

Kapitel Y

Tensoralgebren

$$\Lambda(V) \leftarrow T(V) \rightarrow S(V)$$

$$0 \quad \leftarrow \text{belag} + \text{gabel} \quad \mapsto 2 \cdot \text{gabel}$$

$$2 \cdot \text{belag} \quad \leftarrow \text{belag} - \text{gabel} \quad \mapsto 0$$

[Ich bemühe mich] Inhalt und Grundlegung [...] vom Standpunkte der heutigen Wissenschaft in möglichst einfacher und anregender Weise überzeugend darzulegen. Und dieses [...] in freien Exkursen, wie sie sich unter den wechselnden Anregungen der Umgebung in der wirklich gehaltenen Vorlesung tatsächlich gestaltet haben.

Felix Klein (1849–1925), *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*

Inhalt dieses Kapitels Y

1 Multilineare Algebra

- Die Tensoralgebra $T(V)$
- Die symmetrische Algebra $S(V)$
- Die alternierende Algebra $\Lambda(V)$

2 Differentialkalkül und der Hauptsatz

- Differentialformen und ihre Ableitung
- Integration von Differentialformen

Wie machen wir aus Vektoren einen Ring?

Sei R ein kommutativer Ring und V ein zentraler R -linearer Raum: Skalare wirken beidseitig, und dabei gilt $rv = vr$ für $r \in R$ und $v \in V$.

Eine Abbildung $f: V^n = V \times \dots \times V \rightarrow W$ bildet jedes n -Tupel $v = (v_1, \dots, v_n)$ von Vektoren aus V auf einen Wert $w = f(v)$ in W ab.

Besonders interessieren uns dabei die multilinearen Abbildungen.

Die Permutation der Einträge mit $\tau \in S_n$ definiert eine neue Abbildung $f \circ \tau: V^n \rightarrow W$. Hier treten zwei wichtige Typen von Symmetrien auf:

Wir nennen f **symmetrisch**, wenn $f \circ \tau = f$ gilt für alle $\tau \in S_n$, und **antisymmetrisch**, wenn $f \circ \tau = \text{sign}(\tau) \cdot f$, und **alternierend**, wenn $f(v_1, \dots, v_n) = 0$ gilt sobald $v_i = v_j$ für ein Paar $i \neq j$.

Das Tensorprodukt überführt jede multilineare Abbildung $f: V^n \rightarrow W$ in eine lineare Abbildung $\tilde{f}: V^{\otimes n} \rightarrow W$. Die obigen Symmetrien führen uns von der **Tensoralgebra** $T(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n}$ zur **symmetrischen Algebra** $S(V) = T(V)/\text{Symmetrie}$ und schließlich zur **alternierenden Algebra** $\Lambda(V) = T(V)/\text{Alternie}$. Genau das untersuchen wir in diesem Kapitel.

Wie machen wir aus Vektoren einen Ring?

Wundersame Vorschau: In jedem Monoid oder Ring gilt:

$$(\text{ho})^3 = \text{hohoho}$$

$$(\text{oh})^3 = \text{ohohoh}$$

Wir erklären in diesem Kapitel drei besondere Ringe: die **Tensoralgebra** $T(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n}$, die **symmetrische Algebra** $S(V) = T(V)/\text{Symmetrie}$ und die **alternierende Algebra** $\Lambda(V) = T(V)/\text{Alternie}$. Die drei gelingen über jedem kommutativen Ring R und für jeden R -linearen Raum V , zum Beispiel $V = \langle \mathcal{A} \rangle_{\mathbb{Z}}^!$ mit Basis $\mathcal{A} = \{a, \dots, z\}$. Damit gilt:

$$\text{in } T(V): \quad \text{hohoho} \neq \text{ohohoh}$$

$$\text{in } S(V): \quad \text{hohoho} = \text{ohohoh} \neq 0$$

$$\text{in } \Lambda(V): \quad \text{hohoho} = \text{ohohoh} = 0$$

Sie fragen, wie diese wundersamen Rechnungen genau funktionieren? Ich danke Ihnen herzlich, dass Sie nachfragen! Genau darum geht es.

In diesem Kapitel wollen wir das Tensorprodukt nutzen und einsetzen, indem wir die Tensoralgebren $T(V)$ sowie $S(V)$ und $\Lambda(V)$ untersuchen. Dies bietet einen Rückblick auf schöne Mathematik der Linearen Algebra, zugleich einen Ausblick auf Anwendungen der nächsten Semester.

Dies kann und soll für Sie plastisch machen, was wir alles Schönes mit dem Tensorprodukt bauen können. Dabei werden Sie seine Rechenregeln wiederholen, weiter einüben und verfestigen. Insgesamt werden Sie sich durch den praktischen Gebrauch weiter an das Tensorprodukt gewöhnen.

Seien Sie also weiterhin Frohgemut! Auch in diesem Kapitel wird es neue Ideen und Begriffe geben, die Ihnen anfangs schwer und nach Einübung leicht fallen. Das ist eine Erfahrung, die sich für Sie inzwischen oftmals wiederholt hat und sich in Ihrem Studium weiter fortführen wird.

Bei der Konstruktion der Tensoralgebra $T(V)$ und der symmetrischen Algebra $S(V)$ begegnen uns insbesondere die Polynomringe als wichtige Spezialfälle und wohlvertraute Bekannte. Auch diese waren für Sie einst schwierig, doch inzwischen sind sie leicht, dank Übung und Gebrauch.

L „Das erinnert an die Buchstabenrechnung der Mittelstufe.“ Ganz genau!

Wir konstruieren die guten alten Polynomringe hier also nochmals von Grund auf neu vom Blickwinkel der Tensoralgebren. Die Tatsache, dass wir auf zwei verschiedenen Wegen zum selben Ziel gelangen, sollte uns nicht enttäuschen, sondern erfreuen. Es bezeugt, dass wir ein wichtiges Objekt in Händen halten, dass viele Facetten hat und Zugänge erlaubt.

*The two most engaging powers of an author
are to make new things familiar
and familiar things new.*

Samuel Johnson (1709–1784)

Während wir symmetrische Algebren $S(V)$ in Form von Polynomringen auch auf anderen Wegen erreichen können und bereits hergestellt haben, ist die äußere Algebra $\Lambda(V)$ tatsächlich ein gänzlich neuartiges Wesen. Sie ist deshalb zu Recht der Star dieses Kapitels.

Sie wird Ihnen aller Erfahrung nach in vielen Anwendungen der nächsten Semester ein willkommenes Werkzeug sein, etwa in der Differential- und Integralrechnung, in der Analysis, der Geometrie, der Physik, uvm. Sie können diese Themen auch auf andere Weisen präsentieren, erschließen und nutzen, doch besonders elegant und effizient wird die Information gebündelt durch die äußere Algebra.

Selbst wenn Sie die äußere Algebra nur homöopathisch nutzen wollen, so lohnt es sich doch, sie immerhin einmal kennen gelernt zu haben. Wie schon so oft gilt auch hier wieder: Kennen Sie Ihre Werkzeuge! Nur dann können Sie informiert auswählen und effizient anwenden.

Gian-Carlo Rota war ein italienisch-amerikanischer Mathematiker, der vorrangig zu Analysis und Wahrscheinlichkeit arbeitete und die moderne Kombinatorik mitbegründete. Er schrieb äußerst treffend:

*“What can you prove with exterior algebra that you cannot prove without it?”
Whenever you hear this question raised about some new piece of mathematics,
be assured that you are likely to be in the presence of something important.
In my time, I have heard it repeated for random variables, Laurent Schwartz’
theory of distributions, ideles and Grothendieck’s schemes, to mention only a
few. A proper retort might be: “You are right. There is nothing in yesterday’s
mathematics that could not also be proved without it. Exterior algebra is not
meant to prove old facts, it is meant to disclose a new world. Disclosing new
worlds is as worthwhile a mathematical enterprise as proving old conjectures.”*

Gian-Carlo Rota (1932–1999), *Indiscrete thoughts* (1997)

Ein **Alphabet** $\mathcal{A}$ ist eine Menge, ihre Elemente $a \in \mathcal{A}$ heißen **Buchstaben**.
Ein **Wort** der Länge n ist ein n -Tupel $w = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1})$ mit $w_i \in \mathcal{A}$.

$$\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A} = \{w : \{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow \mathcal{A}\}$$

Wir lesen Buchstaben als Wörter vermöge $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}^1 : a \mapsto (\{0\} \mapsto a)$.

Wir haben die **Verknüpfung** $* : \mathcal{A}^k \times \mathcal{A}^\ell \rightarrow \mathcal{A}^{k+\ell} : (u, v) \mapsto w = uv$,

$$\underbrace{(u_0, \dots, u_{k-1})}_{= u \in \mathcal{A}^k} * \underbrace{(v_0, \dots, v_{\ell-1})}_{= v \in \mathcal{A}^\ell} = \underbrace{(u_0, \dots, u_{k-1}, v_0, \dots, v_{\ell-1})}_{= uv =: w \in \mathcal{A}^{k+\ell}}.$$

Ausgeschrieben heißt das $w_i = u_i$ für $i < k$ und $w_{k+i} = v_i$ für $i < \ell$.

Die Verknüpfung $*$ ist **assoziativ**, denn $(u * v) * w = u * (v * w)$.

Das leere Wort $e \in \mathcal{A}^0 = \{\emptyset\}$ ist **neutral**, denn $e * u = u * e = u$.

$$\mathcal{A}^* := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^n, \quad * : \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^* : (u, v) \mapsto w = uv$$

Wir erhalten so das **freie Monoid** $(\mathcal{A}^*, *, e)$ über dem Alphabet $\mathcal{A}$. (Y1B)

Beispiel: Über dem Alphabet $\mathcal{A} = \{a, \dots, z\}$ gilt $toto \neq otto$ in $\mathcal{A}^4 \subset \mathcal{A}^*$.

Wir betrachten die natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ in von Neumanns Modell:
 $0 = \{\}, 1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, 3 = \{0, 1, 2\}, \dots, n = \{0, 1, \dots, n-1\}, \dots$
Somit ist $\mathcal{A}^n = \{w : n \rightarrow \mathcal{A}\}$ die Menge aller Abbildungen $w : n \rightarrow \mathcal{A}$.
Das einzige Wort der Länge 0 ist demnach das leere Wort $e : \emptyset \rightarrow \mathcal{A}$.

Beispiele: Der allseits beliebte euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ beruht auf der Menge aller n -Tupel $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ reeller Zahlen $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$.
Die übliche Indizierung $0, 1, \dots, n-1$ in der Informatik und $1, 2, \dots, n$ in der Mathematik sind äquivalent durch die kanonische Umnummerierung.

Die Folgenmenge $\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{w : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A} : k \mapsto w_k\}$ besteht dementsprechend aus allen unendlichen Wörtern, üblicherweise heißen sie Folgen $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
Hierauf operiert das freie Monoid $(\mathcal{A}^*, *, e)$ durch Verknüpfung von links.

Den Folgenraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bzw. $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ kennen Sie prominent aus der Analysis.
Die Räume $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ bzw. $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ bestehen aus beidseitig unendlichen Folgen, diese nutzen Sie dankend für Fourier-Reihen und Laurent-Reihen.

☹ Können wir die Konstruktion von $\mathcal{A}^*$ auch linear ausführen? O ja!

Sei $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{F}_q, \dots$ ein Ring und ${}_R V_R$ ein (R, R) -linearer Raum.
Zu jeder Länge $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die n -fache Tensorpotenz durch

$$T_R^n(V) := V^{\otimes n} = \bigotimes_{i < n} V = {}_R V_R \otimes {}_R V_R \otimes \dots \otimes {}_R V_R$$

Darauf haben wir das Produkt $\mu : T^k \times T^\ell \rightarrow T^{k+\ell} : (u, v) \mapsto w = u \cdot v$ mit

$$\underbrace{(u_0 \otimes \dots \otimes u_{k-1})}_{= u \in T^k} \cdot \underbrace{(v_0 \otimes \dots \otimes v_{\ell-1})}_{= v \in T^\ell} = \underbrace{u_0 \otimes \dots \otimes u_{k-1} \otimes v_0 \otimes \dots \otimes v_{\ell-1}}_{= u \cdot v =: w \in T^{k+\ell}}.$$

Ausgeschrieben: Das Produkt $w = u \cdot v$ von $u = \bigotimes_{i < k} u_i$ und $v = \bigotimes_{i < \ell} v_i$ ist somit $w = \bigotimes_{i < k+\ell} w_i$ mit $w_i = u_i$ für $i < k$ und $w_{k+i} = v_i$ für $i < \ell$.

Für $T^0 := R$ ist $\mu : T^0 \times T^\ell \rightarrow T^\ell$ und $\mu : T^k \times T^0 \rightarrow T^k$ die Skalierung.

Wiederholung: Dies ist tatsächlich ein Produkt, also (R, R, R) -bilinear.
Dank UAE X2A faktorisiert μ demnach zu $\bar{\mu} : T^k \otimes T^\ell \rightarrow T^{k+\ell}$ mit

$$(u_1 \otimes \dots \otimes u_k) \otimes (v_1 \otimes \dots \otimes v_\ell) \mapsto u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_\ell.$$

Das ähnelt der Verknüpfung von Wörtern, hier nun multilinear!

Unser Produkt μ ist **assoziativ**, denn $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$ in $T^{k+\ell+m}$.

$$\begin{array}{ccccc} (T^k \times T^\ell) \times T^m & \xleftarrow{\cong} & T^k \times T^\ell \times T^m & \xrightarrow{\cong} & T^k \times (T^\ell \times T^m) \\ \downarrow \text{pi} \times \eta & & \searrow & & \downarrow \eta \times \text{pi} \\ T^{k+\ell} \times T^m & \xrightarrow{\mu} & T^{k+\ell+m} & \xleftarrow{\mu} & T^k \times T^{\ell+m} \end{array}$$

Wir haben $T^n = V^{\otimes n}$ mit $T^1 = V$ und $T^0 = R$. Alle zusammengefasst:

$$T(V) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} T^n(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bigotimes_{i < n} V$$

Also $T(V) = R \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V \otimes V) \dots$
Unser Produkt μ setzt sich auf T über R bilinear fort zu $\mu : T \times T \rightarrow T$.

$$\begin{array}{ccccc} (T \times T) \times T & \xleftarrow{\cong} & T \times T \times T & \xrightarrow{\cong} & T \times (T \times T) \\ \downarrow \text{pi} \times \eta & & \searrow & & \downarrow \eta \times \text{pi} \\ T \times T & \xrightarrow{\mu} & T & \xleftarrow{\mu} & T \times T \end{array}$$

Übung: Können wir in obigen Diagrammen von „ $\times$ “ zu „ $\otimes$ “ übergehen?

Wir identifizieren $v \in V$ mit $\iota(v) = (0, v, 0, \dots) \in T$ und schreiben $V \subseteq T$. Wir identifizieren $r \in R$ mit $\eta(r) = (r, 0, 0, \dots) \in T$ und schreiben $R \subseteq T$. Für $R = T^0 \subseteq T$ ist $\mu : T^0 \times T \rightarrow T$ und $\mu : T \times T^0 \rightarrow T$ die Skalierung:

$$\begin{array}{ccccc} & & T \times T & & \\ \eta \times \text{id} \nearrow & & \downarrow \mu & \nwarrow \text{id} \times \eta & \\ R \times T & & & & T \times R \\ \lambda : (r, w) \mapsto rw \searrow & & & \swarrow \rho : (w, r) \mapsto wr & \\ & & T & & \end{array}$$

Das Einselement $1 \in R = T^0 \xrightarrow{\eta} T$ ist **neutral**, denn $1 \cdot u = u \cdot 1 = u$.

Basisbeispiel X2P: $V = \langle \mathcal{A} \rangle_R^! \implies T^n = \langle \mathcal{A}^n \rangle_R^! \implies T = \langle \mathcal{A}^* \rangle_R^!$.

😊 Hat $V = \langle \mathcal{A} \rangle_R^!$ die R -Basis $\mathcal{A}$, so hat $T^k = V^{\otimes k}$ die R -Basis $\mathcal{A}^k$, also $T = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n}$ die R -Basis $\mathcal{A}^* = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^n$ (zentral X2J, allgemein X2P).

😊 Bemerkenswert: Diese Basis $\mathcal{A}^* \subseteq T$ ist multiplikativ abgeschlossen. Entgegen unserer sonstigen Gewohnheit ist die Basis hier keine Familie, sondern eine Teilmenge in V . Das ist für unsere Rechnungen bequemer.

Beispiel: Für $V = \{0\}$ ist der Tensorring $T(V) = R$ nur der Grundring. Das entspricht dem obigen Basisbeispiel mit $\mathcal{A} = \emptyset$ und somit $\mathcal{A}^* = \{1\}$. Sprachlos: Das leere Alphabet erlaubt genau ein Wort, nämlich das leere!

Beispiel: Aus $V = R$ folgt $T^2 = R \otimes R \cong R$, somit $T^n \cong R$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Tensorring $T(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R = R^{(\mathbb{N})} = R[X]$ ist der Polynomring! Noch suggestiver ist $V = \langle X \rangle_R^!$ mit einelementiger Basis $\mathcal{A} = \{X\}$ wie im obigen Basisbeispiel. Dann gilt $T^n = \langle X^n \rangle_R^!$ und $T = \langle X^n \mid n \in \mathbb{N} \rangle_R^!$.

Beispiel: Sei $V = \langle \mathcal{A} \rangle_R^!$ mit $\mathcal{A} = \{a, \dots, z\}$ wie im obigen Basisbeispiel. Wir rechnen im Tensorring $T = T(V)$ über $\mathbb{Z}$ bezüglich der Basis $\mathcal{A}^*$:

$$(\text{ho})^3 = \text{hohoho} \neq \text{ohohoh} = (\text{oh})^3$$

$$(\text{to} + \text{ot})^2 = \text{toto} + \text{toot} + \text{otto} + \text{otot}$$

$$(\text{klim} - \text{bim})(\text{klim} + \text{bim}) = \text{klimklim} + \text{klimbim} - \text{bimklim} - \text{bimbim}$$

Übung: Erfinden Sie selbst möglichst diverse und amüsante Beispiele.

📌 „Im freien Monoid $(\mathcal{A}^*, *, e)$ arbeiten wir schon seit der Grundschule, nun auch im davon aufgespannten R -linearen Raum.“ Richtig, genau so!

$$\begin{array}{ccccc} R & \xrightarrow{\eta = \text{inc}_R^T} & T(V) & \xleftarrow{\iota = \text{inc}_V^T} & V \\ & \searrow \tilde{\eta} & \downarrow \exists! f & \swarrow \tilde{\iota} & \\ & & A & & \end{array}$$

Satz Y1A: Der Tensorring $T = T(V)$ ist der freie Ring zu V über R .

(0) Zu jedem Bimodul V über dem Ring R ist $(T, \cdot, 1, \eta, \iota)$ ein Ring $(T, \cdot, 1)$ mit Ringhomomorphismus $\eta : R \hookrightarrow T$ und (R, R) -linearer Einbettung $\iota : V \hookrightarrow T$. Dieser hat die folgende universelle Eigenschaft (UAE):

(1) Sei $(A, \cdot, 1, \tilde{\eta}, \tilde{\iota})$ ein Ring $(A, \cdot, 1)$ mit Ringhomomorphismus $\tilde{\eta} : R \rightarrow A$ und (R, R) -linearer Abbildung $\tilde{\iota} : V \rightarrow A$. Dank $\tilde{\eta}$ wird A ein Bimodul; für $v \in V$ und $r \in R$ gilt $\tilde{\iota}(rv) = \tilde{\eta}(r)\tilde{\iota}(v)$ und $\tilde{\iota}(vr) = \tilde{\iota}(v)\tilde{\eta}(r)$. Es existiert genau ein Ringhomomorphismus $f : T \rightarrow A$ mit $f \circ \eta = \tilde{\eta}$ und $f \circ \iota = \tilde{\iota}$, nämlich

$$f(r \cdot v_1 \cdots v_k) = \tilde{\eta}(r) \cdot \tilde{\iota}(v_1) \cdots \tilde{\iota}(v_k).$$

Wir nennen daher $(T(V), \cdot, 1, \eta, \iota)$ den **freien Ring** zu V über R .

😊 Für $V = \langle X \rangle_R^!$ erhalten wir den Polynomring $T = R[X]$ und die UAE ist der Einsetzungshomomorphismus K3D. Für $V = \langle X_1, \dots, X_n \rangle_R^!$ ist T der Polynomring in den nicht-kommutierenden Variablen $X_1, \dots, X_n$.

Aufgabe: Was genau ist für Satz Y1A zu zeigen? Zeigen Sie es!

Beweis: Aussage (0) fasst unsere vorige Konstruktion zusammen.

(1a) *Eindeutigkeit:* Jede zwei solche Ringhomomorphismen $f, f' : T \rightarrow A$ sind gleich auf R dank $f\eta = \tilde{\eta} = f'\eta$ und auf V dank $f\iota = \tilde{\iota} = f'\iota$, per Induktion multiplikativ auf T^n und additiv auf $T = \bigoplus_n T^n$.

(1b) *Existenz:* Zunächst haben wir die Abbildung

$$g^n : R \times V^n \rightarrow A : (r, v_1, \dots, v_k) \mapsto \tilde{\eta}(r) \cdot \tilde{\iota}(v_1) \cdots \tilde{\iota}(v_n).$$

Nach Voraussetzung ist g multilinear, das heißt an jeder Stelle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ additiv und R -homogen gemäß Definition X2H. Dank UAE X2I erhalten wir $f^n : T^n \cong R \otimes V^{\otimes n} \rightarrow A$ und daraus $f : T = \bigoplus_n T^n \rightarrow A$. Dies erfüllt $f \circ \eta = \tilde{\eta}$ und $f \circ \iota = \tilde{\iota}$ und ist tatsächlich ein Ringhomomorphismus, wie gefordert. QED

Über dem Alphabet $\mathcal{A}$ haben wir das freie Monoid $(\mathcal{A}^*, *, e) = [\mathcal{A} \mid -]$:

$$\mathcal{A}^* = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^n, \quad * : \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^* : (u, v) \mapsto uv, \quad e = ()$$

Dieses Monoid wird erzeugt von $\mathcal{A}$, zudem frei, also ohne Relationen. Es ist nicht kommutativ, zum Beispiel gilt $\text{toto} \neq \text{otto}$ für $t \neq o$ in $\mathcal{A}$. Auf $\mathcal{A}^n$ operiert die symmetrische Gruppe S_n durch Umsortieren. Explizit ausgeschrieben bedeutet das $\mathcal{A}^n \curvearrowright S_n$ mit $(w, \tau) \mapsto w \circ \tau$. Umsortieren erzeugt die (gemäß J3G zugehörige) Äquivalenzrelation

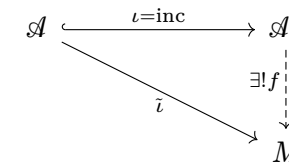
$$u_1 u_2 \cdots u_n \equiv u_{\tau 1} u_{\tau 2} \cdots u_{\tau n} \quad \text{für } \tau \in S_n.$$

Als Quotient erhalten wir das **freie kommutative Monoid** $(\mathcal{A}_{\text{ab}}^*, \cdot, 1)$ mit

$$\mathcal{A}_{\text{ab}}^* := \mathcal{A}^* / \equiv = [\mathcal{A} \mid uv = vu : u, v \in \mathcal{A}]$$

Die Komposition $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^* \twoheadrightarrow \mathcal{A}_{\text{ab}}^* : a \mapsto [a] = \{a\}$ ist demnach injektiv. Bequeme Konvention: Wir identifizieren Buchstaben $a \in \mathcal{A}$ mit $[a]$ in $\mathcal{A}_{\text{ab}}^*$. So wird $\mathcal{A}_{\text{ab}}^*$ von $\mathcal{A}$ erzeugt und zwar frei kommutativ im Sinne von Y1C.

Aufgabe: Was bedeutet „ $(\mathcal{A}^*, *, e)$ ist das **freie Monoid**“? Formulieren und beweisen Sie dies nach dem Vorbild von Satz Y1A zum Tensorring.



Satz Y1B: $(\mathcal{A}^*, *, e)$ ist das freie Monoid über dem Alphabet $\mathcal{A}$

(0) Zur Menge $\mathcal{A}$ ist $(\mathcal{A}^*, *, e, \iota)$ ein Monoid $(\mathcal{A}^*, *, e)$ mit Einbettung $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^*$. Dieses hat die folgende universelle Eigenschaft (UAE):

(1) Sei $(M, \cdot, 1, \tilde{\iota})$ ein Monoid $(M, \cdot, 1)$ mit einer Abbildung $\tilde{\iota} : \mathcal{A} \rightarrow M$. Dazu existiert genau ein Monoidhomomorphismus $f : \mathcal{A}^* \rightarrow M$ mit $f \circ \iota = \tilde{\iota}$, nämlich $f(a_1 \cdots a_n) = \tilde{\iota}(a_1) \cdots \tilde{\iota}(a_n)$ für alle $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$.

Wir nennen daher $(\mathcal{A}^*, *, e, \iota)$ das **freie Monoid** über $\mathcal{A}$.

Beweis als Übung zur Wiederholung: Dies folgt „nach Konstruktion“.

Aufgabe: Wie wird die Menge $\mathcal{A}_{\text{ab}}^*$ kanonisch zum Monoid $(\mathcal{A}_{\text{ab}}^*, \cdot, 1)$?

Lösung: Wir nutzen den Quotienten $q : \mathcal{A}^* \twoheadrightarrow \mathcal{A}_{\text{ab}}^* : w \mapsto [w]$ modulo Umsortieren. Es gibt auf $\mathcal{A}_{\text{ab}}^*$ genau eine Monoidstruktur $(\mathcal{A}_{\text{ab}}^*, \cdot, 1)$, für die q ein Monoidhomomorphismus ist, $q : (\mathcal{A}^*, *, 1) \twoheadrightarrow (\mathcal{A}_{\text{ab}}^*, \cdot, 1)$.

Eindeutigkeit ist klar, denn q ist surjektiv. *Existenz* zeigen wir durch Konstruktion: Aus $u \equiv u'$ und $v \equiv v'$ folgt $u * v \equiv u' * v'$. (Warum?) Somit erhalten wir auf $\mathcal{A}_{\text{ab}}^*$ die (wohldefinierte!) Verknüpfung

$$\cdot : \mathcal{A}_{\text{ab}}^* \times \mathcal{A}_{\text{ab}}^* \rightarrow \mathcal{A}_{\text{ab}}^* : [u] \cdot [v] := [u * v].$$

Die Assoziativität vererbt sich über $q : (\mathcal{A}^*, *) \twoheadrightarrow (\mathcal{A}_{\text{ab}}^*, \cdot)$:

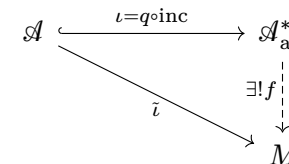
$$([u] \cdot [v]) \cdot [w] \stackrel{\text{Def}}{=} [(u * v) * w] \stackrel{\text{Ass}}{=} [u * (v * w)] \stackrel{\text{Def}}{=} [u] \cdot ([v] \cdot [w])$$

Ebenso folgt, dass $1 = [e]$ in $(\mathcal{A}_{\text{ab}}^*, \cdot)$ beidseitig neutral ist:

$$[e] \cdot [u] \stackrel{\text{Def}}{=} [e * u] \stackrel{\text{Ntr}}{=} [u] \quad \text{und} \quad [u] \cdot [e] \stackrel{\text{Def}}{=} [u * e] \stackrel{\text{Ntr}}{=} [u]$$

Wir erhalten so das ersehnte kommutative Monoid $(\mathcal{A}_{\text{ab}}^*, \cdot, 1)$. QED

Aufgabe: Was bedeutet „ $(\mathcal{A}_{\text{ab}}^*, \cdot, 1)$ ist das **freie kommutative Monoid**“? Formulieren und beweisen Sie dies nach dem Vorbild von Satz Y1B.



Satz Y1C: $(\mathcal{A}_{\text{ab}}^*, \cdot, 1)$ ist das freie CMonoid über dem Alphabet $\mathcal{A}$

(0) Zur Menge $\mathcal{A}$ ist $(\mathcal{A}_{\text{ab}}^*, \cdot, 1, \iota)$ ein CMonoid $(\mathcal{A}_{\text{ab}}^*, \cdot, 1)$ mit Einbettung $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}_{\text{ab}}^*$. Dieses hat die folgende universelle Eigenschaft (UAE):

(1) Sei $(M, \cdot, 1, \tilde{\iota})$ ein CMonoid $(M, \cdot, 1)$ mit einer Abbildung $\tilde{\iota} : \mathcal{A} \rightarrow M$. Dazu existiert genau ein CMonoidhomomorphismus $f : \mathcal{A}_{\text{ab}}^* \rightarrow M$ mit $f \circ \iota = \tilde{\iota}$, nämlich $f(a_1 \cdots a_n) = \tilde{\iota}(a_1) \cdots \tilde{\iota}(a_n)$ für alle $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$.

Wir nennen daher $(\mathcal{A}_{\text{ab}}^*, \cdot, 1, \iota)$ das **freie CMonoid** über $\mathcal{A}$.

Beweis als Übung zur Wiederholung: Dies folgt „nach Konstruktion“.

Beispiel: Wir rechnen in $\mathcal{A}_{ab}^*$ über $\mathcal{A} = \{a, \dots, z\}$:

$$(ho)^3 = hohoho = ohohoh = h^3 o^3 \neq (oho)^2 = h^2 o^4$$

$$lampe = ampel, \text{ salat} = atlas = a^2 l st, \text{ tomaten} = atemnot$$

Ein **Anagramm** (gr. ἀνάγραμμα) ist ein Wortpaar, das durch Permutation der Buchstaben ineinander übergeht. Im Alltag betrachtet man dabei nur sinnvolle Wörter, etwa gemäß eines Wörterbuches. Wir erlauben hier alle Wörter. Das entspricht genau dem Quotienten von $\mathcal{A}^*$ zu $\mathcal{A}_{ab}^*$.

⚠ Formal korrekt ist $\text{salat} \equiv \text{atlas}$ in $\mathcal{A}^*$ und $[\text{salat}] = [\text{atlas}]$ in $\mathcal{A}_{ab}^*$. Bequem abkürzend schreiben wir $\text{salat} = \text{atlas}$ im Monoid $(\mathcal{A}_{ab}^*, \cdot, 1)$. Prüfen und erklären Sie kritisch, welche Interpretation das begründet.

😊 Die Komposition $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}_{ab}^* : a \mapsto [a] = \{a\}$ ist injektiv. Bequeme Konvention: Wir identifizieren Buchstaben $a \in \mathcal{A}$ mit $[a]$ in $\mathcal{A}_{ab}^*$. So wird $\mathcal{A}_{ab}^*$ von $\mathcal{A}$ erzeugt und zwar frei kommutativ (im Sinne von Y1C). Dank dieser Lesart gilt tatsächlich $\text{salat} = \text{atlas}$ im Monoid $(\mathcal{A}_{ab}^*, \cdot, 1)$.

😊 In $\mathcal{A}^*$ können wir „freie“ Wörter $u = (u_1, \dots, u_k)$ und $v = (v_1, \dots, v_\ell)$ leicht vergleichen: **Gleichheit** $u = v$ gilt genau dann, wenn beide Wörter dieselbe Länge $k = \ell$ haben und zudem buchstabenweise gleich sind, also $u_i = v_i$ gilt für alle $i \in \{1, \dots, k\}$. Ist zudem das Alphabet $(\mathcal{A}, \leq)$ geordnet, etwa $\mathcal{A} = \{a < \dots < z < A < \dots < Z < \dots\}$, so können wir die Menge $\mathcal{A}^*$ **lexikographisch ordnen** durch $u < v$ gdw $k < \ell$ oder ($\llcorner$ es gilt $k = \ell$ und $u_1 = v_1, \dots, u_{i-1} = v_{i-1}, u_i < v_i$ für eine Stelle $i \in \{1, \dots, k\}$).

Aufgabe: Wie vergleichen Sie „kommutative“ Wörter in $\mathcal{A}_{ab}^*$? effizient?

Methode 1: Sortieren! Wir ordnen unser Alphabet $(\mathcal{A}, \leq)$ und damit alle Wörter $(\mathcal{A}^*, \leq)$ lexikographisch wie oben. Jede Äquivalenzklasse $[u] \subseteq \mathcal{A}^*$ hat dann einen kleinsten Repräsentanten $m = \min[u]$. (Warum?) Diesen finden wir, indem wir die Buchstaben des Wortes u aufsteigend sortieren. Beispiel: Der minimale Repräsentant von $w = [\text{salat}]$ ist $\min w = \text{aalst}$.

😊 Somit gilt $[u] = [v]$ gdw $\min[u] = \min[v]$. Das ist leicht zu prüfen!

😊 Zudem können wir $[u] < [v]$ definieren durch $\min[u] < \min[v]$.

Beispiel: Über dem Alphabet $\mathcal{A} = \{a < \dots < z < \dots\}$ finden wir

$$\text{in } \mathcal{A}^*: \quad \text{drei} < \text{eins} < \text{null} < \text{vier} < \text{zwei},$$

$$\text{in } \mathcal{A}_{ab}^*: \quad [\text{drei}] < [\text{eins}] < [\text{vier}] < [\text{zwei}] < [\text{null}].$$

Methode 2: Zählen! In dem Wort $[u] \in \mathcal{A}_{ab}^*$ zählen wir die Buchstaben:

$$\Psi : \mathcal{A}_{ab}^* \rightarrow \mathbb{N}^{(\mathcal{A})} : [u] \mapsto n := (n_a = \#\{i \mid u_i = a\})_{a \in \mathcal{A}}$$

Das ist wohldefiniert, denn jede Permutation $u \mapsto u \circ \tau$ liefert eine Bijektion $\{i \mid u_i = a\} \cong \{j \mid u_{\tau j} = a\}$: Die Elementezahl bleibt gleich!

😊 Wortgleichheit $[u] = [v]$ ist äquivalent zu Zählgleichheit $\Psi(u) = \Psi(v)$. Das ist besonders leicht. Dahinter steckt der Monoidisomorphismus

$$(\Phi, \Psi) : (\mathbb{N}^{(\mathcal{A})}, +, 0) \cong (\mathcal{A}_{ab}^*, \cdot, 1) : n = (n_a)_{a \in \mathcal{A}} \mapsto \prod_{a \in \mathcal{A}} a^{n_a}.$$

Übung: Warum ist Φ wohldefiniert? $\Psi \circ \Phi = \text{id}$? $\Phi \circ \Psi = \text{id}$? Sortieren! *Algorithmic fun fact:* Sortieren kostet $O(n \log n)$, doch Zählen nur $O(n)$?

Wiederholung: Der Fundamentalsatz der Arithmetik (B3J/B3K) besagt:

$$(\mathbb{N}_{\geq 1}, \cdot, 1) \cong (\mathbb{P}_{ab}^*, \cdot, 1)$$

Das linke Monoid ist konkret, aber schwierig, das rechte viel leichter!

Aufgabe: Nennen und begründen Sie den kanonischen Isomorphismus. Im Monoid $(\mathbb{N}_{\geq 1}, \cdot, 1)$ sei $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ die Menge der Primzahlen. (0) Zu jeder endlich getragenen Folge $e : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{N}$ haben wir das Produkt

$$\nu = (\nu_p)_{p \in \mathbb{P}} = (\nu_2, \nu_3, \nu_5, \dots) \mapsto a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p} = 2^{\nu_2} 3^{\nu_3} 5^{\nu_5} \dots$$

(1) Wir erhalten so die Bijektion oder besser: den Monoidisomorphismus

$$\Phi : (\mathbb{N}^{(\mathbb{P})}, +, 0) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{N}_{> 1}, \cdot, 1) : \nu \mapsto \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p}.$$

(2) Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn das Zielmonoid $(\mathbb{P}_{ab}^*, \cdot, 1)$ ist kommutativ. Sie ist surjektiv / bijektiv, denn jede natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ erlaubt mindestens / genau eine Darstellung als Produkt von Primzahlen.

Sei R ein kommutativer Ring, darüber V ein zentraler R -linearer Raum.

⚠ Der Tensorring $T(V)$ ist i.A. nicht kommutativ: $u_1 \otimes u_2 \neq u_2 \otimes u_1$.

Wir erzwingen Kommutation in T^2 durch folgende Relationen:

$$\mathfrak{c}_2 = \langle u_1 \otimes u_2 - u_2 \otimes u_1 \mid u_1, u_2 \in V \rangle_R \leq V \otimes V = T^2 \subseteq T$$

Ebenso erzwingen wir Kommutation in T^n durch folgende Relationen:

$$\mathfrak{c}_n = \langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_n - u_{\tau_1} \otimes \cdots \otimes u_{\tau_n} \mid u_1, \dots, u_n \in V, \tau \in S_n \rangle_R$$

Im Quotientenraum $S^n = T^n / \mathfrak{c}_n$ gilt $[u_1 \otimes \cdots \otimes u_n] = [u_{\tau_1} \otimes \cdots \otimes u_{\tau_n}]$.

Die Summe $\mathfrak{c} := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{c}_n \trianglelefteq T$ ist ein Ideal (L3G) in unserem Tensorring T . Erinnerung: Ideal $\mathfrak{c} \trianglelefteq T$ bedeutet $0 \in \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{c}$ und $T \cdot \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{c} \supseteq \mathfrak{c} \cdot T$.

Der Quotient ist die **symmetrische Algebra** $S(V)$ zu V über R :

$$S(V) := T(V) / \mathfrak{c} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S^n(V)$$

Dies ist ein Ring dank Satz L3G, zudem kommutativ wie gewünscht.

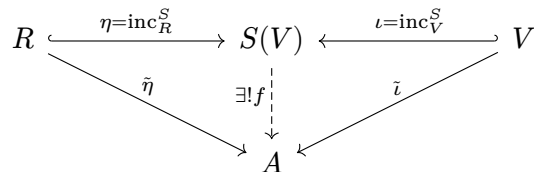
Der Tensorring $T = T(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n}$ ist **graduirt** über $(\mathbb{N}, +, 0)$: Jedes Element $t \in T$ können wir eindeutig zerlegen als die Summe $t = \sum_{n \in \mathbb{N}} t_n$ seiner **homogenen Summanden** $t_n \in V^{\otimes n}$ vom Grad n . Die Multiplikation respektiert die Graduierung gemäß $T^k \cdot T^\ell \subseteq T^{k+\ell}$.

Beispiel: Jedes Polynom $t \in R[X] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \langle X^n \rangle_R$ ist die Summe $t = \sum_{n \in \mathbb{N}} t_n$ seiner Monome $t_n = r_n X^n$ und $r_k X^k \cdot s_\ell X^\ell = r_k s_\ell X^{k+\ell}$.

Lemma Y1D: Das Ideal $\mathfrak{c} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{c}_n \trianglelefteq T$ wird erzeugt von $\mathfrak{c}_2$.

Das Ideal $\mathfrak{c} \trianglelefteq T$ wird von $\mathfrak{c}_2 \leq T^2$ erzeugt. Insbesondere gilt $\mathfrak{c}_0 = \mathfrak{c}_1 = 0$. Demnach sind $\eta : R \hookrightarrow T(V) \twoheadrightarrow S(V)$ und $\iota : V \hookrightarrow T(V) \twoheadrightarrow S(V)$ injektiv. Zudem ist der Quotient $S(V) = T(V) / \mathfrak{c} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S^n(V)$ selbst graduirt.

Beweis: Die Inklusion $\mathfrak{c} \supseteq (\mathfrak{c}_2)$ ist klar, denn $\mathfrak{c}$ ist ein Ideal und enthält $\mathfrak{c}_2$. Wir zeigen die Umkehrung $\mathfrak{c} \subseteq (\mathfrak{c}_2)$. Im Ideal $(\mathfrak{c}_2) \trianglelefteq T$ liegen alle Elemente der Form $u_1 \cdots u_{\ell-1} (u_\ell u_{\ell+1} - u_{\ell+1} u_\ell) u_{\ell+2} \cdots u_n$. Jede Permutation wird von elementaren Transpositionen erzeugt (O1E). Daher gilt $\mathfrak{c} \subseteq (\mathfrak{c}_2)$. Die weiteren Aussagen sind klar. QED



Satz Y1E: Die sym. Algebra $S = S(V)$ ist der freie CRing zu V über R .

(0) Zu jedem zentralen Bimodul V über dem kommutativen Ring R ist $(S, \cdot, 1, \eta, \iota)$ ein CRing $(S, \cdot, 1)$ mit CRinghomomorphismus $\eta : R \hookrightarrow S$ und R -linearer Einbettung $\iota : V \hookrightarrow S$. Dieser hat folgende UAE:

(1) Sei $(A, \cdot, 1, \tilde{\eta}, \tilde{\iota})$ ein CRing $(A, \cdot, 1)$ mit Ringhomomorphismus $\tilde{\eta} : R \rightarrow A$ und R -linearer Abbildung $\tilde{\iota} : V \rightarrow A$. Dank $\tilde{\eta}$ wird auch A ein zentraler R -Bimodul; für $v \in V$ und $r \in R$ gilt also $\tilde{\iota}(rv) = \tilde{\eta}(r)\tilde{\iota}(v)$. Dazu existiert genau ein CRinghomomorphismus $f : S \rightarrow A$ mit $f \circ \eta = \tilde{\eta}$ und $f \circ \iota = \tilde{\iota}$, nämlich

$$f(r \cdot v_1 \cdots v_k) = \tilde{\eta}(r) \cdot \tilde{\iota}(v_1) \cdots \tilde{\iota}(v_k).$$

Wir nennen daher $(S(V), \cdot, 1, \eta, \iota)$ den **freien CRing** zu V über R .

Aufgabe: Was genau ist für Satz Y1E zu zeigen? Zeigen Sie es! Wie nutzen Sie geschickt den Tensorring $T = T(V)$ und seine UAE Y1A?

Beweis: Aussage (0) fasst unsere vorige Konstruktion zusammen.

(1a) *Eindeutigkeit:* Jede zwei solche Ringhomomorphismen $f, f' : S \rightarrow A$ sind gleich auf R dank $f\eta = \tilde{\eta} = f'\eta$ und auf V dank $f\iota = \tilde{\iota} = f'\iota$, per Induktion multiplikativ auf S^n und additiv auf $S = \bigoplus_n S^n$.

(1b) *Existenz:* Es existiert genau ein Ringhomomorphismus $g : T \rightarrow A$ mit $g\eta_T = \tilde{\eta}$ und $g\iota_T = \tilde{\iota}$ dank Satz Y1A. Mit A kommutativ folgt $\text{Ker}(g) \supseteq \mathfrak{c}$. Somit induziert $g : T \rightarrow A$ auf dem Quotienten $S = T / \mathfrak{c}$ den ersehnten Ringhomomorphismus $f : S = T / \mathfrak{c} \rightarrow A$. Dieser erfüllt $f \circ \eta_S = \tilde{\eta}$ und $f \circ \iota_S = \tilde{\iota}$ nach Konstruktion. QED

😊 Die Konstruktion des Tensorrings $T(V)$ und daraus $S(V) = T(V) / \mathfrak{c}$ ist eine wunderschöne Übung der bisherigen Begriffe: linearer Raum, Ring, Tensorprodukt, Quotient, UAE, uvm. Es schadet dabei gar nicht, dass wir das Endergebnis schon kennen, zumindest im basierten Fall, im Gegenteil verknüpfen sich so das schwierig Neue und das altbekannt Vertraute.

Basisbeispiel: $V = \langle \mathcal{A} \rangle_R^! \implies S^n = \langle \mathcal{A}_{ab}^n \rangle_R^! \implies S = \langle \mathcal{A}_{ab}^* \rangle_R^! = R[\mathcal{A}]$.

(1) Für $V = \langle X \rangle_R^!$ erhalten wir den Polynomring $T(V) = S(V) = R[X]$ und die UAE ist der vertraute Einsetzungshomomorphismus K3D.

(2) Für $V = \langle X_1, \dots, X_n \rangle_R^!$ ist $S = R[X_1, \dots, X_n]$ der Polynomring über dem CRing R in den (kommutierenden!) Variablen $X_1, \dots, X_n$.

😊 Dahinter steckt die folgende genial-einfache Beobachtung:

Korollar Y1F: Polynomring als symmetrische Algebra

Sei R ein kommutativer Ring und $V = \langle \mathcal{A} \rangle_R^!$ ein R -linearer Raum mit Basis $\mathcal{A} \subseteq V$. Dann gilt $S^n = \langle \mathcal{A}_{ab}^n \rangle_R^!$ und $S = \langle \mathcal{A}_{ab}^* \rangle_R^! = R[\mathcal{A}]$ ist der Polynomring über R mit $\mathcal{A}$ als Menge der Variablen.

Beweis: Die symmetrische Algebra $(S, \cdot, 1, \eta, \iota)$ erfüllt die obige UAE Y1E. Der Polynomring $(R[\mathcal{A}], \cdot, 1, \tilde{\eta}, \tilde{\iota})$ ebenso (dank UAE K3D). Das induziert das Isomorphismuspaar $(f, g) : S \cong R[\mathcal{A}]$ mit $f\eta = \tilde{\eta}$ und $f\iota = \tilde{\iota}$. QED

Aufgabe: Führen Sie dieses Argument sorgsam aus.

- (1) Warum erfüllt der Polynomring $(R[\mathcal{A}], \cdot, 1, \tilde{\eta}, \tilde{\iota})$ die obige UAE Y1E?
- (2) Wie folgt daraus der ersohnte Isomorphismus $(f, g) : S \cong R[\mathcal{A}]$?
- (3) Warum zeigt dies, dass $\mathcal{A}_{ab}^*$ eine Basis von S ist, wie behauptet?

Lösung: (1) Gegeben sei ein CRinghomomorphismus $\eta : R \rightarrow A$. Für den Polynomring $R[\mathcal{A}]$ besagt seine universelle Abbildungseigenschaft K3D aka Einsetzungshomomorphismus: Wir können zu jeder Variable $x \in \mathcal{A}$ ein beliebiges Zielelement $\tilde{\iota}(x) \in A$ vorgeben (aka „einsetzen“) und erhalten so den Ringhomomorphismus $f : R[\mathcal{A}] \rightarrow A$ mit $f \circ \iota = \tilde{\iota}$. Dank der Basiseigenschaft $V = \langle \mathcal{A} \rangle_R^!$ nutzen wir zudem das Prinzip der linearen Fortsetzung (PLF N1B). So erhalten wir die obige UAE Y1E.

(2) Erfüllen zwei Objekte die UAE, so sind sie eindeutig isomorph. Das ist ein universeller Trick, siehe Eindeutigkeit des Tensorprodukts (X2D).

(3) Die Basiseigenschaft ist klar für $R[\mathcal{A}] = \langle \mathcal{A}_{ab}^* \rangle_R^!$, denn so ist der Polynomring konstruiert. Der Isomorphismus $R[\mathcal{A}] \cong S(V)$ zeigt, dass auch das Bild von $\mathcal{A}_{ab}^*$ in $S(V)$ eine Basis ist.

Beispiel: Sei $V = \langle \mathcal{A} \rangle_R^!$ mit Basis $\mathcal{A} = \{a, \dots, z\}$ etwa über $R = \mathbb{Z}$. Wir rechnen im Tensorring $T = T(V)$ bezüglich der Basis $\mathcal{A}^*$:

$$(ho)^3 = hohoho \neq ohohoh = (oh)^3$$

$$lampe \neq ampel, \text{ salat} \neq atlas \neq a^2lst, \text{ tomaten} \neq atemnot$$

$$(klim - bim)(klim + bim) = klimklim + \underbrace{klimbim - bimklim}_{\neq 0} - bim bim$$

In der symmetrischen Algebra $S = S(V)$ rechnen wir bezüglich $\mathcal{A}_{ab}^*$:

$$(ho)^3 = hohoho = ohohoh = h^3o^3 \neq (oho)^2 = h^2o^4$$

$$lampe = ampel, \text{ salat} = atlas = a^2lst, \text{ tomaten} = atemnot$$

$$(klim - bim)(klim + bim) = (klim)^2 - (bim)^2 = i^2m^2(k^2l^2 - b^2)$$

Übung: Erfinden Sie selbst möglichst diverse und amüsante Beispiele.

📌 „Im freien Monoid $(\mathcal{A}^*, *, e)$ arbeiten wir schon seit der Grundschule, frei kommutativ $(\mathcal{A}_{ab}^*, \cdot, 1)$ hingegen gilt als Lese-Rechtschreib-Störung.“ Beide Algebren sind nützlich, es kommt ganz auf die Anwendung an!

😊 Damit schließt sich der Kreis unserer Erzählung zu Polynomen. Wir erkennen nun, dass wir auf zwei Wegen dasselbe Ziel erreichen:

1 Die Polynomroute: Über dem Alphabet $\mathcal{A}$ bilden wir Wörter, kurz $\mathcal{A}^*$, und machen diese abelsch, kurz $\mathcal{A}_{ab}^* = \mathcal{A}^* / \equiv$. Diese nehmen wir als Basis des R -linearen Raums $R[\mathcal{A}] := R\mathcal{A}_{ab}^* = \langle \mathcal{A}_{ab}^* \rangle_R^!$ und definieren die Multiplikation als bilineare Fortsetzung der Multiplikation auf $\mathcal{A}_{ab}^*$.

2 Die Tensorroute: Wir nehmen das Alphabet $\mathcal{A}$ zunächst als Basis des R -linearen Raums $V = \langle \mathcal{A} \rangle_R^!$. Daraus bilden wir die Tensoralgebra $T(V)$ und machen diese kommutativ zur symmetrischen Algebra $S(V) = T(V)/\mathfrak{c}$, als Quotient bezüglich des Ideals $\mathfrak{c}$ wie oben erklärt.

Auf beiden Wegen erhalten wir „dasselbe“: eindeutig isomorphe Ringe! War einer der Wege also umsonst? O nein! Polynome liefern uns konkret eine Basis, so können wir wunderbar explizit mit Elementen rechnen. Tensoren hingegen liefern uns abstrakt eine universelle Konstruktion, die wir überall anwenden können, auch über den basierten Fall hinaus. Erfolgreiche, effiziente Mathematik verbindet abstrakt und konkret.

Sei R ein kommutativer Ring, darüber V ein zentraler R -linearer Raum.

🤔 Wie können wir den Tensorring $T = T(V)$ *antikommutativ* machen? Für alle $u, v \in V$ wollen wir $uv = -vu$ erzwingen. Dazu genügt, dass jedes Quadrat w^2 für $w \in V$ verschwindet, denn damit $uv + vu = (u + v)^2 = 0$.

$$\mathfrak{a}_2 := \langle w \otimes w \mid w \in V \rangle_R \leq V \otimes V = T^2 \subseteq T$$

Ebenso erzwingen wir Alternierung in T^n durch folgende Relationen:

$$\mathfrak{a}_n := \langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \mid u_1, \dots, u_n \in V, \exists i \neq j : u_i = u_j \rangle_R$$

Im Quotienten $\Lambda^n = T^n / \mathfrak{a}_n$ gilt $[u_{\tau_1} \otimes \cdots \otimes u_{\tau_n}] = [u_1 \otimes \cdots \otimes u_n] \text{sign}(\tau)$.

Die Summe $\mathfrak{a} := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}_n \leq T$ ist ein Ideal (L3G) in unserem Tensorring T . Erinnerung: Ideal $\mathfrak{a} \leq T$ bedeutet $0 \in \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$ und $T \cdot \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{a} \cdot T$.

Die **alternierende Algebra** $\Lambda(V)$ zu V über R ist der Quotientenring:

$$\Lambda(V) := T(V) / \mathfrak{a} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Lambda^n(V)$$

Dies ist ein Ring dank Satz L3G, zudem alternierend wie gewünscht.

Aufgabe: Vergleichen Sie die Konstruktion der alternierenden Algebra $\Lambda(V) = T(V) / \mathfrak{a}$ mit der symmetrischen Algebra $S(V) = T(V) / \mathfrak{c}$. Zeigen Sie damit nach dem Vorbild von Lemma Y1D:

Lemma Y1G: Das Ideal $\mathfrak{a} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}_n \leq T$ wird erzeugt von $\mathfrak{a}_2$.

Das Ideal $\mathfrak{a} \leq T$ wird von $\mathfrak{a}_2 \leq T^2$ erzeugt. Insbesondere gilt $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_1 = 0$. Demnach sind $\eta : R \hookrightarrow T(V) \twoheadrightarrow \Lambda(V)$ und $\iota : V \hookrightarrow T(V) \twoheadrightarrow \Lambda(V)$ injektiv. Zudem ist der Quotient $\Lambda(V) = T(V) / \mathfrak{a} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Lambda^n(V)$ selbst graduiert.

Beweis: Die Inklusion $\mathfrak{a} \supseteq (\mathfrak{a}_2)$ ist klar, denn $\mathfrak{a}$ ist ein Ideal und enthält $\mathfrak{a}_2$. Wir zeigen die Umkehrung $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a}_2)$. Im Ideal $(\mathfrak{a}_2) \leq T$ liegen zunächst alle Elemente der Form $u_1 \cdots u_{\ell-1} (u_\ell u_\ell) u_{\ell+2} \cdots u_n$ mit $u_1, \dots, u_n \in V$, und somit auch $u_1 \cdots u_{\ell-1} (u_\ell u_{\ell+1} + u_{\ell+1} u_\ell) u_{\ell+2} \cdots u_n$. Wir dürfen also zwei benachbarte Elemente tauschen und zugleich das Vorzeichen umklappen. Jede Permutation wird von elementaren Transpositionen erzeugt (O1E). Daher gilt $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a}_2)$. Die weiteren Aussagen sind klar. QED

Wie oben erinnert, alternierend impliziert immer antisymmetrisch. In Charakteristik 2 ist antisymmetrisch dasselbe wie symmetrisch, und alternierend ist eine echt stärkere Forderung.

Lemma Y1G: Antisymmetrie

Im Falle $2 \in R^\times$ ist alternierend äquivalent zu antisymmetrisch. In der obigen Konstruktion erhalten wir damit die Darstellung:

$$\mathfrak{a}_n = \langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_n - \text{sign}(\tau) u_{\tau_1} \otimes \cdots \otimes u_{\tau_n} \mid u_1, \dots, u_n \in V, \tau \in S_n \rangle_R$$

Aufgabe: Zeigen Sie diese Gleichheit als Fingerübung zur Wiederholung.

Beweis: Die Inklusion „ $\supseteq$ “ haben wir im vorigen Beweis nachgerechnet. „ $\subseteq$ “: Gegeben seien $u_1, \dots, u_n \in V$ und ein Indexpaar $i \neq j$ mit $u_i = u_j$. Wir setzen $\tau = (i, j) \in S_n$. Dann enthält die rechte Seite $\mathfrak{a}'_n$ die Differenz

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_n - \text{sign}(\tau) u_{\tau_1} \otimes \cdots \otimes u_{\tau_n} = 2 u_1 \otimes \cdots \otimes u_n.$$

Nach Division durch 2 folgt $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \in \mathfrak{a}'_n$. Das zeigt $\mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{a}'_n$. QED

Beispiel: Sei $V = \langle \mathcal{A} \rangle_R^1$ mit Basis $\mathcal{A} = \{a, \dots, z\}$. In der alternierenden Algebra $\Lambda = \Lambda(V)$ über $\mathbb{Z}$ gilt:

$$\text{lampe} = \text{ampel} = \text{palme} = p \wedge a \wedge l \wedge m \wedge e$$

$$\text{salat} = \text{atlas} = 0, \quad \text{tomaten} = \text{atemnot} = 0$$

$$\text{gabel} + \text{belag} = 0, \quad \text{kamel} = -\text{makel}, \quad \text{sarg} = \text{gras}$$

Anagramme gibt es überraschend viele, also gebräuchliche Wörter gemäß Wörterbuch, die durch eine Permutation ineinander übergehen. Hingegen sind *ungerade* Anagramme nicht ganz so leicht zu finden. Zunächst darf jeder Buchstabe nur einmal auftreten. Zudem muss die (dann eindeutige) Permutation ungerade sein. ChatBots haben damit übrigens derzeit (Stand Sommer 2026) noch arge Schwierigkeiten.

Random fun project: Wenn Sie gerne programmieren, können Sie mal versuchen, eine Liste zu erzeugen und schöne Beispiele zu extrahieren.

🤔 Wie zeigen Sie $\text{gabel} \neq \text{belag}$? und $\text{kamel} \neq \text{makel}$? und $\text{eins} \neq \text{null}$? Durch Koeffizientenvergleich? Wie das? Wir benötigen eine Basis von Λ !

Lemma Y1H: ein kanonisches Erzeugendensystem für Λ^k

Habe V die Basis $\mathcal{A} = (v_i)_{i \in I}$ geordnet mit $(I, \leq) \stackrel{\text{z.B.}}{=} \{1 < \dots < n\}$.
Dann wird $\Lambda^k(V)$ erzeugt von $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}$ mit $i_1 < \dots < i_k$ in $(I, \leq)$.

Beweis: Die Tensorpotenz $T^k = V^{\otimes k}$ hat die Produktbasis (X1D/X2C)

$$\mathcal{C}^k = (v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_k})_{i \in I^k}.$$

Der Quotient $\Lambda^k = T^k / \mathfrak{a}_k$ wird demnach erzeugt von den Bildern

$$\mathcal{B}^k = (v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k})_{i \in I^k}.$$

Solche mit doppelten Indizes sind 0. Alle anderen können wir sortieren:

$$\mathcal{A}_{<}^k := (v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k})_{i \in I_{<}^k} \quad \text{mit} \quad I_{<}^k := \{i \in I^k \mid i_1 < \dots < i_k\}$$

Ausführlich gilt $v_{i_{\tau_1}} \wedge \dots \wedge v_{i_{\tau_k}} = v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k} \text{ sign}(\tau)$ für alle $\tau \in S_k$.
Demnach erzeugt $\mathcal{A}_{<}^k$ alle Elemente von $\mathcal{B}^k$, und somit ganz Λ^k . QED

🔗 Als nächstes wollen wir zeigen, dass $\mathcal{A}_{<}^k$ eine Basis von Λ^k ist.

Sei R ein kommutativer Ring und V ein R -linearer Raum mit endlicher Basis $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$. Dann existiert genau Abbildung, die **Determinante**

$$\det_{\mathcal{A}} : V^n \rightarrow R : (u_1, \dots, u_n) \mapsto \det_{\mathcal{A}}(u_1, \dots, u_n),$$

die multilinear, alternierend und normiert ist gemäß $\det_{\mathcal{A}}(v_1, \dots, v_n) = 1$.
Da sie multilinear ist, induziert sie auf $V^{\otimes n}$ die lineare Abbildung

$$\det_{\mathcal{A}}^{\otimes} : V^{\otimes n} \rightarrow R : u_1 \otimes \dots \otimes u_n \mapsto \det_{\mathcal{A}}(u_1, \dots, u_n).$$

Da sie alternierend ist, liegt $\mathfrak{a}_n \leq V^{\otimes n}$ in ihrem Kern.

Auf dem Quotientenraum $\Lambda^n = V^{\otimes n} / \mathfrak{a}_n$ erhalten wir so

$$\det_{\mathcal{A}}^{\wedge} : \Lambda^n V \rightarrow R : u_1 \wedge \dots \wedge u_n \mapsto \det_{\mathcal{A}}(u_1, \dots, u_n).$$

Dabei gilt $\det_{\mathcal{A}}^{\wedge}(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = 1$. Insbesondere folgt $v_1 \wedge \dots \wedge v_n \neq 0$.
Das ist ein erster, entscheidender Schritt zur linearen Unabhängigkeit.

Satz Y1I: eine kanonische Basis von Λ^k

Sei $V = \langle \mathcal{A} \rangle_R^1$ ein R -linearer Raum mit Basis $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$.

(1) Die Determinante induziert den Isomorphismus

$$\det_{\mathcal{A}}^{\wedge} : \Lambda^n(V) \xrightarrow{\sim} R.$$

(2) Für alle $0 \leq k \leq n$ erhalten wir daraus die perfekte Paarung

$$\langle - | - \rangle : \Lambda^k \times \Lambda^{n-k} \rightarrow R : \langle u | v \rangle = \det_{\mathcal{A}}^{\wedge}(u \wedge v).$$

(3) Für jede Permutation $\tau \in S_n$ gilt:

$$\langle \underbrace{v_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge v_{\tau(k)}}_{=: v_{\tau}^k} \mid \underbrace{\text{sign}(\tau) v_{\tau(k+1)} \wedge \dots \wedge v_{\tau(n)}}_{=: \star v_{\tau}^k \text{ (Hodge-Stern)}} \rangle = 1$$

(4) Indiziert mit $\text{Sh}_n^k := \{\tau \in S_n \mid \tau(1) < \dots < \tau(k) \wedge \tau(k+1) < \dots < \tau(n)\}$ sind die Familien $(v_{\tau}^k)_{\tau \in \text{Sh}_n^k}$ in Λ^k und $(\star v_{\tau}^k)_{\tau \in \text{Sh}_n^k}$ in Λ^{n-k} dual, also Basen.

Beweis: (1) Dank Lemma Y1H wird $\Lambda^n(V)$ erzeugt von $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$, der Homomorphismus $\eta_{\mathcal{A}} : R \twoheadrightarrow \Lambda^n(V) : r \mapsto r v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ ist also surjektiv. Umgekehrt gilt $\det_{\mathcal{A}}^{\wedge}(r v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = r$, also $(\det_{\mathcal{A}}^{\wedge}, \eta_{\mathcal{A}}) : \Lambda^n(V) \cong R$.

(2) Die Abbildung $\langle - | - \rangle$ ist bilinear. Perfektion folgt aus (4) und W2H.

(3) Die Determinante ist multilinear, alternierend und normiert:

$$\begin{aligned} & \langle v_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge v_{\tau(k)} \mid \text{sign}(\tau) v_{\tau(k+1)} \wedge \dots \wedge v_{\tau(n)} \rangle \\ &= \text{sign}(\tau) \det_{\mathcal{A}}^{\wedge}(v_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge v_{\tau(n)}) = 1 \end{aligned}$$

(4) Dank Lemma Y1H gilt Erzeugung $\Lambda^k(V) = \langle v_{\tau}^k \mid \tau \in \text{Sh}_n^k \rangle_R$ und ebenso $\Lambda^{n-k}(V) = \langle \star v_{\tau}^k \mid \tau \in \text{Sh}_n^k \rangle_R$. Für je zwei Shuffle $\sigma, \tau \in \text{Sh}_n^k$ finden wir

$$\langle v_{\sigma}^k \mid \star v_{\tau}^k \rangle = \delta_{\sigma, \tau} := \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma = \tau, \\ 0 & \text{falls } \sigma \neq \tau. \end{cases}$$

Für $\sigma = \tau$ gilt (3). Wie gelingt uns $\sigma \neq \tau$? Aus $\sigma|_{\{1, \dots, k\}} = \tau|_{\{1, \dots, k\}}$ folgt $\sigma|_{\{k+1, \dots, n\}} = \tau|_{\{k+1, \dots, n\}}$. Zu $\sigma \neq \tau$ existieren kollidierende Indizes (i, j) mit $1 \leq i \leq k < j \leq n$ und $\sigma(i) = \tau(j)$. Daraus folgt $\langle v_{\sigma}^k \mid \star v_{\tau}^k \rangle = 0$. QED

Satz Y11: eine kanonische Basis von Λ^k

Weiterhin sei $V = \langle \mathcal{A} \rangle_R^!$ ein R -linearer Raum mit Basis $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$.

(5) Der Raum $\Lambda^k(V)$ hat dank (4) die zu $\mathcal{A}$ gehörige kanonische Basis:

$$\mathcal{A}_{<}^k := (v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k})_{i \in \{1, \dots, n\}_{<}^k}$$

(6) Die Dimension ist demnach:

$$\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}, \quad \dim \Lambda(V) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

(7) Dank PLF N1B erhalten wir den R -Isomorphismus „Hodge–Stern“:

$$\star : \Lambda^k \xrightarrow{\sim} \Lambda^{n-k} : v_{\tau}^k \mapsto \star v_{\tau}^k$$

Es gilt $(\star, \star) : \Lambda^0 \cong \Lambda^n$ mit $1 \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_n$. Allgemein für $\omega \in \Lambda^k$ folgt $\star \star \omega = \varepsilon \omega$ mit Vorzeichen $\varepsilon = (-1)^{k(n-k)}$. Für n ungerade ist $\star$ involutiv.

Übung: Rechnen Sie im obigen Satz auch die Folgerungen (5,6,7) nach!

😊 Das zeigt erneut die Symmetrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ der Binomialkoeffizienten. Vergleichen Sie mit $\mathfrak{P}_k(X) \cong \mathfrak{P}_{n-k}(X) : A \mapsto X \setminus A$ für $X = \{1, \dots, n\}$.

Korollar Y1j: kanonische Basen und explizite Dimensionen

Zum Vergleich und krönenden Abschluss, die kanonischen Basen für

- die Tensoralgebra $(T(V), \otimes, 1)$ zu $V = \langle \mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n) \rangle_R^!$,
- die alternierende Algebra $(\Lambda(V), \wedge, 1) = (\bigwedge(V), \wedge, 1)$ sowie
- die symmetrische Algebra $(S(V), \cdot, 1) = (\bigvee(V), \vee, 1) = R[\mathcal{A}]$:

$$T^k = \langle \mathcal{A}^k = (v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_k} \mid i \in \{1, \dots, n\}^k) \rangle_R^! \implies \dim T^k = n^k$$

$$\Lambda^k = \langle \mathcal{A}_{<}^k = (v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k} \mid i \in \{1, \dots, n\}_{<}^k) \rangle_R^! \implies \dim \Lambda^k = \binom{n}{k}$$

$$S^k = \langle \mathcal{A}_{\leq}^k = (v_{i_1} \vee \dots \vee v_{i_k} \mid i \in \{1, \dots, n\}_{\leq}^k) \rangle_R^! \implies \dim S^k = \binom{n+k-1}{k}$$

Übung: Wiederholen Sie die Konstruktion von T und S und Λ .

Wie folgen daraus die hier behaupteten Basen und Dimensionen?

😊 Freuen Sie sich über Ihre kombinatorischen Grundlagen der LinA1!

♦ **Satz H21:** die Anzahl monotoner k -Tupel in $\{1, \dots, n\}$

Seien $n, k \in \mathbb{N}$. (1) Für strikt monotone k -Tupel in $\{1, \dots, n\}$ gilt:

$$I = \{1, \dots, n\}_{<}^k = \{(i_1 < i_2 < \dots < i_k) \in \{1, \dots, n\}^k\} \implies \#I = \binom{n}{k}$$

Beispiel: $\#\{(a < b < c) \in \{1, \dots, 7\}^3\} = \binom{7}{3} = 35$

(2) Für schwach monotone k -Tupel in $\{1, \dots, n\}$ hingegen gilt:

$$J = \{1, \dots, n\}_{\leq}^k = \{(j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k) \in \{1, \dots, n\}^k\} \implies \#J = \binom{n+k-1}{k}$$

Beispiel: $\#\{(a \leq b \leq c) \in \{1, \dots, 7\}^3\} = \binom{9}{3} = 84$

Beweis: Wir nutzen geschickt Bijektionen, die wir wie folgt konstruieren:

$$(v, u) : \{1, \dots, n\}_{<}^k \cong \mathfrak{P}_k(\{1, \dots, n\})$$

$$(i_1 < i_2 < \dots < i_k) \mapsto \{i_1, i_2, \dots, i_k\}^!$$

$$(s, t) : \{1, \dots, n\}_{\leq}^k \cong \{1, \dots, n+k-1\}_{<}^k$$

$$(j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k) \mapsto (j_1 + 0 < j_2 + 1 < \dots < j_k + k - 1)$$

Dank H2j erhalten wir daraus bequem die ersehnten Anzahlen.

QED

Konvention: Wir nutzen folgende elegante Schreibweisen:

$$\{a_1, a_2, \dots, a_k\}^! = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \text{ mit } a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_k)^! = (a_1, a_2, \dots, a_k) \text{ mit } a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j$$

$$\{a_1 < a_2 < \dots < a_k\} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \text{ mit } a_1 < a_2 < \dots < a_k$$

$$(a_1 < a_2 < \dots < a_k) = (a_1, a_2, \dots, a_k) \text{ mit } a_1 < a_2 < \dots < a_k$$

Übung: Sind (v, u) und (s, t) wirklich Bijektionen? Führen Sie dies aus!

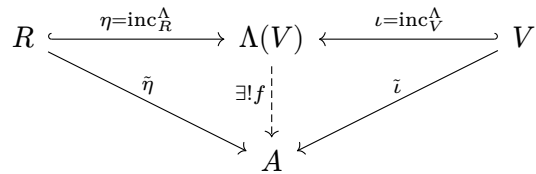
(1) Hier bedeutet v vergessen der Reihenfolge, umgekehrt u sortieren,

(2) ebenso s auseinanderschieben, umgekehrt t zusammenschieben.

(3) Wie viele Elemente hat $\{(a_1 \leq a_2 < a_3 \leq a_4) \in \{1, \dots, 7\}^4\}$?

😊 Die Nutzung von Mengen und Bijektion macht alles wunderbar klar und einfach. Ohne präzise Werkzeuge bleibt nur vages Händefuchteln, dann muss es eben rein anschaulich reichen. Solch raffiniert graphische Darstellung heißt „stars and bars“ oder „sticks and stones“ oder „dots and dividers“. Siehe hierzu en.wikipedia.org/wiki/Multiset#Counting_multisets.

O wie effizient und elegant sind doch Bijektionen!



Satz Y1k: Die Algebra $\Lambda = \Lambda(V)$ ist frei alternierend zu V über R .

(0) Zu jedem zentralen Bimodul V über dem kommutativen Ring R ist $(\Lambda, \wedge, 1, \eta, \iota)$ ein Ring $(\Lambda, \wedge, 1)$ mit Ringhomomorphismus $\eta : R \hookrightarrow \Lambda$ und R -linearer Einbettung $\iota : V \hookrightarrow \Lambda$ mit $u \wedge u = 0$ für alle $u \in V$.

(1) Sei $(A, \cdot, 1, \tilde{\eta}, \tilde{\iota})$ ein Ring $(A, \cdot, 1)$ mit Ringhomomorphismus $\tilde{\eta} : R \rightarrow A$ und R -linearer Abbildung $\tilde{\iota} : V \rightarrow A$ mit $\tilde{\iota}(u)^2 = 0$ für alle $u \in V$. Dank $\tilde{\eta}$ wird auch A ein zentraler R -Bimodul; für alle $u \in V$ und $r \in R$ gilt also $\tilde{\iota}(ru) = \tilde{\eta}(r)\tilde{\iota}(u)$. Dazu existiert genau ein Ringhomomorphismus $f : \Lambda \rightarrow A$ mit $f \circ \eta = \tilde{\eta}$ und $f \circ \iota = \tilde{\iota}$, nämlich

$$f(r \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = \tilde{\eta}(r) \cdot \tilde{\iota}(v_1) \cdots \tilde{\iota}(v_k).$$

Aufgabe: Was genau ist für Satz Y1k zu zeigen? Zeigen Sie es! Wie nutzen Sie geschickt den Tensorring $T = T(V)$ und seine UAE Y1A?

Beweis: Aussage (0) fasst unsere vorige Konstruktion zusammen.

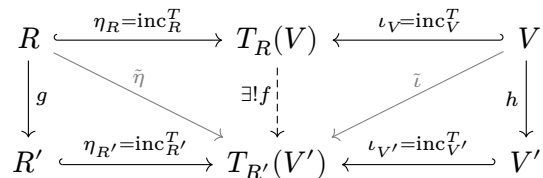
(1a) *Eindeutigkeit:* Jede zwei solche Ringhomomorphismen $f, f' : \Lambda \rightarrow A$ sind gleich auf R dank $f\eta = \tilde{\eta} = f'\eta$ und auf V dank $f\iota = \tilde{\iota} = f'\iota$, per Induktion multiplikativ auf Λ^n und additiv auf $\Lambda = \bigoplus_n \Lambda^n$.

(1b) *Existenz:* Es existiert genau ein Ringhomomorphismus $g : T \rightarrow A$ mit $g\eta_T = \tilde{\eta}$ und $g\iota_T = \tilde{\iota}$ dank Satz Y1A. Mit $\tilde{\iota}(u)^2 = 0$ für alle $u \in V$ folgt $\text{Ker}(g) \supseteq \mathfrak{a}$. Somit induziert $g : T \rightarrow A$ auf dem Quotienten $\Lambda = T/\mathfrak{a}$ den ersehnten Ringhomomorphismus $f : \Lambda = T/\mathfrak{a} \rightarrow A$. Dieser erfüllt $f \circ \eta_\Lambda = \tilde{\eta}$ und $f \circ \iota_\Lambda = \tilde{\iota}$ nach Konstruktion. QED

Aufgabe: Die Konstruktion der Tensoralgebra $T_R(V)$ und $S_R(V)$ und $\Lambda_R(V)$ hängt sowohl vom Ring R als auch dem R -linearen Raum V ab. Wie verträgt sich das mit Homomorphismen des Paares (R, V) ? Folgern Sie dies jeweils aus der universellen Eigenschaft.

Funktorialität dank UAE

Y139
Erläuterung



Korollar Y1L: Funktorialität von T und S und Λ

Sei $g : R \rightarrow R'$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe, darüber V ein R -linearer Raum und V' ein R' -linearer Raum, via g somit auch ein R -linearer Raum, und $h : V \rightarrow V'$ eine R -lineare Abbildung.

(1) Dank UAE Y1A existiert zu (g, h) genau ein Ringhomomorphismus $T_g(h) := f : T_R(V) \rightarrow T_{R'}(V')$ mit $f \circ \eta_R = \eta_{R'} \circ g$ und $f \circ \iota_V = \iota_{V'} \circ h$. Es folgt (1a) $T_{\text{id}_R}(\text{id}_V) = \text{id}_{T_R(V)}$ und (1b) $T_{g' \circ g}(h' \circ h) = T_{g'}(h') \circ T_g(h)$.

(2) Gleiches gilt für $S_g(h) : S_R(V) \rightarrow S_{R'}(V')$ dank UAE Y1E

(3) und ebenso für $\Lambda_g(h) : \Lambda_R(V) \rightarrow \Lambda_{R'}(V')$ dank UAE Y1K.

Aufgabe: Folgern Sie dies jeweils aus der universellen Eigenschaft.

Funktorialität nützt sofort.

Y140
Erläuterung

🔄 Für $V = \langle \mathcal{A} \rangle_R^!$ mit endlicher Basis $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ kennen wir die kanonische Basis von $\Lambda^k(V)$ aus Korollar Y1J. Was passiert allgemein?

Satz Y1M: kanonische Basis von $\Lambda^k(V)$, auch unendliche Dimension

Sei R ein kommutativer Ring, darüber V ein R -linearer Raum mit Basis $\mathcal{A} = (v_i)_{i \in I}$ über einer geordneten Menge $(I, \leq)$. Dann hat $\Lambda^k = \Lambda^k(V)$ die Basis $\mathcal{A}_{<}^k = (v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k} \mid i \in I_{<}^k)$ mit $I_{<}^k = \{i \in I^k \mid i_1 < \dots < i_k\}$.

Aufgabe: Beweisen Sie dies. Wie nutzen Sie geschickt den endlichen Fall?

Beweis: (1) Die Familie $\mathcal{A}_{<}^k$ erzeugt Λ^k wie in Lemma Y1H erklärt.

(2) Lineare Unabhängigkeit haben wir oben nur für I endlich bewiesen. Zu $J \subseteq I$ endlich ist $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in J}$ die Basis des Teilraums $U = \langle (v_i)_{i \in J} \rangle_R^!$ in V . Die Summe $V = U \oplus U'$ liefert die Inklusion-Retraktion $U \hookrightarrow V$ und fortgesetzt $\Lambda(U) \hookrightarrow \Lambda(V)$ dank Funktorialität. Demnach ist die Basis $\mathcal{B}_{<}^k$ von $\Lambda^k(U)$ ebenso linear unabhängig in $\Lambda^k(V)$. Somit ist die gesamte Familie $\mathcal{A}_{<}^k$ linear unabhängig, denn jede endliche Teilfamilie ist es. QED

Wir haben die alternierende Algebra $\Lambda(V)$ vorrangig für $V = \langle \mathcal{A} \rangle_R^!$ mit endlicher Basis $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ untersucht (Satz Y1I). Hier sind alle Argumente und die Kombinatorik am schönsten! In der Vorlesung wurde ich gefragt, ob und wie wir die Konstruktion auf eine *unendliche* Basis $\mathcal{A}$ ausdehnen können. Eine erste mögliche Antwort ist der vorige Satz Y1M, der dank Einbettung und Retraktion auf den endlichen Fall rekurriert.

🤔 Geht das noch einfacher? direkter? schöner? gar lehrreicher? Wie versprochen biete ich hier ein zweiten, unabhängigen Beweis. Er bringt eine weitere genial-einfache natürliche Paarung ins Spiel.

😊 Das hat den zusätzlichen Vorteil, den natürlichen Isomorphismus $\Lambda^k(V^*) \cong \Lambda^k(V)^*$ zu konstruieren, der uns in vielen Anwendungen willkommen ist, etwa für Differentialformen im nächsten Abschnitt.

😊 Wir freuen uns, dass die Determinante hier in ihrem natürlichen Habitat auftritt und für uns weiterhin wohltuend wirkt und waltet. Diese allgemeine Technik können wir vielerorts erneut anwenden: Integration und De Rahm-Kohomologie, Auswertung und Dualität, ...

Die Auswertung $\langle - | - \rangle : V^* \times V \rightarrow R : (\varphi, v) \mapsto \varphi(v)$ erweitern wir so: Wir nennen $v \in \Lambda^k(V)$ einen **k -Vektor** und $\varphi \in \Lambda^k(V^*)$ eine **k -Form**.

Satz Y1N: die Paarung $\Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k(V) \rightarrow R$

(1) Sei R ein kommutativer Ring und V ein zentraler R -linearer Raum. Dann existiert in jedem Grad $k \in \mathbb{N}$ genau eine bilineare Abbildung

$$\langle - | - \rangle : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k(V) \rightarrow R : \langle \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k | v_1 \wedge \dots \wedge v_k \rangle = \det(\varphi_i(v_j))_{ij} = \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1) & \dots & \varphi_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \dots & \varphi_k(v_k) \end{vmatrix}.$$

(2) Habe V die Basis $\mathcal{A} = (v_i)_{i \in I}$ geordnet mit $(I, \leq) \stackrel{\text{z.B.}}{=} \{1 < \dots < n\}$. Dazu erhalten wir die duale Familie $\mathcal{B} = (v_i^*)_{i \in I}$ in V^* gemäß Satz W1H. Dann sind auch die Familien $\mathcal{A}_{<}^k$ in $\Lambda^k(V)$ und $\mathcal{B}_{<}^k$ in $\Lambda^k(V^*)$ dual gemäß

$$\langle v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^* | v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_k} \rangle = \delta_{i,j}$$

für alle $i, j \in I_{<}^k$. Demnach ist $\mathcal{A}_{<}^k$ frei, also eine Basis von $\Lambda^k(V)$.

Aufgabe: (1) Warum ist $\langle - | - \rangle$ wohldefiniert?
(2) Wie folgt damit die behauptete Dualität?

Beweis: (1) Wir beginnen, wie immer vorsichtig, mit der Abbildung

$$\langle\langle - | - \rangle\rangle : (V^*)^k \times V^k \rightarrow R : \langle\langle (\varphi_1, \dots, \varphi_k) | (v_1, \dots, v_k) \rangle\rangle := \det(\varphi_i(v_j))_{ij} = \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1) & \dots & \varphi_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \dots & \varphi_k(v_k) \end{vmatrix}.$$

Die Abbildung $\langle\langle - | - \rangle\rangle$ ist multilinear und alternierend in den Vektoren $(v_1, \dots, v_k)$, denn die Determinante ist dies in den Spalten. Ebenso ist $\langle\langle - | - \rangle\rangle$ multilinear und alternierend in den Linearformen $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$, denn die Determinante ist dies in den Zeilen. Somit existiert genau eine bilineare Abbildung $\langle - | - \rangle : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k(V) \rightarrow R$ wie angegeben mit

$$\langle \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k | v_1 \wedge \dots \wedge v_k \rangle = \det(\varphi_i(v_j))_{ij}.$$

Existenz folgt aus der UAE für $\Lambda^k(V)$ und für $\Lambda^k(V^*)$. Eindeutigkeit folgt aus der Tatsache, dass die einfachen Tensoren alle Tensoren erzeugen.

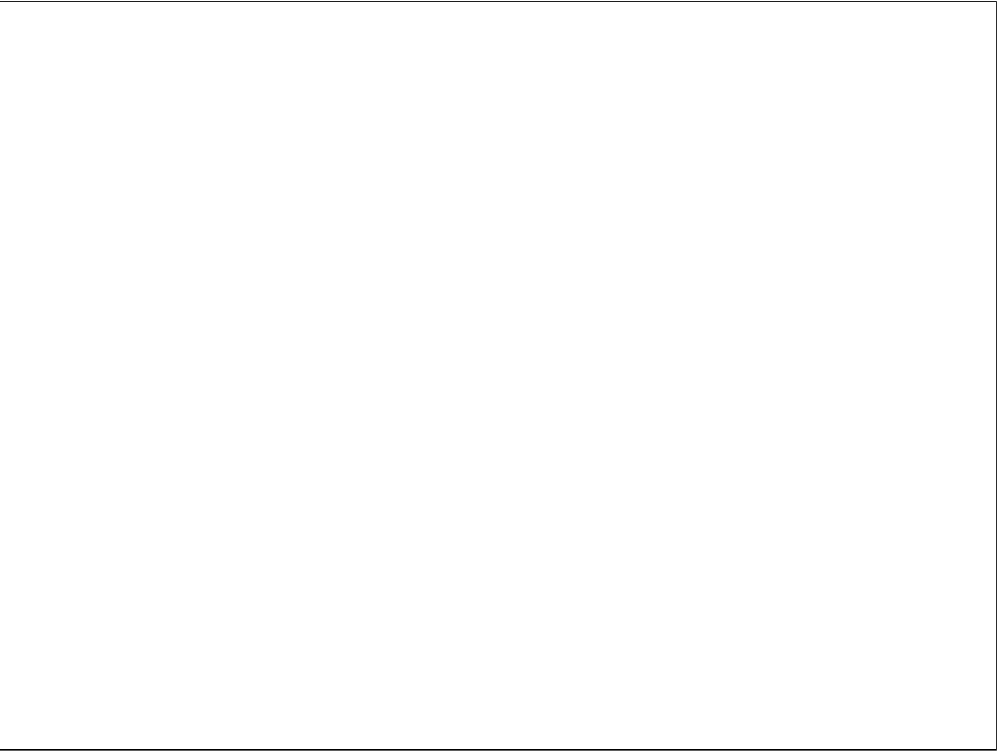
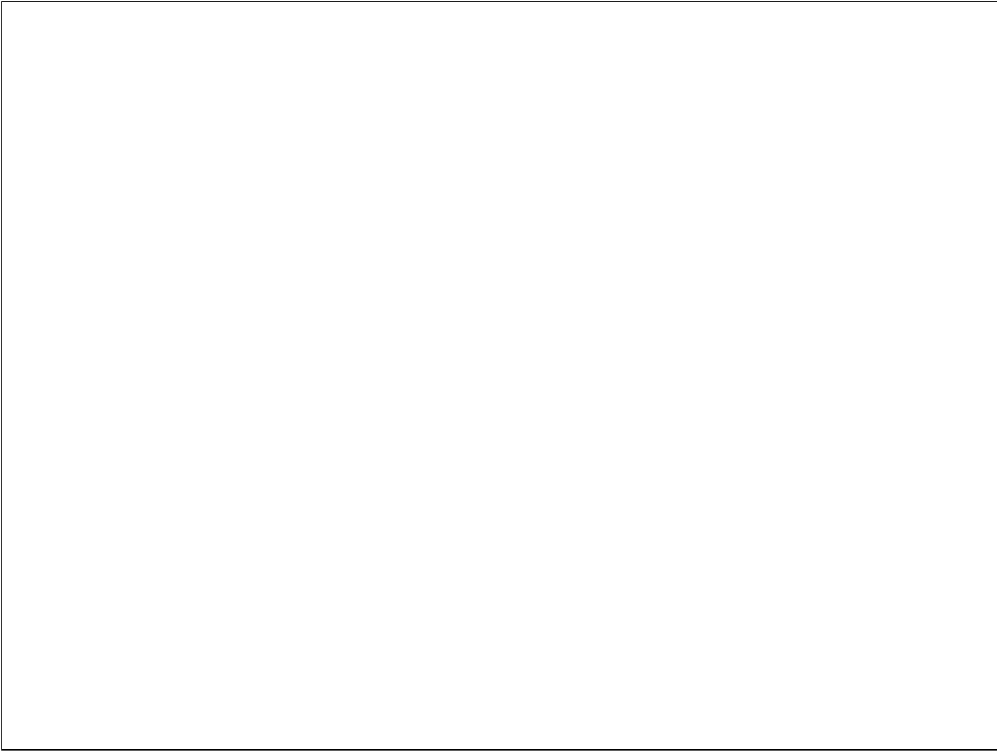
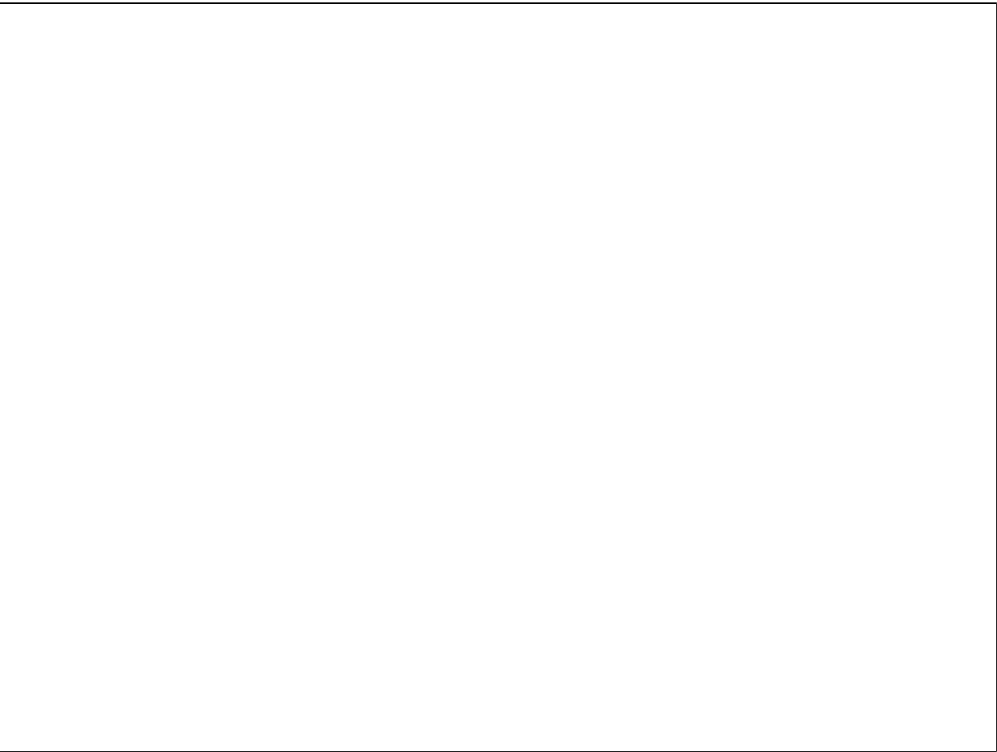
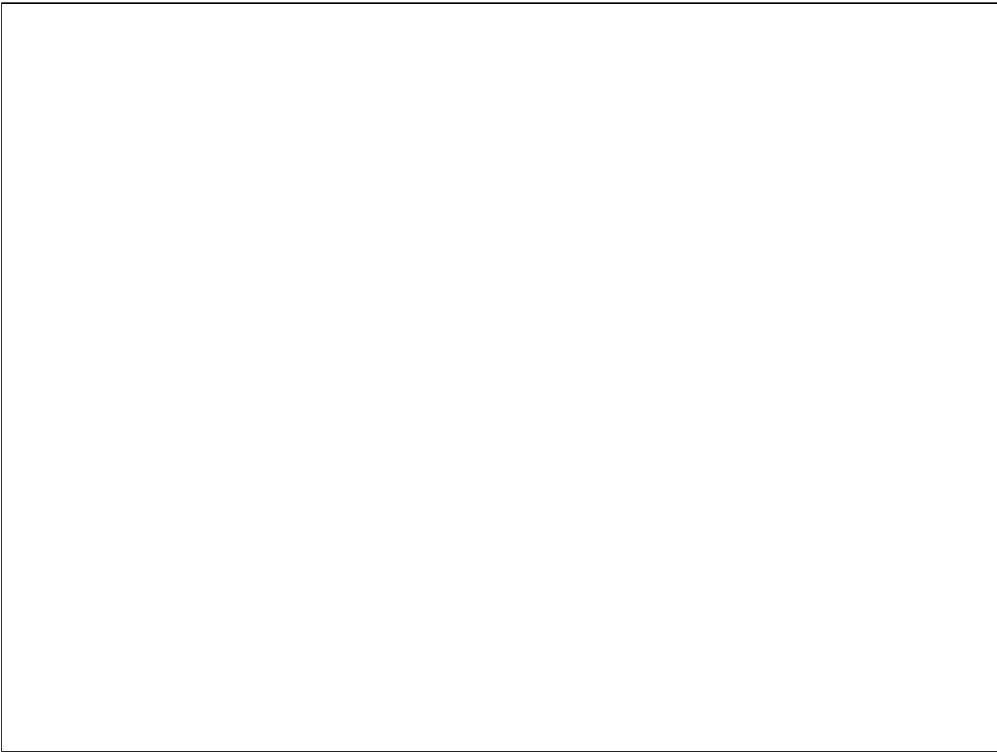
(2) Zur Dualität betrachten wir $i, j \in I_{<}^k$ und die zugehörige Auswertung:

$$\langle v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^* | v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_k} \rangle = \begin{vmatrix} v_{i_1}^*(v_{j_1}) & \dots & v_{i_1}^*(v_{j_k}) \\ \vdots & & \vdots \\ v_{i_k}^*(v_{j_1}) & \dots & v_{i_k}^*(v_{j_k}) \end{vmatrix}.$$

Für $i = j$ steht rechts die Einheitsmatrix, somit die Determinante 1. Für $i \neq j$ gibt es ein $j_\ell \notin \{i_1, \dots, i_k\}$. Damit ist die ℓ -te Spalte gleich Null, und so verschwindet die Determinante. (Ebenso existiert eine Nullzeile.)

Daher sind die Familien $\mathcal{A}_{<}^k$ in $\Lambda^k(V)$ und $\mathcal{B}_{<}^k$ in $\Lambda^k(V^*)$ dual zueinander und bezeugen somit gegenseitig ihre lineare Unabhängigkeit (Satz W1D). Dank Lemma Y1H erzeugt $\mathcal{A}_{<}^k$ den Raum $\Lambda^k(V)$, ist also eine Basis. **QED**

Zusatz: Dank obiger Dualität ist auch $\mathcal{B}_{<}^k$ linear unabhängig in $\Lambda^k(V^*)$. Ist I endlich, so ist $\mathcal{B}$ eine Basis des Dualraums V^* (Satz W1H). Dank Lemma Y1H erzeugt $\mathcal{B}_{<}^k$ den Raum $\Lambda^k(V^*)$, ist also ebenfalls eine Basis. Nur in diesem Falle ist $\langle - | - \rangle$ eine perfekte Paarung (Satz W2H).

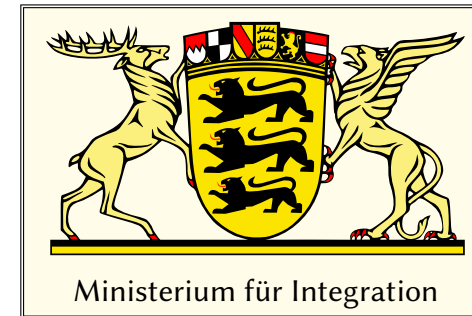


Die Tensoralgebra $T(V)$ wird vielseitig genutzt, insbesondere die daraus gewonnene symmetrische Algebra $S(V)$ und alternierende Algebra $\Lambda(V)$:

- 1 Algebra: Determinante, Invarianten, Darstellungen
- 2 Analysis: Differential- und Integralrechnung
- 3 Geometrie: Integralsätze, deRham-Kohomologie
- 4 Kombinatorik: Simplicialkomplexe, Ko/Homologie
- 5 Analytische Mechanik, symplektisch nach Hamilton
- 6 Klassisch: Elektromagnetismus, Relativitätstheorie, uvm.
- 7 Quantisch: Zustandsraum für Bosonen und Fermionen

Ich skizziere im Folgenden eine spektakuläre Anwendung, die mich selbst als Student tief beeindruckt hat, zunächst als pragmatisches Werkzeug in physikalischen Anwendungen, dann nochmal gründlich in der Analysis, später vielerorts in der Geometrie: der Kalkül der Differentialformen!

Differenzieren ist Handwerk,
Integrieren ist Kunst.



Das Land Baden-Württemberg hatte von 2011 bis 2016 ein Ministerium für Integration. Den Aufgabenbereich Migration und Integration teilten sich danach bis 2021 das Innen- und das Sozialministerium, seit 2021 das Justiz- und das Sozialministerium. Integration bleibt ein wichtiges Thema. Wir leisten in der Linearen Algebra unseren Beitrag.

Satz Y2A: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. (1) Dann ist f integrierbar. Die Integralfunktion

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_{t=a}^x f(t) dt$$

ist differenzierbar und erfüllt $F' = f$. (2) Ist umgekehrt $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu f , also differenzierbar mit $F' = f$, so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = [F]_a^b \quad \text{mit} \quad [F]_a^b := F(b) - F(a).$$

Beide Richtungen sind nützlich. Einfache Anwendungsbeispiele:

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{\pi} \sin x \, dx &\stackrel{\text{HDI}}{=} \stackrel{(2)}{=} [-\cos x]_{x=0}^{\pi} \stackrel{\text{Trig}}{=} 1 - (-1) \stackrel{\mathbb{R}}{=} 2 \\ \int_{x=0}^{\pi} x \sin x \, dx &\stackrel{\text{HDI}}{=} \stackrel{(2)}{=} [\sin x - x \cos x]_{x=0}^{\pi} \stackrel{\text{Trig}}{=} \pi - 0 \stackrel{\mathbb{R}}{=} \pi \end{aligned}$$

Wir zelebrieren den zweiten Teil des Hauptsatzes nochmals ausführlich:

$$\begin{aligned} \int_a^b F'(x) \, dx &\stackrel{\text{HDI}}{=} F(b) - F(a) \\ \langle M | dF \rangle &= \langle \partial M | F \rangle \end{aligned}$$

Hier ist $M = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, mit $a \leq b$ in $\mathbb{R}$, also kompakt. Sein Rand $\partial M = -e_a + e_b$ besteht aus den beiden Punkten a und b , wobei wir den Zielpunkt b positiv gewichten, jedoch den Startpunkt a negativ. Auf M sei $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung F' . Dann gilt:

HDI: Das eindimensionale Integral von dF über M ist gleich der nulldimensionalen Auswertung von F auf dem Rand ∂M .

- 🤔 Wir wollen den Hauptsatz auf *beliebige* Dimension verallgemeinern. Schon passende Gleichungen zu *vermuten*, ist keineswegs offensichtlich! Wir führen dazu im Folgenden den Kalkül der Differentialformen aus.
- 😊 Die alternierende Algebra übernimmt für uns die Buchführung.

Wir arbeiten über dem Körper $\mathbb{R}$ im vertrauten Koordinatenraum

$$V = \mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

mit Standardbasis $e_1, \dots, e_n \in V$ und dualer Basis $e_1^*, \dots, e_n^* \in V^*$. Notation:

$$dx_i := e_i^* : V \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto dx_i(u) = u_i$$

Wir nennen $v \in \Lambda^k(V)$ einen **k -Vektor** und $\varphi \in \Lambda^k(V^*)$ eine **k -Form**.

Die **Auswertung** $\langle - | - \rangle : V^* \times V \rightarrow \mathbb{R} : (\varphi, v) \mapsto \varphi(v)$ erweitern wir zu

$$\langle - | - \rangle : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k(V) \rightarrow \mathbb{R} : (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) := \det(\varphi_i(v_j))_{ij} = \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1) & \dots & \varphi_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \dots & \varphi_k(v_k) \end{vmatrix}$$

für alle 1-Formen $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$ und alle 1-Vektoren $v_1, \dots, v_k \in V$.

Übung: Die Abbildung $\langle - | - \rangle$ ist wohldefiniert und eine perfekte Paarung, denn die kanonischen Basen von $\Lambda^k(V^*)$ und $\Lambda^k(V)$ sind dual. (Y1N) Das stiftet den natürlichen Isomorphismus $\Lambda^k(V^*) \cong \Lambda^k(V)^*$. (W2H)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ein **1-Vektorfeld** auf U ist eine $\mathcal{C}^p$ -Abbildung

$$f : U \rightarrow V = \mathbb{R}^n : x \mapsto f(x) = f_1(x) e_1 + \dots + f_n(x) e_n.$$

Ein **1-Formfeld** (oder 1-Kovektorfeld) ist eine $\mathcal{C}^p$ -Abbildung

$$\omega : U \rightarrow V^* : x \mapsto \omega(x) = \omega_1(x) dx_1 + \dots + \omega_n(x) dx_n.$$

Die **Auswertung** von ω auf f ist demnach die $\mathcal{C}^p$ -Funktion

$$\omega(f) : U \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \langle \omega(x) | f(x) \rangle = \omega_1(x) f_1(x) + \dots + \omega_n(x) f_n(x).$$

Jedem Punkt $x \in U$ wird ein Vektor $f(x) \in V = \mathbb{R}^n$ bzw. ein Kovektor $\omega(x) \in V^*$ zugeordnet. Die Zuordnung soll stetig sein in x , wir sagen dazu kurz $\mathcal{C}^0$. Um p -mal ableiten zu können, fordern wir ein $\mathcal{C}^p$ -Feld mit $p \in \mathbb{N}$, das heißt, alle Koordinatenfunktionen $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\omega_1, \dots, \omega_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ sollen mindestens p -mal stetig differenzierbar sein.

Oft genügt uns bereits $p = 1$ oder $p = 2$. Zur Vereinfachung betrachtet man gern **glatte** Funktionen, also beliebig oft differenzierbar, kurz $\mathcal{C}^\infty$.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ein **k -Vektorfeld** auf U ist eine $\mathcal{C}^p$ -Abbildung

$$f : U \rightarrow \Lambda^k(V) : x \mapsto f(x) = \sum_{i \in I_{<}^k} f_i(x) e_i$$

mit der kanonischen Basis $(e_i = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k})_{i \in I_{<}^k}$ und $I_{<}^k = \{1, \dots, n\}_{<}^k$.

Ein **k -Formfeld** (oder k -Kovektorfeld) ist eine $\mathcal{C}^p$ -Abbildung

$$\omega : U \rightarrow \Lambda^k(V^*) : x \mapsto \omega(x) = \sum_{i \in I_{<}^k} \omega_i(x) dx_i$$

mit der dualen Basis $(dx_i = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_{i \in I_{<}^k}$ und $I_{<}^k := \{1, \dots, n\}_{<}^k$.

Die **Auswertung** von ω auf f ist dann die $\mathcal{C}^p$ -Funktion

$$\omega(f) : U \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \langle \omega(x) | f(x) \rangle = \sum_{i \in I_{<}^k} \omega_i(x) f_i(x).$$

Statt k -Vektorfeld sagen wir kurz **k -Feld**. Statt k -Formfeld sagen wir kurz **k -Form**. Wir können also k -Formen auf k -Feldern auswerten.

Anschaulich spannt $f = f_{ij} x_i \wedge x_j$ mit $i < j$ die i - j -Ebene auf, und $f_{ij}(x)$ ist die Feldstärke im Punkt $x \in U$. Dual dazu misst $\omega = \omega_{ij} dx_i \wedge dx_j$ diese Feldstärke mit Empfindlichkeit ω_{ij} . Das ergibt $\omega(f) : x \mapsto \omega_{ij}(x) f_{ij}(x)$.

Der Vektorraum aller glatten k -Formfelder auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$\Omega^k = \Omega^k(U) := \mathcal{C}^\infty(U, \Lambda^k(V^*)).$$

Die **Ableitung** des 0-Formfelds $\omega : U \rightarrow \Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}$ ist das 1-Formfeld

$$d\omega := (\partial_1 \omega) dx_1 + \dots + (\partial_n \omega) dx_n.$$

Damit definieren wir allgemein die (äußere) **Ableitung**:

$$d : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1} : \sum_{i \in I_{<}^k} \omega_i dx_i \mapsto \sum_{i \in I_{<}^k} d\omega_i \wedge dx_i$$

😊 Bequem nutzen wir für $\Lambda^k(V^*)$ weiterhin die kanonische Basis $(e_i = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k})_{i \in I_{<}^k}$ und $I_{<}^k = \{1, \dots, n\}_{<}^k$. Ausgeschrieben heißt das:

$$d(\sum_{i \in I_{<}^k} \omega_i dx_i) = \sum_{i \in I_{<}^k} \sum_{j=1}^n (\partial_j \omega_i) dx_j \wedge dx_i$$

😊 Die alternierende Algebra übernimmt für uns die Buchführung.

😊 Erstes Wunder: Das Endergebnis ist basisunabhängig!

$$0 \longrightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow[\text{grad}]{d} \Omega^1(U) \xrightarrow[\text{rot}]{d} \Omega^2(U) \longrightarrow 0$$

$$f \longmapsto df, \quad g \longmapsto dg$$

Aufgabe: Schreiben Sie dies aus für $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Was ist $d \circ d$?

Lösung: Für jede glatte Funktion / 0-Formfeld $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ finden wir:

$$df = (\partial_1 f) dx_1 + (\partial_2 f) dx_2 \quad \text{😊 Gradient!}$$

Für jedes 1-Formfeld $g = g_1 dx_1 + g_2 dx_2$ finden wir:

$$\begin{aligned} dg &= +(\partial_1 g_1) dx_1 \wedge dx_1 + (\partial_2 g_1) dx_2 \wedge dx_1 \\ &\quad + (\partial_1 g_2) dx_1 \wedge dx_2 + (\partial_2 g_2) dx_2 \wedge dx_2 \\ &= (\partial_1 g_2 - \partial_2 g_1) dx_1 \wedge dx_2 \quad \text{😊 Rotation!} \end{aligned}$$

Was ergibt die Komposition? Die Rotation des Gradienten ist... Null!

$$ddf = (\partial_1 \partial_2 f - \partial_2 \partial_1 f) dx_1 \wedge dx_2 = 0$$

😊 Richtige Vorzeichen führen wie durch Zauberhand zur Auslöschung!

😊 Analysis: Der Satz von Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) garantiert $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ für jede $\mathcal{C}^2$ -Funktion $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$.

😊 Wir sehen: df entspricht $\text{grad } f = \nabla f$, und dg entspricht $\text{rot } \vec{g} = \nabla \times \vec{g}$:

$$\text{grad } f = \nabla f = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \end{bmatrix}$$

$$\text{rot } \vec{g} = \nabla \times \vec{g} = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1$$

😊 Die alternierende Algebra übernimmt für uns die Buchführung. Zweites Wunder: Die Vorzeichen sind nicht nur ästhetisch gewählt, sondern führen uns direkt zu $d \circ d = 0$ dank paarweiser Auslöschung.

🤔 Wir haben dies zunächst im einfachsten Spezialfall ausgeschrieben. Der allgemeine Fall gelingt uns genauso, alles ist bereits eingerichtet, wir müssen lediglich die unvermeidliche Indexschlacht sorgsam organisieren. Um noch etwas mehr Zutrauen zu gewinnen, rechnen wir die Ableitung noch im dreidimensionalen Fall nach und entdecken weiter Erfreuliches.

$$0 \longrightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow[\text{grad}]{d} \Omega^1(U) \xrightarrow[\text{rot}]{d} \Omega^2(U) \xrightarrow[\text{div}]{d} \Omega^3(U) \longrightarrow 0$$

$$f \longmapsto df, \quad g \longmapsto dg, \quad h \longmapsto dh$$

Aufgabe: Schreiben Sie dies aus für $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Was ist $d \circ d$?

Lösung: Für jede glatte Funktion / 0-Formfeld $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ finden wir:

$$df = (\partial_1 f) dx_1 + (\partial_2 f) dx_2 + (\partial_3 f) dx_3 \quad \text{😊 Gradient!}$$

Für jedes 1-Formfeld $g = g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + g_3 dx_3$ finden wir:

$$\begin{aligned} dg &= +(\partial_2 g_3 - \partial_3 g_2) dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + (\partial_3 g_1 - \partial_1 g_3) dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + (\partial_1 g_2 - \partial_2 g_1) dx_1 \wedge dx_2 \quad \text{😊 Rotation!} \end{aligned}$$

Für jedes 2-Formfeld $h = h_1 dx_2 \wedge dx_3 + h_2 dx_3 \wedge dx_1 + h_3 dx_1 \wedge dx_2$:

$$dh = (\partial_1 h_1 + \partial_2 h_2 + \partial_3 h_3) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \quad \text{😊 Divergenz!}$$

Richtige Vorzeichen sortieren alles wie durch Zauberhand!

Wir nutzen hier für dg ausnahmsweise nicht die kanonische Basis

$$(dx_i \wedge dx_j)_{i < j} = (dx_1 \wedge dx_2, dx_1 \wedge dx_3, dx_2 \wedge dx_3),$$

sondern geometrisch anschaulich das Hodge-Dual von (dx_1, dx_2, dx_3) :

$$(\star dx_1 = dx_2 \wedge dx_3, \star dx_2 = dx_3 \wedge dx_1, \star dx_3 = dx_1 \wedge dx_2).$$

In dieser Vektorschreibweise erkennen wir die vertraute Rotation:

$$\text{rot } \vec{g} = \nabla \times \vec{g} = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_2 g_3 - \partial_3 g_2 \\ \partial_3 g_1 - \partial_1 g_3 \\ \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 \end{bmatrix}$$

😊 Ebenso: df entspricht $\text{grad } f = \nabla f$, und dh entspricht $\text{div } \vec{h} = \nabla \cdot \vec{h}$.

⚠ Als Besonderheit in Dimension $n = 3$ nutzen wir das Kreuzprodukt.

😊 Mit Differentialformen gelingt dies einheitlich in jeder Dimension n .

Was ergibt die Komposition? Wir finden $d \circ d = 0$. Rechnen Sie es nach! Die Rotation des Gradienten ist Null. Die Divergenz der Rotation ist Null.

$$\langle \alpha | \varphi \rangle = \int_{\alpha} f(x) \cdot dx := \int_{t=0}^1 f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt$$

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und darauf $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^0$ -Vektorfeld. Dual hierzu definiert f das 1-Formfeld $\varphi = f \cdot dx$, ausgeschrieben in Dimension $n = 2$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, \quad dx = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi = f(x) \cdot dx = f_1(x) dx_1 + f_2(x) dx_2 \stackrel{\mathcal{C}^\infty}{\in} \Omega^1(U)$$

Sei $\alpha: [0, 1] \rightarrow U$ ein $\mathcal{C}^1$ -Weg. Diesen setzen wir in das 1-Formfeld φ ein:

$$x = \alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{dx}{dt} = \alpha'(t) = \begin{pmatrix} \alpha'_1(t) \\ \alpha'_2(t) \end{pmatrix}, \quad dx = \alpha'(t) dt$$

$$f(x) \cdot dx = f_1(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \alpha'_1(t) dt + f_2(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \alpha'_2(t) dt$$

Darüber können wir nun integrieren, wie in $\int_{t=0}^1 \varphi(\alpha)$ expliziert.

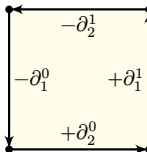
Physikalische Interpretation dank anschaulicher Infinitesimalrechnung:
In jedem Punkt $x \in U$ ist $f(x) \in \mathbb{R}^n$ die Kraft. Unser Weg α durchläuft $x = \alpha(t)$ mit Geschwindigkeit $\alpha'(t)$. In der Zeit von t bis $t + dt$ legt er die Strecke von x bis $x + dx$ zurück, also die Verschiebung $dx = \alpha'(t) dt$. Dabei wird die Arbeit $dW = f(x) \cdot dx = f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \in \mathbb{R}$ verrichtet.

☺ Das Arbeitsintegral summiert die insgesamt verrichtete Arbeit:

$$\langle \alpha | \varphi \rangle = W = \int_{\alpha} dW = \int_{t=0}^1 f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt$$

☺ Das ist eine wunderschöne und anschauliche Geschichte. Wenn Sie die physikalische Denke kennen, dann spüren Sie tatsächlich die Kraft, durchlaufen den Weg und verrichten die Arbeit. Mathematisch schreiben wir besser Δt_i für einen kleinen Zeitschritt und dann Δx_i für die kleine Verschiebung und $W = \sum_i \Delta W_i$ als Summe. In Physiksprech denkt man sich Δt_i „infinitesimal“ klein, im Grenzwert wird Summe zum Integral. Die Analysis erklärt Ihnen, wie das korrekt ε - δ -formalisiert wird.

Sei $\omega \in \Omega^k(U)$ ein k -Formfeld auf U , also $\omega: U \rightarrow \Lambda^k(V^*) : x \mapsto \omega(x)$,
Sei $\alpha: [0, 1]^k \rightarrow U : t \mapsto \alpha(t)$ ein $\mathcal{C}^1$ -Würfel in U . Ableitung gibt den k -Vektor $\dot{\alpha}(t) = \partial_1 \alpha(t) \wedge \dots \wedge \partial_k \alpha(t) \in \Lambda^k(V)$ und somit das Integral:

$$\langle \alpha | \omega \rangle := \int_{t \in [0,1]^k} \underbrace{\omega(\alpha(t))}_{\in \Lambda^k(V^*)} \underbrace{(\dot{\alpha}(t))}_{\in \Lambda^k(V)} dt$$


Der Würfel $\alpha: [0, 1]^k \rightarrow U$ hat die i -te Seite zu $\varepsilon \in \{0, 1\}$:

$$\partial_i^\varepsilon \alpha: [0, 1]^{k-1} \rightarrow U : (t_1, \dots, t_{k-1}) \mapsto \alpha(t_1, \dots, \varepsilon, \dots, t_{k-1})$$

Der Rand des k -Würfels α ist die Wechselsumme seiner Seiten:

$$\partial \alpha = \sum_{i=1}^n (-1)^i (\partial_i^0 \alpha - \partial_i^1 \alpha)$$

Satz Y2B: Hauptsatz als Dualität für Formfelder und Würfel

Für jedes Formfeld $\omega \in \Omega^{k-1}(U)$ und jeden Würfel $\alpha: [0, 1]^k \rightarrow U$ gilt:

$$\langle \alpha | d\omega \rangle = \langle \partial \alpha | \omega \rangle$$

HDI: Das k -dimensionale Integral von $d\omega$ über α ist gleich dem $(k-1)$ -dimensionalen Integral von ω über den Rand $\partial \alpha$.

Aufgabe: Zeigen Sie den Hauptsatz für $k = 1$. **Lösung:** Wir integrieren unser 1-Formfeld $d\omega = \sum_{i=1}^n \partial_i \omega dx_i$ über unseren Weg $\alpha: [0, 1] \rightarrow U$:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | d\omega \rangle &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_{t=0}^1 \sum_{i=1}^n \partial_i \omega(\alpha(t)) \alpha'_i(t) dt \\ &\stackrel{\text{KR}}{=} \int_{t=0}^1 [\omega(\alpha(t))] ' dt \\ &\stackrel{\text{HDI}}{=} [\omega(\alpha(t))]_{t=0}^1 \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \langle \partial \alpha | \omega \rangle \end{aligned}$$

Wir nutzen hier die Kettenregel (KR) und den Hauptsatz Y2A (HDI). Daraus erhalten wir sofort $\langle \alpha | d\omega \rangle = \langle \partial \alpha | \omega \rangle$ für jedes 0-Formfeld ω . Der allgemeine Fall gelingt genauso, dank gut geführter Indexschlacht. Die Grundlagen des Kalküls sind gelegt, dank alternierender Algebra.

Kapitel Y

Bonusmaterial

*“What can you prove with exterior algebra that you cannot prove without it?”
Whenever you hear this question raised about some new piece of mathematics,
be assured that you are likely to be in the presence of something important.
In my time, I have heard it repeated for random variables, Laurent Schwartz’
theory of distributions, ideles and Grothendieck’s schemes, to mention only a
few. A proper retort might be: “You are right. There is nothing in yesterday’s
mathematics that could not also be proved without it. Exterior algebra is not
meant to prove old facts, it is meant to disclose a new world. Disclosing new
worlds is as worthwhile a mathematical enterprise as proving old conjectures.”*

Gian-Carlo Rota (1932–1999), *Indiscrete thoughts* (1997)

Inhalt dieses Kapitels Y

- 5 Vergleich mit vertrauten Modellen
 - Kreuzprodukt gleich äußeres Produkt
 - Anti/Symmetrisierung als Projektor

- 5 Vergleich mit vertrauten Modellen
 - Kreuzprodukt gleich äußeres Produkt
 - Anti/Symmetrisierung als Projektor
 - Dualisierung als Abkürzung

Rückblick und Ausblick

Als vorläufige Bilanz blicken wir zurück auf das Tensorprodukt und unsere ersten Schritte zu seiner überaus vielseitigen Nutzung

Die Lineare Algebra untersucht lineare Räume und lineare Abbildungen. Ein Produkt $\cdot : U \times V \rightarrow W : (u, v) \mapsto w = u \cdot v$ ist linear in jedem seiner beiden Argumente u und v , insgesamt also eine bilineare Abbildung. Die Linearität links und rechts entspricht demnach der lang vertrauten Distributivität und dem aus der Schule gewohnten „Ausmultiplizieren“. Wichtige Beispiele sind Skalarprodukte, Matrizen, Polynome, uvm.

Das Tensorprodukt $U \otimes V$ erklärt hierzu das freiste und beste Produkt. Seine universelle Eigenschaft (UAE X2A) ist es, sich zu jedem konkreten Produkt zu spezialisieren. Wir können demnach in $U \otimes V$ ganz konkret und allgemein rechnen mit den üblichen Rechenregeln eines Produkts – und sonst nichts weiter. Insbesondere hilft uns die Basiseigenschaft X2c. Mit etwas Gewöhnung erkennen wir genau die „üblichen Produktregeln“.

Rückblick und Ausblick

Je nach den Bedürfnissen unserer Anwendung wollen wir das allgemeine Tensorprodukt $V \otimes V$ mit speziellen nützlichen Rechenregeln versehen, insbesondere Kommutativität in $V \vee V = S^2V$ mit $u \vee v = v \vee u$ und Antikommutativität bzw. Alternierung in $V \wedge V = \Lambda^2V$ mit $v \wedge v = 0$.

Wünschen ist erlaubt, und hier gelingt auch das Erfüllen erfreulich leicht: Die Quotientenkonstruktion erzwingt genau die gewünschten Relationen und ihre Konsequenzen. Weitere überflüssige Relationen entstehen nicht. Hier spielen alle Grundlagen der Linearen Algebra bestens zusammen.

So konstruieren wir aus der Tensoralgebra $T(V)$ die symmetrische Algebra $S(V)$ und die alternierende Algebra $\Lambda(V)$, alles wunderbar konkret und universell. Was anfangs abstrakt wirkt, erweist sich rasch als effizientes Werkzeug und bereits vertraut: Im äußeren Produkt $\wedge : \Lambda^1V \times \Lambda^1V \rightarrow \Lambda^2V$ erkennen wir nun das Kreuzprodukt (Satz Y5A). Das erklärt die numerischen Zufälle speziell für Dimension 2 und 3.

Aufgabe: Wir betrachten $V = \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$. Ist das Kreuzprodukt „gleich“ dem äußeren Produkt? Vergleichen Sie und übersetzen Sie sorgsam!

- (1) Wiederholen Sie zunächst das Kreuzprodukt $\times : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.
- (2) Explizieren Sie den Hodge-Stern $\star : \Lambda^2 \mathbb{R}^2 \cong \Lambda^0 \mathbb{R}^2$ bzgl. (e_1, e_2)
- (3) ... und das äußere Produkt $\tilde{\wedge} : \Lambda^1 \mathbb{R}^2 \times \Lambda^1 \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\wedge} \Lambda^2 \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\star} \Lambda^0 \mathbb{R}^2$.

Lösung: (1) Das Standardskalarprodukt S1A ist $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$. In Dimension 2 haben wir zudem das **Kreuzprodukt** gemäß S461:

$$\times : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1 = \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}$$

- (2) Gemäß Y1I haben wir $(\star, \star) : \Lambda^2 \mathbb{R}^2 \cong \Lambda^0 \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}$ mit

$$e_1 \wedge e_2 \mapsto 1.$$

Für $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ nutzen wir die Standardbasis (e_1, e_2) . Der Hodge-Stern $\star$ bildet das positiv komplementäre Produkt: Die Signatur der Indizes ist $\text{sign}[1, 2] = +1$, die Determinante der Vektoren ist $\det(e_1, e_2) = +1$.

- (3) Sowohl das Kreuzprodukt $\times$ als auch das äußere Produkt $\tilde{\wedge}$ sind bilinear über $\mathbb{R}$ und zudem antisymmetrisch. Zum Beweis der Gleichheit genügt es also, ihre Gram-Matrizen zu vergleichen.
Dank Antisymmetrie genügt uns die folgende Rechnung:

$$e_1 \times e_2 = 1 = e_1 \tilde{\wedge} e_2$$

So erhalten wir die Gleichheit dieser beiden wichtigen Produkte:

Satz Y5A: Kreuzprodukt = äußeres Produkt

- (1) In Dimension 2 ist das Kreuzprodukt gleich dem äußeren Produkt:

$$\times = \tilde{\wedge} = \det : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Manche Autor:innen schreiben hier kurz „ $\times = \wedge$ “. Streng besehen ist das schon syntaktisch falsch, denn $\Lambda^2 \mathbb{R}^2$ ist nicht gleich $\mathbb{R}$, aber immerhin kanonisch isomorph: Mit dem Hodge-Stern gilt „ $(- \times -) = \star(- \wedge -)$ “. Alles passt wunderbar zusammen, insbesondere unsere Vorzeichen.

Aufgabe: Wir betrachten $V = \mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$. Ist das Kreuzprodukt „gleich“ dem äußeren Produkt? Vergleichen Sie und übersetzen Sie sorgsam!

- (1) Wiederholen Sie zunächst das Kreuzprodukt $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
- (2) Explizieren Sie den Hodge-Stern $\star : \Lambda^2 \mathbb{R}^3 \cong \Lambda^1 \mathbb{R}^3$ bzgl. (e_1, e_2, e_3)
- (3) ... und das äußere Produkt $\tilde{\wedge} : \Lambda^1 \mathbb{R}^3 \times \Lambda^1 \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\wedge} \Lambda^2 \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\star} \Lambda^1 \mathbb{R}^3$.

Lösung: (1) In Dimension 3 haben wir das **Kreuzprodukt** gemäß Satz S4R:

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & e_1 \\ u_2 & v_2 & e_2 \\ u_3 & v_3 & e_3 \end{vmatrix}$$

- (2) Gemäß Y1I haben wir $(\star, \star) : \Lambda^2 \mathbb{R}^3 \cong \Lambda^1 \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ mit

$$e_1 \wedge e_2 \mapsto e_3, \quad e_2 \wedge e_3 \mapsto e_1, \quad e_3 \wedge e_1 \mapsto e_2.$$

Für $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ nutzen wir die Standardbasis (e_1, e_2, e_3) . Der Hodge-Stern $\star$ bildet das positiv komplementäre Produkt: Die Signatur der Indizes ist $\text{sign}[1, 2, 3] = +1$, die Determinante der Vektoren ist $\det(e_1, e_2, e_3) = +1$.

- (3) Sowohl das Kreuzprodukt $\times$ als auch das äußere Produkt $\tilde{\wedge}$ sind bilinear über $\mathbb{R}$ und zudem antisymmetrisch. Zum Beweis der Gleichheit genügt es also, ihre Gram-Matrizen zu vergleichen.
Dank Antisymmetrie genügen uns folgende drei Rechnungen:

$$e_1 \times e_2 = e_3 = e_1 \tilde{\wedge} e_2$$

$$e_2 \times e_3 = e_1 = e_2 \tilde{\wedge} e_3$$

$$e_3 \times e_1 = e_2 = e_3 \tilde{\wedge} e_1$$

So erhalten wir die Gleichheit dieser beiden wichtigen Produkte:

Satz Y5A: Kreuzprodukt = äußeres Produkt

- (2) In Dimension 3 ist das Kreuzprodukt gleich dem äußeren Produkt:

$$\times = \tilde{\wedge} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Manche Autor:innen schreiben hier kurz „ $\times = \wedge$ “. Streng besehen ist das schon syntaktisch falsch. Mit dem Hodge-Stern gilt „ $(- \times -) = \star(- \wedge -)$ “.

Allgemein haben wir $S(V)$ und $\Lambda(V)$ als Quotienten von $T(V)$ erklärt.

Satz Y5B: Anti/Symmetrisierung

Wir arbeiten über einem CRing $R \geq \mathbb{Q}$, der die rationalen Zahlen enthält. Dann können wir $S(V)$ und $\Lambda(V)$ als Teilräume von $T(V)$ darstellen:

(1) Wir definieren die **Symmetrisierung** $s_n : T^n \rightarrow T^n$ durch

$$s_n(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_n} u_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\tau(n)}.$$

Das Bild $\bar{S}^n := \text{Im}(s_n) \leq T^n$ besteht aus allen symmetrischen Tensoren. Der Quotient $T^n \twoheadrightarrow S^n$ schränkt sich ein zum Isomorphismus $\bar{S}^n \cong S^n$.

(2) Wir definieren die **Antisymmetrisierung** $a_n : T^n \rightarrow T^n$ durch

$$a_n(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_n} \text{sign}(\tau) \cdot u_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\tau(n)}.$$

Hier besteht $\bar{\Lambda}^n := \text{Im}(a_n) \leq T^n$ aus allen antisymmetrischen Tensoren. Der Quotient $T^n \twoheadrightarrow \Lambda^n$ schränkt sich ein zum Isomorphismus $\bar{\Lambda}^n \cong \Lambda^n$.

Übung: Führen Sie die Anti/Symmetrisierung wie folgt aus.

(1) Wie definieren Sie die oben genutzte Operation $S_n \curvearrowright T^n$?

Warum ist sie wohldefiniert? Wie genau gelingt ihre Konstruktion?

(2) Wie definieren Sie die Eigenschaft „anti/symmetrisch“ für $w \in T^n$?

Warum hat s_n bzw. a_n als Bildmenge alle anti/symmetrischen Tensoren?

(3) Sind s_n und a_n Projektoren, also linear mit $s_n^2 = s_n$ und $a_n^2 = a_n$?

Warum gilt $\text{id}_{T^2} = s_2 + a_2$ für $n = 2$? Gilt dies ebenso für $n \geq 3$?

(4) Warum schränkt sich der Quotient ein zu einem Isomorphismus?

Explizieren Sie den Isomorphismus $(\bar{\pi}, \bar{\rho}) : \bar{S}^n \cong S^n$ bzw. $(\bar{\pi}, \bar{\rho}) : \bar{\Lambda}^n \cong \Lambda^n$.

(5) Wiederholung: Wie definieren Sie das Produkt auf $S(V)$ und $\Lambda(V)$?

Hochhebung: Wie definieren Sie das Produkt auf $\bar{S}(V)$ und $\bar{\Lambda}(V)$?

(6) Erklären und nutzen Sie dazu die Zerlegung $S_{p+q} \cong \text{Sh}_{p,q} \times S_p \times S_q$ mit $\text{Sh}_{p,q} := \{\tau \in S_{p+q} \mid \tau(1) < \dots < \tau(p) \wedge \tau(p+1) < \dots < \tau(p+q)\}$.

😊 Sie erhalten so die berühmten „Shuffle-Produkte“.

Aufgabe: Wiederholen Sie konkrete Modelle für $T^2(V) = V \otimes V$, etwa (1) das Matrixmodell X1E und (2) das Polynommodell X1F. Destillieren Sie daraus möglichst elegant ebenso konkrete Modelle für das anti/symmetrische Produkt $\Lambda^2(V) = V \wedge V$ bzw. $S^2(V) = V \vee V$.

Lösung: (1) Gemäß X1E nutzen wir $\otimes : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n} : (u, v) \mapsto uv^T$. Dieses „dyadische Produkt“ ist bilinear und hat die Basiseigenschaft. Die induzierte Abbildung $T^2(V) \cong \mathbb{K}^{n \times n}$ ist daher ein Isomorphismus.

$$\wedge : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}_{\text{anti}}^{n \times n} : (u, v) \mapsto \frac{1}{2}(u \otimes v - v \otimes u)$$

$$\vee : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}_{\text{sym}}^{n \times n} : (u, v) \mapsto \frac{1}{2}(u \otimes v + v \otimes u)$$

Hier ist $\mathbb{K}_{\text{anti}}^{n \times n}$ bzw. $\mathbb{K}_{\text{sym}}^{n \times n}$ der $\mathbb{K}$ -lineare Teilraum der anti/symmetrischen Matrizen, also diejenigen mit der Eigenschaft $A^T = -A$ bzw. $S^T = S$. Zur Anti/Symmetrisierung sei $2 \in \mathbb{K}^\times$. Die Skalierung mit $\frac{1}{2}$ darf entfallen.

Diese Abbildungen $\wedge, \vee$ sind bilinear und anti/symmetrisch. Dank Satz Y5B induzieren sie Isomorphismen $\Lambda^2(\mathbb{K}^n) \cong \mathbb{K}_{\text{anti}}^{n \times n}$ und $S^2(\mathbb{K}^n) \cong \mathbb{K}_{\text{sym}}^{n \times n}$.

Beispiel: Für $V = \mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ erhalten wir die folgenden drei Produkte:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_1 v_1 & u_1 v_2 + u_2 v_1 & u_1 v_3 + u_3 v_1 \\ u_2 v_1 + u_1 v_2 & 2u_2 v_2 & u_2 v_3 + u_3 v_2 \\ u_3 v_1 + u_1 v_3 & u_3 v_2 + u_2 v_3 & 2u_3 v_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & u_1 v_2 - u_2 v_1 & u_1 v_3 - u_3 v_1 \\ u_2 v_1 - u_1 v_2 & 0 & u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 & u_3 v_2 - u_2 v_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Dies ist eine Inkarnation des Kreuzprodukts $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vermöge

$$\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}_{\text{anti}}^{3 \times 3} : \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}.$$

Satz Y5c: Tensoralgebren, Dualisierung als Abkürzung

Sei R ein CRing und darüber V ein zentraler linearer Raum.
Dazu haben wir die folgenden natürlichen Isomorphismen:

- | | |
|------------------|---|
| (1) Multilinear | $\text{Mul}_R(V, \dots, V; R) \cong T^n(V)^*$ |
| (2) Symmetrisch | $\text{Sym}_R(V, \dots, V; R) \cong S^n(V)^*$ |
| (3) Alternierend | $\text{Alt}_R(V, \dots, V; R) \cong \Lambda^n(V)^*$ |

Hier steht $\text{Mul} \leq \text{Fun}(V^n, R)$ für den Teilraum aller multilinearen, darin Sym und Alt für die symmetrischen bzw. alternierenden Abbildungen.

Dies ist eine beliebte Abkürzung zum Dual der obigen Tensoralgebren.
Die linke Seite ist erfreulich konkret gegeben als eine Abbildungsmenge.

Beispiel: Für Differentialformen nutzen wir $\Lambda^n(V)^*$. Wer es eilig hat und sich $\Lambda^n(V)$ ersparen möchte, kann direkt mit $\text{Alt}_R(V, \dots, V; R)$ arbeiten.

Aufgabe: Konstruieren Sie die oben behaupteten Isomorphismuspaare.
Wie gelingt Ihnen dies wohldefiniert? Wie nutzen Sie geschickt die UAE?
Wie überprüfen Sie, dass das so konstruierte Paar zueinander invers ist?

Satz Y5d: Tensorprodukt, Dualisierung als Abkürzung

(1) Sei V_i ein (R_{i-1}, R_i) -Bimodul. Als (R_n, R_0) -Rechtsmoduln gilt

$$\text{Mul}_{(R_1, \dots, R_n)}(V_1, \dots, V_n; R_n) \cong (V_1 \otimes \dots \otimes V_n)^*.$$

(2) Ist jeder Raum V_i rechtsseitig frei mit endlicher Basis, so auch

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_n \cong \text{Mul}_{(R_1, \dots, R_n)}(V_1, \dots, V_n; R_n)^*.$$

Die linke Seite ist hierbei erfreulich konkret gegeben als die Menge aller multilinearen Abbildungen $f: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow R$. Die rechte Seite dagegen verbindet Tensorprodukt und Dualisierung, das ist etwas aufwändiger.
Für die zweite Aussage nutzen wir das Bidual über dem Ring R_n .