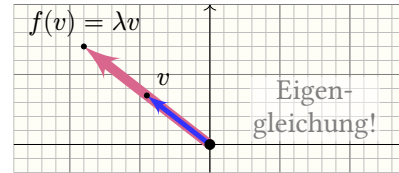
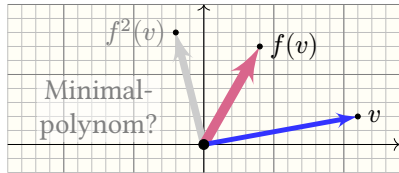


Kapitel P

Eigenvektoren und Diagonalisierung



Live as if you were to die tomorrow.
Learn as if you were to live forever.
Mahatma Gandhi (1869–1948)

Inhalt dieses Kapitels P

- 1 Diagonalisierung und Minimalpolynom
 - Diagonalisierung eines Endomorphismus
 - Das MiPo-Verfahren zur Diagonalisierung
 - Erste Beispiele zur Eigenraumzerlegung
- 2 Determinante und charakteristisches Polynom
 - Eigenschaften des charakteristischen Polynoms
 - Das ChaPo-Verfahren zur Diagonalisierung
 - Begleitmatrix und lineare Rekursion
- 3 Trigonalisierung und Minimalpolynom
 - Trigonalisierung eines Endomorphismus
 - Cayley–Hamilton: MiPo teilt ChaPo
 - Fazit: Kriterien zur Diagonalisierung
- 4 Übungsaufgaben und Anwendungsbeispiele

Willkommen zur Fortsetzung Ihrer Linearen Algebra!

Lineare Algebra 2 - SoSe 2026

Die Lineare Algebra gehört zum Beginn des Mathematikstudiums wie das Erlernen der Buchstaben zum Beginn der Grundschule. Es ist Anfang mühsam, aber nützt ein Leben lang! Lineare Methoden sind elegant und praktisch, daher werden sie überall gerne genutzt, so wohl innerhalb der Mathematik als auch in ihren zahlreichen Anwendungen, längst etwa in Quantencomputing, Data Science oder Künstlicher Intelligenz. Zugleich ist die Lineare Algebra eine wunderschöne Theorie, an der Sie vorzüglich lernen, wie moderne Mathematik aufgebaut wird. Die Vorlesung führt Sie in diese methodische und strukturelle Arbeitsweise ein.

Herzlich willkommen zur Linearen Algebra 2!

Startseite

In diesem Ilias-Kurs finden Sie Informationen und Online-Materialien zu unserer Veranstaltung:

- Die Vorlesung erklärt Ihnen die Begriffe und Methoden. Unterstützend bieten wir Ihnen unser Skript, erprobt und umfassend.
- Jede Woche lösen Sie hier in Ilias ein hilfreiches Quiz. Damit wiederholen Sie den aktuellen Vorlesungsstoff und sind so für die Übungen bestens vorbereitet.
- Zur Übung erstellen wir für Sie jede Woche ein Übungsblatt mit gut abgestimmten Aufgaben, die Sie bis zur Folgewoche lösen.
- Zusätzlich gibt es alle zwei Wochen eine **Vortragsübung**, in der Aufgaben vorgezeichnet und erklärt werden.
- Im Forum können Sie anonym Ihre Fragen stellen und erhalten kompetente Auskunft.
- In den **Sprechstunden** haben Sie eine weitere gute Möglichkeit, einem erfahrenen Tutor Fragen zu Ihren Erstsemestervorlesungen zu stellen.
- Schon hier die Zeit zurück zu unserer **Linearen Algebra 1**. Falls Sie einen Zugang benötigen, schreiben Sie uns!

Vorlesung

- Montag 11:30 - 13:00 Uhr in V47.02
- Mittwoch 9:45 - 11:15 Uhr in V57.03
- Mittwoch 14:00 - 15:30 Uhr in V57.02 (alle zwei Wochen abwechselnd zur Vortragsübung)

Die Vorlesung startet am Mittwoch, den 8. April mit beiden Terminen um 9:45 und um 14:00 Uhr.

Vortragsübung

- Mittwoch 14:00 - 15:30 Uhr in V57.02 (alle zwei Wochen abwechselnd zur Vorlesung)

Die erste Vortragsübung findet in der zweiten Woche statt, also am Mittwoch, den 15. April.

Quizze

Wöchentlich veranstalten wir ein Quiz jeweils von **Donnerstag 10:00 bis Montag 10:00**. Das erste Quiz (mit Wiederholung zur Determinante und neuem Stoff zur Diagonalisierung) startet in der ersten Woche, also am Donnerstag, den 9. April 2026.

Gruppenübungen

Die Gruppenübungen finden **dienstags und mittwochs** in verschiedenen Blöcken statt. Zeiten und Räume finden Sie im [Übersichtsblatt](#).

Die **Anmeldung zu den Übungen** findet statt am **Donnerstag, den 9. April 2026, von 10 bis 16 Uhr** hier in Ilias (nicht in CBMP/LUS). Treten Sie dazu einer der Ilias-Gruppen im [Übersichtsblatt](#) bei.

Das erste Übungsblatt gibt es in Woche 1. Die zugehörigen Gruppenübungen starten dann in Woche 2, also am 14. und 15. April.

Sprechstunden

gemeinsam zur Analysis 2 und Linearen Algebra 2

In den Sprechstunden zur Analysis und Linearen Algebra haben Sie eine weitere gute Möglichkeit, Ihre Fragen zum Stoff und zu den Übungsaufgaben zu stellen.

- Dienstag, 9:45 - 11:15 in V57.8.339
- Donnerstag, 9:45 - 11:15 in V57.8.339

Unser Ilias-Kurs zur LinA2 ist aktuell, informativ und liebevoll gestaltet. Dort finden Sie alle Informationen, hilfreiche Materialien und Termine, etwa in der ersten Woche die Anmeldung zu Ihren Übungsgruppen.

Leseanleitung: Wie nutzen Sie mein Skript richtig?

blauer Titelbalken = Vorlesung, Grundgerüst

weißer Titelbalken = Hintergrund, Bonus

Leseanleitung: Wie nutzen Sie mein Skript richtig?

Mein Skript erfüllt eine **doppelte Funktion**. Für meinen Vortrag erstelle ich meine Folien zur visuellen Unterstützung und nutze sie als Grundlage. Diese **Vortragsfolien** erkennen Sie leicht durch ihre **blauen Titelbalken**; hier finden Sie alles Wesentliche, darauf sollten Sie sich konzentrieren. Dieses Grundgerüst ergänze ich durch **Hintergrundfolien** in Form von Erläuterungen und Ausführungen, Erinnerungen und Ergänzungen, dazu Aufgaben mit Lösungen, weitere Beispiele und Rechnungen, etc. Dies folgt der bewährten Erfahrung, dass die Leser:in leichter vorhandene Übungen, Lösungen, Beweise, Erklärungen, Hinweise oder Illustrationen übergehen kann, als fehlende selbst erfinden. Dosieren Sie selbst!

Ich versuche, jedes Thema so klar und einfach wie möglich darzustellen, doch so präzise und ausführlich wie für ein solides Verständnis nötig ist. Erklärungen und Hinweise, die ich in der Vorlesung mündlich gebe, finden Sie hier zum Nachlesen noch einmal schriftlich ausgeführt; sie nützen mir als Erinnerung und der Leser:in beim Nacharbeiten.

Tipp: Ein fettgesetztes **Stichwort** kann mit „#Stichwort“ gesucht werden.

Pro Vorlesung à 90min besprechen wir etwa 20 bis 30 Vorlesungsfolien; diese bilden den **blauen (!) Faden**, unser Grundgerüst, den **harten Kern**. Optional biete ich **nützlichen Hintergrund**, besonders in der **Vollversion**: hilfreiche Erläuterungen und Ergänzungen, Anwendungen und Beispiele, Aufgaben und Lösungen, usw. Dosieren Sie selbst nach Ihrem Bedarf!

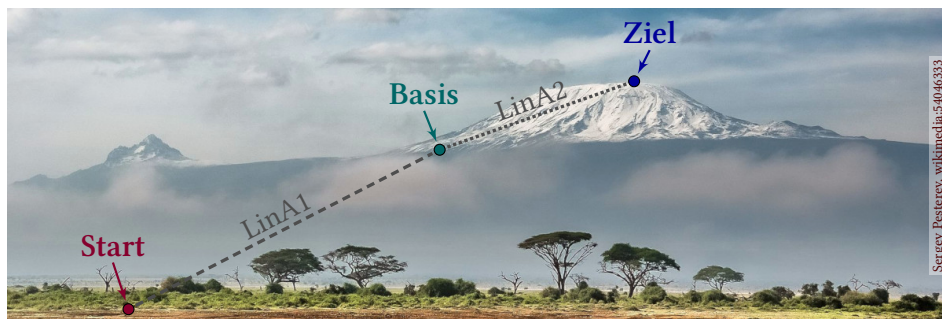
Pro Vorlesung à 90min besprechen wir etwa 20 bis 30 Vorlesungsfolien; diese bilden den **blauen (!) Faden**, unser Grundgerüst, den **harten Kern**. Zudem biete ich **nützlichen Hintergrund**, insbesondere in der **Vollversion**: hilfreiche Erläuterungen und Ergänzungen, Anwendungen und Beispiele, Aufgaben und Lösungen, usw. Dosieren Sie selbst nach Ihrem Bedarf!

Präludium: Schulmathematik vom richtigen Standpunkt Zahlen, Polynome, Matrizen: richtig rechnen und begründen A-E		
Logische Grundlagen	Algebraische Grundlagen	Lineare Strukturen
Mathematische Logik und Beweistechniken F	Monoide und Gruppen J	Lineare Räume und lineare Abbildungen L
Mengen, Relationen und Abbildungen G	Ringe und Körper K	Basis und Dimension M
Kombinatorik und Quotienten H	Polynomringe und Euklids Algorithmus C	Matrixdarstellung linearer Abbildungen N
Ordnungsrelationen und Kardinalität I	Matrixkalkül und Gauß-Algorithmus D	Signatur und Determinante O

Logische und algebraische Grundlagen des ersten Semesters: Mengen und Abbildungen, Ringe und Körper, lineare Strukturen A-O			
Normalformen für Endos	Euklidische Geometrie	Bilineare Algebra	Multilineare Algebra
Diagonalisierung P	Skalarprodukte S	Affine Räume U	Dualität W
Jordanisierung Q	Isometrien S	Bilinearformen V	Tensorprodukt X
Elementarteiler R	Spektralsatz T	Quadriken V	Tensoralgebra Y
Anwendungen in Mathematik, Physik, Informatik, ... Data Science, Artificial Intelligence, Quantum Computing, uvm.			

Five percent of the people think; ten percent of the people think they think; and the other eighty-five percent would rather die than think.


Thomas A. Edison (1847–1931), Erfinder und Unternehmer




Because in the end, you won't remember the time you spent working in the office or mowing your lawn. Climb that goddamn mountain!

Jack Kerouac (1922–1969), Poet der Beat Generation

1. Was kann ich wissen? – 2. Was soll ich tun? – 3. Was darf ich hoffen?
Immanuel Kant (1724–1804), Grundfragen der Philosophie (KrV 1787, p. 833)

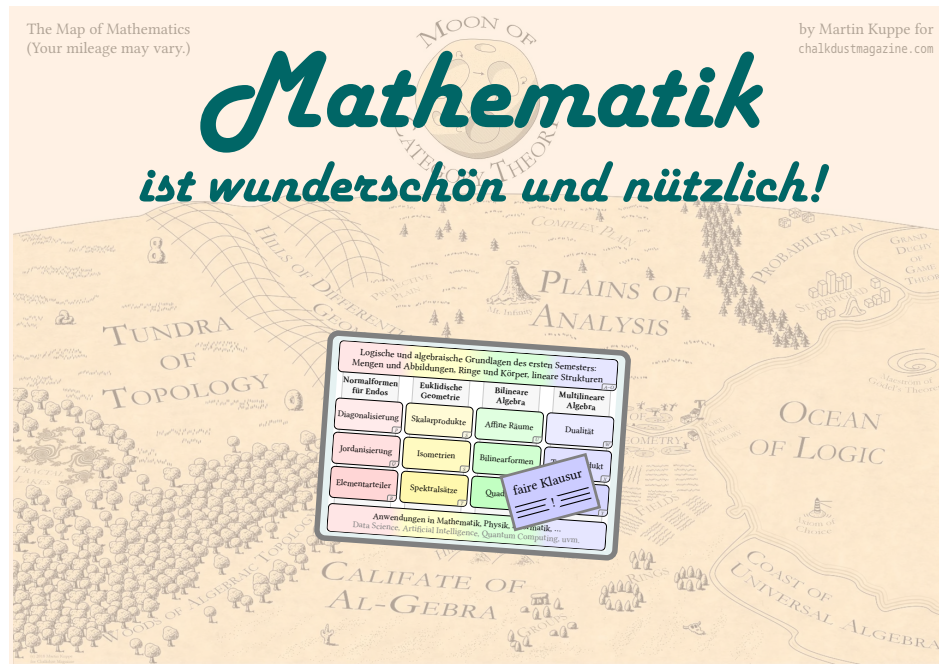
Richtige Entscheidungen für Ihr Studium: Aufwärtsspirale – engagiert mitarbeiten, gemeinsam lernen, erfolgreich studieren. 

 Falsche Weichenstellung der Vermeidung: Abwärtsspirale – desinteressiert mittrotten, planlos verträdeln, frustriert aufgeben.

Ihr Mathematikstudium hat zwei zentrale und sich ergänzende Ziele: **Wissen und Können**, Verstehen und Anwenden, Theorie und Praxis. Darin liegt der besondere Reiz und zugleich die große Schwierigkeit. Die Mathematik erfordert ernsthafte Investition, und sie lohnt sich!

Das ist, kurz gesagt, die Entscheidung Ihres Studiums, ja Ihres Lebens: Planen Sie kurzfristig oder langfristig? Lohnt sich die LinA? Ja, sicher!

- 😊 Universelle Grundlage, wunderschöne und nützliche Mathematik.
- 😊 Klar strukturiert, gut durchdacht, hervorragend betreut, faire Klausur.



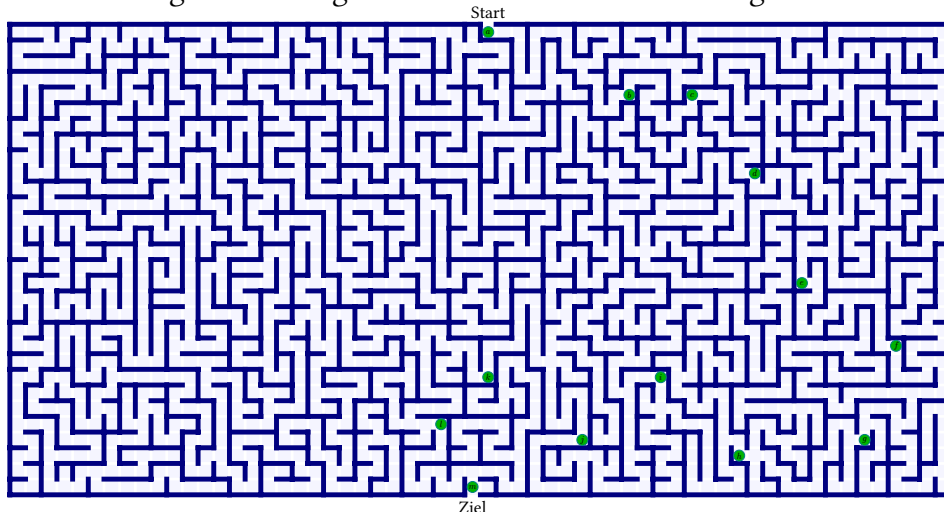
Ich beginne das zweite Semester wie das erste mit Zuspruch und Zusage. Sie können sich auf uns verlassen und uns vertrauen, Ihr LinA-Team! Wir betreuen Sie gut... Sie werden sicherlich Ihre Schwierigkeiten haben, die können wir nicht wegzaubern, doch wir helfen Ihnen mit Rat und Tat.

Meine Bitte: Vertrauen Sie uns! Wir haben umfangreiche Lehrerfahrung und damit sogar einige Lehrpreise gewonnen. Sie bekommen hier beste Lernbedingungen, in Präsenz von Mensch zu Mensch. Nutzen Sie dieses Studienjahr, geben Sie Ihre einmalige Chance nicht leichtfertig auf.

Was ist neu? Sie haben inzwischen schon ein Semester gute Erfahrungen mit uns gemacht. Sie wissen daher, dass wir wahr sprechen, es gut mit Ihnen meinen und Ihnen helfen wollen, richtig Mathematik zu studieren. Wenn Sie schon gut gestartet sind, dann machen Sie bitte weiter so!

Vielleicht haben Sie anfangs gezögert, nicht ernsthaft die nötige Zeit und Mühe investiert, die guten Angebote ausgeschlagen und sich so selbst abgehängt. Dann ist jetzt die Gelegenheit, es endlich richtig anzupacken und wahrhaft zu studieren. Fangen Sie heute an! Wir unterstützen Sie.

Ich führe Argumente sorgsam vor. — Sie arbeiten alles gründlich nach.



Ich zeige Ihnen den Weg vom Start zum Ziel und erkläre die wesentlichen Etappen. Sie verbinden die Punkte, ergänzen und klären die Details, üben die Techniken. Dazu müssen Sie mitdenken, auch um die Ecke. Wir gehen den Weg gemeinsam; kommen Sie startklar und gut vorbereitet!

Ich gebe mir mit Ihnen und dieser Lehrveranstaltung allergrößte Mühe. Ebenso gehe ich davon aus, dass Sie lernen wollen und lernen können: Sie haben sich umsichtig und bewusst für die Mathematik entschieden, Sie sind lernfreudig und wissbegierig, ausdauernd und gewissenhaft.

Der erste Schritt zu Ihrem Erfolg ist Ihre beständige und aktive Teilnahme an Vorlesung – Quiz – Übung – Hausaufgaben. In der Vorlesung werden Sie zwar nicht sofort alles verstehen, doch sie bietet Ihnen den wichtigen ersten Durchgang und Überblick der Themen, Begriffe und Techniken. Davon wollen und sollen Sie jedesmal so viel wie möglich profitieren.

Parallel dazu arbeiten Sie in Ihrem zweiten Durchgang zwischen den Vorlesungen den neuen Stoff selbständig nach, angeleitet durch Quiz und Übung und Hausaufgaben, bestens betreut von Team und Tutor:innen. Nur so erarbeiten Sie sich ein Thema, nur so können Sie in der weiteren Vorlesung und in folgenden Semestern darauf bauen. Lernen ist aktiv!

Nutzen Sie den wöchentlichen Rhythmus, hängen Sie sich nicht selbst ab, bleiben Sie dauerhaft dran, profitieren Sie vom gemeinsamen Lernen!

Die Modellmatrix $D_{m \times n}^r$ der Größe $m \times n$ vom Rang r

P013

Ziel: Wir wollen lineare Abbildungen möglichst einfach darstellen.
Die **Modellmatrix** der Größe $m \times n$ vom Rang r über dem Körper K ist

$$D = D_{m \times n}^r := \begin{bmatrix} 1_{r \times r} & 0_{r \times k} \\ 0_{\ell \times r} & 0_{\ell \times k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Die zugehörige K -lineare **Modellabbildung** ist die Projektion-Inklusion

$$f_D : K^n \rightarrow K^m : (x_1, \dots, x_r, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Daran lesen wir Bild und Kern ab, somit auch Rang und Defekt:

$$\begin{aligned} \text{Im}(D) &= \langle e_1, \dots, e_r \rangle_K^! \leq K^m \implies \text{rang}(D) = r \\ \text{Ker}(D) &= \langle e_{r+1}, \dots, e_n \rangle_K^! \leq K^n \implies \text{def}(D) = n - r \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\text{rang}(D) + \text{def}(D) = n$ gemäß Rangsatz M2u.

Gauß-Normalform eines Vektorraumhomomorphismus

P014
Ausführung

☺ In geeigneten Basen sieht jede lineare Abbildung genau so aus:

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{f_D : (x_1, \dots, x_r, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)} & K^m \\ \Phi_{\mathcal{V}} \cong \downarrow & & \downarrow \cong \Phi_{\mathcal{U}} \\ V & \xrightarrow{f : \begin{cases} v_i \mapsto u_i & \text{für } i = 1, \dots, r, \\ v_i \mapsto 0 & \text{für } i = r+1, \dots, n \end{cases}} & U \end{array}$$

◆ Satz M2x: Gauß-Normalform eines Vektorraumhomomorphismus

Sei $f : V \rightarrow U$ eine lineare Abbildung von K -Vektorräumen endlicher Dimension $n := \dim_K(V)$ und $m := \dim_K(U)$ mit Rang $r := \text{rang}_K(f)$.
Dazu existieren Basen $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_m)$ von U und $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ von V mit $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, \dots, r$ und $f(v_i) = 0$ für alle $i = r+1, \dots, n$.
Somit wird f dargestellt durch unsere Modellmatrix $D_{m \times n}^r$.

Diese Matrix ist so einfach und übersichtlich wie möglich. Das bringt uns zum allgemeinen Ziel dieses Kapitels: Wir wollen nun Endomorphismen $f : V \rightarrow V$ so einfach wie möglich durch eine „Normalform“ darstellen.

Gauß-Algorithmus beidseitig zur Gauß-Normalform

P015
Ausprobieren mit Gaël!

Mit Gauß wandeln wir jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ zur Modellmatrix $D_{m \times n}^r$:

$$\begin{array}{ccc} A \in K^{m \times n} & & B = S^{-1}A \\ \begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 & -6 & -1 \\ -2 & -4 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 7 & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\text{Zeilenoperationen}} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \uparrow \text{Spaltenoperationen} & & \uparrow \text{Spaltenoperationen} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\text{Zeilenoperationen}} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & & D = S^{-1}AT \end{array}$$

An $SD = AT$ mit $S \in \text{GL}_m(K)$ und $T \in \text{GL}_n(K)$ lesen wir Bild und Kern ab:

$$\begin{aligned} \text{Im } D &= \langle e_1, \dots, e_r \rangle_K^!, & \text{Ker } D &= \langle e_{r+1}, \dots, e_n \rangle_K^!, \\ \text{Im } A &= \langle Se_1, \dots, Se_r \rangle_K^!, & \text{Ker } A &= \langle Te_{r+1}, \dots, Te_n \rangle_K^!. \end{aligned}$$

Gauß-Algorithmus zur kanonischen Darstellung

P016
Ausführung

Ausführlich haben wir hierzu das folgende, allgemeine Verfahren:

◆ Satz M3c: Gauß-Algorithmus beidseitig zur Normalform

Sei $A \in K^{m \times n}$ eine Matrix über dem Körper K , ein Divisionsring genügt.

- (1) Der Gauß-Algorithmus konstruiert zu A invertierbare Matrizen $S, S^{-1} \in \text{GL}_m(K)$ und $T, T^{-1} \in \text{GL}_n(K)$, sodass $AT = SD_{m \times n}^r$ gilt.
- (2) Daraus folgt $\text{rang}(A) = r$ und $\text{def}(A) = n - r$ sowie explizit

$$\begin{aligned} \text{Im}(A) &= \langle Se_1, \dots, Se_r \rangle_K^!, \\ \text{Ker}(A) &= \langle Te_{r+1}, \dots, Te_n \rangle_K^!. \end{aligned}$$

☺ Dies ist ein Basiswechsel: Wir lesen die Matrix $A \in K^{m \times n}$ in den richtigen Basen, und schon vereinfacht sich A zur Modellmatrix $D_{m \times n}^r$! Diese Gauß-Normalform (GNF) löst das Klassifikationsproblem M3E.

☺ Die Bestimmung von Bild $\text{Im}(A)$ und Kern $\text{Ker}(A)$ haben wir bereits zuvor in Satz M1v gelöst. Mit Satz M3c sehen Sie hier nun eine elegante Umformulierung; beide Algorithmen tun im Wesentlichen dasselbe.

Wir betrachten einen Endomorphismus $f : V \rightarrow V$ über dem Körper K .

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{f_D} & K^n \\ \Phi_{\mathcal{B}} \downarrow \cong & & \Phi_{\mathcal{B}} \downarrow \cong \\ V & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

Wir suchen eine Basis \mathcal{B} von V , sodass die darstellende Matrix

$$D = M_{\mathcal{B}}(f) := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in K^{n \times n}$$

möglichst einfach wird. Die einfachsten Matrizen sind **diagonal**:

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Zum Beispiel können wir **Potenzen** von D leicht berechnen:

$$D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Strenger als im allgemeinen Fall $f : V \rightarrow W$ stimmen hier Startraum V und Zielraum W überein. Daher wollen wir statt zwei Basen \mathcal{B} von V und \mathcal{C} von W nur noch eine Basis $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ von $V = W$ verwenden.

Das klingt auf den ersten Takt trügerisch einfacher: Statt *zwei* Basen müssen wir nur *eine* Basis wählen. Tatsächlich ist das schwieriger: Statt zwei Basen *dürfen* wir nur noch eine Basis wählen.

Damit haben wir weniger Möglichkeiten zur Anpassung unserer Basis, weniger Freiheitsgrade zur Problemlösung, nämlich nur „halb“ so viele! Weniger ist mehr: Weniger Spielraum bedeutet mehr Herausforderung.

Die Vereinfachung auf Diagonalform wird dadurch tatsächlich spürbar erschwert, und sie gelingt nicht immer. Auch das Klassifikationsproblem wird dadurch kniffliger. Genau darum geht es in diesem Kapitel!

Diese Problemstellung der **Diagonalisierung** tritt sehr häufig auf, und ihre Lösung ist ein vielseitiges Werkzeug der Linearen Algebra.

Diagonalisierung ist nicht immer möglich. In diesem Falle weicht man notgedrungen auf die „nächstbeste“ Möglichkeit aus und sucht eine Darstellung als Blockdiagonalmatrix mit möglichst einfachen Blöcken:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_k \end{bmatrix}$$

Diagonalisierung entspricht $k = n$ Blöcken $B_1, B_2, \dots, B_k \in K = K^{1 \times 1}$. Die nächstbeste Darstellung sind Jordan–Blöcke

$$B_i = J_{n_i}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in K^{n_i \times n_i}.$$

Die Größen addieren sich hierbei gemäß $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Diese Jordan–Normalform (JNF) diskutieren wir im nächsten Kapitel.

Der allgemeinste Fall ist die Frobenius–Normalform (FNF) mit Blöcken

$$B_i = C(P_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -p_{n_i} \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -p_{n_i-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -p_{n_i-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -p_1 \end{bmatrix} \in K^{n_i \times n_i}.$$

Diese Matrix ist nicht ganz so simpel wie zuvor, doch von übersichtlicher Struktur und mit erfreulich vielen Nullen. Dies ist die Begleitmatrix des Polynoms $P_i = X^{n_i} + p_1 X^{n_i-1} + \dots + p_{n_i} X^0 \in K[X]_{n_i}^1$, siehe Satz P2R.

Jede lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums V lässt sich so möglichst übersichtlich darstellen. Das ist zwar nicht so schön und einfach wie eine Diagonalmatrix, aber wie gesagt das nächstbeste und dafür universell einsetzbar.

Nach diesem kurzen Überblick beschäftigen wir uns nun in diesem Kapitel mit dem schönsten und einfachsten Fall: der Diagonalisierung.

◆ **Definition N3A:** Diagonalisierung eines Endomorphismus

Sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K ; wir skalieren von links.

(1) Sei $f : V \rightarrow V$ linear über K . Eine **diagonalisierende Basis** zu f ist eine Basis $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^n$ von V , für die die darstellende Matrix von f diagonal ist:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Das bedeutet, für jeden Index $i = 1, \dots, n$ erfüllt b_i die **Eigenleichung**:

$$f(b_i) = \lambda_i b_i$$

In Worten zur Betonung: Jeder Basisvektor b_i wird so einfach wie möglich abgebildet, nämlich nur um einen Skalar $\lambda_i \in K$ gestreckt!

Eine solche Basis $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$ von V über K nennen wir **Eigenbasis** zu f . Existiert zu f eine Eigenbasis \mathcal{B} von V , so nennen wir f **diagonalisierbar**.

☺ Diagonalisierung ist das zentrale Anliegen der Linearen Algebra: Wir wollen unseren Endomorphismus so einfach wie möglich darstellen, am besten also diagonal. Dazu wollen wir unsere Basis optimal wählen. Wir werden dies in mehreren Kapiteln noch ausgiebig untersuchen.

☺ Allgemein verlangen wir eine Eigenbasis $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$ von V zu f , also $V = \langle \mathcal{B} \rangle_K$ und $f(v_i) = \lambda_i b_i$ mit $\lambda_i \in K$ für jeden Index $i \in I$. Der unendlich-dimensionale Fall dient als Ergänzung und heilsamer Kontrast. Die Funktionalanalysis führt dies später erfolgreich fort.

☺ Endliche Dimension $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$ ist besonders sympathisch, sie tritt in Anwendungen häufig auf und deckt viele Bedürfnisse ab. Sie erlaubt stärkere Werkzeuge, daher werden wir uns meist darauf konzentrieren. Hier können wir effizient rechnen: mit Matrizen!

☺ Ich habe daher die endlich-dimensionale Sichtweise voran gestellt. Dieselbe Sprechweise wenden wir auch auf jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ an, indem wir A als lineare Abbildung $f_A : K^n \rightarrow K^n : v \mapsto Av$ auffassen.

◆ **Definition N3A:** Diagonalisierung einer Matrix

(2) Sei $A \in K^{n \times n}$. Ein **diagonalisierender Basiswechsel** zu A über K ist eine invertierbare Matrix $T \in \text{GL}_n(K)$, so dass $T^{-1}AT$ diagonal ist:

$$T^{-1}AT = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Existiert eine solche Matrix T , so nennen wir A über K **diagonalisierbar**. D.h. die Spalten der Matrix $T = (v_1, \dots, v_n)$ sind eine Eigenbasis von f_A , der zur Matrix A gehörigen linearen Abbildung $f_A : K^n \rightarrow K^n : v \mapsto Av$.

Bemerkung M1s: (v_1, \dots, v_n) ist eine Basis gdw T in $K^{n \times n}$ invertierbar ist.

Beweis: „ \Leftarrow “: Ist (v_1, \dots, v_n) eine Eigenbasis mit $Av_i = \lambda_i v_i$ für $i = 1, \dots, n$, so ist T diagonalisierend, denn $D = T^{-1}AT : e_i \mapsto v_i \mapsto \lambda_i v_i \mapsto \lambda_i e_i$.

„ \Rightarrow “: Diagonalisiert T zu $D = T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, so ist (v_1, \dots, v_n) eine Eigenbasis, denn $A = TDT^{-1} : v_i \mapsto e_i \mapsto \lambda_i e_i \mapsto \lambda_i v_i$. QED

☺ Wir interessieren uns besonders für den endlich-dimensionalen Fall. Dann können wir f durch eine Matrix darstellen, bestmöglich diagonal. Allgemein suchen wir zu $f : V \rightarrow V$ eine Eigenbasis $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ von V , mit der schönen Eigenschaft $f(v_i) = \lambda_i v_i$ und $\lambda_i \in K$ für alle $i \in I$.

☺ Je nach Anwendung darf diese Basis durchaus auch unendlich sein, also $\dim_K(V) = \#I = \infty$. Speziell für den endlichen Fall haben wir eine besonders schöne Theorie, Sätze und Techniken. Der unendliche Fall findet später in der Funktionalanalysis eine umfassende Behandlung.

☺ Die obige Definition N3A erklärt zunächst präzise das angestrebte Ziel. Unser Wunsch: Wir wollen einen Endomorphismus $f : V \rightarrow V$ über K bzw. eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ über K diagonalisieren. Im Folgenden erarbeiten wir uns dazu die nötigen Werkzeuge.

☺ Beachten Sie die logische Trennung von Ziel und Weg. Es lohnt sich, zunächst das Ziel klar zu benennen, dann mögliche Wege zu suchen. Es gibt im Allgemeinen mehrere alternative Lösungsmöglichkeiten, die sollten Sie kennen, und darüber Ziel und Weg nicht verwechseln.

◆ **Definition N3B:** Eigenvektoren, Eigenwerte, Eigenräume

(1) Sei $f: V \rightarrow V$ linear über K . Ein **Eigenpaar** (v, λ) von f besteht aus einem Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ und einem Skalar $\lambda \in K$, die $f(v) = \lambda v$ erfüllen. Wir nennen dann $v \neq 0$ einen **Eigenvektor** und λ einen **Eigenwert** von f . Die Menge aller Eigenwerte nennen wir das **(Eigenwert)Spektrum**

$$\sigma(f) = \sigma(f; K) := \{ \lambda \in K \mid \exists v \in V \setminus \{0\} : f(v) = \lambda v \}.$$

(2) Zu jedem Skalar $\lambda \in K$ definieren wir den zugehörigen **Eigenraum**

$$E(\lambda) = \text{Eig}(f, \lambda) := \{ v \in V \mid f(v) = \lambda v \} \stackrel{!}{=} \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V).$$

Immer gilt $0 \in E(\lambda)$. Für jeden Vektor $v \in V$ gilt folgende Äquivalenz:

$$f(v) = \lambda v \iff f(v) - \lambda \text{id}_V(v) = 0 \iff (f - \lambda \text{id}_V)(v) = 0$$

Genau dann ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f , wenn $E(\lambda) \neq \{0\}$ gilt. Die Dimension $\dim_K E(\lambda) \geq 1$ ist die **geometrische Vielfachheit** von λ .

Die meisten Skalare λ erweisen sich wegen $E(\lambda) = \{0\}$ als uninteressant. Wir betrachten daher nur die interessanten Werte $\lambda \in K$ mit $E(\lambda) \neq \{0\}$, genannt **Eigenwert** von f , manche sagen auch **charakteristischer Wert** (ebenso char. Vektor, char. Gleichung, char. Matrix, char. Polynom, etc.)

☺ Auf Englisch heißt es *eigenvector, eigenvalue, eigenspace, eigenbasis*, auf Französisch *vecteur propre, valeur propre, espace propre, base propre*. Abkürzungen: EW = EWert = Eigenwert, EV = EVektor = Eigenvektor, manchmal auch ER = ERAum = Eigenraum, EB = EBasis = Eigenbasis, etc.

Beispiel: Sei $V \neq \{0\}$ und $f = \text{id}_V$. Dann ist $\lambda = 1$ der einzige EW. der ER ist $\text{Eig}(f, 1) = V$, die geometrische Vielfachheit ist $\dim_K(V)$. Jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ist ein EV. Jede Basis von V ist eine EB zu f .

⚠ Der Nullvektor erfüllt $f(0) = 0 = \lambda 0$ für alle $\lambda \in K$; diese Gleichung gilt immer und ist ohne jedes Interesse. Anders gesagt: Der Nullvektor gehört zu jedem Eigenraum $E(\lambda)$, ist aber niemals ein Eigenvektor.

⚠ Der Skalar $\lambda = 0$ kann durchaus ein Eigenwert sein. Dies geschieht genau dann, wenn f nicht injektiv ist, denn es gilt $E(0) = \text{Ker}(f)$.

Beispiele: Die beiden einfachsten Spezialfälle kennen Sie bereits: Für $\lambda = 0$ ist $\text{Eig}(f, 0) = \text{Ker}(f)$ der Kern der Abbildung $f: V \rightarrow V$. Für $\lambda = 1$ ist $\text{Eig}(f, 1) = \text{fix}(f)$ die Fixpunktmenge von $f: V \rightarrow V$.

◆ **Satz N3c:** Diagonalisierung, Eigenbasis, Eigenraumzerlegung

Sei $f: V \rightarrow V$ linear über dem Körper K . Äquivalent sind:

- 1 Der Endomorphismus $f \in \text{End}_K(V)$ ist **diagonalisierbar**.
- 2 Es existiert eine Basis aus Eigenvektoren, kurz **Eigenbasis**.
- 3 Der Raum $V \stackrel{!}{=} \bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$ ist Summe der **Eigenräume**.

Relevant sind dabei nur die nicht-trivialen Eigenräume $\text{Eig}(f, \lambda) \neq \{0\}$, also die Summanden zu Eigenwerten $\lambda \in \sigma(f; K)$ des Endomorphismus f .

Beweis: Die Äquivalenz „(1) \Leftrightarrow (2)“ ist klar nach Definition N3A. „(3) \Rightarrow (2)“: Wähle je eine (Eigen)Basis \mathcal{B}_λ von $E(\lambda) \leq V$ dank M2K und erhalte daraus die Eigenbasis $\mathcal{B} = \bigsqcup_{\lambda \in K} \mathcal{B}_\lambda$ von V dank M2T. „(2) \Rightarrow (3)“: Umgekehrt, sortiere die Eigenbasis $\mathcal{B} \stackrel{!}{=} \bigsqcup_{\lambda \in K} \mathcal{B}_\lambda$. QED

☹ Wie finden wir alle Eigenwerte $\lambda \in K$, also das Spektrum $\sigma(f; K)$?

☺ Zwei Wege: (1) Das Minimalpolynom führt zum MiPo-Verfahren N3H. (2) Das charakteristische Polynom führt uns zum ChaPo-Verfahren P2H.

☺ Sobald wir alle EW haben, können wir jeden Eigenraum $\text{Eig}(f, \lambda) \leq V$ bestimmen, somit die Summe $\bigoplus_{\lambda \in \sigma(f)} \text{Eig}(f, \lambda)$ und eine Eigenbasis P1D.

Wir betrachten ein Polynom $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n \in K[X]$. Für die Variable X setzen wir den Endomorphismus $f \in \text{End}_K(V)$ ein:

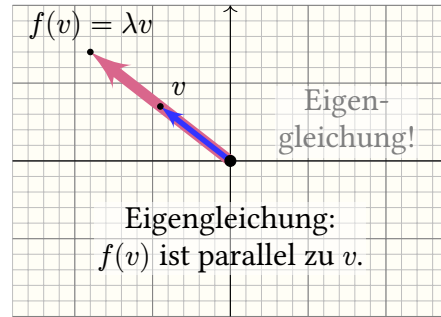
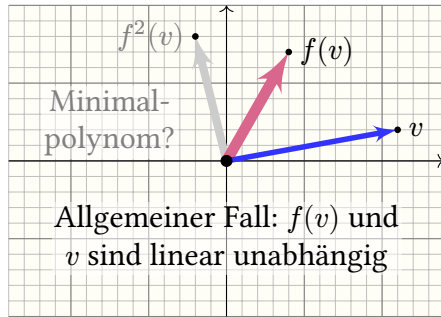
$$P(f) = a_0 \text{id}_V + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_n f^n \in \text{End}_K(V)$$

Ebenso setzen wir $A \in K^{n \times n}$ ein statt $f_A \in \text{End}_K(K^n)$, siehe K3D.

Das Polynom P **annulliert** f lokal in $v \in V$, falls $P(f)(v) = 0$ gilt. Das Polynom P **annulliert** f global auf ganz V , falls $P(f) = 0$ gilt.

☹ Unter allen annullierenden Polynomen $P \in K[X]$ suchen wir jeweils das grad-minimale und normierte. Dies führt uns zur nachfolgend erinnerten Definition N3D/N3E des (lokalen) Minimalpolynoms.

Sei $f: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung über dem Grundkörper K .



Wir vergleichen einen Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ mit seinem Bild $w = f(v) \in V$. Im Allgemeinen besteht keine Relation, beide sind linear unabhängig; das lokale Minimalpolynom N3D verallgemeinert dann die Eigengleichung.

Im Fall $w = \lambda v$ mit $\lambda \in K$ sind sie linear abhängig, also parallel: Aus dem Vektor v entsteht sein Bild $w = f(v)$ durch Streckung. Der zugehörige Eigenwert λ ist der Streckfaktor von v zu w .

Aus der Eigengleichung $f(v) = \lambda v$ erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ sofort:

$$f^n(v) = \lambda^n v$$

Dies folgt per Induktion über $n \in \mathbb{N}$: Für $n = 0$ gilt $f^0 = \text{id}_V$ und $\lambda^0 = 1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gelingt damit der Schritt von $n - 1$ auf n wie folgt:

$$f^n(v) \stackrel{\text{Def}}{=} f(f^{n-1}(v)) \stackrel{\text{Vor}}{=} f(\lambda^{n-1}v) \stackrel{\text{Lin}}{=} \lambda^{n-1}f(v) \stackrel{\text{Eig}}{=} \lambda^{n-1}\lambda v \stackrel{\text{Def}}{=} \lambda^n v$$

Für jedes Polynom $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in K[X]$ gilt demnach:

$$P(f)(v) = P(\lambda) v$$

Wir nutzen hierzu den Einsetzungshomomorphismus K3D:

$$\begin{aligned} P(f)(v) &\stackrel{\text{Def}}{=} (a_0 + a_1 f + \dots + a_n f^n)(v) \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} a_0 v + a_1 f(v) + \dots + a_n f^n(v) \\ &\stackrel{\text{Eig}}{=} a_0 v + a_1 \lambda v + \dots + a_n \lambda^n v \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} (a_0 v + a_1 \lambda v + \dots + a_n \lambda^n v) \stackrel{\text{Def}}{=} P(\lambda) v \end{aligned}$$

◆ **Definition N3D:** das lokale Minimalpolynom $\mu_f^v = \text{MiPo}_f^v$

Sei K ein Körper und $f \in \text{End}_K(V)$, etwa $V = K^n$ und $f(x) = Ax$ mit $A \in K^{n \times n}$. Jeder Vektor $v \in V$ erzeugt seinen **f -zyklischen Unterraum**

$$Z = Z(v) := \langle f^n(v) \mid n \in \mathbb{N} \rangle_K \leq V, \text{ und für seine Dimension gilt } \dim_K(Z) = m := \sup\{n \in \mathbb{N} \mid f^0(v), \dots, f^{n-1}(v) \text{ linear unabhängig}\}.$$

- (0) Im Falle $m = \infty$ ist $(f^n(v))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis von Z . Wir setzen $\mu_f^v := 0$.
- (1) Im Falle $m \in \mathbb{N}$ ist $(f^n(v))_{n < m}$ eine Basis von Z , da frei und erzeugend: Für alle $n \geq m$ gilt induktiv $f^n(v) \in \langle f^0(v), \dots, f^{m-1}(v) \rangle_K$. Wir erhalten

$$a_0 f^0(v) + \dots + a_{m-1} f^{m-1}(v) + f^m(v) = 0$$

mit eindeutigen Koeffizienten $a_0, \dots, a_{m-1} \in K$. Damit definieren wir

$$\mu_f^v := a_0 + a_1 X + \dots + a_{m-1} X^{m-1} + X^m \in K[X]_m^1$$

als das **lokale Minimalpolynom** von $f \in \text{End}_K(V)$ bezüglich $v \in V$.

◆ **Definition N3E:** das (globale) Minimalpolynom $\mu_f = \text{MiPo}_f$

Zu $f \in \text{End}_K(V)$ erzeugen die Potenzen f^0, f^1, f^2, \dots den Unterraum

$$Z := \langle f^n \mid n \in \mathbb{N} \rangle_K \leq \text{End}_K(V), \text{ und für seine Dimension gilt } \dim_K(Z) = m := \sup\{n \in \mathbb{N} \mid f^0, \dots, f^{n-1} \text{ linear unabhängig}\}.$$

- (0) Im Falle $m = \infty$ ist $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis von Z . Wir setzen $\mu_f := 0$.
- (1) Im Falle $m \in \mathbb{N}$ ist $(f^n)_{n < m}$ eine Basis von Z , da frei und erzeugend: Für alle $n \geq m$ gilt induktiv $f^n \in \langle f^0, \dots, f^{m-1} \rangle_K$. Wir erhalten daraus

$$a_0 f^0 + \dots + a_{m-1} f^{m-1} + f^m = 0$$

mit eindeutigen Koeffizienten $a_0, \dots, a_{m-1} \in K$. Damit definieren wir

$$\mu_f := a_0 + a_1 X + \dots + a_{m-1} X^{m-1} + X^m \in K[X]_m^1$$

als das (globale) **Minimalpolynom** des Endomorphismus $f \in \text{End}_K(V)$. Ebenso definieren wir das Minimalpolynom μ_A für jede Matrix $A \in K^{n \times n}$.

☺ Für $V \cong K^n$ können wir μ_f^v mit dem Gauß-Verfahren berechnen, ebenso μ_f , nun jedoch im größeren Matrixraum $\text{End}_K(V) \cong K^{n \times n}$: Wir stellen $f \in \text{End}_K(V)$ als Matrix $A \in K^{n \times n}$ dar und bestimmen die minimale Relation zwischen A^0, A^1, A^2, \dots , siehe N313 und Beispiel N31.

Beispiel: Genau dann ist v ein Eigenvektor von f , wenn $\dim_K Z(v) = 1$, denn es gilt $v \neq 0$ und $f(v) = \lambda v$ mit Eigenwert $\lambda \in K$, also $\mu_f^v = X - \lambda$.

☺ Das Minimalpolynom μ_f^v verallgemeinert die Eigengleichung! (P109)

Minimalität: Sei $P \in K[X]$ mit $P(f) = 0$. Polynomdivision $P = Q\mu_f + R$ ergibt $Q, R \in K[X]$ mit $\deg R < \deg \mu_f$. Auch $R = P - Q\mu_f$ annulliert f , denn $R(f) = 0$. Da $\deg \mu_f$ minimal ist, bleibt nur $R = 0$, also $P = Q\mu_f$.

◆ **Satz N3F:** Das Minimalpolynom teilt jedes annullierende Polynom.

- (1) Lokal sei $I := \{P \in K[X] \mid P(f)(v) = 0\}$. Dann gilt $I = \mu_f^v K[X]$.
- (2) Global sei $J := \{P \in K[X] \mid P(f) = 0\}$. Dann gilt $J = \mu_f K[X]$.
- (3) Dank (1) gilt $\mu_f^v \mid \mu_f$. Dank (2) folgt $\mu_f = \text{kgV}(\mu_f^v; v \in V)$.

Beweis: Für ein (beidseitiges) Ideal $I \triangleleft R$ im Ring R fordern wir $0 \in I$ und $I + I \subseteq I$ und $R \cdot I \subseteq I \supseteq I \cdot R$. Da unser Polynomring $R = K[X]$ kommutativ ist, sind Ideale links- und rechts- und beidseitig dasselbe.

(1) Ist die Menge $I := \{P \in K[X] \mid P(f)(v) = 0\}$ ein Ideal im Ring $K[X]$? Definition einsetzen: Es gilt $0 \in I$. Aus $P(f)(v) = 0$ und $Q(f)(v) = 0$ folgt $(P + Q)(f)(v) = P(f)(v) + Q(f)(v) = 0$. Aus $P(f)(v) = 0$ und $Q \in K[X]$ folgt $P(f)(Q(f)(v)) = (PQ)(f)(v) = (QP)(f)(v) = Q(f)(P(f)(v)) = 0$.

Dank Satz L3F kennen wir in $K[X]$ alle Ideale: I wird erzeugt von μ_f^v . Ausführlich: Sei $P \in K[X]$ mit $P(f)(v) = 0$. Polynomdivision ergibt $P = Q\mu_f^v + R$ mit $Q, R \in K[X]$ und $\deg R < \deg \mu_f^v$. Auch $R = P - Q\mu_f^v$ erfüllt $R(f)(v) = 0$. Da $\deg(\mu_f^v)$ minimal ist, folgt $R = 0$, also $P = Q\mu_f^v$.

(2) Wörtlich dieselbe Rechnung gelingt für $J := \{P \in K[X] \mid P(f) = 0\}$. Kürzer: J ist der Kern von $\Phi_f : K[X] \rightarrow \text{End}_K(V)$, dank L3G also ein Ideal.

(3) Dank Extensionalität gilt $P(f) = 0$ gdw $P(f)(v) = 0$ für alle $v \in V$, also $\forall v : \mu_f^v \mid P \stackrel{(1)}{\iff} \forall v : P(f)(v) = 0 \stackrel{\text{Ext}}{\iff} P(f) = 0 \stackrel{(2)}{\iff} \mu_f \mid P$. QED

◆ **Satz N3G:** Kernzerlegung

Sei $f : V \rightarrow V$ linear über dem Körper K , kurz $f \in \text{End}_K(V)$.

(0) Für $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n) \in K[X]$ mit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}^! \subseteq K$ gilt

$$\text{Ker } P(f) = \text{Ker}(f - \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(f - \lambda_n).$$

(1) In $K[X]$ sei $P = P_1 \dots P_n$ mit $\text{ggT}(P_i, P_j) = 1$ für alle $i \neq j$. Dann folgt

$$\text{Ker } P(f) = \text{Ker } P_1(f) \oplus \dots \oplus \text{Ker } P_n(f).$$

(2) Wenn P zudem f annulliert, $P(f) = 0$, so folgt $\text{Ker } P(f) = V$. Wenn P dabei einfach zerfällt wie in (0), so ist f diagonalisierbar.

Beispiele: Jeder Projektor $f = f^2$ ist diagonalisierbar, dank Zerlegung

$$P = X^2 - X = X(X - 1) \text{ und } V = \text{E}(0) \oplus \text{E}(1) \stackrel{\text{L3G}}{=} \text{Ker } f \oplus \text{Im } f.$$

Gilt $f^2 = \text{id}_V$ und $\text{char } K \neq 2$, so ist f diagonalisierbar, dank Zerlegung

$$P = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1) \text{ und } V = \text{E}(+1) \oplus \text{E}(-1).$$

◆ **Satz N3H:** Minimalpolynom als Diagonalisierungskriterium

Sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum endlicher Dimension. Genau dann ist $f \in \text{End}_K(V)$ diagonalisierbar, wenn $\mu_f \in K[X]$ einfach zerfällt.

Beweis: „ \Rightarrow “: Wir haben $V = \text{E}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{E}(\lambda_n)$ mit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}^! \subseteq K$. Das Produkt $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$ annulliert f . Dank N3F folgt $\mu_f \mid P$. „ \Leftarrow “: Das verdanken wir der Kernzerlegung N3G von $\text{Ker } \mu_f(f) = V$. QED

MiPo-Verfahren N3H: (0) Berechne $\mu_f \in K[X]$, etwa dank Gauß.

(1) Zerfällt $\mu_f = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$ mit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}^! \subseteq K$, so folgt

$$V = \text{Ker}(f - \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(f - \lambda_n).$$

(2) Wähle darin jeweils Basen und erhalte eine Eigenbasis von V zu f .

(3) Zerfällt das Minimalpolynom μ_f nicht oder hat mehrfache Nullstellen, so ist f nicht diagonalisierbar. Erste Beispiele wie N31 illustrieren dies. Auch das ist wertvolle Information, um aussichtslose Suche abubrechen.

Satz P1A: lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Ausführlich: Sei $f: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung über dem Körper K .

Seien $v_0, \dots, v_r \in V \setminus \{0\}$ mit $f(v_i) \stackrel{(\circledast)}{=} \lambda_i v_i$ und $\lambda_i \neq \lambda_j$ in K für $i \neq j$.

Aus $\alpha_0 v_0 + \dots + \alpha_r v_r \stackrel{(\circledast)}{=} 0$ mit $\alpha_0, \dots, \alpha_r \in K$ folgt $\alpha_0 = \dots = \alpha_r = 0$.

Beweis: Die Kernzerlegung N3G zu $P = (X - \lambda_0) \cdots (X - \lambda_n)$ liefert die direkte Summe $\text{Ker } P(f) = \text{Ker}(f - \lambda_0) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(f - \lambda_n)$. QED

Induktion über $r \in \mathbb{N}$: Für $r = 0$ gilt die Aussage dank $v_0 \neq 0$. (L1F)

Sei nun $r \geq 1$ und die Aussage für $r - 1$ bereits bewiesen.

Auf Gleichung (2) wenden wir $f - \lambda_0$ an und nutzen (1):

$$\alpha_0(\lambda_0 - \lambda_0)v_0 + \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_0)v_1 + \dots + \alpha_r(\lambda_r - \lambda_0)v_r = 0$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_0) = 0$ für $i = 1, \dots, r$.

Dank der Voraussetzung $\lambda_i \neq \lambda_0$ folgt $\alpha_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, r$.

Von Gleichung (2) bleibt schließlich nur $\alpha_0 v_0 = 0$, also $\alpha_0 = 0$. QED

Beweis mit dem Vandermonde-Trick: Gegeben sind die Vektoren $u_i = \alpha_i v_i \in \text{Eig}(f, \lambda_i)$ mit $u_0 + u_1 + \dots + u_r = 0$. Wir wenden f^k an:

$$\lambda_0^k u_0 + \lambda_1^k u_1 + \dots + \lambda_r^k u_r = 0.$$

Für $k = 0, 1, \dots, r$ erhalten wir so das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0^0 & \lambda_1^0 & \dots & \lambda_r^0 \\ \lambda_0^1 & \lambda_1^1 & \dots & \lambda_r^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_0^r & \lambda_1^r & \dots & \lambda_r^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Vandermonde-Matrix ist invertierbar dank Satz D5B:

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0^0 & \lambda_1^0 & \dots & \lambda_r^0 \\ \lambda_0^1 & \lambda_1^1 & \dots & \lambda_r^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_0^r & \lambda_1^r & \dots & \lambda_r^r \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daraus folgt $u_0 = u_1 = \dots = u_r = 0$, wie behauptet. QED

Zur Illustration nenne ich zwei einfache doch grundlegende Beispiele, die wir später für Differenzen- und Differentialgleichungen nutzen:

Beispiel P1B: Eigenfolgen des Verschiebeoperators, siehe M1k

Über jedem Körper K betrachten wir den Folgenraum $K^{\mathbb{N}}$ mit

$$s: K^{\mathbb{N}} \rightarrow K^{\mathbb{N}}: (f_0, f_1, f_2, \dots) \mapsto (f_1, f_2, f_3, \dots).$$

Zu jedem $\lambda \in K$ ist $e_\lambda = (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Eigenfolge, denn $s(e_\lambda) = \lambda e_\lambda$.

Dank Satz P1A ist die Familie $(e_\lambda)_{\lambda \in K}$ in $K^{\mathbb{N}}$ somit linear unabhängig.

Beispiel P1c: Eigenfunktionen des Ableitungsoperators, siehe M1j

Zu jeder Konstanten $\lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben wir die Exponentialfunktion

$$e_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}: t \mapsto e^{\lambda t} \quad \text{mit} \quad \partial e_\lambda = \lambda e_\lambda.$$

Sie ist Eigenfunktion des Ableitungsoperators $\partial \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}))$.

Dank Satz P1A ist die Familie $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{K}}$ in \mathcal{C}^∞ somit linear unabhängig.

🔗 Wie können wir effizient feststellen, ob $f: V \rightarrow V$ diagonalisierbar ist?

Satz P1D: Eigenraumzerlegung und Dimensionsgleichung

Vorgelegt sei eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow V$ über dem Körper K .

(1) Die Summe $E = \sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$ aller Eigenräume ist direkt. (Satz P1A)

(2) Genau dann ist $f: V \rightarrow V$ diagonalisierbar, wenn $E = V$ gilt. (Satz N3c)

(3) Im Falle $\dim_K(V) < \infty$ ist dies äquivalent zur Dimensionsgleichung

$$\dim_K(V) = \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \dim_K \text{Eig}(f, \lambda).$$

Aufgabe: Rechnen Sie dies sorgsam nach. Es ist eine gute Wiederholung!

(1) Was ist für eine direkte Summe zu zeigen, hier $E = \bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$?

(2) Wann gibt es genügend Eigenvektoren, um eine Eigenbasis zu bilden?

(3) Wie berechnen Sie die Dimension einer direkten Summe? (Satz M2r)

Wie schließen Sie von $E \leq V$ damit auf $E = V$, wie ersehnt? (Satz M3o)

😊 Eigenräume ausrechnen und Dimensionen zusammenzählen!

Wir führen dieses praktische Kriterium später in Satz P2N fort.

Beispiel P1E: eine Spiegelung in der Ebene

Zu $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ untersuchen wir die \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto x - v \cdot v^T \cdot x.$$

Aufgabe: (1) Finden Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit nicht-trivialem Eigenraum $E(\lambda)$.
 (2) Bestimmen Sie so alle Eigenräume von f . (3) Diagonalisieren Sie f .

Lösung: (1) Es gilt dank $f^2 = \text{id}$ mit $\mu_f = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$.
 Alternative: Zur Bestimmung von λ nutzen wir die **Determinante**:

$$\text{Ker}(f - \lambda \text{id}) \neq \{0\} \stackrel{\text{O3b}}{\iff} \det(f - \lambda \text{id}) = 0$$

Zur Berechnung wählen wir eine Basis, etwa $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$, und finden

$$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Dies ist das **charakteristische Polynom** von A und f , siehe P2C und P2F.

(2) Wir bestimmen die Eigenräume $E(+1)$ und $E(-1)$ wie folgt:

$$E(+1) = \text{Ker}(f - \text{id}) = \text{Ker} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \mathbb{R} b_1 \quad \text{mit} \quad b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E(-1) = \text{Ker}(f + \text{id}) = \text{Ker} \begin{bmatrix} +1 & 1 \\ 1 & +1 \end{bmatrix} = \mathbb{R} b_2 \quad \text{mit} \quad b_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Für alle weiteren $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ gilt $E(\lambda) = \{0\}$ dank Satz O3D, denn hier ist $\det(A - \lambda I) \neq 0$, also $A - \lambda I$ in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ invertierbar.

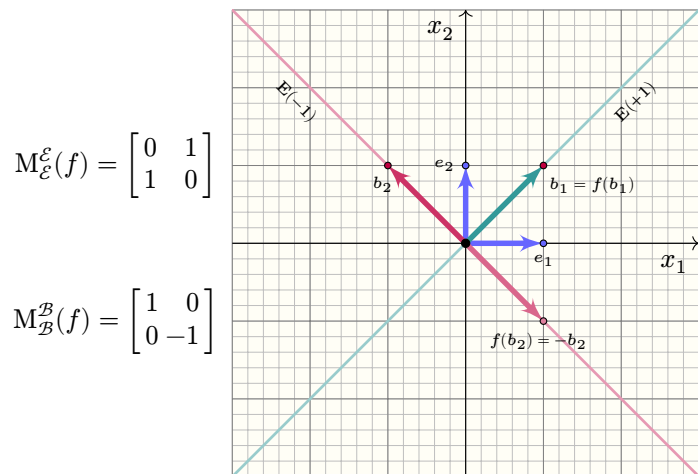
(3) Wir erhalten $\mathbb{R}^2 = E(+1) \oplus E(-1)$ und die Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ von \mathbb{R}^2 .
 Nach Konstruktion gilt $f(b_1) = +1 \cdot b_1$ und $f(b_2) = -1 \cdot b_2$, und somit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Auf Seite N205 haben wir bereits die Basiswechselmatrizen bestimmt:

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

In ihrer Eigenbasis $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ können wir die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ einfach darstellen und besser verstehen... dank Eigenraumzerlegung!



$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist die Spiegelung an der Hauptdiagonalen.

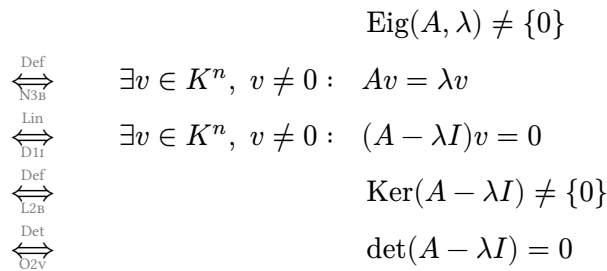
☺ Eine solcherart angepasste Basis \mathcal{B} zu f ist besonders wertvoll: Bezüglich \mathcal{B} wird f durch eine Diagonalmatrix dargestellt, wie erhofft. Wir nennen dies eine **diagonalisierende Basis** zu f , wie oben in Definition N3A vereinbart, oder auch kurz eine **Eigenbasis** zu f .

☺ Auf jedem Eigenraum $E(\lambda)$ ist die Abbildung f besonders einfach: Sie skaliert / streckt jeden Eigenvektor $v \in E(\lambda)$ um den Eigenwert λ . Das ist die oben beworbene geometrisch-algebraische Bedeutung. Wir hoffen auf ausreichend viele Eigenvektoren für eine Eigenbasis.

☺ Glücklicherweise erhalten wir hier $\mathbb{R}^2 = E(+1) \oplus E(-1)$, wie erhofft. Die Eigenräume unserer Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sind etwas Natürliches. Die Wahl der jeweiligen Basen $b_1 \in E(+1)$ und $b_2 \in E(-1)$ ist hingegen etwas willkürlich; wir können auch Vielfache dieser Vektoren wählen.

☺ Die so gewonnene Eigenbasis \mathcal{B} zeigt uns, was f eigentlich tut: Hier offenbart die Abbildung f ihr wahres Wesen, ihren Charakter, ihr Wirken, hier erkennen wir $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sofort als eine Spiegelung. Hier ist $E(+1)$ die Spiegelachse von f , also die Fixpunktmenge.

Wie finden wir alle Eigenwerte $\lambda \in K$ einer Matrix $A \in K^{n \times n}$?



Satz P2A: Eigenwerte und Determinante einer Matrix

Genau dann ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A , wenn $\det(A - \lambda I) = 0$ gilt.

☺ Diese einfache Rechnung zeigt, wie die Determinante uns helfen kann, Eigenwerte zu finden. Dies entwickeln wir nun zum charakteristischen Polynom. Es ist eine übliche Methode, aber bei weitem nicht die einzige. Das Minimalpolynom ist eine Alternative, siehe MiPo-Verfahren N3H.

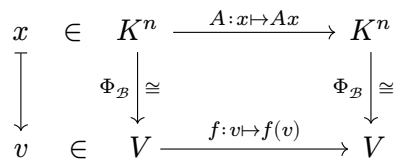
☺ Die Eigenwerte unserer Matrix $A \in K^{n \times n}$ sind demnach genau die Nullstellen der **charakteristischen Funktion** $K \rightarrow K : \lambda \mapsto \det(A - \lambda I)$. Sie ordnet jedem Skalar $\lambda \in K$ die Determinante $\det(A - \lambda I) \in K$ zu und zeigt uns an, ob der Kern von $A - \lambda I$ trivial ist oder nicht (Satz O2v).

☺ Diese Funktion wollen wir nun genauer untersuchen! Insbesondere werden wir zeigen, dass dies eine Polynomfunktion ist, induziert vom **charakteristischen Polynom** $\chi_A \in K[X]_n^1$ unserer Matrix A . So können wir all unsere Werkzeuge zu Polynomen hier nutzbringend anwenden!

⚠ In Definition N3B haben wir zunächst erklärt, was Eigenwerte sind. Hier nun lernen Sie die Rechenmethode mit der Determinante kennen. Um Matrizen und Determinanten überhaupt einsetzen zu können, werden wir uns dabei auf endliche Dimension konzentrieren.

⚠ Unterscheiden Sie Definition und Methoden, also Ziel und Wege! Eigenwerte und Eigenräume lassen sich auch noch in vielen Situationen erklären und nutzen, in denen die Determinante nicht anwendbar ist, insbesondere auch für unendlich-dimensionale Vektorräume.

Wie finden wir alle Eigenwerte eines Endomorphismus $f: V \rightarrow V$?
Im Falle $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$ wählen wir eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von V und stellen f dar durch die zugehörige Matrix $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in K^{n \times n}$:



Satz P2B: Eigenwerte und Determinante eines Endomorphismus

Wie oben sei $v = \Phi_{\mathcal{B}}(x)$. Genau dann gilt $f(v) = \lambda v$, wenn $Ax = \lambda x$.
Genau dann ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f , wenn $\det(f - \lambda \text{id}_V) = 0$ gilt.

⚠ Die entscheidende Voraussetzung ist hier $\dim_K(V) = n < \infty$. In diesem Falle können wir Matrizen und die Determinante nutzen! Auf unendlichen Vektorräumen ist die Sachlage schwieriger... und weitaus interessanter (siehe Funktionalanalysis).

Damit wird das Problem berechenbar dank der Determinante und der charakteristischen Funktion von f bzw. A :

$$\begin{aligned}
 & \text{Eig}(f, \lambda) \neq \{0\} \\
 \Leftrightarrow & \text{Eig}(A, \lambda) \neq \{0\} \\
 \Leftrightarrow & \det(A - \lambda I) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \det(f - \lambda \text{id}_V) = 0
 \end{aligned}$$

Zur Determinante eines Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ siehe O3D: Dies gelingt in einer Basis durch Darstellung als Matrix $A \in K^{n \times n}$. Meist interessiert uns eigentlich die lineare Abbildung $f: V \rightarrow V$, doch mit der Matrix $A \in K^{n \times n}$ können wir besonders gut rechnen.

Notation: Hier ist $I = E = 1_{n \times n} = \text{diag}(1, \dots, 1)$ die Einheitsmatrix. Da E schon für Eigenräume genutzt wird, schreibe ich hier lieber I . Für $A - \lambda I$ schreiben wir kurz $A - \lambda$, und für $f - \lambda \text{id}_V$ ebenso $f - \lambda$. Diese Kurzschreibweise ist etwas nachlässig, aber manchmal bequem.

Definition P2c: das charakteristische Polynom einer Matrix

(0) Zur Matrix $A \in K^{n \times n}$ definieren wir das **charakteristische Polynom**

$$\tilde{\chi}_A(X) := \det(A - XI) \in K[X]_n.$$

(1) Alternativ nutzen wir das **normierte charakteristische Polynom**

$$\chi_A(X) := \det(XI - A) = (-1)^n \tilde{\chi}_A(X) \in K[X]_n^1.$$

⚠ Beide Konventionen sind in der Literatur üblich, aber uneinheitlich. Das normierte Polynom χ_A hat immer Leitkoeffizient 1, das ist schöner.

⚠ Die unnormierte Variante ist in Rechnungen bequemer, da die Matrix A bereits vorliegt, und nur auf der Diagonalen jeweils X subtrahiert wird. Das ist per Hand leichter zu schreiben und vermeidet Vorzeichenfehler.

😊 Beide Varianten unterscheiden sich nur in ungerader Dimension. Für die Nullstellen (also Eigenwerte) spielt das Vorzeichen keine Rolle. Auch für den Eigenraum gilt $\text{Eig}(A, \lambda) = \text{Ker}(A - \lambda I) = \text{Ker}(\lambda I - A)$.

Zur Illustration betrachten wir ein einfaches Zahlenbeispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

😊 Der Übergang von A zu $A - XI$ ist etwas leichter auszuschreiben:

$$A - XI = \begin{bmatrix} 1 - X & 4 & 5 \\ 0 & 0 - X & 1 \\ 0 & 2 & 3 - X \end{bmatrix}$$

⚠ Der Übergang von A zu $XI - A$ erfordert etwas mehr Änderungen:

$$XI - A = \begin{bmatrix} X - 1 & -4 & -5 \\ -0 & X - 0 & -1 \\ -0 & -2 & X - 3 \end{bmatrix}$$

Für einen Computer ist der Unterschied unerheblich. Menschen jedoch machen (Schreib-)Fehler, daher biete ich Ihnen hier beide Varianten an.

Aufgabe: (1) Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

(2) Finden Sie damit alle Eigenwerte, also das Spektrum $\sigma(A; \mathbb{R})$.

(3) Ist A über \mathbb{R} diagonalisierbar? (4) Falls ja, diagonalisieren Sie A .

Lösung: (1) Wir folgen der Definition und berechnen die Determinante:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_A(X) &\stackrel{\text{Def}}{=} \begin{vmatrix} 1 - X & 4 & 5 \\ 0 & -X & 1 \\ 0 & 2 & 3 - X \end{vmatrix} = (1 - X)[-X(3 - X) - 2 \cdot 1] \\ &= (1 - X)(X^2 - 3X - 2) \\ &= -X^3 + 4X^2 - X - 2 \end{aligned}$$

(2) Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von $\chi_A = -\tilde{\chi}_A$:

$$\sigma(A; \mathbb{R}) = \left\{ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{17}), \lambda_3 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{17}) \right\}$$

Summe von Monomen vs **Produkt von Linearfaktoren**

$$X^3 - 4X^2 + X + 2 \longleftarrow (X-1)(X^2 - 3X - 2) \longrightarrow (X-1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$$

Das Ausmultiplizieren (hier nach links) ist eine leichte Routineübung.

Das Faktorisieren (nach rechts) gelingt routiniert in kleinen Graden, ist im Allgemeinen jedoch ein schwieriges Problem.

In Frage (1) wollen wir das charakteristische Polynom bestimmen. Polynome können wir jedoch verschieden darstellen; implizit gemeint ist meist die Monomform, dazu multiplizieren wir alles geduldig aus.

Für die Frage (2) hingegen ist die Monomform nicht die beste Wahl! Wir suchen hier Nullstellen unseres Polynoms, also Linearfaktoren. Dazu geht das Ausmultiplizieren genau in die falsche Richtung; es ist schlauer, die bereits vorliegende partielle Faktorisierung zu nutzen.

⚠ In Klausuren ist das ein tragischer Fehler! Unnötige Umwege kosten Zeit und erhöhen die Wahrscheinlichkeit von Rechenfehlern. Sie sollten daher genau wissen, was Sie suchen und wie Sie es am besten erreichen.

Satz P2D: Grad und Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

(0) Zu $A \in K^{n \times n}$ ist $\tilde{\chi}_A(X) = \det(A - XI)$ ein Polynom von Grad n :

$$\tilde{\chi}_A(X) = a_0 - a_1X \pm \dots + (-1)^{n-1}a_{n-1}X^{n-1} + (-1)^nX^n$$

(1) Normiert zu $\chi_A(X) = \det(XI - A)$ erhalten wir demnach:

$$\chi_A(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} \pm \dots + (-1)^{n-1}a_1 + (-1)^na_0$$

(2) Die extremen Koeffizienten kennen wir: $a_0 = \tilde{\chi}_A(0) = \det(A)$ ist die **Determinante** und $a_{n-1} = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr}(A)$ ist die **Spur** der Matrix A .

Beweis: Jeder Eintrag der Matrix $C = XI - A \in K[X]^{n \times n}$ hat Grad ≤ 1 , Dank Leibniz O2G hat $\det C = \sum_{\tau \in S_n} \text{sign}(\tau) \prod_{j=1}^n c_{\tau(j),j}$ Grad $\leq n$ (C11).

Der Summand $(X - a_{11})(X - a_{22}) \dots (X - a_{nn}) = X^n - X^{n-1} \text{tr} A + \dots$ für $\tau = \text{id}$ hat Grad n . Alle weiteren Summanden haben Grad $\leq n - 2$, denn jede Permutation $\tau \neq \text{id}$ hat höchstens $n - 2$ Fixpunkte. QED

☺ Die Koeffizienten $a_0 = \det A$ und $a_{n-1} = \text{tr} A$ haben eine besondere und erfreulich klare Bedeutung, die weiteren Koeffizienten leider nicht.

Die **charakteristische Matrix** $C = XI - A \in K[X]^{n \times n}$ hat Koeffizienten im Polynomring $K[X]$. Wir rechnen nicht nur über dem Grundkörper K !

☺ Dazu ist bereits alles vorbereitet, denn wir haben die Determinante wohlweislich gleich allgemein über kommutativen Ringen erklärt.

Manche Autor:innen arbeiten vorgeblich nur über einem Körper K , insbesondere für Matrizen und Determinanten, doch spätestens beim charakteristischen Polynom genügt dies genau genommen nicht mehr.

☺ Man kann sich mit verschiedenen Tricks aus dieser misslichen Lage befreien, zum Beispiel können wir den Polynomring $K[X]$ einbetten in seinen Bruchkörper $K(X)$ der gebrochen-rationalen Funktionen (siehe Seite C162 und Satz K3r) und über diesem größeren Körper arbeiten.

Der natürliche Weg scheint mir jedoch die allgemeine Betrachtung über kommutativen Ringen. Genau dafür haben wir alles sorgsam vorbereitet.

☺ Wie ändert sich das charakteristische Polynom bei Basiswechsel?

Definition P2E: Konjugation und Ähnlichkeit von Matrizen

Sei K ein Ring und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Die allgemeine lineare Gruppe $GL_n(K)$ operiert auf dem Matrixring $K^{n \times n}$ durch Konjugation gemäß

$$K^{n \times n} \curvearrowright GL_n(K) : (A, T) \mapsto B = T^{-1}AT.$$

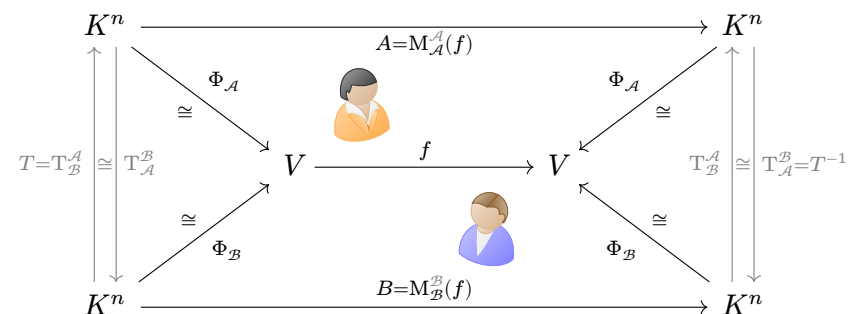
Wir nennen $A, B \in K^{n \times n}$ **ähnlich**, oder auch $GL_n(K)$ -konjugiert, geschrieben $A \sim B$, falls $T \in GL_n(K)$ existiert mit $B = T^{-1}AT$.

Der Übergang von A zu B heißt auch **Ähnlichkeitstransformation** oder **Konjugation** vermöge T . Dies entspricht einem Basiswechsel.

Übung: Dies ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge $K^{n \times n}$. Warum?

☺ Diese Äquivalenzrelation wollen wir nutzen, um Matrizen soweit wie möglich zu vereinfachen: Wir wollen die vorgegebene Matrix A durch eine ähnliche, aber schönere Matrix B ersetzen. Im aktuellen Kontext geht es uns zunächst darum, dass B diagonal wird, falls möglich.

☺ Sie kennen Ähnlichkeitstransformationen bereits von Basiswechseln:



Aus dem Diagramm lesen wir die Transformationsformel ab: $B = T^{-1}AT$.

Satz P2F: Ähnlichkeit und Basiswechsel

Sei K ein Körper. (1) Für $A, B \in K^{n \times n}$ sind gleichbedeutend:

- (1a) Die Matrizen A und B sind ähnlich, also $GL_n(K)$ -konjugiert $A \sim B$.
- (1b) Beide stellen denselben Endomorphismus $f \in \text{End}_K(V)$ dar bezüglich geeigneter Basen \mathcal{A} und \mathcal{B} von V über K .

Satz P2F: Invarianz und Wohldefiniertheit des char. Polynoms

- (2a) Sind A und B in $K^{n \times n}$ ähnlich, so folgt $\chi_A = \chi_B$ in $K[X]$.
- (2b) Zu $f \in \text{End}_K(V)$ wie in (1b) ist $\chi_f := \chi_A = \chi_B$ wohldefiniert.

Beweis: (2a) Wir haben $B = T^{-1}AT$ mit $T \in \text{GL}_n(K)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \chi_B(X) &\stackrel{\text{Def}}{=} \det(XI - B) \\ &\stackrel{\text{Vor}}{=} \det(XI - T^{-1}AT) \\ &\stackrel{\text{Com}}{=} \det[T^{-1}(XI - A)T] \\ &\stackrel{\text{O2o}}{=} \det(T)^{-1} \cdot \det(XI - A) \cdot \det(T) \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \chi_A(X) \end{aligned}$$

(2b) Für $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ und $B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ wie in (1b) gilt $B = T^{-1}AT$. Somit ist das char. Polynom $\chi_f := \chi_A = \chi_B$ wohldefiniert. QED

😊 Die implizite Definition (2b) formulieren wir nun explizit aus.

Definition P2c: das char. Polynom eines Endomorphismus

Sei $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus über K und $\dim_K(V) = n < \infty$. Wir definieren sein **charakteristisches Polynom** $\chi_f \in K[X]$ wie folgt. Wir wählen eine Basis \mathcal{A} von V und stellen f dar durch die zugehörige Matrix $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) \in K^{n \times n}$. Damit definieren wir das char. Polynom:

$$\chi_f := \det(XI - A) \in K[X]_n^1$$

Dazu ist die Wahl irgendeiner Basis \mathcal{A} notwendig, aber willkürlich. Dank Satz P2F ist das Ergebnis χ_f wohldefiniert, unabhängig von \mathcal{A} .

😊 Sie sehen hier sehr schön: Manchmal können wir eine Definition erst nach einem Satz aussprechen, der den Weg zum Begriff bereitet. Das geschieht immer dann, wenn die Wohldefiniertheit zu klären ist, bzw. Existenz und Eindeutigkeit des hier zu definierenden Gegenstands. (Streng besehen müsste ich auch Definition P2c und Satz P2D umdrehen.)

Aufgabe: Sind die folgenden Matrizen $A, B, C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ähnlich? Können wir sie durch Basiswechsel ineinander transformieren?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{vs} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{vs} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \text{tr}(A) = 15 & \text{tr}(B) = 15 & \text{tr}(C) = 14 \\ \det(A) = 0 & \det(B) = 0 & \det(C) = 9 \\ X^3 - 15X^2 - 18X & X^3 - 15X^2 - X & X^3 - 14X^2 - 30X - 9 \end{array}$$

Lösung: Nein, denn ihre charakteristischen Polynome sind verschieden. Effiziente Abkürzung: Für $A, B \approx C$ genügen hier schon die Spuren, denn $\text{tr } A = \text{tr } B = 15$ ist verschieden von $\text{tr } C = 14$. Das ist besonders bequem. Ebenso genügen die Determinanten: Leicht sehen wir $\det A = \det B = 0$, da Rang 2, die Determinante $\det C = 9$ ist leider mühsamer als die Spur. Nicht-Ähnlichkeit $A \approx B$ zeigen erst die charakteristischen Polynome!

😊 Je zwei ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom, $\chi : K^{n \times n} \rightarrow K[X]_n^1 : A \mapsto \chi_A$ ist eine Invariante: Sind die Polynome $\chi_A \neq \chi_B$ verschieden, so sind die Matrizen $A \approx B$ nicht ähnlich.

⚠ Sie ist jedoch noch keine vollständige Invariante: Es gibt Matrizen, die dasselbe charakteristische Polynom haben, aber nicht ähnlich sind. Allein aus $\chi_A = \chi_B$ können wir also im Allgemeinen noch nicht schließen, dass A und B ähnlich sind. Hierzu sind weitere Untersuchungen notwendig.

Aufgabe: Sind die folgenden Matrizen ähnlich?

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{vs} \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Lösung: (1) Die char. Polynome sind gleich: $\chi_A = (X - \lambda)^2 = \chi_B$. (2) Dennoch sind unsere beiden Matrizen A und B nicht ähnlich: Die Matrix A ist diagonal, doch B ist nicht diagonalisierbar (P2o).

😊 Für $\lambda = 0$ gilt $\text{rang } A = 0$ und $\text{rang } B = 1$, also sind A und B nicht ähnlich, nicht einmal äquivalent: $B \neq S^{-1}AS$ für alle $S, T \in \text{GL}_2 K$.

Verfahren P2H: ChaPo-Verfahren zur Diagonalisierung

Sei K ein Körper, darüber $f: V \rightarrow V$ linear und $\dim_K(V) = n < \infty$.

- (1) Wähle eine Basis \mathcal{A} von V und bestimme $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) \in K^{n \times n}$.
- (2) Berechne das charakteristische Polynom $\chi_f = \det(XI - A) \in K[X]$.
- (3) Bestimme alle Nullstellen, also $\sigma(f; K) = \{\lambda \in K \mid \chi_f(\lambda) = 0\}$.
- (4) Zu $\lambda \in \sigma(f)$ bestimme $\text{Eig}(f, \lambda) = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V) \cong \text{Ker}(A - \lambda I)$.
Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn $V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(f)} \text{Eig}(f, \lambda)$ gilt, also die Dimensionsgleichung $n = \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \dim_K \text{Eig}(f, \lambda)$ erfüllt ist.
- (5) In diesem Fall wähle eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ aus Eigenvektoren und erhalte so die ersehnte Diagonalisierung $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

😊 Schritte (1,2,4,5) sind geübte Routineaufgaben der Linearen Algebra. Hierzu kennen Sie effiziente Algorithmen (mit Aufwand $\leq \text{const} \cdot n^4$).

☹️ Allein die Suche nach Nullstellen (3) ist im Allgemeinen schwierig. Dieses Problem gehört zur (nicht-linearen!) Algebra bzw. Numerik.

Dieses Verfahren *können* Sie immer anwenden, insbesondere wenn keine bessere Information vorliegt. Diagonalisierung *dürfen* Sie so angehen, Sie *müssen* aber nicht: Manchmal gibt es geschickte Abkürzungen oder raffinierte Tricks (P313). Diese sollten Sie erkennen, um sich unnötige Arbeit und längliche Umwege zu ersparen. Übung hilft! Denken hilft!

Beispiel: Ist der Körper K klein doch die Matrix $A \in K^{n \times n}$ recht groß, etwa $\#K < n$, dann kann man Schritte (2) und (3) überspringen, und in (4) alle Kandidaten $\lambda \in K$ einsetzen und direkt $\text{Ker}(A - \lambda I)$ berechnen.

Bemerkung: Extrem nützlich ist auch das Minimalpolynom $\mu_f \in K[X]_m^1$, siehe N3 und P3. Sein Grad $m \leq n$ kann dabei deutlich geringer ausfallen. Oft hilft das, manchmal sogar für $\dim V = \infty$, siehe MiPo-Verfahren N3H.

Kritisch ist und bleibt einzig der Punkt 3: die Bestimmung der Nullstellen. Wenn dies gelingt, sei es durch günstige Umstände der gegebenen Daten oder durch zusätzliche Überlegungen zur vorliegenden Struktur (P2Q), so ist das Diagonalisierungsproblem insgesamt gelöst. Routine hilft!

Wie schnell können wir das charakteristische Polynom berechnen?

Satz P2i: Berechnung des charakteristischen Polynoms

Sei K ein Körper mit ausreichend großer Elementezahl $\#K \geq n$.

Zu jeder Matrix $A \in K^{n \times n}$ können wir das charakteristische Polynom $\chi_A \in K[X]_n^1$ berechnen mit $\leq n^4$ arithmetischen Operationen in K .

Dies gelingt trickreich und genial-einfach durch Lagrange-Interpolation:

Algo P2i: Berechnung des charakteristischen Polynoms

Eingabe: eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ über K , wobei $\#K \geq n$

Ausgabe: das charakteristische Polynom $\chi_A \in K[X]_n^1$

- 1: Wähle n verschiedene Stützstellen $x_1, \dots, x_n \in K$.
- 2: Berechne die Werte $y_k = \det(x_k I - A)$ dank Gauß O2Y.
- 3: Rekonstruiere $\chi_A \in K[X]_n^1$ dank Lagrange-Interpolation D5B.

Übung: Führen Sie die Details aus und beweisen Sie den Satz.

In typischen Übungen und Klausuren berechnen Sie charakteristische Polynome meist nur für kleine Matrizen, etwa $n = 2, 3, 4$. Es gelingt auch noch für große, stark strukturierte Matrizen, etwa Begleitmatrizen P2R.

😊 Zur Behandlung von großen, unstrukturierten Matrizen nutzen Sie sinnvollerweise ein Computer-Algebra-System (CAS). Damit stellt sich die dringende Frage, auch für Sie als Nutzer:in, wie der Computer damit effizient umgehen soll, und welcher Rechenaufwand zu erwarten ist.

⚠️ Die Leibniz-Formel O2G und Laplace-Entwicklung O2J erfordern schlimmstenfalls exponentiellen Aufwand, nämlich $n \cdot n!$ Operationen. Das überfordert selbst Supercomputer für moderate n , siehe Seite O267.

😊 Die Berechnung mit n^4 Operationen ist zwar immer noch aufwändig für große n , aber effizient genug für viele Anwendungen mittlerer Größe, ähnlich wie der Gauß-Algorithmus: Für typische Laufzeiten siehe D231.

Der trickreiche Algorithmus von Faddeev-LeVerrier perfektioniert dies, siehe hierzu en.wikipedia.org/wiki/Faddeev-LeVerrier_algorithm.

😊 Diese Standardaufgabe ist typisch für Übungen und Klausuren. Dabei stellt sich jeweils die Frage, was genau gefordert ist: Welche Daten gehören zu einer vollständigen Antwort?

⚠️ Je nach Aufgabe bzw. Anwendung sind verschiedene Stufen der Ausführung denkbar. Beginnen wir mit der maximalen Ausbaustufe:

Gegeben ist eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ über dem Körper K .

Gesucht ist im Sinne einer vollständigen Analyse:

- 1 das Spektrum $\sigma(A; K) \subseteq K$, also die Menge aller Eigenwerte,
- 2 die Dimension jedes Eigenraums $\text{Eig}(A; \lambda) \leq K^n$ für P1D/P2N,
- 3 eine Basis $\mathcal{B}_\lambda = (v_i)_{i \in I_\lambda}$ für jeden Eigenraum $\text{Eig}(A; \lambda)$,
- 4 die daraus gebildete Basiswechsellmatrix $T = (v_1, \dots, v_n) \in \text{GL}_n K$,
- 5 die hierzu inverse Matrix T^{-1} , mit der Eigenschaft / Probe $T^{-1}T = I$,
- 6 die so gewonnene Diagonalmatrix $D = T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, mit der Eigenschaft / Probe $D = T^{-1}AT$ bzw. $AT = TD$.

Neben der vollständigen Analyse gibt es mehrere kleinere **Varianten**:

Ist nur die **Diagonalisierbarkeit** von A gefragt, so genügen (1) und (2). Daran lässt sich die Diagonalisierbarkeit entscheiden und (6) D ablesen. Die noch fehlenden Daten (3,4,5) lassen sich anschließend ergänzen...

Ist ein **diagonalisierender Basiswechsel** gefragt, so genügen (4) T und (5) T^{-1} und (6) D . Damit lassen sich die Eigenschaften $T^{-1}T = I$ und $T^{-1}AT = D$ prüfen und die Daten (1,2,3) ablesen.

Ist nur eine **Eigenbasis** zu A gefragt, so genügen (4) T und (6) D . Damit lässt sich $AT = TD$ prüfen und die Daten (1,2,3) ablesen.

In Klausuren geben wir die Fragen kleinschrittig vor und sagen genau, was jeweils gefragt ist. Erfahrungsgemäß bereitet das keine Probleme.

Bei einer mündlichen Präsentation, etwa in Ihrer Gruppenübung, haben Sie mehr Freiheiten, Sie können nachfragen und ergänzen. In solchen Fällen ist eine offene Fragestellung meist sinnvoller.

Die algorithmische Sichtweise ist oft hilfreich. Hier geht es speziell um die Frage der Spezifikation: Was ist die Eingabe? Was ist die Ausgabe? Welche Eigenschaften müssen garantiert bzw. überprüft werden?

Spezifikation: Eigenbasis einer Matrix

Eingabe: eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ über dem Körper K

Ausgabe: $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und $T \in \text{GL}_n(K)$ mit $AT = TD$ oder notfalls die Antwort „ A ist nicht diagonalisierbar“

Allgemein gilt: Je mehr Daten die Spezifikation als Ausgabe verlangt, desto aufwändiger die Berechnung, doch umso leichter ist die Prüfung. Umgekehrt: Wird von der Eingabe mehr verlangt, so ist dies schwerer für den Auftraggeber, doch umso leichter für den Auftragnehmer.

Spezifikation: Eigenbasis einer diagonalisierbaren Matrix

Eingabe: eine diagonalisierbare Matrix $A \in K^{n \times n}$ über K

Ausgabe: $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und $T \in \text{GL}_n(K)$ mit $AT = TD$

Welche Daten gehören zu einer vollständigen Antwort?

⚠️ Je nach Aufgabe bzw. Anwendung sind verschiedene Stufen der Ausführung denkbar. Beginnen wir mit der maximalen Ausbaustufe:

Gegeben ist $f \in \text{End}_K(V)$ über K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$.

Gesucht ist im Sinne einer vollständigen Analyse:

- 1 die Menge $\sigma(f; K) \subseteq K$, also die Menge aller Eigenwerte,
- 2 die Dimension jedes Eigenraums $\text{Eig}(f; \lambda) \leq V$ für P1D/P2N,
- 3 eine Basis $\mathcal{B}_\lambda = (v_i)_{i \in I_\lambda}$ für jeden Eigenraum $\text{Eig}(f; \lambda)$,
- 4 die durch $I = \bigsqcup_\lambda I_\lambda$ gebildete Eigenbasis $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ von V ,
- 5 die so gewonnene Diagonalmatrix $D = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in K^{n \times n}$.

Zur **Diagonalisierbarkeit** von f genügen (1) und (2). Daran lässt sich (5) ablesen und die noch fehlenden Daten (3,4) anschließend ergänzen...

Für eine **Eigenbasis** zu f genügen (4) und (5), daraus folgen (1,2,3). Selbst im Falle $\dim_K(V) = \infty$ bleiben (1,3,4) ebenso sinnvoll.

Definition P2j: Zerfällung eines Polynoms in Linearfaktoren, siehe C2c

(1) Das Polynom $P \in K[X]_n$ **zerfällt** über K in Linearfaktoren, falls

$$P(X) = c(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n) \quad \text{mit } c, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K.$$

Es **zerfällt einfach**, falls zudem $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, kurz $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}^! \subseteq K$.

Die Matrix $A \in K^{n \times n}$ bzw. der Endomorphismus $f \in \text{End}_K(V)$ **zerfällt (einfach)**, falls dies für das charakteristische Polynom χ_A bzw. χ_f gilt.

(2) Durch Zusammenfassen mehrfacher Nullstellen erhalten wir $P(X) = c(X - \mu_1)^{r_1} \cdots (X - \mu_k)^{r_k}$ mit Nullstellen $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}^! \subseteq K$.

Der Exponent $r_i =: \text{ord}(P, \mu_i)$ heißt die (Nullstellen-) **Ordnung** oder (algebraische) **Vielfachheit** der Nullstelle μ_i im Polynom P .

Beispiele: $P = X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ zerfällt über \mathbb{Q} gemäß $P = (X - 1)(X + 1)$.
 $X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ zerfällt nicht über \mathbb{Q} , aber über \mathbb{R} zu $(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$.
 $X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ zerfällt nicht über \mathbb{R} , aber über \mathbb{C} zu $(X - i)(X + i)$.

☺ Alle bisherigen Begriffe und Verfahren der Linearen Algebra sind tatsächlich linear (im Sinne der mathematischen Struktur) und daher algorithmisch recht einfach (im Sinne der informatischen Komplexität).

⚠ Die Faktorisierung von Polynomen und speziell die Nullstellensuche verhalten sich dagegen spürbar anders, mathematisch und informatisch: Dieses Problem gehört zur (nicht-linearen!) Algebra bzw. Numerik.

Dieser Frage können wir nun nicht länger ausweichen. Alles Weitere ist wieder originärer Bestandteil der Linearen Algebra, doch um überhaupt weiter arbeiten zu können, müssen wir uns um Nullstellen kümmern.

Definition P2j klärt zunächst die nötigen Begriffe und benennt unser ersehntes Ziel: Wir wollen jedes Polynom in Linearfaktoren zerlegen.

☺ Über den komplexen Zahlen \mathbb{C} lässt sich dies immer erreichen, genau dies ist die Aussage des Fundamentalsatzes der Algebra.

⚠ Bislang waren alle Körper in der Linearen Algebra gleichberechtigt. Ab hier jedoch spielt der Körper \mathbb{C} für die LinA seine besondere Rolle.

◆ **Satz E3c:** Fundamentalsatz der Algebra

Jedes komplexe Polynom $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ zerfällt über \mathbb{C} .

Definition P2k: algebraischer Abschluss

Seien $C \geq K$ Körper, zum Beispiel $\mathbb{C} \geq \mathbb{R}$. Wir nennen den Körper C **algebraisch abgeschlossen**, falls jedes Polynom $P \in C[X]$ über C zerfällt.

Die Körpererweiterung $C \geq K$ ist **algebraisch**, falls jedes Element $a \in C$ Nullstelle eines Polynoms $P \in K[X]^*$ ist, gerne minimal (MiPo).

Wir nennen $C \geq K$ einen **algebraischen Abschluss** der Körpers K , falls C algebraisch ist über K und zudem algebraisch abgeschlossen.

Beispiel: Der Körper \mathbb{C} ist algebraisch abgeschlossen, \mathbb{R} jedoch nicht. Die Erweiterung $\mathbb{C} \geq \mathbb{R}$ ist ein algebraischer Abschluss des Körpers \mathbb{R} . Daher arbeiten wir meist lieber über dem Körper \mathbb{C} statt nur mit \mathbb{R} .

Übung: Warum ist $\mathbb{C} \geq \mathbb{Q}$ kein algebraischer Abschluss?

Satz P2L: algebraischer Abschluss, Existenz und Eindeutigkeit

Zu jedem Körper K existiert ein algebraischer Abschluss $C \geq K$.
 Je zwei algebraische Abschlüsse C und C' von K sind isomorph.

Ich zitiere dies hier vor allem zur Beruhigung und als schönen Ausblick: Diese und weitere Konstruktionen lernen Sie in Ihrer Vorlesung *Algebra*.

☺ Es besteht also kein grundsätzliches mathematisches Problem: Wir können prinzipiell jedes Polynom in Linearfaktoren zerlegen. Notfalls nutzen wir den Abschluss $C \geq K$. Es geht auch sparsamer: Jedes Polynom zerfällt über einer endlichen Erweiterung $L \geq K$. (C3p)
 Zu $P = X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ etwa haben wir den Zerfällungskörper $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

⚠ Die algorithmischen Fragen hingegen sind überaus anspruchsvoll und führen zu zwei wichtigen, modernen und tiefliegenden Themen: einerseits die (Computer-)Algebra für exaktes, symbolisches Rechnen, andererseits die (Computer-)Numerik für effiziente Näherungslösungen. Beide bereichern demnächst Ihren mathematischen Werkzeugkasten!

Der folgende Spezialfall ist besonders einfach und sympathisch:

Satz P2M: Einfache Zerfällung impliziert Diagonalisierbarkeit.

Angenommen das char. Polynom von $f \in \text{End}_K(V)$ zerfällt einfach,

$$\chi_f(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) \quad \text{mit} \quad \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}^! \subseteq K.$$

(1) In diesem Falle ist f diagonalisierbar, denn es gilt

$$V = \text{Eig}(f, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \text{Eig}(f, \lambda_n)$$

mit geometrischer Vielfachheit $\dim_K \text{Eig}(f, \lambda_i) = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$.

(2) Wir erhalten eine Eigenbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ durch Wahl von Eigenvektoren $v_i \in \text{Eig}(f, \lambda_i) \setminus \{0\}$. Somit wird f dargestellt durch

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Beweis: Wir haben $E := \bigoplus_{i=1}^n E(\lambda_i) \leq V$ dank Kernzerlegung N3G/P1A. Aus $\dim E(\lambda_i) \geq 1$ folgt $n \leq \dim E \leq \dim V = n$. Das zeigt (1). QED

Im allgemeinen Fall muss das char. Polynom $\chi_f \in K[X]$ nicht zerfallen, siehe etwa das Beispiel P2P. Selbst wenn $\chi_f \in K[X]$ über K zerfällt, kann es mehrfache Nullstellen haben, siehe Beispiele P4A und P2O. In diesem Falle ist zur Diagonalisierung noch kein Urteil möglich: f kann diagonalisierbar sein (wie P4A) oder auch nicht (wie P2O).

Im Falle mehrfacher Nullstellen hilft letztlich nur die Bestimmung der Eigenräume und insbesondere ihrer Dimension (Satz P1D):

Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn $V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(f)} \text{Eig}(f, \lambda)$ gilt, also die Dimensionsgleichung $n = \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \dim_K \text{Eig}(f, \lambda)$ erfüllt ist.

Das ist genau dann der Fall, wenn zu jedem Eigenwert $\lambda \in K$ die geometrische und die algebraische Vielfachheit übereinstimmen (P2N).

Hierzu zeigen wir die folgende nützliche Ungleichung: Die geometrische Vielfachheit ist immer kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit. Das ist eine recht einfache, aber ebenso grundlegende Beobachtung, die wir anschließend in Theorie und Praxis überall nutzen werden.

Satz P2N: Erreicht die geometrische Vielfachheit die algebraische?

(1) Für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma(f; K)$ gilt die Ungleichung

$$1 \leq \dim_K \text{Eig}(f, \lambda) \leq \text{ord}(\chi_f, \lambda) \leq \dim_K(V).$$

(2) Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn (a) χ_f über K zerfällt und (b) $\dim_K \text{Eig}(f, \lambda) = \text{ord}(\chi_f, \lambda)$ für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma(f)$ gilt.

Beweis: (1) Wir wählen eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_k)$ von $\text{Eig}(f, \lambda)$, ergänzen zu einer Basis $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_k, \dots, v_n)$ von V und erhalten die Darstellung

$$A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} B & * \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad B = \lambda \cdot I_k.$$

Somit gilt $\chi_A = \chi_B \cdot \chi_C = (X - \lambda)^k \cdot \chi_C$, also $\dim \text{Eig}(f, \lambda) \leq \text{ord}(\chi_f, \lambda)$.

(2) In V haben wir $E := \bigoplus_{\lambda \in \sigma(f)} E(\lambda)$ dank N3G/P1A. Daraus folgt $\dim E \stackrel{\text{M2r}}{=} \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \dim_K E(\lambda) \stackrel{\text{(b)}}{<} \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \text{ord}(\lambda) \stackrel{\text{(a)}}{<} \deg \chi_f \stackrel{\text{P2n}}{=} \dim V$. QED

Aufgabe: Führen Sie diese Beweisschritte sorgsam aus. **Ausführung:**

(1) Die Determinante ist multiplikativ für Block-Dreiecksmatrizen O2w.

(2a) Es gilt $\sum_{\lambda \in \sigma(f)} \text{ord}(\chi_f, \lambda) \leq n = \dim V$, mit Gleichheit gdw χ_f zerfällt. Andernfalls enthält die Faktorisierung $\chi_f = (X - \lambda_1)^{r_1} \cdots (X - \lambda_k)^{r_k} Q$ noch einen Faktor $Q \in K[X]$ mit $\deg Q > 0$ ohne Nullstellen in K . Aus $\sum_{\lambda \in \sigma(f)} \text{ord}(\chi_f, \lambda) + \deg Q = n$ folgt $\sum_{\lambda \in \sigma(f)} \text{ord}(\chi_f, \lambda) < n$.

(2b) Dank (1) gilt immer $\sum_{\lambda \in \sigma(f)} \dim_K \text{Eig}(f, \lambda) \leq \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \text{ord}(\chi_f, \lambda)$, mit Gleichheit gdw $\dim \text{Eig}(f, \lambda) = \text{ord}(\chi_f, \lambda)$ für jeden Eigenwert λ gilt. Gilt hierbei auch nur einmal die strikte Ungleichung „<“, so kann dies durch die anderen Summanden nicht mehr aufgeholt werden.

Aus diesen Vorbereitungen folgt die erhsehnte Äquivalenz (2): „ \Leftarrow “: Aus (a) und (b) folgt $\dim E = \dim V$, also $E = V$ dank M3o. „ \Rightarrow “: Aus $E = V$ folgt $\dim E = \dim V$, also (a) und (b). QED

😊 Wir verfügen nun über wirksame Werkzeuge zur Diagonalisierung. Damit erkennen wir, dass manche Matrizen *nicht* diagonalisierbar sind. Das typische und daher wichtigste Gegenbeispiel sind Jordan-Blöcke:

Beispiel P2o: Jordan-Blöcke sind nicht-diagonalisierbar.

Zu Dimension $n \in \mathbb{N}$ und Eigenwert $\lambda \in K$ haben wir den **Jordan-Block**

$$J = J_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in K^{n \times n} \quad \text{und} \quad J - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hier gilt $\chi_J = \mu_J = (X - \lambda)^n$, also $\sigma(J) = \{\lambda\}$, doch $\text{Eig}(J, \lambda) = \langle e_1 \rangle_K^1$ und $\text{Eig}(J, \mu) = \{0\}$ für $\mu \neq \lambda$. Für $n \geq 2$ erlaubt $J_n(\lambda)$ keine Eigenbasis.

Nach den diagonalisierbaren wollen wir jede beliebige Matrix $A \in K^{n \times n}$ auf möglichst einfache Gestalt transformieren. Gute Nachricht über \mathbb{C} : Komplizierter als Jordan-Blöcke wird es nicht, siehe Kapitel Q.

Speziell für reelle Matrizen besteht ein weiteres ernstes Hindernis zur Diagonalisierbarkeit, hier das typische und wichtigste Gegenbeispiel:

Beispiel P2p: reelle Drehstreckung ohne reelle Eigenwerte

Zu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ haben wir die reelle Drehstreckung

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \chi_C = \begin{vmatrix} X - a & b \\ -b & X - a \end{vmatrix} = (X - a)^2 + b^2.$$

Das reelle Spektrum ist $\sigma(C; \mathbb{R}) = \emptyset$, komplex gilt $\sigma(C; \mathbb{C}) = \{a \pm ib\}$.

😊 Selbst wenn wir uns vorrangig für reelle Matrizen interessieren, so ist es meist einfacher, über \mathbb{C} zu arbeiten, zumindest behelfsweise. Das ist einer der guten Gründe, warum komplexe Zahlen so beliebt sind.

😊 Diese Beispiele zeigen die beiden Hindernisse zur Diagonalisierung. Erstens P2p: Zerfällt das char. Polynom, liegen also alle Eigenwerte im Grundkörper K ? Zweitens P2o: Erreicht die geometrische Vielfachheit die algebraische? Nur wenn beides erfüllt ist, existiert eine Eigenbasis.

Zu Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$ betrachten wir die symmetrische Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Aufgabe: Ist A über \mathbb{R} diagonalisierbar? **Lösung:** Ihr char. Polynom ist

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X - a & -b \\ -b & X - c \end{vmatrix} = X^2 - (a + c)X + (ac - b^2).$$

Seine Diskriminante ist $d = (a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$. Somit zerfällt $\chi_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ mit $\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(a + c \pm \sqrt{d}) \in \mathbb{R}$.
 (1) Im Falle $d > 0$ zerfällt χ_A einfach, und A ist diagonalisierbar (P2M).
 (0) Im Falle $d = 0$ gilt $b = 0$ und $a = c$, somit ist A bereits diagonal.

Satz P2q: symmetrische reelle 2×2 -Matrix

Jede symmetrische reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist über \mathbb{R} diagonalisierbar.

😊 Das ist ein sehr schönes, allgemeines und nützliches Ergebnis: Wir betrachten symmetrische reelle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, also $A^T = A$. Der erste interessante Fall ist die Dimension $n = 2$ wie hier zu sehen: Das obige Beispiel zeigt, dass A diagonalisierbar ist.

😊 Dies beweisen wir später allgemein in jeder Dimension $n \in \mathbb{N}$: Jede symmetrische reelle Matrix ist über \mathbb{R} diagonalisierbar! Das ist eine Konsequenz des berühmten Spektralsatzes T1i. Wir sehen hier das verheißungsvolle allerersten Beispiel.

Die Ausführung der Diagonalisierung erfordert wie immer die explizite Berechnung einer Eigenbasis. Im Falle $n = 2$ gelingt dies bereits jetzt ganz direkt. Im allgemeinen Fall werden wir dies später noch genauer untersuchen, hilfreiche Werkzeuge erarbeiten und als Sätze bereitstellen.

Übung: Diagonalisieren Sie die obige Matrix A im Falle $b > 0$.

- (1) Untersuchen Sie einige konkrete Zahlenbeispiele.
- (2) Entwickeln Sie eine allgemeine Formel.

Aufgabe: Ist A über \mathbb{R} diagonalisierbar? Falls ja, diagonalisieren Sie A !

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{ebenso} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Lösung: (1a) Wir bestimmen das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_A(X) &\stackrel{\text{Def}}{=} \begin{vmatrix} 1-X & 4 & 5 \\ 0 & -X & 1 \\ 0 & 2 & 3-X \end{vmatrix} = (1-X)[-X(3-X) - 1 \cdot 2] \\ &= (1-X)(X^2 - 3X - 2) \\ &= -X^3 + 4X^2 - X - 2 \end{aligned}$$

(1b) Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von $\chi_A = -\tilde{\chi}_A$:

$$\sigma(A; \mathbb{R}) = \left\{ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{17}), \lambda_3 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{17}) \right\}$$

(1c) Da χ_A einfach zerfällt, schließen wir, dass A diagonalisierbar ist.

(1d) Die Diagonalisierung verläuft weiter nach ChaPo-Verfahren P2H:

$$D = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(3 - \sqrt{17}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(3 + \sqrt{17}) \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{8}(15 - \sqrt{17}) & \frac{1}{8}(15 + \sqrt{17}) \\ 0 & \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{17}) & \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{17}) \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{4} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{17}} & \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{17}} \\ 0 & +\frac{2}{\sqrt{17}} & \frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{17}} \end{bmatrix}$$

Die Rechnungen sind Routine, etwa für ein Computer-Algebra-System (CAS), doch für die Handrechnung nicht ganz kurz. Obwohl die Matrix A über \mathbb{Q} gegeben ist, sind Rechnungen in der Körpererweiterung $\mathbb{Q}[\sqrt{17}]$ nötig. Auch das gelingt letztlich problemlos, wie bereits gesehen (B293).

Lösung: (2a) Auch zu B bestimmen wir das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_B(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & 4 & 5 \\ 0 & -X & 2 \\ 0 & 2 & 3-X \end{vmatrix} = (1-X)[-X(3-X) - 2 \cdot 2] \\ &= (1-X)(X^2 - 3X - 4) \\ &= -X^3 + 4X^2 + X - 4 \end{aligned}$$

(2b) Die Eigenwerte von B sind genau die Nullstellen von $\chi_B = -\tilde{\chi}_B$:

$$\sigma(B; \mathbb{R}) = \left\{ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4 \right\}$$

(2c) Da χ_B einfach zerfällt, schließen wir, dass B diagonalisierbar ist.

☺ Die Matrizen A und B unterscheiden sich nur an einer Stelle. Die Rechnungen für B sind dennoch spürbar einfacher.

☺ Mit ausreichend Muße gelangen Ihnen auch längere Rechnungen. In Klausuren versuchen wir die Schwierigkeit gut zu kalibrieren. Sobald Sie es ausreichend geübt haben, gelingt es routiniert.

(2d) Die Diagonalisierung verläuft weiter nach ChaPo-Verfahren P2H:

$$D = T^{-1}BT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 14 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{16}{3} \\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

☺ Alle Eigenwerte liegen in \mathbb{Q} , das vereinfacht die Rechnung spürbar!

☺ Erinnerung (N3A): Die Spalten von T sind eine Eigenbasis zu B .

Übung: Machen Sie für A und B die Probe! Was ist zu prüfen?

Übung: Machen Sie die Rechnung! Wie verläuft das Verfahren?

☹ Tritt jedes normierte Polynom als charakteristisches Polynom auf? Ja!

Satz P2R: normiertes Polynom und seine Begleitmatrix

Zum Polynom $P = X^n + p_1 X^{n-1} + \dots + p_n X^0 \in K[X]_n^1$ über K definieren wir die **Begleitmatrix** (engl. *companion matrix*):

$$C(P) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -p_n \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -p_{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -p_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -p_1 \end{bmatrix} \in K^{n \times n}$$

- (1) Ihr charakteristisches Polynom ist P , ebenso ihr Minimalpolynom.
- (2) Genau dann ist C über K diagonalisierbar, wenn P einfach zerfällt:

$$P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n) \quad \text{mit} \quad \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}^! \subseteq K$$

- (3) In diesem Falle gelingt die Diagonalisierung $VCV^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit der Vandermonde-Matrix $V = (\lambda_i^j)_{i=1, \dots, n}^{j=0, \dots, n-1} \in \text{GL}_n(K)$, siehe D5B.

Einfache Zerfällung ist immer hinreichend für Diagonalisierbarkeit (P2M). Satz P2R besagt speziell für die Begleitmatrix $C = C(P)$, dass einfache Zerfällung auch notwendig ist und gibt explizit eine Eigenbasis an.

Aufgabe: (1) Berechnen Sie χ_C , indem Sie die charakteristische Matrix $XI - C$ entwickeln nach der ersten (oder letzten) Zeile (oder Spalte).

(2a) Für jeden Skalar $\lambda \in K$ gilt $\dim_K \text{Eig}(C, \lambda) \leq 1$, denn die Matrix $\lambda I - C$ hat mindestens Rang $n - 1$.

(2b) Wie folgt daraus sofort das Diagonalisierbarkeitskriterium? Warum ist es hier nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig?

(3) Die Eigenvektoren finden wir später auf ganz natürliche Weise in den folgenden Untersuchungen zur linearen Rekursionen. Sie können es jetzt schon direkt versuchen, oder anschließend darauf zurückkommen.

😊 Die inverse Matrix V^{-1} ist mühsam, wie so oft. Für die Probe ist sie gar nicht nötig: Es genügt sicherzustellen, dass V invertierbar ist (D5B), und statt $VCV^{-1} = D$ die äquivalente Gleichung $VC = DV$ zu prüfen.

Beweis: (1a) Induktion: Für $n = 1$ gilt $\det(XI - C) = \det [X + p_1] = P$. Für $n \geq 2$ entwickeln wir nach der ersten Zeile (Laplace O2J):

$$\det(XI - C) \stackrel{\text{Def}}{=} \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 & p_n \\ -1 & X & \ddots & \vdots & p_{n-1} \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & p_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X + p_1 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\text{O2J}}{=} X \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 & p_n \\ -1 & X & \ddots & \vdots & p_{n-1} \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & p_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X + p_1 \end{vmatrix} + (-1)^{n-1} p_n \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 & p_n \\ -1 & X & \ddots & \vdots & p_{n-1} \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & p_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X + p_1 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\text{IV}}{=} X(X^{n-1} + p_1 X^{n-1} + \dots + p_{n-1}) + p_n = P$$

Die Determinante der Dreiecksmatrix rechts ist $(-1)^{n-1}$, siehe O2w.

(1b) Wir haben $C : e_0 \mapsto e_1 \mapsto \dots \mapsto e_{n-1} \mapsto -\sum_{i=1}^n p_i e_{n-i}$. Der Raum K^n ist also C -zyklisch, erzeugt von e_0 , und das Minimalpolynom ist $\mu_C^{e_0} = P$. Für alle i gilt $P(C)e_i = P(C)C^i e_0 = C^i P(C)e_0 = 0$, also global $\mu_C = P$. Dank MiPo-Kriterium N3H ist C diagonalisierbar gdw P einfach zerfällt.

(2) ChaPo-Kriterium: Zu jedem Skalar $\lambda \in K$ erhalten wir die Matrix

$$\lambda I - C = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & p_n \\ -1 & \lambda & \ddots & \vdots & p_{n-1} \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & p_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \lambda + p_1 \end{bmatrix}$$

Ihr Rang ist $\geq n - 1$, denn die ersten $n - 1$ Spalten sind gestuft und somit linear unabhängig. Dank Rangatz M1v folgt $\dim_K \text{Ker}(\lambda I - C) \leq 1$.

Jeder Eigenwert $\lambda \in \sigma(C)$ hat demnach geometrische Vielfachheit 1.

Diagonalisierbarkeit, $n = \sum_{\lambda} \dim_K \text{Eig}(f, \lambda)$ gemäß P1D, erreichen wir also genau dann, wenn wir n verschiedene Eigenwerte haben. QED

Wir definieren $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : n \mapsto f_n$ rekursiv durch $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$ und

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq 2}.$$

Leonardo Fibonacci beschrieb damit im Jahr 1202 das Wachstum einer Kaninchenpopulation; in der Natur ist diese Folge ein häufiges Muster.

📺 Tibeas: *Fibonacci slop*, youtu.be/LWJzirlCv8I. Die ersten Werte sind:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
f_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

Explizit, geschlossen? Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die phantastische **Binet-Formel**:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \approx \frac{1.618^n}{2.236}$$

Übung: (1) Wie beweisen Sie die gegebene Formel? Per Induktion! (F475)
(2) Wie finden Sie eine solche Formel? Eigenwerte und Eigenvektoren!

☺ Näherungswerte sind $\phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ und $\psi := \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$.

Die geschlossene Formel für f_n zeigt das Wachstumsverhalten:

(0) Der zweite Summand ψ^n konvergiert rasch gegen Null.

(1) Die Fibonacci-Folge f_n wächst exponentiell, wie ϕ^n .

☺ Zunächst handelt die Fragestellung von Zahlenfolgen und Rekursion. Auf den ersten Blick hat das nichts mit Linearer Algebra, Matrizen oder gar Eigenvektoren zu tun. Es zeigt sich jedoch, dass diese universellen Werkzeuge auch hier wunderbar effizient angewendet werden können!

Das ist ein allgemeines und häufiges Phänomen: Die Problemstellung deutet meist noch nicht die möglichen oder nötigen Werkzeuge an.

Zur Problemlösung braucht es daher Erfahrung und Kreativität.

Man erblickt nur, was man schon weiß und versteht. (Goethe)

☺ Erfahrung sammeln Sie durch Übungen wie etwa der folgenden.

Vielfältige Rechnungen und Erprobung der Werkzeuge übt die korrekte Anwendung und fördert Ihre Kreativität für zukünftige neue Aufgaben.

Sei \mathbb{K} ein Körper, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : n \mapsto f_n$ und darauf die Verschiebung (*shift*):

$$s: \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : (f_0, f_1, f_2, \dots) \mapsto (f_1, f_2, f_3, \dots).$$

Ausgeschrieben bedeutet das $s(f) = g$ mit $g_n = f_{n+1}$.

Dies ist offensichtlich eine \mathbb{K} -lineare Abbildung.

Aufgabe: Bestimmen Sie zu s alle Eigenwerte und Eigenräume.

Lösung: Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Die Eigengleichung $s(f) = \lambda f$ lautet hier

$$(f_1, f_2, f_3, \dots) \stackrel{!}{=} (\lambda f_0, \lambda f_1, \lambda f_2, \dots),$$

also $f_1 = \lambda f_0, f_2 = \lambda f_1, f_3 = \lambda f_2, \dots$, kurz $f_{n+1} = \lambda f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Jede solche Folge $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ erfüllt somit $f_n = \lambda^n f_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Eig}(s, \lambda) = \{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : n \mapsto \lambda^n f_0 \} = \langle e_\lambda = (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle_{\mathbb{K}}$$

Als Basis fixieren wir hierzu den Eigenvektor $e_\lambda: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : n \mapsto \lambda^n$.

☺ Hier ist *jeder* Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ Eigenwert, das Spektrum also $\sigma(s) = \mathbb{K}$. Insbesondere hat s über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ überabzählbar viele Eigenwerte!

☺ Jeder Eigenraum ist eindimensional, das ist äußerst übersichtlich. Den Basisvektor $e_\lambda = (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ können wir bequem und explizit angeben.

⚠ Hier ist der Vektorraum $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ unendlich-dimensional. Determinante und charakteristisches Polynom stehen uns daher nicht zur Verfügung. Dennoch können wir Eigenwerte und Eigenräume direkt berechnen.

Übung: Ist der Verschiebeoperator $s: \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ diagonalisierbar?

Selbst wenn der Raum $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ unendlich-dimensional ist, können wir uns dennoch eine diagonalisierende Basis wünschen. Ist dies hier erfüllbar? Der endliche Fall $\#\mathbb{K} < \infty$ ist leicht, der unendliche Fall spannend. (P407)

Übung: Sei $U = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \leq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ der Unterraum der beschränkten Folgen. Er ist s -invariant, das heißt $s(U) \subseteq U$. Einschränkung definiert $s: U \rightarrow U$. Bestimmen Sie Spektrum und Eigenräume. Ebenso $\ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K}) \leq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

Übung: Untersuchen Sie $t: \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : (f_0, f_1, f_2, \dots) \mapsto (0, f_0, f_1, f_2, \dots)$.

😊 Wir untersuchen nun die Fibonacci-Folgen mit Linearer Algebra!

$$V = \{ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} \mid \forall n \in \mathbb{N} : f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0 \} \leq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

MiPo-Verfahren: $V = \text{Ker } P(s)$ mit $P = X^2 - X - 1 = (X - \phi)(X - \psi)$ und $\phi, \psi = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Somit gilt $V = E(\phi) \oplus E(\psi)$ mit Eigenbasis (u, v) bestehend aus $u = (\phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $v = (\psi^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Jede Fibonacci-Folge $f \in V$ ist Linearkombination $f = au + bv$ mit eindeutigen Koeffizienten $a, b \in \mathbb{K}$. Wir erhalten $f = (0, 1, \dots)$ mit $a, b = \pm 1/\sqrt{5}$, also $f_n = (\phi^n - \psi^n)/(\phi - \psi)$.

ChaPo-Verfahren: (1) Stellen Sie $s|_V$ als Matrix dar. (2) Berechnen Sie χ_s . (3) Bestimmen Sie die Eigenwerte, (4) die Eigenräume, (5) eine Eigenbasis. (6) Linearkombinieren Sie unsere Fibonacci-Folge f aus Eigenvektoren.

Lösung: (0) Welche Dimension hat V ? Wir betrachten die Projektion

$$q : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \supseteq V \rightarrow \mathbb{K}^2 : (f_0, f_1, f_2, \dots) \mapsto (f_0, f_1).$$

Zu beliebigen Startwerten $f_0, f_1 \in \mathbb{K}$ existiert genau eine Folge $f \in V$. Somit ist $q : V \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^2$ ein Isomorphismus, insbesondere $\dim_{\mathbb{K}}(V) = 2$.

(1) Als eine Basis $\mathcal{A} = (a_1, a_2)$ von V wählen wir $a_1 = (1, 0, 1, 1, 2, 3, \dots)$ und $a_2 = (0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)$. Es gilt $s(a_1) = a_2$ und $s(a_2) = a_1 + a_2$. Also:

$$A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = C(X^2 - X - 1)^{\top}$$

(2) Aus dieser Matrix gewinnen wir das charakteristische Polynom:

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X - 1 \end{vmatrix} = X^2 - X - 1$$

(3) Die beiden Nullstellen sind $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ und $\psi = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$.

(4) Als Eigenvektoren erhalten wir $u = (\phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $v = (\psi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ in V .

(5) Damit erhalten wir eine Eigenbasis $\mathcal{B} = (u, v)$ von $s : V \rightarrow V$ sowie

$$D = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \psi \end{bmatrix} \quad \text{mit } T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \phi & \psi \end{bmatrix} \quad \text{und } T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -\psi & 1 \\ \phi & -1 \end{bmatrix}.$$

Obwohl die Matrix A über \mathbb{Q} gegeben ist, sind Rechnungen in der Körpererweiterung $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ nötig. **Übung:** Machen Sie die Probe!

(6) Wir stellen die Fibonacci-Folge $f = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots) \in V$ dar als Linearkombination der Eigenvektoren $u = (\phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $v = (\psi^n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$f = au + bv \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a\phi^0 + b\psi^0 \\ 1 = a\phi^1 + b\psi^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Wir finden so die einzige Lösung für die gesuchten Koeffizienten:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Explizit ausgeschrieben ergibt dies die Binet-Formel:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

So lösen Eigenvektoren jede lineare Rekursion als geschlossene Formel!

Übung: Prüfen Sie die hier gefundene Gleichung per Induktion (F475).

Beide hier gezeigte Verfahren gelten allgemein für rekursive Folgen!

$$V = \{ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} \mid \forall k \geq n : f_k + p_1 f_{k-1} + \dots + p_n f_{k-n} = 0 \} \leq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

Dies entspricht der Rekursionsgleichung $P(s)(f) = 0$ mit dem Polynom

$$P = X^n + p_1 X^{n-1} + \dots + p_n X^0 \in \mathbb{K}[X]_n^1.$$

Speziell im Fibonacci-Beispiel haben wir $P = X^2 - X - 1$ betrachtet.

Allgemein ist $P \in \mathbb{K}[X]_n^1$ gegeben, wir haben also $V = \text{Ker } P(s)$.

Dieser Unterraum V in $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist s -invariant, das heißt $s(V) \subseteq V$.

Wir wollen den Verschiebeoperator $s : V \rightarrow V$ diagonalisieren, also eine Basis aus Eigenvektoren der Form $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ bestimmen.

Falls P über \mathbb{K} einfach zerfällt, so gelingt dies wörtlich wie zuvor:

Zu beliebigen Anfangswerten finden wir so eine geschlossene Formel!

😊 Das ist das allgemeine MiPo-Verfahren N3H zur Diagonalisierung!

😊 Das ist das allgemeine ChaPo-Verfahren P2H zur Diagonalisierung!

Satz P2s: lineare Rekursion und ihre Eigenfolgen → Hauptfolgen Q2c

Sei \mathbb{K} ein Körper und $P = X^n + p_1 X^{n-1} + \dots + p_n X^0 \in \mathbb{K}[X]_n^1$.
Wir betrachten den Folgenraum $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ mit dem Verschiebeoperator

$$s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : (f_0, f_1, f_2, \dots) \mapsto (f_1, f_2, f_3, \dots).$$

Darin liegt der \mathbb{K} -Untervektorraum $V \leq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ der P -rekursiven Folgen:

$$V = \text{Ker } P(s) = \{ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} \mid \forall k \geq n : f_k + p_1 f_{k-1} + \dots + p_n f_{k-n} = 0 \}$$

Dieser ist s -invariant, also $s(V) \subseteq V$, und hat Dimension $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$.

Genau dann ist der (so eingeschränkte) Verschiebeoperator $s : V \rightarrow V$ über \mathbb{K} diagonalisierbar, wenn das Polynom P über \mathbb{K} einfach zerfällt,

$$P(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n) \quad \text{mit} \quad \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}^! \subseteq \mathbb{K}.$$

Zu jedem Eigenwert λ haben wir die Eigenfolge $e_\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : n \mapsto \lambda^n$.
Wir erhalten so die Eigenbasis $(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})$ von V bezüglich s .

Einfache Zerfällung ist immer hinreichend für Diagonalisierbarkeit (P2M).
Satz P2s garantiert die Umkehrung und gibt explizit eine Eigenbasis an.

Aufgabe: Folgern Sie dies direkt aus dem MiPo-Verfahren N3H!

Beweisen Sie den Satz mit dem ChaPo-Verfahren P2H nach Vorbild des obigen Fibonacci-Beispiels. (1) Stellen Sie $s|_V^V : V \rightarrow V$ als Matrix dar. (2) Berechnen Sie das char. Polynom. (3) Bestimmen Sie die Eigenwerte, (4) die Eigenräume, (5) eine Eigenbasis, (6) den Basiswechsel.

Lösung: (0) Welche Dimension hat V ? Wir betrachten die Projektion

$$q : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \supseteq V \rightarrow \mathbb{K}^n : f \mapsto (f_0, \dots, f_{n-1}).$$

Zu je n beliebig vorgegebenen Startwerten $f_0, \dots, f_{n-1} \in \mathbb{K}$ existiert genau eine P -rekursive Folge $f = (f_0, \dots, f_{n-1}, f_n, \dots)$.
Somit ist $q : V \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^n$ ein Isomorphismus, insbesondere $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$.

☺ Durch diesen Isomorphismus q bestimmen wir die Dimension und erhalten nach Wunsch auch Basen, etwa $(q^{-1}(e_1), \dots, q^{-1}(e_n))$.

(1) Den Verschiebeoperator $s : V \rightarrow V$ können wir wie folgt darstellen:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{s} & V \\ q \downarrow \cong & & q \downarrow \cong \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{bmatrix}$$

(2) Das charakteristische Polynom ist $\chi_A = P$, dank $A = C(P)^T$ und P2R.
Wir sehen $\dim_{\mathbb{K}} \text{Eig}(s, \lambda) \leq 1$ und können direkt Satz P1D anwenden:

(3) Genau dann ist $s : V \rightarrow V$ diagonalisierbar, wenn P einfach zerfällt,
 $P(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ und $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$.

(4) Es gilt $\text{Eig}(s, \lambda) = \langle e_\lambda \rangle_{\mathbb{K}}^!$ mit der Eigenfolge $e_\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : n \mapsto \lambda^n$.
(5) Wir erhalten so die Eigenbasis $(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})$ von V bezüglich s .
(6) Hierdurch wird der Verschiebeoperator $s : V \rightarrow V$ diagonalisiert:

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad T = \begin{bmatrix} \lambda_1^0 & \lambda_2^0 & \dots & \lambda_n^0 \\ \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \dots & \lambda_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

☺ Die Basiswechselmatrix $T = \text{VDM}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$ ist die berühmte Vandermonde-Matrix (siehe Satz D5B), hier transponiert. Alles ist gut.

Übung: Machen Sie die Probe $AT = TD$.

☺ Die inverse Matrix T^{-1} ist mühsam, wie so oft. Für die Probe ist sie gar nicht nötig: Es genügt sicherzustellen, dass T invertierbar ist (D5B), und statt $T^{-1}AT = D$ die äquivalente Gleichung $AT = TD$ zu prüfen. Das gelingt leicht, und es entspricht unserer bisherigen Rechnung.

Definition P3A: Trigonalisierung eines Endomorphismus

(1) Sei $f: V \rightarrow V$ linear über K . Eine **trigonalisierende Basis** zu f ist eine Basis $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^n$ von V , für die die darstellende Matrix von f trigonal ist:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Existiert eine solche Basis \mathcal{B} von V , so nennen wir f **trigonalisierbar**.

(2) Sei $A \in K^{n \times n}$. Ein **trigonalisierender Basiswechsel** zu A über K ist eine invertierbare Matrix $T \in GL_n(K)$, so dass $T^{-1}AT$ trigonal ist:

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Die Spalten der Matrix $T = (v_1, \dots, v_n)$ sind eine trigonalisierende Basis. Existiert eine solche Matrix T , so nennen wir A über K **trigonalisierbar**.

🕒 Wie können wir herausfinden, ob f bzw. A trigonalisierbar ist?

Satz P3B: Trigonalisierung \Leftrightarrow Zerfällung

Sei $f: V \rightarrow V$ linear über dem Körper K mit $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$. Genau dann ist f über K trigonalisierbar, wenn χ_f über K zerfällt:

$$\chi_f(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$$

Dasselbe gilt für die Trigonalisierung einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ über K .

Beispiel: Sei V über \mathbb{C} ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Dann ist jeder \mathbb{C} -Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ trigonalisierbar.

Beweis: „ \Rightarrow “: Zu f sei \mathcal{B} eine trigonalisierende Basis von V :

$$R = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Demnach gilt $\chi_f \stackrel{\text{P2c}}{=} \chi_R \stackrel{\text{Def}}{=} \det(XI - R) \stackrel{\text{O2w}}{=} (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$.

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & & & \\ 0 & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

„ \Leftarrow “: Wir führen Induktion über n . Für $n \leq 1$ ist die Aussage trivial. Sei nun $n \geq 2$ und die Behauptung für $n - 1$ sei bereits bewiesen.

Zum Eigenwert $\lambda_1 \in K$ existiert ein Eigenvektor $v_1 \in \text{Eig}(f, \lambda_1) \leq V$. Diesen ergänzen wir zu einer Basis $\mathcal{A} = (v_1, u_2, \dots, u_n)$ von V . (M2K)

Bezüglich dieser Basis \mathcal{A} hat f die obige Blockform.

Wir zerlegen $V = \langle v_1 \rangle_K \oplus U$ mit $U := \langle u_2, \dots, u_n \rangle_K$.

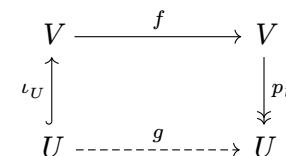
Die Untermatrix B definiert den Endomorphismus $g: U \rightarrow U$

Wir haben $\chi_f = (X - \lambda_1) \cdot \chi_g$, also zerfällt auch das Polynom χ_g .

IV: Zu g existiert eine trigonalisierende Basis (v_2, \dots, v_n) von U .

Die Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ von V trigonalisiert $f: V \rightarrow V$. QED

☺ Um Induktion über die Dimension führen zu können, müssen wir die Dimension reduzieren. Der entscheidende Konstruktionsschritt ist hier die Projektion auf den strikt kleineren Unterraum $U < V$:



Konkret bedeutet das: Zu jedem $u = \sum_{k=2}^n \alpha_k u_k \in U$ haben wir $f(u) = \beta_1 v_1 + \sum_{k=2}^n \beta_k u_k$ und setzen $g(u) := \sum_{k=2}^n \beta_k u_k \in U$. Wir ignorieren also ganz dreist-naiv den Störterm $\beta_1 v_1 \in U$. (Auf der vorigen Seite ist das die Zeile oberhalb der Matrix B .)

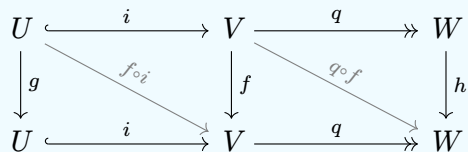
☺ Dass $g: U \rightarrow U$ linear ist, sehen wir an $g = p_U \circ f \circ \iota_U$.

☺ In der Zerlegung $V = \langle v_1 \rangle_K \oplus U$ als direkte Summe ist die Wahl des Komplements U willkürlich. Mit dem Quotienten $W = V/U$ gelingt dies natürlich und elegant, aber auch abstrakter. Dies führen wir nun aus.

Lemma P3c: Endomorphismus einer kurzen exakten Sequenz

Sei $f: V \rightarrow V$ linear über K und $U \leq V$ ein invarianter Unterraum.

(1) Wir haben die Einschränkung $g = f|_U$ und auf dem Quotienten $W = V/U$ die lineare Abbildung $h: W \rightarrow W: x + U \mapsto f(x) + U$.



(2) Aus je zwei Basen \mathcal{A} von U und \mathcal{C} von W erhalten wir eine Basis \mathcal{B} von V gemäß Satz M1x. Für die darstellenden Matrizen gilt dann:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(g) & * \\ 0 & M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(h) \end{bmatrix}$$

Für die charakteristischen Polynome folgt somit $\chi_f = \chi_g \cdot \chi_h$.

Aufgabe: Beweisen Sie Lemma P3c und damit erneut Satz P3B.

Beweis von Lemma P3c: (1) Wir erhalten $g: U \rightarrow U$ und $h: W \rightarrow W$ durch lineare Faktorisierung über eine Injektion L3B bzw. Surjektion L3C. (2) Die Matrixdarstellung folgt aus (1) und der Konstruktion der Basis \mathcal{B} .

Beweis von Satz P3B: Wir zeigen hier nur die Rückrichtung „ \Leftarrow “: Wir führen Induktion über $n = \dim V$. Für $n = 1$ ist die Aussage trivial. Sei nun $n \geq 2$, und die Behauptung für $n - 1$ sei bereits bewiesen.

Zum Eigenwert $\lambda_1 \in K$ existiert ein Eigenvektor $v_1 \in \text{Eig}(f, \lambda_1) \leq V$. Der Unterraum $U = \langle v_1 \rangle_K < V$ ist f -invariant. Lemma P3c beschert uns die lineare Abbildung $h: W \rightarrow W$ auf dem Quotienten $W = V/U$. Dabei gilt $\chi_f = (X - \lambda_1) \cdot \chi_h$, also zerfällt auch das Polynom χ_h .

Dank $\dim W = \dim V - \dim U < n$ greift die Induktionsvoraussetzung: Zu $h: W \rightarrow W$ existiert eine trigonalisierende Basis $\mathcal{C} = (w_2, \dots, w_n)$. Wir wählen Urbilder $v_2, \dots, v_n \in V$ mit $q(v_i) = w_i$. Dank Lemma P3c wird f durch die Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ trigonalisiert. QED

Definition P3D: Fahne von Unterräumen

(1) Sei V ein K -Vektorraum der Dimension n . Eine **Fahne** ist eine Kette

$$\{0\} = V_0 < V_1 < \dots < V_\ell = V$$

von Unterräumen. Dabei gilt $0 = \dim V_0 < \dim V_1 < \dots < \dim V_\ell = n$. Eine **vollständige Fahne** erfüllt $\ell = n$, somit $\dim V_i = i$ für alle i .

Die ersten Teilräume $V_0 < V_1 < V_2$ mit $\dim V_i = i$ entsprechen Punkt, Gerade, Ebene; daher der geometrisch anschauliche Name „Fahne“.

Beispiel: Ist (v_1, \dots, v_n) eine Basis von V über K , so definieren die aufgespannten Unterräume $V_i = \langle v_1, \dots, v_i \rangle_K$ für $i = 0, 1, \dots, n$ eine vollständige Fahne $\{0\} = V_0 < V_1 < \dots < V_n = V$.

(2) Sei $f: V \rightarrow V$ eine K -lineare Abbildung. Ein Unterraum $U \leq V$ heißt **f -invariant**, wenn $f(U) \subseteq U$ gilt. Eine Fahne $(V_i)_i$ heißt **f -invariant**, wenn $f(V_i) \subseteq V_i$ für alle i gilt.

Lemma P3E: Trigonalisierung \Leftrightarrow invariante Fahne

Genau dann ist $f: V \rightarrow V$ trigonalisierbar, wenn eine vollständige, f -invariante Fahne $\{0\} = V_0 < V_1 < \dots < V_n = V$ existiert.

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Aufgabe: Beweisen Sie dieses Lemma.

Beweis: „ \Rightarrow “: Angenommen, zu f existiert eine trigonalisierende Basis (v_1, \dots, v_n) von V . Die Unterräume $V_i = \langle v_1, \dots, v_i \rangle_K$ für $i = 0, 1, \dots, n$ sind eine vollständige Fahne und zudem f -invariant, denn $f(V_i) \subseteq V_i$.

„ \Leftarrow “: Durch schrittweise Ergänzung erhalten wir eine Basis (v_1, \dots, v_i) von V_i . Die Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ von V trigonalisiert $f: V \rightarrow V$. QED

Satz P3F: Spur und Determinante

Sei $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix mit zerfallendem charakteristischen Polynom

$$\chi_A(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n).$$

(1) Die Spur von A ist die Summe aller Eigenwerte:

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

(2) Die Determinante ist das Produkt aller Eigenwerte:

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

😊 Die Spur $\text{tr}(A)$ der Matrix A ist besonders leicht zu berechnen. Wenn wir also $n - 1$ Eigenwerte kennen, so ist der letzte gratis!

😊 Über \mathbb{C} zerfällt jedes Polynom, die Voraussetzung ist also erfüllt. Dasselbe gilt über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe: Beweisen Sie diesen Satz! (Zwei Wege sind möglich.)

Erster Beweis: Wir multiplizieren zur Monomform aus:

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n) \\ &= X^n - a_{n-1}X^{n-1} \pm \cdots + (-1)^n a_0 \end{aligned}$$

Dank Satz P2D kennen wir bereits die extremen Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &\stackrel{\text{P2D}}{=} a_{n-1} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n, \\ \det(A) &\stackrel{\text{P2D}}{=} a_0 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n. \end{aligned}$$

Zweiter Beweis: Dank Satz P3B können wir A trigonalisieren zu

$$B = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Dank Satz P2F gilt dabei $\chi_A = \chi_B$, also insbesondere

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &\stackrel{\text{P2F}}{=} \text{tr}(B) \stackrel{\text{Def}}{=} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n, \\ \det(A) &\stackrel{\text{P2F}}{=} \det(B) \stackrel{\text{O2w}}{=} \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n. \end{aligned}$$

😊 Der zweite Beweis ist noch schöner, dank stärkerer Werkzeuge.

Der obige Satz P3F erklärt die Spur $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ und die Determinante $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ aus den Eigenwerten. Allgemein:

Definition P3G: elementarsymmetrische Polynome

Im Polynomring $\mathbb{Z}[T, X_1, \dots, X_n]$ entwickeln wir das Produkt

$$(T + X_1)(T + X_2) \cdots (T + X_n) = T^n + \sigma_1 T^{n-1} + \sigma_2 T^{n-2} + \cdots + \sigma_n.$$

Der hier auftretende Koeffizient $\sigma_k \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ für $k = 1, \dots, n$ ist das **elementarsymmetrische Polynom** vom Grad k in X_1, X_2, \dots, X_n :

$$\begin{aligned} \sigma_1(X_1, X_2, \dots, X_n) &= X_1 + X_2 + \cdots + X_n \\ \dots \\ \sigma_k(X_1, X_2, \dots, X_n) &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_k} \\ \dots \\ \sigma_n(X_1, X_2, \dots, X_n) &= X_1 X_2 \cdots X_n \end{aligned}$$

Das Polynom σ_k ist die Summe von $\binom{n}{k}$ Monomen, jedes vom Grad k .

Für $X^2 + a_1 X + a_2 = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ gilt $\lambda_1 + \lambda_2 = -a_1$ und $\lambda_1 \lambda_2 = a_2$.

Satz P3G: Wurzelsatz von Vieta

Sei $X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n)$.

Dann gilt $a_k = (-1)^k \sigma_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Explizit ausgeschrieben heißt das:

$$\begin{aligned} a_1 &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) \\ \dots \\ a_k &= (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k} \\ \dots \\ a_n &= (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \end{aligned}$$

Dies gilt insb. für das charakteristische Polynom χ und die Eigenwerte! Aus den Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ von χ können wir also ganz leicht die Koeffizienten $a_1, \dots, a_n \in K$ bestimmen: Ausmultiplizieren genügt.

Umgekehrt bestimmen die Koeffizienten $a_1, \dots, a_n \in K$ von χ eindeutig die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ bis auf Reihenfolge (also mit Vielfachheiten). Die Faktorisierung ist wesentlich schwieriger als das Ausmultiplizieren!

Aufgabe: Gegeben ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mit vier Vektoren:

$$A = \begin{bmatrix} -18 & -50 & 10 & 10 \\ 4 & 11 & -1 & -3 \\ -12 & -32 & 10 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- (1) Welche davon sind Eigenvektoren von A ? Zu welchen Eigenwerten?
 (2) Bestimmen Sie alle Eigenwerte, (3) Eigenräume, (4) eine Eigenbasis.

Lösung: (1) Wir setzen die Daten in die Eigengleichung $Av = \lambda v$ ein:

$$Ab = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \stackrel{\neq}{=} \begin{bmatrix} -10 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} \notin \mathbb{R}b, \quad Ac = A \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \stackrel{=}{=} \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 2c,$$

$$Ad = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \stackrel{=}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0d, \quad Ae = A \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \stackrel{=}{=} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2e$$

☺ Teil (1) ist eine leichte Fingerübung: Um zu prüfen, ob $v \in K^n$ ein Eigenvektor der Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist, genügt es, die Definition $Av = \lambda v$ einzusetzen... und im günstigen Fall den Eigenwert $\lambda \in K$ abzulesen. Entscheidend ist, wie immer, das Ziel zu kennen, hier: die Definiton!

⚠ Es lohnt sich, die wertvollen Informationen aus Teil (1) zu nutzen! Die hier angebotenen Daten sind nicht zufällig, sondern mit Bedacht vorbereitet; in einer Klausur sind sie eine gezielte Hilfestellung. Auch außerhalb von Klausuren kann diese Situation entstehen.

☹ Alternativ, aber ungeschickt, kann man die hilfreichen Daten aus Teil (1) ignorieren und für (2–4) stur das ChaPo-Verfahren einsetzen: Das charakteristische Polynom entwickeln und seine Nullstellen finden, Eigenräume berechnen und eine Eigenbasis wählen. Das ist mühsam.

☺ Sie arbeiten umso effizienter, je genauer Sie verstehen, was Sie tun! ... insbesondere, was Sie schon haben und was Sie noch suchen. Sie können dann geschickt vom ChaPo-Verfahren abweichen, je nach konkretem Bedarf und möglichen Abkürzungen.

$$A = \begin{bmatrix} -18 & -50 & 10 & 10 \\ 4 & 11 & -1 & -3 \\ -12 & -32 & 10 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- (2) Dank (1) wissen wir $\text{Eig}(A, 0) \geq \langle d \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ und $\text{Eig}(A, 2) \geq \langle c, e \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$.
 Damit kennen wir drei der vier Eigenwerte: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$.
 Dank $\text{tr}(A) = 1$ bekommen wir den vierten gratis: $\lambda_4 = -3$.
 Ohne weitere Mühe schließen wir $\chi_A = X(X-2)^2(X+3)$.

- (3) Wir berechnen den Eigenraum $\text{Eig}(A, -3)$ wie üblich mit Gauß:

$$A + 3I = \begin{bmatrix} -15 & -50 & 10 & 10 \\ 4 & 14 & -1 & -3 \\ -12 & -32 & 13 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{RZSF}]{\text{Gauß}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Demnach gilt $\text{Eig}(A, -3) = \langle f \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ mit dem Vektor $f = (-2, 1, 0, 2)^{\top}$.

- (4) Damit haben wir zu A unsere Eigenbasis (d, c, e, f) gefunden.

☺ Dank der Informationen aus (1) sind unsere Rechnungen (2–4) in dieser Anwendung wesentlich effizienter als das ChaPo-Verfahren!

Vielleicht erscheint Ihnen die obige Aufgabenstellung etwas künstlich, das will ich gar nicht bestreiten. Ganz unrealistisch ist das Vorgehen jedoch auch nicht, denn in Anwendungen verfügen Sie manchmal über Teilinformationen, und diese sollten Sie geschickt nutzen.

Zur Diagonalisierung haben ChaPo-Verfahren P2H und MiPo-Verfahren N3H natürlich trotzdem ihre Berechtigung: Wenn Sie keine weiteren Daten oder Ideen haben, dann bieten diese Ihnen allgemeine und verlässliche Methoden, um das Diagonalisierungsproblem zu lösen.

Variantenreiche Beispiele wie das vorige zeigen Ihnen jedoch ebenso, dass Sie sich nicht stur allein auf vorgefertigte Rezepte verlassen können. Manchmal sind geschickte Abkürzungen oder raffinierte Tricks möglich. Diese sollten Sie erkennen, um sich unnötige Arbeit zu ersparen.

☺ Man muss eine Matrix auch lesen können. Denken hilft!

Sei $f : V \rightarrow V$ linear über dem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$.

Lemma P3H: Cayley–Hamilton, lokales MiPo teilt ChaPo

Jedes lokale Minimalpolynom μ_f^v teilt das charakteristische Polynom χ_f .

Beweis: Wir haben $Z = \langle f^k(v) \mid k < m \rangle_K \leq V$ mit Basis $\mathcal{B} = (f^k(v))_{k=0}^{m-1}$. Nach Konstruktion gilt $f(Z) \subseteq Z$, das heißt, der Raum Z ist f -invariant. Die Einschränkung $g = f|_Z$ wird dargestellt durch die Begleitmatrix P2R

$$B := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f|_Z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} = C(\mu_f^v).$$

Ihr charakteristisches Polynom ist $\chi_B = \det(XI - B) = \mu_f^v$ dank P2R. Wir ergänzen die Basis \mathcal{B} von Z zu einer Basis \mathcal{A} von V und erhalten

$$A := M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} B & * \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \chi_f \stackrel{\text{P2G}}{=} \chi_A \stackrel{\text{O2w}}{=} \chi_B \cdot \chi_C \stackrel{\text{P2R}}{=} \mu_f^v \cdot \chi_C. \quad \text{QED}$$

Jedes lokale Minimalpolynom μ_f^v teilt das charakteristische Polynom χ_f . Dasselbe gilt dann für ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches, also μ_f :

Satz P3H: Cayley–Hamilton, MiPo teilt ChaPo

Sei $f : V \rightarrow V$ linear über dem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$. Das Minimalpolynom $\mu_f \stackrel{\text{N3F}}{=} \text{kgV}(\mu_f^v; v \in V)$ teilt das char. Polynom χ_f .

Beweis: Dank Satz N3F gilt $\mu_f = \text{kgV}(\mu_f^v; v \in V)$ in $K[X]$. QED

Korollar P3H: Cayley–Hamilton, ChaPo annulliert Endo

Sei $f : V \rightarrow V$ linear über dem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$. Das charakteristische Polynom χ_f annulliert f , kurz $\chi_f(f) = 0$.

Beweis: Dank Satz N3F ist $\mu_f \mid \chi_f$ äquivalent zu $\chi_f(f) = 0$. Wir erinnern „ \Rightarrow “: Aus $\chi_f = Q \cdot \mu_f$ mit $Q \in K[X]$ folgt $\chi_f(f) = Q(f) \circ \mu_f(f) = 0$. QED

Direkt: Für jeden Vektor $v \in V$ gilt $\chi_f = Q \cdot \mu_f^v$ mit $Q \in K[X]$ dank Lemma P3H, also $\chi_f(f)(v) = Q(f) \mu_f^v(f)(v) = 0$. Wir schließen $\chi_f(f) = 0$. QED

😊 Das Minimalpolynom μ_f bzw. μ_f^v ist in zweifacher Hinsicht minimal: bezüglich dem Polynomgrad und bezüglich der Teilbarkeit in $K[X]$.

Wiederholung: Formulieren Sie dies explizit aus. **Lösung:**

Sei $f : V \rightarrow V$ linear über dem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$. Sei $v \in V$ ein Vektor und $P \in K[X]$ ein Polynom über K .

(1) Genau dann gilt $P(f) = 0$, wenn P ein Vielfaches von μ_f ist.

$$P(f) = 0 \iff \exists Q \in K[X] : P = Q \cdot \mu_f$$

(2) Das Minimalpolynom μ_f teilt das charakteristische Polynom χ_f . Für den Polynomgrad folgt insbesondere $m = \deg \mu_f \leq \deg \chi_f = n$.

(3) Genau dann gilt $P(f)(v) = 0$, wenn P ein Vielfaches von μ_f^v ist.

$$P(f)(v) = 0 \iff \exists Q \in K[X] : P = Q \cdot \mu_f^v$$

(4) Das globale Minimalpolynom μ_f ist das kleinste gemeinsame Vielfache im Ring $K[X]$ aller lokalen Minimalpolynome μ_f^v für $v \in V$.

Der Satz P3H von Cayley–Hamilton für Endomorphismen $f : V \rightarrow V$ über dem Körper K ist äquivalent zu folgender Formulierung für quadratische Matrizen $A \in K^{n \times n}$, ebenso elegant und zudem wunderbar konkret:

Satz P3I: Cayley–Hamilton, ChaPo annulliert Matrix

Für jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ gilt $\chi_A \in K[X]_n^1$ und $\chi_A(A) = 0$ in $K^{n \times n}$. In Worten: Das charakteristische Polynom der Matrix A annulliert A .

Aufgabe: Rechnen Sie dies explizit nach für $A \in K^{2 \times 2}$. **Lösung:**

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \implies \chi_A = \begin{vmatrix} X - a & -c \\ -b & X - d \end{vmatrix} = (X - a)(X - d) - bc$$

$$(A - aI)(A - dI) = \begin{bmatrix} 0 & c \\ b & d - a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a - d & c \\ b & 0 \end{bmatrix} \stackrel{\text{Com}}{=} \dots \stackrel{\text{Com}}{=} \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix}$$

Das zeigt $\chi_A(A) = 0$, wie von Cayley–Hamilton präzisiert / garantiert. Schon in Dimension $n = 2$ war das nicht offensichtlich, nun aber leicht. Der Satz von Cayley–Hamilton gilt in jeder Dimension, einfach, elegant.

Wir arbeiten bisher über einem Körper, das ist bequem. Allgemein gilt:

Satz P31: Cayley–Hamilton über jedem kommutativen Ring

Sei $(K, +, 0, \cdot, 1)$ ein kommutativer Ring. In $(K^{n \times n}, +, 0_{n \times n}, \cdot, 1_{n \times n})$ gilt für jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ und ihr charakteristisches Polynom $\chi_A = \det(X1_{n \times n} - A) = \sum_{k=0}^n p_k X^k \in K[X]_n^1$ die Annullation

$$\chi_A(A) = \sum_{k=0}^n p_k A^k = 0_{n \times n}.$$

⚠ Verlockend simpel, aber unsinnig, ist folgendes Scheinargument:

$$\chi_A(X) := \det(XI - A) \in K[X]_n^1$$

Wenn wir darin formal X durch A ersetzen, so erhalten wir scheinbar

$$\chi_A(A) \stackrel{?}{=} \det(AI - A) = \det(A - A) = \det(0_{n \times n}) = 0_K. \quad \text{😞}$$

Aufgabe: Bitte schützen Sie sich gegen solcherart (Selbst)Betrug!
Warum ist das kein Beweis von Cayley–Hamilton, sondern Unsinn?

Lösung: Links ist $\chi_A(A) = \sum_{k=0}^n p_k A^k \in K^{n \times n}$ eine Matrix. Rechts hingegen ist $\det(AI - A) = \det(0_{n \times n}) = 0_K$ ein Skalar.

Das obige Scheinargument behauptet, naiv oder frech, nach obskurer Rechnung „Matrix = Skalar“ und ist deshalb schon syntaktisch unsinnig, zumindest solange wir Matrizen und Skalare sauber auseinanderhalten.

⚠ Schon die rein syntaktische Typen-Prüfung schlägt hier fehl!
Auf der linken und der rechten Seite stehen verschiedene Objekte.
Die frech-naiv behauptete Gleichung „ $\stackrel{?}{=}$ “ gilt ganz sicher nicht.

Erstaunlicherweise lässt sich dieses unsinnige Scheinargument reparieren zu einem Beweis. \square Serge Lang: *Algebra*. GTM 211, 2002, §XIV.3.
David Eisenbud: *Commutative Algebra*. GTM 150, 1995, Thm. 4.3.

Aufgabe: (1) Was erhalten Sie tatsächlich, wenn Sie in der Matrix $C(X) = (XI - A)^T$ die Variable X durch die Matrix A ersetzen?
(2) Multiplizieren Sie die Matrix $C(A)$ mit dem Vektor $(e_1, \dots, e_n)^T$.
(3) Multiplikation mit der Adjunkten $B(A) = \text{adj } C(A)$ zeigt $\chi_A(A) = 0$.

Lösung: (1) Wir betrachten die Matrix $C(X) = (XI - A)^T$, also

$$C(X) = \begin{bmatrix} X - a_{11} & \dots & -a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & \dots & X - a_{nn} \end{bmatrix} \in K[X]^{n \times n}.$$

Wir ersetzen die Variable X korrekt durch die Matrix A und erhalten

$$C(A) = \begin{bmatrix} A - a_{11}I & \dots & -a_{n1}I \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{1n}I & \dots & A - a_{nn}I \end{bmatrix} \in K[A]^{n \times n}.$$

(2) Angewendet auf die Standardbasis $e_1, \dots, e_n \in K^n$ gilt:

$$C(A) \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ae_1 - a_{11}e_1 - \dots - a_{n1}e_n \\ \vdots \\ -a_{1n}e_1 - \dots + Ae_n - a_{nn}e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wir arbeiten hier über dem kommutativen Ring $K[A] \leq K^{n \times n}$.
Der Ring $K[A]$ operiert von links auf dem Raum $K^n = K^{n \times 1}$.

(3) Aus der Gleichung (2) folgern wir nun $\det C(A) = 0$.
Für die adjunkte Matrix $B(X) = \text{adj } C(X)$ gilt dank O2R:

$$B(X) \cdot C(X) = \det C(X) \cdot I = \begin{bmatrix} \chi_A(X) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \chi_A(X) \end{bmatrix} \in K[X]^{n \times n}$$

Wir ersetzen wieder X durch A und erhalten:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = C(A) \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = B(A) \cdot C(A) \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_A(A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \chi_A(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

Somit gilt $\chi_A(A)e_i = 0$ in K^n für alle i , also $\chi_A(A) = 0$ in $K^{n \times n}$. \square

😊 Diese Rechnung folgt der naiven Eingebung „ersetze X durch A “.
Die korrekte Ausführung erfordert allerdings extrem genaue Notation.

😊 Determinante und Adjunkte haben wir über jedem kommutativen Ring, insbesondere also über unserem Matrixunterring $K[A] \leq K^{n \times n}$.

Zum guten Schluss fassen wir unsere Erkenntnisse wie folgt zusammen:

Satz P3j: Vergleich MiPo vs ChaPo, $\mu_f^v \mid \mu_f \mid \chi_f \mid (\mu_f)^a$

Sei $f : V \rightarrow V$ linear über dem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$.

(1) Falls das charakteristische Polynom χ_f über K zerfällt, so gilt

$$\begin{aligned} \chi_f &= (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_k)^{r_k} \quad \text{mit } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j \text{ und} \\ \mu_f &= (X - \lambda_1)^{s_1} \dots (X - \lambda_k)^{s_k} \quad \text{mit } 1 \leq s_i \leq r_i \text{ für alle } i. \end{aligned}$$

(2) Das Minimalpolynom μ_f teilt das charakteristische Polynom χ_f , und umgekehrt teilt χ_f eine hinreichend hohe Potenz $(\mu_f)^a$ mit $a \in \mathbb{N}$.

(3) Allgemein haben beide Polynome dieselben Nullstellen:

$$\begin{aligned} \chi_f &= (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_k)^{r_k} Q, \\ \mu_f &= (X - \lambda_1)^{s_1} \dots (X - \lambda_k)^{s_k} P, \end{aligned}$$

wobei $P, Q \in K[X]$ keine Nullstellen in K haben und $P \mid Q \mid P^a$ erfüllen.

Beweis: (1) Zerfallen bedeutet $\chi_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{r_i}$ mit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subseteq K$ und $r_1, \dots, r_k \geq 1$. Dank Cayley-Hamilton P3H gilt $\mu_f \mid \chi_f$, also zerfällt auch $\mu_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{s_i}$ mit $s_i \leq r_i$. Zu jedem $i = 1, \dots, k$ existiert $v \in \text{Eig}(f, \lambda_i) \setminus \{0\}$. Also gilt $\mu_f^v = (X - \lambda_i) \mid \mu_f$, somit $s_i \geq 1$.

Aus (1) folgt (2), falls χ_f über K zerfällt. Die Aussage (2) gilt allgemein: Zerfällung gilt über einem geeigneten Erweiterungskörper $\bar{K} \geq K$. Daraus folgen die Aussagen (1,2) über \bar{K} , und somit (2,3) über K .

Genauer: Ohne Einschränkung betrachten wir $f : K^n \rightarrow K^n : x \mapsto Ax$. Es existiert eine Körpererweiterung $\bar{K} \geq K$, sodass χ_f über \bar{K} zerfällt. Wir betrachten die lineare Abbildung $\bar{f} : \bar{K}^n \rightarrow \bar{K}^n : x \mapsto Ax$ über \bar{K} .

Für diese gilt Aussage (1), somit Teilbarkeit (2) $\mu_{\bar{f}} \mid \chi_{\bar{f}} \mid (\mu_{\bar{f}})^a$ in $\bar{K}[X]$. Es gilt $\chi_f = \chi_{\bar{f}}$ und $\mu_f = \mu_{\bar{f}}$ in $K[X] \leq \bar{K}[X]$, also $\mu_f \mid \chi_f \mid (\mu_f)^a$ in $K[X]$. (Für χ ist das klar, für μ siehe die Bemerkung nach Algorithmus N3E.)

Somit gilt Teilbarkeit (2) tatsächlich über jedem Körper K . QED

Sei R ein Ring, etwa $R = \text{End}_K(V)$. Ein Element $f \in R$ heißt **nilpotent**, falls $f^k = 0$ für einen (hinreichend groß gewählten) Exponenten $k \in \mathbb{N}$. Der kleinste Exponent $m \in \mathbb{N}$ mit $f^m = 0$ heißt **Nilpotenzindex** von f .

Beispiel P3k: ein nilpotenter Endomorphismus

Für $f : V \rightarrow V$ linear über dem Körper K mit $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist nilpotent} &\stackrel{\text{Def}}{\iff} \text{Es gilt } f^k = 0 \text{ für einen Exponenten } k \in \mathbb{N} \\ &\stackrel{(1)}{\iff} \mu_f = X^m \quad \stackrel{(2)}{\iff} \chi_f = X^n \quad \stackrel{(3)}{\implies} \text{tr}(f) = 0 \wedge \det(f) \stackrel{n \geq 1}{=} 0 \end{aligned}$$

Beweis: „ \Leftarrow “: Aus $\mu_f = X^m$ folgt $f^m = 0$. „ \Rightarrow “: Aus $f^k = 0$ folgt $\mu_f \mid X^k$, also $\mu_f = X^m$. Insbesondere ist m der minimale Exponent mit $f^m = 0$. „ \Leftrightarrow “: Das folgt aus dem Vergleichssatz P3j. „ \Rightarrow “: Siehe Satz P3f. QED

Die letzte Bedingung ist notwendig, aber für $n \geq 3$ nicht hinreichend. Sie genügt nur in Dimension $n = 2$, dank $\chi_f = X^2 - \text{tr}(f)X + \det(f)$, und in Dimension $n = 1$, dank $\chi_f = X - \lambda$ mit $\lambda = \text{tr}(f) = \det(f)$. Im Sonderfall $n = 0$ gilt $f = 0 = \text{id}_V$ und $\text{tr}(f) = 0$, doch $\det(f) = 1$.

Lemma P3L: Das Minimalpolynom ist invariant unter Ähnlichkeit.

(1) Für jedes Polynom $P \in K[X]$ sowie $A \in K^{n \times n}$ und $T \in \text{GL}_n K$ gilt:

$$P(T^{-1}AT) = T^{-1}P(A)T$$

(2) Aus $P(A) = 0$ folgt $P(B) = 0$ für alle ähnlichen Matrizen $B \sim A$.

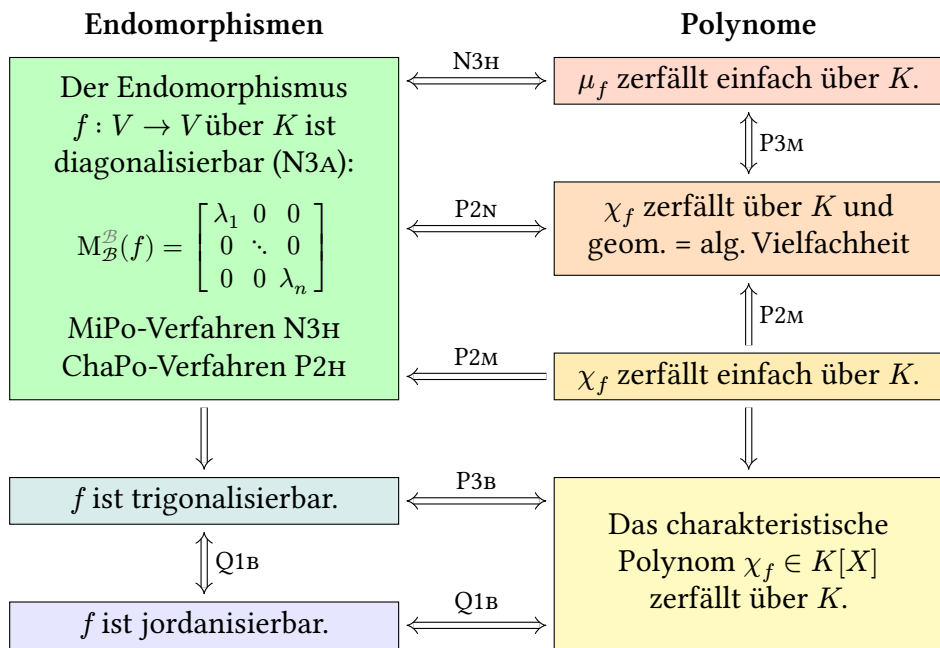
(3) Das Minimalpolynom ist invariant unter Ähnlichkeit, also $\mu_A = \mu_B$.

Beweis: (1) Wir setzen die konjugierte Matrix $B = T^{-1}AT$ in unser Polynom $P(X) = \sum_{i=0}^n p_i X^i$ ein und erhalten:

$$\begin{aligned} P(T^{-1}AT) &= \sum_{i=0}^n p_i (T^{-1}AT)^i = \sum_{i=0}^n p_i (T^{-1}A^i T) \\ &= \sum_{i=0}^n T^{-1} (p_i A^i) T = T^{-1} \left(\sum_{i=0}^n p_i A^i \right) T = T^{-1} P(A) T \end{aligned}$$

Daraus folgt (2) und daraus wiederum (3) nach Definition N3E. QED

☺ Der Algorithmus N3E ist demnach unabhängig von der Basiswahl. Die Definition N3E ist ohnehin schon basisunabhängig formuliert.



Zum guten Schluss fassen wir unsere Kriterien und Verfahren zusammen:

Satz P3M: Kriterien zur Diagonalisierbarkeit

Sei $f: V \rightarrow V$ linear über dem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1 Der Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ ist diagonalisierbar.
- 2 Es gilt die Eigenraumzerlegung $V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(f)} \text{Eig}(f, \lambda)$.
- 3 Es gilt die Dimensionsgleichung $n = \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \dim_K \text{Eig}(A, \lambda)$.
- 4 Das Minimalpolynom zerfällt einfach, also $\mu_f = \prod_{\lambda \in \sigma(f)} (X - \lambda)$.
- 5 Das charakteristische Polynom χ_f zerfällt über K in Linearfaktoren und für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma(f)$ gilt $\dim_K \text{Eig}(f, \lambda) = \text{ord}(\chi_f, \lambda)$.

Beweis: Die Äquivalenz „(1) \Leftrightarrow (2)“ verdanken wir Satz N3c. Das Dimensionskriterium „(2) \Leftrightarrow (3)“ verdanken wir Satz P1D. Die MiPo-Kriterium „(2) \Leftrightarrow (4)“ verdanken wir Satz N3H. Die ChaPo-Kriterium „(2) \Leftrightarrow (5)“ verdanken wir Satz P2N.

QED

Was ist das wichtigste Thema der Linearen Algebra? Die Antwort ist klar: **Diagonalisierung!** Somit auch der Aufbau der dazu nötigen Grundlagen:

- Diagonalisierung und Eigenbasis (N3A), Eigengleichung, Eigenvektor, Eigenwert, Spektrum, Eigenraum und geometrische Vielfachheit (N3B)
- Eigenraumzerlegung N3c, Kernzerlegung N3G, MiPo-Verfahren N3H dank Minimalpolynom (lokal N3D, global N3E, Teilbarkeit N3F)
- Unabhängigkeit von Eigenvektoren (P1A) und Dimensionsformel P1D
- Eigenwerte dank Determinante (P2A), char. Polynom (P2D), Ähnlichkeit / Konjugation von Matrizen (P2E) und Invarianz (P2F)
- Das bewährte ChaPo-Verfahren P2H zur Diagonalisierung
- Erreicht die geometrische Vielfachheit die algebraische? (P2N) Einfache Zerfällung impliziert Diagonalisierbarkeit. (P2M)
- Reelle Drehstreckungen sind reell nicht diagonalisierbar. (N3I, P2P) Jordan-Blöcke zerfallen, sind aber nicht-diagonalisierbar. (N3J, P2O)
- Begleitmatrix (P2R). Eigenvektoren lösen lineare Rekursion. (P2s)

Diagonalisierung P2N hat zwei Bedingungen: (a) Das char. Polynom zerfällt und (b) die geometrische Vielfachheit erreicht die algebraische. Letzteres ist nicht immer gegeben, statt Diagonalisierung begnügen wir uns dann mit einer Trigonalisierung; das ist wenig, aber immerhin etwas:

- Trigonalisierung (P3A) ist äquivalent zu Zerfällung (P3B).
- Wir lesen Spur und Determinante aus den Eigenwerten. (P3F) Umgekehrt gelesen: Den letzten Eigenwert gibt es gratis! (P3I3)

Minimalpolynom und char. Polynom arbeiten wunderbar zusammen! Jedes hat seine jeweils eigenen Vorzüge: Mal ist das eine besser geeignet, mal das andere, mal gelingen beide. Wählen Sie weise Ihr Werkzeug.

- Lokales Minimalpolynom (N3D) und Cayley-Hamilton (P3H)
- Das (globale) Minimalpolynom eines Endomorphismus (N3E)
- Teilbarkeit (P3H) und Nullstellen (P3j) der beiden Polynome
- Teilerfremde Faktorisierung und Kernzerlegung (N3G)
- Äquivalente Kriterien zur Diagonalisierbarkeit (P3M)

Beispiel P4A: Diagonalmatrizen und Dreiecksmatrix

Wir betrachten **Diagonalmatrizen** und **Dreiecksmatrizen** in $K^{n \times n}$:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Was ist hier besonders leicht zu berechnen: MiPo? ChaPo? Eigenbasis?

Lösung: (A) Dank Satz O2w können wir das ChaPo direkt ablesen:

$$\chi_A = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) \in K[X]_n^1$$

Das MiPo erhalten wir durch Reduktion jeder alg. Vielfachheit auf 1: Sei $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \{\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*\}^1$. Damit können wir das MiPo ablesen:

$$\mu_A = (X - \lambda_1^*) \cdots (X - \lambda_m^*) \in K[X]_m^1$$

dank Satz P3j. Ausführlich und direkt, ohne ChaPo, siehe Beispiel N3k. Genau dann gilt $\mu_A = \chi_A$, wenn alle Eigenwerte verschieden sind.

Die Standardbasis (e_1, \dots, e_n) des Raums K^n ist eine Eigenbasis zu A . Die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten sind hier gleich.

Genau dann gilt $\text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$, wenn $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \sigma(A)$.

Zum EW λ_k ist e_k ein EV, ebenso jedes Vielfache $v \in Ke_k \setminus \{0\}$.

Zum Skalar $\lambda \in K$ gehört der Eigenraum $\text{Eig}(f, \lambda) = \langle e_i \mid \lambda_i = \lambda \rangle_K^1$. Gilt $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, so haben wir n Eigenräume $\text{Eig}(f, \lambda_i) = \langle e_i \rangle_K^1$.

(B) Dank Satz O2w können wir das ChaPo direkt ablesen:

$$\chi_A = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) \in K[X]_n^1$$

Das MiPo hingegen ist nicht so offensichtlich. Dank Cayley–Hamilton P3H wissen wir immerhin $\mu_A \mid \chi_A$. Sind alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ paarweise verschieden, so erhalten wir sogar $\mu_A = \chi_A$ dank Satz P3j. Sowohl P2M als auch N3H garantieren dann Diagonalisierbarkeit.

⚠ Im Allgemeinen können algebraische Vielfachheiten auftreten, und wir müssen dazu die geometrischen Vielfachheiten prüfen. (P2N)

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \in K^{n \times n}$$

Aufgabe: Ist diese Matrix diagonalisierbar über $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p$?

Wie gehen Sie geschickt vor? Wie bestimmen Sie effizient ChaPo und MiPo, das Spektrum und eine Eigenbasis? In welcher Reihenfolge?

Lösung: Der Rang ist 1, somit ist 0 Eigenwert mit Vielfachheit $n - 1$.

Den letzten Eigenwert λ gibt es immer gratis (P3F), hier $\lambda = \text{tr}(A) = n$.

Teilt $p = \text{char } K$ die Dimension n ? Falls ja, so hat 0 die alg. Vielfachheit n , doch geom. nur $n - 1$, unsere Matrix A also nicht diagonalisierbar. (P2N)

Andernfalls gilt $n \neq 0$ in K . Wir sehen $v_1 = (1, \dots, 1)^T$ mit $Av_1 = nv_1$.

Für $v_2 = e_2 - e_1, \dots, v_n = e_n - e_{n-1}$ gilt $Av_k = 0$. Wir haben somit die Eigenbasis (v_1, \dots, v_n) , daraus $\chi_A = X^{n-1}(X - n)$ und $\mu_A = X(X - n)$.

⚠ Stur angewendet ist das ChaPo-Verfahren P2M hier allzu umständlich. Das MiPo-Verfahren N3H gelingt leicht dank $A^2 = nA$, also $\mu = X(X - n)$. Noch besser ist hier die Methode des scharfen Hinsehens. Denken hilft!

Aufgabe: Bestimmen Sie das ChaPo und das MiPo der Rahmenmatrix

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \dots, \quad A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösung: Der Rang ist 2, somit ist 0 Eigenwert mit Vielfachheit $n - 2$.

Laplace Entwicklung ergibt (mühsam) $\chi_A = X^{n-2}(X^2 - 2X + 4 - 2n)$.

☺ Besser durch scharfes Hinsehen: Der Ansatz $v = (a, b, \dots, b, a)^T$ gibt $Av = (c, d, \dots, d, c)$ mit $c = 2a + (n - 2)b$ und $d = 2a$. Die Eigengleichung $Av = \lambda v$ führt nach kurzer Rechnung zu $\lambda^2 - 2\lambda + 4 - 2n = 0$. Elegant!

☺ Direkt mit MiPo: Für $v = (1, \dots, 1)$ gilt $f(v) = (n, 2, \dots, 2, n) =: w$ und $f(w) = (4n - 4, 2n, \dots, 2n, 4n - 4) = 2w + (2n - 4)v$. Das Verfahren zeigt $\mu_A^v = (X^2 - 2X + 4 - 2n)$, also $\chi_A = X^{n-2}(X^2 - 2X + 4 - 2n)$ dank P3H.

☺ Rechenwege sind unterschiedlich schnell, doch alle führen schließlich zu Eigenwerten und Eigenvektoren und charakteristischem Polynom. Ist A diagonalisierbar? Ja! Dank P3j folgt $\mu_A = X(X^2 - 2X + 4 - 2n)$.

Seien $A, B \in K^{n \times n}$ zwei quadratische Matrizen über dem Körper K .
Ist die Spur multiplikativ? Nein, sie ist additiv, doch im Allgemeinen gilt:

$$\operatorname{tr}(A \cdot B) \neq \operatorname{tr}(A) \cdot \operatorname{tr}(B)$$

Ein besonders einfaches, wahrhaft minimalistisches Gegenbeispiel ist

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ist die Determinante multiplikativ? Ja, dank Satz O2o:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B),$$

☹ Scherzfrage: Ist auch das charakteristische Polynom multiplikativ?
Nein! Für das charakteristische Polynom gilt schon aus Gradgründen:

$$\chi_{A \cdot B} \neq \chi_A \cdot \chi_B$$

⚠ Um sich gegen solch naiven Irrglauben zu immunisieren,
erfinden, berechnen, merken Sie sich geeignete Gegenbeispiele!

Für die Determinante $\det : K^{n \times n} \rightarrow K$ gilt dank Multiplikativität O2o:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(B) \cdot \det(A) = \det(A \cdot B)$$

für alle $A, B \in K^{n \times n}$. Die Spur $\operatorname{tr} : K^{n \times n} \rightarrow K$ ist nicht multiplikativ,
doch dank Satz D1H ebenfalls invariant unter zyklischer Vertauschung:

$$\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A).$$

Frage: Gilt dies sogar für das gesamte charakteristische Polynom?

$$\chi_{AB} \stackrel{?}{=} \chi_{BA}$$

Teilantwort: Ist eine der beiden Matrizen A oder B invertierbar,
so folgt dies aus der Invarianz P2F unter Konjugation / Ähnlichkeit:

$$\chi_{AB} = \chi_{A^{-1}(AB)A} = \chi_{BA}$$

$$\chi_{AB} = \chi_{B(AB)B^{-1}} = \chi_{BA}$$

😊 Satz P4B verallgemeinert dies auf nicht-invertierbare Matrizen.

Satz P4B: das charakteristische Polynom eines Produkts

Sei K ein Körper oder allgemein ein kommutativer Ring.

(0) Für je zwei rechteckige Matrizen $A \in K^{m \times n}$ und $B \in K^{n \times m}$ gilt

$$\chi_{AB} \cdot X^n = \chi_{BA} \cdot X^m.$$

(1) Für je zwei quadratische Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ gilt

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}.$$

Aus (0) folgt (1) dank $m = n$ und Kürzung des Faktors $X^m = X^n$.
Umgekehrt folgt (0) aus (1) durch Auffüllen mit Nullzeilen/spalten.

Für Determinante und Spur ist die Aussage klar, wie zuvor erklärt.
Dies sind beiden extremen Koeffizienten des Polynoms (Satz P2D).

Die Koeffizienten zwischen Spur und Determinante in $\chi_{AB} = \chi_{BA}$
haben keine so leichte Interpretation, doch auch sie sind invariant
unter zyklischer Vertauschung der Matrixfaktoren von AB zu BA .

Beweis: (0) Wir berechnen zunächst folgende Matrixprodukte:

$$\begin{bmatrix} XI_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & XI_n \end{bmatrix} \stackrel{(a)}{=} \begin{bmatrix} XI_m - AB & 0 \\ B & XI_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} XI_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & XI_n \end{bmatrix} \stackrel{(b)}{=} \begin{bmatrix} XI_m & XA \\ 0 & XI_n - BA \end{bmatrix}$$

Dank Multiplikativität der Determinante O2o und Satz O2w folgt:

$$\det(XI_m - AB)X^n \stackrel{(a)}{=} \left| \begin{array}{cc} I_m & A \\ B & XI_n \end{array} \right| X^m \stackrel{(b)}{=} \det(XI_n - BA)X^m$$

Das ist trickreich-raffiniert. Rechnen Sie es nach!

QED

Das ist eine gefürchtete Übungsaufgabe (oder Klausuraufgabe?) aus
Paul Halmos, *Finite dimensional vector spaces* (1958), §53, exercise 13.

😊 Ohne den Trick oder einen Hinweis ist es schwer, mit ist es leicht.
Liegen die Formeln erst einmal vor uns, so genügt Nachrechnen.

$$\boxed{A} \cdot \boxed{X} - \boxed{X} \cdot \boxed{B} = \boxed{C}$$

Gesucht sind alle Lösungen $X \in K^{m \times n}$ der **Sylvester-Gleichung**:

$$AX - XB = C$$

Gegeben sind dazu Matrizen $A \in K^{m \times m}$ und $B \in K^{n \times n}$ sowie $C \in K^{m \times n}$.

$$n \geq 1, B = 0: AX - X0 = C, \quad AX = C \quad \text{LGS}$$

$$n = 1, C = 0: AX - XB = 0, \quad Ax = x\lambda \quad \text{EG!}$$

$$n \geq 1, C = 0: AX - XB = 0, \quad AX = X\Lambda \quad \text{ES!}$$

Wir denken an $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, also ein Eigengleichungssystem (ES). Später betrachten wir ebenso die Hauptvektorgleichung $Av_2 - v_2\lambda = v_1$.

Bemerkung: Die Gleichung wird auch als $AX + XB = C$ formuliert, das ist offensichtlich äquivalent durch Ersetzung von B durch $-B$.

Die **Sylvester-Gleichung** wird für Differentialgleichungen genutzt, speziell in der Stabilitätstheorie und Kontrolltheorie. Sie hat die Form

$$AX - XB = C.$$

Gegeben sind Matrizen $A \in K^{m \times m}$ und $B \in K^{n \times n}$ sowie $C \in K^{m \times n}$. Gesucht sind alle Lösungen $X \in K^{m \times n}$, die obige Gleichung erfüllen.

Lemma P4c: Sylvester-Gleichung als in/homogenes LGS

Die Sylvester-Gleichung ist K -linear in X ! Die linke Seite $f: K^{m \times n} \rightarrow K^{m \times n}: X \mapsto AX - XB$ ist eine K -lineare Abbildung, also $f(X) = C$ eine affin-lineare Gleichung, und homogen für $C = 0$.

Über K ist sie ein lineares Gleichungssystem mit mn Unbestimmten (x_{ij}) und ebensoviele Gleichungen. Jede konkrete Instanz lässt sich daher mit dem Gauß-Verfahren lösen, der Aufwand ist $(mn)^3$ Operationen in K .

Lassen sich allgemeine Aussagen über die Lösbarkeit dieser Gleichung $AX - XB = C$ machen? Dies wollen wir im Folgenden klären!

Satz P4d: eindeutige Lösbarkeit der Sylvester-Gleichung

Wir setzen voraus, dass $\chi_A \in K[T]$ und $\chi_B \in K[T]$ über K zerfallen. Dies ist automatisch erfüllt, wenn wir über $K = \mathbb{C}$ arbeiten.

(1) Genau dann erlaubt $AX - XB = 0$ eine Lösung $X \in K^{m \times n} \setminus \{0\}$, wenn A und B einen gemeinsamen Eigenwert $\lambda \in K$ haben.

(2) Sind die Spektren von A und B disjunkt, so hat $AX - XB = C$ für jede rechte Seite $C \in K^{m \times n}$ genau eine Lösung $X \in K^{m \times n}$.

Beispiel: Die **Lyapunov-Gleichung** $AX + XA^\dagger + Q = 0$ über \mathbb{C} entsteht aus der Sylvester-Gleichung als Spezialfall mit $B = -A^\dagger$ und $C = -Q$. Hat die Matrix A nur Eigenwerte λ mit $\text{re } \lambda < 0$, so hat $B = -A^\dagger$ nur Eigenwerte $\mu = -\bar{\lambda}$ mit $\text{re } \mu > 0$, die beiden Spektren sind also disjunkt, und der Satz garantiert die Eindeutigkeit und die Existenz der Lösung X .

Damit sind alle theoretischen Hindernisse aus dem Weg geräumt, und wir können uns praktischen Fragen der Berechnung zuwenden: Die Numerik entwickelt Verfahren zur effizienten Approximation.

Beweis: (2) Die lineare Gleichung $L(X) = C$ lässt sich genau dann für jede rechte Seite C eindeutig lösen, wenn $\text{Ker}(L) = 0$ gilt. Gauß!

(1a) „ \Leftarrow “: Sei $\lambda \in K$ ein gemeinsamer Eigenwert. Wir haben $Au = u\lambda$ mit $u \in K^{m \times 1} \setminus \{0\}$ und $vB = \lambda v$ mit $v \in K^{1 \times n} \setminus \{0\}$. So erhalten wir $X = uv \in K^{m \times n} \setminus \{0\}$ als eine Lösung von $AX - XB = 0$, denn:

$$AX - XB = Auv - uvB = v\lambda v - u\lambda v = 0$$

(1b) „ \Rightarrow “: Angenommen, die charakteristischen Polynome $p = \chi_A$ und $q = \chi_B$ zerfallen ohne gemeinsame Nullstelle in K , und sind somit teilerfremd: Es gibt Bézout-Koeffizienten $u, v \in K[X]$ mit $pu + qv = 1$. Dank $q(B) = 0$ gilt $p(B)u(B) = 1$, also ist $p(B)$ invertierbar.

Sei $AX - XB = 0$, also $AX = XB$. Per Induktion folgt $A^k X = X B^k$ also $h(A)X = X h(B)$ für jedes Polynom $h \in K[X]$. Wir wählen nun $h = p$. Dank Cayley-Hamilton gilt $p(A) = 0$. Hingegen ist $p(B)$ invertierbar, also gilt $X = 0$. QED

Kapitel P

Bonusmaterial

$$\begin{array}{ccc}
 K^n & \xrightarrow{f_D} & K^n \\
 \Phi_B \cong \downarrow & \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{array} \right] & \downarrow \cong \Phi_B \\
 V & \xrightarrow{f} & V
 \end{array}
 \end{array}$$

If I have seen further it is by standing on the shoulders of giants.

Isaac Newton (1643–1727) an Robert Hooke (1635–1703) in einem Brief von 1675

Inhalt dieses Kapitels P

- 5 Divisionsalgebren: die reelle Trilogie $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$
 - Warum musste Hamilton mit Tripeln scheitern?
 - Algebra: Vektoren skalieren, addieren und multiplizieren!
 - Über \mathbb{R} gibt es nur drei assoziative Divisionsalgebren: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.
- 6 Gerschgorin: Lokalisierung der komplexen Eigenwerte
 - Semjon Gerschgorin und seine Kreise
 - Spektralradius und diagonale Dominanz
- 7 Simultane Diagonalisierung
 - Kommutierende Endomorphismen
 - Erste Anwendungsbeispiele

Erste spektakuläre Anwendungen

Der Körper $(\mathbb{R}, +, 0, \cdot, 1, \leq)$ der reellen Zahlen wird überall gerne genutzt. Er ist geordnet und (supremums-)vollständig, und darauf bauen viele wunderbare Eigenschaften in der Analysis und all ihren Anwendungen. Ein einziges Manko bleibt: Nicht jedes Polynom über \mathbb{R} zerfällt über \mathbb{R} .

😊 Der Körper $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i] = \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{R}^2$ löst dieses Problem! Er ist zwar nicht mehr geordnet, dafür jedoch algebraisch vollständig: Jedes Polynom über \mathbb{C} zerfällt über \mathbb{C} . In vielen Gebieten der Mathematik und ihren Anwendungen ist daher der Körper \mathbb{C} die bewährte Grundlage.

😊 Davon profitieren wir auch und besonders in der Linearen Algebra: Wir arbeiten oft mit reellen Polynomen und wünschen uns Zerfällung. Dies gelingt nicht immer über \mathbb{R} , siehe $X^2 + 1$, aber immer über \mathbb{C} ! Der Satz P6A von Gerschgorin erlaubt eine grobe Lokalisierung.

😊 Für die LinA2 werden die Körper \mathbb{R} und \mathbb{C} eine zentrale Rolle spielen. Die grundlegenden Techniken gelten allgemeiner, doch \mathbb{R} und \mathbb{C} erlauben sowohl eine besonders tiefe Theorie als auch zahlreiche Anwendungen.

Erste spektakuläre Anwendungen

Hamilton war fasziniert von der Körpererweiterung $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ über \mathbb{R} : Wir können Vektoren nicht nur addieren, sondern auch multiplizieren, und erhalten so die Körpererweiterung $\mathbb{C} \geq \mathbb{R}$. Was liegt näher, als dies auf \mathbb{R}^3 zu wiederholen? Hamilton suchte acht Jahre vergeblich danach!

Hamilton hätte sich seine jahrelange Suche ersparen können. Satz P5B besagt: In Dimension $n = 3, 5, 7, \dots$ hat $(\mathbb{R}^n, +, 0, \diamond, e)$ Nullteiler. Mit den Werkzeugen Ihrer Linearen Algebra passt der Beweis auf eine Postkarte. Warum fiel es Hamilton so schwer und gelingt Ihnen heute so leicht?

Sie profitieren von einer fertig ausgebauten Theorie, die Werkzeuge liegen vor Ihnen auf dem Silbertablett, Sie nießen die Erfahrung vieler Generationen vor Ihnen. Dieses kulturelle Erbe verdient Wertschätzung.

▶ *Was sind und was sollen die Quaternionen?* youtu.be/9AakzE0ZLaQ
Ein schönes und ausführliches Video von Prof. Edmund Weitz mit Erläuterungen zur historischen Entwicklung und Anwendungen, etwa Drehungen im Raum für Physik, Graphik, Navigation, uvm.

Aufgabe: (0) Nennen Sie zehn (interessante) lineare Abbildungen $f: V \rightarrow V$ über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_q, \dots$, die gar keine Eigenwerte haben! Gelingt das zudem nicht/injektiv? nicht/surjektiv? nicht/bijektiv?

(1) Was gilt in un/endllicher Dimension über \mathbb{C} ?

(2) Was gilt in un/gerader Dimension über \mathbb{R} ?

Ideen: (0) Für den (langweiligen) Nullraum $V = \{0\}$ gilt $f = 0 = \text{id}_V$. Zwar hat f die Eigenbasis (\cdot) , aber keine Eigenvektoren / Eigenwerte.

Interessanter ist die Multiplikation $m: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]: P \mapsto X \cdot P$, ebenso der Shift $r: \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}: (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_0, x_1, x_2, \dots)$.

Bijektiv ist $s: \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}: (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}$, jedoch mit $\sigma(u) = \mathbb{K}^{\times}$.

Die Einschränkung $s: \mathbb{K}^{(\mathbb{Z})} \rightarrow \mathbb{K}^{(\mathbb{Z})}$ hingegen hat keine Eigenvektoren.

Bedenken Sie weitere Beispiele zu Folgen, Polynomen, Funktionen,

Jedes solche Beispiel f ist injektiv, denn nicht-injektiv ist gleichbedeutend zu $\{0\} \neq \text{Ker}(f) = \text{Eig}(f, 0)$, also $0 \in \sigma(f)$.

Surjektiv oder bijektiv spielt keine Rolle, siehe m, r und s .

Aufgabe: Ist der Verschiebeoperator $s: \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ diagonalisierbar? Hierbei sei $s(f_0, f_1, f_2, f_3, \dots) = (f_1, f_2, f_3, \dots)$. Bonus: Was gilt auf $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$?

Ideen: Wir kennen das Spektrum $\sigma(s; \mathbb{K}) = \mathbb{K}$: Zu jedem Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\text{Eig}(s, \lambda) = \langle e_\lambda = (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle_{\mathbb{K}}$. Die Familie $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{K}}$ ist frei (M1K, P1B).

(0) In $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} < \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ haben wir nur $\text{Eig}(s, 0) = \langle e_0 \rangle_{\mathbb{K}}$, das ist zu wenig.

(1) Für jeden endlichen Körper \mathbb{K} hat die Summe $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} \text{Eig}(s, \lambda)$ die Dimension $\#\mathbb{K} < \infty$, doch der Raum $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist unendlich-dimensional.

(2) Wenn \mathbb{K} abzählbar ist, wie $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, etc., so hat E nur abzählbare Dimension, doch der gesamte Raum $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist überabzählbar-dimensional.

(3) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ haben E und $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dieselbe (überabzählbare) Dimension. Das bedeutet natürlich noch nicht $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Tatsächlich ist dies falsch:

Elegante Lösung: Die Folge $f = (0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ erfüllt $f \xrightarrow{s} e_0 \xrightarrow{s} 0$. Ihr Minimalpolynom $\mu_s^f = X^2$ zerfällt, aber nicht einfach. Nach Satz N3H ist f nicht Summe von Eigenvektoren, also s nicht diagonalisierbar.

😊 Hier brilliert das lokale Minimalpolynom als effizientes Werkzeug!

(1) Die vorigen Gegenbeispiele gelten insbesondere auch über \mathbb{C} : Die \mathbb{C} -linearen Abbildungen m, r, u haben keinerlei Eigenwerte. In *endllicher* Dimension haben wir das charakteristische Polynom. Über \mathbb{C} zerfällt es immer, das garantiert Eigenwert und Eigenvektor.

(2) Die reelle Drehstreckung P_{2P} hat keine reellen Eigenwerte. Solche Gegenbeispiele existieren daher in jeder geraden Dimension über \mathbb{R} . In ungerade Dimension hingegen hat das charakteristische Polynom mindestens eine Nullstelle, somit existiert mindestens ein Eigenwert.

Sie sehen an diesen Beispielen, dass endliche Dimension wesentlich ist. Unendliche Dimension ist schöner Ausblick und lehrreicher Kontrast: O wie einfach doch stark sind die Werkzeuge der Linearen Algebra!

Unendliche Dimension bietet mehr Platz: mehr Chancen, mehr Risiken. Um hier dennoch ausreichend starke Werkzeuge zu erhalten, benötigen wir noch weitere Struktur, etwa Skalarprodukt, Norm, Topologie, etc. Dies wird in der Funktionalanalysis äußerst erfolgreich ausgeführt.

Aufgabe: Ist die Ableitung $\partial: V \rightarrow V$ diagonalisierbar auf $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$? (1) auf $\mathbb{K}[t]$? (2) auf $U = \langle t \mapsto \cos(kt), \sin(kt) \mid k \in \mathbb{Z} \rangle_{\mathbb{K}}$?

Lösung: (1) Die Polynomfunktion $f(t) = t$ erfüllt $f \xrightarrow{\partial} 1 \xrightarrow{\partial} 0$. Ihr lokales Minimalpolynom $\mu_\partial^f = X^2$ zerfällt nicht einfach. Nach Satz N3H ist f nicht Summe von Eigenvektoren, also ∂ nicht diagonalisierbar. (N5G)

(2a) Für die Funktion \cos gilt $\cos \xrightarrow{\partial} \sin \xrightarrow{\partial} -\cos$. Ihr Minimalpolynom $\mu_\partial^{\cos} = X^2 + 1$ zerfällt nicht über \mathbb{R} . Nach Satz N3H ist f nicht Summe von Eigenvektoren, also ∂ nicht diagonalisierbar. (Ebenso $\cos(kt)$ und $\sin(kt)$.)

😊 Hier brilliert das lokale Minimalpolynom als effizientes Werkzeug!

(2b) Über \mathbb{C} gelingt es! Wir wechseln zur Eigenbasis $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit

$$e_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto e^{ikt} = \cos(kt) + i \sin(kt) \quad \text{und zurück} \\ \cos(kt) = \frac{1}{2}(e_k(t) + e_{-k}(t)), \quad \sin(kt) = \frac{1}{2i}(e_k(t) - e_{-k}(t)).$$

Der Basiswechsel ist die Euler-Formel! Nun gilt $\partial e_k = ik$, wie gewünscht.

😊 Hier brillieren die komplexen Zahlen \mathbb{C} als effizientes Werkzeug!

Frage P5A: Divisionsalgebren über \mathbb{R}

Wir wollen Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ skalieren, addieren... und multiplizieren!
In welchen Dimensionen n finden wir auf \mathbb{R}^n ein interessantes Produkt?

$$\diamond : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (u, v) \mapsto u \diamond v$$

(0) Es soll \mathbb{R} -bilinear sein, für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gelte also:

$$(L) \quad u \diamond (v + w) = (u \diamond v) + (u \diamond w), \quad u \diamond (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (u \diamond v),$$

$$(R) \quad (u + v) \diamond w = (u \diamond w) + (v \diamond w), \quad (\lambda \cdot u) \diamond v = \lambda \cdot (u \diamond v).$$

(1) Wir fordern ein Neutrales $e \in \mathbb{R}^n$, mit $e \diamond v = v = v \diamond e$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

(2) Am besten soll $(\mathbb{R}^n, +, 0, \diamond, e)$ ein Körper sein, oder ein Divisionsring, oder wenigstens nullteilerfrei, genannt eine reelle **Divisionsalgebra** P5I.

😊 Dies gelingt uns für $n = 1, 2, 4$ dank der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, 0, \cdot, 1)$, der komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, 0, \cdot, 1)$ und der Quaternionen $(\mathbb{H}, +, 0, \cdot, 1)$.

Aufgabe: Dies ist unmöglich in ungerader Dimension $n = 3, 5, 7, \dots$

„Können wir Sie für eines unserer interessanten Produkte begeistern?“
Die Konstruktion des Körpers \mathbb{C} ist ein Geniestreich! (Siehe E3A und E3B)
☹️ Davon inspiriert möchten wir weitere DRinge $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ konstruieren.
😊 Auf \mathbb{Q}^3 über \mathbb{Q} gelingt dies, etwa durch $\mathbb{Q}^3 \cong \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \mathbb{Q}[X]/(X^3 - 2)$,
☹️ auf \mathbb{R}^3 über \mathbb{R} aber nicht! Hamilton versuchte es acht Jahre vergeblich:

In 1835, at the age of 30, he had discovered how to treat complex numbers as pairs of real numbers. Fascinated by the relation between \mathbb{C} and 2-dimensional geometry, he tried for many years to invent a bigger algebra that would play a similar role in 3-dimensional geometry. [...] His quest built to its climax in October 1843. He later wrote to his son, “Every morning [...] you] used to ask me: ‘Well, Papa, can you multiply triplets?’ Whereto I was always obliged to reply, with a sad shake of the head: ‘No, I can only add and subtract them.’” The problem, of course, was that there exists no 3-dimensional normed division algebra. He really needed a 4-dimensional algebra. (John Baez, The Octonions, 2002)

Heute wissen wir, dass dies nicht gelingen konnte. Hamilton hätte Jahre sparen können mit den Werkzeugen der Linearen Algebra. Sie verfügen nun über die nötigen Techniken, der Beweis wird dadurch genial-einfach!

Warum musste Hamilton mit Tripeln scheitern?**Satz P5B:** Divisionsalgebren über \mathbb{R}

Ist $(\mathbb{R}^n, +, 0, \diamond, e)$ über \mathbb{R} nullteilerfrei und $n \in \mathbb{N}$ ungerade, so folgt $n = 1$.
Kontraposition: In Dimension $n = 3, 5, 7, \dots$ hat $(\mathbb{R}^n, +, 0, \diamond, e)$ Nullteiler.

Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Dazu betrachten wir die Linksmultiplikation

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : v \mapsto a \diamond v.$$

Dank (L) ist A eine \mathbb{R} -lineare Abbildung mit charakteristischem Polynom

$$\chi_A = \det(XE - A) \in \mathbb{R}[X]_n^1.$$

Da n ungerade ist, hat χ_A eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$ (ZWS). Dazu existiert ein Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $Av = \lambda v$. Für $u := \lambda e - a \in \mathbb{R}^n$ gilt somit

$$u \diamond v \stackrel{\text{Def}}{=} (\lambda e - a) \diamond v \stackrel{(R)}{=} \lambda v - Av \stackrel{\text{Eig}}{=} 0.$$

Dank Nullteilerfreiheit und $v \neq 0$ folgt daraus $u = 0$, also $a = \lambda e$.

Da dies für alle $a \in \mathbb{R}^n$ gilt, folgt $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}e$, also $n = 1$. □

Warum musste Hamilton mit Tripeln scheitern?

Aufgabe: Für welche (K, n) existieren Körper $(K^n, +, 0, \diamond, e)$ über K ?
 $(\mathbb{F}_2, 2), (\mathbb{F}_2, 3), \dots? (\mathbb{Q}, 2), (\mathbb{Q}, 3), \dots? (\mathbb{R}, 2), (\mathbb{R}, 3), \dots? (\mathbb{C}, 2), (\mathbb{C}, 3), \dots?$

Lösung: (1) Über \mathbb{F}_2 ist $P = X^2 + X + 1$ unzerlegbar, da ohne Nullstelle. Somit ist $\mathbb{F}_2[X]/P =: \mathbb{F}_4$ eine Körperweiterung von \mathbb{F}_2 der Dimension 2. Ebenso gelingt Dimension 3 mit $X^3 + X^2 + 1$ und mit $X^3 + X + 1$.

(2) Über \mathbb{Q} sind $X^2 - 2$ und $X^2 + 1$ unzerlegbar. So erhalten wir Körperweiterungen der Dimension 2 durch $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ und $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 1) = \mathbb{Q}[i]$. Ebenso gelingt Dimension 3 durch $\mathbb{Q}[X]/(X^3 + 2)$.

(3) Über \mathbb{R} ist $X^2 + 1$ unzerlegbar. Somit sind $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) = \mathbb{R}[i] = \mathbb{C}$ eine Körperweiterung von \mathbb{R} der Dimension 2. Dimension 3 hingegen ist nachweislich unmöglich dank unserem obigen Satz P5B. Und über \mathbb{C} ?

Satz P5c: Divisionsalgebren über \mathbb{C}

Ist $(\mathbb{C}^n, +, 0, \diamond, e)$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ über \mathbb{C} nullteilerfrei, so folgt $n = 1$.

Übung: Dies folgt nach dem Vorbild P5B dank Fundamentalsatz E3c.

Sei $(K, +, 0, \cdot, 1)$ ein kommutativer Ring, etwa $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/n$.

Erinnerung: Ein **linearer Raum** $(A, +, 0, \cdot)$ über K besteht aus einer abelschen Gruppe $(A, +, 0)$ mit Skalarisierung $\cdot : K \times A \rightarrow A$ (hier von links, alternativ von rechts), sodass für alle $\lambda, \mu \in K$ und $u, v \in A$ gilt:

$$\begin{aligned}\lambda \cdot (u + v) &= \lambda \cdot u + \lambda \cdot v, & 1 \cdot v &= v, \\ (\lambda + \mu) \cdot v &= \lambda \cdot v + \mu \cdot v, & (\lambda \cdot \mu) \cdot v &= \lambda \cdot (\mu \cdot v).\end{aligned}$$

Man beachte, dass hier wie üblich die beiden Additionen mit demselben Symbol $+$ bezeichnet werden, ebenso mit \cdot die beiden Multiplikationen.

Ist unser Grundring K ein Körper, so nennen wir A einen K -Vektorraum. Eine **K -Algebra** (A, \diamond) ist ein K -Vektorraum A mit einer Multiplikation

$$\diamond : A \times A \rightarrow A,$$

die mit der Vektorraumstruktur verträglich ist, das bedeutet K -bilinear. Je nach Anwendung fordern wir zusätzlich ein Einselement $e \in A$ oder Assoziativität oder Kommutativität. Die folgende Definition führt dies aus.

☺ Da es keinen Mehraufwand erfordert, definieren wir den Begriff der K -Algebra gleich allgemein über einem kommutativen Ring K .

Definition P50d: Algebra über einem kommutativen Ring

Sei $(K, +, 0, \cdot, 1)$ ein kommutativer Ring, etwa $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/n$.

Eine **K -Algebra** ist ein Paar (A, \diamond) bestehend aus einem K -linearen Raum $(A, +, 0, \cdot)$ und einer K -bilinearen Abbildung $\diamond : A \times A \rightarrow A$.

Letzteres bedeutet, für alle $u, v, w \in A$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\begin{aligned}\text{(L)} \quad u \diamond (v + w) &= (u \diamond v) + (u \diamond w), & u \diamond (\lambda \cdot v) &= \lambda \cdot (u \diamond v), \\ \text{(R)} \quad (u + v) \diamond w &= (u \diamond w) + (v \diamond w), & (\lambda \cdot u) \diamond v &= \lambda \cdot (u \diamond v).\end{aligned}$$

Die Algebra (A, \diamond) heißt **assoziativ**, falls $u \diamond (v \diamond w) = (u \diamond v) \diamond w$ für alle $u, v, w \in A$ gilt, und **kommutativ**, falls $u \diamond v = v \diamond u$ für alle $u, v \in A$ gilt.

Ein **neutrales Element** $e \in A$ erfüllt $e \diamond u = u \diamond e = u$ für alle $u \in A$. (Es existiert höchstens eines.) In diesem Falle nennen wir (A, \diamond) eine **unitale K -Algebra** oder (A, \diamond, e) eine **K -Algebra mit Einselement**.

Beispiel: Ist $(R, +, 0, \cdot, 1)$ ein Ring und $K \leq R$ ein Teilring, so ist R ein K -linearer Raum (von links und von rechts). Liegt zudem $K \leq Z(R)$ im Zentrum von R , so ist $(R, \cdot, 1)$ eine K -Algebra, unital und assoziativ.

Beispiele: Wir haben die Zahlbereiche $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C} \leq \mathbb{H}$: Hier sind $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ Algebren über \mathbb{Z} , ebenso sind $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ Algebren über \mathbb{Q} , und \mathbb{C}, \mathbb{H} sind Algebren über \mathbb{R} , jeweils unital und assoziativ und bis auf \mathbb{H} auch kommutativ. Jedoch ist \mathbb{H} keine Algebra über \mathbb{C} , da $\mathbb{C} \not\subseteq Z(\mathbb{H})$.

Beispiel: Für jeden kommutativen Ring K ist der Polynomring $K[X]$ eine K -Algebra, unital, assoziativ und kommutativ. Hier gilt $K \leq K[X]$, das heißt, der Grundring K ist ein Teilring des Polynomrings $K[X]$.

Beispiel: Der Matrixring $K^{n \times n}$ ist eine K -Algebra, unital und assoziativ, jedoch für $n \geq 2$ nicht-kommutativ. Streng besehen ist K kein Teilring von $K^{n \times n}$, doch immerhin haben wir $\varphi : K \hookrightarrow Z(K^{n \times n}) : \lambda \mapsto \lambda E_n$.

Zu jedem K -linearen Raum V ist der Endomorphismenring $\text{End}_K(V)$ eine K -Algebra. Speziell für $V \cong K^n$ erhalten wir $\text{End}_K(V) \cong K^{n \times n}$.

Übung: (1) Sei (A, \diamond, e) eine unitale und assoziative K -Algebra.

Dann ist $(A, +, 0, \diamond, e)$ ein Ring, und die charakteristische Abbildung $\varphi : K \rightarrow A : \lambda \mapsto \lambda \cdot e$ ist ein Ringhomomorphismus in das Zentrum des Rings $(A, +, 0, \diamond, e)$. Wir nennen $(A, +, 0, \diamond, e, \varphi)$ kurz einen **K -Ring**.

(2) Sei umgekehrt $(A, +, 0, \diamond, e)$ ein Ring und $\varphi : K \rightarrow A$ ein Ringhomomorphismus in das Zentrum des Rings $(A, +, 0, \diamond, e)$. Dann ist $(A, +, 0, \cdot)$ ein K -linearer Raum vermöge $\lambda \cdot a = \varphi(\lambda) \diamond a$ und (A, \diamond, e) eine unitale assoziative K -Algebra, kurz ein K -Ring.

(3) Jeder Ring A ist eine \mathbb{Z} -Algebra. Die charakteristische Abbildung $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow A$ ist genau dann injektiv, wenn A die Charakteristik 0 hat. Die klassischen Beispiele sind die Ringe $\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

(4) Ist K ein Körper, so ist $\varphi : K \rightarrow A : \lambda \mapsto \lambda \cdot e$ injektiv (siehe L1F).

(5) Ist φ injektiv, so können wir den Ring K mit seinem Bild $\varphi(K) \leq Z(A)$ identifizieren und so kurzerhand $K \leq Z(A)$ als Teilring annehmen. Dies ist für $K \leq K[X]$ traditionell üblich, für $K \leq K^{n \times n}$ eher nicht.

Definition P5D: Homomorphismen von K -Algebren

Seien (A, \diamond) und (B, \circ) Algebren über dem kommutativen Ring K . Ein **K -Algebren-Homomorphismus** $\varphi : (A, \diamond) \rightarrow (B, \circ)$ ist eine K -lineare Abbildung, die multiplikativ ist, $\varphi(u \diamond v) = \varphi(u) \circ \varphi(v)$ für alle $u, v \in A$.

Eine **K -Unteralgebra** $U \leq (A, \diamond)$ ist ein K -Untervektorraum $U \leq A$, sodass für alle $u, v \in U$ auch $u \diamond v \in U$ gilt. Damit ist (U, \diamond_U) selbst eine K -Algebra durch Einschränkung des Produkts \diamond zu $\diamond_U : U \times U \rightarrow U$, und die Inklusion $U \hookrightarrow A$ ist ein Homomorphismus von K -Algebren.

Seien (A, \diamond, e_A) und (B, \circ, e_B) unitale K -Algebren. Für einen **unitalen K -Algebren-Homomorphismus** $\varphi : (A, \diamond, e_A) \rightarrow (B, \circ, e_B)$ fordern wir zudem $\varphi(e_A) = e_B$, das heißt, φ respektiert die Einselemente.

Eine **unitale K -Unteralgebra** $U \leq (A, \diamond, e_A)$ ist eine K -Unteralgebra $U \leq (A, \diamond)$ mit $e_A \in U$. Damit ist (U, \diamond_U, e_A) eine unitale K -Algebra und die Inklusion $U \hookrightarrow A$ ein Homomorphismus unitaler K -Algebren.

Ist (A, \diamond) assoziativ / kommutativ, so auch jede Unteralgebra U .

Weiterhin sei (A, \diamond) eine K -Algebra. Eine **K -Unteralgebra** $B \leq (A, \diamond)$ ist ein K -linearer Unterraum $B \leq A$, der multiplikativ abgeschlossen ist, das bedeutet $B \diamond B \subseteq B$: Für je zwei Elemente $u, v \in B$ gilt $u \diamond v \in B$.

Für eine **unitale Unteralgebra** $B \leq (A, \diamond, e)$ fordern wir zudem $e \in B$. Die Inklusion $\text{inc}_B^A : B \hookrightarrow A$ ist ein (unitaler) Algebrenhomomorphismus.

Ein **Ideal** $I \trianglelefteq (A, \diamond)$ ist ein K -linearer Unterraum $I \leq A$, der multiplikativ beidseitig absorbiert, das heißt links $A \diamond I \subseteq I$ und rechts $I \diamond A \subseteq I$.

Der Kern $I = \text{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ jedes K -Algebrenhomomorphismus $\varphi : (A, \diamond) \rightarrow (B, \circ)$ ist ein Ideal in (A, \diamond) . Umgekehrt, jedes Ideal $I \trianglelefteq (A, \diamond)$ definiert eine Quotientenalgebra A/I , dazu ist $q : A \twoheadrightarrow A/I : x \mapsto [x]$ ein surjektiver Algebrenhomomorphismus mit $\text{Ker}(q) = I$. Ist die Algebra A unital, assoziativ oder kommutativ, so auch die Quotientenalgebra A/I .

Übung: Beweisen Sie diese Behauptungen nach dem Vorbild von Ringen. Sie müssen nur sorgsam die Definitionen einsetzen und nachrechnen.

Satz P5E: der Einsetzungshomomorphismus

K3D

Sei K ein kommutativer Ring. Der Polynomring $K[X]$ ist eine K -Algebra. Sei A ein weiterer **K -Ring**, also eine unitale und assoziative K -Algebra. Zu jedem $\alpha \in A$ existiert dann genau ein K -Algebrenhomomorphismus $\Phi : K[X] \rightarrow A$ mit $\Phi(X) = \alpha$, nämlich die Einsetzung

$$\Phi : K[X] \twoheadrightarrow K[\alpha] \leq A : \sum_i p_i X^i \mapsto \sum_i p_i \alpha^i$$

Sei nun speziell K ein Körper. Der Kern $\text{Ker}(\Phi) = \mu_\alpha K[X]$ wird erzeugt vom Minimalpolynom $\mu_\alpha \in K[X]$ dank Satz L3F. Durch Übergang zum Quotienten $K[X]/\mu_\alpha$ gemäß L3G erhalten wir den K -Isomorphismus $\bar{\Phi} : K[X]/\mu_\alpha \cong K[\alpha]$ dank kanonischer Faktorisierung L3G.

Genau dann ist $K[\alpha]$ ein Körper, wenn μ_α in $K[X]$ unzerlegbar ist (C3M).

Übung: Wiederholen Sie diese universell nützliche Konstruktion für Ringe, hier bequem neuformuliert in der Sprache der K -Algebren.

Satz P5F: Neuformulierung des Fundamentalsatzes E3c der Algebra

- (1) Ist $A \geq \mathbb{C}$ ein Körper mit $\dim_{\mathbb{C}}(A) = n \in \mathbb{N}$, so gilt $A \cong \mathbb{C}$ dank P5c.
- (2) Ist $A \geq \mathbb{R}$ ein Körper mit $\dim_{\mathbb{R}}(A) = n \in \mathbb{N}$, so gilt $A \cong \mathbb{R}$ oder $A \cong \mathbb{C}$.

Beweis: (2) Im Falle $n = 1$ gilt $A = \mathbb{R}$, und wir sind fertig. Sei also $n \geq 2$.

Wir wählen $\alpha \in A \setminus \mathbb{R}$ und untersuchen $\mathbb{R}[\alpha] = \langle 1, \alpha, \alpha^2, \dots \rangle_{\mathbb{R}} \leq A$. Der Kern des Einsetzungshomomorphismus $\mathbb{R}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{R}[\alpha] : X \mapsto \alpha$ wird erzeugt vom Minimalpolynom $\mu \in \mathbb{R}[X]_m$. Da $\mathbb{R}[X]/\mu \cong \mathbb{R}[\alpha]$ nullteilerfrei ist, ist μ unzerlegbar. Dank FTA E3c bedeutet das $\mu = X - \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ oder $\mu = X^2 - 2pX + q$ mit Diskriminante $p^2 - q < 0$. Ersteres haben wir ausgeschlossen, somit bleibt nur noch Zweites.

Wir haben $(\alpha - p)^2 = \alpha^2 - 2p\alpha + p^2 = p^2 - q < 0$. Daraus erhalten wir $i := (\alpha - p) / \sqrt{q - p^2}$ in A mit $i^2 = -1$. Wir betrachten $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i] \leq A$ als Teilkörper vermöge der \mathbb{R} -Einbettung $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[i] \leq A : x + yi \mapsto x + yi$. Dank (1) folgt $\dim_{\mathbb{C}}(A) = 1$, also $A = \mathbb{C}$. QED

Satz P5c: Klassifikation der eindimensionalen Algebren

Sei $(K, +, 0, \cdot, 1)$ ein kommutativer Ring. (0) Zu jedem Skalar $\alpha \in K$ haben wir die K -Algebra $A_\alpha = (K, \diamond_\alpha)$ mit $u \diamond_\alpha v = u \cdot \alpha \cdot v$.

- (1) Jede eindimensionale K -Algebra (A, \diamond) isomorph zu (mindestens) einem dieser Modelle $A_\alpha = (K, \diamond_\alpha)$.
- (2) Jeder K -Algebren-Homomorphismus $\varphi : A_\alpha \rightarrow A_\beta$ lässt sich eindeutig darstellen durch $\varphi(u) = u\lambda$ mit $\lambda \in K$ und $\alpha\lambda = \beta\lambda^2$.
- (3) Genau dann sind $A_\alpha \cong A_\beta$ isomorph als K -Algebren, wenn $\alpha \sim \beta$ assoziiert sind, also $\alpha = \beta\lambda$ für ein $\lambda \in A^\times$ gilt.
- (4) Ist K ein Körper, so ist jede eindimensionale K -Algebra (A, \diamond) isomorph zu genau einem der beiden Modelle A_0 oder A_1 .

Beispiel: Über dem Ring $K = \mathbb{Z}$ haben wir für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ die \mathbb{Z} -Algebra $A_n = (\mathbb{Z}, \diamond_n)$ mit $u \diamond_n v = u \cdot n \cdot v$. Jede eindimensionale \mathbb{Z} -Algebra (A, \diamond) ist isomorph zu genau einem dieser Modelle (\mathbb{Z}, \diamond_n) .

Beweis: (0) Auf dem K -linearen Raum K ist $\diamond_\alpha : K \times K \rightarrow K$ bilinear: Dank Kommutativität der Multiplikation ist $u \cdot \alpha \cdot v$ linear in u und in v .

(1) Sei $b \in A \setminus \{0\}$ eine Basis. Damit gilt $b \diamond b = \alpha b^2$ für ein $\alpha \in K$. Somit ist $\varphi : K \xrightarrow{\cong} A : u \mapsto ub$ ein Isomorphismus von K -Algebren, denn es gilt $\varphi(u) \diamond \varphi(v) = (ub) \diamond (vb) = (uv)(b \diamond b) = (uv)(\alpha b) = (\alpha uv)b = \varphi(u \diamond_\alpha v)$.

(2) Ist $\varphi : A_\alpha \rightarrow A_\beta$ ein K -Algebren-Homomorphismus, so setzen wir $\lambda := \varphi(1) \in K$. Für alle $u \in K$ folgt $\varphi(u) = \varphi(u \cdot 1) = u \cdot \varphi(1) = u\lambda$. Weiters vergleichen wir $\varphi(u) \diamond_\beta \varphi(v) = (u\lambda) \diamond_\beta (v\lambda) = u\beta v\lambda^2$ mit $\varphi(u \diamond_\alpha v) = \alpha uv\lambda$. Die Auswertung in $u = v = 1$ ergibt $\alpha\lambda = \beta\lambda^2$. Die Bedingung $\alpha\lambda = \beta\lambda^2$ ist also notwendig und offensichtlich auch hinreichend für einen K -Algebren-Homomorphismus $\varphi : A_\alpha \rightarrow A_\beta$.

(3) Im Falle eines Isomorphismus ist λ invertierbar, also $\lambda \in K^\times$. Gilt umgekehrt $\lambda \in K^\times$ und $\alpha = \beta\lambda$, so ist φ ein Isomorphismus.

(4) Dies folgt aus (1) und (3): Ist K ein Körper, so gilt $K^\times = K^*$. Somit ist jedes Element $\alpha \in K \setminus \{0\}$ assoziiert zu 1. QED

Satz P5h: unital reelle Algebren der Dimension 2

Drei nicht-isomorphe Beispiele für unital \mathbb{R} -Algebren sind:

- 1 $(\mathbb{R}^2, \cdot, (1, 0))$ mit $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.
- 2 $(\mathbb{R}^2, \bullet, (1, 0))$ mit $(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2y_1)$.
- 3 $(\mathbb{R}^2, \circ, (1, 1))$ mit $(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$.

Jede zweidimensionale unital \mathbb{R} -Algebra (A, \diamond, e) ist isomorph zu genau einem dieser drei Modelle.

Beweis: Alle drei Produkte sind offensichtlich \mathbb{R} -bilinear. Die erste Algebra ist der Körper $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ der komplexen Zahlen mit Einselement $e = (1, 0)$ und imaginärer Einheit $i = (0, 1)$, also $i^2 = -e$. Die zweite Algebra ist $\mathbb{R}[X]/X^2$ mit Einselement $(1, 0)$, und $w = (0, 1)$ ist nilpotent, $w^2 = 0$. Die dritte Algebra ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Einselement $(1, 1)$, hat keine nilpotenten Elemente, aber Nullteiler wie $(1, 0) \circ (0, 1) = (0, 0)$. Insbesondere sind diese drei Algebren paarweise nicht isomorph.

Sei (A, \diamond, e) eine unital \mathbb{R} -Algebra der Dimension $\dim_{\mathbb{R}}(A) = 2$. Wir ergänzen e durch $u \in A$ zu einer Basis (e, u) . Für das Produkt gilt dann $u \diamond u = \alpha e + \beta u$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wir setzen $v := \beta e - 2u$ und erhalten die Basis (e, v) mit $v \diamond v = \gamma e$ und $\gamma = 4\alpha + \beta^2$. (Nachrechnen!) Im Falle $\gamma \neq 0$ setzen wir $w := \sqrt{1/|\gamma|}v$, sonst $w := v$. Wir erhalten so die neue Basis (e, w) von (A, \diamond, e) mit $w \diamond w = \delta e$ und $\delta = \text{sign } \gamma \in \{-1, 0, 1\}$.

Fall (1): Für $\delta = -1$ erhalten wir den \mathbb{R} -Algebren-Isomorphismus $\varphi : (\mathbb{R}^2, \cdot) \xrightarrow{\cong} (A, \diamond) : (x_1, x_2) = x_1e + x_2w$. (Einsetzen und nachrechnen!)

Fall (2): Für $\delta = 0$ erhalten wir den \mathbb{R} -Algebren-Isomorphismus $\varphi : (\mathbb{R}^2, \bullet) \xrightarrow{\cong} (A, \diamond) : (x_1, x_2) = x_1e + x_2w$. (Ebenso nachrechnen!)

Fall (3): Für $\delta = 1$ setzen wir $a := \frac{1}{2}(e + w)$ und $b := \frac{1}{2}(e - w)$ und finden $a \diamond a = a$ und $b \diamond b = b$ sowie $a \diamond b = b \diamond a = 0$. Wir erhalten somit den Isomorphismus $\varphi : (\mathbb{R}^2, \circ) \xrightarrow{\cong} (A, \diamond) : \varphi(x_1, x_2) = x_1a + x_2b$. QED

Bemerkung: Satz und Beweis gelten wörtlich für jeden geordneten Körper $(K, +, \cdot, \leq)$, in dem jedes Element $a \geq 0$ ein Quadrat ist.

Definition P51: Divisionsalgebra

Wir nennen (A, \diamond) mit $A \neq \{0\}$ eine **Divisionsalgebra**, wenn für jedes Paar $u, v \in A$ mit $u \neq 0$ zu den Gleichungen $u \diamond x = v$ und $y \diamond u = v$ eindeutige Lösungen $x, y \in A$ existieren. Das heißt, die Abbildungen $L_u : A \rightarrow A : x \mapsto u \diamond x$ und $R_u : A \rightarrow A : y \mapsto y \diamond u$ sind Bijektionen.

Ein **Nullteilerpaar** $u, v \in A$ erfüllt $u \neq 0$ und $v \neq 0$ doch $u \diamond v = 0$. Das bedeutet, dass die K -linearen Abbildungen L_u, R_v nicht-trivialen Kern haben. Entsprechend heißt (A, \diamond) **nullteilerfrei**, wenn L_u und R_u injektiv sind für alle $u \neq 0$. Gilt zudem $\dim_K A < \infty$, so sind L_u und R_u für alle $u \neq 0$ invertierbar, und (A, \diamond) ist eine Divisionsalgebra.

Beispiel: Die Matrixalgebra $K^{n \times n}$ über einem Körper K hat für $n \geq 2$ Nullteiler und ist somit keine Divisionsalgebra. Im Beispiel $a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $a \neq 0$ und $b \neq 0$, aber $ab = 0$. Man beachte hierbei die Reihenfolge, denn $ba = a \neq 0$. Genau dann ist $a \in K^{n \times n} \setminus \{0\}$ ein Nullteiler, wenn die Determinante verschwindet, $\det(a) = 0$. (Warum?)

☺ In jeder Divisionsalgebra können wir links und rechts dividieren. Sobald wir Assoziativität hinzufügen, erhalten wir einen Divisionsring:

Satz P5J: Jede assoziative Divisionsalgebra ist ein Divisionsring.

Für jede *assoziative* Algebra (A, \diamond) sind äquivalent:

- 1 Die Algebra (A, \diamond) ist eine Divisionsalgebra im Sinne von P5I.
- 2 Es existiert ein neutrales Element $e \in A$ und zu jedem $u \in A \setminus \{0\}$ ein inverses Element $u^{-1} \in A$, sodass $u \diamond u^{-1} = u^{-1} \diamond u = e$ gilt.

Auf der Teilmenge $A^\times = A \setminus \{0\}$ in A erhalten wir demnach durch Einschränkung die multiplikative Gruppe $(A^\times, \diamond, e, \iota)$ mit $\iota : u \mapsto u^{-1}$.

Aufgabe: Beweisen Sie die Äquivalenz „(2) \Leftrightarrow (1)“. *Hinweis zur Erinnerung:* Die Implikation „(2) \Rightarrow (1)“ ist leicht, doch „(1) \Rightarrow (2)“ ist etwas knifflig. Folgen Sie Satz J1N zur Lösung von Gleichungen in einer Halbgruppe.

☺ Solide Grundlagen, die wir damals für Gruppen/Monoide erarbeitet haben, zahlen sich nun erneut aus für assoziative Divisions/Algebren.

Beweis: „(2) \Rightarrow (1)“: Wir lösen $u \diamond x = v$ durch Linksmultiplikation mit u^{-1} und erhalten $u^{-1} \diamond v = u^{-1} \diamond (u \diamond x) = (u^{-1} \diamond u) \diamond x = e \diamond x = x$. Ebenso lösen wir $y \diamond u = v$ durch Rechtsmultiplikation mit u^{-1} .

„(1) \Rightarrow (2)“: Sei $u \in A \setminus \{0\}$. Dank Bijektivität von R_u und L_u existiert ein Linksneutrales $e' \in A$ mit $e' \diamond u = u$ und ein Rechtsneutrales $e'' \in A$ mit $u \diamond e'' = u$. Dank Assoziativität sind diese neutral für *jedes* Element $v \in A$, denn es gilt $e' \diamond v = e' \diamond (u \diamond L_u^{-1}(v)) = (e' \diamond u) \diamond L_u^{-1}(v) = u \diamond L_u^{-1}(v) = v$ und ebenso für $v \diamond e'' = v$. Insbesondere folgt daraus $e'' = e' \diamond e'' = e'$. Wir schreiben e für dieses neutrale Element unserer Algebra (A, \diamond) .

Zu jedem Element $u \in A$ mit $u \neq 0$ existiert dank Bijektivität von R_u, L_u ein Linksinverses $u' \in A$ mit $u' \diamond u = e$ und ein Rechtsinverses $u'' \in A$ mit $u \diamond u'' = e$. Dank Assoziativität stimmen beide überein, denn es gilt $u'' = e \diamond u'' = (u' \diamond u) \diamond u'' = u' \diamond (u \diamond u'') = u' \diamond e = u'$. Diese Rechnung zeigt auch, dass u sein Inverses $u^{-1} := u' = u''$ eindeutig bestimmt. Dies definiert die erhsehnte Inversion $\iota : A^\times \rightarrow A^\times : u \mapsto u^{-1}$. Dank $A \neq \{0\}$ gilt $e \neq 0$ und $(A^\times, \diamond, e, \iota)$ ist eine Gruppe. QED

Satz P5k: Frobenius 1877

Über \mathbb{R} kennen wir drei assoziative Divisionsalgebren:

- 1 Den Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen.
- 2 Den Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen.
- 3 Den Schiefkörper \mathbb{H} der Quaternionen.

Jede endlich-dimensionale, assoziative Divisionsalgebra (A, \diamond) über \mathbb{R} ist isomorph zu genau einem dieser drei vertrauten Modelle $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

Folgenden eleganten Beweis verdanken wir R. Palais: *The classification of real division algebras*. Amer. Math. Monthly (75) 1968, pp. 366–368.

The proofs of Frobenius' theorem in the literature seem to be of two types. Either they are elementary, but rather computational [...], or else they deduce the theorem from sophisticated general results about division algebras [...]. We wish to give here a short, self-contained proof which seems both elementary and conceptual. Besides the inevitable use of the fundamental theorem of algebra we use only the simplest facts about the eigenvalues of linear transformations.

Vorbild: Der Divisionsring $\mathbb{H} = \mathbb{R}[i, j, k]$ der Quaternionen E3D enthält die komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$ als Unterkörper E3A. Die Multiplikation $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} : (z, q) \mapsto z \cdot q$ von links macht \mathbb{H} zu einem \mathbb{C} -Vektorraum.

Die Multiplikation $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} : q \mapsto q \cdot i$ mit i von rechts ist demnach eine \mathbb{C} -lineare Abbildung. Sie erfüllt $f^2 = -\text{id}$, ihr Minimalpolynom ist somit $X^2 + 1$ und hat die Nullstellen $\pm i$. Die beiden Eigenräume von f sind

$$E^+ := \text{Eig}(f, +i) = \{q \in \mathbb{H} \mid q \cdot i = +i \cdot q\} = \langle 1, i \rangle_{\mathbb{R}} = \langle 1 \rangle_{\mathbb{C}} = \mathbb{C},$$

$$E^- := \text{Eig}(f, -i) = \{q \in \mathbb{H} \mid q \cdot i = -i \cdot q\} = \langle j, k \rangle_{\mathbb{R}} = \langle j \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Wir erhalten so die Eigenzerlegung $\mathbb{H} = E^+ \oplus E^-$ als direkte Summe der beiden eindimensionalen \mathbb{C} -Untervektorräume E^+ und E^- .

😊 Der allgemeine Beweis repliziert diese einfache Beobachtung. Das Argument ist vollkommen elementar, doch sehr scharfsinnig. Es benutzt äußerst geschickt die Werkzeuge der Linearen Algebra, hier insbesondere die Theorie der Eigenwerte und Eigenräume.

Beweis des Satzes: Sei (A, \diamond) eine assoziative Divisionsalgebra über \mathbb{R} der Dimension $\dim_{\mathbb{R}}(A) = n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dank Satz P5J existiert ein Einselement $e \in A$. Wir betrachten $\mathbb{R} \leq A$ als Teilkörper vermöge $\mathbb{R} \hookrightarrow A : x \mapsto xe$. Im Falle $n = 1$ gilt $A = \mathbb{R}$, und wir sind fertig. Fortan sei also $n \geq 2$.

(1) Sei $\alpha \in A \setminus \mathbb{R}$ und $C = \langle e, \alpha \rangle_{\mathbb{R}}$. Dann ist C ein Körper isomorph zu \mathbb{C} .

Dazu wählen wir M über \mathbb{R} maximal mit $C \leq M \leq A$ und M kommutativ. Kommutiert $x \in A$ mit allen $y \in M$, so ist $M + \mathbb{R}x$ kommutativ und $x \in M$. Aus $x, x' \in M$ folgt $x \diamond x' \in M$, denn $(x \diamond x') \diamond y = x \diamond y \diamond x' = y \diamond (x \diamond x')$. Für $x \in M \setminus \{0\}$ kommutiert x^{-1} mit allen $y \in M$, denn aus $x \diamond y = y \diamond x$ folgt $y \diamond x^{-1} = x^{-1} \diamond y$, also $x^{-1} \in M$. Somit ist M ein Körper (vgl. K1s).

Dank Fundamentalsatz der Algebra ist (M, \diamond) über \mathbb{R} isomorph zu (\mathbb{C}, \cdot) , siehe Satz P5F. Insbesondere gilt $\dim_{\mathbb{R}}(M) = 2$, und demnach $M = C$.

Wir wählen und fixieren $i \in C$ mit $i^2 = -e$ und betrachten $\mathbb{C} = C \leq A$ als Teilkörper vermöge der \mathbb{R} -Einbettung $\mathbb{C} \simeq C \leq A : x + yi \mapsto xe + yi$. Somit ist A ein Vektorraum über $\mathbb{C} \leq A$, mit Skalierung von links.

(2) Wir definieren $f : A \rightarrow A : v \mapsto v \diamond i$ durch Multiplikation mit i von rechts. Dank $f^2 = -\text{id}_A$ gilt $\mu_f \mid X^2 + 1$ und somit $A = E^+ \oplus E^-$ mit

$$E^+ := \text{Eig}(f, +i) = \{v \in A \mid v \diamond i = +i \diamond v\},$$

$$E^- := \text{Eig}(f, -i) = \{v \in A \mid v \diamond i = -i \diamond v\}.$$

Dank (1) gilt $E^+ = \mathbb{C}$. Im Falle $E^- = \{0\}$ gilt $A = \mathbb{C}$, und wir sind fertig. Im Folgenden sei also $E^- \neq \{0\}$. Wir werden nun $A \cong \mathbb{H}$ nachweisen.

(3) Wir wählen $\alpha \in E^- \setminus \{0\}$. Die Abbildung $g : A \rightarrow A : v \mapsto v \diamond \alpha$ ist ein \mathbb{C} -linearer Isomorphismus dank der Umkehrung $g^{-1}(v) = v \diamond \alpha^{-1}$.

Für $v \in E^{\pm}$ gilt $v \diamond \alpha \in E^{\mp}$, denn $(v \diamond \alpha) \diamond i = v \diamond (-i) \diamond \alpha = (\mp i) \diamond (v \diamond \alpha)$. Das bedeutet $g(E^{\pm}) \subseteq E^{\mp}$, insbesondere $\dim_{\mathbb{C}}(E^-) = \dim_{\mathbb{C}}(E^+) = 1$.

(4) Erneut dank (1) ist auch $D = \langle e, \alpha \rangle_{\mathbb{R}}$ ein Körper isomorph zu \mathbb{C} . Dank (3) gilt $\alpha^2 \in E^+$, also $\alpha^2 \in D \cap E^+ = \mathbb{R}$. Wäre $\alpha^2 > 0$, so hätte das Polynom $X^2 - \alpha^2 = (X - \alpha)(X + \alpha)$ mindestens vier Nullstellen im Körper D , neben $\pm\alpha$ noch zwei in \mathbb{R} . Demnach muss $\alpha^2 < 0$ gelten. Folglich existiert $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\alpha^2 = -\lambda^2$. Für $j := \alpha/\lambda$ gilt nun $j^2 = -1$.

(5) Wir haben $i \in E^+$ mit $i^2 = -1$ und $j \in E^-$ mit $j^2 = -1$ und $j \diamond i = -i \diamond j$. Das führt zu den vertrauten Relationen der Quaternionenalgebra \mathbb{H} : Wie üblich setzen wir $k := i \diamond j$. Wegen $k \in E^-$ gilt $k \diamond i = -i \diamond k$, zudem $k \diamond j = i \diamond j^2 = -i$ und $j \diamond k = j \diamond i \diamond j = -i \diamond j^2 = i$. Schließlich haben wir $k^2 = i \diamond j \diamond i \diamond j = -i^2 \diamond j^2 = -1$. Somit ist $H = \langle e, i, j, k \rangle_{\mathbb{R}} \leq A$ isomorph zu \mathbb{H} .

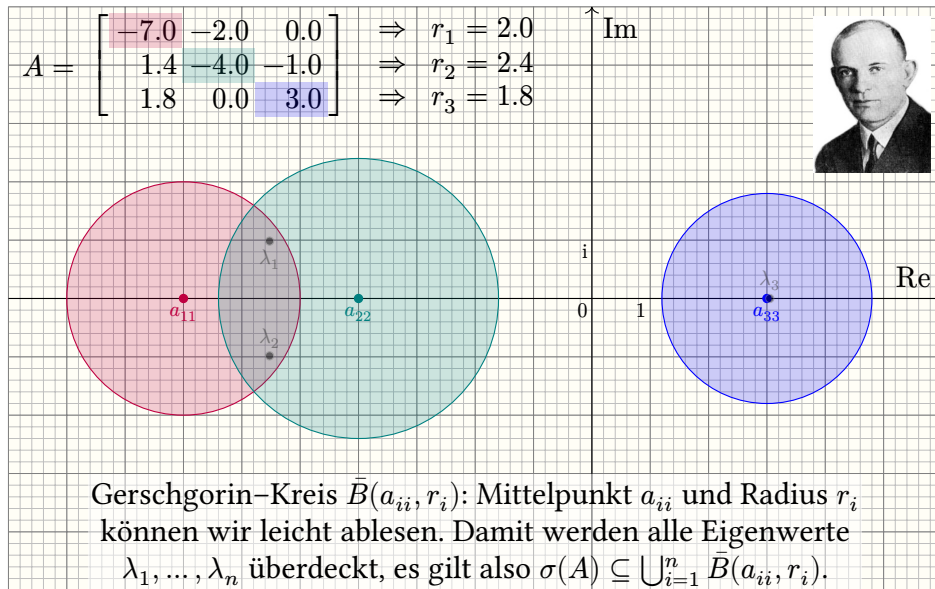
(6) Dank (3) ist (j, k) eine \mathbb{R} -Basis von E^- .

Dank (2) ist $(1, i, j, k)$ eine \mathbb{R} -Basis von A .

Wir schließen $A = H \cong \mathbb{H}$, wie ersehnt. ◻

😊 Dieser raffinierte Beweis ist ein weiterer Höhepunkt bei unserem Aufbau der Linearen Algebra. Sie blicken zurück und erkennen erfreut, wie unsere Werkzeuge hier wunderbar harmonisch zusammenarbeiten: Ringe und Körper, Polynome und Matrizen, Aufbau des Zahlensystems $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C} \leq \mathbb{H}$, der Fundamentalsatz der Algebra, lineare Räume beidseitig mit Skalierung von links und von rechts, Basis und Dimension, MiPo und Kernzerlegung, Determinante und ChaPo. Alles ist gut.

🔗 Können wir jeder Matrix ihre Eigenwerte ansehen? Zumindest grob?



Satz P6A: Die Gerschgorin-Kreise überdecken das Spektrum.

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. In jeder Zeile $i \in \{1, \dots, n\}$ sei $r_i := \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ die Summe der Beträge der Nicht-Diagonal-Einträge. Dann liegt jeder Eigenwert von A in einer der Kreisscheiben $\bar{B}(a_{ii}, r_i) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}$. Kurz:

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(a_{ii}, r_i)$$

Ebenso spaltenweise $\sigma(A) = \sigma(A^T) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(a_{ii}, s_i)$ mit $s_i := \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$.

Beweis: Sei $(v, \lambda) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ ein Eigenpaar unserer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, also $Av = \lambda v$, das heißt $\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j = \lambda v_i$, somit $\sum_{j \neq i} a_{ij} v_j = (\lambda - a_{ii}) v_i$. Es existiert $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $|v_i|$ maximal. Dank $v \neq 0$ gilt $v_i \neq 0$. Wir können $v_i = 1$ annehmen, notfalls skalieren wir v mit v_i^{-1} .

Dank Dreiecksungleichung (Δ) erhalten wir daraus:

$$|\lambda - a_{ii}| \stackrel{\text{Vor}}{=} \left| \sum_{j \neq i} a_{ij} v_j \right| \stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |v_j| \stackrel{\text{Vor}}{\leq} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \stackrel{\text{Def}}{=} r_i$$

Das zeigt $\lambda \in \bar{B}(a_{ii}, r_i)$, wie behauptet. QED

Beispiel: Diese Abschätzung gilt (nur) für Diagonalmatrizen exakt: Für $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ gilt $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(a_{ii}, 0)$.

Exakte Werte sind im Allgemeinen schwierig. Für reelle und komplexe Matrizen jedoch fand Gerschgorin 1931 seine einfache Abschätzung, um die Eigenwerte zu lokalisieren, wenigstens grob einzukreisen.

Gerschgorin erfüllt unseren naiven Wunsch, sogar erstaunlich leicht: Seine Gerschgorin-Kreise lokalisieren die Eigenwerte zunächst grob, umso besser, je stärker sich die Einträge zur Diagonale konzentrieren.

⚠️ A priori wissen wir nicht, welcher Eigenwert in welchem Kreis liegt. Lesen Sie nochmal aufmerksam Satz und Beweis zur Überdeckung. Die nachfolgende Präzisierung optimiert Gerschgorins Satz.

Beispiel: Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ hat das Spektrum $\sigma(A) = \{\pm 2\}$. Hier enthält $\bar{B}(0, 4)$ beide Eigenwerte, aber $\bar{B}(0, 1)$ gar keinen.

📖 Richard S. Varga: *Gerschgorin and His Circles*. Springer 2004. mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gershgorin

Wir können die Eigenwerte präziser lokalisieren: In der Vereinigung aller Gerschgorin-Kreisscheiben enthält jede Zusammenhangskomponente genauso viele Eigenwerte wie Diagonalelemente der Matrix A .

Satz P6A: Die Gerschgorin-Kreise überdecken das Spektrum.

(1) Ist für einen Index $i \in N := \{1, \dots, n\}$ die Kreisscheibe $\Gamma_i := \bar{B}(a_{ii}, r_i)$ disjunkt von allen Γ_j mit $j \neq i$, so enthält Γ_i genau einen Eigenwert.

(2) Für $I \subseteq N$ sei $\Gamma_I := \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$. Gilt $N = \bigsqcup_{k=1}^{\ell} I_k$ und $\Gamma_N = \bigsqcup_{k=1}^{\ell} \Gamma_{I_k}$, so enthält die Vereinigung Γ_{I_k} genau $|I_k|$ Eigenwerte (mit Vielfachheit).

Idee: Für $t \in [0, 1]$ betrachten wir $A^t = tA + (1-t) \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$. Für das Spektrum gilt somit $\sigma(A^t) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(a_{ii}, tr_i) \subseteq \Gamma_N = \bigsqcup_{k=1}^{\ell} \Gamma_{I_k}$. Zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, 1]$ enthält Γ_{I_k} genau $|I_k|$ Eigenwerte von A^t : Für $t = 0$ ist dies klar. Die Eigenwerte bewegen sich stetig mit $t \in [0, 1]$, können also die Menge Γ_{I_k} nicht verlassen. QED

Beispiel: Unser einleitendes Beispiel illustriert dies (Seite P601).

😊 Der Überdeckungssatz P6A von Gerschgorin ist sensationell nützlich, da wir direkt wichtige Eigenschaften ablesen oder abschätzen können.

Aufgabe: (1) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reell und Γ_i disjunkt von allen Γ_j für $j \neq i$. Dann enthält Γ_i genau einen Eigenwert λ , und dieser ist demnach reell. Somit liegt λ im Gerschgorin-Intervall $[a_{ii} - r_i, a_{ii} + r_i] = \bar{B}(a_{ii}, r_i) \cap \mathbb{R}$.
(2) Dies gilt allgemein für jede komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit reellem charakteristischem Polynom $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ und reellem Diagonaleintrag $a_{ii} \in \mathbb{R}$, insbesondere für jede hermitesche Matrix A mit $A^\top = \bar{A}$.

Lösung: Dank $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ ist das Spektrum $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ invariant unter komplexer Konjugation: Aus $\lambda \in \sigma(A)$, also $\chi_A(\lambda) = 0$, folgt $\bar{\lambda} \in \sigma(A)$, denn $\chi_A(\bar{\lambda}) = \overline{\chi_A(\lambda)} = 0$. Wegen $a_{ii} \in \mathbb{R}$ ist auch die Kreisscheibe $\Gamma_i = \bar{B}(a_{ii}, r_i)$ invariant unter Konjugation: Aus $\lambda \in \Gamma_i$ folgt $\bar{\lambda} \in \Gamma_i$. Dank P6A(1) gilt $\sigma(A) \cap \Gamma_i = \{\lambda\}$ und somit $\bar{\lambda} = \lambda$. QED

Korollar P6B: Abschätzung des Spektralradius

Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definieren wir ihren **Spektralradius** $\rho(A)$ als den maximalen Betrag aller ihrer Eigenwerte:

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

Aus dem Überdeckungssatz P6A von Gerschgorin folgt sofort:

$$\rho(A) \leq r(A) := \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Angewendet auf A^\top finden wir ebenso spaltenweise:

$$\rho(A) \leq s(A) := \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Beweis: Dank Gerschgorin P6A liegt jeder Eigenwert $\lambda \in \sigma(A)$ in einer der Kreisscheiben $\bar{B}(a_{ii}, r_i)$, somit auch in $\bar{B}(0, r)$, denn aus $|z - a_{ii}| \leq r_i$ folgt $|z| = |z - a_{ii} + a_{ii}| \leq |z - a_{ii}| + |a_{ii}| \leq r_i + |a_{ii}| \leq r(A)$. QED

Strikt diagonaldominante Matrizen

P607

🤔 Können wir Invertierbarkeit leicht erkennen? Manchmal schon! Wir nennen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ strikt **diagonldominant** in den Zeilen, falls gilt:

$$|a_{ii}| > r_i := \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

in jeder Zeile $i = 1, \dots, n$. In Worten: Jeder Diagonaleintrag a_{ii} ist größer als die Summe aller anderen Einträge seiner Zeile (jeweils im Betrag). Ebenso definieren wir strikt diagonaldominant in den Spalten. (D7F) Dieses einfache Kriterium ist hinreichend für Invertierbarkeit:

Korollar P6c: Lévy 1881, Desplanques 1887 vgl. D7c

Jede strikt diagonaldominante Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist invertierbar. Spektrallücke: Für $\lambda \in \sigma(A)$ gilt $|\lambda| \geq \varepsilon := \min_{i=1}^n (|a_{ii}| - r_i) > 0$.

Beweis: Dank Gerschgorin P6A liegt λ in einer Kreisscheibe $\bar{B}(a_{ii}, r_i)$, also $|\lambda| \geq |a_{ii}| - r_i \geq \varepsilon > 0$ nach der umgekehrten Dreiecksungleichung: $|a_{ii}| = |a_{ii} - \lambda + \lambda| \leq |a_{ii} - \lambda| + |\lambda| \leq r_i + |\lambda|$. Daraus folgt $\text{Ker}(A) = \{0\}$. Dank Satz D2M ist unsere Matrix A in $\mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar. QED

Strikt diagonaldominante Matrizen

P608

Aufgabe: Welche der folgenden Matrizen sind offensichtlich invertierbar da strikt diagonaldominant? Wie schätzen Sie den Spektralradius ab?

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung: Die Matrix A ist strikt diagonaldominant in den Zeilen, die Matrix B nur schwach in den Zeilen, doch strikt in den Spalten. Für C und D greift keines dieser Kriterien, wir schauen genauer hin: Es gilt $\det C = 4$, siehe O508, und $\det D = 0$, denn $D(1, 1, 1)^\top = 0$. Für A erhalten wir zeilenweise $\rho(A) \leq r(A) = 13$, besser spaltenweise $\rho(A) \leq s(A) = 12$. Tatsächlich finden wir hier $\sigma(A) \approx \{3, 3.73, 11.27\}$. Für B finden wir spaltenweise $\rho(B) \leq s(B) = 13$, besser zeilenweise $\rho(B) \leq r(B) = 12$. Tatsächlich gilt $\sigma(B) \approx \{3.46 \pm 0.53i, 11.07\}$. Für C gilt $\rho(C) \leq r(C) = s(C) = 4$, tatsächlich $\sigma(C) = \{2, 2 \pm \sqrt{2}\}$. Für D gilt $\rho(D) \leq r(D) = s(D) = 4$, tatsächlich $\sigma(D) = \{0, 1, 3\}$.

Definition P7A: simultane Diagonalisierung von Endomorphismen

(1) Seien $f_1, \dots, f_\ell : V \rightarrow V$ lineare Abbildungen über dem Körper K . Hierzu ist eine **diagonalisierende Basis** $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V , sodass $f_k(v_i) = \lambda_{k,i} v_i$ und $\lambda_{k,i} \in K$ für alle $i \in I$ und $k = 1, \dots, \ell$.

Wir nennen \mathcal{B} eine **(simultane) Eigenbasis** der Familie (f_1, \dots, f_ℓ) .

Existiert zur Familie (f_1, \dots, f_ℓ) eine simultane Eigenbasis \mathcal{B} von V , so nennen wir (f_1, \dots, f_ℓ) **simultan diagonalisierbar**.

(2) Seien $A_1, \dots, A_\ell \in K^{n \times n}$ quadratische Matrizen derselben Größe. Hierzu ist ein **(simultan) diagonalisierender Basiswechsel** eine invertierbare Matrix $T \in GL_n(K)$, so dass die durch T konjugierten Matrizen $T^{-1}A_1T, \dots, T^{-1}A_\ell T \in K^{n \times n}$ allesamt diagonal sind.

Existiert eine solche Matrix T , so nennen wir die Familie (A_1, \dots, A_r) in $K^{n \times n}$ **simultan diagonalisierbar** über K .

☺ Im Falle $\ell = 1$ ist dies die vorige Definition N3A zur Diagonalisierung.

Wann ist simultane Diagonalisierung möglich? Der folgende Satz gibt hierzu ein einfaches Kriterium, sowohl notwendig als auch hinreichend:

Satz P7B: simultane Diagonalisierung von Endomorphismen

Seien $f_1, \dots, f_\ell : V \rightarrow V$ linear über dem Körper K . Äquivalent sind:

- 1 Die Familie (f_1, \dots, f_ℓ) ist simultan diagonalisierbar.
- 2 Jeder Endomorphismus f_1, \dots, f_ℓ ist einzeln diagonalisierbar und je zwei kommutieren, also $f_j \circ f_k = f_k \circ f_j$ für alle $j, k \in \{1, \dots, \ell\}$.

Die im folgenden Beweis geführte Konstruktion „(2) \Rightarrow (1)“ erklärt zugleich einen Algorithmus zur simultanen Diagonalisierung.

Beweis: „(1) \Rightarrow (2)“: Sei $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ eine simultane Eigenbasis von V . Dann gilt $f_j \circ f_k = f_k \circ f_j$ auf der Basis \mathcal{B} somit dank N1A auf ganz V :

$$f_j(f_k(v_i)) = f_j(\lambda_{k,i} v_i) = \lambda_{k,i} f_j(v_i) = \lambda_{k,i} \lambda_{j,i} v_i,$$

$$f_k(f_j(v_i)) = f_k(\lambda_{j,i} v_i) = \lambda_{j,i} f_k(v_i) = \lambda_{j,i} \lambda_{k,i} v_i.$$

„(2) \Rightarrow (1)“: Wir führen Induktion über ℓ . Der Fall $\ell = 1$ ist trivial. Sei $\ell \geq 2$. Dank Diagonalisierbarkeit haben wir $V = \bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(f_\ell, \lambda)$.

Dank Kommutation ist jeder Eigenraum $U := \text{Eig}(f_\ell, \lambda)$ zudem f_k -invariant: Für $v \in \text{Eig}(f_\ell, \lambda)$ gilt $f_k(v) \in \text{Eig}(f_\ell, \lambda)$, denn

$$f_\ell(f_k(v)) = f_k(f_\ell(v)) = f_k(\lambda v) = \lambda f_k(v).$$

Wir schränken $f_k : V \rightarrow V$ ein zu $g_k = f_k|_U$. Die Endomorphismen $g_1, \dots, g_{\ell-1}$ kommutieren weiterhin und sind diagonalisierbar (P7c).

Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine diagonalisierende Basis $\mathcal{B}_\lambda = (v_i)_{i \in I_\lambda}$ von U zu der Familie $(g_1, \dots, g_{\ell-1})$. Zudem gilt $g_\ell = \lambda \text{id}_U$.

Zusammengesetzt zu $I = \bigsqcup_{\lambda \in K} I_\lambda$ erhalten wir die diagonalisierende Basis $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ von V zu der Familie $(f_1, \dots, f_{\ell-1}, f_\ell)$. QED

☺ Dieser Beweis ist erfreulich konstruktiv: Das Vorgehen erklärt zugleich einen Algorithmus zur simultanen Diagonalisierung.

⚠ Die Basis \mathcal{B}_λ des Eigenraums $\text{Eig}(f_\ell, \lambda)$ bestimmen wir nicht allein mit f_ℓ , sondern auch mit den anderen Endomorphismen $f_1, \dots, f_{\ell-1}$.

⚠ Satz P7B sagt nicht allgemein: „Kommutierende Endomorphismen sind diagonalisierbar.“ Der Satz sagt korrekt genau: „Kommutierende diagonalisierbare Endomorphismen sind simultan diagonalisierbar.“

Beispiel: Alle Matrizen $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mit $a \in K^*$ kommutieren untereinander, aber keine davon ist diagonalisierbar. (Übung: Rechnen Sie es nach.)

☺ Angenommen, die Basis \mathcal{B} diagonalisiert f_1, \dots, f_ℓ in $\text{End}_K(V)$. Dann gilt dies für alle Endomorphismen in dem hiervon erzeugten kommutativen Unterring $K[f_1, \dots, f_\ell] \leq \text{End}_K(V)$.

Beispiel: Ohne Kommutativität bleibt Diagonalisierbarkeit nicht erhalten unter Summen und Produkten. Zum Beispiel sind die Matrizen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ einzeln diagonalisierbar, nicht jedoch $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Übung: Finden Sie ähnliche Gegenbeispiele für Produkte.

Lemma P7c: Diagonalisierbarkeit und Einschränkung

Sei $f: V \rightarrow V$ diagonalisierbar und $U \leq V$ ein f -invarianter Unterraum. Dann ist auch die Einschränkung $g = f|_U: U \rightarrow U$ diagonalisierbar:

$$U = \bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(g, \lambda) \quad \text{mit} \quad \text{Eig}(g, \lambda) = \text{Eig}(f, \lambda) \cap U$$

Übung: Zeigen Sie dies, es ist eine nützliche Übung zur Wiederholung. Welches Ihrer Werkzeuge zur Diagonalisierung passt hier am besten?

Beweis: Wir nutzen das lokale Minimalpolynom (Satz N3H):

Genau dann ist $f \in \text{End}_K(V)$ diagonalisierbar, also $V = \bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$, wenn das MiPo $\mu_f^v \in K[X]$ über K einfach zerfällt für jeden Vektor $v \in V$.

Gilt dies für f , so auch für g , dank $\mu_f^v = \mu_g^v$ für jeden Vektor $v \in U$.

Demnach ist g diagonalisierbar, $U = \bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(g, \lambda)$.

Nach Definition gilt $\text{Eig}(g, \lambda) = \text{Eig}(f, \lambda) \cap U$. QED

Lemma P7d: Kommutation und Invarianz

Angenommen $f, g \in \text{End}_K(V)$ kommutieren, das heißt $f \circ g = g \circ f$.

(1) Dann kommutieren auch $P(f)$ und $Q(g)$ für alle $P, Q \in K[X]$.

(2) Jeder Unterraum $U = \text{Ker } P(f)$ ist g -invariant, $g(U) \subseteq U$.

(3) Jeder Eigenraum $\text{Eig}(f, \lambda) = \text{Ker}(f - \lambda)$ ist g -invariant.

Beweis: (1) Wir betrachten $P = \sum_{i=0}^m p_i X^i$ und $Q = \sum_{j=0}^n q_j X^j$:

$$P(f) \circ Q(g) = \left(\sum_{i=0}^m p_i f^i \right) \circ \left(\sum_{j=0}^n q_j g^j \right) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n p_i q_j f^i \circ g^j$$

$$Q(g) \circ P(f) = \left(\sum_{j=0}^n q_j g^j \right) \circ \left(\sum_{i=0}^m p_i f^i \right) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m q_j p_i g^j \circ f^i$$

Diese Summen sind termweise gleich, $p_i q_j f^i \circ g^j = q_j p_i g^j \circ f^i$.

(2) Für jeden Vektor $v \in \text{Ker } P(f)$ zeigen wir $g(v) \in \text{Ker}(f)$:

$$P(f)(g(v)) = (P(f) \circ g)(v) = (g \circ P(f))(v) = g(P(f)(v)) = g(0) = 0$$

(3) Speziell für $P = X - \lambda$ erhalten wir $\text{Ker}(f - \lambda) = \text{Eig}(f, \lambda)$. QED

Korollar P7e: einfache Zerfällung

Angenommen $A \in K^{n \times n}$ zerfällt einfach. Für $B \in K^{n \times n}$ sind äquivalent:

- 1 Die Matrizen A und B kommutieren, es gilt also $AB = BA$.
- 2 Es gilt $B = P(A)$ für ein Polynom $P \in K[X]$.

Aufgabe: Beweisen Sie dies mit den obigen Werkzeugen. Es ist eine nützliche Übung und schöne Wiederholung.

Beweis: „(2) \Rightarrow (1)“ ist klar dank Lemma P7d. Wirklich interessant ist die Umkehrung „(1) \Rightarrow (2)“: Es gilt $\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ mit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}^1 \subseteq K$. Dank Satz P2M existiert eine Eigenbasis $v_1, \dots, v_n \in K^n$ mit $Av_k = \lambda_k v_k$. Dank Satz P7b ist dies zugleich eine Eigenbasis für B , also $Bv_k = \mu_k v_k$.

Dank Lagrange-Interpolation C2f existiert zu diesen Daten genau ein Polynom $P \in K[X]_{<n}$ mit $P(\lambda_k) = \mu_k$ für alle $k = 1, \dots, n$. Dank P110 gilt $P(A)v_k = P(\lambda_k)v_k = \mu_k v_k = Bv_k$. Dank N1a folgt $B = P(A)$. QED

Eigenvektoren spielen in vielen weiteren Anwendungen eine wichtige Rolle, etwa in der Graphentheorie, speziell beim PageRank-Verfahren, mit dem Google die Relevanz von Internetseiten bewertet.

Auch in der Physik treten Eigenwerte und Eigenvektoren häufig auf. In der Quantenmechanik werden physikalische Größen durch lineare Operatoren beschrieben. Eigenvektoren sind besonders einfache Basiszustände, ihre Eigenwerte entsprechen möglichen Messwerten.

Auf diese Weise erklärte Heisenberg seine Unschärferelation durch Begriffe der Linearen Algebra: Ortsoperator und Impulsoperator kommutieren nicht und haben keine gemeinsame Eigenbasis, sie können nicht beide gleichzeitig genau gemessen werden.

Die ominösen „Atom-Orbitale“ aus dem Chemie-Unterricht sind die Eigenfunktionen der zugehörigen Schrödinger-Gleichung. Messungen entsprechen linearen Operatoren, Messwerte sind Eigenwerte, und gleichzeitige Messung entspricht simultaner Diagonalisierung.

Aufgabe: (1) Welche der folgenden Matrizen sind \mathbb{R} -diagonalisierbar?

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -8 & -2 \\ 11 & 9 & 2 \\ 22 & 16 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -9 & -8 & -2 \\ 18 & 15 & 3 \\ -6 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -10 & -8 & -2 \\ 14 & 11 & 2 \\ 10 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

- (2) Welche Teilfamilien von (A, B, C) sind simultan diagonalisierbar?
 (3) Finden Sie jeweils eine simultane Eigenbasis, soweit möglich.
 (4) Finden Sie jeweils alle simultanen Eigenbasen, soweit möglich.

Lösung: (1a) Wir berechnen $\chi_A = (X-1)^2(X-2)$. Das allein lässt die Frage der Diagonalisierbarkeit noch offen. Zur Klärung berechnen wir entweder zuerst $\mu_A = (X-1)(X-2)$ oder gleich die Eigenräume:

$$\begin{aligned} \text{Eig}(A, 1) &= \langle (-8, 11, 0)^T, (-2, 0, 11)^T \rangle_{\mathbb{R}}^! \\ \text{Eig}(A, 2) &= \langle (-1, 1, 2)^T \rangle_{\mathbb{R}}^! \end{aligned}$$

Machen Sie die Probe! Somit ist die Matrix A über \mathbb{R} diagonalisierbar.
 (Bonus: Die Eigenräume liefern erneut χ_A und μ_A wie angegeben.)

(1b) Wir berechnen $\chi_B = (X-2)^2(X-3)$. Das allein lässt die Frage der Diagonalisierbarkeit vorerst noch offen. Zur Klärung berechnen wir entweder zuerst $\mu_B = (X-2)(X-3)$ oder gleich die Eigenräume:

$$\begin{aligned} \text{Eig}(B, 2) &= \langle (2, -3, 1)^T \rangle_{\mathbb{R}}^! \\ \text{Eig}(B, 3) &= \langle (-2, 3, 0)^T, (-1, 0, 6)^T \rangle_{\mathbb{R}}^! \end{aligned}$$

Machen Sie die Probe! Somit ist die Matrix B über \mathbb{R} diagonalisierbar.
 (Bonus: Die Eigenräume liefern erneut χ_B und μ_B wie angegeben.)

(1c) Wir berechnen $\chi_C = (X-1)(X-2)(X-3)$. Somit ist die Matrix C über \mathbb{R} diagonalisierbar. Explizit berechnen wir hierzu die Eigenräume:

$$\begin{aligned} \text{Eig}(C, 1) &= \langle (2, -3, 1)^T \rangle_{\mathbb{R}}^! \\ \text{Eig}(C, 2) &= \langle (1, -2, 2)^T \rangle_{\mathbb{R}}^! \\ \text{Eig}(C, 3) &= \langle (0, -1, 4)^T \rangle_{\mathbb{R}}^! \end{aligned}$$

Machen Sie die Probe! Dies zeigt erneut $\chi_C = (X-1)(X-2)(X-3)$.

(2) Jede Matrix A, B, C ist *einzel*n diagonalisierbar. Zur *simultan*en Diagonalisierbarkeit prüfen wir die Kommutativität (P7B) und finden:

$$AB = BA \quad \text{und} \quad BC = CB \quad \text{aber} \quad AC \neq CA$$

Die Teilfamilien (A, B) und (B, C) sind also simultan diagonalisierbar, die Teilfamilien (A, C) und (A, B, C) hingegen sind es nicht!

(3a) Wir können auf (A, B) den Algorithmus P7B anwenden oder aus den berechneten Eigenräumen eine gemeinsame Eigenbasis wählen:

$$\begin{aligned} \text{Eig}(A, 1) &= \langle (-8, 11, 0)^T, (-2, 0, 11)^T \rangle_{\mathbb{R}}^!, \quad \text{Eig}(A, 2) = \langle (-1, 1, 2)^T \rangle_{\mathbb{R}}^! \\ \text{Eig}(B, 2) &= \langle (2, -3, 1)^T \rangle_{\mathbb{R}}^!, \quad \text{Eig}(B, 3) = \langle (-2, 3, 0)^T, (-1, 0, 6)^T \rangle_{\mathbb{R}}^! \end{aligned}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1}BS = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(4a) Das ist die einzige gemeinsame Eigenbasis des Paares (A, B) , wie immer bis auf Vielfache und Vertauschung der Basisvektoren.

(3b) Wir können auf (B, C) den Algorithmus P7B anwenden oder aus den berechneten Eigenräumen eine gemeinsame Eigenbasis wählen:

$$\begin{aligned} \text{Eig}(B, 2) &= \langle (2, -3, 1)^T \rangle_{\mathbb{R}}^!, \quad \text{Eig}(B, 3) = \langle (-2, 3, 0)^T, (-1, 0, 6)^T \rangle_{\mathbb{R}}^! \\ \text{Eig}(C, \{1, 2, 3\}) &= \{ \langle (2, -3, 1)^T \rangle_{\mathbb{R}}^!, \langle (1, -2, 2)^T \rangle_{\mathbb{R}}^!, \langle (0, -1, 4)^T \rangle_{\mathbb{R}}^! \} \end{aligned}$$

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad T^{-1}BT = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad T^{-1}CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(4b) Das ist die einzige Eigenbasis von C und somit auch von (B, C) , wie immer bis auf Vielfache und Vertauschung der Basisvektoren.

Bemerkung: In den Eigenbasen zu (A, B) bzw. (B, C) gilt jeweils

$$S^{-1}CS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dies zeigt eindrücklich, dass die jeweils dritte Matrix nicht gleichzeitig diagonalisiert wird, auch nicht kann, wie wir aus (2) bereits wissen.

Aufgabe: Wir betrachten weiterhin die drei reellen Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -8 & -2 \\ 11 & 9 & 2 \\ 22 & 16 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -9 & -8 & -2 \\ 18 & 15 & 3 \\ -6 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -10 & -8 & -2 \\ 14 & 11 & 2 \\ 10 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

- (5) Sind A , B , $A + B$, $A \cdot B$ diagonalisierbar? einzeln? simultan?
 (6) Sind B , C , $B + C$, $B \cdot C$ diagonalisierbar? einzeln? simultan?
 (7) Sind A , C , $A + C$, $A \cdot C$ diagonalisierbar? einzeln? simultan?

Lösung: (5) Wir haben das Paar (A, B) bereits simultan diagonalisiert:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} S^{-1}AS & = \text{diag}(1, 1, 2) \\ S^{-1}BS & = \text{diag}(2, 3, 3) \\ S^{-1}(A+B)S & = \text{diag}(3, 4, 5) \\ S^{-1}(A \cdot B)S & = \text{diag}(2, 3, 6) \end{cases}$$

Durch S wird somit auch $(A, B, A + B, A \cdot B)$ simultan diagonalisiert.

(6) Wir haben das Paar (B, C) bereits simultan diagonalisiert:

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} T^{-1}BT & = \text{diag}(2, 3, 3) \\ T^{-1}CT & = \text{diag}(1, 2, 3) \\ T^{-1}(B+C)T & = \text{diag}(3, 5, 6) \\ T^{-1}(B \cdot C)T & = \text{diag}(2, 6, 9) \end{cases}$$

Durch T wird somit auch $(B, C, B + C, B \cdot C)$ simultan diagonalisiert.

(7) Wegen $AC \neq CA$ lässt sich (A, C) nicht simultan diagonalisieren. Über die Diagonalisierbarkeit von $A + C$ und $A \cdot C$ lässt sich daraus allein leider noch nichts schließen; beide Fälle sind noch möglich.

Um dies zu klären, müssen wir die Matrizen genauer untersuchen.
Langer Weg: Wir können das ChaPo-Verfahren P2H anwenden.
Abkürzung: Wir nutzen geschickt unsere Ergebnisse (1–4).

Zur Vereinfachung nutzen wir unsere Diagonalisierung von A :

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1}CS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Daraus lesen wir Summe und Produkt ab:

$$S^{-1}(A+C)S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad S^{-1}(A \cdot C)S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Das zeigt uns, $A \cdot C$ ist (zufällig) diagonalisierbar, $A + C$ jedoch nicht. Ausführlich gilt $\chi_{A+C} = \mu_{A+C} = (X-1)(X-4)^2$, also greift Satz P3M: Somit sind zwar A und C diagonalisierbar, $A + C$ jedoch nicht.

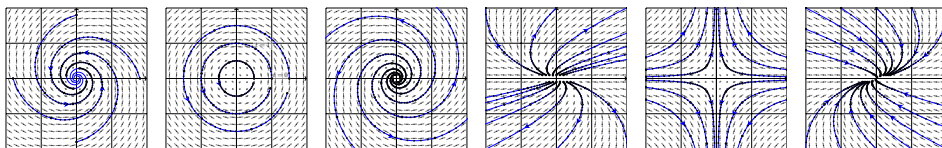
Ebenso gilt $\chi_{AC} = \mu_{AC} = (X-1)(X-3)(X-4)$, also greift Satz P2M: Somit sind A und C und AC diagonalisierbar, jedoch nicht simultan, denn es gilt $AC \neq CA$ sowie $A(AC) \neq (AC)A$ und $C(AC) \neq (AC)C$.

Dieses Zahlenbeispiel zeigt erneut sehr eindrücklich:

- ☺ Starke theoretische Grundlagen liefern praktische Werkzeuge. Diese strukturieren und vereinfachen die Rechnungen spürbar.
- ☺ Gute Notation und ChaPo-Verfahren erleichtern das Vorgehen. Oft hilft es, vorige Informationen geschickt wiederzuverwenden.
- ☺ Sie arbeiten umso effizienter, je genauer Sie verstehen, was Sie tun! ... insbesondere, was Sie schon haben und was Sie noch suchen. Sie können dann geschickt vom ChaPo-Verfahren abweichen, je nach konkretem Bedarf und möglichen Abkürzungen.

Kapitel Q

Hauptvektoren und Jordanisierung



To learn to succeed, you must first learn to fail.

Michael Jordan (1963–)

Inhalt dieses Kapitels Q

- 1 Hauptvektoren und Jordanisierung
 - Die Jordan–Normalform
 - Beweis des Satzes von Jordan
 - Erste Beispiele und Anwendungen
 - Von der komplexen zur reellen Jordan–Form
- 2 Differenzgleichungen und Differentialgleichungen
 - Die diskrete Ableitung und ihre Hauptfolgen
 - Die Ableitung und ihre Hauptfunktionen
 - Freie und erzwungene harmonische Schwingung
 - Struktursatz für lineare Differentialgleichungen
- 3 Lineare Differentialgleichungssysteme
 - Exponentialfunktion und Struktursatz für DGSysteme
 - Gekoppelte Oszillatoren und ihre Eigenschwingungen
 - Jordanisierung: von Hauptvektoren zu Hauptfunktionen
 - Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen
- 4 Linearisierung um Fixpunkte und dynamische In/Stabilität

Kanonische Darstellung eines Endomorphismus

Q003
Überblick

Worum geht es bei der kanonischen Darstellung von Endomorphismen?
Vorgelegt sei eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow V$ über einem Körper K .
Unser Ziel ist eine möglichst einfache und übersichtliche Darstellung
von f als Matrix bezüglich einer Basis von V , geschickt zu f angepasst!

Im vorigen Kapitel P haben wir zuerst die Diagonalisierung geklärt:
Bezüglich einer Eigenbasis $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ gilt $f(v_i) = \lambda_i v_i$ für alle $i \in I$.
Das ist der Idealfall: In endlicher Dimension ist die darstellende Matrix
dann diagonal, also $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Einfacher geht es nicht.

Leider ist nicht jeder Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ diagonalisierbar!

Wir konzentrieren uns auf endliche Dimension $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$.
Notwendig ist, dass das charakteristische Polynom $\chi_f \in K[X]_n^1$
über K in Linearfaktoren zerfällt. Hinreichend wird dies jedoch erst,
wenn die geometrische Vielfachheit die algebraische erreicht (P3M).

In diesem Kapitel Q lösen wir alle verbleibenden Fälle, in denen zwar χ_f
über K zerfällt, aber dennoch zu wenige Eigenvektoren zu f existieren.

Naturwissenschaftlich-technische Anwendungen

Q004
Überblick

Die Jordan–Form ist ein grundlegendes Ergebnis der Linearen Algebra
und zugleich ein Universalwerkzeug in ihren zahlreichen Anwendungen.
Sie ist benannt nach dem französischen Mathematiker Camille Jordan
(1838–1921), der sie 1870 veröffentlichte. Karl Weierstraß (1815–1897)
hatte kurz zuvor bereits 1868 ein äquivalentes Ergebnis vorgestellt.

Genutzt wird die Jordan–Form nicht nur in der Algebra, sondern auch in
der Analysis. Anwender:innen in Natur- und Ingenieurwissenschaften ist
sie höchst willkommen zur Lösung von linearen Differentialgleichungs-
systemen $\dot{u} = Au$ mit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Der Ingenieur Yvon Villarceau löste
1870 den Fall von $n = 2$ Variablen, doch fehlten ihm die algebraischen
Werkzeuge für das allgemeine Problem. Jordan antwortete ihm 1871,
wie die Normalform dieses Problem löst, und übernahm diese Lösung
in die zweite Auflage seines Lehrwerks *Cours d'analyse* von 1887.

Auch diese wichtigen Anwendungen will ich hier gebührend beleuchten.
Zeit und Mühe sind gut investiert, denn dadurch werden Motivation,
Anwendungen und Techniken wesentlich besser verständlich.

Ist jede quadratische Matrix trigonalisierbar?

Q005
Erinnerung

Welche quadratischen Matrizen $A \in K^{n \times n}$ sind trigonalisierbar?

Hindernis: Zerfällt das charakteristische Polynom χ_A in $K[X]$?

Typisches Gegenbeispiel über \mathbb{R} ist eine reelle Drehstreckung P2P:

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \Rightarrow \chi_A = (X - a)^2 + b^2 \in \mathbb{R}[X]^2$$

In $\mathbb{C}[X]$ gilt $\chi_A(X) = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$ mit $\sigma(A; \mathbb{C}) = \{\lambda, \bar{\lambda}\} = \{a \pm ib\}$.

Für $b \neq 0$ hat χ_A keine reelle Nullstelle, zerfällt also nicht in $\mathbb{R}[X]$.

☹️ Somit ist A für $b \neq 0$ über \mathbb{R} nicht trigonalisierbar, $A \sim \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$.

😊 Zur Trigonalisierung ist dies bereits das einzige Hindernis:

♦ Satz P3B: Trigonalisierung \Leftrightarrow Zerfällung

Genau dann ist eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ über K trigonalisierbar, wenn ihr charakteristisches Polynom $\chi_A \in K[X]$ über K zerfällt.

⚠️ Das hängt sowohl von der Matrix A als auch von dem Körper K ab.

Ist jede quadratische Matrix trigonalisierbar?

Q006
Erinnerung

😊 Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K , etwa \mathbb{C} (E3C), zerfällt jedes Polynom in Linearfaktoren (P2K), dieses erste Hindernis tritt über K demnach nie auf, und jede Matrix ist über K trigonalisierbar.

😊 Im Allgemeinen ist der Körper K nicht algebraisch abgeschlossen. Notfalls, wenn χ_f über K nicht zerfällt, können wir in einer geeigneten Körpererweiterung $\bar{K} \geq K$ arbeiten, sodass χ_f über \bar{K} zerfällt.

Beispiel: Bei der Untersuchung der Fibonacci-Folge in $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ tritt die folgende Matrix A auf als Darstellung des Verschiebeoperators:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \chi_A = X^2 - X - 1$$

Das charakteristische Polynom zerfällt nicht über \mathbb{Q} , dies gelingt jedoch über der Körpererweiterung $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$: Die beiden Nullstellen von χ_A sind $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ und $\psi = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$. Somit lässt sich die Matrix A über dem Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ diagonalisieren und so die Fibonacci-Folge durch die einfache geschlossene Formel $f_n = (\phi^n - \psi^n)/(\phi - \psi)$ darstellen.

Ist jede trigonalisierbare Matrix diagonalisierbar?

Q007
Erinnerung

Welche quadratischen Matrizen $A \in K^{n \times n}$ sind diagonalisierbar?

1. **Hindernis:** Zerfällt das charakteristische Polynom χ_A in $K[X]$?

2. **Hindernis:** Erreicht die geometrische Vielfachheit die algebraische?

♦ Satz P3M: Kriterien zur Diagonalisierbarkeit

Sei $f: V \rightarrow V$ linear über dem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1 Der Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ ist diagonalisierbar.
- 2 Es gilt die Eigenraumzerlegung $V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(f)} \text{Eig}(f, \lambda)$.
- 3 Es gilt die Dimensionsgleichung $n = \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \dim_K \text{Eig}(A, \lambda)$.
- 4 Das Minimalpolynom zerfällt einfach, also $\mu_f = \prod_{\lambda \in \sigma(f)} (X - \lambda)$.
- 5 Das charakteristische Polynom χ_f zerfällt über K in Linearfaktoren und für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma(f)$ gilt $\dim_K \text{Eig}(f, \lambda) = \text{ord}(\chi_f, \lambda)$.

Übung: Beweisen Sie diese Äquivalenzen zur Wiederholung.

Ist jede trigonalisierbare Matrix diagonalisierbar?

Q008
Erinnerung

😊 Das erste Hindernis tritt über einem algebraisch abgeschlossenen Körper wie \mathbb{C} nie auf. Über jedem nicht-abgeschlossenen Körper K lässt es sich durch eine geeignete Körpererweiterung $\bar{K} \geq K$ lösen.

⚠️ Das zweite Hindernis ist noch ernster und lässt sich nicht umgehen. Typisches Gegenbeispiel ist ein **Jordan-Block** der Dimension $n \geq 2$:

$$B = J(n, \lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in K^{n \times n} \Rightarrow B - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe: Bestimmen Sie zu B das Spektrum und die Eigenräume.

Lösung: Für $\mu \neq \lambda$ ist $B - \mu I$ invertierbar, also $\text{Eig}(B, \mu) = \{0\}$. Es bleibt nur $\text{Eig}(B, \lambda) = Ke_1$, also erlaubt B keine Eigenbasis.

Das Polynom $\chi_B(x) = (X - \lambda)^n$ hat die Nullstelle λ mit Vielfachheit n . Der zugehörige Kern $\text{Ker}(B - \lambda I) = Ke_1$ hat aber nur Dimension 1: Die geometrische Vielfachheit ist hier kleiner als die algebraische!

Ist der Körper K algebraisch abgeschlossen, etwa $K = \mathbb{C}$, so zerfällt jedes Polynom über K , daher ist jede Matrix in $K^{n \times n}$ trigonalisierbar (P3B).

⚠ Nicht jede zerfallende Matrix ist diagonalisierbar (P2O):

$$B = J(n, \lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in K^{n \times n} \implies B - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

☹ Es gibt nicht genug **Eigenvektoren** zu B für eine Eigenbasis von K^n .

😊 Wir nutzen das Nächstbeste, die **Hauptvektorkette** (e_1, e_2, \dots, e_n) :

$$0 \xleftarrow{B-\lambda} e_1 \xleftarrow{B-\lambda} e_2 \xleftarrow{B-\lambda} \dots \xleftarrow{B-\lambda} e_n$$

Definition Q1A: Hauptvektoren

Sei $f \in \text{End}_K(V)$ und $\lambda \in K$. Eine **Hauptvektorkette / Jordan-Kette**

$$0 \xleftarrow{f-\lambda} v_1 \xleftarrow{f-\lambda} v_2 \xleftarrow{f-\lambda} \dots \xleftarrow{f-\lambda} v_\ell$$

besteht aus Vektoren $v_0 = 0 \neq v_1, v_2, \dots, v_\ell \in V$ mit $(f - \lambda)(v_k) = v_{k-1}$.

Wir schreiben kurz $B - \lambda$ für $B - \lambda I$ und $f - \lambda$ für $f - \lambda \text{id}_V$. Wir nennen v_k einen **Hauptvektor k -ter Stufe**. Das bedeutet:

$$(f - \lambda)^k(v_k) = 0 \quad \text{aber} \quad v_1 = (f - \lambda)^{k-1}(v_k) \neq 0$$

Die Eigenvektoren v_1 von f sind genau die **Hauptvektoren 1. Stufe**:

$$(f - \lambda)^1(v_1) = 0 \quad \text{aber} \quad v_1 = (f - \lambda)^0(v_1) \neq 0$$

Jeder Vektor v_2 mit $(f - \lambda)(v_2) = v_1$ ist ein **Hauptvektor 2. Stufe**, usw. Daher heißen Hauptvektoren auch **verallgemeinerte Eigenvektoren**.

Jordan-Blöcke spielen im Folgenden die zentrale Rolle: Sie zeigen sehr einfach und eindrücklich, dass nicht jede Matrix diagonalisierbar ist. Die gute Nachricht: Jordan-Blöcke sind auch schon das Schlimmste, was uns passieren kann (wie immer vorausgesetzt, χ_f zerfällt über K).

Jeder Jordan-Block der Größe $n \times n$ entspricht einer Hauptvektorkette der Länge n und umgekehrt. Der folgende Satz Q1B besagt, dass wir zu $f: V \rightarrow V$ eine Basis aus Hauptvektorketten konstruieren können.

Beim Diagonalisierungsproblem sind Jordan-Blöcke unvermeidlich. Müssen wir zudem noch mit schlimmeren Komplikationen rechnen? Nein! Glücklicherweise genügen Jordan-Blöcke bereits:

Satz Q1B: Jordan-Basis eines Endomorphismus

Sei $f \in \text{End}_K(V)$ mit $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$ und $\chi_f \in K[X]$ zerfalle über K .

(1) Dann existiert zu f eine Basis \mathcal{J} von V aus **Hauptvektorketten**.

Wir nennen jede solche Basis \mathcal{J} von V eine **Jordan-Basis** zu f .

(2) So wird f dargestellt als Diagonalmatrix von **Jordan-Blöcken**:

$$M_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}}(f) = J = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_k \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad B_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in K^{n_i \times n_i}$$

Wir nennen die Matrix J die **Jordan-(Normal)Form** von f , kurz JNF.

(3) Sie ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Jordan-Blöcke.

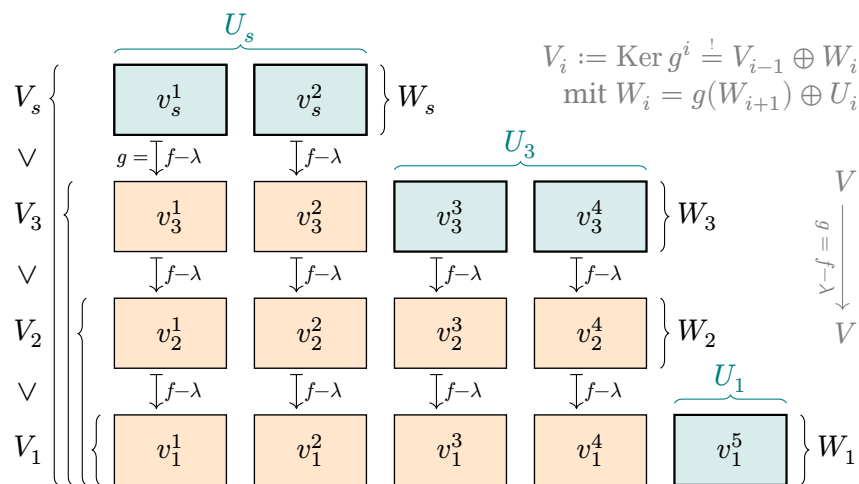
Für jeden Endomorphismus f über \mathbb{C} zerfällt das charakteristische Polynom, also $\chi_f(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Sind alle Nullstellen verschieden, so ist f diagonalisierbar (P2M).

⚠ Bei mehrfachen Nullstellen müssen wir genauer hinschauen: Möglicherweise ist f diagonalisierbar (P4A) oder auch nicht (P2O).

Gegenbeispiel: Für die Matrix B existieren nicht genug Eigenvektoren, um eine Basis zu bilden. Mit der Verallgemeinerung zu Hauptvektoren können wir dieses Problem allgemein lösen. Die Matrix kommt zwar nicht in Diagonalform, wird aber immerhin so einfach wie möglich.

Jeder r -fache Eigenwert λ erlaubt mindestens einen und höchstens r linear unabhängige Eigenvektoren; alle Möglichkeiten können auftreten. Hingegen existieren zu λ immer r linear unabhängige Hauptvektoren! Genauer besagt Satz Q1B: Es gibt eine Basis aus Hauptvektorketten.

Die nächsten Folien erklären das Standardverfahren zur Jordanisierung; der anschließende Beweis arbeitet die nötigen Argumente sorgfältig aus.



$$V_i := \text{Ker } g^i \stackrel{!}{=} V_{i-1} \oplus W_i \text{ mit } W_i = g(W_{i+1}) \oplus U_i$$

Kurzfassung: Zu jedem Eigenwert λ von $f: V \rightarrow V$ konstruieren wir ein solches Young-Diagramm und lesen daraus die **Jordan-Form** ab.

Langfassung: Wir füllen die Kästchen geschickt mit Hauptvektorketten und erhalten daraus zudem eine explizite **Jordan-Basis** \mathcal{J} von V zu f .

Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum mit $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$ und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Nach folgendem Verfahren finden wir eine Jordan-Basis \mathcal{J} von V zu f und somit die Jordan-Form von f .

Einzige Voraussetzung ist, dass das charakteristische Polynom χ_f über K in Linearfaktoren zerfällt. Der Beweis von Satz Q1B ist nichts anderes als dieser Algorithmus plus Nachweis der Korrektheit aller Schritte.

Zunächst benötigen wir alle Eigenwerte von $f \in \text{End}_K(V)$:

- 1 Bestimme das charakteristische Polynom $\chi_f \in K[X]_n^1$.
- 2 Bestimme die Eigenwerte $\lambda_i \in K$ mit Vielfachheiten $r_i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Abbruch? Falls χ_f nicht zerfällt, so ist f nicht jordanisierbar (P3B).

Vereinfachung? Falls χ_f einfach zerfällt, so ist f diagonalisierbar (P2M), also $V = \bigoplus_i \text{Eig}(f, \lambda_i)$. In diesem Falle genügt das Standardverfahren zur Diagonalisierung (P2H). Allgemein jedoch müssen wir jordanisieren.

Keine Sorge: Das folgende Standardverfahren zur Jordanisierung beinhaltet die Diagonalisierung als besonders einfachen Spezialfall.

Für jeden Eigenwert λ sei r seine Vielfachheit und $g := f - \lambda \text{id}_V: V \rightarrow V$. Führe für λ die folgenden Schritte (3&4) sowie bei Bedarf (5&6) aus:

- 3 Für $i = 0, 1, \dots, s$ setze $V_i := \text{Ker } g^i = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V)^i$ und bestimme die Dimension $k_i := \dim V_i$ bis schließlich $k_s = r$ gilt (dank Q1E).

Visualisierung: Diese Daten stellen wir wie oben als Young-Diagramm übersichtlich dar; die Zeile $i = 1, \dots, s$ enthält $z_i := k_i - k_{i-1}$ Kästchen. Dabei gilt $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_s$: Kein Kästchen hängt in der Luft (Q1F).

- 4 Lies die Jordan-Form $\text{diag}(B_1, \dots, B_t)$ ab: Die j -te Spalte der Höhe ℓ zum Eigenwert λ steht für eine Hauptvektorkette der Länge ℓ und somit für den Jordan-Block $B_j = J(\ell, \lambda)$. Diese Jordan-Form ist eindeutig bis auf die willkürliche Reihenfolge der Eigenwerte.

Kurzfassung: Wenn zu f nur die Jordan-Form $J = M_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}}(f)$ gefragt ist, jedoch keine Jordan-Basis \mathcal{J} , so sind wir an dieser Stelle schon fertig.

Langfassung: Falls zudem eine explizite Jordan-Basis \mathcal{J} gesucht ist, so gelingt uns dies wie folgt: In den grünen Kästchen stehen die Startvektoren der Hauptvektorketten. Diese suchen wir!

- 5 Für $i = s, \dots, 1$ wähle in V_i zu $V_{i-1} \oplus g(W_{i+1})$ ein Komplement U_i , sodass $V_i = V_{i-1} \oplus g(W_{i+1}) \oplus U_i$ gilt, und setze $W_i := g(W_{i+1}) \oplus U_i$. Anfangs gilt $W_{s+1} = 0$, also $U_s = W_s$. Wähle eine Basis von U_i und lasse diese Startvektoren zu Hauptvektorketten runterrieseln (Q1F).

Konkrete Rechnung mit Basisvektoren: In jeder Schicht $i = s, \dots, 1$ konstruieren wir eine Basis von W_i . Zuvor berechnet ist eine Basis w_1, \dots, w_q der darüberliegenden Schicht W_{i+1} . (Anfangs $W_{s+1} = 0$.) Runterrieseln liefert eine Basis $g(w_1), \dots, g(w_q)$ des Bildes $g(W_{i+1})$. Wähle eine Hilfsbasis v_1, \dots, v_p von V_{i-1} und setze diese zur Basis $v_1, \dots, v_p, g(w_1), \dots, g(w_q)$ von $V_{i-1} \oplus g(W_i)$ zusammen. Ergänze diese schließlich zu einer Basis $v_1, \dots, v_p, g(w_1), \dots, g(w_q), u_1, \dots, u_h$ von V_i . Trage die Startvektoren u_1, \dots, u_h in die grünen Kästchen ein und lasse runterrieseln. Unsere Basis von W_i ist nun $g(w_1), \dots, g(w_q), u_1, \dots, u_h$. Mit diesen Daten gehen wir weiter zur darunterliegenden Schicht $i - 1$.

- 6 Lies die Jordan-Basis \mathcal{J} zu f ab: Alle Spalten von links nach rechts, jede Spalte von unten nach oben (in der Konvention von Satz Q1B). Füge diese Jordan-Ketten für alle Eigenwerte zu \mathcal{J} zusammen (Q1E).

Warum gelingt die Jordanisierung? Wir prüfen sorgsam jeden Schritt!

Satz Q1c: Hauptvektorketten sind linear unabhängig.

Sei $f : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung über K und $\lambda \in K$ ein Skalar.

(1) Jede Hauptvektorkette $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_\ell)$ zu λ ist linear unabhängig.

$$0 \xleftarrow{f-\lambda} v_1 \xleftarrow{f-\lambda} v_2 \xleftarrow{f-\lambda} \dots \xleftarrow{f-\lambda} v_\ell$$

(2) Eine Familie von Hauptvektorketten $\mathcal{F} = (v_1^1, \dots, v_{\ell_1}^1; \dots; v_1^k, \dots, v_{\ell_k}^k)$ zu λ ist genau dann linear unabhängig, wenn die zugrundeliegenden Eigenvektoren $\mathcal{E} = (v_1^1, \dots, v_1^k)$ linear unabhängig sind.

$$\begin{array}{l} 0 \xleftarrow{f-\lambda} v_1^1 \xleftarrow{f-\lambda} v_2^1 \xleftarrow{f-\lambda} \dots \xleftarrow{f-\lambda} v_{\ell_1}^1 \\ \vdots \\ 0 \xleftarrow{f-\lambda} v_1^k \xleftarrow{f-\lambda} v_2^k \xleftarrow{f-\lambda} \dots \xleftarrow{f-\lambda} v_{\ell_k}^k \end{array}$$

😊 Alle Vektoren in einem korrekt ausgefüllten Young-Diagramm, wie auf Seite Q105 dargestellt, sind demnach linear unabhängig.

Beweis: (1) Wir führen Induktion über die Länge ℓ der Hauptvektorkette. Der Fall $\ell = 1$ ist klar (L1F), denn es gilt $v_1 \neq 0$ nach Definition Q1A. Sei also $\ell \geq 2$. Gegeben seien Koeffizienten $a_1, \dots, a_{\ell-1}, a_\ell \in K$ mit $a_1 v_1 + \dots + a_{\ell-1} v_{\ell-1} + a_\ell v_\ell = 0$. Wir zeigen $0 = a_1 = \dots = a_{\ell-1} = a_\ell$. Die Anwendung von $(f - \lambda)^{\ell-1}$ ergibt zunächst $a_\ell v_1 = 0$, also gilt $a_\ell = 0$. Die reduzierte Familie $\mathcal{F}' = (v_1, \dots, v_{\ell-1})$ ohne v_ℓ ist linear unabhängig nach Induktionsvoraussetzung. Wir schließen $0 = a_1 = \dots = a_{\ell-1} = a_\ell$.

(2) Wir führen Induktion über die maximale Länge $\ell = \max\{\ell_1, \dots, \ell_k\}$. Der Fall $\ell = 1$ ist trivial, denn hier ist $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ linear unabhängig. Wir können $\ell = \ell_1 = \dots = \ell_r > \ell_{r+1} \geq \dots \geq \ell_k \geq 1$ annehmen. Gegeben seien Koeffizienten $a_j^i \in K$ mit $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell_k} a_j^i v_j^i = 0$. Die Anwendung von $(f - \lambda)^{\ell-1}$ reduziert dies zu $\sum_{i=1}^r a_\ell^i v_1^i = 0$. Da die Familie \mathcal{E} linear unabhängig ist, folgt $a_\ell^1 = \dots = a_\ell^r = 0$. Die Familie \mathcal{F}' entsteht aus \mathcal{F} durch Löschung von $v_\ell^1, \dots, v_\ell^r$. Nach Induktionsvoraussetzung ist \mathcal{F}' linear unabhängig, also gilt $a_j^i = 0$ für alle i, j . Das war zu zeigen. ◻

Definition Q1d: Haupträume eines Endomorphismus

Sei $f : V \rightarrow V$ linear über dem Körper K und $\lambda \in K$ ein Skalar.

(1) Der **Hauptraum der Stufe** $s = 0, 1, 2, \dots$ von f zu λ ist

$$V_s = \text{Hau}_s(f, \lambda) := \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V)^s.$$

Hierbei ist $V_1 = \text{Eig}(f, \lambda) = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V)$ der **Eigenraum** von f zu λ . Entsprechend heißt V_s auch **verallgemeinerter Eigenraum** der Stufe s .

(2) Wir erhalten so eine aufsteigende Kette f -invarianter Unterräume:

$$\{0\} = V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \dots \leq V \quad \text{mit} \quad f(V_i) \subseteq V_i$$

(3) Der **Hauptraum** von f zu λ (ohne Einschränkung der Stufe) ist

$$H(\lambda) = \text{Hau}(f, \lambda) := \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V)^s.$$

(4) Dank (2) ist $\text{Hau}(f, \lambda)$ ein f -invarianter Unterraum von V . Er besteht aus allen Vektoren $v \in V$ mit $(f - \lambda \text{id}_V)^s(v) = 0$ für einen hinreichend großen Exponenten $s \in \mathbb{N}$, der im Allgemeinen von v abhängen wird.

Aufgabe: Zeigen Sie die Aussagen (2) und (4). (Streng genommen sollte eine Definition keine Behauptungen enthalten, doch hier will ich davon abweichen und sofort die grundlegenden Eigenschaften nennen.)

Beweis: (2) Wir setzen abkürzend $g := f - \lambda$, genauer $g = f - \lambda \text{id}_V$. Sei $v \in V_s$. Daraus folgt $g^{s+1}(v) = g(g^s(v)) = g(0) = 0$, also $v \in V_{s+1}$. Dank $g \circ f = f \circ g$ folgt $g^s(f(v)) = f(g^s(v)) = f(0) = 0$, also $f(v) \in V_s$.

(4) Ist $V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \dots \leq V$ eine Kette von Unterräumen in V , dann ist ihre Vereinigung $\bigcup_{s \in \mathbb{N}} V_s$ ebenfalls ein Unterraum in V . Beweisen Sie dies als Übung, oder konsultieren Sie Satz L2J.

Bemerkung: Ist V endlich-dimensional, so auch jeder Unterraum

$$V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \dots \leq V,$$

und diese Kette wird stationär, das heißt es existiert ein Index $s \in \mathbb{N}$, sodass $V_s = V_r$ für alle $r \geq s$ gilt, also $\text{Hau}(f, \lambda) = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V)^s$.

Der folgende Satz klärt die Zerlegung von V in Haupträume $\text{Hau}(f, \lambda)$.

Satz Q1E: die Hauptraumzerlegung

Sei $f: V \rightarrow V$ linear über dem Körper K . (0) Die Summe $H := \sum_{\lambda \in K} H(\lambda)$ aller Haupträume $H(\lambda) = \text{Hau}(f, \lambda) := \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \text{Ker}(f - \lambda)^s \leq V$ ist direkt:

$$H := \bigoplus_{\lambda \in K} \text{Hau}(f, \lambda) \leq V$$

(1) Zudem gelte $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$ und $\chi_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{r_i}$ mit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}^! \subseteq K$ und $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann haben wir

$$V = \bigoplus_{i=1}^k \text{Hau}(f, \lambda_i)$$

mit $\text{Hau}(f, \lambda_i) = \text{Ker}(f - \lambda_i)^{r_i}$ und $\dim_K \text{Hau}(f, \lambda_i) = r_i$.

😊 Der entscheidende Vorteil zur Eigenraumzerlegung P1D ist hier, dass die Haupträume $\text{Hau}(f, \lambda_i)$ immer eine Summenzerlegung von ganz V ergeben. Insbesondere hat jeder Hauptraum $\text{Hau}(f, \lambda_i)$ immer die richtige Dimension, nämlich genau die algebraische Vielfachheit r_i .

Beweis: (0) Für $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}^! \subseteq K$ und $v_i \in H(\lambda_i)$ müssen wir zeigen:

$$v_1 + \dots + v_k = 0 \implies v_1 = \dots = v_k = 0$$

Hierzu sei $v_i \in \text{Ker}(f - \lambda_i)^{s_i}$ für $i = 1, \dots, k$. Die Kernzerlegung N3G zum Polynom $P = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{s_i}$ garantiert unsere Behauptung:

$$\text{Ker } P(f) = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(f - \lambda_i)^{s_i} \leq V$$

(1) Cayley-Hamilton P3H garantiert $\chi_f(f) = 0$. Die Kernzerlegung ergibt

$$V \stackrel{\text{P3H}}{=} \text{Ker } \chi_f(f) \stackrel{\text{N3G}}{=} \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(f - \lambda_i)^{r_i}$$

Wir haben $\text{Ker}(f - \lambda_i)^{r_i} \leq H(\lambda_i)$. Dank (0) folgt Gleichheit (L3M).

Sei $s_i := \dim_K H(\lambda_i)$. Auf $H(\lambda_i)$ ist $f - \lambda_i$ nilpotent, mit char. Polynom $(X - \lambda_i)^{s_i}$, siehe P3K. Auf der direkten Summe $V = \bigoplus_{i=1}^k H(\lambda_i)$ gilt also $\chi_f = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{s_i}$. Polynomvergleich zeigt $s_i = r_i$ für alle i . QED

Slogan: Es gibt nicht immer genug Eigenvektoren, aber es gibt immer genug Hauptvektoren! Die direkte Summe der Haupträume ist ganz V .

Satz Q1E: die Hauptraumzerlegung

(2) Sei \mathcal{A}_i eine Basis von $\text{Hau}(f, \lambda_i)$. Zusammengesetzt erhalten wir eine Basis \mathcal{A} von V . Die Abbildung f wird dann dargestellt durch

$$A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_k \end{bmatrix}.$$

Hier gilt $A_i = \lambda_i E_{r_i} + N_i$ mit einer nilpotenten Matrix $N_i \in K^{r_i \times r_i}$. Somit erhalten wir die Zerlegung $A = D + N$ mit $D, N \in K^{n \times n}$, wobei D diagonal und N nilpotent ist und zudem $DN = ND$ gilt.

(3) Wenn wir für jeden Hauptraum eine Jordan-Basis wählen, so wird f dargestellt als Diagonalmatrix von Jordan-Blöcken:

$$A_i = \text{diag}(J(r_{i,1}, \lambda_i), J(r_{i,2}, \lambda_i), \dots, J(r_{i,k_i}, \lambda_i))$$

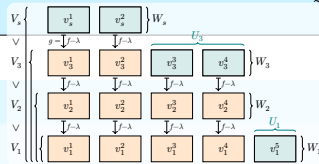
mit $r_{i,1} \geq r_{i,2} \geq \dots \geq r_{i,k_i}$ und $r_i = r_{i,1} + r_{i,2} + \dots + r_{i,k_i}$.

Die Hauptraumzerlegung folgt aus der Kernzerlegung als wichtiger Spezialfall und schöne Anwendung. Daher habe ich die Kernzerlegung schon früh in den Mittelpunkt gerückt. Anfangs wirkte sie vermutlich noch abstrakt, und das ist sie ja auch. Nun erkennen Sie, wie sich unsere alte Weisheit auch hier einmal mehr bewährt: Abstrakt heißt nicht etwa fern der Anwendung, sondern im Gegenteil vielseitig anwendbar!

😊 Abstraktion hilft: *Prove once, apply everywhere!*

Dank der Hauptraumzerlegung können wir uns im Folgenden auf einen einzelnen Hauptraum $H(\lambda)$ konzentrieren. Insbesondere wollen wir die Aussage (3) schärfen: Wir können in $H(\lambda)$ eine Jordan-Basis wählen. Genau das ist die Aussage des folgenden Satzes: Wir kennen schon das Verfahren, wir müssen nur noch sicherstellen, dass es immer gelingt.

😊 Anwendungen zeigen – in diesem Kapitel und weit darüber hinaus: Die (schöne!) Theorie ordnet und vereinfacht die (komplexe!) Praxis. Eine allgemeine Theorie ist manchmal (gar oft?) leichter zu verstehen als ihre zahlreichen Spezialfälle. Beide Sichtweisen ergänzen sich.



Satz Q1F: Kernfiltrierung jedes Hauptraums

Sei $f \in \text{End}_K(V)$ und $\lambda \in K$ und $g = f - \lambda \text{id}_V$.

(0) Für die Haupträume $V_i := \text{Ker } g^i$ der Stufe $i = 0, 1, 2, \dots$ gilt

$$\{0\} = V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \dots \leq V \text{ mit } g(V_{i+1}) \leq V_i \text{ und } V_{i+1} = g^{-1}(V_i),$$

somit $g(V_{i+1} \setminus V_i) \subseteq V_i \setminus V_{i-1}$. Fortan sei $i \geq 1$ und $V_{i+1} = V_i \oplus W_{i+1}$.

(1) Die Einschränkung von $g : V \rightarrow V$ zu $g_{i+1} : W_{i+1} \rightarrow V_i$ ist injektiv.

(2) Ihr Bild erfüllt $g(W_{i+1}) \cap V_{i-1} = \{0\}$. Wir erhalten die Injektion

$$\bar{g}_{i+1} : W_{i+1} \hookrightarrow V_i/V_{i-1} : w \mapsto g(w) + V_{i-1}.$$

Mit $V_i = V_{i-1} \oplus W_i$ ist die Komposition $W_{i+1} \hookrightarrow V_i/V_{i-1} \cong W_i$ injektiv.

Beweis: (0) Es gilt: $v \in V_i \iff 0 = g^i(v) = g^{i-1}(g(v)) \iff g(v) \in V_{i-1}$.

(1) Wir haben $\text{Ker}(g) = V_1 \leq V_i$, also $\text{Ker}(g) \cap W_{i+1} \leq V_i \cap W_{i+1} = \{0\}$.

(2) Für $w \in W_{i+1} \setminus \{0\}$ gilt $w \notin V_i$, demnach $0 \neq g^i(w) = g^{i-1}(g(w))$.

Das heißt $g(w) \notin V_{i-1}$. Also ist auch $\bar{g}_{i+1} : W_{i+1} \rightarrow V_i/V_{i-1}$ injektiv. QED

Für die Dimensionen $k_i := \dim V_i$ folgt $0 = k_0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots$ dank (0).

Sei zudem $k_1 = \dim V_1 = \dim W_1$ endlich. Per Induktion über $i \in \mathbb{N}$

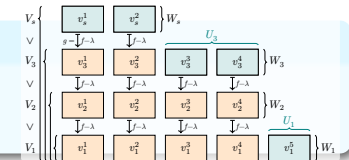
folgt aus (2), dass auch $\dim W_i \leq k_1$ und $\dim V_i \leq ik_1$ endlich sind.

Für die Zuwächse $z_i = k_i - k_{i-1} = \dim W_i$ folgt $z_1 \geq z_2 \geq z_3 \geq \dots$

Satz Q1F: Kernfiltrierung jedes Hauptraums

(3) Unser Hauptraum-Sudoku 1–5 gelingt:

Jeder Hauptraum erlaubt eine Jordan-Basis.



Beweis: Polynom 1 und Zerfällung 2 sind klar. Schritt 3 gelingt dank $V_0 \leq V_1 \leq \dots \leq V$ und Satz Q1E. Abkürzung 4 ist korrekt dank 5 und 6.

Wir klären nun Schritt 5: Dank (2) ist in V_i die Summe $V_{i-1} \oplus g(W_{i+1})$ direkt. Wir können also ergänzen zu $V_i = V_{i-1} \oplus g(W_{i+1}) \oplus U_i$. Dank Injektivität (1) erhalten wir durch Runterrieseln und Ergänzen in jeder Zeile W_s, \dots, W_1 eine Basis, also insgesamt eine Basis des Hauptraums $\text{Hau}(f, \lambda) = V_s = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$. In jeder Spalte steht nach Konstruktion eine Hauptvektorkette. (Schritt 6 folgt aus dem vorigen Satz Q1E.) QED

Satz Q1c: Eindeutigkeit der Jordan-Form

Vorgelegt seien in $K^{n \times n}$ zwei Jordan-Matrizen

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_p \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_q \end{bmatrix}$$

mit Jordan-Blöcken $B_i = J(\ell_i, \lambda_i)$ und $C_j = J(m_j, \mu_j)$ für alle i und j .

(1) Sind B und C ähnlich, also $C = T^{-1}BT$ für ein $T \in \text{GL}_n K$, so gilt $p = q$ und nach Umordnung $B_i = C_i$ für alle $i = 1, \dots, p$.

(2) Die Dimensionen $(\lambda, s) \mapsto k_s(\lambda) := \dim \text{Ker}(B - \lambda)^s$ sind invariant unter Konjugation, und diese bestimmen bereits die Jordan-Form.

(3) Genauer: Die Anzahl $n(B; \ell, \lambda)$ der Blöcke $J(\ell, \lambda)$ der Matrix B ist

$$n(B; \ell, \lambda) = 2k_\ell(\lambda) - k_{\ell-1}(\lambda) - k_{\ell+1}(\lambda)$$

😊 Für alle jordanisierbaren Matrizen, also mit zerfallendem Polynom, haben wir damit das Klassifikationsproblem bis auf Ähnlichkeit gelöst. Über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper wie \mathbb{C} ist jede Matrix jordanisierbar und das Klassifikationsproblem somit gelöst.

Beweis: (3) Jeder Jordan-Block $J(\ell, \lambda)$ der Größe $\ell \times \ell$ entspricht einer Hauptvektorkette der Länge ℓ , und umgekehrt. Zur Matrix B definieren wir $k_\ell := \dim \text{Ker}(B - \lambda)^\ell$ und setzen $z_\ell := k_\ell - k_{\ell-1}$ wie in Satz Q1F.

Die Zahl $z_\ell \in \mathbb{N}$ ist die Breite der Zeile ℓ im Young-Diagramm (Q105) zum Hauptvektorraum $\text{Hau}(B, \lambda)$. Dies ist zugleich die Anzahl der Hauptvektorketten der Länge $\geq \ell$. Somit ist $n(B; \ell, \lambda) = z_\ell - z_{\ell+1}$ die gesuchte Anzahl der Hauptvektorketten der Länge genau ℓ .

(2) Aus $C = T^{-1}BT$ folgt $(C - \lambda)^\ell = (T^{-1}BT - \lambda)^\ell = T^{-1}(B - \lambda)^\ell T$. Wir erhalten den Isomorphismus $(T, T^{-1}) : \text{Ker}(C - \lambda)^\ell \cong \text{Ker}(B - \lambda)^\ell$, und somit $\dim \text{Ker}(C - \lambda)^\ell = \dim \text{Ker}(B - \lambda)^\ell$ für alle $\lambda \in K$ und $\ell \in \mathbb{N}$.

(1) Dank dieser Rechnung folgt $n(C; \ell, \lambda) = n(B; \ell, \lambda)$. QED

Wir konzentrieren uns auf endliche Dimension $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$.
Doch auch der unendlich-dimensionale Fall ist ebenso natürlich:

Beispiel Q1H: eine unendliche Hauptvektorkette

Sei $\mathbb{K} \geq \mathbb{Q}$. Die Ableitung $\partial : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ hat als unendliche Jordan-Basis $(v_k = X^k/k!)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $0 \xleftarrow{\partial} v_0 \xleftarrow{\partial} v_1 \xleftarrow{\partial} v_2 \xleftarrow{\partial} \dots$

Definition Q1I: un/endliche Jordan-Basis

Sei $g : V \rightarrow V$ linear über dem Körper K . Wir nennen g **lokal nilpotent**, falls zu jedem Vektor $v \in V$ ein Exponent $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $g^k(v) = 0$.

Eine **Jordan-Basis** \mathcal{J} von V zu g ist eine Basis $\mathcal{J} \subseteq V$, für die gilt:

- 1 Für jeden Basisvektor $v \in \mathcal{J}$ gilt entweder $g(v) = 0$ oder $g(v) \in \mathcal{J}$.
- 2 Zu jedem $v \in \mathcal{J}$ existiert höchstens ein Urbild $u \in \mathcal{J}$ mit $g(u) = v$.

Allgemein sei $f : V \rightarrow V$ linear über K . Eine **Jordan-Basis** $\mathcal{J} = \bigsqcup_{\lambda \in K} \mathcal{J}_\lambda$ von V zu f besteht zu jedem Skalar $\lambda \in K$ aus einer Jordan-Basis \mathcal{J}_λ des Hauptraums $\text{Hau}(f, \lambda)$ zu der darauf nilpotenten Abbildung $g = f - \lambda$.

Lemma Q1J: un/endliches Hauptraum-Sudoku

Ist $g : V \rightarrow V$ lokal nilpotent, so existiert eine Jordan-Basis \mathcal{J} von V zu g .

Beweis: Wie zuvor betrachten wir $V_k := \text{Ker } g^k$ für die Stufen $k \in \mathbb{N}$. In V_1 liegt der Bildraum $B_k := g^{k-1}(V_k)$. Wir haben $g(V_{k+1}) \leq V_k$, also

$$B_{k+1} = g^k(V_{k+1}) = g^{k-1}(g(V_{k+1})) \leq g^{k-1}(V_k) = B_k.$$

Hierzu wählen wir ein Komplement $C_k \leq B_k$ so, dass $B_k = B_{k+1} \oplus C_k$. Wir wählen Urbilder $(v_k^i)_{i \in I_k}$ in V_k , sodass $(g^{k-1}(v_k^i))_{i \in I_k}$ eine Basis von C_k ist. Dies sind die Startvektoren der Hauptvektorketten der Länge k .

Schließlich bleibt $B_\infty := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k \leq V_1$. Wir wählen eine Basis von B_∞ , und über jedem Basiselement eine Hauptvektorkette unendlicher Länge.

Alle Längen zusammenfassend erhalten wir unsere Jordan-Basis von V , denn wir haben eine Basis in jeder Schicht V_i/V_{i-1} für $i \in \mathbb{N}$. QED

Übung: Vergleichen Sie diese Methode mit unserem Hauptraum-Sudoku.

Satz Q1K: lokales Minimalpolynom und Hauptraumzerlegung

Sei $f : V \rightarrow V$ linear über K . Für jeden Vektor $v \in V$ sind äquivalent:

- 1 Unser Vektor v ist eine Summe von Hauptvektoren:
 $v = v_1 + \dots + v_n$ mit $(f - \lambda_i)^{s_i}(v_i) = 0$ und $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}^! \subseteq K$.
- 2 Das Minimalpolynom $\mu_f^v \in K[X]$ zerfällt über K :
 $\mu_f^v \mid P = (X - \lambda_1)^{s_1} \dots (X - \lambda_n)^{s_n}$ mit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}^! \subseteq K$.

Beweis: „ \Rightarrow “: P annulliert f in v_1, \dots, v_n , also in v . Dank N3F folgt $\mu_f^v \mid P$.
„ \Leftarrow “: Das folgt aus der Kernzerlegung N3G für $\text{Ker } P(f) \ni v$. QED

Genau dann gilt die Hauptraumzerlegung $V = \bigoplus_{\lambda \in K} \text{Hau}(f, \lambda)$, wenn das MiPo $\mu_f^v \in K[X]$ über K zerfällt für jeden Vektor $v \in V$.

Beweis: „ \Rightarrow “: Für jeden Vektor $v \in V$ gilt die Aussage (1), also auch (2).
„ \Leftarrow “: Die Summe $H := \sum_{\lambda \in K} \text{Hau}(f, \lambda) \leq V$ ist direkt dank Satz Q1E.
Für jeden Vektor $v \in V$ gilt Aussage (2), also auch (1), somit $V \subseteq H$. QED

Als krönenden Abschluss fassen wir unsere Erkenntnisse zusammen. Auch der unendlich-dimensionale Fall wird wieder elegant gelöst durch das lokale Minimalpolynom, das uns überall gute Dienste leistet:

Satz Q1K: MiPo-Kriterium für Diagonalisierung und Jordanisierung

Sei $f : V \rightarrow V$ linear über dem Körper K .

(D) Diagonalisierbar: Genau dann existiert eine Eigenbasis \mathcal{B} von V zu f , wenn jedes lokale Minimalpolynom μ_f^v für $v \in V$ über K einfach zerfällt.

(J) Jordanisierbar: Genau dann existiert eine Jordan-Basis \mathcal{J} von V zu f , wenn jedes lokale Minimalpolynom μ_f^v für $v \in V$ über K zerfällt.

Im Falle $\dim_K(V) < \infty$ genügt hierzu das globale Minimalpolynom μ_f .

Beweis: Die Äquivalenz (D) ist das bewährte MiPo-Kriterium N3H: Es garantiert $V = \bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$, und so erhalten wir eine Eigenbasis. Die Äquivalenz (J) zeigen wir ganz genauso: Es gilt $V = \bigoplus_{\lambda \in K} \text{Hau}(f, \lambda)$, wie oben erklärt, und daraus konstruieren wir eine Jordan-Basis. QED

Erstes Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

Q125

Aufgabe: Jordanisieren Sie über \mathbb{C} die folgende Matrix. Was ist gefragt?
 Kurzfassung: die Jordan-Form. Langfassung: zudem eine Jordan-Basis.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 & 1 & -6 \\ -4 & 10 & -4 & 1 & -8 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$$

Lösung: (0) Wir bestimmen das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{C}[X]_5^1$.
 Klausurtyp: $\chi_A = (X - \lambda)^5$. Dank $\text{tr } A = 10$ finden wir $\chi_A = (X - 2)^5$.
 (1) Wir bestimmen den Eigenraum zu $\lambda = 2$. Hierzu sei $B = A - 2I$:

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 & 1 & -6 \\ -4 & 8 & -4 & 1 & -8 \\ -3 & 6 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Ker } B = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

Erstes Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

Q127

Wenn nur die **Jordan-Form** gefragt ist, so können wir bereits antworten.
 Es existiert ein Basiswechsel $T \in \text{GL}_5(\mathbb{C})$ zu folgender Jordan-Form:

$$\exists T \in \text{GL}_5 \mathbb{C} : T^{-1}AT = J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Wie finden wir den Basiswechsel T ? Wir konstruieren eine Jordan-Basis!
 Zu $V_1 < V_2$ wählen wir ein Komplement $W_2 = U_2 = \langle v_2^1, v_2^2 \rangle_{\mathbb{C}}$, etwa

$$v_2^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B} v_1^1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B} v_1^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

⚠ Es gibt viele Wahlen: Komplemente und Basen sind nicht eindeutig!

Erstes Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

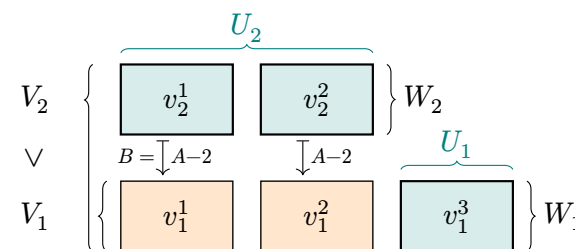
Q126

☺ An dieser Stelle entscheidet sich bereits die Diagonalisierbarkeit:
 Zum Eigenwert $\lambda = 2$ ist die geom. Vielfachheit 3, erreicht also nicht die
 alg. Vielfachheit 5. Unsere Matrix A ist demnach nicht diagonalisierbar.

(2) Wir filtrieren den Hauptraum durch $V_i = \text{Ker } B^i$ mit $k_i := \dim V_i$:

$$\text{Ker } B =: V_1 \leq \text{Ker } B^2 =: V_2 \leq \text{Ker } B^3 =: V_3 \leq \dots$$

Wir haben zuvor in (1) bereits $\text{Ker } B = \langle \dots \rangle_{\mathbb{C}}$ und $k_1 = 3$ bestimmt.
 Wir berechnen B^2 . Klausurtyp: $B^2 = 0$. Wir finden so $\text{Ker } B^2 = \mathbb{C}^5$.
 Aus den Dimensionen $k = (3, 5)$ lesen wir die Form des Hauptraums:



Erstes Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

Q128

Im Hauptraum-Sudoku (hier für $s = 2$) ist damit in der obersten Schicht
 $W_2 = U_2 = \langle v_2^1, v_2^2 \rangle_{\mathbb{C}}$ eine Basis gewählt. Diese lassen wir runterrieseln
 zu $g(W_2) = \langle v_1^1, v_1^2 \rangle_{\mathbb{C}} \leq V_1$. In der Schicht $W_1 = V_1$ ergänzen wir, etwa

$$v_1^3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

So erhalten wir unsere Jordan-Basis $\mathcal{J} = (v_1^1, v_2^1, v_1^2, v_2^2, v_1^3)$.

☹ Was bedeutet dieses Ergebnis? Wie können wir wissen, ob wir richtig
 gerechnet haben? Was war eigentlich das Ziel? *Know your definitions!*

⚠ Machen Sie die Probe! Gilt $T^{-1}AT = J$? Wenigstens $AT = TJ$?
 Die Inversion von T zu T^{-1} prüft die Basiseigenschaft, ist aber mühsam.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 & 1 & -6 \\ -4 & 10 & -4 & 1 & -8 \\ -3 & 6 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{?!}{=} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Zweites Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

Q129

Aufgabe: Jordanisieren Sie über \mathbb{C} die folgende Matrix. Was ist gefragt?
 Kurzfassung: die Jordan-Form. Langfassung: zudem eine Jordan-Basis.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -6 & -6 & -5 \\ -1 & 0 & -1 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$$

Klausurtyp: Für $B = A - 3I$ gilt $\dim \text{Ker } B = 2$ und $\dim \text{Ker } B^2 = 4$.

☺ An dieser Stelle entscheidet sich bereits die Diagonalisierbarkeit:
 Zum Eigenwert $\lambda = 3$ ist die geom. Vielfachheit 2, erreicht also nicht die
 alg. Vielfachheit ≥ 4 . Unsere Matrix A ist demnach nicht diagonalisierbar.

Lösung: (0) Wir bestimmen das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{C}[X]_5^1$.
 Dank Klausurtyp gilt $\chi_A = (X - 3)^4(X - \lambda)$. Mit $\text{tr } A = 15$ folgt $\lambda = 3$.

$$\chi_A = (X - 3)^5$$

Zweites Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

Q130

☺ Aus den Dimensionen lesen wir bereits die Form des Hauptraums!
 Wenn nur die **Jordan-Form** gefragt ist, so können wir bereits antworten:
 Es existiert ein Basiswechsel $T \in \text{GL}_5(\mathbb{C})$ zu folgender Jordan-Form.

$$\begin{array}{l} V_3 \\ \vee \\ V_2 \\ \vee \\ V_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\boxed{v_3^1}}^{U_3} \\ \boxed{v_2^1} \\ \boxed{v_1^1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} W_2 \\ \\ W_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \overbrace{\boxed{v_2^2} \quad \boxed{v_3^2}}^{U_2} \\ \\ \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} W_2 \\ \\ W_1 \end{array}$$

$\exists T \in \text{GL}_5 \mathbb{C} : T^{-1}AT = J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Für die Kurzfassung bis zur Jordan-Form genügt das. Langfassung:
 Wie finden wir den Basiswechsel T ? Wir konstruieren eine Jordan-Basis!

Zweites Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

Q131

Wir berechnen B^2 . **Klausurtyp:** Wir geben B^2 für Sie explizit an:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -6 & -6 & -5 \\ -1 & 0 & -4 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eine mögliche Jordan-Basis entsteht durch folgende Hauptvektorketten:

$$\begin{array}{l} \text{erste Kette: } v_3^1 = e_3 \xrightarrow{B} v_2^1 = Be_3 \xrightarrow{B} v_1^1 = B^2e_3 \xrightarrow{B} 0 \\ \text{zweite Kette: } v_2^2 = e_1 \xrightarrow{B} v_1^2 = Be_1 \xrightarrow{B} 0 \end{array}$$

Für den Startvektor $v_3^1 \in \mathbb{C}^5$ können wir *fast jeden* Vektor wählen. Wenn
 Sie zufällig (stetig verteilt) einen Vektor rausgreifen, ist er hier mit Wkt
 100% ein Hauptvektor. 3. Stufe: Wir müssen nur $\text{Ker } B^2 \cong \mathbb{C}^4$ ausweichen!
 Wir erhalten dann $v_2^1 \in V_2 \setminus V_1$. Dies ergänzen wir durch $v_2^2 \in V_2 \setminus V_1$.
 Beide müssen unabhängig in V_2/V_1 sein. Im Zweifel hilft Q1c.

Zweites Zahlenbeispiel zur Jordanisierung

Q132

⚠ Machen Sie die Probe! Gilt $T^{-1}AT = J$? Wenigstens $AT = TJ$?
 Die Inversion von T zu T^{-1} prüft die Basiseigenschaft, ist aber mühsam.

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 11 & 0 & 15 & 17 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -6 & -6 & -5 \\ -1 & 0 & -1 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -6 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{?!}{=} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

☺ Die Probe setzt das Ergebnis in die Definition ein: Wir suchen eine
 jordanisierende Basis, also prüfen wir am Ende genau diese Eigenschaft!

Lohnt sich die Probe? Ja, immer wenn Ihnen das Ergebnis wichtig ist.
 Daher ist es unerlässlich das Ziel / die Definition genau zu kennen!

In einer Klausur ist die Zeit meist knapp, daher wird die abschließende
 Probe dort selten gemacht. Das ist ok, schlimm ist jedoch: Wer nur alte
 Klausuren lernt, erkennt seine realen Möglichkeiten gar nicht. Zur Probe
 liegt alles vor Ihnen, die Rechnung ist leicht, aber länglich. Daher geben
 wir nach Möglichkeit auch freundliche Hinweise, damit Sie zumindest
 Teile Ihrer Rechnung prüfen und die Plausibilität testen können.

Beispiele: Welche Jordan-Formen sind möglich?

Q133

Aufgabe: Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A \in \mathbb{R}[X]_n^1$. Welche Jordan-Normalformen sind möglich?

- (1) $\chi_A = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$ sowie (2) $\chi_A = (X - 1)(X - 2)^2(X - 3)$,
 (3) $\chi_A = (X - 2)^2(X - 3)^2$, (4) $\chi_A = (X - 2)^3(X - 3)$, (5) $\chi_A = (X - \lambda)^4$

Lösung: (1) Die Matrix A ist diagonalisierbar (P2M). Durch die Wahl einer Eigenbasis (v_1, v_2, v_3) von \mathbb{R}^3 zu A erhalten wir $T \in GL_3 \mathbb{R}$ mit

$$A \sim T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) Die Matrix A ist eventuell diagonalisierbar... oder sie ist es nicht:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

☺ Diese beiden Jordan-Formen sind die einzigen Möglichkeiten (Q1B).

Beispiele: Welche Jordan-Formen sind möglich?

Q134
Erläuterung

☺ Der einfachste Fall sind n paarweise verschiedene Eigenwerte. Hier greift Satz P2M und garantiert uns die Diagonalisierbarkeit:

$$V = \text{Eig}(f, \lambda_1) \oplus \text{Eig}(f, \lambda_2) \oplus \dots \oplus \text{Eig}(f, \lambda_n).$$

☹ Leider ist nicht jede Matrix so einfach zu durchschauen, es können mehrfache Eigenwerte auftreten. Dann steht die Diagonalisierbarkeit in Frage (P3M): Erreicht die geometrische Vielfachheit die algebraische?

☺ Dank der Jordan-Normalform (Q1B) können wir alle möglichen Fälle einfach und übersichtlich darstellen, egal ob diagonalisierbar oder nicht. Das ist eine enorme Vereinfachung und sehr nützliche Struktur.

☺ Im vorliegenden Beispiel (2) gibt es nur genau zwei Möglichkeiten: Dank Satz Q1B ist jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A = (X - 1)(X - 2)^2(X - 3)$ entweder ähnlich zur Diagonalmatrix links oder ähnlich zur hier gezeigten Jordan-Matrix rechts.

Auch in den folgenden Beispielen gibt es jeweils nur endlich viele Möglichkeiten, und wir können diese leicht vollständig aufzählen.

Beispiele: Welche Jordan-Formen sind möglich?

Q135

(3) Bei $\chi_A = (X - 2)^2(X - 3)^2$ sind vier Jordan-Formen möglich:

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(4) Bei $\chi_A = (X - 2)^3(X - 3)$ sind genau drei Jordan-Formen möglich:

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(5) Bei $\chi_A = (X - \lambda)^4$ sind genau fünf Jordan-Formen möglich:

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Beispiele: Welche Jordan-Formen sind möglich?

Q136
Erläuterung

⚠ Die Reihenfolge der Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ ist dabei beliebig; in (\mathbb{R}, \leq) können wir sie zum Beispiel der Größe nach anordnen. Im Allgemeinen jedoch gibt es hierzu keine sinnvolle Konvention.

Die Konstruktion aller möglichen Jordan-Matrizen ist denkbar einfach. Dank Satz Q1B haben wir neben der Existenz auch die Eindeutigkeit!

Zu jedem Eigenwert $\lambda \in K$ mit Vielfachheit $r \geq 1$ überlegen wir uns, wie wir die gegebene Dimension r in Jordan-Blöcke aufteilen können. Das entspricht den Zahlpartitionen, wie anschließend in Q1L erklärt.

Zu jedem Eigenwert sortieren wir die Jordan-Blöcke nach ihrer Größe, und zwar absteigend wie im Young-Diagramm. Diese übliche Konvention ist zwar etwas willkürlich, aber doch sehr nützlich und übersichtlich.

Übung: Umordnung der Jordan-Blöcke führt zu einer ähnlichen Matrix.

☺ Da wir aus jeder Ähnlichkeitsklasse genau einen Repräsentanten auswählen wollen, verhelfen uns die hier erklärten Konventionen zur (weitgehenden) Eindeutigkeit, wie in den Beispielen (3-5) zu sehen.

Aufgabe: Gegeben sei eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A = (X - \lambda)^n$. Wie viele Jordan-Formen gibt es hierzu?

Lösung: Zur systematischen Aufzählung zerlegen wir $n \in \mathbb{N}$ als Summe $n = n_1 + \dots + n_k$ mit $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Die Reihenfolge der Jordan-Blöcke ist beliebig, also können wir die Summanden absteigend ordnen:

Definition Q1L: (ungeordnete) Zahlpartition

Eine **Partition** der Zahl $n \in \mathbb{N}$ als Summe von $k \in \mathbb{N}$ (ungeordneten, umsortierbaren) Summanden ist ein Tupel $(n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ mit

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k \quad \text{und} \quad n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 1.$$

Ihre Menge bezeichnen wir mit $P(n, k)$ und $P(n) = \bigsqcup_{k=0}^n P(n, k)$, ihre Anzahl mit $p(n, k) = \#P(n, k)$ und $p(n) = \#P(n) = \sum_{k=0}^n p(n, k)$.

So zählt $P(n, k)$ die Young-Diagramme mit n Kästchen und k Spalten. Mit dieser hilfreichen Notation können wir auch für große n die Anzahl der möglichen Jordan-Formen übersichtlich darstellen und berechnen.

Partitionen spielen in Kombinatorik und Informatik eine wichtige Rolle. Auch in der Linearen Algebra treten sie ganz natürlich auf, wie hier bei der Aufzählung von Jordan-Normalformen. Zur Betonung sagen wir **Zahlpartition** in Q1L zur Unterscheidung von **Mengenpartition** in H2M.

Beispiele: Für $n = 2, 3, 4, 5$ erhalten wir die folgenden Zahlpartitionen:

$$\begin{aligned} n = 2 &= 1 + 1 \\ n = 3 &= 2 + 1 = 1 + 1 + 1 \\ n = 4 &= 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 \\ n = 5 &= 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

Im letzten Beispiel finden wir also $P(5, 0) = \emptyset$, $P(5, 1) = \{(5)\}$, $P(5, 2) = \{(4, 1), (3, 2)\}$, $P(5, 3) = \{(3, 1, 1), (2, 2, 1)\}$, $P(5, 4) = \{(2, 1, 1, 1)\}$, $P(5, 5) = \{(1, 1, 1, 1, 1)\}$.

Wir suchen nun eine möglichst effiziente Methode, um die Anzahlen $p(n, k)$ und auch die Mengen $P(n, k)$ systematisch zu konstruieren.

Für die ersten Partitionszahlen erhalten wir somit folgende Werte:

n	$p(n)$	$p(n, k)$	$k = 1$	2	3	4	5	6	...
0	1	1	0	0	0	0	0	0	...
1	1	0	1	0	0	0	0	0	...
2	2	0	1	1	0	0	0	0	...
3	3	0	1	1	1	0	0	0	...
4	5	0	1	2	1	1	0	0	...
5	7	0	1	2	2	1	1	0	...
6	11	0	1	3	3	2	1	1	...

Hierbei gilt $P(n) = \bigsqcup_{k=0}^n P(n, k)$, also $p(n) = \#P(n) = \sum_{k=0}^n p(n, k)$. Für $k = n$ gilt $P(n, n) = \{(1, 1, \dots, 1)\}$, und somit $p(n, n) = 1$. Für $k > n$ gilt $P(n, k) = \emptyset$, und somit $p(n, k) = 0$.

Bemerkung: Für alle k mit $n/2 \leq k \leq n$ gilt zudem $p(n, k) = p(n - k)$: Wenn wir zunächst jeden Summanden mit 1 belegen, so bleibt noch $n - k \leq k$ zu verteilen. Hierfür gibt es genau $p(n - k)$ Möglichkeiten.

Wie berechnen wir die Partitionszahlen $p(n, k)$ und $p(n)$ geschickt? Eine Möglichkeit ist die explizite Konstruktion von $P(n, k)$. Effizienter:

Satz Q1M: Rekursionsformel für Partitionszahlen

- (0) Für $k = 0$ gilt $p(0, 0) = 1$ sowie $p(n, 0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
- (1) Für alle $1 \leq k \leq n$ gilt $p(n, k) = p(n - 1, k - 1) + p(n - k, k)$

Aufgabe: Beweisen Sie die Rekursionsformeln des Satzes.

Lösung: (0) Nach Definition Q1L gilt $P(0, 0) = \{()\}$ und $P(n, 0) = \{\}$.

(1) Wir zerlegen $P(n, k) = P_1(n, k) \sqcup P_2(n, k)$ in disjunkte Teilmengen

- $P_1(n, k) := \{(n_1, \dots, n_k) \in P(n, k) \mid n_k = 1\} \cong P(n - 1, k - 1)$, vermöge der Bijektion $(n_1, \dots, n_{k-1}, 1) \mapsto (n_1, \dots, n_{k-1})$, und
- $P_2(n, k) := \{(n_1, \dots, n_k) \in P(n, k) \mid n_k \geq 2\} \cong P(n - k, k)$, vermöge der Bijektion $(n_1, \dots, n_k) \mapsto (n_1 - 1, \dots, n_k - 1)$.

Übung: Füllen Sie damit die Tabelle für $0 \leq k \leq n \leq 10$ aus! Zur Probe:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	...

Aufgabe: Bestimmen Sie das ChaPo und das MiPo der Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lösung: Das char. Polynom ist $\chi_A = \chi_B = \chi_C = (X - 2)^3(X - 3)^2$.
Das Minimalpolynom codiert die maximale Größe der Jordan-Blöcke:

$$\begin{aligned} \mu_A &= (X - 2)^1(X - 3)^1, \\ \mu_B &= (X - 2)^2(X - 3)^2, \\ \mu_C &= (X - 2)^3(X - 3)^1. \end{aligned}$$

Aufgabe: Setzen Sie A, B, C in $(X - 2)^k(X - 3)^\ell$ ein und bestimmen Sie die minimalen Exponenten k und ℓ , für die die Matrix annulliert wird.

Aufgabe: Formulieren Sie hierzu eine allgemeine, einfache Merkregel: Wie extrahieren Sie das Minimalpolynom aus der Jordan-Form?

Satz Q1n: charakteristisches Polynom und Minimalpolynom

Sei $f: V \rightarrow V$ linear über dem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$.

(1) Angenommen, χ_f zerfällt in Linearfaktoren über K . Dann gilt

$$\begin{aligned} \chi_f &= (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_k)^{r_k} \quad \text{mit } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j \text{ und} \\ \mu_f &= (X - \lambda_1)^{s_1} \dots (X - \lambda_k)^{s_k} \quad \text{mit } 1 \leq s_i \leq r_i \text{ für alle } i. \end{aligned}$$

(2) Der Exponent s_i ist die maximale Größe aller Jordan-Blöcke zu λ_i . Der Exponent r_i ist die Summe der Größen aller Jordan-Blöcke zu λ_i .

(3) Genau dann ist der Endomorphismus f über K diagonalisierbar, wenn sein Minimalpolynom $\mu_f \in K[X]$ über K einfach zerfällt.

Beweis: Diese Zusammenfassung ist eine unmittelbare Anwendung der zuvor erarbeiteten Sätze (1) P3J und (2) N3F und (3) P3M. QED

Übung: Führen Sie zur Wiederholung die Aussage (2) sorgfältig aus: Warum hat das Minimalpolynom genau diese schöne einfache Form?

Aufgabe: Welche Jordan-Formen sind möglich mit charakteristischem Polynom $\chi_A = (X - \lambda)^5$ und Minimalpolynom $\mu_A = (X - \lambda)^s$?

Lösung: (1) Im Falle $\mu_A = (X - \lambda)^1$ ist A diagonalisierbar:

Young-Diagramm $A \sim T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

In diesem Fall ist A selbst diagonal, denn $A = T(\lambda I)T^{-1} = \lambda I$.

(2) Im Falle $\mu_A = (X - \lambda)^2$ gibt es genau zwei Möglichkeiten:

Young-Diagramm $A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ oder $A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

(3) Im Falle $\mu_A = (X - \lambda)^3$ gibt es genau zwei Möglichkeiten:

Young-Diagramm $A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ oder $A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

(4) Im Falle $\mu_A = (X - \lambda)^4$ bzw. $\mu_A = (X - \lambda)^5$ bleibt nur

Young-Diagramm $A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ bzw. $A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

☺ Das Minimalpolynom bündelt nützliche Informationen zur Größe der Jordan-Blöcke und damit insbesondere zur Diagonalisierbarkeit.

Bemerkung Q10: Potenzen der Jordan-Form $J = D + N$

Die Jordan-Form $T^{-1}AT = J = D + N$ ist Summe der Diagonalmatrix D und der nilpotenten Matrix N , und beide kommutieren, also $DN = ND$. Angenommen $N^s = 0$. Dank binomischem Lehrsatz H2κ gilt dann:

$$J^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^{s-1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k$$

Aus $A = TJT^{-1}$ folgt dann $A^n = T J^n T^{-1}$ für jeden Exponenten $n \in \mathbb{N}$. Dies ergibt eine geschlossene Formel für jeden Koeffizienten von A^n .

Beweis: Jeder Jordan-Block operiert auf seinem zyklischen Unterraum. Dank der Zerlegung als direkte Summe kommutieren sie untereinander. In jedem einzelnen Jordan-Block $D + N$ gilt $D = \lambda I$, also $DN = ND$. Induktion über n : Für $n = 0$ gilt $A^0 = I$ und $TJ^0T^{-1} = TIT^{-1} = I$. Für $n \geq 1$ gilt $A^n = A \cdot A^{n-1} = TJT^{-1} \cdot T J^{n-1} T^{-1} = T J^n T^{-1}$. QED

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} & \binom{n}{4}\lambda^{n-4} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} & 0 \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^n & n\mu^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^n \end{bmatrix}$$

Bemerkung Q1P: Spezialfall $A = \lambda I + N$

Angenommen, für $A \in K^{r \times r}$ gilt $\mu_A = (X - \lambda)^r$. Dann folgt $A = \lambda I + N$ mit $N^s = 0$ für ein $s \in \{1, \dots, r\}$. Dank binomischem Lehrsatz H2κ gilt:

$$A^n = (\lambda I + N)^n = \sum_{k=0}^{s-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k$$

Dies ergibt eine geschlossene Formel für jeden Koeffizienten von A^n .

Beweis: Aus der Jordan-Form $T^{-1}AT = J = \lambda I + M$ mit $M^s = 0$ folgt $A = TJT^{-1} = \lambda I + N$ mit $N = TMT^{-1}$, also ebenso $N^s = 0$. QED

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 14 & 10 & -18 \\ 11 & 9 & -17 \end{bmatrix}$$

Aufgabe: Für die obige Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gilt $\mu_A = (X - \lambda)^3$. Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für jeden Koeffizienten von $A^n = (a_{ij}^{(n)})$.

Standardverfahren: Bestimme die Jordan-Form $T^{-1}AT = J = D + N$. Rücktransformation ergibt $A^n = T J^n T^{-1} = T [\sum_{k=0}^{s-1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k] T^{-1}$.

- ☺ Allgemein und gelingt immer: Wir berechnen J sowie T und T^{-1} .
- ☹ Die Berechnung ist aufwändig. Geht es vielleicht auch kürzer?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 14 & 10 & -18 \\ 11 & 9 & -17 \end{bmatrix}$$

Im Spezialfall haben wir den kurzen Weg: $A = \lambda I + N$ mit N nilpotent. Aus $\text{tr}(A) = -6$ lesen wir $\lambda = -2$ (P3F). Somit ist $N = A + 2I$ nilpotent:

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 14 & 12 & -18 \\ 11 & 9 & -15 \end{bmatrix} \implies N^2 = \begin{bmatrix} -18 & -15 & 24 \\ 12 & 10 & -16 \\ -6 & -5 & 8 \end{bmatrix} \implies N^3 = 0$$

- ☺ Damit ist auch die Annahme $\mu_A = (X - \lambda)^3$ nachträglich bewiesen.
- ☺ Wir erhalten so $A^n = \lambda^n N^0 + n\lambda^{n-1} N^1 + \binom{n}{2} \lambda^{n-2} N^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das ist eine einfache geschlossene Formel für die Koeffizienten von A^n .

Aufgabe: Welche Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sind nicht reell diagonalisierbar?

Lösung: (1) Wenn $\chi_A \in \mathbb{R}[X]_2^1$ über \mathbb{R} zerfällt, so gibt es genau drei Fälle:

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \text{ 😊}, \quad A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ 😊}, \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ ☹️}.$$

Hier seien $\lambda < \mu$ in \mathbb{R} . Dank Jordan Q1B ist jede \mathbb{R} -zerfallende Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ähnlich zu genau einer dieser Modellmatrizen.

(2) Wenn $\chi_A \in \mathbb{R}[X]_2^1$ nicht über \mathbb{R} zerfällt, so bleibt dank Satz Q1Q nur

$$A \sim \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \text{ ☹️}.$$

mit $b \neq 0$, also $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $t \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$. Das sind genau die reellen Drehstreckungen ohne reelle Eigenwerte, die wir aus Beispiel P2P kennen. Nun haben wir die vollständige Klassifikation: Jede nicht \mathbb{R} -zerfallende Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist ähnlich zu genau einer dieser Modellmatrizen.

😊 Die Jordan-Form verschafft uns einen bequemen Überblick!

Aufgabe: Welche Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ sind nicht reell diagonalisierbar?

Lösung: (1) Wenn $\chi_A \in \mathbb{R}[X]_3^1$ über \mathbb{R} zerfällt, so gibt es genau sechs Fälle:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix} \text{ 😊}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \text{ 😊}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \text{ ☹️},$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ 😊}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ ☹️}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ ☹️}.$$

Hierbei seien $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ drei verschiedene reelle Zahlen.

(2) Wenn $\chi_A \in \mathbb{R}[X]_3^1$ nicht über \mathbb{R} zerfällt, so bleibt dank Satz Q1Q nur

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & r \cos t & -r \sin t \\ 0 & r \sin t & r \cos t \end{bmatrix} \text{ ☹️}.$$

Wie zuvor seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$, also $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $t \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$.

Diese sympathisch einfachen Beispiele sind uns bereits bestens vertraut. Nun haben wir zusätzlich die vollständige Klassifikation dank Satz Q1Q: Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist ähnlich zu genau einer dieser Modellmatrizen.

Bereits im vorigen Kapitel haben wir Jordan-Matrizen P2O und reelle Drehstreckungen P2P als typische Gegenbeispiele kennengelernt. Nun sehen wir erfreut: Noch komplizierter kann es nicht werden!

Da uns reelle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ in zahlreichen Anwendungen begegnen, können wir diesen Überblick gut nutzen.

Wir erinnern uns: Jedes reelle Polynom $P \in \mathbb{R}[X]_n^1$ ungeraden Grades n hat mindestens eine reelle Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$. Das sehen wir hier für $n = 3$.

Übung: Sie verfügen nun über alle Werkzeuge. Wenn Sie möchten, können Sie die obige Klassifikation für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ fortführen. Hier entstehen zum ersten Mal die erweiterten Jordan-Blöcke.

Damit schließt sich der Kreis der Fragen, mit denen wir dieses Kapitel eröffnet haben. Besonders elegant ist die Antwort über \mathbb{C} und über \mathbb{R} .

Welche quadratischen Matrizen $A \in K^{n \times n}$ sind diagonalisierbar?

- Hindernis:** Zerfällt das charakteristische Polynom χ_A in $K[X]$?
- Hindernis:** Erreicht die geometrische Vielfachheit die algebraische?

😊 Im Idealfall wollen wir unsere Matrix A über K diagonalisieren. Wir wissen genau, wann dies gelingt, dank praktischer Kriterien. Wir wissen zudem, wie uns dies gelingt, dank praktischer Algorithmen.

😊 Notfalls müssen wir uns manchmal begnügen zu trigonalisieren. In diesem Falle ist es am besten und übersichtlichsten zu jordanisieren. Wir wissen genau, wann dies gelingt, dank Zerfällung von χ_A in $K[X]$. Wir wissen zudem, wie uns dies gelingt, dank Hauptraum-Sudoku.

😊 Die Jordan-Form verschafft uns einen bequemen Überblick! Die starke Theorie hilft oft, schon vor der Rechnung.

Lemma Q2A: Defekt-Ungleichung

(0) Sei K ein Körper. Für $f \in \text{Hom}_K(V, W)$ gilt dank M2x:

$$\dim_K(V) = \dim_K \text{Ker}(f) + \dim_K \text{Im}(f)$$

(1) Bei Komposition mit $g \in \text{Hom}_K(U, V)$ gilt:

$$\dim_K \text{Ker}(f \circ g) = \dim_K \text{Ker}(g) + \dim_K(\text{Im } g \cap \text{Ker } f)$$

(2) Daraus erhalten wir die Abschätzungen:

$$\dim_K \text{Ker}(g) \leq \dim_K \text{Ker}(f \circ g) \leq \dim_K \text{Ker}(g) + \dim_K \text{Ker}(f)$$

(3) Für jeden Endomorphismus $f \in \text{End}_K(V)$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\dim_K \text{Ker}(f) \leq \dim_K \text{Ker}(f^n) \leq n \dim_K \text{Ker}(f)$$

Aufgabe: Wie impliziert (1) sofort (2) und (3)? Beweisen Sie (1).

Beweis: (1) Wir komponieren $g : U \rightarrow V$ und $f : V \rightarrow W$:

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{g} & V & \xrightarrow{f} & W \\ u_i & \longmapsto & v_i & \longmapsto & w_i & (i \in A) \\ u_i & \longmapsto & v_i & \longmapsto & 0 & (i \in B) \\ u_i & \longmapsto & 0 & \longmapsto & 0 & (i \in C) \end{array}$$

Wir können g und f als surjektiv annehmen. Notfalls schränken wir g ein zur Surjektion $g' : U \rightarrow V'$ auf das Bild $V' = \text{Im}(g)$, ebenso schränken wir f ein zur Surjektion $f' : V' \rightarrow W'$ auf das Bild $W' = \text{Im}(f \circ g)$.

Wir nutzen mehrfach den Basissatz M2k und Zusammenfügen M1x:

Wir wählen eine Basis $(w_i)_{i \in A}$ von W . Hierzu wählen wir Urbilder $(v_i)_{i \in A}$ in V mit $f(v_i) = w_i$. Wir ergänzen durch eine Basis $(v_i)_{i \in B}$ von $\text{Ker}(f)$ zu einer Basis $(v_i)_{i \in A \cup B}$ von V . Hierzu wählen wir Urbilder $(u_i)_{i \in A \cup B}$ in U mit $g(u_i) = v_i$. Wir ergänzen durch eine Basis $(u_i)_{i \in C}$ von $\text{Ker}(g)$ zu einer Basis $(u_i)_{i \in A \cup B \cup C}$ von U . Somit ist $(u_i)_{i \in B \cup C}$ eine Basis von $\text{Ker}(f \circ g)$.

Exakte Alternative: Wir nutzen M2U und folgende kurze exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(g) \xrightarrow{\text{inc}} \text{Ker}(f \circ g) \xrightarrow[\text{u} \mapsto g(u)]{g'} \text{Im}(g) \cap \text{Ker}(f) \xrightarrow[\text{v} \mapsto f(v)]{f'} 0$$

Zunächst ist die Sequenz wie angegeben tatsächlich wohldefiniert:

Für $u \in \text{Ker}(g)$ gilt $f(g(u)) = f(0) = 0$, somit $\text{Ker}(g) \leq \text{Ker}(f \circ g)$.

Für $u \in \text{Ker}(f \circ g)$ gilt $g(u) \in \text{Im}(g) \cap \text{Ker}(f)$, denn $f(g(u)) = 0$.

Zur Erinnerung, Exaktheit bedeutet „Bild gleich Kern“ an jeder Stelle:

Das Bild von links ist gleich dem Kern nach rechts. (Definition L3H)

Exaktheit links ist klar, denn Inklusion $\text{Ker}(g) \hookrightarrow \text{Ker}(f \circ g)$ ist injektiv.

Die Exaktheit rechts entspricht der Surjektivität der Abbildung g' .

Jedes Element $v \in \text{Im}(g) \cap \text{Ker}(f)$ hat die Form $v = g(u)$ mit $f(v) = 0$.

Somit existiert $u \in \text{Ker}(f \circ g)$ mit $v = g'(u)$. Das heißt, g' ist surjektiv.

Die Exaktheit in der Mitte schließlich bedeutet $\text{Ker}(g') = \text{Ker}(g)$:

Dies gilt, denn $\text{Ker}(g) \leq \text{Ker}(f \circ g)$, und g' ist die Einschränkung von g auf den Startraum $\text{Ker}(f \circ g)$ und den Zielraum $\text{Im}(g) \cap \text{Ker}(f)$.

Beweis: (2) Wir haben $\text{Ker}(g) \leq \text{Ker}(f \circ g)$ und $\text{Im}(g) \cap \text{Ker}(f) \leq \text{Ker}(f)$. Die Dimensionen erfüllen die entsprechenden Ungleichungen dank M3o. Ungleichung (3) folgt aus (2) mit $g = f^{n-1}$ und Induktion über n . QED

Aufgabe: Wie folgt (3) aus dem Hauptraum-Sudoku? (Satz Q1F)

Lösung: Wir nutzen das Young-Diagramm des Hauptraums $\text{Hau}(f, 0)$.

Das Fundament der Breite $z_1 = \dim_K \text{Ker}(f)$ erlaubt weitere Schichten der Breite $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_n$, somit $\dim_K \text{Ker}(f^n) = z_1 + \dots + z_n \leq n z_1$.

Aufgabe: Treten in (2) alle numerisch möglichen Fälle tatsächlich auf?

Lösung: Seien $k, \ell, m \in \mathbb{N}$ beliebige Dimensionen mit $k \leq m \leq k + \ell$.

Für $n := k + \ell - m$ gilt dann $0 \leq n \leq \ell$. Wir betrachten die Matrizen

$$F = \begin{bmatrix} 1_{n \times n} & 0_{n \times \ell} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1_{\ell \times \ell} & 0_{\ell \times k} \\ 0_{n \times \ell} & 0_{n \times k} \end{bmatrix}, \quad FG = \begin{bmatrix} 1_{n \times n} & 0_{n \times m} \end{bmatrix}.$$

Das zeigt: Die Ungleichung (2) lässt sich nicht weiter verbessern.

Die diskrete Ableitung und ihre Hauptfolgen

Q205

Sei $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : n \mapsto f(n)\}$ der Folgenraum über dem Körper \mathbb{K} . Wir betrachten den Differenzenoperator (aka die diskrete Ableitung):

$$\Delta: \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : f \mapsto \Delta f \quad \text{mit} \quad (\Delta f)(n) := f(n+1) - f(n).$$

☹ Ist die Abbildung Δ linear über \mathbb{K} ? Ja, klar! (Sonst Übung!)

Aufgabe: Bestimmen Sie die Haupträume $V_r = \text{Ker } \Delta^r$ für $r \in \mathbb{N}$. Nennen Sie eine Jordan-Basis von V_r und von $V = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} V_r \leq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

😊 Hier haben wir eine aufsteigende Kette von Untervektorräumen $V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \dots$ in $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, daher ist ihre Vereinigung $V = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} V_r$ ebenfalls ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. (Warum? Übung! Satz L2J)

Lösung: (0) Speziell für $r = 0$ haben wir $\Delta^0 = \text{id}$, also $V_0 = \{0\}$.

(1) Die Gleichung $\Delta f = 0$ bedeutet $f(n+1) - f(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $V_1 = \text{Ker } \Delta = \langle 1 \rangle_{\mathbb{K}}$ mit der konstanten Funktion $1 = \text{const}_{\mathbb{N}}^1$.

(2) Aus $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } \Delta = 1$ folgt $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } \Delta^r \leq r$ für alle $r \in \mathbb{N}$. (Q1F/Q2A)

Die diskrete Ableitung und ihre Hauptfolgen

Q206

(3) Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir erinnern uns an die Binomialkoeffizienten

$$f_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : f_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^k}{k!}.$$

$\binom{n}{k}$	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k=0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45
3	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120
4	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210

Für die diskrete Ableitung finden wir erneut Pascals Rekursionsformel:

$$\Delta f_k(n) \stackrel{\text{Def}}{=} f_k(n+1) - f_k(n) \stackrel{\text{Def}}{=} \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \stackrel{\text{H229}}{=} \binom{n}{k-1} \stackrel{\text{Def}}{=} f_{k-1}(n)$$

(4) Wir erhalten so die (unendlich lange) Hauptfolgenkette

$$0 \xleftarrow{\Delta} f_0 \xleftarrow{\Delta} f_1 \xleftarrow{\Delta} f_2 \xleftarrow{\Delta} f_3 \xleftarrow{\Delta} \dots$$

Die diskrete Ableitung und ihre Hauptfolgen

Q207

(5) Die Vektoren jeder Hauptvektorkette sind linear unabhängig (Q1c). Hier ist die Unabhängigkeit offensichtlich, da die Folgen gestuft sind. Somit erhalten wir die ersehnten Basen aus Hauptfolgenketten:

$$V_r = \text{Ker } \Delta^r = \langle f_k \mid k < r \rangle_{\mathbb{K}} \\ V = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} V_r = \langle f_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle_{\mathbb{K}}$$

Wir fassen unser Ergebnis zitierfähig in folgendem Satz zusammen:

Satz Q2B: Pascals Dreieck als Hauptfolgenkette

Wir betrachten den Differenzenoperator (aka die diskrete Ableitung)

$$\Delta: \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : f \mapsto \Delta f \quad \text{mit} \quad (\Delta f)(n) := f(n+1) - f(n).$$

Zum Eigenwert 0 sind die Haupträume der Stufe $r = 1, 2, 3, \dots$ dann

$$\text{Ker}(\Delta^r) = \langle f_k \mid k < r \rangle_{\mathbb{K}} \quad \text{mit} \quad f_k(n) = \binom{n}{k} \quad \text{und} \\ 0 \xleftarrow{\Delta} f_0 \xleftarrow{\Delta} f_1 \xleftarrow{\Delta} f_2 \xleftarrow{\Delta} f_3 \xleftarrow{\Delta} f_4 \xleftarrow{\Delta} \dots$$

Die diskrete Ableitung und ihre Hauptfolgen

Q208
Erläuterung

😊 Wir sehen an diesem Zahlenbeispiel sehr schön, warum der Differenzenoperator auch als „diskrete Ableitung“ gesehen wird: Die Folge $f = \Delta F$ mit $f(n) = F(n+1) - F(n)$ gibt in jedem Punkt die „Steigung“ von F an, also die Differenz zum nächsten Wert.

😊 Umgekehrt entsteht F aus f durch „diskrete Integration“: Wir geben die Folge $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ sowie den Startwert $F(0) = 0$ vor und erhalten alle weiteren Werte $F(n)$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ rekursiv durch Aufsummieren gemäß $F(n+1) = F(n) + f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Genau dies ist die Definition der Summe $F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$.

😊 Pascals Dreieck haben wir der vorliegenden Situation angepasst: In jeder Zeile halten wir $k \in \mathbb{N}$ fest und lassen $n \in \mathbb{N}$ laufen. (Üblicherweise ist $n \in \mathbb{N}$ die Zeile und $k \in \{0, \dots, n\}$ läuft.)

Beispiel: Die diskrete Ableitung macht im Young-Diagramm aus $\dim V_k$ zunächst die Breite $\dim W_k = \dim V_k - \dim V_{k-1}$ der Schichten und daraus schließlich die Anzahl der Startvektoren, $\dim U_k = \dim W_k - \dim W_{k+1}$.

$$s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : f \mapsto sf \quad \text{mit} \quad (sf)(n) = f(n+1). \\ f = (f(0), f(1), f(2), \dots) \mapsto sf = (f(1), f(2), f(3), \dots).$$

☺ Ist der Verschiebeoperator s linear über \mathbb{K} ? Ja, klar! (Sonst Übung!)

Aufgabe: Bestimmen Sie alle Haupträume $V_r = \text{Ker}(s - \lambda)^r$ für $r \in \mathbb{N}$. Nennen Sie eine Jordan-Basis von V_r und von $V = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} V_r \leq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Lösung: (1) Wir wissen $\text{Eig}(s, \lambda) = \langle f_0 \rangle_{\mathbb{K}}^1$ mit $f_0 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : n \mapsto \lambda^n$. (P247)

(2) Aus $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(s - \lambda) = 1$ folgt $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(s - \lambda)^r \leq r$ dank Q1F/Q2A.

(3) Wir inspirieren uns an der vorigen Aufgabe und Q1o und betrachten

$$f_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : n \mapsto \binom{n}{k} \lambda^{n-k}, \quad \text{somit } 0 \text{ für } n < k \text{ und } 1 \text{ für } n = k.$$

Dank Pascals Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten finden wir:

$$(s - \lambda)f_k(n) \stackrel{\text{Def}}{=} \binom{n+1}{k} \lambda^{n+1-k} - \binom{n}{k} \lambda^{n+1-k} \stackrel{\text{H229}}{=} \binom{n}{k-1} \lambda^{n-(k-1)} \stackrel{\text{Def}}{=} f_{k-1}(n)$$

(4) Wir erhalten also auch hier die (unendlich lange) Hauptfolgenkette

$$0 \xleftarrow{s-\lambda} f_0 \xleftarrow{s-\lambda} f_1 \xleftarrow{s-\lambda} f_2 \xleftarrow{s-\lambda} f_3 \xleftarrow{s-\lambda} \dots$$

☺ Unser systematisches Vorgehen ist sowohl effizient als auch elegant: Wir bestimmen zunächst ganz explizit den Eigenraum $V_1 = \text{Eig}(s, \lambda)$. Daraus folgt die Abschätzung $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(s - \lambda)^r \leq r$ für alle $r \in \mathbb{N}$.

Die Vektoren jeder Hauptvektorkette sind linear unabhängig (Q1c). Durch explizite Konstruktion finden wir eine Hauptvektorkette, somit eine Basis von V_r , und daraus folgt $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(s - \lambda)^r = r$.

☺ Ich zelebriere diese Anwendung hier betont ausführlich, da es sich um allgemein wichtige Operatoren handelt, und all unsere Werkzeuge der Linearen Algebra hier zur Blüte kommen und reiche Früchte tragen. Die Formel (3) fällt nicht vom Himmel, siehe Bemerkung Q1o.

Übung: Was passiert im interessanten Spezialfall $\lambda = 1$? und $\lambda = 0$?

☺ Wir fassen unser Ergebnis zitierfähig in folgendem Satz zusammen zum Verschiebeoperator und den Lösungen von Rekursionsgleichungen. Anschließend werden wir dasselbe erfolgreiche Rezept genauso anwenden auf den Ableitungsoperator und Differentialgleichungen.

Satz Q2c: lineare Rekursion und ihre Hauptfolgen → Eigenfolgen P2s

Auf dem Folgenraum $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ betrachten wir den Verschiebeoperator

$$s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : f \mapsto sf \quad \text{mit} \quad (sf)(n) = f(n+1).$$

(1) Zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ sind die Haupträume der Stufe $r \in \mathbb{N}$ dann

$$\text{Ker}(s - \lambda)^r = \langle f_k \mid k < r \rangle_{\mathbb{K}}^1 \quad \text{mit} \quad f_k(n) = \binom{n}{k} \lambda^{n-k} \quad \text{und} \\ 0 \xleftarrow{s-\lambda} f_0 \xleftarrow{s-\lambda} f_1 \xleftarrow{s-\lambda} f_2 \xleftarrow{s-\lambda} f_3 \xleftarrow{s-\lambda} f_4 \xleftarrow{s-\lambda} \dots$$

(2) Anwendung auf Rekursion: Gegeben sei ein zerfallendes Polynom

$$P = X^n + p_1 X^{n-1} + \dots + p_n X^0 = (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_k)^{r_k}.$$

Dann hat $L = \text{Ker} P(s) \leq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ eine Basis aus Hauptvektorketten:

$$L \stackrel{\text{N3G}}{=} \text{Ker}(s - \lambda_1)^{r_1} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(s - \lambda_k)^{r_k}$$

Damit können wir jede lineare Rekursionsgleichung $P(s)f = 0$ lösen.

Satz Q2c: lineare Rekursion und ihre Hauptfolgen → Eigenfolgen P2s

(3) Die Auswertung in $0, 1, 2, \dots, n-1$ stiftet den \mathbb{K} -Isomorphismus

$$\text{pr} : L \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^n : f \mapsto (f(0), f(1), f(2), \dots, f(n-1)).$$

Damit können wir jede lineare Rekursion mit Anfangswerten lösen, also die eindeutige Lösung explizit als geschlossene Formel darstellen, nun für alle Polynome $P \in \mathbb{K}[X]_n^1$, auch mit mehrfachen Eigenwerten!

☺ Dasselbe gilt entsprechend für die diskrete Ableitung $\Delta = s - \text{id}$: Nur die Eigenwerte verschieben sich gemäß $\Delta - \lambda = s - (1 + \lambda)$.

Beweis: (1) Die Haupträume kennen wir aus der vorigen Aufgabe.

(2) Diese direkte Summe verdanken wir der Kernzerlegung N3G. Die Dimensionen r_i und unsere Hauptvektorkette verdanken wir (1).

(3) Zu je n beliebig vorgegebenen Startwerten $f(0), \dots, f(n-1) \in \mathbb{K}$ existiert genau eine P -rekursive Fortsetzung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$, siehe Satz P2s. Dank (2) schreiben wir f als Linearkombination von Hauptfolgen. QED

Aufgabe: (1) Finden Sie eine geschlossene Formel für alle Folgen

$$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad u_n = 6u_{n-1} - 12u_{n-2} + 8u_{n-3} \quad \text{für} \quad n \geq 3.$$

(2) Lösen Sie dies speziell für die Anfangswerte $u = (1, 2, 3, \dots)$.

Lösung: (1) Im Folgenraum $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ über \mathbb{C} betrachten wir den Unterraum

$$L = \{u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+3} - 6u_{n+2} + 12u_{n+1} - 8u_n = 0\},$$

also $L = \text{Ker } P(s)$ mit $P = X^3 - 6X^2 + 12X - 8 = (X - 2)^3$.

Satz Q2c beschert uns die explizite Lösung $L = \text{Ker}(s - 2)^3$:

Jede P -rekursive Folge $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine Linearkombination

$$u_n = a2^n + bn2^{n-1} + c\binom{n}{2}2^{n-2}$$

mit eindeutigen Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{C}$. Dimension 3 ist anschaulich:

Als Freiheitsgrade haben wir die beliebigen Startwerte $u_0, u_1, u_2 \in \mathbb{C}$, ab da greift die Rekursion und legt die Folge $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ eindeutig fest.

(2) Wir erhalten speziell $u = (1, 2, 3, \dots)$ mit $a = 1, b = 0, c = -1$, also

$$u_n = 2^{n-3}(8 + n - n^2).$$

Zunächst handelt die Frage von Zahlenfolgen und linearer Rekursion. Auf den ersten Blick scheint das noch ohne Bezug zur Linearen Algebra, Polynomen oder gar Matrizen und Eigenvektoren. Es zeigt sich jedoch, dass diese universellen Werkzeuge auch hier wunderbar effizient wirken!

Das ist ein allgemeines Phänomen: Die Problemstellung deutet meist nicht die möglichen oder nötigen (mathematischen) Werkzeuge an. Zur Problemlösung benötigen Sie daher Erfahrung und Kreativität. *Man erblickt nur, was man schon weiß und versteht.* (J.W. v. Goethe)

☺ Die lineare Rekursion erinnert uns an Fibonaccis berühmte Folge $f = (0, 1, \dots)$ mit $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ für alle n . Dies konnten wir allein mit Eigenfolgen lösen und erhielten die schöne Binet-Formel (P249).

☺ Hier nun genügen Eigenfunktionen alleine nicht mehr, wir benötigen auch Hauptfunktionen. Diese lösen tatsächlich *jede* lineare Rekursion!

☺ Die geschlossene Formel bietet Vorteile. Wir sehen zum Beispiel das Wachstumsverhalten $u_n \sim -2^{n-3}n^2$, und dass u_n negativ ist für $n \geq 4$.

Aufgabe: (1) Finden Sie eine geschlossene Formel für alle Folgen

$$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} - u_{n-3} \quad \text{für} \quad n \geq 3.$$

(2) Für welche Startwerte $u = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ bleibt die Folge beschränkt?

Lösung: (1) Im Folgenraum $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ über \mathbb{C} betrachten wir den Unterraum

$$L = \{u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0\}.$$

also $L = \text{Ker } P(s)$ mit $P = X^3 - X^2 - X + 1 = (X - 1)^2(X + 1)$.

Satz Q2c beschert uns die Lösung $L = \text{Ker}(s - 1)^2 \oplus \text{Ker}(s + 1)$:

Jede P -rekursive Folge $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine Linearkombination

$$u_n = a + bn + c(-1)^n$$

der Hauptfunktionen 1 und n und $(-1)^n$ mit Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Ausrechnen: $b = (u_2 - u_0)/2, a = (u_0 + u_1 - b)/2, c = (u_0 - u_1 + b)/2$.

(2) Die Folge u ist beschränkt gdw $b = 0$. Hingegen sind $a, c \in \mathbb{C}$ beliebig. Beschränkte Lösungen sind die 2-periodischen: $u = (u_0, u_1, u_0, u_1, \dots)$.

☺ Die Lineare Algebra bietet Ihnen einen bewährten Werkzeugkasten mit mächtigen Hilfsmittel zur Lösung abstrakter und konkreter Fragen. Ich betone das allgemeine Phänomen: Die Problemstellung deutet meist nicht die möglichen oder nötigen (mathematischen!) Werkzeuge an.

Aufgabe: Die einfache Antwort suggeriert einen einfachen Lösungsweg. Handgefertigt optimierte Lösung im Rückblick durch *reverse engineering*: Können Sie die Rekursion direkt lösen, allein durch scharfes Hinsehen? Ich betone es hier als lehrreichen Kontrast zum allgemeinen Werkzeug.

Lösung: (1) Wir schreiben unsere Rekursion geschickt etwas anders:

$$u_n - u_{n-2} = u_{n-1} - u_{n-3} =: d$$

Daraus sehen wir $u_{2n} = u_0 + nd$ und $u_{2n+1} = u_1 + nd$. Somit wechselt u zwischen zwei affin-linearen Funktionen gleicher Steigung $d := u_2 - u_0$.

(2) Beschränkt bedeutet $d = 0$, also $u_2 = u_0$. Diese spezielle Rekursion können wir also auch wunderbar durch eigenes Nachdenken lösen. Allgemeine Technik vs handgefertigte Lösung: Beides ergänzt sich.

Was sind lineare Differentialgleichungen?

Q217

In vielen einfachen Anwendungen sind zunächst **Zahlen** gesucht...

Beispiel: Gesucht ist $x \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $x^2 + 1 = 0$.
Für $x \in \mathbb{R}$ gibt es keine Lösung; für $x \in \mathbb{C}$ gibt es genau zwei, $x = \pm i$.

In vielen fortgeschrittenen Anwendungen sind **Funktionen** gesucht...

Beispiel: Gesucht ist $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $u'' + u = 0$.
Über \mathbb{C} können wir Lösungen erraten, besser systematisch berechnen:

$$u_1(t) = e^{+it} \quad \text{und} \quad u_2(t) = e^{-it}$$

Auch jede Linearkombination $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ erfüllt die Gleichung.
Gibt es weitere Lösungen? Nein! Wir haben also den \mathbb{C} -Lösungsraum:

$$L_{\mathbb{C}} := \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid u'' + u = 0\} \stackrel{\perp}{=} \langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{C}}$$

Oft sind reelle Lösungen gefragt. Wir finden den \mathbb{R} -Lösungsraum:

$$L_{\mathbb{R}} := \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid u'' + u = 0\} \stackrel{\perp}{=} \langle \cos, \sin \rangle_{\mathbb{R}}$$

Machen Sie die Probe! Satz Q2F garantiert die Eindeutigkeit.

Was sind lineare Differentialgleichungen?

Q218
Erläuterung

PLMI „Einfache Beispiele von Differentialgleichungen begegnen uns schon in der Schule, zum Beispiel bei harmonischer Schwingung (Federn, elektrischer Schwingkreis, etc.). Damals mussten wir die Lösungen noch erraten oder sie fielen vom Himmel. Na gut, auch damit kann man gut weiterrechnen.“ – Genau dies wollen wir nun systematisieren, damit Sie selbständig arbeiten können und lineare Differentialgleichungen lösen.

Ich stelle daher bewusst ein sehr einfaches Beispiel voran. Sie wollen nun einen allgemeinen Rahmen abstecken – lineare Differentialgleichungen! – und darin eine allgemeine Lösungsmethode erlernen – Eigenfunktionen! Die Theorie ist bemerkenswert parallel zur diskreten Ableitung und dem Verschiebungsoperator. Solche Analogien sind uns immer willkommen.

😊 Wir sind bestens vorbereitet und erraten bereits: Meist gibt es nicht genügend Eigenfunktionen, daher erweitern wir sofort unseren Blick und behandeln zugleich Hauptfunktionen. So erreichen wir ein erfreuliches kleines Wunder: Wir können so *jede* lineare Differentialgleichung lösen. Dazu präzisieren wir die allgemeine Fragestellung und ihre Lösung.

Was sind lineare Differentialgleichungen?

Q219

Definition Q2b: lineare Differentialgleichung über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Wir betrachten eine **lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung**:

$$u^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)u^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t) = b(t)$$

Gegeben ist das Definitionsintervall $I \subseteq \mathbb{R}$, darauf die **Koeffizienten** $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{K}$ und die **rechte Seite** $b : I \rightarrow \mathbb{K}$; alle seien stetig.
Gesucht sind alle Lösungen $u \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$, die obige Gleichung erfüllen.

Beim **Anfangswertproblem** sind zudem die Anfangswerte zu einer Zeit $t_0 \in I$ vorgegeben durch $(u(t_0), u'(t_0), \dots, u^{(n-1)}(t_0)) \stackrel{\perp}{=} v \in \mathbb{K}^n$.

Sind a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 konstant, so bündeln wir sie zum **charakteristischen Polynom** $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]_n^1$. Damit prägnant:

$$P(\partial)u(t) = b(t)$$

Für $b = 0$ erhalten wir die **homogene DGl** $P(\partial)u(t) = 0$.

Was sind lineare Differentialgleichungen?

Q220
Erläuterung

Gleichung	traditionelle Bezeichnung	Struktur
$P(\partial)u(t) = 0$	homogene lineare DG	linear
$P(\partial)u(t) = b(t)$	inhomogene lineare DG	affin-linear

Bezeichnung und Struktur entsprechen linearen Gleichungssystemen:

$Ax = 0$	homogenes LGS	linear
$Ax = b$	inhomogenes LGS	affin-linear

⚠ Der Funktionenraum $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ ist unendlich-dimensional, wir können daher nicht direkt auf die Matrizenrechnung zurückgreifen. Wie schade!

😊 Homogene Differentialgleichungen $P(\partial)u(t) = 0$ werden wir gleich allgemein, vollständig und explizit lösen durch Hauptfunktionen (Q2F).

😊 Damit lösen wir inhomogene Differentialgleichungen $P(\partial)u(t) = b(t)$: Satz Q2J zeigt eine systematische Lösungsformel durch Integration.

😊 Für spezielle rechte Seiten gibt es einfache Lösungsformeln (Q2I) und geschickte Lösungsansätze, die leichter und schneller zum Ziel führen.

Über jedem Körper \mathbb{K} haben wir die formale Ableitung von Polynomen:

$$\partial : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] : F = \sum_{i=0}^n f_i X^i \mapsto \partial F = \sum_{k=1}^n k f_k X^{k-1}$$

Aufgabe: Bestimmen Sie alle Haupträume $V_r = \text{Ker}(\partial - \lambda)^r$ für $r \in \mathbb{N}$.

Lösung: (1) Wir lösen die Eigengleichung $\partial F = \lambda F$ für $\lambda \in \mathbb{K}$. Sei $\lambda \neq 0$. Für $F \neq 0$ gilt $\deg(\partial F) < \deg(\lambda F)$, also $\text{Eig}(\partial, \lambda) = \{0\}$. Somit bleibt nur $\lambda = 0$ als einzig möglicher Eigenwert von ∂ .

(2) Charakteristik $\text{char } \mathbb{K} = 0$: Wir finden $\text{Ker}(\partial) = \langle X^0 \rangle_{\mathbb{K}}$.

(3) Aus $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(\partial) = 1$ folgt $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(\partial^r) \leq r$ für $r \in \mathbb{N}$. (Q1F/Q2A)

(4) Die Polynome $F_k = X^k/k! \in \mathbb{K}[X]$ bilden eine Hauptvektorkette:

$$0 \xleftarrow{\partial} F_0 \xleftarrow{\partial} F_1 \xleftarrow{\partial} F_2 \xleftarrow{\partial} F_3 \xleftarrow{\partial} \dots$$

(5) Diese ist eine Jordan-Basis der Polynome (M1G/Q1c):

$$\text{Ker}(\partial^r) = \langle F_k \mid k < r \rangle_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}[X]_{<r}$$

(1) Charakteristik $\text{char } \mathbb{K} = p > 0$ verhält sich anders!

$$\text{Ker}(\partial) = \langle X^0, X^p, X^{2p}, X^{3p}, \dots \rangle_{\mathbb{K}}$$

(2) Für die Polynome $F_{m,k} = X^{mp+k}/k!$ mit $k = 0, 1, \dots, p-1$ gilt:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xleftarrow{\partial} & F_{0,0} & \xleftarrow{\partial} & F_{0,1} & \xleftarrow{\partial} & \dots & \xleftarrow{\partial} & F_{0,p-1} \\ 0 & \xleftarrow{\partial} & F_{1,0} & \xleftarrow{\partial} & F_{1,1} & \xleftarrow{\partial} & \dots & \xleftarrow{\partial} & F_{1,p-1} \\ & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \xleftarrow{\partial} & F_{m,0} & \xleftarrow{\partial} & F_{m,1} & \xleftarrow{\partial} & \dots & \xleftarrow{\partial} & F_{m,p-1} \\ & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

(3) Wir finden hier eine Basis (Q1c) aus mehreren Hauptvektorketten:

$$\text{Ker}(\partial^r) = \langle F_{m,k} \mid m \in \mathbb{N}, k < r \rangle_{\mathbb{K}}$$

Dies gilt für $r = 0, 1, \dots, p$, wobei $\text{Ker } \partial^0 = \{0\}$ und $\text{Ker } \partial^p = \mathbb{K}[X]$.

In positiver Charakteristik verhält sich die Ableitung recht ungewohnt. Umso erfreulicher ist es, auch hier vertraute Strukturen zu finden.

Sei $\mathbb{K} \geq \mathbb{Q}$ ein Ring und $\mathbb{K}[[X]]$ der Potenzreihenring mit der Ableitung

$$\partial : \mathbb{K}[[X]] \rightarrow \mathbb{K}[[X]] : f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k X^k \mapsto f' = \sum_{k=1}^{\infty} k f_k X^{k-1}$$

Wir rechnen hier bequem mit formalen Potenzreihen, wie in C7 erklärt. Dies sind Koeffizientenfolgen, also „Polynome von unendlichem Grad“.

Aufgabe: Lösen Sie (1) in $\mathbb{K}[X]$ und (2) in $\mathbb{K}[[X]]$ die Gleichung

$$f(0) = 1 \text{ und } f' = f.$$

Lösung: (1) Das ist unmöglich! Aus $f \in \mathbb{K}[X]$ und $f' = f$ folgt $f = 0$. Polynome genügen uns nicht für DGLungen, erst Potenzreihen!

(2) Aus $f_0 = 1$ und $f' = f$ folgt $f_{k-1} = k f_k$ für alle $k \geq 1$, also $f_k = 1/k!$

$$\exp(X) := \sum_{k \in \mathbb{N}} X^k/k! = 1 + X + X^2/2 + X^3/3! + \dots$$

Wir machen die Probe: Diese Potenzreihe löst $\exp(0) = 1$ und $\exp' = \exp$. Eindeutigkeit: Nach unserer obigen Rechnung ist dies die einzige Lösung.

☺ Bisher haben wir rein formal gerechnet, nicht nur über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, sondern über jedem beliebigen Körper \mathbb{K} , und das sehr erfolgreich: Wie üblich betrachten wir Polynome $P = \sum_{k=0}^n p_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ formal als Koeffizientenfolgen $(p_0, p_1, \dots, p_n, 0, 0, 0, \dots) \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ mit endlichem Träger.

Ebenso nützlich ist der gesamte Folgenraum $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ als \mathbb{K} -Vektorraum, wie oben gesehen für Rekursionen, nun zudem als Potenzreihenring. Der Ableitungsoperator $(f_0, f_1, f_2, f_3, \dots) \mapsto (f_1, 2f_2, 3f_3, \dots)$ ist analog zum obigen Verschiebeoperator, zusätzlich versehen mit den Faktoren.

☹ Was fehlt uns noch? Als nächsten Schritt nehmen wir unseren Mut zusammen und setzen in die formale Potenzreihe $\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} X^k/k!$ reelle oder komplexe Werte $z \in \mathbb{C}$ ein, später sogar Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Für jedes Polynom $P \in \mathbb{K}[X]$ ist das Einsetzen algebraisch problemlos und bereits extrem nützlich als Einsetzungshomomorphismus K3D. Für Potenzreihen müssen wir als allererstes die Konvergenz klären. Das schöne Ergebnis importieren wir dankend aus der Analysis

Satz Q2E: Exponentialfunktion

→ Analysis ♥

(0) Die Exponentialreihe konvergiert und definiert folgende Funktionen:

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \quad : \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$$

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{\times} \quad : \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$$

$$\exp : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R}) \quad : \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$$

$$\exp : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C}) \quad : \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$$

Hierzu müssen wir jeweils die **Konvergenz** dieser Reihe nachweisen. Wir überlassen der Analysis die sorgsame Ausarbeitung, importieren aber gerne das Ergebnis und seine segensreichen Eigenschaften:

(1) Für alle A, B mit $AB = BA$ gilt $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$. Speziell für $B = -A$ folgt daraus $\exp(A) \exp(-A) = \exp(0) = 1$. Demnach ist $\exp(A)$ invertierbar mit $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

(2) Für $f(t) = \exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k t^k/k!$ gilt $f'(t) = A \exp(At)$.

Wir importieren aus der Analysis die nötigen Begriffe zur Konvergenz von Folgen und Reihen, das Cauchy-Kriterium und Vollständigkeit, etc.

☺ Wenn Sie diese bereits aus Ihrer Analysis kennen und beherrschen, so dürfen Sie stolz sein auf diese fundamentalen analytischen Werkzeuge: Wir werden diese gut und gerne nutzen! Falls noch nicht, so freuen Sie sich auf die kommende Einführung in diese wundervolle Kulturtechnik.

☺ Die Aussagen (1) und (2) können Sie auch so direkt nachrechnen: Wir können Potenzreihen formal auffassen, also Konvergenz vorerst ausklammern, und dennoch die obige Funktionalgleichung (1) und die Ableitung (2) nachrechnen. Abschnitt C7 führt dies für Sie aus.

Die formale Sichtweise vereinfacht, sie trennt Algebra und Analysis. Natürlich benötigen Sie beides, doch können es getrennt untersuchen. Wir unterscheiden das Polynom $P \in \mathbb{K}[t]$ von der dargestellten Funktion $f_P : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ und ebenso die Potenzreihe $P \in \mathbb{K}[[t]]$ von ihrer Funktion f_P . Letztere erfordert Konvergenz für $t \in \mathbb{K}$ und existiert nicht überall.

Die Ableitung und ihre Hauptfunktionen

Auf $\mathcal{C}^{\infty} = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben wir den Ableitungsoperator

$$\partial : \mathcal{C}^{\infty} \rightarrow \mathcal{C}^{\infty} : f \mapsto f'$$

☺ Ist die Abbildung ∂ linear über \mathbb{K} ? Ja, klar! (Übung/Analysis)

Aufgabe: Bestimmen Sie die Haupträume $V_r = \text{Ker } \partial^r$ für $r \in \mathbb{N}$. Nennen Sie eine Jordan-Basis von V_r und von $V = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} V_r$.

Lösung: (1) Es gilt $f \in \text{Ker } \partial$ gdw $f = 0$. (Warum? ZWS, HDI, Q3c)

(2) Aus $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } \partial = 1$ folgt $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } \partial^r \leq r$ für alle $r \in \mathbb{N}$. (Q1F/Q2A)

(3) Wir nutzen die faktorielle Monombasis: $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : f_k(t) = t^k/k!$.

(4) Wir erhalten so die (unendlich lange) Hauptfunktionenkette

$$0 \xleftarrow{\partial} f_0 \xleftarrow{\partial} f_1 \xleftarrow{\partial} f_2 \xleftarrow{\partial} f_3 \xleftarrow{\partial} \dots$$

(5) Diese ist eine Jordan-Basis der Polynomfunktionen:

$$V_r = \text{Ker } \partial^r = \langle f_k \mid k < r \rangle_{\mathbb{K}}^{\dagger} = \mathbb{K}[t]_{<r}$$

$$V = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} V_r = \langle f_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle_{\mathbb{K}}^{\dagger} = \mathbb{K}[t]$$

Die Ableitung und ihre Hauptfunktionen

Aufgabe: Bestimmen Sie alle Haupträume $V_r = \text{Ker}(\partial - \lambda)^r$ für $r \in \mathbb{N}$. Nennen Sie eine Jordan-Basis von V_r und von $V = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} V_r \leq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Lösung: (1) Die Eigengleichung $\partial f = \lambda f$ wird gelöst durch

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : f(t) = ce^{\lambda t} \quad \text{mit } c \in \mathbb{K}.$$

Gibt es weitere Lösungen? Nein! (Warum? ZWS, HDI, Q3c)

$$\text{Eig}(\partial, \lambda) = \langle f_0 \rangle_{\mathbb{K}}^{\dagger} \quad \text{mit } f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : t \mapsto e^{\lambda t}$$

(2) Aus $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(\partial - \lambda) = 1$ folgt $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(\partial - \lambda)^r \leq r$ dank Q1F/Q2A.

(3) Die vorigen Aufgaben inspirieren folgende Hauptfunktionen:

$$f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : t \mapsto e^{\lambda t} t^k/k!$$

$$\partial f_k(t) = \lambda e^{\lambda t} t^k/k! + e^{\lambda t} t^{k-1}/(k-1)! = \lambda f_k(t) + f_{k-1}(t)$$

(4) Wir erhalten auch hier eine unendlich lange Hauptfunktionenkette:

$$0 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_0 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_1 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_2 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_3 \xleftarrow{\partial - \lambda} \dots$$

Satz Q2F: Hauptfunktionen des Ableitungsoperators

Auf $\mathcal{C}^\infty = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben wir den Ableitungsoperator

$$\partial : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{C}^\infty : f \mapsto f'$$

(1) Zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ sind die Haupträume der Stufe $r \in \mathbb{N}$ dann

$$\text{Ker}(\partial - \lambda)^r = \langle f_k \mid k < r \rangle_{\mathbb{K}}^1 \quad \text{mit} \quad f_k(t) = e^{\lambda t} t^k / k! \quad \text{und}$$

$$0 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_0 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_1 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_2 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_3 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_4 \xleftarrow{\partial - \lambda} \dots$$

(2) Anwendung auf DGLungen: Gegeben sei ein zerfallendes Polynom

$$P = X^n + p_1 X^{n-1} + \dots + p_n X^0 = (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_k)^{r_k}$$

Dann hat $L = \text{Ker } P(\partial) \leq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ eine Basis aus Hauptvektorketten:

$$L \stackrel{\text{N3G}}{=} \text{Ker}(\partial - \lambda_1)^{r_1} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(\partial - \lambda_k)^{r_k}$$

Damit können wir jede lineare Differentialgleichung $P(\partial)f = 0$ lösen.

Satz Q2F: Hauptfunktionen des Ableitungsoperators

(3) Die Auswertung zum Zeitpunkt $t = 0$ stiftet den \mathbb{K} -Isomorphismus

$$q : L \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^n : f \mapsto (f(0), f'(0), f''(0), \dots, f^{(n-1)}(0)).$$

Damit lösen wir jede lineare Differentialgleichung mit Anfangswerten, stellen also die eindeutige Lösung explizit als geschlossene Formel dar.

(4) Wir vergleichen ∂ und s mittels $T : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : f \mapsto (f^{(n)}(0))_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) & \text{Ker } P(\partial) & [t \mapsto e^{\lambda t} t^k / k!] \\ T \downarrow & & T \downarrow & T \downarrow \cong & T \downarrow \\ \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{s} & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \text{Ker } P(s) & [n \mapsto \binom{n}{k} \lambda^{n-k}] \end{array}$$

Es gilt $T \circ \partial = s \circ T$, also $T \circ P(\partial) = P(s) \circ T$ und $T(\text{Ker } P(\partial)) \leq \text{Ker } P(s)$.

Dabei schickt T jede Hauptfunktion $t \mapsto e^{\lambda t} t^k / k!$ auf die Hauptfolge $n \mapsto \binom{n}{k} \lambda^{n-k}$. Somit ist $T_P : \text{Ker } P(\partial) \rightarrow \text{Ker } P(s)$ ein Isomorphismus.

Beweis: (1) Die Haupträume kennen wir aus der vorigen Aufgabe.

(2) Diese direkte Summe verdanken wir der Kernzerlegung N3G. Die Dimensionen r_i und unsere Hauptvektorkette verdanken wir (1).

(3) Wir nutzen (4) und Satz Q2c: Die Auswertung $q : L \rightarrow \mathbb{K}^n$ ist die Komposition von $T_P : \mathcal{C}^\infty \supset \text{Ker } P(\partial) \xrightarrow{\cong} \text{Ker } P(s) \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ und $pr : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \supset \text{Ker } P(s) \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^n$. Somit ist auch q ein Isomorphismus.

Anwendung: Zu je n beliebig gegebenen Startwerten $(f^{(k)}(0))_{k < n} \in \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung f mit diesen Startwerten und $P(\partial)f = 0$. Dank (2) schreiben wir f als Linearkombination von Hauptfunktionen.

(4) Die Eigenschaft $T \circ \partial = s \circ T$ ist klar nach Definition bzw. eine schöne Fingerübung, ebenso $T \circ P(\partial) = P(s) \circ T$ und $T(\text{Ker } P(\partial)) \leq \text{Ker } P(s)$.

Die Ableitungen $\partial^n f_k$ von $f_k(t) = e^{\lambda t} t^k / k!$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(\partial^n f)(0)$ berechnen wir per Induktion. Anwendung: Diese Ableitungen zeigen die Isomorphie (3) und nützen ebenso in konkreten Rechnungen. Zudem verstehen wir nun explizit die Ähnlichkeit von ∂ und s .

(4) Wir wissen $\partial f_k = \lambda f_k + f_{k-1}$. Per Induktion zeigen wir:

$$\partial^n f_k = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} f_{k-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \lambda^{n-i} f_{k-i}$$

Zur einfacheren Schreibweise setzen wir $f_k := 0$ für $k \in \mathbb{Z}_{<0}$. Die Aussage gilt für $n = 0$. Induktionsschritt von $n - 1$ auf n :

$$\begin{aligned} \partial^n f_k &\stackrel{\text{Def}}{=} \partial(\partial^{n-1} f_k) \stackrel{\text{IV}}{=} \partial \left[\sum_{i \in \mathbb{Z}} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} f_{k-i} \right] \\ &\stackrel{\text{(1)}}{=} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-i} f_{k-i} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \binom{n-1}{j} \lambda^{n-1-j} f_{k-j-1} \\ &\stackrel{\text{Subs}}{=} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-i} f_{k-i} + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \binom{n-1}{i-1} \lambda^{n-i} f_{k-i} \stackrel{\text{H229}}{=} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} f_{k-i} \end{aligned}$$

Wir nutzen die Indexverschiebung $i = j + 1$ bzw. $j = i - 1$. Schließlich gilt $f_0(0) = 1$ und $f_k(0) = 0$ für alle $k \neq 0$, also $(\partial^n f_k)(0) = \binom{n}{k} \lambda^{n-k}$. QED

Aufgabe: (1) Finden Sie alle \mathcal{C}^∞ -Funktionen $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$u''' - 6u'' + 12u' - 8u = 0.$$

(2) Lösen Sie dies für die Anfangswerte $u(0) = u'(0) = 0$ und $u''(0) = 1$.

Lösung: (1) Im Funktionenraum $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ über \mathbb{C} betrachten wir den Lösungsraum $L = \text{Ker } P(\partial)$ mit $P = X^3 - 6X^2 + 12X - 8 = (X - 2)^3$.

Dank unserem vorigen Satz Q2F wissen wir:

$$L = \langle t \mapsto e^{2t}, e^{2t}t, e^{2t}t^2/2 \rangle_{\mathbb{C}}$$

Jede Lösung $u \in L$ schreibt sich demnach

$$u(t) = e^{2t}(a + bt + ct^2/2)$$

mit eindeutigen Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{C}$. (2) Die gewünschten Anfangswerte erreichen wir durch $a = 0, b = 0, c = 1$, also

$$u(t) = e^{2t}t^2/2.$$

☺ Das ist die eindeutige Lösung des AWP wie in Satz Q2F versprochen. Machen Sie die Probe! Erfüllt u die Differentialgleichung $P(\partial)u = 0$? Zudem die gewünschten Anfangswerte $u(0) = u'(0) = 0$ und $u''(0) = 1$? Gemäß unserer Definition Q2D ist für Lösungen genau das zu prüfen.

Das Anfangswertproblem erfordert die Bestimmung der Konstanten. Dies führt zu einem linearen Gleichungssystem in drei Variablen und drei Gleichungen. Der vorige Satz garantiert die eindeutige Lösbarkeit! Die Ausführung der Rechnung, etwa mit Gauß, ist dann Routine.

Zunächst handelt die Frage von Funktionen und ihren Ableitungen. Auf den ersten Blick scheint das noch ohne Bezug zur Linearen Algebra, Polynomen oder Eigenvektoren. Bei genauer Betrachtung enthüllt sich die lineare Struktur und entfalten sich unsere wirksamen Werkzeuge.

Die Analysis darf sich hier noch ganz entspannt zurückhalten. Lineare DGLen lassen sich vollkommen elementar lösen, Wir kommen hier (beinahe) ausschließlich mit Linearer Algebra aus,

Aufgabe: (1) Finden Sie alle \mathcal{C}^∞ -Funktionen $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$u''' - u'' - u' + u = 0.$$

(2) Lösen Sie dies für die Anfangswerte $u(0) = 4$ und $u'(0) = u''(0) = 1$.

Lösung: (1) Im Funktionenraum $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ über \mathbb{C} betrachten wir den Lösungsraum $L = \text{Ker } P(\partial)$ mit $P = X^3 - X^2 - X + 1 = (X - 1)^2(X + 1)$.

Dank unserem vorigen Satz Q2F wissen wir:

$$L = \langle t \mapsto e^t, e^t t, e^{-t} \rangle_{\mathbb{C}}$$

Jede Lösung $u \in L$ schreibt sich demnach

$$u(t) = e^t(a + bt) + ce^{-t}$$

mit eindeutigen Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{C}$. (2) Die gewünschten Anfangswerte erreichen wir durch $a = 3, b = -2, c = 1$, also

$$u(t) = e^t(3 - 2t) + e^{-t}.$$

Sie sehen hier die verblüffende Ähnlichkeit zwischen linearer Rekursion (Q213) und linearen Differentialgleichungen (Q233). Zur Illustration habe ich in beiden Beispielpaaren sogar genau dieselben Polynome gewählt. Das betont das gemeinsame Prinzip und die unterschiedlichen Details.

Tatsächlich identisch sind die zugrundeliegende linearen Strukturen und daher auch die Techniken zur Lösung: Wir jordanisieren unsere beiden Operatoren s und ∂ . Im Folgenraum $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ haben wir $U = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} \text{Hau}(s, \lambda)$. Im Funktionenraum $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ haben wir ebenso $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} \text{Hau}(\partial, \lambda)$. Die Hauptraumstrukturen sind dieselben, für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $(\text{Hau}(s, \lambda), s) \cong (\text{Hau}(\partial, \lambda), \partial)$. Wir haben also insgesamt $(U, s) \cong (V, \partial)$.

Für Rekursion ist das Anfangswertproblem offensichtlich: Es existiert genau eine Lösung! Für Differentialgleichungen ist das keineswegs klar. In der Analysis beweisen Sie Existenz und Eindeutigkeit für das AWP in voller Schönheit. Wir zeigen dies hier ganz handfest zunächst für *lineare* DGLen. Die Analogie $(U, s) \cong (V, \partial)$ ist uns dabei willkommen.

Zu lösen sei über \mathbb{R} die homogene lineare Differentialgleichung

$$P(\partial) u(t) = 0.$$

Hierzu sei $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ ein **reelles Polynom**.
Ist $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Lösung, so auch die konjugierte Funktion $\bar{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$P(\partial) u = 0 \iff^{conj} P(\partial) \bar{u} = 0$$

Ist $\lambda = \sigma + i\omega$ mit $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ und $\omega \neq 0$ eine k -fache Nullstelle von P ,
so hat unsere DG hat die $2k$ **konjugiert-komplexen Lösungen**

$$\begin{matrix} e^{\lambda t}, e^{\lambda t} t, \dots, e^{\lambda t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \\ e^{\bar{\lambda} t}, e^{\bar{\lambda} t} t, \dots, e^{\bar{\lambda} t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}. \end{matrix}$$

Im Falle $\omega = 0$ ist $\lambda = \sigma \in \mathbb{R}$ reell und $e^{\lambda t} t^k/k!$ ist fix unter Konjugation.
Im Falle $\omega \neq 0$ ist unser Eigenwert λ echt komplex; per Konvention
wählen wir $\omega > 0$ und erhalten die konjugierte Lösung gratis.

Anwendungen erfordern oft **reelle Lösungen** $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Basiswechsel:

$$\left. \begin{matrix} e^{\lambda t} = e^{\sigma t} [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] \\ e^{\bar{\lambda} t} = e^{\sigma t} [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)] \end{matrix} \right\} \iff \begin{cases} e^{\sigma t} \cos(\omega t) = \frac{1}{2} [e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda} t}] \\ e^{\sigma t} \sin(\omega t) = \frac{1}{2i} [e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda} t}] \end{cases}$$

Wir linearkombinieren so aus den komplexen die **reellen Lösungen**

$$\begin{matrix} e^{\sigma t} \cos(\omega t), e^{\sigma t} \cos(\omega t) t, \dots, e^{\sigma t} \cos(\omega t) \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \\ e^{\sigma t} \sin(\omega t), e^{\sigma t} \sin(\omega t) t, \dots, e^{\sigma t} \sin(\omega t) \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}. \end{matrix}$$

Diese reellen Funktionen bilden eine Basis des komplexen Lösungsraums

$$L_{\mathbb{C}} := \{ u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid P(\partial) u = 0 \} \quad \text{über } \mathbb{C}$$

und nach Konstruktion zugleich eine Basis des reellen Lösungsraums

$$L_{\mathbb{R}} := \{ u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid P(\partial) u = 0 \} \quad \text{über } \mathbb{R}.$$

Übung: Es gilt $\dim_{\mathbb{R}} L_{\mathbb{R}} \leq n$ und wir haben n unabhängige Lösungen.

Aufgabe: Lösen Sie (a) allgemein und (b) das Anfangswertproblem

$$u''(t) + 2u'(t) + 5u(t) = 0 \quad \text{mit} \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 3$$

Lösung: (a) Das charakteristische Polynom ist $P(X) = X^2 + 2X + 5$.
Die Nullstellen $\lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$ sind komplex-konjugiert.

Komplexes Fundamentalsystem: $e^{(-1+2i)t}, e^{(-1-2i)t}$

Komplexe Lösungen: $z(t) = c_1 e^{(-1+2i)t} + c_2 e^{(-1-2i)t}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Reelles Fundamentalsystem: $e^{-t} \cos(2t), e^{-t} \sin(2t)$

Reelle Lösungen: $u(t) = \alpha_1 e^{-t} \cos(2t) + \alpha_2 e^{-t} \sin(2t)$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left. \begin{matrix} u(0) = \alpha_1 = 1 \\ u'(0) = -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases}$$

Probe! Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems ist demnach

$$u(t) = e^{-t} (\cos(2t) + 2 \sin(2t)).$$

😊 Über die komplexe Lösung kommt man zur selben Lösung des AWP.

Aufgabe: Finden Sie ein reelles Fundamentalsystem der Gleichung

$$u^{(4)}(t) + 8u''(t) + 16u(t) = 0.$$

Lösung: Das char. Polynom unserer Gleichung $P(\partial) u = 0$ ist

$$P(X) = X^4 + 8X^2 + 16 = (X^2 + 4)^2 = (X - 2i)^2 (X + 2i)^2.$$

Doppelte Nullstellen $2i, -2i$. Ein komplexes Fundamentalsystem ist

$$e^{2it}, e^{-2it}, t e^{2it}, t e^{-2it}.$$

Probe! Hieraus gewinnen wir das reelle Fundamentalsystem

$$\cos(2t), \sin(2t), t \cos(2t), t \sin(2t).$$

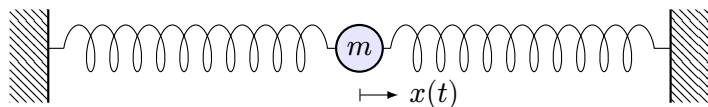
Basiswechsel! Jede reelle Lösung $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat demnach die Form

$$u(t) = \cos(2t)(\alpha_1 + \alpha_2 t) + \sin(2t)(\alpha_3 + \alpha_4 t)$$

mit eindeutig bestimmten Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$. **Anfangswerte**
 $u(t_0), u'(t_0), u''(t_0), u'''(t_0) \in \mathbb{R}$ legen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ **eindeutig fest**.

Beispiel: mechanische Schwingung

Q241
Beispiel



Zeit $t \in \mathbb{R}$, Auslenkung $x(t)$ aus Ruhelage, Rückstellkraft $F_1 = -kx$ (Hookes Gesetz: zur Auslenkung proportional und entgegengesetzt), zusätzlich noch Reibung / viskoser Strömungswiderstand $F_2 = -c\dot{x}$.
Newtons Bewegungsgesetz $m\ddot{x} = F_1 + F_2$, also $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$.
Dies führt zu einer **linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung**

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

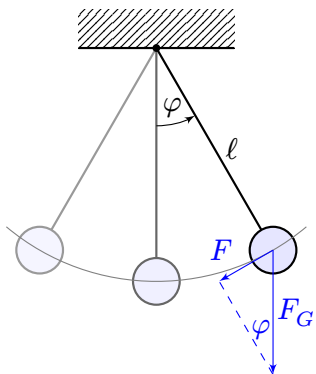
mit konstanten Koeffizienten $\delta = c/2m \geq 0$ und $\omega_0^2 = k/m$, $\omega_0 \geq 0$.
Bei äußerer Anregung durch eine Kraft $F(t) = m f(t)$ gilt:

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

Allgemein suchen wir alle möglichen Lösungen $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto x(t)$,
speziell die Lösung x zu vorgegebenen Anfangswerten $x(t_0)$ und $\dot{x}(t_0)$.

Beispiel: das mathematische Pendel

Q243
Beispiel



Die Rückstellkraft ist hier nicht-linear:

$$F(t) = -m \cdot g \cdot \sin \varphi(t)$$

m = Masse des Pendelkörpers
 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ Erdbeschleunigung
 $F_G = mg$ Gravitationskraft zur Masse m
 l = Länge des Pendelstabes
 $\varphi(t)$ = Winkelauslenkung
 $l \varphi(t)$ = Auslenkung

Newtons Bewegungsgesetz $F(t) = m l \ddot{\varphi}(t)$ führt zu

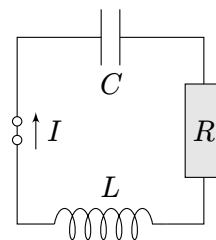
$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \sin \varphi(t).$$

Anders als vorige ist dies eine **nicht-lineare Differentialgleichung**.
Gegeben sind die anfängliche Position $\varphi(0)$ und Geschwindigkeit $\dot{\varphi}(0)$.
Fragen: Wie sieht die Trajektorie aus? Wie lang dauert eine Periode?

Beispiel: elektrischer Schwingkreis

Q242
Beispiel

Diese Differentialgleichung begegnet uns in sehr vielen Situationen.
Sie ist daher grundlegend wichtig in Naturwissenschaft und Technik.



Elektrischer Schwingkreis (RLC), Radioempfänger:
Beziehungen zwischen Strom I und Spannung U :

- Ohmscher Widerstand: $U_R = RI$,
- Selbstinduktivität der Spule: $U_L = L\dot{I}$,
- Kapazität des Kondensators: $I = C\dot{U}_C$.

In der Reihenschaltung summieren sich diese Spannungen zu Null:
 $U_L + U_R + U_C = 0$. Wir erhalten $L\dot{I}(t) + RI(t) + \frac{1}{C}I(t) = 0$, also

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

mit $x(t) = I(t)$ sowie $\delta = \frac{R}{2L}$ und $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Bei äußerer Anregung gilt:

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

Wir suchen Lösungen $x(t)$, speziell zu Anfangswerten $x(0)$ und $\dot{x}(0)$.

Beispiel: Pendel bei kleinen Amplituden

Q244
Beispiel

⚠ Wir vereinfachen etwas: punktförmige Masse des Pendelkörpers,
vernachlässigbare Masse des Stabes, reibungsfreie Aufhängung, etc.
Für kleine Auslenkungen gilt $\sin(\varphi) \approx \varphi$. (Faustregel für $|\varphi| < 5^\circ$)
Dies führt uns zur **linearisierten Differentialgleichung**:

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \varphi(t)$$

Diese Differentialgleichung ist viel einfacher, denn sie ist linear in φ :

$$\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2 \varphi(t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{g/l}$$

Dies ist die Bewegungsgleichung eines **harmonischen Oszillators**:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad \ddot{\varphi}(t) = -\varphi_0 \omega^2 \cos(\omega t + \alpha).$$

Für kleine Auslenkungen ist demnach die Periodendauer $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.
Die Anfangsdaten bestimmen die Auslenkung φ_0 und die Phase α .
Für große Auslenkungen brauchen wir eine genauere Rechnung! (Q5.1)

Aufgabe: Finden Sie alle Lösungen $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0.$$

Diese berühmte **Gleichung des harmonischen Oszillators** ist eine lineare DG zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten mit **Dämpfung** $\delta \geq 0$ und **ungedämpfter Eigenfrequenz** $\omega_0 > 0$.

Lösung: Wir lösen $P(\partial)u = 0$ für $P = X^2 + 2\delta X + \omega_0^2$. Eigenwerte:

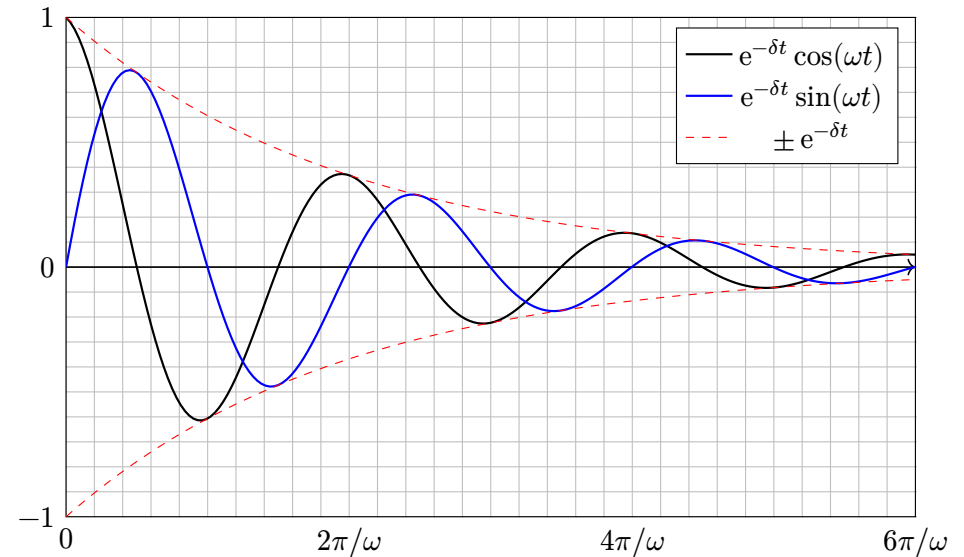
$$\lambda = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{C}$$

- $\delta < \omega_0$: **schwache Dämpfung**, zwei komplex-konjugierte Nullstellen
- $\delta > \omega_0$: **starke Dämpfung**, zwei reelle Nullstellen $\lambda_1 < -\delta < \lambda_2 < 0$
- $\delta = \omega_0$: **kritische Dämpfung**, doppelte reelle Nullstelle $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$

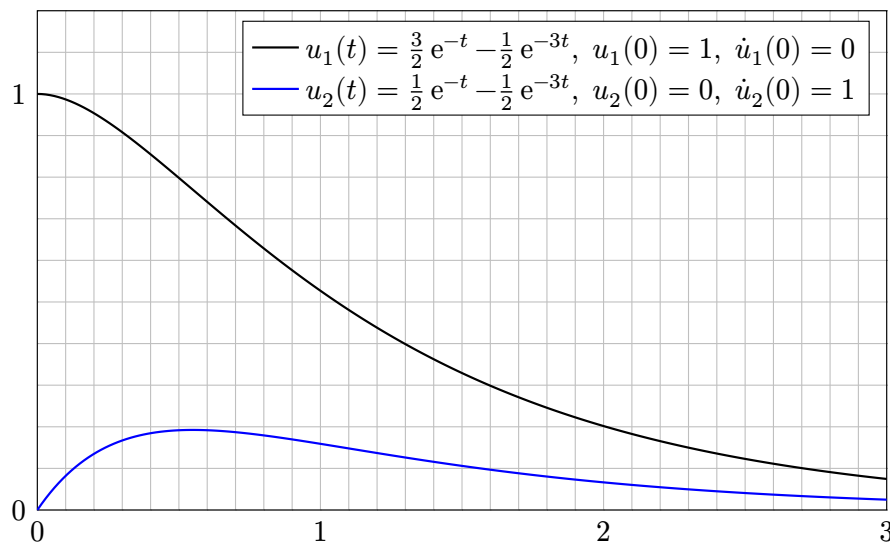
☺ Existenz und Eindeutigkeit und explizite Lösung Q2f: Dank unserer Vorbereitung kennen wir alle Lösungen über \mathbb{C} und \mathbb{R} : Zu jedem Start $(u(0), \dot{u}(0)) \in \mathbb{R}^2$ haben wir genau eine Lösung.

🕒 Ohne Theorie muss man Lösungen raten. Vornehm gesagt machen wir den Exponentialansatz $u(t) = e^{\lambda t}$. Er führt zur Gleichung $(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0$ und somit zu obigen Eigenwerten.

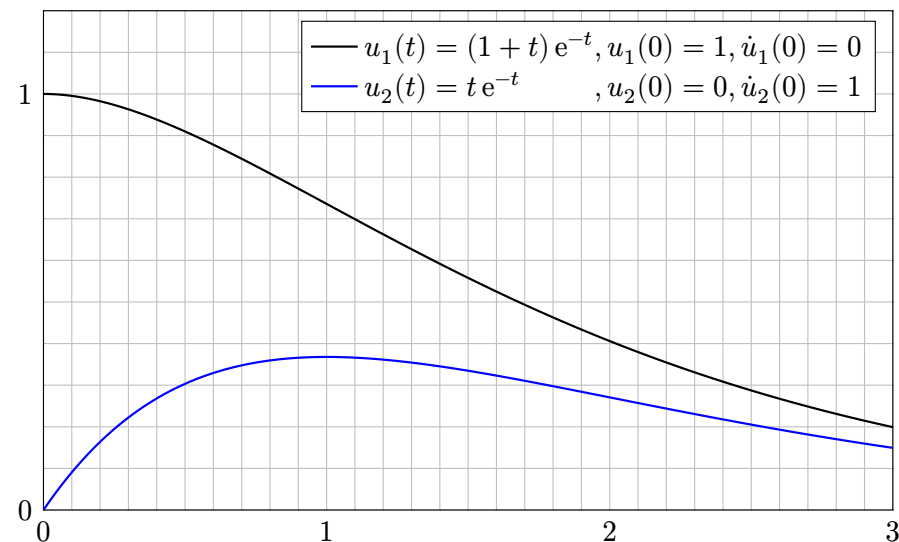
Die Masse wird durch die Federkraft zur Ruhelage zurückgezogen, aufgrund ihrer Trägheit schwingt die Masse jedoch darüber hinaus.



Dies nennt man auch den **Kriechfall**: Es gibt keine Schwingung, das System kriecht nach einer Auslenkung zur Ruhelage zurück.



Dies nennt man den **aperiodischen Grenzfall**: Er liegt genau auf der Grenze zwischen gedämpfter Schwingung und Kriechfall.



$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = a \cos(\omega_1 t)$$

Aufgabe: Gesucht ist $u(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$ mit Amplitude A und Phase φ .

Lösung: Dies ist der Realteil der komplexen Differentialgleichung

$$\ddot{z}(t) + 2\delta \dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = a e^{i\omega_1 t}$$

Der Exponentialansatz $z(t) = c e^{i\omega t}$ führt uns zur Gleichung

$$[-\omega^2 + 2\delta i\omega + \omega_0^2] c e^{i\omega t} \stackrel{!}{=} a e^{i\omega_1 t}$$

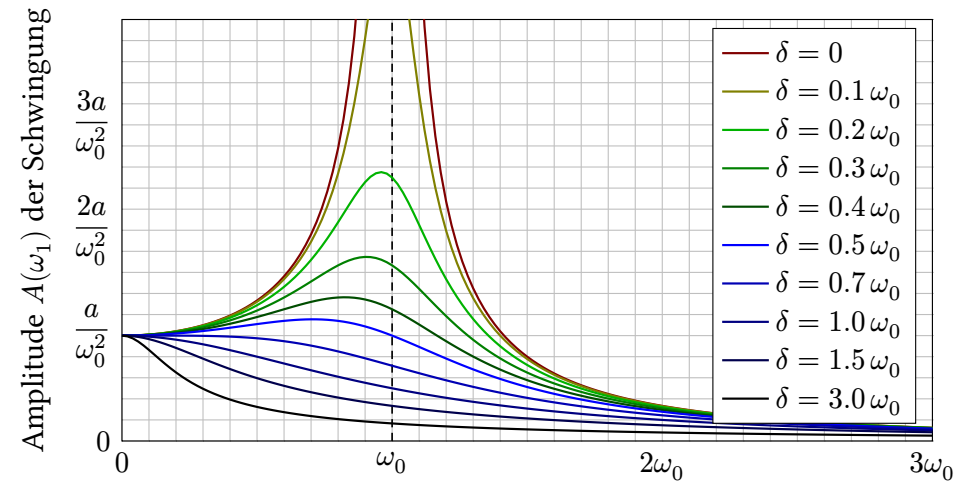
Damit finden wir $\omega = \omega_1$ und $c = a/(\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2\delta i\omega_1) \stackrel{!}{=} A e^{-i\varphi}$.

Das System reagiert mit derselben Frequenz wie die Anregung!

In Polardarstellung $c = A e^{-i\varphi}$ erhalten wir $z(t) = A e^{i(\omega_1 t - \varphi)}$ mit

$$A = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2 \omega_1^2}}, \quad \varphi = \arctan \frac{2\delta \omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2} + \begin{cases} 0 & \text{für } \omega_1 < \omega_0, \\ \pi & \text{für } \omega_1 > \omega_0. \end{cases}$$

😊 Damit haben wir die reelle Lösung $u(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$ gefunden.



Frequenz ω_1 der äußeren Anregung $f(t) = a \cos(\omega_1 t)$

Die Amplitude ist maximal für $\omega_1^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$ bzw. $\omega_1 = 0$ falls $2\delta^2 > \omega_0^2$. Die **Resonanz** ist dabei umso stärker, je kleiner die Dämpfung δ ist. Für $\delta \approx 0$ und $\omega_1 \approx \omega_0$ kommt es zur **Resonanzkatastrophe**.

⚠ Im Sonderfall $\delta = 0$ und $\omega_1 = \omega_0$ schlägt unser Ansatz $c e^{i\omega t}$ fehl!

$$\ddot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = [\omega_0^2 - \omega^2] c e^{i\omega t} \neq a e^{i\omega_0 t}$$

Zur Gleichheit muss $\omega = \omega_0$ gelten, aber dann verschwindet $[\omega_0^2 - \omega^2]$.

In obiger Formel für c ist das genau die Polstelle! Hauptansatz:

$$z(t) = ct e^{i\omega t}, \quad \dot{z}(t) = c e^{i\omega t} + ct i\omega e^{i\omega t}, \quad \ddot{z}(t) = 2ci\omega e^{i\omega t} - ct\omega^2 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \ddot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = [2i\omega + t(\omega_0^2 - \omega^2)] c e^{i\omega t} \stackrel{!}{=} a e^{i\omega_0 t}$$

Durch Vergleich finden wir die Werte $\omega = \omega_0$ und $c = a/(2i\omega_0)$. Also:

$$z(t) = \frac{at e^{i\omega_0 t}}{2i\omega_0} = \frac{at \cos(\omega_0 t) + iat \sin(\omega_0 t)}{2i\omega_0} = \frac{at}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t) - i \frac{at}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t)$$

Der Realteil $u(t) = (a/2\omega_0) t \sin(\omega_0 t)$ löst $\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = a \cos(\omega_0 t)$.

⚠ Das System reagiert mit derselben Frequenz ω wie die Anregung, aber die Amplitude wächst unbeschränkt: Man nennt dies **Resonanz**.

😊 Anschaulich: Jedes Kind lernt dieses Phänomen beim Schaukeln. Die Anregungsfrequenz trifft genau eine Eigenfrequenz des Systems!

Erzwungene Schwingungen sind ein weit verbreitetes Phänomen:

- Mechanik: Schaukel, Brücke bei gleichmäßigen Schritten / Wind, Vibrationen von Fahrzeugteilen bei bestimmten Drehzahlen,
- Akustik: Tonerzeugung in Musikinstrumenten, Resonanzkörper, Mitschwingen einer nicht gespielten Saite oder einer Stimmgabel,
- Elektrotechnik: elektrischer Schwingkreis, Radioempfang, WLAN,
- Hydromechanik: Tideresonanz der Ozeane und großen Meere.

Auch die (Hochschul-)Didaktik zeigt Resonanzphänomene: Jede Lernende folgt ihrem eigenen kognitiven Bewegungsgesetz (Rückstellkraft, Trägheit, Vergessen), wird von außen durch die Lehrende angeregt auf einer vorgegebenen Frequenz (als erzwungene Bewegung, extrinsisch). Trifft die anregende Frequenz in etwa eine Eigenfrequenz (intrinsisches Interesse), so kommt es zur Resonanz: Das ist die ideale Lern- und Lehrsituation! Anregung mit zu niedriger oder zu hoher Frequenz hingegen zeigt kaum Wirkung. Auch das kennen Sie aus eigener Erfahrung. Bei hunderten Teilnehmer:innen sind die individuellen Eigenfrequenzen meist sehr breit gestreut. Egal auf welcher Frequenz ich sende, nur bei einen kleinen Teil bringt es eine Saite zum Klingen. Dieses Phänomen ist mir schmerzhaft bewusst, aber unter den gegebenen Bedingungen wohl unvermeidlich. Das erklärt auch die Bedeutung, sich aufeinander einzustellen. Ich versuche, auf verschiedenen Frequenzen zu senden, und lausche den Reaktionen. Das eigentlich Erstaunliche ist nicht, wie oft die Übertragung misslingt, sondern dass sie manchmal tatsächlich funktioniert.

Zusammenfassung: freie harmonische Schwingung

Q253

Gegeben seien reelle Konstanten $\delta, \omega_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sowie $\omega_1, a \in \mathbb{R}_{> 0}$.

Satz Q2c: freie harmonische Schwingung

(1) Die **homogene lineare Differentialgleichung**

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0$$

hat einen zweidimensionalen Lösungsraum; die allgemeine Lösung ist

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \quad \text{mit freien Konstanten } c_1, c_2 \in \mathbb{K}$$
$$= \begin{cases} e^{-\delta t} [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)] & \text{für } \delta < \omega_0 \text{ und } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \\ e^{-\delta t} [c_1 e^{-\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}] & \text{für } \delta > \omega_0 \text{ und } \lambda = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \\ e^{-\delta t} [c_1 + c_2 t] & \text{für } \delta = \omega_0 \text{ (kritische Dämpfung)}. \end{cases}$$

Diese Lösungen sind reell, also eine Basis über \mathbb{R} , ebenso über \mathbb{C} .

Anfangswerte $u(t_0)$ und $\dot{u}(t_0)$ können beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten c_1, c_2 eindeutig fest (und umgekehrt).

Zusammenfassung: erzwungene harmonische Schwingung

Q254

Satz Q2c: erzwungene harmonische Schwingung

(2) Die **inhomogene lineare Differentialgleichung**

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = a \cos(\omega_1 t)$$

hat einen zweidim. affinen Lösungsraum; die allgemeine Lösung ist

$$u(t) = u_0(t) + c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \quad \text{mit freien Konstanten } c_1, c_2 \text{ und}$$
$$u_0(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_1 t - \varphi) & \text{für } \delta > 0 \text{ oder } \omega_1 \neq \omega_0 \text{ (generisch Q249),} \\ & \text{Amplitude } A = a / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2 \omega_1^2}, \\ & \text{Phase } \varphi = \arctan[2\delta\omega_1 / (\omega_0^2 - \omega_1^2)] (+\pi), \\ \frac{at}{2\omega_1} \sin(\omega_1 t) & \text{für } \delta = 0 \text{ und } \omega_1 = \omega_0 \text{ (Resonanz Q251)}. \end{cases}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

Anfangswerte $u(t_0)$ und $\dot{u}(t_0)$ können beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten c_1, c_2 eindeutig fest (und umgekehrt).

Freie und erzwungene harmonische Schwingung

Q255

Typische Beispiele: Bei **schwacher Dämpfung** $0 < \delta < \omega_0$ gilt

$$u(t) = \underbrace{A \cos(\omega_1 t - \varphi)}_{\text{periodische Lösung}} + \underbrace{e^{-\delta t} [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)]}_{\text{Einschwingvorgang } \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty}$$

Nach Einschwingzeit sehen wir nur noch die periodische Lösung u_0 : Das System reagiert mit derselben Frequenz ω_1 wie die Anregung, mit konstanter Amplitude A und Phasenverschiebung φ wie berechnet.

Für $\omega_1 \rightarrow 0$ gilt $A \rightarrow 1/\omega_0^2$: Niedrige Frequenzen werden gedämpft.

Für $\omega_1 \rightarrow \infty$ gilt $A \rightarrow 0$: Hohe Frequenzen werden verschluckt.

Der Sonderfall $\delta = 0$ und $\omega_1 = \omega_0$ führt zur **Resonanz(katastrophe)**:

$$u(t) = \underbrace{\frac{at}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t)}_{\text{Amplitude wächst unbeschränkt}} + \underbrace{c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)}_{\text{periodisch, insbesondere beschränkt}}$$

😊 Manchmal ist genau dies erwünscht, etwa beim Radioempfang. Mit unseren Techniken lösen Sie alle Fälle vollständig und explizit.

Freie und erzwungene harmonische Schwingung

Q256
Erläuterung

Die allgemeine Lösung / Schwingung $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist die **Überlagerung** einer inhomogenen Lösung / **erzwungenen Schwingung** u_0 und einer homogenen Lösung / **freien Schwingung** $c_1 u_1 + c_2 u_2$.

Die Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ergeben sich aus Anfangsdaten $u(t_0), \dot{u}(t_0)$. Bei Dämpfung $\delta > 0$ klingen $u_1(t) \rightarrow 0$ und $u_2(t) \rightarrow 0$ exponentiell ab. Der Einfluss der Startwerte ist nach gewisser **Einschwingzeit** kaum noch spürbar, bestehen bleibt schließlich nur die **periodische Lösung** u_0 .

Im dämpfungsfreien Fall $\delta = 0$ klingen die freien Schwingungen $u_1(t) = \cos(\omega_0 t)$ und $u_2(t) = \sin(\omega_0 t)$ nicht ab. Zudem führt eine äußere Anregung mit Frequenz $\omega_1 = \omega_0$ zur **Resonanzkatastrophe**: Die Amplitude der Schwingung wächst (theoretisch) unbegrenzt.

Für **praktische Zwecke** gilt dies bereits für $\delta \approx 0$: Die Schwingungen u_1, u_2 klingen sehr langsam ab, bei realistischer Beobachtungsdauer sind Dämpfungsverluste kaum wahrnehmbar. Bei Anregung mit $\omega_1 \approx \omega_0$ kommt es zu sehr starker Resonanz, die Amplitude der erzwungenen Schwingung wächst schließlich über die Belastbarkeit des Materials.

Warum zelebriere ich dieses Beispiel so ausführlich?

Q257
Erläuterung

Aus rein mathematischer Sicht ist die obige Gleichung des harmonischen Oszillators lediglich ein einfaches Beispiel unserer allgemeinen Theorie. Dennoch haben wir gute Gründe, dies hier gebührend zu feiern:

- 😊 Phänomene von Schwingungen und Resonanzen treten auch im Alltag sehr häufig auf: Achten Sie darauf und lernen Sie zu staunen!
- 😊 Die Frage und die Antwort sind anschaulich, motivierend und intuitiv: Anders als bei anderen Gleichungen können Sie die Lösungen spüren!
- 😊 In zahlreichen naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen ist der harmonische Oszillator zentrales Modell und leuchtendes Vorbild.
- 😊 In embryonaler Form enthält das Beispiel alle Schwierigkeiten und Schönheiten der allgemeinen Theorie linearer Differentialgleichungen.
- 😊 Insbesondere zeigt es die Eleganz und geradezu die Notwendigkeit der komplexen Zahlen: Erst über \mathbb{C} wird die Sachlage klar und einfach.
- 😊 Selbst einfache Beispiele entfalten eine beachtliche Komplexität. Erst mit der zugrundeliegenden Theorie verschaffen wir uns Überblick.

Warum sind Existenz und Eindeutigkeit so wichtig?

Q258
Erläuterung

In der Geschichte der Mathematik wurde das Problem der *Existenz und Eindeutigkeit* von Lösungen erst erstaunlich spät entdeckt... und gelöst.

Im 17. Jahrhundert entwickeln Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) und Isaac Newton (1642–1726) und andere die Infinitesimalrechnung. Aus physikalisch-geometrischen Anwendungen treten dabei unmittelbar Differentialgleichungen in den Fokus des mathematischen Interesses. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen standen dabei nie in Zweifel. Umso schockierender waren daher die ersten Gegenbeispiele von Gleichungen mit mehrdeutigen Lösungen oder ganz ohne Lösung.

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) und seine Nachfolger begründeten die bis heute übliche mathematische Strenge. Existiert eine Lösung? Erst dann lohnt sich überhaupt danach zu suchen. Ist sie eindeutig? Haben wir eine, so brauchen wir nicht nach weiteren zu fahnden.

⚠️ Erst nach Klärung dieser grundlegenden Fragen können wir uns weiteren Eigenschaften und numerischen Näherungen zuwenden.

Abstrakt bedeutet... vielseitig anwendbar!

Q259
Erläuterung

Das einleitende Beispiel einer mechanischen Schwingung ist besonders anschaulich und sinnlich direkt zugänglich. Wir alle haben dies schon als Kinder spielerisch gelernt: beim Schaukeln, Seilspringen, usw.

Der elektrische Schwingkreis ist weniger sinnlich-anschaulich, doch er führt zu genau derselben Differentialgleichung! Dieselben Gleichungen und Lösungsmethoden lassen sich auf zahlreiche Probleme anwenden, die zunächst sehr verschieden anmuten, aber doch einen gemeinsamen Kern haben. Das ist das Gütesiegel für Effizienz und Denkökonomie!

Wir bestaunen und bewundern hier ein Paradebeispiel für die viel zitierte Abstraktion in der Mathematik: Sie ist kein Schimpfwort für „fern jeder Anwendung“, sondern eine Auszeichnung für „vielseitig anwendbar“. Zumindest sollte dies meiner Ansicht nach so sein. Achten Sie darauf, wenn jemand über „abstrakten Quatsch“ schimpft, vielleicht Sie selbst: Meist ist dies weniger eine objektive Aussage über den Gegenstand, sondern vielmehr das offene Bekenntnis selbstgefälliger Ignoranz.

Grundlegende Theorie, große praktische Wirkung

Q260
Erläuterung

So einfach der elektrische Schwingkreis auch erscheinen mag, er hat doch phantastische Anwendungen hervorgebracht wie den Funkverkehr, engl. *radio communication*, die unser heutiges Leben nachhaltig prägen.

Guglielmo Marconi (1874–1937) war ein italienischer Erfinder und Unternehmer. Als erstem gelangen ihm drahtlose Verbindungen über größere Entfernungen, 1903 die erste transatlantische Funkverbindung: Grußbotschaften zwischen König Edward VII. in England und Präsident Theodore Roosevelt in den USA. Marconi begründete so unter anderem den Seefunkverkehr und bekam für seine Verdienste im April 1912 eine kostenlose Passage für die Jungfernfahrt der RMS Titanic angeboten; da er jedoch Schriftverkehr erledigen wollte, nahm er drei Tage früher die RMS Lusitania, da es an Bord dieses Schiffs eine Stenografin gab. Im Jahre 1930 gründete er gemeinsam mit Papst Pius XI. Radio Vatikan.

Für seine praktischen Arbeiten erhielt er 1909 den Nobelpreis für Physik, zusammen mit Ferdinand Braun, der die theoretischen Grundlagen dazu erarbeitete. (Mehr unter de.wikipedia.org/wiki/Guglielmo_Marconi)

Satz Q2H: Struktursatz für lineare Differentialgleichungen

Gegeben seien $P \in \mathbb{K}[X]_n^1$ und $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ stetig auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Wir untersuchen die Lösungsmenge $L = \{u \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}) \mid P(\partial)u = b\}$.

(0) **Globale Existenz und Eindeutigkeit:** Zu jedem Anfangsdatum $(t_0, v_0, \dots, v_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung $u \in L$ mit $u(t_0) = v_0, \dots, u^{(n-1)}(t_0) = v_{n-1}$. Wir haben also die Bijektion

$$\Psi_{t_0} : L \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^n : u \mapsto (u(t_0), u'(t_0), \dots, u^{(n-1)}(t_0)).$$

(1) $L_0 = \{u \mid P(\partial)u = 0\}$ ist ein \mathbb{K} -linearer U Raum der Dimension n . Wir finden ein **Fundamentalsystem** $u_1, \dots, u_n \in L_0$, etwa dank Q2F:

$$L_0 = \{c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\} \cong \mathbb{K}^n$$

(2) $L = \{u \mid P(\partial)u = b\}$ ist ein \mathbb{K} -affiner U Raum der Dimension n . Für jede **Partikulärlösung** $u_0 \in L$, etwa dank Q2I/Q2J, gilt demnach:

$$L = u_0 + L_0 = \{u_0 + c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\}$$

☺ Dieser Struktursatz gibt uns einen bequemen und präzisen Überblick! Sie kennen diese Strukturaussagen von linearen Gleichungssystemen: „Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“ Diese gilt allgemein für lineare Abbildungen, hier $P(\partial) : \mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{C}^0$.

⚠ Die Menge $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ aller n -mal stetig diff'baren Funktionen ist ein \mathbb{K} -Vektorraum. Allerdings ist er unendlich-dimensional; daher greifen die so erfolgreichen Methoden der Matrizenrechnung wie etwa der Gauß-Algorithmus hier nicht. Wir müssen es anders anpacken.

☺ Glücklicherweise ist unser Lösungsraum L endlich-dimensional, und wir können allgemein die Dimension $\dim_{\mathbb{K}}(L_0) = n$ bestimmen. Bei jeder konkreten Berechnung wissen wir daher genau, wie viele Lösungen wir suchen müssen und wann wir alle gefunden haben!

☺ Die Dimension $\dim_{\mathbb{K}}(L_0) = n$ besagt $L_0 \cong \mathbb{K}^n$. Darüber hinaus sind die konkreten Isomorphismen interessant, insbesondere $\Psi_{t_0} : L \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^n$. Zu theoretischem Verständnis und praktischer Lösung von DGLungen arbeiten Analysis und Lineare Algebra auch hier wunderbar zusammen.

☺ In der Analysis lernen Sie diesen Satz von anderer Seite kennen, meist über den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf. Wir kommen hier (beinahe) ausschließlich mit Linearer Algebra aus, benötigen lediglich die Exponentialfunktion (Q2F) und die Greensche Lösungsformel (Q2j). Auch das ist raffiniert, prüfen Sie die Argumente!

Als motivierenden *Blick in die Zukunft* bewerbe ich dynamische Systeme, wunderschöne Mathematik mit starken Anwendungen in Physik und Informatik, Ingenieurwesen und Ökonomik, ... alles ist dynamisch... und als Mathematiker:in wollen Sie in die Zukunft schauen...

Diskrete Dynamik, n -schrittige Rekursion: Gesucht ist $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ mit

$$u(t+n) = f(t, u(t), \dots, u(t+n-1))$$

für alle Zeitpunkte $t \in \mathbb{N}$ und die gegebene Dynamik $f : \mathbb{N} \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$. Zum Start $(u(0), u(1), \dots, u(n-1)) \in \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung u . Lineare Dynamik bedeutet $P(s)u = b$ mit $P \in \mathbb{K}[X]_n^1$ und $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$, homogen $P(s)u = 0$. Dies lösen wir durch Hauptfolgen (Q2c).

Differentielle Dynamik hier als Differentialgleichung n -ter Ordnung: Gesucht sind n -mal stetig differenzierbare Funktionen $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{K}$ mit

$$u^{(n)}(t) = f(t, u(t), \dots, u^{(n-1)}(t))$$

für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und die gegebene Dynamik $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$. Zum Start $(u(0), u'(0), \dots, u^{(n-1)}(0)) \in \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung u . Lineare Dynamik bedeutet $P(\partial)u = b$ mit $P \in \mathbb{K}[X]_n^1$ und $b : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{K}$, homogen $P(\partial)u = 0$. Dies lösen wir durch Hauptfunktionen (Q2f).

☺ Diskrete und differentielle Dynamik verhalten sich erfreulich ähnlich. Das ist willkommen für die Anschauung und gegenseitiges Verständnis. Die Numerik nutzt Diskretisierung zur rechnerischen Vereinfachung, die Analysis nutzt umgekehrt den Limes $\Delta t \rightarrow 0$ zur Idealisierung.

☺ In beiden Fällen lassen sich die *linearen* Gleichungen besonders schön und explizit lösen und der gesamte Lösungsraum perfekt strukturieren. Zum Beweis des Struktursatzes Q2H fehlt uns nur noch die Konstruktion einer Lösung u zu $P(\partial)u = b$, speziell Q2i oder allgemein Q2j.

Satz Q21: Lösungsformel für exponentielle rechte Seiten

Sei $P \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$P(\partial) u(t) = e^{\mu t}.$$

(0) Gilt $P(\mu) \neq 0$, so haben wir die **Eigenlösung**

$$u_0(t) = e^{\mu t} / P(\mu).$$

(1) Ist μ eine k -fache Nullstelle des Polynoms P , so sprechen wir von **k -facher Resonanz** und erhalten die **Hauptlösung**

$$u_0(t) = e^{\mu t} t^k / P^{(k)}(\mu).$$

(2) Dank **Superposition** lösen wir damit auch rechte Seiten der Form

$$e^{\sigma t} \cos(\omega t) = \frac{1}{2} [e^{(\sigma+i\omega)t} + e^{(\sigma-i\omega)t}],$$

$$e^{\sigma t} \sin(\omega t) = \frac{1}{2i} [e^{(\sigma+i\omega)t} - e^{(\sigma-i\omega)t}].$$

Satz Q21: Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten

Seien $P, R \in \mathbb{K}[X]$ Polynome. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$P(\partial) u(t) = e^{\mu t} R(t).$$

(3) Ist μ eine k -fache Nullstelle von P , so existiert eine Lösung

$$u_0(t) = e^{\mu t} t^k Q(t)$$

mit einem eindeutigen Polynom $Q \in \mathbb{K}[X]$ vom Grad $\deg Q = \deg R$.

(4) Dieser Ansatz gelingt ebenso für rechte Seiten $e^{0t} R(t)$ sowie

$$e^{\sigma t} \cos(\omega t) R(t) = \frac{1}{2} [e^{(\sigma+i\omega)t} + e^{(\sigma-i\omega)t}] R(t),$$

$$e^{\sigma t} \sin(\omega t) R(t) = \frac{1}{2i} [e^{(\sigma+i\omega)t} - e^{(\sigma-i\omega)t}] R(t).$$

☺ Wir berechnen Q leicht durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich. Hier ist $k = 0$ erlaubt; bei $k > 0$ sprechen wir von **k -facher Resonanz**.

Aufgabe: Rechnen Sie die Lösungsformeln des Satzes sorgsam nach.

Beweis: (0) Wir haben $\partial^k e^{\mu t} = \mu^k e^{\mu t}$ und somit $P(\partial) e^{\mu t} = P(\mu) e^{\mu t}$. Im Falle $P(\mu) \neq 0$ erhalten wir die Eigenlösung $u_0(t) = e^{\mu t} / P(\mu)$.

(1) Wir zerlegen $P(X) = \tilde{P}(X)(X - \mu)^k$ mit $\tilde{P}(\mu) \neq 0$ und erhalten

$$P(\partial) [e^{\mu t} t^k] = \tilde{P}(\partial)(\partial - \mu)^k [e^{\mu t} t^k] = \tilde{P}(\partial) e^{\mu t} k! = \tilde{P}(\mu) e^{\mu t} k!$$

$$P^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \partial^j \tilde{P}(t) \cdot \partial^{k-j} (t - \mu)^k \implies P^{(k)}(\mu) = \tilde{P}(\mu) k!$$

Wir erhalten so die Hauptlösung $u_0(t) = e^{\mu t} t^k / P^{(k)}(\mu)$.

(2) Dank (0) und (1) finden wir Lösungen u_{\pm} mit $P(\partial) u_{\pm}(t) = e^{(\sigma \pm i\omega)t}$.

Dank Linearität des Operators $P(\partial)$ erhalten wir

$$P(\partial) \frac{1}{2} [u_+(t) + u_-(t)] = \frac{1}{2} [e^{(\sigma+i\omega)t} + e^{(\sigma-i\omega)t}] = e^{\sigma t} \cos(\omega t),$$

$$P(\partial) \frac{1}{2i} [u_+(t) - u_-(t)] = \frac{1}{2i} [e^{(\sigma+i\omega)t} - e^{(\sigma-i\omega)t}] = e^{\sigma t} \sin(\omega t).$$

☺ All diese rechten Seiten können wir somit leicht und explizit lösen!

Beweis: Der Satz erklärt ein Lösungsrezept: „Wenn das Problem soundso gegeben ist, dann sieht die Lösung soundso aus.“ Warum gelingt das?

Es gilt $\partial[e^{\mu t} g(t)] = e^{\mu t} (\partial + \mu)g(t)$, also $P(\partial)[e^{\mu t} g(t)] = e^{\mu t} P(\partial + \mu)g(t)$. Nach Voraussetzung gilt $P(X) = \tilde{P}(X)(X - \mu)^k$ mit $\tilde{P}(\mu) \neq 0$, also $P(\partial) [e^{\mu t} t^k Q(t)] = e^{\mu t} P(\partial + \mu)[t^k Q(t)] = e^{\mu t} \tilde{P}(\partial + \mu) \partial^k [t^k Q(t)]$. Zunächst senkt ∂^k den Grad um k , sodann erhält $\tilde{P}(\partial + \mu)$ den Grad.

$$\partial^k : t^k \mathbb{K}[t]_{<n} \simeq \mathbb{K}[t]_{<n},$$

$$P(\partial) : e^{\mu t} t^k \mathbb{K}[t]_{<n} \simeq e^{\mu t} \mathbb{K}[t]_{<n}.$$

Für unsere Differentialgleichung bedeutet das ausführlich folgendes:

Zu jedem gegebenen Polynom $R(t) = r_0 + r_1 t + \dots + r_{n-1} t^{n-1} \in \mathbb{K}[t]_{<n}$ existiert genau ein Polynom $Q(t) = q_0 + q_1 t + \dots + q_{n-1} t^{n-1} \in \mathbb{K}[t]_{<n}$, das unsere Differentialgleichung $P(\partial) [e^{\mu t} t^k Q(t)] = e^{\mu t} R(t)$ löst. QED

☺ Das ist die vertraute Wirkung der Ableitung auf Hauptfunktionen.
☺ Die praktische Berechnung gelingt durch Koeffizientenvergleich.

Satz Q2J: Greensche Fundamentallösung und Lösungsformel

Sei $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]_n^1$ ein Polynom und $b: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{K}$ stetig. Zu lösen ist die Differentialgleichung

$$P(\partial)x(t) = b(t).$$

Die homogene Gleichung $P(\partial)u = 0$ hat genau eine Lösung $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ mit den Anfangswerten $u(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0$ und $u^{(n-1)}(0) = 1$.

Wir nennen u die **Greensche Fundamentallösung**. Hieraus erhalten wir eine Lösung der inhomogenen Gleichung $P(\partial)x = b$ durch **Faltung**:

$$x(t) = \int_{\tau=t_0}^t u(t-\tau)b(\tau) d\tau.$$

Genauer ist $x: I \rightarrow \mathbb{K}$ die eindeutige Lösung der Gleichung $P(\partial)x = b$ mit verschwindenden Anfangswerten $x(t_0) = \dots = x^{(n-1)}(t_0) = 0$.

☺ Weitere erhalten wir durch Addition homogener Lösungen (Q2H).

Aufgabe: Zu lösen sei, für $-\pi/2 < t < \pi/2$, die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + x(t) = \frac{1}{\cos t} \quad \text{mit} \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

Lösung: Die allgemeine homogene Lösung ist $u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, Fundamentallösung mit $u(0) = 0$ und $\dot{u}(0) = 1$ ist $u(t) = \sin t$. Wir falten:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{\tau=0}^t \sin(t-\tau) \frac{1}{\cos \tau} d\tau = \int_{\tau=0}^t (\sin t \cos \tau - \cos t \sin \tau) \frac{1}{\cos \tau} d\tau \\ &= \int_{\tau=0}^t \sin t - \cos t \cdot \frac{\sin \tau}{\cos \tau} d\tau = \left[\tau \sin t + \cos t \cdot \ln \cos \tau \right]_{\tau=0}^t \\ &= t \sin t + \cos t \cdot \ln \cos t \end{aligned}$$

☺ Die Probe ist wie immer leicht und lohnend! Geduldig ausrechnen:

$$\dot{x}(t) = \sin t + t \cos t - \sin t \cdot \ln \cos t - \sin t$$

$$\ddot{x}(t) = \cos t - t \sin t - \cos t \cdot \ln \cos t + \sin(t)^2 / \cos t$$

Einsetzen: $\ddot{x}(t) + x(t) = \cos t + \sin(t)^2 / \cos t = 1 / \cos t$. Alles passt!

Aufgabe: Beweisen Sie Greens Lösungsformel durch Nachrechnen.

Lösung: (a) Für die Ableitung nutzen wir die Leibniz-Regel:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau=t_0}^{h(t)} f(t, \tau) d\tau = h'(t) f(t, h(t)) + \int_{\tau=t_0}^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, \tau) d\tau$$

Angewendet auf $h(t) = t$ und $f(t, \tau) = u(t-\tau)b(\tau)$ erhalten wir

$$x'(t) = \underbrace{u(0)}_{=0} b(t) + \int_{\tau=t_0}^t u'(t-\tau)b(\tau) d\tau,$$

$$x''(t) = \underbrace{u'(0)}_{=0} b(t) + \int_{\tau=t_0}^t u''(t-\tau)b(\tau) d\tau,$$

⋮

$$x^{(n-1)}(t) = \underbrace{u^{(n-2)}(0)}_{=0} b(t) + \int_{\tau=t_0}^t u^{(n-1)}(t-\tau)b(\tau) d\tau,$$

$$x^{(n)}(t) = \underbrace{u^{(n-1)}(0)}_{=1} b(t) + \int_{\tau=t_0}^t u^{(n)}(t-\tau)b(\tau) d\tau.$$

Einsetzen dieser Ableitungen in unsere Differentialgleichung ergibt:

$$\begin{aligned} &x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t) \\ &= b(t) + \int_{\tau=t_0}^t \underbrace{[u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_1u' + a_0u]}_{=0, \text{ da } u \text{ eine Lösung der homogenen DG ist}}(t-\tau)b(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Somit ist x eine Lösung der inhomogenen Gleichung $P(\partial)x = b$.

(b) Die Anfangswerte $x(t_0) = x'(t_0) = \dots = x^{(n-2)}(t_0) = x^{(n-1)}(t_0) = 0$ folgen sofort aus der Berechnung der Ableitungen (a) im Punkt $t = t_0$.

Anschauliche Erklärung wie sie in der Physik beliebt ist: Für alle $t < 0$ sei das System in seiner Ruhelage $u(t) = 0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt $u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0$, und es wird abrupt beschleunigt durch $u^{(n-1)}(0) = 1$. Man stellt sich dies als einen „Hammerschlag“ vor. Das System vollführt als sogenannte **Impulsantwort** die Bewegung $u(t)$ für alle Zeit $t \geq 0$.

Entsprechend verschoben ist $u(t-\tau)b(\tau)$ ein Hammerschlag zum Zeitpunkt τ mit Stärke $b(\tau)$. Das Integral über τ ist die Summe dieser Beiträge: Wir nutzen **Superposition** dank Linearität und erhalten so $x(t) = \int_{\tau=t_0}^t u(t-\tau)b(\tau) d\tau$ als Summe kleiner Hammerschläge $b(\tau) d\tau$. Diese Intuition liefert tatsächlich eine korrekte Lösung: Wir haben es nachgerechnet!

In vielen Anwendungen geht es um Größen $x_1(t), \dots, x_n(t) \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, deren Entwicklung durch **Differentialgleichungen** beschrieben wird:

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{cases}$$

Mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $f = (f_1, \dots, f_n)$ bündeln wir dies prägnant und übersichtlich zu einer **vektorwertigen Differentialgleichung**:

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

Gegeben ist als rechte Seite die stetige Funktion $f: \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{K}^n$ auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$, zumindest mit nicht-leerem Inneren $\overset{\circ}{G}$.

Gesucht sind alle differenzierbaren Funktionen $x: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ auf einem (maximalen) Intervall $I \subset \mathbb{R}$, die zunächst die Bedingung $(t, x(t)) \in G$ und dort die ersehnte Gleichung $x'(t) = f(t, x(t))$ für alle $t \in I$ erfüllen.

Dies führt uns zu den Grundfragen der Differentialgleichungen:

- Wie viele Lösungen gibt es? keine, eine, viele?
- Wie finden wir mindestens eine Lösung? gar alle?

Wir benötigen wie immer mehrere sich ergänzende Lösungsmethoden:

- Leistungsstarke Theorie als Grundlage: Existenz, Eindeutigkeit, ...
- Konstruktionsverfahren für Lösungen: möglichst explizit, effizient, ...
- Exakte Lösung spezieller Gleichungen, sonst numerische Näherung, ...

Bei einer **autonomen Differentialgleichung** hängt f nicht von t ab,

$$x'(t) = f(x(t))$$

Wir können autonomisieren durch Einführung von $x_0 = t$ und $f_0 = 1$.

Zeitinvarianz: Bei einer autonomen Differentialgleichung $x' = f(x)$ ist mit jeder Lösung $x: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ auch die um $\tau \in \mathbb{R}$ verschobene Funktion $\tilde{x}: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{K}^n: \tilde{x}(t) = x(t - \tau)$ auf dem Intervall $\tilde{I} = I + \tau$ eine Lösung.

😊 Differentialgleichungen erster Ordnung sind universell: Wir können jede DG n -ter Ordnung auf ein DGSystem erster Ordnung reduzieren!

Reduktion: Vorgelegt sei eine **Differentialgleichung n -ter Ordnung**:

$$(1) \quad x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$$

Diese können wir umformulieren in ein **DGSystem erster Ordnung**:

$$(2) \quad \begin{cases} x_0'(t) = x_1(t) \\ x_1'(t) = x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-2}'(t) = x_{n-1}(t) \\ x_{n-1}'(t) = f(t, x_0(t), x_1(t), \dots, x_{n-1}(t)) \end{cases}$$

Übung: Rechnen Sie diesen genial-einfachen Trick sorgsam nach:
Löst $x: I \rightarrow \mathbb{K}$ die DG (1), so löst $(x, x', \dots, x^{(n-1)})$ das DGSystem (2).
Löst $(x_0, \dots, x_{n-1}): I \rightarrow \mathbb{K}^n$ das DGSystem (2), so löst x_0 die DG (1).

😊 Es genügt daher, **DGSysteme erster Ordnung** zu untersuchen! Diese Formulierung ist einfacher und erlaubt starke Werkzeuge: In jeder Dimension n gilt **Existenz & Eindeutigkeit & Stabilität** dank des Satzes von Picard-Lindelöf, den Sie in der Analysis kennenlernen.

😊 Der einfachste Fall sind **entkoppelte Gleichungen**:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(t, x_1(t)) \\ x_2'(t) &= f_2(t, x_2(t)) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= f_n(t, x_n(t)) \end{aligned}$$

Hierzu lösen wir n eindimensionale Differentialgleichungen.

⚠ Im Allgemeinen sind die gegebenen Gleichungen aber gekoppelt. Für dieses Problem benötigen wir daher passende Rechenmethoden. Hierzu nutzen wir die Werkzeuge der Analysis und der Linearen Algebra, insbesondere Eigen- und Hauptvektoren, wie wir gleich sehen werden.

Aufgabe: Nennen Sie die Bewegungsgleichung für Körper $k = 1, \dots, n$ mit Masse $m_k > 0$, Position $u_k(t) \in \mathbb{R}^3$ und Geschwindigkeit $v_k(t) \in \mathbb{R}^3$.

Lösung: Newtons Gravitationsgesetz ergibt die Differentialgleichungen

$$\dot{u}_k \stackrel{(0)}{=} v_k, \quad \dot{v}_k \stackrel{(1)}{=} f_k(u) \stackrel{(2)}{=} \sum_{j \neq k} \gamma m_j (u_j - u_k) / |u_j - u_k|^3.$$

Vorgegeben sind die Anfangsdaten $u_k(0)$ und $v_k(0)$ zur Zeit $t = 0$.

Als Lösung gesucht ist die Bewegung $(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{6n}$.

Erlaubt ein so komplexes System immer genau eine Lösung? Ja, das ist der zentrale \exists &E-Satz! Kollision oder Expulsion nach ∞ sind möglich: Eventuell existiert die Lösung nur für eine kurze Zeit $T > 0$. Für manche Startwerte sind Lösungen periodisch, oder beinahe: Zu unserem Glück!

- ☺ Den Fall $n = 2$ lösen Kegelschnitte: Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln.
- ☹ Für $n \geq 3$ lässt sich dieses DGSystem i.A. nicht geschlossen lösen!
- ☺ Euler-Verfahren: diskrete Zeitschritte $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$,

$$u_k(t_{i+1}) \approx u_k(t_i) + v_k(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i),$$

$$v_k(t_{i+1}) \approx v_k(t_i) + f_k(u) \cdot (t_{i+1} - t_i).$$

Das Verständnis der **Himmelsmechanik** markiert den Übergang vom Mittelalter zur Neuzeit.

Die Beobachtung des Nachthimmels und seiner Sterne fasziniert uns Menschen seit Alters her. Neben den zahlreichen „Fixsternen“ (weit entfernte Sterne) erkennen wir einige „Wandelsterne“ (Planeten unseres Sonnensystems). Ihre Bewegung lässt Regeln erahnen, doch für Wandelsterne scheinen diese zunächst kompliziert und verwirrend. Sie quantitativ zu erfassen und gründlich zu verstehen, ist einer der großen Triumphe menschlicher Neugier und systematischer Forschung!

Von der Erde besehen scheinen sich alle Sterne um uns zu drehen, doch die exakte Bewegung der Planeten erweist sich als schrecklich kompliziert. Kopernikus' heliozentrisches Modell (1543) ist einfacher, daher nützlicher: Die Bahnen der Planeten um die Sonne erweisen sich recht genau als Ellipsen. Diese Koordinatentransformation hat enorme Wirkung und schreibt Weltgeschichte!

Aus Tycho Brahes präzisen **Beobachtungsdaten** leitete Johannes Kepler drei Gesetze ab, die die Ellipsenbewegung der Planeten um die Sonne gut *beschreiben*. Eine *Erklärung* der Bewegungen durch einheitliche physikalische Prinzipien gelang erst Isaac Newton 1686 mit seinen Principia!

Die moderne Naturwissenschaft beginnt mit Newtons Formulierung der drei Bewegungsgesetze, des universellen Gravitationsgesetzes und seiner Lösung des Zwei-Körper-Problems. Mit einer Handvoll physikalischer Prinzipien und den passenden mathematischen Werkzeugen konnte er die Keplerschen Regeln *erklären*, ja *herleiten*. Newtons revolutionäre Idee: Überall im Universum gelten dieselben Gesetze! Newtons Mechanik erklärt die Schwerkraft hier auf Erden ebenso wie außerirdische Phänomene: den Umlauf der Planeten um die Sonne und des Mondes um die Erde, sogar die Gezeiten unserer Meere, ebenso die Coriolis-Kraft und das Foucaultsche Pendel.

Allein schon das obige Differentialgleichungssystem zu formulieren, ist eine Meisterleistung der Mathematik und Physik der Neuzeit. Wir nennen dies **Himmelsmechanik** und sind völlig zu Recht stolz auf sie: Mathematische Sprache und Werkzeuge erleuchten die gesamte Entwicklung und ebnen den Weg von Beobachtung über Erklärung und Berechnung bis zur Raumfahrt.

Auch nach über 300 Jahren sind Newtons Gleichungen immer noch nützlich wie am ersten Tag! Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen. Solide mathematische Arbeit hat eine extrem lange Wirksamkeit. Daher lohnt es sich auch für Sie heute, in mathematische Grundlagen zu investieren und diese wirksamen Werkzeuge zu erlernen, anzuwenden und fortzuführen.

Die drei Fälle $n = 1$ und $n = 2$ sowie $n \geq 3$ sind sehr verschieden! Für einen einzigen Körper ($n = 1$) enthalten Newtons Gleichungen $\dot{u}_1 = v_1$ und $\dot{v}_1 = 0$ keine gravitative Wechselwirkung. Ihre Lösung ist eine **geradlinige Bewegung**, nämlich $u_1(t) = u_1(0) + v_1 t$.

Ein Zwei-Körper-System ($n = 2$) wie Sonne-Erde oder Erde-Mond ist bereits ausgesprochen interessant. Newton konnte seine Gleichungen hier gut lösen, sie ergeben Ellipsenbahnen und erklären die Keplerschen Gesetze. Allgemeiner sind auch Parabeln und Hyperbeln als Lösungen möglich, je nach Anfangsdaten $u_1(0), v_1(0), u_2(0), v_2(0)$. In allen Fällen gelingt die Lösung hier noch in geschlossener Form. Man nennt ein solches System **vollständig integrabel**. [??]

Newton betrachtete anschließend das Drei-Körper-System Sonne-Erde-Mond. Dies entzog sich jedoch hartnäckig einer Lösung und wurde zum berühmtesten offenen Problem der Mathematik. Das **Drei-Körper-Problem** gilt bis heute als eines der schwierigsten Probleme, die zahlreichen Anstrengungen zu seiner Lösung erfordern und erzeugen immer wieder wichtige neue Methoden.

Für künstliche Satelliten wird das **zirkuläre restringierte Drei-Körper-Problem** (CR3BP) sehr ausgiebig untersucht: Zwei massereiche Körper umrunden sich kreisförmig, während der dritte Körper nahezu masselos ist. Hier findet man die berühmten fünf Lagrange-Punkte. [??]

Nur wenige und sehr spezielle Sonderfälle des n -Körper-Problems sind geschlossen lösbar. Auch diese haben ihren eigenen Reiz: Seit 1994 wurden zahlreiche **Choreographien** entdeckt, in denen n Körper symmetrisch angeordnet werden und dann periodische Bahnen durchlaufen. Für generische Anfangsdaten hingegen ist die Bewegung **chaotisch** und kann nur numerisch annähernd berechnet werden. 📺 *Solving the Three Body Problem*, youtu.be/et7XvBenEo8.

Zum Kontrast untersuchen und vergleichen wir zwei klassische Anwendungen der Mechanik: Einerseits gekoppelte **lineare Systeme** wie harmonische Oszillatoren [Q313] [Q373], andererseits Planetenbewegung und ähnliche **nicht-lineare Systeme**. Nicht-lineare Systeme sind schwierig und verhalten sich oft chaotisch. Lineare Systeme sind besonders gutartig und einfach zu lösen. Daher sollten Sie Linearität erkennen und wertschätzen, verstehen und nutzen lernen!

Auch nicht-lineare Systeme lassen sich mitunter gut lösen, wie einfache Beispiele zeigen. Dies sind aber Ausnahmen und seltene Glücksfälle. Typischerweise sind nicht-lineare Systeme nicht geschlossen lösbar. Es bleibt dann nur die **numerische Approximation** mit Hilfe geeigneter Näherungsverfahren, z.B. das Euler-Verfahren oder besser gleich das Runge-Kutta-Verfahren. Mehr hierzu erfahren Sie in der Numerik. Aufbauend auf den mathematischen Grundlagen können Sie die Numerik von Differentialgleichungen nutzen und wo nötig vertiefen.

Allgemeine Grundlagen und konkrete Anwendungen ergänzen sich wunderbar.

Definition Q3A: lineares Differentialgleichungssystem über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$
 Jedes **lineare Differentialgleichungssystem** ist von folgender Form:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

Gegeben sind hier die **Koeffizienten** $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{K}$ und die **rechten Seiten** $b_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ als stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, gebündelt:

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

Gesucht sind als **Lösungen** alle Funktionen $x : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ in $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$, die die Gleichung $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ in jedem Punkt $t \in I$ erfüllen.

Beim **Anfangswertproblem** ist zudem $x(t_0) = v \in \mathbb{K}^n$ vorgegeben.
 Für $b = 0$ erhalten wir die **homogene DGL** $x'(t) = A(t)x(t)$.

Wir nennen $A(t)$ die **Koeffizientenmatrix** oder die **Systemmatrix**.
 Die rechte Seite $b(t)$ heißt auch **Inhomogenität** oder **Störterm**.

Unser Ziel ist die Bestimmung (einer Basis) des **Lösungsraums**.
 Dazu können wir explizite Lösungsformeln angeben und für wichtige Beispiele ausrechnen. Hierzu benötigen wir geeignete Techniken aus der Analysis, insbesondere die allgegenwärtige Integration.

Lineare Differentialgleichungssysteme mit **konstanten Koeffizienten** sind der allereinfachste Fall: Die Lösung der Gleichung $x'(t) = Ax(t)$ gelingt uns vollständig bereits mit den Techniken der Linearen Algebra: Wir finden eine Basis des Lösungsraums mit Hilfe der Hauptvektoren einer Jordan-Basis; die Integration tritt dabei in den Hintergrund.

Wir mobilisieren nahezu alle bisherigen Begriffe und Techniken: Vektorraum, Basis, Dimension, lineare Abbildung, Kern und Bild, Darstellung durch Matrizen, Determinante, charakteristisches Polynom, Eigenvektoren und Diagonalform, Hauptvektoren und Jordan-Form.

Zu lösen sei eine lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung:

$$(1) \quad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t)$$

Diese ist äquivalent zu einem linearen DGSystem erster Ordnung:

$$(2) \quad \begin{cases} x_0' = & x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2}' = & x_{n-1} \\ x_{n-1}' = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} + b \end{cases}$$

Das entspricht $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)$ mit zugehöriger Systemmatrix

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

Beispiel: Wir nutzen dies für gekoppelte Oszillatoren, siehe Q349.

😊 Besonders wichtig und gut zu lösen sind lineare DGSysteme $x'(t) = Ax(t) + b(t)$ mit konstanter Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

😊 Der einfachste Fall sind auch hier **entkoppelte Gleichungen**:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_1 x_1(t) \\ x_2'(t) &= a_2 x_2(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_n x_n(t) \end{aligned}$$

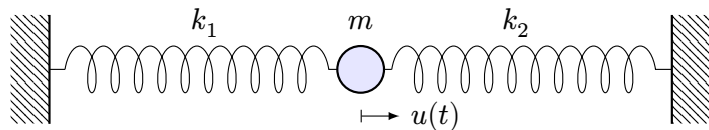
Die Lösungen $x_k(t) = c_k e^{a_k t}$ können wir sofort ausschreiben!

😊 Oft lassen sich komplexe Lösungen $e^{(\sigma \pm i\omega)t}$ leichter berechnen und dann in reelle Lösungen $e^{\sigma t} \cos(\omega t)$ und $e^{\sigma t} \sin(\omega t)$ umrechnen. Wir nutzen dies oben für den harmonischen Oszillator, siehe Q245.

⚠ Im Allgemeinen sind die gegebenen Gleichungen aber gekoppelt. Für dieses Problem benötigen wir daher passende Rechenmethoden. Hierzu nutzen wir die Werkzeuge der Analysis und Linearen Algebra!

Der harmonische Oszillator als dynamisches System

Q313
Beispiel



Aufgabe: Formulieren und lösen Sie den harmonischen Oszillator...

- (1) als eine eindimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung,
- (2) als ein zweidim. Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

Lösung: (1) Zeit $t \in \mathbb{R}$, Position $u(t) \in \mathbb{R}$, Geschwindigkeit $\dot{u}(t) \in \mathbb{R}$, Beschleunigung $\ddot{u}(t) \in \mathbb{R}$, Kraft $-\omega_0^2 u(t) - 2\delta \dot{u}(t)$, Bewegungsgesetz:

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0$$

Lösung $u(t) = e^{-\delta t} [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)]$ mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \in \mathbb{R}_{>0}$.

Die Anfangsdaten $(u(t_0), \dot{u}(t_0))$ bestimmen die Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(2) Zustand $(x_1(t), x_2(t)) = (u(t), \dot{u}(t))$, Zustandsraum \mathbb{R}^2 , DGSsystem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 & -2\delta x_2 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Der harmonische Oszillator als dynamisches System

Q314
Erläuterung

☺ Allgemeiner Trick: Reduktion von höherer auf erste Ordnung! [Q311]

☺ DGSsystem erster Ordnung = Vektorfeld auf dem Zustandsraum!

Der harmonische Oszillator dient uns weiterhin als zentrales Modell:

Es ist besonders einfach und anschaulich, lässt sich leicht lösen,

und zeigt im Prinzip bereits alle wesentlichen Phänomene! [Q245]

Wir schreiben seine Differentialgleichung zweiter Ordnung hier neu als System erster Ordnung: Das ist ein Vektorfeld auf dem Zustandsraum!

Jedes solche Richtungsfeld ist geometrisch besonders anschaulich als ein „Fluss“, und dies nützt ebenso in der Analysis und der Numerik.

Lösungskurven des DGSsystems sind die Trajektorien: Die nächsten beiden Graphiken zeigen den nicht bzw. schwach gedämpften Fall.

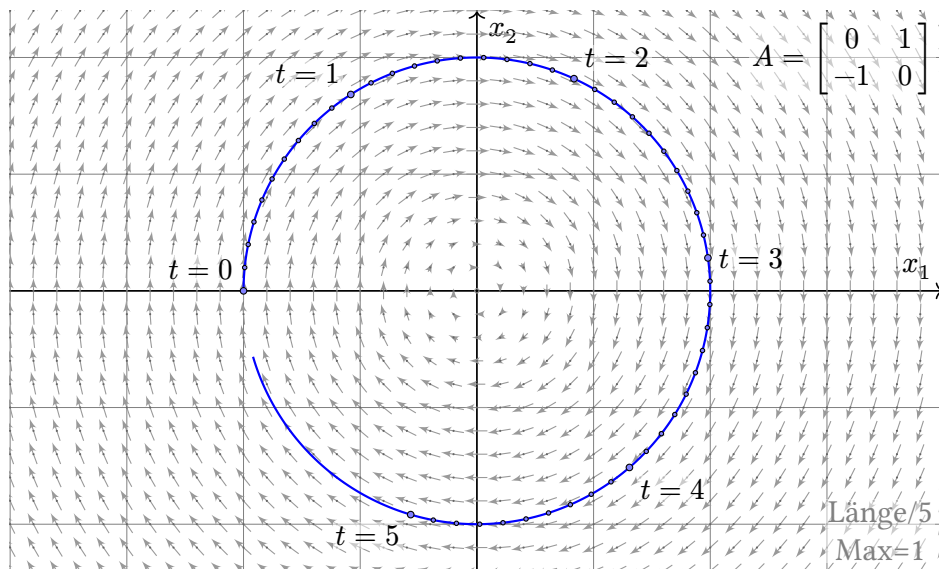
Hierzu kennen wir bereits die exakten Lösungen. [Q253]

Die dritte Graphik zeigt mehrere numerische Näherungen durch das Euler-Verfahren: Solche Näherungen sind nützlich, wenn wir keine exakte Lösung kennen oder mühsam beschaffen wollen, und nötig, wenn gar keine Lösungsformel in geschlossener Form existiert.

Der harmonische Oszillator im Zustandsraum \mathbb{R}^2

Q315
Beispiel

Harmonischer Oszillator, keine Dämpfung $\delta = 0$, zum Beispiel $\omega_0 = 1$:

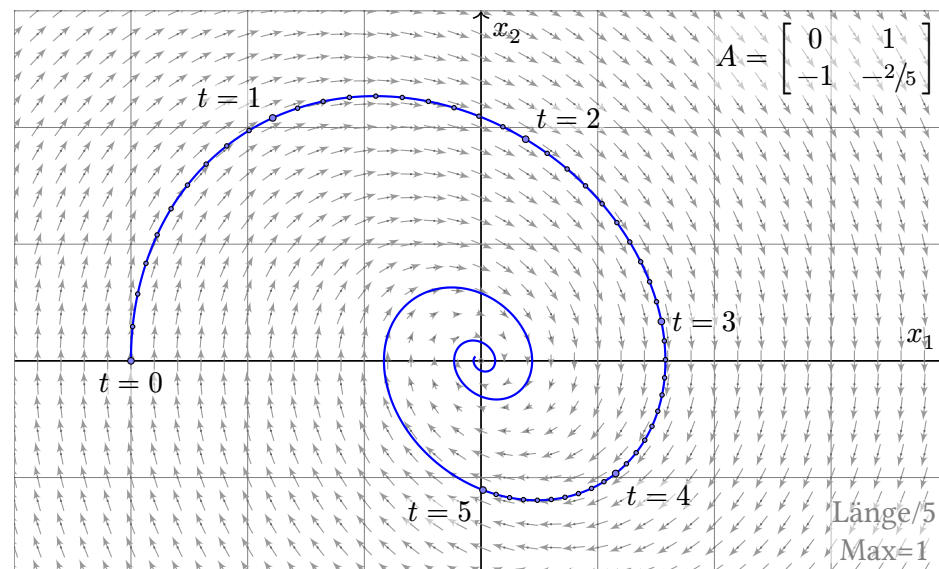


Kein Energieverlust, daher sogar Rückkehr in den Anfangszustand.

Der harmonische Oszillator im Zustandsraum \mathbb{R}^2

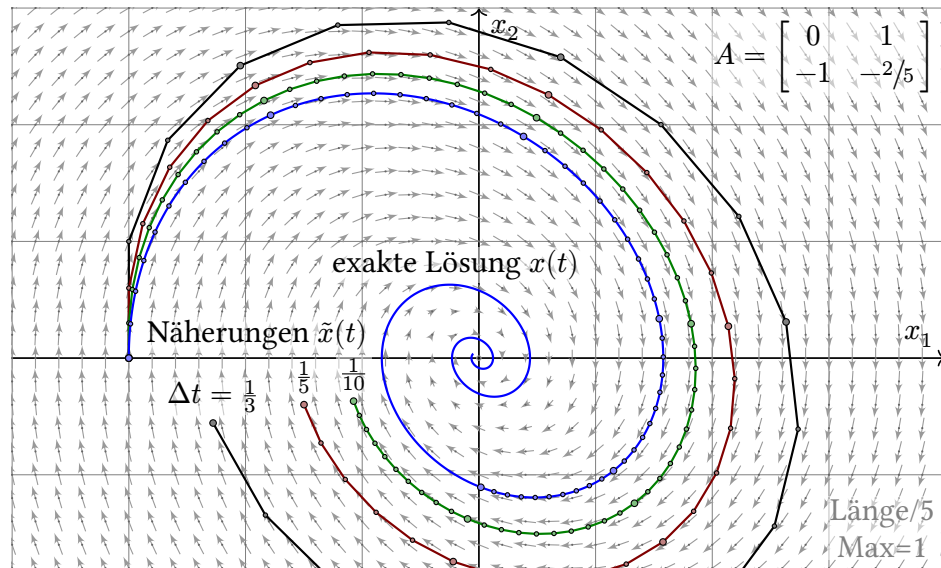
Q316
Beispiel

Schwache Dämpfung $0 < \delta < \omega_0$, zum Beispiel $\delta = 1/5$ und $\omega_0 = 1$:



Echter Energieverlust, daher keine Rückkehr in den Anfangszustand.

Approximation durch das Euler-Verfahren mit Schrittweite $\Delta t = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$:



Wir erkennen graphisch den Rechenaufwand und Approximationsfehler.

Zu lösen sei ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0$$

☺ Dies ist im Wesentlichen ein Vektorfeld f auf dem Zustandsraum!

Gesucht ist eine Lösungskurve $x(t)$, die die obige Gleichung erfüllt.

Das **Euler-Verfahren** verschafft uns eine numerische Näherung \tilde{x} :

Wir wählen Zeitschritte $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ mit $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$.

Am einfachsten äquidistant $t_i = t_0 + i\Delta t$ mit fester Schrittweite $\Delta t > 0$.

Die Ableitung \dot{x} approximieren wir durch den **Differenzenquotienten**:

$$\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \approx \dot{x}(t_i) \stackrel{!}{=} f(t, x(t_i))$$

Damit berechnen wir Näherungswerte $\tilde{x}(t_1), \tilde{x}(t_2), \tilde{x}(t_3), \dots$ rekursiv:

$$\tilde{x}(t_{i+1}) = \tilde{x}(t_i) + f(t_i, \tilde{x}(t_i)) \cdot (t_{i+1} - t_i) \quad \text{für } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Unter geeigneten Bedingungen existiert genau eine Lösung $x(t)$ und die Euler-Approximation $\tilde{x}(t)$ kommt für kleine Schrittweiten beliebig nahe.

Geometrische Voraussetzungen für das Euler-Verfahren:

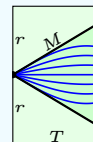
Sei $I = [t_0, t_0 + T] \subset \mathbb{R}$ ein Zeitintervall der Länge $T > 0$.

Sei $K = \bar{B}(x_0, r) \subset \mathbb{K}^n$ der Ball um x_0 mit Radius $r > 0$.

Sei $f: I \times K \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig, somit beschränkt, also $|f| \leq M$.

Hierbei gelte $T \cdot M \leq r$, notfalls verkleinern wir T und I .

Dies garantiert, dass Lösungen nicht vorzeitig aus K rauslaufen.



Gesucht ist $x: I \rightarrow K$ diff'bar mit $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$.

Das heißt: In jedem Punkt $(t, x(t))$ ist die Tangente $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$.

Euler-Approximation: Wir wählen eine Partition des Zeitintervalls

$$P = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T\}.$$

Wie oben illustriert definieren wir hierzu den **Euler-Polygonzug**

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_N \\ \tilde{x}_0 & \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_N \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i}{t_{i+1} - t_i} = f(t_i, \tilde{x}_i)$$

☺ Praktisch: Aus $\tilde{x}_0 = x_0$ berechnet man schrittweise $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N$:
Im Punkt (t_i, \tilde{x}_i) wird die Kurve in Richtung $f(t_i, \tilde{x}_i)$ weitergeschickt.

Existenz von Lösungen, Peano 1890

Zu lösen sei die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ mit $x(t_0) = x_0$.

Unter den oben erklärten geometrischen Voraussetzungen gilt:

Es existieren Partitionen $P_1, P_2, P_3, \dots \subset I$, deren Euler-Polygonzüge $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots: I \rightarrow K$ gegen eine Lösung $x: I \rightarrow K$ konvergieren.

☺ Dies garantiert Existenz von Lösungen, ☹ keine Eindeutigkeit.

☺ Die Rechnung ist für $\Delta t = T/N$ sehr leicht zu implementieren.

☹ Präzision verlangt großes N , damit wächst der Rechenaufwand.

☹ Praktisches Problem: Der Satz ist nicht konstruktiv! Gegeben $\varepsilon > 0$, wie wählt man eine Partition P , um eine ε -Approximation zu erhalten?

☺ Die Numerik untersucht und optimiert solche Näherungsverfahren.
Ziel: gute Fehlerschranken und hohe Präzision bei geringem Aufwand.

Die **Numerik der gewöhnlichen Differentialgleichungen** ist ein hoch entwickeltes Gebiet und stellt umfangreiche Werkzeuge zur Verfügung.
Lineare DGSysteme werden wir im Folgenden explizit und exakt lösen.

Aufgabe: Berechnen Sie die Exponentialfunktion $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$ der Diagonalmatrix $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sowie $\exp(At)$ für $t \in \mathbb{R}$.

Lösung: (0) Die Potenzen der Matrix A sind leicht zu berechnen:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

(1) Hieraus berechnen wir ebenso leicht die Exponentialreihe:

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

(2) Mit dem Zeitparameter $t \in \mathbb{R}$ im Exponenten erhalten wir:

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

☺ Haben Sie keine Angst vor Wörtern oder Formeln. Hier helfen Definitionen und Sätze, damit gelingen Ihnen dann die Beispiele.

Wir arbeiten entweder reell über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder komplex über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Hier können wir über Konvergenz sprechen und somit von Polynomen $\sum_{k=0}^n c_k A^k$ übergehen zu (konvergenten!) Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$.

☹ Wie berechnen wir $\exp(A)$ für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$? Zunächst haben wir die (konvergente!) Exponentialreihe $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$ als Definition. Die können wir immer einsetzen, theoretisch genügt das. In günstigen Fällen können wir sie weiter vereinfachen und explizit ausrechnen:

☺ Für jede Diagonalmatrix $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$ berechnen wir $\exp(D)$ wie oben. Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ diagonalisierbar, so gilt $T^{-1}AT = D$ nach Basiswechsel $T \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Aus $A = TDT^{-1}$ folgt dann $\exp(A) = T \exp(D) T^{-1}$.

☺ Leider ist nicht jede Matrix diagonalisierbar, doch Jordan hilft immer! Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist \mathbb{C} -jordanisierbar: Es existiert ein Basiswechsel $T \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ so, dass $J = T^{-1}AT$ in Jordan-Form ist. Wie oben können wir $\exp(J)$ berechnen. Aus $A = TJT^{-1}$ folgt $\exp(A) = T \exp(J) T^{-1}$.

Aufgabe: Berechnen Sie $\exp(Nt)$ eines nilpotenten Jordan-Blocks.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dots$$

Lösung: (1) Hier gilt $N^4 = 0$, die Exponentialreihe bricht also ab:

$$\exp \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{N^0}{0!} + \frac{N^1}{1!} + \frac{N^2}{2!} + \frac{N^3}{3!} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) Mit dem Zeitparameter $t \in \mathbb{R}$ im Exponenten erhalten wir:

$$\exp(Nt) = N^0 \frac{t^0}{0!} + N^1 \frac{t^1}{1!} + N^2 \frac{t^2}{2!} + N^3 \frac{t^3}{3!} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe: Berechnen Sie $\exp(Bt)$ eines allgemeinen Jordan-Blocks

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}.$$

Lösung: (1) Wir haben $B = D + N$ mit $D = \lambda I$. Dank $DN = ND$ folgt:

$$\exp(B) \stackrel{\text{Q323}}{\stackrel{(\S)}{=}} \exp(D) \exp(N) = e^{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) Mit dem Zeitparameter $t \in \mathbb{R}$ im Exponenten erhalten wir:

$$\exp(Bt) \stackrel{\text{Q323}}{\stackrel{(\S)}{=}} \exp(Dt) \exp(Nt) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Satz Q3B: die Exponentialfunktion für Matrizen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

0 Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ konvergiert die **Exponentialreihe**

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \dots$$

1 Zudem gilt der Euler-Grenzwert $(I + \frac{1}{n}A)^n \rightarrow \exp(A)$ für $n \rightarrow \infty$.

Die so definierte **Matrix-Exponentialfunktion** $\exp : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ hat die von $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vertrauten Eigenschaften:

- 2 Die Nullmatrix 0 wird auf die Einheitsmatrix $\exp(0) = I$ abgebildet.
- 3 Aus $AB = BA$ folgt $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$.
- 4 Insbesondere gilt also $\exp(A)\exp(-A) = \exp(A - A) = \exp(0) = I$. Somit ist die Matrix $\exp(A)$ invertierbar mit $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.
- 5 Die Zuordnung $t \mapsto \exp(tA)$ definiert eine differenzierbare Kurve in $\text{GL}_n \mathbb{K} \subset \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $0 \mapsto I$ und $\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA)$.

Satz Q3B: die Exponentialfunktion für Matrizen

Die Exponentialfunktion verträgt sich zudem mit Matrix-Operationen:

- 6 Transposition: $\exp(A^T) = \exp(A)^T$
- 7 komplexe Konjugation: $\exp(\bar{A}) = \overline{\exp(A)}$
- 8 Konjugation: $\exp(T^{-1}AT) = T^{-1}\exp(A)T$
- 9 Determinantenformel: $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$

Übung: Rechnen Sie alle Aussagen dieses Satzes sorgsam nach!

Dies gelingt wörtlich genauso wie für die reelle Exponentialfunktion.

Die Techniken der Analysis benötigen Sie vor allem für die Konvergenz (0,1). Alle weiteren Aussagen (2–9) erhalten Sie, indem Sie termweise rechnen – und dies dürfen Sie: Potenzreihen verhalten sich (innerhalb ihres Konvergenzbereichs) wie Polynome (von unendlichem Grad).

⚠ In $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ kommutieren je zwei Elemente, daher spüren Sie dort von der Kommutativität (3) nichts. Für Matrizen ist sie jedoch wesentlich.

🔗 Wir wollen eine Norm $\|A\|$ für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ erklären. Beispiel: Die **Frobenius-Norm** von Matrizen entspricht der euklidischen Norm:

$$\|\cdot\|_F = \|\cdot\|_F : \mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R} : A \mapsto \|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

Auf $\mathbb{K}^{m \times n}$ ist dies eine Norm (N0–3) und zudem submultiplikativ (N4):

- N0: $\|A\| \geq 0 = \|0\|$ (Positivität)
 N1: $\|A\| > 0$ für $A \neq 0$ (Definitheit)
 N2: $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ (Homogenität)
 N3: $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (Dreiecksungleichung)
 N4: $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ (Submultiplikativität)

Letzteres gilt für komponierbare Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n \times r}$. Jede Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (N0–4) für alle Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{K}$ nennen wir eine **Matrixnorm**.

😊 Damit klären wir nachfolgend all unsere Fragen der Konvergenz... und ernten anschließend die wunderbaren algebraischen Eigenschaften!

Aufgabe: (0) Folgern Sie die Konvergenz der Matrix-Exponentialreihe.

Lösung: (a) Wir zeigen zuerst die absolute Konvergenz dieser Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \stackrel{N_2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \stackrel{N_4}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \stackrel{\text{Def}}{=} \exp(\|A\|) < \infty$$

(b) Der Raum $\mathbb{K}^{n \times n}$ ist Cauchy-vollständig bezüglich der Norm $\|\cdot\|$.

(c) Dank (a) konvergiert die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$ absolut, und dank (b) konvergiert sie auch in $\mathbb{K}^{n \times n}$. Zudem gilt die Abschätzung:

$$\|\exp(A)\| \stackrel{\text{Def}}{=} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \stackrel{N_3}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \stackrel{(a)}{\leq} \exp(\|A\|)$$

😊 Für konvergente Potenzreihen gelten wunderschöne Rechenregeln: Sie verhalten sich (innerhalb ihres Konvergenzbereichs) wie Polynome! Insbesondere dürfen wir solche Reihen umordnen, termweise addieren, multiplizieren und differenzieren – wie von Polynomen vertraut. Genauer hierzu lernen Sie im ersten Studienjahr der Analysis.

(1) Den Euler-Grenzwert $(1 + a/n)^n \rightarrow \exp(a)$ kennen Sie für $a \in \mathbb{K}$. Daraus folgt dieser Grenzwert sofort für jede Diagonalmatrix, dann für jede diagonalisierbare Matrix. Mit etwas Mühe zeigt man den Grenzwert ebenso für jede Jordan-Matrix, dann für jede jordanisierbare Matrix. (Wenn Sie möchten, führen Sie es aus als Übung zur Jordanisierung.)

Die Aussage (2) des Satzes hingegen ist klar, denn wir haben:

$$\exp(0) \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} \stackrel{\text{Def}}{=} I + 0 + 0 + \dots = I$$

Dank Funktionalgleichung (3) folgt daraus die Inversionsformel (4):

$$\exp(A) \exp(-A) \stackrel{(4)}{=} \exp(A - A) \stackrel{(2)}{=} I$$

Somit ist die Matrix $\exp(A)$ invertierbar mit $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Wir kommen nun zu den interessanten Aussagen (3) und (5). Diese haben wir in den obigen Beispielen bereits in Aktion gesehen. Nun wollen wir diese nützlichen Rechenregeln allgemein beweisen.

Aufgabe: (3) Für je zwei kommutierende Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ gilt:

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) \quad \text{falls} \quad AB = BA.$$

Lösung: Dank (a) Umordnungssatz und (b) binomischem Lehrsatz gilt

$$\begin{aligned} \exp(A) \exp(B) &\stackrel{\text{Def}}{=} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right] \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B^\ell}{\ell!} \right] \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A^k B^\ell}{k! \ell!} \\ &\stackrel{(a)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+\ell=n} \frac{A^k B^\ell}{k! \ell!} \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\ &\stackrel{(b)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A + B)^n \stackrel{\text{Def}}{=} \exp(A + B). \end{aligned}$$

☺ Dies entspricht dem **Potenzgesetz**, daher die Kurzschreibweise

$$e^A := \exp(A) \quad \text{und} \quad e^{A+B} = e^A e^B.$$

☺ Das ist wörtlich die Rechnung für die reelle Exponentialfunktion!

Aufgabe: (5) Aus der Exponentialreihe folgt die **Ableitungsregel**

$$\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA).$$

Lösung: Dank (a) Ableitungsregel für Potenzreihen gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp(tA) &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \stackrel{(a)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{t^k}{k!} A^k \\ &\stackrel{\text{Abl}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k \stackrel{\text{Ind}}{=} A \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j \stackrel{\text{Def}}{=} A \exp(tA). \end{aligned}$$

Wir nutzen hier die Indexverschiebung $k = j + 1$, umgekehrt $j = k - 1$.

☺ In Kurzschreibweise erhalten wir die vertraute Formel

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}.$$

☺ Das ist eine der definierenden Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Aufgabe: Beweisen Sie sorgsam die Aussagen (6–9) des Satzes Q3B.

Lösung: (6) Die Transposition ${}^T : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ quadratischer Matrizen ist ein Ringantiautomorphismus, denn es gilt $(A + B)^T = A^T + B^T$ und $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ sowie $(A^T)^T = A$ für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \exp(A^T) &\stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^N \frac{(A^T)^k}{k!} \right] \stackrel{(a)}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \right]^T \\ &\stackrel{(b)}{=} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \right]^T \stackrel{\text{Def}}{=} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right]^T \stackrel{\text{Def}}{=} \exp(A)^T \end{aligned}$$

Für die Gleichung (b) nutzen wir die Stetigkeit der Abbildung T . Wir gehen bei dieser einfachen Rechnung bewusst kleinschrittig vor, so sehen wir genau, welche Eigenschaften wirklich benötigt werden:

Für jeden stetigen Ring(anti)homomorphismus $\Phi : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt

$$\exp(\Phi(A)) = \Phi(\exp(A)).$$

(7) Die komplexe Konjugation $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$ ist ein Körperautomorphismus, denn es gilt $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ sowie $\bar{\bar{z}} = z$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$. Für Matrizen über \mathbb{C} definieren wir die komplexe Konjugation koeffizientenweise durch

$$\bar{\cdot} : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n} : A = (a_{ij}) \mapsto \bar{A} = (\bar{a}_{ij}).$$

Dies ist ein Ringautomorphismus von $(\mathbb{C}^{n \times n}, +, \cdot)$ und zudem stetig. (Warum? Nachrechnen!) Wie in (6) folgt daraus $\exp(\bar{A}) = \overline{\exp(A)}$.

(8) Für jede invertierbare Matrix $T \in \text{GL}_n \mathbb{K}$ ist die Konjugation

$$\text{conj}_T : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n} : A \mapsto T^{-1}AT$$

ein Ringautomorphismus von $(\mathbb{K}^{n \times n}, +, \cdot)$ und stetig. (Warum? Übung!) Wie in (6) folgt daraus $\exp(T^{-1}AT) = T^{-1}\exp(A)T$. Ausgeschrieben:

$$\exp(T^{-1}AT) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T^{-1}AT)^k}{k!} \stackrel{(6)}{=} T^{-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right] T = T^{-1} \exp(A)T$$

(9) Wir zeigen schließlich die bemerkenswerte Determinantengleichung

$$\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A)).$$

(9a) Wir beweisen dies zunächst für Dreiecksmatrizen. Hier gilt:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \implies A^k = \begin{bmatrix} a_{11}^k & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn}^k \end{bmatrix}$$

Damit erhalten wir ohne weitere Mühe:

$$\begin{aligned} \det \exp \begin{bmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} &\stackrel{\text{Def}}{=} \det \begin{bmatrix} \exp(a_{11}) & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \exp(a_{nn}) \end{bmatrix} \\ &\stackrel{\text{O2w}}{=} \exp(a_{11}) \cdots \exp(a_{nn}) \\ &\stackrel{(3)}{=} \exp(a_{11} + \cdots + a_{nn}) \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \exp(\text{tr}(A)) \end{aligned}$$

(9b) Über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ trigonalisierbar (Satz P3B), es existiert also ein Basiswechsel $T \in \text{GL}_n \mathbb{C}$ so, dass $T^{-1}AT$ trigonal ist. Die Determinante und die Spur bleiben dabei unverändert (Satz P2F):

$$\begin{aligned} \det(\exp(A)) &\stackrel{\text{P2F}}{=} \det(T^{-1}\exp(A)T) \stackrel{(8)}{=} \det(\exp(T^{-1}AT)) \\ &\stackrel{(9a)}{=} \exp(\text{tr}(T^{-1}AT)) \stackrel{\text{P2F}}{=} \exp(\text{tr}(A)) \end{aligned}$$

(9c) Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ können wir in $\mathbb{C}^{n \times n}$ betrachten.

Determinante und Spur bleiben dabei unverändert.

Dank (9b) gilt somit $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$.

😊 Wieder einmal fügen sich Theorie und Praxis wunderbar zusammen, solide Grundlagen führen zu hilfreichen Rechenregeln. Dazu betone ich: Im *Beweis* nutzen wir die Trigonalisierung, in *Rechnungen* jedoch nicht.

😊 Für große Matrizen ist die Berechnung der Exponentialfunktion und der Determinante im Allgemeinen sehr aufwändig. Die Berechnung der Komposition $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$ hingegen ist erfreulich leicht!

Aufgabe: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ antisymmetrisch, so gilt $Q := \exp(A) \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$.

Lösung: Antisymmetrisch bedeutet $A^T = -A$. Alle Diagonaleinträge a_{11}, \dots, a_{nn} verschwinden, also gilt $\text{tr}(A) = 0$, somit $\det Q = e^0 = 1$. Orthogonal bedeutet $QQ^T = I = Q^T Q$. Dies zeigen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} QQ^T &\stackrel{\text{Def}}{=} \exp(A) \exp(A)^T \\ &\stackrel{(6)}{=} \exp(A) \exp(A^T) \\ &\stackrel{\text{Vor}}{=} \exp(A) \exp(-A) \\ &\stackrel{(3)}{=} \exp(A - A) \stackrel{\text{Mat}}{=} \exp(0) \stackrel{(2)}{=} I \end{aligned}$$

Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ erinnern wir an die Adjunktion $A^\dagger := \overline{A}^T$.

Übung: Ist die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ antihermitesch, also $A^\dagger = -A$, so ist $Q := \exp(A)$ unitär, also $QQ^\dagger = I = Q^\dagger Q$, kurz $Q \in \text{GU}_n(\mathbb{C})$.

Die Diagonaleinträge a_{11}, \dots, a_{nn} sind rein imaginär, also $\text{tr}(A) \in i\mathbb{R}$, somit $\det Q = e^{\text{tr} A} \in \mathbb{S}^1$. Im Falle $\text{tr}(A) = 0$ gilt stärker $Q \in \text{SU}_n(\mathbb{C})$.

Aufgabe: Berechnen Sie $\exp(At)$ für $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. **Lösung:**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

Hieraus berechnen wir mühelos die Matrix-Exponentialfunktion:

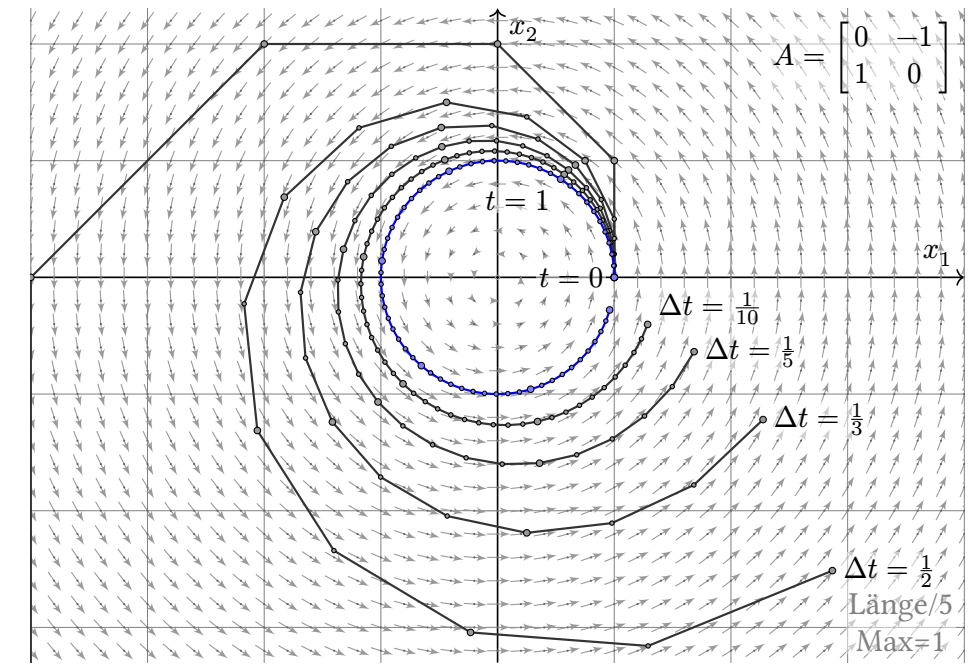
$$\exp(At) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots & -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \dots \\ t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Bemerkung: Für die Ableitung gilt wie erwartet

$$\frac{d}{dt} \exp(At) = \begin{bmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{bmatrix} = A \exp(At).$$

Das AWP $u'(t) = Au(t)$ mit $u(0) = v$ wird gelöst durch $u(t) = \exp(At)v$. Das Euler-Verfahren entspricht dem Grenzwert $(I + \frac{1}{n}A)^n \rightarrow \exp(A)$.

$$\exp \begin{bmatrix} s & -t \\ t & s \end{bmatrix} \stackrel{Q3B}{=} \exp \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \exp \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} = e^s \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$



Aufgabe: Berechnen Sie $\exp(At)$ für $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. **Lösung:**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

Hieraus berechnen wir mühelos die Matrix-Exponentialfunktion:

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots & t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \\ t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots & 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}$$

Bemerkung: Für die Ableitung gilt wie erwartet

$$\frac{d}{dt} \exp(tA) = \begin{bmatrix} \sinh t & \cosh t \\ \cosh t & \sinh t \end{bmatrix} = A \exp(tA).$$

Das AWP $u'(t) = Au(t)$ mit $u(0) = v$ wird gelöst durch $x(t) = \exp(tA)v$. Das Euler-Verfahren entspricht dem Grenzwert $(I + \frac{1}{n}A)^n \rightarrow \exp(A)$.

$$\exp \begin{bmatrix} s & t \\ t & s \end{bmatrix} \stackrel{Q3B}{=} \exp \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \exp \begin{bmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{bmatrix} = e^s \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}$$

Aufgabe: Berechnen Sie $\exp(A)$ einer 2×2 -Dreiecksmatrix.

Lösung: (0) Wir betrachten eine obere 2×2 -Dreiecksmatrix:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & (a+b)c \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} a^3 & (a^2+ab+b^2)c \\ 0 & b^3 \end{bmatrix}, \dots$$

(1) Wir nehmen zunächst $a \neq b$ an. Per Induktion finden wir dann

$$A^k = \begin{bmatrix} a^k & \frac{a^k - b^k}{a-b} c \\ 0 & b^k \end{bmatrix} \implies \exp \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^a & \frac{e^a - e^b}{a-b} c \\ 0 & e^b \end{bmatrix}.$$

(2) Resonanz: Für $b \rightarrow a$ gilt $\frac{e^a - e^b}{a-b} \rightarrow e^a$. Für $a = b$ finden wir tatsächlich:

$$A^k = \begin{bmatrix} a^k & k a^{k-1} c \\ 0 & a^k \end{bmatrix} \implies \exp \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^a & c e^a \\ 0 & e^a \end{bmatrix}.$$

Für große Matrizen ist diese Rechnung ebenso möglich, aber mühsam. Im Folgenden nutzen wir hierfür lieber Eigen- und Hauptvektoren.

◆ **Definition Q3A:** lineares Differentialgleichungssystem über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$
 Eine **lineares Differentialgleichungssystem** (DGSystem) hat die Form

$$\dot{u}(t) = A(t) u(t) + b(t).$$

Gegeben ist die Systemmatrix $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ und der Störterm $b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$, beide stetig auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Gesucht sind alle $u : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ mit stetiger Ableitung $\dot{u} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ und zeitlicher Entwicklung $\dot{u} = Au + b$, also ausgeschrieben $\dot{u}(t) = A(t) u(t) + b(t)$ für jeden Zeitpunkt $t \in I$.

Beim **Anfangswertproblem** (AWP) ist zudem eine Startzeit $t_0 \in I$ und ein Startwert / Startvektor $u(t_0) = v_0 \in \mathbb{K}^n$ vorgeben.

Mit $b = 0$ heißt unser DGSystem $\dot{u} = Au$ **homogen**, sonst **inhomogen**. Zur Vereinfachung betrachten wir **konstante Koeffizienten** $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

🤔 Wie viele Lösungen hat das AWP? keine, eine, viele? Genau eine! Das können wir nun nachrechnen und erhalten damit den \exists &E-Satz Q3c.

Nach der motivierenden Einleitung und ersten Beispielen wollen wir nun unser Vorgehen systematisieren. Als erstes präzisieren wir den Rahmen für lineare DGSysteme, aufbauend entwickeln wir eine starke Theorie und effiziente Lösungsmethoden. Nicht-lineare DGSysteme wie Newtons Himmelsmechanik sind noch allgemeiner und spannender, aber vorerst noch außerhalb unserer Reichweite. Freuen Sie sich auf die Analysis!

Beliebte Schreibweisen für die Ableitung sind $\dot{u} = u'$, $\ddot{u} = u''$, etc. Die gesuchten Funktionen heißen u oder x oder y ... je nach Kontext. Ich formuliere das DGSystem und das Anfangswertproblem (AWP). Wir dürfen $t_0 = 0$ annehmen und uns etwas Schreibarbeit sparen. Ich führe für Sie im Folgenden t_0 mit, lese es aber meist als $t_0 = 0$.

Aufgabe: Finden Sie $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ mit $u(0) = v$ und $u'(t) = Au(t)$.

Lösung: Die Funktion $u(t) = e^{At} v$ erfüllt $u(0) = v$ und $u'(t) = Au(t)$. Die Matrix-Exponentialfunktion Q3B führt uns zu direkt zu *einer* Lösung.

🤔 Wir fragen nach den vier E: existent? eindeutig? effektiv? effizient?

Aufgabe: Lösen Sie das AWP zunächst für den Spezialfall $A = 0$:

$$u(t_0) = v_0, \quad u'(t) = b(t)$$

Eindeutigkeit: Angenommen $u : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ ist eine Lösung. Dank HDI gilt:

$$\int_{\tau=t_0}^t u'(\tau) d\tau = u(t) - u(t_0)$$

Erinnerung: Wir differenzieren und integrieren immer koordinatenweise. Wir lösen nach $u(t)$ auf und setzen die Daten $u(t_0) = v_0$ und $u' = b$ ein:

$$u(t) = v_0 + \int_{\tau=t_0}^t b(\tau) d\tau$$

Existenz: Diese Integralformel konstruiert eine Lösung $u : I \rightarrow \mathbb{K}$. Probe! Differenzieren und Integrieren, hier koordinatenweise, sind zueinander invers dank HDI. Das hilft überall, schon bei einfachen Integralen und Rechnungen wie Produktregel vs partielle Integration, Kettenregel vs Substitution, uvm. Hier „integrieren“ wir damit Differentialgleichungen!

Aufgabe: Lösen Sie das AWP für das in/homogene DGSystem:

$$u(t_0) = v_0, \quad u'(t) = Au(t) + b(t)$$

Eindeutigkeit: Angenommen $u : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ ist irgendeine Lösung. Wir nutzen die Hilfsfunktion $v(t) := e^{-A(t-t_0)} u(t)$. Für sie gilt:

$$v(t_0) = u(t_0) = v_0,$$

$$v'(t) = -A e^{-A(t-t_0)} u(t) + e^{-A(t-t_0)} (A u(t) + b(t)) = e^{-A(t-t_0)} b(t)$$

Das erzwingt dank HDI wie in der vorigen Aufgabe erklärt:

$$v(t) = v_0 + \int_{\tau=t_0}^t e^{-A(\tau-t_0)} b(\tau) d\tau$$

Wenn es eine Lösung u gibt, dann nur diese: $u(t) = e^{A(t-t_0)} v(t)$.

Existenz: Wir setzen $u(t) = e^{A(t-t_0)} v(t)$ und machen die Probe:

$$u(t_0) = v(t_0) = v_0,$$

$$u'(t) = A e^{A(t-t_0)} v(t) + e^{A(t-t_0)} b(t) = A u(t) + b(t)$$

Eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

Q345

Diese elegante Rechnung ist genial einfach und einfach genial:
Zur Lösung genügen uns Exponentialfunktion und Integration!

Satz Q3c: Existenz & Eindeutigkeit & explizite Lösung durch Integration

Zu lösen sei das in/homogene DGSystem als AWP wie in Q3A definiert:

$$u(t_0) = v_0, \quad u'(t) = A u(t) + b(t)$$

Dazu existiert genau eine Lösung $u : I \rightarrow \mathbb{K}^n$. Wir haben explizit:

$$u(t) = e^{A(t-t_0)} v_0 + e^{A(t-t_0)} \int_{\tau=t_0}^t e^{-A(\tau-t_0)} b(\tau) d\tau$$

Wir können unser DGSystem eindeutig lösen, explizit durch Integration!
Das Ergebnis ist überraschend stark, der Beweis war erfreulich leicht.

Integration lernen Sie in der Analysis. Zudem müssen und wollen wir nun das Matrixexponential beherrschen und möglichst effizient ausrechnen.
Hier hilft uns die Jordan–Normalform, genau dazu wurde sie erfunden!

Eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

Q346

Aufgabe: Lösen Sie $x'_1 = -x_2$, $x'_2 = x_1$ mit $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$.

Lösung: Als erstes strukturieren wir die etwas krude Problemstellung als DGSystem mit Anfangswertproblem. Wir suchen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$x'(t) = A x(t) \quad \text{und} \quad x(0) = v \quad \text{wobei} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Das AWP hat dank Satz Q3c genau eine Lösung, nämlich explizit:

$$x(t) = e^{At} v = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

Zur Rechnung siehe Q337. Ist dies eine Lösung? Wir machen die Probe:

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) = \cos t \\ x_2(t) = \sin t \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} x'_1(t) = -\sin t = -x_2(t), \quad x_1(0) = 1 \\ x'_2(t) = \cos t = x_1(t), \quad x_2(0) = 0 \end{array} \right.$$

Dies ist tatsächlich die einzige Lösung: Das garantiert der vorige Satz!
Er beruht auf unserer obigen eleganten Rechnung zur Eindeutigkeit.

Affin-lineare Struktur des Lösungsraums

Q347

Satz Q3d: Struktursatz für lineare Differentialgleichungssysteme

Gegeben sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
Wir untersuchen die Lösungsmenge $L = \{u \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n) \mid \dot{u} = Au + b\}$.

(0) **Globale Existenz und Eindeutigkeit:** Zu jedem Anfangsdatum $(t_0, v_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung $u \in L$ mit $u(t_0) = v_0$ dank Satz Q3c. Die Auswertung in t_0 stiftet also eine Bijektion:

$$\Psi_{t_0} : L \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^n : u \mapsto u(t_0)$$

(1) $L_0 = \{u \mid \dot{u} = Au\}$ ist ein **\mathbb{K} -linearer Uraum** der Dimension n .
Wir finden ein **Fundamentalsystem** $u_1, \dots, u_n \in L_0$, etwa dank Q3c:

$$L_0 = \{c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\} \cong \mathbb{K}^n$$

(2) $L = \{u \mid \dot{u} = Au + b\}$ ist ein **\mathbb{K} -affiner Uraum** der Dimension n .
Für jede **Partikulärlösung** $u_0 \in L$, etwa dank Q3c, gilt demnach:

$$L = u_0 + L_0 = \{u_0 + c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\}$$

Affin-lineare Struktur des Lösungsraums

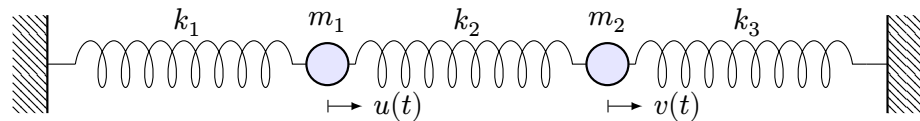
Q348
Erläuterung

☺ Dieser Struktursatz gibt uns einen bequemen und präzisen Überblick!
Sie kennen diese Strukturaussagen von linearen Gleichungssystemen:
„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“
Diese gilt allgemein für lineare Abbildungen, hier $u \mapsto \dot{u} - Au$.

⚠ Die Menge $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ aller stetig differenzierbaren Funktionen ist ein \mathbb{K} -Vektorraum. Allerdings ist er unendlich-dimensional; daher greifen die so erfolgreichen Methoden der Matrizenrechnung wie etwa der Gauß-Algorithmus hier nicht. Wir müssen es anders anpacken.

☺ Glücklicherweise ist unser Lösungsraum L endlich-dimensional, und wir können allgemein die Dimension $\dim_{\mathbb{K}}(L_0) = n$ bestimmen.
Bei jeder konkreten Berechnung wissen wir daher genau, wie viele Lösungen wir suchen müssen und wann wir alle gefunden haben!

☺ Die Dimension $\dim_{\mathbb{K}}(L_0) = n$ besagt $L_0 \cong \mathbb{K}^n$. Darüber hinaus sind die konkreten Isomorphismen interessant, insbesondere $\Psi_{t_0} : L \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^n$.
Zu theoretischem Verständnis und praktischer Lösung von DGSystemen arbeiten Analysis und Lineare Algebra auch hier wunderbar zusammen.



Zwei Massen $m_1, m_2 > 0$ sind durch Federn $k_1, k_2, k_3 > 0$ verbunden.

Aufgabe: Formulieren Sie das hier skizzierte dynamische System...

- (0) als Bewegungsgleichung sowie (1) als DGSystem erster Ordnung.
- (2) Welche Struktur hat die Lösungsmenge? (a) „Form“ und (b) „Größe“?

Lösung: (0) Auslenkungen $u(t), v(t)$ aus der Ruhelage. Kräftebilanz:

$$F_1(t) = -k_1 u(t) - k_2 [u(t) - v(t)]$$

$$F_2(t) = -k_3 v(t) - k_2 [v(t) - u(t)]$$

Bewegungsgesetz: $m_1 \ddot{u}(t) = F_1(t)$ und $m_2 \ddot{v}(t) = F_2(t)$. Hieraus folgt:

$$\ddot{u}(t) = -\frac{k_1+k_2}{m_1} u(t) + \frac{k_2}{m_1} v(t)$$

$$\ddot{v}(t) = +\frac{k_2}{m_2} u(t) - \frac{k_2+k_3}{m_2} v(t)$$

😊 Zur Vereinfachung betrachten wir keine Reibung oder äußere Kräfte.

(1) Wir haben ein (homogen lineares) DGSystem zweiter Ordnung:

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = a u(t) + b v(t) \\ \ddot{v}(t) = c u(t) + d v(t) \end{cases}$$

Neue Variablen $x_1 = u, x_2 = v, x_3 = \dot{u}, x_4 = \dot{v}$ reduzieren dies zu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \text{kurz } \dot{x} = Ax$$

Das DGSystem (1) ist einfacher als (0), da erster Ordnung. Unser System $\dot{x} = Ax$ ist homogen linear mit Systemmatrix $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$. Hier sind die Koeffizienten konstant, das heißt, sie hängen nicht von der Zeit t ab. Für solche homogen-linearen DGSysteme mit konstanten Koeffizienten entwickeln wir mit Hilfe der Linearen Algebra exakte und zudem effiziente Lösungsmethoden: Wie in der folgenden Aufgabe nutzen wir dazu Eigenvektoren und alle zugehörigen Techniken. Der grundlegende Existenz- und Eindeutigkeitsatz Q3D erklärt ganz allgemein die Struktur:

(2) Die Lösungsmenge ist (a) ein \mathbb{R} -Vektorraum (b) der Dimension 4.

Aufgabe: (3) Lösen Sie den symmetrischen Fall $m_1 = m_2, k_1 = k_3$.

(4) Welche Bewegung folgt aus $u(0) = 2, v(0) = 0, \dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0$?

Lösung: Einstweilen nutzen wir unsere physikalische Anschauung!

(3a) Der Ansatz $u = v$ entkoppelt zu $\ddot{u} = -\frac{k_1}{m_1} u, \ddot{v} = -\frac{k_1}{m_1} v$.

Lösungen: $u_1(t) = \cos(\omega_1 t)$ und $u_2(t) = \sin(\omega_1 t)$ mit $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}$.

(3b) Der Ansatz $u = -v$ entkoppelt zu $\ddot{u} = -\frac{k_1+2k_2}{m_1} u, \ddot{v} = -\frac{k_1+2k_2}{m_1} v$.

Lösungen: $u_3(t) = \cos(\omega_2 t)$ und $u_4(t) = \sin(\omega_2 t)$ mit $\omega_2^2 = \frac{k_1+2k_2}{m_1} > \omega_1^2$.

Sind wir schon fertig? Ja! Jede Lösung ist eine Linearkombination

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} u_3(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} u_4(t) \\ v_4(t) \end{bmatrix}.$$

😊 Als **Anfangswerte** zur Zeit t_0 können Position und Geschwindigkeit $u(t_0), v(t_0), \dot{u}(t_0), \dot{v}(t_0) \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ eindeutig fest (und umgekehrt).

😊 Unser DGSystem ist sehr einfach: Die Gleichungen sind linear! Linearkombinationen von Lösungen sind daher wieder Lösungen. Mit anderen Worten: Der Lösungsraum ist ein **Vektorraum** über \mathbb{R} .

😊 Unser **geschickter Ansatz** entkoppelt das Gleichungssystem: Eindimensionale Differentialgleichungen können wir bereits lösen!

Die einfache Rechnung bestätigt und präzisiert unsere physikalische Anschauung: Die Probe ist nun leicht: Einsetzen und Ausrechnen!

😊 Wir haben vier Lösungen gefunden. Diese sind **linear unabhängig**. Der Lösungsraum hat also Dimension ≥ 4 . Gibt es noch mehr?

⚠️ Wir wünschen uns ein einfaches Kriterium für Dimension = 4. Dann wüssten wir sicher: Wir haben alle Lösungen gefunden!

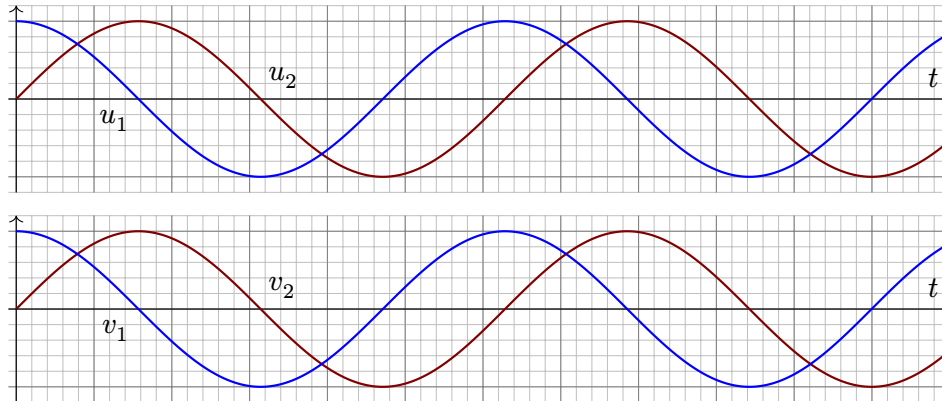
Physikalisch ist das plausibel: Jede Masse hat zur Zeit t_0 eine Position und eine Geschwindigkeit. Diese Daten sollten den weiteren Verlauf eindeutig festlegen. Wir hätten demnach genau 4 Freiheitsgrade.

😊 Diese Heuristik lässt sich mathematisch formulieren und beweisen: Es gilt der grundlegende **Existenz- und Eindeutigkeitsatz Q3D!**

Gekoppelte Oszillatoren: gleichsinnige Eigenschwingungen

Q353

Illustration für den Fall $m_1 = m_2 = 1$ und $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.
Gleichsinnige Eigenschwingungen zur Frequenz $\omega_1 = 1$:

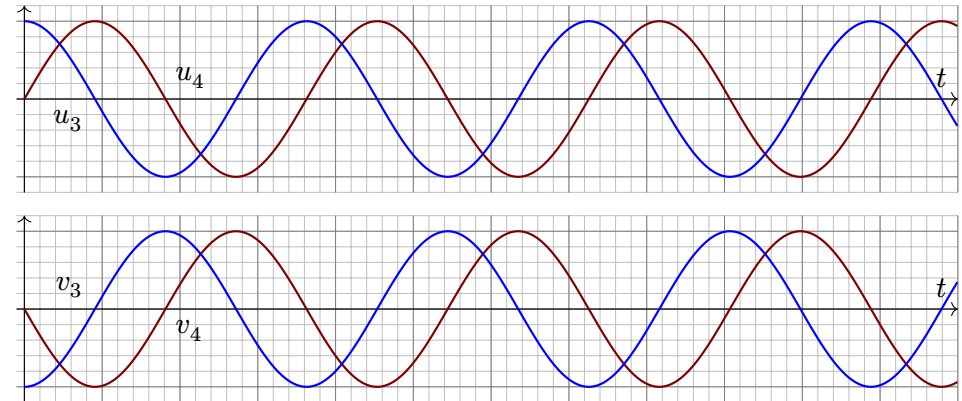


😊 Die Eigenschwingungen unseres Systems sind besonders leicht zu berechnen. Zudem erweisen sie sich als einfach und übersichtlich: Harmonische Schwingung: Jede dieser vier Lösungen ist periodisch.

Gekoppelte Oszillatoren: gegensinnige Eigenschwingungen

Q354

Illustration für den Fall $m_1 = m_2 = 1$ und $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.
Gegensinnige Eigenschwingungen zur Frequenz $\omega_2 = \sqrt{3}$:



😊 Die Frequenz der gegensinnigen Schwingung ist deutlich größer als die der gleichsinnigen Schwingung. Das ist anschaulich plausibel; probieren Sie es mal aus! Nun können wir es sogar präzise ausrechnen.

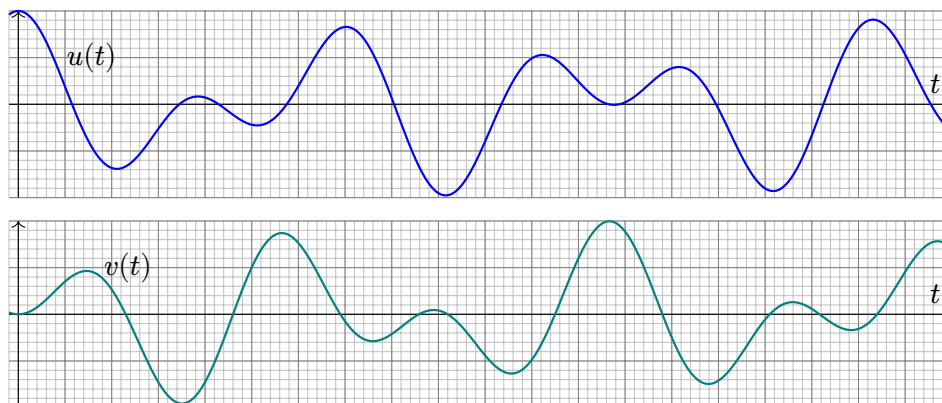
Überlagerung von Eigenschwingungen

Q355

(4) Diese Linearkombination von Eigenschwingungen löst das AWP:

$$u(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{3}t), \quad u(0) = 2, \quad \dot{u}(0) = 0$$

$$v(t) = \cos(t) - \cos(\sqrt{3}t), \quad v(0) = 0, \quad \dot{v}(0) = 0$$



⚠ Diese Bewegung ist nicht periodisch! Sie scheint zuerst kompliziert, ist aber nur die Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen.

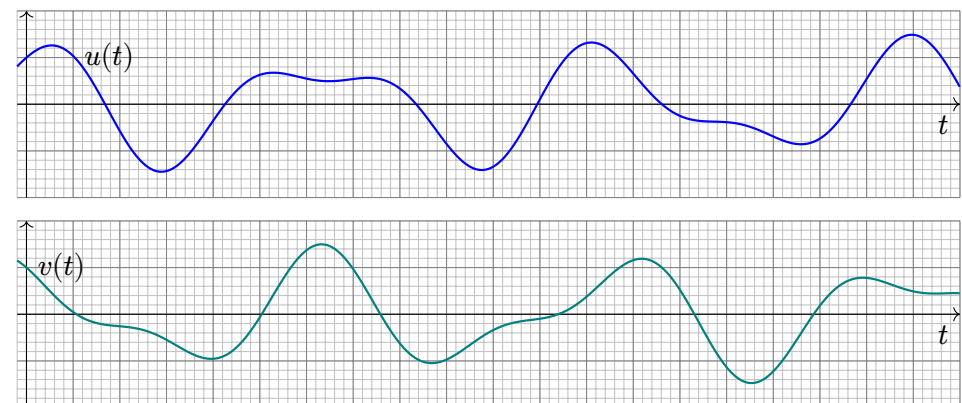
Überlagerung von Eigenschwingungen

Q356
Erläuterung

Zur Illustration eine weitere Linearkombination der Eigenschwingungen:

$$u(t) = \cos(t) + \frac{1}{2} \sin(\sqrt{3}t)$$

$$v(t) = \cos(t) - \frac{1}{2} \sin(\sqrt{3}t)$$



😊 Die Anfangswerte $u(0)$, $\dot{u}(0)$ sowie $v(0)$, $\dot{v}(0)$ können beliebig vorgegeben werden; sie legen den weiteren Verlauf eindeutig fest.

Schwache Kopplung führt zu Schwebungen.

Q357



Aufgabe: Was geschieht bei schwacher Kopplung, für $0 < k_2 \ll k_1 = k_3$?

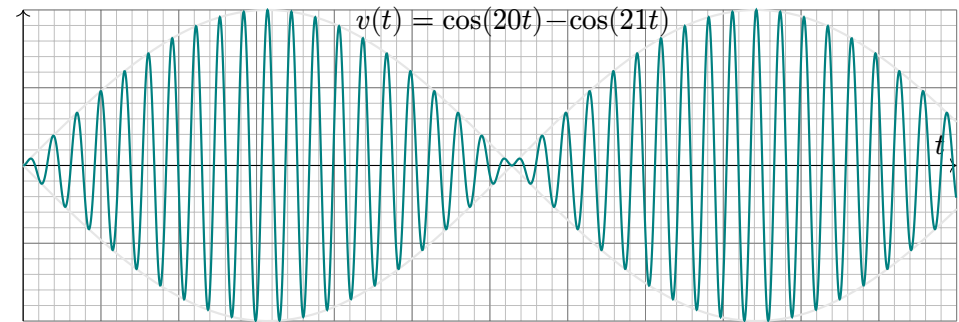
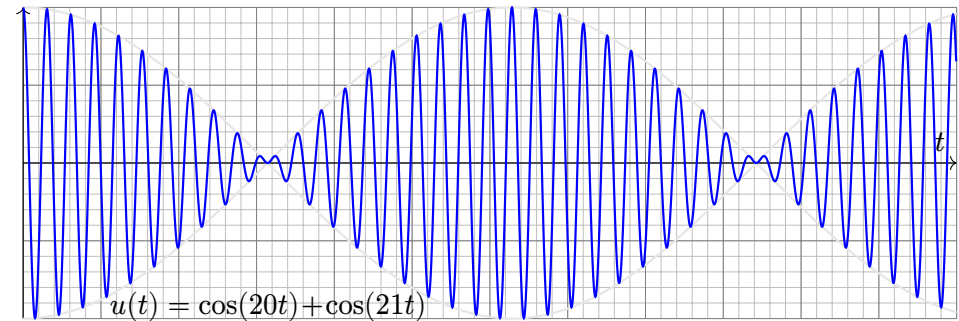
(5) Als Zahlenbeispiel sei $m_1 = m_2 = 1$,
 $k_1 = k_3 = 400$,
 $k_2 = 20.5$.

Lösung: (5) Die Eigenfrequenzen $\omega_1 = 20$ und $\omega_2 = 21$ liegen nahe. Das Anfangswertproblem $u(0) = 2$, $v(0) = 0$ und $\dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0$ wird gelöst durch $u(t) = \cos(20t) + \cos(21t)$ und $v(t) = \cos(20t) - \cos(21t)$. Die folgenden Graphiken illustrieren den zeitlichen Verlauf für $t \in [0, 12]$.

Wir beobachten eine *Schwebung*: In der Überlagerung $u(t)$ bzw. $v(t)$ nimmt die Amplitude der Summe mit langer Periode zu und ab, additive Phasen und subtraktive Phasen wechseln sich ab.

Schwache Kopplung führt zu Schwebungen.

Q358



Schwache Kopplung führt zu Schwebungen.

Q359
Erläuterung

Anschaulich geschieht hier folgendes: Wir können den linken Oszillator auslenken und dann loslassen. Er schwingt daraufhin nahezu frei, doch nach und nach überträgt sich (fast) seine gesamte Energie auf den rechten Oszillator, anschließend geschieht dasselbe umgekehrt.

Aufgabe: Erklären Sie das hier gezeigte, bemerkenswerte Phänomen der Schwebungen mit Hilfe der trigonometrischen **Additionstheoreme**.

Lösung: Aus der Euler-Gleichung $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ und der Homomorphie $e^{z+w} = e^z e^w$ erhalten wir (nach kurzer Rechnung):

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Schwache Kopplung führt zu Schwebungen.

Q360
Erläuterung

In unserem Zahlenbeispiel erhalten wir:

$$u(t) = \cos(20t) + \cos(21t) = 2 \cos(0.5t) \cdot \cos(20.5t)$$

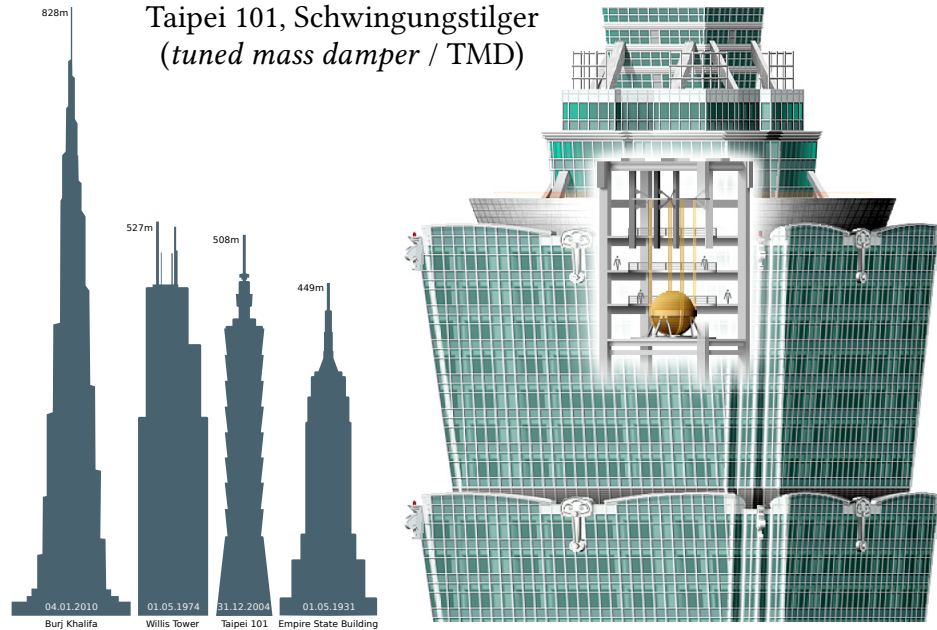
$$v(t) = \cos(20t) - \cos(21t) = -2 \sin(0.5t) \cdot \sin(20.5t)$$

Wir interpretieren daher die Überlagerung $u(t) = A(t) \cos(20.5t)$ als eine Grundschiwingung der mittleren Frequenz $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = 20.5$ mit der variablen Amplitude $A(t) = 2 \cos(0.5t)$; diese hat die deutlich niedrigere Frequenz $\delta = \frac{1}{2}|\omega_1 - \omega_2| = 0.5$, sodass $\omega_{1/2} = \bar{\omega} \mp \delta$ gilt.

Diese Rechnung ist in der obigen Graphik schön anschaulich illustriert durch die Trägerschiwingung $\cos(20.5t)$ und die Einhüllende $\pm 2 \cos(0.5t)$. Das Phänomen der Schwebung entsteht immer, wenn sich zwei ähnlich große Schwingungen mit nahezu gleichen Frequenzen überlagern.

In der Akustik sind solche Schwebungen deutlich zu hören: Der Ton ist moduliert, seine Lautstärke schwankt mit der Schwebungsfrequenz, was mitunter als recht unangenehm empfunden wird. Das ist keine akustische Täuschung, sondern ein reales physikalisches Phänomen.

Taipei 101, Schwingungstilger
(*tuned mass damper* / TMD)



Gebäude werden zu Schwingungen angeregt, extern durch Wind oder Erdbeben, intern durch Menschen oder Maschinen. Dagegen helfen **Schwingungstilger**, justiert auf die Eigenfrequenz des Gebäudes. Berlins Fernsehturm hat in seiner Spitze ein 1,5-Tonnen-Tilgerpendel. Londons Millennium Bridge, 2000 eröffnet und *wobbly bridge* genannt, wurde nachträglich mit 52 kleinen *tuned mass dampers* ausgestattet.

Das Taipei Financial Center in Taiwan hielt ab 2004 den Rekord des höchsten Gebäudes der Welt, bis es 2009 vom Burj Khalifa überholt wurde. Zwischen dem 88. und 92. Stockwerk befindet sich eine 660 Tonnen schwere Stahlkugel als Pendel mit ölhydraulischer Dämpfung. Es ist öffentlich zugänglich und eine beliebte Touristen-Attraktion.

Das Gebäude überträgt Schwingungsenergie auf diesen Oszillator, der sie absorbiert und dann durch Dämpfung in Wärme umwandelt. Die maximale Beschleunigung bei Stürmen wird so etwa halbiert! (Taiwan ist sowohl aktive Erdbebenregion als auch Taifungebiet.) Ein Video sagt mehr als tausend Worte: youtu.be/f1U4SAgy60c.

Wasserwellen regen ein Schiff zu Schwingungen an:

- 1 Das Schiff „rollt“ um seine Längsachse, kippt also nach links (Backbord) und rechts (Steuerbord).
- 2 Das Schiff „stampft“ um seine Querachse, neigt sich also nach vorne (zum Bug) und hinten (zum Heck).

Wenn die anregende Frequenz des Seegangs unglücklich nah an der Eigenfrequenz des Schiffes liegt, so kommt es zur Resonanz. Um eine Katastrophe zu verhindern, möchte man vorsorgen und die auftretenden Resonanzen so weit wie möglich abschwächen.

Für die Rollbewegung um die Längsachse gelingt dies recht effizient mit zwei raffiniert gekoppelten Schwingungen. Hierzu entwickelte der deutsche Schiffsbauer Hermann Frahm (1867–1939) um 1900 den sogenannten frahmschen **Schlingertank**. Dieser besteht aus zwei Wassertanks an den Längsseiten des Schiffes, die möglichst hoch liegen und über Rohre kommunizieren. Hierin füllt man Wasser, bis die Eigenfrequenz des Tanks der des Schiffes entspricht.

Seitlich auftreffende Wellen regen das Schiff zum Rollen an. Im Resonanzfall erzwingt dies eine Schwingung des Schiffes mit der Phasenverschiebung um $\pi/2$ gegenüber der Anregung. Das rollende Schiff lässt nun seinerseits das Ballastwasser im Tank periodisch hin- und herströmen, ebenso mit einer Phasenverschiebung um $\pi/2$.

Die äußere Anregung und die innere Schwingung des Tanks sind daher gegenphasig. Die so wirkenden entgegengesetzten Drehmomente heben sich weitgehend auf, was die Rollbewegung deutlich verringert.

Die Grundidee ist genial-einfach und in unserem mathematischen Modell gut nachzuverfolgen. Die technische Ausführung erfordert die geeignete Kalibrierung der Parameter und ist eine eigene Kunst.

Das gesamte System ist in Wirklichkeit nicht-linear: Die Frequenz des Schiffes und des Ballastwassers hängen von der Amplitude ab, dadurch wird ihr Zusammenspiel recht kompliziert. Das Prinzip ist jedoch gleich.

Gegeben ist die Systemmatrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und der Startvektor $v \in \mathbb{K}^n$.
Zu lösen sei das zugehörige Anfangswertproblem (AWP)

$$u'(t) = Au(t), \quad u(0) = v$$

Aufgabe: Berechnen Sie die Lösung im Falle $Av = \lambda v$.

Lösung: (0) Wir kennen die eindeutige Lösung $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n : t \mapsto e^{tA} v$.
Dank Eigengleichung können wir diese nun explizit ausrechnen:

$$e^{tA} v \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k v \stackrel{\text{Eig}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda^k v \stackrel{\text{Def}}{=} e^{t\lambda} v$$

(1) Jeder Eigenvektor $v \in \mathbb{K}^n$ mit $Av = \lambda v$ definiert eine Eigenfunktion

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n : t \mapsto u(t) = e^{\lambda t} v.$$

Diese löst das DGSystem $u'(t) = Au(t)$ mit dem Anfangswert $u(0) = v$.
Probe: Es gilt $u'(t) = \lambda u(t)$ und $Au(t) = \lambda u(t)$ sowie $u(0) = v$.

Satz Q3E: Lösung eines DGSystems durch Eigenfunktionen

Gegeben sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Zu lösen sei das DGSystem $u'(t) = Au(t)$.

(1) Jeder Eigenvektor $v \in \mathbb{K}^n$ mit $Av = \lambda v$ definiert eine Eigenfunktion

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n : t \mapsto u(t) = e^{\lambda t} v.$$

Diese löst das DGSystem $u'(t) = Au(t)$ mit dem Anfangswert $u(0) = v$.
Zeitlich verschoben zu $\tilde{u}(t) = u(t - t_0)$ gilt $\tilde{u}'(t) = A\tilde{u}(t)$ mit $\tilde{u}(t_0) = v$.

(2) Angenommen, die Matrix A ist über \mathbb{K} diagonalisierbar, erlaubt also eine Basis $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren. Dann lösen wir unser DGSystem durch eine Basis aus Eigenfunktionen $u_k(t) = e^{\lambda_k t} v_k$:

Jede Lösung des DGSystems $u'(t) = Au(t)$ ist eine Linearkombination $u = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$ mit eindeutigen Koeffizienten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$.

- ☺ Ist die Matrix A diagonalisierbar, so ist damit die Lösung leicht!
- ☹ Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar. Was tun? Hauptvektoren!

☺ Eine wichtige Anwendung von Eigen- und Hauptvektoren ist die exakte Lösung linearer Differentialgleichungssysteme $u'(t) = Au(t)$:

Satz Q3F: Lösung eines DGSystems durch Hauptfunktionen

Gegeben sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Zu lösen sei das DGSystem $u'(t) = Au(t)$.

Hierzu sei $0 \leftarrow^{A-\lambda_1} v_1 \leftarrow^{A-\lambda_1} v_2 \leftarrow^{A-\lambda_1} \dots \leftarrow^{A-\lambda_1} v_\ell$ eine **Hauptvektorkette**.

Diese löst das DGSystem durch die **Hauptfunktionen** u_1, \dots, u_ℓ mit

$$u_k(t) = e^{\lambda t} \left[v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right].$$

Wie die Hauptvektoren bilden auch die Hauptfunktionen eine Kette:

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow^{A-\lambda_1} u_1 \leftarrow^{A-\lambda_1} u_2 \leftarrow^{A-\lambda_1} \dots \leftarrow^{A-\lambda_1} u_\ell & \quad \text{also} \quad Au_k = \lambda u_k + u_{k-1}, \\ 0 \leftarrow^{\partial-\lambda_1} u_1 \leftarrow^{\partial-\lambda_1} u_2 \leftarrow^{\partial-\lambda_1} \dots \leftarrow^{\partial-\lambda_1} u_\ell & \quad \text{also} \quad u'_k = \lambda u_k + u_{k-1}. \end{aligned}$$

Somit gilt $u'_k(t) = Au_k(t)$ mit Anfangswert $u_k(0) = v_k$.

Verschieben zu $\tilde{u}_k(t) = u_k(t - t_0)$ gilt $\tilde{u}_k(t_0) = v_k$.

Die Hauptvektoren $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$ sind unabhängig (Q1c), also auch die zugehörigen Hauptfunktionen $u_1, \dots, u_\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$, denn $u_k(0) = v_k$.

Ist A diagonalisierbar, so existiert eine Basis aus Eigenfunktionen (Q3E).

Ist A nicht diagonalisierbar, so doch immer noch jordanisierbar (Q1B):

Über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ finden wir immer eine Basis aus Hauptvektorketten!

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ erhalten wir daraus reelle Lösungen, siehe unten.

☺ Damit ist das zunächst recht schwierige analytische Problem, ein DGSystem $u'(t) = Au(t)$ zu lösen, zurückgeführt auf das einfachere algebraische Problem, Hauptvektoren der Matrix A zu berechnen.

☺ Das ist mitunter mühsam aber letztlich Routinearbeit. Es kann insbesondere von Computer-Algebra-Systemen ausgeführt werden. In günstigen Fällen gelingt uns die Lösung direkt per Handrechnung.

☺ Wir erkennen hieran Stabilität und Langzeitverhalten der Lösungen:
Für $\text{re}(\lambda) < 0$ gilt exponentielles Abklingen, $|u_k(t)| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.
Für $\text{re}(\lambda) > 0$ gilt exponentielles Wachstum, $|u_k(t)| \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$.
Für $\text{re}(\lambda) = 0$ ist u_1 beschränkt, aber u_2, \dots, u_ℓ wachsen polynomiell.

Aufgabe: Finden Sie ein Fundamentalsystem aus Hauptfunktionen zu

$$(1) \quad u' = Au \text{ mit } A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (2) \quad u' = Bu \text{ mit } B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Wie verhalten sich die Lösungen für $t \rightarrow \infty$ und $\lambda < 0$? $\lambda > 0$? $\lambda = 0$?

Lösung: (1) Die Matrix A hat den doppelten Eigenwert λ .
Eigenvektoren bestimmen wir durch $(A - \lambda)v = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0, \quad \text{mögliche Lösungen } v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten das Fundamentalsystem bzw. die Fundamentalmatrix:

$$u_1(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad U(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

☺ Jede andere Basis $(v_1, v_2)^T$ des \mathbb{C}^2 wäre hier ebenso möglich.
Sie führt zum Fundamentalsystem $u_1(t) = e^{\lambda t} v_1, u_2(t) = e^{\lambda t} v_2$.

⚠ Eigenvektoren von A entsprechen Eigenfunktionen von $u' = Au$.

(2) Auch die Matrix B hat den doppelten Eigenwert λ . Eigenvektoren:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v_1 = 0, \quad \text{eine Lösung } v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wir suchen daher noch einen Hauptvektor v_2 über v_1 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v_2 = v_1, \quad \text{eine Lösung } v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten das Fundamentalsystem bzw. die Fundamentalmatrix:

$$u_1(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad U(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

☺ Andere Wahlen sind möglich: Jeder Vektor $v_1 = (a, 0)^T$ mit $a \neq 0$ ist Eigenvektor, und jeder Vektor $v_2 = (b, a)^T$ liegt darüber als Hauptvektor.

$$u_1(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} at + b \\ a \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad U(t) = \begin{bmatrix} a e^{\lambda t} & (at + b) e^{\lambda t} \\ 0 & a e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

⚠ Hauptvektoren von A entsprechen Hauptfunktionen von $u' = Au$.

Zur Vereinfachung rechnen wir meist über den komplexen Zahlen \mathbb{C} .
Vorteil: Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hat n Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

Für eine reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ werden wir im Allgemeinen nicht n reelle Eigenwerte finden: Wir brauchen auch komplexe Eigenwerte!

Für reelle DGSysteme wollen wir aber meist nur reelle Lösungen!
Diesen Zusammenhang können wir nun klären, wie bereits gesehen:

Lemma Q3c: Konjugation von Lösungen und Basiswechsel

(0) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zu lösen sei das DGSystem

$$u'(t) = Au(t).$$

Ist u Lösung von $u'(t) = Au(t)$, so ist \bar{u} Lösung von $\bar{u}'(t) = \bar{A}\bar{u}(t)$.

(1) Genau dann ist die Matrix reell, also $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wenn $\bar{A} = A$ gilt.
In diesem Fall ist zu u mit $u' = Au$ auch \bar{u} mit $\bar{u}' = A\bar{u}$ eine Lösung.

Somit sind $\text{re } u = \frac{1}{2}(u + \bar{u})$ und $\text{im } u = \frac{1}{2i}(u - \bar{u})$ reelle Lösungen.
Dies entspricht einem Basiswechsel von (u, \bar{u}) zu $(\text{re } u, \text{im } u)$.

Satz Q3H: von komplexen zu reellen Lösungen

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zu lösen sei das DGSystem $u'(t) = Au(t)$.
Sei $0 \leftarrow^{A-\lambda} v_1 \leftarrow^{A-\lambda} \dots \leftarrow^{A-\lambda} v_\ell$ eine Hauptvektorkette zu $\lambda = \sigma + i\omega$.
Dann ist $0 \leftarrow^{A-\bar{\lambda}} \bar{v}_1 \leftarrow^{A-\bar{\lambda}} \dots \leftarrow^{A-\bar{\lambda}} \bar{v}_\ell$ eine Hauptvektorkette zu $\bar{\lambda} = \sigma - i\omega$.

Somit hat das DGSystem die folgenden 2ℓ **reellen Lösungen**:

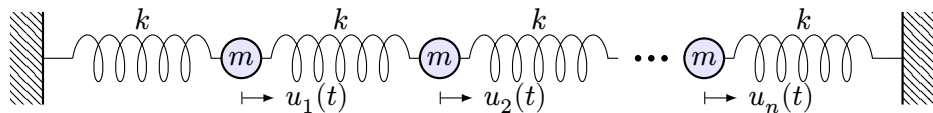
$$\begin{aligned} \text{re } u_k(t) &= e^{\sigma t} \text{re} \left(e^{i\omega t} \left[v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right] \right) \\ \text{im } u_k(t) &= e^{\sigma t} \text{im} \left(e^{i\omega t} \left[v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right] \right) \end{aligned}$$

Im Falle $\omega \neq 0$ sind diese 2ℓ Lösungen linear unabhängig. (Im Falle $\omega = 0$ erhalten wir nur eine Kette von ℓ linear unabhängigen Lösungen.)

☺ Wir erkennen hieran Stabilität und Langzeitverhalten der Lösungen, wie oben erklärt, je nach Vorzeichen $\sigma > 0$ oder $\sigma < 0$ oder $\sigma = 0$.

Wir haben nun die nötigen Begriffe und Techniken zu DGSystemen und wollen damit ein reales Phänomen mathematisch untersuchen.

Wir untersuchen die Ausbreitung einer Welle, zum Beispiel einer Druck- oder Schallwelle, zunächst als diskretes, endlich-dimensionales Modell: mit Federn verbundene Massenpunkte. In diesem schönen Beispiel können wir alles explizit berechnen und anschaulich interpretieren. Zudem können wir unsere Methoden der linearen Algebra und Analysis erproben und schärfen.



- Aufgabe:** (1) Formulieren Sie das hier skizzierte dynamische System als ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung.
 (2) Welche Struktur hat die Lösungsmenge? (a) „Form“ und (b) „Größe“?
 (3) Finden Sie alle Lösungen zum Produktansatz $u_j(t) = e^{i\alpha j} e^{i\omega t}$.
 (4) Gewinnen Sie hieraus eine reelle Basis des Lösungsraumes.

Lösung: (1a) Auslenkung $u_j(t) \in \mathbb{R}$ aus der Ruhelage, lineare Rückstellkraft $F_j = k(u_{j+1} - u_j) + k(u_{j-1} - u_j)$, Newtons Bewegungsgesetz $F_j = m\ddot{u}_j$. Mit $c^2 = k/m$ erhalten wir

$$\ddot{u}_j(t) = c^2 [u_{j-1}(t) - 2u_j(t) + u_{j+1}(t)] \quad \text{mit} \quad u_0(t) = u_{n+1}(t) = 0.$$

Dies gilt für jeden der Massenpunkte $j = 1, \dots, n$ im Inneren der Kette. Randbedingung: Die beiden Enden $u_0 = u_{n+1} = 0$ sind hierbei fixiert. Anfangswerte: Position $u_j(0)$ und Geschwindigkeit $\dot{u}_j(0)$ für $j = 1, \dots, n$.

(1b) Diese Bewegungsgleichung ist zweiter Ordnung in n Unbekannten. Wir reduzieren sie nun äquivalent zu erster Ordnung in $2n$ Unbekannten:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}(t) \\ \ddot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ c^2 B_n & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}$$

Für $x = (u, \dot{u})$ ist dies eine homogene lineare Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A x(t)$ mit der angegebenen Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$. Hier ist 0_n die $(n \times n)$ -Nullmatrix und I_n die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix.

Die Bandmatrix $B = B_n$ kodiert hierbei die geometrische Anordnung:

$$B_n := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad A := \begin{bmatrix} 0 & E \\ c^2 B & 0 \end{bmatrix}$$

- (2) Wir suchen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ mit $\dot{x}(t) = A x(t)$. Dank Struktursatz Q3D: Die Lösungsmenge ist (a) ein \mathbb{R} -Vektorraum (b) der Dimension $2n$.

Diese wichtige Information strukturiert und erleichtert unsere Rechnung: Wir müssen nicht alle – unendlich vielen! – Lösungen berechnen, als Basis genügt uns, $2n$ linear unabhängige Lösungen zu finden! Dabei hilft physikalisches Verständnis: Unser Produktansatz liefert tatsächlich $2n$ unabhängige Lösungen; jede davon ist eine *stehende Welle*. Wo bleiben die erwarteten *wandernden Wellen*? Die Antwort ist ebenso einfach wie verblüffend: Je nach Startzustand $x(0)$ erhalten wir eine Linearkombination stehender Wellen, ihre Summe ist eine wandernde Welle! Basiswechsel: Stehende Wellen und wandernde Wellen sind zwei mögliche Basen des Lösungsraums.

- (3) Einsetzen unseres Produktansatzes $u_j(t) = e^{i\omega t} e^{i\alpha j}$ ergibt:

$$-\omega^2 e^{i\omega t} e^{i\alpha j} = c^2 [e^{i\omega t} e^{i\alpha(j-1)} - 2e^{i\omega t} e^{i\alpha j} + e^{i\omega t} e^{i\alpha(j+1)}] \quad \text{also} \\ \omega^2 = -c^2 (e^{-i\alpha} - 2 + e^{i\alpha}) = -c^2 (e^{-i\alpha/2} - e^{i\alpha/2})^2 = 4c^2 \sin^2(\alpha/2)$$

Zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ erhalten wir $\omega = \pm 2c \sin(\alpha/2)$. Reelle Lösungen sind:

$$u_j(t) = \begin{cases} \sin(\alpha j) \cos(\omega t), & \cos(\alpha j) \cos(\omega t), \\ \sin(\alpha j) \sin(\omega t), & \cos(\alpha j) \sin(\omega t), \end{cases}$$

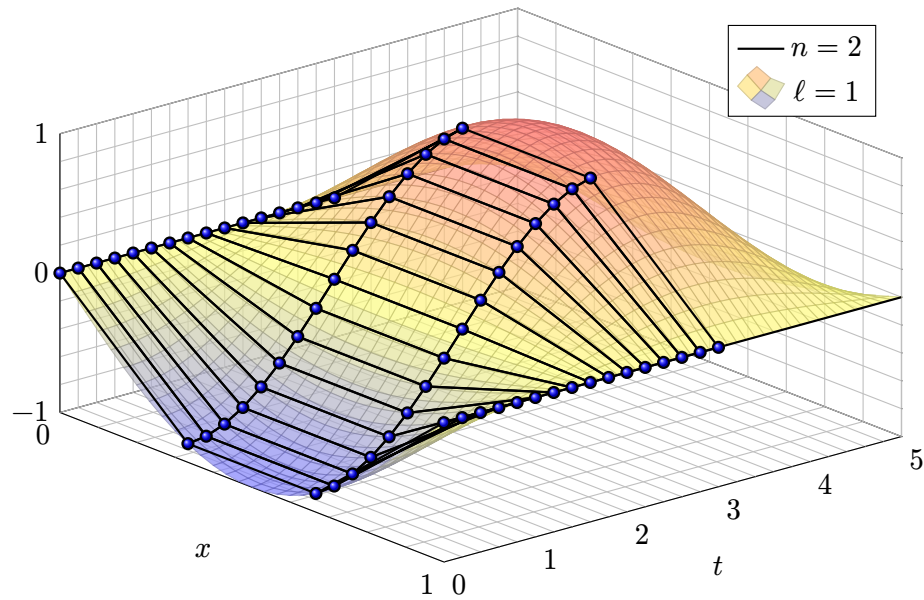
Randbedingungen $u_0 = u_{n+1} = 0$: Die Lösungen links erfüllen $u_0(t) = 0$, und $u_{n+1}(t) = 0$ für $\alpha = \ell\pi/(n+1)$ und $\ell = 1, \dots, n$. **Eigenfunktionen:**

$$\left. \begin{matrix} u_{\ell,j}(t) = \sin(\alpha_\ell j) \cos(\omega_\ell t) \\ v_{\ell,j}(t) = \sin(\alpha_\ell j) \sin(\omega_\ell t) \end{matrix} \right\} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \alpha_\ell = \ell\pi/(n+1), \\ \omega_\ell = 2c \sin(\alpha_\ell/2). \end{cases}$$

- (4) Dies sind $2n$ linear unabhängige Lösungen, also eine **(Eigen)Basis!** Wir haben n verschiedene Eigenwerte $\omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots < \omega_n^2$ mit je zwei unabhängigen Eigenfunktionen, $\partial_t^2 u_\ell = -\omega_\ell^2 u_\ell$ und $\partial_t^2 v_\ell = -\omega_\ell^2 v_\ell$.

Eigenfunktionen: Grundschiwingung ($\ell = 1$)

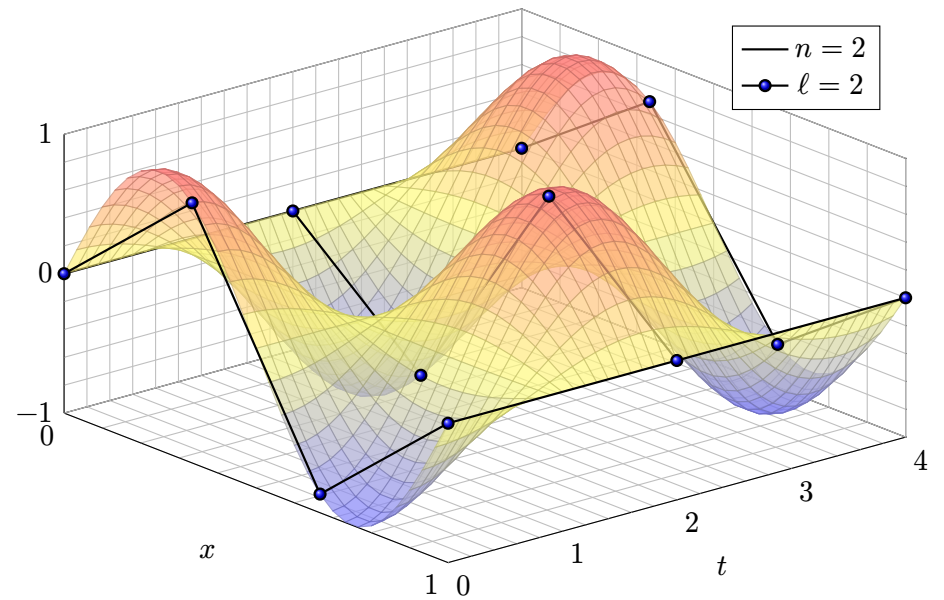
Q377



Dies ist eine stehende Welle; Randbedingungen $u_0(t) = u_{n+1}(t) = 0$.

Eigenfunktionen: Oberschiwingung ($\ell = 2$)

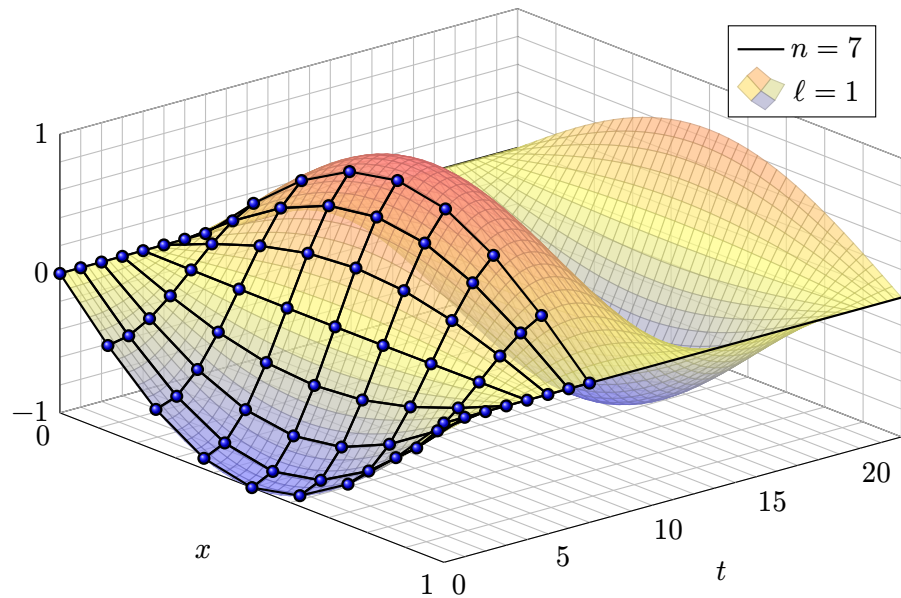
Q378



Auch dies ist eine stehende Welle; die Frequenz $\omega_2 > \omega_1$ wird größer.

Eigenfunktionen: Grundschiwingung ($\ell = 1$)

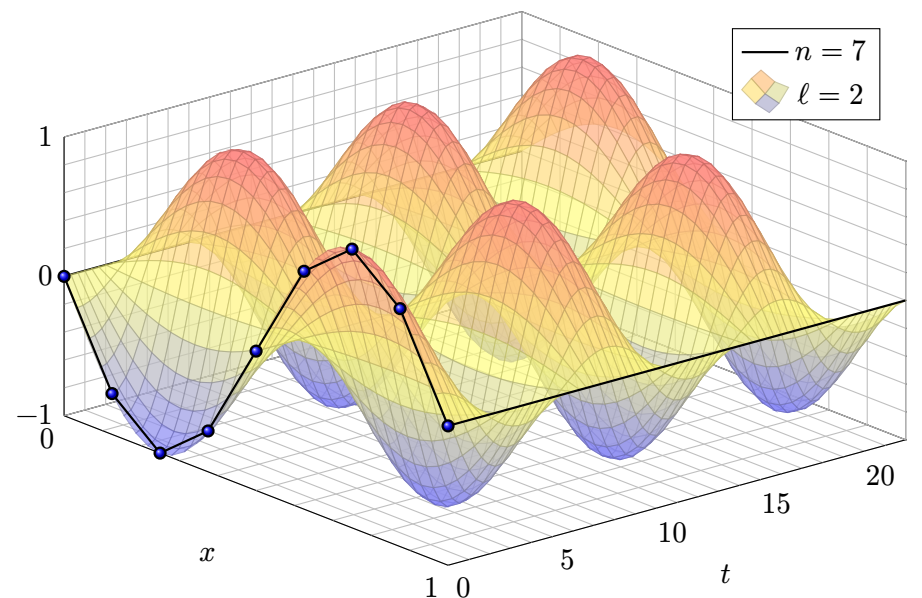
Q379



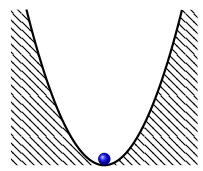
Dieses Phänomen kennt jedes Kind vom Seilspringen. Probieren Sie es!

Eigenfunktionen: erste Oberschiwingung ($\ell = 2$)

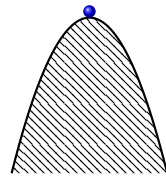
Q380



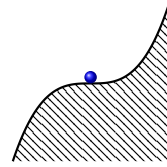
😊 Von der Intuition zur Präzision: Nun können Sie alles ausrechnen!



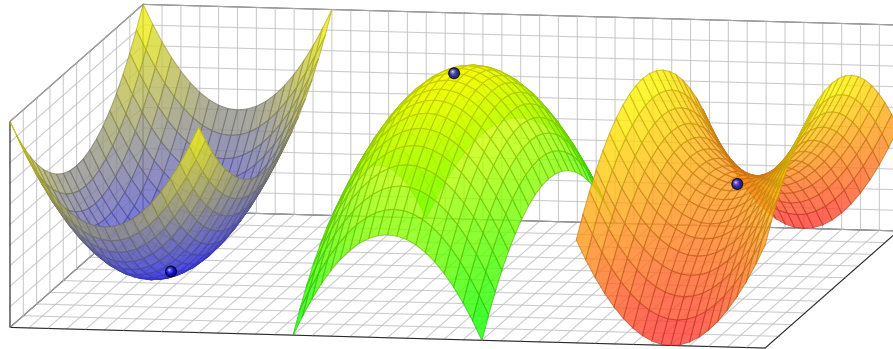
Der Fixpunkt ist stabil / attraktiv.



Der Fixpunkt ist instabil / repulsiv.



kritischer Fixpunkt (höhere Ordnung)



Anfangsdaten sind oft zufälligen kleinen Schwankungen unterworfen, etwa durch kleine äußere Störungen oder ungenaue Messdaten.

Wir wollen das Langzeitverhalten in der Nähe von Fixpunkten verstehen. Hier gilt $\dot{x}(t) = f(x(t))$, für $x(t) = x_0 + u(t) \approx x_0$ also $\dot{u}(t) \approx f'(x_0) u(t)$.

- Gilt Abklingen $|u(t)| \rightarrow 0$? sogar exponentiell?
- Gilt Beschränktheit gemäß $0 < c_0 \leq |u(t)| \leq c_1 < \infty$?
- Gilt Wachstum $|u(t)| \rightarrow \infty$? nur polynomiell? gar exponentiell?

⚠ Instabile Fixpunkte sind meist Opfer des **Schmetterlingseffekts!** Sie zeigen eine extrem sensible Abhängigkeit von den Anfangsdaten. Typischerweise können kleine Störungen exponentiell anwachsen. Beispiele wie $\dot{x}(t) = a x(t)$ zeigen, dass dies tatsächlich vorkommt.

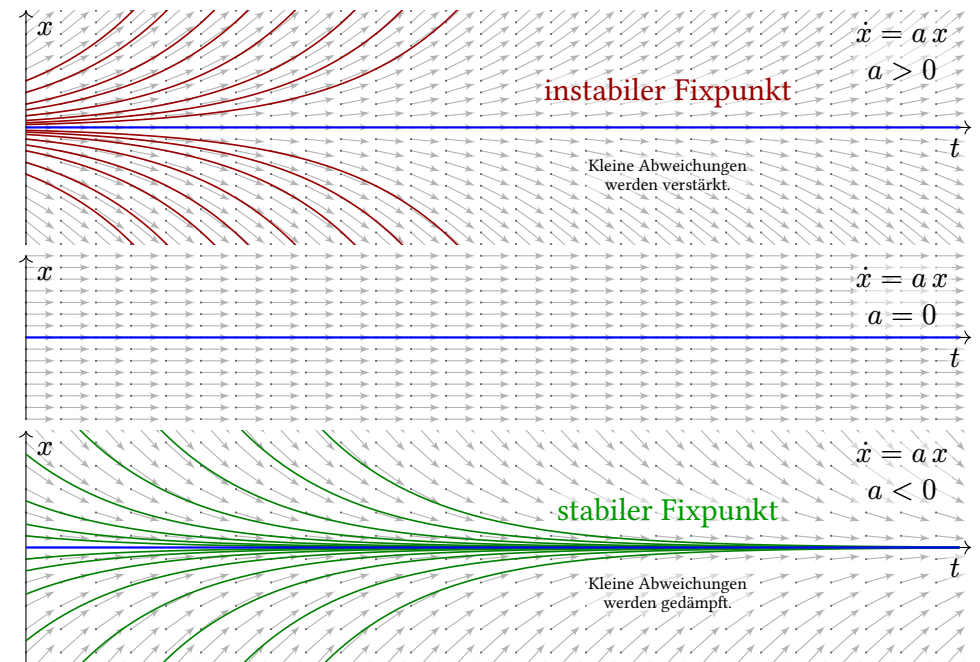
⚠ Technische Anwendungen erfordern meist stabile Gleichgewichte! Die **Stabilitätstheorie** untersucht die Auswirkung kleiner Störungen, die als Abweichung von Gleichgewichtszuständen auftreten, etwa in der Technischen Mechanik oder in der Regelungstechnik.

Aufgabe: (1) Wir untersuchen $\dot{x}(t) = a x(t)$ mit $x(0) = x_0$ und $a \in \mathbb{R}$. Welches asymptotische Verhalten haben die Lösungen für $t \rightarrow \infty$?
 (2) Welches Verhalten erwarten Sie für eine nicht-lineare Gleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$ mit $x(0) = x_0$ und $f(x_0) = 0$? Ist x_0 ein Fixpunkt? Welche Rolle spielt die Ableitung $f'(x_0)$ für die Stabilität?

Lösung: (1) Dieses AWP hat als eindeutige Lösung $x(t) = x_0 e^{at}$. Die Dynamik eindimensionaler linearer Systeme ist sehr einfach:

- $a > 0$ streckt; Störungen werden exponentiell verstärkt. Der einzige Fixpunkt 0 ist **instabil**.
- $a < 0$ staucht; Störungen werden exponentiell gedämpft. Der einzige Fixpunkt 0 ist **stabil**.
- Im Falle $a = 0$ ist jeder Startpunkt x_0 ein Fixpunkt.

(2) Nicht-lineare Systeme sind wesentlich komplizierter! In der Nähe eines Fixpunktes können wir linearisieren und annähernd eine **lineare Dynamik** erwarten. Diese Technik wird im Folgenden ausgeführt.



Wir betrachten ein **autonomes Differentialgleichungssystem**:

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Hierbei sei $f: \mathbb{R}^n \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Die rechte Seite $f(x)$ hängt nicht explizit von der Zeit t ab, daher **autonom**. Zu jedem Startpunkt $x_0 \in G$ existiert eine eindeutige Lösung $x: [0, T[\rightarrow G$ für $T > 0$ mit $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(t) = f(x(t))$ für $t \in [0, T[$. Für das maximale T gilt entweder $T = \infty$ oder $f(t) \rightarrow \partial G \cup \{\infty\}$ für $t \nearrow T < \infty$.

Aufgabe: Was geschieht bei Start nahe einer Gleichgewichtslage?

Lösung: Jeder Startpunkt x_0 mit $f(x_0) = 0$ ist ein **Fixpunkt**: $x(t) = x_0$.

Für kleine Auslenkungen $x(t) = x_0 + u(t)$ können wir **linearisieren**:

$$\dot{u}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(x_0 + u(t)) \approx f(x_0) + f'(x_0)u(t) = Au(t)$$

Sei $x: [0, T[\rightarrow G$ die Lösung zum Startpunkt $x(0) = x_0$ mit $\dot{x}(t) = f(x(t))$ für alle $t \in [0, T[$. **Ruhelage:** Genau dann herrscht Konstanz $x(t) = x_0$ für alle $t \in [0, T[$, wenn $f(x_0) = 0$ gilt. Die **Jacobi-Matrix** $A = f'(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ von f beschreibt das Verhalten um den Fixpunkt x_0 : Wir erhalten als Näherung die lineare Differentialgleichung $\dot{u}(t) = Au(t)$. Hierdurch erhalten lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten ihre zentrale Bedeutung!

☺ Kleine Auslenkungen aus der Ruhelage x_0 folgen näherungsweise dem linearen DGSystem mit konstanter Systemmatrix $A = f'(x_0)$:

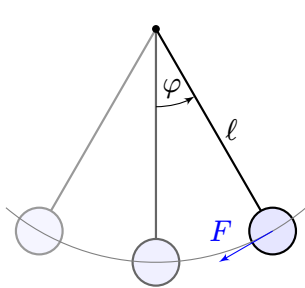
$$\text{nicht-linear } \dot{x}(t) = f(x(t)) \rightsquigarrow \text{linear } \dot{u}(t) = Au(t)$$

☺ Linearisierung vereinfacht die ursprüngliche Gleichung enorm! Jede Lösung dieser Approximation ist von der Form $u(t) = e^{tA} u_0$. Zum Eigenwert $\lambda = \sigma + i\omega$ gehören Eigen- und Hauptfunktionen

$$u(t) = e^{\sigma t} e^{i\omega t} \left[v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right],$$

siehe Q3F und Q3H. Damit erkennen wir die **Stabilität** des Fixpunktes:

- $\text{re}(\lambda) < 0$ staucht; kleine Störungen werden exponentiell gedämpft. Der Fixpunkt ist **stabil**, wenn $\text{re}(\lambda) < 0$ für *alle* Eigenwerte gilt.
 - $\text{re}(\lambda) > 0$ streckt; kleine Störungen werden exponentiell verstärkt. Der Fixpunkt ist **instabil**, wenn $\text{re}(\lambda) > 0$ für *einen* Eigenwert gilt.
- Der Grenzfall $\text{re}(\lambda_k) = 0$ bedarf genauere Analyse (höhere Ordnung).



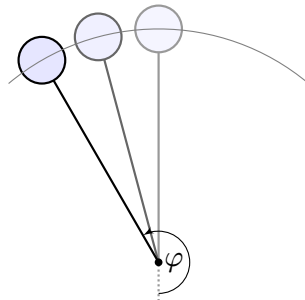
Dynamisches System:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ -(g/l) \sin \varphi - 2\delta\omega \end{bmatrix}$$

Linearisierung um $(0, 0)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(g/l) & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Der Fixpunkt $(0, 0)$ ist stabil.



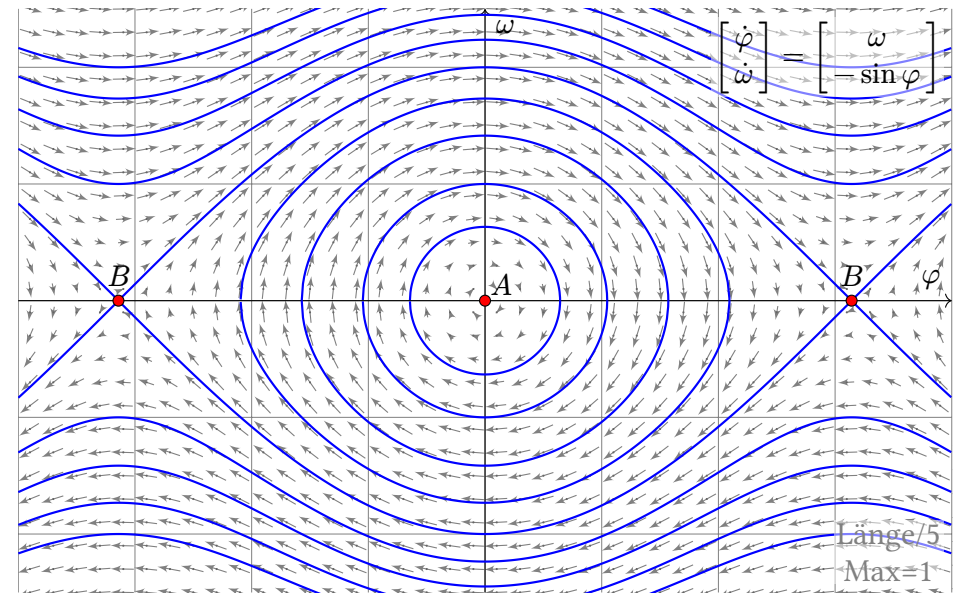
Dynamisches System:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ -(g/l) \sin \varphi - 2\delta\omega \end{bmatrix}$$

Linearisierung um $(\pi, 0)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +(g/l) & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Der Fixpunkt $(\pi, 0)$ ist instabil.



Wir erkennen harmonische Oszillation um das untere Gleichgewicht A. Der obere Scheitelpunkt B hingegen ist ein instabiles Gleichgewicht.

Wir untersuchen das DGSystem $\dot{u}(t) = A u(t)$ zur Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:
 Polynom $\det(A - XI) = X^2 - 2aX + d$, Eigenwerte $\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - d}$.
 Spur $\text{tr}(A) = 2a$, Determinante $\det(A) = d$, Diskriminante $\Delta = a^2 - d$.

Aufgabe: Skizzieren Sie die Dynamik je nach Lage der Eigenwerte (14 Fälle) und untersuchen Sie das Verhalten von $|u(t)|$ für $t \rightarrow \infty$.

- Gilt Abklingen $|u(t)| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$? sogar exponentiell?
- Gilt Beschränktheit $0 < c_0 \leq |u(t)| \leq c_1 < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$?
- Oder wächst $|u(t)|$ unbeschränkt? polynomiell? gar exponentiell?

Lösung: Wir unterscheiden zunächst reelle und komplexe Eigenwerte:

$a^2 < d$: komplex-konjugiert $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, $A \sim \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

$a^2 > d$: zwei reelle Eigenwerte $\lambda_1 < \lambda_2$, $A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

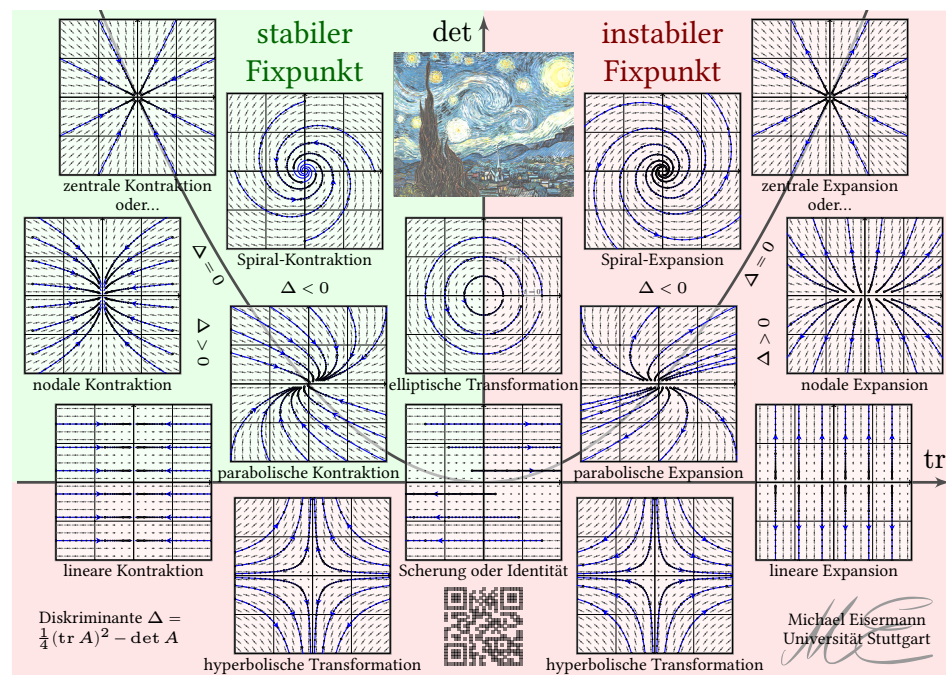
$a^2 = d$: ein doppelter Eigenwert λ , $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ oder $A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

☺ Damit haben wir alle möglichen Fälle vollständig gelöst!
 Dank Eigen- und Hauptfunktionen wird alles klar und einfach.
 Ähnlichkeit $A \sim B$ bedeutet, dass A und B konjugiert sind (P2E), also $B = T^{-1}AT$ für eine geeignete Basiswechsellmatrix $T \in \text{GL}_2 \mathbb{R}$.
 Dies beschreibt den Übergang zu unserer neuen Basis aus Eigen- bzw. Hauptvektoren, in der sich das Problem wesentlich einfacher darstellt.

☺ Wir finden drei Klassen, je nach Vorzeichen der Diskriminante

$$\Delta = \frac{1}{4}(\text{tr } A)^2 - \det A.$$

Das Vorzeichen der Diskriminante unterscheidet, wie oben gesehen, zwischen reellen Eigenwerten und (echt) komplexen Eigenwerten.
 Der Fixpunkt ist stabil, wenn $\text{re}(\lambda) < 0$ für beide Eigenwerte gilt. Das bedeutet: Kleine Störungen werden exponentiell gedämpft.
 Das gilt hier genau dann, wenn $\text{tr}(A) < 0$ und $\det(A) > 0$ gilt. Die stabile Region ist grün gefärbt, die instabile Region rot.



Diese schöne Graphik gibt einen guten Überblick: Sie klassifiziert die (linearisierte) Dynamik um einen Fixpunkt in der Ebene \mathbb{R}^2 .
 Im obigen Beispiel des mathematischen Pendels haben wir bereits zwei Fälle gesehen, einen stabilen und einen instabilen Fixpunkt.
 Die folgenden Folien diskutieren alle gezeigten Einzelfälle im Detail, wir zoomen also auf einzelne Punkte dieser Gesamtkunstwerks.

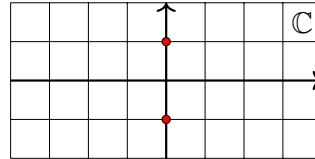
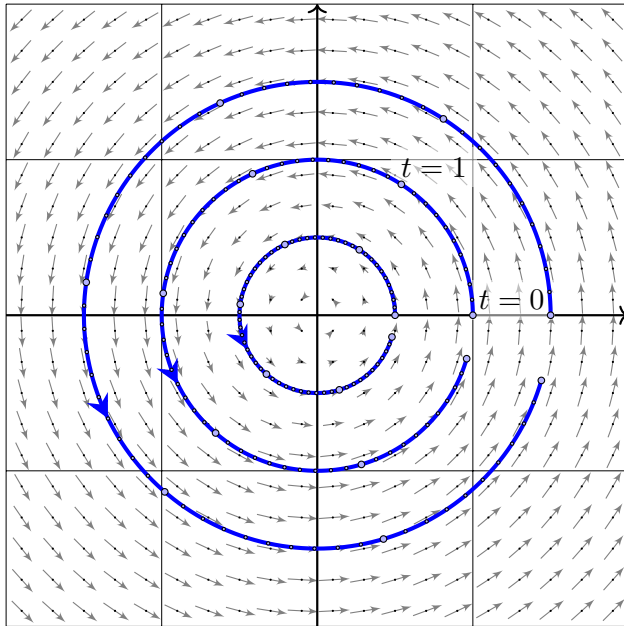
⚠ Wir betrachten hier als einfaches Modell die linearisierte Gleichung. Nicht-lineare dynamische Systeme sind meist wesentlich komplizierter!

Dennoch gibt uns das linearisierte Modell sehr nützliche Auskunft, denn im Kleinen verhält sich das nicht-lineare Modell ganz ähnlich:

- ☺ Für die Stabilität des Fixpunktes x_0 genügt die Matrix $A = f'(x_0)$, falls alle Eigenwerte negativen Realteil haben (Satz von Lyapunov).
- ☺ In diesem Falle sieht die lokale Dynamik von $\dot{x} = f(x)$ topologisch aus wie im linearisierten Modell $\dot{u} = Au$ (Satz von Hartman-Grobman).
- ☺ Dieser Linearisierungssatz gilt ganz allgemein in jeder Dimension n um jeden *hyperbolischen* Fixpunkt (ohne Eigenwerte mit Realteil Null).

Wirbelpunkt: elliptische Transformation

Q413



Komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \pm ib$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

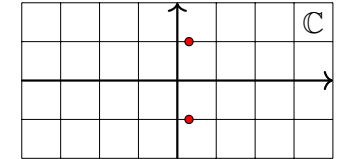
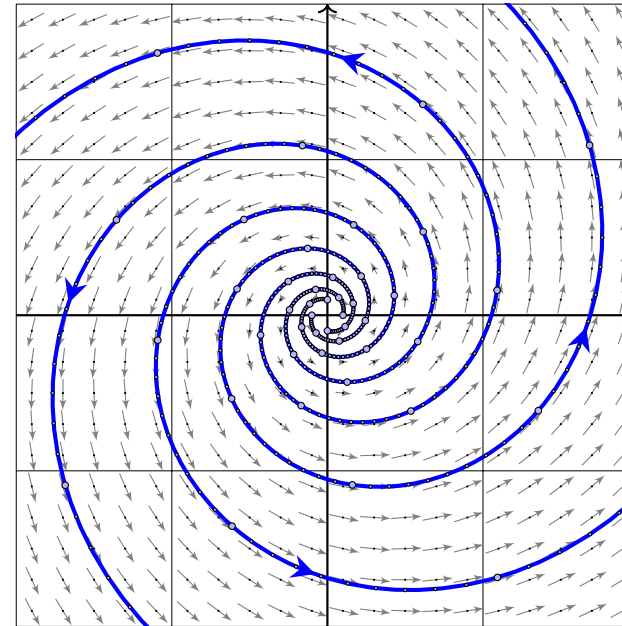
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Instabiler Strudel: Spiral-Expansion

Q414



Komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = a \pm ib, \quad a > 0$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

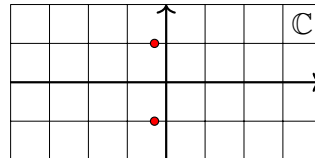
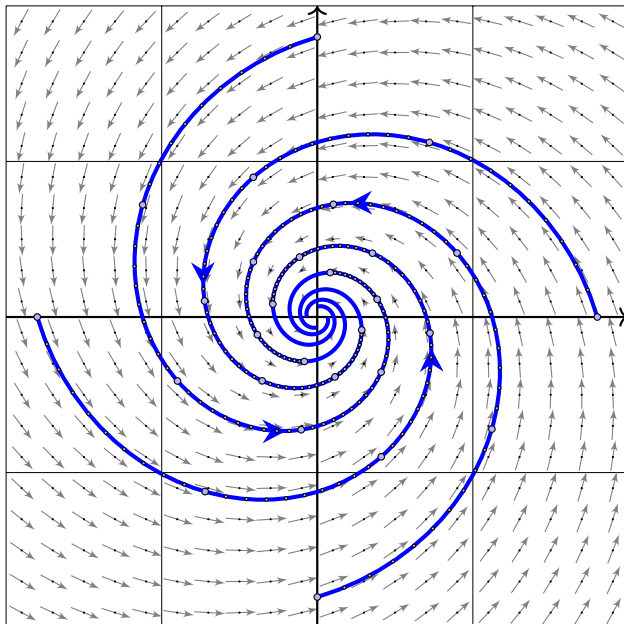
$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & -1 \\ 1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{0.3t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Stabiler Strudel: Spiral-Kontraktion

Q415



Komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = a \pm ib, \quad a < 0$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -0.3 & -1 \\ 1 & -0.3 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{-0.3t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Stabilität und Eigenwerte

Q416
Erläuterung

☺ Die ersten drei Fälle komplex-konjugierter Eigenwerte zeigen bereits den Einfluss auf das Langzeitverhalten und die Stabilität der Lösungen:

- $\operatorname{re}(\lambda) < 0$ staucht; kleine Störungen werden exponentiell gedämpft. Der Fixpunkt 0 ist **stabil**, wenn $\operatorname{re}(\lambda) < 0$ für alle Eigenwerte gilt.
- $\operatorname{re}(\lambda) > 0$ streckt; kleine Störungen werden exponentiell verstärkt. Der Fixpunkt 0 ist **instabil**, wenn $\operatorname{re}(\lambda) > 0$ für einen Eigenwert gilt.

☺ Wir diskutieren die verbleibenden Fälle reeller Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2$:

Im Falle $\lambda_1 < \lambda_2$ unterscheiden wir fünf Fälle je nach Lage zu 0:

Die Matrix A ist hierbei wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ immer diagonalisierbar.

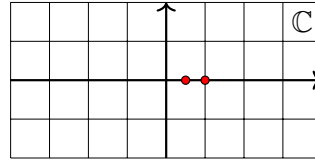
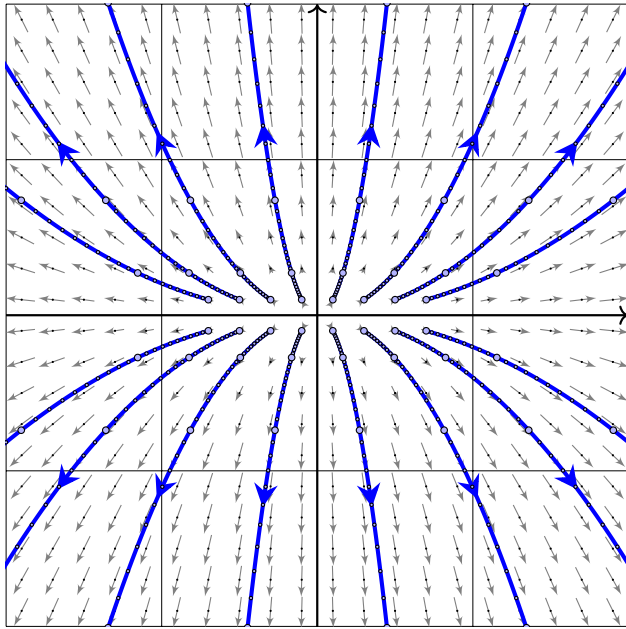
Im Falle $\lambda_1 = \lambda_2$ unterscheiden wir drei Fälle je nach Lage zu 0:

Im einfachsten Falle ist $A \sim \operatorname{diag}(\lambda, \lambda)$ diagonalisierbar (drei Fälle); andernfalls nutzen wir Hauptvektoren zur Jordan-Form (drei Fälle).

☺ Dank unserer gründlichen Vorarbeit zu Eigen- und Hauptvektoren können wir alle 14 Fälle vollständig lösen und übersichtlich darstellen. Ebenso gelingt die Klassifikation linearer Dynamik in jeder Dimension!

Instabiler Knoten: nodale Expansion

Q417



Zwei reelle Eigenwerte

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

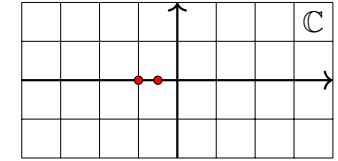
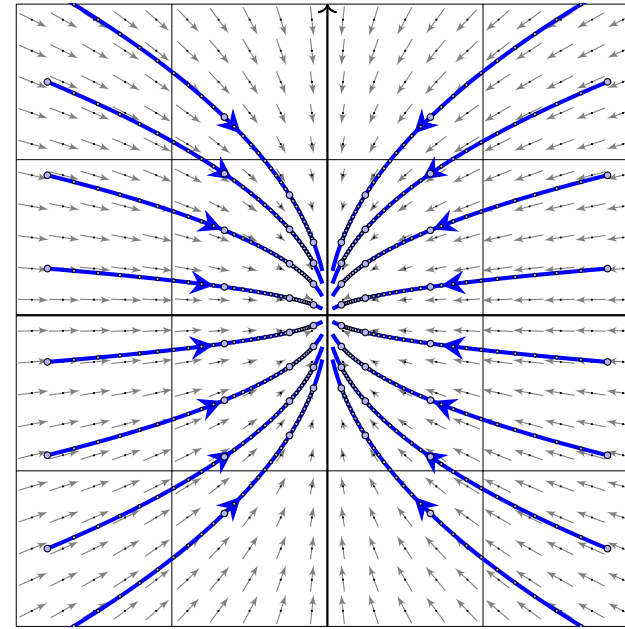
$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Stabiler Knoten: nodale Kontraktion

Q418



Zwei reelle Eigenwerte

$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

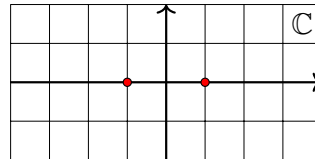
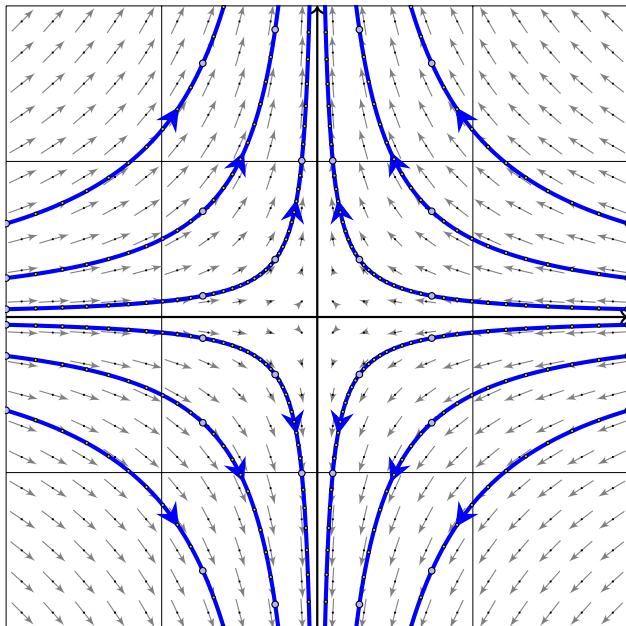
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{bmatrix}$$

Sattelpunkt: hyperbolische Transformation

Q419



Zwei reelle Eigenwerte

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Q420

Erläuterung

☺ Die hier illustrierten Beispiele zeigen die typische ebene Dynamik um den Fixpunkt $(0, 0)^T$ im elliptischen und im hyperbolischen Fall: Die Eigenwerte geben Auskunft über Dynamik und Stabilität!

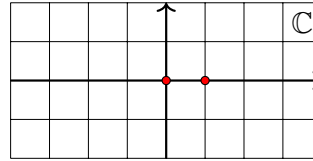
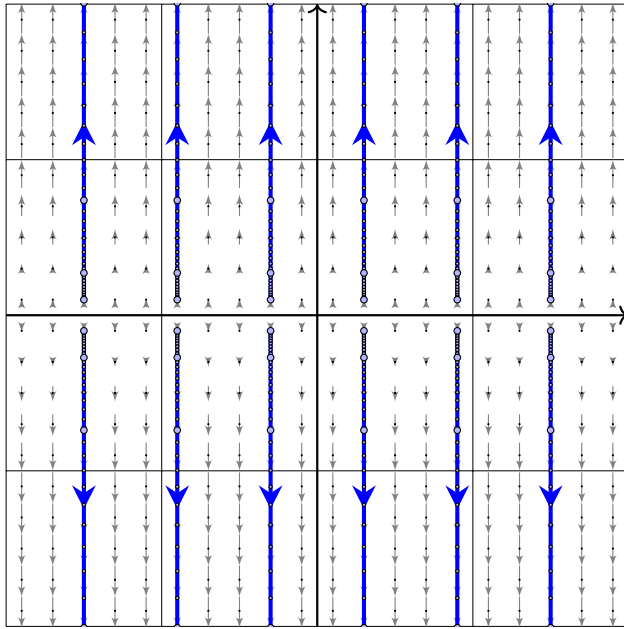
- Sind beide Eigenwerte positiv, so erhalten wir eine Expansion, typischerweise zwei Eigenräume / Achsen: langsam und schnell.
- Sind beide Eigenwerte negativ, so erhalten wir eine Kontraktion, typischerweise zwei Eigenräume / Achsen: langsam und schnell.
- Ist einer negativ und einer positiv, so erhalten wir eine stabile und eine instabile Richtung, wie im hyperbolischen Fall gezeigt.

☺ Die nächsten Folien zeigen schließlich alle Rand- und Sonderfälle. Zur Vereinfachung transformieren wir die beiden Eigen/Hauptvektoren der Systemmatrix A auf $(1, 0)^T$ und $(0, 1)^T$; das ist übersichtlicher.

⚠ Im Allgemeinen liegen diese beiden Achsen beliebig in der Ebene; sie sind typischerweise verdreht und stehen nicht senkrecht zueinander. Nach Koordinatenwechsel entsteht das hier gezeigte, einfache Bild. Die Aufgabe auf Seite Q429 zeigt ein realistisches Beispiel.

Lineare Expansion

Q421
Erläuterung



Zwei reelle Eigenwerte

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

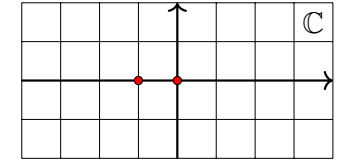
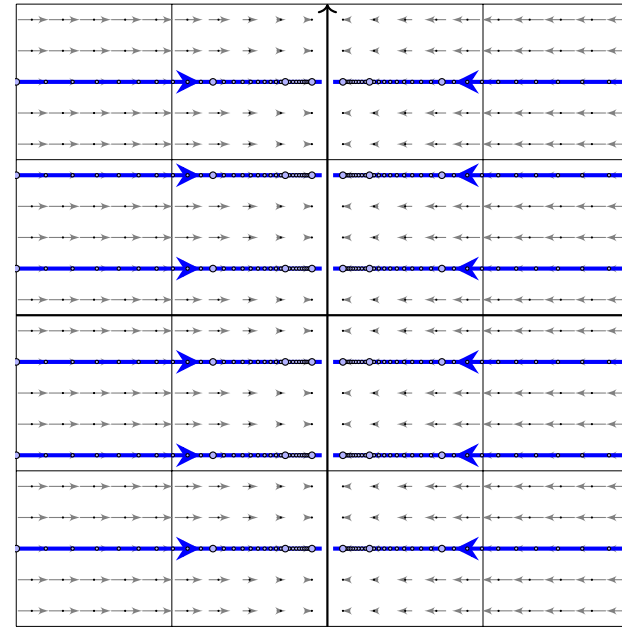
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Lineare Kontraktion

Q422
Erläuterung



Zwei reelle Eigenwerte

$$\lambda_1 < \lambda_2 = 0$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

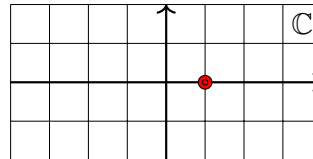
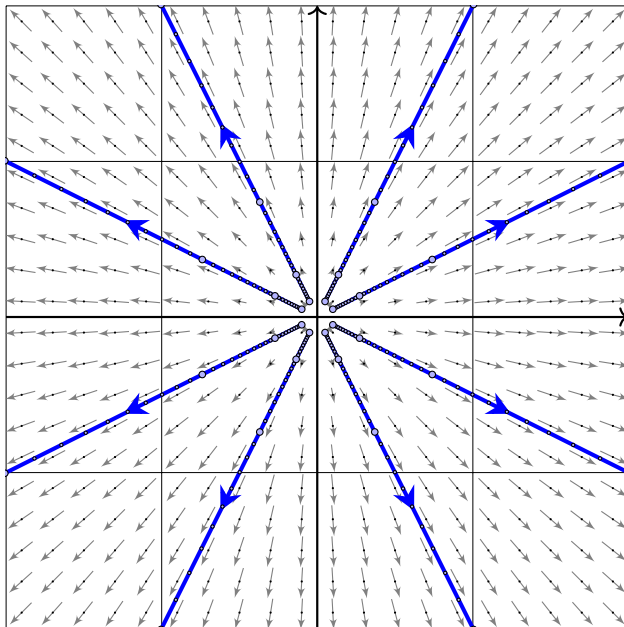
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zentrale Expansion

Q423
Erläuterung



Doppelter Eigenwert

$$\lambda > 0$$

Diagonalisierbarer Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

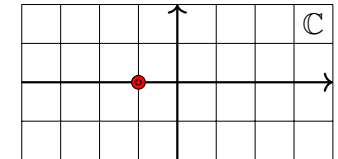
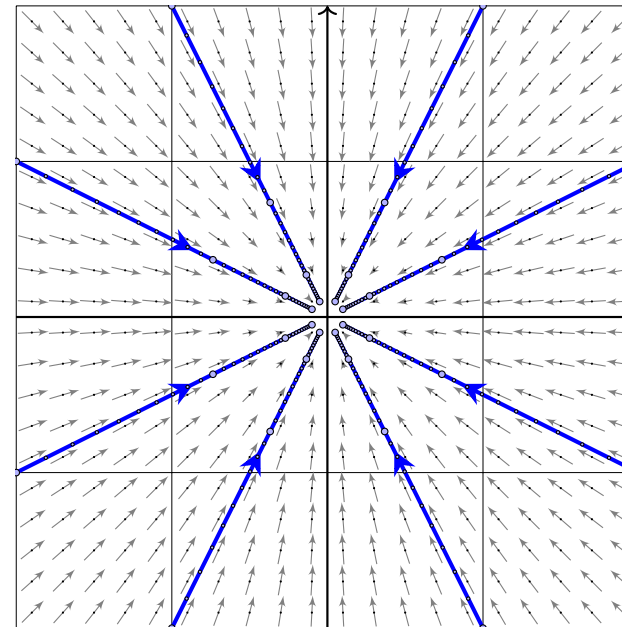
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Zentrale Kontraktion

Q424
Erläuterung



Doppelter Eigenwert

$$\lambda < 0$$

Diagonalisierbarer Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

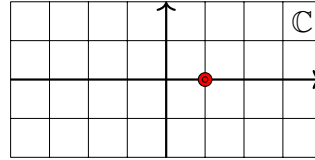
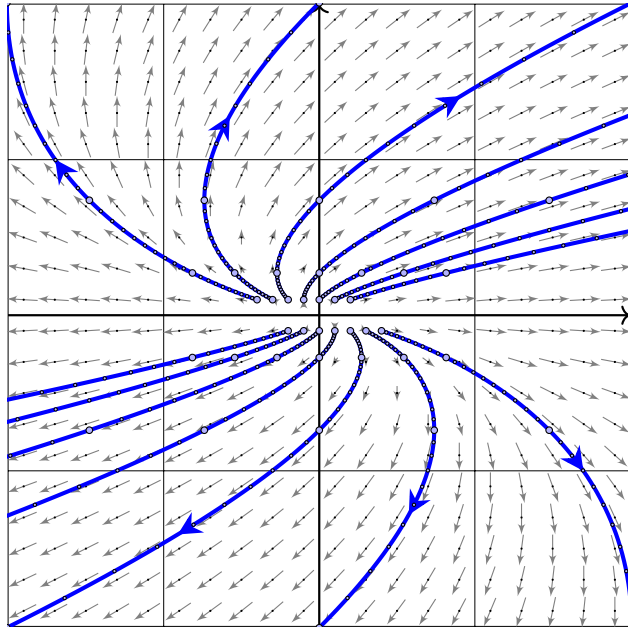
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Instabiler Knoten: parabolische Expansion

Q425



Doppelter Eigenwert
 $\lambda > 0$

Nicht-diagonalisierbar

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

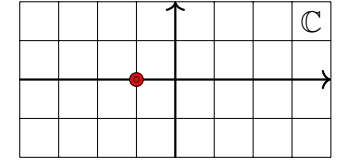
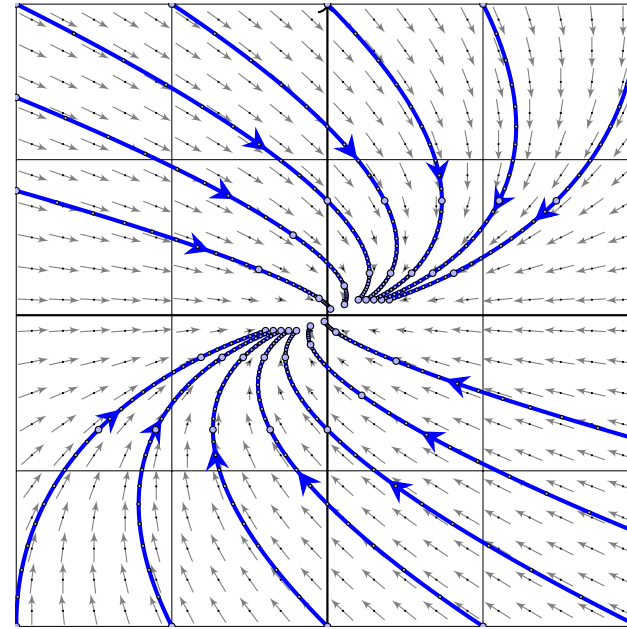
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t & t e^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Stabiler Knoten: parabolische Kontraktion

Q426



Doppelter Eigenwert
 $\lambda < 0$

Nicht-diagonalisierbar

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

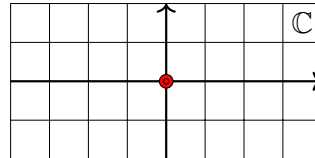
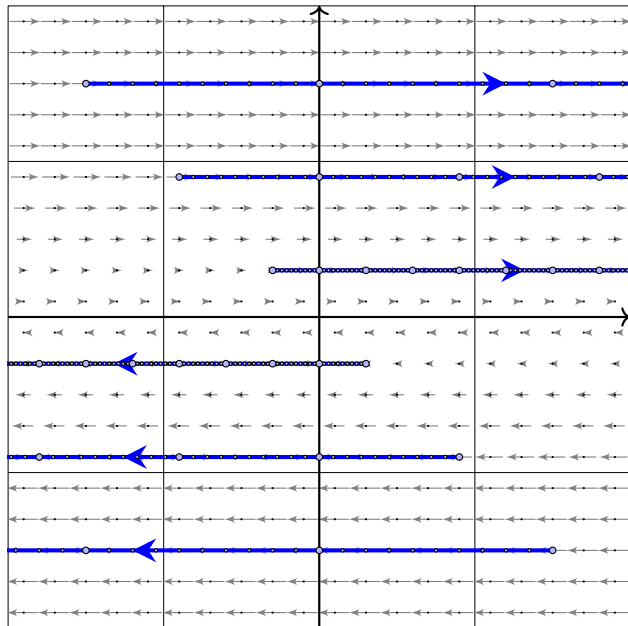
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & t e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Scherung

Q427



Doppelter Eigenwert
 $\lambda = 0$

Nicht-diagonalisierbar

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalisierbar oder nicht diagonalisierbar?

Q428
Erläuterung

Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit doppeltem Eigenwert λ gilt $\lambda \in \mathbb{R}$ sowie

$$\text{entweder } A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

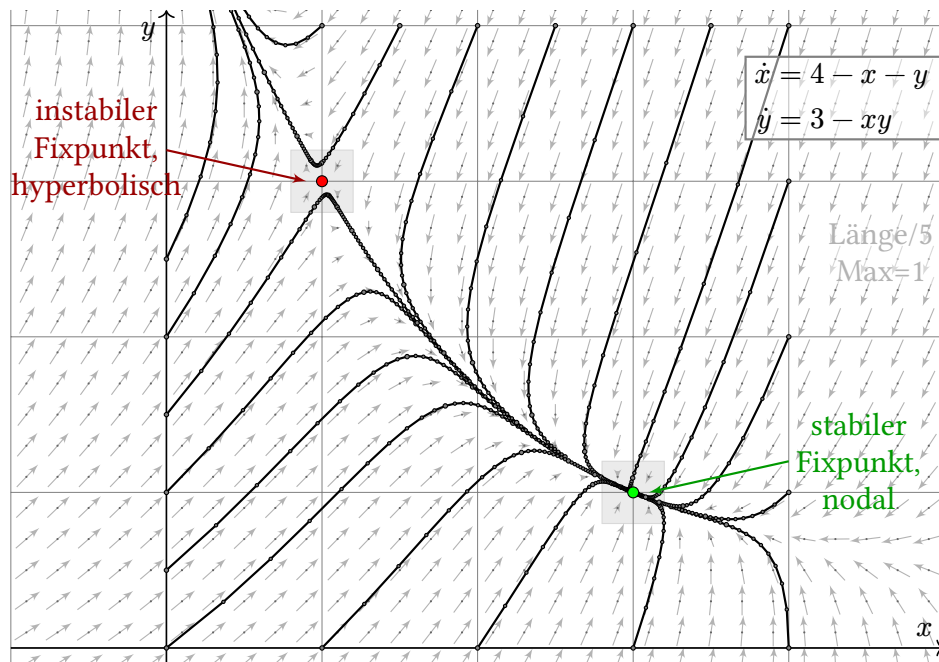
Im ersten Fall existiert eine Basis des \mathbb{R}^2 aus Eigenvektoren von A . Die Matrix A wird hierdurch diagonalisiert. Es gilt dann:

$$e^{tA} \sim e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Andernfalls existiert eine Hauptvektorkette der Länge 2. Diese nutzen wir als Basis des \mathbb{R}^2 und erhalten obigen Jordan-Block. Es gilt dann:

$$e^{tA} \sim e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

😊 Nach demselben Schema können wir n -dimensionale autonome Systeme analysieren: Fixpunkte, Linearisierung, Eigenwerte, Stabilität. Unsere gründliche Vorarbeit zu Eigen- und Hauptvektoren zahlt sich aus!



Aufgabe: Wir untersuchen folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} \dot{x} = 4 - x - y \\ \dot{y} = 3 - xy \end{cases}$$

- (0) Skizzieren Sie das zugehörige Vektorfeld und einige Flusslinien.
- (1a) Finden Sie alle Fixpunkte. Es gibt genau zwei: (1, 3) und (3, 1).
 (1b) Linearisieren Sie um jeden Fixpunkt: Welche Dynamik gilt hier? Leichtere Teilfrage: Ist der betrachtete Fixpunkt stabil oder instabil? Was bedeuten die zugehörigen Eigenvektoren und die Eigenwerte?
- (2) Erklären Sie (qualitativ anhand Ihrer Skizze) für jeden Startpunkt $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^2$ das Verhalten der Lösung $(x(t), y(t))$ für $t \rightarrow \infty$.
 (2a) Gibt es zu jedem Startwert eine Lösung? Ist sie eindeutig?
 (2b) Für welche Startwerte konvergiert die Lösung gegen (3, 1)?
 (2c) Für welche Startwerte konvergiert die Lösung gegen (1, 3)?
 (2d) Für welche Startwerte divergiert die Lösung? gegen ∞ ?
 Ist dieses Verhalten stabil? Wird das Ziel in endlicher Zeit erreicht?

Lösung: (1a) Fixpunkte sind die Nullstellen des Vektorfeldes:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4 - x - y \stackrel{!}{=} 0 \\ \dot{y} &= 3 - xy \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung bedeutet $y = 4 - x$, einsetzen in die zweite ergibt:

$$3 - 4x + x^2 = 0 \iff x \in \{1, 3\}$$

☺ Die beiden einzigen Fixpunkte sind daher (1, 3) und (3, 1). Probe!

(1b) Wir berechnen die Jacobi-Matrix in jedem der beiden Fixpunkte:

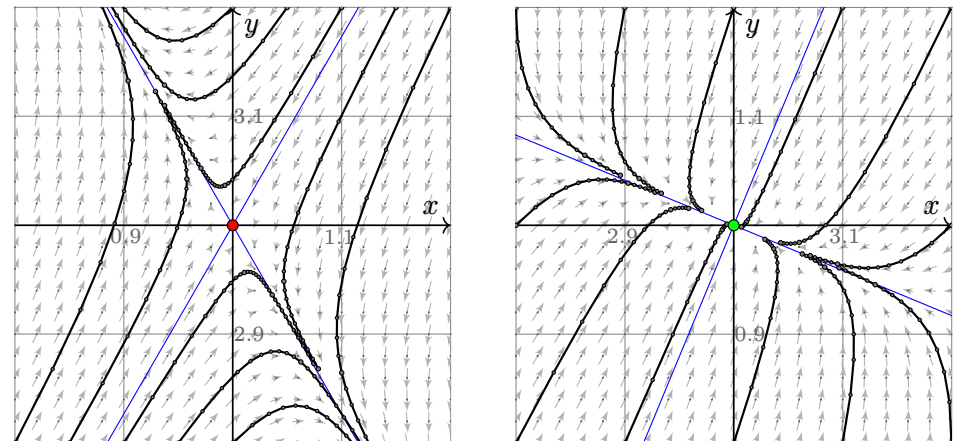
$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 - x - y \\ 3 - xy \end{bmatrix} \implies f'\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -y & -x \end{bmatrix}$$

$$f'\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \det = -2 < 0, \text{tr} = -2 < 0 : \\ \text{instabil! genauer: hyperbolisch} \end{cases}$$

$$f'\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \det = +2 > 0, \text{tr} = -4 < 0 : \\ \text{stabil! genauer: nodale Kontraktion} \end{cases}$$

☺ Vergleich mit der obigen Skizze: Das entspricht der Anschauung!

Die Vergrößerung um die Fixpunkte zeigt annähernd lineares Verhalten:



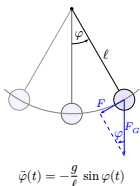
Die beiden Eigenvektoren entsprechen den Hauptachsen der Dynamik:

$$v = \begin{bmatrix} \pm 1/\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda = \mp\sqrt{3} - 1 \qquad v = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{2} - 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda = \mp\sqrt{2} - 2$$

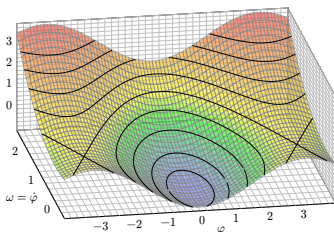
☺ Rechts ist die Jacobi-Matrix symmetrisch, die EV daher orthogonal.

Kapitel Q

Bonusmaterial



$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \sin \varphi(t)$$



Euch, euren Kindern und dem gesamten Gemeinwesen Glück und Segen! [...] Für die Städte sind keine Bollwerke oder Mauern zuverlässigere Schutzwälle als Bürger, die sich durch Bildung, Klugheit und andere Tugenden auszeichnen.
 Philipp Melanchthon (1497–1560), *Lobrede auf die neue Schule*, Nürnberg 23.05.1526

Vollversion

eiserm.de/lehre/LinA

26.05.2026

Inhalt dieses Kapitels Q

Q002

- 5 Dynamische In/Stabilität
 - Das mathematische Pendel
 - Das Näherungsverfahren von Runge–Kutta
 - Das Theorem vom torkelnden Tennisschläger

Jede jordanisierbare Matrix A ist ähnlich zu A^T .

Q403
Übung

Aufgabe: Zeigen Sie $A \sim A^T$ für jeden Jordan-Block $A = J(n, \lambda)$.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \iff A^T = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Lösung: Es gilt $Ae_1 = \lambda e_1$ und $Ae_2 = \lambda e_2 + e_1$ bis $Ae_n = \lambda e_n + e_{n-1}$. In dieser Jordan-Basis $\mathcal{J} = (e_1, \dots, e_n)$ wird A wie oben dargestellt. In der umgedrehten Basis $\mathcal{J}^T := (e_n, \dots, e_1)$ ist die darstellende Matrix dann A^T .

Allgemein: Umdrehen der Basis dreht die Darstellung A um 180° zu A° . Dieser Trick gelingt ebenso für jeden erweiterten Jordan-Block in der reellen Jordan-Form Q1Q, denn auch hier gilt die Symmetrie $A^\circ = A^T$.

☺ Dasselbe gilt allgemein für jede jordanisierbare Matrix $A \in K^{n \times n}$: Es existiert eine jordanisierende Basis $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_\ell)$ bestehend aus Hauptvektorketten $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_\ell$. In der kettenweise umgedrehten Basis $\mathcal{J}' = (\mathcal{J}'_1, \dots, \mathcal{J}'_\ell)$ wird A dargestellt durch die transponierte Matrix A^T .

Jede jordanisierbare Matrix A ist ähnlich zu A^T .

Q404
Übung

Satz Q4A: Ähnlichkeit zur Transponierten

- (1) Jede jordanisierbare Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist ähnlich zu A^T .
- (2) Über $K = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ ist jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ ähnlich zu A^T .

Ist $A \sim A^T$ nicht plausibel? oder sogar selbstverständlich? Müssen wir dies wirklich so aufwändig beweisen? Ja, denn es gibt Gegenbeispiele!

⚠ Vorsicht vor *ai slop!* Sie können mit KI gut lernen, wenn Sie Ihre Grundlagen beherrschen, kritisch bleiben, Fragen und Problemen auf den Grund gehen. Andernfalls lügt die KI frech das Blaue vom Himmel (hier Gemini am 18.04.2026).

➤ Übersicht mit KI
 A commonly cited example of a matrix that is not similar to its transpose ($A \not\sim A^t$) is the 3×3 Jordan block with a zero eigenvalue, specifically the matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

 While A and A^t have the same characteristic polynomial ($\lambda^3 = 0$) and the same eigenvalues, they are not similar because their Jordan normal forms differ, specifically in the structure of their null spaces. [↪ MathOverflow ↪](#)

Aufgabe: In $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$ ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ nicht ähnlich zu $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$.

Lösung: Wir suchen $S = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ mit $AS = SA^T$. Dies führt uns zu den Gleichungen $b = c$ und $7b = 2d$. Demnach gilt $b = 2k$ und $d = 7k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Für $1 = \det S = ad - bc = k(7a - 4k)$ bedeutet das $k = \pm 1$ und $7a \pm 4 = \pm 1$, was unmöglich ist. Also gilt $A \not\sim A^T$ in $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$.

Sei \mathbb{K} ein Ring und darin eine Folge $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ definiert durch die lineare Rekursion $u_{k+n} = a_{n-1}u_{k+n-1} + \dots + a_1u_{k+1} + a_0u_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe: (0) Wie berechnen Sie u_{k+n} mit $n(k+1)$ Operationen in \mathbb{K} ?

(1) Wie berechnen Sie u_{k+n} mit $2n^3 \lceil \log_2(k+1) \rceil$ Operationen in \mathbb{K} ?

☺ Dieser *trade-off* lohnt sich bereits für moderat große k .

(2) Als Zahlenbeispiel betrachten wir die Fibonacci-Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Berechnen Sie mit einem Python-Skript die letzten 20 Dezimalen von f_{10^a} für $a = 2, 3, 4, \dots$. Wie weit kommen Sie in einer Stunde?

Lösung: (1) Wir können die Rekursion als Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ darstellen:

$$\begin{bmatrix} u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+n-1} \\ u_{k+n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+n-1} \end{bmatrix}$$

Wir berechnen $B = A^k$ mit $\leq 2 \lceil \log_2(k) \rceil$ Matrixmultiplikationen dank binärem Potenzieren B6A. Jede benötigt n^3 Operationen im Grundring \mathbb{K} .

(2) Für die Fibonacci-Folge $f = (0, 1, \dots)$ mit $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ haben wir:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \implies A^n = \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix}$$

Aus $A^{2n} = (A^n)^2$ folgt so $f_{2n} = (2f_{n+1} - f_n)f_n$ und $f_{2n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2$. Wir berechnen $(a, b) = (f_n, f_{n+1}) \in \mathbb{Z}_m^2$ dank binärem Potenzieren B6A:

```

1 def fiboslow(n: int, m: int): # Fibonacci f(n) modulo m
2     a, b = 0, 1
3     while n > 0: a, b = b, (a+b) % m; n = n - 1
4     return a, b
5
6 def fibofast(n: int, m: int): # Fibonacci f(n) modulo m
7     if n < 16: return fiboslow(n, m)
8     a, b = fibofast(n // 2, m)
9     a, b = ((2*b-a)*a) % m, (a*a+b*b) % m
10    if n % 2 == 1: a, b = b, (a+b) % m
11    return a, b

```

☺ Probieren Sie es selbst; *naiv linear ist lahm, clever binär ist schnell!*

Beispiel: Für $n = 1$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Ihnen das Verhalten von λ^k für $k \rightarrow \infty$ vertraut: λ^k konvergiert gegen 0 für $|\lambda| < 1$ und divergiert gegen ∞ für $|\lambda| > 1$. Auf dem Rand $|\lambda| = 1$ ist die Folge λ^k beschränkt, doch für $\lambda \neq 1$ nicht konvergent. Für $\lambda = 1$ ist sie konstant, und somit auch konvergent.

☺ Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ verhalten sich erfreulich ähnlich:

Satz Q4B: Wann und wogegen konvergiert A^k für $k \rightarrow \infty$ in $\mathbb{C}^{n \times n}$?

Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sind äquivalent:

- 1 Für $k \rightarrow \infty$ konvergiert A^k in $\mathbb{C}^{n \times n}$ gegen eine Matrix B .
- 2 Für jeden Eigenwert λ gilt entweder $|\lambda| < 1$ oder aber $\lambda = 1$ mit geometrischer Vielfachheit $\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(A - I)$ gleich der algebraischen.

Der Grenzwert B ist dann der Projektor der Hauptraumzerlegung $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda} H(\lambda)$ auf den Summanden $H(1) = E(1) = \text{Ker}(A - I) = \text{fix}(A)$.

☺ Damit haben wir ein bequem einfaches Konvergenzkriterium, sowohl hinreichend als auch notwendig. *Algebra meets Analysis*.

Aufgabe: Beweisen Sie die Aussagen dieses Satzes.

Lösung: Dank Satz Q1B können wir unsere Matrix A jordanisieren. Nach Basiswechsel besteht $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_\ell)$ aus Jordan-Blöcken A_i . Nun genügt es, jeden Block einzeln zu behandeln, denn die Konvergenz von $A^k = \text{diag}(A_1^k, \dots, A_\ell^k)$ ist äquivalent zur Konvergenz in jedem Block.

Sei also $A = \lambda I + N$. Wir nutzen Bemerkung Q1P. Hier gilt:

$$(\lambda I + N)^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} N^i$$

Wir diskutieren nun alle möglichen Fälle:

- 1 Für $|\lambda| < 1$ konvergiert $(\lambda I + N)^k$ gegen 0.
- 2 Für $|\lambda| > 1$ divergiert $(\lambda I + N)^k$ exponentiell gegen ∞ .
- 3 Für $|\lambda| = 1$ und $N \neq 0$ divergiert dies polynomiell gegen ∞ .

Es bleibt $|\lambda| = 1$ und $N = 0$. Hier ist $A^k = \lambda^k I$ beschränkt, doch für $\lambda \neq 1$ nicht konvergent. Für $\lambda = 1$ ist $A^k = I$ konstant, somit konvergent. QED

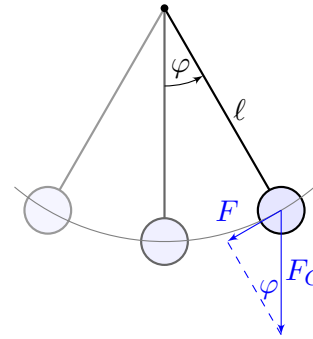
Welche Schwingungsdauer hat eine Schaukel bei 90° Auslenkung?

⚠ Als eindrücklicher Kontrast vergleichen wir hier noch einmal detailliert ein nicht-lineares DGSytem mit seiner Linearisierung.



- Aufgabe:** (1) Erstellen Sie die Bewegungsgleichung $\ddot{\varphi}(t) = \dots$
 (2) Nähern und lösen Sie diese für kleine Amplituden ($|\varphi| < 5^\circ$).
 (3) Formulieren und beweisen Sie die Energieerhaltung für $E = \dots$
 (4) Schreiben Sie die Bewegungsgleichung als DGSytem $\dot{x} = \dots$

- (5) Skizzieren Sie das Vektorfeld f und Lösungskurven für $\ell = 9.81m$.
 (6) Wenden Sie das Euler-Verfahren an auf die Anfangsdaten $\varphi(0) = -\pi/2$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ mit Schrittweite $\Delta t = 0.1$.
 Können Sie der so berechneten Näherung vertrauen?
 Wie lange dauert ein Umlauf ungefähr?



Die Rückstellkraft ist hier nicht-linear:

$$F(t) = -m \cdot g \cdot \sin \varphi(t)$$

- m = Masse des Pendelkörpers
- $g = 9.81m/s^2$ Erdbeschleunigung
- $F_G = mg$ Gravitationskraft zur Masse m
- ℓ = Länge des Pendelstabes
- $\varphi(t)$ = Winkelauslenkung
- $\ell \varphi(t)$ = Auslenkung

(1) Newtons Gesetz $F(t) = m \ell \ddot{\varphi}(t)$ führt zur Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell} \sin \varphi(t).$$

- ⚠ Wir vereinfachen hier: punktförmige Masse des Pendelkörpers, vernachlässigbare Masse des Stabes, reibungsfreie Aufhängung, etc.
- 😊 Für kleine Auslenkungen gilt $\sin(\varphi) \approx \varphi$. (Faustregel für $|\varphi| < 5^\circ$)

(2) Dies führt uns zur **linearisierten Differentialgleichung:**

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell} \varphi(t)$$

Dies ist ein harmonischer Oszillator: $\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2 \varphi(t)$ mit $\omega = \sqrt{g/\ell}$.

Lösung $\varphi(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$, Periodendauer $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.

Beispiel Schiffsschaukel: Für $\ell = 9.81m$ finden wir $T = 2\pi s \approx 6.28s$.

😊 Die Schwingungsdauer ist unabhängig von der Pendelmasse m ! Bei kleinen Schwingungen ist sie auch unabhängig von der Amplitude.

⚠ Für große Auslenkungen brauchen wir eine genauere Rechnung!

(3) Kinetische Energie $\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2$, potentielle Energie $mgl(1 - \cos \varphi)$.

Die **Gesamtenergie** $E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi)$ bleibt erhalten:

$$\frac{dE}{dt} = m\ell^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mgl\dot{\varphi} \sin \varphi = m\ell^2\dot{\varphi} \left[-\frac{g}{\ell} \sin \varphi(t) \right] + mgl\dot{\varphi} \sin \varphi = 0$$

Zum Vergleich der harmonische Oszillator: $E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mgl\varphi^2$

(4) Zustand $(x_1, x_2) = (\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \in \mathbb{R}^2$. Der Zustandsraum ist hier \mathbb{R}^2 . Das Bewegungsgesetz darauf lautet: $\dot{x}_1 = x_2$ und $\dot{x}_2 = -g/\ell \sin(x_1)$.

(5) Für $\ell = 9.81m$ erhalten wir $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = f(x_1, x_2) = (x_2, -\sin(x_1))$. Dieses Vektorfeld $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist in folgenden Graphiken dargestellt.

😊 Dank Energieerhaltung können wir sofort die Lösungskurven als Äquipotentiallinien $E = \text{const}$ einzeichnen! Leider sieht man diesen Kurven ihre zeitliche Parametrisierung oder Periodendauer nicht an.

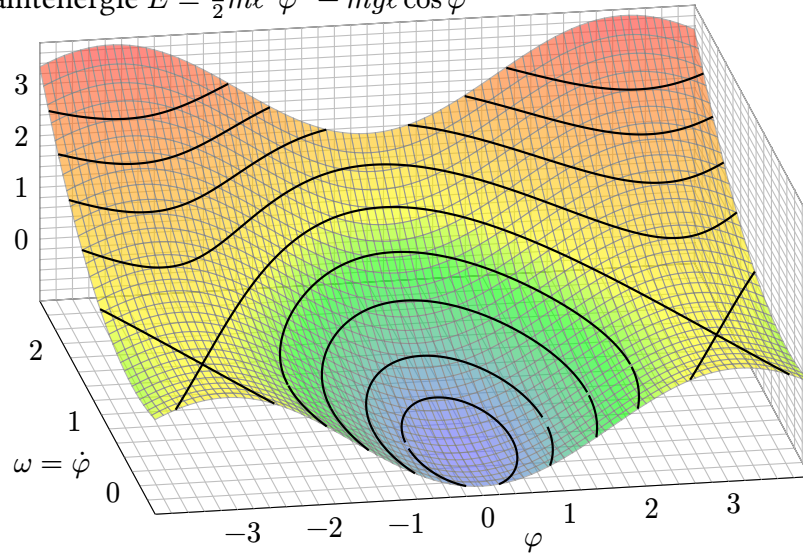
(6) Zeitlich parametrisierte Lösungen $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ berechnen wir näherungsweise durch das Euler-Verfahren und lesen die Zeit ab: Ein Viertelumlauf benötigt $\approx 1.85s$, eine ganze Periode also $\approx 7.4s$. Das ist etwa 18% länger als die Periode des linearisierten Modells.

⚠ Die Näherung akkumuliert Approximationsfehler und entfernt sich von der Energieniveaulinie. Für kleine Zeiten scheint die Abweichung gerade noch akzeptabel. Für eine ernsthafte Rechnung müssen wir die Schrittweite verkleinern oder das gesamte Verfahren verbessern: Fehlerschranken, Effizienz und Präzision erfordern harte Arbeit!

Das mathematische Pendel: Energiefläche

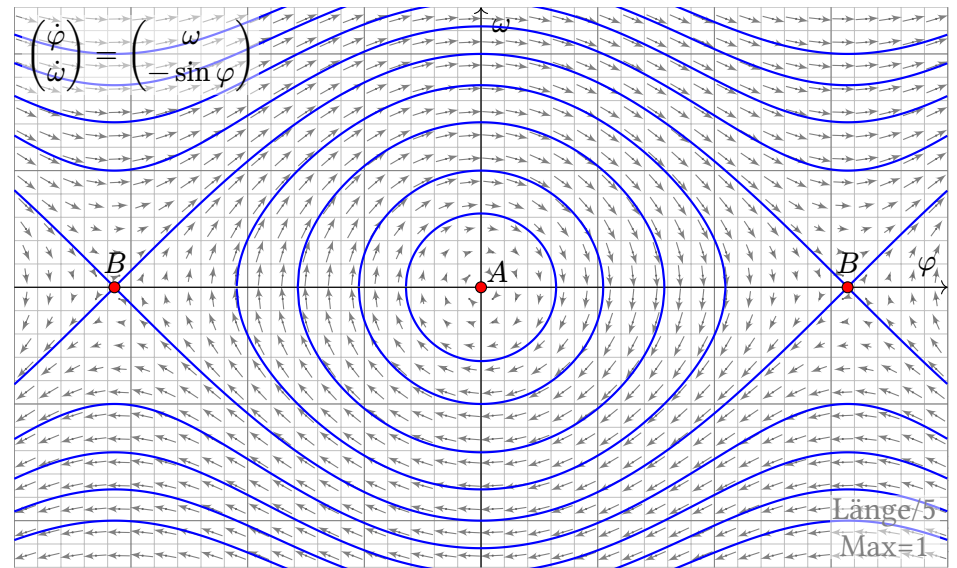
Q505

$$\text{Gesamtenergie } E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi$$



Das mathematische Pendel: Lösungskurven

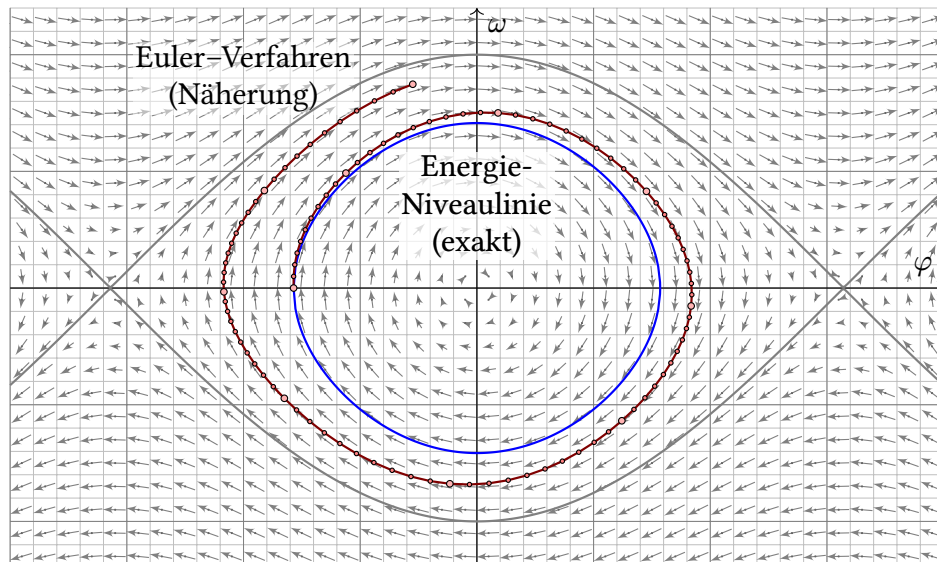
Q506



Wir erkennen harmonische Oszillation um das untere Gleichgewicht A. Der obere Scheitelpunkt B hingegen ist ein instabiles Gleichgewicht.

Das mathematische Pendel: Trajektorien

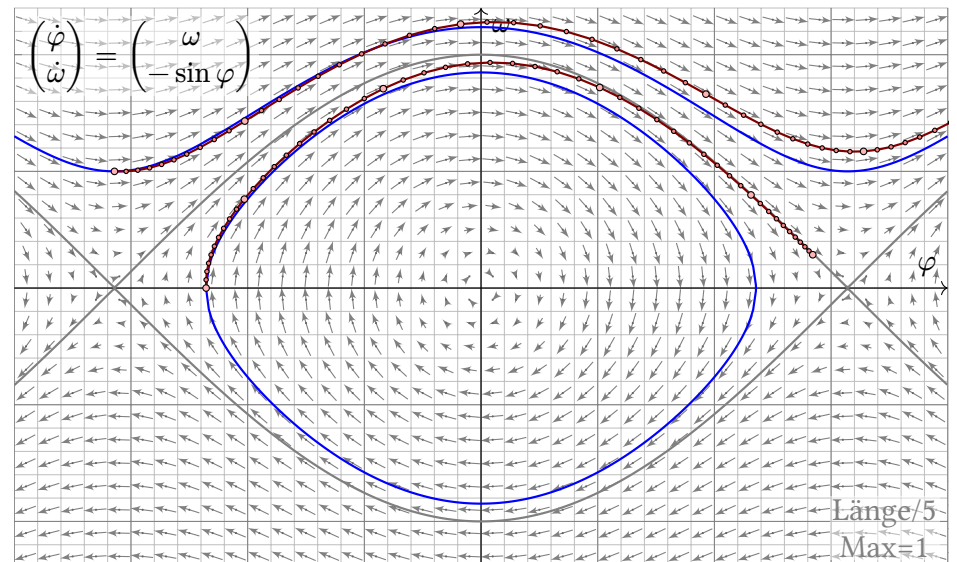
Q507
Ausführung



Die Periode dauert etwa $4 \cdot 1.85s = 7.4s$: Länger als im linearen Modell! Das ist physikalisch plausibel: Kraft und Beschleunigung sind geringer.

Das mathematische Pendel: Trajektorien

Q508
Ausführung



Wir erkennen deutlich die Abweichungen der Euler-Approximation. Wie erreichen wir möglichst hohe Präzision bei geringem Aufwand?

Das Euler–Verfahren wird hier zu didaktischen Zwecken vorgestellt: Es ist besonders einfach. Leider ist es wenig präzise, wie bereits obige Experimente zeigen, und für ernsthafte Anwendungen nicht geeignet!

Auf zwei Weisen können wir die Präzision der Näherung verbessern:

- Wir können kleinere Schritte wählen und so feiner diskretisieren. Das erhöht den Rechenaufwand, der Computer läuft langsamer.
- Wir können ein Verfahren höherer Konvergenzordnung wählen. Das erhöht den Theorieaufwand, der Computer rechnet schneller.

Die numerische Approximation von Differentialgleichungen ist in naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen allgegenwärtig. Es gibt hierzu zahlreiche Verfahren, ständig werden weitere entwickelt, auf spezielle Anwendungen angepasst, untersucht und verbessert.

Das bekannteste ist vermutlich das klassische Runge–Kutta–Verfahren (der Ordnung 4, kurz „RK4“). Es ist in der Praxis sehr weit verbreitet und erfreut sich großer Beliebtheit, denn es ist ebenso einfach zu implementieren wie das Euler–Verfahren, aber wesentlich präziser!



Bildquelle: wikimedia.org

Carl Runge (1856–1927)



Bildquelle: wikimedia.org

Wilhelm Kutta (1867–1944)

Entwickelt hat dieses Verfahren 1895 Carl Runge. Er war 1904–1925 in Göttingen Deutschlands erster Professor für angewandte Mathematik. Weiterentwickelt hat es 1901 Wilhem Kutta, 1912–1935 Professor für Mathematik in Stuttgart. Vor hundert Jahren hätten Sie Ihre Mathematik vermutlich bei ihm gehört. Viele Studierende erinnerten sich später, so heißt es, mit großer Bewunderung an seine einzigartigen Vorlesungen.

Numerisch zu lösen ist $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$. Gegeben ist zur Zeit t der Zustand $x = x(t)$. Gesucht ist nach Zeitschritt h der Zustand $x(t + h)$. Zur Erinnerung das einfach-naive **Euler–Verfahren** (Ordnung 1):

$$x(t + h) \approx x(t) + hk_1 \quad \text{mit Zuwachs} \quad k_1 = f(t, x)$$

Hier das **Runge–Kutta–Verfahren** (der Ordnung 4, kurz „RK4“):

$$x(t + h) \approx x(t) + h \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} k_1 = f(t, x) \\ k_2 = f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(t + h, x + hk_3) \end{cases}$$

Diese raffinierte Rechnung verringert den Approximationsfehler. Die Numerik erklärt wie genau das geht. Zunächst ist k_1 der Zuwachs gemäß des Tangentenvektors zur Zeit t im Punkt x wie bei Eulers Verfahren, dann ist k_2 der Zuwachs zur Mitte des Zeitschritts im Punkt $x + h/2 \cdot k_1$, sodann k_3 der Zuwachs zur Mitte des Zeitschritts aber im Punkt $x + h/2 \cdot k_2$, schließlich ist k_4 der Zuwachs am Ende des Zeitschritts im Punkt $x + hk_3$. Die vier Zuwächse werden gemittelt, wobei die beiden mittleren doppelt zählen. Wenn $f(t, x)$ nur von t und nicht von x abhängt, dann ist dies die numerische Integration gemäß Simpson, auch Keplers Fassregel genannt.

Die nachfolgenden Graphiken vergleichen Euler und Runge–Kutta. Das Euler–Verfahren, aka RK1, ist **erster Ordnung**, kurz $O(h)$:

$$\text{GlobalerFehler(Euler)} \leq C_E(f) \cdot h$$

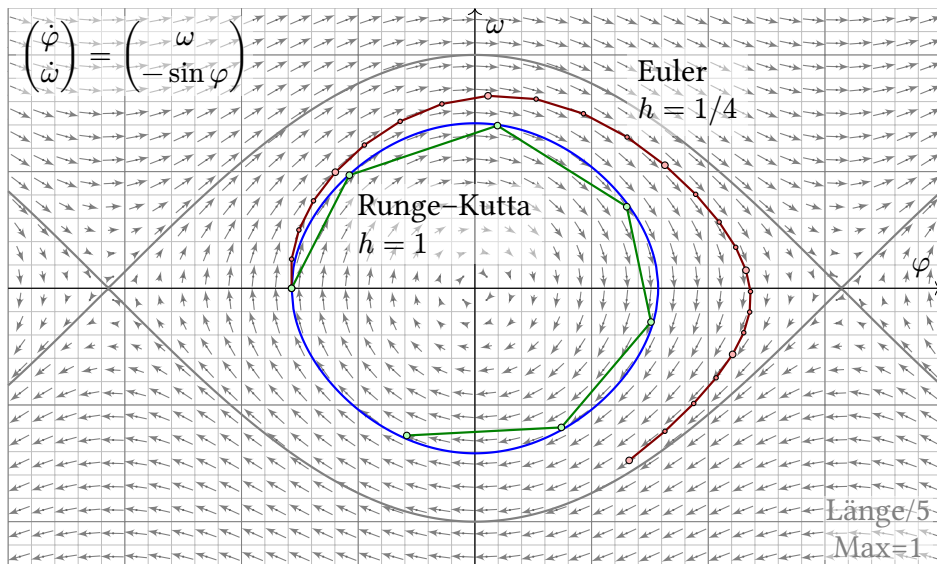
Die Konstante hängt von der Funktion f und dem Zeitintervall ab. Der Fehler $O(h)$ sinkt für $h \rightarrow 0$ linear mit der Schrittweite: Halbe Schrittweite bringt doppelte Genauigkeit.

Das Runge–Kutta–Verfahren ist **vierter Ordnung**, kurz $O(h^4)$:

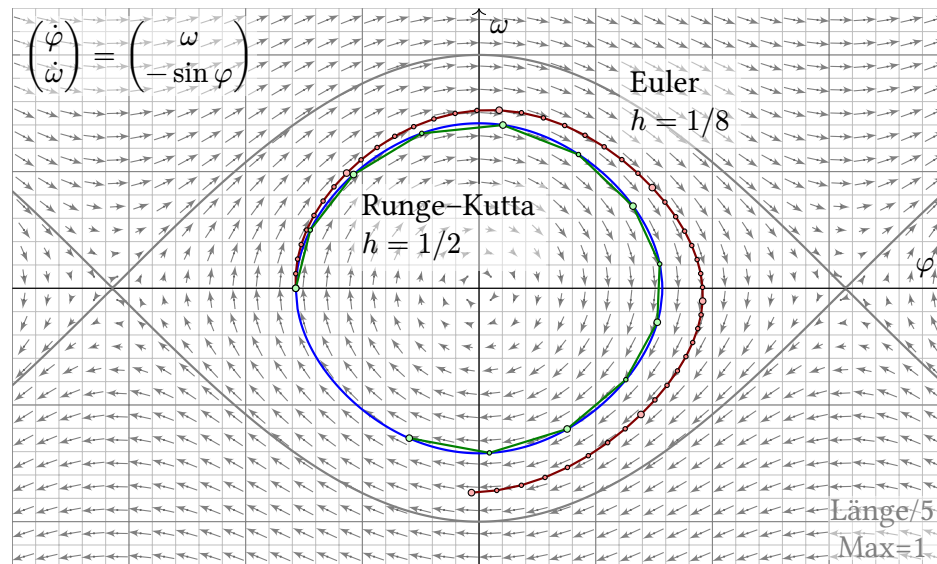
$$\text{GlobalerFehler(RK4)} \leq C_{RK}(f) \cdot h^4$$

Im Vergleich zu $O(h)$ sinkt der Fehler $O(h^4)$ wesentlich schneller: Halbe Schrittweite bringt sechzehnfache Genauigkeit! Das ist eine dramatische Verbesserung. Die folgenden Graphiken illustrieren dies.

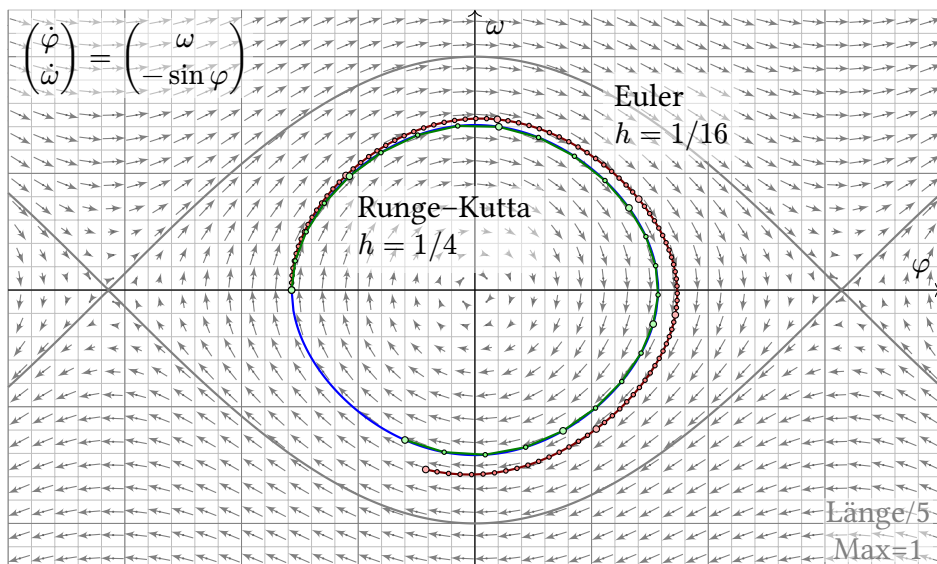
Für jeden Schritt h wertet RK4 viermal aus. Zur Fairness gebe ich Euler die gerechte Schrittweite $h/4$. Dennoch ist Runge–Kutta weit überlegen!
 ▶ *Runge-Kutta is so much better than Euler's method.* youtu.be/dSht1M169KY



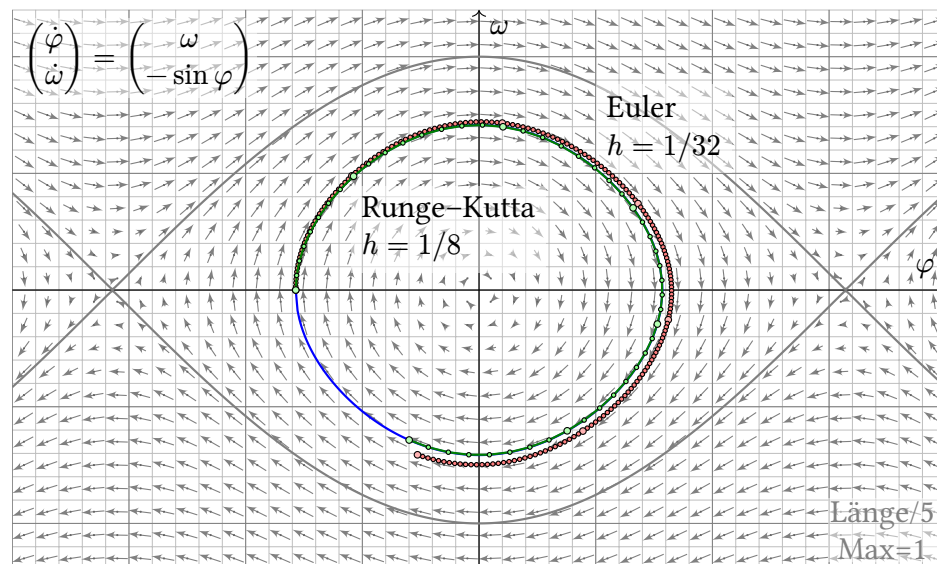
Das Euler-Verfahren (rot) entfernt sich schnell von der exakten Lösung (blau). Das Runge-Kutta-Verfahren (grün) ist bereits recht präzise!



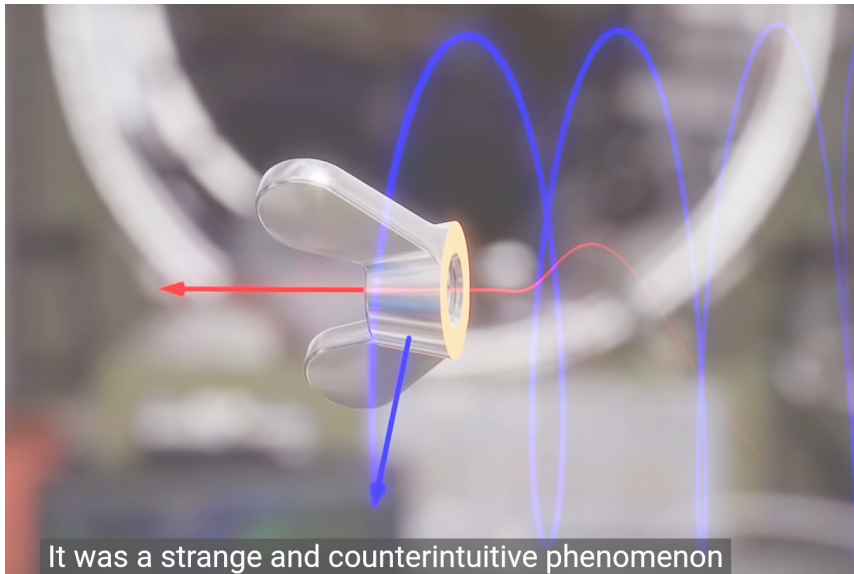
Halbierung der Schrittweite: Das Euler-Verfahren (rot) wird besser. Das Runge-Kutta-Verfahren (grün) scheint weitgehend exakt (blau).



Halbe Schrittweite: Das Euler-Verfahren (rot) halbiert seinen Fehler. Das Runge-Kutta-Verfahren (grün) scheint weitgehend exakt (blau).



Halbe Schrittweite: Das Euler-Verfahren (rot) halbiert seinen Fehler. Das Runge-Kutta-Verfahren (grün) scheint weitgehend exakt (blau).



The bizarre behavior of rotating bodies
Veritasium, youtu.be/1VPfZ_XzisU

Wir betrachten einen rotierenden Körper (in körperfesten Koordinaten), etwa ein Handy (gefährlich) oder einen Tennisschläger (empfohlen). Bevor wir rechnen, machen Sie sich bitte mit dem Phänomen vertraut. Nur so bekommen Sie ein Gespür dafür, wie wahrhaft erstaunlich es ist.

Die Masseverteilung bestimmt das Trägheitsmoment $\Theta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Die Drehbewegung wird beschrieben durch die **Euler-Gleichungen**:

$$\Theta \dot{\omega} = (\Theta \omega) \times \omega + M$$

Zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ ist $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$ die Winkelgeschwindigkeit und $M(t) \in \mathbb{R}^3$ das angewendete Drehmoment; wir setzen fortan $M(t) = 0$. Hierbei ist $L = \Theta \omega$ der Drehimpuls, wir haben also $\dot{L} = L \times \omega + M$.

Die mechanischen Grundlagen importieren als Formeln aus der Physik. Die mathematische Untersuchung hingegen können wir ausführen dank Analysis (Differentialgleichungen, dynamische Systeme, Stabilität) und Linearer Algebra (Koordinaten, Eigenbasen, Hauptachsen).

Aufgabe: Gegeben sei ein (kompakter) Körper $K \subseteq \mathbb{R}^3$ und seine (stetige) Massendichte $\varrho : K \rightarrow \mathbb{R}$. Wie berechnen Sie daraus die Gesamtmasse $m \in \mathbb{R}$, den Schwerpunkt $s \in \mathbb{R}^3$ und das Trägheitsmoment $\Theta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

$$m = \int_K \varrho(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3)$$

$$s = \frac{1}{m} \int_K \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \varrho(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3)$$

$$\Theta = \int_K \begin{bmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1 x_2 & -x_1 x_3 \\ -x_2 x_1 & x_1^2 + x_3^2 & -x_2 x_3 \\ -x_3 x_1 & -x_3 x_2 & x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix} \varrho(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3)$$

Daraus erhalten wir den Drehimpuls $L = \Theta \omega$ und die Energie $E = \omega^T \Theta \omega$.

😊 Ähnliche Rechnungen nutzen wir in der Wahrscheinlichkeitstheorie für Erwartung und Varianz einer WVerteilung, $\varrho \geq 0$ mit Masse $m = 1$.

Im Allgemeinen sind Drehgeschwindigkeit ω und Drehimpuls $L = \Theta \omega$ nicht parallel, daher gilt $\dot{L} = L \times \omega \neq 0$: Der rotierende Körper „eiert“ bei freier Bewegung oder zeigt „Unwucht“ bei fester Drehachse. Parallelität gilt bei Rotation um eine der Hauptträgheitsachsen. In diesem Falle bleibt nicht nur die Länge von L erhalten, sondern auch die Richtung.

Das Trägheitsmoment $\Theta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ diagonalisieren wir in **Hauptachsen**:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(symmetrisch} \implies \text{orthogonal diagonalisierbar)} \\ \text{Koordinatenweise ausgeschrieben erhalten wir} \\ \text{unser nicht-lineares DGSsystem erster Ordnung:} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \dot{\omega}_1 \\ \theta_2 \dot{\omega}_2 \\ \theta_3 \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \omega_1 \\ \theta_2 \omega_2 \\ \theta_3 \omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\theta_2 - \theta_3) \omega_2 \omega_3 + M_1 \\ (\theta_3 - \theta_1) \omega_3 \omega_1 + M_2 \\ (\theta_1 - \theta_2) \omega_1 \omega_2 + M_3 \end{bmatrix}$$

Aufgabe: Sei $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$. Bestimmen Sie Fixpunkte und Stabilität.

Lösung: (1) Es gibt genau die Fixpunkte $(\omega_1, 0, 0)$, $(0, \omega_2, 0)$, $(0, 0, \omega_3)$.
 (2) Wir linearisieren, dazu berechnen wir zunächst die Jacobi-Matrix:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} = f \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} \alpha_1 \omega_2 \omega_3 \\ \alpha_2 \omega_3 \omega_1 \\ \alpha_3 \omega_1 \omega_2 \end{bmatrix} \Rightarrow f' \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \omega_3 & \alpha_1 \omega_2 \\ \alpha_2 \omega_3 & 0 & \alpha_2 \omega_1 \\ \alpha_3 \omega_2 & \alpha_3 \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Linearisiert um den Fixpunkt $(0, \omega_2, 0)$ erhalten wir $\dot{u} = Au$:

$$A = f' \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 \omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = -\lambda(\lambda^2 - \alpha_1 \alpha_3 \omega_2^2) = -\lambda(\lambda^2 - \omega_2^2(\theta_3 - \theta_2)(\theta_2 - \theta_1)/\theta_1 \theta_3)$$

Eigenwerte sind 0 und $\pm \omega_2 \sqrt{(\theta_3 - \theta_2)(\theta_2 - \theta_1)/\theta_1 \theta_3}$. Daraus folgt:

Satz Q5A: torkelnder Tennisschläger / *intermediate axis theorem*

Wir untersuchen die kräftefreie Bewegung eines starren Körpers mit Trägheitsmomenten $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ bezüglich seiner Hauptachsen.

Die Rotation um die mittlere Achse ist instabil: Jede kleine Störung wird exponentiell verstärkt mit $e^{\lambda t}$ und $\lambda = |\omega_2| \sqrt{(\theta_3 - \theta_2)(\theta_2 - \theta_1)/\theta_1 \theta_3}$.

Um $(\omega_1, 0, 0)$ linearisiert finden wir $0, \pm i \omega_1 \sqrt{(\theta_2 - \theta_1)(\theta_3 - \theta_1)/\theta_2 \theta_3} \in i\mathbb{R}$.
 Um $(0, 0, \omega_3)$ linearisiert finden wir $0, \pm i \omega_3 \sqrt{(\theta_3 - \theta_1)(\theta_3 - \theta_2)/\theta_1 \theta_2} \in i\mathbb{R}$.

⚠ Das Eigenwertkriterium können wir hier leider nicht anwenden! Die In/Stabilität lässt sich allein aus diesen Daten noch nicht schließen; dazu sind genauere Untersuchungen nötig, dank Lyapunov-Funktionen:

$$V_1 = (\theta_2 - \theta_1)\theta_2\omega_2^2 + (\theta_3 - \theta_1)\theta_3\omega_3^2 \geq 0, \quad V_1 = 0 \Leftrightarrow \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \dot{V}_1 = 0$$

$$V_3 = (\theta_3 - \theta_1)\theta_1\omega_1^2 + (\theta_3 - \theta_2)\theta_2\omega_2^2 \geq 0, \quad V_3 = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \dot{V}_3 = 0$$

😊 Diese Invarianten zeigen, dass die Rotation um die erste bzw. dritte Achse stabil ist. Letzteres gilt nur bei Energieerhaltung, wie eingangs vereinfachend angenommen. Bei Dissipation gilt $\dot{V}_1 \geq 0$ und $\dot{V}_3 \leq 0$.

⚠ Die Rotation um die kleine Achse wird dann ebenfalls instabil. Die NASA erfuhr dies 1958 schmerzlich mit Explorer 1, ihrem ersten künstlichen Erdsatelliten, siehe en.wikipedia.org/wiki/Explorer_1.

📖 Colley: *The tumbling box*. Amer. Math. Monthly 94 (1987) 62–68
 Marsden, Ratiu: *Mechanics and Symmetry*. Springer 1999, §15.9

🤔 Warum zelebriere ich dieses schöne Beispiel so ausführlich? Meiner Überzeugung nach verbinden sich hier mehrere faszinierende Erzählstränge zu grundlegender Mathematik und ihren Anwendungen. Leistungsstarke Theorie ermöglicht effiziente Anwendungen.

Einerseits können Sie das Phänomen des torkelnden Tennisschlägers selbst erfahren und ausprobieren, gerne auch anderen vorführen und gemeinsam testen. Das Problem ist verblüffend und unmittelbar spürbar. Eine anschauliche Erklärung ist jedoch keineswegs offensichtlich.

Andererseits haben wir die Methoden der Linearen Algebra, die hier vorbildlich zum Einsatz kommen und die Analysis wunderbar ergänzen. Dabei erkennen wir ein typisches Muster: Reale Probleme sind meist sehr kompliziert. Zwecks Vereinfachung versuchen wir, sie zu linearisieren.

In günstigen Fällen wird das Problem dadurch gelöst, so wie hier. Auf Ihre mathematischen Werkzeuge dürfen Sie daher stolz sein!

Sie verfügen nun über die nötigen Werkzeuge zur Behandlung von (linearisierten) Stabilitätsfragen, erfreulich allgemein und quantitativ. Als Ergänzung bietet das obige Video anschauliche Erklärungen. Beide Sichtweisen sind willkommen und ergänzen sich gegenseitig.

Ich warne vor einem häufigen Missverständnis: Anschauung und Intuition sind wunderbar als *Ergänzung* zum formal-quantitativen Rechnen. Als *Ersatz* führen sie allzu oft in die Irre, gar Katastrophe. Schulen und nutzen Sie also stets beides, Intuition und Präzision!

Eine geübte Intuition gibt Ihnen schnell einen ersten Anhaltspunkt. Wie üben Sie Ihre Intuition? Durch Erfahrung, praktisch und theoretisch! Die formal-algebraische Rechnung präzisiert, sicher ab und quantifiziert. Theorie wirkt auch dort, wo die naive Anschauung versagt.

Der torkelnde Tennisschläger ist ein hervorragendes Beispiel. Er belohnt unsere erste linearisierte Untersuchung und jede weitere Vertiefung.

Kapitel R

Lineare Algebra über \mathbb{Z} und $\mathbb{K}[X]$: Elementarteilersatz und Anwendungen

Zwar hatte Herr Fourier die Meinung, das Hauptziel der Mathematik sei der Gemeinnutzen (l'utilité publique) und die Erklärung der Naturphänomene; aber ein Philosoph wie er hätte wissen müssen, dass das einzige Ziel der Wissenschaft die Ehre des menschlichen Geistes ist und bei diesem Anspruch eine Frage über Zahlen ebensoviel wert ist wie eine Frage über das Weltsystem.
Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) an Adrien-Marie Legendre (1752–1833)

Dieses schöne Thema ist suspendiert.

Kapitel R

Bonusmaterial

ARGENT, MACHINISME, ALGÈBRE.

Les trois monstres de la civilisation actuelle.

Machine : la méthode se trouve dans la chose, non dans l'esprit.

Algèbre : la méthode se trouve dans les signes, non dans l'esprit.

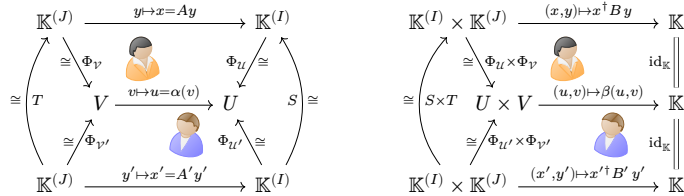
Simone Weil (1909–1943), zitiert nach Laurent Lafforgue

Inhalt dieses Kapitels R

Dieses schöne Thema ist suspendiert.

Kapitel S

Vektorräume mit Skalarprodukt



Unsere Allergrößten, wie Archimedes, Newton, Gauß,
haben stets Theorie und Anwendungen gleichmäßig umfasst.

Felix Klein (1849–1925)

Inhalt dieses Kapitels S

- 1 Hermitesche Sesquilinearformen über (\mathbb{K}, σ)
 - Sesquilinearformen und Orthogonalität
 - Hermitesche Formen und Diagonalisierung
- 2 Skalarprodukte über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$
 - Skalarprodukte und Cauchy–Schwarz–Ungleichung
 - Vom Skalarprodukt zur Norm, von der Norm zur Metrik
- 3 Orthonormalisierung und Bestapproximation
 - Orthogonale Familien und orthogonale Projektion
 - Gram–Schmidt–Verfahren und die QR–Zerlegung
 - Bestapproximation durch Orthogonalprojektion
 - Näherungslösung eines überbestimmten Gleichungssystems
 - Anwendung: Fourier–Analyse periodischer Funktionen
- 4 Isometrien und unitäre Endomorphismen
 - Givens–Rotationen und Householder–Spiegelungen
 - Rotationen des dreidimensionalen Raumes

Motivation und Überblick

Wir untersuchen in diesem Kapitel reelle und komplexe Vektorräume mit einem Skalarprodukt. Damit messen wir Winkel, Längen und Abstände, wir betreiben also **Geometrie** im wörtlichen Sinne von „Landmessung“. Lineare Algebra und Analytische Geometrie ergänzen sich wunderbar. Getreu unserem Slogan: Mathematik ist wunderschön und nützlich!

Erste Ideen und praktische **Anwendungen** kennen Sie aus der Schule. Darüber hinaus spielen Skalarprodukte, gern geeignet verallgemeinert, die zentrale Rolle in der Untersuchung von gekrümmten Flächen und allgemein in der Riemannschen Geometrie auf Mannigfaltigkeiten, bis hin zur speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie.

Skalarprodukte begegnen Ihnen ebenfalls in der **Analysis**, zunächst als euklidisches Skalarprodukt bei der Untersuchung der metrischen und topologischen Eigenschaften des vertrauten euklidischen Raumes \mathbb{R}^n , später dann in der faszinierenden Fourier–Theorie bei der Zerlegung periodischer Funktionen in harmonische Grundschwingungen, sowie allgemein in Hilbert–Räumen und ihren zahlreichen Anwendungen.

Motivation und Überblick

Ebenso wie die Analysis nutzt auch die **Numerik** Skalarprodukte, Normen und Metriken zur Messung von Abständen und Fehlern, zur Kontrolle von Näherungen und zur Definition der Konvergenz.

Auch die **Methode der kleinsten Quadrate** beruht auf der Technik von Skalarprodukten und wird überall eingesetzt, wo fehlerbehaftete Daten verarbeitet werden, insbesondere linearisiert oder ähnlich geglättet.

In der **Stochastik** verhält sich die Co/Varianz reeller Zufallsvariablen wie ein Skalarprodukt, und die lineare Regression nutzt die Methode der kleinsten Quadrate zur Untersuchung linearer Zusammenhänge.

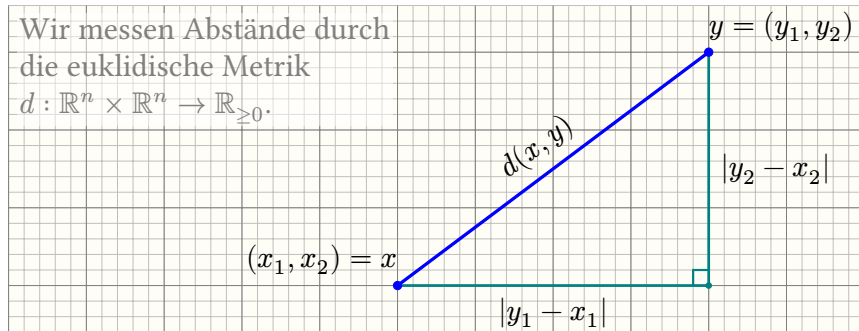
In der **Physik** schließlich beruht die Quantenmechanik auf dem Modell, dass die Zustände eines Systems beschrieben werden durch Vektoren in einem Hilbert–Raum, also einem \mathbb{C} –Vektorraum mit Skalarprodukt.

⚠ Wir arbeiten möglichst anwendungsfreundlich, das heißt: abstrakt! Um der faszinierenden Vielfalt der Anwendungen gerecht zu werden, bauen wir die Theorie sorgsam auf, vom Allgemeinen zum Speziellen. Das erfordert geduldiges Erlernen grundlegender Begriffe und Techniken.

Wir betrachten die Menge \mathbb{R}^n aller reellen n -Tupel $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Wir messen Abstände durch die euklidische Metrik

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$



Die **euklidische Metrik** $d(x, y)$ misst den Abstand vom Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ zum Punkt $y \in \mathbb{R}^n$, also die Länge des Vektors $y - x$. Dank Pythagoras gilt:

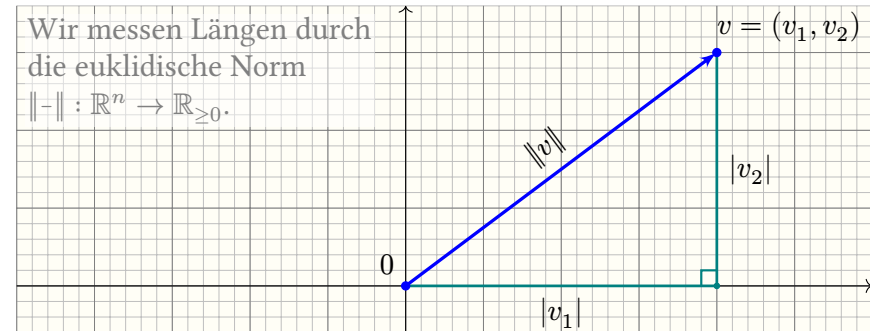
$$d(x, y) = \sqrt{|y_1 - x_1|^2 + \dots + |y_n - x_n|^2}$$

Unsere Skizze zeigt dies für $n = 2$. **Übung:** Skizzieren und begründen Sie dies ebenso für $n = 3$. Der allgemeine Fall $n \in \mathbb{N}$ gelingt per Induktion.

Wir betrachten den Vektorraum \mathbb{R}^n über den reellen Zahlen \mathbb{R} .

Wir messen Längen durch die euklidische Norm

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$



Die **euklidische Norm** $\|v\|$, kurz $|v|$, misst die Länge des Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ als den Abstand vom Ursprung 0 zum Punkt v . Dank Pythagoras gilt:

$$|v| = \|v\| = \sqrt{|v_1|^2 + \dots + |v_n|^2}$$

Das Normquadrat $\|v\|^2 = v_1^2 + \dots + v_n^2$ ist eine **quadratische Form**. Die zugehörige Bilinearform ist das **euklidische Skalarprodukt**.

Das **euklidische Skalarprodukt** von zwei Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\langle u | v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

Übliche Schreibweisen sind $\langle u | v \rangle = \langle u, v \rangle = u \cdot v = u \cdot v = u^\top v = \dots$

Für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gilt demnach $\langle v | v \rangle = v_1^2 + \dots + v_n^2 \geq 0$.

Die **euklidische Norm** des Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$|v| = \|v\| := \sqrt{\langle v | v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$$

Übliche Schreibweisen sind $|v| = |v|_2 = \|v\| = \|v\|_2 = \|v\|_{\ell^2} = \dots$

Der **euklidische Abstand** zwischen zwei Punkten $u, v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$d(u, v) := |u - v| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

Alternative Schreibweisen für Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ und ihre Länge $|v| \in \mathbb{R}$: Vektorpfeil \vec{v} und $v = |\vec{v}|$ oder Unterstrich \underline{v} und $v = |\underline{v}|$, oder Fettdruck. Schnörkel helfen als Gedächtnisstütze, sind ansonsten aber entbehrlich.

Das Skalarprodukt ermöglicht uns, in \mathbb{R}^n Längen und Winkel zu messen. Damit gewinnen wir auf \mathbb{R}^n die üblichen geometrischen Werkzeuge:

- **Orthogonalität:** $u, v \in V$ stehen senkrecht, wenn $\langle u | v \rangle = 0$.
- **Norm:** Die Länge eines Vektors $v \in V$ ist $|v| = \|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$.
- **Winkel:** $\langle u | v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\alpha)$ mit $\alpha = \sphericalangle(u, v) \in [0, \pi]$.
- **Cauchy-Schwarz-Ungleichung:** Es gilt $|\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
- **Dreiecksungleichung:** Es gilt $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
- **Metrik:** Der Abstand zweier Vektoren u, v ist $\|u - v\|$.
- **Konvergenz** $v_n \rightarrow v$ ist definiert durch $\|v_n - v\| \rightarrow 0$.

Beispiel: Die Vektoren e_1, \dots, e_n sind orthonormal, also $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $x = \sum_{i=1}^n e_i x_i$ mit den Koeffizienten $x_i = \langle e_i | x \rangle$.

☺ Diese Begriffe kennen Sie vermutlich für $n = 2, 3$. Erstaunlicherweise nützen Sie in jeder Dimension $n \in \mathbb{N}$ und für Funktionen als Grundlage der Fourier-Theorie! Wir werden die Theorie später aufbauen.

Wir nutzen Skalarprodukte nicht nur über \mathbb{R} , auch über \mathbb{C} , sogar \mathbb{H} .
Zur Erinnerung: Auf dem Körper \mathbb{R} haben wir die **triviale Konjugation**

$$\text{conj}_{\mathbb{R}} = \text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \alpha \mapsto \bar{\alpha} = \alpha$$

Demnach gilt $|\alpha|^2 = \bar{\alpha}\alpha = \alpha\bar{\alpha} = \alpha^2 \geq 0$, mit Gleichheit gdw $\alpha = 0$.

Auf $\mathbb{C} = \{z = \alpha + i\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ haben wir die **komplexe Konjugation**

$$\text{conj}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z = \alpha + i\beta \mapsto \bar{z} = \alpha - i\beta$$

Demnach gilt $|z|^2 = \bar{z}z = z\bar{z} = \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$, mit Gleichheit gdw $z = 0$.

Auf $\mathbb{H} = \{q = \alpha + i\beta + j\gamma + k\delta \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$ haben wir entsprechend

$$\text{conj}_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} : q = \alpha + i\beta + j\gamma + k\delta \mapsto \bar{q} = \alpha - i\beta - j\gamma - k\delta$$

Es gilt $|q|^2 = q\bar{q} = \bar{q}q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \geq 0$, mit Gleichheit gdw $q = 0$.

Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $\overline{\bar{x}} = x$ sowie $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$ und $\overline{x \cdot y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$.

Dies setzen wir fort auf Matrizen: Zur Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{K}^{I \times J}$ definieren wir die **adjungierte Matrix** $A^\dagger := \overline{A^T} = (\bar{a}_{ij})_{ji} \in \mathbb{K}^{J \times I}$.

Wir formulieren systematisch diese drei Fälle gemeinsam. Es lohnt sich!
Denkökonomie: Die Arbeit über \mathbb{R} , \mathbb{C} und \mathbb{H} verläuft weitgehend parallel.
In ihrem Zusammenspiel und im Kontrast können wir viel lernen!

Grundlegend ist der reelle Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dieser ist insbesondere in kleiner Dimension $n = 2, 3$ wunderbar anschaulich. Davon wollen wir ausgehen und auf beliebige (auch unendliche) Dimension verallgemeinern.

Für viele Anwendungen (in Mathematik, Physik, Ingenieurwesen, uvm.) reichen die reellen Zahlen \mathbb{R} nicht aus, daher nutzen wir die Erweiterung zu den komplexen Zahlen \mathbb{C} . Das gilt insbesondere für Skalarprodukte.

Die Quaternionen \mathbb{H} werden erfahrungsgemäß nicht so häufig genutzt wie \mathbb{C} oder \mathbb{R} , oft genug sind sie jedoch eine sehr hilfreiche Ergänzung.

Den reellen Fall versteht man besser, wenn man auch komplex denkt, und fürs Komplexe hilft es, die Quaternionen im Hinterkopf zu haben.

Kurzum: Die reellen Zahlen \mathbb{R} sind oft nicht genug, die Quaternionen \mathbb{H} sind manchmal zu viel, die komplexen Zahlen \mathbb{C} sind meist genau richtig.

Beispiel S1A: das Standardskalarprodukt auf \mathbb{K}^n über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Auf $V = \mathbb{K}^n$ definieren wir das **Standardskalarprodukt**

$$\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u | v \rangle := \bar{u}_1 v_1 + \dots + \bar{u}_n v_n = u^\dagger v.$$

Für alle Vektoren $u, v, w \in V$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

S0: positive Semidefinitheit, $\langle u | u \rangle \geq 0 = \langle 0 | 0 \rangle$

S1: positive Definitheit, $\langle u | u \rangle > 0$ für $u \neq 0$

S2: konjugierte Symmetrie, $\langle v | u \rangle = \overline{\langle u | v \rangle}$

S3: Linearität rechts, $\langle u | v\lambda + w\mu \rangle = \langle u | v \rangle \lambda + \langle u | w \rangle \mu$

Aus (S2&3) folgt konjugierte Linearität in der ersten Variablen:

S4: Semilinearität links, $\langle u\lambda + v\mu | w \rangle = \bar{\lambda} \langle u | w \rangle + \bar{\mu} \langle v | w \rangle$

Eigenschaften (S3&4) heißen **sesquilinear** (lat. *sesqui*, 'anderthalb'), (S2) heißt **hermitesch** zu Ehren von Charles Hermite (1822–1901).

Über \mathbb{R} mit $\text{conj}_{\mathbb{R}} = \text{id}_{\mathbb{R}}$ heißt (S2) **symmetrisch** und (S3&4) **bilinear**.

Wir nennen dies das **euklidische** oder **Standardskalarprodukt** auf \mathbb{K}^n .
Allgemein über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist es eine **hermitesche Sesquilinearform**,
speziell über \mathbb{R} eine **symmetrische Bilinearform**.

Dank (S2) gilt $\langle u | u \rangle \in \mathbb{R}$ für alle $u \in V$, wir können also die Ordnung von \mathbb{R} nutzen und von Positivität sprechen: (S0) fordert $\langle u | u \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, und (S1) ergänzt stärker $\langle u | u \rangle \neq 0$ für alle $u \neq 0$, also $\langle u | u \rangle \in \mathbb{R}_{> 0}$.

Aufgabe: Rechnen Sie die hier gemachten Aussagen (S0–4) nach.

Lösung: Wir nutzen die Anordnung der reellen Zahlen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}$:

(S0) Für jeden Koeffizienten $u_i \in \mathbb{K}$ gilt $\bar{u}_i u_i = |u_i|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Für jeden Vektor $u \in \mathbb{K}^n$ folgt $\langle u | u \rangle = |u_1|^2 + \dots + |u_n|^2 \geq 0$.

(S1) Im Falle $u \neq 0$ gilt $u_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, n\}$.

Daraus folgt sofort die strikte Ungleichung $\langle u | u \rangle \geq |u_i|^2 > 0$.

Wir nutzen, dass $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ein Ring ist und die Konjugation $x \mapsto \bar{x}$ ein Ringantiautomorphismus. Damit rechnen Sie (S2–4) geduldig nach.
Da \mathbb{H} nicht-kommutativ ist, achten wir auf die Reihenfolge der Faktoren.

Bemerkung: Auf dem Vektorraum \mathbb{R}^n ist $(u, v) \mapsto u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$ positiv definit, auf \mathbb{C}^n und \mathbb{H}^n jedoch nicht, denn $i \cdot i = -1 < 0$.

⚠ Zur Korrektur müssen wir *eine* der beiden Variablen konjugieren. Ich plädiere entschieden für die erste, dadurch werden Formeln schöner. Diese Konvention ist in der physikalischen Literatur weitgehend üblich.

⚠ Manche Autor:innen konjugieren traditionell die zweite Variable. So findet es sich vor allem in der älteren, mathematischen Literatur. Beide Konventionen sind per Konjugation ineinander umzurechnen.

😊 Wir legen uns auf eine Konvention fest und befolgen diese fortan.

Bemerkung: Es gilt $\langle u | 0 \rangle = 0$ dank (S3) und $\langle 0 | v \rangle = 0$ dank (S4). Insbesondere gilt demnach immer $\langle 0 | 0 \rangle = 0$, und aus (S1) folgt (S0).

Die Formulierung der Eigenschaften (S0–3) ist daher etwas redundant; ich möchte damit die positive Definitheit (S1) besonders hervorheben.

Gilt in späteren Anwendungen statt positiver Definitheit (S1) nur die schwächere Eigenschaft (S0), so nennen wir $\langle - | - \rangle$ **positiv semidefinit**.

😊 Mit dem Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$ messen wir Längen und Winkel. Daraus gewinnen wir für V wichtige geometrische Werkzeuge:

Orthogonalität: $u, v \in V$ stehen senkrecht, wenn $\langle u | v \rangle = 0$.

Norm: Die Länge eines Vektors $v \in V$ ist $|v| = \|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$.

Winkel: $\operatorname{re} \langle u | v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\alpha)$ mit $\alpha = \sphericalangle(u, v) \in [0, \pi]$.

Cauchy–Schwarz–Ungleichung: Es gilt $|\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

Dreiecksungleichung: Es gilt $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Metrik: Der Abstand zweier Vektoren u, v ist $\|u - v\|$.

Konvergenz $v_n \rightarrow v$ in V ist definiert durch $\|v_n - v\| \rightarrow 0$.

Vollständigkeit: Jede Cauchy–Folge in V konvergiert in V .

Stetigkeit von Funktionen $f: V \rightarrow W$, linear oder nicht.

Differenzierbarkeit, lineare und höhere Approximation.

😊 Wir wollen dies möglichst allgemein erklären und effizient nutzen. Dazu erheben wir die wesentlichen Eigenschaften (S1–3) zur Definition.

Für ein reelles Skalarprodukt fordern wir wirkungsstarke Eigenschaften: Es ist eine symmetrische Bilinearform (S23), zudem positiv definit (S1).

Es gibt auch viele Anwendungen, in denen symmetrische Bilinearformen auftreten, die jedoch nicht positiv definit sind, sondern nur semidefinit oder gar indefinit. Auch diese wollen und müssen wir angemessen und systematisch behandeln. Dazu untersuchen wir allgemein symmetrische Bilinearformen und kommen dann gerne auf Skalarprodukte zurück.

Darüber hinaus begegnen uns oft auch interessante Bilinearformen, die nicht symmetrisch sind. Diese wollen wir uns nicht verbieten, sondern gleich die hierfür nötigen Grundlagen bereitstellen.

Es lohnt sich daher, den Blick nicht allzu früh einzuengen, sondern eher zu weiten und die Begriffe sorgsam einzuführen und zu untersuchen. Das ist das vertraute und bewährte Vorgehen in der Mathematik: Wir erreichen nachhaltige Effizienz durch systematische Grundlagen.

Viele Anwendungen nutzen den Körper \mathbb{C} und komplexe Skalarprodukte. In all diesen Fällen spielt die komplexe Konjugation $\operatorname{conj}_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$ für $x, y \in \mathbb{R}$ eine zentrale Rolle, wie oben bereits zu erkennen in unserem Paradebeispiel S1A.

Daher wollen wir auch hermitesche Sesquilinearformen gebührend benennen und behandeln. Dies gelingt möglichst elegant und effizient, wenn wir jeweils nur die benötigten Eigenschaften voraussetzen. Darüber hinaus begegnen uns auch interessante Sesquilinearformen, die nicht hermitesch sind. Diese wollen wir uns nicht verbieten.

Wir arbeiten dazu allgemeinen über einem Ring (\mathbb{K}, σ) mit Involution. Die wichtigsten Beispiele sind die komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, \operatorname{conj}_{\mathbb{C}})$ und weiterhin die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, \operatorname{id}_{\mathbb{R}})$ mit der trivialen Konjugation. Die Quaternionen $(\mathbb{H}, \operatorname{conj}_{\mathbb{H}})$ führe ich mit als illustrative Begleitung, insbesondere wo dies keinen Mehraufwand erfordert.

Wir arbeiten typischerweise über (\mathbb{K}, σ) mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$. Hierbei ist σ eine Involution, $\sigma \circ \sigma = \text{id}$, also eine selbstinverse Abbildung, und zudem ein Anti-Automorphismus des Grundrings \mathbb{K} . Ausführlich:

◆ **Definition D1c:** involutiver Ring, kurz *Ring

Sei $(\mathbb{K}, +, 0, \cdot, 1)$ ein Ring. Eine **Involution** $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} : a \mapsto a^\sigma = a^*$ erfüllt $(a^\sigma)^\sigma = a$ sowie $(a + b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma$ und $(a \cdot b)^\sigma = b^\sigma \cdot a^\sigma$ für alle $a, b \in \mathbb{K}$, somit $0^\sigma = 0$ und $1^\sigma = 1$. Das Paar (\mathbb{K}, σ) heißt dann **involutiver Ring**.

Beispiele: (0) Jeder kommutative Ring \mathbb{K} ist involutiv mit $\sigma = \text{id}_{\mathbb{K}}$.

(1) Auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist die **Konjugation** $\text{conj}_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ eine Involution. Soweit möglich fasse ich diese klassischen Fälle $(\mathbb{K}, \text{conj}_{\mathbb{K}})$ zusammen.

(2) Ist (\mathbb{K}, σ) ein involutiver Ring, so auch $(\mathbb{K}^{n \times n}, \dagger)$ mit $A^\dagger = (A^\sigma)^\top$, der Matrixring mit **Adjunktion**, aka Transkonjugation $(a_{ij})_{ij} \mapsto (a_{ij}^\sigma)_{ji}$.

Dieser ist sowohl ein zentrales Beispiel als auch ein wichtiges Werkzeug und in vielen Anwendungen prominent, insbesondere über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Spätestens hier müssen wir uns von der Kommutativität verabschieden!

Die Involution nennen wir auch **Konjugation** oder **Adjunktion**; zu $a \in \mathbb{K}$ ist $a^\sigma \in \mathbb{K}$ das **konjugierte** oder **adjungierte** Element. Nach dem Vorbild von Matrizen nennen wir $a \in \mathbb{K}$ **selbstadjungiert** oder **hermitesch** falls $a^\sigma = a$ gilt, **unitär** falls $a^\sigma = a^{-1}$, und **normal** falls $a \cdot a^\sigma = a^\sigma \cdot a$.

Ein **Homomorphismus** $f : (R, \rho) \rightarrow (S, \sigma)$ involutiver Ringe ist ein Ringhomomorphismus $f : R \rightarrow S$ mit $f(a^\rho) = f(a)^\sigma$ für alle $a \in R$. Beispiele sind die Inklusionen $(\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}}) \hookrightarrow (\mathbb{C}, \text{conj}_{\mathbb{C}}) \hookrightarrow (\mathbb{H}, \text{conj}_{\mathbb{H}})$ und zu $f : (R, \rho) \rightarrow (S, \sigma)$ die Matrixfortsetzung $f : (R^{n \times n}, \dagger) \rightarrow (S^{n \times n}, \dagger)$.

Weitere involutive Ringe begegnen Ihnen je nach Anwendungsgebiet:

Beispiele: Sei (\mathbb{K}, σ) involutiv. (3) Der Polynomring $\mathbb{K}[X]$ ist involutiv bezüglich $\sigma_\pm : X \mapsto \pm X$, ausgeschrieben $\sum_{k=0}^n c_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^n c_k^\sigma (\pm 1)^k X^k$.

(4) Jeder Gruppenring $\mathbb{K}G$ ist involutiv mit $(\sum_g c_g \cdot g)^\sigma = \sum_g c_g^\sigma \cdot g^{-1}$. Ebenso: Ist (G, σ) ein involutives Monoid, so ist $\mathbb{K}G$ ein involutiver Ring.

(5) Sei $q \in \mathbb{N}$ eine Primzahlpotenz und \mathbb{F}_{q^2} ein Körper mit q^2 Elementen. Die Frobenius-Abbildung $f : \mathbb{F}_{q^2} \rightarrow \mathbb{F}_{q^2} : x \mapsto x^q$ ist eine Involution. (K1R)

Definition S1b: semilineare Abbildung über einem *Ring (\mathbb{K}, σ)

Sei $(V, +, \cdot)$ rechtslinear und $(W, +, \cdot)$ linkslinear über \mathbb{K} . Wir nennen $f : V \rightarrow W$ **semilinear** über (\mathbb{K}, σ) , falls f additiv ist und (\mathbb{K}, σ) -homogen:

$$f(v + v') = f(v) + f(v'), \quad f(v \cdot \lambda) = \lambda^\sigma \cdot f(v)$$

für alle Vektoren $v, v' \in V$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{K}$. Diese Eigenschaft heißt auch **konjugiert-linear** oder **antilinear** oder kurz **σ -linear** über \mathbb{K} .

Beispiel: Sei (\mathbb{K}, σ) ein involutiver Ring, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$. Die Matrixadjunktion $\dagger : \mathbb{K}^{I \times J} \rightarrow \mathbb{K}^{J \times I} : A^\dagger = (A^\sigma)^\top$ ist semilinear:

$$\begin{aligned} (A + B)^\dagger &\stackrel{\text{Def}}{=} (A + B)^\sigma{}^\top \stackrel{\text{Conj}}{=} (A^\sigma + B^\sigma)^\top \stackrel{\text{Tran}}{=} A^\dagger + B^\dagger \\ (A \cdot \lambda)^\dagger &\stackrel{\text{Def}}{=} (A \cdot \lambda)^\sigma{}^\top \stackrel{\text{Conj}}{=} (\lambda^\sigma \cdot A^\sigma)^\top \stackrel{\text{Tran}}{=} \lambda^\sigma \cdot A^\dagger. \end{aligned}$$

Über $(\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}})$ ist die Adjunktion nur die Konjugation, und diese ist linear. Über $(\mathbb{C}, \text{conj}_{\mathbb{C}})$ müssen wir dabei zusätzlich den Skalar λ konjugieren, über $(\mathbb{H}, \text{conj}_{\mathbb{H}})$ zudem die Reihenfolge der Multiplikation umkehren.

Mit der Involution $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ tauschen wir elegant links und rechts:

Bemerkung S1c: Konjugation von rechts nach links und umgekehrt

Weiter sei (\mathbb{K}, σ) ein involutiver Ring, etwa $(\mathbb{K}, \text{id}_{\mathbb{K}})$ mit \mathbb{K} kommutativ.

(0) Dann ist $(\sigma, \sigma) : \mathbb{K} \cong \mathbb{K}^{\text{op}}$ ein Ringisomorphismus zwischen dem Ring $\underline{\mathbb{K}} = (\mathbb{K}, +, \cdot)$ und dem entgegengesetzten $\underline{\mathbb{K}}^{\text{op}} = (\mathbb{K}, +, \cdot)$ mit $a \cdot b = b \cdot a$.

(1) Wir können jeden \mathbb{K} -rechtslinearen Raum $\underline{V} = (V, +, \cdot)$ zu einem \mathbb{K} -linkslinearen Raum $\underline{V}^\sigma = (V, +, \cdot)$ konjugieren durch $\lambda \cdot v := v \cdot \lambda^\sigma$.

Ebenso umgekehrt von links nach rechts, dabei gilt involutiv $(V^\sigma)^\sigma = V$. Insbesondere ist $(\text{id}_V, \text{id}_V) : V \cong V^\sigma$ ein semilinearer Isomorphismus.

(2) Ist die Abbildung $f : V \rightarrow W$ linear über \mathbb{K} , so auch $f : V^\sigma \rightarrow W^\sigma$. Ist $f : V \rightarrow W$ semilinear, so ist $f : V^\sigma \rightarrow W$ linear, ebenso $f : V \rightarrow W^\sigma$.

Übung: Schreiben Sie dies sorgsam aus und rechnen Sie es nach!

Beispiel: Für $(\mathbb{K}, \text{id}_{\mathbb{K}})$ ist der Ring \mathbb{K} kommutativ und wir müssen links und rechts nicht unterscheiden, kurz $\lambda \cdot v = v \cdot \lambda$ für $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Eine Abbildung mit Werten im Grundring \mathbb{K} heißt **traditionell Form**.

Beispiel: Sei $U = \mathbb{K}^{(I)}$ und $V = \mathbb{K}^{(J)}$. Zu jeder Matrix $B \in \mathbb{K}^{I \times J}$ haben wir die Form $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\beta(u, v) = u^\dagger B v = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_i^\sigma b_{ij} v_j$.
Rechts: Zu u ist $v \mapsto \beta(u, v)$ linear. Links: Zu v ist $u \mapsto \beta(u, v)$ semilinear.

Definition S1D: Sesquilinearform über einem $*$ Ring (\mathbb{K}, σ)

(1) Seien U, V rechtslineare Räume über \mathbb{K} . Eine Abbildung $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ ist **sesquilinear** über (\mathbb{K}, σ) , wenn sie linear in V und semilinear in U ist:

$$\begin{aligned} \beta(u, v + v') &= \beta(u, v) + \beta(u, v'), & \beta(u, v \cdot \mu) &= \beta(u, v) \mu \\ \beta(u + u', v) &= \beta(u, v) + \beta(u', v), & \beta(u \cdot \lambda, v) &= \lambda^\sigma \beta(u, v), \end{aligned}$$

für alle Vektoren $u, u' \in U$ und $v, v' \in V$ sowie alle Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Wir nennen β eine **Sesquilinearform** oder kurz **SForm** und definieren

$$\text{SF}_{(\mathbb{K}, \sigma)}(U, V) := \{ \beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K} \mid \beta \text{ ist sesquilinear} \}.$$

Beliebte Schreibweisen: $\beta(u, v) = (u | v) = \langle u | v \rangle = \langle u, v \rangle = u \cdot v = \dots$

Zunächst interessieren uns Skalarprodukte über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, und daher allgemein Sesquilinearformen über (\mathbb{K}, σ) . Noch genauer untersuchen wir später den Spezialfall $\sigma = \text{id}_{\mathbb{K}}$ und bilineare Abbildungen, Stichworte sind quadratische Formen und Quadriken, Dualität und Tensorprodukte.

Beispiel: Sei \mathbb{K} ein Ring und $A \in \mathbb{K}^{p \times q}$ eine Matrix. Die Abbildung

$$\beta : \mathbb{K}^{s \times p} \times \mathbb{K}^{q \times r} \rightarrow \mathbb{K}^{s \times r} : (u, v) \mapsto u A v$$

ist bilinear über $S = \mathbb{K}^{s \times s}$ von links und $R = \mathbb{K}^{r \times r}$ von rechts. Allgemein seien ${}_S U$ und V_R sowie ${}_S W_R$ lineare Räume. Wir nennen $\beta : U \times V \rightarrow W$ eine **bilineare Abbildung**, falls sie linear in beiden Argumenten ist:

$$\begin{aligned} \beta(u + u', v) &= \beta(u, v) + \beta(u', v), & \beta(\lambda u, v) &= \lambda \beta(u, v), \\ \beta(u, v + v') &= \beta(u, v) + \beta(u, v'), & \beta(u, v \mu) &= \beta(u, v) \mu \end{aligned}$$

für alle Vektoren $u, u' \in U$ und $v, v' \in V$ sowie Skalare $\lambda \in S$ und $\mu \in R$.
Im Falle $S = R = \mathbb{K} = W$ nennen wir $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine **Bilinearform**.
Diesen wichtigen Spezialfall wollen wir vorerst fokussieren.

Alternative: Für $U = \mathbb{K}^{(I)}$ und $V = \mathbb{K}^{(J)}$ über einem Ring \mathbb{K} haben wir die Form $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\beta(u, v) = u^\top B v = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_i b_{ij} v_j$.
Zu u ist $v \mapsto \beta(u, v)$ rechtslinear. Zu v ist $u \mapsto \beta(u, v)$ linkslinear.

Definition S1D: Bilinearform aka Paarung über einem Ring \mathbb{K}

(2) Über dem Ring \mathbb{K} sei $(U, +, \cdot)$ linkslinear und $(V, +, \cdot)$ rechtslinear. Eine Abbildung $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt **bilinear** über \mathbb{K} , falls gilt:

$$\begin{aligned} \beta(u, v + v') &= \beta(u, v) + \beta(u, v'), & \beta(u, v \cdot \mu) &= \beta(u, v) \mu, \\ \beta(u + u', v) &= \beta(u, v) + \beta(u', v), & \beta(\lambda \cdot u, v) &= \lambda \beta(u, v) \end{aligned}$$

für alle Vektoren $u, u' \in U$ und $v, v' \in V$ sowie alle Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Wir nennen β eine **Bilinearform** oder kurz **BForm** und definieren

$$\text{BF}_{\mathbb{K}}(U, V) := \{ \beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K} \mid \beta \text{ ist bilinear} \}.$$

Ist (\mathbb{K}, σ) ein involutiver Ring, so gilt $\text{SF}_{(\mathbb{K}, \sigma)}(U, V) = \text{BF}_{\mathbb{K}}(U^\sigma, V)$.
Für $\sigma = \text{id}_{\mathbb{K}}$ ist \mathbb{K} kommutativ und wir betrachten U und U^σ als gleich.

Im Falle $(\mathbb{K}, \text{id}_{\mathbb{K}})$ ist die Konjugation *trivial*, also der Ring \mathbb{K} kommutativ. Dies gilt zum Beispiel für $(\mathbb{R}, \text{conj}_{\mathbb{R}})$. In diesem Falle betrachten wir jeden \mathbb{K} -linearen Raum als zentral, also $\lambda v = v \lambda$ für alle Vektoren $v \in V$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{K}$, und Sesquilinearformen sind dasselbe wie Bilinearformen.

Es gibt jedoch wichtige Anwendungen, in denen die Konjugation *nicht* trivial ist. Dies gilt insbesondere über den komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, \text{conj}_{\mathbb{C}})$. Um nicht alles zweimal aufzurollen, möchte ich von Anfang sowohl Bilinearformen als auch Sesquilinearformen gleich behandeln.

Diese doppelte Zielsetzung gelingt uns elegant und schmerzfrei mit dem oben eingeführten Begriff des involutiven Rings (\mathbb{K}, σ) . Dieser fasst alle Fälle zusammen und erlaubt uns eine einheitliche Sicht- und Sprechweise. Wie so oft, wir freuen uns erneut über **Effizienz durch Abstraktion**.

Abstrahieren heißt nicht ignorieren. Bilinearformen über (\mathbb{K}, σ) sind oft der einfachste Fall und meist besonders wichtig, je nach Anwendung. Sie sind also immer eingeladen, den Spezialfall $\sigma = \text{id}_{\mathbb{K}}$ mitzudenken!

Satz S1E: Gram-Matrix einer Sesquilinearform

Seien $\mathcal{U} = (u_i)_{i \in I}$ und $\mathcal{V} = (v_j)_{j \in J}$ Basen von U und V über \mathbb{K} .

(0) Jede Sesquilinearform $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ über (\mathbb{K}, σ) definiert ihre darstellende **Gram-Matrix** $B = G_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(\beta) \in \mathbb{K}^{I \times J}$ durch Auswertung,

$$b_{ij} := \beta(u_i, v_j) \quad \text{für } i \in I \text{ und } j \in J.$$

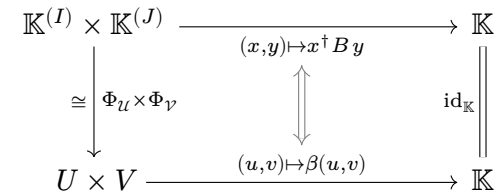
(1) Umgekehrt definiert jede Matrix $B \in \mathbb{K}^{I \times J}$ eine Sesquilinearform $\beta = F_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(B) : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ durch **sesquilineare Fortsetzung**:

$$\beta(\sum_{i \in I} u_i x_i, \sum_{j \in J} v_j y_j) := x^\dagger B y \quad \text{für } x \in \mathbb{K}^{(I)} \text{ und } y \in \mathbb{K}^{(J)}$$

(2) Dies stiftet einen Isomorphismus zwischen SFormen und Matrizen:

$$(G_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}, F_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}) : \text{SF}_{(\mathbb{K}, \sigma)}(U, V) \cong \mathbb{K}^{I \times J} : \beta \leftrightarrow B$$

Beispiel: Sei $(\mathbb{K}^n, \langle - | - \rangle)$ das Standardskalarprodukt über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Für die Standardbasis (e_1, \dots, e_n) gilt $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$, also $B = 1_{n \times n}$.



Beweis: (1) Die Koordinaten $\Phi_{\mathcal{U}} : \mathbb{K}^{(I)} \xrightarrow{\cong} U : (x_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} u_i x_i$ und $\Phi_{\mathcal{V}} : \mathbb{K}^{(J)} \xrightarrow{\cong} V : (y_j)_{j \in J} \mapsto \sum_{j \in J} v_j y_j$ sind \mathbb{K} -lineare Isomorphismen.

Daher ist $\beta : (u, v) \mapsto \Phi_{\mathcal{V}}^{-1}(u)^\dagger \cdot B \cdot \Phi_{\mathcal{U}}^{-1}(v)$ sesquilinear über (\mathbb{K}, σ) .

(2) Es gilt $F \circ G = \text{id}$: Für $\beta \in \text{SF}(U, V)$ und $B = G(\beta)$ erhalten wir

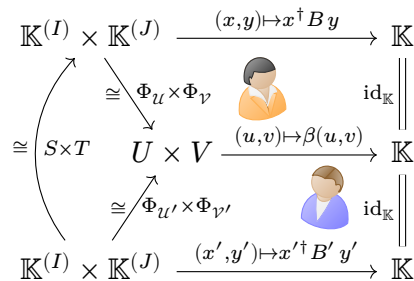
$$F(B)(u, v) \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_i \sum_j x_i^\sigma \beta(v_i, v_j) y_j \stackrel{\text{Sesq}}{=} \beta(u, v).$$

Umgekehrt gilt $G \circ F = \text{id}$: Zu $B \in \mathbb{K}^{I \times J}$ und $\beta = F(B)$ erhalten wir

$$G(\beta)_{ij} \stackrel{\text{Def}}{=} \beta(u_i, v_j) \stackrel{\text{Def}}{=} e_i^\dagger B e_j = b_{ij}.$$

Die Bijektion $(G_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}, F_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}) : \text{SF}_{(\mathbb{K}, \sigma)}(U, V) \cong \mathbb{K}^{I \times J}$ ist linear über dem Zentrum $Z(\mathbb{K}) \leq \mathbb{K}$ und erfüllt $G(\beta^\dagger) = G(\beta)^\dagger$ und $F(B^\dagger) = F(B)^\dagger$. QED

Endliche Dimension benötigen wir für diese Konstruktion noch nicht. In konkreten Anwendungen ergibt sie sich meist aus dem Kontext. Basiswechsel können wir als kommutatives Diagramm darstellen:



Koordinatenwechsel für den Weltfrieden!

Wie können Alice und Bob ihre willkürlich gewählten Koordinaten nun verlustfrei ineinander umrechnen?

Aufgabe: Formulieren Sie den Satz zu Gram-Matrix und Basiswechsel für Sesquilinearformen $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$. Anschließend vergleichen Sie dies mit der vertrauten Darstellung von linearen Abbildung durch Matrizen. Sie erhalten die folgende lehrreiche Zusammenschau. Das hilft Ihnen, Verwechslungen zu vermeiden zwischen Ähnlichkeit und Kongruenz.

Ziel: Durch geschickte Wahl einer Basis wollen wir die Gram-Matrix möglichst weit vereinfachen, am besten diagonalisieren, siehe S1F/S1R.

Satz S1E: Basiswechsel für Gram-Matrizen

(3) Die Sesquilinearform $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ über (\mathbb{K}, σ) stellen wir dar durch die beiden Gram-Matrizen $B = G_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(\beta)$ und $B' = G_{\mathcal{U}', \mathcal{V}'}(\beta)$ bezüglich der Basen $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ von U und $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ von V . Hierzu sei $S = T_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{U}} \in \text{GL}_I(\mathbb{K})$ und $T = T_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}} \in \text{GL}_J(\mathbb{K})$ die Basiswechselmatrizen. Dann gilt:

$$B' = S^\dagger B T$$

Beweis: Zu je zwei Vektoren $u, v \in V$ betrachten wir die Koordinaten $x = \Phi_{\mathcal{U}}^{-1}(u)$, $x' = \Phi_{\mathcal{U}'}^{-1}(u) \in \mathbb{K}^{(I)}$ sowie $y = \Phi_{\mathcal{V}}^{-1}(v)$, $y' = \Phi_{\mathcal{V}'}^{-1}(v) \in \mathbb{K}^{(J)}$. Nach Definition der Gram-Matrizen $B, B' \in \mathbb{K}^{I \times J}$ gilt:

$$x'^\dagger B' y' \stackrel{\text{Def}}{=} \beta(u, v) \stackrel{\text{Def}}{=} x^\dagger B y \stackrel{\text{Trafo}}{=} (Sx')^\dagger B (Ty') \stackrel{\text{Ass}}{=} x'^\dagger (S^\dagger B T) y'.$$

Daraus folgt $B' = S^\dagger B T$ mit $x' = e_i$ und $y' = e_j$ für $i \in I$ und $j \in J$. QED

Synopsis: Homomorphismen vs Sesquilinearformen

S125
Ausführung

Sei (\mathbb{K}, σ) ein Ring mit Involution, etwa \mathbb{K} kommutativ und $\sigma = \text{id}_{\mathbb{K}}$, und darüber U, V rechtslineare Räume mit Basen $\mathcal{U} = (u_i)_{i \in I}$ und $\mathcal{V} = (v_j)_{j \in J}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{(J)} & \xrightarrow{y \mapsto x = Ay} & \mathbb{K}^{(I)} \\ \cong \downarrow \Phi_{\mathcal{V}} & \updownarrow & \downarrow \Phi_{\mathcal{U}} \cong \\ V & \xrightarrow{v \mapsto u = \alpha(v)} & U \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(J)} & \xrightarrow{(x,y) \mapsto x^\dagger B y} & \mathbb{K} \\ \cong \downarrow \Phi_{\mathcal{U}} \times \Phi_{\mathcal{V}} & \updownarrow & \downarrow \text{id}_{\mathbb{K}} \\ U \times V & \xrightarrow{(u,v) \mapsto \beta(u,v)} & \mathbb{K} \end{array}$$

(1) Wir können jede \mathbb{K} -lineare Abbildung $\alpha : V \rightarrow U$ darstellen als Matrix $A = M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(\alpha) \in \mathbb{K}^{(I) \times (J)}$. Dies definiert den $Z(\mathbb{K})$ -Isomorphismus

$$(M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}) : \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U) \cong \mathbb{K}^{(I) \times (J)} : \alpha \leftrightarrow A.$$

(2) Wir können jede (\mathbb{K}, σ) -Sesquilinearform $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ darstellen als Matrix $B = G_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(\beta) \in \mathbb{K}^{I \times J}$. Dies definiert den $Z(\mathbb{K})$ -Isomorphismus

$$(G_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}, F_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}) : \text{SF}_{\mathbb{K}}(U, V) \cong \mathbb{K}^{I \times J} : \beta \leftrightarrow B.$$

😊 Mit Matrizen können wir wunderbar rechnen, explizit und effizient.

Synopsis: Homomorphismen vs Sesquilinearformen

S126
Ausführung

⚠️ Wir nutzen hier Matrizen A und B für zwei ganz verschiedene Dinge! Auf den ersten Blick scheinen lineare Abbildungen $\alpha : V \rightarrow U$ und bilineare Formen $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ recht ähnlich. Beide können wir durch Matrizen darstellen, doch diese verhalten sich sehr verschieden unter Basiswechseln. Abstrakt gesehen entspricht β einer linearen Abbildung in den Dualraum, $\beta_1 : U \rightarrow V^* : u \mapsto \beta(u, -)$ bzw. $\beta_2 : V \rightarrow U^* : v \mapsto \beta(-, v)$.

(1) Gegeben ist im ersten Fall eine \mathbb{K} -lineare Abbildung $\alpha : V \rightarrow U$. Für die darstellende Matrix $A = M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(\alpha) \in \mathbb{K}^{(I) \times (J)}$ schreiben wir zu jedem Basisvektor v_j sein Bild $\alpha(v_j) = \sum_{i \in I} u_i a_{ij}$ als Linearkombination der Basis \mathcal{U} im Zielraum U . Dies definiert die darstellende Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$.

(2) Gegeben ist im zweiten Falle eine \mathbb{K} -Sesquilinearform $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$. Die darstellende Gram-Matrix $B = G_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(\beta)$ ist $b_{ij} = \beta(u_i, v_j)$ für alle i, j . Dies definiert die darstellende Matrix $B \in \mathbb{K}^{I \times J}$, aber mit einer völlig anderen Herkunft und ganz anderen Bedeutung als im ersten Fall.

⚠️ Dies gelingt jeweils sogar für unendliche Basen; hier zeigen sich erste Unterschiede. Diese sehen wir besonders deutlich bei Basiswechseln!

Synopsis: Homomorphismen vs Sesquilinearformen

S127

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{(J)} & \xrightarrow{y \mapsto x = Ay} & \mathbb{K}^{(I)} \\ \cong \downarrow \Phi_{\mathcal{V}} & \updownarrow & \downarrow \Phi_{\mathcal{U}} \cong \\ V & \xrightarrow{v \mapsto u = \alpha(v)} & U \\ \cong \downarrow \Phi_{\mathcal{V}'} & \updownarrow & \downarrow \Phi_{\mathcal{U}'} \cong \\ \mathbb{K}^{(J)} & \xrightarrow{y' \mapsto x' = A'y'} & \mathbb{K}^{(I)} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(J)} & \xrightarrow{(x,y) \mapsto x^\dagger B y} & \mathbb{K} \\ \cong \downarrow \Phi_{\mathcal{U}} \times \Phi_{\mathcal{V}} & \updownarrow & \downarrow \text{id}_{\mathbb{K}} \\ U \times V & \xrightarrow{(u,v) \mapsto \beta(u,v)} & \mathbb{K} \\ \cong \downarrow \Phi_{\mathcal{U}'} \times \Phi_{\mathcal{V}'} & \updownarrow & \downarrow \text{id}_{\mathbb{K}} \\ \mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(J)} & \xrightarrow{(x',y') \mapsto x'^\dagger B' y'} & \mathbb{K} \end{array}$$

Basiswechsel: $x = Sx' = (\Phi_{\mathcal{U}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{U}'}) (x')$ und $y = Ty' = (\Phi_{\mathcal{V}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{V}'}) (y')$

Homomorphismus: $x = Ay \Leftrightarrow (Sx') = A(Ty') \Leftrightarrow x' = (S^{-1}AT)y'$

Sesquilinearform: $x^\dagger B y = (Sx')^\dagger B (Ty') = x'^\dagger (S^\dagger B T) y'$

Die Bedeutung diktiert das jeweilige **Transformationsverhalten**:

$$A' = S^{-1}AT \quad \text{vs} \quad B' = S^\dagger B T$$

Speziell für $U = V$ mit gemeinsamen Basen $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ und $\mathcal{U}' = \mathcal{V}'$ folgt:

$$\text{Ähnlichkeit } A \sim A' = S^{-1}AS \quad \text{vs} \quad \text{Kongruenz } B \simeq B' = S^\dagger BS$$

Synopsis: Endomorphismen vs Sesquilinearformen

S128
Erläuterung

Die Zusammenschau schenkt Überblick und vermeidet Verwechslungen. Es lohnt sich, dies im Folgenden immer konsequent vor Augen zu halten. Wir erklären Isomorphie für Endomorphismen und Sesquilinearformen:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{v \mapsto u = \alpha(v)} & V \\ h \cong \downarrow \uparrow & & h \cong \downarrow \uparrow \\ V' & \xrightarrow{u' \mapsto v' = \alpha'(u')} & V' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{(u,v) \mapsto \beta(u,v)} & \mathbb{K} \\ h \times h \cong \downarrow \uparrow & & h' \times h' \\ V' \times V' & \xrightarrow{(u',v') \mapsto \beta'(u',v')} & \mathbb{K} \end{array}$$

Zwei Endomorphismen $\alpha : V \rightarrow V$ und $\alpha' : V' \rightarrow V'$ über \mathbb{K} heißen **isomorph** oder **äquivalent**, falls ein Isomorphismus $(h, h') : V \cong V'$ mit $h \circ \alpha = \alpha' \circ h$ existiert, also $\alpha = h^{-1} \circ \alpha' \circ h$ bzw. $\alpha' = h \circ \alpha \circ h^{-1}$.

Zwei Sesquilinearformen $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ und $\beta' : V' \times V' \rightarrow \mathbb{K}$ heißen **isomorph** oder **isometrisch**, falls ein Isomorphismus $(h, h') : V \cong V'$ mit $\beta = \beta' \circ (h \times h)$ existiert, also $\beta(u, v) = \beta'(h(u), h(v))$ für alle $u, v \in V$.

Klassifikation: Wie erkennen wir Isomorphie möglichst effizient? Hier helfen uns **Invarianten** und idealerweise **Normalformen**!

Satz S1F: Gauß–Normalform über einem *DRing (\mathbb{K}, σ)

(1) Zu jeder Matrix $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ konstruieren wir dank Gauß–Algorithmus einen **Basiswechsel** durch $S \in GL_m(\mathbb{K})$ und $T \in GL_n(\mathbb{K})$ so, dass gilt:

$$S^\dagger BT = D_{m \times n}^r = \begin{bmatrix} 1_{r \times r} & 0_{r \times k} \\ 0_{\ell \times r} & 0_{\ell \times k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

(2) Zu jeder endlich-dim. Sesquilinearform $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ konstruieren wir so **reziproke Basen** $(u_i)_{i=1}^m$ von U und $(v_j)_{j=1}^n$ von V , für die gilt:

$$\beta(u_i, v_j) = 1 \quad \text{falls } i = j \leq r, \text{ sonst } 0.$$

☺ Sesquilinearformen sind in diesem Sinne einfach und übersichtlich über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, allgemein über jedem involutiven Divisionsring (\mathbb{K}, σ) .

Wiederholung: (1) Erklären Sie den vertrauten Algorithmus M3c zur Gauß–Normalform $S^{-1}AT = D_{m \times n}^r$. Dieser Basiswechsel entspricht der Matrixdarstellung von Homomorphismen, wie oben erklärt.

(2) Die Adjunktion $\dagger : \mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times m} : S \mapsto S^\dagger = (S^\sigma)^T$ ist semilinear über (\mathbb{K}, σ) , erfüllt also $(A\lambda + B\mu)^\dagger = \lambda^\sigma A^\dagger + \mu^\sigma B^\dagger$ gemäß S1B, und zudem antimultiplikativ, erfüllt also $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ gemäß D1G. Auf dem Matrixring $(\mathbb{K}^{n \times n}, +, 0_{n \times n}, \cdot, 1_{n \times n})$ erhalten wir somit eine Involution.

(3) Auf der Gruppe $GL_n(\mathbb{K})$ ist die Adjunktion \dagger ein Antiautomorphismus.

Lösung: (3) Sind A und B invers, so auch A^σ und B^σ : Aus $AB = 1$ folgt $1 = 1^\sigma = (AB)^\sigma = B^\sigma A^\sigma$. Aus $BA = 1$ folgt $1 = 1^\sigma = (BA)^\sigma = A^\sigma B^\sigma$. Ist A also invertierbar durch B , so auch A^σ durch B^σ .

Beweis des Satzes: (0) Wir wenden den üblichen Gauß–Algorithmus M3c zunächst naiv auf B an und erhalten $\tilde{S}^{-1}BT = D_{m \times n}^r$. Mit der Korrektur $S = (\tilde{S}^{-1})^\dagger$ gilt dann $\tilde{S}^\dagger BT = D_{m \times n}^r$. Dieser Basiswechsel entspricht der Matrixdarstellung von Sesquilinearformen, wie oben erklärt.

🤔 Warum gelingt das so leicht? Ist Diagonalisierung nicht bekannt als ein eher schwieriges Geschäft, wie in den vorigen Kapiteln gesehen?

⚠️ Ja, die Diagonalisierung eines **Endomorphismus** $f : V \rightarrow V$ ist schwierig, da wir dieselbe Basis \mathcal{B} in Start und Ziel verwenden und daher viel weniger Spielraum haben. Hier ist eine Eigenbasis das Idealziel, wo das nicht gelingt begnügen wir uns dankend mit einer Jordan–Basis.

☺ Für **Homomorphismen** $\alpha : V \rightarrow U$ jedoch ist alles leichter, denn wir dürfen zwei getrennte Basen in Start und Ziel wählen. Damit haben wir viel mehr Spielraum, und der Gauß–Algorithmus nutzt dies geschickt. Die Gauß–Normalform ist daher unsere universelle Modellmatrix.

☺ Für **Sesquilinearformen** $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ gelingt es ähnlich leicht. Wenn wir darstellende Matrizen A zu α und B zu β betrachten, so ist das Vorgehen im Gauß–Algorithmus sogar identisch, nur die abschließende Interpretation als $S^{-1}AT$ bzw. $S^\dagger BT$ ist naturgemäß verschieden.

🤔 Was bedeutet der vorige Satz geometrisch?

☺ Die Basen $(u_i)_{i=1}^m$ von U und $(v_j)_{j=1}^n$ von V erfüllen

$$\beta(u_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \leq r, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sie sind in diesem Sinne „orthonormal“ zueinander, hier vom Rang r . In diesem allgemeinen Rahmen ist dieser Begriff traditionell eher nicht üblich, daher sage ich hier vorsichtigerweise „reziprok“.

Orthogonalität interessiert uns besonders im Falle $U = V$. Doch auch der allgemeine Fall erweist sich als wichtig. Daher führen wir die nötigen Begriffe allgemein aus.

Anfangs müssen wir vorsichtig rechts und links unterscheiden. Später fokussieren wir **hermitesche** oder allgemein **reflexive** Sesquilinearformen, wo diese Unterscheidung entfällt.

Wir übertragen bewährte Begriffe von Skalarprodukten soweit möglich auf beliebige sesquilineare Formen, insbesondere die Orthogonalität:

Definition S1c: orthogonal aka senkrecht bezüglich β

Sei $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine sesquilineare Form über (\mathbb{K}, σ) . Vektoren $u \in U$ und $v \in V$ heißen **orthogonal**, geschrieben $u \perp_{\beta} v$, falls $\beta(u, v) = 0$ gilt: „Die Vektoren u und v sind orthogonal / stehen senkrecht zueinander.“ „Der Vektor u ist orthogonal zu / steht senkrecht auf den Vektor v .“

Teilmengen $X \subseteq U$ und $Y \subseteq V$ heißen **orthogonal**, geschrieben $X \perp_{\beta} Y$, falls $u \perp_{\beta} v$ für alle $u \in X$ und $v \in Y$. Wir schreiben $X \perp \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\{u_1, \dots, u_m\} \perp Y$ sowie $\{u_1, \dots, u_m\} \perp \{v_1, \dots, v_n\}$ auch ohne Klammern.

😊 Wir wollen Orthogonalität meist als symmetrische Relation nutzen, mit $U = V$ und β anti/hermitesch, anti/symmetrisch oder alternierend. Zum besseren Verständnis der Zusammenhänge buchstabiere ich vorab den allgemeinen, eventuell asymmetrischen Fall aus; er erweist sich ebenso als nützlich, sowohl systematisch als auch didaktisch.

Definition S1c: Orthogonalraum (rechts)

Zu jeder Menge $X \subseteq U$ definieren wir den (Rechts-)Orthogonalraum

$$X^{\perp} := \{v \in V \mid X \perp v\} = \{v \in V \mid \forall u \in X : \beta(u, v) = 0\} \leq V.$$

Für $u \in U$ definieren wir $u^{\perp} := \{u\}^{\perp} \leq V$. Damit gilt $0^{\perp} = \{0\}^{\perp} = V$.

In V ist X^{\perp} ein Teilraum: Für $v, v' \in X^{\perp}$ und $\mu, \mu' \in \mathbb{K}$ gilt $v\mu + v'\mu' \in X^{\perp}$, denn für alle $u \in X$ haben wir $\beta(u, v\mu + v'\mu') = \beta(u, v)\mu + \beta(u, v')\mu' = 0$. Ebenso gilt $X^{\perp} = \langle X \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp}$, daher können wir X zu $\langle X \rangle_{\mathbb{K}}$ abschließen.

Wir nennen $\text{Ker } \beta := U^{\perp} \leq V$ den (Rechts-)Kern von $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ oder auch das (Rechts-)Radikal oder den (Rechts-)Ausartungsraum.

Berechnung: Wir wählen Basen $(u_i)_{i=1}^m$ von U und $(v_j)_{j=1}^n$ von V . Sei $B = \beta(u_i, v_j)_{ij} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ die zugehörige Gram-Matrix. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{Ker } \beta &\stackrel{\text{Def}}{=} \{v \in V \mid U \perp v\} \stackrel{\text{Def}}{=} \{v \in V \mid \forall u \in U : \beta(u, v) = 0\} \\ &\stackrel{\text{Gram}}{=} \{v_1\mu_1 + \dots + v_n\mu_n \mid \mu \in \mathbb{K}^n \wedge B\mu = 0\} \cong \text{Ker } B \leq \mathbb{K}^n \end{aligned}$$

😊 So können wir alle Werkzeuge des Matrixkalküls einsetzen, etwa den beliebigen Gauß-Algorithmus über jedem Divisionsring \mathbb{K} oder die elegante Determinante über jedem kommutativen Ring \mathbb{K} .

Gilt $U^{\perp} = \{0\}$, so nennen wir die Form β (rechts-)regulär, das heißt, zu jedem Verdächtigen $v \in V \setminus \{0\}$ existiert ein Zeuge $u \in U$ mit $\beta(u, v) \neq 0$.

Andernfalls heißt β (rechts-)singulär oder ausgeartet oder degeneriert. Jeder (rechts-)singuläre Vektor $v \in U^{\perp}$ erfüllt $\beta(u, v) = 0$ für alle $u \in U$.

Aufgabe: Formulieren Sie alle Begriffe ebenso links in U wie rechts in V . Besonders elegant gelingt dies durch Übergang von β zur adjungierten Sesquilinearform $\beta^{\dagger} : V \times U \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\beta^{\dagger}(v, u) = \beta(u, v)^{\sigma}$, siehe S145.

Zu jeder Menge $Y \subseteq V$ definieren wir den (Links-)Orthogonalraum

$${}^{\perp}Y := \{u \in U \mid u \perp Y\} = \{u \in U \mid \forall v \in Y : \beta(u, v) = 0\} \leq U.$$

Für $v \in V$ definieren wir ${}^{\perp}v := {}^{\perp}\{v\} \leq U$. Damit gilt ${}^{\perp}0 = {}^{\perp}\{0\} = U$.

Auch ${}^{\perp}V \leq U$ ist ein \mathbb{K} -linearer Teilraum. Weiter gilt ${}^{\perp}Y = {}^{\perp}\langle Y \rangle_{\mathbb{K}}$. **Übung:** Zeigen Sie dies erneut für $\beta \dots$ oder nutzen Sie geschickt β^{\dagger} .

Wir nennen $\text{Ker } \beta^{\dagger} = {}^{\perp}V \leq U$ den (Links-)Kern von $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ oder auch das (Links-)Radikal oder den (Links-)Ausartungsraum.

😊 Auch hier können wir alle Werkzeuge des Matrixkalküls einsetzen:

$$\begin{aligned} \text{Ker } \beta^{\dagger} &\stackrel{\text{Def}}{=} \{u \in U \mid u \perp V\} \stackrel{\text{Def}}{=} \{u \in U \mid \forall v \in V : \beta(u, v) = 0\} \\ &\stackrel{\text{Gram}}{=} \{u_1\lambda_1 + \dots + u_m\lambda_m \mid \lambda \in \mathbb{K}^m \wedge \lambda^{\dagger}B = 0\} \cong \text{Ker } B^{\dagger} \leq \mathbb{K}^m \end{aligned}$$

Gerne nutzen wir den Gauß-Algorithmus und die Determinante.

Gilt ${}^{\perp}V = \{0\}$, so nennen wir die Form β (links-)regulär, das heißt, zu jedem Verdächtigen $u \in U \setminus \{0\}$ existiert ein Zeuge $v \in V$ mit $\beta(u, v) \neq 0$.

Andernfalls heißt β (links-)singulär oder ausgeartet oder degeneriert. Jeder (links-)singuläre Vektor $u \in {}^{\perp}V$ erfüllt $\beta(u, v) = 0$ für alle $v \in V$.

Wir betrachten Zeilenvektoren $U = \mathbb{K}^{1 \times n}$ und Spaltenvektoren $V = \mathbb{K}^{n \times 1}$ mit der Matrixmultiplikation aka Auswertung als kanonischer Paarung:

$$\beta : \mathbb{K}^{1 \times n} \times \mathbb{K}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto uv$$

Der Ring \mathbb{K} ist beliebig, auch ohne Involution. Der Raum U ist linkslinear, der Raum V ist rechtslinear, und die Abbildung β ist bilinear über \mathbb{K} .

Jedes lineare Gleichungssystem hat die Form $Av = 0$ mit

$$A = \begin{bmatrix} \text{---} a_1 \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} a_m \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}.$$

Der Lösungsraum... ist der Kern ... ist der Orthogonalraum:

$$\{v \in \mathbb{K}^{n \times 1} \mid Av = 0\} \stackrel{\text{Def}}{=} \text{Ker } A \stackrel{\text{Def}}{=} \{a_1, \dots, a_m\}^\perp$$

Jede Lösung $v \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ muss jede Gleichung des Systems erfüllen, also $a_1 v = \dots = a_m v = 0$. Somit steht v senkrecht auf a_1, \dots, a_m bezüglich β .

☺ Auch unendliche Gleichungssysteme sind natürlich und nützlich!

$$\beta : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} u_i v_i$$

Aufgabe: Bestimmen Sie $u^\perp \leq \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ zu der Folge $u = (1, 1, 1, \dots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Lösung: Wir finden $u^\perp = \{v \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \mid \sum_{i=0}^{\infty} v_i = 0\} = \langle e_i - e_{i-1} \mid i \geq 1 \rangle_{\mathbb{K}}$.

Aufgabe: Sei $\mathbb{K} \geq \mathbb{Q}$ und $v_i := i e_i - e_{i-1} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ für alle $i \geq 1$. Bestimmen Sie zur Menge $Y = \{v_i \mid i \geq 1\} \subset \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ den Orthogonalraum ${}^\perp Y \leq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Lösung: Für $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ gilt $u \perp Y$ gdw $0 = \beta(u, v_i) = i u_i - u_{i-1}$ für alle $i \geq 1$. Für $i \geq 1$ gilt rekursiv $u_i = u_{i-1}/i$ und somit $u_i = u_0/i!$, ausgeschrieben:

$${}^\perp Y = \langle \exp \rangle_{\mathbb{K}}^\perp$$

Hier betrachten wir $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathbb{K}[[X]]$ als den formalen Potenzreihenring in der Variablen X und $\exp = \sum_{i=0}^{\infty} X^i/i! = (1/i!)_{i \in \mathbb{N}}$ als die Exponentialreihe.

☺ Gleiches gilt für jede rekursiv definierte Folge $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathbb{K}[[X]]$: Jede Gleichung wird codiert durch $v_i \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, idealerweise $v_i \in \mathbb{K}[X]_i^\times$

Wir betrachten weiterhin $U = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ und $V = \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ mit der Bilinearform

$$\beta : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} u_i v_i.$$

Aufgabe: Bestimmen Sie Rechtskern und Linkskern dieser Bilinearform.

Lösung: Für den Rechtskern zeigen wir $\text{Ker } \beta = U^\perp = \{0\}$.

Angenommen $v \in U^\perp$. Wäre $v_i \neq 0$ für ein $i \in \mathbb{N}$, so hätten wir $e_i \in U$ mit $\beta(e_i, v) = v_i \neq 0$. Also gilt $v_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$, somit $v = 0$.

Für den Linkskern zeigen wir $\text{Ker } \beta^\top = {}^\perp V = \{0\}$.

Angenommen $u \in {}^\perp V$. Wäre $u_i \neq 0$ für ein $i \in \mathbb{N}$, so hätten wir $e_i \in V$ mit $\beta(u, e_i) = u_i \neq 0$. Also gilt $u_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$, somit $u = 0$.

☺ Die Räume $V = \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} = \mathbb{K}[X]$ und $U = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathbb{K}[[X]]$ sind zwar drastisch verschieden, dennoch ist unsere Bilinearform $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ regulär.

Übung: Sei $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform über (\mathbb{K}, σ) .

(1) Für jede Teilmenge $X \subseteq U$ gilt ${}^\perp(X^\perp) \supseteq \langle X \rangle_{\mathbb{K}} + \text{Ker } \beta^\dagger$.

(2) Im Allgemeinen gilt hierbei nicht Gleichheit „=“.

(3) Gleichheit gilt falls $\dim_{\mathbb{K}}(\langle U \rangle_{\mathbb{K}} + {}^\perp V) / {}^\perp V < \infty$.

Dasselb gilt für $Y \subseteq V$ und $({}^\perp Y)^\perp \supseteq \langle Y \rangle_{\mathbb{K}} + \text{Ker } \beta$.

Hinweis: Frage (1) ist eine einfache doch lehrreiche Fingerübung zum Verständnis der Definitionen. Frage (3) ist anspruchsvoll, doch ebenso lehrreich. Ist Gleichheit nicht „plausibel“ und „anschaulich klar“?

O nein! Wie erkennen wir, dass es wirklich etwas zu beweisen gibt?

Vor verlockenden Trugschlüssen warnen uns heilsame Gegenbeispiele:

(2) Ein schönes Gegenbeispiel liefert $\beta : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{K}$.

Hierzu betrachten wir die Teilmenge $X = \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Sie erzeugt $\langle X \rangle_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} < \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, doch $X^\perp = \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ und ${}^\perp(X^\perp) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Sei $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform mit Gram-Matrix

$$G_{U,V}(\beta) = D_{m \times n}^r = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}.$$

bezüglich reziproker Basen $(u_i)_{i=1}^m$ von U und $(v_j)_{j=1}^n$ von V . Dank Satz S1F können wir jede endlich-dim. Sesquilinearform β so darstellen!

Aufgabe: Was ist hier der Kern von β ? Wann genau ist β regulär?

Lösung: Der Rechtskern von β ist hier $\text{Ker } \beta = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp} \leq V$.
Genau dann ist β rechtsregulär, wenn $\text{Ker } \beta = \{0\}$ gilt, hier also $r = n$.
Der Linkskern von β ist entsprechend $\text{Ker } \beta^{\dagger} = \langle u_{r+1}, \dots, u_m \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp} \leq U$.
Genau dann ist β linksregulär, wenn $\text{Ker } \beta^{\dagger} = \{0\}$ gilt, hier also $r = m$.

Sei $\alpha : V \rightarrow U$ eine \mathbb{K} -lineare Abbildung mit darstellender Matrix

$$M_U^V(\alpha) = D_{m \times n}^r = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}.$$

bezüglich geeigneter Basen $(u_i)_{i=1}^m$ von U und $(v_j)_{j=1}^n$ von V . Dank Satz M3C können wir jeden endlich-dim. Homomorphismus α so darstellen!

Aufgabe: Was ist hier der Kern von α ? Wann genau ist α regulär?

Lösung: Der Kern von α ist hier $\text{Ker } \alpha = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp} \leq V$.
Genau dann ist α injektiv, wenn $\text{Ker } \alpha = \{0\}$ gilt, hier also $r = n$.
Der Cokern von α ist $\text{Coker } \alpha = U / \text{Im}(\alpha) = \langle q(u_{r+1}), \dots, q(u_m) \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp}$.
Genau dann ist α surjektiv, wenn $\text{Coker } \alpha = \{0\}$ gilt, hier also $r = m$.

😊 Matrizen sind das Universalwerkzeug der Linearen Algebra.
Hier sehen wir zwei ähnliche, doch verschiedene Verwendungen:

Einerseits: Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ codiert eine lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m : v \mapsto u = Av$. Nach Basiswahl können wir jede lineare Abbildung $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$ so darstellen, siehe N1G.

Andererseits: Jede Matrix $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ codiert eine Sesquilinearform $\mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto u^{\dagger} B v$. Nach Basiswahl können wir jede Sesquilinearform $\beta \in \text{SF}_{\mathbb{K}}(U, V)$ so darstellen, siehe S1E.

Für Matrizen haben wir universell einsetzbare Methoden, allen voran den Gauß-Algorithmus zur Zeilenstufenform, zur Spaltenstufenform, oder am besten wie hier zur Gauß-Normalform (Satz S1F):
Sie ist am einfachsten und übersichtlichsten.

Damit lösen wir typische Anwendung für Homomorphismen und Sesquilinearformen, wie den Kern oder die Regularität zu bestimmen.
Dabei achten wir jeweils genau darauf, was unsere Matrix darstellt, denn dieser Kontext diktiert das richtige Transformationsverhalten.

Ist $\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ sesquilinear über (\mathbb{K}, σ) , so auch ihre **Adjungierte**

$$\beta^\dagger : V \times U \rightarrow \mathbb{K} : (v, u) \mapsto \beta^\dagger(v, u) = \beta(u, v)^\sigma.$$

Das entspricht der Transkonjugation $\beta^\dagger = (\beta^\sigma)^\top = (\beta^\top)^\sigma$ gebildet aus der Transposition $\beta \mapsto \beta^\top$ mit $\beta^\top(v, u) = \beta(u, v)$ und der Konjugation mit σ .

Beweis: Offensichtlich ist β^\dagger biadditiv, dank $\beta(u\lambda, v\mu) = \lambda^\sigma \beta(u, v)\mu$ und $\beta^\dagger(v\mu, u\lambda) = \beta(u\lambda, v\mu)^\sigma = (\lambda^\sigma \beta(u, v)\mu)^\sigma = \mu^\sigma \beta^\dagger(v, u)\lambda$ auch sesquilinear.

Beispiel: Sei $U = \mathbb{K}^{(I)}$ und $V = \mathbb{K}^{(J)}$. Zur Matrix $B \in \mathbb{K}^{I \times J}$ haben wir

$$\beta : U \times V \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto u^\dagger B v = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_i^\sigma b_{ij} v_j$$

mit der Adjungierten $\beta^\dagger(v, u) = \beta(u, v)^\sigma = (u^\dagger B v)^\sigma = (u^\dagger B v)^\dagger = v^\dagger B^\dagger u$.

Beispiel: Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$ ist das Standardskalarprodukt

$$\langle - | - \rangle : \mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(I)} \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u | v \rangle = u^\dagger v = \sum_{i \in I} \overline{u_i} v_i.$$

Hier gilt $\langle - | - \rangle^\dagger = \langle - | - \rangle$, denn $\langle v | u \rangle^\dagger = \langle u | v \rangle^\sigma = \langle v | u \rangle$ für alle u und v .

Definition S1H: hermitesch aka selbstadjungiert

(1) Sei $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform auf dem Raum V über (\mathbb{K}, σ) . Das Paar (V, β) nennen wir einen **sesquilinearen Raum**. Wir nennen β

hermitesch, falls $\beta = \beta^\dagger$, also $\beta(v, u) = \beta(u, v)^\sigma$,
antihermitesch, falls $\beta = -\beta^\dagger$, also $\beta(v, u) = -\beta(u, v)^\sigma$,

gilt für alle Vektoren $u, v \in V$. Hermitesch heißt auch **selbstadjungiert**.

Wir sagen kurz **anti/hermitesche Form**, das beinhaltet stets sesquilinear. Das Paar (V, β) nennen wir einen **anti/hermiteschen Raum** über (\mathbb{K}, σ) .

(2) Jede Matrix $B \in \mathbb{K}^{I \times I}$ definiert ihre SForm $\beta : \mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(I)} \rightarrow \mathbb{K}$ durch $\beta(u, v) = u^\dagger B v$. Für diesen Raum schreiben wir kurz $(\mathbb{K}^{(I)}, \beta) =: \langle B \rangle$.

Wir nennen B anti/hermitesch, falls β dies ist, also $B^\dagger = \pm B$ gilt.

Über $(\mathbb{C}, \text{conj}_{\mathbb{C}})$ ist A antihermitesch, B hermitesch, C symmetrisch:

$$A = \begin{bmatrix} i & 2i + 1 \\ 2i - 1 & i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 - 4i \\ 3 + 4i & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 + 4i \\ 3 + 4i & 2 \end{bmatrix}$$

Definition S1H: anti/symmetrisch, alternierend

(3) Im Spezialfall $\sigma = \text{id}_{\mathbb{K}}$ ist der Grundring \mathbb{K} kommutativ und die Form $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ bilinear. Wir nennen β

symmetrisch, falls $\beta = \beta^\top$, also $\beta(v, u) = \beta(u, v)$,
antisymmetrisch, falls $\beta = -\beta^\top$, also $\beta(v, u) = -\beta(u, v)$,
alternierend, falls $\beta(v, v) = 0$, für alle Vektoren $u, v \in V$.

Wir sagen kurz **symmetrische Form** für symmetrische bilineare Form, ebenso für alternierend und antisymmetrisch (aka schief-symmetrisch).

(4) Jede Matrix $B \in \mathbb{K}^{I \times I}$ definiert $\beta : \mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(I)} \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto u^\top B v$. Wir nennen B anti/symmetrisch oder alternierend, falls β dies ist.

Erinnerung: Alternierend impliziert antisymmetrisch:

$$0 \stackrel{\text{alt}}{=} \beta(u + v, u + v) \stackrel{\text{add}}{=} \beta(u, u) + \beta(u, v) + \beta(v, u) + \beta(v, v)$$

Aus Antisymmetrie folgt $2\beta(v, v) = 0$, falls 2 kürzbar ist also $\beta(v, v) = 0$.

Beispiel: Ist $\det : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$ alternierend? Was ist ihre Gram-Matrix?

$$\det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Beispiele: Die Matrix $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist anti/symmetrisch, also $B^\top = \pm B$, gdw ihre BForm $\beta : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto u^\top B v$ dies ist, also $\beta^\top = \pm \beta$.

Genau dann ist die BForm β alternierend, wenn die Matrix B dies ist, also antisymmetrisch, d.h. $b_{ji} = -b_{ij}$, und hohl, d.h. $b_{ii} = 0$ für alle i, j .

Beweis: „ \Leftarrow “: Dies folgt direkt aus $v^\top B v = \sum_i b_{ii} v_i^2 + \sum_{i < j} (b_{ij} + b_{ji}) v_i v_j$. „ \Rightarrow “: Mit $v = e_i$ folgt $b_{ii} = 0$. Mit $v = e_i + e_j$ für $i < j$ folgt $b_{ij} + b_{ji} = 0$.

Beispiel: Über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ bedeuten antisymmetrisch und symmetrisch dasselbe. Doch nicht jede solche Form ist alternierend, etwa

$$\beta : \mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2 : (u, v) \mapsto u^\top v \quad \text{zur Gram-Matrix } I_n.$$

Daher ist die Forderung „alternierend“ stärker... und meist besser. Wir kennen dies bereits gut aus der Theorie der Determinanten.

Bemerkung S11: lineare Struktur auf SF(V)

Sei SF(V) die Menge aller Sesquilinearformen auf V über (K, σ).

- (1) Dann ist (SF(V), +, 0) eine abelsche Gruppe bezüglich punktweiser Addition, ausgeschrieben $(\beta + \gamma)(u, v) = \beta(u, v) + \gamma(u, v)$ für $u, v \in V$.
- (2) Zudem ist (SF(V), +, ·) ein linearer Raum über $Z(K)$ bezüglich punktweiser Skalierung, ausgeschrieben $(\beta \cdot \lambda)(u, v) = \beta(u, v) \cdot \lambda$.
- (3) Mit β ist auch β^\dagger sesquilinear, wobei $\beta^\dagger(u, v) = \beta(v, u)^\sigma$. Genau dann ist β anti/hermitesch, wenn $\beta^\dagger = \pm\beta$ gilt.
- (4) Die Teilmengen $SF_\pm(V) \leq SF(V)$ aller anti/hermiteschen Formen sind Untergruppen, zudem linear über $Z(K)^\sigma$. Wir setzen $HF := SF_+$.
- (5) Gilt $2 \in K^\times$, so können wir $\beta \in SF(V)$ zerlegen in $\beta = \beta_+ + \beta_-$ mit $\beta_+ = \frac{1}{2}(\beta + \beta^\dagger)$ hermitesch und $\beta_- = \frac{1}{2}(\beta - \beta^\dagger)$ antihermitesch:

$$SF(V) = HF(V) \oplus SF_-(V)$$

Übung: Schreiben Sie dies sorgsam aus und rechnen Sie es nach! Das ist eine routinierte Fingerübung und konsolidiert die Definitionen.

⚠ Der Raum SF(V) ist linear über dem Zentrum $Z(K)$, die Adjunktion $\beta \mapsto \beta^\dagger$ hingegen ist nur semilinear. Sie ist jedoch linear über dem Fixring

$$Z(K)^\sigma = \text{fix}(Z(K), \sigma) = \{z \in Z(K) \mid z^\sigma = z\}$$

Der Fixraum $HF(V) = SF(V)^\dagger$ ist nur linear über dem Fixring $Z(K)^\sigma$.

⚠ Dasselbe gilt für den Raum $K^{I \times I}$ der quadratischen Matrizen und darin den Teilraum $K_{\text{herm}}^{I \times I}$ der hermiteschen Matrizen.

Beispiel: Sei $C_{\text{herm}}^{n \times n}$ die Menge der hermiteschen Matrizen $A \in C^{n \times n}$, mit $A^\dagger = A$. Dieser Raum ist linear über R , nicht jedoch über C . Ist A hermitesch, so ist iA antihermitesch, und umgekehrt.

Definition S1J: reflexive Sesquilinearform aka orthosymmetrisch

Eine Sesquilinearform $\beta : V \times V \rightarrow K$ über (K, σ) heißt **reflexiv**, falls

$$u \perp v \iff v \perp u \quad \text{für alle } u, v \in V \text{ gilt.}$$

Wir fordern also, dass Orthogonalität \perp eine symmetrische Relation ist. In diesem Falle nennen wir (V, β) einen **reflexiven Raum** über (K, σ) .

Die hiesige Verwendung des Wortes „reflexiv“ hat nichts mit seinen sonst üblichen Bedeutungen zu tun. Besser wäre hier „orthosymmetrisch“.

Typische Anwendungen sind $\beta^\dagger = \pm\beta$ anti/hermitesch über (K, σ) und $\beta^\top = \pm\beta$ anti/symmetrisch über (K, id_K) sowie β alternierend.

Daraus folgt offensichtlich reflexiv. Wir beweisen später, dass diese drei Fälle im Wesentlichen alle Möglichkeiten reflexiver Formen ausschöpft.

😊 Reflexivität erleichtert unsere Arbeit sowie Denk- und Sprechweise: Wir müssen für Orthogonalität, Orthogonalräume, Kerne, Regularität, etc. nicht weiter zwischen rechts und links unterscheiden!

Definition S1J: Orthogonalraum und Kern → allgemein S1G

Sei (V, β) ein reflexiver Raum über dem *Ring (K, σ) .

Zu jeder Menge $X \subseteq V$ definieren wir bezüglich β den **Orthogonalraum**

$$X^\perp := \{v \in V \mid X \perp v\} = \{v \in V \mid \forall u \in X : \beta(u, v) = 0\} \leq V.$$

Der **Kern** (das **Radikal**, der **Ausartungsraum**) von β ist

$$\text{Ker } \beta := V^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in V : \beta(u, v) = 0\}.$$

Gilt $\text{Ker } \beta = \{0\}$, so heißt die Form β **regulär**, das bedeutet zu jedem Verdächtigen $v \in V \setminus \{0\}$ existiert ein Zeuge $u \in V$ mit $\beta(u, v) \neq 0$.

Andernfalls heißt β **singulär** (oder **ausgeartet** oder **degeneriert**).

Jeder **singuläre Vektor** $v \in V^\perp$ erfüllt $\beta(u, v) = 0$ für alle $u \in V$.

Beispiele: Genau dann ist $\beta : (u, v) \mapsto u^\dagger B v$ regulär, wenn B regulär ist.

Jedes Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$ ist regulär, denn aus $v \neq 0$ folgt $\langle v | v \rangle > 0$.

Ist $\det : K^2 \times K^2 \rightarrow K$ regulär? Ja, denn $\det \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} = a$ und $\det \begin{bmatrix} a & -1 \\ b & 0 \end{bmatrix} = b$.

Definition S1k: quadratische Form

Sei (V, β) hermitesch über (\mathbb{K}, σ) . Die Abbildung

$$q = q_\beta : V \rightarrow \mathbb{K} : v \mapsto q(v) = \beta(v, v)$$

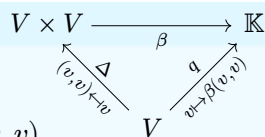
nennen wir die **quadratische Form** zu β . Dies ist die Sesquilinearform β eingeschränkt auf die Diagonale $v \mapsto (v, v)$. Für alle $v \in V$ gilt demnach

$$q(v)^\sigma = \beta(v, v)^\sigma = \beta(v, v) = q(v).$$

Das Bild von q liegt somit im Fixring $\mathbb{K}^\sigma = \text{fix}(\mathbb{K}, \sigma) = \{a \in \mathbb{K} \mid a^\sigma = a\}$. Wir nennen (V, q) den **quadratischen Raum** zur hermiteschen Form β .

Beispiel: Für $(\mathbb{K}^n, \langle - | - \rangle)$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ gilt $q(v) = \|v\|^2 \in \mathbb{R}$.

Für Skalarprodukte kennen wir die quadratische Form als Normquadrat. Da (\mathbb{R}, \leq) ein geordneter Körper ist, können wir hier noch mehr sagen: Genau dann ist die hermitesche Form β positiv semidefinit, wenn $q \geq 0$, und positiv definit, wenn zudem $q(v) > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$ gilt.



Können wir allein aus der quadratischen Form $q : V \rightarrow \mathbb{K} : q(v) = \beta(v, v)$ die hermitesche Form $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ rekonstruieren? Oft gelingt dies! Wir zeigen zunächst, dass die Zuordnung $\beta \mapsto q = q_\beta$ injektiv ist:

Lemma S1L: eindeutige Rekonstruierbarkeit

(0) Der involutive Ring (\mathbb{K}, σ) sei nullteilerfrei und $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$. Für alle $\beta, \gamma \in \text{HF}(V)$ über (\mathbb{K}, σ) gilt: Aus $q_\beta = q_\gamma$ folgt $\beta = \gamma$.

Beweis: Dank $q_\beta - q_\gamma = q_{\beta-\gamma}$ genügt zu zeigen: Aus $q_\beta = 0$ folgt $\beta = 0$. Seien $u, v \in V$ beliebige Vektoren. Wir wählen $\lambda = \beta(u, v)^\sigma$ und erhalten $0 = q_\beta(u + v\lambda) - q_\beta(u) - q_\beta(v\lambda) = \beta(u, v\lambda) + \beta(u, v\lambda)^\sigma = 2\beta(u, v)\beta(u, v)^\sigma$. Dank $2 \neq 0$ und Nullteilerfreiheit folgt daraus $\beta(u, v) = 0$. QED

Beispiel: Im klassischen Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_\mathbb{K}$ wissen wir noch wesentlich mehr: Aus der quadratischen Form $q(v) = \|v\|^2$ können wir $\beta(u, v) = \langle u | v \rangle$ rekonstruieren dank expliziter Polarisierungsformel S2I. Das beinhaltet und perfektioniert die eindeutige Rekonstruierbarkeit S1L.

Gemäß (0) ist die Zuordnung $\beta \mapsto q = q_\beta$ injektiv. Können wir ihr Bild charakterisieren? Vereinfachend betrachten wir den symmetrischen Fall:

Im Spezialfall $\sigma = \text{id}_\mathbb{K}$ ist \mathbb{K} kommutativ. Für $q = q_\beta : V \rightarrow \mathbb{K}$ gilt:

Q1: Homogenität, $q(v\lambda) = q(v)\lambda^2$ für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Q2: Polarisierung, $\beta_q(u, v) := q(u + v) - q(u) - q(v)$ ist bilinear.

Die Rechnung ergibt hier nämlich $\beta_q(u, v) = \beta(u, v) + \beta(v, u) = 2\beta(u, v)$.

Lemma S1L: Polarisierung, explizite Polarisierungsformel

Eine **quadratische Form** $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ über $(\mathbb{K}, \text{id}_\mathbb{K})$ erfüllt (Q1&2).

Wir nennen dann (V, q) einen **quadratischen Raum** über \mathbb{K} .

$$\text{QF}(V) := \{q : V \rightarrow \mathbb{K} \mid \text{Q1\&2}\}.$$

(1) Die Zuordnung $\text{BF}(V) \rightarrow \text{QF}(V) : \beta \mapsto q = q_\beta$ ist injektiv, falls $2 \in \mathbb{K}$ kürzbar ist, und bijektiv, falls $2 \in \mathbb{K}^\times$ invertierbar ist, dank **Polarisierung**

$$\beta(u, v) = \frac{1}{2}[q(u + v) - q(u) - q(v)].$$

Über jedem Körper $(\mathbb{K}, \text{id}_\mathbb{K})$ der Charakteristik $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ können wir also alternativ die quadratischen Formen als Ausgangspunkt wählen, denn sie entsprechen bijektiv den symmetrischen Bilinearformen. Wenn man's recht bedenkt, ist das recht erstaunlich.

Eine Bilinearform erklärt das Zusammenspiel von *zwei* Vektoren, eine quadratische Form hingegen codiert nur Eigenschaften *eines* Vektors. Auf den ersten Blick beschreiben dies unterschiedliche Eigenschaften.

Beispiel: Mit dem Standardskalarprodukt $\beta = \langle - | - \rangle$ auf dem Raum \mathbb{R}^n erklären wir Orthogonalität und messen den Winkel zwischen Vektoren. Die zugehörige quadratische Form $q = \|\cdot\|^2$ misst nur das Längenquadrat von Vektoren. Die Polarisierungsformel erlaubt die Rekonstruktion.

Bilinearformen treten in der Mathematik häufig auf. Mal begegnen sie Ihnen offenkundig bilinear, mal erst versteckt als quadratische Form. Dank Polarisierung finden Sie (über einem Körper der Charakteristik ungleich 2) zu jeder quadratischen Form ihre zugehörige Bilinearform.

Definition S1M: Einschränkung einer Sesquilinearform

Sei (V, β) ein Raum V mit Sesquilinearform $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ über (\mathbb{K}, σ) .

Auf jedem \mathbb{K} -linearen Teilraum $U \leq (V, \beta)$ erhalten wir (U, β_U) durch Einschränkung der Sesquilinearform β zu $\beta_U = \beta|_{U \times U} : U \times U \rightarrow \mathbb{K}$.

Ebenso: Ist (V, q) ein quadratischer Raum, so auch (U, q_U) .

Aufgabe: Wenn (V, β) regulär ist, gilt dies dann auch für (U, β_U) ?

Lösung: Nein! Auf $V = \mathbb{K}^2$ ist $\beta(u, v) = \det(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1$ regulär,

$$G_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Auf $U = \langle e_1 \rangle_{\mathbb{K}}$ bzw. $\langle e_2 \rangle_{\mathbb{K}}$ ist die Einschränkung $\beta_U = 0$ jedoch singular.

Anschaulich: (V, β) regulär bedeutet, zu jedem Verdächtigen $v \in V \setminus \{0\}$ existiert ein Zeuge $u \in V$ mit $\beta(u, v) \neq 0$. Bei Einschränkung von V auf U haben wir weniger Verdächtige $v \in U$, aber auch weniger Zeugen $u \in U$.

☹ Die „Panne“ des vorigen Beispiels wollen wir möglichst verhindern:

Definition S1M: isotrope Vektoren und Teilräume

Sei (V, β) ein Raum V mit Sesquilinearform $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ über (\mathbb{K}, σ) .

Gilt $u \perp u$, also $q(u) = \beta(u, u) = 0$, so nennen wir den Vektor u **isotrop**.

Gilt $q(u) = \beta(u, u) = 0$ für ein $u \in V \setminus \{0\}$, so heißt (V, β) **isotrop**.

Sind alle Vektoren $u \in V$ isotrop, also $q = 0$, so heißt (V, β) **total isotrop**.

Gilt $q(u) = \beta(u, u) \neq 0$ für alle $u \in V \setminus \{0\}$, so heißt (V, β) **anisotrop**.

Damit ist jeder Unterraum (U, β_U) anisotrop, insbesondere regulär.

Beweis: Zu jedem Verdächtigen $v \in U \setminus \{0\}$ existiert ein geeigneter Zeuge $u \in U$ mit $\beta(u, v) \neq 0$, denn hier genügt bereits $u = v$. ◻

Beispiel: Euklidisch $(\mathbb{K}^n, \langle - | - \rangle)$ ist 0 der einzige isotrope Vektor, dann für $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ gilt $\langle v | v \rangle > 0$ dank positiver Definitheit.

Übung: Ist (V, β) total isotrop, also $q = 0$, über einem Körper (\mathbb{K}, σ) mit $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$, so folgt $\beta = 0$ dank eindeutiger Rekonstruierbarkeit S1L.

Satz S1N: Regularität und Diskriminante

Sei $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine sesquilineare Form über (\mathbb{K}, σ) sowie (v_1, \dots, v_n) eine Basis und $B = \beta(v_i, v_j)_{ij} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die zugehörige Gram-Matrix.

(1) Ist der Ring \mathbb{K} ein Körper (**DRing** oder **CRing**), so sind äquivalent:

(a) $\text{Ker } \beta = 0$, (b) $\text{Ker } B = 0$, (c) $B \in \text{GL}_n \mathbb{K}$, (d) $\det B \in \mathbb{K}^\times$.

(2) Die Determinante $\det(B) \in \mathbb{K}$ ändert sich unter **Basiswechsel** zu

$$\det(S^\dagger B S) = \det(S)^\sigma \det(B) \det(S).$$

Demnach ist „ $\det \beta$ “ nur wohldefiniert modulo der **Normgruppe**

$$N = N(\mathbb{K}, \sigma) := \{a^\sigma a \mid a \in \mathbb{K}^\times\} \leq \mathbb{K}^\times.$$

Wir definieren die **Diskriminante** $\text{disc}(\beta) := [\det(B)]$ in \mathbb{K}/N .

Beispiel: Euklidisch über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$ gilt $N(\mathbb{K}, \sigma) = \mathbb{R}_{>0}$. Ist (V, β) hermitesch über (\mathbb{K}, σ) , so gilt $\det B \in \mathbb{R}$ und $\text{disc } \beta \in \{[\pm 1], [0]\}$.

Beweis: (1) Dank Definition S1G wissen wir über jedem Ring \mathbb{K} :

$$\text{Ker } \beta = \{v_1 \lambda_1 + \dots + v_n \lambda_n \mid \lambda \in \mathbb{K}^n \wedge B \lambda = 0\} \cong \text{Ker } B.$$

Die Äquivalenz „(b) \Leftrightarrow (c)“ gilt über jedem Divisionsring dank D2M.

Die Äquivalenz „(b) \Leftrightarrow (d)“ gilt über jedem kommutativen Ring dank O2R.

(2) Den Basiswechsel von B zu $S^\dagger B S$ verdanken wir Satz S1E. Nun ist die Determinante multiplikativ (O2o) und transpositionsinvariant (O2L). Die Involution $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ist ein Automorphismus des Körpers / CRings \mathbb{K} , also gilt $\det(B^\dagger) = \det(B^\sigma) = \det(B)^\sigma$. ◻

Bemerkung: Hier spüren wir erneut einen deutlichen Unterschied zu Darstellungsmatrizen von Endomorphismen $\alpha : V \rightarrow V$. Nach Wahl einer Basis $\mathcal{V} = (v_i)_{i=1}^n$ für V erhalten wir die Darstellung $A = M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(\alpha) \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Basiswechsel führt von A zu $A' = T^{-1} A T$. Die Determinante ändert sich dabei nicht, denn $\det(A') = \det(T)^{-1} \det(A) \det(T) = \det(A)$. Somit ist $\det : \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \rightarrow \mathbb{K}$ wohldefiniert durch $\det(\alpha) = \det(A)$, siehe Satz O3D. Für Sesquilinearformen haben wir schwächer $\text{disc} : \text{SF}_{(\mathbb{K}, \sigma)}(V) \rightarrow \mathbb{K}/N$.

Definition S10: reguläre Familie

(0) Eine endliche Familie $(u_i)_{i \in I}$ in (V, β) über (\mathbb{K}, σ) heißt **regulär**, wenn ihre Gram-Matrix $B = \beta(u_i, u_j)_{i,j} \in \mathbb{K}^{I \times I}$ invertierbar ist.

Ist I unendlich, so fordern wir Regularität für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$. Folgende Rechnung gilt dann eingeschränkt auf $J = \text{supp } \lambda \subseteq I$.

Lemma S10: Fourier-Koeffizienten

Sei $(u_i)_{i \in I}$ in (V, β) regulär. Zu jeder Linearkombination $v = \sum_{j \in I} u_j \lambda_j$ erhalten wir die Koeffizienten $\lambda \in \mathbb{K}^{(I)}$ durch $\lambda = B^{-1} \mu$ mit $\mu_i = \beta(u_i, v)$.

Beweis: Für $\mu_i = \beta(u_i, v) = \beta(u_i, \sum_j u_j \lambda_j) = \sum_j \beta(u_i, u_j) \lambda_j$ gilt $\mu = B \lambda$.

Jede reguläre Familie $(u_i)_{i \in I}$ in (V, β) ist \mathbb{K} -linear unabhängig, somit eine Basis von $U := \langle u_i \mid i \in I \rangle_{\mathbb{K}} \leq V$, und (U, β_U) ist regulär.

Beweis: Sei $v = \sum_{j \in I} u_j \lambda_j$. Aus $v = 0$ folgt $\mu = 0$ und $\lambda = B^{-1} \mu = 0$. QED

Definition S10: orthogonale Familie

- (1) Ein Vektor u in (V, β) heißt **normiert**, falls $q(u) = \beta(u, u) = 1$.
 (2) Eine Familie $(u_i)_{i \in I}$ in V heißt **orthogonal**, kurz OS, falls $\beta(u_i, u_j) = 0$ für alle $i \neq j$ in I gilt, und **orthonormal**, kurz ONS, falls zudem $q(u_i) = 1$:

$$\beta(u_i, u_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j: \text{ paarweise orthogonal,} \\ 1 & \text{falls } i = j: \text{ individuell normiert.} \end{cases}$$

OS steht für **Orthogonalsystem** und ONS für **Orthonormalsystem**, d.h. die Gram-Matrix $\beta(u_i, u_j)_{i,j}$ ist diagonal bzw. die Einheitsmatrix.

Wir nennen $(u_i)_{i \in I}$ **orthoregulär**, falls orthogonal und $q(u_i) \in \mathbb{K}^\times$.

- (3) Ist die Familie $(u_i)_{i \in I}$ zudem eine Basis von $U \leq V$, so nennen wir dies eine **Orthogonalbasis**, kurz OB, bzw. eine **Orthonormalbasis**, kurz ONB.

Beispiel: Euklidisch $(\mathbb{K}^n, \langle - | - \rangle)$ ist (e_1, \dots, e_n) eine Orthonormalbasis. Ist $(e_i)_{i \in I}$ orthonormal und $v = \sum_j e_j \lambda_j$ mit $\lambda \in \mathbb{K}^{(I)}$, so gilt $\lambda_i = \langle e_i | v \rangle$.

Definition S1P: externe orthogonale Summe

- (1) Sind (V_1, β_1) und (V_2, β_2) sesquilineare Räume, so auch

$$(V = V_1 \oplus V_2, \beta = \beta_1 \oplus \beta_2) \quad \text{mit} \quad \beta(u, v) = \beta_1(u_1, v_1) + \beta_2(u_2, v_2).$$

für alle Vektorpaare $u = (u_1, u_2)$ und $v = (v_1, v_2)$ im Raum $V = V_1 \times V_2$.

Zu Basen $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \sqcup \mathcal{V}_2$ von $V = V_1 \oplus V_2$ sind die Gram-Matrizen dann

$$B = B_1 \oplus B_2 =: \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}.$$

Wir schreiben kurz $(V, \beta) =: (V_1, \beta_1) \oplus (V_2, \beta_2)$ oder zu kurz $V = V_1 \oplus V_2$.

Ebenso für beliebig viele Summanden $(V_i, \beta_i)_{i \in I}$: Die **orthogonale Summe**

$$\bigoplus_{i \in I}^{\text{ext}} (V_i, \beta_i) := (V, \beta) \quad \text{mit} \quad V = \bigoplus_{i \in I}^{\text{ext}} V_i \quad \text{und} \quad \beta = \bigoplus_{i \in I} \beta_i$$

bedeutet direkte Summe mit der SForm $\beta(u, v) = \sum_{i \in I} \beta_i(u_i, v_i)$, für alle I -Tupel $u = (u_i)_{i \in I}$ und $v = (v_i)_{i \in I}$ im Summenraum $V = \bigoplus_{i \in I}^{\text{ext}} V_i$.

Dieselbe Notation nutzen wir für die interne wie die externe Summe:

Definition S1P: interne orthogonale Summe

- (2) Sei (V, β) ein sesquilinearer Raum über (\mathbb{K}, σ) und $V = \bigoplus_{i \in I}^{\text{int}} V_i$ eine interne Summenzerlegung in paarweise orthogonale Teilräume $V_i \leq V$.

Das bedeutet Orthogonalität $V_i \perp V_j$ aller Teilräume für $i \neq j$, also elementweise $\beta(v_i, v_j) = 0$ für alle $v_i \in V_i$ und $v_j \in V_j$ mit $i \neq j$.

Mit den Einschränkungen $\beta_i = \beta|_{V_i \times V_i} : V_i \times V_i \rightarrow \mathbb{K}$ schreiben wir:

$$(V, \beta) = \bigoplus_{i \in I}^{\text{int}} (V_i, \beta_i)$$

oder kurz $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$, wenn alle Formen aus dem Kontext klar sind.

Beispiel: Euklidisch $(\mathbb{K}^n, \langle - | - \rangle)$ gilt intern $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^n e_i \mathbb{K}$ (Achsen), und ebenso extern $(\mathbb{K}^n, \langle - | - \rangle) = \bigoplus_{i=1}^n (\mathbb{K}, \langle - | - \rangle) = \bigoplus_{i=1}^n \langle 1 \rangle$, siehe S1H.

☺ Wie bei Summen üblich und lang vertraut, extern vs intern entspricht zusammensetzen vs zerlegen, vornehm gesagt Synthese vs Analyse.

Satz S1q: orthogonales Komplement und Projektion

Sei $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform über (\mathbb{K}, σ) und regulär auf $U = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp} \leq V$, das heißt $B = (\beta(e_i, e_j))_{ij} \in GL_n(\mathbb{K})$. Dann gilt:

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

Ausführlich: Wir können jeden Vektor $v \in V$ bezüglich U eindeutig **orthogonal zerlegen** in $(v_{\parallel}, v_{\perp}) \in U \times U^{\perp}$ mit $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$. Explizit gilt

$$v_{\parallel} = P_U^{\parallel}(v) := \sum_{j=1}^n e_j \lambda_j \quad \text{und} \quad v_{\perp} = P_U^{\perp}(v) := v - v_{\parallel}$$

mit den Fourier-Koeffizienten $\lambda = B^{-1} \mu$ und $\mu_i = \beta(e_i, v)$.

Die so definierten Abbildungen $P_U^{\parallel}, P_U^{\perp} : V \rightarrow V$ sind linear und heißen die **orthogonale Projektion** auf U bzw. auf den Orthogonalraum U^{\perp} .

Ist die Basis (e_1, \dots, e_n) orthonormal, also $B = 1_{n \times n}$, so gilt $\lambda_i = \beta(e_i, v)$. Ist sie orthoregulär, $B = \text{diag}(b_{11}, \dots, b_{nn})$, so gilt $\lambda_i = \beta(e_i, e_i)^{-1} \beta(e_i, v)$.

Beispiel: Euklidisch $(\mathbb{K}^3, \langle - | - \rangle)$ gilt $\langle e_1 \rangle^{\perp} = \langle e_2, e_3 \rangle$ und $\mathbb{K}^3 = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_1 \rangle^{\perp}$

☺ Das ist das vertraute euklidische Skalarprodukt, etwa auf dem Raum \mathbb{R}^3 über \mathbb{R} , und induziert die anschauliche Orthogonalität. Wir können all dies nun algebraisch formulieren und effizient berechnen! Dabei treten die besonderen Eigenschaften des Skalarprodukts deutlich hervor.

⚠ Allgemein gilt zu $U \leq (V, \beta)$ weder $V = U + U^{\perp}$ noch $U \cap U^{\perp} = \{0\}$. Heilsame Enttäuschung! Einfaches Gegenbeispiel über jedem Ring (\mathbb{K}, σ) :

$$\beta : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 : (u, v) \mapsto u^{\dagger} B v \quad \text{mit} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Hier gilt $\langle e_1 \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp} = \langle e_2 \rangle_{\mathbb{K}}$ und $\langle e_2 \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp} = \langle e_1 \rangle_{\mathbb{K}}$ sowie $\mathbb{K}^2 = \langle e_1 \rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle e_2 \rangle_{\mathbb{K}}$.

Der Vektor $u = (1, 1)^T \in \mathbb{K}^2$ erfüllt $\beta(u, u) = 0$, ist also isotrop.

Für $U = \langle u \rangle_{\mathbb{K}}$ gilt $U^{\perp} = \text{Ker}(u^{\dagger} B) = \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \langle u \rangle_{\mathbb{K}}$.

Der Orthogonalraum U^{\perp} ist hier kein Komplement zu U :

Es gilt weder $\mathbb{K}^2 = U + U^{\perp}$ noch $U \cap U^{\perp} = \{0\}$.

Beweis: Wir suchen $v_{\parallel} = \sum_{j=1}^n e_j \lambda_j$ mit $\lambda \in \mathbb{K}^n$ und $v_{\perp} = v - v_{\parallel} \in U^{\perp}$. Genau dann gilt $U \perp v_{\perp}$, wenn für jeden Index $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$0 \stackrel{!}{=} \beta(e_i, v_{\perp}) = \beta(e_i, v) - \sum_{j=1}^n \beta(e_i, e_j) \lambda_j$$

Wir erhalten das lineare Gleichungssystem $B \lambda = \mu$ mit $\mu_i = \beta(e_i, v)$. Dank $B \in GL_n(\mathbb{K})$ existiert hierzu genau eine Lösung $\lambda = B^{-1} \mu \in \mathbb{K}^n$.

Das beweist die eindeutige Summenzerlegung, $V = U \oplus U^{\perp}$, sowie die angegebenen expliziten Formeln für die beiden Projektionen P_U^{\parallel} und P_U^{\perp} . Diese sind offensichtlich linear, da Komposition linearer Abbildungen.

Alternativ folgt die \mathbb{K} -Linearität ganz allgemein aus der eindeutigen Summenzerlegung: Aus den Zerlegungen $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$ und $v' = v'_{\parallel} + v'_{\perp}$ folgt die Zerlegung $v + v' = (v_{\parallel} + v'_{\parallel}) + (v_{\perp} + v'_{\perp})$, dank Eindeutigkeit also $P_U^{\parallel}(v + v') = P_U^{\parallel}(v) + P_U^{\parallel}(v')$ und $P_U^{\perp}(v + v') = P_U^{\perp}(v) + P_U^{\perp}(v')$. Für jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $v \lambda = v_{\parallel} \lambda + v_{\perp} \lambda$, dank Eindeutigkeit also $P_U^{\parallel}(v \lambda) = P_U^{\parallel}(v) \lambda$ und $P_U^{\perp}(v \lambda) = P_U^{\perp}(v) \lambda$. ◻

☺ Im vorigen Satz gelingt uns die orthogonale Zerlegung $V = U \oplus U^{\perp}$, da wir die Einschränkung / den U-Raum (U, β_U) als regulär voraussetzen. Unser voriges, extremes Gegenbeispiel hingegen ist total isotrop, $\beta_U = 0$.

Aufgabe: Konstruieren Sie alle hermiteschen Formen β auf \mathbb{K}^3 über \mathbb{K} mit (a) $\langle e_1 \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp} = \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{K}}$, (b) $\langle e_2 \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp} = \langle e_1, e_3 \rangle_{\mathbb{K}}$, (c) $\langle e_3 \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp} = \langle e_2, e_1 - e_3 \rangle_{\mathbb{K}}$.

Lösung: Wir stellen β bezüglich der Standardbasis (e_1, e_2, e_3) durch die Gram-Matrix $B \in \mathbb{K}^{3 \times 3}$ dar. Bedingung (a) bedeutet $\text{Ker}(e_1^{\dagger} B) = \langle e_1, e_2 \rangle$:

$$B = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \xrightarrow{(a)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & ? & ? \\ \bar{a} & ? & ? \end{bmatrix} \xrightarrow{(b)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ \bar{a} & 0 & ? \end{bmatrix} \xrightarrow{(c)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$$

Hierbei sind $a, b \in \mathbb{K}$ kürzbare Ringelemente, also keine Nullteiler, sowie hermitesch, $a = \bar{a}$ und $b = \bar{b}$, also Elemente des Fixrings \mathbb{K}^{σ} . Im Beispiel $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ bedeutet das $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wenn wir zudem $q(e_3) = q(e_2) = 1$ fordern, so sind dadurch $a = b = 1$ eindeutig festgelegt.

Satz S1R: Diagonalisierung einer hermiteschen Form

Sei (\mathbb{K}, σ) ein Divisionsring \mathbb{K} mit Involution σ und $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$.

(1) Sei (V, β) ein hermitescher Raum über (\mathbb{K}, σ) mit $\dim_{\mathbb{K}} V = n \in \mathbb{N}$. Dann existiert zu (V, β) eine Orthogonalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, also

$$(\beta(v_i, v_j))_{ij} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & b_n \end{bmatrix}$$

(2) Jede hermitesche Matrix ist kongruent zu einer Diagonalmatrix:

$$A^\dagger = A \in \mathbb{K}^{n \times n} \implies \exists S \in \text{GL}_n \mathbb{K} : S^\dagger A S = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$$

(3) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$ erreichen wir $b_1, \dots, b_n \in \{0, \pm 1\}$.

Wir geben zwei Beweise, (1) per Induktion und (2) als Algorithmus S1R. Aussagen (1) und (2) sind äquivalent dank Basis-Wahl-und-Wechsel (S1E).

Übung: Daraus folgt (3) durch Skalierung $\tilde{v}_j = v_j / \sqrt{|\beta(v_j, v_j)|}$ wo nötig.

Beweis: Wir führen Induktion über $n = \dim_{\mathbb{K}} V$. Der Fall $n \leq 1$ ist klar. Sei $n \geq 1$ und $q(v) = \beta(v, v)$ die quadratische Form. Ist $q = 0$, so auch $\beta = 0$ dank Polarisierung S1L; dann ist jede Basis von V orthogonal.

Im Falle $q \neq 0$ wählen wir einen Vektor $v_1 \in V$ mit $q(v_1) \neq 0$.

Die orthogonale Projektion S1Q zu $V_1 = \langle v_1 \rangle_{\mathbb{K}}^\perp$ liefert $V = V_1 \oplus U$.

Das Komplement $U = V_1^\perp$ hat demnach Dimension $n - 1$, siehe M2T.

Nach Induktionsvoraussetzung existiert zu $(U, \beta|_U)$ eine Orthogonalbasis $v_2, \dots, v_n \in U$, also $U = \langle v_2, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{K}}^\perp$ mit $\beta(v_i, v_j) = 0$ für alle $i, j \geq 2$.

Dank $V_1 \perp U$ gilt zudem $\beta(v_1, v_i) = \beta(v_i, v_1) = 0$ für alle $i = 2, \dots, n$.

Somit ist v_1, v_2, \dots, v_n eine Orthogonalbasis von (V, β) . QED

☺ Diese Konstruktion ist raffiniert doch zugleich einfach und elegant.

Zur konkreten Berechnung ist der Schritt „Wir wählen v_1, \dots “ noch nicht explizit genug. Diesen Baustein ergänzen wir im folgenden Algorithmus!

☺ Damit berechnen Sie die Diagonalisierung ebenso leicht und effizient, wie Sie dies vom Gauß-Algorithmus gewöhnt sind, als Implementierung auf dem Computer oder in Hausaufgaben und auch in Klausuren.

Eingabe: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hermitesch, also $A^\dagger = A$ über dem *DRing (\mathbb{K}, σ)

Ausgabe: $B = S^\dagger A S$ mit $S \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ und $b_{i1} = 0 = b_{1i}$ für alle $i \geq 2$

Methode: Gilt $a_{i1} = 0 = a_{1i}$ für alle $i \geq 2$, so sind wir fertig.

(1) Gilt $a_{11} \neq 0$, so eliminiere die erste Spalte und Zeile; damit fertig.

$$A = \begin{bmatrix} \blacksquare & * \\ * & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \blacksquare & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} = B$$

(2) Gilt $a_{11} = 0$, aber $a_{ii} \neq 0$, so tausche dies zu $a'_{11} \neq 0$; weiter mit (1).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & \blacksquare \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \blacksquare & * \\ * & 0 \end{bmatrix} = A' = P_{1i} A P_{i1}$$

(3) Gilt $0 = a_{11} = \dots = a_{nn}$, aber $x := a_{i1} \neq 0$, so addiere das x^σ -fache der i -ten Zeile zur ersten, ebenso das x -fache der i -ten Spalte zur ersten:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x^\sigma \\ x & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2x^\sigma x & x^\sigma \\ x & 0 \end{bmatrix} = A' = T_{i1}(x^\sigma) A T_{1i}(x)$$

Damit gilt $a'_{11} = 2xx^\sigma \neq 0$, da nullteilerfrei und $2 \neq 0$; weiter mit (1).

Wir operieren auf Spalten von rechts mit S und auf Zeilen von links mit S^\dagger . Daher bleibt A stets hermitesch, und wir erhalten B wie gewünscht.

☺ Im symmetrischen Spezialfall $(\mathbb{K}, \text{id}_{\mathbb{K}})$ genügt in (3), ganz einfach die i -te Spalte / Zeile zur ersten zu addieren; so erhalten wir $a'_{11} = 2x \neq 0$. Allgemein multiplizieren wir mit den konjugierten Elementen x^σ bzw. x . Das führt zu $a'_{11} = 2xx^\sigma \neq 0$, und wir können mit Schritt (1) fortfahren.

☺ Mit diesem Verfahren räumen wir die erste Spalte und Zeile auf. Dies können wir für alle weiteren Zeilen und Spalten wiederholen. So erhalten wir schließlich $A \simeq B = S^\dagger A S = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

☺ Das entspricht dem Gauß-Algorithmus, wobei wir Zeilen und Spalten hermitesch gleich behandeln. Daher nenne ich dies das „hermitesche Gauß-Verfahren“, für $\sigma = \text{id}_{\mathbb{K}}$ das „symmetrische Gauß-Verfahren“.

☺ Sie erkennen die Technik des abstrakt-elegantem Existenzbeweises: Schritt (1) entspricht der orthogonalen Projektion zu v_1 mit $q(v_1) \neq 0$. Schritt (2) entspricht der Wahl eines anisotropen Basisvektors. Dieser muss eventuell in Schritt (3) erst hergestellt werden.

Wie im klassischen Gauß-Algorithmus benötigen wir einen DRing \mathbb{K} . Dieser trägt nun zusätzlich eine Involution σ , etwa $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$. Zusammengefasst erhalten wir den folgenden Algorithmus:

Algo S1R: Gauß-Hermite über einem *DRing (\mathbb{K}, σ)

Eingabe: eine hermitesche Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, also $A^\dagger = A$

Ausgabe: eine Matrix $S \in \text{GL}_n \mathbb{K}$ mit $S^\dagger A S = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$

- 1: Eliminiere die erste Zeile und Spalte wie oben erklärt.
- 2: Wiederhole dies für die Untermatrix auf $\{2, \dots, n\}^2$.

Bemerkung: Die Spalten der Matrix $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ bilden eine Orthonormalbasis des hermiteschen Raums (\mathbb{K}^n, β_A) , wie gewünscht.

😊 Der hermitesche Gauß-Algorithmus beweist erneut den Satz S1R! Jeder der beiden Beweise hat seine Vorzüge: Der erste ist elegant und kurz, dafür aber nicht explizit oder konstruktiv. Der Algorithmus ist explizit und konstruktiv, dafür etwas rechenaufwändiger im Detail.

Aufgabe: Diagonalisieren Sie über $(\mathbb{C}, \text{conj}_{\mathbb{C}})$ die hermitesche Form

$$\beta : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} : (u, v) \mapsto u^\dagger A v \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Lösung: Wir berechnen schrittweise Matrizen (B_i, S_i) mit $B_i = S_i^\dagger A S_i$ und $S_i \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$ von der Startmatrix $(B_0, S_0) = (A, 1)$ bis zur Zielmatrix $(B_n, S_n) = (D, S)$ mit D diagonal und $S = (b_1, b_2, b_3)$ somit β -orthogonal.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & R_1 \leftarrow R_1 - i \cdot R_2 \\ & & C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \cdot i \\ & \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix} & R_2 \leftarrow R_2 - \frac{i}{2} \cdot R_1 \\ & & C_2 \leftarrow C_2 + C_2 \cdot \frac{i}{2} \\ & \begin{bmatrix} 2 & -i \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{i}{2} \\ i & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

🌀 Haben A und $B = S^\dagger A S$ dieselbe Determinante? Woran liegt das?

Aufgabe: Über $(\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}})$ sei $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die quadratische Form

$$q(v) = 4v_2^2 + v_3^2 + 6v_1v_3 + 4v_2v_3.$$

- (1) Bestimmen Sie die zu q gehörige symmetrische Bilinearform β und ihre Gram-Matrix A bezüglich der Standardbasis (e_1, e_2, e_3) .
- (2) Bestimmen Sie zu β eine Orthogonalbasis (b_1, b_2, b_3) von \mathbb{R}^3 . Nennen Sie dazu alle Rechenschritte in nachvollziehbarer Form.

Lösung: (1) Wir finden

$$\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (u, v) \mapsto u^\top A v \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) Wir berechnen schrittweise (B_i, S_i) mit $B_i = S_i^\top A S_i$ und $S_i \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ von der Startmatrix $(B_0, S_0) = (A, 1)$ bis zur Zielmatrix $(B_n, S_n) = (D, S)$ mit D diagonal und $S = (b_1, b_2, b_3)$ somit β -orthogonal. Zur Sicherheit führen wir sorgsam die Zeilenoperation und die Spaltenoperation aus.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (1) \leftrightarrow (2) \\ & \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (3) - \frac{1}{2} \cdot (1) \\ & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (2) + (3) \\ & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & (3) - \frac{1}{2} \cdot (2) \\ & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe: Vergleichen Sie in den beiden vorigen Beispielen über \mathbb{C} und \mathbb{R} die Determinanten von A am Anfang und von $B = S^T A S$ am Ende des Algorithmus. Wie ändert sich die Determinante? Woran liegt das?

Lösung: Der hermitesche Gauß-Algorithmus S1R benötigt als Umformungen nur Transvektionen $T_{ij}(\lambda)$ und Vertauschungen P_{ij} . Diese haben Determinante $\det T_{ij}(\lambda) = 1$ bzw. $\det P_{ij} = -1$.

Wenn wir also streng dem hermiteschen Gauß-Algorithmus S1R folgen, dann hat die so entstehende Basiswechselmatrix $S \in GL_n(\mathbb{K})$ immer die Determinante ± 1 . Demnach gilt $\det B = \det A$.

Die dritte Art der Umformung, nämlich Skalierungen $S_i(\mu)$, ist zwar ebenso möglich, und hermitesch durchaus erlaubt, wird aber für die Diagonalisierung nicht benötigt.

Skalierung einer Zeile mit $S_i(\mu)$ von links und einer Spalte mit $S_i(\bar{\mu})$ von rechts ändert die Determinante um den Faktor $|\mu|^2 > 0$, wie in Satz S1N. Als Invariante bleibt uns nur die Diskriminante $\text{disc}(A) \in \{\pm 1, [0]\}$.

Aufgabe: Wie können Sie über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ die Diagonaleinträge der gefundenen Diagonalmatrix schließlich auf $\pm 1, 0$ skalieren? Ändert sich dabei die Determinante? Ändert sich ihr Vorzeichen?

Lösung: In unserer Orthogonalbasis (v_1, \dots, v_n) gilt $\beta(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$. Die Diagonaleinträge $\beta(v_i, v_i) = b_i \in \mathbb{K}$ sind zunächst noch beliebig. Die Matrix A ist hermitesch, also auch $B = S^T A S$, somit gilt $b_i \in \mathbb{R}$.

Im Falle $b_i \neq 0$ skalieren wir v_i zu $\tilde{v}_i := v_i / \sqrt{|b_i|}$. Im Falle $b_i = 0$ behalten wir den Vektor $\tilde{v}_i := v_i$. Damit ist auch $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ eine Basis von V und ebenso orthogonal, also $\beta(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) = 0$ für $i \neq j$. Zusätzlich gilt nun $\beta(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = 0$ oder sonst $\beta(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = b_i / \sqrt{|b_i|^2} \in \{\pm 1\}$, wie gewünscht. (Dazu müssen wir die Wurzel ziehen, über \mathbb{Q} gelingt dies nicht immer.)

⚠ Nur diese abschließenden Skalierungen ändern die Determinante! Skalierung einer Zeile mit $S_i(\mu)$ von links und einer Spalte mit $S_i(\bar{\mu})$ von rechts ändert die Determinante um den Faktor $|\mu|^2 > 0$, wie in Satz S1N. Als Invariante bleibt uns nur die Diskriminante $\text{disc}(A) \in \{\pm 1, [0]\}$.

Sicher möchten Sie mit diesem eleganten Algorithmus selbst ein Wenig experimentieren, um ihn noch besser zu verstehen und zu trainieren. Mit Stift & Papier empfehle ich nachdrücklich die obige Schreibweise!

Wenn Sie handschriftlich geübt sind, wollen Sie vielleicht mit Gaël noch mehr ausprobieren oder Ihre Handrechnungen unabhängig nachprüfen. Gaël bietet die Option „symmetrische Operationen“ und übernimmt für Sie die Buchführung. Zur Transformation von A zu $B = S^T A S$ schreiben wir die Matrix S unterhalb, darauf wirken dann alle Spaltenoperationen.

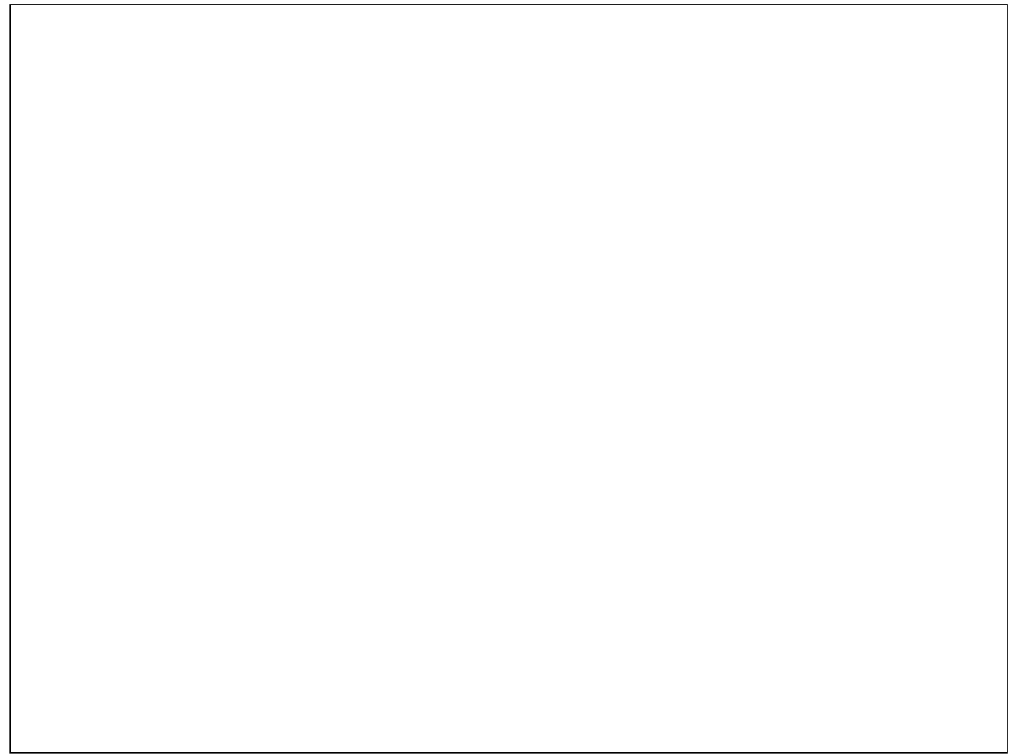
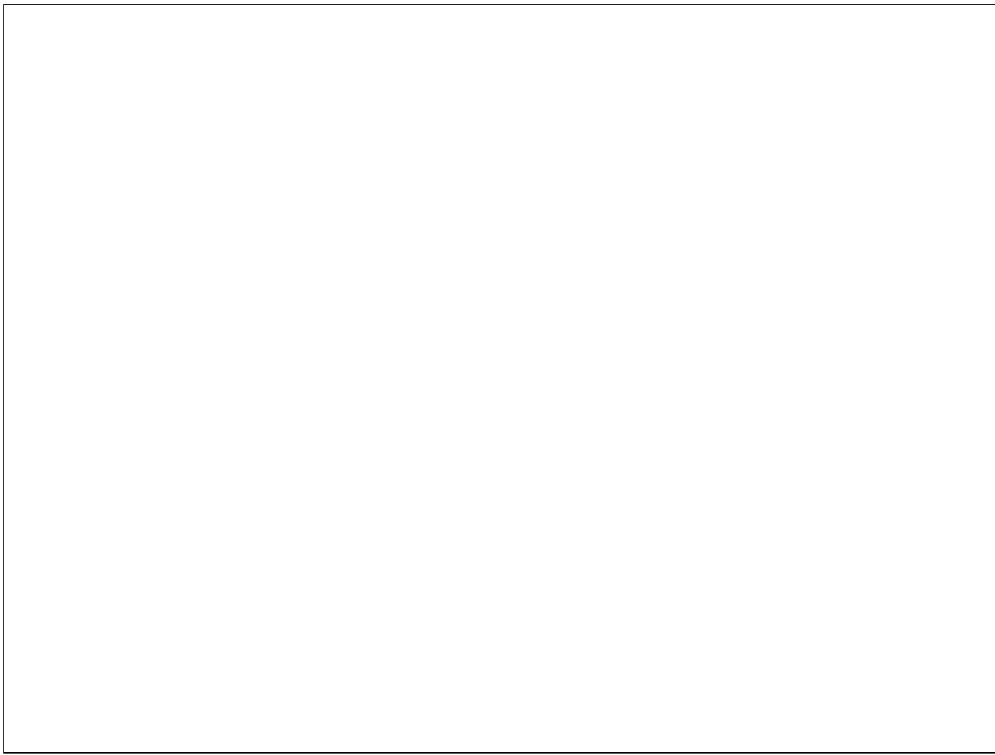
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th></th><th>C1</th><th>C2</th><th>C3</th></tr> <tr><td>R1</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>R2</td><td>0</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>R3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>R4</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>R5</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>R6</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table> <p><small>This appears to be any old matrix, nothing special or noteworthy. Your Operations: Init.</small></p>		C1	C2	C3	R1	4	0	0	R2	0	4	2	R3	3	2	1	R4	1	0	0	R5	0	1	0	R6	0	0	1	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th></th><th>C1</th><th>C2</th><th>C3</th></tr> <tr><td>R1</td><td>4</td><td>0</td><td>2</td></tr> <tr><td>R2</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td></tr> <tr><td>R3</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>R4</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>R5</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>R6</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table> <p><small>This appears to be any old matrix, nothing special or noteworthy. Your Operations: Init, R2-R1, C2-C1.</small></p>		C1	C2	C3	R1	4	0	2	R2	0	0	3	R3	2	3	1	R4	0	1	0	R5	1	0	0	R6	0	0	1	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th></th><th>C1</th><th>C2</th><th>C3</th></tr> <tr><td>R1</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>R2</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td></tr> <tr><td>R3</td><td>0</td><td>3</td><td>0</td></tr> <tr><td>R4</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>R5</td><td>1</td><td>0</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>R6</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table> <p><small>This appears to be any old matrix, nothing special or noteworthy. Your Operations: Init, R2-R1, C2-C1, R3-R3-R1, C3-C3-2C1.</small></p>		C1	C2	C3	R1	4	0	0	R2	0	0	3	R3	0	3	0	R4	0	1	0	R5	1	0	-1/2	R6	0	0	1	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th></th><th>C1</th><th>C2</th><th>C3</th></tr> <tr><td>R1</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>R2</td><td>0</td><td>6</td><td>0</td></tr> <tr><td>R3</td><td>0</td><td>0</td><td>-3/2</td></tr> <tr><td>R4</td><td>0</td><td>1</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>R5</td><td>1</td><td>-1/2</td><td>-1/4</td></tr> <tr><td>R6</td><td>0</td><td>1</td><td>1/2</td></tr> </table> <p><small>This matrix is in column echelon form (CEF).</small></p>		C1	C2	C3	R1	4	0	0	R2	0	6	0	R3	0	0	-3/2	R4	0	1	-1/2	R5	1	-1/2	-1/4	R6	0	1	1/2
	C1	C2	C3																																																																																																																
R1	4	0	0																																																																																																																
R2	0	4	2																																																																																																																
R3	3	2	1																																																																																																																
R4	1	0	0																																																																																																																
R5	0	1	0																																																																																																																
R6	0	0	1																																																																																																																
	C1	C2	C3																																																																																																																
R1	4	0	2																																																																																																																
R2	0	0	3																																																																																																																
R3	2	3	1																																																																																																																
R4	0	1	0																																																																																																																
R5	1	0	0																																																																																																																
R6	0	0	1																																																																																																																
	C1	C2	C3																																																																																																																
R1	4	0	0																																																																																																																
R2	0	0	3																																																																																																																
R3	0	3	0																																																																																																																
R4	0	1	0																																																																																																																
R5	1	0	-1/2																																																																																																																
R6	0	0	1																																																																																																																
	C1	C2	C3																																																																																																																
R1	4	0	0																																																																																																																
R2	0	6	0																																																																																																																
R3	0	0	-3/2																																																																																																																
R4	0	1	-1/2																																																																																																																
R5	1	-1/2	-1/4																																																																																																																
R6	0	1	1/2																																																																																																																

$$A \approx \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

Übung: Diagonalisieren Sie die obige Matrix $A \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$, indem Sie im ersten Schritt statt $(1) \leftrightarrow (2)$ nun $(1) \leftrightarrow (3)$ als Vertauschung wählen. Die Rechnung verläuft etwas anders, benötigt einen Schritt mehr, doch dafür können wir am Ende sogar über \mathbb{Q} zu $\pm 1, 0$ skalieren!

<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th></th><th>C1</th><th>C2</th><th>C3</th></tr> <tr><td>R1</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td></tr> <tr><td>R2</td><td>0</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>R3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>R4</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>R5</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>R6</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table> <p><small>This appears to be any old matrix, nothing special or noteworthy. Your Operations: Init.</small></p>		C1	C2	C3	R1	0	0	3	R2	0	4	2	R3	3	2	1	R4	1	0	0	R5	0	1	0	R6	0	0	1	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th></th><th>C1</th><th>C2</th><th>C3</th></tr> <tr><td>R1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>R2</td><td>2</td><td>4</td><td>0</td></tr> <tr><td>R3</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>R4</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>R5</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>R6</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table> <p><small>This appears to be any old matrix, nothing special or noteworthy. Your Operations: Init, R3-R1, C3-C1.</small></p>		C1	C2	C3	R1	1	2	3	R2	2	4	0	R3	3	0	0	R4	0	0	1	R5	0	1	0	R6	1	0	0	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th></th><th>C1</th><th>C2</th><th>C3</th></tr> <tr><td>R1</td><td>1</td><td>0</td><td>3</td></tr> <tr><td>R2</td><td>0</td><td>0</td><td>-6</td></tr> <tr><td>R3</td><td>3</td><td>0</td><td>-6</td></tr> <tr><td>R4</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>R5</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>R6</td><td>1</td><td>-2</td><td>0</td></tr> </table> <p><small>This appears to be any old matrix, nothing special or noteworthy. Your Operations: Init, R3-R1, C3-C1, R2-R2-R1, C2-C2-C1.</small></p>		C1	C2	C3	R1	1	0	3	R2	0	0	-6	R3	3	0	-6	R4	0	0	1	R5	0	1	0	R6	1	-2	0	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th></th><th>C1</th><th>C2</th><th>C3</th></tr> <tr><td>R1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>R2</td><td>0</td><td>-9</td><td>-6</td></tr> <tr><td>R3</td><td>0</td><td>-6</td><td>0</td></tr> <tr><td>R4</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>R5</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>R6</td><td>1</td><td>-3</td><td>-2</td></tr> </table> <p><small>This appears to be any old matrix, nothing special or noteworthy. Your Operations: Init, R3-R1, C3-C1, R2-R2-R1, C2-C2-C1, R3-R3-R1, C3-C3-C1, R3-R2, C3-C2.</small></p>		C1	C2	C3	R1	1	0	0	R2	0	-9	-6	R3	0	-6	0	R4	0	1	0	R5	0	1	0	R6	1	-3	-2
	C1	C2	C3																																																																																																																
R1	0	0	3																																																																																																																
R2	0	4	2																																																																																																																
R3	3	2	1																																																																																																																
R4	1	0	0																																																																																																																
R5	0	1	0																																																																																																																
R6	0	0	1																																																																																																																
	C1	C2	C3																																																																																																																
R1	1	2	3																																																																																																																
R2	2	4	0																																																																																																																
R3	3	0	0																																																																																																																
R4	0	0	1																																																																																																																
R5	0	1	0																																																																																																																
R6	1	0	0																																																																																																																
	C1	C2	C3																																																																																																																
R1	1	0	3																																																																																																																
R2	0	0	-6																																																																																																																
R3	3	0	-6																																																																																																																
R4	0	0	1																																																																																																																
R5	0	1	0																																																																																																																
R6	1	-2	0																																																																																																																
	C1	C2	C3																																																																																																																
R1	1	0	0																																																																																																																
R2	0	-9	-6																																																																																																																
R3	0	-6	0																																																																																																																
R4	0	1	0																																																																																																																
R5	0	1	0																																																																																																																
R6	1	-3	-2																																																																																																																

$$A \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



◆ **Beispiel S1A:** das Standardskalarprodukt auf \mathbb{K}^n über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Auf $V = \mathbb{K}^n$ definieren wir das **Standardskalarprodukt**

$$\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u | v \rangle := \overline{u_1}v_1 + \dots + \overline{u_n}v_n = u^\dagger v.$$

Für alle Vektoren $u, v, w \in V$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

S0: positive Semidefinitheit, $\langle u | u \rangle \geq 0 = \langle 0 | 0 \rangle$

S1: positive Definitheit, $\langle u | u \rangle > 0$ für $u \neq 0$

S2: konjugierte Symmetrie, $\langle v | u \rangle = \overline{\langle u | v \rangle}$

S3: Linearität rechts, $\langle u | v\lambda + w\mu \rangle = \langle u | v \rangle \lambda + \langle u | w \rangle \mu$

Aus (S2&3) folgt konjugierte Linearität in der ersten Variablen:

S4: Semilinearität links, $\langle u\lambda + v\mu | w \rangle = \overline{\lambda} \langle u | w \rangle + \overline{\mu} \langle v | w \rangle$

Eigenschaften (S3&4) heißen **sesquilinear** (lat. *sesqui*, 'anderthalb'),
(S2) heißt **hermitesch** zu Ehren von Charles Hermite (1822–1901).

Über \mathbb{R} mit $\text{conj}_{\mathbb{R}} = \text{id}_{\mathbb{R}}$ heißt (S2) **symmetrisch** und (S3&4) **bilinear**.

Das sind die grundlegenden Eigenschaften jedes Skalarprodukts!
Wir erheben genau diese Eigenschaften nun zur allgemeinen Definition.
Das ist ein mutiger Schritt der Abstraktion und wird sich bewähren:
Die gesamte Theorie bauen wir auf diesen wenigen Axiomen auf.

Definition S2A: Skalarprodukt über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$

Ein **Skalarprodukt** auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V ist eine positiv definite, hermitesche Sesquilinearform $\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, erfüllt also (S1,2,3).
Für $\|v\|^2 := \langle v | v \rangle$ gilt dann $\|v\|^2 \in \mathbb{R}$ dank (S2) und $\|v\|^2 \geq 0$ dank (S1).

Die zugehörige **Norm** ist dann $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : v \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$ und die zugehörige **Metrik** ist $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : (x, y) \mapsto d(x, y) = \|y - x\|$.

Für ein **Semiskalarprodukt** oder „semidefinites Skalarprodukt“ fordern wir nur (S0,2,3). Dazu gehört die **Seminorm** $\| \cdot \|$ und die **Semimetrik** d .

Für eine **hermitesche sesquilineare Form** fordern wir nur (S2,3).

Sie heißt **indefinit**, falls $\langle u | u \rangle > 0 > \langle v | v \rangle$ für geeignete $u, v \in V$ gilt.
Dann haben wir zwar nicht $\|v\|$, aber immerhin noch $\|v\|^2 := \langle v | v \rangle \in \mathbb{R}$.

Beispiel S2B: die Produktsumme über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$

(1) Auf $V = \mathbb{K}^{(I)}$ über \mathbb{K} haben wir das Standardskalarprodukt (S1A)

$$\langle u | v \rangle_{\ell^2} := u^\dagger v = \sum_{i \in I} \overline{u_i} v_i.$$

(2) Zu Konstanten $a \in \mathbb{K}^I$ erhalten wir die Sesquilinearform

$$\langle u | v \rangle_{\ell^2, a} := u^\dagger \text{diag}(a) v = \sum_{i \in I} \overline{u_i} a_i v_i.$$

Diese Sesquilinearform ist genau dann hermitesch, wenn $a_i \in \mathbb{R}$ gilt,
und positiv semi/definit, wenn $a_i \geq 0$ bzw. $a_i > 0$ gilt für alle $i \in I$.

(3) Zu jeder Matrix $B \in \mathbb{K}^{I \times I}$ erhalten wir die Sesquilinearform

$$\langle u | v \rangle_{\ell^2, B} := u^\dagger B v = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \overline{u_i} b_{ij} v_j.$$

Diese Form ist genau dann hermitesch, wenn die Matrix hermitesch ist.
Positive Semi/Definitheit erkennen wir dank Diagonalisierung S1R.

(1) Dieses Standardskalarprodukt haben wir eingangs erläutert (S1A)
speziell für die Indexmenge $I = \{1, \dots, n\}$. Allgemein darf I beliebig sein.
Die Vektoren $u, v \in \mathbb{K}^{(I)}$ sind I -Tupel $u, v : I \rightarrow \mathbb{K}$ mit endlichem Träger,
alle Summen sind somit endlich. Die Analysis erweitert dies zu Reihen.

Zu $A \in \mathbb{K}^{I \times J}$ ist $A^\dagger := \overline{A}^T$ die **adjungierte Matrix**, also transkonjugiert.
Damit schreiben wir das Standardskalarprodukt abkürzend $\langle u | v \rangle = u^\dagger v$.

(2) Diese Form auf $V = \mathbb{K}^{(I)}$ ist sesquilinear. Wiederholung / Übung!

Sie ist hermitesch gdw $\overline{a_i} = a_i$ für alle $i \in I$ gilt, also $a_i \in \mathbb{R}$.

Sie ist ein Semiskalarprodukt gdw $a_i \geq 0$ für alle $i \in I$.

Sie ist ein Skalarprodukt gdw $a_i > 0$ für alle $i \in I$.

(3) Dies ist eine Sesquilinearform. Sie ist hermitesch gdw $B^\dagger = B$ gilt.

Eine solche Matrix nennen wir **hermitesch** oder **selbstadjungiert**.

Positivität ist eine nicht-triviale, wichtige Frage. Im endlichen Falle
 $I = \{1, \dots, n\}$ können wir die Matrix $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ diagonalisieren dank S1R.
Wir führen das Problem so auf das vorige Beispiel (2) zurück und können
daran Semi/Definitheit ablesen, kurz $\beta \succeq 0 / B \succeq 0$ bzw. $\beta \succ 0 / B \succ 0$.

Aufgabe: Über $(\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}})$ betrachten wir

$$\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (u, v) \mapsto u^T A v \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ist β bilinear? symmetrisch? positiv definit / semidefinit / indefinit?

Lösung: Bilinearität ist offensichtlich dank $\beta(u, v) = u^T A v$.

Symmetrie ist offensichtlich dank $A^T = A$. Gilt In/Definitheit?

Das wird offensichtlich durch Diagonalisierung, siehe Seite S175:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \simeq S^T A S = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Unsere symmetrische Form β ist demnach indefinit:

Für den Vektor $u = S e_1$ gilt $\beta(u, u) = u^T A u = 4 > 0$.

Für den Vektor $v = S e_3$ gilt $\beta(v, v) = v^T A v = -\frac{3}{2} < 0$.

Aufgabe: Über $(\mathbb{C}, \text{conj}_{\mathbb{C}})$ betrachten wir

$$\beta : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} : (u, v) \mapsto u^\dagger A v \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Ist β sesquilinear? hermitesch? positiv definit / semidefinit / indefinit?

Lösung: Sesquilinearität ist offensichtlich dank $\beta(u, v) = u^\dagger A v$.

Hermitizität ist offensichtlich dank $A^\dagger = A$. Gilt In/Definitheit?

Das wird offensichtlich durch Diagonalisierung, siehe S174:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \simeq S^\dagger A S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Unsere hermitesche Form β ist demnach indefinit:

Für den Vektor $u = S e_1$ gilt $\beta(u, u) = u^\dagger A u = 2 > 0$.

Für den Vektor $v = S e_2$ gilt $\beta(v, v) = v^\dagger A v = -\frac{1}{2} < 0$.

😊 Positive Definitheit ist zunächst eine schwierige Frage.

Warum geht hier alles so leicht? Dank wirksamer Werkzeuge!

😊 Wir haben die nötigen Werkzeuge dank gründlicher Vorbereitung. Beim Thema Skalarprodukte möchte ich mich eigentlich gleich ins Vergnügen stürzen und sofort mit interessanten Beispielen beginnen. Doch dann könnten wir die Beispiele noch nicht recht verstehen...

Daher erweist es sich als klug, zunächst den allgemeinen Rahmen abzustecken, das nötige Vokabular und erste Werkzeuge zu erklären, zumindest bis zur Diagonalisierung, denn damit können wir fortan praktisch rechnen und die Frage der In/Definitheit direkt beantworten.

Übung: Jede hermitesche Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$ erfüllt $v^\dagger A v \in \mathbb{R}$ für alle $v \in \mathbb{K}^n$. (Warum?) Wir nennen A **positiv definit**, geschrieben $A \succ 0$, falls zudem $v^\dagger A v > 0$ gilt für alle $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Basiswechsel $S \in \text{GL}_n \mathbb{K}$ ergibt $B = S^\dagger A S$. Zeigen Sie $A \succ 0$ gdw $B \succ 0$. Für $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$ gilt $B \succ 0$ gdw $b_1, \dots, b_n > 0$.

Beispiel S2c: Frobenius-Skalarprodukt über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$

Auf dem Matrixraum $V = \mathbb{K}^{m \times n}$ haben wir das Standardskalarprodukt

$$\langle A | B \rangle_F := \text{tr}(A^\dagger B) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \overline{a_{ji}} b_{ij}.$$

Wir nennen dies das **Frobenius-Skalarprodukt**. Die davon abgeleitete Matrixnorm ist die **Frobenius-Norm** $\| \cdot \|_F : \mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\|A\|_F := \text{tr}(A^\dagger A)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

Das entspricht dem euklidischen Skalarprodukt und seiner Norm.

Aufgabe: Beweisen Sie, dass dies tatsächlich ein Skalarprodukt ist.

Beweis: Die Spur $\text{tr} : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K} : M \mapsto \sum_{i=1}^n M_{ii}$ ist \mathbb{K} -linear.

Wir setzen das Matrixprodukt $M = A^\dagger B$ ein, also $m_{ik} = \sum_{j=1}^m \overline{a_{ij}} b_{jk}$.

So finden wir die obige explizite Formel $\text{tr}(A^\dagger B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \overline{a_{ji}} b_{ij}$.

Auf \mathbb{K}^{mn} ist dies das bereits vertraute Standardskalarprodukt S1A. QED

Beispiel S2D: das Produktintegral über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$

(1) Auf $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ über \mathbb{K} haben wir das Standardskalarprodukt

$$\langle f | g \rangle_{L^2} := \frac{1}{b-a} \int_{t=a}^b \overline{f(t)} g(t) dt.$$

(2) Zum Gewicht $w \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ erhalten wir die Sesquilinearform

$$\langle f | g \rangle_{L^2, w} := \int_{t=a}^b \overline{f(t)} w(t) g(t) dt.$$

Diese ist genau dann hermitesch, wenn $w(t) \in \mathbb{R}$ gilt, und positiv semi/definit, wenn $w(t) \geq 0$ bzw. $w(t) > 0$ gilt für (fast) alle $t \in [a, b]$.

(3) Zum Integralkern $k \in \mathcal{C}([a, b]^2, \mathbb{K})$ erhalten wir die Sesquilinearform

$$\langle f | g \rangle_{L^2, k} := \int_{s=a}^b \int_{t=a}^b \overline{f(s)} k(s, t) g(t) dt ds.$$

Diese ist genau dann hermitesch, wenn der Kern hermitesch ist, $k^\dagger = k$. Die Frage der Semi/Definitheit klärt der folgende Satz von Mercer.

Hierzu sei $a < b$ in \mathbb{R} und $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ der \mathbb{K} -Vektorraum aller stetigen Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ auf dem reellen Intervall $[a, b]$.

Beweis: (1) Die Eigenschaften (S2,3) sind klar, denn das Integral ist linear. Auch Semidefinitheit (S0) ist klar, denn es gilt $\langle f | f \rangle = \int_{t=a}^b |f(t)|^2 dt \geq 0$. Für positive Definitheit (S1) müssen wir jedoch genauer hinschauen!

Sei $f \neq 0$, also $f(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in [a, b]$, und somit $\delta := |f(t_0)|^2 > 0$. Wir können $t_0 \in]a, b[$ annehmen, die Randfälle $t_0 \in \{a, b\}$ sind analog. Dank der Stetigkeit von f existiert ein hinreichend kleines $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $|f(t)|^2 \geq \delta/2$ für alle $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subseteq [a, b]$ gilt. Daraus folgt $\langle f | f \rangle = \int_{t=a}^b |f(t)|^2 dt \geq \varepsilon \delta > 0$. QED

⚠ Stetigkeit ist tatsächlich nötig für Definitheit. Als Gegenbeispiel betrachten wir $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ mit $f(x_0) = 1$ an einer Stelle $x_0 \in [a, b]$, überall sonst $f(x) = 0$ für $x \neq x_0$. Damit gilt $f \neq 0$, aber $\langle f | f \rangle = 0$.

😊 Die Vervollständigung $L^2([a, b], \mathbb{K})$ dieses Raumes untersuchen Sie in der Analysis und nutzen dies insbesondere für die Fourier-Theorie.

🤔 Wann ist die Sesquilinearform $\langle - | - \rangle_{L^2, k}$ positiv semi/definit?

Satz S2D: James Mercer 1909

Genau dann ist die oben definierte Sesquilinearform $\langle - | - \rangle_{L^2, k}$ auf $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ positiv semi/definit, wenn alle aus dem Integralkern $k \in \mathcal{C}([a, b]^2, \mathbb{K})$ gebildeten Matrizen $K(t_i, t_j)_{i, j \in I} \in \mathbb{K}^{I \times I}$ dies sind.

(0) Positiv semidefinit bedeutet, für alle $t \in [a, b]^n$ und $u \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i K(t_i, t_j) u_j \geq 0.$$

(1) Positiv definit bedeutet zudem, für alle $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i K(t_i, t_j) u_j > 0.$$

😊 Für uns sind dies Integrale zunächst schöne Beispiele als Ergänzung zu Summen. Sie werden gerne angewendet in der Funktionalanalysis und in der Physik, jüngst auch im Maschinellen Lernen als *kernel methods*.

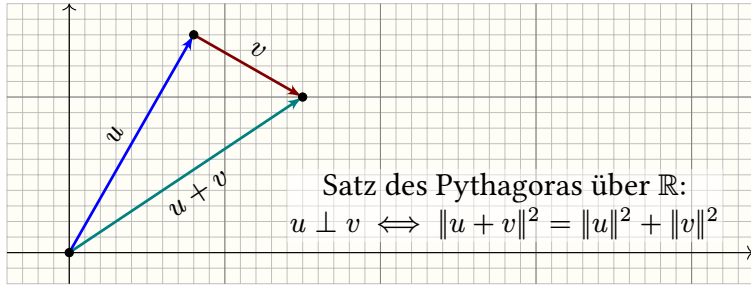
Wir erkennen ein wiederkehrendes Motiv: Wir können einer Form β meist leicht ansehen, ob sie sesquilinear und hermitesch ist, etwa für

$$\langle u | v \rangle_{\ell^2, B} := u^\dagger B v = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \overline{u_i} b_{ij} v_j,$$

$$\langle f | g \rangle_{L^2, k} := \int_{s=a}^b \int_{t=a}^b \overline{f(s)} k(s, t) g(t) dt ds.$$

Positive Definitheit ist jedoch weit schwieriger, daher sind wir für wirksame Werkzeuge immer dankbar. Sie ist die zentrale Grundlage für alle tieferliegenden Sätze und Anwendungen zu Skalarprodukten.

Einige der folgenden Sätze zu Skalarprodukten auf V kommen auch mit etwas schwächeren Voraussetzungen aus, etwa positive Semidefinitheit auf V und Definitheit auf einem endlich-dimensionalen Teilraum $U \leq V$. Ich versuche dies anwendungsfreundlich zu formulieren, sowohl klar und einfach, als auch angemessen allgemein. Wir gehen nachhaltig vor und nehmen nur so viele Forderungen auf, wie wir wirklich brauchen. Das zahlt sich in Anwendungen wie Fourier-Polynomen bereits aus.



Satz des Pythagoras über \mathbb{R} :
 $u \perp v \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

😊 In Worten: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Normquadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Normquadrate der Katheten.

😊 Speziell über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt zu dieser Implikation auch die Umkehrung: Aus der Gleichung $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ folgt die Orthogonalität $u \perp v$. Umgekehrt können Sie so numerisch die Rechtwinkligkeit prüfen!

Beispiel: Das **Maurerdreieck** mit Seitenlängen 3, 4, 5 ist rechtwinklig, denn es gilt $3^2 + 4^2 = 5^2$. Wenn Sie also ein Seil in $12 = 3 + 4 + 5$ gleich lange Strecken unterteilen, entsteht daraus ein rechtwinkliges Dreieck.

Satz S2E: Pythagoras mit Umkehrung

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit hermitescher Form $\langle - | - \rangle$. Allgemein steht $\|v\|^2$ für $q(v) = \langle v | v \rangle \in \mathbb{R}$, egal ob positiv oder nicht.

(0) Für je zwei Vektoren $u, v \in V$ gilt die binomische Formel:

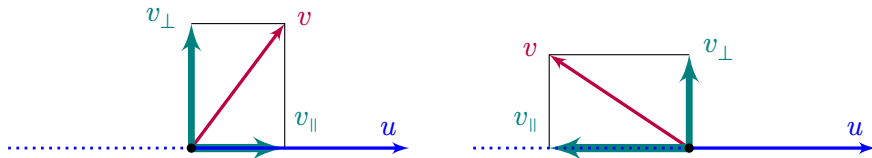
$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &\stackrel{\text{Def}}{=} \langle u+v | u+v \rangle \\ &\stackrel{(S4)}{=} \langle u | u+v \rangle + \langle v | u+v \rangle \\ &\stackrel{(S3)}{=} \langle u | u \rangle + \langle v | u \rangle + \langle u | v \rangle + \langle v | v \rangle \\ &\stackrel{(S2)}{=} \|u\|^2 + 2 \operatorname{re} \langle u | v \rangle + \|v\|^2 \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: $\operatorname{re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \in \mathbb{R}$ ist der Realteil von $z \in \mathbb{K}$.

(1) Stehen u und v senkrecht zueinander, so entfällt der gemischte Term:

$$u \perp v \implies \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

(2) Speziell über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt auch die Umkehrung „ \Leftarrow “.



Satz S2F: orthogonale Zerlegung von v bezüglich u

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit hermitescher Form $\langle - | - \rangle$. Sei $u \in V$ mit $\langle u | u \rangle \neq 0$. Jeder Vektor $v \in V$ hat genau eine Zerlegung $(v_{||}, v_{\perp})$ als Summe $v = v_{||} + v_{\perp}$ mit $v_{||} \in \langle u \rangle_{\mathbb{K}}$ und $v_{\perp} \in \langle u \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp}$. Explizit gilt:

$$v_{\perp} = v - v_{||} \quad \text{und} \quad v_{||} = u\lambda \quad \text{mit} \quad \lambda = \langle u | v \rangle / \langle u | u \rangle.$$

Beweis: Wir finden $0 \stackrel{!}{=} \langle u | v_{\perp} \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \langle u | v - u\lambda \rangle \stackrel{(S3)}{=} \langle u | v \rangle - \langle u | u \rangle \lambda$. QED

In Worten: Wir setzen $v_{||} = u\lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$ an. Für $v_{\perp} = v - v_{||}$ verlangen wir $u \perp v_{\perp}$, also $\langle u | v_{\perp} \rangle = 0$. Die einzige Lösung ist $\lambda = \langle u | v \rangle / \langle u | u \rangle$.

😊 Das ist der eindimensionale Spezialfall der Orthogonalprojektion S1q.

- L** „Diese algebraische Formel löst ein geometrisches Problem: Wir fällen das Lot vom Punkt v senkrecht auf die Gerade $u\mathbb{K}$.“
- P** „Richtig, und das nicht nur in der Ebene \mathbb{R}^2 oder im Raum \mathbb{R}^3 , sondern ganz allgemein im \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n (und wer's mag, sogar \mathbb{H}^n).“
- I** „Alles wunderbar: Die Lösung ist eindeutig, die Formel explizit, die Rechnung leicht. Zudem gelingt dies für jedes Skalarprodukt.“
- M** „Es gilt für jede hermitesche Form, wir benötigen nur $\langle u | u \rangle \neq 0$. Wir werden diesen universellen Trick wiederholt anwenden können.“

Notation: Wir behandeln die drei Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ möglichst einheitlich. Dabei sind \mathbb{R} und \mathbb{C} kommutativ, \mathbb{H} nicht. Daher operieren die Skalare auf den Vektoren immer von rechts. Das erfordert zwar etwas Disziplin, sortiert aber alle Formeln in ihre richtige Form, natürlich und ästhetisch.

Der Nenner $\|u\|^2 = \langle u | u \rangle$ ist reell, liegt also immer im Zentrum von \mathbb{K} . Daher spielt für den Faktor $\langle u | u \rangle^{-1}$ links oder rechts hier keine Rolle und wir können den Term $\langle u | u \rangle \in \mathbb{R}_{>0}$ bequem als Nenner schreiben. Bei einem Skalarprodukt gilt $\langle u | u \rangle \neq 0 \iff \langle u | u \rangle > 0 \iff u \neq 0$.

Satz S2c: Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU)

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$.

(1) Für alle Vektoren $u, v \in V$ gilt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**:

$$|\langle u | v \rangle|^2 \leq \langle u | u \rangle \langle v | v \rangle \quad \text{kurz} \quad |\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

(2) Gleichheit gilt genau dann, wenn u, v über \mathbb{K} linear abhängig sind.

(3) Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (1) gilt allgemein ebenso für jedes Semiskalarprodukt, dann allerdings ohne die genannte Umkehrung (2).

Geometrischer Beweis: (1) Für $u = 0$ ist alles klar. Fortan sei $u \neq 0$. Dank (S1) gilt $\langle u | u \rangle > 0$. Wir zerlegen $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$ gemäß Satz S2F:

$$\|v\|^2 \stackrel{\text{S2E}}{=} \|v_{\parallel}\|^2 + \|v_{\perp}\|^2 \stackrel{\text{(S0)}}{\geq} \|v_{\parallel}\|^2 \stackrel{\text{S2F}}{=} |\langle u | v \rangle|^2 / \|u\|^2$$

Daraus folgt die erste Ungleichung. Die zweite folgt dank Monotonie der Wurzelfunktion $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. (2) Gleichheit entspricht Parallelität.

Ausführlich: Aus $v \in u\mathbb{K}$ folgt nach Konstruktion $v_{\parallel} = v$ und $v_{\perp} = 0$. Umgekehrt, aus Gleichheit folgt $v_{\perp} = 0$, also $v = v_{\parallel}$, somit $v \in u\mathbb{K}$.

(3) Für $\|u\| > 0$ gelingt die Rechnung wie zuvor, ebenso für $\|v\| > 0$. Wir untersuchen den kritischen Fall $\|u\| = \|v\| = 0$. Für alle $\mu \in \mathbb{K}$ gilt

$$0 \leq \|u - v\mu\|^2 = \|u\|^2 - 2\operatorname{re}(\langle u | v \rangle \mu) + \|v\|^2 |\mu|^2.$$

Speziell für $\mu = \langle v | u \rangle$ folgt $|\langle u | v \rangle|^2 \leq 0$, also $\langle u | v \rangle = 0$. QED

☺ Wir legen gemäß Definition S2A nur die drei Eigenschaften (S1,2,3) zugrunde und erhalten daraus wichtige geometrische Anwendungen: Pythagoras S2E, orthogonale Zerlegung S2F und Cauchy-Schwarz S2G!

☺ All diese Eigenschaften gelten nicht nur für das euklidische, sondern für jedes beliebige Skalarprodukt... Ihnen werden noch viele begegnen. Abstraktion kostet anfänglich Mühe, doch dann trägt sie reiche Früchte!

Prove once, apply everywhere!

□ „Dieser Beweis ist trickreich elegant und erfreulich allgemein. Wie kann ich das Argument für den Schulunterricht reduzieren?“

In der Schule rechnet man ganz unbedarft über \mathbb{R} , derzeit selten über \mathbb{C} , und ganz sicher nicht über \mathbb{H} . Konzentrieren wir uns also gleich auf das euklidische Skalarprodukt $\langle u | v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$ auf dem Raum \mathbb{R}^n .

Der folgende genial-einfache Argument benötigt nur quadratische Gleichungen über \mathbb{R} und die allseits beliebte Mitternachtsformel:

Reeller Beweis der CSU: Vorgelegt seien $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Für $u = 0$ ist alles klar. Sei also $u \neq 0$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$0 \stackrel{\text{(S1)}}{\leq} \langle ut + v | ut + v \rangle \stackrel{\text{(S2,3)}}{=} \underbrace{\langle u | u \rangle}_{a \in \mathbb{R}_{\geq 0}} t^2 + 2 \underbrace{\langle u | v \rangle}_{b \in \mathbb{R}} t + \underbrace{\langle v | v \rangle}_{c \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$$

(1) Im Falle $a > 0$ ist die Diskriminante nicht positiv: $b^2 - ac \leq 0$. Das ist genau die ersehnte Ungleichung: $|\langle u | v \rangle|^2 \leq \langle u | u \rangle \langle v | v \rangle$

(2) Eine Nullstelle t existiert genau dann, wenn $b^2 - ac = 0$.

Aus positiver Definitheit (S1) folgt dann $0 = ut + v$. QED

□ „Der vorige Trick funktioniert leider nur über \mathbb{R} . Wie können wir dieses schöne Argument einheitlich über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ formulieren?“

Das gelingt mit einem hilfreichen Kniff, den ich hier gerne ausführe.

Algebraischer Beweis der CSU: Vorgelegt seien $u, v \in V$.

Wir setzen $z = ut + v\mu$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{K}$. Damit gilt:

$$0 \stackrel{\text{(S0)}}{\leq} \langle z | z \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \langle ut + v\mu | ut - v\mu \rangle \\ \stackrel{\text{(S3,4)}}{=} \langle u | u \rangle t^2 + 2\operatorname{re}(\langle u | v \rangle \mu) t + \langle v | v \rangle |\mu|^2$$

Wir wählen $\mu \in \mathbb{K}$ nun so, dass $|\mu| = 1$ und $\langle u | v \rangle \mu = |\langle u | v \rangle|$ gilt:

$$0 \leq \underbrace{\langle u | u \rangle}_{a \geq 0} t^2 + 2 \underbrace{|\langle u | v \rangle|}_{b \geq 0} t + \underbrace{\langle v | v \rangle}_{c \geq 0}$$

(1) Im Falle $a > 0$ ist die Diskriminante nicht positiv: $b^2 - ac \leq 0$.

(3) Im Sonderfall $a = 0$ folgt $b = 0$, und somit gilt $b^2 = 0 = ac$.

(2) Eine Nullstelle t existiert genau dann, wenn $b^2 - ac = 0$.

Aus positiver Definitheit (S1) folgt dann $0 = ut + v\mu$. QED

Beispiele: (1) Für alle reellen Zahlen $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n|^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

(2) Für alle stetigen Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right|^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx \cdot \int_a^b g(x)^2 dx$$

Der französische Mathematiker Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) bewies 1821 die Summenungleichung (1). Die Integralungleichung (2) veröffentlichte 1859 der russische Mathematiker Viktor Bunyakovsky (1804–1889) und erneut 1884, unabhängig 25 Jahre später, der deutsche Mathematiker Hermann Armandus Schwarz (1843–1921). Daher heißt (1) auch **Cauchy–Ungleichung** und (2) **Bunyakovsky–Ungleichung** oder **Schwarz–Ungleichung**. Die gemeinsame Verallgemeinerung S2G heißt historisch korrekt **Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz–Ungleichung** (CBS). Auch wenn sie historisch etwas ungerecht sein mag, folge ich dennoch der traditionellen Benennung **Cauchy–Schwarz–Ungleichung** (CSU).

In unserem ursprünglichen Beispiel des euklidischen Skalarprodukts bedeutet die Cauchy–Schwarz–Ungleichung ganz konkret und explizit:

$$(u_1^2 + \dots + u_n^2)(v_1^2 + \dots + v_n^2) \geq (u_1 v_1 + \dots + u_n v_n)^2$$

für alle reellen Zahlen $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$.

Übung: Bitte versuchen Sie, diese Ungleichung möglichst „direkt“ zu zeigen, ohne „Umweg“ über die allgemeine Theorie der Skalarprodukte.

Vermutlich werden Sie spüren, dass diese ganz konkret und harmlos erscheinende Ungleichung alles andere als leicht zu beweisen ist.

Nach eigenen Versuchen werden Sie feststellen, dass der oben erklärte allgemeine Begriff des Skalarprodukts und der so entwickelte Beweis gar kein Umweg ist, sondern eine Abkürzung! Ich betone daher erneut:

Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle.

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung ist eine der zentralen und universell nützlichen Ungleichungen in der Mathematik und ebenso für die Physik. Sie findet Anwendungen in der Geometrie, der Analysis, der Stochastik und der Quantenmechanik (etwa als Heisenbergs Unschärferelation).

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) veröffentlichte seine berühmte Ungleichung 1821 und in seinem Lehrbuch *Cours d'Analyse Algèbrique*, dem wohl ersten, aus heutiger Sicht strengen Aufbau der Analysis.

Victor Yacovlevich Bunyakovsky (1804–1889) studierte in Paris bei Cauchy und übertrug dessen Ungleichung von Summen auf Integrale, veröffentlicht 1859 in St. Petersburg, allerdings noch ohne Beweis.

Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) arbeitete 1885 in Göttingen an Flächen minimaler Krümmung und benötigte dazu auch Chauchys Ungleichung für Integrale. Ihm gelang die allgemeine Formulierung, und der obige reelle Beweis geht im Wesentlichen auf Schwarz zurück.

😊 Eine genial-einfache Abstraktion liefert alle nötigen Informationen.

Im deutsch-sprachigen Raum ist die Bezeichnung *Cauchy–Schwarz–Ungleichung* üblich. In englisch-sprachigen Texten findet man häufig nur *Schwarz's inequality*, in französisch-sprachigen entsprechend *l'inegalité de Schwarz*, die russische Tradition hingegen bevorzugt *Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz Ungleichung*. Alle drei Sichtweisen haben ihre Gründe; historische Gerechtigkeit ist meist schwierig.

Die gesamte Analysis beruht zu weiten Teilen auf Ungleichungen, und die Cauchy–Schwarz–Ungleichung ist hier ein erstes wichtiges Ergebnis sowie Vorbild für zahlreiche nachfolgende Ungleichungen. Wenn Sie mal Lust zum Schmökern haben, dann empfehle ich folgende Lektüre:

📖 J.M. Steele: *The Cauchy–Schwarz master class. An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*. Cambridge University Press 2004.

Übung: Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum mit Skalarprodukt und $u, v \in V$.

(1) Orthogonalität $u \perp v$ ist äquivalent zu $\|u + tv\| \geq \|u\|$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

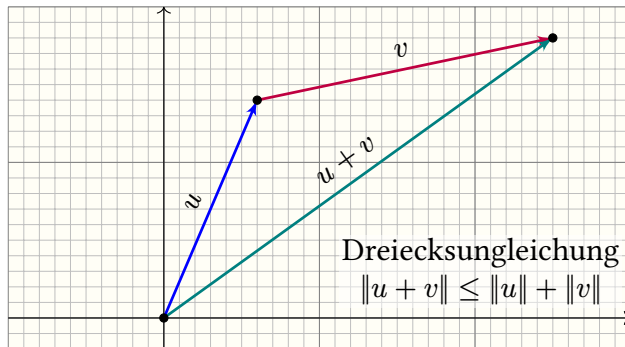
(2) Machen Sie eine Skizze und interpretieren Sie dies geometrisch.

Die zum Skalarprodukt zugehörige Norm misst die **Länge von Vektoren**:

$$\|-\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : v \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$$

Wir nutzen die Wurzelfunktion $\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto \sqrt{x}$. Sie erfüllt $\sqrt{0} = 0$, ist streng monoton, $x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$, und multiplikativ, $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.

Was sind die wesentlichen Eigenschaften der Norm?



Satz S2H: Eigenschaften der Norm

Zu jedem Skalarprodukt $\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ gehört seine Norm:

$$\|-\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : v \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$$

Sie erfreut sich folgender Eigenschaften für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$:

- | | |
|-------------------------------|--|
| N0: positive Semidefinitheit, | $\ u\ \geq 0 = \ 0\ $ |
| N1: positive Definitheit, | $\ u\ > 0$ für $u \neq 0$ |
| N2: absolute Homogenität, | $\ u\lambda\ = \ u\ \cdot \lambda $ |
| N3: Dreiecksungleichung, | $\ u + v\ \leq \ u\ + \ v\ $ |

Beweis: Aus (S1,2,3) folgt (N1,2). Die Ungleichung (N3) folgt dank CSU:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &\stackrel{\text{Def}}{=} \langle u + v | u + v \rangle \stackrel{\text{Bil}}{=} \langle u | u \rangle + \langle u | v \rangle + \langle v | u \rangle + \langle v | v \rangle \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \stackrel{\text{Bin}}{=} (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

Dank Monotonie von $x \mapsto \sqrt{x}$ folgt daraus $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. QED

Wir erheben die wesentlichen Eigenschaften zur allgemeinen Definition:

Definition S2H: Skalarprodukt und Norm

(1) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Ein **Skalarprodukt** auf V oder **inneres Produkt** ist eine Abbildung $\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, die (S1-3) erfüllt. Das Paar $(V, \langle - | - \rangle)$ heißt dann **\mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt** oder **unitärer Raum** (über $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$) oder **euklidischer Raum** (speziell über \mathbb{R}). In der Analysis wird $(V, \langle - | - \rangle)$ auch **Prä-Hilbert-Raum** über \mathbb{K} genannt und bei metrischer Vollständigkeit schließlich **Hilbert-Raum** über \mathbb{K} .

(2) Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\|-\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, die (N1-3) erfüllt. Das Paar $(V, \|-\|)$ heißt dann **normierter \mathbb{K} -Vektorraum**, auch kurz **normierter Raum** über \mathbb{K} , in der Analysis **Prä-Banach-Raum** und bei Vollständigkeit schließlich **Banach-Raum** über \mathbb{K} .

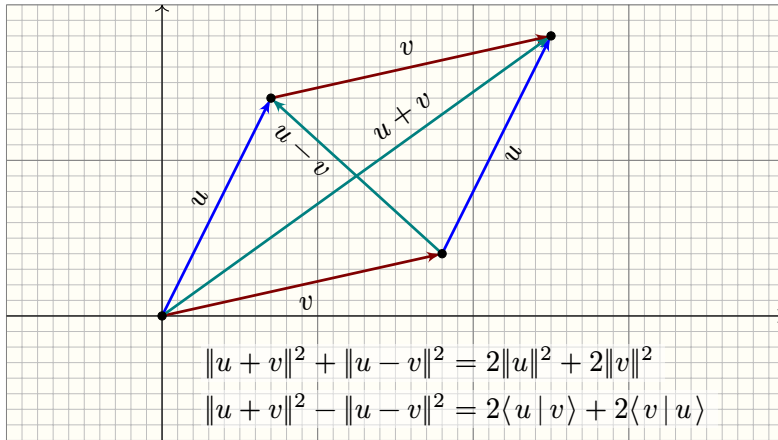
Für eine **Seminorm** $\|-\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ fordern wir nur (N2,3).

Für eine **Pseudonorm** erlauben wir $\|-\| : V \rightarrow [0, \infty]$.

Beispiel: Jedes Skalarprodukt definiert eine Norm $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$. Dies folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, siehe Satz S2H. Es gibt auch Normen, die nicht zu Skalarprodukten gehören.

Bemerkung: Anders als eine Norm kann eine Seminorm einem Vektor $v \neq 0$ die Länge $\|v\| = 0$ beimessen. Ihr Kern $V_0 = \{v \in V \mid \|v\| = 0\} \leq V$ ist dann ein Untervektorraum, dank der Dreiecksungleichung. Auf dem Quotientenvektorraum V/V_0 induziert die ursprüngliche Seminorm dann eine Norm $\|-\| : V/V_0 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, das heißt (N1) ist nun erfüllt. Seminormen treten insbesondere in der Integrationstheorie ganz natürlich auf.

Bemerkung: In Anwendungen tritt auch der Wert $\|v\| = \infty$ natürlich auf. Auch wenn man ihn schließlich vermeiden will, so ist es meist bequem, ihn zunächst zuzulassen. Zur Abgrenzung nennen wir dies **Pseudonorm**. Nimmt die Norm nur reelle Werte an, so sprechen wir zur Betonung von einer **endlichen Norm**. Dank der Dreiecksungleichung ist die Menge $V_{<\infty} = \{v \in V \mid \|v\| < \infty\} \leq V$ ein Untervektorraum. Hierauf ist die Einschränkung $\|-\| : V_{<\infty} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine endliche Norm.



☺ In Worten: In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der vier Seiten gleich der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen.
 ☺ Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt für Orthogonalität $u \perp v \Leftrightarrow \|u+v\| = \|u-v\|$. Jede:r gute Handwerker:in kennt diesen Test zur Rechtwinkligkeit.

Satz S21: Parallelogramm und Polarisierung

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit hermitescher Form $\langle -|-\rangle$.

(0) Für je zwei Vektoren $u, v \in V$ gilt die binomische Formel S2E:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\operatorname{re}\langle u|v\rangle + \|v\|^2$$

(1) Daraus folgt die Parallelogrammgleichung:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

(2) Allein aus dem Normquadrat $\|-\|^2$ rekonstruieren wir die Form $\langle -|-\rangle$:

$$\operatorname{re}\langle u|v\rangle = [\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2]/4$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit \mathbb{R} -Basis $B = \{1\}, \{1, i\}, \{1, i, j, k\}$ gilt damit:

$$\langle u|v\rangle = \sum_{\varepsilon \in B} \operatorname{re}\langle u|v/\varepsilon\rangle \varepsilon$$

Beweis: (0) Die binomische Formel haben wir in S2E nachgerechnet.

(1) Daraus folgt sofort $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

(2) Ebenso folgt sofort $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\operatorname{re}\langle u|v\rangle$.

Wir erhalten die Polarisierungsformeln für den Realteil:

$$\begin{aligned} \operatorname{re}\langle u|v\rangle &= [\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2]/4 \\ &= [\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2]/2 \\ &= [\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2]/2 \end{aligned}$$

Allgemein gilt $\langle u|v\rangle = \sum_{\varepsilon \in B} c_\varepsilon \varepsilon$ mit reellen Koeffizienten $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$. Diese rekonstruieren wir dank $c_\varepsilon = \operatorname{re}\langle u|v/\varepsilon\rangle = \operatorname{re}\langle u|v\varepsilon\rangle$, also

$$\langle u|v\rangle = \sum_{\varepsilon \in B} \operatorname{re}\langle u|v/\varepsilon\rangle \varepsilon = \sum_{\varepsilon \in B} \operatorname{re}\langle u|v\varepsilon\rangle/\varepsilon.$$

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist die Polarisierungsformel besonders einfach. Über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ polarisieren wir zweimal, jeweils einmal für Realteil und Imaginärteil, über $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ entsprechend viermal, je einmal für $\varepsilon = 1, i, j, k$. QED

Als mathematische Grundlage der Quantenmechanik spielen \mathbb{C} -lineare Räume mit Skalarprodukt eine zentrale Rolle. In diesem Zusammenhang fanden Pascual Jordan und John von Neumann folgendes Ergebnis:

Satz S2j: Jordan-von Neumann, 1935

Für jede Norm $\|-\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ auf V über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sind äquivalent:

- 1 Die Norm $\|-\|$ erfüllt die Parallelogrammgleichung S21.
 - 2 Es existiert ein Skalarprodukt $\langle -|-\rangle$ mit $\|v\|^2 = \langle v|v\rangle$ für alle $v \in V$.
- In diesem Fall ist das Skalarprodukt eindeutig dank Polarisierung S21.

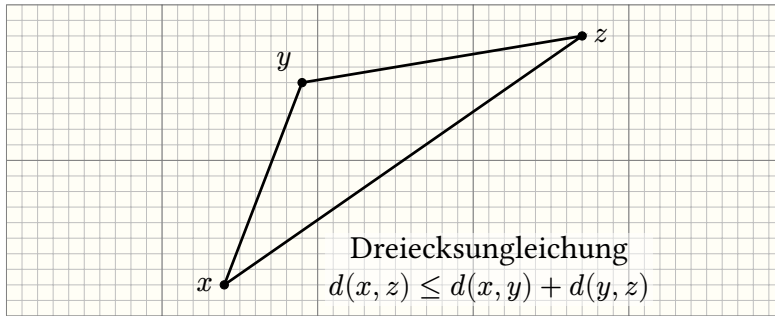
Quantitative Formulierung: Wir definieren $\delta : V^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\delta(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{\|x\| + \|y\|}.$$

Für $a := \inf \delta$ und $b := \sup \delta$ gilt dann $1/2 \leq a \leq 1 \leq b \leq 2$ sowie $ab = 1$. Genau dann kommt die Norm von einem Skalarprodukt, wenn $a = b = 1$.

Die zur Norm zugehörige Metrik misst den **Abstand von Punkten**:

$$d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : (x, y) \mapsto d(x, y) = \|y - x\|$$



Die Dreiecksungleichung besagt anschaulich: Der Weg von x nach z wird nicht kürzer, wenn wir einen Umweg über y gehen. Das ist eine plausible und nützliche Eigenschaft, die wir von jedem Abstandsbegriff erwarten. Zunächst ist jedoch nicht offensichtlich, warum etwa die euklidische Metrik tatsächlich diese Eigenschaft hat. Wir können es nun beweisen!

Satz S2κ: Eigenschaften der Metrik

Zu jeder Norm $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ gehört ihre Metrik:

$$d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : (x, y) \mapsto d(x, y) = \|y - x\|$$

Sie erfreut sich folgender Eigenschaften für alle $x, y, z \in V$:

M0: positive Semidefinitheit, $d(x, y) \geq 0 = d(x, x)$

M1: positive Definitheit, $d(x, y) > 0$ für $x \neq y$

M2: Symmetrie, $d(x, y) = d(y, x)$

M3: Dreiecksungleichung, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Beweis: Aus (N1,2,3) folgt (M1,2,3), hier ausführlich für (M3):

$$\begin{aligned} d(x, z) &\stackrel{\text{Def}}{=} \|z - x\| \stackrel{\text{Vek}}{=} \|z - y + y - x\| \\ &\stackrel{(N3)}{\leq} \|z - y\| + \|y - x\| \stackrel{\text{Def}}{=} d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

Das zeigt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, wie behauptet. QED

Wir erheben die wesentlichen Eigenschaften zur allgemeinen Definition:

Definition S2κ: Metrik

Eine **Metrik** auf einer Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow [0, \infty]$, die (M1–3) erfüllt. Das Paar (X, d) heißt dann ein **metrischer Raum**.

Für eine **Halbmetrik** $d : X \times X \rightarrow [0, \infty]$ fordern wir nur (M2,3); sie darf also verschiedenen Punkten $x \neq y$ den Abstand $d(x, y) = 0$ beimessen.

Beispiel: Das wichtigste Beispiel ist der euklidische Raum \mathbb{R}^n mit seinem euklidischen Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ und daraus abgeleitet seine euklidischen Norm $\|\cdot\|$ und seine euklidische Metrik d .

Die Dreiecksungleichung ist zwar anschaulich plausibel, aber im ersten Anlauf nicht leicht zu beweisen. Versuchen Sie es! Durch die allgemeine Betrachtung S2A haben wir die Cauchy–Schwarz–Ungleichung S2G herausgearbeitet und daraus die Dreiecksungleichung abgeleitet.

Beispiel: Auf jeder Menge X haben wir die **diskrete Metrik**

$$d : X \times X \rightarrow \{0, 1\} \subset \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Kommt sie auf $X = \mathbb{K}^{(I)}$ von einer Norm? Nur für $I = \emptyset$ und $X = \{0\}$!

Beispiel: Auf $\mathbb{K}^{(I)}$ haben wir die **Taxinorm** und die **Maximumsnorm**:

$$|x|_1 = \sum_{i \in I} |x_i| \quad \text{und} \quad |x|_\infty = \max_{i \in I} |x_i|$$

Kommen sie von einem Skalarprodukt? Nur für $X = \{0\}$ oder $X \cong \mathbb{K}$!

🕒 Wie zeigen wir, dass unser gesetztes Ziel erreichbar ist? Am besten **konstruktiv**, indem wir es explizit tun! Wie zeigen wir hingegen, dass es unerreichbar ist? Etwa, indem wir es *nicht* tun und frustriert aufgeben? Das beweist zur Sache herzlich wenig. Die Unmöglichkeit beweisen wir, indem wir ein Hindernis angeben! Hier die Parallelogrammungleichung.

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$.
Folgerung aus der CSU: Für je zwei Vektoren $u, v \in V \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{|\langle u | v \rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1, \quad \text{insbesondere} \quad \frac{\operatorname{re}\langle u | v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \in [-1, 1].$$

Daher existiert genau eine reelle Zahl $\theta \in [0, \pi]$ mit

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{re}\langle u | v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

So definieren wir den **Winkel** zwischen den Vektoren u und v durch

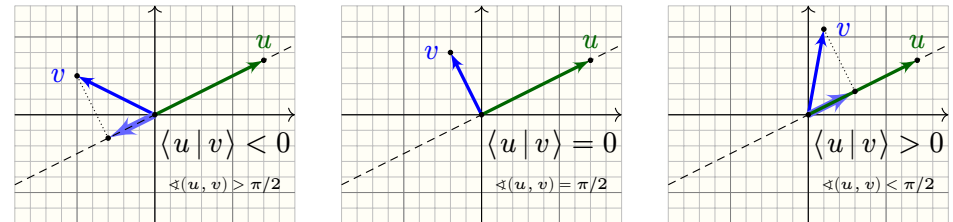
$$\sphericalangle(u, v) := \arccos\left(\frac{\operatorname{re}\langle u | v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}\right).$$

So überführen wir unsere geometrische Intuition in eine solide Definition und bequeme Rechnung: Damit können wir Winkel effizient berechnen. Die obige Formel ist vollkommen explizit und sofort bereit zum Einsatz.

Speziell über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt die nützliche Gleichung

$$\langle u | v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \sphericalangle(u, v).$$

Diese Winkelformulierung ist Ihnen aus der Schulmathematik vertraut. Damit können Sie den Winkel zwischen den Vektoren u und v ermitteln oder aus den Längen und dem Winkel umgekehrt das Skalarprodukt.



Im orthogonalen Falle $u \perp v$ gilt $\langle u | v \rangle = 0$, also $\sphericalangle(u, v) = \pi/2 = 90^\circ$. Allgemein ist $\|v\| \cos \sphericalangle(u, v)$ die Länge der Projektion von v parallel zu u . Das reelle Skalarprodukt $\langle u | v \rangle$ ist also die Länge $\|u\|$ des Vektors u multipliziert mit der Länge $\|v_{\parallel}\|$ des parallelen Anteils des Vektors v .

😊 Das ist eine genial-einfache Idee und elegante Definition. Wie sonst sollten wir den Winkel zwischen zwei Vektoren u und v ermitteln? Speziell in der euklidischen Ebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gelingt dies mit dem Bogenmaß und den trigonometrischen Funktionen \sin und \cos .

Noch informativer ist hier der **orientierte Winkel** $\alpha \in]-\pi, \pi]$ gemäß

$$\frac{v}{\|v\|} = e^{i\alpha} \frac{u}{\|u\|} \quad \text{also} \quad \frac{1}{\|v\|} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\|u\|} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

😊 Die oben erklärte Gleichung $\langle u | v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \theta$ genügt nur, um den **absoluten Winkel** $\theta = |\alpha| \in [0, \pi]$ zu bestimmen. Das **Vorzeichen** entspricht der Orientierung des Winkels und gelingt nur in der Ebene, wo wir Links- und Rechtsdrehung unterscheiden vermöge $\det(u, v) \geq 0$ oder $\det(u, v) < 0$. Schon im Raum \mathbb{R}^3 ist dies nicht mehr möglich.

In höherdimensionalen Räumen verlässt uns die Anschauung vollends. Wie wollen Sie den Winkel zwischen zwei Vektoren im \mathbb{R}^{100} messen? So gesehen ist die obige Definition wirklich einfach und elegant.

⚠ Den Winkel $\sphericalangle(u, v)$ können wir nur für Vektoren $u, v \in V$ definieren, die ungleich Null sind, da wir durch die Normen $\|u\|$ und $\|v\|$ dividieren.

😊 Orthogonalität $u \perp v$ hingegen können wir für je zwei beliebige Vektoren $u, v \in V$ definieren durch die einfache Bedingung $\langle u | v \rangle = 0$.

Orthogonalität wird im Folgenden eine große Rolle spielen, sowohl für die Entwicklung der Theorie als auch in der Anwendung der Methoden. Als zwei einfache doch eindrückliche Beispiele diskutieren wir den Satz des Pythagoras und die Parallelogrammgleichung.

Eingangs haben wir das euklidische Skalarprodukt durch Pythagoras motiviert und hergeleitet. Schön zu sehen und beruhigend zu wissen, dass dieser wichtige Satz bei unserer Abstraktion nicht verloren geht. Im Gegenteil, er erhält nun seine gebührend allgemeine Formulierung.

⚠ Über $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ bestimmt der Winkel nur den Realteil $\operatorname{re}\langle u | v \rangle$. Das ist manchmal nützlich, doch leider nur ein Teil der Information. Winkel sind daher vor allem über \mathbb{R} gebräuchlich, selten über \mathbb{C}, \mathbb{H} .

Sesquilinearformen können wir bequem durch Matrizen darstellen:

◆ **Satz S1E:** Gram-Matrix einer Sesquilinearform

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit Sesquilinearform $\langle - | - \rangle$. Zur Basis $(v_i)_{i \in I}$ definieren wir die **Gram-Matrix** $G \in \mathbb{K}^{I \times I}$ durch

$$g_{ij} = \langle v_i | v_j \rangle.$$

Daraus können wir die Form rekonstruieren: Für alle $x, y \in \mathbb{K}^{(I)}$ gilt

$$\left\langle \sum_{i \in I} v_i x_i \mid \sum_{j \in I} v_j y_j \right\rangle \stackrel{\text{Sesq}}{=} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \bar{x}_i \langle v_i, v_j \rangle y_j \stackrel{\text{Def}}{=} x^\dagger G y$$

Diese Sesquilinearform $\langle - | - \rangle$ ist genau dann hermitesch, wenn die Matrix G hermitesch ist, also $G^\dagger = G$ erfüllt. Die SForm ist genau dann positiv definit, also $\langle u | u \rangle > 0$ für alle $u \in V \setminus \{0\}$, wenn die Gram-Matrix G dies ist, also $x^\dagger G x > 0$ für alle $x \in \mathbb{K}^{(I)} \setminus \{0\}$ erfüllt.

Aufgabe: Wir betrachten $V = \mathbb{R}[X]$ über \mathbb{R} mit Monombasis $\mathcal{B} = (X^i)_{i \in \mathbb{N}}$. Bestimmen Sie dazu die Gram-Matrix $G \in \mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ des Skalarprodukts

$$\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R} : (P, Q) \mapsto \int_{x=0}^1 P(x)Q(x) dx.$$

Lösung: Für die Basispolynome X^i und X^j finden wir

$$g_{ij} := \langle X^i | X^j \rangle = \int_{x=0}^1 x^i x^j dx = \left[\frac{x^{i+j+1}}{i+j+1} \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{i+j+1}.$$

☺ Aus $G = (g_{ij})$ lässt sich $\langle - | - \rangle$ rekonstruieren, wie in Satz S1E erklärt. Die gesamte Matrix $G \in \mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ ist hier unendlich groß, das kommt vor. Auf $\mathbb{R}[X]_{<n}$ erhalten wir die berühmt-berüchtigte **Hilbert-Matrix**:

$$\left(\frac{1}{i+j+1} \right)_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

Aufgabe: Berechnen Sie das Skalarprodukt $\int_{x=0}^1 P(x)Q(x) dx$ der beiden Polynome $P(x) = 2 - 3x + x^2$ und $Q(x) = 5 - x + 2x^2$ zum Vergleich einmal (1) direkt und alternativ (2) mit der Gram-Matrix.

Lösungen: (1) Wir können direkt ausmultiplizieren und integrieren:

$$P(x)Q(x) = 10 - 17x + 12x^2 - 7x^3 + 2x^4$$

$$\int_{x=0}^1 P(x)Q(x) dx = \left[10x - \frac{17}{2}x^2 + 4x^3 - \frac{7}{4}x^4 + \frac{2}{5}x^5 \right]_{x=0}^1 = \frac{83}{20}$$

(2) Wir nutzen die Koordinaten und die obige Gram-Matrix, siehe S302:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{83}{20}$$

☺ Dieses nette Zahlenbeispiel illustriert das allgemeine Basisprinzip: Die Gram-Matrix codiert die Bilinearform, hier das Integral der Monome. Damit können wir bequem in Koordinaten rechnen.

◆ **Definition S1o:** Orthonormalbasis

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit hermitescher Form $\langle - | - \rangle$.

(1) Ein Vektor $u \in V$ heißt **normiert**, falls $\|u\|^2 = 1$ gilt, somit $\|u\| = 1$. Gilt $\|v\|^2 > 0$, so können wir v **normieren** zu $u = v/\|v\|$ mit $\|u\| = 1$.

(2) Eine Familie $(u_i)_{i \in I}$ in V heißt **orthogonal**, kurz OS, falls $\langle u_i | u_j \rangle = 0$ für alle $i \neq j$ in I gilt, und **orthonormal**, kurz ONS, falls zudem $\|u_i\| = 1$:

$$\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j: \text{ paarweise orthogonal,} \\ 1 & \text{falls } i = j: \text{ individuell normiert.} \end{cases}$$

D.h. die Gram-Matrix $\beta(u_i, u_j)_{ij}$ ist diagonal bzw. die Einheitsmatrix.

(3) Ist die Familie $(u_i)_{i \in I}$ zudem eine Basis von $U \leq V$, so nennen wir dies eine **Orthogonalbasis**, kurz OB, bzw. eine **Orthonormalbasis**, kurz ONB.

Beispiel: Die Standardbasis (e_1, \dots, e_n) im Raum \mathbb{K}^n ist orthonormal bezüglich des euklidischen Standardskalarprodukts $\langle u | v \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i v_i$.

Satz S3A: Pythagoras mit n Summanden → S2E

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit hermitescher Form $\langle - | - \rangle$.

(1) Sind $u_1, \dots, u_n \in V$ orthogonal, also $\langle u_i | u_j \rangle = 0$ für $i \neq j$, so gilt

$$\|u_1 + \dots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \dots + \|u_n\|^2.$$

(2) Sind $e_1, \dots, e_n \in V$ orthonormal und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, so gilt demnach

$$\|e_1 \lambda_1 + \dots + e_n \lambda_n\|^2 = |\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_n|^2.$$

Beweis: (1) Das Normquadrat erhalten wir aus dem Skalarprodukt:

$$\|\sum_k u_k\|^2 \stackrel{\text{Def}}{=} \langle \sum_k u_k | \sum_\ell u_\ell \rangle \stackrel{(S3.4)}{=} \sum_k \sum_\ell \langle u_k | u_\ell \rangle \stackrel{\text{OS}}{=} \sum_k \|u_k\|^2$$

(2) Dies ist ein Spezialfall: Die Familie $u_k = e_k \lambda_k$ ist orthogonal, denn

$$\langle u_i | u_j \rangle = \overline{\lambda_i} \langle e_i | e_j \rangle \lambda_j = 0$$

für alle $i \neq j$, mit Norm $\|u_k\|^2 = \|e_k\|^2 |\lambda_k|^2 = |\lambda_k|^2$. QED

☺ Daraus erhalten wir einen einfachen Test für Semi/Definitheit:

Satz S3A: Semi/Definitheit → Diagonalisierung S1R

(3) Sei $(u_i)_{i \in I}$ eine Orthogonalbasis des Unterraums $U \leq V$.

(a) Gilt $\langle u_i | u_i \rangle > 0$ für alle $i \in I$, so ist $\langle - | - \rangle$ auf U positiv definit.

(b) Gilt $\langle u_i | u_i \rangle \geq 0$ für alle $i \in I$, so ist $\langle - | - \rangle$ auf U positiv semidefinit.

Beweis: Jeder Vektor $u \in U$ schreibt sich $u = \sum_{i \in I} u_i \lambda_i$ mit $\lambda \in \mathbb{K}^{(I)}$.

Dank Orthogonalität erhalten wir nach Pythagoras (Satz S3A):

$$\|u\|^2 \stackrel{S3A}{=} \sum_{i \in I} \|u_i\|^2 |\lambda_i|^2$$

Daraus folgen sofort die Ungleichungen (a) und (b). QED

Bemerkung: Alle hier angegebenen Summen sind endlich, dank $\lambda \in \mathbb{K}^{(I)}$.

Ist die Orthogonalbasis $(u_i)_{i \in I}$ zudem normiert, so gilt (a) offensichtlich.

Gilt (a), so können wir $(u_i)_{i \in I}$ normieren zu einer Orthonormalbasis.

Zur Konstruktion einer Orthonormalbasis siehe die Verfahren S3c/S1R.

Satz S3B: Fourier-Koeffizienten → allgemein S1o

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit hermitescher Form $\langle - | - \rangle$.

Sei $(e_i)_{i \in I}$ in V eine orthogonale Familie mit $\langle e_i | e_i \rangle \neq 0$ für alle $i \in I$.

(1) Für jede Linearkombination $v = \sum_{i \in I} e_i v_i$ über \mathbb{K} gilt dann

$$v_i = \frac{\langle e_i | v \rangle}{\langle e_i | e_i \rangle}.$$

Insbesondere ist die Familie $(e_i)_{i \in I}$ in V über \mathbb{K} linear unabhängig.

Ist die Familie $(e_i)_{i \in I}$ orthonormal, so gilt vereinfacht $v_i = \langle e_i | v \rangle$.

☺ Das Skalarprodukt filtert den gewünschten Koeffizienten heraus!

Beweis: (1) Die Koeffizientenformel folgt dank Orthogonalität:

$$\langle e_i | v \rangle = \langle e_i | \sum_j e_j v_j \rangle = \sum_j \langle e_i | e_j \rangle v_j = \langle e_i | e_i \rangle v_i$$

Unabhängigkeit: Gilt $v = 0$, so folgt $v_i = 0$ für alle $i \in I$. QED

Satz S3B: Parseval-Gleichung

(2) Sei $(e_i)_{i \in I}$ eine Orthonormalbasis von V . Für alle Vektoren $u, v \in V$ gilt

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i \in I} e_i u_i && \text{mit } u_i = \langle e_i | u \rangle \in \mathbb{K}, \\ v &= \sum_{i \in I} e_i v_i && \text{mit } v_i = \langle e_i | v \rangle \in \mathbb{K}, \\ \langle u | v \rangle &= \sum_{i \in I} \overline{u_i} v_i && = \sum_{i \in I} \langle u | e_i \rangle \langle e_i | v \rangle, \end{aligned}$$

Daraus folgt erneut Pythagoras $\|u\|^2 = \sum_{i \in I} |u_i|^2$ und $\|v\|^2 = \sum_{i \in I} |v_i|^2$.

Beweis: (2) Die Parseval-Gleichung folgt dank Orthonormalität:

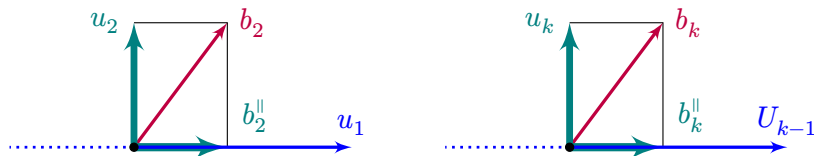
$$\langle u | v \rangle = \langle \sum_i e_i u_i | \sum_j e_j v_j \rangle = \sum_i \sum_j \overline{u_i} \langle e_i | e_j \rangle v_j = \sum_i \overline{u_i} v_i$$

Speziell für $u = v$ erhalten wir erneut den Satz des Pythagoras S3A. QED

Bemerkung: Alle angegebenen Summen sind endlich, da $(u_i), (v_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$.

In der Theorie der Hilbert-Räume führt man zusätzlich Grenzwerte ein und erlaubt statt (endlicher) Summen auch (abzählbare) Reihen.

- Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$.
- ☹ Hat V eine Basis? Ja, dank Basis-Auswahl-und-Ergänzungssatz M2K.
 - ☹ Hat V eine Orthonormalbasis? mit möglichst expliziter Konstruktion?
- Gegeben sei eine Basis b_1, \dots, b_n von V über \mathbb{K} . Wie formen wir daraus
- (1) ... eine Orthogonalbasis u_1, \dots, u_n ? mit $u_k = \sum_{j \leq k} b_j \lambda_{jk}$ und $\lambda_{kk} = 1$!
 - (2) ... eine Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n ? mit $e_k = \sum_{j \leq k} b_j \mu_{jk}$ und $\mu_{kk} > 0$!
- ☺ Für zwei Vektoren kennen wir die orthogonale Zerlegung S2F:



☺ Das ist ein genial-einfacher Trick. Das **Gram-Schmidt-Verfahren** verallgemeinert ihn für beliebige Familien, ganz einfach durch Iteration. Damit erhalten wir unmittelbar das folgende genial-einfache Verfahren. Es ist die geometrische Inkarnation von Gauß-Hermite, siehe S324

Satz S3c: Laplace 1816, Gram 1883, Schmidt 1907 – Basisversion

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$. Sei $b_1, \dots, b_n \in V$ eine Basis des Unterraums $U_n = \langle b_1, \dots, b_n \rangle_{\mathbb{K}}$.

(1) Hierzu existiert genau eine Orthogonalbasis u_1, \dots, u_k von U_k mit $b_k - u_k \in U_{k-1}$ für alle $k = 1, \dots, n$. Diese erhalten wir rekursiv:

$$u_k := b_k - \sum_{j=1}^{k-1} u_j \lambda_{jk} \quad \text{mit den eindeutigen Fourier-Koeffizienten} \quad \lambda_{jk} := \frac{\langle u_j | b_k \rangle}{\langle u_j | u_j \rangle}$$

(2) Normiert zu $e_k := u_k / \|u_k\|$ erhalten wir eine Orthonormalbasis, also

$$\langle u_k | u_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq j, \\ \|u_k\|^2 > 0 & \text{für } k = j, \end{cases} \quad \text{und} \quad \langle e_k | e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq j, \\ 1 & \text{für } k = j. \end{cases}$$

- (3) Das Verfahren gelingt für jede abzählbare Basis $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von $U \leq V$.
- (4) Das zeigt insbesondere: Jeder Vektorraum mit Skalarprodukt und höchstens abzählbarer Dimension besitzt eine Orthonormalbasis.

Aufgabe: Alles liegt explizit vor Ihnen. Rechnen Sie es sorgsam nach! (Das Vorbild $n = 2$ kennen Sie als orthogonale Zerlegung aus Satz S2F.)

Beweis: (1) Wir führen Induktion über k . Für $k = 1$ ist die Aussage klar. Sei nun $k \geq 2$. Im Unterraum $U_{k-1} \leq V$ haben wir die gegebene Basis (b_1, \dots, b_{k-1}) bereits zur Orthogonalbasis (u_1, \dots, u_{k-1}) transformiert. Im Unterraum U_k erhalten wir aus der Basis $(b_1, \dots, b_{k-1}, b_k)$ zunächst $(u_1, \dots, u_{k-1}, b_k)$ und dann $(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k)$ mit $u_k := b_k - \sum_{j=1}^{k-1} u_j \lambda_{jk}$. Für $j = 1, \dots, k-1$ fordern wir $0 = \langle u_j | u_k \rangle = \langle u_j | b_k \rangle - \langle u_j | u_j \rangle \lambda_{jk}$. Die Differenz verschwindet genau für $\lambda_{jk} = \langle u_j | b_k \rangle / \langle u_j | u_j \rangle$ dank S1Q.

- (2) Da (u_1, \dots, u_n) eine Basis von U_n ist, gilt insbesondere $u_n \neq 0$. Normierung zu $e_n := u_n / \|u_n\|$ liefert also eine Orthonormalbasis.
- (3) Dasselbe Verfahren gelingt für jede abzählbare Basis $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$: Aus b_0, b_1, b_2, \dots konstruieren wir u_0, u_1, u_2, \dots und e_0, e_1, e_2, \dots . Jeder Schritt benötigt nur die bisher berechneten Vektoren.
- (4) Wir wählen eine Basis und orthonormalisieren sie. QED

Bemerkung: Erfolgstrunken und überoptimistisch könnte man vermuten:

- (3) Das Verfahren gelingt für jede wohlgeordnete Indexmenge (I, \leq) .
- (4) Jeder Vektorraum mit Skalarprodukt besitzt eine Orthonormalbasis. Beides ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir den Hilbert-Raum

$$V = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \{ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{k \in \mathbb{N}} |f(k)|^2 < \infty \}$$

mit dem (wohldefinierten!) Skalarprodukt $\langle f | g \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{f(k)} g(k)$.

Hierin ist $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine orthonormale Familie, aber keine Basis, denn ihr Aufspann $U = \langle e_i : i \in \mathbb{N} \rangle_{\mathbb{R}}$ enthält nur Folgen mit endlichem Träger. Zum Beispiel liegt $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} : k \mapsto 2^{-k}$ zwar in V , aber nicht in U .

- (3) Wenn wir auf f und $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ das Gram-Schmidt-Verfahren anwenden, erhalten wir $\langle e_i | f \rangle = 2^{-i} \neq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Doch unendliche Summen können wir derzeit nicht verarbeiten. Hier übernimmt die Analysis!
- (4) Allgemein gilt sogar: Wir können $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ um keinen orthonormalen Vektor $v \in V$ erweitern, denn $\langle e_i | v \rangle = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ bedeutet $v = 0$. Die Theorie der Hilbert-Räume löst dieses Rätsel in Wohlgefallen auf.

Bemerkung: Geometrisch besagt das Gram-Schmidt-Verfahren

$$\begin{aligned} u_1 &= b_1, & e_1 &= N(u_1), \\ u_2 &= b_2 - P_{u_1}^{\parallel}(b_2), & e_2 &= N(u_2), \\ u_3 &= b_3 - P_{u_1}^{\parallel}(b_3) - P_{u_2}^{\parallel}(b_3), & e_3 &= N(u_3), \\ & \vdots & & \\ u_n &= b_n - P_{u_1}^{\parallel}(b_n) - \dots - P_{u_{n-1}}^{\parallel}(b_n), & e_n &= N(u_n). \end{aligned}$$

Dabei nutzen wir die Parallelprojektion $P_u^{\parallel}(v) = u \langle u | v \rangle / \langle u | u \rangle$ und die Normalisierung $N(v) = v / \|v\|$. Äquivalent hierzu erhalten wir:

$$\begin{aligned} u_1 &= b_1, & e_1 &= u_1 / \|u_1\|, \\ u_2 &= b_2 - e_1 \langle e_1 | b_2 \rangle, & e_2 &= u_2 / \|u_2\|, \\ u_3 &= b_3 - e_1 \langle e_1 | b_3 \rangle - e_2 \langle e_2 | b_3 \rangle, & e_3 &= u_3 / \|u_3\|, \\ & \vdots & & \\ u_n &= b_n - e_1 \langle e_1 | b_n \rangle - \dots - e_{n-1} \langle e_{n-1} | b_n \rangle, & e_n &= u_n / \|u_n\|. \end{aligned}$$

Die Orthogonalisierung von $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ zu $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n) \in V^n$ erfüllt $b_k = \sum_{j \leq k} u_j \lambda_{jk}$ mit $\lambda_{kk} = 1$ und $\lambda_{jk} = \langle u_j | b_k \rangle / \langle u_j | u_j \rangle$ für $j < k$:

$$\mathcal{B} = \mathcal{U} \Lambda \quad \text{mit} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

Zur Normalisierung nutzen wir $\Delta = \text{diag}(\|u_1\|, \dots, \|u_n\|) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Für die Orthonormalbasis $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n) \in V^n$ gilt demnach

$$\mathcal{E} = \mathcal{U} \Delta^{-1} \quad \text{also} \quad \mathcal{B} = \mathcal{U} \Lambda = \mathcal{E} \Delta \Lambda = \mathcal{E} R$$

$$\text{mit} \quad R = \Delta \Lambda = \begin{bmatrix} \oplus & * & \dots & * \\ 0 & \oplus & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \oplus \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}.$$

Diese Schreibweise entspricht der QR-Zerlegung in Satz S3E.

Robust heißt: Wir müssen lineare Unabhängigkeit nicht vorab prüfen!

Algo S3D: robuste Orthonormalisierung nach Gram-Schmidt

Eingabe: ein Erzeugendensystem $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ des Unterraums U

Ausgabe: eine Orthonormalbasis $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_k)$ des Unterraums U

- 1: $k \leftarrow 0$
- 2: **for** ℓ **from** 1 **to** n **do**
- 3: $k \leftarrow k + 1$; $b'_k \leftarrow b_\ell$; $u_k \leftarrow b'_k - \sum_{j=1}^{k-1} e_j \langle e_j | b'_k \rangle$
- 4: **if** $u_k \neq 0$ **then** $e_k \leftarrow u_k / \|u_k\|$ **else** $k \leftarrow k - 1$
- 5: **return** (e_1, \dots, e_k)

Dieser Algorithmus extrahiert aus \mathcal{B} drei interessante Basen von U :

- (1) die Teilfamilie $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_k)$ wie im Basisauswahlsatz M2K,
- (2) hieraus abgeleitet die Orthogonalbasis $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_k)$
- (3) und daraus die Orthonormalbasis $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_k)$.

⚠ In der Numerik müssen wir immer mit Rundungsfehlern rechnen! Statt $u_k \neq 0$ prüft man besser $\|u_k\| > \varepsilon$ mit geeigneter Toleranz $\varepsilon > 0$.

😊 Wir können jede endliche orthonormale Familie in V erweitern zu einer Orthonormalbasis, vorausgesetzt die Dimension ist abzählbar.

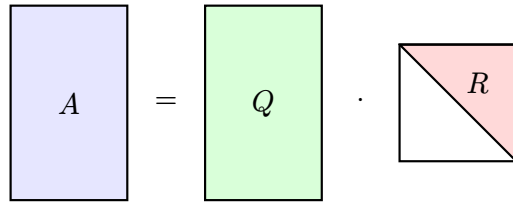
Korollar S3D: orthonormale Ergänzung zu einer Basis

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$ und zudem abzählbar erzeugt, also $V = \langle v_i : i \in I \rangle_{\mathbb{K}}$ mit I abzählbar.

Dann kann jede endliche orthonormale Familie (e_1, \dots, e_n) zu einer orthonormalen Basis $(e_j)_{j \in J}$ erweitert werden, wobei $\{1, \dots, n\} \subseteq J \subseteq \mathbb{N}$.

Beweis: Ohne Einschränkung sei $I \subseteq \mathbb{N}_{>n}$. Wir wenden den Gram-Schmidt-Algorithmus S3D auf $(e_1, \dots, e_n, v_i : i \in I)$ an. ◻

Bemerkung: Damit das Gram-Schmidt-Verfahren S3c hier gelingt, streichen wir jeden Vektor v_i , der sich als Linearkombination seiner Vorgänger schreiben lässt (wie in M2K). Geschickt optimieren wir dazu das Verfahren wie in S3D so, dass es diese Aufgabe von selbst erledigt. Das entspricht genau dem Algorithmus zum Basisauswahlsatz M2K!



Satz S3E: QR-Zerlegung, Existenz und Eindeutigkeit

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit linear unabhängigen Spalten, also $\text{rang } A = n \leq m$. Dazu existiert genau eine Zerlegung der Form

$$A = QR$$

wobei $Q \in \mathbb{K}^{m \times n}$ orthonormale Spalten hat, also $Q^\dagger Q = I_n$ erfüllt, und $R \in \mathbb{R}_{>0}^n(\mathbb{R})$ eine obere Dreiecksmatrix ist, also $r_{i,j} = 0$ für $i > j$, und zudem positive Diagonaleinträge hat, also $r_{i,i} > 0$ für alle i .

Insbesondere gilt $R \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ und $\det(R) = r_{1,1} \cdots r_{n,n} > 0$. Quadratisch, mit $m = n$, gilt $\det(A) = \det(Q) \det(R)$ mit Orientierung $\det(Q) \in \{\pm 1\}$.

(2) Wir beweisen die **Existenz** von (Q, R) zu A durch Konstruktion. Dank Gram-Schmidt konstruieren wir aus den Spalten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^m$ der Matrix A eine orthonormale Familie $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{K}^m$ wie folgt:

$$\begin{aligned} b_1 &:= a_1, & q_1 &:= b_1 / \|b_1\|, \\ b_2 &:= a_2 - q_1 \langle q_1 | a_2 \rangle, & q_2 &:= b_2 / \|b_2\|, \\ &\vdots & &\vdots \\ b_n &:= a_n - \sum_{k=1}^{n-1} q_k \langle q_k | a_n \rangle, & q_n &:= b_n / \|b_n\|. \end{aligned}$$

Umgekehrt gelesen erhalten wir daraus $A = QR$, denn

$$\begin{aligned} a_1 &= q_1 \|b_1\|, \\ a_2 &= q_2 \|b_2\| + q_1 \langle q_1 | a_2 \rangle, \\ &\vdots \\ a_n &= q_n \|b_n\| + \sum_{k=1}^{n-1} q_k \langle q_k | a_n \rangle. \end{aligned}$$

Dabei ist $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ orthonormal und $R \in \text{GL}_n \mathbb{K}$ mit $r_{i,i} = \|b_i\| > 0$ sowie $r_{i,j} = 0$ für $i > j$ und $r_{i,j} = \langle q_i | a_j \rangle$ für $i < j$.

Aufgabe: Folgern Sie Satz S3E aus dem Gram-Schmidt-Verfahren S3c.

Kurzfassung: Die Bedingungen $A = QR$ mit $Q^\dagger Q = 1$ und R in PZSF entsprechen Fourier-Koeffizienten und Normierung wie im Algorithmus. Das zeigt Eindeutigkeit, der Algorithmus $A \mapsto (Q, R)$ garantiert Existenz.

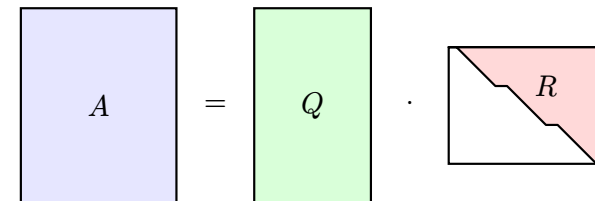
Beweis: (1) Die **Eindeutigkeit** von (Q, R) folgt per Induktion über n . Angenommen, es gilt $A = QR$. In den Spalten von A und Q heißt das:

$$\begin{aligned} a_1 &= q_1 r_{1,1} \\ a_2 &= q_1 r_{1,2} + q_2 r_{2,2} \\ &\vdots \\ a_n &= q_1 r_{1,n} + \cdots + q_{n-1} r_{n-1,n} + q_n r_{n,n} \end{aligned}$$

Hierbei seien $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{K}^m$ orthonormal und $r_{i,i} > 0$ für alle i . Dann sind (Q, R) die Daten aus dem Gram-Schmidt-Verfahren:

Für $k < n$ folgt $\langle q_k | a_n \rangle = \langle q_k | q_n \rangle r_{n,n} + \sum_{\ell=1}^{n-1} \langle q_k | q_\ell \rangle r_{\ell,n} = r_{k,n}$. Wir setzen $b_n := a_n - \sum_{k=1}^{n-1} q_k \langle q_k | a_n \rangle$ und erhalten $b_n = q_n r_{n,n}$. Wegen $\|q_n\| = 1$ und $r_{n,n} > 0$ gilt $r_{n,n} = \|b_n\|$ und $q_1 = b_1 / \|b_1\|$.

😊 Wir können das Gram-Schmidt-Verfahren robust formulieren (S3D):



Satz S3E: QR-Zerlegung, Existenz und Eindeutigkeit

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit Rang $\text{rang } A = r$. Dazu existiert genau eine Zerlegung $A \mapsto (Q, R)$ der Form

$$A = QR$$

wobei $Q \in \mathbb{K}^{m \times r}$ orthonormale Spalten hat, also $Q^\dagger Q = I_r$ erfüllt, und $R \in \mathbb{K}^{r \times n}$ positive Zeilenstufenform (PZSF, mit Pivoteinträgen in $\mathbb{R}_{>0}$).

Speziell: Aus $r = m$ folgt $Q \in \text{GU}_n(\mathbb{K})$. Aus $r = n$ folgt $R \in \mathbb{R}_{>0}^n(\mathbb{R})$.

😊 Die QR-Zerlegung ist in der Numerik ein wichtiges Werkzeug, etwa zur Berechnung einer Orthonormalbasis (wie oben S3D / S3E) oder zur Behandlung von linearen Ausgleichsproblemen. (S3H)

Die Zerlegung $A = QR$ ist eindeutig, also eine Abbildung $A \mapsto (Q, R)$. Sie kann jedoch mit verschiedenen Algorithmen berechnet werden! Die bekanntesten sind neben dem obigen Gram-Schmidt-Verfahren S3D vor allem Givens-Rotationen S4L und Householder-Spiegelungen S4P. Ersteres wird üblicherweise in der Linearen Algebra benutzt, da es geometrisch anschaulich ist und leicht zu erklären.

In der oben angegebenen Standardform ist es leider numerisch instabil: Es kann Eingabefehler und Rundungsfehler ungünstig verstärken. In der Numerik werden Sie daher weitere Verfahren zur QR-Zerlegung kennenlernen und ihre Eigenschaften noch genauer analysieren. Die Grundlage hierzu ist der Existenz- und Eindeigkeitssatz S3E; er erklärt, was wir erreichen wollen, und dass es eindeutig möglich ist.

😊 Die QR-Zerlegung $A \mapsto (Q, R)$, wie oben spezifiziert, ist eindeutig! Der Rechenweg hingegen ist es nicht. Das Gram-Schmidt-Verfahren ist ein möglicher Weg zum Ziel, aber bei Weitem nicht der einzige. Freuen Sie sich auf die genauere Untersuchung in der Numerik!

Übung: Es gibt drei Varianten des Gram-Schmidt-Verfahrens:

- 1 Orthogonalisieren (ohne Normalisieren der Vektoren),
- 2 Orthonormalisieren mit sofortigem Normalisieren und
- 3 Orthonormalisieren mit abschließendem Normalisieren.

Erklären Sie diese drei Varianten und schreiben Sie jede explizit als Algorithmus. Warum ergeben alle drei dasselbe Ergebnis? Welcher Rechenweg scheint Ihnen vorteilhaft, speziell für die Handrechnung?

Übung: Zählen Sie die benötigten Operationen im Grundkörper \mathbb{K} . Vergleichen Sie Gram-Schmidt S3D mit Gauß D2H zur RZSF sowie mit Gauß-Hermite S1R, siehe S324.

Die QR-Zerlegung ist sowohl theoretisch als auch praktisch relevant. Aus geometrisch-topologischer Sicht stiftet sie die Bijektion

$$\begin{aligned} \text{GO}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{>0}^n(\mathbb{R}) &\simeq \text{GL}_n(\mathbb{R}) : (Q, R) \mapsto A = QR \\ \text{GU}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}_{>0}^n(\mathbb{C}) &\simeq \text{GL}_n(\mathbb{C}) : (Q, R) \mapsto A = QR \end{aligned}$$

Das Produkt $(Q, R) \mapsto A = QR$ ist stetig, koordinatenweise eine Summe von Produkten. (Alles sind Teilmengen des euklidischen Raumes $\mathbb{K}^{n \times n}$.) Kleine Änderungen in Q und R bewirken nur kleine Änderungen in A .

Die Umkerung, also unsere QR-Zerlegung $A \mapsto (Q, R)$, ist ebenfalls stetig, wie unsere expliziten Formel zeigen. Wir haben daher nicht nur eine *Bijektion* der obigen Mengen, sondern sogar einen *Homöomorphismus*.

Ausblick: Hierbei ist die Menge $\mathbb{R}_{>0}^n(\mathbb{K})$ sternförmig zum Punkt 1. Wir können diesen Faktor daher auf den Punkt 1 zusammenziehen. Aus topologischer Sicht ist die „unnötig große“ Gruppe $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ äquivalent zur „kleinen“ Gruppe $\text{GU}_n(\mathbb{K})$. Letztere ist kompakt!

Aufgabe: Vergleichen Sie diese beiden Verfahren zur Orthogonalisierung. Inwiefern tun beide genau dasselbe? Was machen sie unterschiedlich?

Lösung: Beide berechnen einen Basiswechsel zu einer Orthogonalbasis.

(1) Gauß-Hermite S1R gelingt immer, über jedem *DRing mit $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$, und erlaubt über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ insbesondere, In/Definitheit auszurechnen. Gram-Schmidt S3C setzt $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und positive Definitheit voraus. Ohne diese Voraussetzung gilt: Führt Gram-Schmidt erfolgreich zu einer OBasis mit $\langle u_i | u_i \rangle > 0$ für alle i , so ist die Form positiv definit (Satz S1R).

(2) Startet man Gauß-Hermite S171 mit einer anisotropen Form, etwa einem Skalarprodukt, so sind die Reparaturen (2,3) niemals notwendig, und Rechenschritt (1) auf der Gram-Matrix ist genau derselbe wie Gram-Schmidts Orthogonalprojektion des aktuellen Basisvektors.

(3) Gram-Schmidt arbeitet direkt auf der *Basis* mit Basiswechseln, doch Gauß-Hermite arbeitet auf der *Gram-Matrix* mit Basiswechseln. Betrachtet man beides zugleich, so entsprechen sich die Daten perfekt.

😊 Kurzum: Beide Algorithmen sind Varianten derselben Rechnung.

Aufgabe: Orthonormalisieren Sie die Spalten der Matrix A nach Gram-Schmidt. Lesen Sie daraus die QR-Zerlegung $A = QR$ ab.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_A \stackrel{(1)}{=} \begin{bmatrix} u_1 & a_2 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{(2)}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_U \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{12} \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_\Lambda$$

😊 Orthogonalisierung erfordert nur Bruchrechnung in \mathbb{K} .

$$\stackrel{(3)}{=} \begin{bmatrix} e_1 & u_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{(4)}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}}_Q \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_R$$

😊 Lästige Wurzeln? Wir normalisieren erst ganz am Ende!

😊 Die vorgebene Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ hat n linear unabhängige Spalten. Wir können also gefahrlos die Gram-Schmidt-Basisversion S3c nutzen.

Wir notieren hier $A = Q_i R_i$ von der Startmatrix $(Q_0, R_0) = (A, 1)$ über die Orthogonalisierung $(Q_n, R_n) = (U, \Lambda)$ mit $U^\dagger U \in \mathbb{R}_n^{>0}$ und $\Lambda \in \mathbb{R}_n^1$ in normierter ZSF bis zur Orthonormalisierung $(Q_{2n}, R_{2n}) = (Q, R)$ mit den ersehnten Eigenschaften $Q^\dagger Q = 1_{n \times n}$ und $R \in \mathbb{R}_n^{>0}$ in positiver ZSF.

Schritt 1: Wir übernehmen die erste Spalte $u_1 = a_1$. Die Normierung verschieben wir lieber ans Ende.

Schritt 2: Von der zweiten Spalte a_2 subtrahieren wir das λ -Fache der ersten Spalte u_1 also $u_2 = a_2 - u_1 \lambda_{12}$ mit $\lambda_{12} = \langle u_1 | a_2 \rangle / \langle u_1 | u_1 \rangle = 2$.

😊 Damit haben wir die Orthogonalisierung $A = U\Lambda$ gefunden.

Schritt 3: Wir normieren die erste Spalte zu $e_1 = u_1 / \|u_1\|$.

Schritt 4: Wir normieren die zweite Spalte zu $e_2 = u_2 / \|u_2\|$.

😊 Damit haben wir die Orthonormalisierung $A = QR$ gefunden.

Aufgabe: Orthonormalisieren Sie die Spalten der Matrix A nach Gram-Schmidt. Lesen Sie daraus die QR-Zerlegung $A = QR$ ab.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_A \stackrel{(1)}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_U \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_\Lambda$$

$$\stackrel{(2)}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}}_Q \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 5\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}}_R$$

Robust heißt: Wir müssen lineare Unabhängigkeit nicht vorab prüfen, dies erledigt das robuste Gram-Schmidt-Verfahren gleich mit.

⚠ Die Spalten der Matrix A sind hier offensichtlich linear abhängig. Die Basisversion S3c von Gram-Schmidt ist darauf nicht vorbereitet. Wir nutzen frohgemut das robuste Gram-Schmidt-Verfahren S3D.

Die drei Spalten a_1, a_3, a_5 werden von den jeweils vorigen erzeugt. Das robuste Gram-Schmidt-Verfahren erkennt dies korrekt und nimmt diese redundanten Vektoren nicht in die Basis auf. Es bleiben die Spalten a_2 und a_4 . Hier sehen wir die Rechnung aus dem vorigen Zahlenbeispiel.

Die Matrix $Q = (e_1, e_2)$ ist dieselbe wie zuvor. Lediglich Λ hat nun fünf Spalten, um damit die fünf Spalten von A darzustellen. Die relevanten Spalten / Pivotspalten sind grün hinterlegt, die redundanten Spalten / freien Spalten sind weiß grundiert. Wie versprochen ist R in PZSF.

😊 Wir sehen daran nochmal: Das robuste Gram-Schmidt-Verfahren S3D kombiniert den wohlvertrauten Basisauswahlsatz M2κ nach Gauß mit anschließender Orthonormalisierung S3c in der Basisversion.

Beispiel: Zur weiteren Anschauung hier eine reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, zunächst orthogonalisiert zu (U, Λ) , dann orthonormalisiert zu (Q, R) .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{6} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Übung: Rechnen Sie es selbst! Wie finden Sie die Koeffizienten Λ ?

☺ Orthogonalisierung erfordert nur Bruchrechnung in \mathbb{K} , hier \mathbb{R} .

☺ Lästige Wurzeln? Wir normalisieren erst ganz am Ende!

Übung: Machen Sie die Probe! Was genau ist hier zu prüfen?

Beispiel: Zur Anschauung hier eine kleine komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, zunächst orthogonalisiert zu (U, Λ) , dann orthonormalisiert zu (Q, R) .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ i & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+3i}{2} \\ i & \frac{3-i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-i}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1+3i}{2\sqrt{5}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{3-i}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Übung: Rechnen Sie es selbst! Wie finden Sie die Koeffizienten Λ ?

☺ Orthogonalisierung erfordert nur Bruchrechnung in \mathbb{K} , hier \mathbb{C} .

☺ Lästige Wurzeln? Wir normalisieren erst ganz am Ende!

☺ Wenn nur Q gefragt ist, dann kann man bei der Berechnung von U alle Nenner wegskalieren und das Gegenstück in Λ ignorieren.

Übung: Machen Sie die Probe! Was genau ist hier zu prüfen?

Beispiel: Zur Anschauung zwei quaternionale Matrizen $A, B \in \mathbb{H}^{2 \times 2}$, zunächst orthogonalisiert zu (U, Λ) , dann orthonormalisiert zu (Q, R) .

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & i \\ j & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ j & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{j}{\sqrt{2}} & \frac{k}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 1 & j \\ i & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} [1 \ j] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} [\sqrt{2} \ j\sqrt{2}] \end{aligned}$$

☺ Hier sind die Spalten von A schon orthogonal, auch das kommt vor. Das nehmen wir gerne mit, dadurch wird die Rechnung sehr einfach.

☺ Die Spalten von B sind \mathbb{H} -linear abhängig, genauer gilt $b_1 \cdot j = b_2$. Dem robusten Gram-Schmidt-Verfahren S3D entgeht nichts!

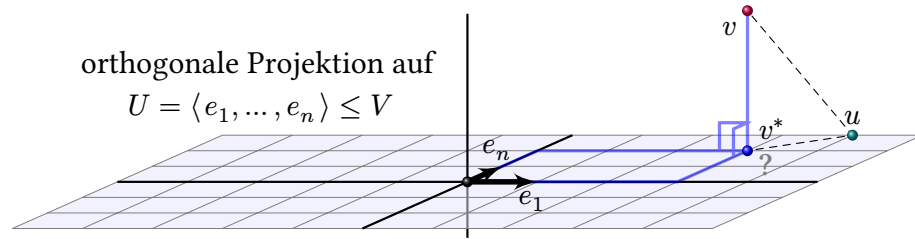
⚠ Zwar sind A und B transponiert, doch A ist invertierbar und B nicht! Quaternionen liefern heilsame Gegenbeispiele und schulen die Präzision.

Beispiel: Hier eine dritte quaternionale Matrix $C \in \mathbb{H}^{3 \times 2}$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & j \\ 1 & k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{+2i-j-k}{3} \\ 1 & \frac{-i+2j-k}{3} \\ 1 & \frac{-i-j+2k}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{i+j+k}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{+2i-j-k}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-i+2j-k}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-i-j+2k}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{i+j+k}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Übung: Rechnen Sie es selbst! Wie finden Sie die Koeffizienten Λ ?

Mit etwas Übung spüren Sie erfreut, Quaternionen sind nicht schwer. Anfangs war \mathbb{R} ungewohnt, dann \mathbb{C} , nun \mathbb{H} , doch üben hilft rasch. Möglichst vielfältige Beispiele illustrieren und erhellen.



Approximationsproblem: Zu $v \in V$ suchen wir den / einen Vektor $v^* \in U$, der v am nächsten liegt. Existenz? eindeutig? effektiv? effizient?

Hierzu sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$ und Norm $\| \cdot \|$.
 Darin sei $U \subseteq V$ ein endlich-dim. Untervektorraum, $\dim U = n < \infty$.

Lösung: Wir projizieren v orthogonal auf U zum Vektor $v^* = P_U^\perp(v)$.

😊 Schon $V = \mathbb{R}^2$ und $n = 1$ ist interessant, ebenso $V = \mathbb{R}^3$ und $n = 1, 2$.
 Die geometrischen Argumente gelten ganz allgemein: Der Raum V darf beliebig groß sein, etwa ein unendlich-dimensionaler Funktionenraum.
 Lediglich der Unterraum U muss (vorerst) endlich-dimensional bleiben.

Übung: Wie berechnen Sie im Raum \mathbb{R}^3 den euklidischen Abstand des Punktes p zu einer Geraden $G = \langle u_1 \rangle$? zu einer Ebenen $E = \langle u_1, u_2 \rangle$?
 Welche Rechentechniken und Beweisargumente kennen Sie hierzu?

Beispiel: Vorgelegt ist eine Funktion $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, etwa $f(x) = x^2$.
 Zu $n \in \mathbb{N}$ gesucht ist die/eine Bestapproximation $f_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$, die den mittleren quadratischen Fehler $\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 dx$ minimiert.

Aufgabe: Wie bestimmen Sie die Parameter $c_k \in \mathbb{C}$ möglichst effizient?

Lösung: Als Fourier-Koeffizienten, also $c_k = \langle e_k | f \rangle$! Dass dies eine optimale Lösung ist, sogar die einzige, verdanken wir folgendem Satz.

Den Approximationsfehler, also die verbleibende Differenz $f_n - f$, können wir auf viele verschiedene Weisen messen und bewerten, etwa durch das Supremum $\sup |f_n - f|$ oder $\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^p dx$.
 Diese Normen sind in Analysis, Numerik und Optimierung wichtig, erfordern jedoch sehr aufwändig maßgeschneiderte Methoden.
 Nur für $p = 2$ haben wir eine so schöne und einfache Antwort!

Satz S3F: Gauß 1795, Bessel 1818

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein Vektorraum mit hermitescher Form $\langle - | - \rangle$.
 Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum mit einer Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n oder allgemein einer Orthogonalbasis mit $\langle e_k | e_k \rangle > 0$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$.

(1) **Orthogonalprojektion:** Zu jedem $v \in V$ existiert genau ein Vektor $v^* = \sum_{k=1}^n e_k v_k \in U$ mit $(v - v^*) \perp U$. Dieser ist explizit gegeben durch

$$v_k = \langle e_k | v \rangle / \langle e_k | e_k \rangle, \quad \text{seine Fourier-Koeffizienten.}$$

(2) **Bestapproximation:** Für alle Konkurrenten $u \in U \setminus \{v^*\}$ gilt

$$\|v - u\|^2 = \|v - v^*\|^2 + \|v^* - u\|^2 > \|v - v^*\|^2.$$

(3) **Bessel-Gleichung:** Dank $v = v^* + (v - v^*)$ und Pythagoras S3A gilt

$$\|v\|^2 = \|v^*\|^2 + \|v - v^*\|^2 \quad (\text{Approximationsfehler})$$

(4) Zusammen mit $\|v - v^*\|^2 \geq 0$ folgt $\|v\|^2 \geq \|v^*\|^2 = \sum_{k=1}^n \|e_k\|^2 |v_k|^2 \geq 0$.

Beweis: (1) Genau dann gilt $(v - v^*) \perp U$, wenn für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$0 \stackrel{!}{=} \langle e_k | v - v^* \rangle \stackrel{\text{Lin}}{=} \langle e_k | v \rangle - \sum_j \langle e_k | e_j \rangle v_j \stackrel{\text{ONB}}{=} \langle e_k | v \rangle - \langle e_k | e_k \rangle v_k$$

Es gibt genau eine Lösung: $v^* = \sum_{k=1}^n e_k v_k$ mit $v_k = \langle e_k | v \rangle / \langle e_k | e_k \rangle$.

(2) Für jeden Konkurrenten $u \in U$ gilt $u = v^* + \sum_k e_k \mu_k$ mit $\mu \in \mathbb{K}^n$, also

$$\|v - u\|^2 \stackrel{\text{Def}}{=} \|(v - v^*) - \sum_k e_k \mu_k\|^2 \stackrel{\text{S3A}}{=} \|v - v^*\|^2 + \sum_k \|e_k\|^2 |\mu_k|^2$$

(3) Dies folgt aus der orthogonalen Zerlegung $v = v^* + (v - v^*)$. QED

😊 Approximation interessiert uns in jedem \mathbb{K} -Vektorraum V mit Norm. Speziell für ein Skalarprodukt genügt hierzu die Orthogonalprojektion!
 Ich formuliere den Satz umsichtig mit minimalen Voraussetzungen:

😊 Für die Aussagen (1-3) genügt eine hermitesche Form $\langle - | - \rangle$. Dank der vorausgesetzten Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n ist sie positiv definit auf U .
 Für (1) genügt schon $\langle e_k | e_k \rangle \neq 0$, erst für (2) benötigen wir $\langle e_k | e_k \rangle > 0$.
 Für die Ungleichung (4) genügt, dass $\langle - | - \rangle$ auf V positiv semidefinit ist.

Problemstellung: Zu lösen sei über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ das Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ von Rang $\text{rang } A = n \leq m$ und rechter Seite $b \in \mathbb{K}^m$.

(0) Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^m$ die Spalten von A und $U = \langle a_1, \dots, a_n \rangle_{\mathbb{K}} \leq \mathbb{K}^m$ der Spaltenraum von A . Genau dann ist $Ax = b$ lösbar, wenn $b \in U$ gilt.

(1) Allgemein suchen wir Näherungslösungen $x^* \in \mathbb{K}^n$. Der Fehlervektor

$$v = Ax^* - b$$

soll dabei möglich klein sein, wir wollen also die Norm $\|v\|$ minimieren. Nach Satz S3F ist dies äquivalent zu $v \perp U$, und somit zu $v \perp a_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, kurz $A^\dagger v = 0$. Ausgeschrieben bedeutet das:

$$A^\dagger Ax^* = A^\dagger b$$

😊 Statt unserer ursprünglichen, eventuell überbestimmten Gleichung $Ax = b$ lösen wir diese Umformung; die Letztere ist eindeutig lösbar.

Satz S3H: Näherungslösung eines überbestimmten Gleichungssystems

Zu lösen sei über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ von Rang $\text{rang } A = n \leq m$ und rechter Seite $b \in \mathbb{K}^m$.

(0) Dank S3F existiert genau eine Bestapproximation $x^* \in \mathbb{K}^n$ mit minimaler Fehlernorm $\|Ax^* - b\|$, gegeben durch $A^\dagger Ax^* = A^\dagger b$.

(1) Dank des vorigen Lemmas ist $A^\dagger A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar, also gilt:

$$x^* = (A^\dagger A)^{-1} A^\dagger b$$

(2) Die QR-Zerlegung $A = QR$ dank Satz S3E vereinfacht dies zu

$$Rx^* = Q^\dagger b$$

Diese Gleichung kann durch Rückwärtseinsetzen leicht gelöst werden.

Lemma S3G: die hermitesche Matrix $A^\dagger A$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist $A^\dagger A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hermitesch (symmetrisch über \mathbb{R}) und erfüllt $\text{Ker}(A^\dagger A) = \text{Ker } A$ und somit $\text{rang}(A^\dagger A) = \text{rang } A$.

Beweis: Es gilt $(A^\dagger A)^\dagger = A^\dagger (A^\dagger)^\dagger = A^\dagger A$. Wir zeigen $\text{Ker}(A^\dagger A) = \text{Ker } A$: Klar ist „ \supseteq “. Wir zeigen „ \subseteq “: Hierzu sei $v \in \text{Ker}(A^\dagger A)$, also $A^\dagger Av = 0$. Dann gilt $0 = v^\dagger (A^\dagger Av) = (Av)^\dagger (Av)$, also $Av = 0$, somit $v \in \text{Ker } A$. Daraus folgt $\text{rang}(A^\dagger A) = \text{rang } A$ dank Rangatz M1v. QED

Bemerkung: Wir nutzen hier wesentlich $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und die positive Definitheit des euklidischen Skalarprodukts $\langle u | v \rangle = u^\dagger v$.

Über beliebigen Körpern gilt diese Aussage nicht! Als einfaches Gegenbeispiel betrachte man die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_2^2$ mit $A^\top A = 0$.

🤔 Was tut hier die Moore–Penrose–Pseudoinverse $A^+ = (A^\dagger A)^{-1} A^\dagger$? Ganz einfach: orthogonale Projektion auf das Bild $\text{Im } A$, dann Urbild.

😊 Diese Idee bauen wir in §T5.2 in voller Allgemeinheit aus.

Beweis: Die Aussagen (0) und (1) haben wir zuvor schon hergeleitet.

(2) Aus $A^\dagger Ax^* = A^\dagger b$ und $A = QR$ folgt $R^\dagger Q^\dagger QRx^* = R^\dagger Q^\dagger b$, dank $Q^\dagger Q = E_n$ und $R \in \mathbb{K}_n^{>0}(\mathbb{R})$ also $Rx^* = Q^\dagger b$. QED

😊 Wir nennen $A^+ = (A^\dagger A)^{-1} A^\dagger$ daher die **Pseudoinverse** zu A . Zur Gleichung $Ax = b$ berechnet sie die Näherungslösung $x^* = A^+ b$. Ist die Matrix A invertierbar, so auch A^\dagger , und dann gilt $A^+ = A^{-1}$. In diesem Falle ist unsere Näherungslösung die exakte Lösung.

Aus der QR-Zerlegung $A = QR$ folgt $A^+ = R^{-1} Q^\dagger$. Das ist besonders elegant und einfach zu rechnen.

😊 Die QR-Zerlegung ist ein Standardverfahren der (numerischen) Linearen Algebra und in jeder guten Softwarebibliothek professionell implementiert. Darauf können und sollten wir zurückgreifen.

Daher ist es sinnvoll, ein gegebenes Problem, wie oben $Ax = b$, auf ein solches, bewährtes Standardverfahren zurückzuführen. Sobald dies gelingt, ist unser Problem gelöst.

Die hier gezeigte Technik heißt **Methode der kleinsten Quadrate**. Wir minimieren dabei die Summe der Fehlerquadrate.

Sie ist ein wunderbar-geniales Universalwerkzeug, beginnend mit der Bestapproximation S3F nach Gauß–Bessel, über die Näherungslösung S3H eines überbestimmten Gleichungssystems dank der Pseudoinversen $A^+ = (A^\dagger A)^{-1} A^\dagger$, hin zu zahlreichen Varianten und Anwendungen der Ausgleichsrechnung etwa in der Numerik (siehe §T5.2), der Statistik oder jüngst im Maschinellen Lernen. Abstrakt heißt vielseitig anwendbar!

Überbestimmte Gleichungssysteme $Ax = b$ treten typischerweise wie folgt auf: Wir interessieren uns für eine (kleine) Anzahl von Kenngrößen x_1, \dots, x_n . Zu ihrer Bestimmung haben wir eine (große) Anzahl von Messungen b_1, \dots, b_m . Bei jedem Messvorgang treten unvermeidliche Messfehler auf, daher ist es im Prinzip vorteilhaft, möglichst viele Messungen zu machen. Andererseits können wir dann nicht mehr erwarten, hierzu eine exakte Lösung x zu finden.

Die Methode der kleinsten Quadrate wurde unabhängig von Gauß und Legendre entwickelt (Legendre veröffentlichte sie 1805, Gauß 1809). Beide nutzten dieses Verfahren, um astronomische Umlaufbahnen anhand von Beobachtungsdaten möglichst genau zu bestimmen.

Am Neujahrstag 1801 entdeckte der Astronom Giuseppe Piazzi den Zwergplaneten Ceres. Vierzig Tage lang konnte er seine Bahn verfolgen, doch dann verschwand Ceres hinter der Sonne. Viele Astronomen versuchten erfolglos, anhand von Piazzi's Beobachtungsdaten die Bahn zu berechnen und zu verfolgen, doch Ceres blieb verschwunden.

Dem 24-jährigen Gauß gelang der Durchbruch, die Bahn wesentlich genauer zu berechnen, indem er zur Ausgleichsrechnung die Methode der kleinsten Quadrate nutzte. Ausgehend von Gauß' Vorhersage konnte der Astronom Franz Xaver von Zach nach beinahe einem ganzen Jahr, am 7. und 31. Dezember 1801 Ceres tatsächlich wiederfinden.

Ceres befand sich etwa 7° von der zuvor vermuteten Stelle, also mehr als 13 Vollmondbreiten. Das illustriert die schwierige Datenlage und die durchschlagende Verbesserung durch Mathematik und neue Verfahren. Dieser sensationelle Erfolg machten Gauß und seine Methode berühmt.

Übrigens nutzte Gauß im Zuge seiner astronomischen Berechnungen ganz systematisch noch ein weiteres wichtiges Werkzeug: die Lösung linearer Gleichungssysteme durch sukzessive Elimination der Variablen. Diese Rechenmethode war zuvor schon benutzt worden, doch Gauß führte sie virtuos zu höchster Blüte. Seine erste Veröffentlichung zu diesem Thema stammt aus dem Jahr 1810. Die Mathematik allgemein, und speziell die Lineare Algebra, entspringt und nützt direkt praktischen Anwendungen. Sie als abstrakt zu beschimpfen zeugt von Ignoranz.

Sowohl das Ausgleichs- als auch das Eliminationsverfahren wurden in der Folgezeit in der Geodäsie zur Landvermessung eingesetzt. Daher ist der zweite Namensgeber des Gauß–Jordan–Verfahrens nicht etwa der Mathematiker Camille Jordan, sondern der Geodät Wilhelm Jordan.

Dieser historische Rückblick ist in sich schon eine faszinierende Geschichte. Zudem sehen wir daran erneut sehr eindrücklich, dass die scheinbar so abstrakten Methoden der Linearen Algebra auf ganz konkrete Fragestellungen und Bedürfnisse antworten.

Daher das eingangs zitierte Motto dieses Kapitels:

*Unsere Allergrößten, wie Archimedes, Newton, Gauß,
haben stets Theorie und Anwendungen gleichmäßig umfasst.*

Felix Klein (1849–1925)

Mathematik ist immer beides: sowohl abstrakte Theorie als auch konkrete Anwendung; sie sind keine Gegensätze, sie ergänzen sich, die eine kann nur mit der anderen dauerhaft erfolgreich sein.

Am besten, Sie erlernen und beherrschen beides!

Für Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit Periode T nutzen wir das **Skalarprodukt**

$$\langle f | g \rangle := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Sei $\omega = 2\pi/T$. Als **Basisfunktion** $e_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$e_k(t) := e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t).$$

Ihre Linearkombinationen sind die **trigonometrischen Polynome**:

$$f(t) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ik\omega t}, \quad g(t) = \sum_{\ell=-n}^n \hat{g}(\ell) e^{i\ell\omega t} \quad \text{mit} \quad \hat{f}(k), \hat{g}(\ell) \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe: Wie bestimmt die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ihr Spektrum $\hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$?
Wir nutzen Orthonormalität: Berechnen Sie hierzu die Skalarprodukte

- (0) $\langle 1 | e_n \rangle$, (1) $\langle e_k | e_\ell \rangle$, (2) $\langle e_k | g \rangle$, (3) $\langle f | g \rangle$, (4) $\langle f | f \rangle$.
 (5) Entwickeln Sie $f(t) = \sin^2 t$ und $g(t) = \cos^3 t$ in Fourier-Polynome.
 (6) Berechnen Sie daraus $\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \sin^4 t dt$ und $\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \cos^6 t dt$.

Lösung: (0) Wir berechnen $\langle 1 | e_n \rangle$. Für $n = 0$ ist es besonders leicht:

$$\langle 1 | e_0 \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T 1 \cdot e^{i0\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T 1 dt = 1.$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$ nutzen wir den HDI und $\omega T = 2\pi$:

$$\langle 1 | e_n \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T 1 \cdot e^{in\omega t} dt \stackrel{\text{HDI}}{=} \frac{1}{T} \left[\frac{1}{in\omega} e^{in\omega t} \right]_{t=0}^T = 0.$$

(1) **Orthonormalität** – Wir berechnen die gesuchten Skalarprodukte:

$$\begin{aligned} \langle e_k | e_\ell \rangle &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{e_k(t)} e_\ell(t) dt \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} e^{i\ell\omega t} dt \\ &\stackrel{\text{Exp}}{=} \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{i(\ell-k)\omega t} dt \stackrel{(0)}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell, \\ 1 & \text{für } k = \ell. \end{cases} \end{aligned}$$

- ☺ Die Basis $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ist orthonormal bezüglich des Skalarprodukts!
Das ist analog zur Geometrie des euklidischen Raumes \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n .
 ☺ Im Komplexen ist alles halb so schwer und doppelt so schön!

(2) **Fourier** – Dank Linearität und Orthonormalität erhalten wir:

$$\langle e_k | g \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \left\langle e_k \left| \sum_{\ell=-n}^n \hat{g}(\ell) e_\ell \right. \right\rangle \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{\ell=-n}^n \hat{g}(\ell) \langle e_k | e_\ell \rangle \stackrel{(1)}{=} \hat{g}(k)$$

☺ Das Skalarprodukt filtert den gewünschten Koeffizienten heraus!

(3) **Parseval** – Dank Bilinearität und Orthonormalität erhalten wir:

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle &\stackrel{\text{Def}}{=} \left\langle \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e_k \left| \sum_{\ell=-n}^n \hat{g}(\ell) e_\ell \right. \right\rangle \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{k=-n}^n \overline{\hat{f}(k)} \left\langle e_k \left| \sum_{\ell=-n}^n \hat{g}(\ell) e_\ell \right. \right\rangle \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{k=-n}^n \sum_{\ell=-n}^n \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(\ell) \langle e_k | e_\ell \rangle \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=-n}^n \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k). \end{aligned}$$

☺ Diese Rechnung gilt allgemein für Orthonormalbasen wie im \mathbb{R}^n .

(4) **Energiegleichung** – Für das Normquadrat gilt Pythagoras (S3A):

$$\langle f | f \rangle \stackrel{(3)}{=} \sum_{k=-n}^n |\hat{f}(k)|^2$$

☺ Das Normquadrat ist die Summe der Koeffizientenquadrate.

(5) Wir entwickeln f und g dank der Euler-Formel $e^{it} = \cos t + i \sin t$:

$$f(t) = \sin(t)^2 = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^2 = -\frac{1}{4} e^{2it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-2it} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t)$$

$$\begin{aligned} g(t) = \cos(t)^3 &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} e^{3it} + \frac{3}{8} e^{it} + \frac{3}{8} e^{-it} + \frac{1}{8} e^{-3it} \\ &= \frac{3}{4} \cos(t) + \frac{1}{4} \cos(3t) \end{aligned}$$

- ☺ Dank Orthonormalität (1) lesen wir die Fourier-Koeffizienten ab (2).
 (6) Wir nutzen die Energiegleichung (4) und Fourier-Koeffizienten (5):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \sin^4 t dt &\stackrel{\text{Def}}{=} \langle f | f \rangle \stackrel{(4)}{=} \sum_{k=-n}^n |\hat{f}(k)|^2 \stackrel{(5)}{=} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \cos^6 t dt &\stackrel{\text{Def}}{=} \langle g | g \rangle \stackrel{(4)}{=} \sum_{k=-n}^n |\hat{g}(k)|^2 \stackrel{(5)}{=} \frac{5}{16} \end{aligned}$$

☺ Die Energiegleichung gilt allgemein für Fourier-Reihen!

Satz S3i: trigonometrische Orthonormalbasis

Die Menge aller Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist ein \mathbb{C} -Vektorraum. Hierin ist die Teilmenge aller T -periodischen Funktionen ein Untervektorraum. Als Basisfunktion $e_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $\omega = 2\pi/T$ definieren wir

$$e_k(t) := e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t).$$

Diese erzeugen den Unterraum $V = \{ \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \mid n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{C} \}$ der trigonometrischen Polynome. Hierauf haben wir das Skalarprodukt

$$V \times V \rightarrow \mathbb{C} : (f, g) \mapsto \langle f | g \rangle := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Damit gelten die Orthonormalitätsrelationen

$$\langle e_k | e_\ell \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell: \text{ paarweise Orthogonalität,} \\ 1 & \text{für } k = \ell: \text{ Normierung auf Länge 1.} \end{cases}$$

Korollar S3j: Fourier-Koeffizienten durch Skalarprodukt

(1) Wir betrachten ein trigonometrisches Polynom:

$$f(t) = \sum_{\ell=-n}^n c_\ell e^{i\ell\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{\ell=1}^n a_\ell \cos(\ell\omega t) + b_\ell \sin(\ell\omega t)$$

Die Funktion f bestimmt die Koeffizienten durch Fourier-Integrale:

$$c_k = \langle e_k | f \rangle = \langle e^{ik\omega t} | f \rangle = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt,$$

bzw.

$$a_k = \langle 2 \cos(k\omega t) | f \rangle = \frac{2}{T} \int_{t=0}^T \cos(k\omega t) f(t) dt,$$

$$b_k = \langle 2 \sin(k\omega t) | f \rangle = \frac{2}{T} \int_{t=0}^T \sin(k\omega t) f(t) dt.$$

☺ Die Formeln für die Koeffizienten c_k sind besonders schön, da die Funktionen $e_k(t) = e^{ik\omega t}$ orthonormal sind. Hingegen sind $\cos(k\omega t)$ und $\sin(k\omega t)$ zwar orthogonal, aber mit L^2 -Norm $\sqrt{2}/2$ statt Normierung 1.

- ☺ Dieselben Gleichungen nutzen wir allgemein für Fourier-Reihen.
- ☺ Das Fourier-Integral filtert den gewünschten Koeffizienten heraus!
- ☺ Das Skalarprodukt beschert uns Struktur, Klarheit und Übersicht.
- ☺ Die Orthonormalität der Basis $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ vereinfacht die Rechnung.

Korollar S3j: Jede Funktion bestimmt ihre Koeffizienten.

(2) Die Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ seien gegeben als Fourier-Polynome

$$f(t) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ik\omega t} \quad \text{und} \quad g(t) = \sum_{k=-n}^n \hat{g}(k) e^{ik\omega t}.$$

(2a) Aus $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ für alle $k = -n, \dots, n$ folgt offensichtlich $f = g$.

(2b) Umgekehrt folgt aus $f = g$ auch $\hat{f} = \hat{g}$, dank der Fourier-Integrale:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} g(t) dt = \hat{g}(k)$$

- ☺ Koeffizientenvergleich! Dazu genügt bereits $f = g$ fast überall.

Korollar S3j: Norm und Skalarprodukt

(3) Koeffizienten $\hat{f}(k), \hat{g}(k) \in \mathbb{C}$ definieren trigonometrische Polynome

$$f(t) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ik\omega t} \quad \text{und} \quad g(t) = \sum_{k=-n}^n \hat{g}(k) e^{ik\omega t}.$$

Für ihre Norm und ihr Skalarprodukt gilt nach Pythagoras (S3A)

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-n}^n |\hat{f}(k)|^2, \quad \text{kurz} \quad \|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2},$$

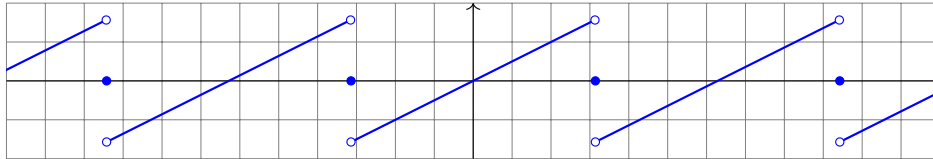
$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt = \sum_{k=-n}^n \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k), \quad \text{kurz} \quad \langle f | g \rangle_{L^2} = \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle_{\ell^2}.$$

☺ Diese Isometrie ist eine zentrale Eigenschaft der Fourier-Theorie. Für trigonometrische Polynome folgt dies direkt aus der Orthonormalität der Basis $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Erfreulicherweise gilt dies nach Vervollständigung ganz allgemein für alle quadrat-integrierbaren Funktionen!

Sei V der \mathbb{C} -Vektorraum aller 2π -periodischen, stückweise stetigen Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit dem (semidefiniten) Skalarprodukt

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ungerade und 2π -periodisch mit $f(x) = x/2$ für $|x| < \pi$. Der erste Teil der Übung ist wie immer, die Funktion zu skizzieren:



Aufgabe: Berechnen Sie die Bestapproximation $f_n \in U_n$ im Unterraum $U_n = \langle e_k \mid -n \leq k \leq n \rangle \leq V$ der Fourier-Polynome vom Grad $\leq n$.

😊 Das scheint zunächst ein verblüffend schwieriges Problem zu sein, doch dank Satz S3F wird alles leicht! Integration aus der Schule genügt.

Lösung: Der Fourier-Koeffizient c_0 ist der Mittelwert über eine Periode:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i0kx} \frac{x}{2} dx = 0 \quad (\text{ungerader Integrand})$$

Für $k \neq 0$ nutzen wir partielle Integration:

$$\begin{aligned} c_k &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} x dx \quad \stackrel{\text{part}}{=} \frac{1}{4\pi} \left(\left[\frac{i}{k} e^{-ikx} x \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i}{k} e^{-ikx} dx \right) \\ &= \frac{i}{4\pi k} \left[e^{-i\pi k} \pi - e^{i\pi k} \pi \right] = (-1)^k \frac{i}{2k} \end{aligned}$$

Damit haben wir zu $f \in V$ die Bestapproximation $f_n \in U_n$ gefunden:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^k i \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k} \\ &= \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \end{aligned}$$

Umrechnung der Koeffizienten für die Sinus-Cosinus-Reihe:

$$a_k = c_k + c_{-k} = 0, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) = (-1)^{k+1} \frac{1}{k}.$$

Zum Vergleich nochmal direkt die Integrale für a_k, b_k mit $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \cos(kx) dx \quad (\text{ungerader Integrand}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[x \frac{\sin(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(kx)}{k} dx \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \sin(kx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[x \frac{-\cos(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kx)}{k} dx \right) = (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Zur Berechnung von a_k, b_k sind zwei reelle Integrale nötig, für c_k nur ein komplexes; die Wahl des Rechenwegs ist meist Geschmackssache. Die Umrechnung zwischen a_k, b_k und c_k gelingt jedenfalls leicht.

😊 Die Fourier-Koeffizienten a_k, b_k, c_k sind hier leicht zu berechnen. Da f reell ist, gilt $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ und $c_{-k} = \overline{c_k}$. Da f ungerade, gilt $a_k = 0$.
😊 Die folgenden Graphiken zeigen hierzu die **Fourier-Polynome** f_n . Wir wollen verstehen, ob und in welchem Sinne f_n gegen f konvergiert.

😊 Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}$ gilt augenscheinlich $f_n(x) \rightarrow f(x)$ für $n \rightarrow \infty$: In den Punkten $x = 0$ und $x = \pi$ ist dies klar, ansonsten keineswegs!

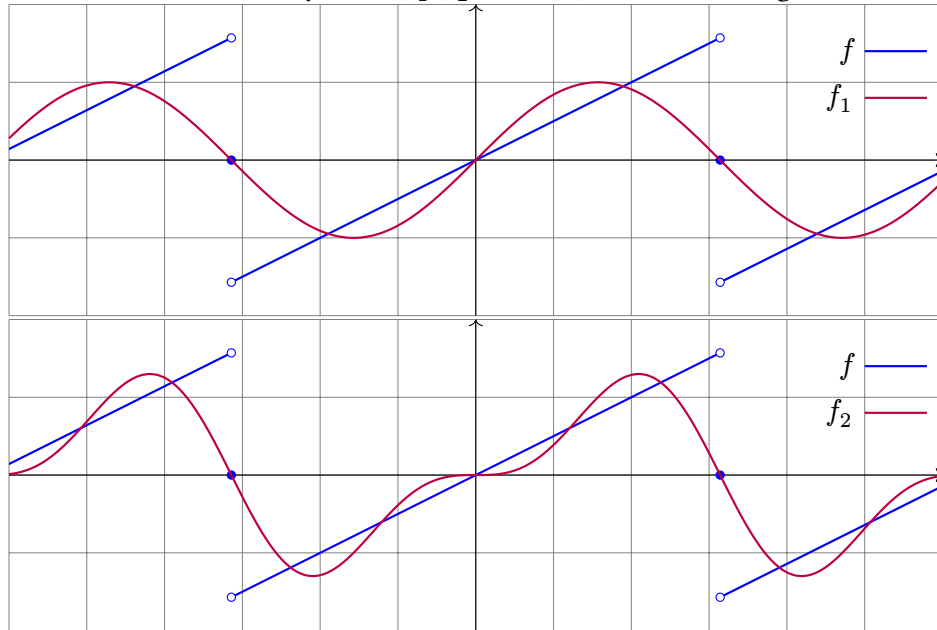
😞 Die Koeffizienten klingen nur langsam ab ($\sim 1/k$), das heißt auch hohe Frequenzen tragen noch deutlich bei: Die Fourier-Reihe ist „rau“.

⚠️ Wir sehen recht eindringlich das sogenannte **Gibbs-Phänomen**: Die Funktionen f_n überschwingen in Sprungstellen um ca. 9%.

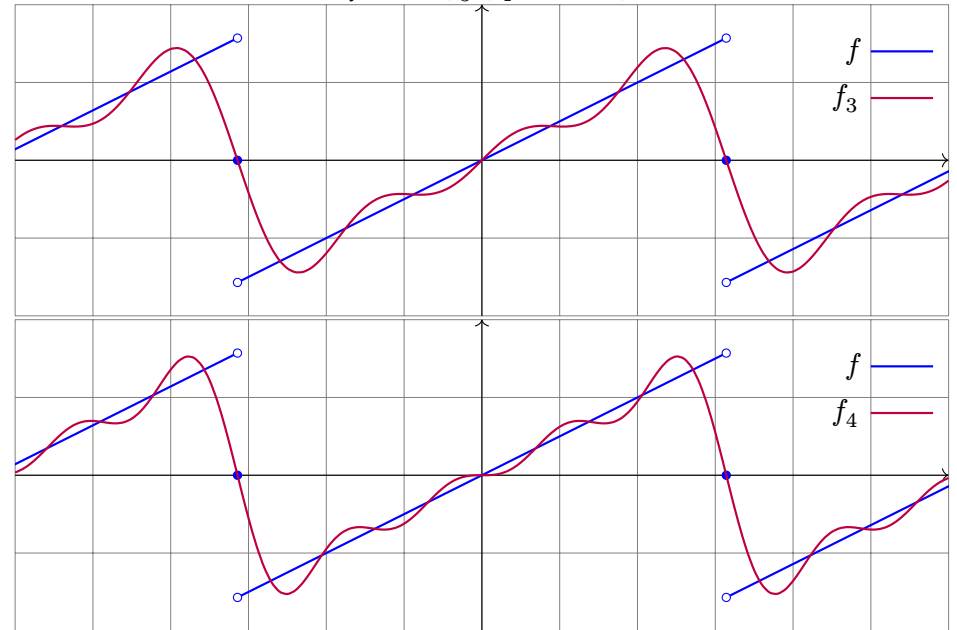
😞 Es gilt daher **keine gleichmäßige Konvergenz** $f_n \rightarrow f$ auf \mathbb{R} : Ein kleiner ε -Schlauch um f enthält nicht alle f_n für $n \geq n_0$.

😊 Auf jedem Intervall $I = [-\pi + \delta, \pi - \delta]$ **abseits der Sprungstellen** konvergiert f_n gleichmäßig gegen f : Zu jedem $\varepsilon > 0$ liegen schließlich alle f_n im ε -Schlauch um f auf I . Auch das ist bemerkenswert!

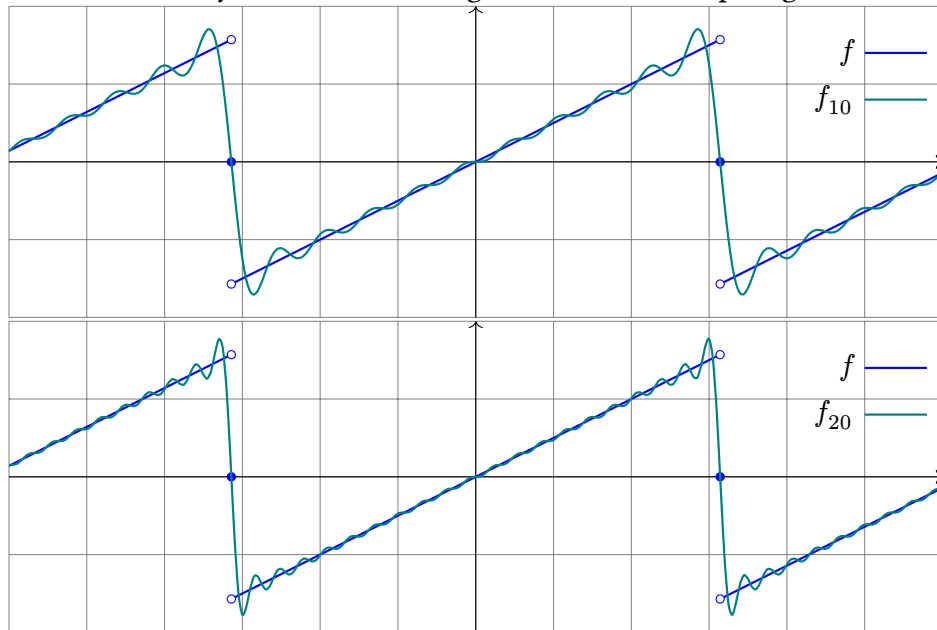
Die ersten Fourier-Polynome f_1, f_2 ähneln f zunächst nur grob:



Die nächsten Fourier-Polynome f_3, f_4 ähneln f schon etwas mehr:



Die Fourier-Polynome überschwingen bis zu 9% der Sprunghöhe:



Wir haben die Sägezahnfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch Fourier-Polynome $f_1, f_2, f_3, \dots : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ angenähert: Dies ist die **L^2 -Bestapproximation!** Die gezeigten Graphiken suggerieren, dass dies erstaunlich gut gelingt. Obwohl f unstetig ist, nähern sich die Funktionen f_n doch recht gut an.

Ich habe dieses Beispiel so weit getrieben, wie es mit den Werkzeugen der Linearen Algebra (und etwas Integration aus der Schule) möglich ist. Die genauere Untersuchung lernen Sie in der Analysis. Als Ausblick will ich die Antworten auf die Konvergenzfrage wenigstens kurz skizzieren.

Es gilt **Konvergenz im quadratischen Mittel**: Für jede 2π -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\|f\| < \infty$ gilt $\|f - f_n\| \searrow 0$, somit $\|f_n\| \nearrow \|f\|$. Bezüglich der L^2 -Norm gilt also: Jede quadrat-integrierbare Funktion f lässt sich beliebig gut durch ihre Fourier-Polynome f_n approximieren.

Die Frage der **punktweisen Konvergenz** $|f(x) - f_n(x)| \rightarrow 0$ oder der **gleichmäßigen Konvergenz** $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \rightarrow 0$ ist kniffliger. Hierzu nenne ich das folgende berühmte Kriterium von Dirichlet, das für viele praktischen Anwendungen genügt.

Satz S3k: Konvergenz bezüglich der L^2 -Norm

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar auf $[0, T]$ und T -periodisch.

Die **Fourier-Analyse** zerlegt das Signal f in sein Spektrum $\hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch die Koeffizienten $\hat{f}(k) := \langle e_k | f \rangle = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T e^{-ik\omega t} f(t) dt$.

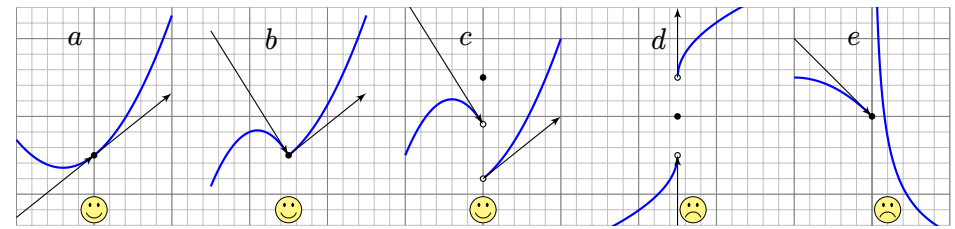
Dabei gilt die **Parseval-Gleichung**, auch **Energiegleichung** genannt:

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2} \quad \text{also} \quad \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$$

Ist f quadrat-integrierbar, also $\|f\| < \infty$, so konvergieren die Fourier-Polynome f_n bezüglich der L^2 -Norm, also $\|f - f_n\| \searrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Beispiel: Die Sägezahnfunktion liefert die bemerkenswerte Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$



Links-/rechtsseitiger Grenzwert und Ableitungen von f im Punkt x :

$$f(x-) := \lim_{\xi \nearrow x} f(\xi), \quad f(x+) := \lim_{\xi \searrow x} f(\xi),$$

$$f'(x-) := \lim_{\xi \nearrow x} \frac{f(\xi) - f(x-)}{\xi - x}, \quad f'(x+) := \lim_{\xi \searrow x} \frac{f(\xi) - f(x+)}{\xi - x}.$$

Die **Dirichlet-Bedingung** fordert, dass alle vier Grenzwerte existieren. Wir nennen f **sprungnormiert**, falls $f(x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$ gilt.

Stetigkeit im Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist äquivalent zu $f(x+) = f(x-) = f(x)$. Im Falle $f(x+) \neq f(x-)$ hat f in x eine **Sprungstelle** (siehe Skizze).

Differenzierbarkeit im Punkt x impliziert Stetigkeit und ist äquivalent zu Dirichlet mit $f(x+) = f(x-) = f(x)$ und $f'(x+) = f'(x-) = f'(x)$.

Satz S3L: Dirichlet-Kriterium für Fourier-Reihen

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar auf $[0, 2\pi]$ und 2π -periodisch.

(1) Angenommen, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ erfüllt die Dirichlet-Bedingung im Punkt x , d.h. beide Grenzwerte $f(x\pm)$ und beide Ableitungen $f'(x\pm)$ existieren. Dann konvergiert in diesem Punkt x die Fourier-Reihe $f_n(x)$ gemäß

$$f_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty.$$

Spezialfälle: (1a) Es gilt $f_n(x) \rightarrow f(x)$ falls f in x sprungnormiert ist, also $f(x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$, oder sogar stetig, also $f(x\pm) = f(x)$.

(1b) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar und überall stetig bzw. sprungnormiert, dann konvergiert $f_n(x) \rightarrow f(x)$ in jeden Punkt $x \in \mathbb{R}$.

(2) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar mit $|f'| \leq L$, so konvergiert die Fourier-Reihe $f_n \rightarrow f$ sogar gleichmäßig auf ganz \mathbb{R} :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2L \cdot \ln(n)/n \quad \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty$$

Beispiel: Unsere Sägezahnfunktion erfüllt die Dirichlet-Bedingung in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ (Übung!) und ist zudem sprungnormiert. Daher gilt in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ die Konvergenz $f_n(x) \rightarrow f(x)$ für $n \rightarrow \infty$.

☺ Damit haben wir die Funktion f in ihre Fourier-Reihe entwickelt! Das ist kein Fourier-Polynom mehr, sondern eine unendliche Reihe:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k i \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k}$$

$$= \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} \mp \dots$$

☺ Daraus können wir für erstaunliche Reihen den Grenzwert ablesen. Die Auswertung im Punkt $x = \pi/2$ bzw. $x = \pi/3$ zum Beispiel ergibt:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots = \frac{\pi}{4} = 0.7853981633 \dots$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \dots = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0.6045997880 \dots$$

Definition S4A: Isometrie sesquilinearer Räume

Ein **isometrischer Homomorphismus** $f: (U, \alpha) \rightarrow (V, \beta)$ sesquilinearer Räume über (\mathbb{K}, σ) ist eine \mathbb{K} -lineare Abbildung, die die Formen erhält:

$$\beta(f(u), f(v)) = \alpha(u, v) \quad \text{für alle } u, v \in U$$

Ist f zudem injektiv, so nennen wir f eine **isometrische Einbettung**.
Ist f sogar bijektiv, so nennen wir f einen **isometrischen Isomorphismus**.

Beispiel: Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $f: \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n: v \mapsto Av$.

Isometrie $u^\dagger A^\dagger A v = u^\dagger v$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^m$ bedeutet $A^\dagger A = 1_{m \times m}$.

Die Spalten von A sind demnach orthonormal (S10), somit insbesondere linear unabhängig (S10), und demnach ist f injektiv.

Aufgabe: Ist α regulär, so ist jede Isometrie $f: (U, \alpha) \rightarrow (V, \beta)$ injektiv.

Beweis: Regulär bedeutet, zu jedem Verdächtigen $v \in U \setminus \{0\}$ existiert ein Zeuge $u \in U$ mit $\alpha(u, v) \neq 0$. Es folgt $\beta(f(u), f(v)) \neq 0$, also $f(v) \neq 0$. (Ist α sogar anisotrop, so genügt $u = v$ als Zeuge, denn $\alpha(v, v) \neq 0$.)

☺ Im Raum (V, β) verbinden sich zwei Strukturen: Der lineare Raum V über dem Grundring (\mathbb{K}, σ) , und die sesquilineare Form $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$. Erst mit der Form β können wir anfangen, Geometrie zu treiben, etwa Orthogonalität $u \perp v$ erklären durch $\beta(u, v)$ und noch viel Schönes mehr. Diese geometrischen Begriffe haben allein im linearen Raum V noch keinen Sinn, erst die Form β erschließt uns die geometrische Welt.

☺ Zu Recht möchten Sie einwenden, dass Sie hier beim besten Willen noch keine Geometrie sehen. Beginnen wir also mit dem vertrauten und konkreten Raum $(\mathbb{R}^n, \langle - | - \rangle)$ und seinen großen Brüdern $(\mathbb{C}^n, \langle - | - \rangle)$ und $(\mathbb{H}^n, \langle - | - \rangle)$. Hier spüren Sie den geometrischen Zugewinn sehr deutlich!

Mutig und selbstbewusst erlauben wir über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$ hinaus einen beliebigen *Ring (\mathbb{K}, σ) , und über das anschaulich vertraute Standardskalarprodukt hinaus ganz allgemein sesquilineare Formen. Dieser Mut wird belohnt. Er fordert sorgsame Grundlagen, präzise Begriffe und wirksame Werkzeuge. Das ist nach anfänglicher Mühe ein Gewinn: Wir verstehen genauer und können allgemeiner anwenden.

Ein Homomorphismus ist eine strukturerhaltende Abbildung.
Hier, für sesquilineare Räume, nennen wir dies kurz **Isometrie**.

Satz S4A: Identität und Komposition und Umkehrung

- (1) Für jeden sesquilinearen Raum (V, β) ist $\text{id}_V: V \rightarrow V$ eine Isometrie.
- (2) Sind $f: (U, \alpha) \rightarrow (V, \beta)$ und $g: (V, \beta) \rightarrow (W, \gamma)$ Isometrien, so auch ihre Komposition $g \circ f: (U, \alpha) \rightarrow (W, \gamma)$.
- (3) Ist $f: (U, \alpha) \rightarrow (V, \beta)$ eine Isometrie und bijektiv, so auch die Umkehrung $g = f^{-1}: (V, \beta) \rightarrow (U, \alpha)$.

Beweis: (1) Wir haben $\text{id}_V \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$ und für alle $u, v \in V$ gilt:

$$\beta(\text{id}_V(u), \text{id}_V(v)) = \beta(u, v)$$

(2) Wir haben $g \circ f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, W)$ und für alle $u, v \in U$ gilt:

$$\gamma((g \circ f)(u), (g \circ f)(v)) = \gamma(g(f(u)), g(f(v))) = \beta(f(u), f(v)) = \alpha(u, v)$$

(3) Wir haben $f^{-1} \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$ und für alle $u, v \in V$ gilt:

$$\alpha(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) = \beta(f(f^{-1}(u)), f(f^{-1}(v))) = \beta(u, v)$$

Das sind die vertrauten Rechenregeln, wie wir sie von Homomorphismen nun schon lange kennen und lieben: Lineare Räume / Vektorräume und lineare Abbildungen, zuvor Ringe / Körper und ihre Homomorphismen, ebenso Monoide / Gruppen und ihre Homomorphismen. Kurzum:

Sesquilineare Räume (V, β) und ihre Isometrien bilden eine Kategorie. Das bedeutet, es gelten die Eigenschaften (1) und (2) des Satzes.

Die Denkweise in strukturerhaltenden Abbildungen ist ein Leitmotiv moderner Mathematik. Selbst wenn man diese nicht in den Mittelpunkt des Interesses rückt, so sind sie doch immer und überall präsent als unsere universellen Werkzeuge und freundlichen Helferlein – überall wo Abbildungen komponiert und invertiert werden.

Diese Rechenregeln sind zugegeben noch nicht besonders tief Sinnig und ihr Beweis ist nahezu mühelose Routine, dennoch es lohnt sich, sie explizit festzuhalten und sich früh bewusst zu machen, allein schon um die nötigen Definitionen zu festigen. Wir werden sie nämlich erstaunlich oft nutzen, dann also besser sicher-bewusst als unsicher-unbewusst.

Seien (U, α) und (V, β) hermitesche Räume über dem \ast Ring (\mathbb{K}, σ) mit ihren quadratischen Formen $p(u) = \alpha(u, u)$ und $q(v) = \beta(v, v)$. Eine **Isometrie** $f : (U, p) \rightarrow (V, q)$ quadratischer Räume ist eine \mathbb{K} -lineare Abbildung $f : U \rightarrow V$ mit $p(u) = q(f(u))$ für alle $u \in U$.

Satz S4B: Die quadratische Form genügt.

Der \ast Ring (\mathbb{K}, σ) sei nullteilerfrei und $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$.

Jede Isometrie $f : (U, p) \rightarrow (V, q)$ quadratischer Räume über (\mathbb{K}, σ) ist eine Isometrie $f : (U, \alpha) \rightarrow (V, \beta)$ der zugehörigen hermiteschen Räume.

Beweis: Wir definieren die SForm $\gamma : U \times U \rightarrow \mathbb{K}$ durch die Differenz $\gamma(u, v) = \alpha(u, v) - \beta(f(u), f(v))$. Da α und β hermitesch über (\mathbb{K}, σ) sind, gilt dies auch für γ . Ihre quadratische Form ist $r(u) = p(u) - q(f(u)) = 0$. Dank Polarisierung S1L folgt $\gamma = 0$, also $\alpha(u, v) = \beta(f(u), f(v))$. QED

Beispiel: Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n : v \mapsto Av$ linear. Ist f normerhaltend, also $\|f(u)\| = \|u\|$ für alle $u \in \mathbb{K}^m$, so ist f formerhaltend $\langle f(u) | f(v) \rangle = \langle u | v \rangle$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^m$, also eine euklidische Isometrie.

Die Polarisierung kennen wir in zwei Härtegraden, siehe S1L: Über (\mathbb{K}, id) haben wir Bilinearformen β . Ihre zugehörigen quadratischen Formen q können wir präzise beschreiben, sowie explizit die jeweilige Bilinearform rekonstruieren (sofern $2 \in \mathbb{K}^\times$ gilt, wir also halbieren können).

Allgemein über (\mathbb{K}, σ) ist die Zuordnung $\beta \mapsto q$ immerhin noch injektiv (sofern $2 \neq 0$ und \mathbb{K} nullteilerfrei ist). Diese allgemeine Rekonstruktion ist nicht explizit, daher weniger befriedigend, aber ebenso nützlich, wie wir hier erneut sehen. Sie erlaubt uns, quadratische Formen über allen Körpern (\mathbb{K}, σ) mit $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ einheitlich zu beantworten.

Die wichtigsten Anwendungen finden wir natürlich über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$. Hier können wir mit etwas Scharfsinn explizit polarisieren, und das ist für die Geometrie überaus hilfreich: Allein aus der Norm $\|-\|$ oder dem Normquadrat $\|-\|^2$ können wir dank Parallelogrammgleichung das Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$ rekonstruieren, siehe Satz S2i. Wenn man es recht bedenkt, ist das schon höchst erstaunlich und soll hier zitierfähig festgehalten und gebührend zelebriert werden.

Korollar S4B: Isometrie bezüglich Skalarprodukt, Norm, Metrik

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $f : V \rightarrow U$ eine lineare Abbildung zwischen unitären Räumen $(V, \langle - | - \rangle_V)$ und $(U, \langle - | - \rangle_U)$. Dann sind äquivalent:

(1) Die lineare Abbildung $f : V \rightarrow U$ erhält alle Skalarprodukte:

$$\langle f(v) | f(v') \rangle_U = \langle v | v' \rangle_V \quad \text{für alle } v, v' \in V$$

(2) Die lineare Abbildung $f : V \rightarrow U$ erhält alle Normen:

$$\|f(v)\|_U = \|v\|_V \quad \text{für alle } v \in V$$

(3) Die lineare Abbildung $f : V \rightarrow U$ erhält alle Abstände:

$$d_U(f(v), f(v')) = d_V(v, v') \quad \text{für alle } v, v' \in V$$

Beweis: Für „(1) \Leftrightarrow (2)“ nutzen wir Polarisierung S2i über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Die anderen Implikationen „(1) \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (3)“ sind trivial. QED

Das Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$ auf V ist das stärkste dieser drei Werkzeuge: Damit messen wir in V insbesondere Winkel, Längen und Abstände.

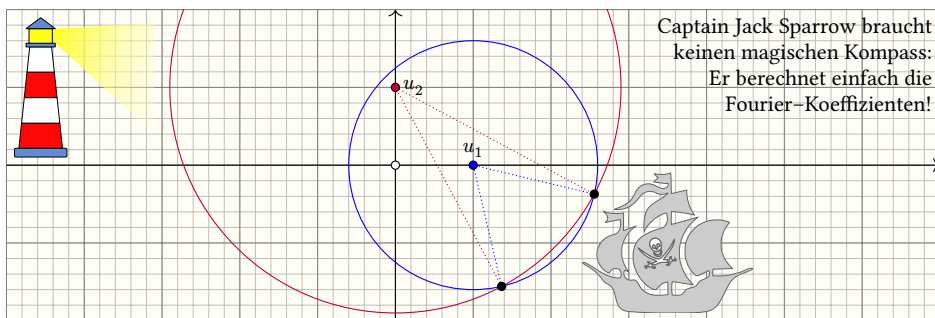
Die Norm $\|-\|$ misst nur noch die Längen von Vektoren, aber keine Winkel mehr. Das ist also deutlich schwächer.

Die Metrik d schließlich misst nur noch Abstände und nutzt die lineare Struktur überhaupt nicht.

Das Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$ auf V induziert die Norm $\|-\|$, und diese induziert die Metrik d . Der Informationsgehalt nimmt dabei scheinbar strikt ab. Klar ist: Jede Abbildung, die alle Abstände erhält, erhält auch alle Längen $\|v\| = d(0, v)$. Bemerkenswert ist hingegen: Jede lineare Abbildung, die die Norm erhält, erhält automatisch immer auch das Skalarprodukt.

Erinnerung: Die eindeutige Rekonstruierbarkeit (2) \Rightarrow (1) gilt über jedem involutiven Ring (\mathbb{K}, σ) , der nullteilerfrei ist und $2 \neq 0$ erfüllt, siehe S1L.

☺ Speziell über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ haben wir die Parallelogrammgleichung und daraus die elegant-explizite Polarisierung S2i.



Wir finden $\|x - u_i\|^2 = \langle x - u_i | x - u_i \rangle = \|x\|^2 - 2\langle u_i | x \rangle + \|u_i\|^2$,
 umgestellt also $\langle u_i | x \rangle = [d(0, u_i)^2 + d(0, x)^2 - d(u_i, x)^2]/2$.

Satz S4c: Positionsbestimmung aka *global positioning system / GPS*

(0) Wir betrachten \mathbb{R}^n mit Orthonormalbasis (u_1, \dots, u_n) . Jeder Punkt $x = \sum_{i=1}^n u_i \lambda_i$ ist bestimmt durch seine Abstände zu $0, u_1, \dots, u_n$ dank

$$\lambda_i = \langle u_i | x \rangle = (1 + d(0, x)^2 - d(u_i, x)^2)/2.$$

Zahlenbeispiel: Finden Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}^3$ mit folgenden Abständen:

$$d(x, 0) = \sqrt{35}, \quad d(x, e_1) = \sqrt{30}, \quad d(x, e_2) = \sqrt{38}, \quad d(x, e_3) = \sqrt{26}.$$

Lösung: Dank unserer Vorbereitung lesen wir die Koordinaten ab:

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 + 35 - 30)/2 = 3 \\ x_2 &= (1 + 35 - 38)/2 = -1 \\ x_3 &= (1 + 35 - 26)/2 = 5 \end{aligned}$$

Eindeutigkeit: Dank S4c ist dies die einzig mögliche Lösung.

Existenz: Der Punkt $x = (3, -1, 5)$ erfüllt die geforderten Abstände.

Machen Sie flink die Probe, indem Sie die vier Abstände ausrechnen!

Übung: Klar ist, dass die *drei* Koordinaten in \mathbb{R}^3 die *vier* Abständen in $\mathbb{R}_{\geq 0}^4$ definieren. Aber warum gelingt dies *eindeutig* auch umgekehrt? Sind je $n + 1$ Abstände in $\mathbb{R}_{\geq 0}^{n+1}$ durch einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ realisierbar? Diskutieren Sie für $n = 1, 2, 3$ möglichst einfache Gegenbeispiele!

☹ Im Allgemeinen sind die Referenzpunkte keine Orthonormalbasis. Zum Glück kennen wir die Berechnung der Fourier-Koeffizienten S1o.

Aufgabe: Formulieren und beweisen Sie dies für jede affin reguläre Basis!

Satz S4c: Positionsbestimmung aka Fourier-Koeffizienten

(1) Sei (V, β) ein symmetrischer Raum über dem CRing \mathbb{K} mit $2 \in \mathbb{K}^\times$.

Gegeben seien Punkte $u_0, u_1, \dots, u_n \in V$ als \mathbb{K} -affine Basis, das heißt, $(u_1 - u_0, \dots, u_n - u_0)$ ist eine \mathbb{K} -lineare Basis von V . Zudem sei ihre Gram-Matrix $B = \beta(u_i - u_0, u_j - u_0)_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar.

Jeder Punkt $x = u_0 + \sum_{i=1}^n (u_i - u_0) \lambda_i$ in V ist eindeutig bestimmt durch seine „Abstände“ $q(x - u_i)$ zu den Referenzpunkten u_0, u_1, \dots, u_n .

Beweis: Wir dürfen $u_0 = 0$ annehmen, notfalls verschieben wir um u_0 .

Wir finden $q(x - u_i) = \beta(x - u_i, x - u_i) = q(x) - 2\beta(x, u_i) + q(u_i)$.

Damit erhalten wir $\mu_i := \beta(u_i, x) = (q(u_i) + q(x) - q(x - u_i))/2$.

Dank S1o gilt $\mu = B\lambda$, wir erhalten so $\lambda = B^{-1}\mu \in \mathbb{K}^n$.

QED

☺ Das ist die bewährte Polarisierung, dank *zweiter* binomischer Formel. Eine allgemeine Konfiguration verlangt Inversion der Gram-Matrix B . Im Spezialfall einer Orthonormalbasis, mit $B = 1$, entfällt dieser Schritt, und die Positionsbestimmung (0) wird rechnerisch verblüffend einfach.

☺ Die obige Graphik zeigt: Nur n Referenzpunkte genügen noch *nicht*, um durch Abstandsmessung im \mathbb{R}^n die Position eindeutig festzulegen. Mit $n + 1$ affin unabhängigen Referenzpunkten gelingt es jedoch! Das ist die Grundlage der GPS-Navigation, siehe Seite S413.

☺ In der Ebene \mathbb{R}^2 schneiden wir Kreise, im Raum \mathbb{R}^3 Sphären, etc. Auf den ersten Blick müssen wir also fürchten, quadratische Ausdrücke auflösen zu müssen (oder gar noch Schlimmeres). Die genial-einfache Polarisierung reduziert dies jedoch effizient auf lineare Gleichungen.

☺ Wir erkennen hierin ein erfreuliches Leitmotiv der Linearen Algebra: Quadratische und bilineare Formen lagern noch so nahe zur Linearität, dass wir die bewährten lineare Methoden auch hier einsetzen können. Das ist wunderschön und nützlich, sehr geschickt und effizient!

Einsteins Relativität wird verehrt als Inbegriff einer genialen Theorie, sie genießt Kultstatus in der Popkultur. Wie jede mathematische Theorie gilt sie vielen jedoch als nutzlos-abstrakt und fern alltäglichen Lebens. Das Gegenteil ist der Fall: Wir alle nutzen die Relativitätstheorie täglich! Sie ist nicht nur Grundlage der modernen Astronomie, von schwarzen Löchern bis Gravitationswellen, sondern mitten im Alltag angekommen, insbesondere in den Milliardenprojekten rund um Satellitennavigation.

Flugzeuge, Schiffe, Autos, Mobiltelefone nutzen Satellitennavigation, genauer das **Global Navigation Satellite System** (GNSS) und speziell das US-amerikanische **NAVSTAR Global Positioning System** (GPS). Relativität ist dabei nicht bloß eine unwichtige Spitzfindigkeit, sondern ihr genaues Verständnis und ihre praktische Anwendung sind essentiell.

Die GPS-Konfiguration besteht aus (mindestens) 24 Satelliten, sodass von jedem Punkt der Erde zu jeder Zeit mindestens vier sichtbar sind. Jeder Satellit S_i sendet ständig seine aktuelle Position und Systemzeit. Aus der Signallaufzeit berechnet der Empfänger die Entfernung r_i zu S_i .

Die Entfernung r_1 zu einem ersten Satelliten S_1 genügt noch nicht: Der Empfänger findet sich irgendwo auf der Sphäre um S_1 mit Radius r_1 . Die Entfernung r_2 zu einem zweiten Satelliten S_2 schränkt weiter ein: Schnittmenge zweier Sphären (in allgemeiner Lage) ist eine Kreislinie. Die Entfernung r_3 zu einem dritten Satelliten S_3 lässt als Schnittmenge nur noch zwei Punkte. Eine der beiden Lösungen liegt weit über der Erde, somit ist die andere als richtige erkennbar. Diese quadratischen Gleichungen werden in kartesischen Koordinaten gelöst und geozentrisch in Kugelkoordinaten umgerechnet zu geographischer Länge φ , Breite ϑ , Höhe $h = r - r_E$.

Wir benötigen Präzision! Jeder Satellit trägt eine Atomuhr mit einer wöchentlichen Genauigkeit von $\theta \approx 1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$. Im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ entspricht das der räumlichen Entfernung $c\theta = 30 \text{ cm}$. Handelsübliche mobile GPS-Empfänger haben jedoch keine langzeitstabile Atomuhr, sondern nur eine lokale Messgenauigkeit um 10 ns, also etwa 3 m. Hinzu kommen zufällige Störungen und Messfehler. Die erreichte Genauigkeit ist bemerkenswert und liegt bei etwa 10 m! Im Auto genügt dies gerade noch für Position und Geschwindigkeit.

Räumlich genügen die Abstände zu drei Satelliten. GPS-Empfänger führen keine ausreichend genaue absolute Uhrzeit, um die Laufzeiten präzise genug zu messen. Deshalb wird zusätzlich das Signal eines vierten Satelliten genutzt, und so die obige Rechnung statt im euklidischen \mathbb{R}^3 in der vierdimensionalen Minkowski-Raumzeit \mathbb{R}^{3+1} durchgeführt. Das Prinzip ist dasselbe.

☐ Siehe G. Strang, K. Borre: *Linear Algebra, Geodesy, and GPS* (1997) sowie für technische Spezifikationen www.navcen.uscg.gov/sites/default/files/pdf/gps/sigspec/gpspsp1.pdf. Damit können Sie die konkreten Daten einsetzen und selbstständig alle Rechnungen prüfen. Die Mühe lohnt sich, denn GPS ist ein mathematisch-physikalisch-technisches Meisterwerk.

Um die nötige extreme Präzision zu gewährleisten, müssen vermeidbare Fehler als solche erkannt und möglichst behoben werden. Dazu zählen insbesondere relativistische Effekte, diese sind hier deutlich spürbar! Ein Objekt mit Geschwindigkeit v im Erdgravitationsfeld GM/r hat eine Eigenzeit $\Delta\tau$ im Vergleich zur Referenzzeit Δt weit außerhalb der Erde:

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} \approx 1 - \left(\frac{v^2}{2c^2} + \frac{GM}{rc^2} \right)$$

Im Vergleich zwischen Satellit S und Empfänger E erhalten wir somit:

$$\frac{\Delta\tau_S}{\Delta\tau_E} \approx 1 - \left(\frac{v_S^2}{2c^2} + \frac{GM}{r_S c^2} \right) + \left(\frac{v_E^2}{2c^2} + \frac{GM}{r_E c^2} \right)$$

Für GPS-Satelliten gilt $r_S \approx 26580 \text{ km}$ und $v_S \approx 3872 \text{ m/s}$. Am Äquator haben wir $r_E \approx 6380 \text{ km}$ und $v_E \approx 464 \text{ m/s}$. Die Korrekturen sind also:

$$\text{SRT: } \frac{v_E^2}{2c^2} - \frac{v_S^2}{2c^2} \approx -8.3 \cdot 10^{-11} \approx -7.2 \mu\text{s/day}$$

$$\text{GRT: } \frac{GM}{r_E c^2} - \frac{GM}{r_S c^2} \approx 5.31 \cdot 10^{-10} \approx 45.9 \mu\text{s/day}$$

Aufgrund spezieller Relativität (SRT) gehen Satellitenuhren um 7200 ns pro Tag nach, aufgrund allgemeiner Relativität (GRT) um 45900 ns vor, in der Summe also 38600 ns vor. Wir benötigen aber eine Genauigkeit im Bereich von wenigen Nanosekunden! Dazu wird ein genial-einfacher Trick angewendet: Die Satellitenuhren werden nicht auf ihre nominelle Frequenz 10.23 Mhz geeicht, sondern auf 10.229999995453 Mhz. Das erledigt die relativistisch nötige Korrektur! Von der Erde aus gesehen ticken die Satelliten mit der gewünschten Frequenz von 10.23 Mhz.

Die Physik arbeitet seit über hundert Jahren mit Einsteins spezieller Relativitätstheorie (1905) und seiner allgemeinen Relativitätstheorie (1915). Beide sind in vielen Situationen mit großer Genauigkeit experimentell überprüft worden, zum Beispiel durch astronomische Beobachtungen, beim Müon-Zerfall in der Erdatmosphäre, in Teilchenbeschleunigern, und vielen mehr. Die sehr genauen Zeitmessungen des GPSsystems sind eine weitere beeindruckende Illustration. Hier wirkt die Theorie auch umgekehrt auf ingenieurtechnische Fragen der Konstruktion: Um die nötige Zeitgenauigkeit zu garantieren, wurden die Satelliten sorgfältig relativistisch korrekt konstruiert. Damit ist Einsteins Relativitätstheorie innerhalb eines Jahrhunderts alltagsrelevant geworden.

Fake science? In Diskussionsforen tobt die Debatte, ob die relativistischen Korrekturen für das Funktionieren des GPSsystems *absolut notwendig* sind, oder ob es auch *irgendwie anders* ginge: Speziell für die Positionsbestimmung könnte der Empfänger die Absolutezeit überflüssig machen, indem er nur Laufzeitdifferenzen misst und verrechnet. Das ist eine alternative Herangehensweise, zur (polemischen?) Ausführung siehe www.alternativephysics.org/book/GPSmythology.htm. Klar ist und bleibt dabei: Die Zeitdilatation ist real, sie wird im GPSsystem tatsächlich gemessen, und ihre Korrektur ist zur *globalen* Kalibrierung der GPSsystemzeit notwendig. *Science works!*

Definition S4D: isometrische Abbildung

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$. Eine **isometrische Abbildung**

(1) ... $f : (V, \langle - | - \rangle_V) \rightarrow (U, \langle - | - \rangle_U)$ zwischen unitären Räumen ist eine \mathbb{K} -lineare Abbildung $f : V \rightarrow U$, die alle Skalarprodukte erhält.

(2) ... $f : (V, \|-\|_V) \rightarrow (U, \|-\|_U)$ zwischen normierten Räumen ist eine \mathbb{K} -lineare Abbildung $f : V \rightarrow U$, die alle Normen erhält.

(3) ... $f : (V, d_V) \rightarrow (U, d_U)$ zwischen metrischen Räumen ist eine (beliebige) Abbildung $f : V \rightarrow U$, die alle Abstände erhält.

Ein **Isometriepaar** $(f, g) : (V, \langle - | - \rangle_V) \cong (U, \langle - | - \rangle_U)$ besteht aus isometrischen \mathbb{K} -Homomorphismen $f : V \rightarrow U$ und $g : U \rightarrow V$ mit $g \circ f = \text{id}_V$ und $f \circ g = \text{id}_U$, ebenso für Normen und Metriken.

Für metrische Räume (3) sind V und U beliebige Mengen, und $f : V \rightarrow U$ eine beliebige Abbildung, die lediglich die Abstände erhalten muss. Der folgende Satz rekonstruiert Linearität über \mathbb{R} falls möglich.

Wenn wir von „Geometrie“ sprechen oder „metrische Eigenschaften“ nutzen, so gibt es hierzu mindestens drei Geschmacksrichtungen: Skalarprodukt, Norm, Metrik (von stark zu schwach, von speziell zu allgemein). Für jede Sichtweise gibt es den passenden Isometriebegriff. Das sind die Homomorphismen in der jeweils betrachteten Kategorie.

Übung: In allen drei Fällen gelten die vertrauten Rechenregeln aus dem obigen Satz S4A, wir erhalten also jeweils eine Kategorie:

- 1 Unitäre Räume $(V, \langle - | - \rangle_V)$ und ihre Isometrien
- 2 Normierte Räume $(V, \|-\|)$ und ihre Isometrien
- 3 Metrische Räume (V, d) und ihre Isometrien

😊 Das ist ein weiterer Vorteil der kategoriellen Denkweise: Sie ermutigt, ja zwingt uns dazu, die betrachteten Strukturen explizit zu benennen. Insbesondere hier, wo mehrere Interpretationen nebeneinander möglich und sinnvoll sind, führt uns dies geradwegs zu präziser Sprache und klarer Unterscheidung „in welcher Kategorie“ wir gerade arbeiten.

Eine **affine Abbildung** $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist von der Form $f(x) = Ax + b$ mit linearem Anteil $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und Verschiebungsvektor $b \in \mathbb{R}^n$.

Satz S4E: Rigidität euklidischer Isometrien

Wir betrachten (\mathbb{R}^m, d) und (\mathbb{R}^n, d) mit ihrer euklidischen Metrik.

(1) Eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax + b$ ist isometrisch gdw die Matrix A orthonormale Spalten hat, also $A^T A = 1_{m \times m}$ erfüllt.

(2) Jede isometrische Abbildung $f : (\mathbb{R}^m, d) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d)$ ist affin-linear wie in (1) angegeben, also von der Form $f(x) = Ax + b$ mit $A^T A = 1_{m \times m}$. Die affine Linearität von f wird hier nicht gefordert, sondern gefolgt!

Bewegung starrer Körper: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^m$ eine beliebige Teilmenge, darin gebe es $x_0, x_1, \dots, x_m \in X$ affin unabhängig, das heißt $x_1 - x_0, \dots, x_m - x_0$ linear unabhängig über \mathbb{R} . Das gilt zum Beispiel falls $\{0, e_1, \dots, e_m\} \subseteq X$.

(3) Dann lässt sich jede isometrische Abbildung $g : (X, d) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d)$ eindeutig fortsetzen zu einer Isometrie $f : (\mathbb{R}^m, d) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d)$ wie in (2).

Sie kennen lineare Abbildungen $g : U \rightarrow V$ zwischen linearen Räumen. Affine Abbildungen $f : U \rightarrow V$ sind von der Form $f(u) \mapsto g(u) + v_0$, wir erweitern unsere Möglichkeiten um den Verschiebungsvektor $v_0 \in V$. Jede lineare Abbildung g erfüllt zwangsweise $g(0) = 0$, wie sie wissen. Nach Verschiebung erreichen wir nun flexibler $f(0) = g(0) + v_0 = v_0$.

Für viele praktische Anwendungen sind affin-lineare Abbildungen der passende Begriff. Wenn wir zum Beispiel die Bewegung eines Körpers im \mathbb{R}^3 beschreiben wollen, etwa ein Fahrzeug, so benötigen wir dazu die Position / Verschiebung und zudem die Orientierung / Drehung im Raum. Genau das leistet eine affine Isometrie wie in (1) erklärt.

Überaus bemerkenswert ist hier die obige Umkehrung (2): Allein aus (rein metrischer) Isometrie folgt die Linearität! Das beweisen wir dank obiger Positionsbestimmung S4c. Es entspricht unserer Erfahrung mit starren Körpern.

Beispiele: Als vertraute Isometrien des \mathbb{R}^n kennen wir Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen, und somit auch alle Kompositionen davon. Auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ erhält die Konjugation $\text{conj}_{\mathbb{C}}$ als Spiegelung an der reellen Achse zwar alle Abstände, ist aber nicht \mathbb{C} -linear, sondern nur \mathbb{R} -linear.

Aufgabe: Aussage (1) haben wir bereits in Korollar S4B bewiesen. Führen Sie das Argument aus, nun zusätzlich mit Verschiebung.

Beweis: (1) Für alle $x \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\begin{aligned} d(0, x)^2 &= |x|^2 = x^T 1_{m \times m} x, \\ d(f(0), f(x))^2 &= |Ax|^2 = x^T A^T A x. \end{aligned}$$

Gleichheit für alle x ist äquivalent zu $A^T A = 1_{m \times m}$. **Nachrechnen:** Die Implikation „ \Leftarrow “ ist klar. Wir zeigen „ \Rightarrow “: Wir vergleichen die quadratischen Formen $p(x) = x^T 1_{m \times m} x$ und $q(x) = x^T A^T A x$ auf \mathbb{R}^m . Beide sind gleich, dank Polarisierung sind auch ihre Bilinearformen gleich, somit auch die darstellenden Matrizen: $1_{m \times m} = A^T A$.

(2) Ist $f : (\mathbb{R}^m, d) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d)$ eine Isometrie, so auch $g : (\mathbb{R}^m, d) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d)$ verschoben zu $g(x) = f(x) - b$. Wir setzen $b = f(0)$ und erhalten $g(0) = 0$.

(2a) Sei u_1, \dots, u_m in \mathbb{R}^m eine Orthonormalbasis, etwa die kanonische. Die Abstände zwischen $0, u_1, \dots, u_m$ sind $d(0, u_i)^2 = |u_i|^2 = \langle u_i | u_i \rangle = 1$, $d(u_i, u_j)^2 = |u_i - u_j|^2 = \langle u_i - u_j | u_i - u_j \rangle = |u_i|^2 - 2\langle u_i | u_j \rangle + |u_j|^2 = 2$. Dasselbe gilt für ihre Bilder $v_1 = g(u_1), \dots, v_m = g(u_m)$ in \mathbb{R}^n , also sind auch diese orthonormal. Wir ergänzen zu einer ONB $v_1, \dots, v_m, \dots, v_n$.

(2a) Für $x \in \mathbb{R}^m$ gilt $x = \sum_{i=1}^m u_i x_i$ mit $x_i = (1 + d(x, 0)^2 - d(x, u_i)^2)/2$. Für $y = g(x)$ gilt ebenso $y = \sum_{i=1}^n v_i y_i$ mit $y_i = (1 + d(y, 0)^2 - d(y, v_i)^2)/2$. Da g alle Abstände erhält, wissen wir dank Positionsbestimmung S4c:

$$x_i = \frac{1 + d(x, 0)^2 - d(x, u_i)^2}{2} = \frac{1 + d(g(x), g(0))^2 - d(g(x), g(u_i))^2}{2} = y_i$$

Es gilt $\sum_{i=1}^m x_i^2 = d(x, 0)^2 = d(y, 0)^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$, also $y_i = 0$ für $i > m$. Wir schließen daraus $g(u_1 x_1 + \dots + u_m x_m) = v_1 x_1 + \dots + v_m x_m$. Das zeigt die Behauptung: g ist linear, somit f affin-linear. QED

Alternativer Beweis: (2) Ist $f : (\mathbb{R}^m, d) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d)$ eine Isometrie, so auch $g : (\mathbb{R}^m, d) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d)$ mit $g(x) = f(x) - f(0)$. Zudem gilt nun $g(0) = 0$.

(2a) Die Standardbasis e_1, \dots, e_m des Raum $(\mathbb{R}^m, \langle - | - \rangle)$ ist orthonormal. Die Abstände zwischen $0, e_1, \dots, e_m$ sind $d(e_i, 0)^2 = |e_i|^2 = \langle e_i | e_i \rangle = 1$, $d(e_i, e_j)^2 = |e_i - e_j|^2 = \langle e_i - e_j | e_i - e_j \rangle = |e_i|^2 - 2\langle e_i | e_j \rangle + |e_j|^2 = 2$. Dasselbe gilt für ihre Bilder $v_1 = g(e_1), \dots, v_m = g(e_m)$ in \mathbb{R}^n , also sind auch diese orthonormal. Wir ergänzen zu einer ONB $v_1, \dots, v_m, \dots, v_n$.

(2b) Dies beschert uns eine Drehmatrix $T = (v_1, \dots, v_n) \in \text{GO}_n(\mathbb{R})$. Somit ist auch die Komposition $h = T^{-1} \circ g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, nun mit $h(e_i) = e_i$ für alle $i = 1, \dots, m$. Dank Positionsbestimmung S4c folgt $h(x) = (x, 0)$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$. Wir schließen daraus zurück auf $g(x) = Ax$ mit $A = (v_1, \dots, v_m)$ und $f(x) = Ax + b$ mit $b = f(0)$. QED

😊 Dieses raffinierte Argument ist besonders elegant und effizient: Im zweiten Teil nutzen wir die Gruppeneigenschaft von $\text{SO}_n(\mathbb{R})$. Das hilft spürbar: Mehr Struktur heißt weniger Mühsal.

Wer schon mal Möbel geschleppt oder andere starre Körper bewegt hat, kennt die Rigidität: Die Referenzpunkte $0, e_1, e_2, e_3$ werden starr bewegt, alle anderen Punkte folgen ebenso starr dank Positionsbestimmung S4c.

Der Rigiditätssatz ist einerseits anschaulich physikalisch plausibel, bei genauer Betrachtung jedoch mathematisch höchst erstaunlich. Wie gewinnen wir aus wenig Struktur (hier die Abstände der Metrik) gratis viel Struktur (hier zusätzlich die erhoffte affine Linearität)?

Die erste Schwierigkeit dabei ist, die Aussage zu formulieren, die zweite dann, einen tragfähigen Beweis auszuarbeiten. Beides gelingt Ihnen nun dank wirksamer Werkzeuge.

Kontrast: Ist jede metrische Isometrie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ automatisch \mathbb{C} -linear? Nein! Auf \mathbb{C} erhält die Konjugation $\text{conj}_{\mathbb{C}}$ als Spiegelung an der reellen Achse zwar alle Abstände, ist aber nicht \mathbb{C} -linear, sondern nur \mathbb{R} -linear. Linearität ist also keineswegs automatisch. Für \mathbb{C}^1 über \mathbb{C} genügt hierzu nicht allein die Abstandstreue, wir benötigen auch Orientierungstreue.

Übung: Formulieren und beweisen Sie die Rigidität für \mathbb{C}^n über \mathbb{C} !

Definition S4F: die unitäre Gruppe

Sei (V, β) ein hermitescher Raum über (\mathbb{K}, σ) , etwa $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.
Ein \mathbb{K} -linearer Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ heißt **Automorphismus**, wenn er invertierbar ist. Diese bilden die **allgemeine lineare Gruppe**

$$\text{GL}(V) = \text{Aut}_{\mathbb{K}}(V) := \{f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \mid f \text{ ist invertierbar}\}.$$

Ist der Automorphismus f zudem isometrisch, so nennen wir f **unitär**, das bedeutet ausgeschrieben $\beta(f(u), f(v)) = \beta(u, v)$ für alle $u, v \in V$.
Diese bilden die **Isometriegruppe** oder (allgemeine) **unitäre Gruppe**

$$\text{GU}(V, \beta) = \text{Aut}_{\mathbb{K}}(V, \beta) = \{f \in \text{Aut}_{\mathbb{K}}(V) \mid f \text{ ist isometrisch}\}.$$

Ist $\dim_{\mathbb{K}}(V)$ endlich und \mathbb{K} kommutativ, so haben wir die Determinante $\det: \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \rightarrow \mathbb{K}$ (O2G). Dies definiert die **spezielle unitäre Gruppe**

$$\text{SU}(V, \beta) = \text{SAut}_{\mathbb{K}}(V, \beta) = \{f \in \text{GU}(V, \beta) \mid \det f = 1\}.$$

Aufgabe: Damit ist $\text{GU} = \text{GU}_{\mathbb{K}}(V, \beta) \leq (\text{Aut}_{\mathbb{K}}(V), \circ, \text{id}_V)$ eine UGruppe.
Wiederholung: Was genau ist hierzu noch zu zeigen? Zeigen Sie es!

Beweis: (1) Es gilt $\text{id}_V \in \text{GU}$, denn

$$\beta(\text{id}_V(u), \text{id}_V(v)) = \beta(u, v).$$

(2) Für $f, g \in \text{GU}$ gilt $f \circ g \in \text{GU}$, denn

$$\beta((g \circ f)(u), (g \circ f)(v)) = \beta(g(f(u)), g(f(v))) = \beta(f(u), f(v)) = \beta(u, v).$$

(3) Für $f \in \text{GU}$ gilt $f^{-1} \in \text{GU}$, denn

$$\beta(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) = \beta(f(f^{-1}(u)), f(f^{-1}(v))) = \beta(u, v).$$

☺ Das ist eine Spezialisierung des Satzes S4A zu Identität und Komposition und Inversion. Dasselbe gilt somit in jeder Kategorie.

Übung: Ebenso ist $\text{SU} = \text{SU}_{\mathbb{K}}(V, \beta) \trianglelefteq (\text{GU}(V, \beta), \circ, \text{id}_V)$ eine UGruppe, sogar eine normale Untergruppe als Kern des Homomorphismus \det .

Als unser Leitbeispiel betrachten wir:

$$(V, \beta) = \langle B \rangle$$

Über (\mathbb{K}, σ) sei also $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine hermitesche Matrix. Auf $V = \mathbb{K}^n$ definiert dies die hermitesche Form $\beta: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}: (u, v) \mapsto u^\dagger B v$

Aufgabe: Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Wann ist $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n: v \mapsto Av$ isometrisch?

Lösung: Isometrie heißt, für alle Vektoren $u, v \in \mathbb{K}^n$ gilt:

$$u^\dagger B v = \beta(u, v) = \beta(Au, Av) = (Au)^\dagger B (Av) = u^\dagger A^\dagger B Av$$

Daraus folgt $B = A^\dagger B A$, indem wir $u = e_i$ und $v = e_j$ betrachten für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Für die unitäre Gruppe bedeutet das zusammengefasst:

$$\text{GU}(V, \beta) = \{A \in \text{GL}_n \mathbb{K} \mid A^\dagger B A = B\}$$

Triviales Beispiel: Für $B = 0_{n \times n}$ gilt $\beta = 0$ und $\text{GU}(\mathbb{K}^n, 0) = \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

Allgemein haben wir:

$$(V, \beta) \cong \langle B \rangle$$

Sei (V, β) ein hermitescher Raum über (\mathbb{K}, σ) . Darin sei (b_1, \dots, b_n) eine Basis und $B = \beta(b_i, b_j)_{ij} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die zugehörige Gram-Matrix.

Jeden Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ stellen wir dar durch seine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $x = \sum_i b_i u_i \mapsto f(x) = \sum_i b_i u'_i$ wobei $u' = Au$. Ebenso $y = \sum_i b_i v_i \mapsto f(y) = \sum_i b_i v'_i$ mit $v' = Av$. Isometrie bedeutet nun:

$$u^\dagger B v = \beta(x, y) = \beta(f(x), f(y)) = (Au)^\dagger B (Av) = u^\dagger A^\dagger B Av$$

Daraus folgt $B = A^\dagger B A$, indem wir $u = e_i$ und $v = e_j$ betrachten für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Somit ist die lineare Abbildung f eine Isometrie genau dann, wenn die darstellende Matrix A die Gleichung $A^\dagger B A = B$ erfüllt:

$$\text{GU}(V, \beta) \cong \{A \in \text{GL}_n \mathbb{K} \mid A^\dagger B A = B\}$$

Definition S4c: unitäre Matrix, orthogonale Matrix

Sei (\mathbb{K}, σ) ein *Körper, *DRing oder *CRing, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\text{conj}_{\mathbb{K}}$. Die kanonische Sesquilinearform auf \mathbb{K}^n über (\mathbb{K}, σ) ist $\beta : (u, v) \mapsto u^\dagger v$. Hier haben unitäre Automorphismen eine besonders einfache Form:

(1) Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ über (\mathbb{K}, σ) heißt **unitär**, falls gilt:

$$A^\dagger A = I$$

Es folgt $AA^\dagger = I$, also $A \in \text{GL}_n \mathbb{K}$ mit $A^{-1} = A^\dagger$. Beispiel: $(\mathbb{C}, \text{conj}_{\mathbb{C}})$.

(2) Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ über $(\mathbb{K}, \text{id}_{\mathbb{K}})$ heißt **orthogonal**, falls gilt:

$$A^T A = I$$

Es folgt $AA^T = I$, also $A \in \text{GL}_n \mathbb{K}$ mit $A^{-1} = A^T$. Beispiel: $(\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}})$.

☺ Sind die Spalten orthonormal, so auch die Zeilen, und umgekehrt!

Bezüglich der Standardform β bedeutet $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ isometrisch: $u^\dagger v = \beta(u, v) = \beta(Au, Av) = (Au)^\dagger (Av) = uA^\dagger Av$, also $A^\dagger A = I$.

☺ Sind die Spalten orthonormal, so auch die Zeilen, und umgekehrt!

Wiederholung: Wie folgt aus $A^\dagger A = I$ die Gleichung $AA^\dagger = I$?

Warum genügt hierzu, dass \mathbb{K} ein Körper ist? ein DRing? ein CRing?

Hier zählt sich erneut Ihre solide Vorbereitung der Grundlagen aus!

Lösung: (1) Über jedem Divisionsring \mathbb{K} haben wir dank D2o starke und effiziente Invertierbarkeitskriterien für quadratische Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$: Jede Linksinverse zu A ist eine Rechtsinverse zu A und umgekehrt.

☺ Hier ist A^\dagger zu A linksinvers, $A^\dagger A = I$, also auch rechtsinvers, $AA^\dagger = I$.

(2) Über jedem kommutativen Ring \mathbb{K} haben wir die Determinante O2G, die Adjunkte und die Inversionsformel O2R. Damit folgt insbesondere: Genau dann ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar, wenn $\det A \in \mathbb{K}$ invertierbar ist.

☺ Aus $A^\dagger A = I$ folgt $\det(A)^\sigma \det(A) = 1$, also $\det(A) \in \mathbb{K}^\times$, demnach $A \in \text{GL}_n$, somit $A^{-1} = A^\dagger$ dank Eindeutigkeit der Inversen (J1k).

Definition S4c: die klassischen Matrixgruppen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

In jeder Dimension $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ haben wir den Matrixring $\mathbb{K}^{n \times n}$ und hierin

$$\text{GL}_n \mathbb{K} = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}, \quad \text{SL}_n \mathbb{K} = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \det A = 1\}$$

Die Matrizen, die das Skalarprodukt erhalten, bilden Untergruppen:

$$\text{GU}_n \mathbb{K} = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid A^\dagger A = I\}, \quad \text{SU}_n \mathbb{K} = \{A \in \text{GU}_n \mathbb{K} \mid \det A = 1\}$$

Dies sind die **klassischen Matrixgruppen**. Traditionelle Bezeichnung:

$$\text{GO}_n \mathbb{R} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = I\}, \quad \text{SO}_n \mathbb{R} = \{A \in \text{GO}_n \mathbb{R} \mid \det A = 1\},$$

$$\text{GU}_n \mathbb{C} = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A^\dagger A = I\}, \quad \text{SU}_n \mathbb{C} = \{A \in \text{GU}_n \mathbb{C} \mid \det A = 1\},$$

$$\text{Sp}_n \mathbb{H} = \{A \in \mathbb{H}^{n \times n} \mid A^\dagger A = I\}. \quad (\text{keine Determinante über } \mathbb{H})$$

$\text{GO}_n \mathbb{R}$ bzw. $\text{SO}_n \mathbb{R}$ ist die **allgemeine / spezielle orthogonale Gruppe**, $\text{GU}_n \mathbb{C}$ bzw. $\text{SU}_n \mathbb{C}$ die **allgemeine / spezielle unitäre Gruppe** über \mathbb{C} und schließlich $\text{Sp}_n \mathbb{H}$ die **symplektische Gruppe** über \mathbb{H} .

Ich plädiere dafür, „unitär“ inklusiv zu gebrauchen für alle drei Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, und „orthogonal“ zur Betonung des Spezialfalls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Eigentlich sollte eine Matrix $A \in \text{GO}_n \mathbb{R}$ nicht „orthogonal“ heißen, sondern „orthonormal“, das wäre logisch, ist aber leider nicht üblich.

Auch für Matrizen $A \in \text{GU}_n \mathbb{C}$ über \mathbb{C} sind die Spalten orthonormal, solche komplexen Matrizen heißen jedoch traditionell unitär. Nun gut.

Im reellen Falle $A \in \text{GO}_n \mathbb{R}$ gilt $\det A \in \{\pm 1\}$, denn

$$1 = \det(1_{n \times n}) = \det(A^T A) = \det(A)^2.$$

Wir haben die Zerlegung $\text{GO}_n = \text{GO}_n^+ \sqcup \text{GO}_n^-$, wobei $\text{GO}_n^+ = \text{SO}_n$: mit $\det A = +1$ orientierungserhaltend, umkehrend mit $\det A = -1$.

Im komplexen Falle $A \in \text{GU}_n \mathbb{C}$ gilt entsprechend $\det A \in \mathbb{S}^1$, denn

$$1 = \det(1_{n \times n}) = \det(A^\dagger A) = |\det(A)|^2.$$

Da \mathbb{H} nicht kommutativ ist, haben wir hier keine Determinante.

Satz S4H: kleine orthogonale und unitäre Gruppen

Für $n = 1$ haben wir $GL_1 \mathbb{K} = \mathbb{K}^\times$ sowie hierin jeweils

$$GO_1 \mathbb{R} = \{a \in \mathbb{R} \mid a^2 = 1\} = \{\pm 1\} = \mathbb{S}^0,$$

$$GU_1 \mathbb{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1\} = \mathbb{S}^1.$$

Trivial sind hierin $\{1\} = SL_1 \mathbb{R} = SO_1 \mathbb{R} = SL_1 \mathbb{C} = SU_1 \mathbb{C}$. Für $n = 2$ gilt

$$GO_2 \mathbb{R} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b\lambda \\ b & a\lambda \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{R}, \lambda = \pm 1, \\ a^2 + b^2 = 1 \end{array} \right\} \text{ allgemein und speziell}$$

$$SO_2 \mathbb{R} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{R}, \\ a^2 + b^2 = 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{S}^1,$$

$$GU_2 \mathbb{C} = \left\{ \begin{bmatrix} z & -\bar{w}\lambda \\ w & \bar{z}\lambda \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} z, w, \lambda \in \mathbb{C}, \\ |z|^2 + |w|^2 = 1 = |\lambda| \end{array} \right\} \text{ allgemein und speziell}$$

$$SU_2 \mathbb{C} = \left\{ \begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + ib & -c + id \\ c + id & a - ib \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} a, b, c, d \in \mathbb{R}, \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \end{array} \right\} \cong \mathbb{S}^3.$$

Aufgabe: Beweisen Sie die behaupteten Mengengleichheiten!

Beweis: Die Aussagen für $n = 1$ sind klar nach Definition. Sei also $n = 2$. Wir können die beiden Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ gleich gemeinsam behandeln:

„ \supseteq “: Jede Matrix $A = \begin{bmatrix} z & -\bar{w}\lambda \\ w & \bar{z}\lambda \end{bmatrix}$ mit $z, w \in \mathbb{K}$ hat orthonormale Spalten, also $A \in GU_2 \mathbb{K}$. Allgemein gilt $\det A = \lambda$, speziell für $\lambda = 1$ also $A \in SU_2 \mathbb{K}$.

„ \subseteq “: Für $A \in GU_2 \mathbb{K}$ gilt $A = \begin{bmatrix} z & -\bar{w}\lambda \\ w & \bar{z}\lambda \end{bmatrix}$: Die erste Spalte definiert $z, w \in \mathbb{K}$. Da sie normiert ist, gilt $|z|^2 + |w|^2 = 1$. Die zweite Spalte ist senkrecht zur ersten, also ein Vielfaches von $\begin{bmatrix} -\bar{w} \\ \bar{z} \end{bmatrix}$. Da auch sie normiert ist, gilt $|\lambda| = 1$. Allgemein gilt $\det A = \lambda$, speziell für $A \in SU_2 \mathbb{K}$ also $\lambda = 1$. QED

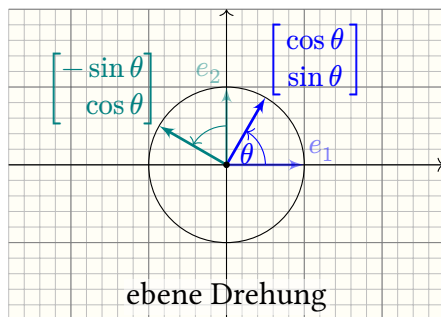
😊 Dank Satz E3B gilt $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}_{\geq 0} SO_2 \mathbb{R}$, somit $\mathbb{S}^1 = GU_1 \mathbb{C} \cong SO_2 \mathbb{R}$.

😊 Dank Satz E3E gilt $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}_{> 0} SU_2 \mathbb{C}$, somit $\mathbb{S}^3 = GU_1 \mathbb{H} \cong SU_2 \mathbb{C}$.

Bemerkenswert: Die drei Sphären $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3$ sind demnach Gruppen, sogar *topologische Gruppen*, denn Multiplikation und Inversion sind hier stetig.

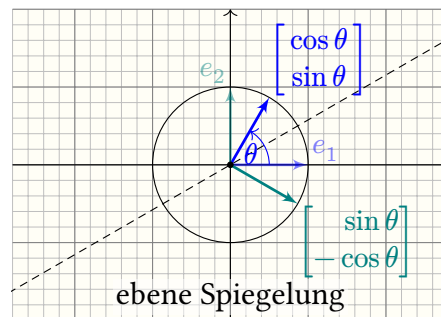
Überraschend: Unter allen Sphären \mathbb{S}^n beliebiger Dimension $n \in \mathbb{N}$ sind diese drei die einzigen mit einer topologischen Gruppenstruktur!

Wir haben die Zerlegung $GO_2 = GO_2^+ \sqcup GO_2^-$, speziell $GO_2^+ = SO_2$: Jede Matrix $A \in GO_2$ mit $\det A = +1$ ist orientierungserhaltend, mit $\det A = -1$ entsprechend orientierungsumkehrend, siehe O3E. In der Ebene erkennen wir darin Drehungen und Spiegelungen! Wir fertigen hilfreiche Skizzen an und lesen die Koordinaten ab:



ebene Drehung

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \in SO_2 \mathbb{R}$$



ebene Spiegelung

$$S_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \in GO_2^- \mathbb{R}$$

Definition S4i: Drehung aka Rotation

(0) Jedes Element $A \in SO_n(\mathbb{R})$ und $A \in SU_n(\mathbb{C})$ nennen wir **Drehung**. Darunter interessieren uns besonders die einfachen Drehungen:

(1) Jeder Winkel $\theta \in \mathbb{R}$ definiert die zugehörige **ebene Drehung**:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$$

(2) Je zwei orthonormale Vektoren u, v in $(\mathbb{R}^n, \langle - | - \rangle)$ und ein Drehwinkel $\theta \in \mathbb{R}$ definieren die **einfache Drehung** $R_\theta^{u,v} \in SO_n(\mathbb{R})$ mit der Matrix

$$M_{\mathcal{B}} R_\theta^{u,v} = \begin{bmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Hierzu sei $\mathcal{B} = (u, v, \dots)$ eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n : Auf $\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$ ist $R_\theta^{u,v}$ die ebene Drehung R_θ , und auf $W = \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}}^\perp$ die Identität.

(4) Ebenso in jedem unitären Vektorraum $(V, \langle - | - \rangle)$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Orthogonale Matrizen $GO_n(\mathbb{K})$ können wir über jedem Ring \mathbb{K} erklären. Ist \mathbb{K} kommutativ, so haben wir die Determinante und damit $SO_n(\mathbb{K})$. Dies gelingt insbesondere über dem Ring \mathbb{Z} und über dem Körper \mathbb{Q} , und ist ein steter Quell der Freude und algebraischer Schönheit.

Über \mathbb{R} profitieren wir zudem von starken analytischen Werkzeugen: Vollständigkeit, Zwischenwertsatz, spezielle reelle Funktionen, uvm. Insbesondere haben wir die trigonometrischen Funktionen \sin, \cos und können damit die Kreislinie $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ parametrisieren.

Analytische Geometrie können wir über jedem Körper betreiben, etwa über \mathbb{Q} oder je nach vorliegende Anwendung auch gerne über \mathbb{F}_q . Allerdings fehlen uns schmerzhaft Winkel und Längen und ähnliches. Erst die Werkzeuge von \mathbb{R} machen daraus ein äußerst lukratives Geschäft.

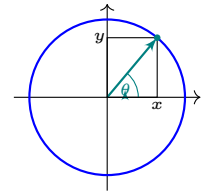
Über \mathbb{Z} und über \mathbb{Q} , ohne die analytischen Werkzeuge von \mathbb{R} , stehen die arithmetischen Eigenschaften der Gruppen $GL_n \mathbb{Z}, SL_n \mathbb{Z}, \dots$ und $GL_n \mathbb{Q}, SL_n \mathbb{Q}, \dots$ im Vordergrund. Auch das ist eine interessante Sichtweise!

In der Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ definieren wir die **Einheitskreislinie**:

$$\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Diese können wir trigonometrisch *parametrisieren*:

$$\mathbb{S}^1 = \{(\cos \theta, \sin \theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\} \quad (\subseteq, \supseteq)$$



☺ Die Definition grenzt ein und entscheidet per Punktprobe.

Die Parametrisierung hingegen füllt aus und liefert Probepunkte.

Diese Parametrisierung ist nicht eindeutig, sondern 2π -periodisch.

Wir erhalten eine Bijektion durch Einschränkung auf $\theta \in [0, 2\pi[$:

$$\mathbb{S}^1 = \{(\cos \theta, \sin \theta) \mid \theta \in [0, 2\pi[\}^1$$

Oft ist die eindeutige Darstellung gewünscht: Wenn wir die betrachtete Abbildung umkehren wollen, hier etwa für eindeutige Polarkoordinaten, dann benötigen wir gerade die Bijektivität! Diese betone ich durch „!“, das ist kurz und prägnant, eine ebenso dezente wie effiziente Erinnerung.

Dieselbe Dualität zwischen Definieren / Eingrenzen und Parametrisieren / Ausfüllen finden wir hier erneut für die klassischen Gruppen:

$$\begin{aligned} SO_2 \mathbb{R} &:= \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A^T A = 1_{2 \times 2}\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{S}^1 := GU_1 \mathbb{C}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SU_2 \mathbb{C} &:= \{A \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid A^\dagger A = 1_{2 \times 2}\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C}, |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\} \cong \mathbb{S}^3 := GU_1 \mathbb{H}. \end{aligned}$$

Wir wollen allgemein Drehungen $SO_n \mathbb{R}$ und $SU_n \mathbb{C}$ verstehen. Dazu ist es hilfreich, mit $n = 1$ und $n = 2$ anzufangen. Wir zeigen anschließend, wie diese kleinen ebenen Drehungen bereits alle Drehungen erzeugen.

Aufgabe: Erklären Sie die **einfachen Drehungen** eines unitären Vektorraums $(V, \langle - | - \rangle)$ über \mathbb{C} nach dem Vorbild S41 über \mathbb{R} .

Lösung: (1) Je zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z|^2 + |w|^2 = 1$ beschreiben eindeutig die zugehörige ebene Drehung über \mathbb{C} :

$$R_{z,w} = \begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix} \in SU_2 \mathbb{C}$$

(2) Zusammen mit je zwei orthonormalen Vektoren u, v in $(V, \langle - | - \rangle)$ definiert dies die **einfache Drehung** $R_{z,w}^{u,v} \in SU(V)$ mit der Matrix

$$M_{\mathcal{B}} R_{z,w}^{u,v} = \begin{bmatrix} z & -\bar{w} & 0 \\ w & \bar{z} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Hierzu sei $\mathcal{B} = (u, v, \dots)$ eine Orthonormalbasis von V : Auf $\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}^2$ ist $R_{z,w}^{u,v}$ obige ebene Drehung, und auf $W = \langle u, v \rangle_{\mathbb{C}}^\perp$ die Identität.

🤔 Können wir jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in die positive x -Achse $e_1 \mathbb{R}_{>0}$ drehen? Ja! Das gelingt elegant-explicit durch seine **Givens-Rotation**

$$G_v := \frac{1}{\|v\|} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ -v_2 & v_1 \end{bmatrix} \in \text{SO}_2(\mathbb{R}), \quad \text{denn} \quad G_v \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|v\| \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- 😊 Wir können die Drehmatrix direkt hinschreiben, auch ohne Winkel.
- 😊 Ebenso: Jeder Vektor $v \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ definiert seine **Givens-Rotation**

$$G_v := \frac{1}{\|v\|} \begin{bmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} \\ -v_2 & v_1 \end{bmatrix} \in \text{SU}_2(\mathbb{C}), \quad \text{denn} \quad G_v \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|v\| \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Übung: Prüfen Sie $G_v \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$ oder gleich $G_v \in \text{SU}_2(\mathbb{C})$ direkt nach! Für $v \in e_1 \mathbb{R}_{>0}$ gilt $G_v = 1$. Speziell für $v = 0$ setzen wir $G_0 := 1$.

Lemma S4j: Givens-Rotation von v zu $u_1 \mathbb{R}_{\geq 0}$ in der Ebene $\langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{K}}$
 Seien u_1, u_2 orthonormal in $(V, \langle - | - \rangle)$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Zu jedem Vektor $v \in \langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{K}}$ existiert eine Rotation $G_v \in \text{GU}(V)$ mit $G_v(v) \in u_1 \mathbb{R}_{\geq 0}$ als einfache Drehung in der Ebene $\langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{K}}$ und Identität auf $\langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{K}}^\perp$.

Verlauf des Gauß-Givens-Algorithmus: Hier steht „ \oplus “ für einen Eintrag aus $\mathbb{R}_{\geq 0}$. In unserem Beispiel sind die Spalten zudem linear unabhängig.

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} * & * & * \\ \oplus & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & \oplus \end{bmatrix} = R$$

Algo S4k: Gauß-Givens-Algorithmus zur QR-Zerlegung

Eingabe: eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$
Ausgabe: (Q, R) mit $A = QR$ und $Q \in \text{GU}_m(\mathbb{K})$ und $R \in \mathbb{K}^{m \times n}$ in PZSF

- 1: Lösche jede Spalte von unten nach oben mit Rotationen $R_\theta^{e_i, e_{i+1}}$
- 2: Für ein Pivot a in der letzten Zeile skaliere mit $\bar{a}/|a| \in \mathbb{S}^1$.
- 3: So bringen wir $Q^\dagger A = R$ in PZSF. **return**(Q, R)

⚠ Die Korrektur (2) ist notwendig, um auch den letzten Diagonaleintrag zu positivieren. Als Preis dafür geht Q von $\text{SU}_n(\mathbb{K})$ nach $\text{GU}_n(\mathbb{K})$ über.

Satz S4L: Euler-Winkel

Jede Drehung $A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ ist Produkt von drei Koordinatendrehungen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

mit geeigneten Winkeln $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wir nutzen obigen Gauß-Givens-Algorithmus zu $A = QR$.

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma} \begin{bmatrix} * & * & * \\ \oplus & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{\beta} \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha} \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & \oplus \end{bmatrix} = R \stackrel{!}{=} I$$

Dank $\det(A) = 1$ ist der letzte Pivoteintrag positiv. Somit hat $Q \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ die obige Produktform. Dank $A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ gilt auch $R = Q^\top A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$. Orthonormalität der Spalten erzwingt dann $R = I$, also $A = Q$. QED

Wir wollen beliebige Drehungen $A \in \text{SU}_n(\mathbb{K})$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ verstehen. Ist jede Drehung des Raumes \mathbb{K}^n einfach? Für \mathbb{R}^2 ist dies klar. Für \mathbb{R}^3 ist es wahr, aber nicht offensichtlich, siehe S4M. Für \mathbb{R}^4 ist es definitiv falsch!

😊 Gauß-Givens zeigt, wie wir A durch einfache Drehungen erzeugen:

Satz S4L: Einfache Drehungen erzeugen die Gruppe $\text{SU}_n(\mathbb{K})$.

- (1) Jede Matrix $A \in \text{SU}_n \mathbb{K}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ kann erzeugt werden durch Koordinatendrehungen $R_\theta^{e_{i-1}, e_i}$, davon genügen $\leq n(n-1)/2 = \binom{n}{2}$.
- (2) Es genügen bereits $\leq n-1$ einfache Drehungen $R_\theta^{u,v}$, indem wir im obigen Gauß-Algorithmus die i -te Spalte v_i direkt auf e_i drehen.

😊 Analogie: Jede Permutation $\pi \in S_n$ wird erzeugt von Transpositionen.

- (1) Dies gelingt uns bereits mit den elementaren Transpositionen $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n) \in S_n$, davon genügen $\leq n(n-1)/2$. (O1D)
- (2) Mit beliebigen Transpositionen $(i, j) \in S_n$ genügen $\leq n-1$. (O1F)
 Das ist verblüffend, doch Daten und Algorithmen ähneln sich.

Aufgabe: Jede Drehung $A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ des Raumes \mathbb{R}^3 lässt sich durch zwei einfache Drehungen erzeugen. Erklären Sie dies formal und anschaulich!

Formal: Wir können bei Gauß–Givens S4k wie oben kleinschrittig vorgehen und jeweils benachbarte Zeilenpaare bearbeiten; das benötigt $\binom{3}{2} = 3$ Koordinatendrehungen. Noch effizienter können wir jede Spalte durch eine einzige Drehung aufräumen. So genügen zwei Drehungen:

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{\theta} \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha} \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & \oplus \end{bmatrix} = R \stackrel{!}{=} I$$

Anschaulich? Wir drehen um die x -Achse mit Winkel α . Dann drehen wir um die x -Achse auf jede gewünschte Achse $u \in \mathbb{R}^3$, im Winkel θ dazu. Es scheint durchaus plausibel, dass wir damit jede Drehung erreichen. Experimentieren und fuchteln Sie lange genug mit Ihrer Hand herum... so richtig überzeugend wird es nicht. Die Rechnung ist leichter und klarer!

☹ Das bringt uns zu der spannenden Frage, ob wir jede Drehung $A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ als eine einfache Drehung darstellen können? Genauer:

In \mathbb{R}^3 wählen wir eine positive Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (u, v, w)$, somit die positiv orthonormale Matrix $T = (u, v, w) \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$, und zudem einen Drehwinkel $\theta \in \mathbb{R}$. Die Daten (u, v, w, θ) definieren die einfache Drehung

$$R_\theta^{v,w} := T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} T^{-1}.$$

In Worten: Unsere Drehung $R_\theta^{v,w}$ fixiert die Achse $\langle u \rangle_{\mathbb{R}}$ und dreht die dazu orthogonale Ebene $\langle u \rangle_{\mathbb{R}}^\perp = \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}}$ um den gewünschten Winkel θ .

Fraglich ist: Lässt sich jede Drehung $A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ so darstellen? Intuitiv rufen manche gleich „Ja, klar!“, andere ebenso überzeugt „Nein, eine einfache Drehung genügt offensichtlich nicht immer!“ Klärung schafft der folgende bemerkenswerte Satz vom Fußball.

☹ Zu Beginn des Spiels liegt der Fußball exakt auf dem Mittelpunkt. Dann wird er 45 Minuten lang getreten, verschoben, gedreht. Anfangs der zweiten Halbzeit liegt er wieder exakt auf dem Mittelpunkt. Gibt es einen Punkt auf der Oberfläche des Balls, der sich wieder genau an derselben Stelle des umgebenden Raumes befindet? Ja, immer mindestens zwei!

Satz S4m: der Satz vom Fußball

(1) Jede Matrix $A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ hat den Eigenwert 1, also eine Fixgerade $u \in \mathbb{R}^3 \subseteq \text{fix}(A)$ mit $u \in \mathbb{S}^2$ und $Au = u$.

Beweis: Wir haben $\chi_A = (X - \lambda)(X - \mu)(X - \nu)$ mit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$: Aus $Av = v\lambda$ mit $v \neq 0$ folgt $0 < \langle v | v \rangle = \langle Av | Av \rangle = \langle v\lambda | v\lambda \rangle = |\lambda|^2 \langle v | v \rangle$.

Zudem gilt $1 = \det A = \lambda\mu\nu$. Echt komplex haben wir $\nu = \bar{\mu}$, also $1 = \lambda$. Rein reell gilt $\lambda, \mu, \nu \in \{\pm 1\}$, also können nicht alle gleich -1 sein. QED

⚠ Für A in $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ oder $\text{SO}_4(\mathbb{R})$ gilt dies nicht. In gerader Dimension ist das einfachste Gegenbeispiel die Punktspiegelung $A = \text{diag}(-1, \dots, -1)$.

Satz S4m: der Satz vom Fußball

(2) Zu jeder orthogonalen Matrix $A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ existiert ein orthogonaler Basiswechsel $T \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ und ein Drehwinkel $\theta \in [0, \pi]$ so, dass gilt:

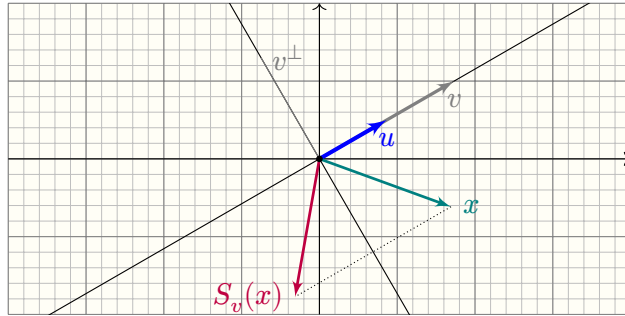
$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Beweis: Dank (1) finden wir $u \in \text{Eig}(A, 1)$ normiert, damit eine positive Orthonormalbasis (u, v, w) dank Gram–Schmidt S3c oder via $w = u \times v$ dank Satz S4r. So erhalten wir $T := (u, v, w) \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ und

$$\text{SO}_3(\mathbb{R}) \ni T^{-1}AT \stackrel{(1)}{=} \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \stackrel{(3)}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

mit $\theta \in [-\pi, \pi]$. Im Falle $\theta < 0$ wählen wir $T = (-u, -v, w)$ und $-\theta$. QED

In der Ebene \mathbb{R}^2 ist anschaulich, was Spiegelungen sein sollen (E209):



Jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ definiert die hierzu orthogonale Hyperebene v^\perp . An dieser spiegeln wir: Alle orthogonalen Vektoren $x \in v^\perp$ bleiben fix. Jeder parallele Vektor $x = v\lambda$ hingegen wird auf $-x$ gespiegelt.

Über \mathbb{C} haben wir hier noch einen weiteren Freiheitsgrad $\mu \in \mathbb{S}^1$ und spiegeln damit $u = v/\|v\|$ zu $u\mu$. Für $\mu = -1$ ist dies die reelle Spiegelung. Für $\mu = +1$ ist dies die Identität. Allgemein verschiebt μ nur die Phase.

Definition S4N: die Spiegelung S_v

Sei $(V, \langle - | - \rangle)$ ein unitärer Raum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, etwa $V = \mathbb{K}^n$. Jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$, normiert zu $u = v/\|v\|$, definiert die Spiegelung

$$S_v : V \rightarrow V : x \mapsto x - 2 \cdot u \langle u | x \rangle = x - 2 / \langle v | v \rangle \cdot v \langle v | x \rangle$$

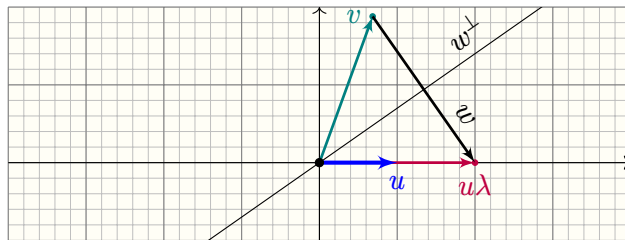
Sie ist unitär mit $S_v^2 = \text{id}_V$. In jeder ONB $\mathcal{B} = (u, \dots)$ gilt $M_{\mathcal{B}} S_v = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$. Kanonisch für $V = \mathbb{K}^n$ mit Standard-ONB $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ erhalten wir:

$$M_{\mathcal{E}} S_v = 1_{n \times n} - 2 \cdot u u^\dagger = 1_{n \times n} - 2 / (v^\dagger v) \cdot v v^\dagger$$

Beweis: Linearität über \mathbb{K} ist klar, als Komposition linearer Abbildungen. Für $x \perp u$ gilt $S_v(x) = x$. Für $x = u\lambda$ gilt $S_v(x) = x - 2 \cdot u\lambda = -x$. QED

Über \mathbb{C} nutzen wir für $v \in V \setminus \{0\}$ und $\mu \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$ die **komplexe Spiegelung** $S_{v,\mu} : x \mapsto x - v(1 - \mu)\langle v | x \rangle / \langle v | v \rangle$, also $M_{\mathcal{B}} S_{v,\mu} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ und explizit als Spiegelungsmatrix $M_{\mathcal{E}} S_{v,\mu} = 1_{n \times n} - v(1 - \mu)v^\dagger / (v^\dagger v)$.

🤔 Wie spiegeln wir $v \in \mathbb{R}^2 \setminus e_1\mathbb{R}_{>0}$ in die positive x -Achse $e_1\mathbb{R}_{>0}$?



Lemma S4o: Householder-Spiegelung

Sei $(V, \langle - | - \rangle)$ euklidisch über \mathbb{R} . Sei $u \in V$ normiert und $v \in V \setminus u\mathbb{R}_{\geq 0}$. Für den Vektor $w = u\lambda - v$ mit $\lambda = \|v\|$ gilt dann $S_w(v) \in u\mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe: Anschaulich ist es plausibel dank Skizze. Rechnen Sie es nach!

Beweis: Wir zerlegen $v = p + q$ und $u\lambda = p - q$ in $p = (u\lambda + v)/2$ und $q = (v - u\lambda)/2$. Es gilt $p \perp w$, denn $\langle u\lambda + v | u\lambda - v \rangle = \|u\|^2\lambda^2 - \|v\|^2 = 0$. Damit folgt $S_w(v) = S_w(p + q) = p - q = u\lambda$. QED

😊 Diese erfreulich einfache Formel gilt speziell über \mathbb{R} . Gleiches ist auch über \mathbb{C} möglich, doch dazu benötigen wir eine komplexe Spiegelung $S_{w,\mu}$ und müssen dabei den Phasenfaktor $\mu \in \mathbb{S}^1$ richtig einstellen.

Über \mathbb{C} genügt $w = u\lambda + v\mu$ mit $\mu \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$, sodass $\langle u | v \rangle \mu \in \mathbb{R}$ gilt.

Das lässt eine oder zwei Wahlen; numerisch vorteilhaft ist $\|w\|$ maximal.

Beweis: Wir zerlegen unseren Start $v = p + q$ und das Ziel $u\lambda = p + q\mu$ in $p = (u\lambda - v\mu)/(1 - \mu)$ und $q = (v - u\lambda)/(1 - \mu)$. Wir erhalten $p \perp w$, denn $\langle u\lambda - v\mu | u\lambda + v\mu \rangle = \|u\|^2\lambda^2 - \|v\|^2|\mu|^2 + \lambda\langle u | v \rangle\mu - \bar{\mu}\langle v | u \rangle\lambda = 0$. Damit folgt $S_{w,\mu}(v) = S_{w,\mu}(p + q) = p + q\mu = u\lambda$. 😊 Mathemagisch!

😊 Householder-Spiegelungen sind nicht nur geometrisch erfreulich, sondern werden auch gerne in der Numerik genutzt zur Berechnung der QR-Zerlegung. Die Grundidee ist verblüffend einfach, daher formuliere ich sie hier als eine weitere schöne Variante des Gauß-Verfahrens. Freuen Sie sich auf Fortsetzung und Anwendung in der Numerik!

Verlauf des Gauß-Householder-Algorithmus: Hier steht „ \oplus “ für einen Eintrag aus $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Im Beispiel sind die Spalten zudem linear unabhängig.

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \oplus & * & * \\ 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & \oplus \end{bmatrix} = R \stackrel{?}{\underset{GO}{=}} I$$

Algo S4p: Gauß-Housholder-Algorithmus zur QR-Zerlegung

Eingabe: eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Ausgabe: (Q, R) mit $A = QR$ und $Q \in \text{GU}_m(\mathbb{K})$ und $R \in \mathbb{K}^{m \times n}$ in PZSF

- 1: Liegt die erste Spalte noch nicht in $e_1 \mathbb{R}_{\geq 0}$, so spiegele sie dorthin.
- 2: Verfahre rekursiv ebenso mit der verbleibenden Untermatrix.
- 3: So bringen wir $Q^\dagger A = R$ in PZSF. **return**(Q, R)

Auch hier gibt es zwei Varianten: Wir können wie bei Gauß-Givens S4k kleinschrittig vorgehen und jeweils benachbarte Zeilenpaare bearbeiten, oder effizienter jede Spalte durch eine einzige Spiegelung aufräumen.

☺ Die reellen Spiegelungen sind uns vertraut und recht anschaulich, die komplexen ergeben sich aus den Anforderungen des Gauß-Algorithmus. Sie sind Helferinnen in der Numerik und Stars in der Gruppentheorie.

Wir können jede Spiegelung dank S4N explizit als Matrix darstellen, reell mit $\mu = -1$, komplex etwas flexibler mit $\mu \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$:

$$H_{v,\mu} = 1_{n \times n} - v v^\dagger \cdot (1 - \mu) / (v^\dagger v) \in \text{GU}_n \mathbb{K}$$

Naiv kann man die $n - 1$ verwendeten Spiegelungen so ausmultiplizieren zu $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$. Es ist jedoch meist effizienter, direkt die geometrischen Daten v, μ zu speichern. Die Berechnung $x \mapsto Qx$ gelingt damit ebenso leicht, da wir sukzessive nur $n - 1$ Spiegelungen anwenden gemäß

$$S_{v,\mu} : V \rightarrow V : x \mapsto x - v(1 - \mu) \langle v | x \rangle / \langle v | v \rangle.$$

☺ Wir sehen hier, dass die geometrische Anschauung sich wunderbar übersetzt in algebraische Formeln und weiter in effiziente Algorithmen. Alle Aspekte der Mathematik arbeiten erneut harmonisch zusammen!

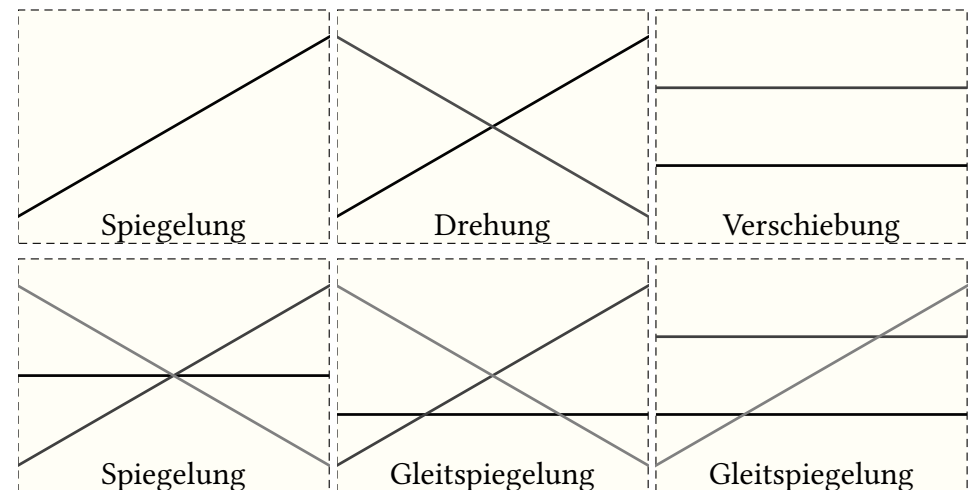
Satz S4q: Spiegelungen erzeugen die Gruppe $\text{GO}_n(\mathbb{R})$.

- (1) Jede Matrix $A \in \text{GO}_n \mathbb{R}$ kann erzeugt werden durch n Spiegelungen.
- (2) Jede Isometrie $f : (\mathbb{R}^n, d) \simeq (\mathbb{R}^n, d)$ des euklidischen Raumes (\mathbb{R}^n, d) ist eine Komposition von höchstens $n + 1$ affinen Spiegelungen.

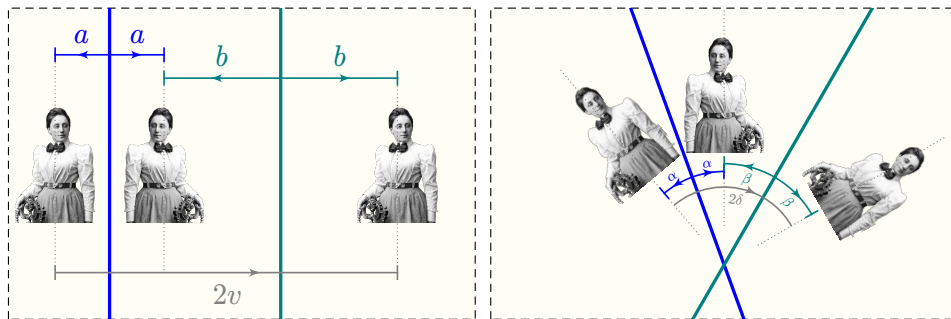
Übung: Folgern Sie dies sorgsam aus den oben vorbereiteten Ergebnissen. Für $n = 2$ erhalten wir den Dreispiegelungssatz aus der Schulgeometrie:

Jede Isometrie der Ebene ist Komposition höchstens dreier Spiegelungen.

☺ So lässt sich die Geometrie auf Symmetrie aufbauen. Felix Klein erhob dies 1872 zum Erlanger Programm: Dual zu Objekten (Punkte, Geraden, Strecken, Winkel, Figuren, ...) betonte er strikt die Symmetriegruppe: Welche Symmetrien gelten? Hierzu ein Lehrbuch und ein Schulbuch:
 ☞ F. Bachmann: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*. Springer, zweite ergänzte Auflage 1973. (Der Klassiker zum Thema.)
 ☞ J. Kratz, K. Wörle: *Geometrie 1&2*. Bayerischer Schulbuchverlag 1980.



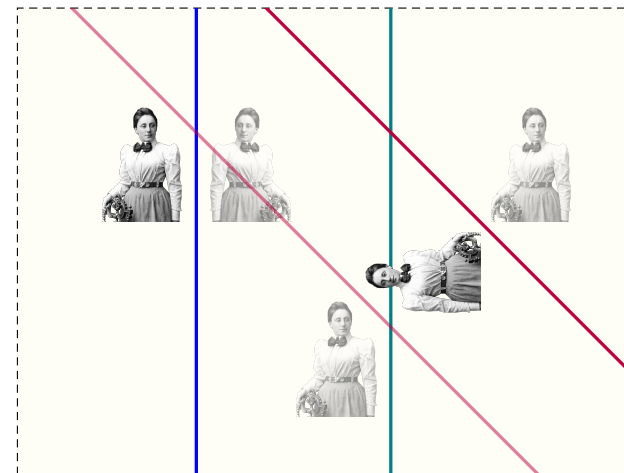
Übung: Warum ergibt die Komposition von zwei Spiegelungen eine Drehung oder eine Verschiebung? Was passiert bei drei Spiegelungen? Zeichnen Sie illustrative Beispiele! Rechnen Sie es systematisch nach!



(1) Die Komposition von zwei Spiegelungen an parallelen Geraden mit Abstand v ergibt eine Verschiebung um $2v$, und jede beliebige Verschiebung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto x + 2v$ lässt sich so darstellen.

(2) Die Komposition von zwei Spiegelungen an Geraden, die sich im Winkel δ schneiden, ergibt eine Drehung um den Winkel 2δ , und jede beliebige Drehung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lässt sich so darstellen.

Übung: Zeichnen Sie selbst Beispiele! Rechnen Sie es systematisch nach!



(3) Die Komposition von drei Spiegelungen ergibt eine Gleitspiegelung, und jede beliebige Gleitspiegelung lässt sich so darstellen.

Übung: Wie stellen Sie all diese Bewegungen in Koordinaten dar? Warum bilden die Bewegungen mit ihrer Komposition eine Gruppe?

Computergraphik nutzt Koordinaten, Transformationen, Isometrien, etc.

In \LaTeX nutzen Sie die Sprachen PGF/TikZ zur effizienten Erstellung von hochwertigeren Vektorgrafiken.



Alles wird in Koordinaten berechnet, dazu gehören auch affin-lineare Koordinatentransformationen!

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \text{ kurz } f(x) = Ax + b$$

```

1 \node[cm={ 1.0, 0.0, 0.0, 1.0, (+0.0, -1.0) }]{\Emil};
2 \node[cm={ 0.0, -1.0, 1.0, 0.0, (-2.0, -1.0) }]{\Emil};
3 \node[cm={ 2.0, 0.0, 0.0, 0.5, (+2.0, -1.0) }]{\Emil};
4 \node[cm={ cos(0), sin(0), -sin(0), cos(0), (+0.0, +1.0) }]{\Emmy};
5 \node[cm={ cos(40), sin(40), -sin(40), cos(40), (-2.0, +1.0) }]{\Emmy};
6 \node[cm={ cos(40), sin(40), sin(40), -cos(40), (+2.0, +1.0) }]{\Emmy};
    
```

Die Lineare Algebra folgt René Descartes (1596–1650) in der überaus erfolgreichen Vorgehensweise der **analytischen Geometrie**: Wir stellen Punkte durch Koordinaten $x \in \mathbb{R}^n$ dar und leiten daraus alles Weitere ab: affin-lineare Abbildungen, euklidische Abstände und Bewegungen, etc.

Die **synthetische Geometrie** beginnt direkt mit den geometrischen Objekten (Punkt, Geraden, Ebenen, etc.) und ihren Beziehungen (Inzidenz, Symmetrie). Diese werden meist axiomatisch formuliert, idealerweise als Konstruktionen oder Operationen. Daraus entstehen schließlich die algebraischen Strukturen (Koordinaten, Isometriegruppe).

L In der Schulgeometrie sind beide Zugänge fest verankert: Sowohl das Rechnen in Koordinaten, später zur Darstellung von Funktionen, als auch das koordinatenfreie Zeichnen, etwa beim Verschieben, Drehen, Spiegeln, zur hohen Kunst entwickelt als **Konstruktionen mit Zirkel und Lineal**, jüngst fortgeführt in dynamischer Geometriesoftware wie GeoGebra.

☺ Koordinatisierung baut die Brücke zwischen Geometrie und Algebra! Wir betreiben erfolgreich **Lineare Algebra und analytische Geometrie**.

Für $u, v \in \mathbb{R}^2$ sind **Skalarprodukt** und **Kreuzprodukt** gegeben durch

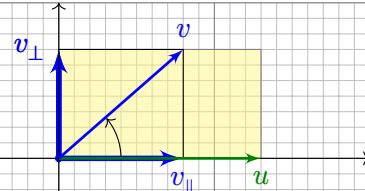
$$u \cdot v := u_1 v_1 + u_2 v_2 = |u| \cdot |v| \cdot \cos \sphericalangle(u, v) = \pm |u| \cdot |v_{\parallel}|$$

$$u \times v := u_1 v_2 - u_2 v_1 = |u| \cdot |v| \cdot \sin \sphericalangle(u, v) = \pm |u| \cdot |v_{\perp}|$$

Geometrische Erklärung:

$u \cdot v$ misst nur den parallelen Anteil.

$u \times v$ misst nur den senkrechten Anteil.



Für $u = (u_1, 0)$ längs der x -Achse ist die \cos - \sin -Formel klar.

Allgemein können wir unsere Vektoren in diese Lage drehen.

Die vier Fälle $\sphericalangle(u, v) \in \{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ\}$ sind besonders wichtig:

parallel: $u \parallel v \iff u \cdot v = \pm |u| \cdot |v| \iff u \times v = 0$

senkrecht: $u \perp v \iff u \cdot v = 0 \iff u \times v = \pm |u| \cdot |v|$

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ schreibt sich eindeutig $z = (x, y) = x + iy$.
Wir nennen $\text{Re}(z) := x$ den **Realteil** und $\text{Im}(z) := y$ den **Imaginärteil**.

Die zu $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ **komplex konjugierte Zahl** ist $\bar{z} = x - iy$.
Es gilt $\overline{\bar{w} + \bar{z}} = w + z$ und $\overline{\bar{w} \cdot \bar{z}} = w \cdot z$, sowie $\overline{\bar{z}} = z$ und $z \bar{z} = x^2 + y^2$.

Die Länge $|z| := \sqrt{z \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ heißt **Betrag** oder **Norm** von z .
Das **komplexe Skalarprodukt** von $w = u + iv$ und $z = x + iy$ in \mathbb{C} ist

$$\langle w | z \rangle := \bar{w} z = (u - iv)(x + iy) = (ux + vy) + i(uy - vx)$$

Realteil ist das reelle Skalarprodukt, Imaginärteil ist das Kreuzprodukt:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ux + vy, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = uy - vx.$$

😊 Algebraische Aussagen und Rechnungen in \mathbb{C} entsprechen so geometrischen Aussagen und Rechnungen in der Ebene \mathbb{R}^2 . [S461]

Bezüglich u zerlegen wir den Vektor $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$ in seinen tangentialen Anteil v_{\parallel} parallel zu u und seinen normalen Anteil v_{\perp} senkrecht zu u .
Diese orthogonale Zerlegung von v bezüglich u ist (für $u \neq 0$) eindeutig; sie ist der Anfang des berühmten Gram-Schmidt-Verfahrens, gemäß

$$v_{\parallel} = u \frac{u \cdot v}{u \cdot u} \quad \text{und} \quad v_{\perp} = v - v_{\parallel}, \quad \text{somit} \quad u \cdot v_{\perp} = 0.$$

Damit erhalten wir allgemein folgende geometrische Umformulierung:

$$u \cdot v = \pm |u| \cdot |v_{\parallel}| \quad (\text{positiv / negativ parallel})$$

$$u \times v = \pm |u| \cdot |v_{\perp}| \quad (\text{positiv / negativ orthogonal})$$

- 😊 Das Skalarprodukt $u \cdot v$ misst von v nur den tangentialen Anteil v_{\parallel} parallel zu u (bzw. symmetrisch hierzu den Anteil von u parallel zu v).
- 😊 Das Kreuzprodukt $u \times v$ misst von v nur den normalen Anteil v_{\perp} senkrecht zu u (bzw. symmetrisch hierzu von u senkrecht zu v).

Das ist eine der Stellen, an denen Konjugation im ersten Argument etwas schönere Formeln liefert als Konjugation im zweiten Argument:
Hier entsteht das Kreuzprodukt gleich mit dem richtigen Vorzeichen!
(Das Skalarprodukt im Realteil spürt natürlich keinen Unterschied.)

Ein weiterer Vorteil: Es passt zu unseren sonstigen Konventionen.
Für die Matrix A angewendet auf den Vektor v schreiben wir Av .
Daher erhalten wir für die Gram-Matrix $\beta(u, v) = u^\dagger B v$.
Andersseitige Konjugation erfordert $u^\top B \bar{v}$, wie hässlich!

Zu diesen mathematisch-ästhetischen Argumenten kommt eine starke Tradition: In der modernen Physik, etwa im Quantum Computing, ist die Konvention eindeutig festgelegt seit Schrödinger und Dirac und gefestigt durch 100 Jahre gute Erfahrung: linear im zweiten, konjugiert im ersten!

In der Mathematik werden beide Konventionen uneinheitlich verwendet.
Konsequent wäre: Statt $f(x)$ schreibe $(x)f$, statt Av dann vA , statt $u^\dagger Av$ dann vAu^\dagger statt $\langle u\lambda | v\mu \rangle = \bar{\lambda} \langle u | v \rangle \mu$ dann $\langle \mu v | \lambda u \rangle = \mu \langle v | u \rangle \bar{\lambda}$.

Satz S4R: das Kreuzprodukt aka Vektorprodukt in Dimension 3

Speziell in Dimension 3 haben wir das **Kreuzprodukt** aka **Vektorprodukt**:

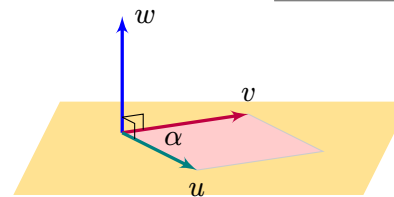
$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & e_1 \\ u_2 & v_2 & e_2 \\ u_3 & v_3 & e_3 \end{vmatrix}.$$

- (1) Das Produkt $(u, v) \mapsto u \times v$ ist antisymmetrisch, $v \times u = -(u \times v)$, und bilinear, also $u \times (v\lambda + v'\mu) = (u \times v)\lambda + (u \times v')\mu$, ebenso in u .
- (2) Für je drei Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle u \times v | w \rangle = \det(u, v, w)$. Insbesondere gilt $0 = \langle u \times v | u \rangle = \langle u \times v | v \rangle$, also $u \times v \in \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$.
- (3) Für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$ und $A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ gilt $(Au) \times (Av) = A(u \times v)$.

Beweis: Eigenschaften (1) und (2) sind klar. (3) Für alle $w \in \mathbb{R}^3$ haben wir $\langle (Au) \times (Av) | Aw \rangle \stackrel{(2)}{=} \det(Au, Av, Aw) \stackrel{\text{Mul}}{=} \det(A) \det(u, v, w) \stackrel{\text{SO}}{=} \det(u, v, w) \stackrel{(2)}{=} \langle u \times v | w \rangle \stackrel{\text{SO}}{=} \langle A(u \times v) | Aw \rangle$. Das zeigt $(Au) \times (Av) = A(u \times v)$. QED

Für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$ und $w = u \times v$ gilt $w \perp u$ und $w \perp v$ sowie

$$|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \sphericalangle(u, v)$$



Nach geeigneter Drehung haben wir:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 v_2 \end{bmatrix}$$

Der Vektor $w = u \times v$ steht senkrecht auf u und v . Die Orientierung von (u, v, w) ist positiv, denn wir haben $\det(u, v, w) = \langle w | w \rangle = |w|^2 \geq 0$.

Die obige Rechnung zeigt: Die Norm $|w|$ ist der Flächeninhalt des von u und v aufgespannten Parallelogramms, also $|w| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \sphericalangle(u, v)$.

Daher gilt $w = 0$ genau dann, wenn u und v linear abhängig sind, und umgekehrt $w \neq 0$ genau dann, wenn u und v linear unabhängig sind.

Das $(n - 1)$ -fache Kreuzprodukt $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definieren wir durch $\langle v_1 \times \dots \times v_{n-1} | v_n \rangle = \det(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ für alle $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n \in \mathbb{R}^n$.

$$v_1 \times \dots \times v_{n-1} = \det \begin{bmatrix} v_{1,1} & \dots & v_{n-1,1} & e_1 \\ v_{1,2} & \dots & v_{n-1,2} & e_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{1,n} & \dots & v_{n-1,n} & e_n \end{bmatrix}$$

Für $n = 3$ erhalten wir das dreidimensionale Kreuzprodukt:

$$x \times y = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & e_1 \\ x_2 & y_2 & e_2 \\ x_3 & y_3 & e_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - y_2 x_3 \\ x_3 y_1 - y_3 x_1 \\ x_1 y_2 - y_2 x_1 \end{bmatrix}$$

Für $n = 2$ erhalten wir die 90° -Linksrotation:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} v_1 & e_1 \\ v_2 & e_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} =: \circlearrowleft v$$

Satz S4s: die elegante Rotationsformel nach Rodrigues

Zu jeder Drehachse $u \in \mathbb{S}^2$ und Drehwinkel $\theta \in [0, \pi] \subset \mathbb{R}$ definieren wir die zugehörige Drehung $\rho(u, \theta) \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ nach **Rodrigues** durch

$$\rho(u, \theta) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto x + \sin(\theta) \cdot u \times x + (1 - \cos(\theta)) \cdot u \times (u \times x).$$

Diese Abbildung $\rho : \mathbb{S}^2 \times [0, \pi] \rightarrow \text{SO}_3(\mathbb{R})$ ist stetig und surjektiv und beinahe injektiv: Es gilt $\rho(u, \theta) = \rho(u', \theta')$ genau dann, wenn $(u, \theta) = (u', \theta')$ oder $\theta = \theta' = 0$ oder $(u', \theta') = (-u, -\theta) \in \mathbb{S}^2 \times \{\pm\pi\}$.

Diese Formel zu *finden* erfordert Kreativität. Steht sie erst einmal vor uns, so können wir sie leicht *beweisen*; zum Nachrechnen genügt Handwerk:

Beweis: Wir ergänzen unser u zu einer ONB $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ mit $u \times v = w$. In dieser Basis lesen wir ab: $u \mapsto u$ sowie $v \mapsto \cos(\theta)v + \sin(\theta)w$ und $w \mapsto -\sin(\theta)v + \cos(\theta)w$. Somit gilt $\rho(u, \theta) = R_\theta^{v,w}$. Nach Konstruktion ist ρ stetig. Surjektivität verdanken wir S4M. Es gilt $\rho(s, 0) = \text{id}$. Für $\theta \in]0, \pi[$ ist die Drehachse eindeutig, für $\theta \in]0, \pi[$ auch die Richtung. QED

Sei $(\mathbb{K}, +, 0, \cdot, 1)$ ein Ring mit $0 \neq 1$. Jede Transformation $\tau \in T_n$, also $\tau: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, definiert ihre zugehörige Matrix

$$P_\tau := (e_{\tau(1)}, \dots, e_{\tau(n)}) \in \mathbb{K}^{n \times n},$$

also $P_\tau e_i = e_{\tau(i)}$. Permutationen interessieren uns besonders. Beispiele:

$$\tau = (1, 2, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in S_3 \implies P_\tau = (e_2, e_3, e_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{3 \times 3}$$

$$\tau = (2, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in S_3 \implies P_\tau = (e_1, e_3, e_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{3 \times 3}$$

♦ **Satz J5B:** Permutationsmatrizen sind orthogonal.

(1) Wir erhalten den Homomorphismus (von Monoiden bzw. Gruppen)

$$P: (T_n, \circ, \text{id}) \rightarrow (\mathbb{K}^{n \times n}, \cdot, 1_{n \times n}) : \tau \mapsto P_\tau, \\ (S_n, \circ, \text{id}) \rightarrow (\text{GL}_n \mathbb{K}, \cdot, 1_{n \times n}).$$

(2) Orthogonalität: Für jede Permutation $\tau \in S_n$ gilt $P_\tau^\top = P_\tau^{-1} = P_{\tau^{-1}}$.

(3) Darstellungssatz von Cayley J3F: Jede endliche Gruppe $(G, \cdot, 1)$ der Ordnung $n = |G|$ bettet ein gemäß $G \hookrightarrow S_n \hookrightarrow \text{GO}_n \mathbb{K} \leq \text{GL}_n \mathbb{K}$.

Aufgabe: Übertragen Sie dies von der endlichen Menge $I = \{1, \dots, n\}$ sorgsam auf eine beliebige Menge I , egal ob endlich oder unendlich.

Satz S4T: Permutationen als unitäre Automorphismen.

Über (\mathbb{K}, σ) betrachten wir den Koordinatenraum $V = \mathbb{K}^{(I)}$ zur Menge I . Seine Standardbasis $(e_i)_{i \in I}$ erfüllt $e_i(j) = \delta_{ij}$, also $e_i(i) = 1$ und $e_i(j) = 0$ für $j \neq i$. Seine Standardform $\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ ist $\langle u | v \rangle = \sum_{i \in I} u_i^\sigma v_i$.

(0) Jede Abbildung $\tau : I \rightarrow I$ können wir dank PLF N1B eindeutig fortsetzen zur \mathbb{K} -linearen Abbildung $P_\tau : \mathbb{K}^{(I)} \rightarrow \mathbb{K}^{(I)}$ mit $P_\tau(e_i) = e_{\tau(i)}$.

(1) Wir erhalten den Homomorphismus (von Monoiden bzw. Gruppen)

$$P: (T_I, \circ, \text{id}) \rightarrow (\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{(I)}), \circ, \text{id}) : \tau \mapsto P_\tau, \\ (S_I, \circ, \text{id}) \rightarrow (\text{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{(I)}), \circ, \text{id}), \quad P_\tau^{-1} = P_{\tau^{-1}}.$$

(2) Zur Bijektion $\tau \in S_I$ erhalten wir die Isometrie $P_\tau \in \text{GO}(\mathbb{K}^{(I)}, \langle - | - \rangle)$.

(3) Jede Gruppe $(G, \cdot, 1)$ bettet ein gemäß $G \hookrightarrow S_G \hookrightarrow \text{GO}(\mathbb{K}^{(G)})$.

Beispiel: Für $I = \{1, \dots, n\}$ und $\tau \in S_n$ wird $P_\tau : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ dargestellt durch obige Permutationsmatrix. Auf $I = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $\tau : i \mapsto i + 1$ ist P_τ die zirkuläre Verschiebung, in Koordinaten $(P_\tau(u))_i = u_{i-1}$, sic!

Ein unendliches Beispiel ist $I = \mathbb{Z}$ mit $\tau : i \mapsto i + 1$. Hier ist $P_\tau : e_i \mapsto e_{i+1}$ die Verschiebung nach rechts, in Koordinaten $(P_\tau(u))_i = u_{i-1}$, sic!

Aufgabe: Alles liegt explizit vor. Rechnen Sie die Behauptungen nach.

Beweis: Es gilt $P_{\text{id}} = \text{id}_V$. (1a) Wir rechnen $P_\tau \circ P_\pi = P_{\tau \circ \pi}$ direkt nach. Links gilt $e_i \mapsto e_{\pi(i)} \mapsto e_{\tau(\pi(i))}$, rechts gilt $e_i \mapsto e_{(\tau \circ \pi)(i)}$ für alle $i \in I$. Beide Seiten sind \mathbb{K} -linear, also $P_\tau \cdot P_\pi = P_{\tau \circ \pi}$ dank Vergleich N1A. Das zeigt die Multiplikativität, also die erhsehnte Homomorphie.

(2) Für $\tau \in S_I$ und $u \in \mathbb{K}^{(I)}$ gilt $(P_\tau(u))_i = u_{\tau^{-1}(i)}$, also $P_\tau \in \text{GO}(\mathbb{K}^{(I)})$, denn $\langle P_\tau(u) | P_\tau(v) \rangle = \sum_{i \in I} u_{\tau^{-1}(i)}^\sigma v_{\tau^{-1}(i)} = \sum_{j \in I} u_j^\sigma v_j = \langle u | v \rangle$.

(3) Darstellungssatz von Cayley J3F: Jede Gruppe $(G, \cdot, 1)$, egal ob endlich oder unendlich, bettet ein gemäß $G \hookrightarrow S_G \hookrightarrow \text{GO}(\mathbb{K}^{(G)}) \leq \text{GL}(\mathbb{K}^{(G)})$. QED

Aufgabe: Nennen Sie alle Matrizen $A \in \text{GO}_2 \mathbb{R}$ mit Einträgen in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

Lösung: (a) Die erste Spalte ist normiert, also gleich $(1, 0)^\top$ oder $(0, 1)^\top$. Die zweite Spalte ist ebenfalls normiert und orthogonal zur ersten, also

$$\mathbb{N}^{2 \times 2} \cap \text{GO}_2 \mathbb{R} \ni \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Ebenso über \mathbb{Z} :

$$\mathbb{Z}^{2 \times 2} \cap \text{GO}_2 \mathbb{R} \ni \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Die erste Spalte $(a/c, b/c)^\top$ entspricht einem pythagoreischen Tripel $(a, b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{>0}$ mit $a^2 + b^2 = c^2$ und $\text{ggT}(a, b, c) = 1$.

$$\mathbb{Q}^{2 \times 2} \cap \text{GO}_2 \mathbb{R} \ni \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

Aufgabe: Wie viele Matrizen $A \in \text{GU}_n \mathbb{C}$ haben Einträge in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}[i], \mathbb{Q}$?
Lösung: Wir finden (a) $n!$, (b) $n!2^n$, (c) $n!4^n$, (d) unendlich viele für $n \geq 2$.

Kapitel S

Bonusmaterial



“Should you just be an algebraist or a geometer?”
is like saying “Would you rather be deaf or blind?”
[...] On the whole, we prefer to have both faculties.

Sir Michael Atiyah (1929–2019)

Inhalt dieses Kapitels S

- 5 Isometriegruppen regulärer Polyeder
- Rigidität euklidischer Isometrien
 - Die fünf platonischen Körper

Rückblick auf schöne Ergebnisse

Wie immer muss zunächst eine Vielfalt neuer Ideen bewältigt werden, doch sofort bieten Sesquilinearformen wunderschöne und wirksame Werkzeuge: Orthogonale Projektion S1Q, Diagonalisierung hermitescher Formen S1R, Skalarprodukte S2A und die Cauchy–Schwarz–Ungleichung S2G, Orthogonalisierung S3C und die QR–Zerlegung S3E / S4L / S4P, Bestapproximation S3F und Näherungslösung aka Pseudoinverse S3H, Fourier–Analyse S3I, Positionsbestimmung S4C und Rigidität S4E, orthogonale und unitäre Gruppen S4G, Givens–Rotationen S4K und Householder–Spiegelungen S4P, Vektorprodukt S4R und Rodrigues S4s.

Wiederholung: Erklären Sie diese Ergebnisse in eigenen Worten!

Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung ist fundamental und eine der wichtigsten Ungleichungen der Mathematik. Sie tritt in nahezu allen Gebieten und in zahlreichen Varianten auf, nicht nur in Geometrie und Analysis, sondern zum Beispiel auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik für die Co/Varianz und in der Quantenmechanik in Form von Heisenbergs Unschärferelation.

Klassifikation der unitären Vektorräume

Übung: Wir arbeiten über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$. Wie klassifizieren sie endlich-dimensionale Vektorräume V mit Skalarprodukt $(V, \langle - | - \rangle)$? Welche Modellräume kennen Sie? Wann sind zwei Räume isomorph?

Satz S4A: Klassifikation der unitären Vektorräume

- (1) Haben zwei Vektorräume U und V über \mathbb{K} dieselbe Dimension, so existiert ein \mathbb{K} -linearer Isomorphismus $(\varphi, \psi) : U \cong V$.
- (2) Haben unitäre Vektorräume $(U, \langle - | - \rangle_U)$ und $(V, \langle - | - \rangle_V)$ über \mathbb{K} selbe abzählbare Dimension, so existiert ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis: (1) Dank Basissatz M2K existieren Basen $(u_i)_{i \in I}$ von U und $(v_j)_{j \in J}$ von V . Jedes Bijektionspaar $(\mu, \nu) : I \cong J$ können wir linear fortsetzen zu einem Isomorphismuspaar $(\varphi, \psi) : U \cong V$ über \mathbb{K} .

(2) Dank Gram–Schmidt S3C können wir abz. Basen orthonormalisieren. Für ONBasen $(u_i)_{i \in I}$ und $(v_j)_{j \in J}$ wird aus $(\mu, \nu) : I \cong J$ nun die Isometrie $(\varphi, \psi) : (U, \langle - | - \rangle_U) \cong (V, \langle - | - \rangle_V) : u_i \mapsto v_i$ dank Parseval S3B. QED

Definition S4B: Abstand zwischen Punkten und Mengen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir messen den Abstand zwischen Punkten und Mengen als das Infimum der punktweisen Abstände:

$$d : X \times \mathfrak{P}X \rightarrow [0, \infty], \quad d(a, B) := \inf\{d(a, y) \mid y \in B\}$$

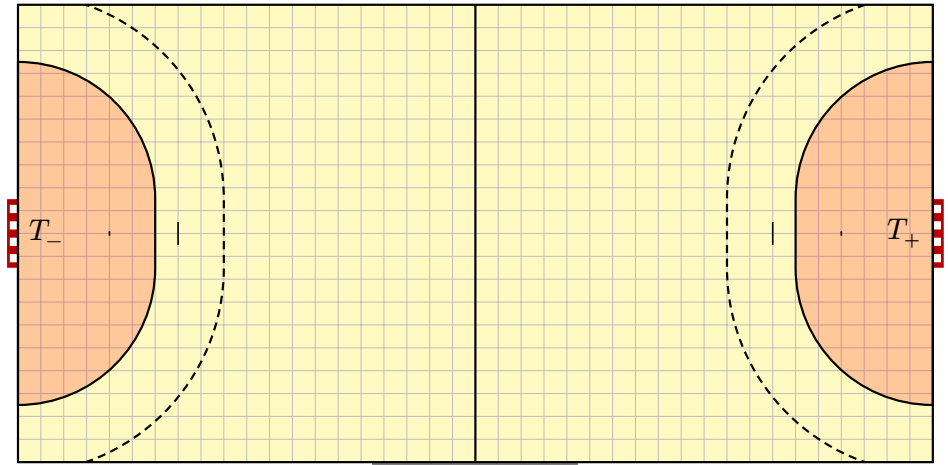
$$d : \mathfrak{P}X \times X \rightarrow [0, \infty], \quad d(A, b) := \inf\{d(x, b) \mid x \in A\}$$

$$d : \mathfrak{P}X \times \mathfrak{P}X \rightarrow [0, \infty], \quad d(A, B) := \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

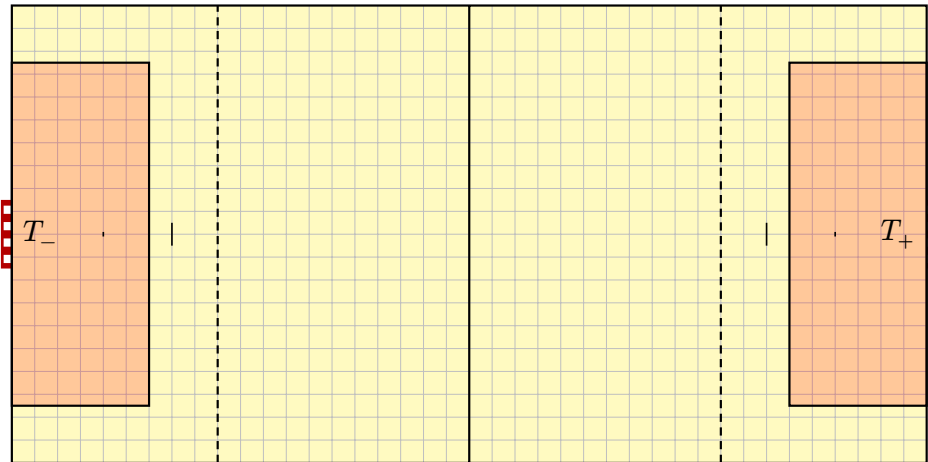
$$\text{diam} : \mathfrak{P}X \rightarrow [0, \infty], \quad \text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

Aufgabe: Zeichnen Sie ein Handballfeld gemäß Regel 1 der *International Handball Federation* (IHF, www.ihf.info), aber jeweils in der ℓ^p -Metrik:

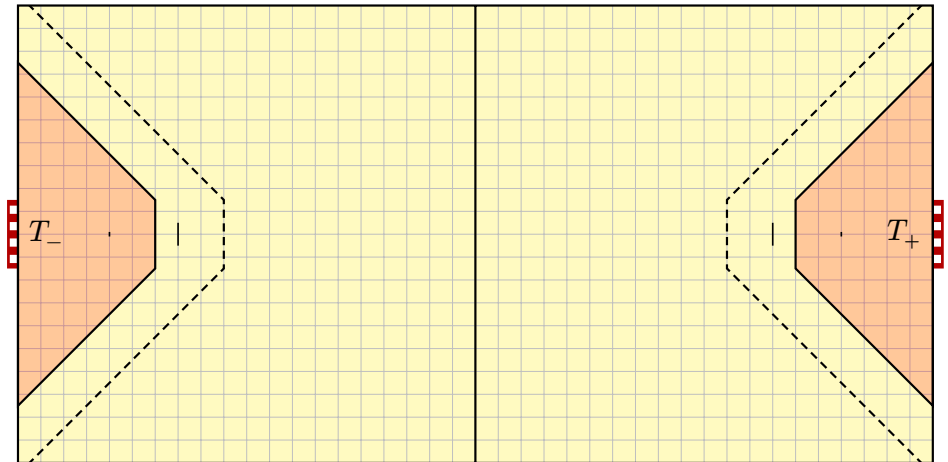
- $X = [-20, 20] \times [-10, 10] \subseteq \mathbb{R}^2$ die Spielfläche
- $T = \{-20, 20\} \times [-1.5, 1.5]$ die beiden Torlinien
- $S = \{x \in X \mid d(x, T) = 6\}$ Sechs-Meter-Linie („Kreis“)
- $N = \{x \in X \mid d(x, T) = 9\}$ Neun-Meter-Linie („Freiwurflinie“)



- ☺ Der sogenannte „Kreis“ ist gar keiner! Die Sechs-Meter-Linie besteht gemäß IHF-Regel 1:4 aus zwei Viertelkreisen und einem Geradenstück.
- ❓ Gibt es zwischen je zwei Punkten einen kürzesten Weg? Mehrere?

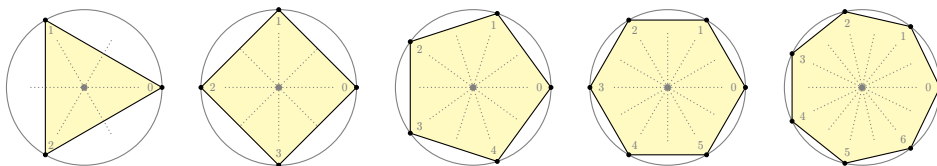


- ☺ In der Maximumsmetrik ist die Sechs-Meter-Linie ein Rechteck. *Fun fact:* Im Fußball folgen Tor- und Strafraum dieser Konvention.
- ❓ Gibt es zwischen je zwei Punkten einen kürzesten Weg? Mehrere?



- ☺ In der Taximetrik ist die Sechs-Meter-Linie ein Trapez. Das sieht ulkig aus und illustriert eindrücklich diese Metrik.
- ❓ Gibt es zwischen je zwei Punkten einen kürzesten Weg? Mehrere?

Wir betrachten das reguläre n -Eck $P_n \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, wobei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$:



Zur Konstruktion von $P_n = [W_n] \subset \mathbb{C}$ wählen wir als Eckpunktmenge $W_n = \{w_k = e^{2\pi i k/n} \mid k \in \mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}\}$ die n -ten Einheitswurzeln. Das ausgefüllte Polygon $P_n = [W_n]$ entsteht aus W_n als konvexe Hülle.

Die gesuchte Isometriegruppe können wir nun bequem definieren:

$$D_n^I := \text{Isom}(\mathbb{C}, W_n) \stackrel{(1)}{\cong} \text{Isom}(W_n)$$

Ausgehend von dieser Definition können nun beweisen:

$$D_n^I \stackrel{(2)}{=} \left\{ \underbrace{\rho_k : z \mapsto z e^{2\pi i k/n}}_{\text{genau } n \text{ Drehungen}}, \underbrace{\sigma_k : z \mapsto \bar{z} e^{2\pi i k/n}}_{\dots \text{ und } n \text{ Spiegelungen}} \mid k = 0, \dots, n-1 \right\}$$

Aufgabe: Erklären Sie den Isomorphismus (1) und die Gleichheit (2).

Beweis: (1) „ \rightarrow “: Jede Isometrie $g : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ mit $g(W_n) = W_n$ können wir einschränken zur Isometrie $f = g|_{W_n} \in \text{Isom}(W_n)$. Diese Zuordnung ist ein Gruppenhomomorphismus.

„ \leftarrow “: Die Umkehrung verdanken wir der Rigidität S4E(3): Wegen $n \geq 3$ enthält W_n drei affin unabhängige Punkt, etwa w_0, w_1, w_2 . Daher lässt sich jede isometrische Abbildung $f : W_n \rightarrow W_n$ eindeutig fortsetzen zu einer Isometrie $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ der gesamten euklidischen Ebene mit $g|_{W_n} = f$. Diese ist affin linear dank S4E(2), also $g(z) = Az + v$. Der Schwerpunkt $0 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} w_k$ wird von f erhalten, da f die Eckpunkte W_n permutiert. Also erhält auch g den Schwerpunkt, das heißt $g(0) = 0$. Somit gilt $v = 0$.

(2) „ \subseteq “: Wir wissen $A^T A = 1$, also $A \in \text{GO}_2(\mathbb{R})$. Dank S4H kennen wir alle Möglichkeiten: Drehung $f(z) = e^{i\theta} z$ oder Spiegelung $f(z) = e^{i\theta} \bar{z}$. Für $f(W_n) = W_n$ bleibt nur noch $\theta = 2\pi k/n$ für $k = 0, \dots, 1$.

Die Umkehrung „ \supseteq “ ist klar.

QED

In der Isometriegruppe $\text{Isom}(\mathbb{C})$ ist $\text{Isom}(\mathbb{C}, W_n) = D_n^I$ eine **Untergruppe**: Es gilt $\text{id} = \rho_0 \in D_n^I$, und zu $f, g \in D_n^I$ gilt $f \circ g \in D_n^I$ sowie $f^{-1} \in D_n^I$.

Drehungen und Spiegelungen können wir durch Matrizen darstellen:

$$R_k = \begin{bmatrix} \cos(2\pi k/n) & -\sin(2\pi k/n) \\ \sin(2\pi k/n) & \cos(2\pi k/n) \end{bmatrix}, \quad S_k = \begin{bmatrix} \cos(2\pi k/n) & \sin(2\pi k/n) \\ \sin(2\pi k/n) & -\cos(2\pi k/n) \end{bmatrix}$$

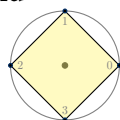
Diese $2n$ Matrizen fassen wir zusammen zur **Dieder-Matrixgruppe**:

$$D_n^M = \{ \text{id} = R_0, R_1, \dots, R_{n-1}, S_0, S_1, \dots, S_{n-1} \} \leq \text{GL}_2 \mathbb{R}$$

Beispiel: Die acht Elemente der Diedergruppe $D_4^M \leq \text{GL}_2 \mathbb{Z}$ sind

$$R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$



In der allgemeinen linearen Gruppe $\text{GL}_2 \mathbb{R}$ ist D_n^M eine **Untergruppe**: Es gilt $E = R_0 \in D_n^M$, und zu $A, B \in D_n^M$ gilt $A \cdot B \in D_n^M$ sowie $A^{-1} \in D_n^M$.

Wir können $\text{Isom}(W_n)$ durch Permutationen der Ecken darstellen:

$$r_k : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n : x \mapsto k + x, \quad s_k : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n : x \mapsto k - x$$

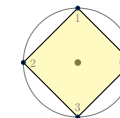
Diese fassen wir zusammen zur **Dieder-Permutationsgruppe**:

$$D_n^P = \{ \text{id} = r_0, r_1, \dots, r_{n-1}, s_0, s_1, \dots, s_{n-1} \} \leq S_n$$

Beispiel: Die acht Permutationen der Diedergruppe $D_4^P < S_4$ sind

$$r_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad r_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$s_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad s_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad s_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

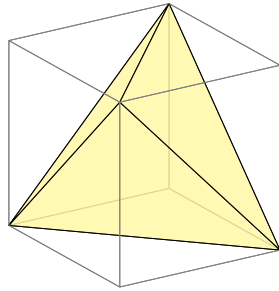


In der symmetrischen Gruppe $(S_n, \circ, \text{id}, ^{-1})$ ist D_n^P eine **Untergruppe**: Es gilt $\text{id} = r_0 \in D_n^P$, und zu $a, b \in D_n^P$ gilt $a \circ b \in D_n^P$ sowie $a^{-1} \in D_n^P$.

☺ Alle drei Darstellungen beschreiben dieselbe Diedergruppe in isomorphen Inkarnationen. Jede hat ihre Vorzüge. Ihre Isomorphie beruht auf dem Rigiditätssatz S4E für euklidische Isometrien.

Wie viele Symmetrien hat das Tetraeder?

S505
Ausführung



Wir betrachten die Isometrien (also Drehungen und Spiegelungen) des Tetraeders T auf seinen 4 Ecken und erhalten $\text{Isom}^\pm(\mathbb{R}^3, T) \hookrightarrow S_4$.

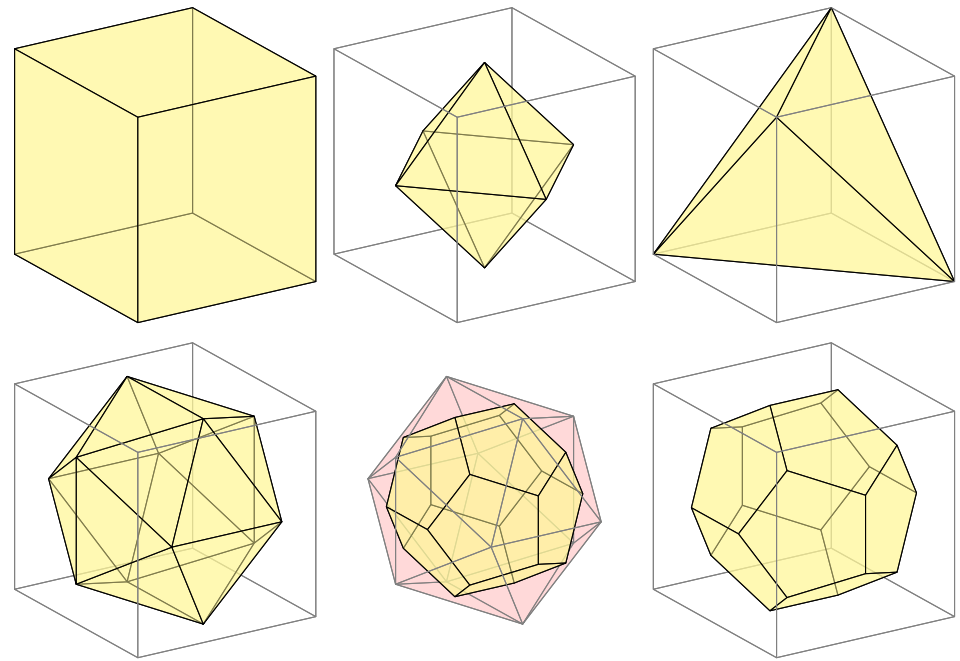
$$G = \text{Isom}^+(\mathbb{R}^3, T) \implies |G| = |Gv| \cdot |G_v| = 4 \cdot 3 = 12$$

$$H = \text{Isom}^\pm(\mathbb{R}^3, T) \implies |H| = |Hv| \cdot |H_v| = 4 \cdot 6 = 24$$

☺ Damit sind auch $\text{Isom}^\pm(\mathbb{R}^3, T) \cong S_4$ und $\text{Isom}^+(\mathbb{R}^3, T) \cong A_4$ vertraut. Wir erkennen die volle Isometriegruppe $\text{Isom}^\pm(\mathbb{R}^3, T)$ des Tetraeders als symmetrische Gruppe S_4 ; sie sind nicht gleich, aber immerhin isomorph! Die alternierende Gruppe A_n besteht aus den geraden Permutationen.

Die fünf platonischen Körper

S506
Ausführung



Die fünf platonischen Körper

S507
Ausführung

🤔 Was ist das Besondere an diesen fünf wunderschönen Beispielen? Sie sind offensichtlich besonders symmetrisch. Was heißt das genau? Gibt es weitere Beispiele? Oder kennen wir bereits alle Möglichkeiten? Die Antwort ist der Höhepunkt von Euklids epochalem Werk *Elemente*:

Satz S5A: Klassifikation regulärer 3-Polytope, Euklid 3. Jh. v.u.Z.

(1) Symmetrie: Jeder dieser fünf platonischen Körper $P \subset \mathbb{R}^3$ ist regulär, d.h. die Isometriegruppe $\text{Isom}(\mathbb{R}^3, P)$ operiert transitiv auf den Fahnen.

Ausführlich: Jede Fahne ($E < K < F < P$), bestehend aus einer Ecke E in einer Kante K in einer Facette F des Polytops P , kann durch eine Isometrie des Raumes \mathbb{R}^3 in jede andere Fahne überführt werden.

(2) Diese Liste ist vollständig: Jedes reguläre 3-Polytop $Q \subset \mathbb{R}^3$ ist ähnlich zu genau einem unserer fünf platonischen Körper.

Ausführlich: Von Q zum Modell P führt eine Ähnlichkeitsabbildung $h: (\mathbb{R}^3, Q) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^3, P): x \mapsto \lambda Ax + v$ mit einem Streckfaktor $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und einer Verschiebung $v \in \mathbb{R}^3$.

Die fünf platonischen Körper

S508
Ausführung

Aufgabe: Bestimmen Sie zu jedem der fünf platonischen Körper $P \subset \mathbb{R}^3$ die Ordnung seiner vollen Isometriegruppe $H = \text{Isom}(\mathbb{R}^3, P)$. Anleitung:

☹ Ohne Werkzeug ist es möglich, aber unübersichtlich und mühsam

☺ Mit dem Orbit-Stabilisator-Satz J3N wird es kinderleicht!

Lösung: Wir lassen die Gruppe H jeweils auf der Eckenmenge operieren! Diese Operation ist transitiv, mit der Bahnlänge $n = |Hv| = 8, 6, 4, 12, 20$. Als Standgruppe erkennen wir die Diedergruppe $H_v \cong D_k$, wobei k die Anzahl der Nachbarecken ist. So erhalten wir die ersehnte Ordnung:

$$\text{Hexaeder: } |H| = |Hv| \cdot |H_v| = 8 \cdot 6 = 48$$

$$\text{Oktaeder: } |H| = |Hv| \cdot |H_v| = 6 \cdot 8 = 48$$

$$\text{Tetraeder: } |H| = |Hv| \cdot |H_v| = 4 \cdot 6 = 24$$

$$\text{Ikosaeder: } |H| = |Hv| \cdot |H_v| = 12 \cdot 10 = 120$$

$$\text{Dodekaeder: } |H| = |Hv| \cdot |H_v| = 20 \cdot 6 = 120$$

Bemerkung: Die Dopplungen sind kein numerischer Zufall! Hexaeder und Oktaeder sind dual zueinander, wie skizziert, ihre Isometriegruppen daher isomorph, gar gleich. Ebenso sind Ikosaeder und Dodekaeder dual.

Kapitel T

Spektralsatz und erste Anwendungen

„Was hat Sie [an der Quantenphysik] dermaßen fasziniert?“
 – „Die wunderschöne Mathematik, die verwendet wurde.“
 Anton Zeilinger, Physik-Nobelpreis 2022

Inhalt dieses Kapitels T

- 1 Spektralsatz über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$
 - Selbstadjungierte Endomorphismen
 - Spektralsatz I: selbstadjungierte Endomorphismen
 - Schur-Zerlegung: unitäre Trigonalisierung
 - Spektralsatz II: normale Endomorphismen
 - Anwendung auf reelle Isometrien
- 2 Definitheit dank Spektralsatz
 - Positive Semi/Definitheit
 - Cholesky und Hauptminoren
 - Eigenwerte und Gerschgorin
- 3 Matrixkalkül dank Spektralsatz
 - Singulärwertzerlegung
 - Operatornorm und Frobenius-Norm
 - SPSD-Wurzeln und Polarzerlegung

Motivation und Überblick

T003
Überblick

Die vorigen Kapitel P und S zeigen zwei überall wirksame Werkzeuge:

- 1 Eigenbasen zur Diagonalisierung von Endomorphismen
- 2 Orthonormalbasen zur Diagonalisierung eines Skalarprodukts

Wir verbinden diese beiden Themen nun zur perfekten Harmonie:
 Wäre es nicht am schönsten, orthonormale Eigenbasen zu finden?

☞ Welche Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind unitär trigonalisierbar? Dies erklärt die Schur-Zerlegung T1L. Stärker, wann ist A unitär diagonalisierbar?

Spektralsatz I, T1I: Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist jede *selbstadjungierte* Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unitär diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten: Zu $A = A^\dagger$ existiert $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ so, dass $Q^\dagger A Q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Spektralsatz II, T1o: Genau dann ist eine komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitär diagonalisierbar, also $Q^\dagger A Q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $Q \in \text{GU}_n \mathbb{C}$, wenn A *normal* ist, also die Kommutation $A^\dagger A = A A^\dagger$ erfüllt.

Motivation und Überblick

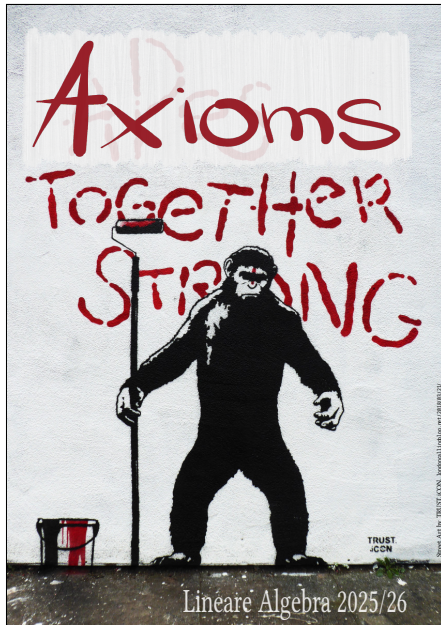
T004
Überblick

☺ Hier fügen sich Algebra und Geometrie harmonisch zusammen. Dieses Kapitel empfinde ich als einen weiteren schönen Höhepunkt, als den zentralen Kreuzungspunkt von mathematischer Theorie und spektakulären Anwendungen in Numerik, Statistik, Physik uvm.

Sie sehen hier das starke Zusammenspiel der Linearen Algebra (die eleganten Grundlagen zunächst über beliebigen Körpern) und den bilinearen Methoden der euklidischen Geometrie (dies speziell über den Körpern \mathbb{R} und \mathbb{C} , gerne auch \mathbb{H}).

Wir ernten reiche Resultate, allen voran den Spektralsatz, I für selbstadjungierte und II für normale Endomorphismen. Wir illustrieren dies mit ersten beeindruckenden Beispielen. Die Anwendungen reichen weit über die Lineare Algebra hinaus!

Dies mobilisiert all unsere bisher erarbeiteten Werkzeuge, die nun fulminant zusammenwirken. *Axioms together strong!*



Der Spektralsatz ist fundamental für die Quantenmechanik, denn ihre gesamte mathematische Struktur baut auf selbstadjungierten Operatoren. Insbesondere der Begriff der *Messung* entspricht dem Spektralsatz: Messung bedeutet orthogonale Projektion auf Eigenräume.

Historical fun fact: Die Quantenmechanik hat als „Matrizenmechanik“ begonnen. Nach ihren sensationellen Erfolgen in den ersten 100 Jahren, etwa von 1925 bis 2025, ist diese Sichtweise heute relevanter denn je. Das Quantum Computing betont die endlich-dimensionalen Systeme, das ist physikalisch angewandte Lineare Algebra *par excellence!*

Industrielle Implementierung ist eine enorme technisch-physikalische Herausforderung, sie ist weiterhin hochaktuell und bleibt spannend. Erstaunlicherweise wird Quantum Computing wesentlich einfacher, wenn man die Physik ausblendet und sich auf die (relativ einfache!) mathematische Struktur fokussiert. Daher das Eingangszitat.

Anwendungen in der Statistik. Der Spektralsatz spielt als Werkzeug in der Statistik eine zentrale Rolle, denn nahezu alle relevanten statistischen Objekte werden durch symmetrische reelle Matrizen beschrieben. Dazu liefert der Spektralsatz die vollständige Strukturtheorie.

Optimierungsprobleme nutzen meist die Methode der kleinsten Quadrate, etwa zur linearen Regression. Die Singulärwertzerlegung wird in der Datenanalyse angewendet, etwa zur Hauptkomponentenanalyse (PCA); Kovarianzmatrizen beschreiben Korrelationen, insbesondere bei Gauß-Verteilungen: Der Spektralsatz entkoppelt Zufallsvariablen.

In den letzten Jahren entwickelt sich die Datenanalyse explosionsartig, damit wächst auch die zentrale Bedeutung mathematischer Methoden. Für *Big Data* und jüngst im *Machine Learning* ist der Spektralsatz wichtig, da er komplizierte hochdimensionale Daten strukturiert: kernbasierte Lernmethoden, PCA, Clustering, Empfehlungssysteme, uvm.

Der Spektralsatz wird in der Linearen Algebra für endlich-dimensionale Vektorräume untersucht und in diesem Rahmen vollständig geklärt.

Viele Anwendungen erfordern Funktionenräume, und diese haben meist unendliche Dimension. Hier übernimmt die Funktionalanalysis und führt den Spektralsatz fort zu einer sensationell ausgefeilten Theorie!

Die numerische Mathematik geht den umgekehrten Weg: Zur effektiven Implementierung auf dem Computer wird das in der Analysis idealisierte Modell geschickt diskretisiert und somit wieder endlich-dimensional!

Sie ahnen bei diesen Stichworten bereits, wie sehr die Lineare Algebra hierzu wichtige Grundlagen und effiziente Werkzeuge bereitstellt.

Allein schon die innermathematische Schönheit rechtfertigt jede Mühe: Algebra, Geometrie, Numerik arbeiten hier vorzüglich zusammen.

Ebenso rechtfertigen allein die Anwendungen die solide Investition. Freuen Sie sich und genießen Sie beides!

Definition T1A: selbst/adjungierte Matrix → SFormen S1H

Sei (\mathbb{K}, σ) ein involutiver Ring, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$.

(1) Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ definieren wir die **adjungierte Matrix**

$$A^\dagger := \overline{A}^T \in \mathbb{K}^{n \times m} \quad \text{durch} \quad A = (a_{ij})_{ij} \mapsto A^\dagger = (a_{ij}^\sigma)_{ji}.$$

Wir verbinden Transposition und Konjugation zur „Transkonjugation“. Im Spezialfall $\sigma = \text{id}$ ist $A \mapsto A^\dagger = A^T$ ganz einfach die Transposition.

(2) Gilt $A^\dagger = A$, so heißt die Matrix A **selbstadjungiert** oder **hermitesch**. Im Spezialfall $\sigma = \text{id}$ nennen wir die Matrix $A = A^T$ **symmetrisch**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2+i & 3i \\ 5 & 1 \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} 2-i & 5 \\ -3i & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{symmetrisch } S = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{hermitesch } H = \begin{bmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 5 \end{bmatrix}.$$

Beispiel: Auf $V = \mathbb{K}^n$ betrachten wir die hermitesche Standardform:

$$\langle - | - \rangle_{\mathbb{K}^n} : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u | v \rangle := u^\dagger v = \sum_{i=1}^n u_i^\sigma v_i$$

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ sowie $u \in \mathbb{K}^m$ und $v \in \mathbb{K}^n$ gilt:

$$\langle u | A v \rangle_{\mathbb{K}^m} = \langle A^\dagger u | v \rangle_{\mathbb{K}^n}$$

Beweis: Dank Matrixkalkül können wir dies leicht nachrechnen:

$$\langle A^\dagger u | v \rangle_{\mathbb{K}^m} \stackrel{\text{Def}}{=} (A^\dagger u)^\dagger v \stackrel{\text{Ad}}{=} (u^\dagger A) v \stackrel{\text{Ass}}{=} u^\dagger (A v) \stackrel{\text{Def}}{=} \langle u | A v \rangle_{\mathbb{K}^m}$$

☺ Wir können also A zu A^\dagger und zurück „umwälzen“ auf die andere Seite! Ist A selbstadjungiert, so können wir $A = A^\dagger$ unverändert umwälzen: Wir erhalten dasselbe Skalarprodukt, egal wo wir A anwenden!

Die Operation $A \mapsto A^\dagger$ heißt **Adjunktion**. Sie ist semilinear und antimultiplikativ, d.h. $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$. Das passt zum Umwälzen:

$$\langle u | A B v \rangle = \langle A^\dagger u | B v \rangle = \langle B^\dagger A^\dagger u | v \rangle$$

⚠ Bitte verwechseln Sie niemals die *adjungierte* Matrix A^\dagger aus T1A mit der *adjunkten* Matrix $A' = \text{adj}(A)$ aus Cramers Inversionsformel O2R. Das ist etwas ganz anderes! Die sprachliche Nähe ist unglücklich, doch die Tradition lässt sich leider nicht mehr ändern.

Man nennt A^\dagger auch die „hermitesch transponierte Matrix“ oder auch die „transponiert-konjugierte Matrix“, was etwas länger aber auch klarer ist. Kurz doch treffend scheint „transkonjugiert“ als guter Kompromiss.

In der Literatur sind die Schreibweisen $A^\dagger = A^* = A^H = \dots$ üblich. Das Symbol „†“ heißt engl. „Dagger“, $\text{\LaTeX}\ \dagger$, dt. „Dolch“.

Die Adjunktion $\dagger : \mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times m} : A \mapsto A^\dagger$ ist selbstinvers $(A^\dagger)^\dagger = A$, und semilinear gemäß $(A\lambda)^\dagger = \lambda^\sigma A^\dagger$, additiv ein Isomorphismus, doch multiplikativ ein Anti-Isomorphismus, da sie die Reihenfolge umdreht.

Ist (\mathbb{K}, σ) ein involutiver Ring, so auch $(\mathbb{K}^{n \times n}, \dagger)$ mit $A^\dagger = (A^\sigma)^T$. Spur, Determinante und Eigenwerte werden dabei konjugiert.

Wir wollen nun von Matrizen übergehen zu linearen Abbildungen. Hierzu seien $(V, \langle - | - \rangle_V)$ und $(U, \langle - | - \rangle_U)$ hermitesche Räume über (\mathbb{K}, σ) . Wir denken an Vektorräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$ und einem Skalarprodukt, insbesondere an \mathbb{K}^n mit dem Standardskalarprodukt.

Zwei lineare Abbildungen $(f, g) : V \rightrightarrows U$ heißen **adjungiert**, falls

$$\langle u | f(v) \rangle_U = \langle g(u) | v \rangle_V$$

gilt für alle $u \in U$ und $v \in V$. Anschaulich: Wir können f zu g und zurück „umwälzen“ auf die andere Seite. In der folgenden Definition müssen wir allerdings besonders sorgsam und vorsichtig vorgehen: Weder Existenz noch Eindeutigkeit einer Adjungierten g zu f sind selbstverständlich

Für beliebige Sesquilinearformen müssten wir genauer sagen, $g : U \rightarrow V$ ist linksadjungiert zu $f : V \rightarrow U$, und ebenso f ist rechtsadjungiert zu g . Da die hier betrachteten Formen jedoch hermitesch sind, müssen wir dies nicht unterscheiden, denn die Involution liefert sofort das Gegenstück:

$$\langle f(v) | u \rangle_U = \langle v | g(u) \rangle_V$$

Definition T1b: selbst/adjungierte Homomorphismen

Seien $(V, \langle - | - \rangle_V)$ und $(U, \langle - | - \rangle_U)$ hermitesche Räume über (\mathbb{K}, σ) , also \mathbb{K} -lineare Räume ausgestattet mit hermiteschen Sesquilinearformen. Wir denken an $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$ und Räume mit Skalarprodukt.

(1) Ein Endomorphismus $f : V \rightarrow V$ heißt **selbstadjungiert**, falls gilt:

$$\langle u | f(v) \rangle_V = \langle f(u) | v \rangle_V \quad \text{für alle } u, v \in V$$

Wir nennen f dann auch **hermitesch**, im Spezialfall $\sigma = \text{id}$ **symmetrisch**.

(2) Ein Paar $(f, g) : V \rightleftarrows U$ von \mathbb{K} -linearen Abbildungen $f : V \rightarrow U$ und $g : U \rightarrow V$ heißt zueinander **adjungiert**, falls gilt:

$$\langle u | f(v) \rangle_U = \langle g(u) | v \rangle_V \quad \text{für alle } u \in U \text{ und } v \in V.$$

Dank Konjugation mit σ ist dies äquivalent zu $\langle v | g(u) \rangle_V = \langle f(v) | u \rangle_U$. Demnach ist auch das umgedrehte Paar $(g, f) : U \rightleftarrows V$ adjungiert.

(3) Ist $\langle - | - \rangle_V$ regulär, etwa ein Skalarprodukt, so ist g eindeutig.

Beweis: (3) Seien $g, \tilde{g} : U \rightarrow V$ adjungiert zu f und $u \in U$. Dann gilt

$$\langle g(u) | v \rangle_V = \langle u | f(v) \rangle_U = \langle \tilde{g}(u) | v \rangle_V$$

für alle $v \in V$, somit $\langle g(u) - \tilde{g}(u) | v \rangle = 0$ also $g(u) = \tilde{g}(u)$. QED

☺ Meist betrachten wie Skalarprodukte, daraus folgt Regularität.

Im Beweis testen wir dann ganz einfach mit $v = g(u) - \tilde{g}(u)$ und erhalten damit $\|g(u) - \tilde{g}(u)\|^2 = 0$, also $g(u) = \tilde{g}(u)$.

Wir nennen dann $g = f^\dagger$ den **adjungierten Homomorphismus** zu f . Entsprechend ist $f = g^\dagger$ der adjungierte Homomorphismus zu g .

Zur Betonung sagen wir auch **euklidisch / hermitesch adjungiert**, um den Bezug zu den verwendeten Skalarprodukten $\langle - | - \rangle$ zu betonen und mögliche Verwechslung mit anderen Adjunktionsbegriffen zu vermeiden.

⚠ Eindeutigkeit und Existenz sind keineswegs selbstverständlich. Im obigen Beweis der Eindeutigkeit ist die Regularität wesentlich.

🤔 Woher wissen wir, dass diese Vorsicht objektiv notwendig ist und nicht bloß ein Artefakt unserer umständlichen Argumentation?

Beispiele: Als heilsame Warnung hier zwei extreme Gegenbeispiele.

(1) Wir betrachten $U = \mathbb{K}^m$ mit $\langle - | - \rangle = 0$ und $V = \mathbb{K}^n$ mit $\langle - | - \rangle = 0$. Hier ist *jedes* Homomorphismenpaar $(f, g) : V \rightleftarrows U$ adjungiert, denn es erfüllt $\langle u | f(v) \rangle_U = 0 = \langle g(u) | v \rangle_V$ für alle $u \in U$ und $v \in V$.

(2) Wir betrachten $U = \mathbb{K}^m$ mit $\langle - | - \rangle = u^\dagger v$ und $V = \mathbb{K}^n$ mit $\langle u, v \rangle = 0$.

(2a) Zu $f = 0 : V \rightarrow U$ ist *jede* lineare Abbildung $g : U \rightarrow V$ adjungiert, denn hier gilt $\langle u | f(v) \rangle_U = 0 = \langle g(u) | v \rangle_V$ für alle $u \in U$ und $v \in V$.

(2b) Zu $f \neq 0 : V \rightarrow U$ ist *keine* lineare Abbildung $g : U \rightarrow V$ adjungiert, denn hier gilt $\langle u | f(v) \rangle_U \neq 0 = \langle g(u) | v \rangle_V$ für geeignete $u \in U$ und $v \in V$.

Beispiel T1c: adjungierte Homomorphismen

(1) Wir betrachten $U = \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ mit Standardform $\langle u, v \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k^\sigma v_k$. Für $(f, g) : U \rightleftarrows U$ mit $f(v)_k = v_{k+1}$ und $g(u)_k = u_{k-1}$ gilt $f^\dagger = g = f^{-1}$.

(2) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ betrachten wir diesen Raum $U = \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ und seine Vervollständigung $V = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{K}) = \{v : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K} \mid \|v\|_2^2 := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |v_k|^2 < \infty\}$. Zur Inklusion $f : U \hookrightarrow V$ existiert keine Adjungierte $g : V \rightarrow U$.

Beweis: (1) Übung! (2) Im Raum $U = \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ haben wir die ONBasis $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Auf V ist $\langle u, v \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k^\sigma v_k$ absolut konvergent dank Cauchy-Schwarz: Es gilt $\sum_{|k| \leq n} |u_k^\sigma v_k| \leq (\sum_{|k| \leq n} |u_k|^2)^{1/2} \cdot (\sum_{|k| \leq n} |v_k|^2)^{1/2} \leq \|u\|_2 \|v\|_2$, also $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k^\sigma v_k| \leq \|u\|_2 \|v\|_2 < \infty$. Somit ist $\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ wohldefiniert. Dies ist ein Skalarprodukt: sesquilinear, hermitesch, positiv definit.

Wir wählen nun $v \in V$ mit unendlichem Träger, etwa $v = (2^{-|k|})_{k \in \mathbb{Z}} \in V$. Wäre $g : V \rightarrow U$ adjungiert, so $\langle g(v) | e_k \rangle_U = \langle v | f(e_k) \rangle_V = \langle v | e_k \rangle_V = v_k$. Demnach hätte $g(v) \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ unendlichen Träger, ein Widerspruch! QED

Seien $\mathcal{U} = (u_i)_{i=1}^m$ zu U und $\mathcal{V} = (v_j)_{j=1}^n$ zu V Orthonormalbasen über \mathbb{K} .

Dies erreichen wir etwa durch das Gram-Schmidt-Verfahren S3c. Damit: Für $f : V \rightarrow U$ linear mit Darstellungsmatrix $A = M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(f) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt

$$\langle u_i | f(v_j) \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \langle u_i | \sum_{k=1}^m u_k a_{kj} \rangle \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{k=1}^m \langle u_i | u_k \rangle a_{kj} \stackrel{\text{ONB}}{=} a_{ij}.$$

Ebenso für $g : U \rightarrow V$ linear mit $B = M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(g) \in \mathbb{K}^{n \times m}$ gilt $b_{ji} = \langle v_j | g(u_i) \rangle$.

Satz T10: adjungierte Homomorphismen und ihre Matrizen

(1) Genau dann ist das Paar $(f, g) : V \rightleftarrows U$ adjungiert, kurz $g = f^\dagger$, wenn ihre ONB-Darstellungsmatrizen adjungiert sind, also $B = A^\dagger$.

Genau dann ist $f : V \rightarrow V$ selbstadjungiert, kurz $f^\dagger = f$, wenn die ONB-Darstellungsmatrix $A = M_{\mathcal{V}}(f)$ selbstadjungiert ist, also $A^\dagger = A$.

(2) Zu jedem Homomorphismus $f : V \rightarrow U$, mit endlichen ONBasen, existiert genau ein adjungierter Homomorphismus $f^\dagger : U \rightarrow V$,

Aufgabe: Rechnen Sie dies sorgsam nach! **Beweis:** (1) „ \Rightarrow “: Wir finden

$$b_{ji} \stackrel{\text{ONB}}{=} \langle v_j | g(u_i) \rangle \stackrel{S2}{=} \overline{\langle g(u_i) | v_j \rangle} \stackrel{\text{Ad}}{=} \overline{\langle u_i | f(v_j) \rangle} \stackrel{\text{ONB}}{=} \overline{a_{ij}}.$$

„ \Leftarrow “: Für je zwei Vektoren $u = \sum_{i=1}^m u_i \lambda_i \in U$ und $v = \sum_{j=1}^n v_j \mu_j \in V$ gilt $\langle g(u) | v \rangle = \sum_{i,j,k} \langle v_k b_{ki} \lambda_i | v_j \mu_j \rangle = \sum_{i,j,k} \overline{b_{ki}} \lambda_i \langle v_k | v_j \rangle \mu_j = (B\lambda)^\dagger \mu$ und $\langle u | f(v) \rangle = \sum_{i,j,\ell} \langle u_i \lambda_i | u_\ell a_{\ell j} \mu_j \rangle = \sum_{i,j,\ell} \lambda_i \langle u_i | u_\ell \rangle a_{\ell j} \mu_j = \lambda^\dagger (A\mu)$. Aus $A = B^\dagger$ folgt $\langle u | f(v) \rangle = \langle g(u) | v \rangle$ für alle $u \in U$ und $v \in V$.

(2) Eindeutigkeit T1B(3) gilt allgemein für reguläre HFormen. Existenz: In endlicher Dimension gelingt uns die Konstruktion mit ONBasen $\mathcal{U} = (u_i)_{i=1}^m$ zu U und $\mathcal{V} = (v_j)_{j=1}^n$, etwa dank Gram-Schmidt S3c: Wir stellen $f : V \rightarrow U$ durch die Matrix $A = M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(f) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ dar. Die adjungierte Matrix $B = A^\dagger \in \mathbb{K}^{n \times m}$ stellt $g = f^\dagger : U \rightarrow V$ dar. QED

☹ Woher wissen wir, dass diese Vorsicht objektiv notwendig ist und nicht bloß ein Artefakt unserer umständlichen Argumentation?

⚠ Adjungierte existieren nicht immer, siehe Gegenbeispiel T1c(2).

Satz T1E: reelles Spektrum und orthogonale Eigenräume

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle - | - \rangle)$ unitär und $f : V \rightarrow V$ selbstadjungiert.

- (1) Jeder Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ von f ist reell, kurz $\sigma(f; \mathbb{K}) \subseteq \mathbb{R}$.
- (2) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal: Gilt $f(u) = u\lambda$ und $f(v) = v\mu$ für $u, v \in V$ und $\lambda \neq \mu$ in \mathbb{R} , so folgt $u \perp v$.
- (3) Ist $U \leq V$ invariant, also $f(U) \subseteq U$, so auch $U^\perp \leq V$, also $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

Beweis: (1) Für $f(v) = v\lambda$ mit $v \in V \setminus \{0\}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\langle v | v \rangle \lambda \stackrel{\text{Lin}}{=} \langle v | v\lambda \rangle \stackrel{\text{Eig}}{=} \langle v | f(v) \rangle \stackrel{\text{sad}}{=} \langle f(v) | v \rangle \stackrel{\text{Eig}}{=} \langle v\lambda | v \rangle \stackrel{\text{slin}}{=} \bar{\lambda} \langle v | v \rangle$$

Dank $\langle v | v \rangle \in \mathbb{R}_{>0}$ schließen wir $\lambda = \bar{\lambda}$, also $\lambda \in \mathbb{R}$. (2) Wir rechnen:

$$0 \stackrel{\text{sad}}{=} \langle f(u) | v \rangle - \langle u | f(v) \rangle \stackrel{\text{Eig}}{=} \langle u\lambda | v \rangle - \langle u | v\mu \rangle \stackrel{\text{Lin}}{\stackrel{(\dagger)}{=}} (\lambda - \mu) \langle u | v \rangle$$

Dank $\lambda \neq \mu$ folgt $\langle u | v \rangle = 0$, also $u \perp v$. (3) Aus $v \in U^\perp$ folgt $f(v) \in U^\perp$: Für alle $u \in U$ gilt $\langle u | f(v) \rangle \stackrel{\text{sad}}{=} \langle f(u) | v \rangle \stackrel{\text{inv}}{=} 0$ dank $f(u) \in U$. QED

Zur Betonung diese wichtige Erkenntnis in poetischen Worten: Jeder selbstadjungierte Endomorphismus hat ausschließlich reelle Eigenwerte und zueinander orthogonale Eigenräume.

Über \mathbb{R} ist (1) trivial, daher betrachten wir gleich den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die Aussage (2) hingegen ist in beiden Fällen $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wichtig! Der Orthogonalraum (3) wird uns zur Induktion verhelfen.

Erinnerung: Zu $U \leq V$ haben wir den Orthogonalraum S1G

$$U^\perp := \{v \in V | \forall u \in U : \langle u | v \rangle = 0\} \leq V.$$

Gilt zudem $\dim U < \infty$, so folgt $V = U \oplus U^\perp$ dank S1Q.

Da es keinen Mehraufwand kostet, führe ich das Beispiel \mathbb{H} weiter mit. Die wichtigen Anwendungen betreffen \mathbb{R} und \mathbb{C} , doch allgemein den Dreischritt $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mitzudenken gemahnt uns zur sauberen Arbeit.

☺ Bislang haben wir noch nicht endliche Dimension benötigt. Zur Illustration nenne ich ein unendlich-dimensionales Beispiel.

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ betrachten wir \mathbb{R}^3 mit Standardskalarprodukt $\langle u | v \rangle = u^T v$. Die folgenden Matrizen A, B, C sind symmetrisch, also selbstadjungiert.

Aufgabe: Finden Sie zu A, B, C jeweils eine orthonormale Eigenbasis!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A: Hier gilt $\text{Eig}(A, k) = \langle e_k \rangle_{\mathbb{R}}$ für $k = 1, 2, 3$, also $\mathbb{R}^3 = \bigoplus_{k=1}^3 \text{Eig}(A, k)$.

B: Für $u = (1, 1, 1)^T$ gilt $Bu = 3u$. Für $v = (1, -1, 0)^T$ gilt $Bv = 0v$.

Für $w = u \times v = (1, 1, -2)^T$ gilt $Bw = 0w$. Orthonormale Eigenbasis:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad Q^T Q = I, \quad Q^T B Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C: Hier gilt $C = B + 2I$, also $Q^T C Q = Q^T B Q + 2I = \text{diag}(5, 2, 2)$.

Schon lange, seit Satz P1A, wissen wir für Endomorphismen $f : V \rightarrow V$: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Dank Satz T1E wissen wir nun noch wesentlich mehr:

Jeder selbstadjungierte Endomorphismen $f : V \rightarrow V$

hat reelle Eigenwerte und orthogonale Eigenräume.

☺ Dies können wir unmittelbar nutzen, wie im obigen Zahlenbeispiel, für symmetrische Matrizen über \mathbb{R} oder hermitesche Matrizen über \mathbb{C} .

☺ Beliebter Trick speziell in Dimension 3: Haben wir zu $A = A^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ bereits zwei linear unabhängige Eigenvektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$ gefunden, $Au = u\lambda$ und $Av = v\mu$, so erhalten wir einen dritten durch $w = u \times v$.

Aufgabe: Warum erfüllt $w = u \times v$ die Eigengleichung $Aw = w\nu$?

Lösung: Wir haben $\chi_A = (X - \lambda)(X - \mu)(X - \nu)$ mit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Sind alle drei λ, μ, ν verschieden, so gilt $\text{Eig}(A, \lambda) = \langle u \rangle_{\mathbb{R}}$ und $\text{Eig}(A, \mu) = \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$ und als dritter orthogonaler Summand $\text{Eig}(A, \nu) = \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$. Ebenso gelingt jeder der Fälle $\lambda = \mu \neq \nu$ und $\lambda = \nu \neq \mu$ und $\lambda \neq \nu = \mu$ und $\lambda = \mu = \nu$.

☹ Hat jeder Endomorphismus eine Adjungierte? Allgemein nicht:

Beispiel T1F: Ableitung und Adjunktion

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ betrachten wir den Raum $U = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{K})$ aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ mit ihrem Standardskalarprodukt $\langle f | g \rangle = \int_{t=0}^1 \overline{f(t)} g(t) dt$.

(0) Die Ableitung $\partial = d/dt : U \rightarrow U$ hat keine Adjungierte $\partial^\dagger : U \rightarrow U$.

Beweis: Angenommen, $\partial^\dagger : U \rightarrow U$ wäre adjungiert zu $\partial : U \rightarrow U$. Nach Definition bedeutet das $\langle \partial^\dagger f | g \rangle = \langle f | \partial g \rangle$. Ausgeschrieben:

$$\int_{t=0}^1 \overline{\partial^\dagger f(t)} g(t) dt \stackrel{\text{Ad}}{=} \int_{t=0}^1 \overline{f(t)} g'(t) dt$$

$$\stackrel{\text{part}}{=} \left[\overline{f(t)} g(t) \right]_{t=0}^1 - \int_{t=0}^1 \overline{f'(t)} g(t) dt$$

☺ Auf dem Teilraum $V = \{ f \in U \mid f(0) = f(1) \} \leq U$ aller Funktionen f mit periodischer Randbedingung $f(0) = f(1)$ ist $\partial^\dagger = -\partial$ die Adjungierte!

Wir zeigen, dass die Ableitung ∂ auf ganz U keine Adjungierte ∂^\dagger hat. Zu jedem $f \in U$ hätten wir dann $h = (\partial^\dagger + \partial)f$ mit der miraculösen Eigenschaft $\int_{t=0}^1 \overline{h(t)} g(t) dt = f(1)g(1) - f(0)g(0)$ für alle $g \in U$. Speziell für $f(t) = t - 1$ erhalten wir $f(0) = -1$ und $f(1) = 0$.

Problem: Wir suchen $h \in U$ mit $\int_{t=0}^1 \overline{h(t)} g(t) dt = g(0)$ für alle $g \in U$. Daraus folgt $h(x) = 0$ in jedem Punkt $x \in]0, 1]$, also ein Widerspruch!

Beweis dazu: Angenommen, es gäbe $x \in]0, 1]$ mit $h(x) =: a \neq 0$, also $h(x) \bar{a} = 2\delta$ mit $\delta = |a|^2/2 > 0$. Dank Stetigkeit existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass $\text{Re}(h(t) \bar{a}) \geq \delta > 0$ für alle $t \in [x \pm \varepsilon]$ gilt. Dazu existiert eine Testfunktion $g \in U$ mit $g(0) = 0$ sowie $g \geq 0$ und $\text{supp } g \subseteq [x \pm \varepsilon]$ und Gesamtmasse $\int_{t=0}^1 g(t) dt = 1$. Es folgt $\text{Re}(\int_{t=0}^1 \overline{h(t)} a g(t) dt) \geq \delta > 0$. Das zeigt $\langle h | ag \rangle \neq 0$. Wir folgern $h(x) = 0$ für alle $x \in]0, 1]$.

Daraus folgt $\langle h | g \rangle = 0$ für alle $g \in U$, also $\langle h | g \rangle \neq g(0)$ für $g = 1 \in U$. Zu $f(t) = t - 1$ existiert die ersehnte Funktion $h = (\partial^\dagger + \partial)f$ also nicht. Somit hat die Ableitung $\partial : U \rightarrow U$ keine Adjungierte $\partial^\dagger : U \rightarrow U$. QED

Beispiel T1F: Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit Periode $T > 0$

(1) Die Menge aller Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist ein \mathbb{C} -Vektorraum und die Teilmenge aller T -periodischen Funktionen ein Untervektorraum. Da wir zudem differenzieren wollen, betrachten wir den Unterraum

$$V = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid T\text{-periodisch und beliebig oft diff'bar} \}.$$

Kennen Sie Beispiele solcher Funktionen? Ja! Die Allerschönsten sind:

$$e_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto e^{ik\omega t} \quad \text{mit } \omega = 2\pi/T \text{ und } k \in \mathbb{Z}$$

Weitere Beispiele sind $\operatorname{Re} e_k(t) = \cos(k\omega t)$ und $\operatorname{Im} e_k(t) = \sin(k\omega t)$.

(2) Kennen Sie auf dem Raum V über \mathbb{C} ein Skalarprodukt? Ja!

$$V \times V \rightarrow \mathbb{C}: (f, g) \mapsto \langle f | g \rangle := \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Dies ist tatsächlich sesquilinear, hermitesch und positiv definit. (S2D)

Beispiel T1F: Die Ableitung $\frac{1}{i} \frac{d}{dt}$ ist selbstadjungiert.

(3) Ist der Ableitungsoperator $\frac{1}{i} \frac{d}{dt}: V \rightarrow V$ selbstadjungiert?

$$\left\langle f \left| \frac{1}{i} \frac{d}{dt} g \right\rangle = \left\langle \frac{1}{i} \frac{d}{dt} f \mid g \right\rangle$$

Ja! Dies gelingt erfreulich leicht dank partieller Integration:

$$\frac{1}{i} \int_{t=0}^T \overline{f(t)} g'(t) dt \stackrel{\text{part}}{=} \frac{1}{i} \left[\overline{f(t)} g(t) \right]_{t=0}^T - \frac{1}{i} \int_{t=0}^T \overline{f'(t)} g(t) dt$$

(4) Sind $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ Eigenfunktionen? zudem paarweise orthogonal?

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dt} e^{ik\omega t} = k\omega e^{ik\omega t}$$

Die Eigenfunktionen $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ haben reelle Eigenwerte $(k\omega)_{k \in \mathbb{Z}}$ und sind demnach orthogonal dank Satz T1E – oder direkt nachrechnen S345!

😊 Das ist die genial-einfache Grundidee der Fourier-Theorie:

- 1 Die Eigenfunktionen $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ als Basis von $U = \langle e_k \mid k \in \mathbb{Z} \rangle_{\mathbb{C}} \leq V$ diagonalisieren die Ableitung $\frac{1}{i} \frac{d}{dt}: U \rightarrow U$ dank $\frac{1}{i} \frac{d}{dt} e_k = k\omega e_k$.
- 2 Auf V über \mathbb{C} haben wir das Skalarprodukt $\langle - | - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$. Der Ableitungsoperator erweist sich nun als selbstadjungiert.
- 3 Fourier-Analyse heißt Bestapproximation in $U_n = \langle e_k \mid -n < k < n \rangle_{\mathbb{C}}$. Die Fourier-Koeffizienten erhalten wir effizient durch Integration.

Damit zerlegen wir Signale in ihre harmonische Grundschwingungen, als explizites Zahlenbeispiel kennen Sie die Sägezahnkurve S353.

😊 Funktionenräume sind besonders lehrreiche Beispiele:

- 1 Sie sind relevant in der Analysis und vielen Anwendungen.
- 2 Wir rechnen nicht unmittelbar in einem Koordinatenraum.
- 3 Viele unserer Techniken greifen selbst hier erfreulich effizient!

Ich betone dabei zunächst die linear-algebraische Sichtweise. Die Analysis ergänzt dies durch wirksame Konvergenzsätze. Die Numerik liefert Rechenverfahren und Fehlerabschätzungen. Dies gipfelt schließlich in effizienten Algorithmen, siehe FFT (§E7). Alle Aspekte der Mathematik arbeiten erneut harmonisch zusammen!

Lemma T1c: Existenz eines ersten Eigenpaars

- (1) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ unitär und $f : V \rightarrow V$ selbstadjungiert. Gilt $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, so existiert ein Eigenpaar $(v, \lambda) \in V \times \mathbb{R}$.
- (2) Jede selbstadjungierte Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hat einen reellen Eigenwert.

Nach Wahl einer ONBasis sind (1) und (2) äquivalent dank Satz T1D.

Algebraischer Beweis: (a) Komplexer Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Zu $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zerfällt das Polynom $\chi_A \in \mathbb{C}[X]_n^1$ über \mathbb{C} dank FTA E3C. Wegen $n \geq 1$ existiert ein Eigenpaar $(v, \lambda) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ (P2A). Dank $A^\dagger = A$ gilt $\lambda \in \mathbb{R}$ (T1E).

(b) Reeller Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Wir betrachten $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$. Dank (a) existiert $(v, \lambda) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ mit $Av = v\lambda$. Konjugation ergibt $A\bar{v} = \bar{v}\lambda$. Für $u = \text{Re}(v) = \frac{1}{2}(v + \bar{v}) \in \mathbb{R}^n$ erhalten wir $Au = u\lambda$.

(c) Quaternionaler Fall $\mathbb{K} = \mathbb{H}$: Wir betrachten $V = \mathbb{H}^n$ als \mathbb{C} -Vektorraum und darauf $A : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n : x \mapsto Ax$ als \mathbb{C} -linear. Nun genügt (a). QED

Im Folgenden wollen wir orthonormale Eigenbasen konstruieren. Das geschieht am besten induktiv. Als Start benötigen wir dazu ein erstes Eigenpaar (v, λ) . Der Schritt ist dann leicht: Abspalten, *rinse and repeat!*

Das erinnert uns stark an den Fundamentalsatz der Algebra (FTA E3C): Wir wollen jedes Polynom $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]_n^1$ in Linearfaktoren zerlegen gemäß $P = \prod_{j=1}^n (X - \lambda_j)$. Dazu genügt uns, eine erste Nullstelle $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ zu finden. Der Schritt ist dann leicht: Abspalten, *rinse and repeat!*

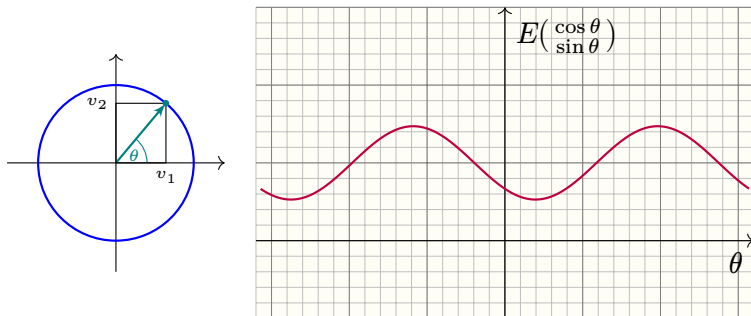
Unser algebraischer Beweis über \mathbb{C} ist inzwischen bewährte Routine: Gerne nutzen wir, dass der Körper \mathbb{C} algebraisch abgeschlossen ist, also jedes Polynom über \mathbb{C} zerfällt. Speziell für Eigenpaare selbstadjungierter Abbildungen gibt es jedoch eine faszinierende geometrische Alternative:

Geometrisch-physikalisch-analytischer Beweis: Die folgende elegante Energiemethode beweist die Existenz eines Eigenpaares $(v, \lambda) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{R}$ einheitlich in allen drei Fällen $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Der Fundamentalsatz E3C wird dabei durch ein geniales Kompaktheitsargument ersetzt.

Jedem normierten Vektor v weisen wir seine Energie $E(v) = v^\dagger A v$ zu. Das ist die quadratische Form eingeschränkt auf die Einheitskugel:

$$\mathbb{S}(\mathbb{K}^n) := \{v \in \mathbb{K}^n \mid \|v\| = 1\}, \quad \text{hier } A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

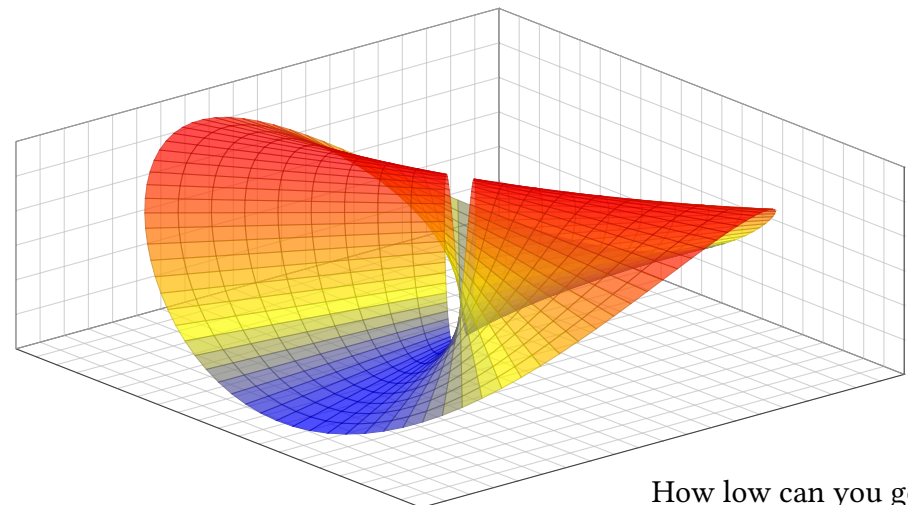
$$E : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R} : v \mapsto v^\dagger A v,$$



Hier ist $\mathbb{S}(\mathbb{K}^n) := \{v \in \mathbb{K}^n \mid \|v\| = 1\}$ die Einheitskugel, also die Menge aller normierten Vektoren, der Länge 1. In unserem Beispiel ist $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ die Einheitskreislinie; diese parametrisieren wir durch $\theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$.

Wir erklären die Energie für alle Vektoren $v \neq 0$ durch Normierung:

$$E : \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : E(v) = \frac{v^\dagger A v}{v^\dagger v}$$



How low can you go?

Satz T1H: Energiemethode

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle - | - \rangle)$ unitär und $f : V \rightarrow V$ selbstadjungiert.

(0) Wir betrachten die Sphäre $\mathbb{S}(V) := \{x \in V \mid \|x\| = 1\}$ und darauf

$$E : V \supset \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{K} : x \mapsto E(x) = \langle x \mid f(x) \rangle.$$

(1) Ist $u \in \mathbb{S}$ eine Minimalstelle, also $E(u) \leq E(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}$, dann ist u ein Eigenvektor, also $f(u) = u\lambda$ mit $\lambda = E(u) \in \mathbb{R}$.

(2) Für $V = \mathbb{K}^n$ nimmt E auf \mathbb{S} Minimum und Maximum an, somit existiert zu f mindestens ein Eigenpaar $(u, \lambda) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}$.

Beweis: (0) Es gilt $E(x) \in \mathbb{R}$, denn $\overline{\langle x \mid f(x) \rangle} = \langle f(x) \mid x \rangle = \langle x \mid f(x) \rangle$.

(1) Wir zerlegen $f(u) = u\lambda + v$ orthogonal mit $\lambda = \langle u \mid f(u) \rangle$ und $v \perp u$.

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto E\left(\frac{u + vt}{\|u + vt\|}\right) = \dots = \frac{\lambda + 2t\|v\|^2 + t^2\langle v \mid f(v) \rangle}{1 + t^2\|v\|^2} =: h(t)$$

Es gilt $h'(0) = 2\|v\|^2/\|u\|^2$. Ist u extremal, so folgt $h'(0) = 0$, also $v = 0$.

Aufgabe: Rechnen Sie (1) sorgsam nach und begründen Sie (2).

Lösung: Wir zerlegen $f(u) = u\lambda + v$. Der Fourier-Koeffizient $\lambda = \langle u \mid f(u) \rangle$ garantiert $v \perp u$, siehe S2F. Wir rechnen geduldig:

$$\begin{aligned} E\left(\frac{u + vt}{\|u + vt\|}\right) &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\langle u + vt \mid f(u + vt) \rangle}{\langle u + vt \mid u + vt \rangle} \stackrel{\text{Vor}}{=} \frac{\langle u + vt \mid u\lambda + v + f(v)t \rangle}{\|u\|^2 + \|v\|^2 t^2} \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \frac{\|u\|^2 \lambda + \langle u \mid v \rangle + \langle u \mid f(v) \rangle t + \langle vt \mid u\lambda \rangle + \|v\|^2 t + \langle v \mid f(v) \rangle t^2}{\|u\|^2 + \|v\|^2 t^2} \\ &\stackrel{\text{sad}}{=} \frac{\lambda + 2t\|v\|^2 + t^2\langle v \mid f(v) \rangle}{1 + t^2\|v\|^2} \end{aligned}$$

Im letzten Schritt nutzen wir erneut, dass f selbstadjungiert ist:

$$\langle u \mid f(v) \rangle \stackrel{\text{sad}}{=} \langle f(u) \mid v \rangle \stackrel{\text{Vor}}{=} \langle u\lambda + v \mid v \rangle \stackrel{\text{Vor}}{=} \|v\|^2$$

(2) Wir nutzen dankbar die Werkzeuge der Analysis / Topologie des \mathbb{R}^N : Für $V = \mathbb{K}^n$ ist die Sphäre $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{K}^n$ kompakt. Darauf ist $E : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Daher nimmt die Funktion E ihr Infimum und ihr Supremum an. QED

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle - | - \rangle)$ unitär und $f : V \rightarrow V$ selbstadjungiert. Somit ist die Form $(u, v) \mapsto \langle u \mid f(v) \rangle$ sesquilinear und hermitesch, denn

$$\overline{\langle u \mid f(v) \rangle} \stackrel{\text{S2}}{=} \langle f(v) \mid u \rangle \stackrel{\text{Ad}}{=} \langle v \mid f(u) \rangle.$$

Aus $\langle - | - \rangle$ mit f bilden wir so $\langle - \mid f - \rangle$ und die **quadratische Form**

$$q_f : V \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \langle x \mid f(x) \rangle.$$

Für $x \in V \setminus \{0\}$ ist dann die **Energie** aka der **Rayleigh-Quotient**

$$E : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\langle x \mid f(x) \rangle}{\langle x \mid x \rangle}.$$

Dieser Wert ist invariant unter Skalierung mit $\lambda \in \mathbb{K}^\times$:

$$E(x\lambda) = \frac{\langle x\lambda \mid f(x\lambda) \rangle}{\langle x\lambda \mid x\lambda \rangle} = \frac{\langle x \mid f(x) \rangle \cdot |\lambda|^2}{\langle x \mid x \rangle \cdot |\lambda|^2} = E(x)$$

Daher genügt es, E auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}(V)$ zu betrachten.

Diese Sichtweise ist insbesondere in der Physik beliebt und bewährt, daher kommt auch unsere sprechende Bezeichnung als „Energie“.

Ein quantenmechanisches System beschreiben wir durch einen unitären Raum $(V, \langle - | - \rangle)$ über \mathbb{C} . Jedes Element $x \in V$ beschreibt einen Zustand. Die selbstadjungierte Abbildung $f : V \rightarrow V$ beschreibt eine Observable oder Messung. Im Zustand $x \in V$ ist der erwartete Messwert $E(x) \in \mathbb{R}$.

Genauer beschreiben x und $x\lambda$ denselben physikalischen Zustand. Daher normieren wir jeden Zustand x standardmäßig zu $x/\|x\| \in \mathbb{S}$. Auf der Einheitssphäre \mathbb{S} vereinfacht sich die Energieformel zu

$$E : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R} : E(x) = \langle x \mid f(x) \rangle.$$

So viel als Hintergrund zur physikalischen Allgemeinbildung. Schon die mathematischen Eigenschaften sind wunderschön und nützlich, darauf dürfen Sie sich gerne fokussieren. In endlicher Dimension ist die Sphäre \mathbb{S} kompakt, daher nimmt die Energie E ihre Extrema an.

Satz T1: Spektralsatz I, selbstadjungierte Endomorphismen

(1) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist jede selbstadjungierte Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unitär diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten: Zu $A = A^\dagger$ existiert ein unitärer Basiswechsel $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ so, dass

$$Q^\dagger A Q = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{mit} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

(2) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle - | - \rangle)$ unitär mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n \in \mathbb{N}$. Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus $f : V \rightarrow V$ existiert eine orthonormale Eigenbasis (v_1, \dots, v_n) mit reellen Eigenwerten.

Äquivalenz: Wir haben „(2) \Rightarrow (1)“ mit $Q = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ dank T1D, ONB heißt $Q^\dagger Q = I$, Eigenbasis heißt $Q^{-1} A Q = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

☺ Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist unsere Basiswechselmatrix $Q \in \text{SO}_n \mathbb{R}$ orthogonal. Jede symmetrische reelle Matrix lässt sich orthogonal diagonalisieren.

☺ Über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist unsere Basiswechselmatrix $Q \in \text{SU}_n \mathbb{C}$ unitär. Jede hermitesche komplexe Matrix lässt sich unitär diagonalisieren.

Beweis: (2) Wir führen Induktion über n . Für $n \leq 1$ ist die Aussage klar. Sei nun $n \geq 2$ und die Behauptung für $n - 1$ sei bereits bewiesen.

Dank T1G/T1H existiert zu $f : V \rightarrow V$ ein Eigenpaar $(v_1, \lambda_1) \in V \times \mathbb{R}$. Wir normieren den Eigenvektor $v_1 \neq 0$ zur Länge $\|v_1\| = 1$.

Die Gerade $\langle v_1 \rangle_{\mathbb{K}}$ ist invariant, also auch $U := \langle v_1 \rangle_{\mathbb{K}}^\perp$ dank T1E(3). Es gilt $V = \langle v_1 \rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle v_1 \rangle_{\mathbb{K}}^\perp$ dank S1Q, somit $\dim_{\mathbb{K}}(U) = n - 1$.

Die Einschränkung $g = f|_U : U \rightarrow U$ ist weiterhin selbstadjungiert, denn $\langle u | g(v) \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \langle u | f(v) \rangle \stackrel{\text{Ad}}{=} \langle f(u) | v \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \langle g(u) | v \rangle$ für alle $u, v \in U$.

IV: Zu g existiert eine orthonormale Eigenbasis (v_2, \dots, v_n) von U . Damit ist (v_1, v_2, \dots, v_n) eine orthonormale Eigenbasis zu f . QED

☺ Entscheidend ist die Existenz eines ersten Eigenpaares (v, λ) . Der Schritt gelingt dann leicht dank orthogonalem Komplement! Dieses genial-einfache Argument ist ebenso elegant wie effizient. Denselben Trick nutzen wir zur unitären Trigonalisierung T1L.

☺ Allein schon die Diagonalisierbarkeit ist überaus bemerkenswert. Für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist sie keineswegs selbstverständlich! Erstens muss das charakteristische Polynom zerfallen, zweitens muss für jeden Eigenwert die geometrische die algebraische Vielfachheit erreichen.

☺ Hier gelingt Diagonalisierung *unitär*, durch unitären Basiswechsel. Speziell über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ folgt: Das charakteristische Polynom $\chi_f \in \mathbb{K}[X]$ zerfällt bereits über \mathbb{R} gemäß $\chi_f(X) = (X - \mu_1)^{n_1} \dots (X - \mu_k)^{n_k}$ mit reellen Nullstellen $\mu_1 < \dots < \mu_k$ und Vielfachheiten $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

☺ Das charakteristische Polynom einer reellen symmetrischen Matrix zerfällt in *reelle* Linearfaktoren. Das ist höchst bemerkenswert!

Der Vektorraum zerfällt in die orthogonale Summe der Eigenräume:

$$V = \text{Eig}(f, \mu_1) \oplus \dots \oplus \text{Eig}(f, \mu_k)$$

Der Anfang ist wesentlich: Es existiert ein Eigenpaar (v, λ) .

Der Schritt gelingt dann leicht dank orthogonalem Komplement!

Algo T1j: unitäre Diagonalisierung, orthogonale Eigenbasis

Eingabe: eine selbstadjungierte Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Ausgabe: eine orthonormale Eigenbasis (v_1, \dots, v_n) zu A

- 1: Zerfälle das charakteristische Polynom $\chi_A = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{n_i}$ über \mathbb{R} .
- 2: Konstruiere eine Orthonormalbasis für jeden Eigenraum $\text{Eig}(A, \lambda_i)$.
- 3: Füge diese zur Orthonormalbasis (v_1, \dots, v_n) von \mathbb{K}^n zusammen.
- 4: **return** (v_1, \dots, v_n)

Aufgabe: Warum ist dieser Algorithmus korrekt, gelingt also immer?

Beweis: Dank Spektralsatz T1i zerfällt \mathbb{K}^n in die orthogonale Summe

$$\mathbb{K}^n = \text{Eig}(A, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Eig}(A, \lambda_k).$$

Wir haben demnach genügend Eigenvektoren zur Diagonalisierung. Zudem stehen die Eigenräume paarweise orthogonal zueinander, der Algorithmus liefert uns also eine orthonormale Eigenbasis, wie in seiner Spezifikation versprochen! QED

$$Q^\dagger \begin{matrix} \boxed{A} \end{matrix} Q = \begin{matrix} \boxed{R} \end{matrix}$$

Gegeben ist eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Wir suchen einen unitären Basiswechsel $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ zur Dreiecksform $Q^\dagger A Q = R \in \mathbb{K}_n$. Wegen $Q^\dagger = Q^{-1}$ bedeutet das zugleich Ähnlichkeit $Q^{-1} A Q = R$.

Notwendige Bedingung über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Das Polynom $\chi_A \in \mathbb{R}[X]_n^1$ zerfällt. Freudige Überraschung über $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$: Es gibt keine Einschränkung!

⚠ Die Schur-Zerlegung ist durch A nicht eindeutig bestimmt. In der Ausführung des Algorithmus müssen wir Wahlen treffen, und diese beeinflussen das Endergebnis. Über \mathbb{R}, \mathbb{C} sind immerhin die Eigenwerte von A immer eindeutig, und diese lesen wir auf der Diagonalen von R .

⚠ Eine Schur-Zerlegung (Q, R) von A zu berechnen ist mühsam. Für die Theorie genügt uns meist zu wissen, dass eine existiert. Für die numerische Praxis gibt es hierzu raffinierte Verfahren.

Lemma T1k: Existenz eines ersten Eigenpaars

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle - | - \rangle)$ unitär mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Sei $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$; über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ habe $\chi_f \in \mathbb{R}[X]_n^1$ eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann existiert ein Eigenpaar $(v, \lambda) \in V \times \mathbb{K}$, zudem normiert zu $\|v\| = 1$.

Beweis: (a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Wir haben einen ersten Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Dazu existiert ein Eigenvektor $v \in \text{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\}$, siehe P2b.

(b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Das Polynom $\chi_f \in \mathbb{C}[X]_n^1$ zerfällt über \mathbb{C} dank FTA E3c, das heißt ausgeschrieben $\chi_f = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Da wir $n \geq 1$ voraussetzen, existiert mindestens ein Eigenwert $\lambda = \lambda_1$. Dazu existiert ein Eigenvektor $v \in \text{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\}$, erneut dank P2b.

(c) $\mathbb{K} = \mathbb{H}$: Wir betrachten V als \mathbb{C} -Vektorraum. Nun genügt (b): Demnach existiert ein Eigenpaar (v, λ) mit $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$. *Quaternion fun fact:* Weitere Lösungen sind $(vq, q^{-1}\lambda q)$ mit $q \in \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $j^{-1}\lambda j = \bar{\lambda}$; wir können also immer $\text{Im } \lambda \geq 0$ erreichen. QED

$$Q^\dagger \begin{matrix} \boxed{A} \end{matrix} Q = \begin{matrix} \boxed{R} \end{matrix}$$

Satz T1l: Schur-Zerlegung, unitäre Trigonalisierung

(1) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix; über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ fordern wir zudem, dass $\chi_A \in \mathbb{R}[X]_n^1$ über \mathbb{R} zerfällt.

Dann ist A unitär trigonalisierbar: Zu A existiert ein unitärer Basiswechsel $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ zur Dreiecksform $Q^\dagger A Q = R \in \mathbb{K}_n$.

(2) Sei $(V, \langle - | - \rangle)$ unitär mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n \in \mathbb{N}$ und $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$; über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ fordern wir zudem, dass $\chi_f \in \mathbb{R}[X]_n^1$ über \mathbb{R} zerfällt.

Dann existiert eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V , in der f Dreiecksform hat, $M_{\mathcal{B}}(f) \in \mathbb{K}_n$. Wir nennen dies eine **Schur-Basis**.

Äquivalenz: Wir haben „(2) \Rightarrow (1)“ mit $Q = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^{n \times n}$, denn ONBasis heißt $Q^\dagger Q = I$. Es genügt daher, die Aussage (2) zu beweisen.

$$M_{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & & & \\ 0 & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Beweis: (2) Wir führen Induktion über n . Für $n \leq 1$ ist die Aussage klar. Sei nun $n \geq 2$ und die Behauptung für $n - 1$ sei bereits bewiesen.

Dank T1k existiert ein erstes Eigenpaar $(v_1, \lambda_1) \in V \times \mathbb{K}$. Wir normieren den Eigenvektor $v_1 \neq 0$ zur Länge $\|v_1\| = 1$.

Zum Orthogonalraum $U := \langle v_1 \rangle_{\mathbb{K}}^\perp$ wählen wir eine Basis (u_2, \dots, u_n) . Bezüglich der Basis $\mathcal{A} = (v_1, u_2, \dots, u_n)$ hat f obige Blockform.

Die Untermatrix B definiert den Endomorphismus $g : U \rightarrow U$. Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Es gilt $\chi_f = (X - \lambda_1) \cdot \chi_g$, also zerfällt auch χ_g .

IV: Zu g existiert eine Schur-Basis (v_2, \dots, v_n) von U . Damit ist $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ eine Schur-Basis zu f . QED

Die selbstadjungierten gehören dazu, dank dem ersten Spektralsatz T11. Sind dies bereits alle? Wie können wir solche Matrizen leicht erkennen?

Angenommen, $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ wird durch $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ diagonalisiert zu

$$Q^\dagger A Q = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}_n.$$

Dann kommutiert A mit A^\dagger :

$$\begin{aligned} A \cdot A^\dagger &= Q \Lambda Q^\dagger \cdot Q \Lambda^\dagger Q^\dagger = Q \Lambda \Lambda^\dagger Q^\dagger, \\ A^\dagger \cdot A &= Q \Lambda^\dagger Q^\dagger \cdot Q \Lambda Q^\dagger = Q \Lambda^\dagger \Lambda Q^\dagger, \end{aligned}$$

Für jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\bar{\lambda}\lambda = \lambda\bar{\lambda} = |\lambda|^2 \in \mathbb{R}$. Demnach gilt $\Lambda^\dagger \Lambda = \Lambda \Lambda^\dagger$, also $A^\dagger A = A A^\dagger$. Eine Matrix mit dieser Eigenschaft nennen wir **normal**.

Diese einfache Rechnung gibt uns die gesuchte notwendige Bedingung! Sie ist leicht und bequem zu prüfen durch zwei Matrixmultiplikationen.

Müssen wir weitere Bedingungen prüfen? Erstaunlicherweise nicht! Wir zeigen nachfolgend, dass Normalität bereits hinreichend ist.

Definition T1M: normale Endomorphismen

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle - | - \rangle)$ unitär und $(f, f^\dagger) : V \rightleftarrows V$ adjungiert.

(1) Wir nennen $f : V \rightarrow V$ **normal**, falls f^\dagger existiert und mit f kommutiert:

$$f \circ f^\dagger = f^\dagger \circ f$$

(2) Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt **normal**, falls gilt:

$$A \cdot A^\dagger = A^\dagger \cdot A$$

Beispiele: (a) Jeder anti/hermitesche Endomorphismus erfüllt $f^\dagger = \pm f$. (b) Jeder orthogonale / unitäre Automorphismus erfüllt $f^\dagger = f^{-1}$, also $f^\dagger \circ f = f \circ f^\dagger = \text{id}_V$. In beiden Fällen folgt daraus, dass f normal ist.

Diese merkwürdige Bedingung motiviert sich aus der vorigen Rechnung. Der traditionelle Name „normal“ ist leider vollkommen nichtssagend, doch wie so manche unglückliche Tradition wohl kaum zu ändern.

⚠ Die Definition ist leicht, doch ihre tiefere Bedeutung keineswegs. Sie wird sich im Folgenden erst durch die Nutzung voll entfalten. Wir beginnen mit einfachen Beobachtungen zum Einüben.

Wir haben Normalität erreicht, ich wiederhole, wir haben Normalität erreicht. Alles, womit du jetzt noch immer nicht fertig wirst, ist folglich dein Problem.

Douglas Adams (1952–2001), *Per Anhalter durch die Galaxis*

Aufgabe: Sei $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$. Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ normal, so auch $B = Q^\dagger A Q$.

Lösung: Wir vergleichen $B^\dagger B = Q^\dagger A^\dagger A Q$ und $BB^\dagger = Q^\dagger A A^\dagger Q$.

Aufgabe: Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$ und einer Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Genau dann ist $f : V \rightarrow V$ normal, wenn die darstellende Matrix $A = M_{\mathcal{B}}(f) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ normal ist.

Lösung: Dank Satz T1D wissen wir $M_{\mathcal{B}}(f^\dagger) = A^\dagger$ in jeder ONBasis. Demnach gilt $M_{\mathcal{B}}(f \circ f^\dagger) = A \cdot A^\dagger$ und $M_{\mathcal{B}}(f^\dagger \circ f) = A^\dagger \cdot A$, denn Darstellungsmatrizen vertragen sich mit Komposition, siehe N11. Daraus folgt: Es gilt $f \circ f^\dagger = f^\dagger \circ f$ gdw $A \cdot A^\dagger = A^\dagger \cdot A$.

Aufgabe: Bestimmen Sie alle normalen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Lösung: Für $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ gilt $A^\top = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ und somit

$$AA^\top - A^\top A = \begin{bmatrix} b^2 - c^2 & (a-d)(c-b) \\ (a-d)(c-b) & c^2 - b^2 \end{bmatrix}.$$

Demnach sind genau zwei Fälle möglich: $b = c$ oder $(c = -b \text{ und } a = d)$.

$$\text{Symmetrisch } \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \text{Drehstreckung } \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Übung: (1) Jede Diagonalmatrix $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist normal. (2) Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ normal, so auch jede unitär ähnliche Matrix $B = Q^\dagger A Q$. (3) Sind $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ normal, so nicht unbedingt ihre Summe $A + B$.

Z.B. sind $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ unitär, doch $A + B$ nicht normal. Ebenso sind $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ normal, doch $A + B$ nicht.

☺ Die Summe $A + B$ ist normal, falls A und B normal sind und zudem (4) $A^\dagger B = B A^\dagger$ erfüllen oder (5) $AB = BA$ erfüllen, also kommutieren.

Aufgabe: Wann ist die Matrix $M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{(p+q) \times (p+q)}$ normal? Wir betrachten $A, B, C \in \mathbb{K}$ oder besser gleich eine Blockmatrix: Hierbei sei $A \in \mathbb{K}^{p \times p}$ und $B \in \mathbb{K}^{q \times q}$ sowie $C \in \mathbb{K}^{p \times q}$ und $0 = 0_{q \times p}$.

Lösung: Wir setzen die Definition ein und vergleichen

$$M^\dagger \cdot M = \begin{bmatrix} A^\dagger & 0 \\ C^\dagger & B^\dagger \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^\dagger A & A^\dagger C \\ C^\dagger A & C^\dagger C + B^\dagger B \end{bmatrix},$$

$$M \cdot M^\dagger = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^\dagger & 0 \\ C^\dagger & B^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^\dagger + CC^\dagger & CB^\dagger \\ BC^\dagger & BB^\dagger \end{bmatrix}.$$

Aus Gleichheit $M^\dagger M = MM^\dagger$ folgt $A^\dagger A = AA^\dagger + CC^\dagger$. Die Spur ergibt:

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \overline{a_{ij}} a_{ij} \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_{ij} \overline{a_{ij}} + \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^q c_{ik} \overline{c_{ik}},$$

Notwendig ist also $\sum_{i,k} |c_{ik}|^2 = 0$, somit $C = 0$, sowie A und B normal. Umgekehrt ist dies offensichtlich auch hinreichend. QED

Aus diesem Beispiel erhalten wir per Induktion folgenden schönen Satz:

Satz T1N: Normal und trigonal bedeutet diagonal.

(1) Eine Dreiecksmatrix

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

ist genau dann normal, $M^\dagger M = MM^\dagger$, wenn sie diagonal ist.

(2) Allgemein, eine Blockdreiecksmatrix

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & A_{nn} \end{bmatrix}$$

ist genau dann normal, wenn sie blockdiagonal ist mit $A_{ii}^\dagger A_{ii} = A_{ii} A_{ii}^\dagger$.

Aufgabe: Führen Sie die Induktion sorgsam aus! **Lösung:** Wir beweisen die allgemeine Aussage (2). Für $n = 1$ ist alles klar. Für $n \geq 2$ zerlegen wir

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad A = A_{11}.$$

Dank obigem Beispiel gilt $M^\dagger M = MM^\dagger$ genau dann, wenn $C = 0$ sowie $A^\dagger A = A^\dagger A$ und $B^\dagger B = BB^\dagger$. Per Induktion gilt $B = \text{diag}(A_{22}, \dots, A_{nn})$ mit $A_{ii}^\dagger A_{ii} = A_{ii} A_{ii}^\dagger$. Somit ist M blockdiagonal mit allen A_{ii} normal. QED

😊 Damit können wir unsere Frage umfassend beantworten: Welche Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind unitär diagonalisierbar?

⚠ Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ muss zunächst das charakteristische Polynom zerfallen. Über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist dies keine Einschränkung, denn jedes Polynom in $\mathbb{C}[X]$ zerfällt in Linearfaktoren. Über dem Schiefkörper $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ haben wir keine zufriedenstellende Determinante und somit auch kein charakteristisches Polynom. Dank Lemma T1k können wir uns jedoch mit $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ behelfen.

Satz T1o: Spektralsatz II, normale Endomorphismen

(1) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix; über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ fordern wir zudem, dass $\chi_A \in \mathbb{R}[X]_n^1$ über \mathbb{R} zerfällt.

Genau dann ist A unitär diagonalisierbar, also $Q^\dagger A Q = \Lambda \in \mathbb{K} \boxtimes_n \mathbb{K}$ mit $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$, wenn A normal ist, also $A^\dagger A = AA^\dagger$ erfüllt.

Erster Beweis: (1) Die Implikation „ \Rightarrow “ haben wir oben nachgerechnet, „ \Leftarrow “ folgt dank Schur T1L: Zu A existiert $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ mit $Q^\dagger A Q = R$ trigonal. Ist A normal, so auch R . Dank T1N ist R diagonal. QED

(2) Sei $(V, \langle - | - \rangle)$ unitär mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n \in \mathbb{N}$ und $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$; über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ fordern wir zudem, dass $\chi_f \in \mathbb{R}[X]_n^1$ über \mathbb{R} zerfällt.

Genau dann erlaubt f eine orthonormale Eigenbasis (v_1, \dots, v_n) , mit $f(v_i) = v_i \lambda_i$ und $\lambda_i \in \mathbb{K}$, wenn f normal ist.

(3) Dabei ist A bzw. f unitär gdw $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_n| = 1$, ebenso ist A bzw. f selbstadjungiert gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Aussagen (1) und (2) sind offensichtlich äquivalent. Damit ist (3) klar. Aussage (1) folgern wir leicht dank Schur-Zerlegung T1L. Bonus: Für diesen wichtigen Spektralsatz geben wir einen zweiten Beweis.

Zweiter Beweis: (2) „ \Leftarrow “: Wir führen Induktion über n . Für $n \leq 1$ ist alles klar. Sei nun $n \geq 2$ und die Behauptung für $n - 1$ sei bereits bewiesen.

Dank T1K existiert zu $f : V \rightarrow V$ ein Eigenpaar $(v_1, \lambda_1) \in V \times \mathbb{K}$, zudem normiert zu $\|v\| = 1$. Sei $U = \langle v_1 \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp} \leq V$. Für $v \in U$ gilt $f(v) \in U$, denn

$$\langle v_1 | f(v) \rangle \stackrel{\text{Ad}}{=} \langle f^\dagger(v_1) | v \rangle \stackrel{\text{Tip}}{=} \langle v_1 \overline{\lambda_1} | v \rangle \stackrel{\text{S4}}{=} \lambda_1 \langle v_1 | v \rangle \stackrel{\perp}{=} 0.$$

Wir erhalten so $g = f|_U : U \rightarrow U$, ebenso $g^\dagger = f^\dagger|_U$, denn

$$\langle u | g(v) \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \langle u | f(v) \rangle \stackrel{\text{Ad}}{=} \langle f^\dagger(u) | v \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \langle g^\dagger(u) | v \rangle$$

Da f normal ist, also $f^\dagger \circ f = f \circ f^\dagger$ erfüllt, gilt dies auch für g . Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Es gilt $\chi_f = (X - \lambda_1) \cdot \chi_g$, also zerfällt auch χ_g .

IV: Zu g existiert eine orthonormale Eigenbasis (v_2, \dots, v_n) von U . Damit ist (v_1, v_2, \dots, v_n) eine orthonormale Eigenbasis zu f . QED

Lemma T1P: charakteristische Eigenschaften

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle - | - \rangle)$ unitär und $(f, f^\dagger) : V \rightleftarrows V$ adjungiert.

(1) Äquivalent sind die folgenden drei Eigenschaften:

(1a) Der Endomorphismus f ist normal, erfüllt also $f \circ f^\dagger = f^\dagger \circ f$.

(1b) Es gilt $\langle f(u) | f(v) \rangle = \langle f^\dagger(u) | f^\dagger(v) \rangle$ für alle $u, v \in V$.

(1c) Es gilt $\|f(u)\| = \|f^\dagger(u)\|$ für alle $u \in V$.

Beweis: Wir setzen die Definitionen ein und vergleichen:

$$\begin{aligned} \langle f(u) | f(v) \rangle &\stackrel{\text{Ad}}{=} \langle u | (f^\dagger \circ f)(v) \rangle \\ &\stackrel{\| \circ \|}{=} \langle f^\dagger(u) | f^\dagger(v) \rangle \iff \langle u | (f \circ f^\dagger)(v) \rangle \\ &\stackrel{\text{Ad}}{=} \langle u | (f \circ f^\dagger)(v) \rangle \end{aligned}$$

Aus (a) folgt (b). Umgekehrt: Aus (b) folgt $0 = \langle u | (f \circ f^\dagger - f^\dagger \circ f)(v) \rangle$ für alle $u, v \in V$, somit $0 = f \circ f^\dagger - f^\dagger \circ f$, also (a). Die Implikation „(b) \Rightarrow (c)“ ist klar. Die Umkehrung „(c) \Rightarrow (b)“ folgt durch Polarisierung, Satz S2r.

(2) Ist $(f, f^\dagger) : V \rightarrow V$ normal, so folgt $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^\dagger)$.

Beweis: Das folgt unmittelbar aus (1c).

(3) Ist $(f, f^\dagger) : V \rightarrow V$ normal, so auch das Paar $(g, g^\dagger) : V \rightarrow V$ mit $g(v) = f(v) - v\lambda$ und $g^\dagger(v) = f^\dagger(v) - v\lambda^\dagger$ für jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$.

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ sind (g, g^\dagger) nur noch \mathbb{R} -linear. Das genügt uns.

Beweis: Wir setzen die Definitionen ein und vergleichen:

$$\begin{aligned} (g \circ g^\dagger)(v) &\stackrel{\text{Def}}{=} g(f^\dagger(v) - v\lambda^\dagger) \stackrel{\text{Def}}{=} (f \circ f^\dagger)(v) - f(v)\lambda^\dagger - f^\dagger(v)\lambda + v\lambda^\dagger\lambda \\ (g^\dagger \circ g)(v) &\stackrel{\text{Def}}{=} g^\dagger(f(v) - v\lambda) \stackrel{\text{Def}}{=} (f^\dagger \circ f)(v) - f^\dagger(v)\lambda - f(v)\lambda^\dagger + v\lambda\lambda^\dagger \end{aligned}$$

Dank (2) wissen wir $\text{Ker}(g) = \text{Ker}(g^\dagger)$. Daraus folgt:

(4) Sei $(f, f^\dagger) : V \rightarrow V$ normal. Aus $f(v) = v\lambda$ folgt $f^\dagger(v) = v\lambda^\dagger$. Ist (v, λ) ein Eigenpaar von f , so ist (v, λ^\dagger) ein Eigenpaar von f^\dagger .

Korollar T1Q: Frobenius-Norm und Eigenwerte

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$. Dann gilt $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \geq \sum_i |\lambda_i|^2$. Gleichheit gilt genau dann, wenn A normal ist.

Aufgabe: Zeigen Sie dies mit der Schur-Zerlegung.

Beweis: Unitäre Ähnlichkeit $A \mapsto B = Q^\dagger A Q$ mit $Q \in \text{GU}_n \mathbb{C}$ erhält die Eigenwerte, denn $Q^\dagger = Q^{-1}$, und ebenso das Frobenius-Normquadrat: Linksmultiplikation mit Q^\dagger wirkt auf jeder Spalte, doch erhält ihre Länge. Rechtsmultiplikation mit Q wirkt auf jeder Zeile, doch erhält ihre Länge. Erhalten bleibt also die Frobenius-Norm $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_{i,j} |b_{ij}|^2$.

Dank Schur-Zerlegung T1L können wir Q so wählen, dass B trigonal ist. In diesem günstigen Fall sind die Diagonaleinträge b_{11}, \dots, b_{nn} gerade die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, geeignet umgeordnet. Die beweist die Ungleichung. Gleichheit gilt genau dann, wenn B diagonal ist, also A normal. QED

😊 Diese Frage beantworten wir sofort mit dem ersten Spektralsatz T1I:

Korollar T1R: Spektralsatz I, orthogonale Diagonalisierbarkeit

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$ und $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n < \infty$.

- (1) Genau dann existiert zu $f : V \rightarrow V$ eine orthonormale Eigenbasis \mathcal{B} , mit reellen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, wenn f selbstadjungiert ist.
- (2) Genau dann existiert zu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $S^T A S = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, wenn die Matrix A symmetrisch ist.
- (3) Zudem ist f bzw. A orthogonal, wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \{\pm 1\}$ gilt.

Aufgabe: Folgern Sie dies aus dem ersten Spektralsatz T1I.

Lösung: Aussage (1) ist äquivalent zu (2).

(2) „ \Rightarrow “: Für $A = S \Lambda S^T$ gilt $A^T = S \Lambda^T S^T = S \Lambda S^T = A$.

„ \Leftarrow “: Dies folgt aus dem ersten Spektralsatz T1I.

(3) Sei $A = S \Lambda S^T$ wie in (2). Die Bedingung $A^T A = I$ ist dann äquivalent zu $\bar{\Lambda} \Lambda = I$, also $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \{\pm 1\}$. QED

😊 Diese Frage beantworten wir mit dem zweiten Spektralsatz T1O:

Korollar T1S: Spektralsatz II, normale Endomorphismen

Sei V ein \mathbb{C} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$ und $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n < \infty$.

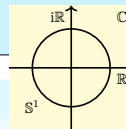
- (1) Genau dann ist ein Endomorphismus $f : V \rightarrow V$ normal, wenn eine orthonormale Eigenbasis \mathcal{B} existiert mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.
- (2) Genau dann ist eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normal, wenn eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ existiert, sodass $U^\dagger A U = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ gilt.
- (3) Genau dann ist f bzw. A unitär, wenn zudem $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{S}^1$ gilt. Genau dann ist f bzw. A selbstadjungiert, wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gilt.

Beweis: (2) „ \Leftarrow “: Für $A = U^\dagger \Lambda U$ gilt $A^\dagger = U^\dagger \bar{\Lambda} U$.

Daraus erhalten wir $A^\dagger A = U^\dagger \bar{\Lambda} \Lambda U = U^\dagger \Lambda \bar{\Lambda} U = A A^\dagger$.

(3) Die Bedingung $A A^\dagger = 1$ entspricht $\Lambda \bar{\Lambda} = 1$, also $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{S}^1$, und $A = A^\dagger$ entspricht $\Lambda = \bar{\Lambda}$, also $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. QED

Zusammenfassung: normale Matrizen über \mathbb{C}



Korollar T1T: normale Matrizen über \mathbb{C}

Für jede komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gelten folgende Äquivalenzen:

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ normal} \\ A^\dagger A = A A^\dagger \end{array} \right\} \stackrel{T1O}{\Leftrightarrow} \exists Q \in \text{SU}_n \mathbb{C} : Q^\dagger A Q \in \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{C} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ unitär} \\ A^\dagger = A^{-1} \end{array} \right\} \stackrel{T1O}{\Leftrightarrow} \exists Q \in \text{SU}_n \mathbb{C} : Q^\dagger A Q \in \begin{bmatrix} \mathbb{S}^1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{S}^1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ antihermitesch} \\ A^\dagger = -A \end{array} \right\} \stackrel{T1O}{\Leftrightarrow} \exists Q \in \text{SU}_n \mathbb{C} : Q^\dagger A Q \in \begin{bmatrix} i\mathbb{R} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & i\mathbb{R} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ hermitesch} \\ A^\dagger = A \end{array} \right\} \stackrel{T1I}{\Leftrightarrow} \exists Q \in \text{SU}_n \mathbb{C} : Q^\dagger A Q \in \begin{bmatrix} \mathbb{R} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{R} \end{bmatrix}$$

Zusammenfassung: normale Matrizen über \mathbb{C}

Wiederholung: Wie konstruieren Sie eine orthonormale Eigenbasis? Wie kommen wir vom Basiswechsel $T \in \text{GU}_n \mathbb{C}$ speziell zu $Q \in \text{SU}_n \mathbb{C}$?

Beweis: (1) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normal, $A^\dagger A = A A^\dagger$. Dank Spektralsatz T1O existiert eine orthonormale Eigenbasis (v_1, \dots, v_n) . Der Basiswechsel $T = (v_1, \dots, v_n)$ erfüllt somit $T \in \text{GU}_n \mathbb{C}$. Zudem gilt $\mu = \det T \in \mathbb{S}^1$, somit $Q = (v_1, \dots, v_n / \mu) \in \text{SU}_n \mathbb{C}$. Wir haben $Q^\dagger A Q = \Lambda$ wie gewünscht.

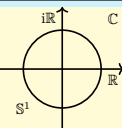
(2) Ist unsere Matrix A unitär, $A^\dagger A = I$, so auch die Diagonalmatrix Λ , denn $\Lambda^\dagger \Lambda = Q A^\dagger Q^\dagger \cdot Q A Q^\dagger = I$. Die Umkehrung gilt ebenso. Unitär bedeutet demnach $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{S}^1$.

Ist unsere Matrix A anti/hermitesch, also $A^\dagger = \pm A$, so auch $\Lambda = Q A Q^\dagger$, denn $\Lambda^\dagger = Q A^\dagger Q^\dagger = \pm \Lambda$. Die Umkehrung gilt ebenso.

(3) Hermitsch bedeutet also $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

(4) Antihermitsch bedeutet $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in i\mathbb{R}$. QED

😊 Für normale Matrizen können wir diese wichtigen Eigenschaften somit direkt und bequem an den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ablesen.



Korollar T1u: normale Matrizen über \mathbb{R}

Für jede reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gelten folgende Äquivalenzen:

$\left. \begin{array}{l} A \text{ normal} \\ A^T A = A A^T \end{array} \right\}$	$\stackrel{T1o}{\iff} \exists Q \in SO_n \mathbb{R} : Q^T A Q = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B_\ell \end{bmatrix}$ $B_k \in \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}_{>0} SO_2 \mathbb{R}$
$\left. \begin{array}{l} A \text{ orthogonal} \\ A^T = A^{-1} \end{array} \right\}$	$\stackrel{T1o}{\iff} \exists Q \in SO_n \mathbb{R} : Q^T A Q \in \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B_\ell \end{bmatrix}$ $B_k \in \{\pm 1\} \sqcup SO_2 \mathbb{R}$
$\left. \begin{array}{l} A \text{ antisymmetrisch} \\ A^T = -A \end{array} \right\}$	$\stackrel{T1o}{\iff} \exists Q \in SO_n \mathbb{R} : Q^T A Q \in \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B_\ell \end{bmatrix}$ $B_k \in \{0\} \sqcup \mathbb{R} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$\left. \begin{array}{l} A \text{ symmetrisch} \\ A^T = A \end{array} \right\}$	$\stackrel{T1i}{\iff} \exists Q \in SO_n \mathbb{R} : Q^T A Q \in \begin{bmatrix} \mathbb{R} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{R} \end{bmatrix}$

Hier steht $SO_2 \mathbb{R}$ für $SO_2 \mathbb{R}$ ohne die beiden Diagonalmatrizen $\pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, denn diese zerfallen bereits in zwei kleinere Blöcke der Form ± 1 .

Wiederholung: Wie „reellifizieren“ Sie eine orthonormale Eigenbasis? Wie kommen wir vom Basiswechsel $T \in GO_n \mathbb{R}$ speziell zu $Q \in SO_n \mathbb{R}$?

Beweis: (1) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ normal, $A^\dagger A = A A^\dagger$. Wir betrachten die Matrix zunächst komplex, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Wir im vorigen Korollar T1u existiert zu A eine orthonormale Eigenbasis (v_1, \dots, v_n) von \mathbb{C}^n . Wir sortieren reelle Eigenpaare nach vorne. Jeder echt komplexe Eigenwert λ_k kommt mit seinem Konjugierten $\bar{\lambda}_k$. Wir haben konjugierte Eigenvektoren v_k, \bar{v}_k .

Wir reellifizieren zu $u_k := (v_k + \bar{v}_k)/\sqrt{2}$ und $u'_k := (v_k - \bar{v}_k)/i\sqrt{2}$ in \mathbb{R}^n . Die Rücktransformation ist $v_k = (u_k + iu'_k)/\sqrt{2}$ und $\bar{v}_k = (u_k - iu'_k)/\sqrt{2}$. So erhalten wir eine Basis von \mathbb{R}^n , zudem orthonormal. (Nachrechnen!)

Die Basiswechselmatrix $T = (v_1, \dots, v_{\ell-1}, u'_\ell, u_\ell, \dots, u'_m, u_m)$ erfüllt somit $T \in GO_n \mathbb{R}$. Zudem gilt $\mu = \det T \in \mathbb{S}^0$, somit $Q = (*, \dots, */\mu) \in SO_n \mathbb{R}$. Wir erhalten damit $Q^T A Q$ in der oben gezeigten Form. (Nachrechnen! Wir kennen die Rechnung aus Satz Q1Q für die reelle Jordan-Form.) QED

Korollar T1u: Satz vom Fußball → dreidimensional S4M

Ausführlich: Zu jeder orthogonalen Matrix $A \in GO_n \mathbb{R}$ existiert ein orthogonaler Basiswechsel $Q \in SO_n \mathbb{R}$ in folgende Normalform:

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{c_1} & \boxed{-s_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{s_1} & \boxed{c_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{c_k} & \boxed{-s_k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{s_k} & \boxed{c_k} & 0 \end{bmatrix}$$

mit $(c_i, s_i) = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$ für Drehwinkel $\theta_i \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$.

😊 Orthogonale Matrizen $A \in GO_n \mathbb{R}$ interessieren uns ganz besonders, daher schreibe ich das Ergebnis hier in voller Schönheit aus. Dabei steht

$$\begin{bmatrix} c_i & -s_i \\ s_i & c_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix}$$

für eine Drehung um den Winkel $\theta_i \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[\subset \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. In den Sonderfällen $\theta_i \in \{0, \pi\}$ erhalten wir $\pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, also kleinere Blöcke ± 1 .

Zu jeder Matrix $A \in GO_n \mathbb{R}$ existiert eine angepasste Orthonormalbasis, auf der A in elegant-einfachster Weise wirkt: als Identität oder Negation in einer Koordinate, oder als ebene Drehung in einem Koordinatenpaar.

Besonders schön: Speziell jede Drehung $A \in SO_n \mathbb{R}$ ist eine Komposition von höchstens $\lfloor n/2 \rfloor$ Drehungen in orthogonalen Koordinatenebenen.

Das ist der „Satz vom n -dimensionalen Fußball“. Der vertraute Fall $n = 3$ wurde bereits in Satz S4M separat bewiesen. Dank Spektralsatz gelingt uns nun der allgemeine Fall ebenso übersichtlich und zudem recht leicht!

Definition T2A: Definitheit über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$

Sei $(V, \beta) \stackrel{\text{Bsp}}{=} \langle A \rangle$ ein hermitescher Raum, $\beta^\dagger = \beta$, zum Beispiel $V = \mathbb{K}^{(I)}$ und $\beta(u, v) = u^\dagger A v$ mit $A \in \mathbb{K}^{I \times I}$ hermitesch, $A^\dagger = A$. Für alle $v \in V$ ist dann $q(v) := \beta(v, v)$ reell, denn $\beta(v, v) = \overline{\beta(v, v)}$. Wir nennen β, A, q

positiv semidefinit (spsd), $\beta \succeq 0, A \succeq 0, q \succeq 0$, falls $q(v) \geq 0$,
negativ semidefinit, $\beta \preceq 0, A \preceq 0, q \preceq 0$, falls $q(v) \leq 0$,

für alle $v \in V$ gilt. Stärker nennen wir β, A, q

positiv definit (spd), $\beta \succ 0, A \succ 0, q \succ 0$, falls $q(v) > 0$,
negativ definit, $\beta \prec 0, A \prec 0, q \prec 0$, falls $q(v) < 0$,

für alle $v \in V \setminus \{0\}$ gilt und $V \neq \{0\}$. Schließlich bedeutet **indefinit** $\beta \not\geq 0, A \not\geq 0, q \not\geq 0$, es existieren Vektoren $u, v \in V$ mit $q(u) < 0 < q(v)$.

Beispiel: Für $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ gilt $q(v) = \lambda_1 |v_1|^2 + \dots + \lambda_n |v_n|^2$, also $A \succeq 0$ gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ und $A \succ 0$ gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

Wir nutzen weiterhin „hermitesch“ und „selbstadjungiert“ als synonym. Daher steht „spsd“ bzw. „spd“ für **selbstadjungiert positiv semi/definit**.

Für Definitheit $\beta, A, q \succ 0$ bzw. $\beta, A, q \prec 0$ fordern wir explizit $V \neq \{0\}$; es gibt tatsächlich Vektoren $v \in V$, die $q(v) > 0$ bzw. $q(v) < 0$ bezeugen.

Für $n = 1$ vergleichen wir einfach nur reelle Zahlen. Daher der Slogan: Hermitesche Matrizen bzw. Formen verhalten sich wie reelle Zahlen.

Offensichtlich gilt $\beta \preceq 0 \Leftrightarrow -\beta \succeq 0$ und $\beta \prec 0 \Leftrightarrow -\beta \succ 0$. Allgemein:

Definition T2A: partielle Ordnung hermitescher Formen

Für hermitesche Formen $\beta, \gamma \in \text{HF}(V)$ definieren wir die Relationen

$$\beta \succ \gamma \Leftrightarrow \beta - \gamma \succ 0 \Leftrightarrow \beta(v, v) > \gamma(v, v)$$

$$\beta \succeq \gamma \Leftrightarrow \beta - \gamma \succeq 0 \Leftrightarrow \beta(v, v) \geq \gamma(v, v)$$

$$\beta \preceq \gamma \Leftrightarrow \beta - \gamma \preceq 0 \Leftrightarrow \beta(v, v) \leq \gamma(v, v)$$

$$\beta \prec \gamma \Leftrightarrow \beta - \gamma \prec 0 \Leftrightarrow \beta(v, v) < \gamma(v, v)$$

für alle $v \in V \setminus \{0\}$. Bei Unvergleichbarkeit schreiben wir $\beta \not\geq \gamma$.

Definition T2A: Einschränkung auf einen Teilraum

Sei (V, β) ein hermitescher Raum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$. Auf jedem \mathbb{K} -linearen Teilraum $U \leq V$ ist die Einschränkung

$$\beta|_U := \beta|_{U \times U} : U \times U \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \beta(u, v)$$

ebenfalls eine hermitesche Form. Die so definierte Abbildung

$$-|_U : \text{HF}(V) \rightarrow \text{HF}(U) : \beta \mapsto \beta|_U$$

ist isoton, $\beta \succeq \gamma \Rightarrow \beta|_U \succeq \gamma|_U$. Für $U \neq \{0\}$ gilt sogar $\beta \succ \gamma \Rightarrow \beta|_U \succ \gamma|_U$.

Gilt $\beta|_U \succ 0$, so sagen wir **die Form β ist positiv definit auf dem Raum U** , oder umgekehrt **der Teilraum U ist positiv bezüglich der Form β** . Ebenso für positiv semidefinit, negativ semidefinit, negativ definit und indefinit.

Ebenso für die Einschränkung einer quadratischen Form $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ zu $q|_U : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Teilraum $U \leq V$, und einer hermiteschen Matrix $A \in \mathbb{K}^{I \times I}$ zur Untermatrix $A|_{J \times J}$ auf einer Teilmenge $J \subseteq I$

Wir nutzen $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$. Der Fixkörper $\mathbb{R} = \text{fix}(\mathbb{K}, \sigma) \leq \mathbb{K}$ ist geordnet, zudem vollständig, erfüllt also den Zwischenwertsatz (ZWS).

Für einfache Grundbegriffe genügt bereits ein beliebiger *Ring (\mathbb{K}, σ) .

Für Vergleiche wie $\beta, A, q \succ 0$ benötigen wir zudem, dass der Fixring $\text{fix}(\mathbb{K}, \sigma) \leq \mathbb{K}$ geordnet ist. Nützliche Beispiele sind (\mathbb{Z}, id) und (\mathbb{Q}, id) .

Manche Anwendungen fordern Vollständigkeit, so kommen wir zu \mathbb{R} .

Beispiel: Über \mathbb{R} ist $q(x, y) = x^2 - 2y^2$ indefinit, denn $q(1, 0) = 1 > 0$ und $q(0, 1) = -2 < 0$. Dank Zwischenwertsatz existiert ein isotroper Vektor.

Über \mathbb{Q} ist die Form $q(x, y) = x^2 - 2y^2$ ebenso indefinit, aber anisotrop: Es gibt keinen isotropen Vektor, denn $q(x, y) \neq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$.

Definition T2A: positiv semi/definiten Endomorphismus

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $(V, \langle - | - \rangle)$ unitär. Ein Endomorphismus $f : V \rightarrow V$ ist **selbstadjungiert**, $f^\dagger = f$, wenn seine Form $\beta(-, -) = \langle - | f(-) \rangle$ dies ist. Zudem nennen wir f **positiv semi/definit** etc., falls β dies ist.

An jeder Diagonalmatrix $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ können wir In/Definitheit leicht ablesen in allen fünf Fällen $A \succ 0, A \succeq 0, A \prec 0, A \preceq 0, A \succcurlyeq 0$.
Im Allgemeinen jedoch ist In/Definitheit nicht leicht zu erkennen.

☹️ Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ selbstadjungiert, $A^\dagger = A$. Wie erkennen wir Definitheit? Eine erste Möglichkeit bietet der **hermitesche Gauß–Algorithmus** S1R:

$$A = A^\dagger \in \mathbb{K}^{n \times n} \implies \exists S \in \text{GL}_n \mathbb{K} : S^\dagger A S = B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$$

😊 An B können wir die In/Definitheit leicht ablesen! Allgemein gilt:

Lemma T2B: Kongruenz, allgemein und unitär

Quadratische Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißen (allgemein) **kongruent**, kurz $A \simeq B$, falls eine Matrix $S \in \text{GL}_n \mathbb{K}$ existiert mit $B = S^\dagger A S$.

Sie heißen **unitär kongruent**, falls $B = S^\dagger A S$ für ein $S \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ gilt. Wegen $S^\dagger = S^{-1}$ heißt das **unitär ähnlich**, $B = S^{-1} A S$ mit $S \in \text{GU}_n \mathbb{K}$.

- (1) Kongruenz (allgemein oder unitär) ist eine Äquivalenzrelation.
- (2) Positive Semi/Definitheit ist invariant unter Kongruenz.

Wir transformieren A mit $S \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ zu $S^\dagger A S = B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$
Daran können wir die In/Definitheit von B und A bequem ablesen:

Auch B ist selbstadjungiert, das heißt $B^\dagger = B$, also gilt $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.
Dann gilt $B \succ 0$ gdw $b_1, \dots, b_n > 0$ und $B \succeq 0$ gdw $b_1, \dots, b_n \geq 0$

Dasselbe gilt dann auch für unsere ursprüngliche Matrix A .
Dahinter steckt das obige einfache, aber nützliche Lemma!

Aufgabe: Beweisen Sie das Lemma zur Wiederholung der Begriffe!

Beweis: (1) Dies gilt allgemein für jede Gruppenoperation (Lemma J3G).

Reflexivität: Es gilt $A \simeq A$, also $A = S^\dagger A S$ mit $S = I$.

Symmetrie: Aus $B = S^\dagger A S$ folgt $A = T^\dagger B T$ dank $T = S^{-1}$.

Transitivität: Aus $B = S^\dagger A S$ und $C = T^\dagger B T$ folgt $C = (ST)^\dagger A (ST)$.

(2) Sei $A \succeq 0$, also $x^\dagger A x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$. Für $B = S^\dagger A S$ folgt $B \succeq 0$, denn für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt hier $x^\dagger B x = x^\dagger (S^\dagger A S) x = (Sx)^\dagger A (Sx) \geq 0$.

Dank Symmetrie gilt ebenso die Umkehrung: $B \succeq 0 \implies A \succeq 0$. QED

⚠️ Zu den Begriffen „ähnlich“ vs „kongruent“ siehe S127.

Lemma T2c: schwache Faktorisierung $A = S^\dagger S$ in $\mathbb{K}^{n \times n}$

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{K}$ gilt:

- (0) SPSD: $A = A^\dagger$ ist positiv semidefinit gdw $A = S^\dagger S$ mit $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$.
- (1) SPD: $A = A^\dagger$ ist positiv definit gdw $A = S^\dagger S$ mit $S \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

Beweis: „ \Leftarrow “: Aus $A = S^\dagger S$ folgt $A^\dagger = (S^\dagger S)^\dagger = S^\dagger (S^\dagger)^\dagger = S^\dagger S = A$.

(0) „ \Leftarrow “: Für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt $x^\dagger A x = x^\dagger S^\dagger S x = (Sx)^\dagger (Sx) \geq 0$.

(1) „ \Leftarrow “: Für $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ gilt $Sx \neq 0$, also $x^\dagger A x = (Sx)^\dagger (Sx) > 0$.

(0) „ \Rightarrow “: Gauß–Hermite S1R konstruiert $T \in \text{GL}_n \mathbb{K}$ mit

$$A = T^\dagger B T \quad \text{und} \quad B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n).$$

Aus $A \succeq 0$ folgt $B \succeq 0$ dank T2B, wir haben also $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Wir setzen $B^{1/2} := \text{diag}(b_1^{1/2}, \dots, b_n^{1/2})$. Für $S := B^{1/2} T$ gilt dann

$$S^\dagger S \stackrel{\text{Def}}{=} T^\dagger B^{1/2} \cdot B^{1/2} T \stackrel{\text{Def}}{=} T^\dagger B T \stackrel{\text{Vor}}{=} A.$$

(1) „ \Rightarrow “: Ebenso, dank $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_{> 0}$ gilt nun $S \in \text{GL}_n \mathbb{K}$. QED

Bemerkung: Unsere Rechnung für „ \Leftarrow “ zeigt noch etwas mehr:

(0) Für $S \in \mathbb{K}^{m \times n}$ beliebig ist $A = S^\dagger S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ spsd.

(1) Für $S \in \mathbb{K}^{m \times n}$ injektiv ist $A = S^\dagger S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ spd.

Alternative für (1) „ \Rightarrow “: Sei A selbstadjungiert und positiv definit.

Dann ist die Form $\beta : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K} : (x, y) \mapsto x^\dagger A y$ ein Skalarprodukt.

Sei (v_1, \dots, v_n) eine Orthonormalbasis des unitären Raums $(\mathbb{K}^n, \beta) = \langle A \rangle$.

Eine solche existiert etwa dank dem Gram–Schmidt–Verfahren S3c.

Wir haben $v_i^\dagger A v_j = \delta_{ij}$. Die Basiswechselmatrix $T = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^{n \times n}$

erfüllt also $T^\dagger A T = I$. Für $S = T^{-1}$ folgt $A = S^\dagger I S = S^\dagger S$. QED

😊 Gauß–Hermite S1R und Gram–Schmidt S3c sind zwei Varianten derselben Rechnung, zwei Inkarnationen derselben Technik, siehe S324.

Gauß–Hermite S1R gelingt immer, über jedem *DRing mit $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$, und erlaubt über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ insbesondere, In/Definitheit auszurechnen.

Gram–Schmidt S3c setzt $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und positive Definitheit voraus, das passt hier bestens und ist keine weitere Einschränkung.

Wie erkennen wir Definitheit? ... dank Cholesky!

T209

Analogie: Eine Zahl $a \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist positiv, also $a \in \mathbb{R}_{>0}$,
gdw $a = \bar{r}r$ für ein $r \in \mathbb{K}^\times$, und dies gelingt eindeutig mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$.

😊 Analog für Matrizen fand Cholesky eine elegante Faktorisierung:

Satz T2c: Cholesky-Zerlegung $A = R^\dagger R$ in $\mathbb{K}^{n \times n}$

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sind äquivalent:

- 1 SPD: Die Matrix A ist selbstadjungiert und positiv definit.
- 2 Cholesky: Es gilt $A = R^\dagger R$ für genau eine Matrix $R \in \mathbb{K}_{>0}^n(\mathbb{K})$.
- 3 Cholesky: Es gilt $A = LL^\dagger$ für genau eine Matrix $L \in \mathbb{K}_{>0}^n(\mathbb{K})$.

Die eindeutig bestimmte Dreiecksmatrix $R = L^\dagger$ bzw. $L = R^\dagger$ mit positiver Diagonale ist der rechte / linke **Cholesky-Faktor** von A .

Beweis: „(1) \Leftrightarrow (2)“ folgt aus Lemma T2c, da $R \in \text{GL}_n \mathbb{K}$.

„(1) \Rightarrow (2)“: Dank Lemma T2c haben wir $A = S^\dagger S$ mit $S \in \text{GL}_n \mathbb{K}$.
Die QR-Zerlegung S3E liefert $S = QR$ mit $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ und $R \in \mathbb{K}_{>0}^n(\mathbb{K})$.
Wir erhalten $A = S^\dagger S = R^\dagger Q^\dagger QR = R^\dagger R$. Das beweist die *Existenz!*

Wie erkennen wir Definitheit? ... dank Cholesky!

T210

Eindeutigkeit dank Berechnung: Der Fall $n = 1$ ist klar. Sei $n \geq 2$:

$$R = \begin{bmatrix} u & v^\dagger \\ 0 & S \end{bmatrix} \quad \text{mit } u \in \mathbb{R}_{>0} \text{ und } v^\dagger \in \mathbb{K}^{1 \times (n-1)} \text{ und } S \in \mathbb{K}_{>0}^{n-1}(\mathbb{K})$$

$$R^\dagger R = \begin{bmatrix} u & 0 \\ v & S^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v^\dagger \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^2 & uv^\dagger \\ vu & vv^\dagger + S^\dagger S \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} c & d^\dagger \\ d & B \end{bmatrix} = A$$

Die Matrix A bestimmt somit eindeutig $u = \sqrt{c}$ und $v = d/u$, und per Induktion ebenso S mit $vv^\dagger + S^\dagger S = B$. Genauer ergibt Gauß:

$$T := \begin{bmatrix} 1/u & -v^\dagger/u \\ 0 & I \end{bmatrix} \implies RT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad T^\dagger AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B - dd^\dagger/c \end{bmatrix}$$

Dies zeigt die *Eindeutigkeit!* Die *Existenz* haben wir oben gezeigt. QED

Kurios: Existenz folgt erneut, wenn wir die Gleichung weiter auflösen.
Das entspricht wie zu erwarten der QR-Zerlegung nach Gram-Schmidt.

🕒 Warum ist die Untermatrix $U := B - dd^\dagger/c$ weiterhin positiv definit?

Wie erkennen wir Definitheit? ... mit Hauptminoren!

T211

🕒 Können wir positive Definitheit mit Determinanten charakterisieren?

😊 Ja! Die obige Rechnung offenbart noch eine freudige Überraschung:

Satz T2d: Hauptminorenkriterium nach Hurwitz-Sylvester

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ selbstadjungiert, $A^\dagger = A$. Für $\ell = 1, \dots, n$ betrachten wir die Untermatrix $A_\ell := A|_{\{1, \dots, \ell\}^2} \in \mathbb{K}^{\ell \times \ell}$. Man nennt $\det(A_\ell)$ den **führenden Hauptminor ℓ ter Ordnung**. Äquivalent sind:

- 1 Die Matrix A ist positiv definit, kurz $A \succ 0$.
- 2 Alle Hauptminoren sind positiv, $\Delta_\ell := \det(A_\ell) > 0$ für $\ell = 1, \dots, n$.

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist positiv definit gdw $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$.

$A = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist positiv definit gdw $a > 0$, $ac - b^2 > 0$, $\det A > 0$.

Beispiel: $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ist positiv definit gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

Das ist äquivalent zu $\det(A_\ell) = \lambda_1 \cdots \lambda_\ell > 0$ für alle $\ell = 1, \dots, n$.

⚠️ Können wir positive Semidefinitheit ebenso testen durch $\det A_\ell \geq 0$?
O nein! Gegenbeispiele sind $A = \text{diag}(0, -1)$ oder $A = \text{diag}(+1, 0, -1)$.

Wie erkennen wir Definitheit? ... mit Hauptminoren!

T212

Beweis: „(1) \Rightarrow (2)“: Dank Cholesky T2c haben wir

$$A = R^\dagger R \quad \text{mit } R \in \mathbb{K}_{>0}^n(\mathbb{K}).$$

Dank der Dreiecksform von R gilt $A_\ell = R_\ell^\dagger R_\ell$ für alle $\ell = 1, \dots, n$, also

$$\det A_\ell = \det(R_\ell^\dagger) \det(R_\ell) = (r_{11} \cdots r_{\ell\ell})^2 > 0.$$

„(1) \Leftarrow (2)“: Wir führen Induktion über n . Der Fall $n = 1$ ist klar. Sei $n \geq 2$.
In obiger Berechnung von R müssen wir $S^\dagger S \stackrel{!}{=} B - dd^\dagger/c =: U$ lösen.

$$T := \begin{bmatrix} 1/u & -v^\dagger/u \\ 0 & I \end{bmatrix} \implies T^\dagger AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} = 1 \oplus U$$

Dank der Dreiecksform von T gilt $A_\ell \mapsto T_\ell^\dagger A_\ell T_\ell = 1 \oplus U_{\ell-1}$, denn dies skaliert die erste Zeile & Spalte und addiert Vielfache zu allen weiteren.

Das zeigt $\det(U_\ell) = \det(A_{\ell+1}) / \det(A_1) > 0$ für alle $\ell = 1, \dots, n-1$.

Per Induktion ist U positiv definit. Somit lässt sich $S^\dagger S = U$ lösen.

Wir erhalten $R \in \mathbb{K}_{>0}^n(\mathbb{K})$ mit $A = R^\dagger R$. Also ist A positiv definit. QED

$$B_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{n \times n}.$$

Aufgabe: Bestimmen Sie Determinante $\Delta_n = \det(B_n)$ und Definitheit.

Lösung: (1) Wir finden $\Delta_0 = 1$ und $\Delta_1 = 2$, dann $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$.
 (2) Wir erhalten so die Werte 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... und behaupten $\Delta_n = n + 1$.

Beweis per Induktion: Anfangs für $n = 0, 1$ gilt die Behauptung.
 Für $n \geq 2$ gilt induktiv $\Delta_n \stackrel{(I)}{=} 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \stackrel{(IV)}{=} [2n - (n - 1)] \stackrel{(Z)}{=} n + 1$.

😊 Dank Hauptminorenkriterium T2D ist B_n somit positiv definit!

Diese berühmte Bandmatrix taucht überall auf, meist als diskrete Form der zweiten Ableitung, manchmal mit umgekehrten Vorzeichen (O508).

Übung: Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung $B_n = R_n^\dagger R_n$.

Lösung: Wir machen einen Bandansatz und erhalten folgendes Ergebnis:

$$R_n = \begin{bmatrix} d_1 & r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & r_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & r_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\sqrt{\frac{n-1}{n}} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \sqrt{\frac{n+1}{n}} \end{bmatrix}$$

Anleitung: Wir wollen $R_n^\dagger R_n = B_n$. Auf der Diagonale finden wir $d_1^2 = 2$, dann $d_k^2 + r_{k-1}^2 = 2$ für $k \geq 2$. Für die Nebendiagonale gilt $d_k r_k = -1$, also $d_k^2 = 2 - d_{k-1}^2$. Die ersten Werte $d_k^2 = 2/1, 3/2, 4/3, \dots$ führen uns zur Vermutung $d_k^2 = (k + 1)/k$. Diese beweist man nun leicht per Induktion.

Alternative: Der obige Satz T2c zur Cholesky-Zerlegung ist konstruktiv. Folgen Sie der Konstruktion. Das Ergebnis ist eindeutig, also das obige.

😊 Die Cholesky-Zerlegung T2c ist elegant, doch mitunter aufwändig. Das vorige Beispiel $B_n = R_n^\dagger R_n$ gibt einen ersten realistischen Eindruck. Sobald wir sie einmal berechnet haben, ist sie uns eine wertvolle Hilfe.

Manchmal benötigen wir nicht die Berechnung, es genügt ihre Existenz...

😊 Sie hilft uns auch bereits, ohne sie explizit berechnen zu müssen. Wir folgern aus Cholesky T2c hier das Hauptminorenkriterium T2D, und dieses lässt sich oft bequem nutzen, so wie im vorigen Beispiel!

Korollar T2D: Hauptminorenkriterium nach Hurwitz-Sylvester

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ selbstadjungiert, $A^\dagger = A$. Äquivalent sind:

- 1 Die Matrix A ist negativ definit, kurz $A \prec 0$, also $-A \succ 0$.
- 2 Die Hauptminoren erfüllen $(-1)^\ell \det(A_\ell) > 0$ für alle $\ell = 1, \dots, n$.

Beweis: Dies folgt aus $0 < \det(-A_\ell) = (-1)^\ell \det(A_\ell)$.

QED

Die Cholesky-Zerlegung ist eine der klassischen Matrix-Zerlegungen, sehr beliebt in der numerischen Mathematik und ihren Anwendungen.

Anwendung: Wie lösen Sie $Ax = b$ mit Cholesky?

Lösung: Dies gelingt durch das bewährte Vorwärts-Rückwärts-Einsetzen: Wir lösen $R^\dagger R x = b$ zunächst durch $R^\dagger y = b$ und dann $R x = y$.

😊 Cholesky ist eine weitere schöne Variante des Gauß-Algorithmus! Die Cholesky-Zerlegung optimiert die allgemeine LR-Zerlegung D7.2.

Übung: Beweisen Sie die folgenden naheliegenden Varianten.

◆ **Satz T2c:** Cholesky-Zerlegung $A = R^\dagger D R$ in $\mathbb{K}^{n \times n}$

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sind äquivalent:

- 1 SPD: Die Matrix A ist selbstadjungiert und positiv definit.
- 4 Cholesky: Es gilt $A = R^\dagger D R$ mit $D \in \mathbb{N}_n^{>0}(\mathbb{K})$ und $R \in \mathbb{N}_n^1(\mathbb{K})$.
- 5 Cholesky: Es gilt $A = L D L^\dagger$ mit $D \in \mathbb{N}_n^{>0}(\mathbb{K})$ und $L \in \mathbb{N}_n^1(\mathbb{K})$.

Wie erkennen wir Definitheit? ... an den Eigenwerten!

T217

☺ Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ selbstadjungiert, $A^\dagger = A$. Wie erkennen wir Definitheit? Eine zweite Möglichkeit bietet die **unitäre Diagonalisierung** T11:

$$A = A^\dagger \in \mathbb{K}^{n \times n} \implies \exists Q \in \text{GU}_n \mathbb{K} : Q^\dagger A Q = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Auch Λ ist selbstadjungiert, also $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Vorteil: Dank $Q^\dagger = Q^{-1}$ gilt nun auch $Q^{-1} A Q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Das bewahrt die Eigenwerte!

Satz T2E: Eigenwertkriterium für positive Semi/Definitheit

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ selbstadjungiert, $A^\dagger = A$. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die (reellen!) Eigenwerte.

- (1) Es gilt $A \succ 0$ gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.
Es gilt $A \succeq 0$ gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$.
- (2) Es gilt $A \prec 0$ gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n < 0$.
Es gilt $A \preceq 0$ gdw $\lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 0$.
- (3) Es gilt $A \succcurlyeq 0$ gdw $\lambda_i < 0 < \lambda_j$ für ein Paar i, j .

Wie erkennen wir Definitheit? ... an den Eigenwerten!

T218

- ☺ Können wir jeder Matrix ihre Eigenwerte ansehen? Zumindest grob?
☺ Hier können wir wunderbar die Gerschgorin-Kreise nutzen! (§P6)

Korollar T2F: In/Definitheit bei strikter Diagonaldominanz

Sei $A = A^\dagger \in \mathbb{C}^{n \times n}$ selbstadjungiert und strikt **diagonaldominant**:

$$|a_{ii}| > r_i := \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

in jeder Zeile $i = 1, \dots, n$. In Worten: Jeder Diagonaleintrag a_{ii} ist größer als die Summe aller anderen Einträge seiner Zeile (jeweils im Betrag). Dank $A^\dagger = A$ ist dies äquivalent zu Diagonaldominanz in jeder Spalte.

Dann können wir In/Definitheit bequem an der Diagonale ablesen:

- (1) Es gilt $A \succ 0$ gdw $a_{11}, \dots, a_{nn} > 0$. („ \Rightarrow “ gilt immer.)
- (2) Es gilt $A \prec 0$ gdw $a_{11}, \dots, a_{nn} < 0$. („ \Rightarrow “ gilt immer.)
- (3) Es gilt $A \succcurlyeq 0$ gdw $a_{ii} < 0 < a_{jj}$ für ein Paar i, j . („ \Leftarrow “ gilt immer.)

Wie erkennen wir Definitheit? ... an den Eigenwerten!

T219

Beweis: „ \Rightarrow “: Aus $A \succ 0$ folgt $a_{ii} = e_i^\dagger A e_i > 0$, aus $A \prec 0$ ebenso $a_{ii} < 0$. „ \Leftarrow “: Dank Gerschgorin P6A liegt jeder Eigenwert in einem der Intervalle $[a_{ii} - r_i, a_{ii} + r_i] \subset \mathbb{R}^\times$. Das beweist (1) und (2). Daraus folgt (3). QED

Beispiele: Wo das Kriterium greift, ist es wunderbar effizient:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & -6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

☺ Für die Vorzeichen genügt uns hier die grobe Lage der Eigenwerte.

Übung: Beweisen Sie folgende Variante für schwache Diagonaldominanz.

Sei $A = A^\dagger \in \mathbb{C}^{n \times n}$ selbstadjungiert und **schwach diagonaldominant**:

$$|a_{ii}| \geq r_i := \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

- (1) Es gilt $A \succeq 0$ gdw $a_{11}, \dots, a_{nn} \geq 0$. („ \Rightarrow “ gilt immer.)
- (2) Es gilt $A \preceq 0$ gdw $a_{11}, \dots, a_{nn} \leq 0$. („ \Rightarrow “ gilt immer.)

Wie erkennen wir Definitheit? ... an den Eigenwerten!

T220
Ausführung

- ☺ Wie erkennen wir, ob selbstadjungierte Matrizen unitär ähnlich sind?
Aufgabe: Die Familie der Eigenwerte ist eine vollständige Invariante:

Korollar T2G: Klassifikation $\text{GU}_* \mathbb{K}$ -Ähnlichkeit über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ selbstadjungiert. Genau dann sind A und B unitär ähnlich, also $B = S^\dagger A S$ mit $S \in \text{GU}_n(\mathbb{K})$, wenn $\chi_A = \chi_B$.

Beweis: „ \Rightarrow “: Sei $B = S^\dagger A S$ mit $S \in \text{GU}_n \mathbb{K}$, das bedeutet $S^\dagger = S^{-1}$. Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom (P2F).

„ \Leftarrow “: Sei $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ die Diagonalmatrix mit $\chi_\Lambda = \chi_A = \chi_B$. Dank Spektralsatz T1I existieren $P, Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ mit $P^\dagger A P = \Lambda$ und $Q^\dagger B Q = \Lambda$. Transitivität T2B ergibt $S^\dagger A S = B$ mit $S = P Q^\dagger$. QED

☺ Mit unseren wirksamen Werkzeugen gelingt dies nun leicht. Ihre Herstellung war anstrengend, doch es hat sich gelohnt. Diese und viele weitere Anwendungen sind nun zugänglich.

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix über dem *Ring (\mathbb{K}, σ) .
Wir denken insbesondere an die Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$.
Hierzu haben wir zwei wichtige Äquivalenzrelationen kennengelernt:

Ähnlichkeit $A \sim S^{-1}AS$ vs **Kongruenz** $A \simeq S^\dagger AS$

mit $S \in \text{GL}_n \mathbb{K}$. Wir haben also zwei Betrachtungsweisen, siehe S127:
(1) Matrizen als lineare Abbildungen; Basiswechsel bedeutet Ähnlichkeit.
(2) Matrizen zu Sesquilinearformen; Basiswechsel bedeutet Kongruenz.

⚠ Das sind zwei verschiedene Anwendungen und Werkzeugkästen:
Ähnlichkeit für Endomorphismen vs Kongruenz für Sesquilinearformen.

😊 Speziell für unitäre Basiswechsel $S \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ gilt jedoch $S^\dagger = S^{-1}$.

Daher ist **unitäre Kongruenz** dasselbe wie **unitäre Ähnlichkeit**.

In diesem glücklichen Fall können wir beide Sichtweisen gleichzeitig nutzen und somit gemeinsam aus beiden Werkzeugkästen schöpfen, siehe zum Beispiel Eigenwertkriterium T2E und Klassifikation T2G.

Diagonalisierung von Endomorphismen: Falls das charakteristische Polynom von A über \mathbb{K} zerfällt und zudem die geometrische Vielfachheit die algebraische erreicht, dann finden wir eine invertierbare Matrix $T \in \text{GL}_n \mathbb{K}$, sodass $T^{-1}AT = \Lambda$ diagonal ist. (Sonst Jordan...)

In diesem Falle sind die Matrizen A und Λ ähnlich. In Λ stehen auf der Diagonalen die Eigenwerte von A . Die Diagonalmatrix Λ ist demnach durch A eindeutig bestimmt bis auf Reihenfolge der Eigenwerte. Die Matrizen A und Λ haben dasselbe charakteristische Polynom, insbesondere dieselben Eigenwerte sowie Spur und Determinante.

Orthogonalbasen zu hermiteschen Formen: Nun sei $A = A^\dagger \in \mathbb{R}^{n \times n}$ selbstadjungiert das heißt symmetrisch über \mathbb{R} bzw. hermitesch über \mathbb{C} . Dann finden wir eine invertierbare Matrix $S \in \text{GL}_n \mathbb{K}$, sodass $S^\dagger AS = B$ in Diagonalf orm ist. In diesem Falle sind A und B kongruent. Die Matrix B ist nicht eindeutig, aber immerhin haben A und B denselben Rang. (Später: auch dieselbe Signatur dank Trägheitssatz von Sylvester.)

😊 Das bemerkenswerte Ergebnis des Spektralsatzes T1I/T1O:
Wir können in gewissen Situationen beide Sichtweisen vereinen!

I: Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ selbstadjungiert, so finden wir eine unitäre Matrix $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ so, dass $Q^\dagger A Q = Q^{-1} A Q = \Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in Diagonalf orm ist.

II: Allgemein, ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ normal, so finden wir eine unitäre Matrix $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ so, dass $Q^\dagger A Q = Q^{-1} A Q = \Lambda \in \mathbb{K}^{n \times n}$ in Diagonalf orm ist.

Dann sind A und Λ unitär äquivalent, insbesondere sind sie sowohl kongruent als auch ähnlich, daher haben unsere Matrizen A und Λ dieselben Eigenwerte, dieselbe Spur und dieselbe Determinante. Beide Sichtweisen werden so zusammengeführt.

⚠ Determinante und Eigenwerte können sich unter GL_n -Kongruenz ändern, sie sind also nicht invariant, nicht einmal für 1×1 -Matrizen. Erst unitär, also GU_n -Kongruenz garantiert ihre Invarianz.

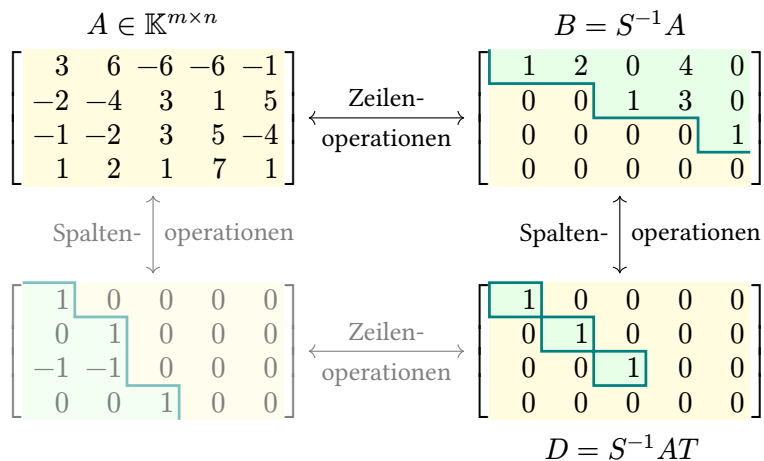
Diese Zusammenfassung ist bisher „konkret“ für Matrizen formuliert. Wir können alles ebenso „abstrakt“ beschreiben in der flexibleren und allgemeineren Sprache der Sesquilinearformen und Endomorphismen. (Je nach Vorliebe kann man die Adjektive auch umgekehrt zuordnen.)

Letztere hat den Vorteil, dass wir damit auch unendlichdimensionale Vektorräume untersuchen können, erste Ausblicke illustrieren dies. Dies ist allerdings nur ansatzweise Aufgabe der Linearen Algebra; hier übernimmt später dann insbesondere die Funktionalanalysis.

Am besten nutzen wir beide Sichtweisen! Die didaktischen Vorteile sind sofort spürbar: Matrizen können wir universell nutzen, das ist gerade ihr phantastischer Erfolg. Homomorphismen und Sesquilinearformen hingegen erklären unmissverständlich, was wir eigentlich wollen.

⚠ Die Matrix allein kann nicht wissen, welche Transformation gerade die jeweils richtige ist, der Anwendungskontext hingegen zeigt es uns: Ähnlichkeit für Endomorphismen vs Kongruenz für hermitesche Formen.

Mit Gauß wandeln wir jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ zur Modellmatrix $D_{m \times n}^r$:

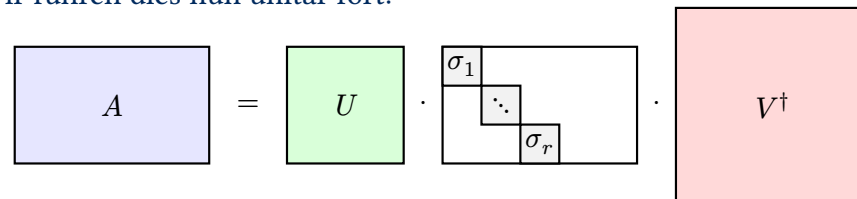


An $SD = AT$ mit $S \in GL_m \mathbb{K}$ und $T \in GL_n \mathbb{K}$ lesen wir Bild und Kern ab:

$$\begin{aligned} \text{Im } D &= \langle e_1, \dots, e_r \rangle_{\mathbb{K}}, & \text{Ker } D &= \langle e_{r+1}, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{K}}, \\ \text{Im } A &= \langle Se_1, \dots, Se_r \rangle_{\mathbb{K}}, & \text{Ker } A &= \langle Te_{r+1}, \dots, Te_n \rangle_{\mathbb{K}}. \end{aligned}$$

☺ So zerlegen wir jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ als Produkt $A = S D T^{-1}$. Die Basiswechsel $S \in GL_m \mathbb{K}$ und $T \in GL_n \mathbb{K}$ sind immer invertierbar, und $D = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gestalten wir so einfach wie möglich: Dies ist nur eine Projektion entlang der Koordinatenachsen!

☺ Insbesondere lesen wir so bequem den Rang $\text{rang } A = \text{rang } D = r$ ab. Dieser erweist sich als vollständige Invariante dieser Äquivalenz (M3E). Wir führen dies nun unitär fort:



☺ Können wir dies entsprechend mit unitären Basiswechseln erreichen? Demnach wirkt $v \mapsto u = Av$ als eine Isometrie V^\dagger gefolgt von einer Streckung / Projektion Σ entlang der Achsen und einer Isometrie U . Diese Idee führt uns direkt zum Begriff der Singulärwertzerlegung.

Definition T3A: Singulärwertzerlegung (*singular value decomposition*)

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Eine **Singulärwertzerlegung**

$$(u_i, \sigma_i, v_i)_{i=1}^r \text{ erfüllt } A = \sum_{i=1}^r u_i \sigma_i v_i^\dagger$$

mit orthonormalen Vektoren $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{K}^m$ und $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{K}^n$ und reellen Zahlen $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. Dabei ist r der Rang unserer Matrix A . Wir nennen σ_i **Singulärwert** und u_i, v_i (**Links-,Rechts-**)**Singulärvektor**.

Orthonormal ergänzt gilt $A = U \Sigma V^\dagger$ mit $U = (u_1, \dots, u_m) \in GU_m$ und $V = (v_1, \dots, v_n) \in GU_n$ und $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots) \in \mathbb{K}^{m \times n}$. **Beispiel:**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{u_1} \cdot \underbrace{5}_{\sigma_1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{v_1^\dagger} = \underbrace{\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}}_U \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_\Sigma \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{V^\dagger}$$

Analog zu Eigenvektoren $Aw_i = w_i \lambda_i$ gilt hier für die Singulärvektoren rechts $Av_i = u_i \sigma_i$ und links $u_i^\dagger A = \sigma_i v_i^\dagger$ für $i = 1, \dots, r$, also $A^\dagger u_i = v_i \sigma_i$.

- (1) Die Vektoren u_1, \dots, u_r sind eine ONB des Spaltenraums der Matrix A ,
- (2) und u_{r+1}, \dots, u_m sind eine ONB von $\text{Ker } A^\dagger = \{u \in \mathbb{K}^m \mid A^\dagger u = 0\}$.
- (3) Die Vektoren $v_1^\dagger, \dots, v_r^\dagger$ sind eine ONB des Zeilenraums der Matrix A ,
- (4) und v_{r+1}, \dots, v_n sind eine ONB von $\text{Ker } A = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = 0\}$.

Aufgabe: Warum gilt nach Ergänzung $\sum_{i=1}^r u_i \sigma_i v_i^\dagger = U \Sigma V^\dagger$?

Lösung: Beide Seiten definieren dieselbe lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$. Wir prüfen dies auf der Orthonormalbasis v_1, \dots, v_n : Rechts finden wir

$$v_i \xrightarrow{V^\dagger} e_i \xrightarrow{\Sigma} e_i \sigma_i \xrightarrow{U} u_i \sigma_i.$$

Links finden wir ebenso $v_i \mapsto u_i \sigma_i$ für $i \in \{1, \dots, r\}$, sonst $v_i \mapsto 0$. QED

☺ Aus dieser Rechnung folgen sofort die obigen Aussagen (1) und (4). Symmetrisch hierzu gelten dieselben Aussagen (3) und (2) für A^\dagger .

☺ Geometrisch gesehen ist die Abbildung $v \mapsto u = Av$ eine Isometrie V^\dagger gefolgt von einer Streckung Σ entlang der Achsen und einer Isometrie U .

Satz T3B: Singularwertzerlegung (*singular value decomposition*, SVD)

- (1) Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ hat eine Singularwertzerlegung $(u_i, \sigma_i, v_i)_{i=1}^r$.
 (2) Die Singularwerte $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ sind durch A eindeutig bestimmt.

Beweis: (2) *Eindeutigkeit:* Aus $A = \sum_{i=1}^r u_i \sigma_i v_i^\dagger$ folgt $A^\dagger A = \sum_{i=1}^r v_i \sigma_i^2 v_i^\dagger$. Also sind $\sigma_1^2 \geq \dots \geq \sigma_r^2 > 0$ die positiven Eigenwerte von $A^\dagger A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

(1) *Konstruktion:* $A^\dagger A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist selbstadjungiert und positiv semidefinit (T2c). Dank erstem Spektralsatz T1i existiert zu $A^\dagger A$ eine orthonormale Eigenbasis $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Wir setzen $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i}$ und sortieren $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 = \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n$. Für $i \in \{1, \dots, r\}$ setzen wir $u_i := Av_i / \sigma_i \in \mathbb{K}^m$ und erhalten ein ONS:

$$\langle u_i | u_j \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \langle Av_i / \sigma_i | Av_j / \sigma_j \rangle \stackrel{\text{Ad}}{=} \langle v_i | A^\dagger Av_j \rangle / \sigma_i \sigma_j \stackrel{\text{Eig}}{=} \langle v_i | v_j \rangle \sigma_j / \sigma_i \stackrel{\text{ONB}}{=} \delta_{ij}$$

Somit ist $A = \sum_{i=1}^r u_i \sigma_i v_i^\dagger$ die ersehnte Singularwertzerlegung. QED

Aufgabe: Warum gilt im letzten Schritt die Gleichheit $A = \sum_{i=1}^r u_i \sigma_i v_i^\dagger$?

Lösung: Beide Seiten definieren dieselbe lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$. Wir prüfen dies auf der Basis v_1, \dots, v_n und finden $v_i \mapsto Av_i = u_i \sigma_i$ für $i \in \{1, \dots, r\}$, sonst $Av_i = 0$. Die rechte Seite tut dasselbe. QED

Bemerkung: Die Singularwerte $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ sind eindeutig dank (2), die Vektoren $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{K}^m$ und $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ in (1) hingegen nicht!

(a) Das ONS $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{K}^m$ bestimmt $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{K}^n$, und umgekehrt, durch $Av_i = u_i \sigma_i$ bzw. $A^\dagger u_i = v_i \sigma_i$. Orthonormale Basisergänzungen u_{r+1}, \dots, u_m und v_{r+1}, \dots, v_n jedoch sind willkürlich und unabhängig.

(b) Die Wahl des ONS $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{K}^m$ und $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{K}^n$ ist nie ganz eindeutig: Für $\mu_i \in \mathbb{K}$ mit $|\mu_i| = 1$ setzen wir $\tilde{u}_i = u_i \mu_i$ und $\tilde{v}_i = v_i \mu_i$. Mit $(u_i, \sigma_i, v_i)_{i=1}^r$ ist auch $(\tilde{u}_i, \sigma_i, \tilde{v}_i)_{i=1}^r$ eine Singularwertzerlegung.

(c) Generisch, für $\sigma_1 > \dots > \sigma_r > 0$, ist dies die einzige Mehrdeutigkeit. Allgemein: Singularwerte der Vielfachheit ℓ gehören zu einem Eigenraum der Dimension ℓ , und je zwei ONB unterscheiden sich durch $\mu \in \text{GU}_\ell \mathbb{K}$.

Einfachster Fall: Welche Matrizen sind unitär diagonalisierbar?
 Über \mathbb{R} : Jede symmetrische Matrix ist orthogonal diagonalisierbar! (T1i)
 Über \mathbb{C} : Jede normale Matrix ist unitär diagonalisierbar! (T1o)

Korollar T3c: SVD aus unitärer Diagonalisierung

Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unitär diagonalisierbar zu $Q^\dagger A Q = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, so gilt $\sigma_i = |\lambda_i|$ absteigend sortiert.

Beweis: Wir haben

$$A \stackrel{(1)}{=} Q \Lambda Q^\dagger \stackrel{(2)}{=} \underbrace{Q \Delta^{-1}}_U \cdot \underbrace{\Delta \Lambda}_\Sigma \cdot \underbrace{Q^\dagger}_V^\dagger$$

Wir positivieren $\Lambda \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $\Delta \in \mathbb{K}^{n \times n}$ zu $\Delta \Lambda = \text{diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$ mit $\Delta_{ii} = |\lambda_i| |\lambda_i|^{-1}$ falls $\lambda_i \neq 0$, sonst $\Delta_{ii} = 1$ und $\Delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$. Die Spalten von Q sind orthonormal, weiterhin nach Skalierung zu $Q \Delta^{-1}$. Somit ist $(U, \Sigma, V^\dagger) = (Q \Delta^{-1}, \Delta \Lambda, Q^\dagger)$ eine Singularwertzerlegung von A . Die Singularwerte $\sigma_i = |\lambda_i|$ sind eindeutig nach Sortierung. QED

Gauß-Normalform (GNF, Satz M3E): Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ über einem Divisionsring \mathbb{K} sind genau dann $\text{GL}_* \mathbb{K}$ -äquivalent, wenn sie denselben Rang r haben. Diese Klassifikation verfeinern wir nun:

Korollar T3d: Klassifikation zur $\text{GU}_* \mathbb{K}$ -Äquivalenz über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ sind genau dann $\text{GU}_* \mathbb{K}$ -äquivalent, wenn sie dieselben Singularwerte haben (und somit denselben Rang).

Beweis: „ \Leftarrow “: Dank SVD T3B haben wir $U^\dagger A V = \Sigma$ und $\tilde{U}^\dagger B \tilde{V} = \tilde{\Sigma}$. Aus Gleichheit $\Sigma = \tilde{\Sigma}$ folgt die Äquivalenz gemäß $A = (U \tilde{U}^\dagger) B (\tilde{V} V^\dagger)$. „ \Rightarrow “: Gilt $B = U A V^\dagger$, so haben $A^\dagger A$ und $B^\dagger B = V A^\dagger A V^\dagger$ dieselben Eigenwerte, also haben A und B dieselben Singularwerte. QED

😊 Unser Existenzbeweis zu Satz T3B ist konstruktiv und liefert einen expliziten Algorithmus zur Berechnung einer Singularwertzerlegung! Damit können Sie direkt arbeiten und jede Matrix singularzerlegen.

😊 In der Numerik erarbeiten Sie hierzu weitere Verfahren, die eine Singularwertzerlegung auch für große Matrizen effizient annähern.

Korollar T3E: Operatornorm

(1) Der größte Singulärwert σ_1 von $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist die **Operatornorm**:

$$\sigma_1 = \|A\| := \sup\{|Ax|_{\mathbb{K}^m} ; |x|_{\mathbb{K}^n} \leq 1\}$$

Beweis: (1) Sei $A = U\Sigma V^\dagger = \sum_{i=1}^r u_i \sigma_i v_i^\dagger$ eine Singularwertzerlegung. Für $x \in \mathbb{K}^n$ gilt $x = \sum_{j=1}^n v_j x_j$ mit $x_j \in \mathbb{K}$, somit $v_j^\dagger x = x_j$, also

$$|Ax|_{\mathbb{K}^m}^2 \stackrel{\text{SVD}}{=} \left| \sum_{i=1}^r u_i \sigma_i x_i \right|_{\mathbb{K}^m}^2 \stackrel{\text{ONS}}{=} \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 |x_i|^2 \leq \sigma_1^2 |x|_{\mathbb{K}^n}^2.$$

Aus $|x| \leq 1$ folgt $|Ax| \leq \sigma_1$. Zudem gilt $|Av_1| = \sigma_1$. Also $\|A\| = \sigma_1$. QED

Die Operatornorm $\|A\|$ ist die größtmögliche Streckung durch $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Sie heißt auch **Spektralnurm**, denn $\sigma_1^2 = \max \sigma(A^\dagger A)$, wie hier zu sehen. Die kleinstmögliche Streckung σ_n ist gegeben durch $\sigma_n^2 = \min \sigma(A^\dagger A)$. Diese Daten spielen in der Analysis und der Numerik eine wichtige Rolle. Die **Kondition** $\text{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \sigma_1/\sigma_n \geq 1$ misst, wie das Lösen von $Ax = y$ kleine Fehler verstärkt. Es gilt $\text{cond}(A) = 1$ gdw $A^\dagger A = I$.

Wir setzen hier stillschweigend $n \geq 1$ voraus. Unsere Rechnung zeigt: Das Supremum wird tatsächlich angenommen, ist also ein Maximum!
Für $T: V \rightarrow U$ linear zwischen normierten Räumen ist die Operatornorm:

$$\|T\| := \sup\{|T(x)|_U ; x \in V, |x|_V \leq 1\}$$

In Dimension $n = \dim V > 0$ können wir auf Norm $|x| = 1$ skalieren. In Dimension $0 < n < \infty$ wird das Supremum auf der Sphäre angenommen, die Operatornorm ist also das Maximum $\|T\| = \max\{|T(x)|_U ; |x|_V = 1\}$.

Dahinter steckt ein fundamentales Ergebnis der Analysis / Topologie: Im euklidischen Raum \mathbb{R}^N sind Ball $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{K}^n ; |x| \leq 1\}$ und Sphäre $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{K}^n ; |x| = 1\}$ *kompakt*. Jede stetige Funktion $f: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ darauf nimmt ihre Extrema an, zuvor die Energie $E(x) = x^\dagger A x$ (T1H), hier nun

$$f(x) = |Ax|^2 = \langle Ax | Ax \rangle = \langle x | A^\dagger A x \rangle = x^\dagger A^\dagger A x.$$

⚠ In unendlicher Dimension hingegen kann $\|f\| = \infty$ auftreten.

Übung: Was ist $\|\partial: \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{C}^\infty\|$? Testen Sie dies mit $f_n(x) = \sin(nx)$.

Korollar T3E: Frobenius-Norm

(2) Das Frobenius-Normquadrat von $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist die Quadratsumme aller Matrixeinträge und zugleich aller Singulärwerte:

$$\sum_{i=1}^r \sigma_i^2 = |A|_F^2 := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2$$

Erinnerung: Das Frobenius-Normquadrat $|A|_F^2$ ist die Quadratsumme aller Elementnormen, also ebenso die Quadratsumme der euklidischen Spaltennormen und die Quadratsumme der euklidischen Zeilennormen. Diese Norm ist naheliegend zu definieren und besonders leicht zu nutzen, daher wird sie in der numerischen linearen Algebra gerne verwendet.

Beweis: Seien (a_1, \dots, a_n) die Spalten von $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Für $U \in \text{GU}_m \mathbb{K}$ gilt dann $U^\dagger A = (U^\dagger a_1, \dots, U^\dagger a_n)$. Die euklidischen Spaltennormen ändern sich dabei nicht, $|U^\dagger a_j|_F^2 = |a_j|_F^2$, also auch nicht die Frobenius-Norm.

Entsprechendes gilt für die Operation $A \mapsto AV$ mit $V \in \text{GU}_n \mathbb{K}$.

Somit erhalten wir $|A|_F^2 = |U^\dagger A V|_F^2 = |\Sigma|_F^2 = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2$. QED

Die Operatornorm $\|A\|$ ist wichtig, wenn wir A als Operator betrachten, also wie gewohnt als die lineare Abbildung $f_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m: x \mapsto Ax$. Die Frobenius-Norm $|A|_F$ ist besonders bequem und direkt, als Summe aller Absolutquadrate, oder der euklidischen Normquadrate aller Zeilen, oder aller Spalten. Das ist leichter zu berechnen als die Operatornorm.

☺ Beide erlauben eine wunderschöne Formulierung mit Singulärwerten. Diese Zusammenhänge sind ebenso elegant wie erleuchtend, zudem erfreulich effizient in konkreten Rechnungen. Wir sehen etwa $\|A\| \leq |A|_F$.
Übung: Folgern Sie dies direkt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

☺ Die jeweilige Anwendung fordert passende Normen, oft die Operator- oder die Frobenius-Norm oder weitere maßgeschneiderte Normen. Zu jedem Exponenten $p \in [1, \infty[$ haben wir die **Schatten- p -Norm**

$$\|A\|_p := \text{tr}[(A^\dagger A)^{p/2}]^{1/p} = [\sum_{i=1}^r \sigma_i^p]^{1/p} = \|(\sigma_i)_{i=1}^r\|_p$$

Für $p = 2$ ist dies die Frobenius-Form, für $p \rightarrow \infty$ die Operatornorm.

Für $p = 1$ gilt $\|A\|_1 = \text{tr} \sqrt{A^\dagger A} = \sum_{i=1}^r \sigma_i$. Dazu hilft folgender Satz.

Satz T3F: Wurzel quadratischer Matrizen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ selbstadjungiert und positiv semidefinit (kurz spsd).
Zu $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ existiert genau eine spsd Matrix $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $B^r = A$.
Für diese schreiben wir dann $B =: \sqrt[r]{A} = A^{1/r}$.

Beweis: Dank erstem Spektralsatz T11 haben wir $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^k \text{Eig}(A, \lambda_i)$ mit $0 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_k$ in \mathbb{R} . Auf $\text{Eig}(A, \lambda_i)$ wirkt A als Skalierung mit λ_i , also B mit $\mu_i = \lambda_i^{1/r}$. Das beweist Eindeutigkeit und Existenz. QED

Explizite Berechnung als Matrix: Dank erstem Spektralsatz T11 haben wir $A = Q\Lambda Q^\dagger$ mit $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ und $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wir erhalten $M = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ mit $\mu_i = \lambda_i^{1/r}$. Für $B := QMQ^\dagger$ gilt die erhsehnte Gleichung $B^r = QMQ^\dagger \dots QMQ^\dagger = QM^r Q^\dagger = Q\Lambda Q^\dagger = A$. QED

😊 Slogan: Selbstadjungierte Matrizen verhalten sich wie reelle Zahlen, und selbstadjungierte positiv definite (spd) wie positive reelle Zahlen.

⚠ Im obigen Satz ist die SPSD-Bedingung wesentlich.
Wurzeln von Matrizen sind im Allgemeinen nicht eindeutig.

Beispiel: In $\text{GO}_2 \mathbb{R}$ hat $X^2 = I$ unendlich viele Lösungen! Neben Identität $+I$ und 180° -Drehung $-I$ erfüllt jede Spiegelung S die Gleichung $S^2 = 1$.

Übung: Warum sind das bereits alle Lösungen in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$? Minimalpolynom!

Beispiel: In $\text{SU}_2 \mathbb{C} = \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$ hat $X^2 = -I$ unendlich viele Lösungen: neben $\pm i, \pm j, \pm k$ jede Quaternion $q \in \langle i, j, k \rangle_{\mathbb{R}}$ mit Länge $|q| = 1$.

Übung: Für $A \in \text{SU}_2 \mathbb{C}$ gilt $A^2 = -I$ gdw $\text{tr } A = 0$. Spektralsatz!

🌀 Für welche Funktionen f und Matrizen A können wir $f(A)$ erklären? Zunächst für alle $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und alle Polynome $f(x) = \sum_{k=0}^n f_k x^k \in \mathbb{K}[X]$, dann für alle konvergenten Potenzreihen wie $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k / k!$.

😊 Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ selbstadjungiert, $Q^\dagger A Q = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Für jede Funktion $f: \mathbb{R} \supset \sigma(A) \rightarrow \mathbb{R}$ haben wir $f(A) := Q f(\Lambda) Q^\dagger$ mit $f(\Lambda) = \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))$. In Satz T3F gilt $f = \sqrt{\cdot}: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Jeden Skalar $a \in \mathbb{K}^\times$ können wir **polar zerlegen** gemäß $a = qp = pq$ in Länge $p = |a|$ und Richtung $q = a/|a| \in \text{GU}_1 \mathbb{K} = \{a \in \mathbb{K}; |a| = 1\}$.
Über \mathbb{R} ist $p = |a|$ der Betrag und $q \in \text{GU}_1 \mathbb{R} = \mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ das Vorzeichen.
Über \mathbb{C} ist $q \in \text{GU}_1 \mathbb{C} = \mathbb{S}^1$ die Richtung, über \mathbb{H} ebenso $q \in \text{GU}_1 \mathbb{H} = \mathbb{S}^3$.

Satz T3c: Polarzerlegung quadratischer Matrizen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ erlaubt eine (rechte/linke) **Polarzerlegung**

$$A = QP = P'Q$$

mit $P, P' \in \mathbb{K}^{n \times n}$ selbstadjungiert positiv semidefinit und $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$. Dabei sind P, P' immer eindeutig, falls A invertierbar ist auch Q .

Beweis: Existenz: Aus jeder Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^\dagger$ gewinnen wir zugehörige Polarzerlegungen $A = (UV^\dagger) \cdot (V\Sigma V^\dagger) = (U\Sigma U^\dagger) \cdot (UV^\dagger)$.

Eindeutigkeit: Aus $A = QP$ folgt $A^\dagger A = P^\dagger Q^\dagger QP = P^2$, also $P = \sqrt{A^\dagger A}$. Ist A invertierbar, so auch P , demnach ist $Q = AP^{-1}$ eindeutig. QED

😊 Slogan: Selbstadjungierte Matrizen verhalten sich wie reelle Zahlen, und selbstadjungierte positiv definite (spd) wie positive reelle Zahlen.

😊 Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ können wir gemäß $A = QP$ polar zerlegen in ihre „Richtung“ $Q \in \text{GU}_n \mathbb{K}$ und ihren „Betrag“ P , Letzterer ist spsd.

Für $n = 1$ erhalten wir die eingangs motivierende skalare Situation: Jeden Skalar $a \in \mathbb{K}^\times$ können wir polar zerlegen gemäß $a = qp = pq$ in Länge $p = |a|$ und Richtung $q = a/|a| \in \text{GU}_1 \mathbb{K} = \{a \in \mathbb{K}; |a| = 1\}$.

Speziell für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ haben wir $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi[\}$. So erhalten wir die vertraut-bewährte Polardarstellung komplexer Zahlen, siehe Seite E309:

$$a = p e^{i\theta} = p (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Dasselbe gilt nun für alle Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Ebenso wie im skalaren Vorbild ist der „Betrag“ P immer eindeutig, doch die „Richtung“ $Q = AP^{-1}$ nur falls A invertierbar ist.

Kapitel T

Bonusmaterial

*We have normality. I repeat, we have normality.
Anything you still can't cope with is therefore your own problem.*
Douglas Adams (1952–2001), *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*

Inhalt dieses Kapitels T

- 5 Übungsaufgabe und Anwendungsbeispiele
- Simultane unitäre Diagonalisierung
 - Die Pseudoinverse nach Moore–Penrose
 - Die Trilogie $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ im Rückblick

Spektralsatz: Rückblick und Ausblick

Der Spektralsatz ist einer der Höhepunkte der Linearen Algebra. Diese gute Investition wird Ihnen sicher oft nützen, egal wo Sie sich betätigen, ob in einer der vielen klassischen Anwendungen oder in aktuellen Entwicklungen wie Machine Learning oder Quantencomputing.

Mathematik ist wunderschön und nützlich, hier erfahren Sie dies *par excellence*. Mathematik ist anstrengend und lohnend, sogar sehr, auch diese beiden Aspekte spüren Sie deutlich: Der Spektralsatz mobilisiert nahezu alle zuvor erarbeiteten Werkzeuge. Darauf dürfen Sie stolz sein.

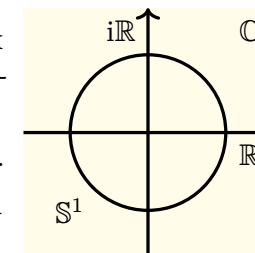
Der Spektralsatz verwirklicht unser seit Kapitel P gestecktes Ziel: Wir wollen jede lineare Abbildung möglichst einfach darstellen. Jede normale Matrix können wir in einer orthonormalen Eigenbasis darstellen, also durch einen unitären Basiswechsel diagonalisieren.

Seine Anwendungen sind überaus vielfältig und geradezu allgegenwärtig, wie bereits eingangs skizziert, innerhalb und außerhalb der Mathematik, von Quantenmechanik über Fourier–Analysis zur Datenanalyse uvm., und arbeitet als treue Hilfe in jeder numerisch basierten Software.

Ist das normal oder kann das weg?

Wiederholung: Was bedeutet für eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ die Eigenschaft N: normal, S: symmetrisch, A: antisymmetrisch, O: orthogonal?

Welche acht der sechzehn Kombinationen sind für mindestens eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ möglich? Geben Sie jeweils ein Beispiel oder ein Gegenargument.



In dieser Übung wiederholen Sie die zentralen Begriffe, geben konkrete Beispiele und verstehen so die Zusammenhänge. Ist jede Matrix normal? Wie sehen Gegen/Beispiele aus? Die drei wichtigen Beispielklassen sind anti/symmetrische und orthogonale Matrizen. Welche dieser schönen Eigenschaften können gleichzeitig gelten? Gibt es normale Matrizen, die keine dieser drei Eigenschaften haben? Die Skizze hilft! Ach ja, und natürlich der Spektralsatz: Er verschafft uns den vollständigen Überblick.

Komplex über \mathbb{C} ist vieles leichter, reell über \mathbb{R} vielleicht anschaulicher. In dieser Übung verbinden und verstehen Sie beides.

In vielen Anwendungen, etwa in der Physik, arbeiten wir mit mehreren Endomorphismen gleichzeitig und wollen diese simultan diagonalisieren:

◆ Satz P7B: simultane Diagonalisierung von Endomorphismen

Seien $f_1, \dots, f_\ell : V \rightarrow V$ linear über dem Körper \mathbb{K} . Äquivalent sind:

- 1 Die Endomorphismen (f_1, \dots, f_ℓ) sind simultan diagonalisierbar.
- 2 Jeder Endomorphismus f_1, \dots, f_ℓ ist einzeln diagonalisierbar und je zwei kommutieren, also $f_j \circ f_k = f_k \circ f_j$ für alle $j, k \in \{1, \dots, \ell\}$.

Korollar T5A: simultane unitäre Diagonalisierung von Endomorphismen

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sei nun $(V, \langle - | - \rangle)$ zudem unitär. Äquivalent sind:

- 1 Die Familie (f_1, \dots, f_ℓ) ist simultan unitär diagonalisierbar.
- 2 Jeder Endomorphismus f_1, \dots, f_ℓ ist einzeln unitär diagonalisierbar und je zwei kommutieren, also $f_j \circ f_k = f_k \circ f_j$ für alle $j, k \in \{1, \dots, \ell\}$.

Unitäre Diagonalisierbarkeit beherrschen wir dank Spektralsatz T1I/T1O!

Übung: Wiederholen Sie Satz P7B und folgern Sie Korollar T5A
Höchst erfreulich: Das Korollar erfordert nun kaum weitere Mühe!
Wie stellen Sie sicher, dass die simultane Eigenbasis orthonormal ist?
Bonus: Über \mathbb{H} gilt „(2) \Leftrightarrow (1) mit kommutierenden Eigenwerten“.

😊 Kommutation $f_j \circ f_k = f_k \circ f_j$ können wir meist direkt prüfen.
Wie prüfen Sie, ob f_1, \dots, f_ℓ einzeln unitär diagonalisierbar sind?
Über \mathbb{R} : Jede symmetrische Matrix ist orthogonal diagonalisierbar! (T1I)
Über \mathbb{C} : Jede normale Matrix ist unitär diagonalisierbar! (T1O)

Die Quantenphysik beschreibt Zustände durch Vektoren $v \in V \setminus \{0\}$.
Jeder selbstadjungierte Operator $A = A^\dagger$ entspricht einer Messung, seine Eigenwerte sind die dabei als Ergebnis möglichen Messwerte.

Kommutierende Operatoren können gemeinsam gemessen werden.
Der Kommutator $[A, B] := AB - BA = 0$ misst die Abweichung.

Ort und Impuls entsprechen Operatoren Q und P , die nicht kommutieren.
So wird $[Q, P] \neq 0$ zum Ursprung von Heisenbergs Unschärferelation!

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Der erste Spektralsatz T1I besagt: Ist A hermitesch, $A = A^\dagger$, so existiert zu A eine orthonormale Eigenbasis mit reellen Eigenwerten.

Wir wollen daraus direkt den zweiten Spektralsatz T1O folgern: Ist A normal, $A^\dagger A = A A^\dagger$, so existiert zu A eine orthonormale Eigenbasis.

Aufgabe: Beweisen Sie dies mit Hilfe des folgenden Lemmas.

Lemma T5B: Normalität und hermitesche Zerlegung

Wir zerlegen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gemäß $A = B + iC$ mit $B = (A + A^\dagger)/2$ und $C = (A - A^\dagger)/2i$ hermitesch. Damit gilt $A^\dagger A = A A^\dagger$ gdw $BC = CB$.

Beweis: Es gilt $A^\dagger = B - iC$ und $A^\dagger A - A A^\dagger = 2i(BC - CB)$. QED

Dritter Beweis des zweiten Spektralsatzes T1O: Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normal, so haben wir $A = B + iC$ mit $B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch und $BC = CB$. Dank T1I & T5A existiert zu B, C eine simultane orthonormale Eigenbasis (v_1, \dots, v_n) mit reellen Eigenwerten β_k für B und γ_k für C . Dies ist somit eine Eigenbasis zu $A = B + iC$ mit Eigenwerten $\alpha_k = \beta_k + i\gamma_k$. QED

Übung: Wir betrachten zu $\alpha, \beta \in [0, 2\pi[$ die beiden Drehungen

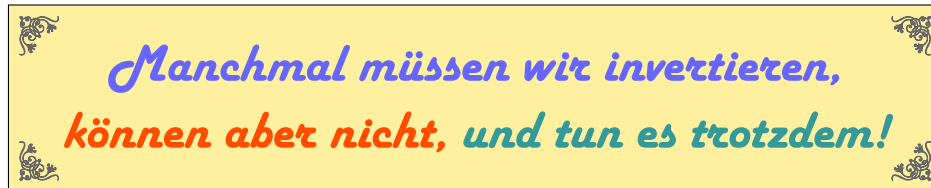
$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}.$$

Wann sind A und B über \mathbb{C} simultan unitär diagonalisierbar?
Welche Möglichkeiten sind offensichtlich? Sind dies bereits alle?

Übung: Wir betrachten zu $\alpha, \beta \in [0, 2\pi[$ die beiden Spiegelungen

$$A = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & \sin \beta & -\cos \beta \end{bmatrix}.$$

Wann sind A und B über \mathbb{R} simultan orthogonal diagonalisierbar?
Welche Möglichkeiten sind offensichtlich? Sind dies bereits alle?



Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. In dieser Übung schreiben wir lieber A^* statt A^\dagger für $\overline{A}^T \in \mathbb{K}^{n \times m}$; das ist insbesondere handschriftlich klarer.

(a) Leitbeispiel. Sei $A = \Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mit $D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r \times r}$ und $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. Zeigen Sie: Für die aus A gebildete Matrix $A^+ = \Sigma^+ := \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gelten die **Moore–Penrose–Axiome**:

$$\begin{array}{ll} (1) AA^+A = A, & (3) (AA^+)^* = AA^+, \\ (2) A^+AA^+ = A^+, & (4) (A^+A)^* = A^+A. \end{array}$$

Zwei Matrizen (A, A^+) über \mathbb{K} mit diesen Eigenschaften (1–4) heißen **pseudoinvers** zueinander (nach E.H. Moore 1920, Roger Penrose 1955).

(b) Eindeutigkeit. Zeigen Sie, dass zu jeder beliebigen Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ die Pseudoinverse $A^+ \in \mathbb{K}^{n \times m}$ eindeutig ist. *Anleitung:* Nehmen Sie an, dass es zwei solche Matrizen A_1^+ und A_2^+ gibt. Zeigen Sie $AA_1^+ = AA_2^+$ mit (1,3) und $A_1^+A = A_2^+A$ mit (1,4) und folgern Sie mit (2) daraus $A_1^+ = A_2^+$.

(c) Existenz. Zeigen Sie, dass zu jeder beliebigen Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ tatsächlich eine Pseudoinverse $A^+ \in \mathbb{K}^{n \times m}$ existiert. *Konstruktion:* Ist $A = U\Sigma V^*$ eine Singulärwertzerlegung, so genügt $A^+ = V\Sigma^+U^*$, wobei wir Σ^+ schon kennen gemäß unserem Leitbeispiel (a).

(d) Warum hängt das Ergebnis in (c) nicht von den möglichen Wahlen ab?

(e) Was ist demnach die Pseudoinverse A^+ für $A \in \text{GL}_n \mathbb{K}$? für $A = 0$? Für A injektiv gilt $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$, wie bei der Bestapproximation S3H.

Tipp: Bis auf eine sind alle Fragen leicht und direkt lösbar. Allein (b) ist knifflig und erfordert (langes?) geduldiges Ausprobieren. Versuchen Sie $AA_1^+ = \dots = A_2^{+*}A^*A_1^{+*}A^* = \dots = AA_2^+$, mit diesem Zwischenschritt sind die möglichen Umformungen wesentlich leichter zu erkunden!

In der Linearen Algebra 1 lernen Sie als Grundlage, wann und wie Sie eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ über einem Körper \mathbb{K} invertieren können. Dazu kennen Sie inzwischen erfreulich viele Kriterien und Methoden, allen voran Gauß–Verfahren D2M und Determinante O2G. (Verblüffend und nützlich ist Diagonaldominanz D7G/P6c über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.) Damit sind Sie auf alle typischen Anwendungen vorbereitet.

Nun wollen wir auch nicht-invertierbare Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ invertieren. Sie lesen richtig: sogar nicht-quadratische! Das kann streng genommen nicht gelingen, daher werden wir die Forderung $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ an eine solche Inverse geeignet abschwächen. Im Leitbeispiel (a) ist alles wunderbar klar und einfach. Die daraus extrahierten Eigenschaften (1–4) formulieren nun unsere neuen bescheideneren Wünsche, als Axiome!

😊 Die richtige Abstraktion sorgt für vielseitige Anwendbarkeit! (Anwendungen diskutieren wir unten, nach den Grundlagen.)

🤔 Lässt sich jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ pseudoinvertieren? Die positive Antwort geben Sie in dieser Übung!

QR–Zerlegung, Spektralsatz, Singulärwertzerlegung, Pseudoinverse, ..., all dies sind wunderbare Universalwerkzeuge weit über die LinA hinaus. Sie sehen hier erste erfolgverheißende Anwendungen, und wir hoffen, Sie sind beeindruckt und begeistert. Falls nicht, so liegt das sicher nicht an Theorie oder Anwendungen, die sind phantastisch, sondern vermutlich an der händischen Berechnung, die ist zugegeben meist mühselig.

Doch Rettung naht, hier übernimmt die Numerik ab dem 3. Semester: Wir haben Existenz und Eindeutigkeit bewiesen, nun geht es darum, möglichst effiziente Methoden zur Berechnung zu finden und diese auf einem Computer zu implementieren bzw. sachgerecht zu nutzen.

Damit haben Sie schließlich das Beste aus beiden Welten: präzise Sätze und nachvollziehbare Beweise zusammen mit effizienten Algorithmen und sorgsam implementierten Softwarepaketen. Der Anfang ist gemacht, auf diesem soliden Fundament können Sie getrost aufbauen, mit diesen Werkzeugen rüsten Sie sich für anspruchsvolle Anwendungen. Nur Mut!

*Wir kennen die Lösung,
nun suchen wir das Problem.*

Übung: Zu $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$ wollen wir $Ax = b$ mit minimalem quadratischen Fehler lösen. Dies gelingt mit der Pseudoinversen A^+ wie oben definiert, selbst wenn die Matrix A Rang $< n$ hat. Zeigen Sie:

(f) Die Menge $M = \{x = A^+b + (E_n - A^+A)y \in \mathbb{K}^n \mid y \in \mathbb{K}^n\}$ ist die Menge der Elemente $x \in \mathbb{K}^n$, die die Fehlernorm $\|Ax - b\|$ minimieren, das heißt für alle Konkurrenten $z \in \mathbb{K}^n$ gilt $\|Ax - b\| \leq \|Az - b\|$.

(g) Der Vektor $x_0 = A^+b$ ist das Element von M mit kleinster Norm.

Anleitung: Zeigen Sie (f,g) zunächst für die Singulärwertzerlegung $A = E_m \Sigma E_n^*$, dann allgemein durch unitären Koordinatenwechsel.

*Die Pseudoinverse löst
 $Ax = b$ durch $x = A^+b$.*

🤔 Konkurrenz für Gauß? Probieren Sie es aus!

Übung: Wir wollen $Ax = b$ lösen mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (1) Finden Sie eine Singulärwertzerlegung von A wie oben erklärt.
- (2) Berechnen Sie damit die Pseudoinverse A^+ von A wie oben erklärt.
- (3) Lösen Sie $Ax = b$ mit Hilfe der Pseudoinversen wie oben erklärt.

In Kapitel 5 haben wir die Methode der kleinsten Quadrate diskutiert. Die Bestapproximation S_{3H} zeigt, wie Sie zu jedem überbestimmtem Gleichungssystem $Ax = b$ (die) eine Näherungslösung finden, die den quadratischen Fehler minimiert. Dabei hatten wir vorausgesetzt, dass die Spalten der Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ linear unabhängig sind, also $\text{rang } A = n$. In diesem Fall gibt es genau eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ mit minimalem Fehler, und es gilt $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$, mit oder ohne Singulärwertzerlegung.

Sind die Spalten von A nun nicht mehr linear unabhängig, dann gibt es mehrere fehlerminimierende Lösungen. Für diese Problemstellung ist die Pseudoinverse prädestiniert. Die explizite Lösungsmenge M zeigt, dass diese nicht irgendeine amorphe Teilmenge des \mathbb{K}^n ist, sondern ein affiner Unterraum. Wir minimieren daher auch noch die Länge von $x \in M \subseteq \mathbb{K}^n$.

Mit diesem universellen Verfahren können Sie nicht nur den Fehler in einem *unlösbaren* linearen Gleichungssystem minimieren, Sie können *alle* linearen Gleichungssysteme lösen (auch wenn das umständlich sein mag).

Diese Übung illustriert mit einem konkreten Zahlenbeispiel, was Sie in der vorigen Aufgabe allgemein vorbereitet haben und nun schlüsselfertig als universelles Verfahren anwenden.

Das Gleichungssystem $Ax = b$ können Sie vermutlich inzwischen mit bloßem Hinschauen lösen. (Das ist eine weitere valide Methode.) Kommen Sie mit Hilfe der Pseudoinversen auf dasselbe Ergebnis?

Das Beispiel dient natürlich nur als leichte Illustration und ist deshalb unrealistisch klein. Für realistische große und effiziente Anwendungen freuen Sie sich auf die Numerik!

🤔 Elegante Theorie oder effiziente Anwendung? Ja, gerne beides!

Aufgabe: Existiert in \mathbb{H}^2 über \mathbb{H} eine orthonormale Eigenbasis zu

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ j & k \end{bmatrix} ? \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ i & k \end{bmatrix} ?$$

Lösung: (2) Zunächst für B : Wir prüfen $B^\dagger B \stackrel{?}{=} BB^\dagger$. Hier finden wir

$$B^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -j & -k \end{bmatrix}, \quad B^\dagger B = \begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix}, \quad BB^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

Somit gilt $B^\dagger B \neq BB^\dagger$, also existiert *keine* orthonormale Eigenbasis.

(1) Die Matrix A erweist sich als viel interessanter:

$$A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -i & -k \end{bmatrix}, \quad A^\dagger A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad AA^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dank $A^\dagger A = AA^\dagger$ ist A normal. Genauer gilt sogar $A \in \text{GU}_2 \mathbb{H}$.
Dank Spektralsatz T10 existiert eine orthonormale Eigenbasis.

So weit, so gut, so elegant, so abstrakt. Ambitionierter fragen wir nun:

☹ Können wir zu A eine orthonormale Eigenbasis explizit angeben?

Über den Körpern \mathbb{R}, \mathbb{C} haben wir einen umfangreichen Werkzeugkasten: die Determinante, das charakteristische Polynom, etc. Über \mathbb{H} stocken wir schon beim ersten Schritt: Wie finden wir ein erstes Eigenpaar?

☺ Wir folgen Lemma T1κ und arbeiten über \mathbb{C} : Unser Raum \mathbb{H}^2 hat die \mathbb{H} -Basis $\mathcal{E} = (1; 0), (0; 1)$, also die \mathbb{C} -Basis $\mathcal{B} = (1; 0), (j; 0), (0; 1), (0; j)$.

$$C = M_{\mathcal{B}}(A) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ 0 & -1 & 0 & -i \\ 1 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$$

Statt $A \in \mathbb{H}^{2 \times 2}$ über \mathbb{H} betrachten wir lieber $C \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ über \mathbb{C} .
Der Faktor $1/\sqrt{2}$ sorgt für *orthonormale* Spalten, das ist schön.

Über \mathbb{C} haben wir alle bewährten Werkzeuge! Wir folgen dem ChaPo-Verfahren und berechnen das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \chi_C(X) &= \det(XI - C) \\ &= X^4 - \sqrt{2}X^3 + X^2 - \sqrt{2}X + 1 \\ &= (X^2 - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}X + 1)(X^2 - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}X + 1) \\ &= (X - \lambda_1)(X - \bar{\lambda}_1)(X - \lambda_2)(X - \bar{\lambda}_2) \end{aligned}$$

Als komplexe Eigenwerte finden wir damit:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = e^{\pi i/12} \\ \lambda_2 &= \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = e^{\pi i 7/12} \end{aligned}$$

Das ist nicht mehr ganz so simpel, aber es gelingt gerade noch.
Die Eigenwerte haben Betrag 1, so wie es für $C \in \text{GU}_4 \mathbb{C}$ sein muss.

Zu λ_1, λ_2 gehören komplexe Eigenvektoren $u_1, u_2 \in \mathbb{C}^4$ und zurückübersetzt quaternionale Eigenvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{H}^2$.
Normiert erhalten wir so unseren unitären Basiswechsel $Q = (q_1, q_2) \in \text{GU}_2 \mathbb{H}$ und die ersehnte Diagonalisierung:

$$Q^\dagger \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ j & k \end{bmatrix} \cdot Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

M Denkökonomie: Die Arbeit über $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ verläuft weitgehend parallel. In ihrem Zusammenspiel und im Kontrast können wir viel lernen!

P Grundlegend ist der reelle Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Auf diesem bauen wir auf. Für viele Anwendungen (in Mathematik, Physik, Ingenieurwesen, uvm.) reichen die reellen Zahlen \mathbb{R} nicht aus, daher nutzen wir die Erweiterung zu den komplexen Zahlen \mathbb{C} . Das gilt insbesondere für Skalarprodukte.

I Quaternionen \mathbb{H} werden erfahrungsgemäß nicht so häufig genutzt wie \mathbb{C} oder \mathbb{R} , oft genug sind sie jedoch eine sehr hilfreiche Ergänzung. Für Drehungen (in Physik, Computergraphik, uvm.) sind Quaternionen und $SO_3 \mathbb{R} \leftarrow SU_2 \mathbb{C} = S^3 \subset \mathbb{H}$ effizient und bei Anwender:innen beliebt.

L Den reellen Fall versteht man besser, wenn man auch komplex denkt, und fürs Komplexe hilft es, die Quaternionen im Hinterkopf zu haben. Kurzum: Die reellen Zahlen \mathbb{R} sind oft nicht genug, die Quaternionen \mathbb{H} sind manchmal zu viel, die komplexen Zahlen \mathbb{C} sind meist genau richtig.

☺ „Die reellen Zahlen \mathbb{R} sind überall nötig, die komplexen Zahlen \mathbb{C} lasse ich mir noch gefallen, aber Quaternionen scheinen mir suspekt.“ Einverstanden, Sie dürfen sich gerne auf \mathbb{R} und \mathbb{C} konzentrieren. Zwar sind Quaternionen nicht schwer, aber man kommt auch ohne gut aus.

Ich habe in diesem Kurs neben \mathbb{R} und \mathbb{C} stillschweigend auch \mathbb{H} mitgeführt. Im Rückblick sehen Sie warum. Lohnt sich die Mühe?

Ich empfinde einige mathematische Vorteile: Unsere Rechnungen über \mathbb{R} und \mathbb{C} werden nicht schwerer über \mathbb{H} . Ganz im Gegenteil zwingt uns die einheitliche Behandlung von $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sanft zu guten Entscheidungen: Wenn Matrizen von links wirken, dann Skalare von rechts, usw.

Ich glaube an einige didaktische Vorteile: Die komplexen Zahlen \mathbb{C} sind nicht der Endgegner, der Ausblick auf \mathbb{H} lässt \mathbb{C} recht harmlos erscheinen. Für Polynome und Determinante benötigen wir Kommutativität, dies wissen wir erst wirklich zu schätzen im Kontrast zu \mathbb{H} .

Im Vergleich zu \mathbb{R} und \mathbb{C} spüren wir über \mathbb{H} einen großen Nachteil: Uns fehlen die Determinante und das charakteristische Polynom!

Aufgabe: Die Rettung ist verblüffend einfach und elegant:

Satz T5c: quaternionale Matrizen und ihre Polynome

(1) Für jede Matrix $A \in \mathbb{H}^{n \times n}$ haben wir das charakteristische Polynom $\chi_A^{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}[X]_{2n}^1$ über \mathbb{C} . Es ist immer reell, es gilt also $\chi_A^{\mathbb{C}} \in \mathbb{R}[X]_{2n}^1$.

(2) Wir haben wir das Minimalpolynom $\mu_A^{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}[X]_m^1$ über \mathbb{R} . Es ist immer ein Teiler von $\chi_A^{\mathbb{C}}$, also vom Grad $m \leq 2n$.

☺ Damit gewinnen wir alle bewährten Werkzeuge von \mathbb{C} auch über \mathbb{H} . Lineare Algebra über \mathbb{H} verläuft damit ebenso erfolgreich wie über \mathbb{C} : Diagonalisierung, Jordanisierung, Spektralsätze, uvm.

Beweis: (1) Das charakteristische Polynom $\chi_A^{\mathbb{C}}$ unseres Endomorphismus $f_A: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ über \mathbb{C} ist unabhängig von der Basiswahl, dank Satz P2f. Wir schreiben $A = R + jS$ mit $R, S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und wählen die \mathbb{C} -Basen $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n, je_1, \dots, je_n)$ und $\mathcal{C} = (je_1, \dots, je_n, -e_1, \dots, -e_n)$. Damit:

$$B = M_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{bmatrix} R & -\overline{S} \\ S & R \end{bmatrix} \quad \text{vs} \quad C = M_{\mathcal{C}}(f_A) = \begin{bmatrix} \overline{R} & -S \\ S & R \end{bmatrix}$$

Ähnlichkeit $C \sim B$ zeigt $\chi_C = \chi_B$. Konjugation $C = \overline{B}$ zeigt $\chi_C = \overline{\chi_B}$. Wir erhalten so unser (reelles!) Polynom $\chi_A^{\mathbb{C}} := \chi_B \in \mathbb{R}[X]_{2n}^1$.

(2) Über \mathbb{R} haben wir das Minimalpolynom $\mu_A^{\mathbb{R}} = \mu_B^{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}[X]_m^1$. Dank Cayley-Hamilton P3H über \mathbb{C} gilt $\chi_B(B) = 0$. Dank $\chi_B \in \mathbb{R}[X]_{2n}^1$ folgt $\mu_B^{\mathbb{R}} \mid \chi_B$, somit $m \leq 2n$. QED