Klausur zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie Folgendes aus!* (1 Punkt)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Sitzplatznummer: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Begründen Sie Ihre Antwort, kurz aber überzeugend, etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung. Bei Rechnungen ist ein klar nachvollziehbarer Rechenweg gefragt mit den nötigen Erläuterungen.
- Für die Verständnisfragen in Aufgabe 2 gilt: Es gibt zwei Punkte für die richtige Antwort mit richtiger Begründung, und einen Punkt für die richtige Antwort mit einem ernsthaften Versuch einer Begründung. Allein das Ankreuzen gibt noch keinen Punkt.

Die Klausur enthält etwas zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Gewinnen Sie zunächst einen Überblick und sammeln Sie die Punkte, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Gesamt
Punkte	/1	/16	/12	/6	/12	/6	/7	/14	/6	/80

Tipp: Viele Fragen sind Wiederholungen aus Vorlesung und Übung; sie belohnen kontinuierliche Mitarbeit während des Semesters und anschließend sorgfältige Klausurvorbereitung. Tipp für zukünftige Leser: Ihre Vorlesung und wöchentlichen Übungen erklären Ihnen die wunderschöne und nützliche Mathematik. Nutzen Sie dies, arbeiten Sie kontinuierlich mit, es lohnt sich!

Vorwort zur Musterlösung: Für Ihre Nacharbeitung dieser Klausur haben wir Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfungssituation verlangt war. Nach der Klausur ist vor der Klausur. Möge es nützen!

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (16 Punkte)

2A. Ist durch $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} : (a, b) \mapsto \frac{a}{b}$ eine Abbildung definiert?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Für $(a, b) = (1, 0)$ ist $f(1, 0) = \frac{1}{0}$ nicht definiert (jedenfalls nicht in $\mathbb{Q}$). ◀◀

2

2B. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Gilt $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$?

☐ Ja ☒ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Sei $f : \{ x_1 \neq x_2 \} \to \{ y \} : x_1, x_2 \mapsto y$ und $A = \{ x_1 \}$.
Dann gilt $f^{-1}(f(A)) = \{ x_1, x_2 \} \nsubseteq A$. ◀◀

Erläuterung: Die Inklusion $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ gilt immer.
Die Umkehrung $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ gilt allgemein nur für injektive Abbildungen.

2

2C. Existiert zu je zwei Selbstabbildungen $\sigma, \tau : \{ 1, \dots, 9 \} \to \{ 1, \dots, 9 \}$ genau eine Abbildung $\pi : \{ 1, \dots, 9 \} \to \{ 1, \dots, 9 \}$ mit $\sigma \circ \pi = \tau$?

☐ Ja ☒ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Für $\sigma : x \mapsto 1$ und $\tau : x \mapsto 2$ erfüllt *keine* Abbildung π die gewünschte Gleichung $\sigma \circ \pi = \tau$. ◀◀

Alternative: Für $\sigma = \tau : x \mapsto 1$ erfüllt *jede* Abbildung π die gewünschte Gleichung $\sigma \circ \pi = \tau$.

Erläuterung: In einer Gruppe lassen sich solche Gleichungen immer eindeutig lösen. In einem Monoid, so wie hier, gelingt dies im Allgemeinen nicht, wie die konkreten Gegenbeispiele zeigen.

2

2D. Ist $f : (\mathbb{Z}_2, +) \to (\mathbb{Z}_6, +) : \bar{0} \mapsto \bar{0},\ \bar{1} \mapsto \bar{2}$ ein Gruppenhomomorphismus?

☐ Ja ☒ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Es gilt $f(\bar{1} + \bar{1}) = f(\bar{0}) = \bar{0}$, aber $f(\bar{1}) + f(\bar{1}) = \bar{2} + \bar{2} = \bar{4} \neq \bar{0}$. ◀◀

Erinnerung: Wir nutzen den Restklassenring $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. In Rechnungen steht eine ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ als Repräsentant für ihre Restklasse $\bar{a} = [a] = a + n\mathbb{Z}$. Meist ist die Unterscheidung zwischen a und $\bar{a}$ aus dem Kontext klar, Sie müssen dies dann nicht unbedingt explizit kennzeichnen.

2

2E. Ist $K = \{ a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$ ein Teilring von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$?

[X] Ja [ ] Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Es gilt $1 \in K$. Für $z = (a+b\mathrm{i}) \in K$ und $z' = (a'+b'\mathrm{i}) \in K$ gilt $z - z' = (a-a') + (b-b')\mathrm{i} \in K$ und $zz' = (aa' - bb') + (ab' + b'a)\mathrm{i} \in K$. Somit ist K ein Teilring von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. ◀◀

Erläuterung: Hier sind die Bedingungen eines Teilrings nachzuprüfen.

2

2F. Gibt es einen Ringhomomomorphismus $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $f(a) = \left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right]$ für alle $a \in \mathbb{R}$ sowie $f(X) = B := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ und $f(X^2) = C := \left[\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$?

[X] Ja [ ] Nein. Beweis oder Hindernis:

Dank der universellen Abbildungseigenschaft für Polynomringe gibt es genau einen Ringhomomorphismus $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $f(a) = \left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right]$ für alle $a \in \mathbb{R}$ sowie $f(X) = B := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Dieser erfüllt dann $f(X^2) = B^2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]^2 = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right] = C$. ◀◀

2

2G. Gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ mit $A^2 = B := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$? *Tipp:* Nutzen Sie die Determinante!

[ ] Ja [X] Nein. Beispiel oder Hindernis:

Es gilt $\det(B) = 2$. Gäbe es eine Matrix $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ mit $A^2 = B$,
so hätten wir $x = \det(A) \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$. Das ist unmöglich! ◀◀

2

2H. Sind die $\mathbb{R}$–Vektorräume $V = \mathbb{R}[X]_{\le 5}$ und $W = \mathbb{C}^5$ isomorph?

[ ] Ja [X] Nein. Beweis oder Hindernis:

Wir haben $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 6$ und $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 10$.
Somit sind die $\mathbb{R}$–Vektorräume V und W nicht isomorph. ◀◀

Erläuterung: Vektorräume (endlicher Dimension) werden durch ihre Dimension klassifiziert.

2

Aufgabe 3. *Bild und Kern* (12 Punkte)

Gegeben sind die beiden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 3}.$$

3A. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(A)$.

Wir bringen A mit Zeilenumformungen in reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1.Spalte aufräumen}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{2.Spalte aufräumen}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{4.Spalte aufräumen}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{4.Zeile } \cdot(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \blacktriangleleft\blacktriangleleft\blacktriangleleft$$

Eine Basis von $\ker(A)$ ist daher:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right). \quad \blacktriangleleft$$

4

3B. Berechnen Sie den Rang der Matrix B.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1.Spalte aufräumen}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{2.Spalte aufräumen}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \blacktriangleleft\blacktriangleleft$$

An dieser Stelle kann man schon erkennen, dass der Rang von B gleich 3 ist. ◀

3

3C. Bestimmen Sie die fehlenden Einträge der Matrix $A \cdot B$.

Ergebnis:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

1

3D. Gilt $\operatorname{im}(B) \subseteq \ker(A)$?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Die Bedingung $\operatorname{im}(B) \subseteq \ker(A)$ ist äquivalent zu $AB = 0$. Wir haben oben jedoch $AB \neq 0$ berechnet. ◀◀

Ausführlich: Sei b_2 die zweite Spalte von B, d.h. $b_2 = Be_2 \in \operatorname{im}(B)$. Dann ist Ab_2 die zweite Spalte von AB und daher nicht 0, also ist $b_2 \notin \ker(A)$.

Alternative Lösung: Wäre $\operatorname{im}(B) \subseteq \ker(A)$, dann müsste $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{im}(B)) \leq \dim_{\mathbb{R}}(\ker(A))$ gelten. Wir haben bereits die Dimensionen berechnet: $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(A)) = 1$ und $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{im}(B)) = 3$. Daher kann $\operatorname{im}(B) \subseteq \ker(A)$ nicht gelten.

$\overline{}$ 2

3E. Gilt $\ker(A) \subseteq \operatorname{im}(B)$?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

Es reicht zu zeigen, dass jedes Basiselement einer Basis von $\ker(A)$ in $\operatorname{im}(B)$ enthalten ist. Es ist $[1, -3, 2, -1, -1]^\top = B \cdot (\frac{1}{2} e_1)$, daher ist das Basiselement von $\ker(A)$, das wir oben bestimmt haben, in $\operatorname{im}(B)$ enthalten. ◀◀

Alternative Lösung: Die erste Spalte b_1 von B ist in $\ker(A)$ enthalten, da die erste Spalte von AB gleich $Ab_1 = 0$ ist. Daher ist $\langle b_1 \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \ker(A)$. Diese beiden Räume haben beide Dimension 1, also ist $\langle\, b_1 \,\rangle_{\mathbb{R}} = \ker(A)$. Wegen $b_1 \in \operatorname{im}(B)$ folgt die Behauptung.

$\overline{}$ 2

Aufgabe 4. *Vollständige Induktion* (6 Punkte)

4A. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen $a_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeigen Sie per vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Behauptung:

$$A(n): \qquad \prod_{k=0}^{n}(1+a_k) \geq 1 + \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Induktionsanfang:

Für $n = 0$ finden wir

$$\prod_{k=0}^{0}(1+a_k) = 1 + a_0 \geq 1 + a_0 = 1 + \sum_{k=0}^{0} a_k.$$

Das heißt, die Behauptung $A(0)$ gilt. ◀◀

2

Induktionsschritt:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass die Behauptung $A(n)$ gilt. Wegen $1 + a_{n+1} \geq 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n+1}(1+a_k) &= \left(\prod_{k=0}^{n}(1+a_k)\right) \cdot (1+a_{n+1}) \\
&\overset{\text{IV},1+a_{n+1}\geq 0}{\geq} \left(1 + \sum_{k=0}^{n} a_k\right) \cdot (1+a_{n+1}) \\
&= 1 + \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) + a_{n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n+1}}_{\geq 0} \\
&\geq 1 + \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) + a_{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n+1} a_k
\end{aligned}$$

Somit gilt die Behauptung $A(n+1)$. ◀◀◀◀

Per vollständiger Induktion folgt die Behauptung $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Erläuterung: Dies ist eine Variante der Bernoulli–Ungleichung, die in der Analysis 1 bei vielen Abschätzungen hilfreich ist.

4

Aufgabe 5. *Darstellende Matrizen* (12 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

und die Abbildung $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2} : X \mapsto A \cdot X - X \cdot A$.

5A. Zeigen Sie, dass f eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung ist.

Seien $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir setzen ein und nutzen die Regeln der Matrizenrechnung:

$$\begin{aligned} f(X+Y) &= A \cdot (X+Y) - (X+Y) \cdot A \\ &= A \cdot X + A \cdot Y - X \cdot A - Y \cdot A \\ &= A \cdot X - X \cdot A + A \cdot Y - Y \cdot A \\ &= f(X) + f(Y) \quad \blacktriangleleft\blacktriangleleft \\ f(\lambda X) &= A \cdot (\lambda X) - (\lambda X) \cdot A \\ &= \lambda(A \cdot X) - \lambda(X \cdot A) \\ &= \lambda(A \cdot X - X \cdot A) \\ &= \lambda f(X) \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Somit ist f eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

Erläuterung: Sowohl die Linksmultiplikation $l_A : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2} : X \mapsto A \cdot X$ als auch die Rechtsmultiplikation $r_A : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2} : X \mapsto X \cdot A$ sind $\mathbb{R}$-Homomorphismen. Weiterhin ist $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2\times 2}, \mathbb{R}^{2\times 2}), +)$ eine Gruppe, also gilt $f = l_A - r_A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2\times 2}, \mathbb{R}^{2\times 2})$. Dies ist sogar ein $\mathbb{R}$–Vektorraum, somit sind auch Linearkombinationen wie $5l_A - 3r_A : X \mapsto 5AX - 3XA$ in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2\times 2}, \mathbb{R}^{2\times 2})$ enthalten.

3

5B. Zum $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ betrachten wir die Basis $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, wobei

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die Bilder $f(E_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ der Basiselemente.

$$f(E_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \blacktriangleleft$$

$$f(E_{12}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \blacktriangleleft$$

$$f(E_{21}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \blacktriangleleft$$

$$f(E_{22}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \blacktriangleleft$$

4

5C. Geben Sie die Abbildungsmatrix $B = \mathrm{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(f)$ an.

$$\mathrm{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \blacktriangleleft$$

1

5D. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{im}(B)$.

Durch Hinsehen erkennt man, dass die erste und vierte Spalte bzw. die zweite und dritte Spalte linear abhängig sind, während die erste und zweite Spalte linear unabhängig sind. Somit bilden die ersten beiden Spalte (hier noch skaliert) eine Basis von $\mathrm{im}(B)$:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \blacktriangleleft\blacktriangleleft$$

Erläuterung: Natürlich können Sie die obige Matrix routiniert umformen, aber das wäre mit Gauß auf Spatzen geschossen.

2

5E. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{im}(f)$.

Eine Basis von $\mathrm{im}(f)$ bekommt man, indem man die Basis von $\mathrm{im}(B)$ aus Frage 5D unter $\Phi_{\mathfrak{B}}$ abbildet:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad \blacktriangleleft\blacktriangleleft$$

2

Aufgabe 6. *Symmetrische Gruppe* (6 Punkte)

Wir betrachten die Permutation $\sigma := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \in S_7$.

6A. Geben Sie die Menge der Fehlstände von σ an.

Ergebnis:

$\mathrm{Inv}(\sigma) = \{\,\{1,3\},\{2,3\},\{2,5\},\{4,5\},\{4,7\},\{6,7\}\,\}$ ◀◀

2

6B. Schreiben Sie σ als Produkt von möglichst wenigen Fundamentaltranspositionen.

Anzahl der benötigten Fundamentaltranspositionen und Produkt mit Herleitung:

Die Anzahl der Fehlstände von σ ist $\mathrm{inv}(\sigma) = 6$. Demnach können wir σ als Produkt von sechs Fundamentaltranspositionen $\tau_i = (i, i+1)$ schreiben; weniger geht nicht. ◀

Algebraische Lösung: Wir suchen $i \in \{1,\dots,6\}$ mit $\sigma(i) > \sigma(i+1)$, hier z.B. $i = 2$. Dann ist $\mathrm{inv}(\sigma \circ \tau_i) = \mathrm{inv}(\sigma) - 1$. Nach dem selben Muster fahren wir fort:

$$\sigma \circ \tau_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{inv} = 5$$

$$\sigma \circ \tau_2 \circ \tau_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{inv} = 4$$

$$\sigma \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \tau_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{inv} = 3$$

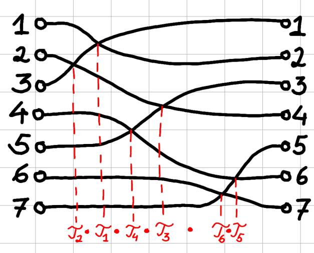
$$\sigma \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \tau_4 \circ \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{inv} = 2$$

$$\sigma \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \tau_4 \circ \tau_3 \circ \tau_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{inv} = 1$$

$$\sigma \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \tau_4 \circ \tau_3 \circ \tau_6 \circ \tau_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{inv} = 0$$

Somit gilt $\sigma = \tau_5 \circ \tau_6 \circ \tau_3 \circ \tau_4 \circ \tau_1 \circ \tau_2$. ◀◀◀ Diese Darstellung ist minimal, aber nicht eindeutig.

Graphische Lösung:
Anhand eines Diagramms der Permutation lesen wir das Produkt ab. Jede Kreuzung steht für eine Fundamentaltransposition. Dabei sollten Sie beachten, dass keine Kreuzungen direkt übereinander liegen, dass sich nicht drei Stränge in einem Punkt schneiden und dass sich zwei Stränge höchstens einmal schneiden. Die Fundamentaltranspositionen werden von rechts nach links gelesen und mit $\circ$ verknüpft, oder von links nach rechts gelesen und mit $\bullet$ verknüpft.



4

Aufgabe 7. *Äquivalenzrelationen* (7 Punkte)

Wir betrachten den Restklassenring $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_7 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$.

7A. Schreiben Sie $f : \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7 : x \mapsto x^3$ explizit aus (mit den kanonischen Repräsentanten).

Ergebnis:

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$f(x)$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{6}$

$\blacktriangleleft\blacktriangleleft$

2

7B. In der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}_7^\times, \cdot)$ erzeugt das Element $\overline{2}$ die Untergruppe $U = \langle\, \overline{2}\, \rangle$. Zählen Sie die Elemente von U auf (mit den kanonischen Repräsentanten).

Ergebnis:

$U = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\}$ $\blacktriangleleft\blacktriangleleft$

Erläuterung: Die von $\overline{2}$ erzeugte Untergruppe ist allgemein $U = \{\, \overline{2}^k \mid k \in \mathbb{Z}\,\}$. Hierbei gilt $\overline{2}^0 = \overline{1}$, $\overline{2}^1 = \overline{2}$, $\overline{2}^2 = \overline{4}$, $\overline{2}^3 = \overline{1}$, also $U = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\}$ wie oben angegeben.

Hinweis: Dies ist der Kern des obigen Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}_7^\times \to \mathbb{Z}_7^\times : x \mapsto x^3$.

2

7C. Auf $\mathbb{Z}_7$ definieren wir die Äquivalenzrelation $x \sim y$ durch $ux = y$ für ein $u \in U$. Nennen Sie zum Quotienten $q : \mathbb{Z}_7 \twoheadrightarrow Q = \mathbb{Z}_7/_\sim$ explizit die Zerlegung Q in Äquivalenzklassen.

Ergebnis:

$Q = \{\overline{0}\} \sqcup \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\} \sqcup \{\overline{3}, \overline{6}, \overline{5}\} = \{\overline{0}\} \sqcup U \sqcup \overline{3}U$ $\blacktriangleleft\blacktriangleleft$

Erläuterung: Eingeschränkt auf die Gruppe $\mathbb{Z}_7^\times$ sehen wir die Zerlegung in Nebenklassen:

$\mathbb{Z}_7^\times = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\} \sqcup \{\overline{3}, \overline{6}, \overline{5}\} = U \sqcup \overline{3}U$

2

7D. Finden Sie alle Abbildungen $g : \mathbb{Z}_7/_\sim \to \mathbb{Z}_7$ mit der Eigenschaft $f = g \circ q$.

Ergebnis:

Die einzige Abbildung, die dies erfüllt, ist

$g : \mathbb{Z}_7/_\sim \to \mathbb{Z}_7 : \{0\} \mapsto \overline{0},\ U \mapsto \overline{1},\ \overline{3}U \mapsto \overline{6}.$ $\blacktriangleleft$

Erläuterung: Der Satz über die eindeutige Faktorisierung über eine Surjektion garantiert hier Existenz und Eindeutigkeit. Die Existenz gilt dank Kompatibilität, denn für alle $x, y \in \mathbb{Z}_7$ gilt: Gilt $x \sim y$, so folgt $f(x) = f(y)$.

1

Aufgabe 8. *Gruppen und Homomorphismen* (14 Punkte)

Sei $(G, \cdot, 1)$ eine Gruppe. Untersuchen Sie die Implikationen der beiden Aussagen:

(1) Die Gruppe G ist abelsch.

(2) Die Abbildung $f : G \to G : x \mapsto x^2$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

8A. Gilt (1) impliziert (2)?

[X] Ja [ ] Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Sei G abelsch. Für $x, y \in G$ finden wir

$$f(x \cdot y) = (x \cdot y)^2 = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) = (x \cdot x) \cdot (y \cdot y) = x^2 \cdot y^2 = f(x) \cdot f(y).$$

Somit ist f ein Gruppenhomomorphismus. ◀◀◀

3

8B. Gilt (2) impliziert (1)?

[X] Ja [ ] Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Sei f ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt $(x \cdot y)^2 = f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) = x^2 \cdot y^2$ für alle $x, y \in G$, d.h. $x \cdot y \cdot x \cdot y = x \cdot x \cdot y \cdot y$. Kürzt man diese Gleichung mit x von links und y von rechts, dann folgt $y \cdot x = x \cdot y$. Somit ist G abelsch. ◀◀◀

Alternative Lösung zu 8A und 8B:

$$\begin{aligned} f \text{ ist Grupenhomomorphismus} &\Leftrightarrow \forall x, y \in G : f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in G : x \cdot y \cdot x \cdot y = x \cdot x \cdot y \cdot y \\ &\Leftrightarrow \forall x, y \in G : y \cdot x = x \cdot y \\ &\Leftrightarrow G \text{ ist abelsch .} \end{aligned}$$

3

Sei $(G, \cdot, 1)$ eine Gruppe und $g \in G$ ein Element.

8C. Ist die Abbildung $\gamma_g : G \to G : x \mapsto g \cdot x \cdot g$ bijektiv?

$\boxed{X}$ Ja $\square$ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Die Abbildung $\gamma_{g^{-1}}$ ist invers zu γ_g, denn:

$$\gamma_g \circ \gamma_{g^{-1}}(x) = g \cdot (g^{-1} \cdot x \cdot g^{-1}) \cdot g = x = \mathrm{id}_G(x)$$
$$\gamma_{g^{-1}} \circ \gamma_g(x) = g^{-1} \cdot (g \cdot x \cdot g) \cdot g^{-1} = x = \mathrm{id}_G(x) \quad ◀◀$$

2

8D. Für welche $g \in G$ ist die Abbildung $\gamma_g : G \to G : x \mapsto g \cdot x \cdot g$ ein Gruppenhomomorphismus? Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an g.

Die Abbildung γ_g ist ein Gruppenhomomorphismus genau dann, wenn das Element g …

die Bedingung $g^2 = 1$ erfüllt. ◀

Begründung:

$$\begin{aligned}
& & & \gamma_g : G \to G \text{ ist Gruppenhomomorphismus} \\
\iff & & \forall x, y \in G : \quad & \gamma_g(x \cdot y) = \gamma_g(x) \cdot \gamma_g(y) \\
\iff & & \forall x, y \in G : \quad & g \cdot (x \cdot y) \cdot g = (g \cdot x \cdot g) \cdot (g \cdot y \cdot g) \\
\iff & & \forall x, y \in G : \quad & 1 = g \cdot g \\
\iff & & & 1 = g^2 \quad ◀◀
\end{aligned}$$

3

8E. Für welche Gruppen G ist die Abbildung $\gamma : (G, \cdot) \to (\mathrm{Abb}(G,G), \circ) : g \mapsto \gamma_g$ multiplikativ? Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an G.

Die Abbildung γ ist multiplikativ genau dann, wenn die Gruppe G ...

abelsch ist. ◀

Begründung:

$$
\begin{aligned}
& & & \gamma : G \to \mathrm{Abb}(G,G) \text{ ist multiplikativ} \\
\iff & & \forall x, g, h \in G : \quad & \lambda_{g\cdot h}(x) = (\lambda_g \circ \lambda_h)(x) \\
\iff & & \forall x, g, h \in G : \quad & (g \cdot h) \cdot x \cdot (g \cdot h) = g \cdot (h \cdot x \cdot h) \cdot g \\
\iff & & \forall x, g, h \in G : \quad & g \cdot h = h \cdot g \\
\iff & & \forall g, h \in G : \quad & g \cdot h = h \cdot g \\
\iff & & & G \text{ ist abelsch.} \quad ◀◀
\end{aligned}
$$

3

Aufgabe 9. *Inversion von Matrizen* (6 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}$ über dem Körper $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ mit fünf Elementen.

9A. Berechnen Sie die Inverse A^{-1} zur Matrix A.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{mit 1.Zeile}]{\text{1.Spalte aufräumen}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

Somit ist $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. ◀◀◀◀

4

9B. Ist die Transponierte $A^\intercal$ invertierbar?

☒ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenargument:

Die Inverse von $A^\intercal$ ist $(A^{-1})^\intercal$, denn $A^\intercal \cdot (A^{-1})^\intercal = (A \cdot A^{-1})^\intercal = 1_{3\times 3}^\intercal = 1_{3\times 3}$ und ähnlich $(A^{-1})^\intercal \cdot A^\intercal = 1_{3\times 3}$. ◀◀

Alternative Lösung: Der Spaltenrang von $A^\intercal$ ist gleich dem Zeilenrang von A, und dieser ist immer gleich dem Spaltenrang von A. Da A invertierbar ist, ist der Spaltenrang von A gleich 3, daher ist auch der Spaltenrang von $A^\intercal$ gleich 3, somit ist auch $A^\intercal$ invertierbar.
(Die Determinante hilft genauso.)

2