}{2})y_0,$$

$$s \xmapsto{X_1\otimes I} \tfrac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \xmapsto{I\otimes X_1} 0, \qquad s \xmapsto{X_1\otimes I} \tfrac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \xmapsto{I\otimes Y_1} \tfrac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \otimes (+\tfrac{\sqrt{3}}{2})y_1.$$

Lineare Algebra und Quantenmechanik

Wie versprochen ist die *Rechnung* erschütternd einfach, vor allem dank des zugrundeliegenden, sehr eleganten Tensorkalküls. Die physikalische *Interpretation* jedoch ist ebenso erschütternd tiefsinnig und schwierig.

If people do not believe that mathematics is simple,
it is only because they do not realize how complicated life is.
John von Neumann (1903–1957)



Video von 3Blue1Brown und MinutePhysics, `youtu.be/MzRCDLre1b4`, und ebenso sehenswert von Veritasium, `youtu.be/ZuvK-od647c`.

Lineare Algebra und Quantenmechanik

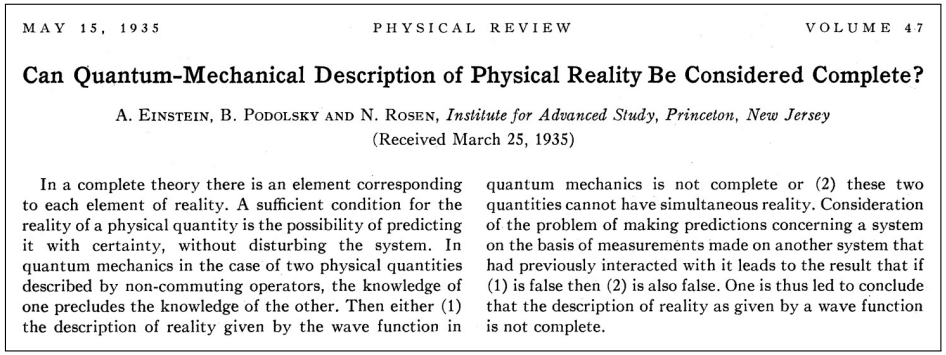
Warum gilt diese einfache Matrixrechnung als paradox?
Das liegt ganz allein an der physikalischen Interpretation:

Alice und Bob können beliebig weit entfernt sein! Alice' Messung entspricht einem Münzwurf, mit Ergebnis 0 für Kopf und 1 für Zahl. Auch Bobs Messung entspricht einem Münzwurf. Diese sind jedoch nicht unabhängig, sondern raffiniert miteinander verschränkt.

Wie kann das sein? Wird hier Information von Alice zu Bob übertragen, und zwar instantan und somit echt schneller als Lichtgeschwindigkeit? Einstein wollte sich mit dieser „spukhaften Fernwirkung" nicht abfinden. Aus dieser Sicht wird die obige Rechnung als „paradox" bezeichnet.

Das Phänomen ist sicherlich unerwartet und unintuitiv, aber Experimente bestätigen genau diese Vorhersage. Information wird hier nicht übertragen, denn Alice kann ihren Wert zwar messen, doch nicht willkürlich vorgeben.

Lineare Algebra und Quantenmechanik



MAY 15, 1935 PHYSICAL REVIEW VOLUME 47

Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*
(Received March 25, 1935)

In a complete theory there is an element corresponding to each element of reality. A sufficient condition for the reality of a physical quantity is the possibility of predicting it with certainty, without disturbing the system. In quantum mechanics in the case of two physical quantities described by non-commuting operators, the knowledge of one precludes the knowledge of the other. Then either (1) the description of reality given by the wave function in quantum mechanics is not complete or (2) these two quantities cannot have simultaneous reality. Consideration of the problem of making predictions concerning a system on the basis of measurements made on another system that had previously interacted with it leads to the result that if (1) is false then (2) is also false. One is thus led to conclude that the description of reality as given by a wave function is not complete.

Warum erzähle ich Ihnen das hier, in der Linearen Algebra?
Ist Quantenmechanik nicht viel zu schwer und unanschaulich?

Ja, Quantenmechanik ist unanschaulich, doch von fundamentaler Bedeutung: physikalisch, mathematisch, technisch, philosophisch, …

Vor allem aber können wir an solchen Anwendungen viel lernen, vielleicht sogar etwas Physik, ganz sicher aber viel Mathematik!

Lineare Algebra und Quantenmechanik

Ich präsentiere Ihnen diesen faszinierenden Exkurs, um zu illustrieren, dass Sie die mathematischen Grundlagen Ihrer Linearen Algebra sehr vielseitig anwenden können, in der Physik und auch überall sonst.

Ich betone dabei nochmals: Die Mathematik ist zunächst nicht einfach, doch in Ihrer Reichweite und mit Übung gut erlernbar und verständlich. Es lohnt sich daher in solide mathematische Grundlagen zu investieren.

Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle. In den Anwendungen hingegen tobt das Leben, prall und verwirrend.

Die obigen Miniaturen zum No-Cloning-Theorem und dem EPR-Paradox zeigen eindrücklich: Die mathematischen Grundlagen der Rechnungen sind „einfache Lineare Algebra", wie Physiker:innen gerne sagen.

Und das zu Recht. Die (abstrakten) mathematischen Werkzeuge muss man nur einmal erlernen, sie kosten anfangs etwas Geduld und Mühe, doch das ist gut investiert: sie lassen sich überall (konkret) anwenden.

Definition X7A: Postulate der Quantenmechanik

Die Quantenmechanik wird durch folgende Postulate zusammengefasst:

1. Der Zustand eines Systems wird beschrieben durch einen Vektor $\psi \in V$ in einem Hilbert–Raum V über $\mathbb{C}$, genannt Zustandsraum.
2. Jede physikalisch messbare Größe, kurz Observable genannt, wird beschrieben durch einen hermiteschen Operator $A : V \to V$.
3. Das Ergebnis jeder Messung von A ist ein Eigenwert $a \in \mathbb{R}$ von A. (Wenn wir $\dim V < \infty$ annehmen, so wissen wir $V = \bigoplus_{a\in\mathbb{R}} \mathrm{E}_a$.)
4. Die Wkt des Messwerts a im Zustand ψ ist $\mathbf{P}(a|\psi) = \|\psi_a\|^2/\|\psi\|^2$ gemäß der orthogonalen Zerlegung $V = \mathrm{E}_a \oplus \mathrm{E}_a^\perp$ und $\psi = \psi_a + \psi'_a$.
5. Nach der Messung von a befindet sich das System im Zustand ψ_a. Das ist die orthogonale Projektion von V auf den Eigenraum E_a.
6. Die Schrödinger–Gleichung $\mathrm{i}\hbar\,\partial_t\psi(t) = H(t)\psi(t)$ beschreibt die zeitliche Entwicklung; die Observable $H(t)$ ist die Gesamtenergie.

☺ Die Postulate (1–5) präzisieren die grundlegenden Rechenregeln der Quantenmechanik in der vertrauten Sprache der Linearen Algebra!

So formulierte Werner Heisenberg 1925 seine **Matrizenmechanik** und Erwin Schrödinger im selben Jahre seine **Wellenmechanik**; dafür erhielten sie 1932 bzw. 1933 den Nobelpreis für Physik.

⚠ Zur Vereinfachung möchte ich im Folgenden $\dim V < \infty$ annehmen. Die zur Quantenmechanik nötige Mathematik liegt dann vollständig im Rahmen der **Linearen Algebra**. Der allgemeine Fall ist noch viel faszinierender, benötigt aber stärkere Werkzeuge der **Analysis**.

Diese Postulate der Quantenmechanik kann man wohl kaum intuitiv verstehen, wohl aber gut nutzen: Sie beschreiben die Experimente!

I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics.
Richard P. Feynman, *The Character of Physical Law* (1965)

Ich betone nochmals: Die wesentliche Schwierigkeit liegt nicht in der mathematischen Formulierung, dazu haben Sie nun alle Werkzeuge. Das Verrückte ist einzig und allein die physikalische Interpretation.

Aufgabe: Lösen Sie die Schrödinger–Gleichung im Falle $\dim V < \infty$. Der Schrödinger–Hamilton–Operator $H : V \to V$ sei zeitlich konstant:

$$\boxed{\mathrm{i}\hbar\,\partial_t\psi(t) = H\psi(t), \quad \psi(t_0) = \psi^0}$$

Lösung: Dank Spektralsatz existiert eine Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ von V aus Eigenvektoren, also $Hv_k = E_k v_k$ mit $E_k \in \mathbb{R}$ für $k = 1, \dots, n$.

Wir untersuchen nun $\psi : \mathbb{R} \to V : t \mapsto \psi(t)$ als zeitabhängigen Zustand. Zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ zerlegen wir den Zustand $\psi(t) = \sum_k \psi_k(t) v_k$ als Summe orthogonaler Eigenvektoren, also $\psi_k(t) = \langle v_k \,|\, \psi(t) \rangle \in \mathbb{C}$.

Die allgemeine Schrödinger–Gleichung $\mathrm{i}\hbar\,\partial_t\psi(t) = H(t)\psi(t)$ wird nun entkoppelt zu $\mathrm{i}\hbar\,\partial_t\psi_k(t) = E_k\psi_k(t)$. Aus $\psi(t_0) = \sum_k \psi_k^0 v_k$ folgt somit:

$$\boxed{\psi(t) = \textstyle\sum_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-t_0)E_k/\hbar}\ \psi_k^0 v_k}$$

Alternative: Mit der Matrix-Exponentialfunktion (Q3B) können wir die eindeutige Lösung zusammenfassen durch $\psi(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t_0)H/\hbar}\ \psi(t_0)$.

☺ Die explizite Lösung gelingt überraschend leicht: Wir benötigen dazu nur eine Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ von V aus Eigenvektoren von H.

Wie der Schrödinger–Operator H genau aussieht, hängt vom konkreten Modell ab. Die Lösungsmethode hingegen ist universell anwendbar!

☺ Wir erkennen hier eine erstaunlich simple zeitliche Entwicklung: Die Amplitude $\psi_k(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-t_0)E_k/\hbar}\ \psi_k^0$ bleibt im Betrag immer gleich, nur die Phase ändert sich um den Faktor $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-t_0)E_k/\hbar} \in \mathbb{S}^1 = \mathrm{GU}_1\,\mathbb{C}$.

Die Geschwindigkeit $E_k/\hbar$ dieser Phasenänderung ist die Energie E_k des Eigenzustands v_k geteilt durch eine universelle Naturkonstante, das Plancksche Wirkungsquantum $\hbar = h/2\pi \approx 1.055 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$.

☺ Die Wkten $|\psi_k(t)|^2 \in [0,1]$ ändern sich nicht, lediglich die Phase! Die Phase ist nicht direkt messbar, spielt aber dennoch eine wichtige Rolle: Bei der Addition (Überlagerung, Superposition) führt sie zu Verstärkung oder Auslöschung; man spricht hier von Interferenz. Die Wkten $|\psi_k(t)|^2 \in [0,1]$ alleine genügen dafür nicht!

Aufgabe: Sei V ein $\mathbb{C}$–Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$ und $\dim V = n < \infty$ und hierauf $A : V \to V$ ein hermitescher Operator.

Wir interpretieren V als Zustandsraum und A als Observable. Berechnen Sie gemäß den Postulaten der Quantenmechanik (X7A) Erwartung und Varianz des Operators A im gegebenen Zustand $\psi \in V$.

Lösung: Dank Spektralsatz existiert eine Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ von V aus Eigenvektoren, also $Av_i = a_i v_i$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$.

Wir zerlegen den Zustand $\psi = \sum_{i=1}^n \psi_i v_i$ in eine Summe orthogonaler Eigenvektoren. Die Koeffizienten hierfür sind $\psi_i = \langle v_i \,|\, \psi\rangle \in \mathbb{C}$ (S3B).

Die Betragsquadrate $|\psi_i^2|$ entsprechen Wkten. Wir normieren daher den Zustand ψ und erhalten so die Gesamtwkt $1 = \|\psi\|^2 = \sum_{i=1}^n |\psi_i^2|$.

Bei vorgegebenem Zustand $\psi \in V$ mit $\|\psi\| = 1$ interpretieren wir die Messung durch den hermiteschen Operator A als Zufallsvariable.

(Etwas nachlässig doch bequem bezeichne ich im Folgenden beides, den Operator A und die Zufallsvariable A, mit demselben Symbol.)

Die Erwartung μ der Messung durch A ist demnach:

$$\begin{aligned}\mu = \mathbf{E}(A) &= \textstyle\sum_i a_i |\psi_i^2| = \sum_i a_i \langle \psi_i \,|\, \psi_i\rangle = \sum_i a_i \langle \psi \,|\, \psi_i\rangle \\ &= \textstyle\sum_i \langle \psi \,|\, A\psi_i\rangle = \langle \psi \,|\, \sum_i A\psi_i\rangle = \langle \psi \,|\, A \sum_i \psi_i\rangle \\ &= \langle \psi \,|\, A\psi\rangle = \langle \psi \,|\, A \,|\, \psi\rangle =: \langle A\rangle\end{aligned}$$

Hierbei ist $\langle A\rangle$ die bequeme Kurzschreibweise zum gegebenen Zustand ψ. Die Erwartung von A^2 ist entsprechend:

$$\mathbf{E}(A^2) = \langle A^2\rangle = \langle \psi \,|\, A^2 \,|\, \psi\rangle = \langle A\psi \,|\, A\psi\rangle$$

Daraus erhalten wir wie üblich die Varianz der Zufallsvariable A als Erwartung der quadratischen Abweichung vom Mittelwert:

$$\begin{aligned}\sigma^2 = \mathbf{V}(A) &= \mathbf{E}((A-\mu)^2) = \mathbf{E}(A^2 - 2\mu A + \mu^2) \\ &= \mathbf{E}(A^2) - 2\mu\mathbf{E}(A) + \mu^2 = \mathbf{E}(A^2) - \mathbf{E}(A)^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2\end{aligned}$$

☺ Hier verbinden sich Lineare Algebra, Skalarprodukte und Wahrscheinlichkeitsrechnung wunderbar einfach und elegant.

☺ Zusammenfassend erhalten wir das folgende schöne Ergebnis:

Satz X7B: Erwartung und Varianz

Sei V ein Hilbert–Raum über $\mathbb{C}$; zur Vereinfachung gelte $\dim V < \infty$.

Gegeben sei ein hermitescher Endomorphismus $A : V \to V$ und ein Vektor $\psi \in V$. Nach den Postulaten der Quantenmechanik (X7A) interpretieren wir die Messung durch A als eine Zufallsvariable.

(1) Erwartung und Varianz sind dann gegeben durch:

$$\boxed{\begin{aligned}\mu = \mathbf{E}(A) &= \langle A\rangle := \langle \psi \,|\, A \,|\, \psi\rangle \\ \mathbf{E}(A^2) &= \langle A^2\rangle = \langle \psi \,|\, A^2 \,|\, \psi\rangle = \langle A\psi \,|\, A\psi\rangle \\ \sigma^2 = \mathbf{V}(A) &= \mathbf{E}(A^2) - \mathbf{E}(A)^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2\end{aligned}}$$

Dieser Satz gilt sinngemäß genauso in unendlicher Dimension; die dazu nötige technische Ausführung diskutieren wir hier nicht.

☺ Mögliche Messwerte sind die Eigenwerte von A, und ihre Wkten sind verteilt gemäß ψ. Der Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ ist der Schwerpunkt dieser Verteilung, und die Streuung $\sigma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ misst die typische Breite.

☺ Bitte beachten Sie den geschickten und fließenden Übergang von „koordinatengebundener“ zu „koordinatenfreier“ Formulierung: Unsere Rechnungen nutzen eine Eigenbasis von A, das Ergebnis jedoch nicht!

⚠ Auf dem Zustandsraum V arbeiten wir im Allgemeinen mit mehreren verschiedenen hermiteschen Operatoren $A, B, \dots$. Es hat daher meist keinen rechten Sinn, sich auf eine Basis festzulegen: Jeder hermitesche Operator erlaubt zwar eine Eigenbasis, doch bei jedem Wechsel des Operators müssen wir im Allgemeinen auch die Basis wechseln.

☺ In konkreten Rechnungen ist meist die Wahl einer Basis hilfreich; genau so haben wir oben die Erwartung definiert und berechnet.

☺ Für die Ergebnisse sind basisfreie Formulierungen am schönsten; genau so haben wir den obigen Satz X7B formuliert.

Wann können wir mit einem „scharfen“ Messergebnis rechnen? Darauf antwortet die folgende Ergänzung des obigen Satzes:

Satz X7B: Erwartung und Varianz

(2) Genau dann gilt $\mathbf{V}(A) = 0$, wenn ψ ein Eigenzustand von A ist. In diesem Fall ist $\mathbf{E}(A) = \mu$ der zugehörige Eigenwert, also $A\psi = \mu\psi$.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Äquivalenz.

Lösung: „$\Leftarrow$“: Angenommen, $\psi \in V \smallsetminus \{0\}$ erfüllt $A\psi = \mu\psi$ mit $\mu \in \mathbb{R}$. Zudem gelte $\|\psi\| = 1$. Dann gilt $\mathbf{E}(A) = \langle \psi \,|\, A \,|\, \psi \rangle = \mu$ und ebenso $\mathbf{E}(A^2) = \langle \psi \,|\, A^2 \,|\, \psi \rangle = \mu^2$, also $\mathbf{V}(A) = \mathbf{E}(A^2) - \mathbf{E}(A)^2 = 0$.

„$\Rightarrow$“: Als Kontraposition zeigen wir: Ist ψ kein Eigenzustand, so gilt $\mathbf{V}(A) > 0$. Zunächst normieren wir $\|\psi\| = 1$. Da A hermitesch ist und $\dim V < \infty$, zerfällt V in die orthogonale Summe von Eigenräumen. Wir zerlegen $\psi = \sum_{k=1}^m \psi_k$ in Eigenzustände $\psi_k \neq 0$ mit $A\psi_k = \lambda_k \psi_k$ und $\lambda_k \neq \lambda_\ell$ für $k \neq \ell$. Gilt dabei $m \geq 2$, so folgt für die Varianz $\mathbf{V}(A) = \mathbf{E}((A-\mu)^2) = \sum_{k=1}^m (\lambda_k - \mu)^2 \|\psi_k^2\| > 0$.

Satz X7C: Unschärferelation, Heisenberg 1927, Robertson 1929

Sei V ein Hilbert–Raum über $\mathbb{C}$; zur Vereinfachung gelte $\dim V < \infty$. Gegeben seien hermitesche Operatoren $A, B : V \to V$. Ihr Kommutator $[A, B] = AB - BA$ misst somit die Abweichung von der Kommutation. Für jeden Zustand $\psi \in V$ gilt dann die Ungleichung

$$\boxed{\mathbf{V}(A)\,\mathbf{V}(B) \;\geq\; \frac{1}{4}\big|\langle [A,B] \rangle\big|^2.}$$

Im Falle $\mathbf{E}(A) = \mathbf{E}(B) = 0$ bedeutet das ausgeschrieben:

$$\langle \psi \,|\, A^2 \,|\, \psi \rangle \, \langle \psi \,|\, B^2 \,|\, \psi \rangle \;\geq\; \frac{1}{4}\big|\langle \psi \,|\, [A,B] \,|\, \psi \rangle\big|^2$$

Beweis: Zur Vereinfachung der Rechnung zentrieren wir A und B zu $A' = A - \mathbf{E}(A)$ und $B' = B - \mathbf{E}(B)$. Damit verschieben wir die beiden Erwartungswerte zu 0, doch Varianz und Kommutator ändern sich nicht. Wir können und werden im Folgenden $\mathbf{E}(A) = \mathbf{E}(B) = 0$ annehmen.

Wir nutzen Hermitizität und die Cauchy–Schwarz–Ungleichung:

$$\begin{aligned} \langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle &= \langle \psi \,|\, A^2\psi \rangle \langle \psi \,|\, B^2\psi \rangle = \langle A\psi \,|\, A\psi \rangle \langle B\psi \,|\, B\psi \rangle \\ &\geq \big|\langle A\psi \,|\, B\psi \rangle\big|^2 = \big|\langle \psi \,|\, AB\psi \rangle\big|^2 = \big|\langle AB \rangle\big|^2. \end{aligned}$$

Wir zerlegen $AB = \frac{1}{2}\{A,B\} + \frac{1}{2}[A,B]$ in die Summanden

$$\{A,B\} = AB + BA \quad \text{und} \quad [A,B] = AB - BA.$$

Der Antikommutator $\{A,B\}$ ist hermitesch, also $\langle \{A,B\} \rangle$ reell, der Kommutator $[A,B]$ ist antihermitesch, also $\langle [A,B] \rangle$ imaginär.

$$\big|\langle AB \rangle\big| = \Big|\frac{1}{2}\langle \{A,B\} \rangle + \frac{1}{2}\langle [A,B] \rangle\Big| \;\geq\; \frac{1}{2}\big|\langle [A,B] \rangle\big|$$

Zusammengefasst erhalten wir die allgemeine Unschärferelation:

$$\boxed{\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \;\geq\; \frac{1}{4}\big|\langle [A,B] \rangle\big|^2}$$

Das beweist die behauptete Ungleichung. QED

Auch hier ist die mathematische Behandlung vergleichsweise leicht, die physikalische Interpretation jedoch erwies sich als revolutionär:

Falls die beiden hermiteschen Operatoren A und B kommutieren, also $[A,B] = 0$ erfüllen, so lassen sie sich simultan diagonalisieren (P7B).

Andernfalls gilt $[A,B] \neq 0$, und die Unschärferelation X7C besagt, dass beide Messwerte nicht gleichzeitig exakt bestimmt sind.

Diese Unschärfe beruht nicht auf einem technisch behebbaren Mangel eines ungenügenden Messinstruments, sondern ist prinzipieller Natur!

Heisenbergs ursprüngliche Formulierung einer Unschärferelation betraf Ort x und Impuls p eines Teilchens: In geeigneter Darstellung gilt dabei $p = (\hbar/\mathrm{i})\partial_x$, daraus folgt $[x,p] = \mathrm{i}\hbar$, also $\sigma(x) \cdot \sigma(p) \geq \hbar/2$. Das heißt:

Es ist prinzipiell unmöglich, den Ort und den Impuls eines Teilchens gleichzeitig beliebig genau zu messen. Anders gesagt bedeutet das:

Es ist unmöglich, einen quantenmechanischen Zustand herzustellen, bei dem der Ort und der Impuls beliebig genau definiert sind.

Kapitel Y

Tensoralgebren

$$\Lambda(V) \twoheadleftarrow T(V) \twoheadrightarrow S(V)$$

$$\begin{array}{lcl} 0 & \leftarrow\!\shortmid & \mathtt{belag}+\mathtt{gabel} \mapsto 2\cdot\mathtt{gabel} \\ 2\cdot\mathtt{belag} & \leftarrow\!\shortmid & \mathtt{belag}-\mathtt{gabel} \mapsto 0 \end{array}$$

[Ich bemühe mich] Inhalt und Grundlegung [...] vom Standpunkte der heutigen Wissenschaft in möglichst einfacher und anregender Weise überzeugend darzulegen. Und dieses [...] in freien Exkursen, wie sie sich unter den wechselnden Anregungen der Umgebung in der wirklich gehaltenen Vorlesung tatsächlich gestaltet haben.

Felix Klein (1849–1925), *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*

Inhalt dieses Kapitels Y

1 Multilineare Algebra
- Die Tensoralgebra $T(V)$
- Die symmetrische Algebra $S(V)$
- Die alternierende Algebra $\Lambda(V)$

2 Differentialkalkül und der Hauptsatz
- Differentialformen und ihre Ableitung
- Integration von Differentialformen

Wie machen wir aus Vektoren einen Ring?

Sei R ein kommutativer Ring und V ein zentraler R–linearer Raum: Skalare wirken beidseitig, und dabei gilt $rv = vr$ für $r \in R$ und $v \in V$.

Eine Abbildung $f : V^n = V \times \ldots \times V \to W$ bildet jedes n–Tupel $v = (v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren aus V auf einen Wert $w = f(v)$ in W ab.

Besonders interessieren uns dabei die multilinearen Abbildungen. Die Permutation der Einträge mit $\tau \in \mathrm{S}_n$ definiert eine neue Abbildung $f \circ \tau : V^n \to W$. Hier treten zwei wichtige Typen von Symmetrien auf:

Wir nennen f **symmetrisch**, wenn $f \circ \tau = f$ gilt für alle $\tau \in \mathrm{S}_n$, und **antisymmetrisch**, wenn $f \circ \tau = \operatorname{sign}(\tau) \cdot f$, und **alternierend**, wenn $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$ gilt sobald $v_i = v_j$ für ein Paar $i \neq j$.

Das Tensorprodukt überführt jede multilineare Abbildung $f : V^n \to W$ in eine lineare Abbildung $\bar{f} : V^{\otimes n} \to W$. Die obigen Symmetrien führen uns von der **Tensoralgebra** $T(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V^{\otimes n}$ zur **symmetrischen Algebra** $S(V) = T(V)/\text{Symmetrie}$ und schließlich zur **alternierenden Algebra** $\Lambda(V) = T(V)/\text{Alternie}$. Genau das untersuchen wir in diesem Kapitel.

Wie machen wir aus Vektoren einen Ring?

Wundersame Vorschau: In jedem Monoid oder Ring gilt:

$$(\mathtt{ho})^3 = \mathtt{hohoho}$$
$$(\mathtt{oh})^3 = \mathtt{ohohoh}$$

Wir erklären in diesem Kapitel drei besondere Ringe: die **Tensoralgebra** $T(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V^{\otimes n}$, die **symmetrische Algebra** $S(V) = T(V)/\text{Symmetrie}$ und die **alternierende Algebra** $\Lambda(V) = T(V)/\text{Alternie}$. Die drei gelingen über jedem kommutativen Ring R und für jeden R–linearen Raum V, zum Beispiel $V = \langle \mathscr{A} \rangle^!_{\mathbb{Z}}$ mit Basis $\mathscr{A} = \{\mathtt{a}, \ldots, \mathtt{z}\}$. Damit gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{in } T(V): & \mathtt{hohoho} \neq \mathtt{ohohoh} \\ \text{in } S(V): & \mathtt{hohoho} = \mathtt{ohohoh} \neq 0 \\ \text{in } \Lambda(V): & \mathtt{hohoho} = \mathtt{ohohoh} = 0 \end{array}$$

Sie fragen, wie diese wundersamen Rechnungen genau funktionieren? Ich danke Ihnen herzlich, dass Sie nachfragen! Genau darum geht es.

Motivation und Überblick

In diesem Kapitel wollen wir das Tensorprodukt nutzen und einsetzen, indem wir die Tensoralgebren $T(V)$ sowie $S(V)$ und $\Lambda(V)$ untersuchen. Dies bietet einen Rückblick auf schöne Mathematik der Linearen Algebra, zugleich einen Ausblick auf Anwendungen der nächsten Semester.

Dies kann und soll für Sie plastisch machen, was wir alles Schönes mit dem Tensorprodukt bauen können. Dabei werden Sie seine Rechenregeln wiederholen, weiter einüben und verfestigen. Insgesamt werden Sie sich durch den praktischen Gebrauch weiter an das Tensorprodukt gewöhnen.

Seien Sie also weiterhin Frohgemut! Auch in diesem Kapitel wird es neue Ideen und Begriffe geben, die Ihnen anfangs schwer und nach Einübung leicht fallen. Das ist eine Erfahrung, die sich für Sie inzwischen oftmals wiederholt hat und sich in Ihrem Studium weiter fortführen wird.

Motivation und Überblick

Bei der Konstruktion der Tensoralgebra $T(V)$ und der symmetrischen Algebra $S(V)$ begegnen uns insbesondere die Polynomringe als wichtige Spezialfälle und wohlvertraute Bekannte. Auch diese waren für Sie einst schwierig, doch inzwischen sind sie leicht, dank Übung und Gebrauch. L „Das erinnert an die Buchstabenrechung der Mittelstufe.“ Ganz genau!

Wir konstruieren die guten alten Polynomringe hier also nochmals von Grund auf neu vom Blickwinkel der Tensoralgebren. Die Tatsache, dass wir auf zwei verschiedenen Wegen zum selben Ziel gelangen, sollte uns nicht enttäuschen, sondern erfreuen. Es bezeugt, dass wir ein wichtiges Objekt in Händen halten, dass viele Facetten hat und Zugänge erlaubt.

The two most engaging powers of an author
are to make new things familiar
and familiar things new.
Samuel Johnson (1709–1784)

Motivation und Überblick

Während wir symmetrische Algebren $S(V)$ in Form von Polynomringen auch auf anderen Wegen erreichen können und bereits hergestellt haben, ist die äußere Algebra $\Lambda(V)$ tatsächlich ein gänzlich neuartiges Wesen. Sie ist deshalb zu Recht der Star dieses Kapitels.

Sie wird Ihnen aller Erfahrung nach in vielen Anwendungen der nächsten Semester ein willkommenes Werkzeug sein, etwa in der Differential- und Integralrechnung, in der Analysis, der Geometrie, der Physik, uvm. Sie können diese Themen auch auf andere Weisen präsentieren, erschließen und nutzen, doch besonders elegant und effizient wird die Information gebündelt durch die äußere Algebra.

Selbst wenn Sie die äußere Algebra nur homöopathisch nutzen wollen, so lohnt es sich doch, sie immerhin einmal kennen gelernt zu haben. Wie schon so oft gilt auch hier wieder: Kennen Sie Ihre Werkzeuge! Nur dann können Sie informiert auswählen und effizient anwenden.

Motivation und Überblick

Gian-Carlo Rota war ein italienisch-amerikanischer Mathematiker, der vorrangig zu Analysis und Wahrscheinlichkeit arbeitete und die moderne Kombinatorik mitbegründete. Er schrieb äußerst treffend:

“What can you prove with exterior algebra that you cannot prove without it?” Whenever you hear this question raised about some new piece of mathematics, be assured that you are likely to be in the presence of something important. In my time, I have heard it repeated for random variables, Laurent Schwartz’ theory of distributions, ideles and Grothendieck’s schemes, to mention only a few. A proper retort might be: “You are right. There is nothing in yesterday’s mathematics that could not also be proved without it. Exterior algebra is not meant to prove old facts, it is meant to disclose a new world. Disclosing new worlds is as worthwhile a mathematical enterprise as proving old conjectures.“
Gian-Carlo Rota (1932–1999), *Indiscrete thoughts* (1997)

Wörter $\mathscr{A}^*$ über einem Alphabet $\mathscr{A}$

Ein **Alphabet** $\mathscr{A}$ ist eine Menge, ihre Elemente $a \in \mathscr{A}$ heißen **Buchstaben**.
Ein **Wort** der Länge n ist ein n–Tupel $w = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1})$ mit $w_i \in \mathscr{A}$.

$$\mathscr{A}^n \;=\; \mathscr{A} \times \mathscr{A} \times \dots \times \mathscr{A} \;=\; \{\, w : \{0, 1, \dots, n-1\} \to \mathscr{A} \,\}$$

Wir lesen Buchstaben als Wörter vermöge $\mathscr{A} \rightsquigarrow \mathscr{A}^1 : a \mapsto (\{0\} \mapsto a)$.
Wir haben die **Verknüpfung** $* : \mathscr{A}^k \times \mathscr{A}^\ell \to \mathscr{A}^{k+\ell} : (u, v) \mapsto w = uv$,

$$\underbrace{(u_0, \dots, u_{k-1})}_{= u \in \mathscr{A}^k} * \underbrace{(v_0, \dots, v_{\ell-1})}_{= v \in \mathscr{A}^\ell} \;=\; \underbrace{(u_0, \dots, u_{k-1}, v_0, \dots, v_{\ell-1})}_{= uv =: w \in \mathscr{A}^{k+\ell}}.$$

Ausgeschrieben heißt das $w_i = u_i$ für $i < k$ und $w_{k+i} = v_i$ für $i < \ell$.
Die Verknüpfung $*$ ist **assoziativ**, denn $(u * v) * w = u * (v * w)$.
Das leere Wort $e \in \mathscr{A}^0 = \{\emptyset\}$ ist **neutral**, denn $e * u = u * e = u$.

$$\mathscr{A}^* := \textstyle\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{A}^n, \qquad * : \mathscr{A}^* \times \mathscr{A}^* \to \mathscr{A}^* : (u, v) \mapsto w = uv$$

Wir erhalten so das **freie Monoid** $(\mathscr{A}^*, *, e)$ über dem Alphabet $\mathscr{A}$. (Y1B)
Beispiel: Über dem Alphabet $\mathscr{A} = \{\mathtt{a}, \dots, \mathtt{z}\}$ gilt $\mathtt{toto} \neq \mathtt{otto}$ in $\mathscr{A}^4 \subset \mathscr{A}^*$.

Wörter $\mathscr{A}^*$ über einem Alphabet $\mathscr{A}$

Wir betrachten die natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ in von Neumanns Modell:
$0 = \{\,\}$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, ..., $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, ...
Somit ist $\mathscr{A}^n = \{\, w : n \to \mathscr{A} \}$ die Menge aller Abbildungen $w : n \to \mathscr{A}$.
Das einzige Wort der Länge 0 ist demnach das leere Wort $e : \emptyset \to \mathscr{A}$.

Beispiele: Der allseits beliebte euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ beruht auf der Menge aller n–Tupel $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ reeller Zahlen $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$.
Die übliche Indizierung $0, 1, \dots, n-1$ in der Informatik und $1, 2, \dots, n$ in der Mathematik sind äquivalent durch die kanonische Umnummerierung.

Die Folgenmenge $\mathscr{A}^\mathbb{N} = \{\, w : \mathbb{N} \to \mathscr{A} : k \mapsto w_k \,\}$ besteht dementsprechend aus allen unendlichen Wörten, üblicherweise heißen sie Folgen $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
Hierauf operiert das freie Monoid $(\mathscr{A}^*, *, e)$ durch Verknüpfung von links.

Den Folgenraum $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ kennen Sie prominent aus der Analysis.
Die Räume $\mathbb{R}^\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{C}^\mathbb{Z}$ bestehen aus beidseitig unendlichen Folgen, diese nutzen Sie dankend für Fourier–Reihen und Laurent–Reihen.

? Können wir die Konstruktion von $\mathscr{A}^*$ auch linear ausführen? O ja!

Vom mehrfachen Tensorprodukt zur Tensorpotenz $T^k(V)$

Sei $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{F}_q, \dots$ ein Ring und ${}_RV_R$ ein (R, R)–linearer Raum.
Zu jeder Länge $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die n-fache Tensorpotenz durch

$$\boxed{T^n_R(V) := V^{\otimes n} = \textstyle\bigotimes_{i<n} V \;=\; {}_RV_R \otimes {}_RV_R \otimes \dots \otimes {}_RV_R}$$

Darauf haben wir das Produkt $\mu : T^k \times T^\ell \to T^{k+\ell} : (u, v) \mapsto w = u \cdot v$ mit

$$\underbrace{(u_0 \otimes \dots \otimes u_{k-1})}_{= u \in T^k} \cdot \underbrace{(v_0 \otimes \dots \otimes v_{\ell-1})}_{= v \in T^\ell} \;=\; \underbrace{u_0 \otimes \dots \otimes u_{k-1} \otimes v_0 \otimes \dots \otimes v_{\ell-1}}_{= u \cdot v =: w \in T^{k+\ell}}.$$

Ausgeschrieben: Das Produkt $w = u \cdot v$ von $u = \bigotimes_{i<k} u_i$ und $v = \bigotimes_{i<\ell} v_i$ ist somit $w = \bigotimes_{i<k+\ell} w_i$ mit $w_i = u_i$ für $i < k$ und $w_{k+i} = v_i$ für $i < \ell$.
Für $T^0 := R$ ist $\mu : T^0 \times T^\ell \to T^\ell$ und $\mu : T^k \times T^0 \to T^k$ die Skalierung.

Wiederholung: Dies ist tatsächlich ein Produkt, also (R, R, R)–bilinear.
Dank UAE X2A faktorisiert μ demnach zu $\bar\mu : T^k \otimes T^\ell \to T^{k+\ell}$ mit

$$(u_1 \otimes \dots \otimes u_k) \otimes (v_1 \otimes \dots \otimes v_\ell) \mapsto u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_\ell.$$

Das ähnelt der Verknüpfung von Wörtern, hier nun multilinear!

Von der Tensorpotenz $T^k(V)$ zum Tensorring $T(V)$

Unser Produkt μ ist **assoziativ**, denn $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$ in $T^{k+\ell+m}$.

$$\begin{tikzcd}
(T^k \times T^\ell) \times T^m \arrow[d, "\mu \times \mathrm{id}"'] & T^k \times T^\ell \times T^m \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, bend left] & T^k \times (T^\ell \times T^m) \arrow[d, "\mathrm{id} \times \mu"] \\
T^{k+\ell} \times T^m \arrow[r, "\mu"] & T^{k+\ell+m} & T^k \times T^{\ell+m} \arrow[l, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

Wir haben $T^n = V^{\otimes n}$ mit $T^1 = V$ und $T^0 = R$. Alle zusammengefasst:

$$\boxed{T(V) := \textstyle\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} T^n(V) \;=\; \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bigotimes_{i<n} V}$$

Also $T(V) = R \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V \otimes V) \dots$.
Unser Produkt μ setzt sich auf T über R bilinear fort zu $\mu : T \times T \to T$.

$$\begin{tikzcd}
(T \times T) \times T \arrow[d, "\mu \times \mathrm{id}"'] & T \times T \times T \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, bend left] & T \times (T \times T) \arrow[d, "\mathrm{id} \times \mu"] \\
T \times T \arrow[r, "\mu"] & T & T \times T \arrow[l, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

Übung: Können wir in obigen Diagrammen von „$\times$“ zu „$\otimes$“ übergehen?

Von der Tensorpotenz $T^k(V)$ zum Tensorring $T(V)$

Wir identifizieren $v \in V$ mit $\iota(v) = (0, v, 0, \dots) \in T$ und schreiben $V \subseteq T$.
Wir identifizieren $r \in R$ mit $\eta(r) = (r, 0, 0, \dots) \in T$ und schreiben $R \subseteq T$.
Für $R = T^0 \subseteq T$ ist $\mu : T^0 \times T \to T$ und $\mu : T \times T^0 \to T$ die Skalierung:

$$\begin{tikzcd}
 & T \times T \arrow[d, "\mu"] & \\
R \times T \arrow[ur, "\eta\times\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\lambda:(r,w)\mapsto rw"'] & & T \times R \arrow[ul, "\mathrm{id}\times\eta"'] \arrow[dl, "\rho:(w,r)\mapsto wr"] \\
 & T &
\end{tikzcd}$$

Das Einselement $1 \in R = T^0 \overset{\eta}{\hookrightarrow} T$ ist **neutral**, denn $1 \cdot u = u \cdot 1 = u$.

Basisbeispiel X2P: $V = \langle \mathscr{A} \rangle_R^! \implies T^n = \langle \mathscr{A}^n \rangle_R^! \implies T = \langle \mathscr{A}^* \rangle_R^!$.

☺ Hat $V = \langle \mathscr{A} \rangle_R^!$ die R–Basis $\mathscr{A}$, so hat $T^k = V^{\otimes k}$ die R–Basis $\mathscr{A}^k$, also $T = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V^{\otimes n}$ die R–Basis $\mathscr{A}^* = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{A}^n$ (zentral X2J, allgemein X2P).

☺ Bemerkenswert: Diese Basis $\mathscr{A}^* \subseteq T$ ist multiplikativ abgeschlossen. Entgegen unserer sonstigen Gewohnheit ist die Basis hier keine Familie, sondern eine Teilmenge in V. Das ist für unsere Rechnungen bequemer.

Beispiele zum Tensorring $T(V)$

Beispiel: Für $V = \{0\}$ ist der Tensorring $T(V) = R$ nur der Grundring. Das entspricht dem obigen Basisbeispiel mit $\mathscr{A} = \emptyset$ und somit $\mathscr{A}^* = \{1\}$. Sprachlos: Das leere Alphabet erlaubt genau ein Wort, nämlich das leere!

Beispiel: Aus $V = R$ folgt $T^2 = R \otimes R \cong R$, somit $T^n \cong R$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Tensorring $T(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R = R^{(\mathbb{N})} = R[X]$ ist der Polynomring! Noch suggestiver ist $V = \langle X \rangle_R^!$ mit einelementiger Basis $\mathscr{A} = \{X\}$ wie im obigen Basisbeispiel. Dann gilt $T^n = \langle X^n \rangle_R^!$ und $T = \langle X^n \mid n \in \mathbb{N} \rangle_R^!$.

Beispiel: Sei $V = \langle \mathscr{A} \rangle_R^!$ mit $\mathscr{A} = \{\mathtt{a}, \dots, \mathtt{z}\}$ wie im obigen Basisbeispiel. Wir rechnen im Tensorring $T = T(V)$ über $\mathbb{Z}$ bezüglich der Basis $\mathscr{A}^*$:

$$\begin{aligned}
(\mathtt{ho})^3 &= \mathtt{hohoho} \neq \mathtt{ohohoh} = (\mathtt{oh})^3 \\
(\mathtt{to} + \mathtt{ot})^2 &= \mathtt{toto} + \mathtt{toot} + \mathtt{otto} + \mathtt{otot} \\
(\mathtt{klim} - \mathtt{bim})(\mathtt{klim} + \mathtt{bim}) &= \mathtt{klimklim} + \mathtt{klimbim} - \mathtt{bimklim} - \mathtt{bimbim}
\end{aligned}$$

Übung: Erfinden Sie selbst möglichst diverse und amüsante Beispiele.

L „Im freien Monoid $(\mathscr{A}^*, *, e)$ arbeiten wir schon seit der Grundschule, nun auch im davon aufgespannten R–linearen Raum.“ Richtig, genau so!

Die universelle Abbildungseigenschaft des Tensorrings $T(V)$

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, hook, "\eta=\mathrm{inc}_R^T"] \arrow[dr, "\tilde\eta"'] & T(V) \arrow[d, dashed, "\exists! f"'] & V \arrow[l, hook', "\iota=\mathrm{inc}_V^T"'] \arrow[dl, "\tilde\iota"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Satz Y1A: Der Tensorring $T = T(V)$ ist der freie Ring zu V über R.

(0) Zu jedem Bimodul V über dem Ring R ist $(T, \cdot, 1, \eta, \iota)$ ein Ring $(T, \cdot, 1)$ mit Ringhomomorphismus $\eta : R \hookrightarrow T$ und (R, R)–linearer Einbettung $\iota : V \hookrightarrow T$. Dieser hat die folgende universelle Eigenschaft (UAE):

(1) Sei $(A, \cdot, 1, \tilde\eta, \tilde\iota)$ ein Ring $(A, \cdot, 1)$ mit Ringhomomorphismus $\tilde\eta : R \to A$ und (R, R)–linearer Abbildung $\tilde\iota : V \to A$. Dank $\tilde\eta$ wird A ein Bimodul; für $v \in V$ und $r \in R$ gilt $\tilde\iota(rv) = \tilde\eta(r)\tilde\iota(v)$ und $\tilde\iota(vr) = \tilde\iota(v)\tilde\eta(r)$. Es existiert genau ein Ringhomomorphismus $f : T \to A$ mit $f \circ \eta = \tilde\eta$ und $f \circ \iota = \tilde\iota$, nämlich

$$f(r \cdot v_1 \cdots v_k) = \tilde\eta(r) \cdot \tilde\iota(v_1) \cdots \tilde\iota(v_n).$$

Wir nennen daher $(T(V), \cdot, 1, \eta, \iota)$ den **freien Ring** zu V über R.

Die universelle Abbildungseigenschaft des Tensorrings $T(V)$

☺ Für $V = \langle X \rangle_R^!$ erhalten wir den Polynomring $T = R[X]$ und die UAE ist der Einsetzungshomomorphismus K3D. Für $V = \langle X_1, \dots, X_n \rangle_R^!$ ist T der Polynomring in den nicht-kommutierenden Variablen $X_1, \dots, X_n$.

Aufgabe: Was genau ist für Satz Y1A zu zeigen? Zeigen Sie es!

Beweis: Aussage (0) fasst unsere vorige Konstruktion zusammen.

(1a) *Eindeutigkeit:* Jede zwei solche Ringhomomorphismen $f, f' : T \to A$ sind gleich auf R dank $f\eta = \tilde\eta = f'\eta$ und auf V dank $f\iota = \tilde\iota = f'\iota$, per Induktion multiplikativ auf T^n und additiv auf $T = \bigoplus_n T^n$.

(1b) *Existenz:* Zunächst haben wir die Abbildung

$$g^n : R \times V^n \to A : (r, v_1, \dots, v_k) \mapsto \tilde\eta(r) \cdot \tilde\iota(v_1) \cdot \ldots \cdot \tilde\iota(v_n).$$

Nach Voraussetzung ist g multilinear, das heißt an jeder Stelle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ additiv und R–homogen gemäß Definition X2H. Dank UAE X2I erhalten wir $f^n : T^n \cong R \otimes V^{\otimes n} \to A$ und daraus $f : T = \bigoplus_n T^n \to A$. Dies erfüllt $f \circ \eta = \tilde\eta$ und $f \circ \iota = \tilde\iota$ und ist tatsächlich ein Ringhomomorphismus, wie gefordert. QED

Was noch nicht kommutativ ist, wird kommutativ gemacht.

Über dem Alphabet $\mathscr{A}$ haben wir das freie Monoid $(\mathscr{A}^*, *, e) = [\mathscr{A} \mid -]$:

$$\mathscr{A}^* = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{A}^n, \qquad * : \mathscr{A}^* \times \mathscr{A}^* \to \mathscr{A}^* : (u, v) \mapsto uv, \qquad e = ()$$

Dieses Monoid wird erzeugt von $\mathscr{A}$, zudem frei, also ohne Relationen.
Es ist nicht kommutativ, zum Beispiel gilt $\texttt{toto} \neq \texttt{otto}$ für $\texttt{t} \neq \texttt{o}$ in $\mathscr{A}$.
Auf $\mathscr{A}^n$ operiert die symmetrische Gruppe S_n durch Umsortieren.
Explizit ausgeschrieben bedeutet das $\mathscr{A}^n \overset{\circ}{\curvearrowleft} \mathrm{S}_n$ mit $(w, \tau) \mapsto w \circ \tau$.
Umsortieren erzeugt die (gemäß J3G zugehörige) Äquivalenzrelation

$$u_1 u_2 \cdots u_n \equiv u_{\tau 1} u_{\tau 2} \cdots u_{\tau n} \quad \text{für} \quad \tau \in \mathrm{S}_n\,.$$

Als Quotient erhalten wir das **freie kommutative Monoid** $(\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}, \cdot, 1)$ mit

$$\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}} := \mathscr{A}^*/_{\equiv} = [\,\mathscr{A} \mid uv = vu : u, v \in \mathscr{A}\,]$$

Die Komposition $\iota : \mathscr{A} \hookrightarrow \mathscr{A}^* \twoheadrightarrow \mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}} : a \mapsto [a] = \{a\}$ ist demnach injektiv.
Bequeme Konvention: Wir identifizieren Buchstaben $a \in \mathscr{A}$ mit $[a]$ in $\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}$.
So wird $\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}$ von $\mathscr{A}$ erzeugt und zwar frei kommutativ im Sinne von Y1C.

Die universelle Eigenschaft des Monoids $\mathscr{A}^*$

Aufgabe: Was bedeutet „$(\mathscr{A}^*, *, e)$ ist das **freie Monoid**“? Formulieren und beweisen Sie dies nach dem Vorbild von Satz Y1A zum Tensorring.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, hook, "\iota = \mathrm{inc}"] \arrow[dr, "\tilde\iota"'] & \mathscr{A}^* \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Satz Y1B: $(\mathscr{A}^*, *, e)$ ist das freie Monoid über dem Alphabet $\mathscr{A}$

(0) Zur Menge $\mathscr{A}$ ist $(\mathscr{A}^*, *, e, \iota)$ ein Monoid $(\mathscr{A}^*, *, e)$ mit Einbettung $\iota : \mathscr{A} \hookrightarrow \mathscr{A}^*$. Dieses hat die folgende universelle Eigenschaft (UAE):

(1) Sei $(M, \cdot, 1, \tilde\iota)$ ein Monoid $(M, \cdot, 1)$ mit einer Abbildung $\tilde\iota : \mathscr{A} \to M$. Dazu existiert genau ein Monoidhomomorphismus $f : \mathscr{A}^* \to M$ mit $f \circ \iota = \tilde\iota$, nämlich $f(a_1 \cdots a_n) = \tilde\iota(a_1) \cdots \tilde\iota(a_n)$ für alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathscr{A}$.

Wir nennen daher $(\mathscr{A}^*, *, e, \iota)$ das **freie Monoid** über $\mathscr{A}$.

Beweis als Übung zur Wiederholung: Dies folgt „nach Konstruktion“.

Konstruktion des kommutativen Monoids $\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}$

Aufgabe: Wie wird die Menge $\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}$ kanonisch zum Monoid $(\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}, \cdot, 1)$?

Lösung: Wir nutzen den Quotienten $q : \mathscr{A}^* \twoheadrightarrow \mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}} : w \mapsto [w]$ modulo Umsortieren. Es gibt auf $\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}$ genau eine Monoidstruktur $(\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}, \cdot, 1)$, für die q ein Monoidhomomorphismus ist, $q : (\mathscr{A}^*, *, 1) \twoheadrightarrow (\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}, \cdot, 1)$.

Eindeutigkeit ist klar, denn q ist surjektiv. *Existenz* zeigen wir durch Konstruktion: Aus $u \equiv u'$ und $v \equiv v'$ folgt $u * v \equiv u' * v'$. (Warum?)
Somit erhalten wir auf $\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}$ die (wohldefinierte!) Verknüpfung

$$\cdot : \mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}} \times \mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}} \to \mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}} : [u] \cdot [v] := [u * v].$$

Die Assoziativität vererbt sich über $q : (\mathscr{A}^*, *) \twoheadrightarrow (\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}, \cdot)$:

$$([u] \cdot [v]) \cdot [w] \overset{\text{Def}}{=} [(u * v) * w] \overset{\text{Ass}}{=} [u * (v * w)] \overset{\text{Def}}{=} [u] \cdot ([v] \cdot [w])$$

Ebenso folgt, dass $1 = [e]$ in $(\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}, \cdot)$ beidseitig neutral ist:

$$[e] \cdot [u] \overset{\text{Def}}{=} [e * u] \overset{\text{Ntr}}{=} [u] \quad \text{und} \quad [u] \cdot [e] \overset{\text{Def}}{=} [u * e] \overset{\text{Ntr}}{=} [u]$$

Wir erhalten so das ersehnte kommutative Monoid $(\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}, \cdot, 1)$. QED

Die universelle Eigenschaft des CMonoids $\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}$

Aufgabe: Was bedeutet „$(\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}, \cdot, 1)$ ist das **freie kommutative Monoid**“? Formulieren und beweisen Sie dies nach dem Vorbild von Satz Y1B.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, hook, "\iota = q \circ \mathrm{inc}"] \arrow[dr, "\tilde\iota"'] & \mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}} \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Satz Y1C: $(\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}, \cdot, 1)$ ist das freie CMonoid über dem Alphabet $\mathscr{A}$

(0) Zur Menge $\mathscr{A}$ ist $(\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}, \cdot, 1, \iota)$ ein CMonoid $(\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}, \cdot, 1)$ mit Einbettung $\iota : \mathscr{A} \hookrightarrow \mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}$. Dieses hat die folgende universelle Eigenschaft (UAE):

(1) Sei $(M, \cdot, 1, \tilde\iota)$ ein CMonoid $(M, \cdot, 1)$ mit einer Abbildung $\tilde\iota : \mathscr{A} \to M$. Dazu existiert genau ein CMonoidhomomorphismus $f : \mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}} \to M$ mit $f \circ \iota = \tilde\iota$, nämlich $f(a_1 \cdots a_n) = \tilde\iota(a_1) \cdots \tilde\iota(a_n)$ für alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathscr{A}$.

Wir nennen daher $(\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}, \cdot, 1, \iota)$ das **freie CMonoid** über $\mathscr{A}$.

Beweis als Übung zur Wiederholung: Dies folgt „nach Konstruktion“.

Was noch nicht kommutativ ist, wird kommutativ gemacht.

Beispiel: Wir rechnen in $\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}$ über $\mathscr{A} = \{\mathtt{a}, \dots, \mathtt{z}\}$:

$$(\mathtt{ho})^3 = \mathtt{hohoho} = \mathtt{ohohoh} = \mathtt{h}^3\mathtt{o}^3 \quad \neq \quad (\mathtt{oho})^2 = \mathtt{h}^2\mathtt{o}^4$$

$$\mathtt{lampe} = \mathtt{ampel}, \quad \mathtt{salat} = \mathtt{atlas} = \mathtt{a}^2\mathtt{lst}, \quad \mathtt{tomaten} = \mathtt{atemnot}$$

Ein **Anagramm** (gr. ἀνάγραμμα) ist ein Wortpaar, das durch Permutation der Buchstaben ineinander übergeht. Im Alltag betrachtet man dabei nur sinnvolle Wörter, etwa gemäß eines Wörterbuches. Wir erlauben hier alle Wörter. Das entspricht genau dem Quotienten von $\mathscr{A}^*$ zu $\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}$.

⚠ Formal korrekt ist $\mathtt{salat} \equiv \mathtt{atlas}$ in $\mathscr{A}^*$ und $[\mathtt{salat}] = [\mathtt{atlas}]$ in $\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}$. Bequem abkürzend schreiben wir $\mathtt{salat} = \mathtt{atlas}$ im Monoid $(\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}, \cdot, 1)$. Prüfen und erklären Sie kritisch, welche Interpretation das begründet.

☺ Die Komposition $\iota : \mathscr{A} \hookrightarrow \mathscr{A}^* \twoheadrightarrow \mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}} : a \mapsto [a] = \{a\}$ ist injektiv. Bequeme Konvention: Wir identifizieren Buchstaben $a \in \mathscr{A}$ mit $[a]$ in $\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}$. So wird $\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}$ von $\mathscr{A}$ erzeugt und zwar frei kommutativ (im Sinne von Y1C). Dank dieser Lesart gilt tatsächlich $\mathtt{salat} = \mathtt{atlas}$ im Monoid $(\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}, \cdot, 1)$.

Was noch nicht kommutativ ist, wird kommutativ gemacht.

☺ In $\mathscr{A}^*$ können wir „freie“ Wörter $u = (u_1, \dots, u_k)$ und $v = (v_1, \dots, v_\ell)$ leicht vergleichen: **Gleichheit** $u = v$ gilt genau dann, wenn beide Wörter dieselbe Länge $k = \ell$ haben und zudem buchstabenweise gleich sind, also $u_i = v_i$ gilt für alle $i \in \{1, \dots, k\}$. Ist zudem das Alphabet $(\mathscr{A}, \leq)$ geordnet, etwa $\mathscr{A} = \{\mathtt{a} < \dots < \mathtt{z} < \mathtt{A} < \dots < \mathtt{Z} < \dots\}$, so können wir die Menge $\mathscr{A}^*$ **lexikographisch ordnen** durch $u < v$ gdw $k < \ell$ oder (((es gilt $k = \ell$ und $u_1 = v_1, \dots, u_{i-1} = v_{i-1}, u_i < v_i$ für eine Stelle $i \in \{1, \dots, k\}$)))).

Aufgabe: Wie vergleichen Sie „kommutative“ Wörter in $\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}$? effizient?

Methode 1: Sortieren! Wir ordnen unser Alphabet $(\mathscr{A}, \leq)$ und damit alle Wörter $(\mathscr{A}^*, \leq)$ lexikographisch wie oben. Jede Äquivalenzklasse $[u] \subseteq \mathscr{A}^*$ hat dann einen kleinsten Repräsentanten $m = \min[u]$. (Warum?) Diesen finden wir, indem wir die Buchstaben des Wortes u aufsteigend sortieren. Beispiel: Der minimale Repräsentant von $w = [\mathtt{salat}]$ ist $\min w = \mathtt{aalst}$.

☺ Somit gilt $[u] = [v]$ gdw $\min[u] = \min[v]$. Das ist leicht zu prüfen!

☺ Zudem können wir $[u] < [v]$ definieren durch $\min[u] < \min[v]$.

Was noch nicht kommutativ ist, wird kommutativ gemacht.

Beispiel: Über dem Alphabet $\mathscr{A} = \{\mathtt{a} < \dots < \mathtt{z} < \dots\}$ finden wir

$$\text{in } \mathscr{A}^*: \quad \mathtt{drei} < \mathtt{eins} < \mathtt{null} < \mathtt{vier} < \mathtt{zwei},$$

$$\text{in } \mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}: \quad [\mathtt{drei}] < [\mathtt{eins}] < [\mathtt{vier}] < [\mathtt{zwei}] < [\mathtt{null}].$$

Methode 2: Zählen! In dem Wort $[u] \in \mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}$ zählen wir die Buchstaben:

$$\Psi : \mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}} \to \mathbb{N}^{(\mathscr{A})} : [u] \mapsto n := (n_a = \sharp\{\, i \mid u_i = a \,\})_{a \in \mathscr{A}}$$

Das ist wohldefiniert, denn jede Permutation $u \mapsto u \circ \tau$ liefert eine Bijektion $\{\, i \mid u_i = a \,\} \cong \{\, j \mid u_{\tau j} = a \,\}$: Die Elementezahl bleibt gleich!

☺ Wortgleichheit $[u] = [v]$ ist äquivalent zu Zählgleichheit $\Psi(u) = \Psi(v)$. Das ist besonders leicht. Dahinter steckt der Monoidisomorphismus

$$(\Phi, \Psi) : (\mathbb{N}^{(\mathscr{A})}, +, 0) \cong (\mathscr{A}^*_{\mathrm{ab}}, \cdot, 1) : n = (n_a)_{a \in \mathscr{A}} \mapsto \textstyle\prod_{a \in \mathscr{A}} a^{n_a}.$$

Übung: Warum ist Φ wohldefiniert? $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$? $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$? Sortieren! *Algorithmic fun fact:* Sortieren kostet $O(n \log n)$, doch Zählen nur $O(n)$?

Was noch nicht kommutativ ist, wird kommutativ gemacht.

Wiederholung: Der Fundamentalsatz der Arithmetik (B3J/B3K) besagt:

$$\boxed{(\mathbb{N}_{\geq 1}, \cdot, 1) \cong (\mathbb{P}^*_{\mathrm{ab}}, \cdot, 1)}$$

Das linke Monoid ist konkret, aber schwierig, das rechte viel leichter!

Aufgabe: Nennen und begründen Sie den kanonischen Isomorphismus.

Im Monoid $(\mathbb{N}_{\geq 1}, \cdot, 1)$ sei $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ die Menge der Primzahlen.

(0) Zu jeder endlich getragenen Folge $e : \mathbb{P} \to \mathbb{N}$ haben wir das Produkt

$$\nu = (\nu_p)_{p \in \mathbb{P}} = (\nu_2, \nu_3, \nu_5, \dots) \quad \mapsto \quad a = \textstyle\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p} = 2^{\nu_2}\, 3^{\nu_3}\, 5^{\nu_5} \cdots.$$

(1) Wir erhalten so die Bijektion oder besser: den Monoidisomorphismus

$$\Phi : (\mathbb{N}^{(\mathbb{P})}, +, 0) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{N}_{>1}, \cdot, 1) : \nu \mapsto \textstyle\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p}.$$

(2) Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn das Zielmonoid $(\mathbb{P}^*_{\mathrm{ab}}, \cdot, 1)$ ist kommutativ. Sie ist surjektiv / bijektiv, denn jede natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ erlaubt mindestens / genau eine Darstellung als Produkt von Primzahlen.

Konstruktion der symmetrischen Algebra $S(V)$

Sei R ein kommutativer Ring, darüber V ein zentraler R–linearer Raum.

⚠ Der Tensorring $T(V)$ ist i.A. nicht kommutativ: $u_1 \otimes u_2 \neq u_2 \otimes u_1$.

Wir erzwingen Kommutation in T^2 durch folgende Relationen:

$$\mathfrak{c}_2 = \langle u_1 \otimes u_2 - u_2 \otimes u_1 \mid u_1, u_2 \in V \rangle_R \leq V \otimes V = T^2 \subseteq T$$

Ebenso erzwingen wir Kommutation in T^n durch folgende Relationen:

$$\mathfrak{c}_n = \langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_n - u_{\tau 1} \otimes \cdots \otimes u_{\tau n} \mid u_1, \dots, u_n \in V,\ \tau \in S_n \rangle_R$$

Im Quotientenraum $S^n = T^n / \mathfrak{c}_n$ gilt $[u_1 \otimes \cdots \otimes u_n] = [u_{\tau 1} \otimes \cdots \otimes u_{\tau n}]$.

Die Summe $\mathfrak{c} := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{c}_n \trianglelefteq T$ ist ein Ideal (L3G) in unserem Tensorring T.

Erinnerung: Ideal $\mathfrak{c} \trianglelefteq T$ bedeutet $0 \in \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{c}$ und $T \cdot \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{c} \supseteq \mathfrak{c} \cdot T$.

Der Quotient ist die **symmetrische Algebra** $S(V)$ zu V über R:

$$\boxed{S(V) := T(V)/\mathfrak{c} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S^n(V)}$$

Dies ist ein Ring dank Satz L3G, zudem kommutativ wie gewünscht.

Konstruktion der symmetrischen Algebra $S(V)$

Der Tensorring $T = T(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n}$ ist **graduiert** über $(\mathbb{N}, +, 0)$:
Jedes Element $t \in T$ können wir eindeutig zerlegen als die Summe $t = \sum_{n \in \mathbb{N}} t_n$ seiner **homogenen Summanden** $t_n \in V^{\otimes n}$ vom Grad n.
Die Multiplikation respektiert die Graduierung gemäß $T^k \cdot T^\ell \subseteq T^{k+\ell}$.

Beispiel: Jedes Polynom $t \in R[X] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \langle X^n \rangle_R^!$ ist die Summe $t = \sum_{n \in \mathbb{N}} t_n$ seiner Monome $t_n = r_n X^n$ und $r_k X^k \cdot s_\ell X^\ell = r_k s_\ell X^{k+\ell}$.

Lemma Y1D: Das Ideal $\mathfrak{c} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{c}_n \trianglelefteq T$ wird erzeugt von $\mathfrak{c}_2$.

Das Ideal $\mathfrak{c} \trianglelefteq T$ wird von $\mathfrak{c}_2 \leq T^2$ erzeugt. Insbesondere gilt $\mathfrak{c}_0 = \mathfrak{c}_1 = 0$.
Demnach sind $\eta : R \hookrightarrow T(V) \twoheadrightarrow S(V)$ und $\iota : V \hookrightarrow T(V) \twoheadrightarrow S(V)$ injektiv.
Zudem ist der Quotient $S(V) = T(V)/\mathfrak{c} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S^n(V)$ selbst graduiert.

Beweis: Die Inklusion $\mathfrak{c} \supseteq (\mathfrak{c}_2)$ ist klar, denn $\mathfrak{c}$ ist ein Ideal und enthält $\mathfrak{c}_2$.
Wir zeigen die Umkehrung $\mathfrak{c} \subseteq (\mathfrak{c}_2)$. Im Ideal $(\mathfrak{c}_2) \trianglelefteq T$ liegen alle Elemente der Form $u_1 \cdots u_{\ell-1}(u_\ell u_{\ell+1} - u_{\ell+1} u_\ell) u_{\ell+2} \cdots u_n$. Jede Permutation wird von elementaren Transpositionen erzeugt (O1E). Daher gilt $\mathfrak{c} \subseteq (\mathfrak{c}_2)$.
Die weiteren Aussagen sind klar. QED

Die universelle Eigenschaft der symmetrischen Algebra $S(V)$

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, hook, "\eta = \mathrm{inc}_R^S"] \arrow[dr, "\tilde{\eta}"'] & S(V) \arrow[d, dashed, "\exists! f"'] & V \arrow[l, hook', "\iota = \mathrm{inc}_V^S"'] \arrow[dl, "\tilde{\iota}"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Satz Y1E: Die sym. Algebra $S = S(V)$ ist der freie CRing zu V über R.

(0) Zu jedem zentralen Bimodul V über dem kommutativen Ring R ist $(S, \cdot, 1, \eta, \iota)$ ein CRing $(S, \cdot, 1)$ mit CRinghomomorphismus $\eta : R \hookrightarrow S$ und R–linearer Einbettung $\iota : V \hookrightarrow S$. Dieser hat folgende UAE:

(1) Sei $(A, \cdot, 1, \tilde{\eta}, \tilde{\iota})$ ein CRing $(A, \cdot, 1)$ mit Ringhomomorphismus $\tilde{\eta} : R \to A$ und R–linearer Abbildung $\tilde{\iota} : V \to A$. Dank $\tilde{\eta}$ wird auch A ein zentraler R–Bimodul; für $v \in V$ und $r \in R$ gilt also $\tilde{\iota}(rv) = \tilde{\eta}(r)\tilde{\iota}(v)$. Dazu existiert genau ein CRinghomomorphismus $f : S \to A$ mit $f \circ \eta = \tilde{\eta}$ und $f \circ \iota = \tilde{\iota}$, nämlich

$$f(r \cdot v_1 \cdots v_k) = \tilde{\eta}(r) \cdot \tilde{\iota}(v_1) \cdots \tilde{\iota}(v_n).$$

Wir nennen daher $(S(V), \cdot, 1, \eta, \iota)$ den **freien CRing** zu V über R.

Die universelle Eigenschaft der symmetrischen Algebra $S(V)$

Aufgabe: Was genau ist für Satz Y1E zu zeigen? Zeigen Sie es!
Wie nutzen Sie geschickt den Tensorring $T = T(V)$ und seine UAE Y1A?

Beweis: Aussage (0) fasst unsere vorige Konstruktion zusammen.

(1a) *Eindeutigkeit:* Jede zwei solche Ringhomomorphismen $f, f' : S \to A$ sind gleich auf R dank $f\eta = \tilde{\eta} = f'\eta$ und auf V dank $f\iota = \tilde{\iota} = f'\iota$, per Induktion multiplikativ auf S^n und additiv auf $S = \bigoplus_n S^n$.

(1b) *Existenz:* Es existiert genau ein Ringhomomorphismus $g : T \to A$ mit $g\eta_T = \tilde{\eta}$ und $g\iota_T = \tilde{\iota}$ dank Satz Y1A. Mit A kommutativ folgt $\mathrm{Ker}(g) \supseteq \mathfrak{c}$. Somit induziert $g : T \to A$ auf dem Quotienten $S = T/\mathfrak{c}$ den ersehnten Ringhomomorphismus $f : S = T/\mathfrak{c} \to A$. Dieser erfüllt $f \circ \eta_S = \tilde{\eta}$ und $f \circ \iota_S = \tilde{\iota}$ nach Konstruktion. QED

☺ Die Konstruktion des Tensorrings $T(V)$ und daraus $S(V) = T(V)/\mathfrak{c}$ ist eine wunderschöne Übung der bisherigen Begriffe: linearer Raum, Ring, Tensorprodukt, Quotient, UAE, uvm. Es schadet dabei gar nicht, dass wir das Endergebnis schon kennen, zumindest im basierten Fall, im Gegenteil verknüpfen sich so das schwierig Neue und das altbekannt Vertraute.

Polynome als vertrautes Beispiel

Basisbeispiel: $V = \langle \mathscr{A} \rangle_R^! \implies S^n = \langle \mathscr{A}_{\text{ab}}^n \rangle_R^! \implies S = \langle \mathscr{A}_{\text{ab}}^* \rangle_R^! = R[\mathscr{A}]$.

(1) Für $V = \langle X \rangle_R^!$ erhalten wir den Polynomring $T(V) = S(V) = R[X]$ und die UAE ist der vertraute Einsetzungshomomorphismus K3D.

(2) Für $V = \langle X_1, \dots, X_n \rangle_R^!$ ist $S = R[X_1, \dots, X_n]$ der Polynomring über dem CRing R in den (kommutierenden!) Variablen $X_1, \dots, X_n$.

☺ Dahinter steckt die folgende genial-einfache Beobachtung:

Korollar Y1F: Polynomring als symmetrische Algebra

Sei R ein kommutativer Ring und $V = \langle \mathscr{A} \rangle_R^!$ ein R–linearer Raum mit Basis $\mathscr{A} \subseteq V$. Dann gilt $S^n = \langle \mathscr{A}_{\text{ab}}^n \rangle_R^!$ und $S = \langle \mathscr{A}_{\text{ab}}^* \rangle_R^! = R[\mathscr{A}]$ ist der Polynomring über R mit $\mathscr{A}$ als Menge der Variablen.

Beweis: Die symmetrische Algebra $(S, \cdot, 1, \eta, \iota)$ erfüllt die obige UAE Y1E. Der Polynomring $(R[\mathscr{A}], \cdot, 1, \tilde{\eta}, \tilde{\iota})$ ebenso (dank UAE K3D). Das induziert das Isomorphismuspaar $(f, g) : S \cong R[\mathscr{A}]$ mit $f\eta = \tilde{\eta}$ und $f\iota = \tilde{\iota}$. QED

Polynome als vertrautes Beispiel

Aufgabe: Führen Sie dieses Argument sorgsam aus.
(1) Warum erfüllt der Polynomring $(R[\mathscr{A}], \cdot, 1, \tilde{\eta}, \tilde{\iota})$ die obige UAE Y1E?
(2) Wie folgt daraus der ersehnte Isomorphismus $(f, g) : S \cong R[\mathscr{A}]$?
(3) Warum zeigt dies, dass $\mathscr{A}_{\text{ab}}^*$ eine Basis von S ist, wie behauptet?

Lösung: (1) Gegeben sei ein CRinghomomorphismus $\eta : R \to A$. Für den Polynomring $R[\mathscr{A}]$ besagt seine universelle Abbildungseigenschaft K3D aka Einsetzungshomomorphismus: Wir können zu jeder Variable $x \in \mathscr{A}$ ein beliebiges Zielelement $\tilde{\iota}(x) \in A$ vorgeben (aka „einsetzen“) und erhalten so den Ringhomomorphismus $f : R[\mathscr{A}] \to A$ mit $f \circ \iota = \tilde{\iota}$. Dank der Basiseigenschaft $V = \langle \mathscr{A} \rangle_R^!$ nutzen wir zudem das Prinzip der linearen Fortsetzung (PLF N1B). So erhalten wir die obige UAE Y1E.

(2) Erfüllen zwei Objekte die UAE, so sind sie eindeutig isomorph. Das ist ein universeller Trick, siehe Eindeutigkeit des Tensorprodukts (X2D).

(3) Die Basiseigenschaft ist klar für $R[\mathscr{A}] = \langle \mathscr{A}_{\text{ab}}^* \rangle_R^!$, denn so ist der Polynomring konstruiert. Der Isomorphismus $R[\mathscr{A}] \cong S(V)$ zeigt, dass auch das Bild von $\mathscr{A}_{\text{ab}}^*$ in $S(V)$ eine Basis ist.

Polynome als vertrautes Beispiel

Beispiel: Sei $V = \langle \mathscr{A} \rangle_R^!$ mit Basis $\mathscr{A} = \{\mathtt{a}, \dots, \mathtt{z}\}$ etwa über $R = \mathbb{Z}$. Wir rechnen im Tensorring $T = T(V)$ bezüglich der Basis $\mathscr{A}^*$:

$$(\mathtt{ho})^3 = \mathtt{hohoho} \quad \neq \quad \mathtt{ohohoh} = (\mathtt{oh})^3$$

$$\mathtt{lampe} \neq \mathtt{ampel}, \quad \mathtt{salat} \neq \mathtt{atlas} \neq \mathtt{a}^2\mathtt{lst}, \quad \mathtt{tomaten} \neq \mathtt{atemnot}$$

$$(\mathtt{klim} - \mathtt{bim})(\mathtt{klim} + \mathtt{bim}) = \mathtt{klimklim} + \underbrace{\mathtt{klimbim} - \mathtt{bimklim}}_{\neq 0} - \mathtt{bimbim}$$

In der symmetrischen Algebra $S = S(V)$ rechnen wir bezüglich $\mathscr{A}_{\text{ab}}^*$:

$$(\mathtt{ho})^3 = \mathtt{hohoho} = \mathtt{ohohoh} = \mathtt{h}^3\mathtt{o}^3 \quad \neq \quad (\mathtt{oho})^2 = \mathtt{h}^2\mathtt{o}^4$$

$$\mathtt{lampe} = \mathtt{ampel}, \quad \mathtt{salat} = \mathtt{atlas} = \mathtt{a}^2\mathtt{lst}, \quad \mathtt{tomaten} = \mathtt{atemnot}$$

$$(\mathtt{klim} - \mathtt{bim})(\mathtt{klim} + \mathtt{bim}) = (\mathtt{klim})^2 - (\mathtt{bim})^2 = \mathtt{i}^2\mathtt{m}^2(\mathtt{k}^2\mathtt{l}^2 - \mathtt{b}^2)$$

Übung: Erfinden Sie selbst möglichst diverse und amüsante Beispiele.

L „Im freien Monoid $(\mathscr{A}^*, *, e)$ arbeiten wir schon seit der Grundschule, frei kommutativ $(\mathscr{A}_{\text{ab}}^*, \cdot, 1)$ hingegen gilt als Lese-Rechtschreib-Störung.“ Beide Algebren sind nützlich, es kommt ganz auf die Anwendung an!

Polynome als vertrautes Beispiel

☺ Damit schließt sich der Kreis unserer Erzählung zu Polynomen. Wir erkennen nun, dass wir auf zwei Wegen dasselbe Ziel erreichen:

1. **Die Polynomroute:** Über dem Alphabet $\mathscr{A}$ bilden wir Wörter, kurz $\mathscr{A}^*$, und machen diese abelsch, kurz $\mathscr{A}_{\text{ab}}^* = \mathscr{A}^*/_{\equiv}$. Diese nehmen wir als Basis des R–linearen Raums $R[\mathscr{A}] := R\mathscr{A}_{\text{ab}}^* = \langle \mathscr{A}_{\text{ab}}^* \rangle_R^!$ und definieren die Multiplikation als bilineare Fortsetzung der Multiplikation auf $\mathscr{A}_{\text{ab}}^*$.
2. **Die Tensorroute:** Wir nehmen das Alphabet $\mathscr{A}$ zunächst als Basis des R–linearen Raums $V = \langle \mathscr{A} \rangle_R^!$. Daraus bilden wir die Tensoralgebra $T(V)$ und machen diese kommutativ zur symmetrischen Algebra $S(V) = T(V)/\mathfrak{c}$, als Quotient bezüglich des Ideals $\mathfrak{c}$ wie oben erklärt.

Auf beiden Wegen erhalten wir „dasselbe“: eindeutig isomorphe Ringe! War einer der Wege also umsonst? O nein! Polynome liefern uns konkret eine Basis, so können wir wunderbar explizit mit Elementen rechnen. Tensoren hingegen liefern uns abstrakt eine universelle Konstruktion, die wir überall anwenden können, auch über den basierten Fall hinaus. Erfolgreiche, effiziente Mathematik verbindet abstrakt und konkret.

Grassmanns alternierende Algebra $\Lambda(V)$

Sei R ein kommutativer Ring, darüber V ein zentraler R–linearer Raum.

? Wie können wir den Tensorring $T = T(V)$ *antikommutativ* machen? Für alle $u, v \in V$ wollen wir $uv = -vu$ erzwingen. Dazu genügt, dass jedes Quadrat w^2 für $w \in V$ verschwindet, denn damit $uv + vu = (u+v)^2 = 0$.

$$\mathfrak{a}_2 := \langle w \otimes w \mid w \in V \rangle_R \leq V \otimes V = T^2 \subseteq T$$

Ebenso erzwingen wir Alternierung in T^n durch folgende Relationen:

$$\mathfrak{a}_n := \langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \mid u_1, \dots, u_n \in V,\ \exists i \neq j : u_i = u_j \rangle_R$$

Im Quotienten $\Lambda^n = T^n/\mathfrak{a}_n$ gilt $[u_{\tau 1} \otimes \cdots \otimes u_{\tau n}] = [u_1 \otimes \cdots \otimes u_n] \operatorname{sign}(\tau)$.
Die Summe $\mathfrak{a} := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}_n \trianglelefteq T$ ist ein Ideal (L3G) in unserem Tensorring T.
Erinnerung: Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq T$ bedeutet $0 \in \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$ und $T \cdot \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{a} \cdot T$.
Die **alternierende Algebra** $\Lambda(V)$ zu V über R ist der Quotientenring:

$$\boxed{\Lambda(V) := T(V)/\mathfrak{a} = \textstyle\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Lambda^n(V)}$$

Dies ist ein Ring dank Satz L3G, zudem alternierend wie gewünscht.

Grassmanns alternierende Algebra $\Lambda(V)$

Aufgabe: Vergleichen Sie die Konstruktion der alternierenden Algebra $\Lambda(V) = T(V)/\mathfrak{a}$ mit der symmetrischen Algebra $S(V) = T(V)/\mathfrak{c}$.
Zeigen Sie damit nach dem Vorbild von Lemma Y1D:

Lemma Y1G: Das Ideal $\mathfrak{a} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}_n \trianglelefteq T$ wird erzeugt von $\mathfrak{a}_2$.

Das Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq T$ wird von $\mathfrak{a}_2 \leq T^2$ erzeugt. Insbesondere gilt $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_1 = 0$.
Demnach sind $\eta : R \hookrightarrow T(V) \twoheadrightarrow \Lambda(V)$ und $\iota : V \hookrightarrow T(V) \twoheadrightarrow \Lambda(V)$ injektiv.
Zudem ist der Quotient $\Lambda(V) = T(V)/\mathfrak{a} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Lambda^n(V)$ selbst graduiert.

Beweis: Die Inklusion $\mathfrak{a} \supseteq (\mathfrak{a}_2)$ ist klar, denn $\mathfrak{a}$ ist ein Ideal und enthält $\mathfrak{a}_2$.
Wir zeigen die Umkehrung $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a}_2)$. Im Ideal $(\mathfrak{a}_2) \trianglelefteq T$ liegen zunächst alle Elemente der Form $u_1 \cdots u_{\ell-1}(u_\ell u_\ell)u_{\ell+2} \cdots u_n$ mit $u_1, \dots, u_n \in V$, und somit auch $u_1 \cdots u_{\ell-1}(u_\ell u_{\ell+1} + u_{\ell+1} u_\ell)u_{\ell+2} \cdots u_n$. Wir dürfen also zwei benachbarte Elemente tauschen und zugleich das Vorzeichen umklappen. Jede Permutation wird von elementaren Transpositionen erzeugt (O1E). Daher gilt $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a}_2)$. Die weiteren Aussagen sind klar. QED

Grassmanns alternierende Algebra $\Lambda(V)$

Wie oben erinnert, alternierend impliziert immer antisymmetrisch.
In Charaktristik 2 ist antisymmetrisch dasselbe wie symmetrisch, und alternierend ist eine echt stärkere Forderung.

Lemma Y1G: Antisymmetrie

Im Falle $2 \in R^\times$ ist alternierend äquivalent zu antisymmetrisch.
In der obigen Konstruktion erhalten wir damit die Darstellung:

$$\mathfrak{a}_n = \langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_n - \operatorname{sign}(\tau)\, u_{\tau 1} \otimes \cdots \otimes u_{\tau n} \mid u_1, \dots, u_n \in V,\ \tau \in \mathrm{S}_n \rangle_R$$

Aufgabe: Zeigen Sie diese Gleichheit als Fingerübung zur Wiederholung.

Beweis: Die Inklusion „$\supseteq$“ haben wir im vorigen Beweis nachgerechnet.
„$\subseteq$“: Gegeben seien $u_1, \dots, u_n \in V$ und ein Indexpaar $i \neq j$ mit $u_i = u_j$.
Wir setzen $\tau = (i, j) \in S_n$. Dann enthält die rechte Seite $\mathfrak{a}'_n$ die Differenz

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_n - \operatorname{sign}(\tau)\, u_{\tau 1} \otimes \cdots \otimes u_{\tau n} = 2\, u_1 \otimes \cdots \otimes u_n.$$

Nach Division durch 2 folgt $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \in \mathfrak{a}'_n$. Das zeigt $\mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{a}'_n$. QED

Grassmanns alternierende Algebra $\Lambda(V)$

Beispiel: Sei $V = \langle \mathscr{A} \rangle_R^!$ mit Basis $\mathscr{A} = \{\mathtt{a}, \dots, \mathtt{z}\}$.
In der alternierenden Algebra $\Lambda = \Lambda(V)$ über $\mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathtt{lampe} = \mathtt{ampel} = \mathtt{palme} = \mathtt{p} \wedge \mathtt{a} \wedge \mathtt{l} \wedge \mathtt{m} \wedge \mathtt{e} \\
&\mathtt{salat} = \mathtt{atlas} = 0, \quad \mathtt{tomaten} = \mathtt{atemnot} = 0 \\
&\mathtt{gabel} + \mathtt{belag} = 0, \quad \mathtt{kamel} = -\mathtt{makel}, \quad \mathtt{sarg} = \mathtt{gras}
\end{aligned}$$

Anagramme gibt es überraschend viele, also gebräuchliche Wörter gemäß Wörterbuch, die durch eine Permutation ineinander übergehen. Hingegen sind *ungerade* Anagramme nicht ganz so leicht zu finden. Zunächst darf jeder Buchstabe nur einmal auftreten. Zudem muss die (dann eindeutige) Permutation ungerade sein. ChatBots haben damit übrigens derzeit (Stand Sommer 2026) noch arge Schwierigkeiten.

Random fun project: Wenn Sie gerne programmieren, können Sie mal versuchen, eine Liste zu erzeugen und schöne Beispiele zu extrahieren.

? Wie zeigen Sie $\mathtt{gabel} \neq \mathtt{belag}$? und $\mathtt{kamel} \neq \mathtt{makel}$? und $\mathtt{eins} \neq \mathtt{null}$? Durch Koeffizientenvergleich? Wie das? Wir benötigen eine Basis von Λ!

Basis von V und Erzeugung von $\Lambda^k(V)$

Lemma Y1H: ein kanonisches Erzeugendensystem für Λ^k

Habe V die Basis $\mathscr{A} = (v_i)_{i\in I}$ geordnet mit $(I, \leq) \overset{\text{z.B.}}{=} \{1 < \ldots < n\}$.
Dann wird $\Lambda^k(V)$ erzeugt von $v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k}$ mit $i_1 < \ldots < i_k$ in $(I, \leq)$.

Beweis: Die Tensorpotenz $T^k = V^{\otimes k}$ hat die Produktbasis (X1D/X2C)

$$\mathscr{C}^k = (v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_k})_{i\in I^k}.$$

Der Quotient $\Lambda^k = T^k/\mathfrak{a}_k$ wird demnach erzeugt von den Bildern

$$\mathscr{B}^k = (v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k})_{i\in I^k}.$$

Solche mit doppelten Indizes sind 0. Alle anderen können wir sortieren:

$$\boxed{\mathscr{A}^k_< := (v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k})_{i\in I^k_<} \quad \text{mit} \quad I^k_< := \{i \in I^k \mid i_1 < \ldots < i_k\}}$$

Ausführlich gilt $v_{i_{\tau 1}} \wedge \ldots \wedge v_{i_{\tau k}} = v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k} \operatorname{sign}(\tau)$ für alle $\tau \in \mathrm{S}_k$.
Demnach erzeugt $\mathscr{A}^k_<$ alle Elemente von $\mathscr{B}^k$, und somit ganz Λ^k. QED

Die Determinante $\det^{\wedge}_{\mathscr{A}} : \Lambda^n V \to R$

? Als nächstes wollen wir zeigen, dass $\mathscr{A}^k_<$ eine Basis von Λ^k ist.

Sei R ein kommutativer Ring und V ein R–linearer Raum mit endlicher Basis $\mathscr{A} = (v_1, \ldots, v_n)$. Dann existiert genau Abbildung, die **Determinante**

$$\boxed{\det_{\mathscr{A}} : V^n \to R : (u_1, \ldots, u_n) \mapsto \det_{\mathscr{A}}(u_1, \ldots, u_n),}$$

die multilinear, alternierend und normiert ist gemäß $\det_{\mathscr{A}}(v_1, \ldots, v_n) = 1$.
Da sie multilinear ist, induziert sie auf $V^{\otimes n}$ die lineare Abbildung

$$\boxed{\det^{\otimes}_{\mathscr{A}} : V^{\otimes n} \to R : u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \mapsto \det_{\mathscr{A}}(u_1, \ldots, u_n).}$$

Da sie alternierend ist, liegt $\mathfrak{a}_n \leq V^{\otimes n}$ in ihrem Kern.
Auf dem Quotientenraum $\Lambda^n = V^{\otimes n}/\mathfrak{a}_n$ erhalten wir so

$$\boxed{\det^{\wedge}_{\mathscr{A}} : \Lambda^n V \to R : u_1 \wedge \cdots \wedge u_n \mapsto \det_{\mathscr{A}}(u_1, \ldots, u_n).}$$

Dabei gilt $\det^{\wedge}_{\mathscr{A}}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = 1$. Insbesondere folgt $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \neq 0$
Das ist ein erster, entscheidender Schritt zur linearen Unabhängigkeit.

Perfekte Paarung $\Lambda^k \times \Lambda^{n-k} \to R$

Satz Y1I: eine kanonische Basis von Λ^k

Sei $V = \langle \mathscr{A} \rangle^!_R$ ein R–linearer Raum mit Basis $\mathscr{A} = (v_1, \ldots, v_n)$.
(1) Die Determinante induziert den Isomorphismus

$$\boxed{\det^{\wedge}_{\mathscr{A}} : \Lambda^n(V) \xrightarrow{\sim} R.}$$

(2) Für alle $0 \leq k \leq n$ erhalten wir daraus die perfekte Paarung

$$\boxed{\langle \text{-}|\text{-} \rangle : \Lambda^k \times \Lambda^{n-k} \to R : \langle u \,|\, v \rangle = \det^{\wedge}_{\mathscr{A}}(u \wedge v).}$$

(3) Für jede Permutation $\tau \in \mathrm{S}_n$ gilt:

$$\boxed{\langle \underbrace{v_{\tau(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\tau(k)}}_{=:\, v^k_\tau} \,|\, \underbrace{\operatorname{sign}(\tau)\, v_{\tau(k+1)} \wedge \ldots \wedge v_{\tau(n)}}_{=:\, \star v^k_\tau \text{ (Hodge–Stern)}} \rangle = 1}$$

(4) Indiziert mit $\mathrm{Sh}^k_n := \{\tau \in \mathrm{S}_n \mid \tau(1) < \ldots < \tau(k) \wedge \tau(k+1) < \ldots < \tau(n)\}$ sind die Familien $(v^k_\tau)_{\tau\in\mathrm{Sh}^k_n}$ in Λ^k und $(\star v^k_\tau)_{\tau\in\mathrm{Sh}^k_n}$ in Λ^{n-k} dual, also Basen.

Perfekte Paarung $\Lambda^k \times \Lambda^{n-k} \to R$

Beweis: (1) Dank Lemma Y1H wird $\Lambda^n(V)$ erzeugt von $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$, der Homomorphismus $\eta_{\mathscr{A}} : R \twoheadrightarrow \Lambda^n(V) : r \mapsto r\, v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ ist also surjektiv.
Umgekehrt gilt $\det^{\wedge}_{\mathscr{A}}(r\, v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = r$, also $(\det^{\wedge}_{\mathscr{A}}, \eta_{\mathscr{A}}) : \Lambda^n(V) \cong R$.

(2) Die Abbildung $\langle \text{-}|\text{-} \rangle$ ist bilinear. Perfektion folgt aus (4) und W2H.

(3) Die Determinante ist multilinear, alternierend und normiert:

$$\begin{aligned} &\langle v_{\tau(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\tau(k)} \,|\, \operatorname{sign}(\tau)\, v_{\tau(k+1)} \wedge \ldots \wedge v_{\tau(n)} \rangle \\ &= \operatorname{sign}(\tau) \det^{\wedge}_{\mathscr{A}}(v_{\tau(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\tau(n)}) \;=\; 1 \end{aligned}$$

(4) Dank Lemma Y1H gilt Erzeugung $\Lambda^k(V) = \langle v^k_\tau \mid \tau \in \mathrm{Sh}^k_n \rangle_R$ und ebenso $\Lambda^{n-k}(V) = \langle \star v^k_\tau \mid \tau \in \mathrm{Sh}^k_n \rangle_R$. Für je zwei Shuffle $\sigma, \tau \in \mathrm{Sh}^k_n$ finden wir

$$\langle v^k_\sigma \,|\, \star v^k_\tau \rangle = \delta_{\sigma,\tau} := \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma = \tau, \\ 0 & \text{falls } \sigma \neq \tau. \end{cases}$$

Für $\sigma = \tau$ gilt (3). Wie gelingt uns $\sigma \neq \tau$? Aus $\sigma|_{\{1,\ldots,k\}} = \tau|_{\{1,\ldots,k\}}$ folgt $\sigma|_{\{k+1,\ldots,n\}} = \tau|_{\{k+1,\ldots,n\}}$. Zu $\sigma \neq \tau$ existieren kollidierende Indizes (i, j) mit $1 \leq i \leq k < j \leq n$ und $\sigma(i) = \tau(j)$. Daraus folgt $\langle v^k_\sigma \,|\, \star v^k_\tau \rangle = 0$. QED

Basis und Dimension von $\Lambda^k(V)$

Satz Y1I: eine kanonische Basis von Λ^k

Weiterhin sei $V = \langle \mathscr{A} \rangle_R^!$ ein R–linearer Raum mit Basis $\mathscr{A} = (v_1, \dots, v_n)$.
(5) Der Raum $\Lambda^k(V)$ hat dank (4) die zu $\mathscr{A}$ gehörige kanonische Basis:

$$\boxed{\mathscr{A}^k_< := (v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k})_{i \in \{1,\dots,n\}^k_<}}$$

(6) Die Dimension ist demnach:

$$\boxed{\dim \Lambda^k(V) = \tbinom{n}{k}, \qquad \dim \Lambda(V) = \textstyle\sum_{k=0}^n \tbinom{n}{k} = 2^n}$$

(7) Dank PLF N1B erhalten wir den R–Isomorphismus „Hodge–Stern“:

$$\boxed{\star : \Lambda^k \xrightarrow{\sim} \Lambda^{n-k} : v^k_\tau \mapsto \star v^k_\tau}$$

Es gilt $(\star, \star) : \Lambda^0 \cong \Lambda^n$ mit $1 \leftrightarrows v_1 \wedge \dots \wedge v_n$. Allgemein für $\omega \in \Lambda^k$ folgt $\star\star\omega = \varepsilon\omega$ mit Vorzeichen $\varepsilon = (-1)^{k(n-k)}$. Für n ungerade ist $\star$ involutiv.

Übung: Rechnen Sie im obigen Satz auch die Folgerungen (5,6,7) nach!

Basis und Dimension von $\Lambda^k \twoheadleftarrow T^k \twoheadrightarrow S^k$

☺ Das zeigt erneut die Symmetrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ der Binomialkoeffizienten.
Vergleichen Sie mit $\mathfrak{P}_k(X) \cong \mathfrak{P}_{n-k}(X) : A \mapsto X \setminus A$ für $X = \{1, \dots, n\}$.

Korollar Y1J: kanonische Basen und explizite Dimensionen

Zum Vergleich und krönenden Abschluss, die kanonischen Basen für
– die Tensoralgebra $(T(V), \otimes, 1)$ zu $V = \langle \mathscr{A} = (v_1, \dots, v_n) \rangle_R^!$,
– die alternierende Algebra $(\Lambda(V), \wedge, 1) = (\bigwedge(V), \wedge, 1)$ sowie
– die symmetrische Algebra $(S(V), \cdot, 1) = (\bigvee(V), \vee, 1) = R[\mathscr{A}]$:

$$T^k = \langle\, \mathscr{A}^k = (v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_k} \mid i \in \{1, \dots, n\}^k) \,\rangle_R^! \implies \dim T^k = n^k$$
$$\Lambda^k = \langle\, \mathscr{A}^k_< = (v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k} \mid i \in \{1, \dots, n\}^k_<) \,\rangle_R^! \implies \dim \Lambda^k = \tbinom{n}{k}$$
$$S^k = \langle\, \mathscr{A}^k_\leq = (v_{i_1} \vee \dots \vee v_{i_k} \mid i \in \{1, \dots, n\}^k_\leq) \,\rangle_R^! \implies \dim S^k = \tbinom{n+k-1}{k}$$

Übung: Wiederholen Sie die Konstruktion von T und S und Λ.
Wie folgen daraus die hier behaupteten Basen und Dimensionen?
☺ Freuen Sie sich über Ihre kombinatorischen Grundlagen der LinA1!

Ein genialer Abzähltrick: *stars and bars*

♦ **Satz H2L:** die Anzahl monotoner k–Tupel in $\{1, \dots, n\}$

Seien $n, k \in \mathbb{N}$. (1) Für strikt monotone k–Tupel in $\{1, \dots, n\}$ gilt:

$$I = \{1, \dots, n\}^k_< = \{\, (i_1 < i_2 < \dots < i_k) \in \{1, \dots, n\}^k \,\} \qquad \implies \qquad \sharp I = \binom{n}{k}$$

Beispiel: $\sharp\{\, (a < b < c) \in \{1, \dots, 7\}^3 \,\} = \binom{7}{3} = 35$

(2) Für schwach monotone k–Tupel in $\{1, \dots, n\}$ hingegen gilt:

$$J = \{1, \dots, n\}^k_\leq = \{\, (j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k) \in \{1, \dots, n\}^k \,\} \implies \sharp J = \binom{n+k-1}{k}$$

Beispiel: $\sharp\{\, (a \leq b \leq c) \in \{1, \dots, 7\}^3 \,\} = \binom{9}{3} = 84$

Beweis: Wir nutzen geschickt Bijektionen, die wir wie folgt konstruieren:

$$\begin{aligned} (v, u) \;:\; \{1, \dots, n\}^k_< &\cong \mathfrak{P}_k(\{1, \dots, n\}) \\ (i_1 < i_2 < \dots < i_k) &\mapsto \{i_1, i_2, \dots, i_k\}^! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (s, t) \;:\; \{1, \dots, n\}^k_\leq &\cong \{1, \dots, n+k-1\}^k_< \\ (j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k) &\mapsto (j_1 + 0 < j_2 + 1 < \dots < j_k + k - 1) \end{aligned}$$

Dank H2J erhalten wir daraus bequem die ersehnten Anzahlen. QED

Ein genialer Abzähltrick: *stars and bars*

Konvention: Wir nutzen folgende elegante Schreibweisen:

$$\{a_1, a_2, \dots, a_k\}^! = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \text{ mit } a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j$$
$$(a_1, a_2, \dots, a_k)^! = (a_1, a_2, \dots, a_k) \text{ mit } a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j$$
$$\{\, a_1 < a_2 < \dots < a_k \,\} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \text{ mit } a_1 < a_2 < \dots < a_k$$
$$(\, a_1 < a_2 < \dots < a_k \,) = (a_1, a_2, \dots, a_k) \text{ mit } a_1 < a_2 < \dots < a_k$$

Übung: Sind (v, u) und (s, t) wirklich Bijektionen? Führen Sie dies aus!
(1) Hier bedeutet v vergessen der Reihenfolge, umgekehrt u sortieren,
(2) ebenso s auseinanderschieben, umgekehrt t zusammenschieben.
(3) Wie viele Elemente hat $\{\, (a_1 \leq a_2 < a_3 \leq a_4) \in \{1, \dots, 7\}^4 \,\}$?

☺ Die Nutzung von Mengen und Bijektion macht alles wunderbar klar und einfach. Ohne präzise Werkzeuge bleibt nur vages Händefuchteln, dann muss es eben rein anschaulich reichen. Solch raffiniert graphische Darstellung heißt „stars and bars“ oder „sticks and stones“ oder „dots and dividers“. Siehe hierzu `en.wikipedia.org/wiki/Multiset#Counting_multisets`.

O wie effizient und elegant sind doch Bijektionen!

Die universelle Eigenschaft der alternierenden Algebra $\Lambda(V)$

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, hook, "\eta=\mathrm{inc}_R^\Lambda"] \arrow[dr, "\tilde\eta"'] & \Lambda(V) \arrow[d, dashed, "\exists! f"'] & V \arrow[l, hook', "\iota=\mathrm{inc}_V^\Lambda"'] \arrow[dl, "\tilde\iota"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Satz Y1K: Die Algebra $\Lambda = \Lambda(V)$ ist frei alternierend zu V über R.

(0) Zu jedem zentralen Bimodul V über dem kommutativen Ring R ist $(\Lambda, \wedge, 1, \eta, \iota)$ ein Ring $(\Lambda, \wedge, 1)$ mit Ringhomomorphismus $\eta : R \hookrightarrow \Lambda$ und R–linearer Einbettung $\iota : V \hookrightarrow \Lambda$ mit $u \wedge u = 0$ für alle $u \in V$.

(1) Sei $(A, \cdot, 1, \tilde\eta, \tilde\iota)$ ein Ring $(A, \cdot, 1)$ mit Ringhomomorphismus $\tilde\eta : R \to A$ und R–linearer Abbildung $\tilde\iota : V \to A$ mit $\tilde\iota(u)^2 = 0$ für alle $u \in V$. Dank $\tilde\eta$ wird auch A ein zentraler R–Bimodul; für alle $u \in V$ und $r \in R$ gilt also $\tilde\iota(ru) = \tilde\eta(r)\tilde\iota(u)$. Dazu existiert genau ein Ringhomomorphismus $f : \Lambda \to A$ mit $f \circ \eta = \tilde\eta$ und $f \circ \iota = \tilde\iota$, nämlich

$$f(r \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \tilde\eta(r) \cdot \tilde\iota(v_1) \cdots \tilde\iota(v_n).$$

Die universelle Eigenschaft der alternierenden Algebra $\Lambda(V)$

Aufgabe: Was genau ist für Satz Y1K zu zeigen? Zeigen Sie es!
Wie nutzen Sie geschickt den Tensorring $T = T(V)$ und seine UAE Y1A?

Beweis: Aussage (0) fasst unsere vorige Konstruktion zusammen.

(1a) *Eindeutigkeit:* Jede zwei solche Ringhomomorphismen $f, f' : \Lambda \to A$ sind gleich auf R dank $f\eta = \tilde\eta = f'\eta$ und auf V dank $f\iota = \tilde\iota = f'\iota$, per Induktion multiplikativ auf Λ^n und additiv auf $\Lambda = \bigoplus_n \Lambda^n$.

(1b) *Existenz:* Es existiert genau ein Ringhomomorphismus $g : T \to A$ mit $g\eta_T = \tilde\eta$ und $g\iota_T = \tilde\iota$ dank Satz Y1A. Mit $\tilde\iota(u)^2 = 0$ für alle $u \in V$ folgt $\mathrm{Ker}(g) \supseteq \mathfrak{a}$. Somit induziert $g : T \to A$ auf dem Quotienten $\Lambda = T/\mathfrak{a}$ den ersehnten Ringhomomorphismus $f : \Lambda = T/\mathfrak{a} \to A$. Dieser erfüllt $f \circ \eta_\Lambda = \tilde\eta$ und $f \circ \iota_\Lambda = \tilde\iota$ nach Konstruktion. QED

Aufgabe: Die Konstruktion der Tensoralgebra $T_R(V)$ und $S_R(V)$ und $\Lambda_R(V)$ hängt sowohl vom Ring R als auch dem R–linearen Raum V ab. Wie verträgt sich das mit Homomorphismen des Paares (R, V)? Folgern Sie dies jeweils aus der universellen Eigenschaft.

Funktorialität dank UAE

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, hook, "\eta_R=\mathrm{inc}_R^T"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "\tilde\eta"] & T_R(V) \arrow[d, dashed, "\exists! f"'] & V \arrow[l, hook', "\iota_V=\mathrm{inc}_V^T"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dl, "\tilde\iota"'] \\
R' \arrow[r, hook, "\eta_{R'}=\mathrm{inc}_{R'}^T"] & T_{R'}(V') & V' \arrow[l, hook', "\iota_{V'}=\mathrm{inc}_{V'}^T"']
\end{tikzcd}$$

Korollar Y1L: Funktorialität von T und S und Λ

Sei $g : R \to R'$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe, darüber V ein R–linearer Raum und V' ein R'–linearer Raum, via g somit auch ein R–linearer Raum, und $h : V \to V'$ eine R–lineare Abbildung.

(1) Dank UAE Y1A existiert zu (g, h) genau ein Ringhomomorphismus $T_g(h) := f : T_R(V) \to T_{R'}(V')$ mit $f \circ \eta_R = \eta_{R'} \circ g$ und $f \circ \iota_V = \iota_{V'} \circ h$.
Es folgt (1a) $T_{\mathrm{id}_R}(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{T_R(V)}$ und (1b) $T_{g' \circ g}(h' \circ h) = T_{g'}(h') \circ T_g(h)$.
(2) Gleiches gilt für $S_g(h) : S_R(V) \to S_{R'}(V')$ dank UAE Y1E
(3) und ebenso für $\Lambda_g(h) : \Lambda_R(V) \to \Lambda_{R'}(V')$ dank UAE Y1K.

Aufgabe: Folgern Sie dies jeweils aus der universellen Eigenschaft.

Funktorialität nützt sofort.

? Für $V = \langle \mathcal{A} \rangle_R^!$ mit endlicher Basis $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ kennen wir die kanonische Basis von $\Lambda^k(V)$ aus Korollar Y1J. Was passiert allgemein?

Satz Y1M: kanonische Basis von $\Lambda^k(V)$, auch unendliche Dimension

Sei R ein kommutativer Ring, darüber V ein R–linearer Raum mit Basis $\mathcal{A} = (v_i)_{i \in I}$ über einer geordneten Menge $(I, \leq)$. Dann hat $\Lambda^k = \Lambda^k(V)$ die Basis $\mathcal{A}^k_< = (v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k} \mid i \in I^k_<)$ mit $I^k_< = \{ i \in I^k \mid i_1 < \dots < i_k \}$.

Aufgabe: Beweisen Sie dies. Wie nutzen Sie geschickt den endlichen Fall?

Beweis: (1) Die Familie $\mathcal{A}^k_<$ erzeugt Λ^k wie in Lemma Y1H erklärt.

(2) Lineare Unabhängigkeit haben wir oben nur für I endlich bewiesen. Zu $J \subseteq I$ endlich ist $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in J}$ die Basis des Teilraums $U = \langle (v_i)_{i \in J} \rangle_R^!$ in V. Die Summe $V = U \oplus U'$ liefert die Inklusion-Retraktion $U \rightleftarrows V$ und fortgesetzt $\Lambda(U) \rightleftarrows \Lambda(V)$ dank Funktorialität. Demnach ist die Basis $\mathcal{B}^k_<$ von $\Lambda^k(U)$ ebenso linear unabhängig in $\Lambda^k(V)$. Somit ist die gesamte Familie $\mathcal{A}^k_<$ linear unabhängig, denn jede endliche Teilfamilie ist es. QED

Die Paarung $\Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k(V) \to R$

Wir haben die alternierende Algebra $\Lambda(V)$ vorrangig für $V = \langle \mathscr{A} \rangle_R^!$ mit endlicher Basis $\mathscr{A} = (v_1, \dots, v_n)$ untersucht (Satz Y1I). Hier sind alle Argumente und die Kombinatorik am schönsten! In der Vorlesung wurde ich gefragt, ob und wie wir die Konstruktion auf eine *unendliche* Basis $\mathscr{A}$ ausdehnen können. Eine erste mögliche Antwort ist der vorige Satz Y1M, der dank Einbettung und Retraktion auf den endlichen Fall rekurriert.

? Geht das noch einfacher? direkter? schöner? gar lehrreicher? Wie versprochen biete ich hier ein zweiten, unabhängigen Beweis. Er bringt eine weitere genial-einfache natürliche Paarung ins Spiel.

☺ Das hat den zusätzlichen Vorteil, den natürlichen Isomorphismus $\Lambda^k(V^*) \cong \Lambda^k(V)^*$ zu konstruieren, der uns in vielen Anwendungen willkommen ist, etwa für Differentialformen im nächsten Abschnitt.

☺ Wir freuen uns, dass die Determinante hier in ihrem natürlichen Habitat auftritt und für uns weiterhin wohltuend wirkt und waltet. Diese allgemeine Technik können wir vielerorts erneut anwenden: Integration und De Rahm–Kohomologie, Auswertung und Dualität, …

Die Paarung $\Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k(V) \to R$

Die Auswertung $\langle \text{-}|\text{-} \rangle : V^* \times V \to R : (\varphi, v) \mapsto \varphi(v)$ erweitern wir so: Wir nennen $v \in \Lambda^k(V)$ einen **k–Vektor** und $\varphi \in \Lambda^k(V^*)$ eine **k–Form**.

Satz Y1N: die Paarung $\Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k(V) \to R$

(1) Sei R ein kommutativer Ring und V ein zentraler R–linearer Raum. Dann existiert in jedem Grad $k \in \mathbb{N}$ genau eine bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} &\langle \text{-}|\text{-} \rangle : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k(V) \to R : \\ &\langle \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \,|\, v_1 \wedge \dots \wedge v_k \rangle = \det(\varphi_i(v_j))_{ij} = \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1) & \dots & \varphi_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \dots & \varphi_k(v_k) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(2) Habe V die Basis $\mathscr{A} = (v_i)_{i \in I}$ geordnet mit $(I, \le) \overset{\text{z.B.}}{=} \{1 < \dots < n\}$. Dazu erhalten wir die duale Familie $\mathscr{B} = (v_i^*)_{i \in I}$ in V^* gemäß Satz W1H. Dann sind auch die Familien $\mathscr{A}_<^k$ in $\Lambda^k(V)$ und $\mathscr{B}_<^k$ in $\Lambda^k(V^*)$ dual gemäß

$$\langle v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^* \,|\, v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_k} \rangle = \delta_{i,j}$$

für alle $i, j \in I_<^k$. Demnach ist $\mathscr{A}_<^k$ frei, also eine Basis von $\Lambda^k(V)$.

Die Paarung $\Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k(V) \to R$

Aufgabe: (1) Warum ist $\langle \text{-}|\text{-} \rangle$ wohldefiniert?
(2) Wie folgt damit die behauptete Dualität?

Beweis: (1) Wir beginnen, wie immer vorsichtig, mit der Abbildung

$$\begin{aligned} &\langle\!\langle \text{-}|\text{-} \rangle\!\rangle : (V^*)^k \times V^k \to R : \\ &\langle\!\langle (\varphi_1, \dots, \varphi_k) \,|\, (v_1, \dots, v_k) \rangle\!\rangle := \det(\varphi_i(v_j))_{ij} = \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1) & \dots & \varphi_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \dots & \varphi_k(v_k) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Die Abbildung $\langle\!\langle \text{-}|\text{-} \rangle\!\rangle$ ist multilinear und alternierend in den Vektoren $(v_1, \dots, v_k)$, denn die Determinante ist dies in den Spalten. Ebenso ist $\langle\!\langle \text{-}|\text{-} \rangle\!\rangle$ multilinear und alternierend in den Linearformen $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$, denn die Determinante ist dies in den Zeilen. Somit existiert genau eine bilineare Abbildung $\langle \text{-}|\text{-} \rangle : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k(V) \to R$ wie angegeben mit

$$\langle \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \,|\, v_1 \wedge \dots \wedge v_k \rangle = \det(\varphi_i(v_j))_{ij}.$$

Existenz folgt aus der UAE für $\Lambda^k(V)$ und für $\Lambda^k(V^*)$. Eindeutigkeit folgt aus der Tatsache, dass die einfachen Tensoren alle Tensoren erzeugen.

Die Paarung $\Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k(V) \to R$

(2) Zur Dualität betrachten wir $i, j \in I_<^k$ und die zugehörige Auswertung:

$$\langle v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^* \,|\, v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_k} \rangle = \begin{vmatrix} v_{i_1}^*(v_{j_1}) & \dots & v_{i_1}^*(v_{j_k}) \\ \vdots & & \vdots \\ v_{i_k}^*(v_{j_1}) & \dots & v_{i_k}^*(v_{j_k}) \end{vmatrix}.$$

Für $i = j$ steht rechts die Einheitsmatrix, somit die Determinante 1. Für $i \neq j$ gibt es ein $j_\ell \notin \{i_1, \dots, i_k\}$. Damit ist die ℓ-te Spalte gleich Null, und so verschwindet die Determinante. (Ebenso existiert eine Nullzeile.)

Daher sind die Familien $\mathscr{A}_<^k$ in $\Lambda^k(V)$ und $\mathscr{B}_<^k$ in $\Lambda^k(V^*)$ dual zueinander und bezeugen somit gegenseitig ihre lineare Unabhängigkeit (Satz W1D). Dank Lemma Y1H erzeugt $\mathscr{A}_<^k$ den Raum $\Lambda^k(V)$, ist also eine Basis. $\boxed{\text{QED}}$

Zusatz: Dank obiger Dualität ist auch $\mathscr{B}_<^k$ linear unabhängig in $\Lambda^k(V^*)$. Ist I endlich, so ist $\mathscr{B}$ eine Basis des Dualraums V^* (Satz W1H). Dank Lemma Y1H erzeugt $\mathscr{B}_<^k$ den Raum $\Lambda^k(V^*)$, ist also ebenfalls eine Basis. Nur in diesem Falle ist $\langle \text{-}|\text{-} \rangle$ eine perfekte Paarung (Satz W2H).

Ausblick auf Anwendungen

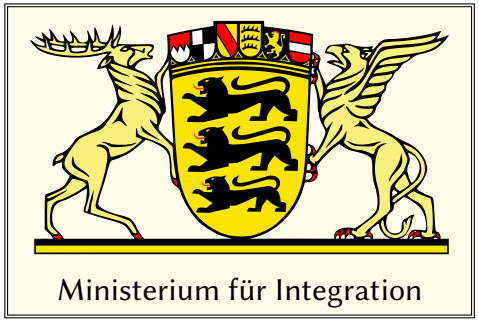
Die Tensoralgebra $T(V)$ wird vielseitig genutzt, insbesondere die daraus gewonnene symmetrische Algebra $S(V)$ und alternierende Algebra $\Lambda(V)$:

1. Algebra: Determinante, Invarianten, Darstellungen
2. Analysis: Differential- und Integralrechnung
3. Geometrie: Integralsätze, deRham–Kohomologie
4. Kombinatorik: Simplizialkomplexe, Ko/Homologie
5. Analytische Mechanik, symplektisch nach Hamilton
6. Klassisch: Elektromagnetismus, Relativitätstheorie, uvm.
7. Quantisch: Zustandsraum für Bosonen und Fermionen

Ich skizziere im Folgenden eine spektakuläre Anwendung, die mich selbst als Student tief beeindruckt hat, zunächst als pragmatisches Werkzeug in physikalischen Anwendungen, dann nochmal gründlich in der Analysis, später vielerorts in der Geometrie: der Kalkül der Differentialformen!

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Differenzieren ist Handwerk,
Integrieren ist Kunst.



Das Land Baden-Württemberg hatte von 2011 bis 2016 ein Ministerium für Integration. Den Aufgabenbereich Migration und Integration teilten sich danach bis 2021 das Innen- und das Sozialministerium, seit 2021 das Justiz- und das Sozialministerium. Integration bleibt ein wichtiges Thema. Wir leisten in der Linearen Algebra unseren Beitrag.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz Y2A: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. (1) Dann ist f integrierbar. Die Integralfunktion

$$F : [a,b] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_{t=a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

ist differenzierbar und erfüllt $F' = f$. (2) Ist umgekehrt $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu f, also differenzierbar mit $F' = f$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F\Big]_a^b \quad \text{mit} \quad \Big[F\Big]_a^b := F(b) - F(a).$$

Beide Richtungen sind nützlich. Einfache Anwendungsbeispiele:

$$\int_{x=0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x \overset{\text{HDI}}{\underset{(2)}{=}} \Big[-\cos x\Big]_{x=0}^{\pi} \overset{\text{Trig}}{=} 1-(-1) \overset{\mathbb{R}}{=} 2$$

$$\int_{x=0}^{\pi} x\,\sin x\,\mathrm{d}x \overset{\text{HDI}}{\underset{(2)}{=}} \Big[\sin x - x\cos x\Big]_{x=0}^{\pi} \overset{\text{Trig}}{=} \pi - 0 \overset{\mathbb{R}}{=} \pi$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wir zelebrieren den zweiten Teil des Hauptsatzes nochmals ausführlich:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x &\overset{\text{HDI}}{=} F(b) - F(a) \\ \langle M \,|\, \mathrm{d}F \rangle &= \langle \partial M \,|\, F \rangle \end{aligned}$$

Hier ist $M = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, mit $a \le b$ in $\mathbb{R}$, also kompakt. Sein Rand $\partial M = -e_a + e_b$ besteht aus den beiden Punkten a und b, wobei wir den Zielpunkt b positiv gewichten, jedoch den Startpunkt a negativ. Auf M sei $F : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung F'. Dann gilt:

HDI: Das eindimensionale Integral von $\mathrm{d}F$ über M ist gleich der nulldimensionalen Auswertung von F auf dem Rand ∂M.

? Wir wollen den Hauptsatz auf *beliebige* Dimension verallgemeinern. Schon passende Gleichungen zu *vermuten*, ist keineswegs offensichtlich! Wir führen dazu im Folgenden den Kalkül der Differentialformen aus.
☺ Die alternierende Algebra übernimmt für uns die Buchführung.

Differentialformen für Eilige

Wir arbeiten über dem Körper $\mathbb{R}$ im vertrauten Koordinatenraum

$$V = \mathbb{R}^n = \{\, x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \,\}$$

mit Standardbasis $e_1, \dots, e_n \in V$ und dualer Basis $e_1^*, \dots, e_n^* \in V^*$. Notation:

$$\mathrm{d}x_i := e_i^* : V \to \mathbb{R} : u \mapsto \mathrm{d}x_i(u) = u_i$$

Wir nennen $v \in \Lambda^k(V)$ einen **k–Vektor** und $\varphi \in \Lambda^k(V^*)$ eine **k–Form**.
Die **Auswertung** $\langle\text{-}|\text{-}\rangle : V^* \times V \to \mathbb{R} : (\varphi, v) \mapsto \varphi(v)$ erweitern wir zu

$$\begin{aligned} &\langle\text{-}|\text{-}\rangle : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k(V) \to \mathbb{R} : \\ &(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) := \det(\varphi_i(v_j))_{ij} = \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1) & \dots & \varphi_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \dots & \varphi_k(v_k) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

für alle 1–Formen $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$ und alle 1–Vektoren $v_1, \dots, v_k \in V$.
Übung: Die Abbildung $\langle\text{-}|\text{-}\rangle$ ist wohldefiniert und eine perfekte Paarung, denn die kanonischen Basen von $\Lambda^k(V^*)$ und $\Lambda^k(V)$ sind dual. (Y1N)
Das stiftet den natürlichen Isomorphismus $\Lambda^k(V^*) \cong \Lambda^k(V)^*$. (W2H)

Differentialformen für Eilige

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ein **1–Vektorfeld** auf U ist eine $\mathscr{C}^p$–Abbildung

$$f : U \to V = \mathbb{R}^n : x \mapsto f(x) = f_1(x)\, e_1 + \dots + f_n(x)\, e_n.$$

Ein **1–Formfeld** (oder 1–Kovektorfeld) ist eine $\mathscr{C}^p$–Abbildung

$$\omega : U \to V^* : x \mapsto \omega(x) = \omega_1(x)\, \mathrm{d}x_1 + \dots + \omega_n(x)\, \mathrm{d}x_n.$$

Die **Auswertung** von ω auf f ist demnach die $\mathscr{C}^p$–Funktion

$$\omega(f) : U \to \mathbb{R} : x \mapsto \langle \omega(x) \mid f(x) \rangle = \omega_1(x) f_1(x) + \dots + \omega_n(x) f_n(x).$$

Jedem Punkt $x \in U$ wird ein Vektor $f(x) \in V = \mathbb{R}^n$ bzw. ein Kovektor $\omega(x) \in V^*$ zugeordnet. Die Zuordnung soll stetig sein in x, wir sagen dazu kurz $\mathscr{C}^0$. Um p-mal ableiten zu können, fordern wir ein $\mathscr{C}^p$–Feld mit $p \in \mathbb{N}$, das heißt, alle Koordinatenfunktionen $f_1, \dots, f_n : U \to \mathbb{R}$ bzw. $\omega_1, \dots, \omega_n : U \to \mathbb{R}$ sollen mindestens p-mal stetig differenzierbar sein.

Oft genügt uns bereits $p = 1$ oder $p = 2$. Zur Vereinfachung betrachtet man gern **glatte** Funktionen, also beliebig oft differenzierbar, kurz $\mathscr{C}^\infty$.

Differentialformen für Eilige

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ein **k–Vektorfeld** auf U ist eine $\mathscr{C}^p$–Abbildung

$$f : U \to \Lambda^k(V) : x \mapsto f(x) = \textstyle\sum_{i \in I_<^k} f_i(x)\, e_i$$

mit der kanonischen Basis $(e_i = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k})_{i \in I_<^k}$ und $I_<^k = \{1, \dots, n\}_<^k$.
Ein **k–Formfeld** (oder k–Kovektorfeld) ist eine $\mathscr{C}^p$–Abbildung

$$\omega : U \to \Lambda^k(V^*) : x \mapsto \omega(x) = \textstyle\sum_{i \in I_<^k} \omega_i(x)\, \mathrm{d}x_i$$

mit der dualen Basis $(\mathrm{d}x_i = \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_k})_{i \in I_<^k}$ und $I_<^k := \{1, \dots, n\}_<^k$.
Die **Auswertung** von ω auf f ist dann die $\mathscr{C}^p$–Funktion

$$\omega(f) : U \to \mathbb{R} : x \mapsto \langle \omega(x) \mid f(x) \rangle = \textstyle\sum_{i \in I_<^k} \omega_i(x) f_i(x).$$

Statt k–Vektorfeld sagen wir kurz **k–Feld**. Statt k–Formfeld sagen wir kurz **k–Form**. Wir können also k–Formen auf k–Feldern auswerten.

Anschaulich spannt $f = f_{ij}\, x_i \wedge x_j$ mit $i < j$ die i–j–Ebene auf, und $f_{ij}(x)$ ist die Feldstärke im Punkt $x \in U$. Dual dazu misst $\omega = \omega_{ij}\, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ diese Feldstärke mit Empfindlichkeit ω_{ij}. Das ergibt $\omega(f) : x \mapsto \omega_{ij}(x) f_{ij}(x)$.

Differentialformen für Eilige

Der Vektorraum aller glatten k–Formfelder auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$\boxed{\Omega^k = \Omega^k(U) := \mathscr{C}^\infty(U, \Lambda^k(V^*)).}$$

Die **Ableitung** des 0–Formfelds $\omega : U \to \Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}$ ist das 1–Formfeld

$$\boxed{\mathrm{d}\omega := (\partial_1 \omega)\, \mathrm{d}x_1 + \dots + (\partial_n \omega)\, \mathrm{d}x_n.}$$

Damit definieren wir allgemein die (äußere) **Ableitung**:

$$\boxed{\mathrm{d} : \Omega^k \to \Omega^{k+1} : \textstyle\sum_{i \in I_<^k} \omega_i\, \mathrm{d}x_i \mapsto \sum_{i \in I_<^k} \mathrm{d}\omega_i \wedge \mathrm{d}x_i}$$

☺ Bequem nutzen wir für $\Lambda^k(V^*)$ weiterhin die kanonische Basis $(e_i = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k})_{i \in I_<^k}$ und $I_<^k = \{1, \dots, n\}_<^k$. Ausgeschrieben heißt das:

$$\mathrm{d}\left(\textstyle\sum_{i \in I_<^k} \omega_i\, \mathrm{d}x_i\right) = \sum_{i \in I_<^k} \sum_{j=1}^n (\partial_j \omega_i)\; \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$$

☺ Die alternierende Algebra übernimmt für uns die Buchführung.
☺ Erstes Wunder: Das Endergebnis ist basisunabhängig!

Beispiel: Gradient und Rotation in der Ebene

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^0(U) & \xrightarrow[\text{grad}]{d} & \Omega^1(U) & \xrightarrow[\text{rot}]{d} & \Omega^2(U) & \longrightarrow & 0 \\ & & f & \longmapsto & \mathrm{d}f, & g & \longmapsto & \mathrm{d}g & \end{array}$$

Aufgabe: Schreiben Sie dies aus für $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Was ist $\mathrm{d} \circ \mathrm{d}$?

Lösung: Für jede glatte Funktion / 0–Formfeld $f : U \to \mathbb{R}$ finden wir:

$$\mathrm{d}f = (\partial_1 f)\,\mathrm{d}x_1 + (\partial_2 f)\,\mathrm{d}x_2 \qquad \text{☺ Gradient!}$$

Für jedes 1–Formfeld $g = g_1\,\mathrm{d}x_1 + g_2\,\mathrm{d}x_2$ finden wir:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g = {} & +(\partial_1 g_1)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_1 + (\partial_2 g_1)\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 \\ & +(\partial_1 g_2)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + (\partial_2 g_2)\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_2 \\ = {} & (\partial_1 g_2 - \partial_2 g_1)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \qquad \text{☺ Rotation!} \end{aligned}$$

Was ergibt die Komposition? Die Rotation des Gradienten ist… Null!

$$\mathrm{d}\mathrm{d}f = (\partial_1\partial_2 f - \partial_2\partial_1 f)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 = 0$$

☺ Richtige Vorzeichen führen wie durch Zauberhand zur Auslöschung!

Beispiel: Gradient und Rotation in der Ebene

☺ Analysis: Der Satz von Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) garantiert $\partial_i\partial_j f = \partial_j\partial_i f$ für jede $\mathscr{C}^2$–Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$.

☺ Wir sehen: $\mathrm{d}f$ entspricht $\operatorname{grad} f = \nabla f$, und $\mathrm{d}g$ entspricht $\operatorname{rot} \vec{g} = \nabla \times \vec{g}$:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \vec{g} = \nabla \times \vec{g} = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1$$

☺ Die alternierende Algebra übernimmt für uns die Buchführung. Zweites Wunder: Die Vorzeichen sind nicht nur ästhetisch gewählt, sondern führen uns direkt zu $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ dank paarweiser Auslöschung.

Wir haben dies zunächst im einfachsten Spezialfall ausgeschrieben. Der allgemeine Fall gelingt uns genauso, alles ist bereits eingerichtet, wir müssen lediglich die unvermeidliche Indexschlacht sorgsam organisieren. Um noch etwas mehr Zutrauen zu gewinnen, rechnen wir die Ableitung noch im dreidimensionalen Fall nach und entdecken weiter Erfreuliches.

Beispiel: Gradient, Rotation, Divergenz im Raum

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^0(U) & \xrightarrow[\text{grad}]{d} & \Omega^1(U) & \xrightarrow[\text{rot}]{d} & \Omega^2(U) & \xrightarrow[\text{div}]{d} & \Omega^3(U) & \longrightarrow & 0 \\ & & f & \longmapsto & \mathrm{d}f, & g & \longmapsto & \mathrm{d}g, & h & \longmapsto & \mathrm{d}h \end{array}$$

Aufgabe: Schreiben Sie dies aus für $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Was ist $\mathrm{d} \circ \mathrm{d}$?

Lösung: Für jede glatte Funktion / 0–Formfeld $f : U \to \mathbb{R}$ finden wir:

$$\mathrm{d}f = (\partial_1 f)\,\mathrm{d}x_1 + (\partial_2 f)\,\mathrm{d}x_2 + (\partial_3 f)\,\mathrm{d}x_3 \qquad \text{☺ Gradient!}$$

Für jedes 1–Formfeld $g = g_1\,\mathrm{d}x_1 + g_2\,\mathrm{d}x_2 + g_3\,\mathrm{d}x_3$ finden wir:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g = {} & +(\partial_2 g_3 - \partial_3 g_2)\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\ & +(\partial_3 g_1 - \partial_1 g_3)\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\ & +(\partial_1 g_2 - \partial_2 g_1)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \qquad \text{☺ Rotation!} \end{aligned}$$

Für jedes 2–Formfeld $h = h_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + h_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + h_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$:

$$\mathrm{d}h = (\partial_1 h_1 + \partial_2 h_2 + \partial_3 h_3)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \qquad \text{☺ Divergenz!}$$

Richtige Vorzeichen sortieren alles wie durch Zauberhand!

Beispiel: Gradient, Rotation, Divergenz im Raum

Wir nutzen hier für $\mathrm{d}g$ ausnahmsweise nicht die kanonische Basis

$$(\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j)_{i<j} = (\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2,\ \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3,\ \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3),$$

sondern geometrisch anschaulich das Hodge–Dual von $(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3)$:

$$(\,\star\mathrm{d}x_1 = \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3,\ \star\mathrm{d}x_2 = \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1,\ \star\mathrm{d}x_3 = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\,).$$

In dieser Vektorschreibweise erkennen wir die vertraute Rotation:

$$\operatorname{rot} \vec{g} = \nabla \times \vec{g} = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_2 g_3 - \partial_3 g_2 \\ \partial_3 g_1 - \partial_1 g_3 \\ \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 \end{bmatrix}$$

☺ Ebenso: $\mathrm{d}f$ entspricht $\operatorname{grad} f = \nabla f$, und $\mathrm{d}h$ entspricht $\operatorname{div} \vec{h} = \nabla \cdot \vec{h}$.
⚠ Als Besonderheit in Dimension $n = 3$ nutzen wir das Kreuzprodukt.
☺ Mit Differentialformen gelingt dies einheitlich in jeder Dimension n.

Was ergibt die Komposition? Wir finden $d \circ d = 0$. Rechnen Sie es nach! Die Rotation des Gradienten ist Null. Die Divergenz der Rotation ist Null.

Beispiel: Wegintegral eines 1–Formfeldes

$$\langle \alpha \,|\, \varphi \rangle \;=\; \int_\alpha f(x) \cdot \mathrm{d}x \;:=\; \int_{t=0}^{1} f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,\mathrm{d}t$$

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und darauf $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein $\mathscr{C}^0$–Vektorfeld. Dual hierzu definiert f das 1–Formfeld $\varphi = f \cdot \mathrm{d}x$, ausgeschrieben in Dimension $n = 2$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi = f(x) \cdot \mathrm{d}x = f_1(x)\,\mathrm{d}x_1 + f_2(x)\,\mathrm{d}x_2 \overset{\mathscr{C}^\infty}{\in} \Omega^1(U)$$

Sei $\alpha : [0,1] \to U$ ein $\mathscr{C}^1$–Weg. Diesen setzen wir in das 1–Formfeld φ ein:

$$x = \alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha'(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1'(t) \\ \alpha_2'(t) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{d}x = \alpha'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$f(x) \cdot \mathrm{d}x = f_1(\alpha_1(t), \alpha_2(t))\,\alpha_1'(t)\,\mathrm{d}t + f_2(\alpha_1(t), \alpha_2(t))\,\alpha_2'(t)\,\mathrm{d}t$$

Darüber können wir nun integrieren, wie in $\int_{t=0}^1 \varphi(\alpha)$ expliziert.

Wegintegral eines 1–Formfeldes

Physikalische Interpretation dank anschaulicher Infinitesimalrechnung: In jedem Punkt $x \in U$ ist $f(x) \in \mathbb{R}^n$ die Kraft. Unser Weg α durchläuft $x = \alpha(t)$ mit Geschwindigkeit $\alpha'(t)$. In der Zeit von t bis $t + \mathrm{d}t$ legt er die Strecke von x bis $x + \mathrm{d}x$ zurück, also die Verschiebung $\mathrm{d}x = \alpha'(t)\,\mathrm{d}t$. Dabei wird die Arbeit $\mathrm{d}W = f(x) \cdot \mathrm{d}x = f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$ verrichtet.

☺ Das Arbeitsintegral summiert die insgesamt verrichtete Arbeit:

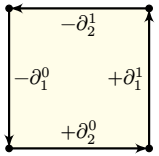
$$\langle \alpha \,|\, \varphi \rangle = W = \int_\alpha \mathrm{d}W = \int_{t=0}^1 f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,\mathrm{d}t$$

☺ Das ist eine wunderschöne und anschauliche Geschichte. Wenn Sie die physikalische Denke kennen, dann spüren Sie tatsächlich die Kraft, durchlaufen den Weg und verrichten die Arbeit. Mathematisch schreiben wir besser Δt_i für einen kleinen Zeitschritt und dann Δx_i für die kleine Verschiebung und $W = \sum_i \Delta W_i$ als Summe. In Physiksprech denkt man sich Δt_i „infinitesimal“ klein, im Grenzwert wird Summe zum Integral. Die Analysis erklärt Ihnen, wie das korrekt ε–δ–formalisiert wird.

Integration eines k–Formfeldes über einen k–Würfel

Sei $\omega \in \Omega^k(U)$ ein k–Formfeld auf U, also $\omega : U \to \Lambda^k(V^*) : x \mapsto \omega(x)$, Sei $\alpha : [0,1]^k \to U : t \mapsto \alpha(t)$ ein $\mathscr{C}^1$–Würfel in U. Ableitung gibt den k–Vektor $\dot\alpha(t) = \partial_1\alpha(t) \wedge \ldots \wedge \partial_k\alpha(t) \in \Lambda^k(V)$ und somit das Integral:

$$\langle \alpha \,|\, \omega \rangle := \int_{t \in [0,1]^k} \underbrace{\omega(\alpha(t))}_{\in \Lambda^k(V^*)} \underbrace{(\dot\alpha(t))}_{\in \Lambda^k(V)}\,\mathrm{d}t$$



Der Würfel $\alpha : [0,1]^k \to U$ hat die i–te Seite zu $\varepsilon \in \{0,1\}$:

$$\partial_i^\varepsilon\alpha \;:\; [0,1]^{k-1} \to U \;:\; (t_1, \ldots, t_{k-1}) \mapsto \alpha(t_1, \ldots, \underset{i}{\varepsilon}, \ldots, t_{k-1})$$

Der Rand des k–Würfels α ist die Wechselsumme seiner Seiten:

$$\partial\alpha = \textstyle\sum_{i=1}^n (-1)^i (\partial_i^0\alpha - \partial_i^1\alpha)$$

Satz Y2B: Hauptsatz als Dualität für Formfelder und Würfel

Für jedes Formfeld $\omega \in \Omega^{k-1}(U)$ und jeden Würfel $\alpha : [0,1]^k \to U$ gilt:

$$\langle \alpha \,|\, \mathrm{d}\omega \rangle = \langle \partial\alpha \,|\, \omega \rangle$$

Wegintegral eines 1–Formfeldes

HDI: Das k–dimensionale Integral von $\mathrm{d}\omega$ über α ist gleich dem $(k-1)$–dimensionalen Integral von ω über den Rand $\partial\alpha$.

Aufgabe: Zeigen Sie den Hauptsatz für $k = 1$. **Lösung:** Wir integrieren unser 1–Formfeld $\mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^n \partial_i\omega\,\mathrm{d}x_i$ über unseren Weg $\alpha : [0,1] \to U$:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha \,|\, \mathrm{d}\omega \rangle &\overset{\text{Def}}{=} \textstyle\int_{t=0}^1 \sum_{i=1}^n \partial_i\omega(\alpha(t))\,\alpha_i'(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{KR}}{=} \textstyle\int_{t=0}^1 [\omega(\alpha(t))]'\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{HDI}}{=} [\omega(\alpha(t))]_{t=0}^1 \\
&\overset{\text{Def}}{=} \langle \partial\alpha \,|\, \omega \rangle
\end{aligned}$$

Wir nutzen hier die Kettenregel (KR) und den Hauptsatz Y2A (HDI). Daraus erhalten wir sofort $\langle \alpha \,|\, \mathrm{d}\omega \rangle = \langle \partial\alpha \,|\, \omega \rangle$ für jedes 0–Formfeld ω. Der allgemeine Fall gelingt genauso, dank gut geführter Indexschlacht. Die Grundlagen des Kalküls sind gelegt, dank alternierender Algebra.

Kapitel Y

Bonusmaterial

"What can you prove with exterior algebra that you cannot prove without it?" Whenever you hear this question raised about some new piece of mathematics, be assured that you are likely to be in the presence of something important. In my time, I have heard it repeated for random variables, Laurent Schwartz' theory of distributions, ideles and Grothendieck's schemes, to mention only a few. A proper retort might be: "You are right. There is nothing in yesterday's mathematics that could not also be proved without it. Exterior algebra is not meant to prove old facts, it is meant to disclose a new world. Disclosing new worlds is as worthwhile a mathematical enterprise as proving old conjectures."

Gian-Carlo Rota (1932–1999), *Indiscrete thoughts* (1997)

Inhalt dieses Kapitels Y

5 Vergleich mit vertrauten Modellen
- Kreuzprodukt gleich äußeres Produkt
- Anti/Symmetrisierung als Projektor
- Dualisierung als Abkürzung

Rückblick und Ausblick

Als vorläufige Bilanz blicken wir zurück auf das Tensorprodukt und unsere ersten Schritte zu seiner überaus vielseitigen Nutzung

Die Lineare Algebra untersucht lineare Räume und lineare Abbildungen. Ein Produkt $\cdot : U \times V \to W : (u, v) \mapsto w = u \cdot v$ ist linear in jedem seiner beiden Argumente u und v, insgesamt also eine bilineare Abbildung. Die Linearität links und rechts entspricht demnach der lang vertrauten Distributivität und dem aus der Schule gewohnten „Ausmultiplizieren". Wichtige Beispiele sind Skalarprodukte, Matrizen, Polynome, uvm.

Das Tensorprodukt $U \otimes V$ erklärt hierzu das freiste und beste Produkt. Seine universelle Eigenschaft (UAE X2A) ist es, sich zu jedem konkreten Produkt zu spezialisieren. Wir können demnach in $U \otimes V$ ganz konkret und allgemein rechnen mit den üblichen Rechenregeln eines Produkts — und sonst nichts weiter. Insbesondere hilft uns die Basiseigenschaft X2C. Mit etwas Gewöhnung erkennen wir genau die „üblichen Produktregeln".

Rückblick und Ausblick

Je nach den Bedürfnissen unserer Anwendung wollen wir das allgemeine Tensorprodukt $V \otimes V$ mit speziellen nützlichen Rechenregeln versehen, insbesondere Kommutativität in $V \vee V = S^2 V$ mit $u \vee v = v \vee u$ und Antikommutativität bzw. Alternierung in $V \wedge V = \Lambda^2 V$ mit $v \wedge v = 0$.

Wünschen ist erlaubt, und hier gelingt auch das Erfüllen erfreulich leicht: Die Quotientenkonstruktion erzwingt genau die gewünschten Relationen und ihre Konsequenzen. Weitere überflüssige Relationen entstehen nicht. Hier spielen alle Grundlagen der Linearen Algebra bestens zusammen.

So konstruieren wir aus der Tensoralgebra $T(V)$ die symmetrische Algebra $S(V)$ und die alternierende Algebra $\Lambda(V)$, alles wunderbar konkret und universell. Was anfangs abstrakt wirkt, erweist sich rasch als effizientes Werkzeug und bereits vertraut: Im äußeren Produkt $\wedge : \Lambda^1 V \times \Lambda^1 V \to \Lambda^2 V$ erkennen wir nun das Kreuzprodukt (Satz Y5A). Das erklärt die numerischen Zufälle speziell für Dimension 2 und 3.

Zweidimensionales Kreuzprodukt und äußeres Produkt

Aufgabe: Wir betrachten $V = \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$. Ist das Kreuzprodukt „gleich“ dem äußeren Produkt? Vergleichen Sie und übersetzen Sie sorgsam!

(1) Wiederholen Sie zunächst das Kreuzprodukt $\times : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
(2) Explizieren Sie den Hodge–Stern $\star : \Lambda^2\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \Lambda^0\mathbb{R}^2$ bzgl. (e_1, e_2)
(3) … und das äußere Produkt $\tilde\wedge : \Lambda^1\mathbb{R}^2 \times \Lambda^1\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\wedge} \Lambda^2\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\star} \Lambda^0\mathbb{R}^2$.

Lösung: (1) Das Standardskalarprodukt S1A ist $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2$.
In Dimension 2 haben wir zudem das **Kreuzprodukt** gemäß S461:

$$\times : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = u_1v_2 - u_2v_1 = \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}$$

(2) Gemäß Y1I haben wir $(\star, \star) : \Lambda^2\mathbb{R}^2 \cong \Lambda^0\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}$ mit

$$e_1 \wedge e_2 \mapsto 1.$$

Für $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ nutzen wir die Standardbasis (e_1, e_2). Der Hodge–Stern $\star$ bildet das positiv komplementäre Produkt: Die Signatur der Indizes ist $\operatorname{sign}[1, 2] = +1$, die Determinante der Vektoren ist $\det(e_1, e_2) = +1$.

Zweidimensionales Kreuzprodukt und äußeres Produkt

(3) Sowohl das Kreuzprodukt $\times$ als auch das äußere Produkt $\tilde\wedge$ sind bilinear über $\mathbb{R}$ und zudem antisymmetrisch. Zum Beweis der Gleichheit genügt es also, ihre Gram–Matrizen zu vergleichen.
Dank Antisymmetrie genügt uns die folgende Rechnung:

$$e_1 \times e_2 = 1 = e_1 \tilde\wedge e_2$$

So erhalten wir die Gleichheit dieser beiden wichtigen Produkte:

Satz Y5A: Kreuzprodukt = äußeres Produkt

(1) In Dimension 2 ist das Kreuzprodukt gleich dem äußeren Produkt:

$$\boxed{\times = \tilde\wedge = \det : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$$

Manche Autor:innen schreiben hier kurz „$\times = \wedge$“. Streng besehen ist das schon syntaktisch falsch, denn $\Lambda^2\mathbb{R}^2$ ist nicht gleich $\mathbb{R}$, aber immerhin kanonisch isomorph: Mit dem Hodge–Stern gilt „$(- \times -) = \star(- \wedge -)$“. Alles passt wunderbar zusammen, insbesondere unsere Vorzeichen.

Dreidimensionales Kreuzprodukt und äußeres Produkt

Aufgabe: Wir betrachten $V = \mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$. Ist das Kreuzprodukt „gleich“ dem äußeren Produkt? Vergleichen Sie und übersetzen Sie sorgsam!

(1) Wiederholen Sie zunächst das Kreuzprodukt $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
(2) Explizieren Sie den Hodge–Stern $\star : \Lambda^2\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \Lambda^1\mathbb{R}^3$ bzgl. (e_1, e_2, e_3)
(3) … und das äußere Produkt $\tilde\wedge : \Lambda^1\mathbb{R}^3 \times \Lambda^1\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\wedge} \Lambda^2\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\star} \Lambda^1\mathbb{R}^3$.

Lösung: (1) In Dimension 3 haben wir das **Kreuzprodukt** gemäß Satz S4R:

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & e_1 \\ u_2 & v_2 & e_2 \\ u_3 & v_3 & e_3 \end{vmatrix}$$

(2) Gemäß Y1I haben wir $(\star, \star) : \Lambda^2\mathbb{R}^3 \cong \Lambda^1\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ mit

$$e_1 \wedge e_2 \mapsto e_3, \quad e_2 \wedge e_3 \mapsto e_1, \quad e_3 \wedge e_1 \mapsto e_2.$$

Für $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ nutzen wir die Standardbasis (e_1, e_2, e_3). Der Hodge–Stern $\star$ bildet das positiv komplementäre Produkt: Die Signatur der Indizes ist $\operatorname{sign}[1, 2, 3] = +1$, die Determinante der Vektoren ist $\det(e_1, e_2, e_3) = +1$.

Dreidimensionales Kreuzprodukt und äußeres Produkt

(3) Sowohl das Kreuzprodukt $\times$ als auch das äußere Produkt $\tilde\wedge$ sind bilinear über $\mathbb{R}$ und zudem antisymmetrisch. Zum Beweis der Gleichheit genügt es also, ihre Gram–Matrizen zu vergleichen.
Dank Antisymmetrie genügen uns folgende drei Rechnungen:

$$\begin{aligned} e_1 \times e_2 &= e_3 = e_1 \tilde\wedge e_2 \\ e_2 \times e_3 &= e_1 = e_2 \tilde\wedge e_3 \\ e_3 \times e_1 &= e_2 = e_3 \tilde\wedge e_1 \end{aligned}$$

So erhalten wir die Gleichheit dieser beiden wichtigen Produkte:

Satz Y5A: Kreuzprodukt = äußeres Produkt

(2) In Dimension 3 ist das Kreuzprodukt gleich dem äußeren Produkt:

$$\boxed{\times = \tilde\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3}$$

Manche Autor:innen schreiben hier kurz „$\times = \wedge$“. Streng besehen ist das schon syntaktisch falsch. Mit dem Hodge–Stern gilt „$(- \times -) = \star(- \wedge -)$“.

Anti/Symmetrisierung als Projektor

Allgemein haben wir $S(V)$ und $\Lambda(V)$ als Quotienten von $T(V)$ erklärt.

Satz Y5B: Anti/Symmetrisierung

Wir arbeiten über einem CRing $R \geq \mathbb{Q}$, der die rationalen Zahlen enthält. Dann können wir $S(V)$ und $\Lambda(V)$ als Teilräume von $T(V)$ darstellen:

(1) Wir definieren die **Symmetrisierung** $s_n : T^n \to T^n$ durch

$$s_n(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) := \tfrac{1}{n!} \textstyle\sum_{\tau \in \mathrm{S}_n} u_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\tau(n)}.$$

Das Bild $\bar{S}^n := \operatorname{Im}(s_n) \leq T^n$ besteht aus allen symmetrischen Tensoren. Der Quotient $T^n \twoheadrightarrow S^n$ schränkt sich ein zum Isomorphismus $\bar{S}^n \xrightarrow{\sim} S^n$.

(2) Wir definieren die **Antisymmetrisierung** $a_n : T^n \to T^n$ durch

$$a_n(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) := \tfrac{1}{n!} \textstyle\sum_{\tau \in \mathrm{S}_n} \operatorname{sign}(\tau) \cdot u_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\tau(n)}.$$

Hier besteht $\bar{\Lambda}^n := \operatorname{Im}(a_n) \leq T^n$ aus allen antisymmetrischen Tensoren. Der Quotient $T^n \twoheadrightarrow \Lambda^n$ schränkt sich ein zum Isomorphismus $\bar{\Lambda}^n \xrightarrow{\sim} \Lambda^n$.

Anti/Symmetrisierung als Projektor

Übung: Führen Sie die Anti/Symmetrisierung wie folgt aus.

(1) Wie definieren Sie die oben genutzte Operation $\mathrm{S}_n \curvearrowright T^n$? Warum ist sie wohldefiniert? Wie genau gelingt ihre Konstruktion?

(2) Wie definieren Sie die Eigenschaft „anti/symmetrisch" für $w \in T^n$? Warum hat s_n bzw. a_n als Bildmenge alle anti/symmetrischen Tensoren?

(3) Sind s_n und a_n Projektoren, also linear mit $s_n^2 = s_n$ und $a_n^2 = a_n$? Warum gilt $\mathrm{id}_{T^2} = s_2 + a_2$ für $n = 2$? Gilt dies ebenso für $n \geq 3$?

(4) Warum schränkt sich der Quotient ein zu einem Isomorphismus? Explizieren Sie den Isomorphismus $(\bar{\pi}, \bar{\rho}) : \bar{S}^n \cong S^n$ bzw. $(\bar{\pi}, \bar{\rho}) : \bar{\Lambda}^n \cong \Lambda^n$.

(5) Wiederholung: Wie definieren Sie das Produkt auf $S(V)$ und $\Lambda(V)$? Hochhebung: Wie definieren Sie das Produkt auf $\bar{S}(V)$ und $\bar{\Lambda}(V)$?

(6) Erklären und nutzen Sie dazu die Zerlegung $\mathrm{S}_{p+q} \cong \mathrm{Sh}_{p,q} \times \mathrm{S}_p \times \mathrm{S}_q$ mit $\mathrm{Sh}_{p,q} := \{\, \tau \in \mathrm{S}_{p+q} \mid \tau(1) < \ldots < \tau(p) \ \wedge\ \tau(p+1) < \ldots < \tau(p+q) \,\}$.

☺ Sie erhalten so die berühmten „Shuffle-Produkte".

Anti/Symmetrisierung im Matrixmodell

Aufgabe: Wiederholen Sie konkrete Modelle für $T^2(V) = V \otimes V$, etwa (1) das Matrixmodell X1E und (2) das Polynommodell X1F. Destillieren Sie daraus möglichst elegant ebenso konkrete Modelle für das anti/symmetrische Produkt $\Lambda^2(V) = V \wedge V$ bzw. $S^2(V) = V \vee V$.

Lösung: (1) Gemäß X1E nutzen wir $\otimes : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{n \times n} : (u, v) \mapsto uv^\intercal$. Dieses „dyadische Produkt" ist bilinear und hat die Basiseigenschaft. Die induzierte Abbildung $T^2(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{n \times n}$ ist daher ein Isomorphismus.

$$\wedge : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{n \times n}_{\text{anti}} : (u, v) \mapsto \tfrac{1}{2}(u \otimes v - v \otimes u)$$
$$\vee : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{n \times n}_{\text{sym}} : (u, v) \mapsto \tfrac{1}{2}(u \otimes v + v \otimes u)$$

Hier ist $\mathbb{K}^{n \times n}_{\text{anti}}$ bzw. $\mathbb{K}^{n \times n}_{\text{sym}}$ der $\mathbb{K}$–lineare Teilraum der anti/symmetrischen Matrizen, also diejenigen mit der Eigenschaft $A^\intercal = -A$ bzw. $S^\intercal = S$. Zur Anti/Symmetrisierung sei $2 \in \mathbb{K}^\times$. Die Skalierung mit $\frac{1}{2}$ darf entfallen.

Diese Abbildungen $\wedge, \vee$ sind bilinear und anti/symmetrisch. Dank Satz Y5B induzieren sie Isomorphismen $\Lambda^2(\mathbb{K}^n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{n \times n}_{\text{anti}}$ und $S^2(\mathbb{K}^n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{n \times n}_{\text{sym}}$.

Anti/Symmetrisierung im Matrixmodell

Beispiel: Für $V = \mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ erhalten wir die folgenden drei Produkte:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_1v_1 & u_1v_2 + u_2v_1 & u_1v_3 + u_3v_1 \\ u_2v_1 + u_1v_2 & 2u_2v_2 & u_2v_3 + u_3v_2 \\ u_3v_1 + u_1v_3 & u_3v_2 + u_2v_3 & 2u_3v_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & u_1v_2 - u_2v_1 & u_1v_3 - u_3v_1 \\ u_2v_1 - u_1v_2 & 0 & u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 & u_3v_2 - u_2v_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Dies ist eine Inkarnation des Kreuzprodukts $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vermöge

$$\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^{3 \times 3}_{\text{anti}} : \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \leftrightarrows \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}.$$

Satz Y5c: Tensoralgebren, Dualisierung als Abkürzung

Sei R ein CRing und darüber V ein zentraler linearer Raum.
Dazu haben wir die folgenden natürlichen Isomorphismen:

$$\begin{array}{lrcl} \text{(1) Multilinear} & \mathrm{Mul}_R(V,\dots,V;R) & \cong & T^n(V)^* \\ \text{(2) Symmetrisch} & \mathrm{Sym}_R(V,\dots,V;R) & \cong & S^n(V)^* \\ \text{(3) Alternierend} & \mathrm{Alt}_R(V,\dots,V;R) & \cong & \Lambda^n(V)^* \end{array}$$

Hier steht $\mathrm{Mul} \leq \mathrm{Fun}(V^n, R)$ für den Teilraum aller multilinearen, darin Sym und Alt für die symmetrischen bzw. alternierenden Abbildungen.

Dies ist eine beliebte Abkürzung zum Dual der obigen Tensoralgebren. Die linke Seite ist erfreulich konkret gegeben als eine Abbildungsmenge.

Beispiel: Für Differentialformen nutzen wir $\Lambda^n(V)^*$. Wer es eilig hat und sich $\Lambda^n(V)$ ersparen möchte, kann direkt mit $\mathrm{Alt}_R(V,\dots,V;R)$ arbeiten.

Aufgabe: Konstruieren Sie die oben behaupteten Isomorphismuspaare. Wie gelingt Ihnen dies wohldefiniert? Wie nutzen Sie geschickt die UAE? Wie überprüfen Sie, dass das so konstruierte Paar zueinander invers ist?

Satz Y5D: Tensorprodukt, Dualisierung als Abkürzung

(1) Sei V_i ein (R_{i-1}, R_i)–Bimodul. Als (R_n, R_0)–Rechtsmoduln gilt

$$\mathrm{Mul}_{(R_1,\dots,R_n)}(V_1,\dots,V_n;R_n) \cong (V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^*.$$

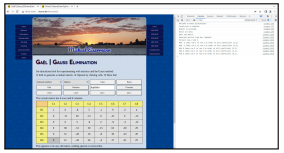
(2) Ist jeder Raum V_i rechtsseitig frei mit endlicher Basis, so auch

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \cong \mathrm{Mul}_{(R_1,\dots,R_n)}(V_1,\dots,V_n;R_n)^*.$$

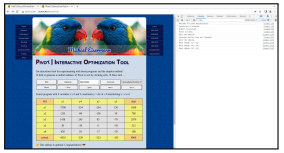
Die linke Seite ist hierbei erfreulich konkret gegeben als die Menge aller multilinearen Abbildungen $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to R$. Die rechte Seite dagegen verbindet Tensorprodukt und Dualisierung, das ist etwas aufwändiger. Für die zweite Aussage nutzen wir das Bidual über dem Ring R_n.

Kapitel Z

Lineare Optimierung und Dantzigs Simplexverfahren



Gauß
⟷
Dantzig



We are all familiar with methods for solving linear equation systems [...] On the other hand, the study of linear inequality systems excited virtually no interest until the advent of game theory in 1944 and linear programming.

George Bernard Dantzig (1914–2005)

Inhalt dieses Kapitels Z

1. Lineare Optimierung durch Basiswechsel und Simplexverfahren
   - Optimierung durch wiederholte Basiswechsel
   - Lineare Programme und Optimierung
   - Dualität und zertifizierte Lösungen
2. Hauptsatz: vom heuristischen Verfahren zum Algorithmus
   - Der Hauptsatz des Simplexverfahrens
   - Phase 1 und 2 des Simplexverfahrens
   - Laufzeit von Simplexalgorithmen
3. Rückblick und Ausblick auf Ihr Studium
   - LA Pride: Lineare Algebra und stolz darauf!
   - Mathematik ist wunderschön und nützlich.

Motivation und Überblick

Die **Lineare Optimierung**, aka Lineare Programmierung, ist ein zentrales Verfahren der Optimierung (*operations research*). Sie optimiert (maximiert oder minimiert) eine lineare Zielfunktion unter Einhaltung linearer Nebenbedingungen (Gleichungen und Ungleichungen). Anwendung findet sie überall, von Produktionsplanung über Transportoptimierung bis zum Management von Investitionen (*portfolio management*).

Das von George Bernard Dantzig entwickelte **Simplexverfahren** gehört zweifellos zu den Top-Ten der wichtigsten Algorithmen. Gute Nachricht: Er ist nicht schwieriger als der Gauß–Algorithmus der Linearen Algebra; allein Terminierung und Laufzeit sind schwieriger – und interessanter.

Ich möchte Ihnen hier dieses wunderbare Verfahren näher bringen, soweit möglich sogar dafür begeistern. Vor allem jedoch möchte ich, dass Sie es praktisch nutzen können, um konkrete Probleme zu lösen. Es geht dabei um ganz handfeste Matrizenrechnung, und der beliebte Gauß-Algorithmus verwandelt sich nun in Dantzigs Simplex-Verfahren.

Motivation und Überblick

Lineare Optimierung ist eine wirkmächtige Anwendung (affin-)linearer Methoden und wirft neues Licht auf die allgegenwärtige Matrixdualität, hier als untere und obere Schranken bei der Suche nach dem Optimum. Zugegeben, der erste Zugang ist nicht ganz leicht. Aber es lohnt sich!

Harmonisch wie selten vereinen sich schöne Aspekte der Mathematik: Lineare Algebra (Gauß), Geometrie (Polytope), Analysis (Kompaktheit), Numerik (Optimierung), Wahrscheinlichkeit (Nash–Gleichgewichte), Matrixdualität (für Ungleichungen), Zertifizierung (Schranken, Dualitätslücke), Algorithmik (Terminierung, Laufzeit), uvm.

Das Simplexverfahren hat seinen historischen Ursprung in der Spieltheorie, und es löst auch heute noch als braves Arbeitspferd eine phantastische Vielfalt von Problemen, hier und überall sonst.

Wann, wenn nicht jetzt?
Wo, wenn nicht hier?
Wer, wenn nicht wir?
John F. Kennedy (1917–1963)

Panorama: einige der wichtigsten Algorithmen

Welche Algorithmen scheinen Ihnen die wichtigsten? Einige Vorschläge: (Diese Liste können Sie durch viele würdige Kandidaten fortsetzen.)

Euklidischer Algorithmus zur Berechnung des ggT in $\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}[X]$, uvm.

Schnelle Arithmetik, Primzahltests und Public Key Cryptography (PKC)

Gröbner–Basen zur Lösung polynomieller Gleichungssysteme

Newtons Methode, Linearisierung zur iterativen Nullstellennäherung

Matrixzerlegung, Gauß (LU), Householder-Givens (QR), Cholesky uvm.

Lineare Optimierung, Simplexverfahren, Innere-Punkt-Methoden uvm.

Schnelles Suchen und Sortieren, Quick-/Merge-/Heap-Sort uvm.

Schnelle Fourier–Transformation (FFT) zur Signalverarbeitung

Datenkompression mittels JPEG, MPEG, MP3, Wavelets, uvm.

Kalman–Filter zur Zeitreihenanalyse und Zustandsschätzung

Monte-Carlo-Methode zur Erwartungsschätzung durch Sampling

Googles PageRank zur Popularitätswertung von Internetseiten

Panorama: einige der wichtigsten Algorithmen

Die Informatik steht in regem Austausch mit allen Wissenschaften, ganz besonders intensiv mit der Mathematik, einer ihrer historischen Wurzeln. Neben den klassischen Bereichen der **angewandten Mathematik** und **Numerik** erblühen so neue Gebiete der **Computational Mathematics**:

Computer Algebra Systems (CAS), Computational Group Theory (CGT), Computational Number Theory (CNT), Computational Geometry (CG), Computational Statistics, Data Science und Machine Learning (ML), Algorithmic Game Theory (AGT), Mathematical Economics, etc.

Meine obige Liste ist nicht ganz willkürlich, doch naturgemäß subjektiv; sie reflektiert persönliche Vorlieben in Algebra, Numerik und Stochastik.

Inspiriert wurde sie von ähnlichen Top-Ten-Listen in *Computing in Science and Engineering* (2000), dem *Princeton Companion to Applied Mathematics* (2016) und dem Buch *Modern Computer Algebra* (2013).

Natürlich hängt das Ranking von der Präzisierung der Frage ab:
Was gilt als ein Algorithmus? Wie bewerten wir seine Wichtigkeit?
Ich würdige hier grundlegende Bedeutung und häufige Anwendung.

Panorama: einige der wichtigsten Algorithmen

Zwei dieser Algorithmen sind (vereinfacht) seit der Antike bekannt; ihre anhaltende Aktualität und Entwicklungsfähigkeit ist bemerkenswert. Euklid (um 300 v.u.Z.) nutzte seinen Algorithmus für natürliche Zahlen, er gilt ebenso für Polynome und allgemein in jedem euklidischen Ring. Die Methode von Newton (1643–1727) zur Nullstellennäherung nutzte bereits Heron von Alexandria (10–70 u.Z.) in einfachen Spezialfällen.

Alle weiteren Algorithmen sind Entdeckungen des 20. Jahrhunderts und boomen seit Entwicklung und durch Einsatz elektronischer Computer. Einige lohnen sich bereits deutlich spürbar für größere Handrechnungen, meist jedoch trumpfen sie für ernsthaft große Probleme erst richtig auf. Sie sind nicht mehr wegzudenken aus realistisch-großen Anwendungen in Natur- und Ingenieurwissenschaften, Industrie, Ökonomie, Militär, …

Kryptographie, Datenkompression, PageRank und Data Mining erblühen insbesondere durch die rasante Popularisierung des Internets seit 1990. In diesen Bereichen ist die Mathematik auch im Alltag direkt spürbar und deutlich sichtbar für alle, die unter die Oberfläche schauen.

Panorama: einige der wichtigsten Algorithmen

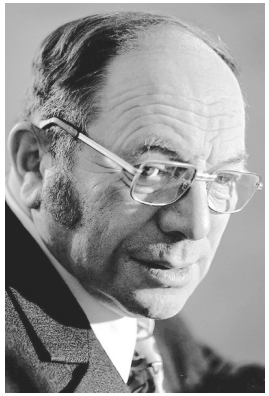
Jede große Entwicklung des 20. Jahrhunderts, etwa die Raumfahrt, benötigte diese algorithmischen Grundlagen – und noch viele weitere. Zu Beginn des 21. Jahrhunderts ist absehbar, dass auch die nächsten großen Entwicklungen darauf aufbauen und die Werkzeuge erweitern. Durch Data Science und Machine Learning werden die algorithmischen Grundlagen nicht ersetzt oder überflüssig, sondern weiter ausgebaut.

Schon heute ist es kaum möglich, sich auf eine „Top-Ten“ zu einigen. In Zukunft wird dies noch schwieriger, da die diversen Teilgebiete der Computational Mathematics weiter gedeihen und expandieren werden. Vielleicht sollte ich daher besser von der „Top-one-hundred“ sprechen, allgemein von Top-Algorithmen je nach Gebiet und Problemstellung. Differenzierung und Spezialisierung werden weiter fortschreiten.

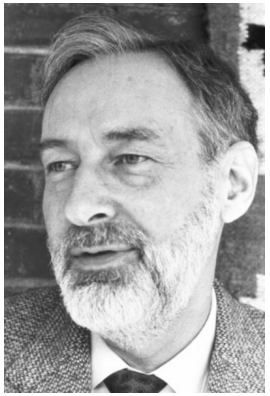
In diesem Kapitel geht es um Optimierung, speziell lineare Optimierung, vor allem um Dantzigs Simplexverfahren zur Lösung linearer Programme. Dies gehört zweifellos zu den Top-Ten der wichtigsten Algorithmen. Zur würdigen Einordnung habe ich das Gesamtpanorama skizziert.

Lineare Optimierung: historischer Überblick

Lineare Optimierung ist Lineare Algebra über $\mathbb{R}$ mit Variablen in $\mathbb{R}_{\geq 0}$.
Eine schön illustrierte Einführung und motivierenden Überblick bietet
TomS: *The Art of Linear Programming*. youtu.be/E72DWgKP_1Y.



Leonid V. Kantorovich
(St. Petersburg 1912 – Moskau 1986)



Tjalling C. Koopmans
(Wijdemeren 1910 – New Haven/CT 1985)

George B. Dantzig
(Portland/OR 1914 – Stanford/CA 2005)

Lineare Optimierung: historischer Überblick

Lineare Probleme treten in vielen Anwendungen auf, insbesondere zur Optimierung. Sie bilden extrem ausdrucksstarke und vielseitige Modelle und zeigen faszinierende, oft auch unerwartete Verbindungen zwischen verschiedenen Gebieten der angewandten und der reinen Mathematik.

Die Forschung zur Optimierung intensiviert sich zu Beginn des zweiten Weltkrieges. Um 1939–1941 untersuchen der sowjetische Mathematiker Leonid Kantorovich (1912–1986) und der niederländisch-amerikanische Ökonom Tjalling Koopmans (1910–1985) systematisch Transport- und Optimierungsprobleme. Für ihre bahnbrechenden Arbeiten erhalten sie 1975 den Wirtschafts-Nobelpreis, www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1975.

Als Dritter im Bunde zusammen mit Kantorovich und Koopmans gilt der US-amerikanische Mathematiker George Bernard Dantzig (1914–2005) als Begründer der Linearen Optimierung. Berühmt wurde Dantzig durch das von ihm entwickelte Simplexverfahren von 1947. Zusammen mit John von Neumann und Oskar Morgenstern baute er die Beziehungen zur Spieltheorie aus. Er erhielt 1976 die National Medal of Science.

Lineare Optimierung: historischer Überblick

George Dantzig studierte Mathematik an der University of Maryland (BSc) und an der University of Michigan (MSc). Allerdings fand er das Studium zu abstrakt und begeisterte sich nur für Statistik. Daher ging er 1939 nach Berkeley um bei Jerzy Neyman (1894–1981) zu promovieren. Um Neyman entstand eine führende Schule mathematischer Statistik.

George Dantzig ist der Held einer *urbanen Legende*. Als er einmal zu spät zur Vorlesung von Professor Neyman kam, standen an der Tafel zwei bislang unbewiesene Vermutungen aus der Statistik. Dantzig hielt sie versehentlich für Hausaufgaben und löste sie in den folgenden Tagen. Auf Neymans Vorschlag wurde dies zu Dantzigs Doktorarbeit.

Diese Geschichte kursiert in vielen Varianten, im Laufe der Zeit wurden Namen geändert und Details ausgeschmückt. Sie wurde zur Erbauungsgeschichte in diversen Predigten und zum Sinnbild für *positives Denken*. Diese unglaubliche Geschichte ist tatsächlich eine wahre Begebenheit! Anders als die meisten Legenden lässt sich ihr Ursprung gut belegen, siehe www.snopes.com/fact-check/the-unsolvable-math-problem.

Literatur zur linearen Optimierung

Lehrbücher speziell zur linearen Optimierung und ihren Grundlagen:

J. Matoušek, B. Gärtner: *Understanding and Using Linear Programming*. Springer 2006 (mitreißende Einführung, traditionell unschöne Notation)

R.J. Vanderbei: *Linear Programming*. (4th ed.) Springer 2014

V. Chvátal: *Linear Programming*. Freeman and Company 1983

G.B. Dantzig: *Linear Programming and Extensions*. RAND 1963

(Theorie und Anwendung werden umfassend erklärt. Die Darstellung gewänne sehr durch Tuckers Notation: Klarheit, Eleganz, Effizienz! Ich hoffe noch auf angemessen ästhetische Lehrbücher, siehe Z131.)

Lehrbücher allgemein zur Optimierung und numerischen Aspekten:

C. Geiger, C. Kanzow: *Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*. Springer 2002; … *unrestringierter Optimierungsaufgaben*. Springer 1999

S. Boyd, L. Vandenberghe: *Convex optimization*. CUP 2004

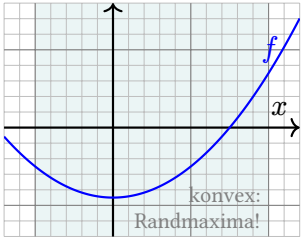
F. Jarre, J. Stoer: *Optimierung*. Springer 2004

Software: en.wikipedia.org/wiki/List_of_optimization_software

Optimierung: allgemeine Problemstellung

Die mathematische **Optimierung** untersucht Probleme folgender Art:

Maximiere die Zielfunktion	$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$
unter den Nebenbedingungen	$g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0.$



Schule: Max/Minimiere $f(x) = ax^2 + bx + c$ unter den Nebenbedingungen $x_0 \leq x \leq x_1$.

Allgemeine Aufgabe der Kurvendiskussion: Finde alle Extremstellen von $f : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$.

Die Frage betrachten wir mehrdimensional. Sie tritt in Anwendungen extrem häufig auf:

Lineare Optimierung (LP): Hier sind $f, g_1, \dots, g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affin-linear.
Quadratische Optimierung (QP): Hier ist $f(x) = x^\top Qx + cx$ quadratisch.
Konvexe Optimierung (CP): Hier sind $f, g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nur konvex.

Ebenso: Die Minimierung von f entspricht der Maximierung von $-f$.
Auch Gleichungen $g_i(x) = 0$ kommen vor, also $g_i(x) \geq 0$ und $g_i(x) \leq 0$.

Optimierung: allgemeine Problemstellung

Oft müssen wir zwischen mehreren Alternativen $x \in X$ entscheiden. Ziel der **Optimierung** [*optimization* oder *operations research*] ist es, unter allen möglichen / zulässigen Optionen die beste(n) zu finden.

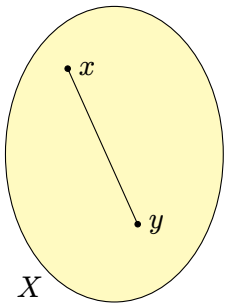
Hierbei kann die Menge X endlich / diskret sein (diskrete Optimierung), etwa $X = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid g_1(x), \dots, g_m(x) \geq 0\}$ (ganzzahlige Optimierung), oder kontinuerlich, speziell etwa $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x), \dots, g_m(x) \geq 0\}$.

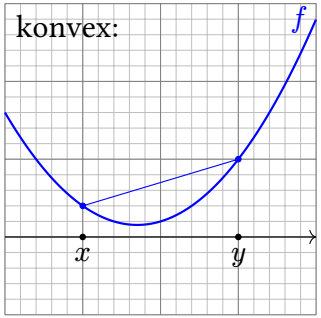
Gegeben ist die **Zielfunktion** $f : X \to \mathbb{R}$, etwa Kosten oder Ertrag. Gesucht ist $\inf f$, und wenn möglich ein/alle $x \in X$ mit $f(x) = \min f$; entsprechend $\sup f$, und wenn möglich ein/alle $x \in X$ mit $f(x) = \max f$.

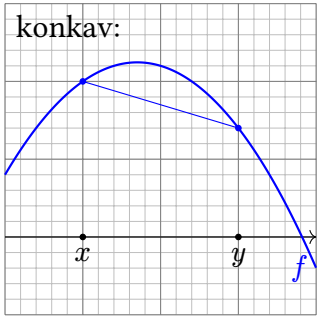
Die Elemente $x \in X$ heißen **zulässig**; sie erfüllen alle erforderlichen Nebenbedingungen. Die Menge X heißt daher auch **Erfüllungsmenge**. Im Falle $X = \emptyset$ heißt das Problem **unerfüllbar**. Wird das Infimum bzw. Supremum von f nicht angenommen, so heißt das Problem **unlösbar**.

Neben **Optimierung** ist auch der traditionelle Begriff **Programmierung** gebräuchlich. Die Bezeichnung „Programm“ bedeutet schlicht „Planung“, also ausnahmsweise nicht die Erstellung eines Computerprogramms.

Optimierung: allgemeine Problemstellung







Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn für alle Punkte $x, y \in X$ und $t \in [0, 1]$ auch der Zwischenpunkt $z = (1-t)x + ty$ in der Menge X liegt.

Wir nennen $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ **konvex**, wenn zudem auf ganz X gilt:

$$f((1-t)x + ty) \;\leq\; (1-t)f(x) + tf(y)$$

Im Falle „$<$“ für alle $x \neq y$ in X und alle $t \in \,]0, 1[$ heißt f **strikt konvex**.
Entsprechend nennen wir f **(strikt) konkav**, wenn $-f$ (strikt) konvex ist.

Optimierung: allgemeine Problemstellung

Fingerübungen zur Wiederholung und zur Festigung der Begriffe:

Übung: Jede affin-lineare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto bx + c$ ist konvex und konkav. Die quadratische Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto x^\top Ax + bx + c$ mit symmetrischer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann (strikt) konvex / konkav, wenn A positiv / negativ semidefinit ist (bzw. strikt definit).

Übung: Sei $f : \mathbb{R} \supset [a, b] \to \mathbb{R}$ einmal bzw. zweimal differenzierbar. Genau dann ist f (strikt) konvex / konkav, wenn f' (strikt) wächst / fällt, also $f'' \geq 0$ / $f'' \leq 0$ gilt (im strikten Falle entsprechend $f'' > 0$ / $f'' < 0$). Wie lauten die Kriterien für $\mathscr{C}^2$–Funktionen $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$?

Übung: Jeder Durchschnitt $X = \bigcap_{i \in I} X_i$ konvexer Mengen ist konvex. Jede Positivkombination $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$ konvexer Funktionen ist konvex. Ist $f : \mathbb{R}^n \supseteq X \to \mathbb{R}$ konvex, so auch die Menge $\{x \in X \mid f(x) \leq c\}$. Ist $f_i : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konvex für jedes $i \in I$, so auch $f = \sup_{i \in I} f_i$.

Übung: Für jedes konvexe Problem gilt: Jedes lokale Minimum ist ein globales Minimum. Die Menge aller optimalen Punkte ist konvex. Ist die Zielfunktion strikt konvex, so ist die Optimalstelle eindeutig.

Erstes Beispiel: eindimensionale Optimierung

Aufgabe: Maximieren Sie die Zielfunktion $z(x) = 3x + 5$ unter den Nebenbedingungen $x \geq 0, \quad x + 2 \geq 0, \quad -2x + 3 \geq 0, \quad -3x + 4 \geq 0.$

Lösung: Der Ursprung $x = 0$ ist zulässig. Also gilt $\max z \geq z(0) = 5$.

Die Funktion $z(x) = 3x + 5$ wächst monoton mit x: Steigung $+3 > 0$. Ausgehend von $x = 0$ wollen wir daher x möglichst weit erhöhen.

$$\begin{aligned} & x \geq 0 && \Longrightarrow \text{ keine Einschränkung} \\ y_1 := \quad & x + 2 \geq 0 && \Longrightarrow \text{ keine Einschränkung} \\ y_2 := \quad & -2x + 3 \geq 0 && \Longrightarrow \text{ Einschränkung } x \leq 3/2 \\ y_3 := \quad & -3x + 4 \geq 0 && \Longrightarrow \text{ Einschränkung } x \leq 4/3 \end{aligned}$$

Der Engpass entsteht demnach in der letzten Bedingung $y_3 \geq 0$. Somit maximiert $x = 4/3$, und wir erhalten $\max z = z(4/3) = 9$.

☺ Das ist eine schöne Anwendung solider schulischer Ausbildung: Es genügen eine gute Notation und sorgfältige Fallunterscheidungen.

⚠ Ersetzen wir $x + 2 \geq 0$ durch $x - 2 \geq 0$, so werden die NB unerfüllbar!

Erstes Beispiel: eindimensionale Optimierung

Unser Ziel ist im Folgenden, solche Probleme der linearen Optimierung in höheren Dimensionen zu lösen. Das Simplexverfahren nutzt dabei die eindimensionale Optimierung wie oben auf der Suche nach Engpässen.

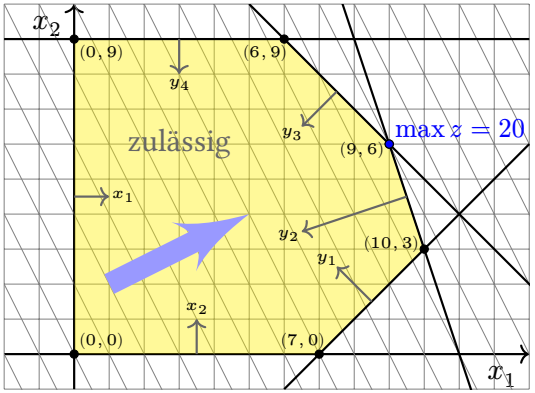
Da wir nun mehrere Variablen $x_1, \dots, x_n \geq 0$ haben und auch mehrere Nebenbedingungen $y_1, \dots, y_m \geq 0$, benötigen wir eine übersichtliche und effiziente Buchhaltung. Dies erreichen wir durch die Schreibweise als Vektoren und Matrizen: $x \geq 0$ und $y = Ax + b \geq 0$ und $z(x) = cx + d$.

Die geniale Idee von Dantzig (1947) war es, das Problem zu lösen mit Zeilenoperationen wie im Gauß–Algorithmus. Hurra, Lineare Algebra! Ich führe dieses Verfahren an einem repräsentativen Beispiel aus. Wenn Sie genau aufpassen, dann können Sie es danach selbst.

Wie schon beim Gauß–Algorithmus bieten sich beim Simplexverfahren mehrere Wege, die Methode zu erfahren, zu begreifen und zu erlernen: (1) durch zahlreiche, gut gewählte Beispiele, (2) durch Formulierung des allgemeinen Verfahrens, (3) durch sorgsame Programmierung und Tests, (4) durch formalen Beweis der Richtigkeit des Verfahrens.

Zweites Beispiel: zweidimensionale Optimierung

Aufgabe: Maximieren Sie die Zielfunktion $z(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - 4$.



Nichtnegativität: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} y_1 &:= 7 - x_1 + x_2 && \geq 0 \\ y_2 &:= 33 - 3x_1 - x_2 && \geq 0 \\ y_3 &:= 15 - x_1 - x_2 && \geq 0 \\ y_4 &:= 9 - x_2 && \geq 0 \end{aligned}$$

In dieser „kanonischen“ Formulierung sind alle Variablen x_i, y_j nicht-negativ.

☺ Anwendung: Produkte x_1, x_2; Ressourcen y_1, y_2, y_3, y_4; Profit z.
Die zweidimensionale Optimierung können wir noch graphisch lösen; hierzu genügt uns Sorgfalt und etwas Schulmathematik der Mittelstufe. Für beliebige Dimension entwickeln wir ein algebraisches Verfahren; es beruht auf sorgsamer Buchführung für Un/Gleichungssysteme.

Zweites Beispiel: zweidimensionale Optimierung

Sie verkaufen zwei Produkte mit Gewinn 2€ bzw. 1€ bei 4€ Fixkosten. Bei der Produktion müssen Sie gewisse Nebenbedingungen einhalten.

y_1: Sie haben 7 Teile vom Typ 1, Produkt 1 verbraucht eines, Produkt 2 setzt eines frei. (Das ist vielleicht überraschend, aber durchaus denkbar.)
y_2: Sie haben 33 Teile vom Typ 2, jedes Produkt benötigt davon 3 bzw. 1.
y_3: Sie haben 15 Teile vom Typ 3, jedes Produkt benötigt davon genau 1.
y_4: Sie haben 9 Teile vom Typ 4, nur Produkt 2 benötigt davon eines.

Jede unserer sechs Bedingungen $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$ definiert eine abgeschlossene Halbebene. Diese sind in obiger Graphik eingetragen.

Alle Bedingungen sollen gelten, das entspricht dem logischen „Und“: Der Durchschnitt unserer sechs Halbebenen ist ein abgeschlossenes Polygon $P \subset \mathbb{R}^2$. Allgemein erhalten wir ein n–dimensionales Polytop.

In unserem Fall ist die Erfüllungsmenge P beschränkt, somit kompakt. Die Zielfunktion $z : P \to \mathbb{R}$ ist affin-linear, somit stetig, nimmt also ein Maximum an. Unserer Graphik entnehmen wir $\max z = z(9, 6) = 20$.

☺ Das folgende Simplexverfahren löst das Problem elegant algebraisch.

Tuckers Tableaux und Dantzigs Simplexverfahren

Anfangs betrachten wir $x_1, x_2 \geq 0$ als **freie Variablen**. Hiervon abhängig sind die **Schlupfvariablen** $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$ sowie die **Zielfunktion** z.

	x_1	x_2	1
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
z	2	1	-4

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	1	-1	0	0	0	7
-3	-1	0	-1	0	0	33
-1	-1	0	0	-1	0	15
0	-1	0	0	0	-1	9
2	1	0	0	0	0	-4

Der Ursprung $x_1 = x_2 = 0$ ist zulässig: $y_1 = 7$, $y_2 = 33$, $y_3 = 15$, $y_4 = 9$.
Wir maximieren $x_1 \geq 0$, bis zum Engpass $y_1 \geq 0$, Basiswechsel $x_1 \leftrightarrow y_1$:

	y_1	x_2	1
x_1	-1	1	7
y_2	3	-4	12
y_3	1	-2	8
y_4	0	-1	9
z	-2	3	10

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	1	-1	0	0	0	7
0	-4	3	-1	0	0	12
0	-2	1	0	-1	0	8
0	-1	0	0	0	-1	9
0	3	-2	0	0	0	10

Tuckers Tableaux und Dantzigs Simplexverfahren

Nun sind die Variablen $y_1, x_2 \geq 0$ frei, und $x_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$ sind Schlupf.
Wir notieren links die Kurzfassung und rechts das erweiterte Tableau.

	y_1	x_2	1
x_1	-1	1	7
y_2	3	-4	12
y_3	1	-2	8
y_4	0	-1	9
z	-2	3	10

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	1	-1	0	0	0	7
0	-4	3	-1	0	0	12
0	-2	1	0	-1	0	8
0	-1	0	0	0	-1	9
0	3	-2	0	0	0	10

Der Ursprung $y_1 = x_2 = 0$ ist zulässig, denn wir haben Engpässe beachtet.
Wir maximieren $x_2 \geq 0$, bis zum Engpass $y_2 \geq 0$, Basiswechsel $x_2 \leftrightarrow y_2$:

	y_1	y_2	1
x_1	$-1/4$	$-1/4$	10
x_2	$3/4$	$-1/4$	3
y_3	$-1/2$	$1/2$	2
y_4	$-3/4$	$1/4$	6
z	$1/4$	$-3/4$	19

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	0	$-1/4$	$-1/4$	0	0	10
0	-1	$3/4$	$-1/4$	0	0	3
0	0	$-1/2$	$1/2$	-1	0	2
0	0	$-3/4$	$1/4$	0	-1	6
0	0	$1/4$	$-3/4$	0	0	19

Tuckers Tableaux und Dantzigs Simplexverfahren

	y_1	y_2	1
x_1	$-1/4$	$-1/4$	10
x_2	$3/4$	$-1/4$	3
y_3	$-1/2$	$1/2$	2
y_4	$-3/4$	$1/4$	6
z	$1/4$	$-3/4$	19

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	0	$-1/4$	$-1/4$	0	0	10
0	-1	$3/4$	$-1/4$	0	0	3
0	0	$-1/2$	$1/2$	-1	0	2
0	0	$-3/4$	$1/4$	0	-1	6
0	0	$1/4$	$-3/4$	0	0	19

Der Ursprung $y_1 = y_2 = 0$ ist zulässig, denn wir haben Engpässe beachtet.
Wir maximieren $y_1 \geq 0$, bis zum Engpass $y_3 \geq 0$, Basiswechsel $y_1 \leftrightarrow y_3$:

	y_3	y_2	1
x_1	$1/2$	$-1/2$	9
x_2	$-3/2$	$1/2$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$3/2$	$-1/2$	3
z	$-1/2$	$-1/2$	20

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	0	0	$-1/2$	$1/2$	0	9
0	-1	0	$1/2$	$-3/2$	0	6
0	0	-1	1	-2	0	4
0	0	0	$-1/2$	$3/2$	-1	3
0	0	0	$-1/2$	$-1/2$	0	20

Diese LP sind äquivalent, das letzte ist optimal: Wir lesen $\max z = 20$ ab.
Probe durch Einsetzen: Wir haben $z = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_2 + 20 = 2x_1 + x_2 - 4$.

Tuckers Tableaux und Dantzigs Simplexverfahren

☺ Unsere Aufgabe lösen wir durch drei elementare Basiswechsel. Jeder ist offensichtlich eine Äquivalenzumformung: Das Problem wird umformuliert von $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ und $z(x) = cx + d \to \max!$ zu $x' \geq 0$ und $A'x' + b' \geq 0$ und $z'(x') = c'x' + d' \to \max!$ und zurück.

Dabei geht keine Information verloren: Beide Formulierungen haben dieselben Lösungen und lassen sich leicht ineinander umrechnen.

☺ Geometrisch entspricht dies einer affin-linearen Transformation: Wir wechseln vom Koordinatensystem (x_1, x_2) zu (y_1, x_2) zu (y_1, y_2) zu (y_3, y_2). In Letzterem können wir die Lösung direkt ablesen!

Der Ursprung unseres jeweiligen Koordinatensystems wandert von Ecke zu Ecke in unserem Polytop (Seite Z019). Wir laufen jeweils entlang einer Kante, zum Beispiel in Richtung des stärksten Anstiegs von z.

Daher hat das Verfahren seinen Namen: Wir bewegen uns entlang von Kanten, also 1–Simplizes im Rand des Polytops. Alternativ könnten wir auch durchs Innere laufen, diese Idee nutzen „Innere-Punkt-Methoden“.

Projekt: Erproben Sie möglichst viele Varianten dieser Umformungen.

Elementarer Basiswechsel zur Umformung

	x_1	x_2
y_1	a	b
y_2	c	d

$\xleftrightarrow[\text{wechsel}]{\text{Basis-}}$

	y_1	x_2
x_1	$\frac{1}{a}$	$-\frac{b}{a}$
y_2	$\frac{c}{a}$	$d-\frac{bc}{a}$

$$y_1 = ax_1 + bx_2 \qquad x_1 = \frac{1}{a}y_1 - \frac{b}{a}x_2$$

$$y_2 = cx_1 + dx_2 \qquad y_2 = \frac{c}{a}y_1 + \left[d - \frac{bc}{a}\right]x_2$$

☺ Erfüllbarkeit und Lösbarkeit und Maximalwert bleiben dabei erhalten. Außerhalb des Kreuzes sehen wir genau den Gauß–Algorithmus.

☺ Freie Variablen / Spalten transformieren sich genauso wie abhängige Variablen / Nebenbedingungen / Zeilen, bis auf ein negatives Vorzeichen.

☺ Tucker–Tableaux betonen die Dualität der Linearen Optimierung.

Elementarer Basiswechsel und Dualität

	x_1	x_2
y_1	a	b
y_2	c	d

$\xleftrightarrow[\text{wechsel}]{\text{Basis-}}$

	y_1	x_2
x_1	$\frac{1}{a}$	$-\frac{b}{a}$
y_2	$\frac{c}{a}$	$d-\frac{bc}{a}$

$\updownarrow$ trans-negieren $\qquad\qquad$ $\updownarrow$ trans-negieren

	y_1^*	y_2^*
x_1^*	$-a$	$-c$
x_2^*	$-b$	$-d$

$\xleftrightarrow[\text{wechsel}]{\text{Basis-}}$

	x_1^*	y_2^*
y_1^*	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{c}{a}$
x_2^*	$\frac{b}{a}$	$-d+\frac{bc}{a}$

Lineare Optimierung durch das Simplexverfahren

	x_1	x_2	
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
z	2	1	-4

Der Ursprung $x_1 = x_2 = 0$ ist zulässig, denn $y_1 = 7$, $y_2 = 33$, $y_3 = 15$, $y_4 = 9$.
Wir wollen x_1 möglichst weit erhöhen.
Der Engpass entsteht durch $y_1 \geq 0$.
Wir ersetzen $y_1 = -x_1 + x_2 + 7$
durch $x_1 = -y_1 + x_2 + 7$.

$$\begin{aligned} y_2 &= -3x_1 - 1x_2 + 33 = +3y_1 - 4x_2 + 12 \\ y_3 &= -1x_1 - 1x_2 + 15 = +1y_1 - 2x_2 + 8 \\ y_4 &= +0x_1 - 1x_2 + 9 \;\; = +0y_1 - 1x_2 + 9 \\ z &= +2x_1 + 1x_2 - 4 \;\; = -2y_1 + 3x_2 + 10 \end{aligned}$$

$x_1 \Updownarrow y_1$

	y_1	x_2	
x_1	-1	1	7
y_2	3	-4	12
y_3	1	-2	8
y_4	0	-1	9
z	-2	3	10

Der Ursprung $y_1 = x_2 = 0$ ist zulässig;
er entspricht der Ecke $(x_1, x_2) = (7, 0)$.
Wir wollen x_2 möglichst weit erhöhen.
Der Engpass entsteht durch $y_2 \geq 0$.
Wir ersetzen $y_2 = 3y_1 - 4x_2 + 12$
durch $x_2 = \frac{3}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + 3$.

Lineare Optimierung durch das Simplexverfahren

$x_2 \Updownarrow y_2$

	y_1	y_2	
x_1	$-1/4$	$-1/4$	10
x_2	$3/4$	$-1/4$	3
y_3	$-1/2$	$1/2$	2
y_4	$-3/4$	$1/4$	6
z	$1/4$	$-3/4$	19

... Basiswechsel ...

Der Ursprung $y_1 = y_2 = 0$ ist zulässig;
er entspricht der Ecke $(x_1, x_2) = (10, 3)$.
Wir wollen y_1 möglichst weit erhöhen.
Der Engpass entsteht durch $y_3 \geq 0$.
Wir ersetzen $y_3 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + 2$
durch $y_1 = -2y_3 + y_2 + 4$.

$y_1 \Updownarrow y_3$

	y_3	y_2	
x_1	$1/2$	$-1/2$	9
x_2	$-3/2$	$1/2$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$3/2$	$-1/2$	3
z	$-1/2$	$-1/2$	20

... Basiswechsel ...

Der Ursprung $y_3 = y_2 = 0$ ist zulässig;
er entspricht der Ecke $(x_1, x_2) = (9, 6)$.
Die Zielfunktion ist hier maximal!
Wir erhalten das Ergebnis: $\max z = 20$.
Probe: Wir haben $z = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_2 + 20$,
und Einsetzen ergibt $z = 2x_1 + x_2 - 4$.

Definition Z1A: lineare Optimierung / Programmierung

Ein **lineares Programm** (LP, lineare Optimierung) hat die Normalform

$$x \geq 0, \quad y(x) = Ax + b \geq 0, \quad z(x) = cx + d \to \max!, \quad \text{kurz} \quad z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$$

mit Daten $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $d \in \mathbb{R}$; gesucht ist $x \in \mathbb{R}^n$.
Das LP ist **optimal**, wenn $c \leq 0 \leq b$ gilt; dann löst $x = 0$ das Problem.

(NN) **Nichtnegativität** $x \geq 0$, ausgeschrieben: $x_1 \geq 0, \ \dots, \ x_n \geq 0$.

(NB) **Nebenbedingungen** $y := Ax + b \geq 0$, ausgeschrieben:

$$\begin{array}{rcccccccc} y_1 := & a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & + & b_1 & \geq & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m := & a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & + & b_m & \geq & 0 \end{array}$$

Dies definiert das **Polytop** $P(A,b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, \ Ax + b \geq 0\}$.
Punkte $x \in P(A,b)$ heißen **zulässig**, die NB heißen dann **erfüllbar**.

(Z) Die **Zielfunktion** ist $z : P(A,b) \to \mathbb{R} : z(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + d$.
Ist $P(A,b) \neq \emptyset$ und z nach oben **beschränkt**, so heißt das LP **lösbar**.

Die Daten $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ definieren die **Problemstellung** wie oben erklärt.
Zwei Ausnahmen können vorkommen und führen zur Unlösbarkeit:

1. Die Bedingungen $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ sind **nicht erfüllbar**:
   Das Polytop ist in diesem Falle leer, also $P(A,b) = \emptyset$.
2. Die Funktion $z : P(A,b) \to \mathbb{R} : x \mapsto cx + d$ **wächst unbeschränkt**.
   In diesem Falle wird das Supremum nicht angenommen.

Günstigenfalls ist das Polytop $P(A,b)$ nicht-leer und z beschränkt,
etwa $P(A,b) \neq \emptyset$ kompakt: Wir suchen $x \in P(A,b)$ mit $z(x) = \max z$.
Von einem Lösungsalgorithmus erwarten wir, dass er die Ausnahmen (1) und (2) ordnungsgemäß meldet, ansonsten die Optimierung korrekt löst.

Es ist vorteilhaft, die Ungleichungen $Ax + b \geq 0$ in zwei zu teilen:
Wir *definieren* die **Schlupfvariablen** $y := Ax + b$ und *fordern* $y \geq 0$.
Wir können dann Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$ durchführen wie oben erklärt;
dies Umformung werden wir nun zum Simplexverfahren ausbauen.

☹ Konventionen und Schreibweisen variieren leider in der Literatur.
☺ Die obige Notation als Tableau ist ebenso elegant wie effizient.

Die lineare Optimierung gehört zu den Top-Ten aller Algorithmen, besser gesagt: zu den Top-Ten aller algorithmischen Problemstellungen. Viele Eigenschaften linearer Programme entsprechen Eigenschaften von Polytopen und lassen sich so geometrisch interpretieren und beweisen. So verbinden sich numerische, algebraische und geometrische Aspekte; auch hier sind „rein“ und „angewandt“ Facetten derselben Mathematik.

Die Abkürzung „LP“ können Sie auch als „lineares Problem“ lesen.
Die traditionelle Bezeichnung „Programm“ bedeutet schlicht „Planung“, also ausnahmsweise nicht die Erstellung eines Computerprogramms.
Der Begriff wurde Mitte der 1940er Jahre von George Dantzig geprägt noch bevor Computer zur Lösung solcher Probleme eingesetzt wurden.

Die lineare Optimierung ist ein Spezialfall der konvexen Optimierung und zentrale Technik vieler Anwendungen, etwa im Operations Research. Häufig lassen sich Optimierungsprobleme auf diese Form zurückführen und so mit Standardtechniken lösen. Das ist insbesondere interessant, wenn (noch) keine maßgeschneiderten Lösungsverfahren bekannt sind.

Lineare Ungleichungssysteme wurden schon 1827 von Fourier gelöst, seine Methode 1936 von Motzkin wiederentdeckt und fortentwickelt
Zur linearen Optimierung wurde dies 1939 von Leonid Kantorovich ausgebaut, der hierzu auch erste Lösungsmethoden entwickelte.

Das **Simplexverfahren** wurde 1947 von George Dantzig angegeben.
In der Praxis hat sich dies als eines der schnellsten Verfahren erwiesen, zumindest für generische Problemstellungen. Im schlechtesten Fall hat es exponentielle Laufzeit, wie der berüchtigte Klee–Minty–Würfel zeigt.

Das klassische Simplexverfahren ist immerhin **polynomial im Mittel**.
Zur Verfeinerung wurden seither mehrere Pivotstrategien vorgeschlagen.
Weiterhin offen ist die grundlegende Frage: Gibt es eine Pivotstrategie für das Simplexverfahren, die immer polynomiale Laufzeit garantiert?

Die lineare Optimierung lässt sich nachweislich in polynomialer Zeit lösen, wie Leonid Khachiyan (Ellipsoidverfahren, 1979) und Narendra Karmarkar (Innere-Punkte-Verfahren, 1984) zeigen konnten. Ob dies auch mit einer Pivotstrategie gelingt, bleibt eine Herausforderung.

Basiswechsel sind Äquivalenzumformungen.

Aufgabe: Schreiben Sie den elementaren Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$ aus.

Lösung: Der Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$ ist nur möglich, falls $a_{\ell k} \neq 0$:

$$y_\ell = a_{\ell k} x_k + \sum_{i \neq k} a_{\ell i} x_i + b_\ell \quad \Longleftrightarrow \quad x_k = \frac{1}{a_{\ell k}} y_\ell - \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_{\ell k}} a_{\ell i} x_i - \frac{1}{a_{\ell k}} b_\ell$$

Wir ersetzen überall die alte Variable x_k durch die neue Variable y_ℓ:

$$y_j = a_{jk} x_k + \sum_{i \neq k} a_{ji} x_i + b_j = \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}} y_\ell + \sum_{i \neq k} \Big[a_{ji} - \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}} a_{\ell i} \Big] x_i + \Big[b_j - \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}} b_\ell \Big]$$

$$z = c_k x_k + \sum_{i \neq k} c_i x_i + d = \frac{c_k}{a_{\ell k}} y_\ell + \sum_{i \neq k} \Big[c_i - \frac{c_k}{a_{\ell k}} a_{\ell i} \Big] x_i + \Big[d - \frac{c_k}{a_{\ell k}} b_\ell \Big]$$

Der Tausch macht $y_\ell \geq 0$ zur Variablen und $x_k \geq 0$ zur Nebenbedingung.

Umkehrung: Erneuter Basiswechsel $y_\ell \leftrightarrow x_k$ macht alles rückgängig.

☺ Alle Basiswechsel sind in diesem Sinne Äquivalenzumformungen.

Invarianz: Das alte LP $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und das neue LP $\left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ sind äquivalent; sie stimmen überein in Erfüllbarkeit und Lösbarkeit und Maximalwert.

Basiswechsel können optimieren.

Satz Z1B: Jedes lösbare LP $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist optimierbar durch Basiswechsel.

Wir können $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ transformieren in ein optimales LP $z' : \left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ mit $c' \leq 0 \leq b'$, somit lösen durch $x' = 0$ und $\max z = \max z' = z'(0) = d'$.

Wir präzisieren und beweisen dies am Ende des Kapitels als Hauptsatz des Simplexverfahrens, siehe Z2A. Hier zunächst geometrisch-intuitiv:

Beweisidee: Das Maximum wird in einer Ecke $x^* \in P(A, b)$ realisiert. Zu dieser gelangen wir durch Basiswechsel (entlang von Kanten). QED

Genauer: Unter den Bedingungen $x_1, \dots, x_n \geq 0$ und $y_1, \dots, y_m \geq 0$ gibt es n linear unabhängige, die im Punkt x^* aktiv sind, also zu Gleichungen werden, und deren Richtungsvektoren der Funktion z entgegenlaufen. Diese (zunächst abhängigen) Variablen können wir durch Basiswechsel zu freien Variablen machen, und das LP $z' : \left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ wird somit optimal.

☺ Dieses geometrische Argument zeigt, *dass* eine Lösung möglich ist.
☹ Es erklärt leider nicht, *wie* wir eine Lösung konkret finden können.
☺ In §Z2 formulieren und beweisen wir dazu den Simplexalgorithmus.

Optimierung durch Basiswechsel

Der geometrische Beweis von Satz Z1B zeigt zunächst nur, *dass* eine Lösung prinzipiell möglich ist, er erklärt aber leider nicht, *wie* wir eine Lösung konkret finden können. Dies leistet Dantzigs Pivotstrategie: Wir hangeln uns von Ecke zu Ecke „immer an der Wand entlang“.

Im Grundlagenstreit der 1920er Jahre verteidigte Hermann Weyl den Konstruktivismus in seinem Artikel *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik* (Vorträge, gehalten im mathematischen Kolloquium Zürich), Math. Zeitschrift 10 (1921) 39–79. Dort schrieb er die weisen Worte:

> *[Ein Existenzsatz zeigt] das Vorhandensein eines Schatzes, ohne jedoch zu verraten, an welchem Ort. […] Nicht das Existenztheorem ist das Wertvolle, sondern die im Beweise geführte Konstruktion. Die Mathematik ist, wie Brouwer gelegentlich sagt, mehr ein Tun denn eine Lehre.*

Erst der Simplexalgorithmus ermöglicht uns, den Schatz zu heben! Dazu ist noch deutlich mehr Arbeit nötig: Wir müssen jeden Schritt, also den jeweils vorzunehmenden Basiswechsel explizit festlegen, und dann nachweisen, dass die Methode immer zum Ziel führt.

Optimierung durch Basiswechsel

Zur Klärung möglicher Missverständnisse betone ich den Dreischritt:

1. Die Daten $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ definieren zunächst die **Problemstellung**. Damit legen wir präzise fest, was wir als **Lösung** akzeptieren.
2. Jeder Basiswechsel ermöglicht eine **elementare Umformung**. Das Problem geht über in ein **äquivalentes Problem** $z' : \left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$.
3. Erst die genaue Abfolge der Schritte definiert einen **Algorithmus**. Hierzu dient die explizite Formulierung einer **Pivotstrategie** (§Z2).

Anders als im Gauß–Algorithmus ist die Laufzeit schwer zu beschränken. Schlimmstenfalls ist sie exponentiell, etwa für den Klee–Minty–Würfel. Daher wurden zahlreiche weitere Pivotstrategien vorgeschlagen, oder auch grundsätzlich neue Zugänge wie etwa Innere-Punkte-Methoden.

Für einen ersten Durchgang möchte ich diese anspruchsvolleren Fragen vermeiden, genauer gesagt auf einen zweiten Durchgang verschieben. Erst wenn Sie genug eigene Erfahrung mit dem Verfahren gesammelt haben, sind Sie bereit und motiviert für eine genauere Untersuchung.

Dualität für lineare Programme (nach John von Neumann)

Beispiel: Zur Illustration untersuchen wir erneut unsere Rechnung.

	x_1	x_2	
u_1	-1	1	7
u_2	-3	-1	33
u_3	-1	-1	15
u_4	0	-1	9
u_0	2	1	-4

Ausgeschrieben: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

$$u_1 = -1x_1 + 1x_2 + \ \ 7 \geq 0$$
$$u_2 = -3x_1 - 1x_2 + 33 \geq 0$$
$$u_3 = -1x_1 - 1x_2 + 15 \geq 0$$
$$u_4 = +0x_1 - 1x_2 + \ \ 9 \geq 0$$
$$u_0 = +2x_1 + 1x_2 - \ \ 4 \geq 0$$

Wir wollen u_0 maximieren. Wir finden leicht eine grobe obere Schranke:

$$u_0 \leq u_0 + u_2 = -1x_1 - 0x_2 + 29 \leq 29$$

Mit etwas Glück und Geschick finden wir eine kleinere obere Schranke:

$$u_0 \leq u_0 + \tfrac{1}{2}u_2 + \tfrac{1}{2}u_3 = -0x_1 - 0x_2 + 20 \leq 20$$

Jede solche Positivkombination liefert uns eine obere Schranke für u_0.
Was ist die kleinste obere Schranke? Dies definiert das duale Problem!

Dualität für lineare Programme (nach John von Neumann)

Allgemein suchen wir geeignete Multiplikatoren $y_1, \dots, y_m \geq 0$:

$$u_0 \leq u_0 + y_1u_1 + \cdots + y_mu_m = \underbrace{(yA + c)}_{\leq 0}\, x + \underbrace{yb + d}_{\to \min!}$$

Die Bedingungen $y_j, u_j \geq 0$ garantieren die behauptete Ungleichung.
Wir verlangen $yA + c \leq 0$, denn dadurch wird der Punkt $x = 0$ optimal.
Wir wollen $yb + d$ minimieren, als möglichst kleine obere Schranke.
Aus dem primalen Problem erhalten wir so das duale Problem:

$$\begin{array}{llll} \text{primales LP:} & x \geq 0, & Ax + b \geq 0, & u_0(x) = cx + d \to \max! \\ \text{duales LP:} & y \geq 0, & yA + c \leq 0, & v_0(y) = yb + d \to \min! \end{array}$$

Dualität ist eine wichtige Methode und ein grundlegendes Ergebnis der Linearen Optimierung, sowohl theoretisch als auch praktisch.

☺ Das duale Problem ist erneut linear, hat also dieselbe Struktur.
Das primale und das duale Problem beschränken sich gegenseitig.

☺ Die lineare Optimierung erfreut sich zudem der **starken Dualität**:
Hier gilt $\max u_0 = \min v_0$. Es besteht keine Dualitätslücke!

Dualität für lineare Programme (nach John von Neumann)

Jedes lineare Programm kommt als **duales Paar**:

$$\begin{array}{llll} \text{primales LP:} & x \geq 0, & Ax + b \geq 0, & u(x) = cx + d \to \max! \\ \text{duales LP:} & y \geq 0, & yA + c \leq 0, & v(y) = yb + d \to \min! \end{array}$$

Das entspricht der Transnegation von $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ zu $-v : -\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^\top$.
Für jedes optimale LP, also $c \leq 0 \leq b$, ist die Lösung offensichtlich:

$x = 0$ ist zulässig $\iff$ $b \geq 0$ $\implies$ $y = 0$ minimiert $v(y) = yb + d$
$y = 0$ ist zulässig $\iff$ $c \leq 0$ $\implies$ $x = 0$ maximiert $u(x) = cx + d$

Satz Z1c: Dualität der linearen Optimierung

Schwache Dualität: Für jeden zulässigen Punkt $x \geq 0$ mit $Ax + b \geq 0$ und dual jeden zulässigen Punkt $y \geq 0$ mit $yA + c \leq 0$ gilt $u(x) \leq v(y)$.

Sind also simultan beide LP erfüllbar, so sind auch beide lösbar.

Starke Dualität: Ist das primale LP lösbar, so auch das duale LP, und es gilt die Gleichheit $\max u = \min v$, also keine Dualitätslücke.

Ist das primale LP erfüllbar, aber nicht das duale, so ist u unbeschränkt.
Ist das duale LP erfüllbar, aber nicht das primale, so ist v unbeschränkt.

Dualität für lineare Programme (nach John von Neumann)

Aufgabe: (1) Beweisen Sie die schwache Dualität durch Einsetzen.
(2) Folgern Sie die starke Dualität (Z1c) aus der Optimierbarkeit (Z1b).
Hinweis: Gilt Dualität für optimale LP? optimierbare LP? lösbare LP?

Lösung: (1) Wir nutzen die Zulässigkeit $x \geq 0$ und $b \geq -Ax$ sowie dual $y \geq 0$ und $c \leq -yA$. Positivkombinationen erhalten alle Ungleichungen:

$$u(x) \overset{\text{Def}}{=} cx + d \overset{\text{Vor}}{\leq} (-yA)x + d \overset{\text{Ass}}{=} y(-Ax) + d \overset{\text{Vor}}{\leq} yb + d \overset{\text{Def}}{=} v(y)$$

☺ Schwache Dualität erhalten wir direkt durch geschickten Vergleich.

(2) Starke Dualität ist klar für jedes optimale LP, mit $c \leq 0 \leq b$: Hier löst $x = 0$ das primale LP und $y = 0$ das duale LP, also $\max u = d = \min v$.

Dank Basiswechsel gilt Dualität dann auch für jedes optimierbare LP.
Dies wirkt auf beide Probleme, primal und dual, auf dieselbe Weise.

Dank Optimierbarkeit Z1b gilt starke Dualität für jedes lösbare LP. QED

Die Ergänzung zur Unbeschränktheit führe ich auf Seite Z125 aus.
Für Sie ist dies eine schöne Übung, um Ihr Verständnis zu schulen!

Elementare Basiswechsel beweisen die Dualität!

☺ Das ist ein bewundernswerter „Beweis durch Rechnung“ oder eine „Konstruktion durch Algorithmus“. Diesen Idealfall haben wir nicht oft. Unter den Algorithmen auf Seite Z005 erfüllen dies Euklid und Gauß.

Dantzigs Simplexverfahren über $\mathbb{R}$. (Es genügt ein angeordneter Körper.)
Gegeben ist ein lineares Programm $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ wie oben erklärt.
(0) *Elementare* Umformungen sind Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$.
(1) *Erreichbar* ist damit ein optimales LP $u' : \left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ mit $c' \le 0 \le b'$.
(2) *Anwendung:* Damit können wir jedes lineare Programm lösen.
(3) *Folgerung:* Es gilt starke Dualität wie oben nachgewiesen.

Gauß–Algorithmus über einem Körper $\mathbb{K}$. (Es genügt ein Divisionsring.)
Gegeben ist eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ für ein lineares Gleichungssystem.
(0) *Elementare* Umformungen sind die Zeilen- und Spaltenoperationen.
(1) *Erreichbar* ist damit die Gauß–Normalform $SAT = D^r_{m\times n} \in \mathbb{K}^{m\times n}$.
(2) *Anwendung:* Das löst jedes lineare Gleichungssystem $Ax = b$.
(3) *Folgerungen:* (a) Jede invertierbare Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ist quadratisch.
(b) Je zwei (endliche) Basen eines Vektorraums haben dieselbe Länge.

Gauß–Algorithmus beweist Invarianz der Dimension!

Ich finde es sehr erstaunlich, dass ein konkretes Rechenverfahren nicht nur konkrete Zahlenbeispiele löst, sondern allgemeine Sätze beweist! Sie haben das so noch nie gesehen? Ihre Lineare Algebra verlief anders und liegt lange zurück? Dann ist es Zeit für eine feierliche Erinnerung:

Übung: Wiederholen / erklären Sie ausführlich obiges Vorgehen (0–3).
(4) Umformung von A zu $D = D^r_{m\times n}$ ändert nicht die Sur/In/Bijektivität.
(4a) D ist surjektiv gdw rechtsinvertierbar gdw $r = m \le n$,
(4b) D ist injektiv gdw linksinvertierbar gdw $r = n \le m$,
(4c) D ist bijektiv gdw invertierbar gdw $r = m = n$.
Dasselbe gilt demnach für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ vom Rang r.
Insbesondere gilt: (3a) Ist $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ invertierbar, so folgt $m = n$.

Bemerkung: Der Begriff der „Dimension“ ist zentral für die Lineare Algebra und die gesamte Mathematik! Er beruht auf der Existenz von Basen und der Invarianz der Dimension. Wie wurde Letzteres in Ihrer Linearen Algebra bewiesen? Mit Matrixrechnung? Austauschsatz von Steinitz? Welches Argument finden Sie leichter? effizienter? schöner?

Gruselige Gegenbeispiele ohne Dimensionsinvarianz

☺ Gute Gegen/Beispiele helfen uns, wichtige Ergebnisse zu würdigen!

Aufgabe: Sei R ein beliebiger Ring, hier lassen Sie Ihre Phantasie spielen!
(1) Gibt es R–lineare Räume V ohne jede Basis? *Baseless allegation!?*
(2) Gibt es Isomorphismen $R^p \cong R^q$ mit $p \neq q$? *Another dimension!?*
(3) Gibt es invertierbare Matrizen $A \in R^{p\times q}$? *Only square is fair!?*

⚠ In solchen Problemfällen ist der Begriff „Dimension“ nicht sinnvoll! Fürchten wir tatsächlich die genannten Hindernisse, gar Pathologien? Sie klingen zunächst unglaublich, doch bedenken Sie die allzu große Allgemeinheit: Sie dürfen sich hier einen beliebigen Ring aussuchen!

Lösung: (1) Ja, klar, über dem Ring $\mathbb{Z}$ sind $\mathbb{Z}/2$ und $\mathbb{Q}$ nicht frei.
(2) Ja, klar, für den Nullring $R = \{0\}$ gilt $R^p = \{(0,\dots,0)\} \cong R^q$.
(3) Ja, klar, über $R = \{0\}$ ist jede Matrix $A \in R^{p\times q}$ invertierbar!

☹ Der Nullring ist albern, daher wollen wir ihn meist ausschließen.
❓ Welche Ringe sind tauglich? Genügt es, den Nullring zu verbieten?
☺ Über einem Divisionsring können solche Pathologien nicht auftreten.
⚠ Dazwischen ist viel Platz für Überraschungen wie folgende…

Gruselige Gegenbeispiele ohne Dimensionsinvarianz

☺ Das folgende Beispiel gemahnt uns, dass nichts selbstverständlich ist:

Beispiel Z1D: $R^p \cong R^q$ dank Reißverschluss über $R = \mathrm{End}_K(K[X])$

Sei K ein Körper, etwa $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_q, \dots$, und hierüber $V = K^{(\mathbb{N})} = K[X]$ der Vektorraum der Folgen $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ mit endlichem Träger.
(a) Im Ring $R = (\mathrm{End}_K(V), +, \circ)$ seien $a, b, c, d : V \to V$ gegeben durch

$$a(x) = (x_0, 0, x_1, 0, x_2, 0, \dots), \qquad c(x) = (x_0, x_2, x_4, x_6, x_8, \dots),$$
$$b(x) = (0, x_0, 0, x_1, 0, x_2, \dots), \qquad d(x) = (x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, \dots).$$

Dies zerlegt jedes Polynom $P \in K[X]$ in seinen geraden und ungeraden Anteil, $(c, d) : P \mapsto (P_0, P_1)$ mit $P = P_0(X^2) + XP_1(X^2)$. Reißverschluss:

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca & cb \\ da & db \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ac + bd = 1.$$

(b) Die Matrizen $\left[\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right]$ und $\left[\begin{smallmatrix} a & b \end{smallmatrix}\right]$ stiften einen Isomorphismus $R^1 \cong R^2$.
(c) Per Induktion folgt $R^1 \cong R^p$ und somit $R^p \cong R^q$ für alle $p, q \in \mathbb{N}_{\ge 1}$.

Dualität für lineare Programme: Ergänzung

Aufgabe: Beweisen sie die beiden verbleibenden Aussagen aus unserem obigen Dualitätssatz Z1c zur Unbeschränktheit linearer Programme.

Lösung: Es genügt, die erste Aussage zu beweisen, die zweite ist dual:

(3) Sei das primale LP erfüllbar, durch $x \geq 0$ mit $Ax + b \geq 0$, aber nicht das duale, das heißt aus $y \geq 0$ folgt $yA + c \not\leq 0$. Dann ist u unbeschränkt.

☺ Für diesen Sonderfall muss man nur genau hinsehen, dazu allerdings auf die Ebene der Koeffizienten hinabsteigen, dann wird alles klar:

(3a) Für $y = 0$ gilt $yA + c = c \not\leq 0$. Es existiert also ein Index i mit $c_i > 0$. Für alle $y \geq 0$ gilt $yA + c \not\leq 0$. Daraus folgt $a_{ji} \geq 0$ für alle Indizes j.

(3b) Wir betrachten dazu die Halbgerade $x^t := x + te_i$ für $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Aus $Ax + b \geq 0$ folgt $Ax^t + b = (Ax + b) + a_{ji}t \geq 0$, dank $a_{ji} \geq 0$. Also ist zu jedem $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ der zugehörige Punkt x^t primal zulässig. Dank $c_i > 0$ ist unsere Zielfunktion $u(x^t) = cx + d + c_i t$ unbeschränkt.

Dualität für lineare Programme: Ergänzung

☺ Es ist wie so oft mit den vermeintlich ganz einfachen Grundlagen: Sie müssen es selbst rechnen, dann erst dürfen Sie „trivial“ ausrufen.

Aufgabe: Konstruieren Sie lineare Programme, die dual unerfüllbar sind, und (a) primal unbeschränkt oder aber ebenso (b) primal unerfüllbar.

Lösung: Es gibt viele Möglichkeiten, die allereinfachsten sehen so aus:

(a) Das LP $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist primal unbeschränkt und dual unerfüllbar.
Ausführlich: Dual gilt $y \geq 0$ und $y1 + 1 \leq 0$ ist unerfüllbar.
Primal gilt $x \geq 0$ und $1x + 1 \geq 0$ mit $x \mapsto 1x + 0$ unbeschränkt.

(b) Das LP $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist primal unerfüllbar und dual unerfüllbar.
Ausführlich: Dual gilt $y \geq 0$ und $0x + 1 \leq 0$ ist unerfüllbar.
Primal gilt $x \geq 0$ und $0x - 1 \geq 0$ ist ebenso unerfüllbar.

☺ Damit haben wir starke Sätze und illustrative Gegenbeispiele für die folgende Tabelle, in der wir alles übersichtlich zusammentragen.

Dualität für lineare Programme: Zusammenfassung

Für jedes lineares Problem $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ gibt es genau drei Möglichkeiten: lösbar, unerfüllbar (somit beschränkt), unbeschränkt (somit erfüllbar). Für zwei beliebige Probleme ergeben sich demnach 9 Kombinationen.

Aufgabe: Sei $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und $-v : -\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^\intercal$ ein duales Problempaar. Welche der neun Kombinationen sind hier tatsächlich möglich?

Lösung: Für ein duales Problempaar gibt es genau vier Möglichkeiten:

primal \ dual	unerfüllbar (somit beschränkt)	lösbar (erfüllbar und beschränkt)	unbeschränkt (somit erfüllbar)
unerfüllbar (somit beschränkt)	✓ möglich	✘ starke Dualität	✓ möglich
lösbar (erfüllbar und beschränkt)	✘ starke Dualität	✓ möglich	✘ schwache Dualität
unbeschränkt (somit erfüllbar)	✓ möglich	✘ schwache Dualität	✘ schwache Dualität

Dualität für lineare Programme: Zusammenfassung

Korollar Z1E: Erfüllbarkeit und Lösbarkeit

Vorgelegt sei ein lineares Problem $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit Dual $-v : -\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^\intercal$.
Genau einer der folgenden vier Fälle tritt ein:

1. Das primale und das duale Problem sind beide unerfüllbar.
2. Das primale ist unbeschränkt und das duale ist unerfüllbar.
3. Das duale ist unbeschränkt und das primale ist unerfüllbar.
4. Das primale und das duale Problem sind beide erfüllbar.
   Dann sind beide lösbar, und es gilt Gleichheit $\max u = \min v$.

Der Dualitätssatz erscheint nur auf den ersten Blick kompliziert. Beim zweiten Hinschauen erweist er sich als einfach und elegant.

Übung: Wiederholen Sie sorgsam alle Argumente zur Dualität. Beweisen Sie die schwache und starke Dualität und obiges Korollar.

Nehmen Sie sich die Zeit, diese Entwicklung gründlich zu verstehen: Jeder einzelne Schritt ist leicht; fügen Sie alle Teile zusammen!

Dualität in unserem Zahlenbeispiel

Beispiel: Zur Illustration betrachten wir erneut unser voriges Beispiel:

primal	x_1	x_2	
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
u	2	1	-4

$\xleftrightarrow[\text{Basiswechsel}]{\text{elementare}}$

primal	y_3	y_2	
x_1	$1/2$	$-1/2$	9
x_2	$-3/2$	$1/2$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$3/2$	$-1/2$	3
u	$-1/2$	$-1/2$	20

Der Punkt $x = (9,6)^\mathsf{T}$ ist zulässig, dank $Ax + b = (4,0,0,3)^\mathsf{T} \geq 0$. Demnach gilt $\max u \geq u(x) = 20$. Das zweite Tableau zeigt zudem $u = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_2 + 20 \leq 20$. Beide zusammen beweisen $\max u = 20$.

☺ Die Richtigkeit dieser zweiten Aussage können wir auch unabhängig nachprüfen, genau dazu dienen zertifizierte Lösungen: Sehen Sie wie?

Aufgabe: Dualisieren Sie dieses Problem und und lösen Sie dies.
Müssen Sie zur Lösung erneut Basiswechsel durchführen?
Wie nutzen Sie die Äquivarianz unter Transnegation?
Woran erkennen Sie die Eindeutigkeit der Lösung?

Dualität in unserem Zahlenbeispiel

Lösung: Dualisieren ist gleichbedeutend zur Transnegation:

dual	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	-1	-3	-1	0	2
x_2	1	-1	-1	-1	1
v	7	33	15	9	-4

Transposition:
NN: $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$
NB: $x_1, x_2 \leq 0$ bzw. $-x_1, -x_2 \geq 0$
Ziel: $v \to \min!$ bzw. $-v \to \max!$

Das duale Problem bringen wir somit ebenfalls auf Normalform und lösen es durch eine geeignete Folge von Basiswechseln:

	y_1	y_2	y_3	y_4	
$-x_1$	1	3	1	0	-2
$-x_2$	-1	1	1	1	-1
$-v$	-7	-33	-15	-9	4

$\iff$

	$-x_1$	$-x_2$	y_1	y_4	
y_3	$-1/2$	$3/2$	2	$-3/2$	$1/2$
y_2	$1/2$	$-1/2$	-1	$1/2$	$1/2$
$-v$	-9	-6	-4	-3	-20

Der Punkt $y = (0, 1/2, 1/2, 0)$ ist zulässig, also $\min v \leq v(y) = 20$.
Wir finden $v = 9(-x_1) + 6(-x_2) + 4y_1 + 3y_4 + 20$, also $\min v = 20$.

☺ Das beweist die starke Dualität in unserem konkreten Beispiel.
Allgemein gelingt dies ebenso, wie in der vorigen Aufgabe erklärt.

Warum sind Tucker–Tableaux die perfekte Notation?

Lineare Programme lassen sich verschieden aufschreiben. Auf Seite Z101 sehen Sie die Langform. Sie ist möglich, aber nicht ratsam: umständlich, redundant, uninformativ. Die elegante Kurzform $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ als **Tableau** führte Tucker um 1958 ein. Beim Rechnen spüren Sie die Vorteile:

1. Die Schreibweise als Tableau ist effizient, konzise und informativ.
2. Alle Basiswechsel lassen sich elegant und direkt darauf ausführen.
3. Tableaux sind symmetrisch: Dualisieren bedeutet Transnegieren.

☺ Am Tableau $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ lesen wir wichtige Informationen direkt ab, etwa freie Variablen (Spalten) und abhängige Schlupfvariablen (Zeilen). Es ist *optimal*, falls $c \leq 0 \leq b$. Es ist *offensichtlich erfüllbar*, durch $x = 0$, falls $b \geq 0$ gilt, und *offensichtlich unerfüllbar*, falls $b_j < 0$ und alle $a_{ji} \leq 0$. Es ist *offensichtlich beschränkt*, falls $c \leq 0$, und *offensichtlich unlösbar*, falls $c_i > 0$ und alle $a_{ji} \geq 0$, also unerfüllbar oder unbeschränkt (Lemma Z2B).

📖 M.L. Balinski, A.W. Tucker: *Duality theory, a constructive approach.* SIAM Review 11 (1969) 347–377, online `www.jstor.org/stable/2028941`.
Satz Z1B, allgemein Satz Z2A, finden Sie dort als *Main Theorem.*

Warum sind Tucker–Tableaux die perfekte Notation?

☺ Jedes lösbare Problem $z : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist elementar optimierbar (Satz Z1B): Durch Basiswechsel können wir es in ein optimales LP transformieren. Diese Umformungen sind Grundlage von Dantzigs Simplexverfahren! Probieren Sies es selbst, online und interaktiv mit `eiserm.de/lehre/Pivot`. Die hübsche Schwesterseite `eiserm.de/lehre/Gael` leistet dasselbe für den Gauß–Algorithmus. Sanfte Gamifizierung: Der Computer übernimmt für Sie die Buchführung, Sie erproben sich in kreativ-forschendem Lernen.

By relieving the brain of all unnecessary work, a good notation sets it free to concentrate on more advanced problems [...] Before the introduction of the Arabic notation, multiplication was difficult, and the division of integers called into play the highest mathematical faculties. Probably nothing in the modern world would have more astonished a Greek mathematician than to learn that, under the influence of compulsory education, a large proportion of the population [...] could perform the operation of division for the largest numbers. Our modern power of easy reckoning with decimal fractions is the almost miraculous result of the gradual discovery of a perfect notation.
Alfred North Whitehead (1861–1947), *An Introduction to Mathematics* (1911)

Zertifizierte Lösung einer linearen Optimierung

Aufgabe: Anwender Bob will $u(x) = cx + d$ maximieren, wobei $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ gelte. Mit $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ beauftragt er Spezialistin Alice.

(1) In welcher Form sollte Alice ihre Lösung an Bob übergeben?
(2) Wie kann Bob leicht prüfen, ob sie zulässig ist? zudem optimal?
(3) Wie kann Alice Optimalität zertifizieren und Bob dies effizient prüfen?

Lösung: (1) Alice kann Bob einen Lösungsvektor $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ schicken.

(2) Bob kann $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ durch Einsetzen direkt prüfen.

☺ In diesem Falle ist der Punkt x zulässig und $\max u \geq u(x)$ garantiert.
☹ Die Gleichung $\max u = u(x)$ ist zunächst schwieriger zu beweisen!
☺ Glücklicherweise gibt es eine simple Lösung. Dualität wirkt Wunder:

(3) Zum Beweis der Optimalität von $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ schickt Alice ein $y \in \mathbb{R}^{1\times m}$ mit $y \geq 0$ und $yA + c \leq 0$ sowie $u(x) = v(y)$. Das kann Bob leicht prüfen!

☺ Bereits schwache Dualität garantiert $\max u = u(x) = v(y) = \min v$.
☺ Starke Dualität garantiert zuvor, dass zu x ein Zertifikat y existiert!
☺ Lösungen sollten immer als duales Paar (x, y) angegeben werden.

Zertifizierte Lösung einer linearen Optimierung

Um diese Aufgabenstellung etwas dramatischer zu betonen, biete ich Ihnen drei Hintergrundgeschichten zur Anregung Ihrer Phantasie:

Persönliche Sorgfalt: Sie möchten Ihre eigene Rechnung effizient und sicher überprüfen, natürlich ohne alles erneut durchrechnen zu müssen. Sie suchen hierzu einen einfachen und automatisch ausführbaren Test.

Nutzen in einer Klausur: Sie schreiben eine Klausur und wollen sich Ihres Ergebnisses absolut sicher sein. Das Klausurenteam will diese Sorgfalt gezielt fördern und fragt daher explizit nach einem Zertifikat.

Vertrag zwischen unabhängigen Geschäftspartnern: Die Rechnung, hier eine lineare Optimierung, ist meist lang und aufwändig. Sie erfordert Spezialsoftware und immense Rechenzeit, die Sie nicht kaufen oder mieten wollen; Sie benötigen nur das Ergebnis. Hierzu beauftragen Sie eine externe Firma, die sich auf diese Art von Rechnung spezialisiert hat. Bei Lieferung der Ware (dem berechneten Ergebnis) können Sie der Firma vertrauen, noch besser ist jedoch ein Zertifikat: Dies wird mitgeliefert, und bei Wareneingang können Sie alles schnell und sicher prüfen.

Zertifizierte Lösung einer linearen Optimierung

Definition Z1F: zertifizierte Lösung einer linearen Optimierung

Eine **zertifizierte Lösung** zum LP $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist ein duales Paar (x, y) mit $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ sowie $y \geq 0$ und $yA + c \leq 0$, sodass $cx = yb$ gilt. Das garantiert nämlich, x löst das primale LP, und y löst das duale LP.

primal	x_1	x_2	
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
u	2	1	-4

$\xleftrightarrow[\text{Basiswechsel}]{\text{elementare}}$

primal	y_3	y_2	
x_1	$1/2$	$-1/2$	9
x_2	$-3/2$	$1/2$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$3/2$	$-1/2$	3
u	$-1/2$	$-1/2$	20

Aufgabe: Ist diese Lösung korrekt? Finden Sie ein Zertifikat!

Lösung: Wir sehen das duale Paar $x = (9, 6)^\intercal$ und $y = (0, 1/2, 1/2, 0)$. Die Probe gelingt dann leicht, direkt und effizient durch Einsetzen: Es gilt $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ sowie $y \geq 0$ und $yA + c \leq 0$ mit $cx = yb$.

Zertifizierte Lösung einer linearen Optimierung

☺ Jedes Zertifikat (x, y) garantiert: Der Spaltenvektor $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ löst das primale LP, und der Zeilenvektor $y \in \mathbb{R}^{1\times m}$ löst das duale LP. Das ist ein wunderbar effizientes Beispiel einer Zertifizierung, denn es vereint alle wünschenswerten Eigenschaften:

☺ Wenn wir die Lösung x mit dem Simplexverfahren berechnen, dann kostet die Konstruktion des Zertifikats y nahezu nichts extra: Mit dem eigentlichen (primalen) Problem löst das Simplexverfahren zusätzlich und gratis auch das duale Problem. *Solve one, get one free!*

☺ Dies nutzen wir dankend zur Zertifizierung, ganz ohne Mehraufwand. Wir extrahieren das duale Paar (x, y) als *konzise Lösung mit Beweis.* Die zertifizierte Lösung (x, y) lässt sich schnell und sicher prüfen: Zur direkten Probe genügen allein die Grundrechenarten.

☺ Zur Prüfung von (x, y) genügt bereits die schwache Dualität. Die starke Dualität garantiert, dass zu x ein Zertifikat y existiert! So prüfen Sie Ihre eigene Rechnung: *Jeder Irrtum wird erkannt!* So überzeugt Ihre Lösung, unabhängig vom (langen) Rechenweg.

Zertifizierte Lösungen: Analogien in der Algebra

☺ Sie kennen ähnliche Situationen aus der (linearen) Algebra:
Auch hier ist ein Zertifikat eine *konzise Lösung mit Beweis.*

Invertierbarkeit einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über einem Körper $\mathbb{K}$:
Ist A invertierbar, so genügt $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $AB = BA = 1_{n\times n}$.
Ist A nicht invertierbar, so genügt $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ mit $Av = 0$.

Diagonalisierbarkeit einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über einem Körper $\mathbb{K}$:
Ist A diagonalisierbar, so genügt eine Basis $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ und Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $Av_k = \lambda_k v_k$ für alle $k = 1, \dots, n$.

Übung: Wie zertifizieren Sie die Nicht-Diagonalisierbarkeit von A?

Lösung: (1) Erstes Hindernis ist das Zerfallen des char. Polynoms P_A.
Über $\mathbb{C}$ ist die Antwort klar, über $\mathbb{R}$ ist sie leicht. Über $\mathbb{Q}$ können Sie alle Kandidaten für Nullstellen von P_A aufzählen, prüfen und abspalten.

(2) Angenommen, P_A zerfällt über $\mathbb{K}$. Dann genügt ein Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ mit einem Hauptvektor $v \in \mathbb{K}^n$, sodass $(A - \lambda)v \neq 0$ und $(A - \lambda)^2 v = 0$.
Das Paar (λ, v) zertifiziert, dass A nicht diagonalisiert werden kann.

Zertifizierte Lösungen: Analogien in der Algebra

Bild und Kern einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ über einem Körper $\mathbb{K}$:
Naiv würden wir eine Basis von Bild und Kern fordern. Zum Nachweis muss lineare Unabhängigkeit geprüft werden. Wie können wir sicher stellen, dass das Bild bzw. der Kern nicht noch größer ist?

Mit dem Gauß–Algorithmus konstruieren wir Matrizen $S, S' \in \mathbb{K}^{m\times m}$ mit $SS' = S'S = 1_{m\times m}$ und $T, T' \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $TT' = T'T = 1_{n\times n}$ sodass $S'AT = D$ gilt, wobei mit $d_{ii} = 1$ für $i = 1, \dots, r$ und $d_{ij} = 0$ sonst.
Es gilt $AT = SD$: Das Bild $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(AT) = \operatorname{Im}(SD)$ hat demnach als eine Basis die ersten r Spalten von S, also $Se_1, \dots, Se_r \in \mathbb{K}^m$.
Der Kern $\operatorname{Ker}(A)$ hat als eine Basis die letzten $n - r$ Spalten von T, also $Te_{r+1}, \dots, Te_n \in \mathbb{K}^n$. Zertifizierte Lösung ist hier (S, S', T, T').

Größter gemeinsamer Teiler (ggT) d von a, b in $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{K}[X]$ oder $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.
Mit $d \mid a$ und $d \mid b$ wissen wir nur, dass d ein gemeinsamer Teiler ist.
Gilt zudem $d = au + bv$, so ist d garantiert größter gemeinsamer Teiler:
Für jeden gemeinsamen Teiler d' mit $d' \mid a$ und $d' \mid b$ folgt $d' \mid au + bv$.
Zertifizierter ggT ist (d, a', b', u, v) mit $a = a'd$, $b = b'd$, $d = au + bv$.

Zertifizierte Lösungen: Analogien in der Algebra

Nicht immer ist eine Zertifizierung so offensichtlich, umso mehr lohnt sich die mathematische Fragestellung! Hier eine schöne Illustration:

Übung: Eine Firma / Software / Cloud bietet zu jeder noch so großen natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Faktorisierung in ihre Primfaktoren an.
Wie würden Sie einen Vertrag mit dieser Firma aushandeln? Wie können Sie bei Lieferung die Qualität der Ware schnell und sicher prüfen?

Lösungsidee: Der kritische Punkt ist, die Primalität eines jeden Faktors $p \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ zu zertifizieren. Dies ist für den Kunden schwierig und sollte daher vom Anbieter geleistet werden. Hierzu genügt eine primitive Einheitswurzel $w \in \mathbb{Z}_p$, also ein Element maximaler Ordnung $p - 1$ in der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}_p^\times, \cdot)$. Zum effizienten Nachweis der Ordnung genügt eine Primfaktorisierung $p - 1 = q_1^{e_1} \cdots q_\ell^{e_\ell}$ mit $q_1 < \cdots < q_\ell$.
Rekursiv erfordert dies Zertifikate kleinerer Primzahlen.

Übung: Sehen Sie ein einfaches Zertifikat für einen optimalen Rundweg beim Problem des Handlungsreisenden [*travelling salesman problem*]?

Zertifizierte Lösungen: Analogien in der Analysis

Übung: Eine Firma / Software / Cloud bietet zu jeder Kontraktion $f : (X, d) \to (X, d)$ die näherungsweise Berechnung des Fixpunkts an.
Wie würden Sie einen Vertrag mit dieser Firma aushandeln? Wie können Sie bei Lieferung die Qualität der Ware schnell und sicher prüfen?

Lösungsidee: Fixpunktsatz von Banach mit Fehlerschranke.
Der tolerierte Fehler $\varepsilon > 0$ muss im Vertrag festgelegt werden.

Übung: Eine Firma / Software / Cloud bietet zu jedem Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\operatorname{ggT}(P, P') = 1$ die näherungsweise Berechnung aller Nullstellen an.
Wie gestalten Sie Ihren Vertrag mit dieser Firma?
Wie prüfen Sie bei Lieferung schnell und sicher die Qualität?

Lösungsidee: Newton–Verfahren und Satz von Kantorovich,
siehe `de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Kantorowitsch`.

Übung: Sehen Sie mögliche praktikable Zertifikate für eine numerische Näherungslösung einer Differentialgleichung (gewöhnlich / partiell)?
Sie erahnen, die Frage ist durchaus relevant und interessant!

Der Hauptsatz des Simplexverfahrens

Zu lösen sei ein **lineares Programm** $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Das heißt ausgeschrieben:

$$x \geq 0, \quad y(x) = Ax + b \geq 0, \quad u(x) = cx + d \to \max!$$

Als **Äquivalenzumformungen** nutzen wir affine Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$:

	x_k	x_i
y_ℓ	α	β
y_j	γ	δ

$\overset{\text{Basis-}}{\underset{\text{wechsel}}{\Longleftrightarrow}}$

	y_ℓ	x_i
x_k	$1/\alpha$	$-\beta/\alpha$
y_j	γ/α	$\delta - \beta\gamma/\alpha$

Das definiert zunächst die *möglichen* Schritte, noch nicht ihre *Abfolge*. Unseren vorläufigen Satz Z1B präzisieren wir nun als Hauptsatz Z2A und beweisen ihn durch Angabe eines expliziten Algorithmus.

Satz Z2A: Basiswechsel lösen jedes lineare Programm.

Jedes lineares Programm $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ wird durch geeignete Basiswechsel zu $\left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ entweder (0) optimal oder (1) offensichtlich unlösbar.

Wann ist ein lineares Programm offensichtlich unlösbar?

(0) optimal

				v
				$\oplus$
				$\oplus$
				$\oplus$
u	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	d

(1a) unerfüllbar

				v
y_j	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$-$

(1b) unbeschänkt

	x_i	
	$\oplus$	
	$\oplus$	
	$\oplus$	
u	$+$	

Abkürzend steht $+$ für > 0 und $-$ für < 0 sowie $\oplus$ für ≥ 0 und $\ominus$ für ≤ 0. Die folgenden offensichtlichen Fälle lesen wir direkt am Tableau ab:

Lemma Z2B: optimale vs offensichtlich unlösbare lineare Programme

(0) Im Falle $c \leq 0 \leq b$ ist unser LP optimal mit Zertifikat $(x = 0, y = 0)$: $x \geq 0 \;\wedge\; Ax + b \geq 0$ und $y \geq 0 \;\wedge\; yA + c \leq 0$ sowie $\max u = d = \min v$.

(1a) Gilt $b_j < 0$ für ein j und $a_{ji} \leq 0$ für alle i, so ist unser LP unlösbar: primal unerfüllbar, also dual entweder unerfüllbar oder unbeschränkt.

(1b) Gilt $c_i > 0$ für ein i und $a_{ji} \geq 0$ für alle j, so ist unser LP unlösbar: dual unerfüllbar, also primal entweder unerfüllbar oder unbeschränkt.

Vom heuristischen Verfahren zum Algorithmus

☺ Wir kennen nun das Ziel: (0) optimal oder (1) offensichtlich unlösbar! Wie finden wir hierzu eine Methode? Welche Pivotstrategie wählen wir? Wie beweisen wir den Algorithmus, also Terminierung und Korrektheit? Zur Vereinfachung teilt man traditionell den Algorithmus in zwei Phasen:

Phase 1: Durch Basiswechsel überführen wir das LP in die Form $b \geq 0$. Gelingt dies, so ist $x = 0$ *zulässig*. Andernfalls ist das LP *unerfüllbar*.

Phase 2: Wir bewahren $b \geq 0$ und überführen das LP in die Form $c \leq 0$. Gelingt dies, so ist $x = 0$ *optimal*. Andernfalls ist das LP *unbeschränkt*.

Bislang haben wir in unseren Rechnungen immer $b \geq 0$ vorausgesetzt und sind somit sofort in Phase 2 eingestiegen. Das hat gute Gründe: Interessanterweise ist zunächst Phase 2 deutlich leichter zugänglich; dank Dualisierung können wir damit anschließend auch Phase 1 lösen.

Wenn Sie das Kapitel bis hier durchgearbeitet haben, dann kennen (und lieben) Sie das Simplexverfahren und bereits erste schöne Anwendungen. Da Sie nun über erste eigene Erfahrung mit diesem Verfahren verfügen, sind Sie bereit und motiviert zur genaueren Untersuchung. Es lohnt sich!

Vom heuristischen Verfahren zum Algorithmus

Bisher spreche ich vorsichtig von dem / einem „Simplexverfahren“, noch nicht von „Algorithmus“, denn die Schrittfolge ist noch vage. Die Pivotwahl, Spalte k und Zeile ℓ, legen wir nun eindeutig fest:

Algo Z2C: Phase 2 des Simplexverfahrens [mit Dantzigs Pivotregel]

Eingabe: ein lineares Programm als Tableau $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $b \geq 0$
Ausgabe: ein dazu äquivalentes Tableau, optimal oder unbeschränkt

1: while weder optimal noch offensichtlich unbeschränkt do
2: Pivotspalte: Wähle $k \in \{1, \dots, n\}$ [minimal] mit $c_k > 0$ [maximal].
// Gilt $c_k \leq 0$ für alle k, dann ist u optimal.
3: Pivotzeile: Wähle $\ell \in \{1, \dots, m\}$ mit $a_{\ell k} < 0$ und $b_\ell / |a_{\ell k}|$ minimal
// Engpass! Gilt $a_{\ell k} \geq 0$ für alle ℓ, dann ist u unbeschränkt.
4: Basiswechsel: Tausche $x_k \leftrightarrow y_\ell$ zum neuen LP $u' : \left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$.
// Es gilt $b_j - \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}} b_\ell \geq 0$ dank (3) und $d' = d - \frac{c_k}{a_{\ell k}} b_\ell \geq d$ dank (2).

Dantzigs Pivotregel: Wähle $c_k > 0$ maximal, bei Gleichstand k minimal.

Phase 2 des Simplexverfahrens: Pivotstrategie

Phase 2 spielt in der Menge aller offensichtlich erfüllbaren Tableaux

$$\mathcal{T} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1)} \,\middle|\, b \geq 0 \right\}.$$

☺ *Generisch* gilt stets $b_\ell > 0$ und somit $d' > d$, das garantiert Fortschritt. Da nur endlich viele Erhöhungen möglich sind, endet dieses Verfahren.

Genauer: Wir nennen unser Tableau $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ **offensichtlich fies**, falls $b_j = 0$ in einer Zeile j oder $c_i = 0$ in einer Spalte i gilt. Wir nennen es **fies**, falls ein äquivalentes Tableau offensichtlich fies ist. Andernfalls ist es **nett**.

Übung: Die Menge der fiesen Tableaux hat Lebesgue–Maß 0. Die netten Tableaux sind offen und dicht in $\mathcal{T}$. Für solche endet Algorithmus Z2c nach endlich vielen Schritten. Zudem ist das Optimum eindeutig.

☺ Anschaulich: Wenn wir unser Tableau stetig verteilt zufällig wählen, dann kommen die befürchteten Ausnahmen mit Wkt 0 vor, also fast nie.

⚠ Nicht jedes Tableau ist zufällig gewählt. Fiese Tableaux sind zwar seltene Ausnahmen, aber durchaus möglich! Hier kann das Verfahren stagnieren, $d' = d$, und bei ungeschickter Pivotwahl sogar Zykel bilden.

Phase 2 des Simplexverfahrens: Pivotstrategie

Wie können wir für fiese Tableaux dennoch Fortschritt garantieren? Hierzu gibt es einen genial einfachen Trick:

☺ **Perturbation:** Ergänze $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ um eine Spalte. Statt mit $b_j, d \in \mathbb{R}^1$ rechnen wir mit $b_j, d \in \mathbb{R}^2$ und vergleichen lexikographisch. So können wir $b_\ell > 0$ und $d' > d$ garantieren. Notfalls wiederholen wir diesen Trick durch Anfügen weiterer Spalten. So ergänzt werden alle Tableaux nett! Diese Perturbation vermeidet insbesondere Zykel. Die Hilfskomponenten können wir löschen, sobald $b > 0$ in den vorderen Komponenten gilt.

Das Element $b_j = (b_j^0, b_j^1, \dots) \in \mathbb{R}^k$ entspricht $b_j = b_j^0 + \varepsilon b_j^1 + \dots \in \mathbb{R}[\varepsilon]_{<k}$. Der lexikographische Vergleich sortiert nach Größenordnung für $\varepsilon \searrow 0$. Wir nutzen geschickt $\mathbb{R}^1 \not\leftrightarrows \mathbb{R}^2 \not\leftrightarrows \mathbb{R}^3 \not\leftrightarrows \dots$ nur als Vektorräume über $\mathbb{R}$.

Satz Z2D: Terminierung und Korrektheit der Phase 2

Der angegebene Algorithmus für Phase 2 terminiert zu jeder Eingabe nach endlich vielen Schritten und liefert stets ein korrektes Ergebnis: entweder ein optimales Tableau oder ein unbeschränktes Tableau.

Phase 1 des Simplexverfahrens: Dualisierung

Gegeben sei ein lineares Programm $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Wir wollen $b \geq 0$ erreichen. Wir transnegieren zu $\left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) = -\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^\intercal$ und wollen $c' \leq 0$ erreichen.

Wir erweitern zu $\left(\begin{smallmatrix} A' & b^* & b' \\ c' & d^* & d' \end{smallmatrix}\right)$ durch eine willkürliche Hilfsspalte $b^* > 0$. Hier können wir Phase 2 anwenden und die alte Spalte b' mitführen. Wir erreichen $c' \leq 0$, löschen die Hilfsspalte und transnegieren zurück.

Gelingt uns dies nicht, so erreichen wir ein offensichtlich unbeschränktes Tableau $\left(\begin{smallmatrix} A' & b^* & b' \\ c' & d^* & d' \end{smallmatrix}\right)$. Wir löschen die Hilfsspalte und transnegieren zurück. Unser primales Tableau $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist dann offensichtlich nicht erfüllbar.

Satz Z2E: Terminierung und Korrektheit der Phase 1

Dieser Algorithmus für Phase 1 terminiert nach endlich vielen Schritten und liefert stets ein korrektes Ergebnis: entweder ein erfüllbares Tableau mit $b \geq 0$ oder ein unbeschränktes Tableau des dualen Problems.

Übung: Prüfen Sie die Methode und die beiden Sätze sorgsam nach. Parallel hierzu können Sie alles an konkreten Beispielen ausprobieren dank unserem interaktiven Optimierungs-Tool `eiserm.de/lehre/Pivot`.

Das Simplexverfahren: Zusammenfassung

Erst die Erklärung all dieser Schritte definiert den Simplexalgorithmus; speziell Dantzigs Pivotstrategie definiert *Dantzigs Simplexalgorithmus*. Erfreulicherweise gelingt die Methode über jedem geordneten Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$, etwa über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$ oder jedem Zwischenkörper wie $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Algo Z2F: Simplexalgorithmus

Eingabe: ein lineares Programm als Tableau $u : \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ über $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$,
Ausgabe: ein dazu äquivalentes Tableau $u' : \left(\begin{smallmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$, entweder optimal mit $c' \leq 0 \leq b'$ oder offensichtlich unerfüllbar / unbeschränkt

1: Phase 1: Durch Basiswechsel überführen wir das LP in die Form $b \geq 0$. Gelingt dies, so ist $x = 0$ zulässig. Andernfalls ist das LP unerfüllbar.
2: Phase 2: Wir behalten $b \geq 0$ und überführen das LP in die Form $c \leq 0$. Gelingt dies, so ist $x = 0$ optimal. Andernfalls ist das LP unbeschränkt.

Dank Z2E und Z2D ist diese Methode korrekt. Das beweist den Satz Z1B und rechtfertigt nachträglich unsre geometrisch-heuristische Beweisidee. Dualität *benötigen* wir hierzu nicht, wir *folgern* sie wie in Satz Z1C.

Welche Laufzeit haben Simplexalgorithmen?

Wiederholung, für lineare Gleichungssysteme ist die Komplexität klar: Der Gauß–Algorithmus bringt jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ über dem Körper $\mathbb{K}$ in die reduzierte Zeilenstufenform (*reduced row echelon form*, kurz *rref*). Dazu benötigt er höchstens mr Zeilenoperationen, wobei $r \le \min\{m, n\}$ der Rang ist, und somit höchstens mnr arithmetische Operationen in $\mathbb{K}$.

Speziell für jede quadratische Matrix, mit $m = n$, genügen demnach $\le n^2$ Zeilenoperationen, somit $\le n^3$ arithmetische Operationen in $\mathbb{K}$.

Die lineare Optimierung zeigt gewisse Ähnlichkeiten zwischen Systemen von Gleichungen und Ungleichungen, allein die Laufzeit ist schwieriger.

Übung: Bei n Variablen und m Bedingungen gibt es $\le \binom{m+n}{n}$ äquivalente Tableaux. Wir können *brute force* alle durchprobieren. Die Komplexität jedes Simplexverfahrens ist höchstens exponentiell, denn $\binom{2n}{n} < 4^n/\sqrt{\pi n}$.

Schlimmstenfalls ist sie exponentiell! Ein berühmt-berüchtigtes Beispiel: Mit Dantzigs Pivotregel besucht das Simplexverfahren alle 2^n Ecken des Klee–Minty–Würfels, siehe `en.wikipedia.org/wiki/Klee-Minty_cube`.

Welche Laufzeit haben Simplexalgorithmen?

Übung: Mit unserer interaktiven Webseite `eiserm.de/lehre/Pivot` können Sie bequem die Klee–Minty–Würfel erzeugen und erproben. Wie viele Basiswechsel benötigen Sie, wenn Sie ganz stur Dantzigs Pivotstrategie folgen? Wie viele benötigen Sie auf kürzestem Wege?

Für Klee–Minty braucht Dantzigs Pivotstrategie erschreckend lang, doch der kürzeste Weg ist verblüffend kurz. Die *Hirsch–Vermutung* besagt, dass es immer kurze Wege gibt (`en.wikipedia.org/wiki/Hirsch_conjecture`).

Manche sagen: „Du hast es erst dann verstanden, wenn du es einem Computer beibringen kannst.“ Das ist extrem, aber nützlich. Beispiele: Können Sie den Gauß–Algorithmus nutzen? beweisen? programmieren? ebenso die Determinante berechnen? erklären? effizient implementieren?

Projekt: Implementieren Sie Dantzigs Simplexalgorithmus. Erzeugen Sie dazu zufällige lineare Programme und messen Sie die mittlere Laufzeit. Recherchieren oder erfinden Sie weitere Pivotstrategien, implementieren und testen Sie diese. (Wenn Sie wollen, gerne als Erweiterung von `Pivot`.)

Welche Laufzeit haben Simplexalgorithmen?

Neben Dantzigs wurden zahlreiche weitere Pivotstrategien entwickelt. Es gibt daher nicht nur *den* einen Simplexalgorithmus, sondern mehrere.

$$\boxed{\text{Simplexalgorithmus} \;=\; \text{Simplexverfahren} \;+\; \text{Pivotstrategie}}$$

Anders gesagt, das Simplexverfahren ist eine *Familie* von Algorithmen. Als den freien Parameter wählen wir hierzu jeweils eine Pivotstrategie. Speziell Dantzigs Pivotstrategie definiert *Dantzigs Simplexalgorithmus*. Zahlreiche weitere Pivotstrategien wurden seit 1947 vorgeschlagen.

Zu den meisten Pivotstrategien wurden ebenfalls Beispiele gefunden, die exponentielle Laufzeit erfordern. Diese Fälle sind gefürchtet, treten jedoch in der Praxis selten auf. Deshalb ist das Simplexverfahren sehr erfolgreich, obwohl es exponentiellen Aufwand verursachen kann.

Welche Laufzeit haben Simplexalgorithmen?

Der Durchbruch hierzu gelang Daniel Spielman und Shang-Hua Teng: *Smoothed analysis of algorithms: Why the simplex algorithm usually takes polynomial time.* JACM 51 (2004) 385–463. Für zufällige Perturbationen ist die erwartete Laufzeit polynomiell. Sie erhielten 2008 den Gödel–Preis!

Anschaulich gesagt: Das Simplexverfahren löst effizient nahezu jedes Programm, zumindest jedoch fast alle nahegelegenen Perturbationen. Das erklärt die empirische Beobachtung und bestärkt das inzwischen über siebzig Jahre gewachsene Vertrauen in das Simplexverfahren.

Die lineare Optimierung lässt sich nachweislich in polynomialer Zeit lösen, wie Leonid Khachiyan (Ellipsoidverfahren, 1979) und Narendra Karmarkar (Innere-Punkte-Verfahren, 1984) zeigen konnten. Ob dies auch mit einer Pivotstrategie gelingt, bleibt eine Herausforderung.

Ihr Studium: Investition vs Konsum. Langfrist vs Kurzfrist.

Alice trifft Bob, der sich mit stumpfer Axt abmüht, einen Baum zu fällen. „Schärf deine Axt! Dann gelingt dir deine Arbeit leichter.“, rät Alice ihm. Das weist Bob zurück: „Dazu fehlt mir die Zeit, ich muss Bäume fällen!“ Genau das ist Ihre Entscheidung: Planen Sie kurzfristig oder langfristig?

Ihr Studium: Investition vs Konsum. Langfrist vs Kurzfrist.

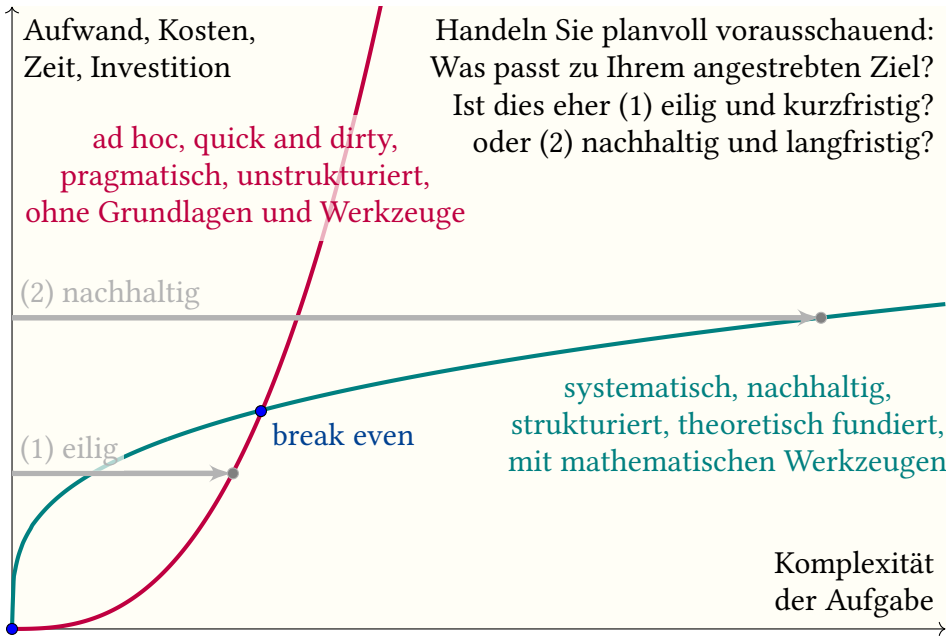
? Kurzfristig oder langfristig? Genau das ist die allgegenwärtige Frage! Kann man *zu wenig* in Werkzeug investieren? Ja, sicher, das passiert oft. Kann man *zu viel* investieren? Ja, auch das. Manch Heimwerker:in kauft sich frohgemut schönes und teures Werkzeug, das sie dann kaum nutzt.

Mathe gilt als schwer, daher hängen viele Schüler:innen sich allzu früh ab. Kurzfristig ist Lernen mühsam, doch langfristig zentral für den Erfolg. Wer investiert die Mühe? Nur wer vom dauerhaften Nutzen überzeugt ist. Es gelingt nur mit extrinsischer Anregung *und* intrinsischer Motivation.

Ihr Mathestudium versuchen wir Lehrende auszubalancieren zwischen Aufbau tragfähiger Grundlagen und Ernte motivierender Anwendung. Lernen ist induktiv: Ihre Investition von gestern ist Ihr Ertrag von heute. Ihre Investition von heute ist Ihr Ertrag von morgen. So geht es weiter…

Auch für diese Vorlesung muss ich weise abwägen: Kurzfristig begeistern die großen Ideen, erfreut die gepflegte Unterhaltung, erheitert der Witz. Für den langfristigen Erfolg benötigen Sie aber vor allem solide Technik, mathematische Sorgfalt und das kleinschrittige Lernen Ihres Handwerks.

Lohnt studieren? speziell Mathematik? kurz- vs langfristig?



Lohnt studieren? speziell Mathematik? kurz- vs langfristig?

Sie werden in den ersten Semestern manchmal mit Ihrem Studium hadern und zweifeln: „Warum ist alles so kompliziert und anstrengend? Geht es einfacher und bequemer? Wozu nützt mir die schöne Theorie?“ Wenn Sie das aufrichtig fragen, dann will ich Ihnen aufrichtig antworten.

Seien wir ehrlich: Für kleine Projekte und anspruchslose Ziele benötigen Sie keine Theorie: *Just do it!* Für ernsthafte Projekte und ambitionierte Ziele lohnt sich die Investition in wissenschaftliche Grundlagen, sie wird gar zwingend! Dies illustriere ich sinnbildlich mit der obigen Graphik.

Die Lernkurve ist am Anfang steiler, das spürt jede:r, doch die Investition in mathematische Werkzeuge zahlt sich bald aus, wie Sie dann erkennen. *Break even:* Kurzfrist vs Langfrist? Sollte *jede:r* Mathematik studieren? Nein! Sollten *Sie* Mathematik studieren? Das hängt ab von Ihren Zielen!

Mit Ihrem Studium werden Sie zu Multiplikator:innen der Wissenschaft. Bitte helfen Sie auch Ignoranten, die pauschale Vorurteile wiederkäuen: „Das Studium ist abstrakter Quatsch, die Praxis sieht ganz anders aus!“ — „Eine Lehrer:in braucht nur den halben Abiturstoff.“ Sie wissen es besser!

LA Pride: Lineare Algebra und stolz darauf!

Herr: Es ist Zeit. Das Semester war sehr lang.
Beweis den letzten Sätzen wahr zu sein.

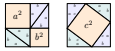
In der Linearen Algebra legen Sie die soliden Grundlagen für Ihr Studium. Dazu wähle ich zentrale Themen und präsentiert sie Ihnen so, dass Sie sich diese schrittweise erarbeiten, dabei sowohl ein starkes Fundament legen als auch früh motivierende Anwendungen und Ausblicke eröffnen.

Wir haben gemeinsam viel erreicht: Die letzten beiden Semester waren wie erwartet sehr anstrengend und wie versprochen auch sehr lohnend. Ich danke dem gesamten LinA-Team, Assistent:innen und Tutor:innen! Wir hoffen, dass Sie in unserer Linearen Algebra viel lernen konnten, zunächst natürlich die konkreten Inhalte, langfristig noch wichtiger: allgemein das mathematische Arbeiten. Möge es Ihnen überall nützen!

So war es gewesen, und die Zeiten der Qual und des Versagens,
die elenden Zwischenzeiten, waren vergessen worden und untergesunken.
Es war gut so. Es würde gehen, wie es oft gegangen war.
Hermann Hesse (1877–1962), *Klingsors letzter Sommer*

LA Pride: Lineare Algebra und stolz darauf!

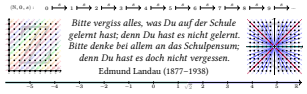
Kapitel A
Einleitung und Überblick



We choose to go to the moon in this decade and do the other things, not because they are easy, but because they are hard.
John F. Kennedy (1917–1963), Address at Rice University

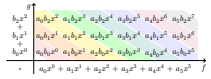
Non quia difficilia sunt non audemus,
sed quia non audemus difficilia sunt.
Seneca (1–65), Moralische Briefe an Lucilius

Kapitel B
Aufbau des Zahlensystems und Arithmetik: natürliche, ganze und rationale Zahlen



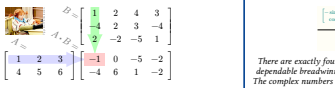
Bitte vergiss alles, was Du auf der Schule gelernt hast; denn Du hast es nicht gelernt. Bitte denke bei allem an das Schulpensum; denn Du hast es doch nicht vergessen.
Edmund Landau (1877–1938)

Kapitel C
Polynome und Euklids Algorithmus



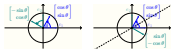
Alles Gescheite ist schon gedacht worden,
man muss nur versuchen, es noch einmal zu denken.
Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832)

Kapitel D
Matrixkalkül und Gauß–Algorithmus



Matrix theory is the arithmetic of advanced mathematics.
Richard Bellman (1920–1984), *Eye of the Hurricane*

Kapitel E
Aufbau des Zahlensystems II: reelle und komplexe Zahlen

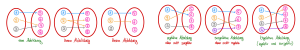


There are exactly four normed division algebras: [...] The real numbers are the dependable breadwinner of the family, the complete ordered field we all rely on. The complex numbers are a slightly flashier but still respectable younger brother: not ordered, but algebraically complete. The quaternions, being noncommutative, are the eccentric cousin who is shunned at important family gatherings. But the octonions are the crazy old uncle nobody lets out of the attic.
John Baez, *The Octonions* (2002)

Kapitel F
Mathematische Logik und Beweistechniken

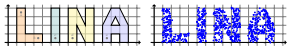
The aim of theory really is, to a great extent, that of systematically organizing past experience in such a way that the next generation [...] will be able to absorb the essential aspects in as painless a way as possible.
Michael F. Atiyah (1929–2019), *How research is carried out*

Kapitel G
Mengen, Relationen und Abbildungen: Set Theory for the Working Mathematician



The student's task in learning set theory is to steep himself in unfamiliar but essentially shallow generalities till they become so familiar that they can be used with almost no conscious effort.
Paul Halmos (1916–2006), *Naive set theory*

Kapitel H
Zählen und Kombinatorik, Äquivalenzrelationen und Quotienten



Wer hohe Türme bauen will, muss lange beim Fundament verweilen.
Anton Bruckner (1824–1896)

Kapitel I
Ordnungsrelationen und Mächtigkeit

Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden
— aber nicht noch einfacher.
Albert Einstein (1879–1955)

LA Pride: Lineare Algebra und stolz darauf!

Kapitel J
Monoide und Gruppen

Wherever groups disclosed themselves, or could be introduced, simplicity crystallized out of comparative chaos.
Eric Temple Bell (1883–1960)

Kapitel K
Ringe und Körper

The commonly accepted attitudes toward the commutative law and the associative law are different. Many real life operations fail to commute; the mathematical community has learned to live with that fact and even to enjoy it. Violations of the associative law, on the other hand, are usually considered by specialists only.
Paul Halmos (1916–2006), *Linear Algebra Problem Book*

Kapitel L
Lineare Räume und lineare Abbildungen

In der Geschichte der Mathematik zeigt sich uns ein großer Reichtum in der Entstehung verschiedenartiger Strukturen, die sich entfalten, durchdringen und vereinten. Die besonders einfachen und grundlegenden Strukturen treten dabei oft erst zum Schluss hervor.
Egbert Brieskorn (1936–2013), *Lineare Algebra*

Kapitel M
Basis und Dimension

Good general theory does not search for the maximum generality, but for the right generality.
Saunders Mac Lane (1909–2005)

Kapitel N
Matrixdarstellung und Minimalpolynom

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&i&-i\\1&-i&1&-i\\1&-i&-i&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&3&2&1\\1&0&3&2\\2&1&0&3\\3&2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-i&-1&i\\1&-1&1&-1\\1&i&-1&-i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_0&0&0&0\\0&\lambda_1&0&0\\0&0&\lambda_2&0\\0&0&0&\lambda_3\end{bmatrix}$$

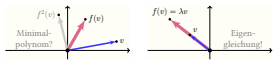
The introduction of numbers as coordinates [...] is an act of violence whose only practical vindication is the special calculatory manageability.
Hermann Weyl (1885–1955), *Philosophy of Mathematics and Natural Science*

Kapitel O
Signatur und Determinante

$$\operatorname{sign}(\sigma)=\prod_{\{i\neq j\}}\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}\in\{\pm1,0\}$$
$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sign}(\sigma)\cdot\prod_{j=1}^{n}a_{\sigma(j),j}$$

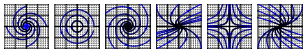
Algebra is the offer made by the devil to the mathematician. The devil says: I will give you this powerful machine, it will answer any question you like. All you need to do is give me your soul: give up geometry and you will have this marvelous machine.
Sir Michael Atiyah (1929–2019)

Kapitel P
Eigenvektoren und Diagonalisierung



Live as if you were to die tomorrow.
Learn as if you were to live forever.
Mahatma Gandhi (1869–1948)

Kapitel Q
Hauptvektoren und Jordanisierung



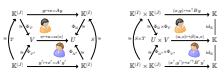
To learn to succeed, you must first learn to fail.
Michael Jordan (1963–)

Kapitel R
Lineare Algebra über $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{K}[X]$: Elementarteilersatz und Anwendungen

Zwar hatte Herr Fourier die Meinung, das Hauptziel der Mathematik sei der Gemeinnutzen (l'utilité publique) und die Erklärung der Naturphänomene; aber ein Philosoph wie er hätte wissen müssen, dass das einzige Ziel der Wissenschaft die Ehre des menschlichen Geistes ist und bei diesem Anspruch eine Frage über Zahlen ebensoviel wert ist wie eine Frage über das Weltsystem.
Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) an Adrien-Marie Legendre (1752–1833)

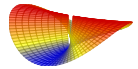
LA Pride: Lineare Algebra und stolz darauf!

Kapitel S
Skalarprodukt und Isometrien



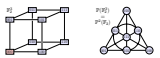
Unsere Allergrößten, wie Archimedes, Newton, Gauß, haben stets Theorie und Anwendungen gleichmäßig umfasst.
Felix Klein (1849–1925): *Elementarmathematik* (1909)

Kapitel T
Spektralsatz und erste Anwendungen



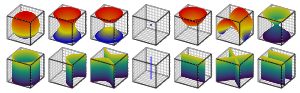
„Was hat Sie [an der Quantenphysik] dermaßen fasziniert?"
— „Die wunderschöne Mathematik, die verwendet wurde."
Anton Zeilinger, Physik-Nobelpreis 2022

Kapitel U
Affine und projektive Räume



Aus dem K–linearen Raum $(V,+,0,-)$ entsteht der K–affine Raum $\mathbb{A}(V)=(V,+,-)$ über V, indem wir seinen Ursprung 0 vergessen.
Im projektiven Raum $\mathbb{P}(V)=(V\smallsetminus\{0\})/(K\smallsetminus\{0\})$ ignorieren wir die Skalierung: Geraden sind die neuen Punkte!

Kapitel V
Quadratische Polynome und Quadriken



Bildung ist nicht nur das Lernen von Fakten, sondern die Schulung des Geistes zu denken.
Albert Einstein (1879–1955)

Kapitel W
Linearformen und Dualität

Duality gives two different points of view of looking at the same object.
Sir Michael Atiyah (1929–2019), *Duality in Mathematics and Physics*

A coconut is just a nut.

Kapitel X
Tensorprodukt

Was ist das Tensorprodukt? Da stellen wir uns ganz dumm. Jeder weiß, dass wir Vektoren untereinander addieren können, aber allgemein nicht multiplizieren. Wir tun es einfach trotzdem!
frei nach Günter Harder (1938–2025)

Kapitel Y
Tensoralgebren

$$\begin{array}{ccccc}\Lambda(V) & \leftarrow & T(V) & \twoheadrightarrow & S(V)\\ 0 & \leftarrow\!\shortmid & \text{belag}+\text{gabel} & \mapsto & 2\cdot\text{gabel}\\ 2\cdot\text{belag} & \leftarrow\!\shortmid & \text{belag}-\text{gabel} & \mapsto & 0\end{array}$$

[Ich bemühe mich] Inhalt und Grundlegung [...] vom Standpunkte der heutigen Wissenschaft in möglichst einfacher und anregender Weise überzeugend darzulegen. Und dieses [...] in freien Exkursen, wie sie sich unter den wechselnden Anregungen der Umgebung in der wirklich gehaltenen Vorlesung tatsächlich gestaltet haben.
Felix Klein (1849–1925), *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*

Kapitel Z
Lineare Optimierung und Dantzigs Simplexverfahren

We are all familiar with methods for solving linear equation systems [...] On the other hand, the study of linear inequality systems excited virtually no interest until the advent of game theory in 1944 and linear programming.
George Bernard Dantzig (1914–2005)

Lineare Algebra
von klassischen Grundlagen zu aktuellen Anwendungen

erkennen. beweisen. anwenden.

Prof. Dr. Michael Eisermann
eiserm.de/lehre/LinA

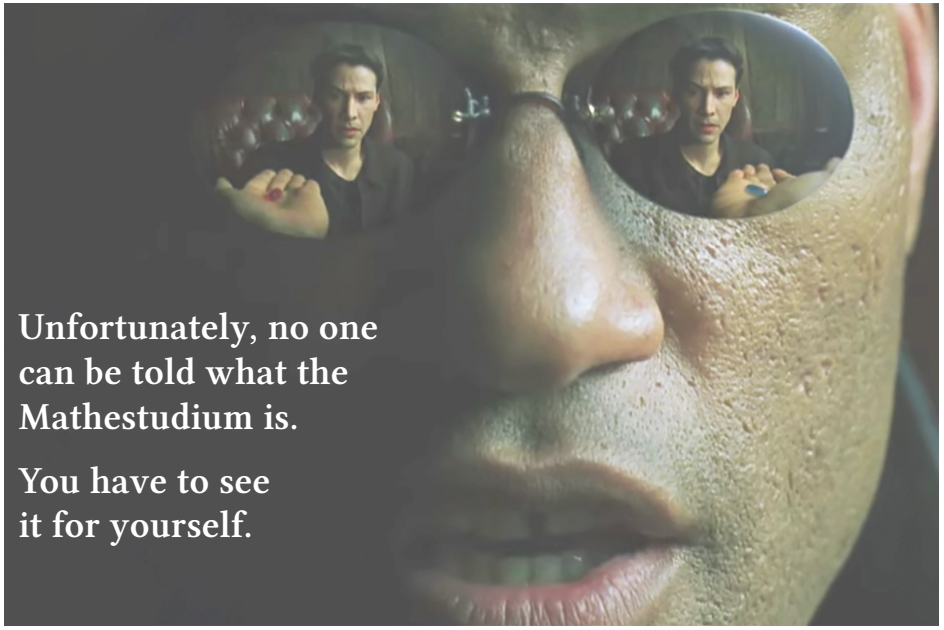
Universität Stuttgart
WiSe 2025/26 und SoSe 2026
Stand 18. September 2026

Für die Mitteilung von Unklarheiten und Fehlern aller Art sowie für Verbesserungsvorschläge bin ich stets dankbar!

Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!

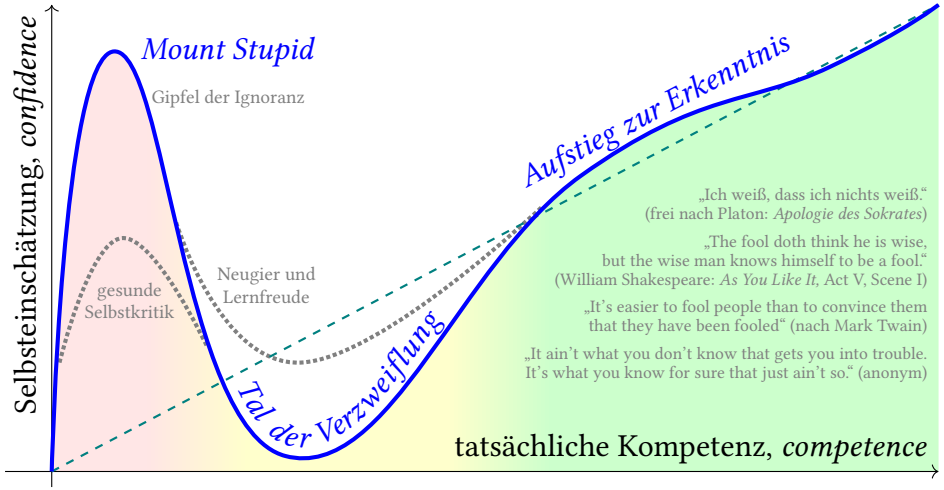
Much to learn, you still have.
This is just the beginning.

Rückblick und Ausblick auf Ihr Studium



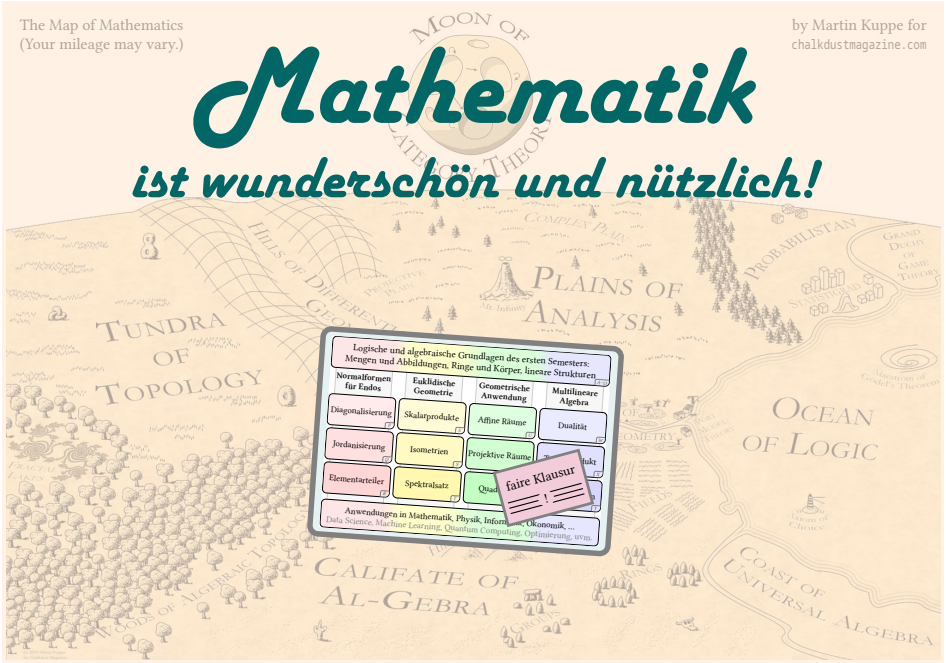
Rückblick auf Ihre Lineare Algebra

Sie wollen lernen. Aller Anfang ist schwer. Wir unterstützen Sie.



„Es gibt keinen Königsweg zur Mathematik.“ (Euklid zu König Ptolemäus I auf die Bitte, seinem Sohn die Mathematik möglichst leicht zu machen.)

Schöne Mathematik – gute Vorlesung – faire Klausur



Commitment — Vertrauen, Engagement, Lernfreude.

3 **Vertrauen:** Sie lernen hier wunderschöne und nützliche Mathematik.

Manch verlorene Seele betet Irrglauben nach wie „den abstrakten Quatsch braucht niemand“ oder „der Prof macht es pedantisch genau und unnötig kompliziert“; sie ist falsch orientiert. Nehmen Sie die Mathematik ernst und nutzen Sie die Methoden, die ich Ihnen hier erkläre. Generationen vor Ihnen haben wertvolle Erfahrungen gesammelt. Werfen Sie diese nicht leichtfertig weg, schätzen Sie vertrauensvoll dieses kostbare Geschenk. *Sapere aude!*

2 **Engagement:** Sie arbeiten kontinuierlich, wir betreuen Sie bestens.

Welches Studium Sie auch wählen, es wird anstrengend. Anders als in der Schule sind Sie vollkommen eigenverantwortlich. Sie werden nur erfolgreich sein, wenn Sie sich engagieren. Das erfordert *Geduld:* Nicht alles gelingt Ihnen im ersten Anlauf. *Sorgfalt:* Manches müssen Sie detailliert ausführen. *Disziplin:* Jeder einzelne Schritt ist leicht, doch viele sind nötig. Studieren bedeutet sich bemühen, sich selbst zu erkennen, auch sich selbst zu steuern.

1 **Lernfreude vs Disziplin:** Studium ist anstrengend und lohnend!

Jedes ernsthafte Studium ist anstrengend, das gilt ganz besonders für die Mathematik. Ohne Freude am Inhalt ist das eine jahrelange, sture Quälerei und nicht zu bewältigen. Pflegen Sie Ihre Neugier, entwickeln Sie bewusst Ihre Begeisterung für Ihr Studienfach! Man kann eine Woche oder zwei die Zähne zusammenbeißen, aber nicht ganze Semester. Tun Sie, was nötig ist, doch tun Sie es möglichst mit innerer Freude und Genugtuung.

Mathematik: erkennen. beweisen. anwenden.

Mathematik (gr. μαθηματικὴ τέχνη) bedeutet wörtlich übersetzt die ‘Kunst des Lernens und Erkennens’. Sie ist eine systematische **Methode** und ein schöpferischer **Prozess** zum Lösen von Problemen. Dazu gehören Explorieren und Konsolidieren, Erkunden und Beweisen.

Mathematik ist die **Sprache** des strukturierten Denkens und effizienten Problemlösens und damit **Grundlage** für Naturwissenschaft und Technik. Mathematik ist zugleich abstrakte **Theorie** und konkrete **Anwendung**. Diese beiden Pole begründen ihren Reiz, aber auch ihre Schwierigkeit.

Sie ist schön und nützlich, ästhetische Kunst und praktisches Handwerk, rechnen und begründen, kritisch und korrekt, sorgfältig und effizient. Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen! Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke! Mathematik verbindet **Anschauung** und **Formalisierung**.

C’est par la logique qu’on démontre, c’est par l’intuition qu’on invente.
[Mit der Logik beweisen wir, mit der Intuition erfinden wir.]
Henri Poincaré (1854–1912), *Science et Méthode* (1908)

Mathematik ist anstrengend und lohnend. Sehr!

Und ihr, die ihr längst Lehrer sein solltet, habt es wieder nötig,
dass man euch die Anfangsgründe der [Mathematik] lehre
und dass man euch Milch gebe und nicht feste Speise.
[frei nach] Hebräer 5,12 (Lutherbibel 2017)

Studienanfang ist immer schwer, jüngst wächst die Kluft zum Abgrund, zum Bildungsnotstand durch Pandemie, Fokusverlust und KI-Verblödung. Die letzten Anfängerjahrgänge hatten es daher zunehmend schwer.

Ich wünschte, das Schulsystem hätte Sie gut auf ein Studium vorbereitet, sowohl strategisch durch Neugier, Lernfreude und gute Gewohnheiten als auch inhaltlich durch solide Grundlagen mit echten Anwendungen.

Ja, wir müssen die Brücke von beiden Seiten bauen, doch das schulische Ufer erodiert rasant. Wir versuchen dies mit aller Kraft auszugleichen, zugleich erhöht sich Ihre persönliche Verantwortung und Verpflichtung.

Ich fürchte die Belastungsgrenze ist allseits erreicht oder überschritten. Das Schiff mag sinken, doch wir rudern noch und hoffen auf Rettung.

Lohnen sich Ihre Investition und unser Engagement?

$$\left\langle \begin{array}{c} \text{Ihre Wünsche,} \\ \text{Hoffnungen,} \\ \text{Ambitionen} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \text{Unsere Lehre,} \\ \text{Anleitung,} \\ \text{Vorbild} \end{array} \right\rangle \overset{?!}{>} 0$$

Ihr LinA-Team hat alles gegeben. Wirklich alles. Hat es sich gelohnt? Ihre Erfolge zeigen Sie zaghaft schon jetzt, weitere werden gedeihen. Wenn Sie jetzt schon Ihrem LinA-Team etwas zurückgeben wollen, dann bereiten Sie gründlich vor und schreiben eine gute Klausur!

Manche haben die Chance genutzt, mit uns die Reise begonnen, und sind dank bester Betreuung gut ins Mathestudium gestartet. Sie hatten natürlich auch ihre unvermeidlichen Schwierigkeiten, die können wir nicht wegzaubern, doch wir helfen mit Rat und Tat.

Andere konnten damit leider noch nichts anfangen, haben gezögert oder misstraut, ihre Zeit vertrödelt, sich abgehängt. Ich bedaure das zutiefst. Ein klein wenig Trost spendet vielleicht Richard Feynmans Schlusswort…

Zum guten Schluss

Nun habe ich […] lang zu Ihnen gesprochen und werde jetzt damit aufhören. Einerseits möchte ich mich entschuldigen und andererseits wieder nicht. Ich hoffe – ja, ich weiß –, dass [einige] von Ihnen allem mit großer Spannung folgen konnten und eine angenehme Zeit damit verbracht haben. Aber ich weiß auch, dass die Kräfte der Lehre von sehr geringer Wirkung sind, außer unter jenen glücklichen Umständen, in denen sie praktisch überflüssig sind. Daher darf ich im Hinblick auf die[jenigen], die alles verstanden haben, sagen, dass ich nichts anderes getan habe, als Ihnen die Dinge zu zeigen. Was die anderen betrifft, tut es mir leid, wenn ich Ihren Widerwillen gegen dieses Fachgebiet erregt habe. […] Ich hoffe nur, dass ich Sie nicht ernsthaft verwirrt habe, und dass Sie dieses interessante Geschäft nicht aufgeben. Ich hoffe, dass jemand anderes es Ihnen so beibringen kann, dass es Ihnen nicht im Magen liegt, und dass sie trotz allem eines Tages feststellen, dass es nicht so schrecklich ist, wie es aussieht.

Richard P. Feynman (1918–1988),
Epilog seiner *Vorlesungen über Physik* (1965)
`www.feynmanlectures.caltech.edu/III_22.html`