HAUPTRAUM-SUDOKU: DAS STANDARDVERFAHREN ZUR JORDANISIERUNG

Sei K ein Körper, V ein K–Vektorraum mit $n = \dim V < \infty$ und $F : V \to V$ ein Endomorphismus. Nach dem folgenden Standardverfahren finden wir eine Jordan–Basis von V zu F und somit die Jordan–Form von F. (Der Beweis ist nichts anderes als dieser Algorithmus plus Nachweis der Korrektheit aller Schritte.) Einzige Voraussetzung ist, dass P_F über K in Linearfaktoren zerfällt.

① Bestimme das charakteristische Polynom $P_F \in K[X]$.
② Zerlege P_F über K in Linearfaktoren: Eigenwerte $\lambda_i \in K$ mit Vielfachheiten $r_i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

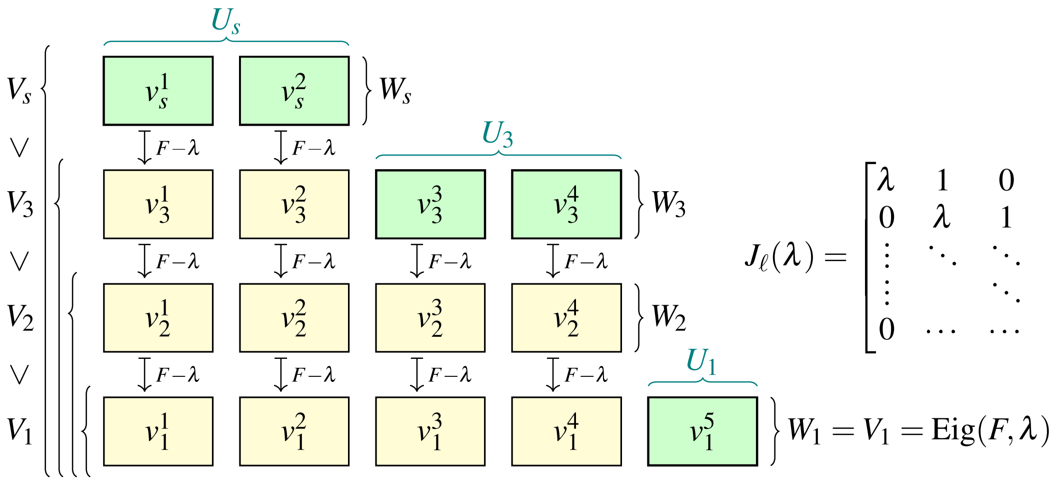
Abbruch: Falls P_F nicht zerfällt, so ist F nicht jordanisierbar, da nicht einmal trigonalisierbar.

Vereinfachung: Wenn P_F einfach zerfällt, dann ist F diagonalisierbar, also $V = \bigoplus_i \operatorname{Eig}(F, \lambda_i)$, und das Standardverfahren zur Diagonalisierung genügt. Allgemein müssen wir jordanisieren.

Für jeden Eigenwert λ mit Vielfachheit r setze $G := F - \lambda \mathrm{id}_V$ und führe folgende Schritte aus:

③ Für $i = 0, 1, \dots, s$ und $V_i = \ker(F - \lambda \mathrm{id}_V)^i$ bestimme $k_i = \dim V_i$ bis schließlich $k_s = r$.

Visualisierung: Diese Daten können wir übersichtlich als Young–Diagramm darstellen. Zeile $i = 1, \dots, s$ enthält dabei $k_i - k_{i-1}$ Kästchen. Kontrolle: Kein Kästchen darf in der Luft hängen.



$$J_\ell(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

④ Lies die Jordan–Form $\operatorname{diag}(B_1, \dots, B_t)$ ab: Die $j$te Spalte der Höhe ℓ zum Eigenwert λ steht für eine Hauptvektorkette der Länge ℓ und somit für den Jordan–Block $B_j = J_\ell(\lambda)$. Diese Jordan–Form ist eindeutig bis auf die willkürliche Reihenfolge der Eigenwerte.

Kurzfassung: Wenn nur die Jordan–Form gefragt ist, so sind wir an dieser Stelle schon fertig.

Langfassung: Falls zudem eine explizite Jordan–Basis gesucht ist, so gelingt dies wie folgt:
In den grünen Kästchen stehen die Startvektoren der Hauptvektorketten. Diese suchen wir!

⑤ Für $i = s, \dots, 1$ wähle ein Komplement U_i, sodass $V_i = V_{i-1} \oplus G(W_{i+1}) \oplus U_i$ gilt, und setze $W_i = G(W_{i+1}) \oplus U_i$. Anfangs gilt $W_{s+1} = 0$, also $W_s = U_s$. Wähle eine Basis von U_i und lasse diese Startvektoren zu Hauptvektorketten runterrieseln.

Konkrete Rechnung mit Basisvektoren: In jeder Schicht $i = s, \dots, 1$ konstruieren wir eine Basis von W_i wie folgt. Zuvor berechnet ist eine Basis $w_1, \dots, w_q$ der darüberliegenden Schicht W_{i+1}. (Anfangs gilt $W_{s+1} = 0$.) Runterrieseln liefert eine Basis $G(w_1), \dots, G(w_q)$ von $G(W_{i+1})$. Wähle eine Hilfsbasis $v_1, \dots, v_p$ von V_{i-1} und setzte dies zur Basis $v_1, \dots, v_p, G(w_1), \dots, G(w_q)$ von $V_{i-1} \oplus G(W_i)$ zusammen. Ergänze dies zu einer Basis $v_1, \dots, v_p, G(w_1), \dots, G(w_q), u_1, \dots, u_h$ von V_i. Letztere sind die ersehnten Startvektoren! Trage $u_1, \dots, u_h$ in die grünen Kästchen ein und lasse runterrieseln. Unsere Basis der Schicht W_i ist nun $G(w_1), \dots, G(w_q), u_1, \dots, u_h$. Mit diesen Daten gehen wir weiter zur darunterliegenden Schicht $i - 1$.

⑥ Lies die Jordan–Basis ab: Spalten von links nach rechts, jede Spalte von unten nach oben.