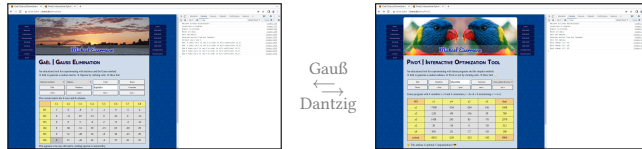


Kapitel Z

Lineare Optimierung und
Dantzig's Simplexverfahren

*We are all familiar with methods for solving linear equation systems [...]
On the other hand, the study of linear inequality systems excited virtually
no interest until the advent of game theory in 1944 and linear programming.*
George Bernard Dantzig (1914–2005)

Vollversion

eiserm.de/lehre/LinA

18.09.2026

Inhalt dieses Kapitels Z

Z002

- 1 Lineare Optimierung durch Basiswechsel und Simplexverfahren
 - Optimierung durch wiederholte Basiswechsel
 - Lineare Programme und Optimierung
 - Dualität und zertifizierte Lösungen
- 2 Hauptsatz: vom heuristischen Verfahren zum Algorithmus
 - Der Hauptsatz des Simplexverfahrens
 - Phase 1 und 2 des Simplexverfahrens
 - Laufzeit von Simplexalgorithmen
- 3 Rückblick und Ausblick auf Ihr Studium
 - LA Pride: Lineare Algebra und stolz darauf!
 - Mathematik ist wunderschön und nützlich.

Motivation und Überblick

Z003
Überblick

Die **Lineare Optimierung**, aka Lineare Programmierung, ist ein zentrales Verfahren der Optimierung (*operations research*). Sie optimiert (maximiert oder minimiert) eine lineare Zielfunktion unter Einhaltung linearer Nebenbedingungen (Gleichungen und Ungleichungen). Anwendung findet sie überall, von Produktionsplanung über Transportoptimierung bis zum Management von Investitionen (*portfolio management*).

Das von George Bernard Dantzig entwickelte **Simplexverfahren** gehört zweifellos zu den Top-Ten der wichtigsten Algorithmen. Gute Nachricht: Er ist nicht schwieriger als der Gauß-Algorithmus der Linearen Algebra; allein Terminierung und Laufzeit sind schwieriger – und interessanter.

Ich möchte Ihnen hier dieses wunderbare Verfahren näher bringen, soweit möglich sogar dafür begeistern. Vor allem jedoch möchte ich, dass Sie es praktisch nutzen können, um konkrete Probleme zu lösen. Es geht dabei um ganz handfeste Matrizenrechnung, und der beliebte Gauß-Algorithmus verwandelt sich nun in Dantzig's Simplex-Verfahren.

Motivation und Überblick

Z004
Überblick

Lineare Optimierung ist eine wirkmächtige Anwendung (affin-)linearer Methoden und wirft neues Licht auf die allgegenwärtige Matrixdualität, hier als untere und obere Schranken bei der Suche nach dem Optimum. Zugegeben, der erste Zugang ist nicht ganz leicht. Aber es lohnt sich!

Harmonisch wie selten vereinen sich schöne Aspekte der Mathematik: Lineare Algebra (Gauß), Geometrie (Polytope), Analysis (Kompaktheit), Numerik (Optimierung), Wahrscheinlichkeit (Nash-Gleichgewichte), Matrixdualität (für Ungleichungen), Zertifizierung (Schranken, Dualitätslücke), Algorithmik (Terminierung, Laufzeit), uvm.

Das Simplexverfahren hat seinen historischen Ursprung in der Spieltheorie, und es löst auch heute noch als braves Arbeitspferd eine phantastische Vielfalt von Problemen, hier und überall sonst.

Wann, wenn nicht jetzt?

Wo, wenn nicht hier?

Wer, wenn nicht wir?

John F. Kennedy (1917–1963)

Panorama: einige der wichtigsten Algorithmen

Z005
Exkurs

Welche Algorithmen scheinen Ihnen die wichtigsten? Einige Vorschläge:
(Diese Liste können Sie durch viele würdige Kandidaten fortsetzen.)

Euklidischer Algorithmus zur Berechnung des ggT in $\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}[X]$, uvm.
Schnelle Arithmetik, Primzahltests und Public Key Cryptography (PKC)
Gröbner-Basen zur Lösung polynomieller Gleichungssysteme
Newtons Methode, Linearisierung zur iterativen Nullstellennäherung
Matrixzerlegung, Gauß (LU), Householder-Givens (QR), Cholesky uvm.
Lineare Optimierung, Simplexverfahren, Innere-Punkt-Methoden uvm.
Schnelles Suchen und Sortieren, Quick-/Merge-/Heap-Sort uvm.
Schnelle Fourier-Transformation (FFT) zur Signalverarbeitung
Datenkompression mittels JPEG, MPEG, MP3, Wavelets, uvm.
Kalman-Filter zur Zeitreihenanalyse und Zustandsschätzung
Monte-Carlo-Methode zur Erwartungsschätzung durch Sampling
Googles PageRank zur Popularitätswertung von Internetseiten

Panorama: einige der wichtigsten Algorithmen

Z006
Exkurs

Die Informatik steht in regem Austausch mit allen Wissenschaften, ganz besonders intensiv mit der Mathematik, einer ihrer historischen Wurzeln. Neben den klassischen Bereichen der **angewandten Mathematik** und **Numerik** erblühen so neue Gebiete der **Computational Mathematics**: Computer Algebra Systems (CAS), Computational Group Theory (CGT), Computational Number Theory (CNT), Computational Geometry (CG), Computational Statistics, Data Science und Machine Learning (ML), Algorithmic Game Theory (AGT), Mathematical Economics, etc.

Meine obige Liste ist nicht ganz willkürlich, doch naturgemäß subjektiv; sie reflektiert persönliche Vorlieben in Algebra, Numerik und Stochastik. Inspiriert wurde sie von ähnlichen Top-Ten-Listen in *Computing in Science and Engineering* (2000), dem *Princeton Companion to Applied Mathematics* (2016) und dem Buch *Modern Computer Algebra* (2013). Natürlich hängt das Ranking von der Präzisierung der Frage ab: Was gilt als ein Algorithmus? Wie bewerten wir seine Wichtigkeit? Ich würdige hier grundlegende Bedeutung und häufige Anwendung.

Panorama: einige der wichtigsten Algorithmen

Z007
Exkurs

Zwei dieser Algorithmen sind (vereinfacht) seit der Antike bekannt; ihre anhaltende Aktualität und Entwicklungsfähigkeit ist bemerkenswert. Euklid (um 300 v.u.Z.) nutzte seinen Algorithmus für natürliche Zahlen, er gilt ebenso für Polynome und allgemein in jedem euklidischen Ring. Die Methode von Newton (1643–1727) zur Nullstellennäherung nutzte bereits Heron von Alexandria (10–70 u.Z.) in einfachen Spezialfällen.

Alle weiteren Algorithmen sind Entdeckungen des 20. Jahrhunderts und boomen seit Entwicklung und durch Einsatz elektronischer Computer. Einige lohnen sich bereits deutlich spürbar für größere Handrechnungen, meist jedoch trumpfen sie für ernsthaft große Probleme erst richtig auf. Sie sind nicht mehr wegzudenken aus realistisch-großen Anwendungen in Natur- und Ingenieurwissenschaften, Industrie, Ökonomie, Militär, ...

Kryptographie, Datenkompression, PageRank und Data Mining erblühen insbesondere durch die rasante Popularisierung des Internets seit 1990. In diesen Bereichen ist die Mathematik auch im Alltag direkt spürbar und deutlich sichtbar für alle, die unter die Oberfläche schauen.

Panorama: einige der wichtigsten Algorithmen

Z008
Exkurs

Jede große Entwicklung des 20. Jahrhunderts, etwa die Raumfahrt, benötigte diese algorithmischen Grundlagen – und noch viele weitere. Zu Beginn des 21. Jahrhunderts ist absehbar, dass auch die nächsten großen Entwicklungen darauf aufbauen und die Werkzeuge erweitern. Durch Data Science und Machine Learning werden die algorithmischen Grundlagen nicht ersetzt oder überflüssig, sondern weiter ausgebaut.

Schon heute ist es kaum möglich, sich auf eine „Top-Ten“ zu einigen. In Zukunft wird dies noch schwieriger, da die diversen Teilgebiete der Computational Mathematics weiter gedeihen und expandieren werden. Vielleicht sollte ich daher besser von der „Top-one-hundred“ sprechen, allgemein von Top-Algorithmen je nach Gebiet und Problemstellung. Differenzierung und Spezialisierung werden weiter fortschreiten.

In diesem Kapitel geht es um Optimierung, speziell lineare Optimierung, vor allem um Dantzig's Simplexverfahren zur Lösung linearer Programme. Dies gehört zweifellos zu den Top-Ten der wichtigsten Algorithmen. Zur würdigen Einordnung habe ich das Gesamtpanorama skizziert.

Lineare Optimierung ist Lineare Algebra über $\mathbb{R}$ mit Variablen in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Eine schön illustrierte Einführung und motivierenden Überblick bietet
 ▶ TomS: *The Art of Linear Programming*. youtu.be/E72DWgKP_1Y.



Leonid V. Kantorovich
(St. Petersburg 1912 –
Moskau 1986)



Tjalling C. Koopmans
(Wijdemeren 1910 –
New Haven/CT 1985)



George B. Dantzig
(Portland/OR 1914 –
Stanford/CA 2005)

Lineare Probleme treten in vielen Anwendungen auf, insbesondere zur Optimierung. Sie bilden extrem ausdrucksstarke und vielseitige Modelle und zeigen faszinierende, oft auch unerwartete Verbindungen zwischen verschiedenen Gebieten der angewandten und der reinen Mathematik.

Die Forschung zur Optimierung intensiviert sich zu Beginn des zweiten Weltkrieges. Um 1939–1941 untersuchen der sowjetische Mathematiker Leonid Kantorovich (1912–1986) und der niederländisch-amerikanische Ökonom Tjalling Koopmans (1910–1985) systematisch Transport- und Optimierungsprobleme. Für ihre bahnbrechenden Arbeiten erhalten sie 1975 den Wirtschafts-Nobelpreis, www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1975.

Als Dritter im Bunde zusammen mit Kantorovich und Koopmans gilt der US-amerikanische Mathematiker George Bernard Dantzig (1914–2005) als Begründer der Linearen Optimierung. Berühmt wurde Dantzig durch das von ihm entwickelte Simplexverfahren von 1947. Zusammen mit John von Neumann und Oskar Morgenstern baute er die Beziehungen zur Spieltheorie aus. Er erhielt 1976 die National Medal of Science.

George Dantzig studierte Mathematik an der University of Maryland (BSc) und an der University of Michigan (MSc). Allerdings fand er das Studium zu abstrakt und begeisterte sich nur für Statistik. Daher ging er 1939 nach Berkeley um bei Jerzy Neyman (1894–1981) zu promovieren. Um Neyman entstand eine führende Schule mathematischer Statistik.

George Dantzig ist der Held einer *urbanen Legende*. Als er einmal zu spät zur Vorlesung von Professor Neyman kam, standen an der Tafel zwei bislang unbewiesene Vermutungen aus der Statistik. Dantzig hielt sie versehentlich für Hausaufgaben und löste sie in den folgenden Tagen. Auf Neymans Vorschlag wurde dies zu Dantzigs Doktorarbeit.

Diese Geschichte kursiert in vielen Varianten, im Laufe der Zeit wurden Namen geändert und Details ausgeschmückt. Sie wurde zur Erbauungsgeschichte in diversen Predigten und zum Sinnbild für *positives Denken*. Diese unglaubliche Geschichte ist tatsächlich eine wahre Begebenheit! Anders als die meisten Legenden lässt sich ihr Ursprung gut belegen, siehe www.snopes.com/fact-check/the-unsolvable-math-problem.

Lehrbücher speziell zur linearen Optimierung und ihren Grundlagen:
 J. Matoušek, B. Gärtner: *Understanding and Using Linear Programming*. Springer 2006 (mitreißende Einführung, traditionell unschöne Notation)

R.J. Vanderbei: *Linear Programming*. (4th ed.) Springer 2014

V. Chvátal: *Linear Programming*. Freeman and Company 1983

G.B. Dantzig: *Linear Programming and Extensions*. RAND 1963

(Theorie und Anwendung werden umfassend erklärt. Die Darstellung gewänne sehr durch Tuckers Notation: Klarheit, Eleganz, Effizienz! Ich hoffe noch auf angemessen ästhetische Lehrbücher, siehe Z131.)

Lehrbücher allgemein zur Optimierung und numerischen Aspekten:

C. Geiger, C. Kanzow: *Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*.

Springer 2002; ... *unrestringierter Optimierungsaufgaben*. Springer 1999

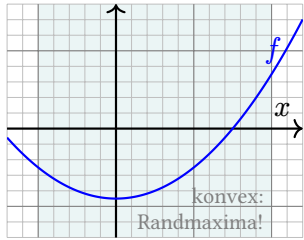
S. Boyd, L. Vandenberghe: *Convex optimization*. CUP 2004

F. Jarre, J. Stoer: *Optimierung*. Springer 2004

Software: en.wikipedia.org/wiki/List_of_optimization_software

Die mathematische **Optimierung** untersucht Probleme folgender Art:

Maximiere die Zielfunktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$
 unter den Nebenbedingungen $g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0$.



Schule: Max/Minimiere $f(x) = ax^2 + bx + c$
 unter den Nebenbedingungen $x_0 \leq x \leq x_1$.

Allgemeine Aufgabe der Kurvendiskussion:
 Finde alle Extremstellen von $f : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$.

Die Frage betrachten wir mehrdimensional.
 Sie tritt in Anwendungen extrem häufig auf:

Lineare Optimierung (LP): Hier sind $f, g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ affin-linear.

Quadratische Optimierung (QP): Hier ist $f(x) = x^T Q x + c x$ quadratisch.

Konvexe Optimierung (CP): Hier sind $f, g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nur konvex.

Ebenso: Die Minimierung von f entspricht der Maximierung von $-f$.

Auch Gleichungen $g_i(x) = 0$ kommen vor, also $g_i(x) \geq 0$ und $g_i(x) \leq 0$.

Oft müssen wir zwischen mehreren Alternativen $x \in X$ entscheiden.
 Ziel der **Optimierung** [*optimization* oder *operations research*] ist es,
 unter allen möglichen / zulässigen Optionen die beste(n) zu finden.

Hierbei kann die Menge X endlich / diskret sein (diskrete Optimierung),
 etwa $X = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid g_1(x), \dots, g_m(x) \geq 0\}$ (ganzzahlige Optimierung),
 oder kontinuierlich, speziell etwa $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x), \dots, g_m(x) \geq 0\}$.

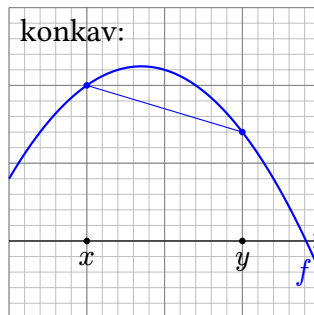
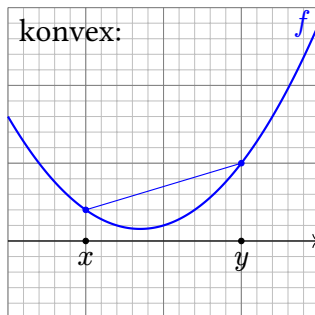
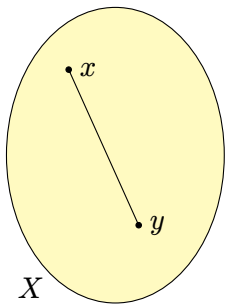
Gegeben ist die **Zielfunktion** $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, etwa Kosten oder Ertrag.

Gesucht ist $\inf f$, und wenn möglich ein/alle $x \in X$ mit $f(x) = \min f$;
 entsprechend $\sup f$, und wenn möglich ein/alle $x \in X$ mit $f(x) = \max f$.

Die Elemente $x \in X$ heißen **zulässig**; sie erfüllen alle erforderlichen
 Nebenbedingungen. Die Menge X heißt daher auch **Erfüllungsmenge**.

Im Falle $X = \emptyset$ heißt das Problem **unerfüllbar**. Wird das Infimum bzw.
 Supremum von f nicht angenommen, so heißt das Problem **unlösbar**.

Neben **Optimierung** ist auch der traditionelle Begriff **Programmierung**
 gebräuchlich. Die Bezeichnung „Programm“ bedeutet schlicht „Planung“,
 also ausnahmsweise nicht die Erstellung eines Computerprogramms.



Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn für alle Punkte $x, y \in X$ und
 $t \in [0, 1]$ auch der Zwischenpunkt $z = (1 - t)x + ty$ in der Menge X liegt.

Wir nennen $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ **konvex**, wenn zudem auf ganz X gilt:

$$f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y)$$

Im Falle „<“ für alle $x \neq y$ in X und alle $t \in]0, 1[$ heißt f **strikt konvex**.
 Entsprechend nennen wir f **(strikt) konkav**, wenn $-f$ (strikt) konvex ist.

Fingerübungen zur Wiederholung und zur Festigung der Begriffe:

Übung: Jede affin-lineare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto bx + c$ ist konvex
 und konkav. Die quadratische Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^T A x + bx + c$
 mit symmetrischer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann (strikt) konvex /
 konkav, wenn A positiv / negativ semidefinit ist (bzw. strikt definit).

Übung: Sei $f : \mathbb{R} \supset [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ einmal bzw. zweimal differenzierbar.
 Genau dann ist f (strikt) konvex / konkav, wenn f' (strikt) wächst / fällt,
 also $f'' \geq 0$ / $f'' \leq 0$ gilt (im strikten Falle entsprechend $f'' > 0$ / $f'' < 0$).
 Wie lauten die Kriterien für $\mathcal{C}^2$ -Funktionen $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$?

Übung: Jeder Durchschnitt $X = \bigcap_{i \in I} X_i$ konvexer Mengen ist konvex.
 Jede Positivkombination $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$ konvexer Funktionen ist konvex.
 Ist $f : \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, so auch die Menge $\{x \in X \mid f(x) \leq c\}$.
 Ist $f_i : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konvex für jedes $i \in I$, so auch $f = \sup_{i \in I} f_i$.

Übung: Für jedes konvexe Problem gilt: Jedes lokale Minimum ist
 ein globales Minimum. Die Menge aller optimalen Punkte ist konvex.
 Ist die Zielfunktion strikt konvex, so ist die Optimalstelle eindeutig.

Erstes Beispiel: eindimensionale Optimierung

Z017

Aufgabe: Maximieren Sie die Zielfunktion $z(x) = 3x + 5$ unter den Nebenbedingungen $x \geq 0$, $x + 2 \geq 0$, $-2x + 3 \geq 0$, $-3x + 4 \geq 0$.

Lösung: Der Ursprung $x = 0$ ist zulässig. Also gilt $\max z \geq z(0) = 5$. Die Funktion $z(x) = 3x + 5$ wächst monoton mit x : Steigung $+3 > 0$. Ausgehend von $x = 0$ wollen wir daher x möglichst weit erhöhen.

$$\begin{aligned} x \geq 0 &\Rightarrow \text{keine Einschränkung} \\ y_1 := x + 2 \geq 0 &\Rightarrow \text{keine Einschränkung} \\ y_2 := -2x + 3 \geq 0 &\Rightarrow \text{Einschränkung } x \leq 3/2 \\ y_3 := -3x + 4 \geq 0 &\Rightarrow \text{Einschränkung } x \leq 4/3 \end{aligned}$$

Der Engpass entsteht demnach in der letzten Bedingung $y_3 \geq 0$. Somit maximiert $x = 4/3$, und wir erhalten $\max z = z(4/3) = 9$.

😊 Das ist eine schöne Anwendung solider schulischer Ausbildung: Es genügen eine gute Notation und sorgfältige Fallunterscheidungen.
⚠ Ersetzen wir $x + 2 \geq 0$ durch $x - 2 \geq 0$, so werden die NB unerfüllbar!

Erstes Beispiel: eindimensionale Optimierung

Z018
Erläuterung

Unser Ziel ist im Folgenden, solche Probleme der linearen Optimierung in höheren Dimensionen zu lösen. Das Simplexverfahren nutzt dabei die eindimensionale Optimierung wie oben auf der Suche nach Engpässen.

Da wir nun mehrere Variablen $x_1, \dots, x_n \geq 0$ haben und auch mehrere Nebenbedingungen $y_1, \dots, y_m \geq 0$, benötigen wir eine übersichtliche und effiziente Buchhaltung. Dies erreichen wir durch die Schreibweise als Vektoren und Matrizen: $x \geq 0$ und $y = Ax + b \geq 0$ und $z(x) = cx + d$.

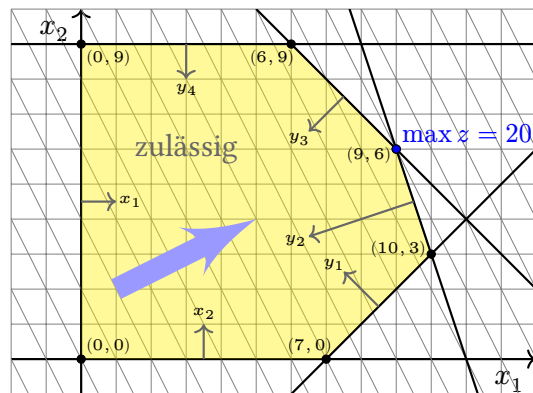
Die geniale Idee von Dantzig (1947) war es, das Problem zu lösen mit Zeilenoperationen wie im Gauß-Algorithmus. Hurra, Lineare Algebra! Ich führe dieses Verfahren an einem repräsentativen Beispiel aus. Wenn Sie genau aufpassen, dann können Sie es danach selbst.

Wie schon beim Gauß-Algorithmus bieten sich beim Simplexverfahren mehrere Wege, die Methode zu erfahren, zu begreifen und zu erlernen: (1) durch zahlreiche, gut gewählte Beispiele, (2) durch Formulierung des allgemeinen Verfahrens, (3) durch sorgsame Programmierung und Tests, (4) durch formalen Beweis der Richtigkeit des Verfahrens.

Zweites Beispiel: zweidimensionale Optimierung

Z019

Aufgabe: Maximieren Sie die Zielfunktion $z(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - 4$.



$$\begin{aligned} \text{Nichtnegativität: } x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nebenbedingungen:} \\ y_1 := 7 - x_1 + x_2 &\geq 0 \\ y_2 := 33 - 3x_1 - x_2 &\geq 0 \\ y_3 := 15 - x_1 - x_2 &\geq 0 \\ y_4 := 9 - x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

In dieser „kanonischen“ Formulierung sind alle Variablen x_i, y_j nicht-negativ.

😊 Anwendung: Produkte x_1, x_2 ; Ressourcen y_1, y_2, y_3, y_4 ; Profit z . Die zweidimensionale Optimierung können wir noch graphisch lösen; hierzu genügt uns Sorgfalt und etwas Schulmathematik der Mittelstufe. Für beliebige Dimension entwickeln wir ein algebraisches Verfahren; es beruht auf sorgsamer Buchführung für Un/Gleichungssysteme.

Zweites Beispiel: zweidimensionale Optimierung

Z020
Erläuterung

Sie verkaufen zwei Produkte mit Gewinn 2€ bzw. 1€ bei 4€ Fixkosten. Bei der Produktion müssen Sie gewisse Nebenbedingungen einhalten.
 y_1 : Sie haben 7 Teile vom Typ 1, Produkt 1 verbraucht eines, Produkt 2 setzt eines frei. (Das ist vielleicht überraschend, aber durchaus denkbar.)
 y_2 : Sie haben 33 Teile vom Typ 2, jedes Produkt benötigt davon 3 bzw. 1.
 y_3 : Sie haben 15 Teile vom Typ 3, jedes Produkt benötigt davon genau 1.
 y_4 : Sie haben 9 Teile vom Typ 4, nur Produkt 2 benötigt davon eines.

Jede unserer sechs Bedingungen $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$ definiert eine abgeschlossene Halbebene. Diese sind in obiger Graphik eingetragen. Alle Bedingungen sollen gelten, das entspricht dem logischen „Und“: Der Durchschnitt unserer sechs Halbebenen ist ein abgeschlossenes Polygon $P \subset \mathbb{R}^2$. Allgemein erhalten wir ein n -dimensionales Polytop. In unserem Fall ist die Erfüllungsmenge P beschränkt, somit kompakt. Die Zielfunktion $z: P \rightarrow \mathbb{R}$ ist affin-linear, somit stetig, nimmt also ein Maximum an. Unserer Graphik entnehmen wir $\max z = z(9, 6) = 20$.

😊 Das folgende Simplexverfahren löst das Problem elegant algebraisch.

Tuckers Tableaux und Dantzig Simplexverfahren

Z101

Anfangs betrachten wir $x_1, x_2 \geq 0$ als **freie Variablen**. Hiervon abhängig sind die **Schlupfvariablen** $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$ sowie die **Zielfunktion** z .

	x_1	x_2	1
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
z	2	1	-4

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	1	-1	0	0	0	7
-3	-1	0	-1	0	0	33
-1	-1	0	0	-1	0	15
0	-1	0	0	0	-1	9
2	1	0	0	0	0	-4

Der Ursprung $x_1 = x_2 = 0$ ist zulässig: $y_1 = 7, y_2 = 33, y_3 = 15, y_4 = 9$.
Wir maximieren $x_1 \geq 0$, bis zum Engpass $y_1 \geq 0$, Basiswechsel $x_1 \leftrightarrow y_1$:

	y_1	x_2	1
x_1	-1	1	7
y_2	3	-4	12
y_3	1	-2	8
y_4	0	-1	9
z	-2	3	10

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	1	-1	0	0	0	7
0	-4	3	-1	0	0	12
0	-2	1	0	-1	0	8
0	-1	0	0	0	-1	9
0	3	-2	0	0	0	10

Tuckers Tableaux und Dantzig Simplexverfahren

Z102

Nun sind die Variablen $y_1, x_2 \geq 0$ frei, und $x_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$ sind Schlupf. Wir notieren links die Kurzfassung und rechts das erweiterte Tableau.

	y_1	x_2	1
x_1	-1	1	7
y_2	3	-4	12
y_3	1	-2	8
y_4	0	-1	9
z	-2	3	10

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	1	-1	0	0	0	7
0	-4	3	-1	0	0	12
0	-2	1	0	-1	0	8
0	-1	0	0	0	-1	9
0	3	-2	0	0	0	10

Der Ursprung $y_1 = x_2 = 0$ ist zulässig, denn wir haben Engpässe beachtet.
Wir maximieren $x_2 \geq 0$, bis zum Engpass $y_2 \geq 0$, Basiswechsel $x_2 \leftrightarrow y_2$:

	y_1	y_2	1
x_1	-1/4	-1/4	10
x_2	3/4	-1/4	3
y_3	-1/2	1/2	2
y_4	-3/4	1/4	6
z	1/4	-3/4	19

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	0	-1/4	-1/4	0	0	10
0	-1	3/4	-1/4	0	0	3
0	0	-1/2	1/2	-1	0	2
0	0	-3/4	1/4	0	-1	6
0	0	1/4	-3/4	0	0	19

Tuckers Tableaux und Dantzig Simplexverfahren

Z103

	y_1	y_2	1
x_1	-1/4	-1/4	10
x_2	3/4	-1/4	3
y_3	-1/2	1/2	2
y_4	-3/4	1/4	6
z	1/4	-3/4	19

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	0	-1/4	-1/4	0	0	10
0	-1	3/4	-1/4	0	0	3
0	0	-1/2	1/2	-1	0	2
0	0	-3/4	1/4	0	-1	6
0	0	1/4	-3/4	0	0	19

Der Ursprung $y_1 = y_2 = 0$ ist zulässig, denn wir haben Engpässe beachtet.
Wir maximieren $y_1 \geq 0$, bis zum Engpass $y_3 \geq 0$, Basiswechsel $y_1 \leftrightarrow y_3$:

	y_3	y_2	1
x_1	1/2	-1/2	9
x_2	-3/2	1/2	6
y_1	-2	1	4
y_4	3/2	-1/2	3
z	-1/2	-1/2	20

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	1
-1	0	0	-1/2	1/2	0	9
0	-1	0	1/2	-3/2	0	6
0	0	-1	1	-2	0	4
0	0	0	-1/2	3/2	-1	3
0	0	0	-1/2	-1/2	0	20

Diese LP sind äquivalent, das letzte ist optimal: Wir lesen $\max z = 20$ ab.
Probe durch Einsetzen: Wir haben $z = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_2 + 20 = 2x_1 + x_2 - 4$.

Tuckers Tableaux und Dantzig Simplexverfahren

Z104
Erläuterung

😊 Unsere Aufgabe lösen wir durch drei elementare Basiswechsel.
Jeder ist offensichtlich eine Äquivalenzumformung: Das Problem wird umformuliert von $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ und $z(x) = cx + d \rightarrow \max!$ zu $x' \geq 0$ und $A'x' + b' \geq 0$ und $z'(x') = c'x' + d' \rightarrow \max!$ und zurück.

Dabei geht keine Information verloren: Beide Formulierungen haben dieselben Lösungen und lassen sich leicht ineinander umrechnen.

😊 Geometrisch entspricht dies einer affin-linearen Transformation:
Wir wechseln vom Koordinatensystem (x_1, x_2) zu (y_1, x_2) zu (y_1, y_2) zu (y_3, y_2) . In Letzterem können wir die Lösung direkt ablesen!

Der Ursprung unseres jeweiligen Koordinatensystems wandert von Ecke zu Ecke in unserem Polytop (Seite Z019). Wir laufen jeweils entlang einer Kante, zum Beispiel in Richtung des stärksten Anstiegs von z .

Daher hat das Verfahren seinen Namen: Wir bewegen uns entlang von Kanten, also 1-Simplizes im Rand des Polytops. Alternativ könnten wir auch durchs Innere laufen, diese Idee nutzen „Innere-Punkt-Methoden“.

Projekt: Erproben Sie möglichst viele Varianten dieser Umformungen.

	x_1	x_2
y_1	a	b
y_2	c	d

Basis-
wechsel

	y_1	x_2
x_1	$\frac{1}{a}$	$-\frac{b}{a}$
y_2	$\frac{c}{a}$	$d - \frac{bc}{a}$

$$y_1 = ax_1 + bx_2$$

$$x_1 = \frac{1}{a}y_1 - \frac{b}{a}x_2$$

$$y_2 = cx_1 + dx_2$$

$$y_2 = \frac{c}{a}y_1 + \left[d - \frac{bc}{a}\right]x_2$$

😊 Erfüllbarkeit und Lösbarkeit und Maximalwert bleiben dabei erhalten. Außerhalb des Kreuzes sehen wir genau den Gauß-Algorithmus.

😊 Freie Variablen / Spalten transformieren sich genauso wie abhängige Variablen / Nebenbedingungen / Zeilen, bis auf ein negatives Vorzeichen.

😊 Tucker-Tableaux betonen die Dualität der Linearen Optimierung.

	x_1	x_2
y_1	a	b
y_2	c	d

Basis-
wechsel

	y_1	x_2
x_1	$\frac{1}{a}$	$-\frac{b}{a}$
y_2	$\frac{c}{a}$	$d - \frac{bc}{a}$

trans-
negieren

	y_1^*	y_2^*
x_1^*	$-a$	$-c$
x_2^*	$-b$	$-d$

Basis-
wechsel

	x_1^*	y_2^*
y_1^*	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{c}{a}$
x_2^*	$\frac{b}{a}$	$-d + \frac{bc}{a}$

trans-
negieren

	x_1	x_2	
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
z	2	1	-4

x_1 y_1

	y_1	x_2	
x_1	-1	1	7
y_2	3	-4	12
y_3	1	-2	8
y_4	0	-1	9
z	-2	3	10

Der Ursprung $x_1 = x_2 = 0$ ist zulässig, denn $y_1 = 7, y_2 = 33, y_3 = 15, y_4 = 9$.

Wir wollen x_1 möglichst weit erhöhen.

Der Engpass entsteht durch $y_1 \geq 0$.

Wir ersetzen $y_1 = -x_1 + x_2 + 7$

durch $x_1 = -y_1 + x_2 + 7$.

$$y_2 = -3x_1 - 1x_2 + 33 = +3y_1 - 4x_2 + 12$$

$$y_3 = -1x_1 - 1x_2 + 15 = +1y_1 - 2x_2 + 8$$

$$y_4 = +0x_1 - 1x_2 + 9 = +0y_1 - 1x_2 + 9$$

$$z = +2x_1 + 1x_2 - 4 = -2y_1 + 3x_2 + 10$$

Der Ursprung $y_1 = x_2 = 0$ ist zulässig; er entspricht der Ecke $(x_1, x_2) = (7, 0)$.

Wir wollen x_2 möglichst weit erhöhen.

Der Engpass entsteht durch $y_2 \geq 0$.

Wir ersetzen $y_2 = 3y_1 - 4x_2 + 12$

durch $x_2 = \frac{3}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + 3$.

x_2 y_2

	y_1	y_2	
x_1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	10
x_2	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	3
y_3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
y_4	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	6
z	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	19

y_1 y_3

	y_3	y_2	
x_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	9
x_2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3
z	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	20

... Basiswechsel ...

Der Ursprung $y_1 = y_2 = 0$ ist zulässig; er entspricht der Ecke $(x_1, x_2) = (10, 3)$.

Wir wollen y_1 möglichst weit erhöhen.

Der Engpass entsteht durch $y_3 \geq 0$.

Wir ersetzen $y_3 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + 2$

durch $y_1 = -2y_3 + y_2 + 4$.

... Basiswechsel ...

Der Ursprung $y_3 = y_2 = 0$ ist zulässig; er entspricht der Ecke $(x_1, x_2) = (9, 6)$.

Die Zielfunktion ist hier maximal!

Wir erhalten das Ergebnis: $\max z = 20$.

Probe: Wir haben $z = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_2 + 20$, und Einsetzen ergibt $z = 2x_1 + x_2 - 4$.

Definition Z1A: lineare Optimierung / Programmierung

Ein **lineares Programm** (LP, lineare Optimierung) hat die Normalform

$$x \geq 0, \quad y(x) = Ax + b \geq 0, \quad z(x) = cx + d \rightarrow \max!, \quad \text{kurz } z : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit Daten $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $d \in \mathbb{R}$; gesucht ist $x \in \mathbb{R}^n$.
Das LP ist **optimal**, wenn $c \leq 0 \leq b$ gilt; dann löst $x = 0$ das Problem.

(NN) **Nichtnegativität** $x \geq 0$, ausgeschrieben: $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

(NB) **Nebenbedingungen** $y := Ax + b \geq 0$, ausgeschrieben:

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 & := & a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & + & b_1 & \geq & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_m & := & a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & + & b_m & \geq & 0 \end{array}$$

Dies definiert das **Polytop** $P(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, Ax + b \geq 0\}$.
Punkte $x \in P(A, b)$ heißen **zulässig**, die NB heißen dann **erfüllbar**.

(Z) Die **Zielfunktion** ist $z : P(A, b) \rightarrow \mathbb{R} : z(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + d$.
Ist $P(A, b) \neq \emptyset$ und z nach oben **beschränkt**, so heißt das LP **lösbar**.

Die Daten $z : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ definieren die **Problemstellung** wie oben erklärt.
Zwei Ausnahmen können vorkommen und führen zur Unlösbarkeit:

- 1 Die Bedingungen $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ sind **nicht erfüllbar**:
Das Polytop ist in diesem Falle leer, also $P(A, b) = \emptyset$.
- 2 Die Funktion $z : P(A, b) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto cx + d$ **wächst unbeschränkt**.
In diesem Falle wird das Supremum nicht angenommen.

Günstigenfalls ist das Polytop $P(A, b)$ nicht-leer und z beschränkt, etwa $P(A, b) \neq \emptyset$ kompakt: Wir suchen $x \in P(A, b)$ mit $z(x) = \max z$.
Von einem Lösungsalgorithmus erwarten wir, dass er die Ausnahmen (1) und (2) ordnungsgemäß meldet, ansonsten die Optimierung korrekt löst.

Es ist vorteilhaft, die Ungleichungen $Ax + b \geq 0$ in zwei zu teilen:
Wir **definieren** die **Schlupfvariablen** $y := Ax + b$ und **fordern** $y \geq 0$.
Wir können dann Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$ durchführen wie oben erklärt;
dies Umformung werden wir nun zum Simplexverfahren ausbauen.

- ☹ Konventionen und Schreibweisen variieren leider in der Literatur.
- 😊 Die obige Notation als Tableau ist ebenso elegant wie effizient.

Die lineare Optimierung gehört zu den Top-Ten aller Algorithmen, besser gesagt: zu den Top-Ten aller algorithmischen Problemstellungen.
Viele Eigenschaften linearer Programme entsprechen Eigenschaften von Polytopen und lassen sich so geometrisch interpretieren und beweisen.
So verbinden sich numerische, algebraische und geometrische Aspekte; auch hier sind „rein“ und „angewandt“ Facetten derselben Mathematik.

Die Abkürzung „LP“ können Sie auch als „lineares Problem“ lesen.
Die traditionelle Bezeichnung „Programm“ bedeutet schlicht „Planung“, also ausnahmsweise nicht die Erstellung eines Computerprogramms.
Der Begriff wurde Mitte der 1940er Jahre von George Dantzig geprägt noch bevor Computer zur Lösung solcher Probleme eingesetzt wurden.

Die lineare Optimierung ist ein Spezialfall der konvexen Optimierung und zentrale Technik vieler Anwendungen, etwa im Operations Research.
Häufig lassen sich Optimierungsprobleme auf diese Form zurückführen und so mit Standardtechniken lösen. Das ist insbesondere interessant, wenn (noch) keine maßgeschneiderten Lösungsverfahren bekannt sind.

Lineare Ungleichungssysteme wurden schon 1827 von Fourier gelöst, seine Methode 1936 von Motzkin wiederentdeckt und fortentwickelt.
Zur linearen Optimierung wurde dies 1939 von Leonid Kantorovich ausgebaut, der hierzu auch erste Lösungsmethoden entwickelte.

Das **Simplexverfahren** wurde 1947 von George Dantzig angegeben.
In der Praxis hat sich dies als eines der schnellsten Verfahren erwiesen, zumindest für generische Problemstellungen. Im schlechtesten Fall hat es exponentielle Laufzeit, wie der berühmte Klee–Minty–Würfel zeigt.

Das klassische Simplexverfahren ist immerhin **polynomial im Mittel**.
Zur Verfeinerung wurden seither mehrere Pivotstrategien vorgeschlagen.
Weiterhin offen ist die grundlegende Frage: Gibt es eine Pivotstrategie für das Simplexverfahren, die immer polynomielle Laufzeit garantiert?

Die lineare Optimierung lässt sich nachweislich in polynomialer Zeit lösen, wie Leonid Khachiyan (Ellipsoidverfahren, 1979) und Narendra Karmarkar (Innere-Punkte-Verfahren, 1984) zeigen konnten. Ob dies auch mit einer Pivotstrategie gelingt, bleibt eine Herausforderung.

Aufgabe: Schreiben Sie den elementaren Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$ aus.

Lösung: Der Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$ ist nur möglich, falls $a_{\ell k} \neq 0$:

$$y_\ell = a_{\ell k}x_k + \sum_{i \neq k} a_{\ell i}x_i + b_\ell \iff x_k = \frac{1}{a_{\ell k}}y_\ell - \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_{\ell k}}a_{\ell i}x_i - \frac{1}{a_{\ell k}}b_\ell$$

Wir ersetzen überall die alte Variable x_k durch die neue Variable y_ℓ :

$$y_j = a_{jk}x_k + \sum_{i \neq k} a_{ji}x_i + b_j = \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}}y_\ell + \sum_{i \neq k} \left[a_{ji} - \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}}a_{\ell i} \right] x_i + \left[b_j - \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}}b_\ell \right]$$

$$z = c_kx_k + \sum_{i \neq k} c_i x_i + d = \frac{c_k}{a_{\ell k}}y_\ell + \sum_{i \neq k} \left[c_i - \frac{c_k}{a_{\ell k}}a_{\ell i} \right] x_i + \left[d - \frac{c_k}{a_{\ell k}}b_\ell \right]$$

Der Tausch macht $y_\ell \geq 0$ zur Variablen und $x_k \geq 0$ zur Nebenbedingung.

Umkehrung: Erneuter Basiswechsel $y_\ell \leftrightarrow x_k$ macht alles rückgängig.

😊 Alle Basiswechsel sind in diesem Sinne Äquivalenzumformungen.

Invarianz: Das alte LP $\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und das neue LP $\begin{pmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ sind äquivalent; sie stimmen überein in Erfüllbarkeit und Lösbarkeit und Maximalwert.

Satz Z1B: Jedes lösbare LP $\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist optimierbar durch Basiswechsel.

Wir können $z : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ transformieren in ein optimales LP $z' : \begin{pmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ mit $c' \leq 0 \leq b'$, somit lösen durch $x' = 0$ und $\max z = \max z' = z'(0) = d'$.

Wir präzisieren und beweisen dies am Ende des Kapitels als Hauptsatz des Simplexverfahrens, siehe Z2A. Hier zunächst geometrisch-intuitiv:

Beweisidee: Das Maximum wird in einer Ecke $x^* \in P(A, b)$ realisiert.

Zu dieser gelangen wir durch Basiswechsel (entlang von Kanten). QED

Genauer: Unter den Bedingungen $x_1, \dots, x_n \geq 0$ und $y_1, \dots, y_m \geq 0$ gibt es n linear unabhängige, die im Punkt x^* aktiv sind, also zu Gleichungen werden, und deren Richtungsvektoren der Funktion z entgegenlaufen.

Diese (zunächst abhängigen) Variablen können wir durch Basiswechsel zu freien Variablen machen, und das LP $z' : \begin{pmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ wird somit optimal.

😊 Dieses geometrische Argument zeigt, dass eine Lösung möglich ist.

😞 Es erklärt leider nicht, wie wir eine Lösung konkret finden können.

😊 In §Z2 formulieren und beweisen wir dazu den Simplexalgorithmus.

Der geometrische Beweis von Satz Z1B zeigt zunächst nur, dass eine Lösung prinzipiell möglich ist, er erklärt aber leider nicht, wie wir eine Lösung konkret finden können. Dies leistet Dantzig's Pivotstrategie: Wir hangeln uns von Ecke zu Ecke „immer an der Wand entlang“.

Im Grundlagenstreit der 1920er Jahre verteidigte Hermann Weyl den Konstruktivismus in seinem Artikel *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik* (Vorträge, gehalten im mathematischen Kolloquium Zürich), Math. Zeitschrift 10 (1921) 39–79. Dort schrieb er die weisen Worte:

[Ein Existenzsatz zeigt] das Vorhandensein eines Schatzes, ohne jedoch zu verraten, an welchem Ort. [...] Nicht das Existenztheorem ist das Wertvolle, sondern die im Beweise geführte Konstruktion. Die Mathematik ist, wie Brouwer gelegentlich sagt, mehr ein Tun denn eine Lehre.

Erst der Simplexalgorithmus ermöglicht uns, den Schatz zu heben! Dazu ist noch deutlich mehr Arbeit nötig: Wir müssen jeden Schritt, also den jeweils vorzunehmenden Basiswechsel explizit festlegen, und dann nachweisen, dass die Methode immer zum Ziel führt.

Zur Klärung möglicher Missverständnisse betone ich den Dreischritt:

- 1 Die Daten $z : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ definieren zunächst die **Problemstellung**.
Damit legen wir präzise fest, was wir als **Lösung** akzeptieren.
- 2 Jeder Basiswechsel ermöglicht eine **elementare Umformung**.
Das Problem geht über in ein **äquivalentes Problem** $z' : \begin{pmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.
- 3 Erst die genaue Abfolge der Schritte definiert einen **Algorithmus**.
Hierzu dient die explizite Formulierung einer **Pivotstrategie** (§Z2).

Anders als im Gauß-Algorithmus ist die Laufzeit schwer zu beschränken. Schlimmstenfalls ist sie exponentiell, etwa für den Klee-Minty-Würfel. Daher wurden zahlreiche weitere Pivotstrategien vorgeschlagen, oder auch grundsätzlich neue Zugänge wie etwa Innere-Punkte-Methoden.

Für einen ersten Durchgang möchte ich diese anspruchsvolleren Fragen vermeiden, genauer gesagt auf einen zweiten Durchgang verschieben. Erst wenn Sie genug eigene Erfahrung mit dem Verfahren gesammelt haben, sind Sie bereit und motiviert für eine genauere Untersuchung.

Beispiel: Zur Illustration untersuchen wir erneut unsere Rechnung.

	x_1	x_2	
u_1	-1	1	7
u_2	-3	-1	33
u_3	-1	-1	15
u_4	0	-1	9
u_0	2	1	-4

Ausgeschrieben: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

$$u_1 = -1x_1 + 1x_2 + 7 \geq 0$$

$$u_2 = -3x_1 - 1x_2 + 33 \geq 0$$

$$u_3 = -1x_1 - 1x_2 + 15 \geq 0$$

$$u_4 = +0x_1 - 1x_2 + 9 \geq 0$$

$$u_0 = +2x_1 + 1x_2 - 4 \geq 0$$

Wir wollen u_0 maximieren. Wir finden leicht eine grobe obere Schranke:

$$u_0 \leq u_0 + u_2 = -1x_1 - 0x_2 + 29 \leq 29$$

Mit etwas Glück und Geschick finden wir eine kleinere obere Schranke:

$$u_0 \leq u_0 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3 = -0x_1 - 0x_2 + 20 \leq 20$$

Jede solche Positivkombination liefert uns eine obere Schranke für u_0 . Was ist die kleinste obere Schranke? Dies definiert das duale Problem!

Allgemein suchen wir geeignete Multiplikatoren $y_1, \dots, y_m \geq 0$:

$$u_0 \leq u_0 + y_1 u_1 + \dots + y_m u_m = \underbrace{(yA + c)x}_{\leq 0} + \underbrace{yb + d}_{\rightarrow \min!}$$

Die Bedingungen $y_j, u_j \geq 0$ garantieren die behauptete Ungleichung. Wir verlangen $yA + c \leq 0$, denn dadurch wird der Punkt $x = 0$ optimal. Wir wollen $yb + d$ minimieren, als möglichst kleine obere Schranke. Aus dem primalen Problem erhalten wir so das duale Problem:

$$\text{primales LP: } x \geq 0, Ax + b \geq 0, u_0(x) = cx + d \rightarrow \max!$$

$$\text{duales LP: } y \geq 0, yA + c \leq 0, v_0(y) = yb + d \rightarrow \min!$$

Dualität ist eine wichtige Methode und ein grundlegendes Ergebnis der Linearen Optimierung, sowohl theoretisch als auch praktisch.

😊 Das duale Problem ist erneut linear, hat also dieselbe Struktur. Das primale und das duale Problem beschränken sich gegenseitig.

😊 Die lineare Optimierung erfreut sich zudem der **starken Dualität**: Hier gilt $\max u_0 = \min v_0$. Es besteht keine Dualitätslücke!

Jedes lineare Programm kommt als **duales Paar**:

$$\text{primales LP: } x \geq 0, Ax + b \geq 0, u(x) = cx + d \rightarrow \max!$$

$$\text{duales LP: } y \geq 0, yA + c \leq 0, v(y) = yb + d \rightarrow \min!$$

Das entspricht der Transnegation von $u : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ zu $-v : -\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}^T$.

Für jedes optimale LP, also $c \leq 0 \leq b$, ist die Lösung offensichtlich:

$$x = 0 \text{ ist zulässig} \iff b \geq 0 \implies y = 0 \text{ minimiert } v(y) = yb + d$$

$$y = 0 \text{ ist zulässig} \iff c \leq 0 \implies x = 0 \text{ maximiert } u(x) = cx + d$$

Satz Z1c: Dualität der linearen Optimierung

Schwache Dualität: Für jeden zulässigen Punkt $x \geq 0$ mit $Ax + b \geq 0$ und dual jeden zulässigen Punkt $y \geq 0$ mit $yA + c \leq 0$ gilt $u(x) \leq v(y)$. Sind also simultan beide LP erfüllbar, so sind auch beide lösbar.

Starke Dualität: Ist das primale LP lösbar, so auch das duale LP, und es gilt die Gleichheit $\max u = \min v$, also keine Dualitätslücke.

Ist das primale LP erfüllbar, aber nicht das duale, so ist u unbeschränkt.

Ist das duale LP erfüllbar, aber nicht das primale, so ist v unbeschränkt.

Aufgabe: (1) Beweisen Sie die schwache Dualität durch Einsetzen.

(2) Folgern Sie die starke Dualität (Z1c) aus der Optimierbarkeit (Z1b).

Hinweis: Gilt Dualität für optimale LP? optimierbare LP? lösbare LP?

Lösung: (1) Wir nutzen die Zulässigkeit $x \geq 0$ und $b \geq -Ax$ sowie dual $y \geq 0$ und $c \leq -yA$. Positivkombinationen erhalten alle Ungleichungen:

$$u(x) \stackrel{\text{Def}}{=} cx + d \stackrel{\text{Vor}}{\leq} (-yA)x + d \stackrel{\text{Ass}}{=} y(-Ax) + d \stackrel{\text{Vor}}{\leq} yb + d \stackrel{\text{Def}}{=} v(y)$$

😊 Schwache Dualität erhalten wir direkt durch geschickten Vergleich.

(2) Starke Dualität ist klar für jedes optimale LP, mit $c \leq 0 \leq b$: Hier löst $x = 0$ das primale LP und $y = 0$ das duale LP, also $\max u = d = \min v$.

Dank Basiswechsel gilt Dualität dann auch für jedes optimierbare LP.

Dies wirkt auf beide Probleme, primal und dual, auf dieselbe Weise.

Dank Optimierbarkeit Z1b gilt starke Dualität für jedes lösbare LP. QED

Die Ergänzung zur Unbeschränktheit führe ich auf Seite Z125 aus.

Für Sie ist dies eine schöne Übung, um Ihr Verständnis zu schulen!

😊 Das ist ein bewundernswerter „Beweis durch Rechnung“ oder eine „Konstruktion durch Algorithmus“. Diesen Idealfall haben wir nicht oft. Unter den Algorithmen auf Seite Z005 erfüllen dies Euklid und Gauß.

Dantzig's Simplexverfahren über $\mathbb{R}$. (Es genügt ein angeordneter Körper.) Gegeben ist ein lineares Programm $u : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ wie oben erklärt.

- (0) *Elementare* Umformungen sind Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$.
- (1) *Erreichbar* ist damit ein optimales LP $u' : \begin{pmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ mit $c' \leq 0 \leq b'$.
- (2) *Anwendung*: Damit können wir jedes lineare Programm lösen.
- (3) *Folgerung*: Es gilt starke Dualität wie oben nachgewiesen.

Gauß-Algorithmus über einem Körper $\mathbb{K}$. (Es genügt ein Divisionsring.) Gegeben ist eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ für ein lineares Gleichungssystem.

- (0) *Elementare* Umformungen sind die Zeilen- und Spaltenoperationen.
- (1) *Erreichbar* ist damit die Gauß-Normalform $SAT = D_{m \times n}^r \in \mathbb{K}^{m \times n}$.
- (2) *Anwendung*: Das löst jedes lineare Gleichungssystem $Ax = b$.
- (3) *Folgerungen*: (a) Jede invertierbare Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist quadratisch. (b) Je zwei (endliche) Basen eines Vektorraums haben dieselbe Länge.

Ich finde es sehr erstaunlich, dass ein konkretes Rechenverfahren nicht nur konkrete Zahlenbeispiele löst, sondern allgemeine Sätze beweist! Sie haben das so noch nie gesehen? Ihre Lineare Algebra verlief anders und liegt lange zurück? Dann ist es Zeit für eine feierliche Erinnerung:

Übung: Wiederholen / erklären Sie ausführlich obiges Vorgehen (0–3).

(4) Umformung von A zu $D = D_{m \times n}^r$ ändert nicht die Sur/In/Bijektivität.

(4a) D ist surjektiv gdw rechtsinvertierbar gdw $r = m \leq n$,

(4b) D ist injektiv gdw linksinvertierbar gdw $r = n \leq m$,

(4c) D ist bijektiv gdw invertierbar gdw $r = m = n$.

Dasselbe gilt demnach für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ vom Rang r .

Insbesondere gilt: (3a) Ist $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ invertierbar, so folgt $m = n$.

Bemerkung: Der Begriff der „Dimension“ ist zentral für die Lineare Algebra und die gesamte Mathematik! Er beruht auf der Existenz von Basen und der Invarianz der Dimension. Wie wurde Letzteres in Ihrer Linearen Algebra bewiesen? Mit Matrixrechnung? Austauschatz von Steinitz? Welches Argument finden Sie leichter? effizienter? schöner?

😊 Gute Gegen/Beispiele helfen uns, wichtige Ergebnisse zu würdigen!

Aufgabe: Sei R ein beliebiger Ring, hier lassen Sie Ihre Phantasie spielen!

- (1) Gibt es R -lineare Räume V ohne jede Basis? *Baseless allegation!?*
- (2) Gibt es Isomorphismen $R^p \cong R^q$ mit $p \neq q$? *Another dimension!?*
- (3) Gibt es invertierbare Matrizen $A \in R^{p \times q}$? *Only square is fair!?*

⚠ In solchen Problemfällen ist der Begriff „Dimension“ nicht sinnvoll! Fürchten wir tatsächlich die genannten Hindernisse, gar Pathologien? Sie klingen zunächst unglaublich, doch bedenken Sie die allzu große Allgemeinheit: Sie dürfen sich hier einen beliebigen Ring aussuchen!

Lösung: (1) Ja, klar, über dem Ring $\mathbb{Z}$ sind $\mathbb{Z}/2$ und $\mathbb{Q}$ nicht frei.

(2) Ja, klar, für den Nullring $R = \{0\}$ gilt $R^p = \{(0, \dots, 0)\} \cong R^q$.

(3) Ja, klar, über $R = \{0\}$ ist jede Matrix $A \in R^{p \times q}$ invertierbar!

😞 Der Nullring ist albern, daher wollen wir ihn meist ausschließen.

🤔 Welche Ringe sind tauglich? Genügt es, den Nullring zu verbieten?

😊 Über einem Divisionsring können solche Pathologien nicht auftreten.

⚠ Dazwischen ist viel Platz für Überraschungen wie folgende...

😊 Das folgende Beispiel gemahnt uns, dass nichts selbstverständlich ist:

Beispiel Z1d: $R^p \cong R^q$ dank Reißverschluss über $R = \text{End}_K(K[X])$

Sei K ein Körper, etwa $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_q, \dots$, und hierüber $V = K^{(\mathbb{N})} = K[X]$ der Vektorraum der Folgen $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ mit endlichem Träger.

(a) Im Ring $R = (\text{End}_K(V), +, \circ)$ seien $a, b, c, d : V \rightarrow V$ gegeben durch

$$\begin{aligned} a(x) &= (x_0, 0, x_1, 0, x_2, 0, \dots), & c(x) &= (x_0, x_2, x_4, x_6, x_8, \dots), \\ b(x) &= (0, x_0, 0, x_1, 0, x_2, \dots), & d(x) &= (x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, \dots). \end{aligned}$$

Dies zerlegt jedes Polynom $P \in K[X]$ in seinen geraden und ungeraden Anteil, $(c, d) : P \mapsto (P_0, P_1)$ mit $P = P_0(X^2) + X P_1(X^2)$. Reißverschluss:

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca & cb \\ da & db \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ac + bd = 1.$$

(b) Die Matrizen $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ stiften einen Isomorphismus $R^1 \cong R^2$.

(c) Per Induktion folgt $R^1 \cong R^p$ und somit $R^p \cong R^q$ für alle $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Aufgabe: Beweisen sie die beiden verbleibenden Aussagen aus unserem obigen Dualitätssatz Z1c zur Unbeschränktheit linearer Programme.

Lösung: Es genügt, die erste Aussage zu beweisen, die zweite ist dual:

(3) Sei das primale LP erfüllbar, durch $x \geq 0$ mit $Ax + b \geq 0$, aber nicht das duale, das heißt aus $y \geq 0$ folgt $yA + c \not\leq 0$. Dann ist u unbeschränkt.

☺ Für diesen Sonderfall muss man nur genau hinsehen, dazu allerdings auf die Ebene der Koeffizienten hinabsteigen, dann wird alles klar:

(3a) Für $y = 0$ gilt $yA + c = c \not\leq 0$. Es existiert also ein Index i mit $c_i > 0$. Für alle $y \geq 0$ gilt $yA + c \not\leq 0$. Daraus folgt $a_{ji} \geq 0$ für alle Indizes j .

(3b) Wir betrachten dazu die Halbgerade $x^t := x + te_i$ für $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Aus $Ax + b \geq 0$ folgt $Ax^t + b = (Ax + b) + a_{ji}t \geq 0$, dank $a_{ji} \geq 0$.

Also ist zu jedem $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ der zugehörige Punkt x^t primal zulässig.

Dank $c_i > 0$ ist unsere Zielfunktion $u(x^t) = cx + d + c_it$ unbeschränkt.

☺ Es ist wie so oft mit den vermeintlich ganz einfachen Grundlagen: Sie müssen es selbst rechnen, dann erst dürfen Sie „trivial“ ausrufen.

Aufgabe: Konstruieren Sie lineare Programme, die dual unerfüllbar sind, und (a) primal unbeschränkt oder aber ebenso (b) primal unerfüllbar.

Lösung: Es gibt viele Möglichkeiten, die allereinfachsten sehen so aus:

(a) Das LP $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist primal unbeschränkt und dual unerfüllbar.

Ausführlich: Dual gilt $y \geq 0$ und $y_1 + 1 \leq 0$ ist unerfüllbar.

Primal gilt $x \geq 0$ und $1x + 1 \geq 0$ mit $x \mapsto 1x + 0$ unbeschränkt.

(b) Das LP $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$ ist primal unerfüllbar und dual unerfüllbar.

Ausführlich: Dual gilt $y \geq 0$ und $0x + 1 \leq 0$ ist unerfüllbar.

Primal gilt $x \geq 0$ und $0x - 1 \geq 0$ ist ebenso unerfüllbar.

☺ Damit haben wir starke Sätze und illustrative Gegenbeispiele für die folgende Tabelle, in der wir alles übersichtlich zusammentragen.

Dualität für lineare Programme: Zusammenfassung

Z127

Für jedes lineare Problem $u : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gibt es genau drei Möglichkeiten: lösbar, unerfüllbar (somit beschränkt), unbeschränkt (somit erfüllbar). Für zwei beliebige Probleme ergeben sich demnach 9 Kombinationen.

Aufgabe: Sei $u : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $-v : -\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}^T$ ein duales Problempaar. Welche der neun Kombinationen sind hier tatsächlich möglich?

Lösung: Für ein duales Problempaar gibt es genau vier Möglichkeiten:

dual \ primal	unerfüllbar (somit beschränkt)	lösbar (erfüllbar und beschränkt)	unbeschränkt (somit erfüllbar)
unerfüllbar (somit beschränkt)	✓ möglich	✗ starke Dualität	✓ möglich
lösbar (erfüllbar und beschränkt)	✗ starke Dualität	✓ möglich	✗ schwache Dualität
unbeschränkt (somit erfüllbar)	✓ möglich	✗ schwache Dualität	✗ schwache Dualität

Dualität für lineare Programme: Zusammenfassung

Z128
Erläuterung**Korollar Z1E:** Erfüllbarkeit und Lösbarkeit

Vorgelegt sei ein lineares Problem $u : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit Dual $-v : -\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}^T$. Genau einer der folgenden vier Fälle tritt ein:

- 1 Das primale und das duale Problem sind beide unerfüllbar.
- 2 Das primale ist unbeschränkt und das duale ist unerfüllbar.
- 3 Das duale ist unbeschränkt und das primale ist unerfüllbar.
- 4 Das primale und das duale Problem sind beide erfüllbar.
Dann sind beide lösbar, und es gilt Gleichheit $\max u = \min v$.

Der Dualitätssatz erscheint nur auf den ersten Blick kompliziert. Beim zweiten Hinschauen erweist er sich als einfach und elegant.

Übung: Wiederholen Sie sorgsam alle Argumente zur Dualität.

Beweisen Sie die schwache und starke Dualität und obiges Korollar.

Nehmen Sie sich die Zeit, diese Entwicklung gründlich zu verstehen: Jeder einzelne Schritt ist leicht; fügen Sie alle Teile zusammen!

Beispiel: Zur Illustration betrachten wir erneut unser voriges Beispiel:

primal	x_1	x_2	
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
u	2	1	-4

elementare
Basiswechsel

primal	y_3	y_2	
x_1	$1/2$	$-1/2$	9
x_2	$-3/2$	$1/2$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$3/2$	$-1/2$	3
u	$-1/2$	$-1/2$	20

Der Punkt $x = (9, 6)^T$ ist zulässig, dank $Ax + b = (4, 0, 0, 3)^T \geq 0$.
Demnach gilt $\max u \geq u(x) = 20$. Das zweite Tableau zeigt zudem
 $u = -\frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_2 + 20 \leq 20$. Beide zusammen beweisen $\max u = 20$.

😊 Die Richtigkeit dieser zweiten Aussage können wir auch unabhängig nachprüfen, genau dazu dienen zertifizierte Lösungen: Sehen Sie wie?

Aufgabe: Dualisieren Sie dieses Problem und und lösen Sie dies.
Müssen Sie zur Lösung erneut Basiswechsel durchführen?
Wie nutzen Sie die Äquivarianz unter Transnegation?
Woran erkennen Sie die Eindeutigkeit der Lösung?

Lösung: Dualisieren ist gleichbedeutend zur Transnegation:

dual	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	-1	-3	-1	0	2
x_2	1	-1	-1	-1	1
v	7	33	15	9	-4

Transposition:

NN: $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

NB: $x_1, x_2 \leq 0$ bzw. $-x_1, -x_2 \geq 0$

Ziel: $v \rightarrow \min!$ bzw. $-v \rightarrow \max!$

Das duale Problem bringen wir somit ebenfalls auf Normalform und lösen es durch eine geeignete Folge von Basiswechseln:

	y_1	y_2	y_3	y_4	
$-x_1$	1	3	1	0	-2
$-x_2$	-1	1	1	1	-1
$-v$	-7	-33	-15	-9	4

$\Leftrightarrow$

	$-x_1$	$-x_2$	y_1	y_4	
y_3	$-1/2$	$3/2$	2	$-3/2$	$1/2$
y_2	$1/2$	$-1/2$	-1	$1/2$	$1/2$
$-v$	-9	-6	-4	-3	-20

Der Punkt $y = (0, 1/2, 1/2, 0)$ ist zulässig, also $\min v \leq v(y) = 20$.

Wir finden $v = 9(-x_1) + 6(-x_2) + 4y_1 + 3y_4 + 20$, also $\min v = 20$.

😊 Das beweist die starke Dualität in unserem konkreten Beispiel.
Allgemein gelingt dies ebenso, wie in der vorigen Aufgabe erklärt.

Lineare Programme lassen sich verschieden aufschreiben. Auf Seite Z101 sehen Sie die Langform. Sie ist möglich, aber nicht ratsam: umständlich, redundant, uninformativ. Die elegante Kurzform $z : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ als **Tableau** führte Tucker um 1958 ein. Beim Rechnen spüren Sie die Vorteile:

- 1 Die Schreibweise als Tableau ist effizient, konzise und informativ.
- 2 Alle Basiswechsel lassen sich elegant und direkt darauf ausführen.
- 3 Tableaux sind symmetrisch: Dualisieren bedeutet Transnegieren.

😊 Am Tableau $z : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ lesen wir wichtige Informationen direkt ab, etwa freie Variablen (Spalten) und abhängige Schlupfvariablen (Zeilen).
Es ist *optimal*, falls $c \leq 0 \leq b$. Es ist *offensichtlich erfüllbar*, durch $x = 0$, falls $b \geq 0$ gilt, und *offensichtlich unerfüllbar*, falls $b_j < 0$ und alle $a_{ji} \leq 0$.
Es ist *offensichtlich beschränkt*, falls $c \leq 0$, und *offensichtlich unlösbar*, falls $c_i > 0$ und alle $a_{ji} \geq 0$, also unerfüllbar oder unbeschränkt (Lemma Z2B).

📖 M.L. Balinski, A.W. Tucker: *Duality theory, a constructive approach*. SIAM Review 11 (1969) 347–377, online www.jstor.org/stable/2028941.
Satz Z1B, allgemein Satz Z2A, finden Sie dort als *Main Theorem*.

😊 Jedes lösbare Problem $z : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist elementar optimierbar (Satz Z1B):
Durch Basiswechsel können wir es in ein optimales LP transformieren.
Diese Umformungen sind Grundlage von Dantzig's Simplexverfahren!
Probieren Sie es selbst, online und interaktiv mit eiserm.de/lehre/Pivot.
Die hübsche Schwesterseite eiserm.de/lehre/Gael leistet dasselbe für den Gauß-Algorithmus. Sanfte Gamifizierung: Der Computer übernimmt für Sie die Buchführung, Sie erproben sich in kreativ-forschendem Lernen.

By relieving the brain of all unnecessary work, a good notation sets it free to concentrate on more advanced problems [...] Before the introduction of the Arabic notation, multiplication was difficult, and the division of integers called into play the highest mathematical faculties. Probably nothing in the modern world would have more astonished a Greek mathematician than to learn that, under the influence of compulsory education, a large proportion of the population [...] could perform the operation of division for the largest numbers. Our modern power of easy reckoning with decimal fractions is the almost miraculous result of the gradual discovery of a perfect notation.
Alfred North Whitehead (1861–1947), *An Introduction to Mathematics* (1911)

Aufgabe: Anwender Bob will $u(x) = cx + d$ maximieren, wobei $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ gelte. Mit $u : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ beauftragt er Spezialistin Alice.

- (1) In welcher Form sollte Alice ihre Lösung an Bob übergeben?
- (2) Wie kann Bob leicht prüfen, ob sie zulässig ist? zudem optimal?
- (3) Wie kann Alice Optimalität zertifizieren und Bob dies effizient prüfen?

Lösung: (1) Alice kann Bob einen Lösungsvektor $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ schicken.

(2) Bob kann $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ durch Einsetzen direkt prüfen.

- 😊 In diesem Falle ist der Punkt x zulässig und $\max u \geq u(x)$ garantiert.
 - 😞 Die Gleichung $\max u = u(x)$ ist zunächst schwieriger zu beweisen!
 - 😊 Glücklicherweise gibt es eine simple Lösung. Dualität wirkt Wunder:
- (3) Zum Beweis der Optimalität von $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ schickt Alice ein $y \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ mit $y \geq 0$ und $yA + c \leq 0$ sowie $u(x) = v(y)$. Das kann Bob leicht prüfen!
- 😊 Bereits schwache Dualität garantiert $\max u = u(x) = v(y) = \min v$.
 - 😊 Starke Dualität garantiert zuvor, dass zu x ein Zertifikat y existiert!
 - 😊 Lösungen sollten immer als duales Paar (x, y) angegeben werden.

Um diese Aufgabenstellung etwas dramatischer zu betonen, biete ich Ihnen drei Hintergrundgeschichten zur Anregung Ihrer Phantasie:

Persönliche Sorgfalt: Sie möchten Ihre eigene Rechnung effizient und sicher überprüfen, natürlich ohne alles erneut durchrechnen zu müssen. Sie suchen hierzu einen einfachen und automatisch ausführbaren Test.

Nutzen in einer Klausur: Sie schreiben eine Klausur und wollen sich Ihres Ergebnisses absolut sicher sein. Das Klausurenteam will diese Sorgfalt gezielt fördern und fragt daher explizit nach einem Zertifikat.

Vertrag zwischen unabhängigen Geschäftspartnern: Die Rechnung, hier eine lineare Optimierung, ist meist lang und aufwändig. Sie erfordert Spezialsoftware und immense Rechenzeit, die Sie nicht kaufen oder mieten wollen; Sie benötigen nur das Ergebnis. Hierzu beauftragen Sie eine externe Firma, die sich auf diese Art von Rechnung spezialisiert hat. Bei Lieferung der Ware (dem berechneten Ergebnis) können Sie der Firma vertrauen, noch besser ist jedoch ein Zertifikat: Dies wird mitgeliefert, und bei Wareneingang können Sie alles schnell und sicher prüfen.

Definition Z1f: zertifizierte Lösung einer linearen Optimierung

Eine **zertifizierte Lösung** zum LP $\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist ein duales Paar (x, y) mit $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ sowie $y \geq 0$ und $yA + c \leq 0$, sodass $cx = yb$ gilt. Das garantiert nämlich, x löst das primale LP, und y löst das duale LP.

primal	x_1	x_2	
y_1	-1	1	7
y_2	-3	-1	33
y_3	-1	-1	15
y_4	0	-1	9
u	2	1	-4

elementare
Basiswechsel

primal	y_3	y_2	
x_1	$1/2$	$-1/2$	9
x_2	$-3/2$	$1/2$	6
y_1	-2	1	4
y_4	$3/2$	$-1/2$	3
u	$-1/2$	$-1/2$	20

Aufgabe: Ist diese Lösung korrekt? Finden Sie ein Zertifikat!

Lösung: Wir sehen das duale Paar $x = (9, 6)^T$ und $y = (0, 1/2, 1/2, 0)$. Die Probe gelingt dann leicht, direkt und effizient durch Einsetzen: Es gilt $x \geq 0$ und $Ax + b \geq 0$ sowie $y \geq 0$ und $yA + c \leq 0$ mit $cx = yb$.

😊 Jedes Zertifikat (x, y) garantiert: Der Spaltenvektor $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ löst das primale LP, und der Zeilenvektor $y \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ löst das duale LP. Das ist ein wunderbar effizientes Beispiel einer Zertifizierung, denn es vereint alle wünschenswerten Eigenschaften:

😊 Wenn wir die Lösung x mit dem Simplexverfahren berechnen, dann kostet die Konstruktion des Zertifikats y nahezu nichts extra: Mit dem eigentlichen (primalen) Problem löst das Simplexverfahren zusätzlich und gratis auch das duale Problem. *Solve one, get one free!*

😊 Dies nutzen wir dankend zur Zertifizierung, ganz ohne Mehraufwand. Wir extrahieren das duale Paar (x, y) als *konzise Lösung mit Beweis*. Die zertifizierte Lösung (x, y) lässt sich schnell und sicher prüfen: Zur direkten Probe genügen allein die Grundrechenarten.

😊 Zur Prüfung von (x, y) genügt bereits die schwache Dualität. Die starke Dualität garantiert, dass zu x ein Zertifikat y existiert! So prüfen Sie Ihre eigene Rechnung: *Jeder Irrtum wird erkannt!* So überzeugt Ihre Lösung, unabhängig vom (langen) Rechenweg.

😊 Sie kennen ähnliche Situationen aus der (linearen) Algebra:
Auch hier ist ein Zertifikat eine *konkise Lösung mit Beweis*.

Invertierbarkeit einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ über einem Körper $\mathbb{K}$:
Ist A invertierbar, so genügt $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $AB = BA = 1_{n \times n}$.
Ist A nicht invertierbar, so genügt $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ mit $Av = 0$.

Diagonalisierbarkeit einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ über einem Körper $\mathbb{K}$:
Ist A diagonalisierbar, so genügt eine Basis $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ und
Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $Av_k = \lambda_k v_k$ für alle $k = 1, \dots, n$.

Übung: Wie zertifizieren Sie die Nicht-Diagonalisierbarkeit von A ?

Lösung: (1) Erstes Hindernis ist das Zerfallen des char. Polynoms P_A .
Über $\mathbb{C}$ ist die Antwort klar, über $\mathbb{R}$ ist sie leicht. Über $\mathbb{Q}$ können Sie alle
Kandidaten für Nullstellen von P_A aufzählen, prüfen und abspalten.
(2) Angenommen, P_A zerfällt über $\mathbb{K}$. Dann genügt ein Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$
mit einem Hauptvektor $v \in \mathbb{K}^n$, sodass $(A - \lambda)v \neq 0$ und $(A - \lambda)^2 v = 0$.
Das Paar (λ, v) zertifiziert, dass A nicht diagonalisiert werden kann.

Bild und Kern einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ über einem Körper $\mathbb{K}$:

Naiv würden wir eine Basis von Bild und Kern fordern. Zum Nachweis
muss lineare Unabhängigkeit geprüft werden. Wie können wir sicher
stellen, dass das Bild bzw. der Kern nicht noch größer ist?

Mit dem Gauß-Algorithmus konstruieren wir Matrizen $S, S' \in \mathbb{K}^{m \times m}$
mit $SS' = S'S = 1_{m \times m}$ und $T, T' \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $TT' = T'T = 1_{n \times n}$ sodass
 $S'AT = D$ gilt, wobei mit $d_{ii} = 1$ für $i = 1, \dots, r$ und $d_{ij} = 0$ sonst.
Es gilt $AT = SD$: Das Bild $\text{Im}(A) = \text{Im}(AT) = \text{Im}(SD)$ hat demnach als
eine Basis die ersten r Spalten von S , also $Se_1, \dots, Se_r \in \mathbb{K}^m$.
Der Kern $\text{Ker}(A)$ hat als eine Basis die letzten $n - r$ Spalten von T ,
also $Te_{r+1}, \dots, Te_n \in \mathbb{K}^n$. Zertifizierte Lösung ist hier (S, S', T, T') .

Größter gemeinsamer Teiler (ggT) d von a, b in $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{K}[X]$ oder $\mathbb{Z}[i]$.
Mit $d \mid a$ und $d \mid b$ wissen wir nur, dass d ein gemeinsamer Teiler ist.
Gilt zudem $d = au + bv$, so ist d garantiert größter gemeinsamer Teiler:
Für jeden gemeinsamen Teiler d' mit $d' \mid a$ und $d' \mid b$ folgt $d' \mid au + bv$.
Zertifizierter ggT ist (d, a', b', u, v) mit $a = a'd$, $b = b'd$, $d = au + bv$.

Nicht immer ist eine Zertifizierung so offensichtlich, umso mehr lohnt
sich die mathematische Fragestellung! Hier eine schöne Illustration:

Übung: Eine Firma / Software / Cloud bietet zu jeder noch so großen
natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Faktorisierung in ihre Primfaktoren an.
Wie würden Sie einen Vertrag mit dieser Firma aushandeln? Wie können
Sie bei Lieferung die Qualität der Ware schnell und sicher prüfen?

Lösungsidee: Der kritische Punkt ist, die Primalität eines jeden Faktors
 $p \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ zu zertifizieren. Dies ist für den Kunden schwierig und sollte
daher vom Anbieter geleistet werden. Hierzu genügt eine primitive
Einheitswurzel $w \in \mathbb{Z}_p$, also ein Element maximaler Ordnung $p - 1$ in der
multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}_p^\times, \cdot)$. Zum effizienten Nachweis der Ordnung
genügt eine Primfaktorisierung $p - 1 = q_1^{e_1} \cdots q_\ell^{e_\ell}$ mit $q_1 < \cdots < q_\ell$.
Rekursiv erfordert dies Zertifikate kleinerer Primzahlen.

Übung: Sehen Sie ein einfaches Zertifikat für einen optimalen Rundweg
beim Problem des Handlungsreisenden [*travelling salesman problem*]?

Übung: Eine Firma / Software / Cloud bietet zu jeder Kontraktion
 $f: (X, d) \rightarrow (X, d)$ die näherungsweise Berechnung des Fixpunkts an.
Wie würden Sie einen Vertrag mit dieser Firma aushandeln? Wie können
Sie bei Lieferung die Qualität der Ware schnell und sicher prüfen?

Lösungsidee: Fixpunktsatz von Banach mit Fehlerschranke.
Der tolerierte Fehler $\varepsilon > 0$ muss im Vertrag festgelegt werden.

Übung: Eine Firma / Software / Cloud bietet zu jedem Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$
mit $\text{ggT}(P, P') = 1$ die näherungsweise Berechnung aller Nullstellen an.
Wie gestalten Sie Ihren Vertrag mit dieser Firma?
Wie prüfen Sie bei Lieferung schnell und sicher die Qualität?

Lösungsidee: Newton-Verfahren und Satz von Kantorovich,
siehe de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Kantorowitsch.

Übung: Sehen Sie mögliche praktikable Zertifikate für eine numerische
Näherungslösung einer Differentialgleichung (gewöhnlich / partiell)?
Sie erahnen, die Frage ist durchaus relevant und interessant!

Zu lösen sei ein **lineares Programm** $u : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Das heißt ausgeschrieben:

$$x \geq 0, \quad y(x) = Ax + b \geq 0, \quad u(x) = cx + d \rightarrow \max!$$

Als **Äquivalenzumformungen** nutzen wir affine Basiswechsel $x_k \leftrightarrow y_\ell$:

	x_k	x_i	
y_ℓ	α	β	
y_j	γ	δ	

Basiswechsel $\longleftrightarrow$

	y_ℓ	x_i	
x_k	$1/\alpha$	$-\beta/\alpha$	
y_j	γ/α	$\delta - \beta\gamma/\alpha$	

Das definiert zunächst die *möglichen* Schritte, noch nicht ihre *Abfolge*. Unseren vorläufigen Satz Z1B präzisieren wir nun als Hauptsatz Z2A und beweisen ihn durch Angabe eines expliziten Algorithmus.

Satz Z2A: Basiswechsel lösen jedes lineare Programm.

Jedes lineare Programm $\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ wird durch geeignete Basiswechsel zu $\begin{pmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ entweder (0) optimal oder (1) offensichtlich unlösbar.

(0) optimal					(1a) unerfüllbar					(1b) unbeschränkt				
				v					v					x_i
				$\oplus$										$\oplus$
				$\oplus$		y_j	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$					$\oplus$
				$\oplus$										$\oplus$
u	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	d						u	$+$			

Abkürzend steht + für > 0 und – für < 0 sowie $\oplus$ für ≥ 0 und $\ominus$ für ≤ 0 . Die folgenden offensichtlichen Fälle lesen wir direkt am Tableau ab:

Lemma Z2B: optimale vs offensichtlich unlösbare lineare Programme

(0) Im Falle $c \leq 0 \leq b$ ist unser LP optimal mit Zertifikat $(x = 0, y = 0)$: $x \geq 0 \wedge Ax + b \geq 0$ und $y \geq 0 \wedge yA + c \leq 0$ sowie $\max u = d = \min v$.

(1a) Gilt $b_j < 0$ für ein j und $a_{ji} \leq 0$ für alle i , so ist unser LP unlösbar: primal unerfüllbar, also dual entweder unerfüllbar oder unbeschränkt.

(1b) Gilt $c_i > 0$ für ein i und $a_{ji} \geq 0$ für alle j , so ist unser LP unlösbar: dual unerfüllbar, also primal entweder unerfüllbar oder unbeschränkt.

😊 Wir kennen nun das Ziel: (0) optimal oder (1) offensichtlich unlösbar! Wie finden wir hierzu eine Methode? Welche Pivotstrategie wählen wir? Wie beweisen wir den Algorithmus, also Terminierung und Korrektheit? Zur Vereinfachung teilt man traditionell den Algorithmus in zwei Phasen:

Phase 1: Durch Basiswechsel überführen wir das LP in die Form $b \geq 0$. Gelingt dies, so ist $x = 0$ zulässig. Andernfalls ist das LP *unerfüllbar*.

Phase 2: Wir bewahren $b \geq 0$ und überführen das LP in die Form $c \leq 0$. Gelingt dies, so ist $x = 0$ *optimal*. Andernfalls ist das LP *unbeschränkt*.

Bislang haben wir in unseren Rechnungen immer $b \geq 0$ vorausgesetzt und sind somit sofort in Phase 2 eingestiegen. Das hat gute Gründe: Interessanterweise ist zunächst Phase 2 deutlich leichter zugänglich; dank Dualisierung können wir damit anschließend auch Phase 1 lösen.

Wenn Sie das Kapitel bis hier durchgearbeitet haben, dann kennen (und lieben) Sie das Simplexverfahren und bereits erste schöne Anwendungen. Da Sie nun über erste eigene Erfahrung mit diesem Verfahren verfügen, sind Sie bereit und motiviert zur genaueren Untersuchung. Es lohnt sich!

Bisher spreche ich vorsichtig von dem / einem „Simplexverfahren“, noch nicht von „Algorithmus“, denn die Schrittfolge ist noch vage. Die Pivotwahl, Spalte k und Zeile ℓ , legen wir nun eindeutig fest:

Algo Z2c: Phase 2 des Simplexverfahrens [mit Dantzig's Pivotregel]

Eingabe: ein lineares Programm als Tableau $u : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $b \geq 0$

Ausgabe: ein dazu äquivalentes Tableau, optimal oder unbeschränkt

- 1: **while** weder optimal noch offensichtlich unbeschränkt **do**
- 2: Pivotspalte: Wähle $k \in \{1, \dots, n\}$ [minimal] mit $c_k > 0$ [maximal].
// Gilt $c_k \leq 0$ für alle k , dann ist u optimal.
- 3: Pivotzeile: Wähle $\ell \in \{1, \dots, m\}$ mit $a_{\ell k} < 0$ und $b_\ell / |a_{\ell k}|$ minimal
// Engpass! Gilt $a_{\ell k} \geq 0$ für alle ℓ , dann ist u unbeschränkt.
- 4: Basiswechsel: Tausche $x_k \leftrightarrow y_\ell$ zum neuen LP $u' : \begin{pmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.
// Es gilt $b_j - \frac{a_{jk}}{a_{\ell k}} b_\ell \geq 0$ dank (3) und $d' = d - \frac{c_k}{a_{\ell k}} b_\ell \geq d$ dank (2).

Dantzig's Pivotregel: Wähle $c_k > 0$ maximal, bei Gleichstand k minimal.

Phase 2 spielt in der Menge aller offensichtlich erfüllbaren Tableaux

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (n+1)} \mid b \geq 0 \right\}.$$

😊 *Generisch* gilt stets $b_\ell > 0$ und somit $d' > d$, das garantiert Fortschritt. Da nur endlich viele Erhöhungen möglich sind, endet dieses Verfahren.

Genauer: Wir nennen unser Tableau $\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **offensichtlich fies**, falls $b_j = 0$ in einer Zeile j oder $c_i = 0$ in einer Spalte i gilt. Wir nennen es **fies**, falls ein äquivalentes Tableau offensichtlich fies ist. Andernfalls ist es **nett**.

Übung: Die Menge der fiesen Tableaux hat Lebesgue-Maß 0. Die netten Tableaux sind offen und dicht in $\mathcal{T}$. Für solche endet Algorithmus Z2c nach endlich vielen Schritten. Zudem ist das Optimum eindeutig.

😊 Anschaulich: Wenn wir unser Tableau stetig verteilt zufällig wählen, dann kommen die befürchteten Ausnahmen mit Wkt 0 vor, also fast nie.

⚠️ Nicht jedes Tableau ist zufällig gewählt. Fiese Tableaux sind zwar seltene Ausnahmen, aber durchaus möglich! Hier kann das Verfahren stagnieren, $d' = d$, und bei ungeschickter Pivotwahl sogar Zykel bilden.

Wie können wir für fiese Tableaux dennoch Fortschritt garantieren? Hierzu gibt es einen genial einfachen Trick:

😊 **Perturbation:** Ergänze $u : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ um eine Spalte. Statt mit $b_j, d \in \mathbb{R}^1$ rechnen wir mit $b_j, d \in \mathbb{R}^2$ und vergleichen lexikographisch. So können wir $b_\ell > 0$ und $d' > d$ garantieren. Notfalls wiederholen wir diesen Trick durch Anfügen weiterer Spalten. So ergänzt werden alle Tableaux nett! Diese Perturbation vermeidet insbesondere Zykel. Die Hilfskomponenten können wir löschen, sobald $b > 0$ in den vorderen Komponenten gilt.

Das Element $b_j = (b_j^0, b_j^1, \dots) \in \mathbb{R}^k$ entspricht $b_j = b_j^0 + \varepsilon b_j^1 + \dots \in \mathbb{R}[\varepsilon]_{<k}$. Der lexikographische Vergleich sortiert nach Größenordnung für $\varepsilon \searrow 0$. Wir nutzen geschickt $\mathbb{R}^1 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^2 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^3 \not\hookrightarrow \dots$ nur als Vektorräume über $\mathbb{R}$.

Satz Z2D: Terminierung und Korrektheit der Phase 2

Der angegebene Algorithmus für Phase 2 terminiert zu jeder Eingabe nach endlich vielen Schritten und liefert stets ein korrektes Ergebnis: entweder ein optimales Tableau oder ein unbeschränktes Tableau.

Gegeben sei ein lineares Programm $\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Wir wollen $b \geq 0$ erreichen. Wir transnegieren zu $\begin{pmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}^T$ und wollen $c' \leq 0$ erreichen.

Wir erweitern zu $\begin{pmatrix} A' & b' & b^* \\ c' & d' & d^* \end{pmatrix}$ durch eine willkürliche Hilfsspalte $b^* > 0$. Hier können wir Phase 2 anwenden und die alte Spalte b' mitführen. Wir erreichen $c' \leq 0$, löschen die Hilfsspalte und transnegieren zurück.

Gelingt uns dies nicht, so erreichen wir ein offensichtlich unbeschränktes Tableau $\begin{pmatrix} A' & b' & b^* \\ c' & d' & d^* \end{pmatrix}$. Wir löschen die Hilfsspalte und transnegieren zurück. Unser primales Tableau $\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist dann offensichtlich nicht erfüllbar.

Satz Z2E: Terminierung und Korrektheit der Phase 1

Dieser Algorithmus für Phase 1 terminiert nach endlich vielen Schritten und liefert stets ein korrektes Ergebnis: entweder ein erfüllbares Tableau mit $b \geq 0$ oder ein unbeschränktes Tableau des dualen Problems.

Übung: Prüfen Sie die Methode und die beiden Sätze sorgsam nach. Parallel hierzu können Sie alles an konkreten Beispielen ausprobieren dank unserem interaktiven Optimierungs-Tool eiserm.de/lehre/Pivot.

Erst die Erklärung all dieser Schritte definiert den Simplexalgorithmus; speziell Dantzig's Pivotstrategie definiert *Dantzig's Simplexalgorithmus*. Erfreulicherweise gelingt die Methode über jedem geordneten Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$, etwa über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$ oder jedem Zwischenkörper wie $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Algo Z2F: Simplexalgorithmus

Eingabe: ein lineares Programm als Tableau $u : \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$ über $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$,
Ausgabe: ein dazu äquivalentes Tableau $u' : \begin{pmatrix} A' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, entweder optimal mit $c' \leq 0 \leq b'$ oder offensichtlich unerfüllbar / unbeschränkt

- 1: Phase 1: Durch Basiswechsel überführen wir das LP in die Form $b \geq 0$. Gelingt dies, so ist $x = 0$ zulässig. Andernfalls ist das LP unerfüllbar.
- 2: Phase 2: Wir behalten $b \geq 0$ und überführen das LP in die Form $c \leq 0$. Gelingt dies, so ist $x = 0$ optimal. Andernfalls ist das LP unbeschränkt.

Dank Z2E und Z2D ist diese Methode korrekt. Das beweist den Satz Z1B und rechtfertigt nachträglich unsre geometrisch-heuristische Beweisidee. Dualität *benötigen* wir hierzu nicht, wir *folgern* sie wie in Satz Z1c.

Welche Laufzeit haben Simplexalgorithmen?

Z209
Ausführung

Wiederholung, für lineare Gleichungssysteme ist die Komplexität klar: Der Gauß-Algorithmus bringt jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ über dem Körper $\mathbb{K}$ in die reduzierte Zeilenstufenform (*reduced row echelon form*, kurz *rref*). Dazu benötigt er höchstens mr Zeilenoperationen, wobei $r \leq \min\{m, n\}$ der Rang ist, und somit höchstens mnr arithmetische Operationen in $\mathbb{K}$. Speziell für jede quadratische Matrix, mit $m = n$, genügen demnach $\leq n^2$ Zeilenoperationen, somit $\leq n^3$ arithmetische Operationen in $\mathbb{K}$.

Die lineare Optimierung zeigt gewisse Ähnlichkeiten zwischen Systemen von Gleichungen und Ungleichungen, allein die Laufzeit ist schwieriger.

Übung: Bei n Variablen und m Bedingungen gibt es $\leq \binom{m+n}{n}$ äquivalente Tableaux. Wir können *brute force* alle durchprobieren. Die Komplexität jedes Simplexverfahrens ist höchstens exponentiell, denn $\binom{2n}{n} < 4^n / \sqrt{\pi n}$. Schlimmstenfalls ist sie exponentiell! Ein berühmt-berüchtigtes Beispiel: Mit Dantzig's Pivotregel besucht das Simplexverfahren alle 2^n Ecken des Klee-Minty-Würfels, siehe en.wikipedia.org/wiki/Klee-Minty_cube.

Welche Laufzeit haben Simplexalgorithmen?

Z210
Ausführung

Übung: Mit unserer interaktiven Webseite eism.de/lehre/Pivot können Sie bequem die Klee-Minty-Würfel erzeugen und erproben. Wie viele Basiswechsel benötigen Sie, wenn Sie ganz stur Dantzig's Pivotstrategie folgen? Wie viele benötigen Sie auf kürzestem Wege?

Für Klee-Minty braucht Dantzig's Pivotstrategie erschreckend lang, doch der kürzeste Weg ist verblüffend kurz. Die *Hirsch-Vermutung* besagt, dass es immer kurze Wege gibt (en.wikipedia.org/wiki/Hirsch_conjecture).

Manche sagen: „Du hast es erst dann verstanden, wenn du es einem Computer beibringen kannst.“ Das ist extrem, aber nützlich. Beispiele: Können Sie den Gauß-Algorithmus nutzen? beweisen? programmieren? ebenso die Determinante berechnen? erklären? effizient implementieren?

Projekt: Implementieren Sie Dantzig's Simplexalgorithmus. Erzeugen Sie dazu zufällige lineare Programme und messen Sie die mittlere Laufzeit. Recherchieren oder erfinden Sie weitere Pivotstrategien, implementieren und testen Sie diese. (Wenn Sie wollen, gerne als Erweiterung von Pivot.)

Welche Laufzeit haben Simplexalgorithmen?

Z211
Ausführung

Neben Dantzig's wurden zahlreiche weitere Pivotstrategien entwickelt. Es gibt daher nicht nur *den* einen Simplexalgorithmus, sondern mehrere.

Simplexalgorithmus = Simplexverfahren + Pivotstrategie

Anders gesagt, das Simplexverfahren ist eine *Familie* von Algorithmen. Als den freien Parameter wählen wir hierzu jeweils eine Pivotstrategie. Speziell Dantzig's Pivotstrategie definiert *Dantzig's Simplexalgorithmus*. Zahlreiche weitere Pivotstrategien wurden seit 1947 vorgeschlagen.

Zu den meisten Pivotstrategien wurden ebenfalls Beispiele gefunden, die exponentielle Laufzeit erfordern. Diese Fälle sind gefürchtet, treten jedoch in der Praxis selten auf. Deshalb ist das Simplexverfahren sehr erfolgreich, obwohl es exponentiellen Aufwand verursachen kann.

Welche Laufzeit haben Simplexalgorithmen?

Z212
Ausführung

Der Durchbruch hierzu gelang Daniel Spielman und Shang-Hua Teng: *Smoothed analysis of algorithms: Why the simplex algorithm usually takes polynomial time*. JACM 51 (2004) 385–463. Für zufällige Perturbationen ist die erwartete Laufzeit polynomiell. Sie erhielten 2008 den Gödel-Preis!

Anschaulich gesagt: Das Simplexverfahren löst effizient nahezu jedes Programm, zumindest jedoch fast alle nahegelegenen Perturbationen. Das erklärt die empirische Beobachtung und bestärkt das inzwischen über siebzig Jahre gewachsene Vertrauen in das Simplexverfahren.

Die lineare Optimierung lässt sich nachweislich in polynomialer Zeit lösen, wie Leonid Khachiyan (Ellipsoidverfahren, 1979) und Narendra Karmarkar (Innere-Punkte-Verfahren, 1984) zeigen konnten. Ob dies auch mit einer Pivotstrategie gelingt, bleibt eine Herausforderung.



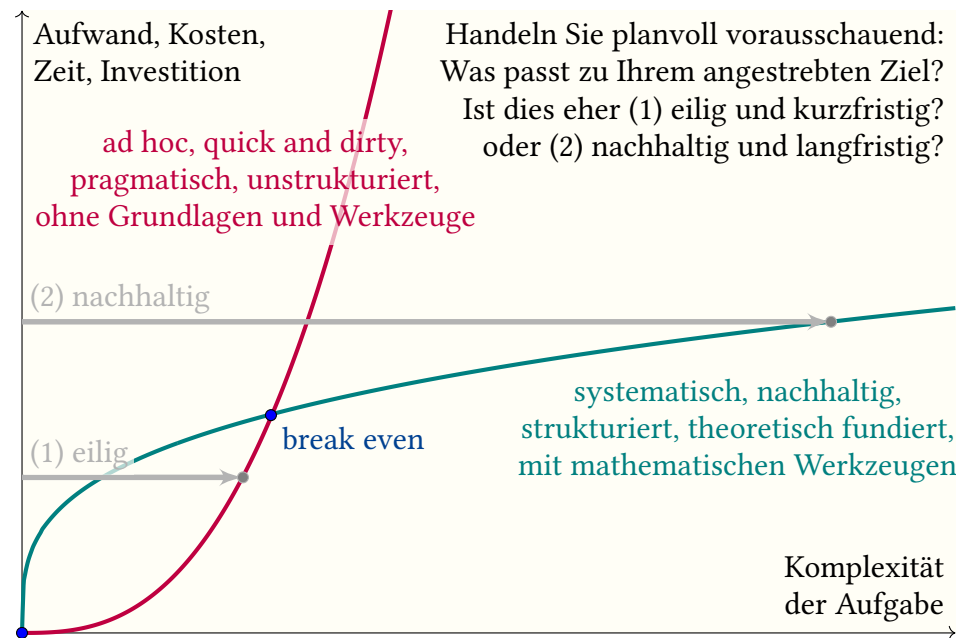
Alice trifft Bob, der sich mit stumpfer Axt abmüht, einen Baum zu fällen. „Schärf deine Axt! Dann gelingt dir deine Arbeit leichter.“, rät Alice ihm. Das weist Bob zurück: „Dazu fehlt mir die Zeit, ich muss Bäume fällen!“ Genau das ist Ihre Entscheidung: Planen Sie kurzfristig oder langfristig?

🤔 Kurzfristig oder langfristig? Genau das ist die allgegenwärtige Frage! Kann man *zu wenig* in Werkzeug investieren? Ja, sicher, das passiert oft. Kann man *zu viel* investieren? Ja, auch das. Manch Heimwerker:in kauft sich frohgemut schönes und teures Werkzeug, das sie dann kaum nutzt.

Mathe gilt als schwer, daher hängen viele Schüler:innen sich allzu früh ab. Kurzfristig ist Lernen mühsam, doch langfristig zentral für den Erfolg. Wer investiert die Mühe? Nur wer vom dauerhaften Nutzen überzeugt ist. Es gelingt nur mit extrinsischer Anregung *und* intrinsischer Motivation.

Ihr Mathestudium versuchen wir Lehrende auszubalancieren zwischen Aufbau tragfähiger Grundlagen und Ernte motivierender Anwendung. Lernen ist induktiv: Ihre Investition von gestern ist Ihr Ertrag von heute. Ihre Investition von heute ist Ihr Ertrag von morgen. So geht es weiter...

Auch für diese Vorlesung muss ich weise abwägen: Kurzfristig begeistern die großen Ideen, erfreut die gepflegte Unterhaltung, erheitert der Witz. Für den langfristigen Erfolg benötigen Sie aber vor allem solide Technik, mathematische Sorgfalt und das kleinschrittige Lernen Ihres Handwerks.



Sie werden in den ersten Semestern manchmal mit Ihrem Studium hadern und zweifeln: „Warum ist alles so kompliziert und anstrengend? Geht es einfacher und bequemer? Wozu nützt mir die schöne Theorie?“ Wenn Sie das aufrichtig fragen, dann will ich Ihnen aufrichtig antworten.

Seien wir ehrlich: Für kleine Projekte und anspruchslose Ziele benötigen Sie keine Theorie: *Just do it!* Für ernsthafte Projekte und ambitionierte Ziele lohnt sich die Investition in wissenschaftliche Grundlagen, sie wird gar zwingend! Dies illustriere ich sinnbildlich mit der obigen Graphik.

Die Lernkurve ist am Anfang steiler, das spürt jede:r, doch die Investition in mathematische Werkzeuge zahlt sich bald aus, wie Sie dann erkennen. *Break even*: Kurzfrist vs Langfrist? Sollte *jede:r* Mathematik studieren? Nein! Sollten *Sie* Mathematik studieren? Das hängt ab von Ihren Zielen!

Mit Ihrem Studium werden Sie zu Multiplikator:innen der Wissenschaft. Bitte helfen Sie auch Ignoranten, die pauschale Vorurteile wiederkauen: „Das Studium ist abstrakter Quatsch, die Praxis sieht ganz anders aus!“ — „Eine Lehrer:in braucht nur den halben Abiturstoff.“ Sie wissen es besser!

*Herr: Es ist Zeit. Das Semester war sehr lang.
Beweis den letzten Sätzen wahr zu sein.*

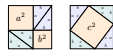
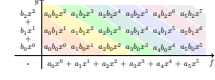
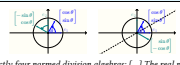
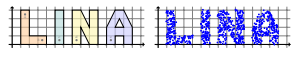
In der Linearen Algebra legen Sie die soliden Grundlagen für Ihr Studium. Dazu wähle ich zentrale Themen und präsentiert sie Ihnen so, dass Sie sich diese schrittweise erarbeiten, dabei sowohl ein starkes Fundament legen als auch früh motivierende Anwendungen und Ausblicke eröffnen.

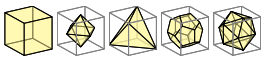
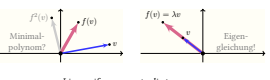
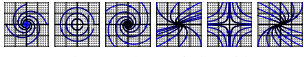
Wir haben gemeinsam viel erreicht: Die letzten beiden Semester waren wie erwartet sehr anstrengend und wie versprochen auch sehr lohnend. Ich danke dem gesamten LinA-Team, Assistent:innen und Tutor:innen! Wir hoffen, dass Sie in unserer Linearen Algebra viel lernen konnten, zunächst natürlich die konkreten Inhalte, langfristig noch wichtiger: allgemein das mathematische Arbeiten. Möge es Ihnen überall nützen!

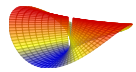
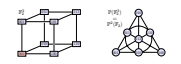
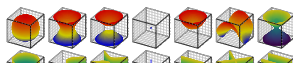
*So war es gewesen, und die Zeiten der Qual und des Versagens,
die elenden Zwischenzeiten, waren vergessen worden und untergesunken.*

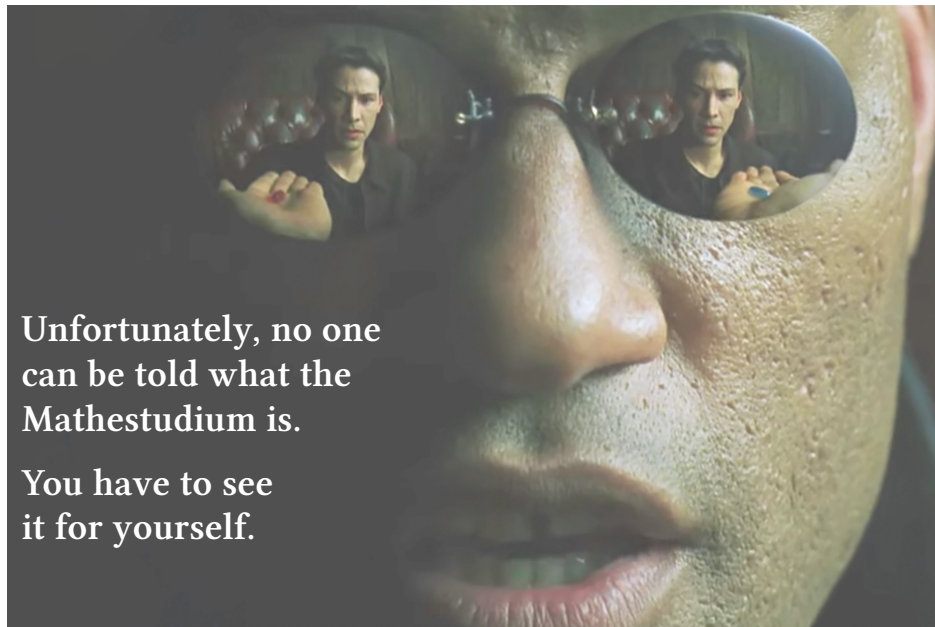
Es war gut so. Es würde gehen, wie es oft gegangen war.

Hermann Hesse (1877–1962), *Klingsors letzter Sommer*

Kapitel A Einleitung und Überblick  We choose to go to the moon in this decade and do the other things, not because they are easy, but because they are hard. John F. Kennedy (1917–1963), Address at Rice University Non quia difficilia sunt non audemus, sed quia non audemus difficilia sunt. Seneca (1–65), Moralische Briefe an Lucilius	Kapitel W Linearformen und Dualität Duality gives two different points of view of looking at the same object. Sir Michael Atiyah (1929–2019), <i>Duality in Mathematics and Physics</i>  A coconut is just a nut.	Kapitel C Polynome und Euklids Algorithmus  Alles Geschichte ist schon gedacht worden, man muss nur versuchen, es noch einmal zu denken. Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832)
Kapitel W Linearformen und Dualität Duality gives two different points of view of looking at the same object. Sir Michael Atiyah (1929–2019), <i>Duality in Mathematics and Physics</i>  A coconut is just a nut.	Kapitel E Aufbau des Zahlensystems II: reelle und komplexe Zahlen  There are exactly four normed division algebras: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, and $\mathbb{O}$. The real numbers are the dependable breadwinner of the family; the complex ordered field we all rely on. The complex numbers are a slightly faster but still respectable younger brother: not ordered, but algebraically complete. The quaternions, being noncommutative, are the eccentric cousin who is shunned at important family gatherings. But the octonions are the crazy old uncle nobody lets out of the attic. John Baez, <i>The Octonions</i> (2002)	Kapitel W Linearformen und Dualität Duality gives two different points of view of looking at the same object. Sir Michael Atiyah (1929–2019), <i>Duality in Mathematics and Physics</i>  A coconut is just a nut.
Kapitel G Mengen, Relationen und Abbildungen: Set Theory for the Working Mathematician  The student's task in learning set theory is to sleep himself in unfamiliar but essentially shallow generalities till they become so familiar that they can be used with almost no conscious effort. Paul Halmos (1916–2006), <i>Naive set theory</i>	Kapitel H Zählen und Kombinatorik, Äquivalenzrelationen und Quotienten  Wer hohe Türme bauen will, muss lange beim Fundament verweilen. Anton Bruckner (1824–1896)	Kapitel I Ordnungsrelationen und Mächtigkeit  Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden — aber nicht noch einfacher. Albert Einstein (1879–1955)

Kapitel J Monoide und Gruppen  Wherever groups disclosed themselves, or could be introduced, simplicity crystallized out of comparative chaos. Eric Temple Bell (1883–1960)	Kapitel W Linearformen und Dualität Duality gives two different points of view of looking at the same object. Sir Michael Atiyah (1929–2019), <i>Duality in Mathematics and Physics</i>  A coconut is just a nut.	Kapitel L Lineare Räume und lineare Abbildungen  In der Geschichte der Mathematik zeigt sich uns ein großer Reichtum in der Entstehung verschiedenartiger Strukturen, die sich entfalten, durchdringen und vereinen. Die besonders einfachen und grundlegenden Strukturen treten dabei oft erst zum Schluss hervor. Egbert Brieskorn (1936–2013), <i>Lineare Algebra</i>
Kapitel W Linearformen und Dualität Duality gives two different points of view of looking at the same object. Sir Michael Atiyah (1929–2019), <i>Duality in Mathematics and Physics</i>  A coconut is just a nut.	Kapitel W Linearformen und Dualität Duality gives two different points of view of looking at the same object. Sir Michael Atiyah (1929–2019), <i>Duality in Mathematics and Physics</i>  A coconut is just a nut.	Kapitel W Linearformen und Dualität Duality gives two different points of view of looking at the same object. Sir Michael Atiyah (1929–2019), <i>Duality in Mathematics and Physics</i>  A coconut is just a nut.
Kapitel P Eigenvektoren und Diagonalisierung  Live as if you were to die tomorrow. Learn as if you were to live forever. Mahatma Gandhi (1869–1948)	Kapitel Q Hauptvektoren und Jordanisierung  To learn to succeed, you must first learn to fail. Michael Jordan (1963–)	Kapitel R Lineare Algebra über $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{K}[X]$: Elementarteilersatz und Anwendungen Zwar hatte Herr Fourier die Meinung, das Hauptziel der Mathematik sei der Gemeinnutzen ('l'utilité publique') und die Erklärung der Naturphänomene; aber ein Philosoph wie er hätte wissen müssen, dass das einzige Ziel der Wissenschaft die Ehre des menschlichen Geistes ist und bei diesem Anspruch eine Frage über Zahlen ebensoviel wert ist wie eine Frage über das Weltsystem. Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) an Adrien-Marie Legendre (1752–1833)

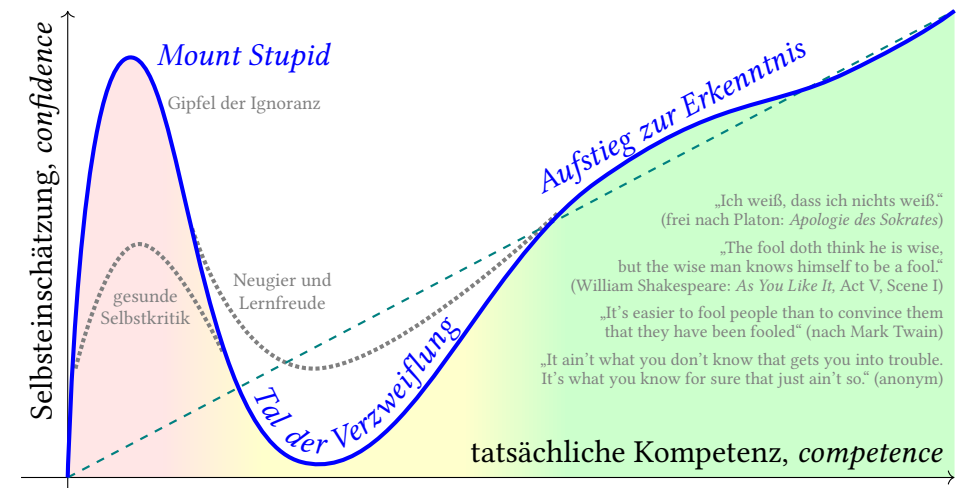
Kapitel W Linearformen und Dualität Duality gives two different points of view of looking at the same object. Sir Michael Atiyah (1929–2019), <i>Duality in Mathematics and Physics</i>  A coconut is just a nut.	Kapitel T Spektralsatz und erste Anwendungen  „Was hat Sie [an der Quantenphysik] dermaßen fasziniert?“ — „Die wunderschöne Mathematik, die verwendet wurde.“ Anton Zeilinger, Physik-Nobelpreis 2022	Kapitel U Affine und projektive Räume  Aus dem K-linearen Raum $(V, +, \cdot)$ entsteht der K-affine Raum $A(V) = (V, +, \cdot)$ über V, indem wir seinen Ursprung 0 vergessen. Im projektiven Raum $P(V) = (V \setminus \{0\}) / K \setminus \{0\}$ ignorieren wir die Skalierung: Geraden sind die neuen Punkte!
Kapitel V Quadratische Polynome und Quadriken  Bildung ist nicht nur das Lernen von Fakten, sondern die Schulung des Geistes zu denken. Albert Einstein (1879–1955)	Kapitel W Linearformen und Dualität Duality gives two different points of view of looking at the same object. Sir Michael Atiyah (1929–2019), <i>Duality in Mathematics and Physics</i>  A coconut is just a nut.	Kapitel X Tensorprodukt  Was ist das Tensorprodukt? Da stellen wir uns ganz dumm. Jeder weiß, dass wir Vektoren untereinander addieren können, aber allgemein nicht multiplizieren. Wir tun es einfach trotzdem! frei nach Günter Harder (1938–2025)
Kapitel Y Tensoralgebren $\Lambda(V) \leftarrow T(V) \rightarrow S(V)$ $0 \leftarrow \text{beleg} \leftarrow \text{gabel} \rightarrow 2 \text{ gabel}$ $2 \text{ beleg} \leftarrow \text{beleg} \leftarrow \text{gabel} \rightarrow 0$ [Ich bemühe mich] Inhalt und Grundlegung [...] vom Standpunkte der heutigen Wissenschaft in möglichst einfacher und anregender Weise überzeugend darzustellen. Und diesen [...] in freien Exkursen, wie sie sich unter den wechselnden Abregungen der Umgebung in der wirklich gehaltenen Vorlesung tatsächlich gestaltet haben. Felix Klein (1849–1925), <i>Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus</i>	Kapitel Z Lineare Optimierung und Dantzig's Simplexverfahren  We are all familiar with methods for solving linear equation systems [...] On the other hand, the study of linear inequality systems excited virtually no interest until the advent of game theory in 1944 and linear programming. George Bernard Dantzig (1914–2005)	Lineare Algebra von klassischen Grundlagen zu aktuellen Anwendungen Prof. Dr. Michael Eisermann eiserm@math.uni-stuttgart.de Universität Stuttgart Weite 2023/24 und Seite 2026 Stand 18. September 2026 Für die Mitteilung von Unklarheiten und Fehlern aller Art sowie für Verbesserungsvorschläge bin ich sehr dankbar! Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen! Much to learn, you still have. This is just the beginning.



Unfortunately, no one
can be told what the
Mathestudium is.

You have to see
it for yourself.

Sie wollen lernen. Aller Anfang ist schwer. Wir unterstützen Sie.



„Es gibt keinen Königsweg zur Mathematik.“ (Euklid zu König Ptolemäus I
auf die Bitte, seinem Sohn die Mathematik möglichst leicht zu machen.)



3 Vertrauen: Sie lernen hier wunderschöne und nützliche Mathematik.

Manch verlorene Seele betet Irrglauben nach wie „den abstrakten Quatsch braucht niemand“ oder „der Prof macht es pedantisch genau und unnötig kompliziert“; sie ist falsch orientiert. Nehmen Sie die Mathematik ernst und nutzen Sie die Methoden, die ich Ihnen hier erkläre. Generationen vor Ihnen haben wertvolle Erfahrungen gesammelt. Werfen Sie diese nicht leichtfertig weg, schätzen Sie vertrauensvoll dieses kostbare Geschenk. *Sapere aude!*

2 Engagement: Sie arbeiten kontinuierlich, wir betreuen Sie bestens.

Welches Studium Sie auch wählen, es wird anstrengend. Anders als in der Schule sind Sie vollkommen eigenverantwortlich. Sie werden nur erfolgreich sein, wenn Sie sich engagieren. Das erfordert *Geduld*: Nicht alles gelingt Ihnen im ersten Anlauf. *Sorgfalt*: Manches müssen Sie detailliert ausführen. *Disziplin*: Jeder einzelne Schritt ist leicht, doch viele sind nötig. Studieren bedeutet sich bemühen, sich selbst zu erkennen, auch sich selbst zu steuern.

1 Lernfreude vs Disziplin: Studium ist anstrengend und lohnend!

Jedes ernsthafte Studium ist anstrengend, das gilt ganz besonders für die Mathematik. Ohne Freude am Inhalt ist das eine jahrelange, sture Quälerei und nicht zu bewältigen. Pflegen Sie Ihre Neugier, entwickeln Sie bewusst Ihre Begeisterung für Ihr Studienfach! Man kann eine Woche oder zwei die Zähne zusammenbeißen, aber nicht ganze Semester. Tun Sie, was nötig ist, doch tun Sie es möglichst mit innerer Freude und Genugtuung.

Mathematik (gr. μαθηματική τέχνη) bedeutet wörtlich übersetzt die 'Kunst des Lernens und Erkennens'. Sie ist eine systematische **Methode** und ein schöpferischer **Prozess** zum Lösen von Problemen. Dazu gehören Explorieren und Konsolidieren, Erkunden und Beweisen.

Mathematik ist die **Sprache** des strukturierten Denkens und effizienten Problemlösens und damit **Grundlage** für Naturwissenschaft und Technik. Mathematik ist zugleich abstrakte **Theorie** und konkrete **Anwendung**. Diese beiden Pole begründen ihren Reiz, aber auch ihre Schwierigkeit.

Sie ist schön und nützlich, ästhetische Kunst und praktisches Handwerk, rechnen und begründen, kritisch und korrekt, sorgfältig und effizient. Sie erklärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen! Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke! Mathematik verbindet **Anschauung** und **Formalisierung**.

C'est par la logique qu'on démontre, c'est par l'intuition qu'on invente.

[Mit der Logik beweisen wir, mit der Intuition erfinden wir.]

Henri Poincaré (1854–1912), *Science et Méthode* (1908)

Und ihr, die ihr längst Lehrer sein solltet, habt es wieder nötig, dass man euch die Anfangsgründe der [Mathematik] lehre und dass man euch Milch gebe und nicht feste Speise.

[frei nach] Hebräer 5,12 (Lutherbibel 2017)

Studienanfang ist immer schwer, jüngst wächst die Kluft zum Abgrund, zum Bildungsnotstand durch Pandemie, Fokusverlust und KI-Verblödung. Die letzten Anfängerjahrgänge hatten es daher zunehmend schwer.

Ich wünschte, das Schulsystem hätte Sie gut auf ein Studium vorbereitet, sowohl strategisch durch Neugier, Lernfreude und gute Gewohnheiten als auch inhaltlich durch solide Grundlagen mit echten Anwendungen.

Ja, wir müssen die Brücke von beiden Seiten bauen, doch das schulische Ufer erodiert rasant. Wir versuchen dies mit aller Kraft auszugleichen, zugleich erhöht sich Ihre persönliche Verantwortung und Verpflichtung.

Ich fürchte die Belastungsgrenze ist allseits erreicht oder überschritten. Das Schiff mag sinken, doch wir rudern noch und hoffen auf Rettung.

$$\left\langle \begin{array}{l} \text{Ihre Wünsche,} \\ \text{Hoffnungen,} \\ \text{Ambitionen} \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Unsere Lehre,} \\ \text{Anleitung,} \\ \text{Vorbild} \end{array} \right\rangle \stackrel{?!}{>} 0$$

Ihr LinA-Team hat alles gegeben. Wirklich alles. Hat es sich gelohnt? Ihre Erfolge zeigen Sie zaghaft schon jetzt, weitere werden gedeihen. Wenn Sie jetzt schon Ihrem LinA-Team etwas zurückgeben wollen, dann bereiten Sie gründlich vor und schreiben eine gute Klausur!

Manche haben die Chance genutzt, mit uns die Reise begonnen, und sind dank bester Betreuung gut ins Mathestudium gestartet. Sie hatten natürlich auch ihre unvermeidlichen Schwierigkeiten, die können wir nicht wegzaubern, doch wir helfen mit Rat und Tat.

Andere konnten damit leider noch nichts anfangen, haben gezögert oder misstraut, ihre Zeit vertrödelte, sich abgehängt. Ich bedaure das zutiefst. Ein klein wenig Trost spendet vielleicht Richard Feynmans Schlusswort...

Nun habe ich [...] lang zu Ihnen gesprochen und werde jetzt damit aufhören. Einerseits möchte ich mich entschuldigen und andererseits wieder nicht.

Ich hoffe – ja, ich weiß –, dass [einige] von Ihnen allem mit großer Spannung folgen konnten und eine angenehme Zeit damit verbracht haben. Aber ich weiß auch, dass die Kräfte der Lehre von sehr geringer Wirkung sind, außer unter jenen glücklichen Umständen, in denen sie praktisch überflüssig sind. Daher darf ich im Hinblick auf die[jenigen], die alles verstanden haben, sagen, dass ich nichts anderes getan habe, als Ihnen die Dinge zu zeigen. Was die anderen betrifft, tut es mir leid, wenn ich Ihren Widerwillen gegen dieses Fachgebiet erregt habe. [...] Ich hoffe nur, dass ich Sie nicht ernsthaft verwirrt habe, und dass Sie dieses interessante Geschäft nicht aufgeben. Ich hoffe, dass jemand anderes es Ihnen so beibringen kann, dass es Ihnen nicht im Magen liegt, und dass sie trotz allem eines Tages feststellen, dass es nicht so schrecklich ist, wie es aussieht.

Richard P. Feynman (1918–1988),
Epilog seiner Vorlesungen über Physik (1965)
www.feynmanlectures.caltech.edu/III_22.html