Klausur zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie Folgendes aus!* (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Sitzplatznummer:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Begründen Sie Ihre Antwort, kurz aber überzeugend, etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung. Bei Rechnungen ist ein klar nachvollziehbarer Rechenweg gefragt mit den nötigen Erläuterungen.
- Für die Verständnisfragen in Aufgabe 2 gilt: Es gibt zwei Punkte für die richtige Antwort mit richtiger Begründung, und einen Punkt für die richtige Antwort mit einem ernsthaften Versuch einer Begründung. Allein das Ankreuzen gibt noch keinen Punkt.

Die Klausur enthält etwas zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Gewinnen Sie zunächst einen Überblick und sammeln Sie die Punkte, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Gesamt
Punkte	/1	/16	/12	/6	/12	/6	/5	/8	/14	/80

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (16 Punkte)

2A. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A, B \subseteq X$. Gilt immer $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

/2

2B. Ist durch $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} : \frac{a}{b} \mapsto a - b$ eine Abbildung definiert?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/2

2C. Ist $U = \{\,\overline{1}, \overline{6}\,\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}_{11}^{\times}, \cdot)$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/2

2D. Gibt es einen Körper K, in dem $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ für alle Elemente $a, b \in K$ gilt?

☐ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Hindernis:

/2

2E. Ist $K = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}\mathrm{i}$ ein Teilring von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/2

2F. Gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A^2 = B := \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$? *Tipp:* Nutzen Sie die Determinante!

☐ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Hindernis:

/2

2G. Gibt es eine $\mathbb{Q}$–lineare Surjektion $f : \mathbb{Q}^{41} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}^{43}$?

☐ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Hindernis:

/2

2H. Sind die $\mathbb{R}$–Vektorräume $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $W = \mathbb{C}^2$ isomorph?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Hindernis:

/2

Aufgabe 3. *Bild und Kern* (12 Punkte)

Sei $$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -6 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 3}.$$

3A. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(A)$.

4

3B. Ist die Matrix A invertierbar?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

1

3C. Berechnen Sie den Rang der Matrix B.

2

3D. Bestimmen Sie die fehlenden Einträge der Produktmatrix $A \cdot B$.

Ergebnis:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & \\ & & 0 & \\ & & & \end{bmatrix}$$

1

3E. Gilt $\mathrm{im}(B) \subseteq \ker(A)$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/2

3F. Gilt $\ker(A) \subseteq \mathrm{im}(B)$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/2

Aufgabe 4. *Vollständige Induktion* (6 Punkte)

Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt.

$$A(n): \qquad \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k \cdot (k+1)}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

Induktionsanfang:

/2

Induktionsschritt:

/4

Aufgabe 5. *Darstellende Matrizen und Basiswechsel* (12 Punkte)

Wir betrachten die Matrix A, sowie die Standardbasis $\mathcal{E}_3$ und die Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ von $\mathbb{R}^3$ mit

$$A = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 10 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto Ax$.

5A. Berechnen Sie für $i = 1, 2, 3$ die Vektoren $f(b_i) \in \mathbb{R}^3$ und schreiben Sie jeweils $f(b_i)$ als Linearkombination in der Basis $\mathcal{B}$.

$f(b_1) =$

$f(b_2) =$

$f(b_3) =$

3

5B. Geben Sie die Darstellungsmatrix $B = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ von f bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ an.

$B = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) =$

1

5C. Berechnen Sie die Transformationsmatrizen $T = \mathrm{T}^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}$ und $\mathrm{T}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3}$.

—
4

5D. Geben Sie die Formel für den Basiswechsel an, mit der Sie die Matrix A aus den Matrizen B (aus 5B) und T (aus 5C) berechnen können.

$A =$

1

5E. Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ explizit die Koeffizienten der Matrix B^n an.

$B^n = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

1

5F. Aus den Matrizen B^n, T und T^{-1} können Sie die Potenz A^n mit nur zwei Matrixmultiplikationen berechnen: Leiten Sie dafür eine geeignete Gleichung her.

$A^n =$

2

Aufgabe 6. *Symmetrische Gruppe* (6 Punkte)

Wir betrachten die Permutation $\sigma := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \in S_6$.

6A. Geben Sie die Menge der Fehlstände von σ an.

Ergebnis:

$\operatorname{Inv}(\sigma) =$

2

6B. Schreiben Sie σ als Produkt von möglichst wenigen Fundamentaltranspositionen.

Anzahl der benötigten Fundamentaltranspositionen und Produkt mit Herleitung:

4

Aufgabe 7. *Permutation, Zykelzerlegung und Signatur* (5 Punkte)

7A. Wir betrachten den Restklassenring $\mathbb{Z}_{11} = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} = \{ \bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{10} \}$. Schreiben Sie die Abbildung $f : \mathbb{Z}_{11} \to \mathbb{Z}_{11} : x \mapsto x^3$ explizit aus (mit den kanonischen Repräsentanten $0, 1, \dots, 10$)

Ergebnis:

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$
$f(x)$											

3

7B. Schreiben Sie f als Produkt disjunkter Zykel.

Ergebnis:

1

7C. Bestimmen Sie die Signatur von f.

Begründete Antwort:

1

Aufgabe 8. *Äquivalenzrelationen* (8 Punkte)

Auf der Menge $\mathbb{R}$ definieren wir die Relation $\sim$ wie folgt:
Genau dann gilt $x \sim y$, wenn ein $\lambda \in [\frac{1}{2}, 2]$ existiert mit $\lambda x = y$.

8A. Welche der drei Axiome einer Äquivalenzrelation sind erfüllt, welche nicht?

Eigenschaften mit Begründung:

4

8B. Auf der Menge $\mathbb{R}$ sei $\approx$ die von $\sim$ erzeugte Äquivalenzrelation. Explizieren Sie $\approx$.

Genau dann gilt $x \approx y$, wenn …

2

8C. Nennen Sie explizit alle Äquivalenzklassen der Zerlegung $Q = \mathbb{R}/_{\approx}$.

Äquivalenzklassen:

2

Aufgabe 9. *Gruppen und Homomorphismen* (14 Punkte)

Sei $(G, \cdot, 1)$ eine Gruppe. Zu $g \in G$ untersuchen wir die Abbildung $\lambda_g : G \to G : x \mapsto g \cdot x$.

9A. Ist die Abbildung $\lambda_g : G \to G$ bijektiv?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

2

9B. Für welche $g \in G$ ist $\lambda_g : G \to G$ ein Gruppenhomomorphismus, für welche nicht?

Begründete Antwort:

4

9C. Ist die Abbildung $\lambda : (G, \cdot) \to (\mathrm{Abb}(G, G), \circ) : g \mapsto \lambda_g$ multiplikativ?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

2

9D. Ist die Abbildung $\lambda : G \to \mathrm{Abb}(G, G) : g \mapsto \lambda_g$ injektiv?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

/2

9E. Ist die Menge $U = \{ \lambda_g \mid g \in G \}$ eine Untergruppe in der symmetrischen Gruppe $(\mathrm{S}_G, \circ)$?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

/4

Diese Seite ist absichtlich leer.