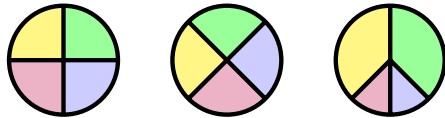


Kapitel X

Tensorprodukt



*Was ist das Tensorprodukt? Da stellen wir uns ganz dumm.
Jede:r weiß, dass wir Vektoren untereinander addieren können,
aber allgemein nicht multiplizieren. Wir tun es einfach trotzdem!*
frei nach Günter Harder (1938–2025)

Inhalt dieses Kapitels X

- 1 Das Tensorprodukt für Eilige
 - Direkte Summe $\oplus$ und Tensorprodukt $\otimes$ über einem Körper
 - Vertraute Beispiele: Matrizen, Polynome, Wahrscheinlichkeit
 - Erste spektakuläre Anwendung: das No-Cloning-Theorem
- 2 Das Tensorprodukt über beliebigen Ringen
 - Tensorprodukt dank universeller Eigenschaft
 - Eindeutigkeit und Existenz des Tensorprodukts
 - Das mehrfache Tensorprodukt dank UAE
- 3 Nützliche Rechenregeln für das Tensorprodukt
 - Neutrales, Assoziativität, Kommutativität, Distributivität
 - Die Tensor-Hom-Adjunktion durch Schönfinkeln
 - Funktorialität und Kronecker-Produkt
- 4 Erste Anwendungen
 - Homomorphismen als Tensoren
 - Erweiterung des Grundrings
 - Tensorieren mit $\mathbb{Q}$ und mit $\mathbb{Z}/p$

Tensorprodukte: universell anwendbar

Wir sind auf der Zielgeraden dieser Vorlesung zur Linearen Algebra. Zum krönenden Abschluss behandeln wir das Tensorprodukt, zunächst über Körpern (X1), das vereinfacht, dann über beliebigen Ringen (X2). Die Grundidee ist im Eingangszitat kurz und listig zusammengefasst:

Wir multiplizieren Vektoren, naiv-mutig und so allgemein wie möglich. Als Motto zitiere ich aus meinem Gedächtnis, wie Prof. Günter Harder in seinen Bonner Algebra-Vorlesungen das Tensorprodukt motivierte. So habe ich es einst empfangen, so möchte ich es an Sie weitergeben.

Technisch präziser gesagt, das Tensorprodukt realisiert folgendes Ziel:

*Wir betrachten bilineare oder allgemein multilineare Abbildungen;
mit dem Tensorprodukt „linearisieren“ wir diese, frei und universell.*

Wie jedes neue Werkzeug kostet das Tensorprodukt anfangs Mühe, doch wie immer in der LinA lohnt sich auch hier die langfristige Investition. Um auch kurzfristig schon erste schöne Anwendungen zu erreichen, beginne ich über einem Körper mit dem „Tensorprodukt für Eilige.“

Tensorprodukte: universell anwendbar

Ich wage den Blick über den Tellerrand und diskutiere Anwendungen in der Quantenmechanik. Das illustriert unser vertrautes Mantra:

- 1 Die mathematischen Grundlagen sind oft vergleichsweise leicht.
Gerade die Abstraktion ermöglicht uns vielseitige Anwendungen.
- 2 Anwendungen sind erfreulich reichhaltig und erstaunlich komplex.
Die abstrakte Sichtweise schärft unseren Blick für das Wesentliche.

Schon die ersten Anwendungen sind spektakulär. Wer diese dennoch nicht wünscht oder braucht, kann die physikalische Einkleidung auch ignorieren und sich ganz auf den mathematischen Kern konzentrieren. Abfragen werde ich sie nicht, anbieten will ich sie Ihnen auf jeden Fall.

Erfahrungsgemäß ist es nämlich hilfreich, zu mathematischen Begriffen auch geometrische Anschauung und physikalische Intuition zu schulen. Dies dient Ihrer naturwissenschaftlich-technischen Allgemeinbildung und hilft beim Erlernen auch Ihrem mathematischen Verständnis.

Mathematik (gr. μαθηματική τέχνη) ist die ‘Kunst des Lernens’. Freuen wir uns auf einen weiteren mathematischen Höhepunkt!

Wie viele fundamentale Begriffe wurden **Tensoren** zunächst in der Physik eingeführt und genutzt und erst später mathematisch präzise gefasst. Das ist kein Makel, sondern ein Beleg ihrer tiefliegenden Bedeutung. Ihr gehen wir nun auf den Grund, erst anschaulich, dann systematisch.

In der theoretischen Physik werden „Tensoren“ seit langem verwendet, da sie zur effizienten Modellbildung nützen und in Rechnungen helfen. Dabei werden diese „Tensoren“ zunächst ganz pragmatisch durch ihre **Rechenregeln** eingeführt... der Erfolg heiligt bekanntlich die Mittel.

Diesen Zugang „für Eilige“ möchte ich in X1 als erstes vorstellen. Das entspricht recht genau der ideengeschichtlichen Entwicklung, und auch heute noch antwortet es aus didaktisch-physikalischer Sicht sehr direkt und auch motivierend auf die Frage: Was sind Tensoren?

Persönliche Begebenheit: Der Einstieg dieses Kapitels entstand 2021 auf die sorgenvolle Frage meines Sohnes, was mit Tensoren anzufangen sei... Wir wollen und können Tensoren anpacken und sofort damit rechnen!

Aus **mathematischer Sicht** dauerte es hingegen deutlich länger, bis es Mathematiker:innen endlich gelang, für diese praktischen „Tensoren“ eine befriedigende theoretische Grundlage zu finden und zu erklären.

Seither werden sie auch in der Mathematik vielseitig genutzt und gerne angewendet, insbesondere in der Algebra und der Differentialgeometrie, zudem in den Ingenieurwissenschaften (etwa der Mechanik, Elastizität, Strömungslehre, Elektrodynamik, ...) und überall in der theoretischen Physik, von der Quantenmechanik bis zur Relativitätstheorie. Überall!

Dabei werden Tensoren kurzerhand zu Tensorfeldern verallgemeinert, die abkürzend-schludrig meist ebenfalls Tensoren genannt werden. Ein Tensorfeld ordnet jedem Punkt des Raums einen Tensor zu. Das zugehörige mathematische Teilgebiet heißt Tensoranalysis.

Viele naturwissenschaftliche Modelle und physikalische Theorien nutzen Tensorfelder, allen voran die allgemeine Relativitätstheorie, die damit die Geometrie einer gekrümmten Raumzeit beschreibt.

Koordinaten nutzen wir ganz selbstverständlich schon seit Schulzeiten. **Tensorkoordinaten** als Hilfsmittel beschreiben das dahinterliegende Objekt, das uns eigentlich interessiert, etwa einen Vektor, eine lineare Abbildung, eine Bilinearform, etc. Das Ergebnis unserer Rechnungen soll dabei invariant sein, also dasselbe liefern in *jedem* Koordinatensystem.

0. Stufe: Wir beginnen viele unserer Rechnungen mit einem Skalar a : Dies ist einfach ein Element des Grundkörpers K , etwa $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

1. Stufe: Eine Folge $b = (b_1, \dots, b_k)$ solcher Skalare fassen wir zu einem neuen Objekt zusammen und rechnen damit als vektorielle Größe. Solch ein Vektor $b = (b_i)_i \in K^n$ hat dabei einen einzigen Index i .

2. Stufe: Eine Folge von Vektoren $c = (c_{ij})_{ij}$ hat demnach zwei Indizes. Warum sagen wir nicht einfach „Matrix“? Tensoren sind allgemeiner! Auch diese können wir koordinatenweise addieren und skalieren.

3. Stufe: Ein Tensor $d = (d_{ijk})_{ijk}$ kann drei (oder mehr) Indizes haben, wie etwa das Levi-Civita-Symbol $\varepsilon_{ijk} = \text{sign}(i, j, k)$ für $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. Anschaulich gesagt: Tensoren sind „Matrizen beliebiger Stufe $s \in \mathbb{N}$ “.

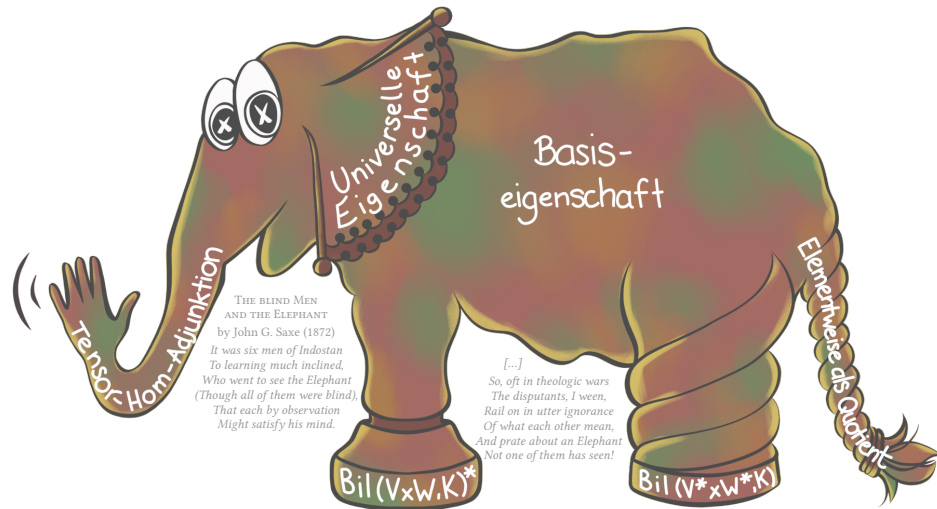
Tensoren sind ein vielseitiges und nützliches Werkzeug der Mathematik. Es lohnt sich daher, Zeit in diesen grundlegenden Begriff zu investieren, gerade zum Übergang von „koordinatengebunden“ zu „koordinatenfrei“. Das ist präzise und hilfreich, zugleich aber auch abstrakt und mutig.

Zur Motivation beginne ich mit meiner kurzen Vorschau „für Eilige“: Zum pragmatischen Einstieg betone ich daher die **Basiseigenschaft** X1D; sie liegt vielen Rechnungen zugrunde und ermöglicht sofortigen Zugang. Als erste spektakuläre Anwendung in der Quantenmechanik erhalten wir das sogenannte No-Cloning-Theorem (X1I). Soviel Physik muss sein!

Anschließend beschäftigen wir uns, nun sorgsam und geduldig, mit der mathematischen Grundlegung: Der bewährte Ausgangspunkt ist hier die **universelle Abbildungseigenschaft** (UAE X2A). Anschließend erarbeiten wir ihre segensreichen Konsequenzen, darunter die Basiseigenschaft X2C. Die UAE erweist sich dabei als unser geschmeidig-effizientes Werkzeug.

Dabei gehe ich den langen Weg und beginne so allgemein wie möglich: Wir legen das Thema breit an und spezialisieren dann schrittweise.

Das Tensorprodukt ist hilfreich und ein Elefant!



Sesquinar zu Tensoren ⊗ Jugendherberge Tübingen ⊗ 7.–10. September 2023 ⊗ Tensorfant gezeichnet von Fabienne Stoll

Im September 2023 durften wir unser legendäres **Sesquinar zu Tensoren** veranstalten, eiser.de/lehre/2023/Tensoren. (Was sind Tensoren? Geduld, das kommt gleich. Was ist ein Sesquinar? Wie ein Seminar, nur dreimal so schön: absolut einmalig und garantiert frei von Leistungspunkten!)

Unsere zwölf Vorträge zeigten eindrucksvoll, dass Tensoren extrem divers und oft genutzt werden, etwa in der Physik, Differentialgeometrie und Relativität, Komplexitätstheorie, Algebra und Darstellungstheorie, uvm. Es lohnt sich also, das Kunsthandwerk der Tensoren zu erlernen.

Ebenso vielfältig sind die möglichen Zugänge, Tensoren zu erklären, wie im indischen Gleichnis von den Blinden, die einen Elefanten beschreiben, den sie nur stückweise ertasten können. „Ein Elefant ist wie eine Säule“, sagt der Blinde, der am Bein beginnt. „Nein, ein Elefant ist wie ein Arm“, erwidert die Blinde am Rüssel. „Wohl eher wie ein Seil!“, am Schweif. „Wie ein Fächer!“, am Ohr. „O nein, wie eine Wand!“, am Rumpf.

Kunstvoll-listig erzählt dies das Gedicht von John Godfrey Saxe (1872), hinreißend gesungen von Natalie Merchant (2009), youtu.be/31yJLFMSvBY.

Dies illustriert, dass wir ein und dieselbe Realität sehr unterschiedlich auffassen können, je nachdem, welche Perspektive wir einnehmen.

So ist es auch mit dem Tensorprodukt! Es gibt erstaunlich viele Zugänge; einige nur speziell zur bequemen Abkürzung, wenige ganz allgemein zur langfristigen Investition; manche sehr konkret, andere eher abstrakt. Alle beschreiben wichtige Aspekte des Tensorfanten, und im Sesquinar haben wir daraus ein gutes Gesamtbild zusammengesetzt. Danke an alle Teilnehmer:innen für ihr großes, vollkommen freiwilliges Engagement!

In Anwendungen werden die grundlegenden mathematischen Werkzeuge gerne so weit wie nur irgend möglich vereinfacht, manchmal aber auch einen Schritt zu weit. Folgender Unsinn hat inzwischen Kultstatus:

“Spin is like a ball that’s spinning,
except it’s not a ball and it’s not spinning.”
— “A vector is an element of a vector space.”
— “A tensor is a thing that transforms like a tensor.”

The introduction of numbers as coordinates is an act of violence. [...] In geometric and physical applications, it always turns out that a quantity is characterized not only by its tensor order, but also by symmetry.

Hermann Weyl (1885–1955)

Für ein vollständiges Bild diskutieren wir mehrere Zugänge, alle nützlich:

- 1 Die Basiseigenschaft $X1D$ erlaubt konkretes Rechnen in Koordinaten. Dies ist in der Physik beliebt: 😊 Im Vordergrund stehen Koordinaten und Basiswechsel. 😞 Der eigentliche Tensor steht im Hintergrund.
- 2 Die universelle Abbildungseigenschaft ($X2A$) ist die genial-einfache, mathematische Sichtweise. 😊 Sie gelingt über beliebigen Ringen.
- 3 Elementweise Konstruktion als Quotient ($X2E$) sichert die Existenz.
- 4 Tensor-Hom-Adjunktion ($X3F$) ist die elegant-abstrakte Sichtweise.
- 5 Das Dual des Tensorprodukts entspricht Multilinearformen ($Y5D$). Speziell für endlich-dimensionale Vektorräume erhalten wir daraus die trickreich-bequeme Abkürzung als Dualraum der Multilinearformen.

The blind Men and the Elephant

X013
Ausführung

*It was six men of Indostan / To learning much inclined,
Who went to see the Elephant / (Though all of them were blind),
That each by observation / Might satisfy his mind.*

*The First approached the Elephant, / And happening to fall
Against his broad and sturdy side, / At once began to bawl:
"God bless me! — but the Elephant / Is very like a wall!"*

*The Second, feeling of the tusk, / Cried: "Ho! — what have we here
So very round and smooth and sharp? / To me 't is mighty clear
This wonder of an Elephant / Is very like a spear!"*

*The Third approached the animal, / And happening to take
The squirming trunk within his hands, / Thus boldly up and spake:
"I see," quoth he, "the Elephant / Is very like a snake!"*

*The Fourth reached out his eager hand, / And felt about the knee.
"What most this wondrous beast is like / Is mighty plain," quoth he;
"T is clear enough the Elephant / Is very like a tree!"*

The blind Men and the Elephant

X014
Ausführung

*The Fifth, who chanced to touch the ear, / Said: "E'en the blindest man
Can tell what this resembles most; / Deny the fact who can,
This marvel of an Elephant / Is very like a fan!"*

*The Sixth no sooner had begun / About the beast to grope,
Than, seizing on the swinging tail / That fell within his scope,
"I see," quoth he, "the Elephant / Is very like a rope!"*

*And so these men of Indostan / Disputed loud and long,
Each in his own opinion / Exceeding stiff and strong,
Though each was partly in the right, / And all were in the wrong!*

*So, oft in theologic wars / The disputants, I ween,
Rail on in utter ignorance / Of what each other mean,
And prate about an Elephant / Not one of them has seen!*

John Godfrey Saxe (1816–1887)
en.wikipedia.org/wiki/John_Godfrey_Saxe

Die sechs Blinden und der Elefant

X015
Ausführung

*Sechs Männer fern in Industan, voll Neugier wie es schien,
Erstrebten, obschon blind sie war'n, den Elefant zu sehn,
Dass jeder durch den Augenschein könnt' dieses Tier verstehn.*

*Der Erste, von Natur aus forsch, sich naht dem Elefant,
Befühlt die Seite des Geschöpfs und hat sogleich erkannt:
„Mein Gott, dies ist ein Ungetüm; es ist wie eine Wand!“*

*Der Zweite nun den Stoßzahn fühlt und fragt: „Wo kommt das her?
So rund und glatt und spitz am End? Die Lösung ist nicht schwer;
Dies Ding von einem Elefant ist gleich als wie ein Speer!“*

*Darauf der Dritte sich nun naht, ergreift – ihm ward nicht bange –
Den Rüssel vorn am Kopf mit Kraft, und zögert auch nicht lange,
Den andern Blinden kundzutun: „Das Biest ist eine Schlange!“*

*Darob der Vierte nun erfühlt – beinahe wie im Traum –
Das linke Bein der Kreatur; umfasst es aber kaum:
Und spricht: „Es ist mir sonnenklar: Das Ding ist wie ein Baum.“*

Die sechs Blinden und der Elefant

X016
Ausführung

*Der Fünfte nun berührt das Ohr am Elefantenschädel
Und sagt: „Sogar ein blinder Mann und auch ein blindes Mädel
Weiß doch auf Anhieb, dass dies ist ein großer breiter Wedel.“*

*Der Sechste tastet sich nun vor, grad bis zum Hinterteil,
Und sucht, dort wo der Schwanz sich regt, nun ebenfalls sein Heil,
Ruft dann, sobald er ihn erfasst: „Das Tier ist wie ein Seil!“*

*Sechs Blinde fern in Industan, nun stritten lang und laut,
ob dem, was jeder nur für sich als Elefant geschaut –
doch hatten, wiewohl teils im Recht, sie alle nur auf Sand gebaut.*

*So oft im Theologenstreit geschieht's im Handumdrehn
Dass Disputanten – scheinbar taub – sich einfach nicht versteh'n
Und zanken um 'nen Elefant, den niemand je geseh'n.*

poetisch übersetzt von Kurt Bangert (1946–)
www.kurtbangert.de/gedichte.html

Dieses wunderbare Gleichnis trifft nicht nur auf Religionen zu, sondern selbst in Gebieten der Wissenschaft und der Technik, auch in der Mathematik, und hier besonders auf Tensoren.

Die Seite deeplai.org/machine-learning-glossary-and-terms/tensor erklärt den Begriff „Tensor“ anschaulich wie folgt (aufgerufen am 18.09.2026):

Understanding Tensors in Machine Learning and Deep Learning. *In the realms of machine learning and deep learning, the term “tensor” has become a buzzword, often thrown around in discussions about algorithms, neural networks, and data representation. But what exactly is a tensor, and why is it so crucial in these fields?*

At its core, a tensor is a mathematical object that generalizes the concept of scalars, vectors, and matrices to higher dimensions. In the context of data science, tensors are multi-dimensional arrays of numbers that represent complex data. They are the fundamental data structures used in machine learning and deep learning frameworks like TensorFlow and PyTorch.

To appreciate tensors, it’s helpful to start with the basics. A scalar is simply a single number, such as 7 or -3.2. A vector is a one-dimensional array of numbers, such as [2, 4, 6], and a matrix extends this idea into two dimensions, like so:

*[[1, 2, 3],
[4, 5, 6],
[7, 8, 9]]*

When we extend this concept into three or more dimensions, we enter the realm of tensors. For instance, a 3D tensor could look like a cube of numbers, and a 4D tensor could be visualized as a series of cubes stacked together.

Why Use Tensors? *Tensors are particularly useful for handling complex data such as images, audio, and text. For example, a color image can be represented as a 3D tensor with dimensions corresponding to height, width, and color channels (red, green, and blue). Similarly, a video can be represented as a 4D tensor with time being the additional dimension.*

Operations on Tensors. *Just like with vectors and matrices, you can perform various mathematical operations on tensors. These include addition, multiplication, and dot products. In deep learning, operations like convolution are also applied to tensors to extract features from data.*

In machine learning libraries, tensors are used to store and manipulate data. These frameworks provide tools to create tensors, perform computations on them efficiently, and automatically calculate gradients – which are essential for training models using backpropagation. [... The “shape” of a tensor is the size of each dimension; for the above matrix the shape is thus (3,3).]

TensorFlow, by Google, and PyTorch, by Facebook, are two of the most popular deep learning frameworks. As their names suggest, they are built around tensors. These frameworks handle the creation and manipulation of tensors and use them to build and train complex neural network models.

Conclusion. *Tensors are the backbone of modern machine learning and deep learning applications. They provide a way to represent and compute on high-dimensional data efficiently.*

As you delve deeper into machine learning, a solid understanding of tensors and their operations will be invaluable. Whether you’re training a neural network to recognize images, process natural language, or analyze complex patterns, tensors will be at the core of your algorithms.

As the field continues to evolve, the use of tensors will likely become even more prevalent, making them a key concept for any aspiring data scientist or machine learning engineer to master.

Das ist eine gelungene Zusammenfassung der informatischen Sichtweise, die physikalische betont zudem Transformationen unter Basiswechseln, die mathematische betont vor allem die Linearität in jedem Argument.



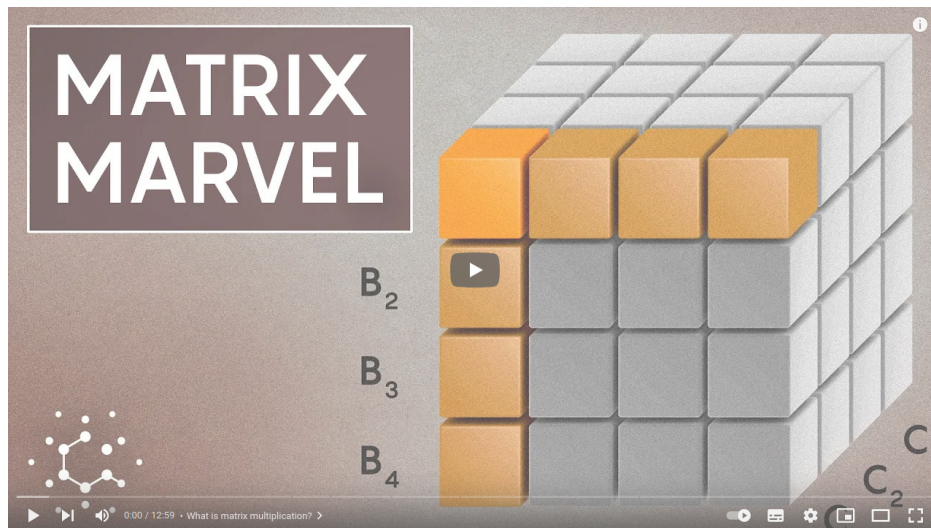
Tensoren wurden als handliches Werkzeug zuerst in der Physik erfunden, aus den Bedürfnissen konkreter Rechnungen, dann in der Mathematik konsolidiert, ihre Theorie eingehend untersucht und optimiert.

Inzwischen sind Tensoren in der Informatik angekommen, etwa zur schnellen Matrixmultiplikation und jüngst im Maschinellen Lernen.

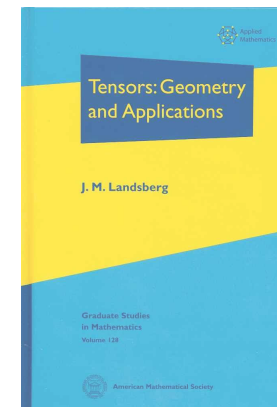
Erstaunlicherweise wirkt dies auch zurück: 2022 haben Forscher:innen von Googles KI-Labor *DeepMind* nach effizienten „Tensorzerlegungen“ zur schnellen Matrixmultiplikation gesucht. Ihr Erfolg mit *Reinforcement Learning* schlug hohe Wellen und schaffte es auf die Titelseite von *Nature*.

📖 A. Fawzi et al.: *Discovering faster matrix multiplication algorithms with reinforcement learning*. Nature 610 (2022) 47–53.

Schnelle Matrixmultiplikation ist überall willkommen in Physik, Ingenieurwesen, Informatik und speziell im Maschinellen Lernen. Wenn Sie Freude an dieser Verbindung von Mathematik und Informatik haben, dann bietet Ihnen das folgende Video eine schöne Einführung.



📺 Quanta Magazine, youtu.be/fDAPJ7vcUw, zu schneller Matrixmultiplikation, Tensoren und Machine Learning.



Anwendung ist schön und gut und willkommen, doch manche mögen es solide mathematisch, lieber nachhaltig und möglichst allgemein.

Dazu zeigt Landsbergs Buch eine schöne Route. Kapitel 1&2 sind online frei zugänglich, siehe people.tamu.edu/~jml/Tbookintro.pdf.

😊 Ja, es gibt ganze Lehrbücher, die sich Tensoren widmen!

😊 Tensoren sind weiterhin ein schönes Thema für Proseminare, Seminare, Sesquinare, uvm.

🤔 Lieber elegant abstrakt oder konkret anwendungsorientiert? Manche Studierende wünschen sich reale Anwendungen, denn sie helfen zur Anschauung und fördern die Motivation. Andere scheuen, ja fürchten reale Beispiele, denn sie sind naturgemäß kompliziert und anstrengend. Manche schaffen sogar beides, erst Beispiele fordern, dann verschmähen. Vertrauen Sie, bleiben Sie mutig und neugierig und offen für beides!

Definition X1A: externe Summe und direkte Summe $\leftrightarrow$ L3j

Gegeben seien (zentrale) Vektorräume U, V und W über einem Körper K . Wir skalieren beidseits $\lambda v = v\lambda$ für alle Vektoren v und Skalare $\lambda \in K$.

(1) Eine **Summe** von U und V nach W ist eine **K -lineare Abbildung**

$$\oplus : U \times V \rightarrow W : (u, v) \mapsto w = u \oplus v.$$

Das heißt ausgeschrieben für alle $u, u' \in U$ und $v, v' \in V$ und $\lambda \in K$:

$$(u + u') \oplus (v + v') = (u \oplus v) + (u' \oplus v'), \quad (u\lambda) \oplus (v\lambda) = (u \oplus v)\lambda.$$

(2) **Basiseigenschaft:** Zu Basen $(u_i)_{i \in I}$ von U und $(v_j)_{j \in J}$ von V ist die Summenfamilie $((u_i \oplus 0)_{i \in I}, (0 \oplus v_j)_{j \in J})$ eine Basis von W .

Gilt diese Basiseigenschaft, so nennen wir $\oplus : U \times V \rightarrow W$ **frei** oder eine **direkte Summe** von U und V in den Summenraum $W =: U \oplus V$.

Bei direkten Summen addieren sich die Dimensionen:

$$\dim(U \oplus V) = \dim(U) + \dim(V)$$

Triviale Summe: Zu je zwei Räumen U, V haben wir die triviale Summe

$$+ : U \times V \rightarrow \{0\} : (u, v) \mapsto 0$$

Sie ist nicht direkt, außer im trivialen Fall $U = V = \{0\}$.

Interne Summe: Für Unterräume $U, V \leq W$ haben wir die interne Summe

$$+ : U \times V \rightarrow W : (u, v) \mapsto u + v.$$

Sie ist direkt gdw $U \cap V = \{0\}$ und $U + V = W$, kurz $W = U \oplus V$. (L3j)

Kanonisches Modell: Zu $I \cap J = \emptyset$ haben wir die direkte Summe

$$\oplus : K^{(I)} \times K^{(J)} \rightarrow K^{(I \sqcup J)} : (u, v) \mapsto u \sqcup v.$$

Implementierung auf dem Computer? Aneinanderhängen von Listen!

⚠ Wir erlauben, dass $u \in U$ und $v \in V$ und $u + v \in W$ in *verschiedenen* Räumen liegen, zur Betonung sprechen wir von einer *externen* Summe.

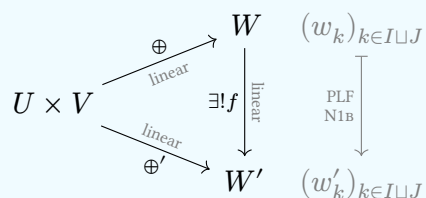
⚠ Externe Summen $\oplus : U \times V \rightarrow W$ gibt es im Allgemeinen sehr viele: Nennen Sie 1000 Summen $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$, davon 100 direkte, siehe X106.

😊 Mit Definition X1A können wir konkret rechnen, alles ist explizit! Wir können sofort in Koordinaten rechnen, denn für W haben wir die Summenbasis $(w_k)_{k \in I \sqcup J}$ mit $w_i = u_i \oplus 0$ für $i \in I$ und $w_j = 0 \oplus v_j$ für $j \in J$. (Alles gilt ebenso für freie Räume U, V über jedem beliebigen Ring K)

😊 Zudem erhalten wir nun mühelos weitere wichtige Eigenschaften, insbesondere K -lineare Abbildungen zwischen (direkten) Summen:

Satz X1B: universelle Abbildungseigenschaft einer direkten Summe

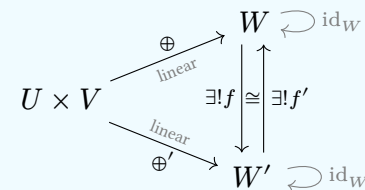
(0) Sei $\oplus : U \times V \rightarrow W$ eine direkte und $\oplus' : U \times V \rightarrow W'$ eine Summe. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $f : W \rightarrow W'$ mit $\oplus' = f \circ \oplus$.



Existenz und Eindeutigkeit von f folgen sofort aus der Basiseigenschaft X1A dank dem Prinzip der linearen Fortsetzung (PLF, Satz N1B).

Satz X1B: Eindeutigkeit und Existenz der direkten Summe $\rightarrow$ X2D

(1) Zu je zwei direkten Summen $\oplus : U \times V \rightarrow W$ und $\oplus' : U \times V \rightarrow W'$ existiert genau ein Isomorphismus $(f, f') : W \cong W'$ mit $\oplus' = f \circ \oplus$.



Eindeutigkeit trotz Wahlfreiheit: Alice und Bob konstruieren ihre direkten Summen wie sie mögen. Je zwei direkte Summen lassen sich eindeutig übersetzen.

(2) Zu je zwei K -Vektorräumen U und V existiert eine direkte Summe; das kanonische Modell ist $\oplus : U \times V \rightarrow W := U \times V$ mit $u \oplus v = (u, v)$.

Beweis: (1) Dank (0) existieren eindeutige Kandidaten $f : W \rightarrow W'$ und $f' : W' \rightarrow W$. Dank Eindeutigkeit (0) gilt $f' \circ f = \text{id}_W$ und $f \circ f' = \text{id}_{W'}$. (2) Das kartesische Produkt $U \times V$ mit koordinatenweiser Addition und Skalierung (L2D) erfüllt die erhsehnte Basiseigenschaft X1A. QED

Satz X1c: das kartesische Produkt als direkte Summe → L2D

Gegeben seien (zentrale) Vektorräume U und V über einem Körper K .

(1) Zu U, V haben wir das kartesische Produkt als **direkte Summe**:

$$\begin{aligned} U \times V &:= \{(u, v) \mid u \in U, v \in V\} = U' + V' \\ \text{mit } (i_1, p_1) : U &\cong U' := U \times \{0\} : u \mapsto (u, 0) \\ \text{und } (i_2, p_2) : V &\cong V' := \{0\} \times V : v \mapsto (0, v) \end{aligned}$$

Intern gilt $U \times V = U' + V'$ mit $U' \cap V' = \{0\}$, kurz $U \times V = U' \oplus^{\text{int}} V'$.
Extern haben wir $\oplus = \text{id} : U \times V \rightarrow U \times V$, kurz $U \times V = U \oplus^{\text{ext}} V$.

(2) **Basiseigenschaft:** Zu Basen $(u_i)_{i \in I}$ von U und $(v_j)_{j \in J}$ von V ist ihre disjunkte Vereinigung $(w_k)_{k \in I \sqcup J}$ eine Basis des Raums $U \times V$, wobei $I \cap J = \emptyset$ und $w_i = (u_i, 0)$ für $i \in I$ und $w_j = (0, v_j)$ für $j \in J$.

😊 Damit können wir konkret rechnen, denn alles liegt explizit vor!
Alles gilt ebenso für freie Räume U, V über einem kommutativen Ring.

Aufgabe: Nennen Sie 1000 Summen $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$, davon 100 direkte.

Lösung: Die kanonische Summe $(x_1; x_2) \oplus (x_3; x_4; x_5) = (x_1; \dots; x_5)$ ist direkt. Jede Summe $\oplus'$ hat die Form $(x_1; x_2) \oplus' (x_3; x_4; x_5) = A(x_1; \dots; x_5)$ mit $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$, dank UAE X1B. Die Summe $\oplus'$ ist direkt gdw $A \in \text{GL}_5 \mathbb{R}$.

Aus mengentheoretischer Sicht konstruieren wir den Raum $U \times V$ als kartesisches Produkt mit koordinatenweiser Addition und Skalierung. Aus Sicht der linearen Räume ist dies die kanonische direkte Summe.

Allgemein unterscheiden wir das (kartesische) Produkt $\prod_{i \in I} V_i$ und darin die (externe bzw. interne) direkte Summe $\bigoplus_{i \in I} V_i$. Allgemein gilt hierbei (nur) die Inklusion $\bigoplus_{i \in I} V_i \leq \prod_{i \in I} V_i$, und Gleichheit gilt für jede endliche Indexmenge I . (L2D)

Die Konstruktion einer Basis durch Aneinanderhängen zeigt:
Die Dimension der Summe ist die Summe der Dimensionen.
Mit dieser Konstruktion können wir Vektorräume addieren.
Als nächstes wollen wir Vektorräume auch multiplizieren.

Produkte sind bilineare Abbildungen.

Sei $(R, +, \cdot)$ irgendein Ring und darin $K \leq Z(R)$ ein zentraler Teilkörper, etwa der Polynomring $R = K[X]$ oder der Matrixring $R = K^{n \times n}$ über K . Dann ist $R = U = V = W$ ein K -Vektorraum und das Produkt K -bilinear:

$$\cdot : U \times V \rightarrow W : (u, v) \mapsto u \cdot v.$$

Für alle $u, u' \in U, v, v' \in V, \lambda \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{(HM)} \quad (u\lambda) \cdot v &= u \cdot (\lambda v), & \text{(AL)} \quad (u + u') \cdot v &= (u \cdot v) + (u' \cdot v), \\ \text{(HL)} \quad (\lambda u) \cdot v &= \lambda(u \cdot v), & \text{(AR)} \quad u \cdot (v + v') &= (u \cdot v) + (u \cdot v'), \\ \text{(HR)} \quad u \cdot (v\lambda) &= (u \cdot v)\lambda. \end{aligned}$$

Für K -lineare Teilräume $U, V \leq R$ betrachten wir den Produktaufspann

$$W = U \odot_K V := \langle u \cdot v \mid u \in U, v \in V \rangle_K \leq R$$

als K -Unterraum aller Produkte. Wir erhalten so das (externe) Produkt

$$\odot : U \times V \rightarrow W : (u, v) \mapsto u \odot v.$$

Auch diese eingeschränkte Abbildung ist weiterhin bilinear über K .

Produkte sind bilineare Abbildungen.

Beispiel: Im Polynomring $R = K[X]$ über dem Körper K betrachten wir

$$\odot : K[X]_{\leq p} \times K[X]_{\leq q} \rightarrow K[X]_{\leq p+q} : (u, v) \mapsto u \cdot v.$$

Die Basen $(X^i)_{i \leq p}$ von $U = K[X]_{\leq p}$ und $(X^j)_{j \leq q}$ von $V = K[X]_{\leq q}$ werden abgebildet auf die Produktfamilie $(X^{i+j})_{\substack{i \leq p \\ j \leq q}}$. Sie erzeugt $W = K[X]_{\leq p+q}$.

Ist sie eine Basis? Das gilt gdw $(p+1)(q+1) = p+q+1$, also $pq = 0$.

😊 Nur für $p = 0$ oder $q = 0$ ist die Produktfamilie eine Basis.

😞 Für $p \geq 1$ und $q \geq 1$ ist die Produktfamilie keine Basis.

Beispiel: In $K[X]$ betrachten wir $U = \langle 1, X^3 \rangle_K^!$ und $V = \langle 1, X, X^2 \rangle_K^!$. Damit erhalten wir $W = U \odot_K V = \langle 1, X, \dots, X^5 \rangle_K^!$ und das Produkt

$$\odot : U \times V \rightarrow W : (u, v) \mapsto u \cdot v.$$

Die Basen $(X^i)_{i=0,3}$ von U und $(X^j)_{j=0,1,2}$ von V werden abgebildet auf die Produktfamilie $(X^{i+j})_{\substack{i=0,3 \\ j=0,1,2}}$. Sie erzeugt W über K und zudem frei!

😊 Diese wertvolle Basiseigenschaft erheben wir nun zur Definition!

Definition X1D: das Tensorprodukt und seine Basiseigenschaft

Gegeben seien zentrale Vektorräume U , V und W über einem Körper K .

(1) Ein **Produkt** von U und V nach W ist eine **K -bilineare Abbildung**

$$\otimes : U \times V \rightarrow W : (u, v) \mapsto w = u \otimes v.$$

Für alle $u, u' \in U$, $v, v' \in V$, $\lambda \in K$ gilt:

$$(AL) \quad (u + u') \otimes v = (u \otimes v) + (u' \otimes v), \quad (HL) \quad (\lambda u) \otimes v = \lambda(u \otimes v),$$

$$(AR) \quad u \otimes (v + v') = (u \otimes v) + (u \otimes v'), \quad (HR) \quad u \otimes (v\lambda) = (u \otimes v)\lambda.$$

(2) **Basiseigenschaft:** Zu Basen $(u_i)_{i \in I}$ von U und $(v_j)_{j \in J}$ von V ist die Produktfamilie $(u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ eine Basis von W .

Gilt diese Basiseigenschaft, so nennen wir $\otimes : U \times V \rightarrow W$ **frei** oder ein **Tensorprodukt** von U und V in den Tensorraum $W =: U \otimes_K V$.

Bei Tensorprodukten multiplizieren sich die Dimensionen:

$$\dim(U \otimes V) = \dim(U) \cdot \dim(V)$$

(1) Homogenität mittig (HM) folgt aus (HL) und (HR) dank Zentralität:

$$(u\lambda) \otimes v \stackrel{Znt}{=} (\lambda u) \otimes v \stackrel{HL}{=} \lambda(u \otimes v) \stackrel{Znt}{=} (u \otimes v)\lambda \stackrel{HR}{=} u \otimes (v\lambda) \stackrel{Znt}{=} u \otimes (\lambda v)$$

(2) Die „eilige“ Definition X1D über die Basiseigenschaft ist die schnellste, doch nicht immer die beste. Wir optimieren und verallgemeinern sie später zur universellen Abbildungseigenschaft, siehe Definition X2A. Über einem Körper sind beide Eigenschaften äquivalent dank Satz X2c.

😊 Unter allen Produkten ist das Tensorprodukt das beste, das freiste. Damit können wir sofort konkret rechnen, denn wir haben eine Basis!

🤔 Inwiefern sind Tensorprodukte eindeutig? Wir beweisen anschließend die Eindeutigkeit bis auf eindeutige Isomorphie X1G (basisfrei X2D).

🤔 Existenz erfordert eine Konstruktion, etwa durch Matrizen X1E oder Polynome X1F, zusammengefasst X1G (später basisfrei als Quotient X2F).

😊 Definition X1D enthält vorab schon genug Information, um sofort damit rechnen zu können, daher der Slogan „Tensorprodukt für Eilige“.

Wie rechnen wir mit Tensoren?

Aufgabe: (0) Nennen Sie eine Basis des Tensorraums $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$.

(1) Sind darin die Tensoren $(0, 1) \otimes (1, 0)$ und $(1, 0) \otimes (0, 1)$ gleich?

Lösung: (0) Wir wählen die Standardbasis (e_1, e_2) für $U = V = \mathbb{R}^2$. Im Tensorraum $W = U \otimes_{\mathbb{R}} V$ Verhalten wir daraus die Produktbasis

$$(e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2).$$

(1) Damit können wir die Tensoren $e_2 \otimes e_1$ und $e_1 \otimes e_2$ vergleichen:

$$e_2 \otimes e_1 = 0 \cdot (e_1 \otimes e_1) + 0 \cdot (e_1 \otimes e_2) + 1 \cdot (e_2 \otimes e_1) + 0 \cdot (e_2 \otimes e_2)$$

$$e_1 \otimes e_2 = 0 \cdot (e_1 \otimes e_1) + 1 \cdot (e_1 \otimes e_2) + 0 \cdot (e_2 \otimes e_1) + 0 \cdot (e_2 \otimes e_2)$$

😊 Die Tensoren $e_2 \otimes e_1$ und $e_1 \otimes e_2$ in $W = U \otimes_{\mathbb{R}} V$ sind verschieden!

In diesem kleinen Beispiel stört nur der numerische Zufall $2 \cdot 2 = 2 + 2$.

Erinnerung: Beim Tensorprodukt multiplizieren sich die Dimensionen.

Das Tensorprodukt $\mathbb{R}^3 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^5$ etwa hat die Dimension $3 \cdot 5 = 15$, die Summe $\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^5$ hingegen hat die Dimension $3 + 5 = 8$.

Wie rechnen wir mit Tensoren?

😊 Definition X1D(2) begründet das folgende Vergleichsverfahren:

Algo X1D: Vergleich von zwei Tensoren in $U \otimes_K V$

Eingabe: zwei Elemente w_1, w_2 des Tensorraums $U \otimes_K V$

Ausgabe: „gleich“ falls $w_1 = w_2$ oder „ungleich“ falls $w_1 \neq w_2$

1: Schreibe w_1 und w_2 in der gewählten Produktbasis von $U \otimes_K V$

2: Vergleiche diese Linearkombinationen koeffizientenweise

Mit diesem einfachen Trick X1D(2) haben wir die vorige Aufgabe gelöst, und genau so gelingt es für jedes Tensorprodukt über einem Körper.

Schon bei der Definition mathematischer Objekte $A, B, \dots$ müssen wir insbesondere klären, wann Gleichheit $A = B$ gilt und wann $A \neq B$.

Dies gilt beispielsweise für den Vergleich von Mengen, Funktionen, Zahlen, Polynomen, Matrizen, Vektoren, ... und nun von Tensoren.

Zum effizienten Rechnen gehört wie immer als allererster Schritt, je zwei Elemente möglichst effizient auf Un-/Gleichheit zu prüfen.

Definition X1D: Tensoren, einfach vs verschränkt [*simple vs entangled*]

(3) Jedes Element $w \in U \otimes_K V$ des Tensorraums nennen wir einen **Tensor**. Gilt $w = u \otimes v$ mit $u \in U$ und $v \in V$, so nennen wir den Tensor w **einfach** oder **elementar** oder **rein**, andernfalls heißt der Tensor w **verschränkt**.

Für $w \in U \otimes_K V$ gilt $w = \sum_{i=1}^r u_i \otimes v_i$ mit $r \in \mathbb{N}$ sowie $u_i \in U$ und $v_i \in V$. Wir sagen, w hat **Rang** $\leq r$. Rang genau r bedeutet $\leq r$, aber nicht $< r$.

Anders gesagt, die Menge der **einfachen Tensoren** ist das Bild der Produktabbildung $\otimes : U \times V \rightarrow U \otimes_K V$. Diese ist i.A. nicht surjektiv!

Der Tensorraum besteht aus allen **Summen** einfacher Tensoren; solche Summen sind im Allgemeinen keine einfachen Tensoren.

Übung: Für welche $r, s \in \mathbb{N}$ ist $\otimes : \mathbb{F}_q^r \times \mathbb{F}_q^s \rightarrow \mathbb{F}_q^r \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q^s$ surjektiv?

Der Tensorraum erlaubt immer eine **Basis** aus *einfachen* Tensoren, zum Beispiel jede Produktbasis. Es gibt viele weitere Möglichkeiten.

Übung: Finden Sie in $K^2 \otimes_K K^2$ eine Basis aus *verschränkten* Tensoren.

Aufgabe: Im Tensorraum $W = K^2 \otimes_K K^2$ betrachten wir zu $a, b, c, d \in K$ den Tensor $w = a \cdot (e_1 \otimes e_1) + b \cdot (e_1 \otimes e_2) + c \cdot (e_2 \otimes e_1) + d \cdot (e_2 \otimes e_2)$. Genau dann ist w einfach, also $w = u \otimes v$, wenn $ad - bc = 0$ gilt.

Lösung: (1) Die Implikation „ $\Rightarrow$ “ ist klar, denn wir finden

$$\begin{aligned} w &= u \otimes v = (u_1 e_1 + u_2 e_2) \otimes (v_1 e_1 + v_2 e_2) \\ &= u_1 v_1 (e_1 \otimes e_1) + u_1 v_2 (e_1 \otimes e_2) + u_2 v_1 (e_2 \otimes e_1) + u_2 v_2 (e_2 \otimes e_2). \end{aligned}$$

Für diesen Tensor w gilt somit $ad - bc = u_1 v_1 \cdot u_2 v_2 - u_1 v_2 \cdot u_2 v_1 = 0$.

😊 Allgemein: Gilt $\dim U \geq 2$ und $\dim V \geq 2$, so ist die Produktabbildung $\otimes : U \times V \rightarrow U \otimes_K V$ nicht surjektiv, d.h. nicht jeder Tensor ist einfach.

(2) Auch die Umkehrung „ $\Leftarrow$ “ ist bemerkenswert. Der Fall $w = 0$ ist klar. Sei also $w \neq 0$, etwa $a \neq 0$. Für $u = a e_1 + c e_2$ und $v = 1 e_1 + (b/a) e_2$ gilt dann $u \otimes v = w$. Die Fälle $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$ sind analog.

😊 Für Tensoren der Form $t \in U \otimes_K V$ lässt sich der Rang bestimmen wie für Matrizen dank Gauß-Algorithmus X501. (Das gilt nur *zweiter Stufe*.)

Beispiel X1E: Matrixmodell des Tensorprodukts

$$\cdot : K^{p \times 1} \times K^{1 \times q} \rightarrow K^{p \times q} : (u, v) \mapsto u \cdot v.$$

Dieses Matrixprodukt bedeutet ausgeschrieben für $(p, q) = (3, 4)$:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 & u_1 v_4 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 & u_2 v_4 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 & u_3 v_4 \end{bmatrix}$$

Dies erfüllt die geforderten Eigenschaften eines Tensorprodukts:

- 1 Die Produktabbildung $\cdot$ ist bilinear über dem Grundkörper K . (§D1)
- 2 Aus den Basen $(e_1, \dots, e_p)$ von $K^{p \times 1}$ und $(e_1^\top, \dots, e_q^\top)$ von $K^{1 \times q}$ erhalten wir die Produktbasis $(e_{i,j} = e_i \cdot e_j^\top)_{i=1, \dots, p; j=1, \dots, q}$ von $K^{p \times q}$.

So unterscheiden wir $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, siehe X111.

Effiziente Berechnung: Hier gilt Tensorrang gleich Matrixrang. (X501)

Notation: Für dieses **dyadische Produkt** nutzt man üblicherweise die bequeme Schreibweise $\otimes : K^p \times K^q \rightarrow K^{p \times q} : (u_i)_i \otimes (v_j)_j = (u_i v_j)_{i,j}$. Dies verallgemeinern wir später zum Kronecker-Produkt X3H; hier sehen wir schon den Spezialfall $\otimes : K^{p \times 1} \times K^{1 \times q} \rightarrow K^{p \times q}$.

😊 Wir nutzen dankend Matrixrang und Gauß-Algorithmus, siehe X501.

Aufgabe: Einfache Tensoren sind genau die Matrizen vom Rang ≤ 1 .

Lösung: „ $\Rightarrow$ “: Für $u \in K^{p \times 1}$ und $v \in K^{1 \times q}$ hat $w = uv$ den Rang ≤ 1 , denn alle Spalten der Matrix w sind Vielfache des Spaltenvektors u . Ebenso: Alle Zeilen von $w = uv$ sind Vielfache des Zeilenvektors v . Wir erinnern uns an Satz M3r: Zeilenrang gleich Spaltenrang.

„ $\Leftarrow$ “: Hat $w \in K^{p \times q}$ den Rang 1, so enthält w einen Spaltenvektor $u \in K^{p \times 1} \setminus \{0\}$, und alle anderen Spalten sind Vielfache von u . Also existiert ein Zeilenvektor $v \in K^{1 \times q} \setminus \{0\}$, sodass $w = uv$ gilt. Hat w den Rang 0, so gilt $w = 0$, also $w = uv$ mit $u = 0$ oder $v = 0$.

Übung: Sind Tensorprodukte über einem Körper nullteilerfrei?

Wiederholung: Ist $K^n \times K^n \rightarrow K : (u, v) \mapsto u^T v$ ein Produkt? gar ein Tensorprodukt? dagegen $K^n \times K^n \rightarrow K : (u, v) \mapsto uv^T$? Allgemein:

Aufgabe: Hat die Matrixmultiplikation $\cdot : K^{p \times r} \times K^{r \times q} \rightarrow K^{p \times q}$ allgemein für $p, q, r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Eigenschaften eines Tensorprodukts?

Lösung: Nein. Das Produkt $\cdot : K^{p \times r} \times K^{r \times q} \rightarrow K^{p \times q}$ ist zwar bilinear über K , aber für $r \geq 2$ fehlt ihm die geforderte Basiseigenschaft!

Zu Basen $(u_i)_{i \in I}$ von $U = K^{p \times r}$ und $(v_j)_{j \in J}$ von $V = K^{r \times q}$ ist die Produktfamilie $(u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ keine Basis des Raums $W = K^{p \times q}$.

Wir sehen dies hier bereits an den Dimensionen, denn die erwartete Multiplikativität $pr \cdot rq \stackrel{!}{=} pq$ ist wegen $p, q \geq 1$ nur für $r = 1$ möglich.

☺ Für $r = 1$ erhalten wir gerade das obige dyadische Beispiel X1E. Für $r \geq 2$ hingegen hat das Matrixprodukt nicht die Basiseigenschaft! Für unser Repertoire an Gegen/Beispielen ist das ebenso nützlich. Das Kronecker-Produkt X3H erweist sich hier als Tensorprodukt.

Aufgabe: Zeigen Sie, dass für je zwei endlich-dimensionale Räume U und V über K ein Tensorprodukt $\otimes : U \times V \rightarrow U \otimes_K V$ existiert.

Lösung: Nach Wahl von Basen (M2K) haben wir $U \cong K^p$ und $V \cong K^q$. Für die Modellräume K^p und K^q haben wir das obige Tensorprodukt

$$\otimes : K^p \times K^q \rightarrow K^{p \times q} : (u_i)_i \otimes (v_j)_j = (u_i v_j)_{i,j}.$$

Die zugehörige Komposition $U \times V \xrightarrow{\sim} K^p \times K^q \rightarrow K^{p \times q}$ ist bilinear über K und hat die Basiseigenschaft, ist also ein Tensorprodukt von U und V .

☺ Diese Konstruktion ist zwar korrekt, doch irgendwie *quick and dirty*. Die Wahl einer Basis ist immer ein Akt der Willkür, ganz besonders hier. Zudem gelingt dieser Trick zunächst nur in endlicher Dimension. Polynome zeigen, (Tensor)Produkte in unendlicher Dimension.

☺ Wir werden in Satz X2F eine allgemeine und basisfreie Konstruktion ausführen, statt *quick and dirty* ist sie besser *long-lasting and elegant*, also nachhaltig und elegant, allerdings auch etwas aufwändiger.

Beispiel X1F: Polynommodell des Tensorprodukts

Wir betrachten $U = K[X]$ und $V = K[Y]$ und $W = K[X, Y]$ mit

$$\cdot : K[X] \times K[Y] \rightarrow K[X, Y] : (u, v) \mapsto u \cdot v.$$

Dieses Polynomprodukt bedeutet ausgeschrieben:

$$\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i X^i\right) \cdot \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} v_j Y^j\right) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_i v_j X^i Y^j$$

Dies erfüllt die geforderten Eigenschaften eines Tensorprodukts:

- 1 Die Produktabbildung $\cdot$ ist bilinear über dem Grundkörper K . (§C1)
- 2 Die Monombasen $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ von $U = K[X]$ und $(Y^j)_{j \in \mathbb{N}}$ von $V = K[Y]$ ergeben als Produkte $(X^i Y^j)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ eine Basis von $W = K[X, Y]$.

Dasselbe gilt endlich-dimensional für $U = K[X]_{<p}$ und $V = K[Y]_{<q}$ mit $W = \langle X^i Y^j \mid i < p, j < q \rangle_K^1$ und entspricht obigem Matrixmodell X1E.

So interpretieren wir $(0, 1) \otimes (1, 0)$ als $(0X^0 + 1X^1) \cdot (1Y^0 + 0Y^1) = X$, hingegen $(1, 0) \otimes (0, 1)$ als $(1X^0 + 0X^1) \cdot (0Y^0 + 1Y^1) = Y$, siehe X11.

☺ Die Definition X1D über die Basiseigenschaft funktioniert problemlos auch für unendlich-dimensionale Räume, wie Polynome hier illustrieren.

Aufgabe: Hat die Polynommultiplikation $\cdot : K[X] \times K[X] \rightarrow K[X]$ in einer Variablen ebenfalls die Eigenschaften eines Tensorprodukts?

Lösung: Nein. Das Produkt $\cdot : K[X] \times K[X] \rightarrow K[X]$ ist zwar bilinear, aber ihm fehlt leider die geforderte Basiseigenschaft der Definition X1D:

⚠ Zu den Basen $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ von $U = K[X]$ und $(X^j)_{j \in \mathbb{N}}$ von $V = K[X]$ ist die Produktfamilie $(X^{i+j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ keine Basis des Raums $W = K[X]$.

⚠ Die beiden Familien $(X^{i+j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ und $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ erzeugen zwar denselben Teilraum in $K[X]$, sind aber dennoch sehr verschieden. Die zweite ist linear unabhängig, sogar eine Basis, die erste nicht!

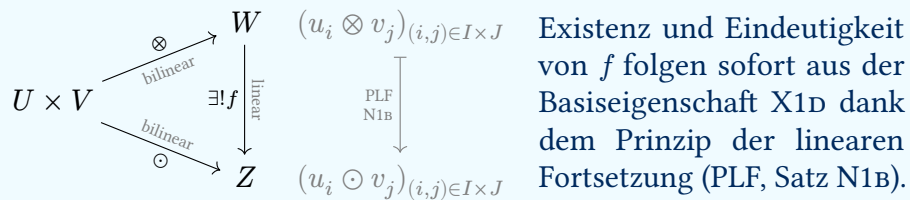
☺ Oft hilft die endliche Dimension. Hier gelingt es auch allgemein. Die Forderungen an das Tensorprodukt bedeuten anschaulich:
(1) Es ist tatsächlich ein Produkt, also bilinear. (2) Dieses Produkt ist so frei wie möglich, das heißt, es erfüllt die Basiseigenschaft.

😊 Mit Definition X1D können wir konkret rechnen, alles ist explizit! Insbesondere haben wir Basen und können in Koordinaten rechnen. (Alles gilt ebenso über jedem CRing K für freie, zentrale Räume U, V ; zur Vereinfachung betrachte ich jedoch zunächst speziell Körper.)

😊 Zudem erhalten wir nun mühelos weitere wichtige Eigenschaften, insbesondere K -lineare Abbildungen zwischen (Tensor-)Produkten:

Satz X1c: universelle Abbildungseigenschaft des Tensorprodukts

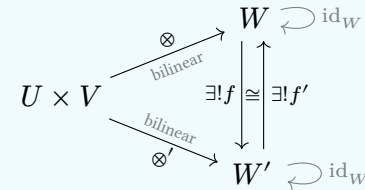
(0) Sei $\otimes : U \times V \rightarrow W$ ein Tensorprodukt. Jedes Produkt $\odot : U \times V \rightarrow Z$ faktorisiert zu $\odot = f \circ \otimes$ mit genau einer linearen Abbildung $f : W \rightarrow Z$.



Satz X1c: Eindeutigkeit und Existenz des Tensorprodukts

→ X2D

(1) Zu je zwei Tensorprodukten $\otimes : U \times V \rightarrow W$ und $\otimes' : U \times V \rightarrow W'$ existiert genau ein Isomorphismus $(f, f') : W \cong W'$ mit $\otimes' = f \circ \otimes$.



Eindeutigkeit trotz Wahlfreiheit: Alice und Bob konstruieren ihre Tensorprodukte wie sie mögen. Je zwei Tensorprodukte lassen sich eindeutig übersetzen.

(2) Zu je zwei K -Vektorräumen U und V existiert ein Tensorprodukt; das kanonische Modell ist $K^{(I)} \times K^{(J)} \rightarrow K^{(I \times J)}$ mit $(u_i)_i \otimes (v_j)_j = (u_i v_j)_{i,j}$.

Beweis: (1) Dank (0) existieren eindeutige Kandidaten $f : W \rightarrow W'$ und $f' : W' \rightarrow W$. Dank Eindeutigkeit (0) gilt $f' \circ f = \text{id}_W$ und $f \circ f' = \text{id}_{W'}$. (2) Der Koordinatenraum $K^{(I \times J)}$ mit koordinatenweiser Addition und Skalierung (L2D) erfüllt die ersehnte Basiseigenschaft X1D. QED

♦ **Satz X3a:** Rechenregeln für direkte Summe und Tensorprodukt

Sei K ein Körper. Für die direkte Summe $\oplus$ und das Tensorprodukt $\otimes$ von K -Vektorräumen U, V, W gelten die folgenden vertrauten Rechenregeln. Abkürzend steht hier 0 für den Nullraum und 1 für den Raum K über K .

	direkte Summe $\oplus$	Tensorprodukt $\otimes$
Ntr	$0 \oplus U \cong U \cong U \oplus 0$	$1 \otimes U \cong U \cong U \otimes 1$
Ass	$(U \oplus V) \oplus W \cong U \oplus (V \oplus W)$	$(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$
Com	$U \oplus V \cong V \oplus U$	$U \otimes V \cong V \otimes U$
AL	$(U \oplus V) \otimes W \cong (U \otimes W) \oplus (V \otimes W),$	$0 \otimes U = 0$
AR	$U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W),$	$U \otimes 0 = 0$

Übung: Konstruieren Sie hierzu die „natürlichen“ Isomorphismen. Auf den Basen sind die gewünschten Bijektionen jeweils klar. Daraus folgen die Isomorphismen dank Prinzip der linearen Fortsetzung (PLF, Satz N1B). Wiederholen Sie dazu die entsprechenden Rechenregeln G3j für Mengen.

♦ **Satz G3j:** Rechenregeln für Summe und Produkt

Für die disjunkte Vereinigung $\sqcup$ und das kartesische Produkt $\times$ von Mengen X, Y, Z gelten die folgenden vertrauten Rechenregeln. Hier steht $0 = \emptyset$ für die leere und $1 = \{0\}$ für die einelementige Menge.

	disjunkte Vereinigung $\sqcup$	kartesisches Produkt $\times$
Ntr	$0 \sqcup X \cong X \cong X \sqcup 0$	$1 \times X \cong X \cong X \times 1$
Ass	$(X \sqcup Y) \sqcup Z \cong X \sqcup (Y \sqcup Z)$	$(X \times Y) \times Z \cong X \times (Y \times Z)$
Com	$X \sqcup Y \cong Y \sqcup X$	$X \times Y \cong Y \times X$
AL	$(X \sqcup Y) \times Z \cong (X \times Z) \sqcup (Y \times Z),$	$0 \times X = 0$
AR	$X \times (Y \sqcup Z) \cong (X \times Y) \sqcup (X \times Z),$	$X \times 0 = 0$

😊 Dies sind grundlegende und wohlvertraute Operationen für Mengen. Sie liefern direkte Summen und Tensorprodukte für Koordinatenräume: $K^{(X)} \oplus K^{(Y)} \cong K^{(X \sqcup Y)}$, $K^{(X)} \otimes K^{(Y)} \cong K^{(X \times Y)}$. Wir erhalten $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1)$ dank card auf $(\text{FinSet}, \sqcup, 0, \times, 1)$ sowie $\dim_K$ auf $(\text{FinVec}_K, \oplus, 0, \otimes, 1)$.

L „Begegnet uns dies schon in der Schule?“ Erstaunlicherweise ja: Das Tensorprodukt modelliert unabhängige Zufallsexperimente!

Sei $\Omega = \{a_1, \dots, a_n\}^1 \neq \emptyset$ eine endliche Menge mit $n \geq 1$ Elementen.

Eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung** auf Ω , kurz WVerteilung, ist eine Abbildung $p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p(a) \geq 0$ für alle $a \in \Omega$ mit $|p| = \sum_{a \in \Omega} p(a) = 1$.

Jedem möglichen **Ergebnis** $a \in \Omega$ weisen wir die Elementarwkt $p(a)$ zu. Für jedes **Ereignis** $E \subseteq \Omega$ summieren wir die Wkt zu $\mathbf{P}(E) = \sum_{a \in E} p(a)$.

Wir nennen $(\Omega, \mathbf{P})$ einen endlichen **Wahrscheinlichkeitsraum** (WRaum). Aus $\mathbf{P}$ erhalten wir umgekehrt $p(a) = \mathbf{P}(\{a\}) \geq 0$ und $\sum_{a \in \Omega} p(a) = 1$.

Das **unmögliche Ereignis** $\emptyset$ hat die Wkt $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$. Das **sichere Ereignis** Ω hat die Wkt $\mathbf{P}(\Omega) = 1$. Für jedes Ereignis $E \subseteq \Omega$ gilt $0 \leq \mathbf{P}(E) \leq 1$.

Beispiel: Die **Gleichverteilung** auf Ω mit $|\Omega| = n$ ist gegeben durch $u(a) = 1/n$ für alle $a \in \Omega$. Für alle $E \subseteq \Omega$ gilt somit $\mathbf{U}(E) = |E|/|\Omega|$.

In Worten: Bei Gleichverteilung ist die Wkt eines Ereignisses $E \subseteq \Omega$ der Quotient von „günstigen Ergebnissen“ durch „mögliche Ergebnisse“.

Jeden WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$ können wir als ein **Zufallsexperiment** betrachten, etwa als einen Lostopf Ω mit Losen $a \in \Omega$ und zugehörigen Wkten $\mathbf{P}(E)$.

Beispiel: Wir betrachten Ergebnismengen $\Omega_1 = \{a, a'\}$ und $\Omega_2 = \{b, b'\}$, und auf $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(a, b), (a', b), (a, b'), (a', b')\}$ folgende Wkten:

Wkt $\mathbf{P}$	b	b'	ges. $\mathbf{P}_1$
a	0.28	0.12	0.40
a'	0.42	0.18	0.60
ges. $\mathbf{P}_2$	0.70	0.30	1.00

Wkt $\mathbf{Q}$	b	b'	ges. $\mathbf{Q}_1$
a	0.30	0.10	0.40
a'	0.40	0.20	0.60
ges. $\mathbf{Q}_2$	0.70	0.30	1.00

Hier ist $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2$ eine Produktwkt / einfacher Tensor, beschreibt also die unabhängige Ausführung der Experimente $(\Omega_1, \mathbf{P}_1)$ und $(\Omega_2, \mathbf{P}_2)$. Hingegen ist $\mathbf{Q}$ keine Produktwkt, denn $\mathbf{Q} \neq \mathbf{Q}_1 \otimes \mathbf{Q}_2$, siehe X114.

Allgemein seien $(\Omega_1, \mathbf{P}_1)$ und $(\Omega_2, \mathbf{P}_2)$ endliche WRäume / Experimente. Die **unabhängige Ausführung** beider Experimente entspricht dann der Ergebnismenge $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \in \Omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega_2\}$ mit der Produktwkt $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2$ gegeben durch $p(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1) \cdot p_2(\omega_2)$.

Zusammenfassend definieren wir zu jeder endlichen Ergebnismenge Ω die zugehörige Menge $[\Omega]$ aller WVerteilungen auf Ω , ausgeschrieben

$$[\Omega] := \{p: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid p \geq 0 \wedge \sum_{a \in \Omega} p(a) = 1\} \subset \mathbb{R}^\Omega.$$

Beispiel X11h: unabhängige Zufallsexperimente als Tensorprodukt

Zu je zwei endlichen Mengen Ω_1 und Ω_2 ist das Tensorprodukt

$$\otimes: \mathbb{R}^{\Omega_1} \times \mathbb{R}^{\Omega_2} \rightarrow \mathbb{R}^{\Omega_1 \times \Omega_2}: (p_1, p_2) \mapsto p_1 \otimes p_2$$

gegeben durch die punktweise Multiplikation

$$(p_1 \otimes p_2)(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1) \cdot p_2(\omega_2).$$

Für endliche Wahrscheinlichkeiten schränken wir dies ein zu

$$\otimes: [\Omega_1] \times [\Omega_2] \rightarrow [\Omega_1 \times \Omega_2]: (p_1, p_2) \mapsto p_1 \otimes p_2.$$

😊 Ausgeschrieben als Wktstafel auf $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ entspricht dieses Tensorprodukt von Wkten genau dem dyadischen Matrixprodukt X1E.

M „Noch suggestiver ist die Schreibweise als Linearkombinationen $p = \sum_i p_i a_i$ und $q = \sum_j q_j b_j$ und somit $p \otimes q = \sum_{i,j} p_i q_j a_i \otimes b_j$.“

L „In dieser Form sind Tensorprodukte sehr anschaulich und durch ihre Interpretation als Wkten ganz handfest und experimentell zugänglich.“

😊 Vierfeldertafeln, Matrizen und Polynome kennen Sie bereits aus der Schule und haben damit gute praktische Erfahrungen gesammelt.

😊 Seither nutzen Sie überall erfolgreich den Begriff der **stochastischen Unabhängigkeit**, also Produktwkten, und dies sind einfache Tensoren.

Wenn ich behaupte „Tensorprodukte kennen Sie bereits aus der Schule!“, meine ich, dass Sie schon damals erste einfache *Beispiele* genutzt haben. Die Schulbeispiele erkennen Sie nun vom höheren Standpunkt wieder!

Damals hat man Ihnen aus guten Gründen den allgemeinen Rahmen vorenthalten, dieser wäre für erste bescheidene Beispielrechnungen auch reichlich übertrieben und ermüdend. In der Schule wird das Vorgehen bestenfalls plausibilisiert. Immerhin, auch diese Beispiele sind illustrativ.

P Die **klassische Physik** beschreibt den Zustand eines Systems durch deterministische Größen, etwa Massen $m_k \in \mathbb{R}$ mit Positionen $u_k \in \mathbb{R}^3$ und Geschwindigkeiten $v_k \in \mathbb{R}^3$ wie in **Newtons (Himmels-)Mechanik**:

$$\dot{u}_k \stackrel{(0)}{=} v_k, \quad \dot{v}_k \stackrel{(1)}{=} f_k(u) \stackrel{(2)}{=} \sum_{j \neq k} \gamma m_j \frac{u_j - u_k}{\|u_j - u_k\|^3}.$$

Zustandsraum ist einzeln $V_k = \mathbb{R}^6$, gemeinsam $\bigoplus_{k=1}^n V_k = \mathbb{R}^6 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}^6$.
Warum diese Beschreibung? Weil sie erfolgreich erklärt und vorhersagt!

Die **Quantenmechanik** beschreibt jeden Zustand durch einen Vektor

$$s \in (V, \langle - | - \rangle)$$

in einem $\mathbb{C}$ -Vektorraum und Änderungen durch lineare Abbildungen. Als kleinste Informationseinheit kann ein **Bit** nur den Zustand 0 oder 1 annehmen. Die Quantenmechanik erlaubt zudem **Überlagerungen**:

$$s = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \in V = \langle |0\rangle, |1\rangle \rangle_{\mathbb{C}}^!$$

Warum diese Beschreibung? Weil sie erfolgreich erklärt und vorhersagt!

Die Koeffizienten $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ heißen auch **Amplituden**. Alle möglichen Zustandsvektoren $s = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ und der Nullvektor 0 bilden somit einen zweidimensionalen $\mathbb{C}$ -Vektorraum $V \cong \mathbb{C}^2$.

Dieser trägt zudem ein Skalarprodukt mit Orthonormalbasis $(|0\rangle, |1\rangle)$. Die Absolutquadrate $|\alpha|^2$ und $|\beta|^2$ entsprechen Wahrscheinlichkeiten, dazu normieren wir den Zustand s , sodass $1 = \|s\| = |\alpha|^2 + |\beta|^2$ gilt.

Damit modelliert die Quantenmechanik Zufall, Superposition, Wellenphänomene und vieles mehr. Die hierzu verwendeten Rechenregeln formulieren wir in X7A als **Postulate der Quantenmechanik**.

Wie die Physiker:innen historisch, experimentell und theoretisch zu dieser raffinierten und sonderbaren Beschreibung gekommen sind, ist eine faszinierende Geschichte, leider auch lang und gewunden.

Ich will hier die Vogelperspektive einnehmen und mit ein paar groben Pinselstrichen skizzieren, wie unsere mathematischen Werkzeuge der Linearen Algebra hierbei wunderbar zum Einsatz kommen.

Anwendung: Tensoren im Quantencomputing

X131

Wir betrachten zwei Teilchen, jedes mit zwei **Basiszuständen** $|0\rangle, |1\rangle$. Das zusammengesetzte Zwei-Teilchen-System hat vier Basiszustände:

$$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle \in V_1 \otimes V_2$$

Jeder Zustand ist eine **Überlagerungen** dieser Basiszustände, also

$$s = \alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \gamma |10\rangle + \delta |11\rangle$$

mit Koeffizienten $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$. Die möglichen Zustände und der Nullvektor bilden somit einen vierdimensionalen $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

😊 Aus n einzelnen Teilchen mit individuellen Zustandsräumen $V_1, \dots, V_n$ entsteht das n -Teilchen-System mit Zustandsraum $V = V_1 \otimes \dots \otimes V_n$.

⚠ Hierbei werden die Dimensionen nicht addiert, sondern multipliziert. Die Zustände der Teilchen bestehen nicht unabhängig nebeneinander, wie in $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$, sondern sind möglicherweise verschränkt (*entangled*).

⚠ Superposition ist ein fundamentales Prinzip der Quantenmechanik ohne klassische Entsprechung und daher ohne anschauliche Intuition.

Anwendung: Tensoren im Quantencomputing

X132
Erläuterung

Klassisch genügt zur Zustandsbestimmung von n Bits die Kenntnis der n Zustände $z_1, \dots, z_n \in \{0, 1\}$. Dies ist ein Vektor $z \in \{0, 1\}^n$. Die Menge der möglichen Zustände hat somit $N = 2^n$ Elemente, Damit arbeiten klassische, binäre Computer sehr erfolgreich.

In der Quantenmechanik ist der Zustandsraum eines Systems ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum V . Ist $(v_1, \dots, v_N)$ eine Basis, so können nicht nur diese Basiszustände auftreten, sondern auch Überlagerungen (Superpositionen), also alle $\mathbb{C}$ -Linearkombinationen $s = \sum_{k=1}^N \alpha_k v_k$.

Die Zustandsbestimmung von n Quantenbits (Qubits) bedeutet somit die Kenntnis aller $N = 2^n$ komplexen Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}$. Man kann sich fragen, wo die Natur die zusätzliche Speicher- und Rechenkapazität dafür hernimmt, aber so sind wohl die Spielregeln.

Dieses exponentielle Wachstum macht die Berechnung oder Simulation von Quantensystemen mit klassischen Computern nahezu unmöglich. Umgekehrt schlug Richard Feynman 1982 vor, dies zur Entwicklung von Quantencomputern zu nutzen. Sie werden es wohl noch erleben.

Sind Anwendungsbeispiele ein Fluch oder ein Segen?

X133
Erläuterung

So mancher:r stöhnt vermutlich: „Jetzt übertreibt der Prof: Wir müssen nicht nur Lineare Algebra lernen, jetzt auch noch Quantenmechanik!“
Ja, bitte nehmen Sie mögliche Anwendungen interessiert zur Kenntnis! Der Blick über den Tellerrand lohnt sich, gerade an der Uni Stuttgart. Sind solche Exkurse übertrieben? ablenkend? oder gar überfordernd? Ich nenne drei Gründe für akademische Neugier und Abenteuerlust:

1. Wir sollten uns freuen, dass mathematische Begriffe und Techniken so überraschend vielseitig anwendbar sind: Was Sie in einem Gebiet lernen, können Sie in vielen anderen Gebieten erfolgreich wiederverwenden.
2. Speziell im Fall des Quantencomputing ist realistisch absehbar, dass dies Ihr Leben nachhaltig beeinflussen wird. Ich will daher nicht kommentarlos an diesem wichtigen Anwendungsbeispiel vorbeigehen.
3. Das Studium mathematischer Grundlagen ist fundamental wichtig. Wir wollen abstrahieren, um zahlreiche Einzelfälle zusammenzufassen, zugleich auch motivieren, konkretisieren, illustrieren. Nur so geht es!

Sind Anwendungsbeispiele ein Fluch oder ein Segen?

X134
Erläuterung

Der Spagat zwischen diesen beiden Polen ist eine fragile Kunst: Einerseits die abstrakten Grundlagen: einfach, elegant, allgemein. Andererseits die konkreten Einzelfälle: verwirrend, sonderbar, speziell. Manche vertauschen hier die Adjektive, das halte ich für einen Fehler. Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle. Studierende fordern zu Recht motivierende Beispiele, Querverbindung zwischen den Themen und auch Bezug zu möglichen Anwendungen. Wir sollten uns also über jede Gelegenheit freuen, wo dies gelingt!

Be careful what you wish for, it might just come true!

Wird der Wunsch nach Beispielen und Anwendungen ernsthaft erfüllt, so fangen erfahrungsgemäß leider auch immer einige an zu jammern: Der Ruf nach Anwendungsbeispielen entsprang nicht ihrer Neugier, sondern der naiven Sehnsucht nach Einfachheit. Die ist oft unerfüllbar: Ehrliche Anwendungen sind meist nicht leichter zu verstehen, sondern komplizierter als die übergeordnete Theorie. Sie benötigen daher beides!

Sind Anwendungsbeispiele ein Fluch oder ein Segen?

X135
Erläuterung

Ich bin überzeugt, naturwissenschaftlich-technische Neugier und Allgemeinbildung sind wichtige Bildungsziele unserer Universität. Dazu möchte ich Gelegenheiten bieten, als wohlmeinendes Angebot. Sie *müssen* nicht lernen, Sie *wollen* lernen, und hier *dürfen* Sie es.

Man kann das Pferd zum Wasser führen, aber nicht zum Trinken zwingen.

Ich weiß auch, dass unser Bildungssystem zumeist nicht Neugier und Lernfreude fördert, sondern Auswendiglernen und Nachbeten erzwingt. Intrinsische Motivation gelingt nur aufwändig mit viel Mühe und Geduld, extrinsische Zwänge hingegen sind momentan und sehr billig zu haben. Auch hier macht die Mischung den Erfolg. Einseitige Lerndressur führt junge Menschen leider zu fatalistischem Desinteresse an ihrer Bildung:

Ein gutes Pferd springt nur so hoch, wie es muss.

Kurzum, bevor Sie fragen: Dieser Abschnitt ist nicht klausurrelevant. Bitte nutzen Sie Ihre Freiheiten weise und entscheiden Sie selbst!

Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!

Sind Anwendungsbeispiele ein Fluch oder ein Segen?

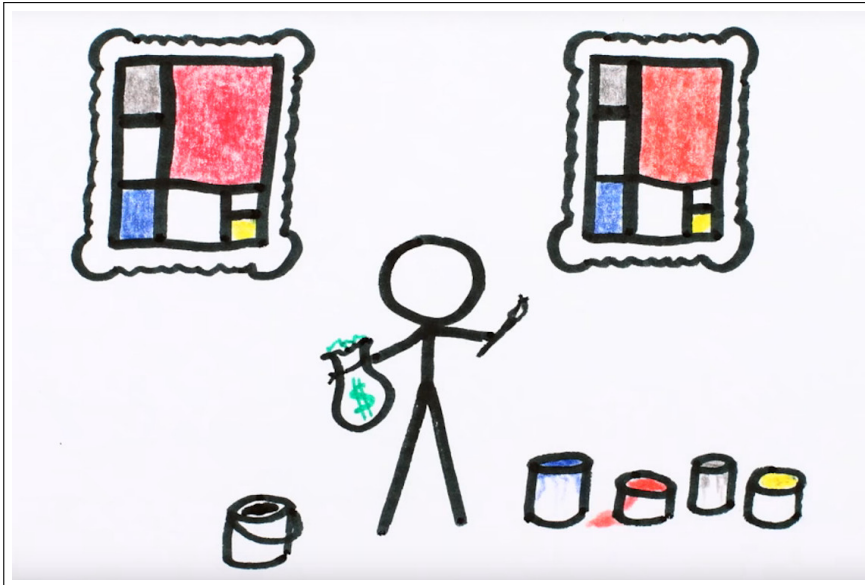
X136
Erläuterung

Unsere Gesellschaft lebt von technisch-wissenschaftlichem Verständnis, doch verstehen die meisten herzlich wenig, ja vermeiden und verachten es geradezu. Zum ewigen Scheinkonflikt von Theorie und Anwendung, zur Wechselwirkung von Grundlagenforschung und technischer Nutzung zitiere ich Albert Einstein aus seiner Rede anlässlich der Eröffnung der 7. Deutschen Funkausstellung in Berlin 1930 (siehe youtu.be/VqvGRVM2jk8).

Verehrte An- und Abwesende!

Wenn Ihr den Rundfunk höret, so denkt auch daran, wie die Menschen in den Besitz dieses wunderbaren Werkzeuges der Mitteilung gekommen sind. Der Urquell aller technischen Errungenschaften ist die göttliche Neugier und der Spieltrieb des bastelnden und grübelnden Forschers und nicht minder die konstruktive Phantasie des technischen Erfinders. [...]

Sollen sich auch alle schämen, die gedankenlos sich der Wunder der Wissenschaft und Technik bedienen und nicht mehr davon geistig erfasst haben als die Kuh von der Botanik der Pflanzen, die sie mit Wohlbehagen frisst.



Als wunderschönes Video von MinutePhysics, youtu.be/owPC60Ue0BE (10min).

A single quantum cannot be cloned

If a photon of definite polarization encounters an excited atom, there is typically some nonvanishing probability that the atom will emit a second photon by stimulated emission. Such a photon is guaranteed to have the same polarization as the original photon. But is it possible by this or any other process to amplify a quantum state, that is, to produce several copies of a quantum system (the polarized photon in the present case) each having the same state as the original? If it were, the amplifying process could be used to ascertain the exact state of a quantum system: in the case of a photon, one could determine its polarization by first producing a beam of identically polarized copies and then measuring the Stokes parameters¹. We show here that the linearity of quantum mechanics forbids such replication and that this conclusion holds for all quantum systems.

Abstract des vielzitierten Artikels von W.K. Wootters, W.H. Zurek: *A single quantum cannot be cloned*. Nature 299 (1982) 802–803.

In *Nature* ist selbst eine kurze Notiz eine beachtliche Publikation; zur Geschichte siehe en.wikipedia.org/wiki/No-cloning_theorem.

Das berühmte **No-Cloning-Theorem** der Quantenmechanik besagt:

Es ist unmöglich, ein quantenmechanisches System perfekt auf ein zweites zu kopieren, ohne dabei das erste zu verändern.

Dies beruht auf einer einfachen Rechnung der Linearen Algebra:

Satz X11: das No-Cloning-Theorem

Sei V ein K -Vektorraum der Dimension $\dim V \geq 2$ und $e \in V \setminus \{0\}$. Dann existiert keine K -lineare Abbildung $T: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ mit

$$|v\rangle \otimes |e\rangle \mapsto |v\rangle \otimes |v\rangle \quad \text{für alle } v \in V.$$

😊 Es genügen die grundlegenden Rechenregeln aus Definition X1D. Die *Rechnung* ist erschütternd einfach, die physikalische *Interpretation* ebenso erschütternd tiefsinnig, siehe hierzu das oben zitierte Video.

Übung: Versuchen Sie es bitte zunächst selbst, bevor Sie weiterlesen. Die physikalische Interpretation / Anschauung / Realisierung ist schwer. Die Mathematik hingegen ist erfreulich leicht und in Ihrer Reichweite.

Beweis: Angenommen, es gäbe solch eine lineare Abbildung T . Wir wählen eine Basis $(a, b, \dots)$ von V und betrachten den Zustand

$$s := (|a\rangle + |b\rangle) \otimes |e\rangle \in V \otimes V.$$

Rechenweg 1: Wir multiplizieren erst aus und wenden dann T an.

$$\begin{aligned} s &\stackrel{\text{Bil}}{=} |a\rangle \otimes |e\rangle + |b\rangle \otimes |e\rangle \\ &\stackrel{\text{Lin}}{\mapsto} |a\rangle \otimes |a\rangle + |b\rangle \otimes |b\rangle \end{aligned}$$

Rechenweg 2: Wir wenden erst T an und multiplizieren dann aus.

$$\begin{aligned} s &\stackrel{\text{Def}}{=} (|a\rangle + |b\rangle) \otimes |e\rangle \stackrel{\text{Vor}}{\mapsto} (|a\rangle + |b\rangle) \otimes (|a\rangle + |b\rangle) \\ &\stackrel{\text{Bil}}{=} |a\rangle \otimes |a\rangle + |a\rangle \otimes |b\rangle + |b\rangle \otimes |a\rangle + |b\rangle \otimes |b\rangle \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich (dank X1D) führt zum Widerspruch. QED

😊 Scott Aaronson formuliert es prägnant, ebenso provokant wie wahr: *Quantum physics becomes much easier without physics. Stripped to its core, quantum computing is simply linear algebra and probability theory.*

Unser Vorbild ist die **Multiplikation** von Matrizen passender Größe:

$$\mu : K^{a \times b} \times K^{b \times c} \rightarrow K^{a \times c} : (u, v) \mapsto w = u \cdot v, \quad w_{ik} = \sum_{j=1}^b u_{ij} \cdot v_{jk}$$

Hier ist $U = K^{a \times b}$ ein linearer Raum über dem Ring $T = K^{a \times a}$ von links und über dem Ring $S = K^{b \times b}$ von rechts, und beide sind verträglich:

$$(t \cdot u) \cdot s = t \cdot (u \cdot s) \quad \text{für alle } t \in T, u \in U, s \in S$$

Wir sagen ${}_T U_S$ ist ein (T, S) -**linearer Raum** oder (T, S) -**Bimodul** (L1A). Ebenso $V = K^{b \times c}$ über (S, R) mit $R = K^{c \times c}$ und $W = K^{a \times c}$ über (T, R)

Das Produkt μ ist **(T, S, R) -bilinear**: (HM) $(u \cdot s) \cdot v = u \cdot (s \cdot v)$,
 (AL) $(u + u') \cdot v = (u \cdot v) + (u' \cdot v)$, (HL) $(t \cdot u) \cdot v = t \cdot (u \cdot v)$,
 (AR) $u \cdot (v + v') = (u \cdot v) + (u \cdot v')$, (HR) $u \cdot (v \cdot r) = (u \cdot v) \cdot r$.

für alle Vektoren $u, u' \in U$ und $v, v' \in V$ sowie Skalare $t \in T, s \in S, r \in R$. Wir nennen μ **additiv** rechts (AR) und links (AL), und **homogen** rechts (HR) und links (HL) und mittig (HM), Letzteres heißt auch **ausgeglichen**.

Wir betrachten Matrizen als zentrales Beispiel und extrahieren daraus die folgenden allgemeinen Begriffe. Die so entstehende Darlegung zu Tensorprodukten wird einerseits recht „einfach und konkret“ verlaufen: Was wir am zentralen Beispiel erkennen, formulieren wir nun allgemein.

Sie können, wenn Sie möchten, die folgenden Definitionen und Sätze auch ohne diese Einbettung in den konkreten Beispielkontext lesen. Das macht logisch keinen Unterschied, psychologisch hingegen schon: Die Darstellung wirkt dann vermutlich eher „abstrakt und schwierig“.

Ich plädiere dafür, wie bei nahezu allen mathematischen Themen, zunächst von gut gewählten, konkreten Beispielen auszugehen. Daraus schälen wir dann den allgemeingültigen, wahren Kern. Von diesem höheren Standpunkt schreiten wir zu Anwendungen.

Allgemein gilt der Erfahrungsgrundsatz: Ein gut verstandenes Beispiel nützt Ihnen mehr als drei schlecht verstandene Sätze. Umgekehrt gilt: Ein gut verstandener Satz bündelt 1003 Beispiele. Nutzen Sie beides!
Übung: Wiederholen Sie lineare Räume L1A, rechts, links, Bimoduln.

Definition X2A: Produkt

Seien T, S, R Ringe und darüber ${}_T U_S$, ${}_S V_R$ und ${}_T W_R$ lineare Räume.

(1) Ein **Produkt** von ${}_T U_S$ und ${}_S V_R$ über (T, S, R) ist eine Abbildung

$$\otimes : U \times V \rightarrow W : (u, v) \mapsto u \otimes v,$$

die bilinear ist über (T, S, R) gemäß den obigen Axiomen (A) und (H).

$$\text{Bil}_{(T, S, R)}(U, V; W) = \{ \mu : U \times V \rightarrow W \text{ bilinear über } (T, S, R) \}$$

Zur Vereinfachung können wir T, R auslassen: Für ein **Produkt**

$$\otimes : U \times V \rightarrow W : (u, v) \mapsto u \otimes v$$

über S von U_S und ${}_S V$ nach W fordern wir als bilinear nur (A) und (HM).

$$\text{Bil}_S(U, V; W) = \{ \mu : U \times V \rightarrow W \text{ bilinear über } S \}$$

Allein über S oder ersatzweise mit $T = R = \mathbb{Z}$ gilt $\text{Bil}_S = \text{Bil}_{(\mathbb{Z}, S, \mathbb{Z})}$.

Beispiel: Ist $T = S = R$ kommutativ und U, V, W zentral über S , so gilt $s(u \otimes v) \stackrel{\text{HL}}{=} (su) \otimes v \stackrel{\text{Znt}}{=} (us) \otimes v \stackrel{\text{HM}}{=} u \otimes (sv) \stackrel{\text{Znt}}{=} u \otimes (vs) \stackrel{\text{HR}}{=} (u \otimes v)s \stackrel{\text{Znt}}{=} s(u \otimes v)$. Jede dieser sechs Eigenschaften folgt demnach aus den anderen fünf.

😊 Diese vereinfachte Sichtweise haben wir im vorigen Abschnitt §X1 eingenommen, als wir über einem Körper K mit zentralen Vektorräumen gearbeitet haben. Wie unser Matrixbeispiel motiviert, müssen wir im Allgemeinen auch verschiedene und nicht-kommutative Ringe erwarten. Ehrliche Notation ist etwas aufwändiger, die Mathematik bleibt dieselbe.

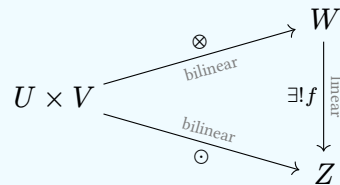
Erinnerung: $\mathbb{Z}$ -lineare Räume und ihre $\mathbb{Z}$ -linearen Abbildungen sind schlicht abelsche Gruppen und ihre Gruppenhomomorphismen. (L1K) Wenn wir T und R auslassen, so können wir einfach $T = R = \mathbb{Z}$ setzen, denn jede additive Abbildung ist automatisch $\mathbb{Z}$ -linear und umgekehrt.

🤔 Wann ist ein Produkt frei? Wir haben im Allgemeinen keine Basen, also ist auch nicht die Basiseigenschaft X1D. Glücklicherweise bleibt uns „dual“ die universelle Abbildungseigenschaft des Tensorprodukts X1G, und genau diese Außenperspektive erheben wir nun zur Definition!

Definition X2A: Tensorprodukt

↔ UAE X1G

(2) Ein **Tensorprodukt** des Paares (U, V) über (T, S, R) ist ein Produkt $\otimes : U \times V \rightarrow W$ mit der folgenden universellen Abbildungseigenschaft:



Jedes Produkt $\odot : U \times V \rightarrow Z$ faktorisiert eindeutig über $\otimes$, das heißt es existiert genau eine (T, R) -lineare Abbildung $f : W \rightarrow Z$ mit $\odot = f \circ \otimes$. Vornehm gesagt ist dies äquivalent zur Bijektivität folgender Abbildung:

$$\Phi_{\otimes}^Z : \text{Hom}_{(T,R)}(W, Z) \rightarrow \text{Bil}_{(T,S,R)}(U, V; Z) : f \mapsto \odot = f \circ \otimes$$

Allein über S , ersatzweise mit $T = R = \mathbb{Z}$, ist f entsprechend nur additiv. Gilt dies, so heißt das Produkt $\otimes$ **frei** und $W =: U \otimes V$ sein **Tensorraum**.

- 😊 Mit anderen Worten: (1) $\otimes$ ist ein Produkt und (2) $\otimes$ ist universell, das heißt, jedes Konkurrenzprodukt $\odot$ faktorisiert eindeutig über $\otimes$.
 - 😊 Die Bijektivität von $\Phi_{\otimes}^Z$ bedeutet, dass wir jede *bilineare* Abbildung $\odot : U \times V \rightarrow Z$ in eine *lineare* Abbildung $f : W \rightarrow Z$ umrechnen können.
 - 😊 Sie sehen dreimal die UAE: als Diagramm, in Worten, als Bijektion.
- In Satz X2D zeigen wir die Eindeutigkeit bis auf eindeutige Isomorphie. Für *das* Tensorprodukt von (U, V) über (T, S, R) schreiben wir dann

$$\otimes : U \times V \rightarrow U \otimes_S V : (u, v) \mapsto u \otimes v.$$

In dieser Schreibweise gilt $u \odot v = f(u \otimes v)$ für alle $u \in U$ und $v \in V$.

⚠ Das Symbol „ $\otimes$ “ hat zwei Bedeutungen: $u \otimes v$ ist das *Tensorprodukt* der Vektoren $u \in U$ und $v \in V$, andererseits ist $U \otimes_S V$ der *Tensorraum*. (Er ist *nicht* das Bild der Produktabbildung, wird aber davon *erzeugt*.)

Ausführlich $(U_S) \otimes_S ({}_S V)$ oder $U_S \otimes {}_S V$, kurz $U \otimes_S V$, allzu kurz $U \otimes V$. Wenn der Ring S aus dem Kontext klar ist, müssen wir ihn nicht explizit wiederholen. Erfahrungsgemäß ist dies jedoch anfangs meist hilfreich.

Wir erinnern, nun nochmal allgemein, an die Begriffe aus Definition X1D:

Definition X2A: Tensoren, einfach vs verschränkt [*simple vs entangled*]

(3) Jedes Element $w \in U \otimes V$ des Tensorraums nennen wir einen **Tensor**. Gilt $w = u \otimes v$ mit $u \in U$ und $v \in V$, so nennen wir den Tensor w **einfach** oder **elementar** oder **rein**, andernfalls heißt der Tensor w **verschränkt**.

Sei $w \in U \otimes V$. Gilt $w = \sum_{i=1}^r u_i \otimes v_i$ mit $r \in \mathbb{N}$ sowie $u_i \in U$ und $v_i \in V$, so sagen wir, w hat **Rang** $\leq r$. Rang genau r bedeutet $\leq r$, aber nicht $< r$.

Anders gesagt, die Menge der **einfachen Tensoren** ist das Bild der Produktabbildung $\otimes : U \times V \rightarrow U \otimes V$. Diese ist i.A. nicht surjektiv!

Korollar X2G garantiert: Jeder Tensor hat endlichen Rang. Das heißt:

Der Tensorraum besteht aus allen **Summen** einfacher Tensoren (X2G).

Solche Summen $w = \sum_{i=1}^r u_i \otimes v_i$ sind im Allgemeinen nicht einfach.

Wir haben dies zuvor bereits im Anschluss an Definition X1D diskutiert und illustriert. Wir führen die Frage der Erzeugung fort in X2G/X2N.

- 😊 Über einem Körper K können wir jedes Tensorprodukt sehr konkret erklären durch die Basiseigenschaft, das war die Idee zur Definition X1D.
 - 😞 Für lineare Räume über beliebigen Ringen verfügen wir meist nicht über Basen, daher ist diese Sichtweise allgemein nicht mehr hilfreich.
 - 😊 Wir vollziehen daher den nötigen Perspektivwechsel und nutzen zur allgemeinen Definition X2A die **universelle Abbildungseigenschaft**.
- ⚠ Statt einer expliziten Definition durch Konstruktion (wie etwa in X1c) folgen wir der inneren Logik und den äußeren Zwängen und formulieren eine implizite Definition durch eine charakterisierende Eigenschaft. Das ist mathematisch gesehen der beste Weg: effizient und elegant. Beim ersten Kontakt ist es ungewohnt und bedarf der Gewöhnung. Wie immer gelingt Ihnen dies am besten durch aktive Einübung. Die elegante Definition X2A mittels UAE zieht sofort Arbeit nach sich: Existenz und Eindeutigkeit müssen anschließend noch gezeigt werden. Auch mit diesen Konstruktionen üben Sie Verständnis und Anwendung.

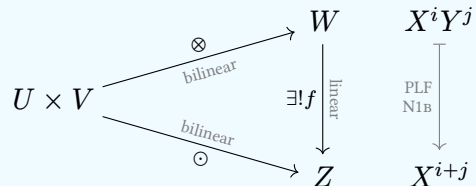
Beispiel X2B: Polynommodell des Tensorprodukts → X1F, X1E

Über jedem CRing K betrachten wir $U = V = K[X]$ und vergleichen:

$$\odot : K[X] \times K[X] \rightarrow Z := K[X] \quad : (u, v) \mapsto u \odot v := u(X) v(X),$$

$$\otimes : K[X] \times K[X] \rightarrow W := K[X, Y] : (u, v) \mapsto u \otimes v := u(X) v(Y).$$

Beides sind Produkt, biadditiv (A) und homogen (H), $\odot$ ist das Übliche. Das zweite Produkt $\otimes$ hat die universelle Abbildungseigenschaft (X2c). Konkret das erste Konkurrenzprodukt $\odot$ faktorisiert eindeutig über $\otimes$:



Für jedes solche f gilt $f(X^i Y^j) = f(X^i \otimes X^j) = X^i \odot X^j = X^{i+j}$. Dank PLF N1B existiert $f : W \rightarrow Z : X^i Y^j \mapsto X^{i+j}$ linear über K .

$$\begin{array}{c}
 v(Y) \uparrow \\
 \begin{array}{cccccc}
 u_0 v_3 X^0 Y^3 & u_1 v_3 X^1 Y^3 & u_2 v_3 X^2 Y^3 & u_3 v_3 X^3 Y^3 & u_4 v_3 X^4 Y^3 \\
 + & & & & \\
 u_0 v_2 X^0 Y^2 & u_1 v_2 X^1 Y^2 & u_2 v_2 X^2 Y^2 & u_3 v_2 X^3 Y^2 & u_4 v_2 X^4 Y^2 \\
 + & & & & \\
 u_0 v_1 X^0 Y^1 & u_1 v_1 X^1 Y^1 & u_2 v_1 X^2 Y^1 & u_3 v_1 X^3 Y^1 & u_4 v_1 X^4 Y^1 \\
 + & & & & \\
 u_0 v_0 X^0 Y^0 & u_1 v_0 X^1 Y^0 & u_2 v_0 X^2 Y^0 & u_3 v_0 X^3 Y^0 & u_4 v_0 X^4 Y^0
 \end{array} \\
 \cdot \quad \left| \quad u_0 X^0 + u_1 X^1 + u_2 X^2 + u_3 X^3 + u_4 X^4 \quad u(X) \right.
 \end{array}$$

😊 Wir rechnen gleich in Satz X2c allgemein nach, dass unser Beispiel $\otimes : U \times V \rightarrow W$ tatsächlich die universelle Abbildungseigenschaft hat.

Konkret vergleichen wir $\otimes$ mit dem Konkurrenzprodukt $\odot : U \times V \rightarrow Z$ und konstruieren die geforderte lineare Abbildung f mit $\odot = f \circ \otimes$.

Alle Daten liegen explizit vor, daher gelingt uns diese Rechnung leicht: Sowohl die Eindeutigkeit als auch die Existenz von f sind offensichtlich.

😊 Hinter diesem schön einfachen Beispiel steht ein nützliches Prinzip...

Satz X2c: Prinzip der bilinearen Fortsetzung und Freiheit

Seien T, R Ringe sowie darüber ${}_T U, V_R$ und ${}_T W_R$ lineare Räume.

(1) Gegeben seien Basen $(u_i)_{i \in I}$ von U und $(v_j)_{j \in J}$ von V sowie eine beliebige Familie $(w_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ in W , die Gram-Matrix. Dann existiert genau eine bilineare Abbildung $\otimes : U \times V \rightarrow W : (u_i, v_j) \mapsto w_{ij}$, nämlich

$$(\sum_{i \in I} t_i u_i) \otimes (\sum_{j \in J} v_j r_j) = \sum_{(i,j) \in I \times J} t_i w_{ij} r_j$$

für alle Linearkombinationen mit Koeffizienten $t \in R^{(I)}$ und $r \in T^{(J)}$.

(2) Vereinfachend sei $T = R$ kommutativ und alle Räume zentral über R . Genau dann ist $\otimes : U \times V \rightarrow W$ ein Tensorprodukt über R , erfüllt also die universelle Eigenschaft X2A, wenn $(w_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ eine Basis von W ist.

😊 Tensorprodukte sind leicht für Vektorräume über jedem Körper, und allgemein für alle freien, zentralen Moduln über jedem CRing.

⚠ Jedes Produkt $\otimes$ schickt $(u_i, 0)$ und $(0, v_j)$ in $U \times V$ nach 0 in W .

Beweis: (1a) *Eindeutigkeit:* Sind $\otimes, \odot : U \times V \rightarrow W : (u_i, v_j) \mapsto w_{ij}$ bilinear, so folgt $\otimes = \odot$, denn für alle $u = \sum_i t_i u_i$ und $v = \sum_j v_j r_j$ gilt:

$$\begin{aligned}
 (\sum_i t_i u_i) \otimes (\sum_j v_j r_j) &\stackrel{\text{Bil}}{=} \sum_i \sum_j t_i (u_i \otimes v_j) r_j \stackrel{\text{Vor}}{=} \sum_{i,j} t_i w_{ij} r_j \\
 (\sum_i t_i u_i) \odot (\sum_j v_j r_j) &\stackrel{\text{Bil}}{=} \sum_i \sum_j t_i (u_i \odot v_j) r_j \stackrel{\text{Vor}}{=} \sum_{i,j} t_i w_{ij} r_j
 \end{aligned}$$

(1b) *Existenz:* Diese Formel definiert eine Abbildung $\otimes : U \times V \rightarrow W$, sie erfüllt $(u_i, v_j) \mapsto w_{ij}$ für alle $(i, j) \in I \times J$ und ist (T, R) -bilinear.

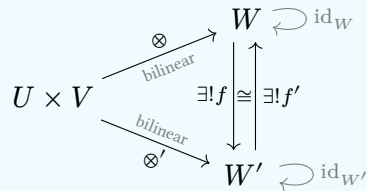
(2a) „ $\Leftarrow$ “: Sei $(w_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ eine Basis von W . Sei $\odot : U \times V \rightarrow Z$ bilinear. Dank PLF N1B existiert genau eine R -lineare Abbildung $f : W \rightarrow Z$ mit $f(w_{ij}) = u_i \odot v_j$ für alle $(i, j) \in I \times J$. Dank (1a) gilt $\odot = f \circ \otimes$.

(2b) „ $\Rightarrow$ “: Angenommen, das Produkt $\otimes : U \times V \rightarrow W$ erfüllt die UAE X2A. Dasselbe gilt für $\odot : U \times V \rightarrow R^{(I \times J)}$ mit $(u_i, v_j) \mapsto e_{ij}$ dank (1b) & (2a).

Der folgende Satz konstruiert den R -Isomorphismus $(f, f') : W \cong R^{(I \times J)}$ mit $\otimes = f' \circ \odot$. Somit ist $(w_{ij} = f'(e_{ij}))_{(i,j) \in I \times J}$ eine R -Basis von W . QED

Satz X2D: Eindeutigkeit des Tensorprodukts

Seien T, S, R Ringe und darüber ${}_T U_S, {}_S V_R$ und ${}_T W_R$ lineare Räume. Zu je zwei Tensorprodukten $\otimes : U \times V \rightarrow W$ und $\otimes' : U \times V \rightarrow W'$ existiert genau ein Isomorphismus $(f, f') : W \cong W'$ mit $\otimes' = f' \circ \otimes$.

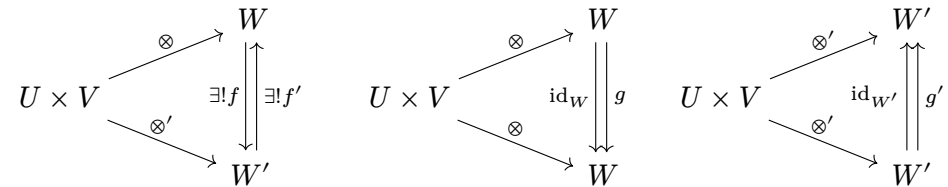


Für das Tensorprodukt von (U, V) über (T, S, R) schreiben wir fortan

$$\otimes : U \times V \rightarrow U \otimes_S V : (u, v) \mapsto u \otimes v,$$

ausführlich $(U_S) \otimes_S ({}_S V)$ oder $U_S \otimes {}_S V$, kurz $U \otimes_S V$, allzu kurz $U \otimes V$. Zur Vereinfachung können wir T, R auslassen, wie in X2A vereinbart.

Beweis: Wir konstruieren (f, f') durch vierfache Anwendung der UAE:



(a) Dank der UAE des Tensorprodukts $\otimes$ angewendet auf $\otimes'$ existiert genau eine (T, R) -lineare Abbildung $f : W \rightarrow W'$ mit $\otimes' = f \circ \otimes$.

(b) Dank der UAE des Tensorprodukts $\otimes'$ angewendet auf $\otimes$ existiert genau eine (T, R) -lineare Abbildung $f' : W' \rightarrow W$ mit $\otimes = f' \circ \otimes'$.

(c) Für $g := f' \circ f$ gilt $g \circ \otimes \stackrel{(a)}{=} f' \circ \otimes' \stackrel{(b)}{=} \otimes \stackrel{\text{Ntr}}{=} \text{id}_W \circ \otimes$, also $g = \text{id}_W$ dank Eindeutigkeit / UAE des Tensorprodukts $\otimes$ angewendet auf $\otimes$.

(d) Für $g' := f \circ f'$ gilt $g' \circ \otimes' \stackrel{(b)}{=} f \circ \otimes \stackrel{(a)}{=} \otimes' \stackrel{\text{Ntr}}{=} \text{id}_{W'} \circ \otimes'$, also $g' = \text{id}_{W'}$ dank Eindeutigkeit / UAE des Tensorprodukts $\otimes'$ angewendet auf $\otimes'$.

Somit gilt $f' \circ f = \text{id}_W$ und $f \circ f' = \text{id}_{W'}$, also $(f, f') : W \cong W'$. QED

Erinnerung: die Rechenregeln für Tensoren

Seien T, S, R Ringe und darüber ${}_T U_S, {}_S V_R$ und ${}_T W_R$ lineare Räume. Wir wissen, dass das Tensorprodukt $\otimes : U \times V \rightarrow U \otimes V$ eindeutig ist, genauer: Je zwei Tensorprodukte sind eindeutig isomorph. Wir wollen nun die Existenz eines solchen Tensorprodukts beweisen, durch eine geeignete Konstruktion. Zuvor erinnern wir uns nochmal an unser Ziel:

- (1) Ein **Produkt** $\otimes : U \times V \rightarrow W$ erfüllt: (HM) $(u \cdot s) \otimes v = u \otimes (s \cdot v)$, (AL) $(u + u') \otimes v = (u \otimes v) + (u' \otimes v)$, (HL) $(t \cdot u) \otimes v = t \cdot (u \otimes v)$, (AR) $u \otimes (v + v') = (u \otimes v) + (u \otimes v')$, (HR) $u \otimes (v \cdot r) = (u \otimes v) \cdot r$.

für alle Vektoren $u, u' \in U$ und $v, v' \in V$ sowie Skalare $t \in T, s \in S, r \in R$.

(2) Für ein **Tensorprodukt** fordern wir genau diese Eigenschaften, doch sonst keine weiteren, also überflüssigen Relationen (UAE).

😊 Das ist die Forderung der universellen Abbildungseigenschaft! Genau so wollen wir daher in der folgenden Konstruktion vorgehen: Wir bauen einen linearen Raum, der genau diese Forderungen erfüllt. Dieser genial-einfache Trick ist naheliegend, aber erst im Rückblick.

Existenz des Tensorprodukts

Unser Ziel ist der folgende, wunderbar allgemeine Existenzsatz.

♦ **Satz X2F:** Existenz des Tensorprodukts

Zu $({}_T U_S, {}_S V_R)$ über (T, S, R) existiert ein Tensorprodukt $\otimes : U \times V \rightarrow W$.

☹ Dieser abstrakte Existenzsatz ist beruhigend, doch für sich alleine noch längst nicht so hilfreich, wie wir es gerne hätten und benötigen. Hermann Weyl (1885–1955) schrieb dazu in seinem berühmten Artikel *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik* 1921 die weisen Worte:

[Ein Existenzsatz zeigt] das Vorhandensein eines Schatzes, ohne jedoch zu verraten, an welchem Ort. [...] Nicht das Existenztheorem ist das Wertvolle, sondern die im Beweise geführte Konstruktion.

😊 Die folgende Konstruktion erlaubt uns, den Schatz zu heben! Während die Eindeutigkeit leicht durch den universellen Trick gelingt, müssen wir für die Existenz eine detaillierte Konstruktion anstrengen. Sie liefert eine explizite Präsentation durch Erzeuger und Relationen, und erlaubt uns damit eine genauere Untersuchung der Feinstruktur.

Wir lassen zunächst die Ringe T, R außer Acht und fokussieren uns auf S :

Satz X2E: Existenz des Tensorprodukts, Teil 1 über S

Zu $(U_S, S V)$ über S existiert ein Tensorprodukt $\otimes : U \times V \rightarrow W$.

Wir betrachten die Menge $U \times V$ aller Paare (u, v) mit $u \in U$ und $v \in V$. Sei $F = \mathbb{Z}^{(U \times V)}$ der $\mathbb{Z}$ -lineare Raum mit Basis $U \times V$: Jedes Element $\sigma \in F$ ist eine (wie immer endliche) $\mathbb{Z}$ -Linearkombination $\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot (u_i, v_i)$ von Paaren $(u_i, v_i) \in U \times V$ mit Koeffizienten $\sigma_i \in \mathbb{Z}$. Hierin setzen wir

$$G := \left\langle \begin{array}{l} (u + u', v) - (u, v) - (u', v) \\ (u, v + v') - (u, v) - (u, v') \\ (u \cdot s, v) - (u, s \cdot v) \end{array} \middle| \begin{array}{l} u, u' \in U \\ v, v' \in V \\ s \in S \end{array} \right\rangle_{\mathbb{Z}} \leq F.$$

Wir erhalten die Quotientenabbildung $q : F \twoheadrightarrow W := F/G : \sigma \mapsto [\sigma]$.

- (1) Damit ist $\otimes : U \times V \rightarrow W : (u, v) \mapsto u \otimes v := [(u, v)]$ ein Produkt
(2) und erfüllt zudem die universelle Abbildungseigenschaft X2A.

😊 Wir präsentieren hier $W = F/G$ durch **Erzeuger** und **Relationen**, als $\mathbb{Z}$ -freier Raum F der Erzeuger $(u, v) \in U \times V$, ohne jegliche Relationen, und erzwingen die gewünschten Relationen G durch Quotientenbildung.

⚠ Wir müssen nun „nur“ noch sorgsam und geduldig nachrechnen, dass diese Konstruktion das gewünschte Ziel tatsächlich erreicht. Genau dies ist Gegenstand des im Folgenden ausgeführten Beweises.

😊 Das ist eigentlich Routinearbeit – nachdem man es ein paar Mal durchexerziert hat. In diesem Zusammenhang schrieb Hermann Weyl:

*Nicht im Beweis einer gegebenen Konstruktion,
sondern in der Erfindung der Konstruktion liegt
in den meisten Fällen die eigentliche Schwierigkeit.*

Da dieser routinierte Nachweis für Sie eine der ersten Gelegenheiten ist, und Sie genau diese Sorgfalt und Routine erst noch erlernen sollen, möchte ich hier ein gutes Vorbild geben und dies für Sie vorführen. Zudem können Sie so etwaige Verständnisschwierigkeiten klären.

Beweis: (1) Für alle $u, u' \in U, v, v' \in V, s \in S$ gilt nach Konstruktion:

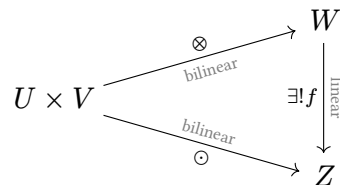
$$(AL) \quad (u + u') \otimes v = u \otimes v + u' \otimes v,$$

$$(AR) \quad u \otimes (v + v') = u \otimes v + u \otimes v',$$

$$(HM) \quad (u \cdot s) \otimes v = u \otimes (s \cdot v).$$

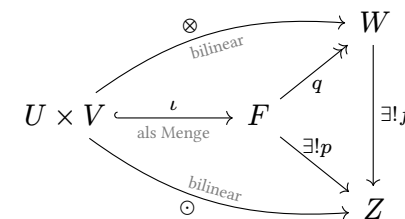
Warum? Das sind genau die erzwungenen Relationen im Kern $G \leq F$.

(2) Unser Produkt $\otimes$ hat die universelle Abbildungseigenschaft X2A:



Sei $\odot : U \times V \rightarrow Z$ ein weiteres Produkt. Wir zeigen, dass genau eine (T, R) -lineare Abbildung $f : W \rightarrow Z$ mit $\odot = f \circ \otimes$ existiert.

(2a) *Eindeutigkeit:* Vorgelegt seien $f, g : W \rightarrow Z$ mit $\odot = f \circ \otimes = g \circ \otimes$, also $f(u \otimes v) = g(u \otimes v)$ für alle $(u, v) \in U \times V$. Daraus folgt $f = g$, denn W wird erzeugt von $(u \otimes v)_{(u,v) \in U \times V}$ (N1A).



(2b) *Existenz:* Wir nutzen $F = \mathbb{Z}^{(U \times V)}$ mit $\mathbb{Z}$ -Basis $U \times V$. Dank PLF N1b existiert genau eine $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung $p : F \rightarrow Z : (u, v) \mapsto u \odot v$. Da $\odot$ ein Produkt ist, gilt $G \subseteq \text{Ker}(p)$. Dank L3c faktorisiert $p = f \circ q$ in unseren Quotienten q und eine $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung $f : W \rightarrow Z$. QED

Diese genial-einfache Konstruktion ist naheliegend... im Rückblick!
Jeder Konstruktionsschritt ist leicht, aber viele greifen ineinander.

Existenz des Tensorprodukts durch explizite Konstruktion

X221

Die Konstruktion von $\otimes : U \times V \rightarrow W$ benötigt nur den mittleren Ring S . Wir können nun die Ringe T, R links und rechts wieder ins Spiel bringen.

Satz X2F: Existenz des Tensorprodukts, Teil 2 über (T, S, R)

Zu $({}_T U_S, {}_S V_R)$ über (T, S, R) existiert ein Tensorprodukt $\otimes : U \times V \rightarrow W$.

Genauer: Dank X2E haben wir die abelsche Gruppe $W = U \otimes_S V$.
(3) Diese wird aufgewertet zu einem (T, R) -linearen Raum durch

$$\begin{aligned} \cdot : T \times W &\rightarrow W : t \cdot [(u, v)] = [(t \cdot u, v)], \\ \cdot : W \times R &\rightarrow W : [(u, v)] \cdot r = [(u, v \cdot r)]. \end{aligned}$$

(4) Damit ist unser Produkt $\otimes : U \times V \rightarrow W$ nun bilinear über (T, S, R)
(5) und erfüllt zudem die universelle Abbildungseigenschaft X2A.

😊 Wir müssen unsere Konstruktion aus X2E nicht ändern, nur erweitern.
Alle dazu nötigen Relationen sind bereits in ${}_T U$ und V_R codiert. Schön!

Aufgabe: Alle Daten liegen explizit vor, rechnen Sie es sorgsam nach!
So gewinnen Sie Übung und Sicherheit mit dieser Konstruktion.

Existenz des Tensorprodukts durch explizite Konstruktion

X222
Erläuterung

Beweis: (3) *Wohldefiniertheit:* Auf $F = \mathbb{Z}^{(U \times V)}$ haben wir

$$\cdot : T \times F \rightarrow F : t \cdot (u, v) = (t \cdot u, v).$$

Für jeden Skalar $t \in T$ gilt $t \cdot G \subseteq G$, denn dies gilt auf den Erzeugern:

$$\begin{aligned} t \cdot [(u + u', v) - (u, v) - (u', v)] &= (t \cdot u + t \cdot u', v) - (t \cdot u, v) - (t \cdot u', v) \\ t \cdot [(u, v + v') - (u, v) - (u, v')] &= (t \cdot u, v + v') - (t \cdot u, v) - (t \cdot u, v') \\ t \cdot [(u \cdot s, v) - (u, s \cdot v)] &= ((t \cdot u) \cdot s, v) - ((t \cdot u), s \cdot v) \end{aligned}$$

Somit erhalten wir auf $W = F/G$ die wohldefinierte Linksoperation

$$\cdot : T \times W \rightarrow W : t \cdot [(u, v)] = [(t \cdot u, v)].$$

Ebenso operiert der Ring R von rechts auf $W = F/G$ vermöge

$$\cdot : W \times R \rightarrow W : [(u, v)] \cdot r = [(u, v \cdot r)].$$

Damit ist W ein (T, R) -Bimodul: Rechnen Sie es nach!

Existenz des Tensorprodukts durch explizite Konstruktion

X223
Erläuterung

(3a) Die Linksoperation $\cdot : T \times F \rightarrow F : t \cdot (u, v) = (t \cdot u, v)$ erfüllt

$$1_T \cdot (u, v) = (u, v) \quad \text{und} \quad (t \cdot t') \cdot (u, v) = t \cdot (t' \cdot (u, v)).$$

Demnach folgt für $\cdot : T \times W \rightarrow W$ ebenso

$$1_T \cdot [(u, v)] = [(u, v)] \quad \text{und} \quad (t \cdot t') \cdot [(u, v)] = t \cdot (t' \cdot [(u, v)]).$$

Die Operation ist zudem links-distributiv auf F , also auch auf W :

$$t \cdot [\sigma + \sigma'] = [t \cdot \sigma + t \cdot \sigma'] = [t \cdot \sigma] + [t \cdot \sigma'] = t \cdot [\sigma] + t \cdot [\sigma']$$

Die Operation ist *nicht* rechts-distributiv auf F , sondern erst auf W :

$$\begin{aligned} (t + t') \cdot [(u, v)] &= [(t \cdot u + t' \cdot u, v)] \\ &= [(t \cdot u, v)] + [(t' \cdot u, v)] = t \cdot [(u, v)] + t' \cdot [(u, v)] \end{aligned}$$

(3b) Für die Rechtsoperationen $\cdot : F \times R \rightarrow F : (u, v) \cdot r = (u, v \cdot r)$
und $\cdot : W \times R \rightarrow W : [(u, v)] \cdot r = [(u, v \cdot r)]$ gilt entsprechend dasselbe.

(3c) Beide sind verträglich, offensichtlich auf F , somit auch auf W .

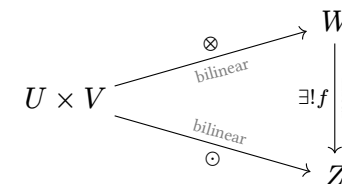
Existenz des Tensorprodukts durch explizite Konstruktion

X224
Erläuterung

(4) Unser $\otimes : U \times V \rightarrow W : (u, v) \mapsto u \otimes v := [(u, v)]$ ist ein Produkt, erfüllt also (AL), (AR), (HM) sowie nun zusätzlich (HL) und (HR).

😊 Die ersten drei erzwingen wir durch $W = F/G$. Die letzten beiden bekommen wir dank Konstruktion geschenkt. Rechnen Sie es nach!

(5) Unser Produkt $\otimes$ hat die universelle Abbildungseigenschaft X2A:



Sei $\odot : U \times V \rightarrow Z$ ein Produkt über (T, S, R) . Dank (2) existiert genau eine $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung $f : W \rightarrow Z$ mit $\odot = f \circ \otimes$. Sie ist automatisch (T, R) -linear. Homogenität gilt für einfache Tensoren, also für alle (N1A):
 $f(t \cdot (u \otimes v) \cdot r) = f((t \cdot u) \otimes (v \cdot r)) = (t \cdot u) \odot (v \cdot r) = t \cdot (u \odot v) \cdot r = t \cdot f(u \otimes v) \cdot r$.

😊 Somit ist $\otimes : U \times V \rightarrow W$ ein Tensorprodukt, wie gewünscht.

QED

Korollar X2c: Einfache Tensoren erzeugen alle Tensoren.

Seien T, S, R Ringe und darüber ${}_T U_S, {}_S V_R$ und ${}_T W_R$ lineare Räume.

(1) Die einfachen Tensoren $u \otimes v$ erzeugen den Tensorraum $U \otimes_S V$.

Jeder beliebige Tensor $w \in U \otimes_S V$ ist eine Summe $w = \sum_{k=1}^{\ell} u_k \otimes v_k$ endlicher Länge $\ell \in \mathbb{N}$ mit Faktoren $u_1, \dots, u_{\ell} \in U$ und $v_1, \dots, v_{\ell} \in V$.

Beweis: (1) Das folgt aus der Konstruktion F/G in Satz X2F.

QED

⚠ Die Darstellung ist i.A. nicht eindeutig, nicht einmal ihre Länge ℓ :

$$\begin{aligned} w &= u \otimes v = (u_1 + u_2) \otimes (v_1 + v_2) \\ &= (u_1 \otimes v_1) + (u_1 \otimes v_2) + (u_2 \otimes v_1) + (u_2 \otimes v_2). \end{aligned}$$

😊 Minimale Länge $\ell = 0$ entspricht dem Nullelement $w = 0$ in $U \otimes_S V$.

😊 Minimale Länge $\ell = 1$ entspricht einfachen Tensoren $w = u \otimes v \neq 0$.

Zu $w \in U \otimes V$ ist der **Tensorrang** $\text{rang}(w)$ die minimale Länge $\ell \in \mathbb{N}$ aller Summendarstellungen $w = \sum_{k=1}^{\ell} u_k \otimes v_k$ durch einfache Tensoren.

Korollar X2c: Einfache Tensoren erzeugen alle Tensoren.

(2) Angenommen, $(u_i)_{i \in I}$ erzeugt U über T und $(v_j)_{j \in J}$ erzeugt V über R , dann wird der Tensorraum $U \otimes_S V$ über (T, R) erzeugt von

$$(u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in I \times J}.$$

Jeder Tensor $w \in U \otimes_S V$ ist eine Summe $w = \sum_{k=1}^{\ell} t_k (u_{i_k} \otimes v_{j_k}) r_k$ mit endlicher Länge $\ell \in \mathbb{N}$ sowie $t_1, \dots, t_{\ell} \in T$ und $r_1, \dots, r_{\ell} \in R$.

Beweis: (2) Gemäß (1) ist w eine Summe einfacher Tensoren $u \otimes v$.

Es gilt $u = \sum_{m=1}^M t_m u_{i_m}$ mit $t_m \in T$ und $v = \sum_{n=1}^N v_{j_n} r_n$ mit $r_n \in R$, also $u \otimes v = \sum_{m,n} t_m (u_{i_m} \otimes v_{j_n}) r_n$.

QED

😊 So konstruieren wir geeignete Erzeugendensysteme von $U \otimes_S V$, am besten möglichst kurz und somit effizient für unsere Rechnungen.

😊 In günstigen Fällen erhalten wir sogar eine Basis (X2c), insbesondere zentral über einem CRing $R = S = T$, am schönsten über einem Körper.

Das Tensorprodukt illustriert ein allgemein sehr nützliches Vorgehen:

- 1 Die universelle Eigenschaft X2A präzisiert, was wir eigentlich wollen.
- 2 Die Eindeutigkeit X2D zeigt, dass unser Ziel damit charakterisiert ist.
- 3 Die Konstruktion X2E/X2F zeigt, wie wir unser Ziel erreichen können.

Damit verfügen wir über zwei sich ergänzende Werkzeuge:

- 😊 Die Präsentation F/G ist konkret, aber leider schwer anzuwenden.
- 😊 Die universelle Eigenschaft ist abstrakt, dafür meist leicht zu nutzen.

Mathematische Objekte (Gruppen, lineare Räume, ...) lassen sich meist am besten verstehen und nutzen, wenn wir beide Sichtweisen anwenden: intern, konkret, Rechnen mit Elementen (Basen, Matrizen, ...) und extern, abstrakt, mit Abbildungen (Homomorphismen, PLF, ...).

Je nach Anwendung nutzen wir mehr die eine oder die andere, meist jedoch benötigen Sie beide Sichtweisen für die erfolgreiche Lösung.

😊 Lernen Sie beides zu nutzen, wie linke und rechte Hand.

Mathematische Objekte betrachten wir oft auf zwei duale Weisen, die zueinander komplementär sind und sich wunderbar ergänzen.

Menge X mit Struktur	Objekt X mit Morphismen
interne Beschaffenheit von X : Beziehung zwischen Elementen	externe Eigenschaften von X : Beziehung zwischen Objekten
Datenstruktur, Implementierung: Was ist X ? Wie ist X aufgebaut?	Verhalten, Semantik, Axiome: Was tut X ? Was leistet X für uns?
konkret, zugleich theoretisch: explizite Bauanleitung	abstrakt, zugleich angewandt: bequeme Bedienungsanleitung
Erzeuger und Relationen: Konstruktion $\Rightarrow$ Existenz	universelle Eigenschaft: Definition $\Rightarrow$ Eindeutigkeit

Wiederholung: Erklären Sie, sowohl intern als auch extern, jedes Ihrer Lieblingsobjekte: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, (\text{knifflig } \mathbb{R}, \mathbb{C}), \mathbb{K}[X], V = \langle \mathcal{B} \rangle_K^!, U \oplus V, U \otimes V$.

Genau wie für zwei Faktoren erklären wir das n -fache Tensorprodukt

$$T = {}_{R_0}(U_1)_{R_1} \otimes {}_{R_1}(U_2)_{R_2} \otimes \cdots \otimes {}_{R_{n-1}}(U_n)_{R_n}.$$

Gegeben seien hierzu Ringe $R_0, R_1, R_2, \dots, R_n$ und lineare Räume $U_1, U_2, \dots, U_n$, wobei U_i linear über (R_{i-1}, R_i) ist, wie oben vermerkt.

Übung zur Wiederholung: Formulieren Sie die Definition X2A und die anschließenden Sätze für das mehrfache Tensorprodukt.

😊 Alle Definitionen und Sätze verlaufen parallel zum vorigen Fall $n = 2$, mit gut gewählter Notation sogar noch etwas leichter und einheitlicher.

Warum, so fragen Sie, habe ich das nicht gleich allgemein ausgeführt? Nun ja, beim ersten Durchgang kostet schon der einfachste Fall $n = 2$ die wissbegierig Lernenden viel Mühe, und die zusätzliche Schreibarbeit für den allgemeinen Fall $n \in \mathbb{N}$ ist dabei nur Ballast ohne Mehrwert.

😊 Beim zweiten Durchgang ist der allgemeine Fall dann leicht, daher formuliere ich die Ausführung als lehrreiche Übung zur Wiederholung.

Definition X2H: multilineare Abbildung und interner Ausgleich

Sei $R = (R_0, R_1, \dots, R_n)$ eine Familie von Ringen und $U = (U_1, \dots, U_n)$ eine Familie linearer Räume über R , wobei U_i linear über (R_{i-1}, R_i) ist. Sei $\mu : \prod_{i=1}^n U_i \rightarrow W$ eine Abbildung in einen (R_0, R_n) -linearen Raum.

(1) Wir nennen μ **multiadditiv**, falls μ additiv in jedem U_i ist:

$$\mu(\dots, u_i + u'_i, \dots) = \mu(\dots, u_i, \dots) + \mu(\dots, u'_i, \dots)$$

(2) Wir nennen μ **multihomogen** über $R = (R_0, \dots, R_n)$ falls gilt:

$$\mu(r_0 \cdot u_1, u_2, \dots, u_n) = r_0 \cdot \mu(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$\mu(\dots, u_i \cdot r_i, u_{i+1}, \dots) = \mu(\dots, u_i, r_i \cdot u_{i+1}, \dots)$$

$$\mu(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n \cdot r_n) = \mu(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n) \cdot r_n$$

an jeder Stelle $i \in \{1, \dots, n\}$, für alle Skalare $r_i \in R_i$ und Vektoren $u_i \in U_i$. Gilt (1) und (2), so nennen wir μ kurz **R -multilinear**:

$$\text{Mul}_R(U; W) = \{ \mu : \prod_{i=1}^n U_i \rightarrow W \text{ multilinear über } R \}$$

Beispiel: Gegeben sei ein kommutativer Ring R und zentrale lineare Räume $U_1, \dots, U_n, W$ über R . Wir betrachten eine n -stellige Abbildung

$$\mu : U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \rightarrow W.$$

Genau dann ist μ multihomogen über $(R, R, \dots, R)$ wie in (2), wenn gilt:

$$\mu(\dots, u_i \cdot r, \dots) = \mu(\dots, u_i, \dots) \cdot r$$

an jeder Stelle $i \in \{1, \dots, n\}$, für alle Skalare $r \in R$ und Vektoren $u_i \in U_i$.

Übung: Beweisen Sie diese Äquivalenz (zunächst für $n = 2, 3, \dots$).

😊 Über jedem kommutativen Ring R erhalten wir den vertrauten Begriff der Multilinearität, wie wir ihn von der Determinante (O2A) kennen.

⚠ Für nicht-kommutative Ringe müssen wir behutsamer vorgehen. Hier ist die oben formulierte Definition X2H(2) genau die Richtige.

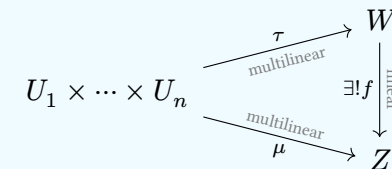
😊 Im kommutativen Fall stimmen beide Definitionen überein. Somit fügt sich schließlich alles wunderbar zusammen.

Definition X2I: das mehrfache Tensorprodukt

Sei $R = (R_0, R_1, \dots, R_n)$ eine Familie von Ringen und $U = (U_1, \dots, U_n)$ eine Familie linearer Räume über R , wobei U_i linear über (R_{i-1}, R_i) ist.

(1) Ein **Produkt** $\mu : \prod_{i=1}^n U_i \rightarrow Z$ ist eine R -multilineare Abbildung.

(2) Ein **Tensorprodukt** von U über R ist ein Produkt $\tau : \prod_{i=1}^n U_i \rightarrow W$ mit der folgenden universellen Abbildungseigenschaft:



Jedes Produkt $\mu : \prod_{i=1}^n U_i \rightarrow Z$ faktorisiert eindeutig über τ , das heißt es existiert genau eine (R_0, R_n) -lineare Abbildung $f : W \rightarrow Z$ mit $\mu = f \circ \tau$. Vornehm gesagt ist dies äquivalent zur Bijektivität folgender Abbildung:

$$\Phi_\tau^Z : \text{Hom}_{(R_0, R_n)}(W, Z) \rightarrow \text{Mul}_R(U; Z) : f \mapsto \mu = f \circ \tau$$

😊 Folgende Überlegungen übertragen sich leicht von $n = 2$ auf $n \in \mathbb{N}$:

Satz X2j: Prinzip der multilinearen Fortsetzung

Seien $U_1, \dots, U_n, W$ zentrale lineare Räume über dem CRing R .

Zu $i = 1, \dots, n$ sei $(u_{j_i})_{j_i \in J_i}$ eine Basis von U_i sowie $(w_j)_{j \in J}$ eine beliebige Familie in W , indiziert durch $J = J_1 \times \dots \times J_n$.

(1) Dann existiert genau eine R -multilineare Abbildung

$$\tau : U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow W : (u_{j_1}, \dots, u_{j_n}) \mapsto w_{j_1, \dots, j_n}, \quad \text{nämlich}$$

$$\tau\left(\sum_{j_1 \in J_1} \lambda_{1,j_1} u_{j_1}, \dots, \sum_{j_n \in J_n} \lambda_{n,j_n} u_{j_n}\right) = \sum_{j \in J} \lambda_{1,j_1} \dots \lambda_{n,j_n} w_j$$

für alle Linearkombinationen mit Koeffizienten $\lambda_i \in R^{(J_i)}$ für $i = 1, \dots, n$.

(2) Genau dann ist τ ein Tensorprodukt, erfüllt also die universelle Abbildungseigenschaft X2i, wenn $(w_j)_{j \in J}$ eine Basis von W ist.

Übung: Beweisen Sie dies nach dem bilinearen Vorbild von Satz X2c. Schließen Sie daraus das folgende schöne Anwendungsbeispiel.

Beispiel X2k: Polynommodell des mehrfachen Tensorprodukts

Über jedem kommutativen Ring K erhalten wir das Tensorprodukt von $U_1 = \dots = U_n = K[X]$ durch die vertraute Polynommultiplikation

$$\tau : K[X] \times \dots \times K[X] \rightarrow K[X_1, \dots, X_n]$$

$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto u_1(X_1) \dots u_n(X_n).$$

Allgemein $\tau : \prod_{i=1}^n K^{(J_i)} \rightarrow K^{(J)}$ und $(u_i)_{i=1}^n \mapsto u$ mit $u(j) = \prod_{i=1}^n u_i(j_i)$.

Satz X2l: Eindeutigkeit des mehrfachen Tensorprodukts

Sei $R = (R_0, R_1, \dots, R_n)$ eine Familie von Ringen und $U = (U_1, \dots, U_n)$ eine Familie linearer Räume über R , wobei U_i linear über (R_{i-1}, R_i) ist.

Dann sind zu diesen Räumen je zwei Tensorprodukte $\tau : \prod_{i=1}^n U_i \rightarrow W$ und $\tau' : \prod_{i=1}^n U_i \rightarrow W'$ eindeutig isomorph, d.h. es existiert genau ein (R_0, R_n) -Isomorphismus $(f, f') : W \cong W'$ mit $\tau' = f \circ \tau$ und $\tau = f' \circ \tau'$.

Übung: Beweisen Sie dies nach dem bilinearen Vorbild von Satz X2D.

Satz X2m: Existenz des mehrfachen Tensorprodukts

Sei $R = (R_0, R_1, \dots, R_n)$ eine Familie von Ringen und $U = (U_1, \dots, U_n)$ eine Familie linearer Räume über R , wobei U_i linear über (R_{i-1}, R_i) ist.

Zu U über R existiert ein Tensorprodukt $\tau : \prod_{i=1}^n U_i \rightarrow W =: \bigotimes_{i=1}^n U_i$.

Übung: Konstruieren Sie $W = F/G$ nach dem bilinearen Vorbild X2F. Aus dieser länglichen, aber erfreulich expliziten Konstruktion folgt:

Satz X2n: Einfache Tensoren erzeugen alle Tensoren.

(0) Jeder Tensor $w \in U_1 \otimes \dots \otimes U_n$ ist eine Summe $w = \sum_{j=1}^{\ell} u_{1,j} \otimes \dots \otimes u_{n,j}$ mit Länge $\ell \in \mathbb{N}$ und Faktoren $u_{i,j} \in U_i$ für $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, \ell$.

In U_i sei $\mathcal{A}_i = (u_{j_i})_{j_i \in J_i}$ eine Familie von Vektoren $u_{j_i} \in U_i$ mit $j_i \in J_i$. Ihr Produkt in $U_1 \otimes \dots \otimes U_n$ ist $\mathcal{A} = (u_j = u_{j_1} \otimes \dots \otimes u_{j_n})_{j \in J = J_1 \times \dots \times J_n}$.

(1) Gilt $U_i = \langle \mathcal{A}_i \rangle_{R_i}$ für $i = 1, \dots, n$, so folgt $U_1 \otimes \dots \otimes U_n = \langle \mathcal{A} \rangle_{R_n}$.

(2) Hat jede Familie $\mathcal{A}_i$ eine duale Familie $\mathcal{A}_i^*$, so ist $\mathcal{A}^*$ dual zu $\mathcal{A}$.

(3) Gilt $U_i = \langle \mathcal{A}_i \rangle_{R_i}^!$ für $i = 1, \dots, n$, so folgt $U_1 \otimes \dots \otimes U_n = \langle \mathcal{A} \rangle_{R_n}^!$.

Aufgabe: Aussage (0) folgt aus der Konstruktion F/G . Aussagen (1,2,3) erfordern gute Buchführung. Zeigen Sie dies für $n = 2$, dann allgemein.

Lemma X2o: Erzeugung, Freiheit, Basis im zweifachen Tensorprodukt

Seien T, S, R Ringe und darüber ${}_T U_S, {}_S V_R$ lineare Räume.

(0) Jeder Tensor $w \in U \otimes_S V$ ist eine Summe $w = \sum_{j=1}^{\ell} u_j \otimes v_j$ mit endlicher Länge $\ell \in \mathbb{N}$ und Faktoren $u_j \in U$ und $v_j \in V$.

Sei $\mathcal{A} = (u_j)_{j \in J} \in U^J$ eine Familie von Vektoren $u_j \in U$ für $j \in J$. Als Koordinaten für $U \otimes_S V$ nutzen wir die R -lineare Abbildung

$$\varphi : V^{(J)} \rightarrow U \otimes_S V : v \mapsto \sum_{j \in J} u_j \otimes v_j.$$

(1) Wird $U = \langle \mathcal{A} \rangle_S$ über S erzeugt von $\mathcal{A}$, so ist φ surjektiv: Jeder Tensor $w \in U \otimes_S V$ ist Summe $w = \sum_{j \in J} u_j \otimes v_j$ mit Koeffizienten $(v_j)_{j \in J} \in V^{(J)}$.

(2) Hat die Familie $\mathcal{A}$ in U eine duale Familie $\mathcal{A}^*$ in U^* , so ist φ injektiv.

(3) Hat $U = \langle \mathcal{A} \rangle_S^!$ die S -Basis $\mathcal{A}$, so ist φ bijektiv: Jeder Tensor $w \in U \otimes_S V$ ist Summe $w = \sum_{j \in J} u_j \otimes v_j$ mit eindeutigen Koeffizienten $(v_j)_{j \in J} \in V^{(J)}$.

Beweis des Lemmas: (0) Das folgt aus der Konstruktion F/G in Satz X2F.
 (1) Dank (0) ist w eine Summe einfacher Tensoren $u \otimes v$ mit $u \in U, v \in V$. Dank der Voraussetzung $U = \langle \mathcal{A} \rangle_S$ gilt $u = \sum_{j \in J} u_j s_j$ mit $(s_j)_{j \in J} \in S^{(J)}$, also $u \otimes v = (\sum_{j \in J} u_j s_j) \otimes v \stackrel{\text{Vor}}{=} \sum_{j \in J} u_j \otimes s_j v \stackrel{\text{Bil}}{=} \sum_{j \in J} u_j \otimes s_j v \stackrel{\text{Def}}{=} \varphi((s_j v_j)_{j \in J})$. Demnach enthält der Bildraum $\text{Im}(\varphi)$ alle einfachen Tensoren, somit alle Tensoren.
 (2) Zunächst ist $g_i : U \times V \rightarrow V : (u, v) \mapsto u_i^*(u) \cdot v$ bilinear. Die UAE X2A gibt uns $f_i : U \otimes V \rightarrow V : u \otimes v \mapsto u_i^*(u) \cdot v$ linear. Für $w = \sum_{j=1}^{\ell} u_j \otimes v_j$ folgt $f_i(w) = \sum_{j=1}^{\ell} u_i^*(u_j) \cdot v_j = v_i$. Aus $w = 0$ folgt $v_i = 0$ für alle $i \in J$.
 (3) Dies folgt aus (1) und (2) dank der dualen Familie $\mathcal{A}^*$ zu $\mathcal{A}$ (W1H). QED

Alternative: Wir konstruieren die Umkehrabbildung $\psi : U \otimes_S V \rightarrow V^{(J)}$. Hierzu nutzen wir $\psi : U \times V \rightarrow V^{(J)}$ mit $\psi(\sum_{j \in J} u_j s_j, v) = (s_j v)_{j \in J}$. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da $\mathcal{A}$ eine Basis ist, und $(\mathbb{Z}, S, R)$ -bilinear. Dank UAE X2A induziert ψ die $(\mathbb{Z}, R)$ -lineare Abbildung

$$\psi : U \otimes_S V \rightarrow V^{(J)} : (\sum_{j \in J} u_j s_j) \otimes v \mapsto (s_j v)_{j \in J}.$$

Wir prüfen nun $\varphi \circ \psi = \text{id}$ und $\psi \circ \varphi = \text{id}$. Dank N1A genügen dazu einfache Tensoren. Hier finden wir $\varphi(\psi(\sum_{j \in J} u_j s_j \otimes v)) \stackrel{\text{Def}}{=} \varphi((s_j v)_{j \in J}) \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{j \in J} u_j \otimes s_j v \stackrel{\text{Bil}}{=} \sum_{j \in J} u_j s_j \otimes v$ und $\psi(\varphi((v_j)_{j \in J})) \stackrel{\text{Def}}{=} \psi(\sum_{j \in J} u_j \otimes v_j) \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{j \in J} \psi(u_j \otimes v_j) \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{j \in J} e_j v_j \stackrel{\text{Lin}}{=} (v_j)_{j \in J}$.

Beweis des Satzes: Wir beweisen (0,1,2,3) per Induktion über $n \in \mathbb{N}$.
 Für $n = 0$ ist hier nichts zu beweisen. Für $n = 1$ sind die Aussagen klar.
 Für $n \geq 2$ nutzen wir $U_1 \otimes U_2 \otimes \dots \otimes U_n \cong U_1 \otimes (U_2 \otimes \dots \otimes U_n)$, siehe X3c.
 Die Aussagen (0,1,2,3) seien für $V_1 = U_2 \otimes \dots \otimes U_n$ bereits bewiesen.

(0) In V_1 hat jeder Tensor demnach die Form $v_1 = \sum_{j=1}^{\ell} u_{2,j} \otimes \dots \otimes u_{n,j}$, in $U_1 \otimes V_1$ jeder einfache demnach $u_1 \otimes v_1 = \sum_{j=1}^{\ell} u_1 \otimes u_{2,j} \otimes \dots \otimes u_{n,j}$.

(1/2/3) Als Koordinaten nutzen wir die R_n -lineare Abbildung

$$\Phi : R_n^{(J)} \rightarrow U_1 \otimes \dots \otimes U_n : r = (r_j)_{j \in J} \mapsto \sum_{j \in J} u_{j_1} \otimes u_{j_2} \otimes \dots \otimes u_{j_n} \cdot r_j.$$

In $U_1 \otimes V_1$ gilt demnach $\Phi(r) = \sum_{j_1 \in J_1} u_{j_1} \otimes v_{j_1} = \varphi(v)$ mit der Familie $v = (v_{j_1})_{j_1 \in J_1}$ und den Faktoren $v_{j_1} = \sum_{(j_2, \dots, j_n) \in J_2 \times \dots \times J_n} u_{j_2} \otimes \dots \otimes u_{j_n} \cdot r_j$.

Nach Induktionsvoraussetzung hat jede Familie $v = (v_{j_1})_{j_1 \in J_1}$ in V_1 mindestens / höchstens / genau eine solche Darstellung durch $r \in R_n^J$. Dank Lemma ist φ surjektiv / injektiv / bijektiv, somit auch Φ . Demnach ist $\mathcal{A}$ in $U_1 \otimes U_2 \otimes \dots \otimes U_n$ über R_n erzeugend / frei / eine Basis. QED

Damit erhalten wir erneut die Basiseigenschaft, nun in voller Schönheit:

Satz X2P: Tensorprodukt und Basiseigenschaft

Sei $R = (R_0, R_1, \dots, R_n)$ eine Familie von Ringen und $U = (U_1, \dots, U_n)$ eine Familie linearer Räume über R , wobei U_i linear über (R_{i-1}, R_i) ist.
 Sei $\tau : \prod_{i=1}^n U_i \rightarrow W$ ein Produkt. In U_i sei $\mathcal{A}_i = (u_{j_i})_{j_i \in J_i}$ eine R_i -Basis. Ihre Produktfamilie in W ist $\mathcal{W} = (w_j = \tau(u_{j_1}, \dots, u_{j_n}))_{j \in J = J_1 \times \dots \times J_n}$.
 Genau dann ist τ ein Tensorprodukt, wenn $\mathcal{W}$ in W eine R_n -Basis ist.

Beweis: „ $\Rightarrow$ “: Dies haben wir im vorigen Satz X2N nachgerechnet.

„ $\Leftarrow$ “: Sei $\mu : \prod_{i=1}^n U_i \rightarrow Z$ ein weiteres Produkt. Dank PLF N1B erhalten wir die R_n -lineare Abbildung $f : W \rightarrow Z$ mit $f(w_j) = \mu(u_{j_1}, \dots, u_{j_n})$ für alle $j \in J$, also $f \circ \tau = \mu$, d.h. unser Produkt τ erfüllt die UAE X2I. QED

😊 Am einfachsten ist $R_0 = \dots = R_n = R$ und darüber zentrale Räume. Der allgemeine Fall gelingt ebenso schön... mit etwas mehr Buchführung: Skalare können nach rechts durchgereicht werden. Alles gilt ebenso links.



Auch bei der Tour de France ist die UAE sehr prominent und erfolgreich. Für ein mathematisches Konzept ist das ungewöhnlich, doch erfreulich!

Satz X3A: Rechenregeln für direkte Summe und Tensorprodukt

Für direkte Summe $\oplus$ und Tensorprodukt $\otimes$, gelten über allen Ringen, wo nötig involutiven *Ringen, die folgenden vertrauten Rechenregeln. Hier steht 0 für den Nullraum und 1 für den jeweiligen Grundring.

	direkte Summe $\oplus$	Tensorprodukt $\otimes$
Ntr	$0 \oplus U \cong U \cong U \oplus 0$	$1 \otimes U \cong U \cong U \otimes 1$
Ass	$(U \oplus V) \oplus W \cong U \oplus (V \oplus W)$	$(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$
Com	$U \oplus V \cong V \oplus U$	$U \otimes V \cong V \otimes U$ ***
AL	$(U \oplus V) \otimes W \cong (U \otimes W) \oplus (V \otimes W),$	$0 \otimes U = 0$
AR	$U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W),$	$U \otimes 0 = 0$

Aufgabe: Konstruieren Sie hierzu die „natürlichen“ Isomorphismen. Auf Basen sind die gewünschten Bijektionen jeweils klar, siehe X123. Wir wollen dies nun gebührend allgemein und basisfrei nachrechnen.

Bemerkung: Diese Regeln erinnern uns an Ringe, genauer: Halbringe! Diese schöne Beobachtung ist kein Zufall, weder singulär noch ephemer, sondern eine fundamentale Struktur, die überall im Leben auftritt.

Das herausragende Modell sind die natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1)$, die jede:r aus der Grundschule kennt. Aus ihnen entsteht das Zahlensystem, siehe §B2.1. Hier schließt sich der Kreis, von einem höheren Standpunkt.

Dieselben Rechenregeln gelten für Mengen (G3j). Wir erhalten daraus abstrahiert die natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1)$ als Kardinalität card auf $(\text{FinSet}, \sqcup, 0, \times, 1)$ und nun als Dimension dim_K auf $(\text{FinVec}_K, \oplus, 0, \otimes, 1)$.

Abstrakte Zahlen entsprechen konkreten Mengen, Räumen, Objekten. Ja, Sie lesen richtig: Zahlen sind abstrakt, doch Mengen sind konkret. Mit Mengen können Sie konkret arbeiten, Sie können darin Elemente nehmen, vergleichen, verknüpfen, abbilden, ... und vieles mehr!

⚠ Die Rechenregeln versprechen nicht Gleichheit, sondern natürliche Isomorphismen. Diese müssen wir nun konstruieren und nachweisen.

Neutrales zum Tensorprodukt

X303

Übung: Ich führe für Sie das Tensorprodukt aus und ermutige Sie, es mit der Summe selbst zu versuchen, als Fingerübung zum Aufwärmen oder später im Nachgang: Wie beweisen Sie Ntr, Ass, Com dank UAE?

Satz X3B: Neutrales zum Tensorprodukt

Zu linearen Räumen ${}_T U_S$ und ${}_S V_R$ haben wir das Tensorprodukt:

$$\tau_{U,V} : U \times V \rightarrow U \otimes_S V : (u, v) \mapsto u \otimes v$$

Dabei wirkt der Raum ${}_S S_S$ neutral bis auf natürliche Isomorphie:

$$\begin{aligned} (\mu, \mu') : U \otimes_S S &\cong U : u \otimes s \mapsto u \cdot s \\ (\mu, \mu') : S \otimes_S V &\cong V : s \otimes v \mapsto s \cdot v \end{aligned}$$

Aufgabe: Konstruieren Sie dieses Isomorphismuspaar dank UAE.

⚠ Die explizit angegebenen Formeln sind zwar schön und suggestiv, so können Sie sie leicht erinnern und bequem zusammenfassen, doch zunächst ist erst einmal ihre Wohldefiniertheit zu klären!

Neutrales zum Tensorprodukt

X304

Beweis:

$$\begin{array}{ccc} U \times S & & S \times V \\ \tau_{U,S} \downarrow & \searrow \begin{smallmatrix} (u,s) \mapsto u \cdot s \\ \mu \end{smallmatrix} & \downarrow \tau_{S,V} \\ U \otimes_S S & \xrightarrow[\mu']{\mu} & U \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & S \times V \\ & \swarrow \begin{smallmatrix} s \cdot v \mapsto s \otimes v \\ \mu \end{smallmatrix} & \downarrow \tau_{S,V} \\ V & \xrightarrow[\mu']{\mu} & S \otimes_S V \end{array}$$

(1) Zum (T, S) -linearen Raum U ist die Skalierung mit S von rechts $\mu : U \times S \rightarrow U : (u, s) \mapsto u \cdot s$ bilinear über (T, S, S) . Dank UAE X2A induziert sie die (T, S) -lineare Abbildung $\mu : U \otimes_S S : u \otimes s \mapsto u \cdot s$.

(2) Umgekehrt ist auch $\mu' : U \rightarrow U \otimes_S S : u \mapsto u \otimes 1_S$ linear über (T, S) : Für $t \in T, u \in U, s \in S$ gilt $\mu'(t \cdot u) \stackrel{\text{Def}}{=} (t \cdot u) \otimes 1_S \stackrel{\text{HL}}{=} t \cdot (u \otimes 1_S) \stackrel{\text{Def}}{=} t \cdot \mu'(u)$ und $\mu'(u \cdot s) \stackrel{\text{Def}}{=} (u \cdot s) \otimes 1_S \stackrel{\text{HM}}{=} u \otimes s \stackrel{\text{HR}}{=} (u \otimes 1_S) \cdot s \stackrel{\text{Def}}{=} \mu'(u) \cdot s$.

(3) Klar ist $\mu \circ \mu' : u \mapsto u \otimes 1_S \stackrel{\text{Def}}{\mapsto} u \cdot 1_S \stackrel{\text{Ntr}}{=} u$ für alle $u \in U$. Zudem gilt $\mu' \circ \mu : u \otimes s \mapsto u \cdot s \mapsto (u \cdot s) \otimes 1_S \stackrel{\text{HM}}{=} u \otimes (s \cdot 1_S) \stackrel{\text{Ntr}}{=} u \otimes s$ für alle $s \in S$. Gleichheit gilt auf den einfachen Tensoren, also auf allen Tensoren (X2G). Somit gilt $\mu \circ \mu' = \text{id}$ und $\mu' \circ \mu = \text{id}$ „nach Konstruktion“.

QED

Satz X3c: Assoziativität des Tensorprodukts

Gegeben seien drei lineare Räume ${}_T U_S$ und ${}_S V_R$ und ${}_R W_Q$.

(0) Genau wie für zwei Faktoren (U, V) bzw. (V, W) haben wir auch für je drei Faktoren (U, V, W) das Tensorprodukt X2i:

$$\tau_{U,V,W} : U \times V \times W \rightarrow U \otimes_S V \otimes_R W$$

(1) Hierzu existieren eindeutig die natürlichen (T, Q) -Isomorphismen

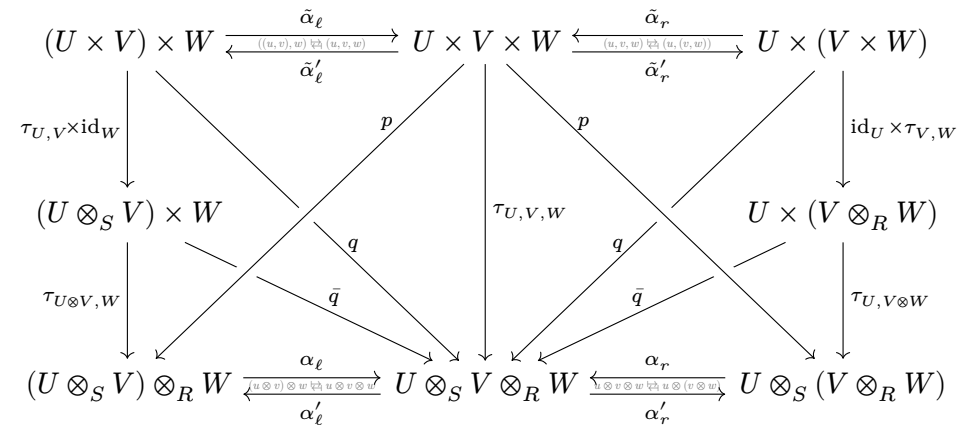
$$\begin{aligned} (U \otimes_S V) \otimes_R W &\cong U \otimes_S V \otimes_R W \cong U \otimes_S (V \otimes_R W), \\ (u \otimes v) \otimes w &\quad \mapsto \quad u \otimes v \otimes w \quad \mapsto \quad u \otimes (v \otimes w). \end{aligned}$$

☹ Das scheint plausibel. Was ist hier also wirklich noch zu zeigen? Erst scheint es trivial, dann schwer, schließlich rettet uns die UAE!

😊 Die Eindeutigkeit ist klar, denn die einfachen Tensoren erzeugen den Tensorraum (X2G). Doch die Existenz der behaupteten Abbildungen muss sorgsam nachgewiesen werden. Das gelingt durch Konstruktion / UAE!

⚠ Die einfachen Tensoren erzeugen alle Tensoren, aber nicht frei! Wir können nicht einfach irgend etwas auf den einfachen Tensoren vorschreiben, sondern müssen zudem auch alle Relationen erfüllen. Sonst drohen Widersprüche wie im No-Cloning-Theorem X1i!

Beweis: Hier die Konstruktion zunächst übersichtlich als Diagramm:



Aufgabe: Beweisen Sie die Existenz durch Konstruktion dank UAE!

☹ Sie wollen und müssen nicht bis zum Quotienten F/G absteigen. Die elementweise Konstruktion ist zwar möglich, aber recht mühselig.

😊 Es ist effizienter und eleganter, jeweils die passende UAE zu nutzen! Die Konstruktion verläuft gemäß Diagramm von oben nach unten:

Beweis: Auf dem kartesischen Produkt haben wir die Assoziatoren $(\tilde{\alpha}_\ell, \tilde{\alpha}'_\ell) : (U \times V) \times W \cong U \times V \times W : ((u, v), w) \mapsto (u, v, w)$.

Die Komposition $p = \tau_{U \otimes V, W} \circ (\tau_{U, V} \times \text{id}_W) \circ \tilde{\alpha}'$ ist (T, S, R, Q) -trilinear, induziert dank UAE X2i also $\alpha'_\ell : u \otimes v \otimes w \mapsto (u \otimes v) \otimes w$, wie erhsehnt.

Die Komposition $q = \tau_{U, V, W} \circ \tilde{\alpha}$ ist (T, S, R) -bilinear in $U \times V$, induziert dank UAE also $\bar{q}$. Letzteres ist (T, R, Q) -bilinear, induziert dank UAE also $\alpha_\ell : (u \otimes v) \otimes w \mapsto u \otimes v \otimes w$, wie erhsehnt. Demnach gilt $\alpha'_\ell \circ \alpha_\ell = \text{id}$ und $\alpha_\ell \circ \alpha'_\ell = \text{id}$ auf einfachen Tensoren, also auf allen Tensoren (X2G). QED

😊 Die „abstrakte“ UAE konstruiert Abbildungen, konkret und effizient!

Wir diskutieren vertraute Rechenregeln, hier für das Tensorprodukt: Neutralität, Assoziativität, Kommutativität und Distributivität. Unter diesen ist die Assoziativität die aufwändigste; wir führen sie detailliert aus, die weiteren Rechnungen sind dann leichtere Übungen.

Ich leite Sie schrittweise an, solche Beweise in verschiedenen Formaten und Abstraktionsstufen durchzuführen. Idealerweise ergänzen sie sich:

- Das Diagramm gibt einen Überblick, graphisch zweidimensional. Es unterdrückt dabei viele Details, auch den zeitlichen Ablauf.
- Der Text erklärt alle Details, zumindest kann er das im Prinzip, insbesondere die logische Abfolge der Konstruktionsschritte.

Bitte üben Sie diese Präsentationsformen, beide arbeiten zusammen. Bitte wählen Sie die jeweils nötige Detailtiefe passend zur Zielgruppe. Idealerweise schreiben Sie es sich selbst genaustens auf, erklären aber dann im Überblick zunächst die tragenden Ideen, dann eine genauere Auflösung, auf Nachfrage schließlich gerne die *nitty-gritty* Details.

Beim Tensorprodukt $U \otimes_S V$ ist die Reihenfolge der Faktoren wichtig: Für $U \neq V$ gilt $U \otimes V \neq V \otimes U$. Auch für $U = V$ und $u, v \in V$ linear unabhängig, über S gilt $u \otimes v \neq v \otimes u$. Die Vertauschung stiftet jedoch einen natürlichen Isomorphismus, solange wir die Ringe mitnehmen:

Satz X3D: Kommutativität des Tensorprodukts

Seien ${}_T U_R$ und ${}_S V_R$ lineare Räume. (1) Ist $T = S = R$ kommutativ sowie darüber U und V zentral, so existiert der (R, R) -Isomorphismus

$${}_R U_R \otimes {}_R V_R \cong {}_R V_R \otimes {}_R U_R : u \otimes v \mapsto v \otimes u.$$

(2) Für involutive Ringe T, S, R existiert der (R, T) -Isomorphismus

$$\overline{{}_T U_S \otimes {}_S V_R} \cong {}_R \bar{V}_S \otimes {}_S \bar{U}_T : u \otimes v \mapsto v \otimes u.$$

Typische Anwendungsbeispiele dieses allgemeineren, involutiven Falls sind die Konjugation auf $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ oder die Adjunktion von Matrizen.

Aufgabe: Konstruieren Sie diese Isomorphismen dank UAE.

Lösung: Es genügt statt (1) gleich den involutiven Fall (2) zu zeigen. Die Konstruktion verläuft von oben nach unten in folgendem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \overline{{}_T U_S \times {}_S V_R} & \xleftarrow[\bar{\sigma}']{\bar{\sigma}} & {}_R \bar{V}_S \times {}_S \bar{U}_T \\ \downarrow \tau_{U,V} & \swarrow q \quad \searrow q' & \downarrow \tau_{V,\bar{U}} \\ {}_T U_S \otimes {}_S V_R & \xleftarrow[\sigma']{\sigma} & {}_R \bar{V}_S \otimes {}_S \bar{U}_T \end{array}$$

Anleitung: Konstruieren Sie nach dem Vorbild der vorigen Beweise: (1) Wie definieren Sie anfangs $\bar{\sigma}$ und $\bar{\sigma}'$? Sind diese (R, S, T) -linear? (2) Wie erhalten Sie daraus σ und σ' ? (3) Sind dies Isomorphismen?

😊 Oft genügen präzise Definition und sorgsame Buchführung.

Satz X3E: Distributivität des Tensorprodukts

Gegeben seien lineare Räume ${}_T (U_i)_S$ für $i \in I$ und ${}_S (V_j)_R$ für $j \in J$.

(1) Dann ist das Tensorprodukt distributiv über die direkte Summe:

$$\begin{aligned} (U_1 \oplus U_2) \otimes V &\cong (U_1 \otimes V) \oplus (U_2 \otimes V) \\ U \otimes (V_1 \oplus V_2) &\cong (U \otimes V_1) \oplus (U \otimes V_2) \end{aligned}$$

(2) Dies gilt ganz allgemein sogar für beliebige direkte Summen:

$$\begin{aligned} (\oplus_{i \in I} U_i) \otimes (\oplus_{j \in J} V_j) &\cong \oplus_{(i,j) \in I \times J} (U_i \otimes V_j) \\ (\sum_{i \in I} u_i) \otimes (\sum_{j \in J} v_j) &\mapsto \sum_{(i,j) \in I \times J} (u_i \otimes v_j) \end{aligned}$$

Alle Tensorprodukte werden hier über dem mittleren Ring S gebildet. Ich schreibe statt $\otimes_S$ abkürzend $\otimes$, um die Symmetrie zu $\oplus$ zu betonen. Präzise Kommunikation ist eine Pflicht für die Sender:in, sie vermeidet Missverständnisse und Rätselraten für die Empfänger:in. Sind sich beide einig, so können sie fehlende Daten aus dem Kontext ergänzen.

Slogan: *Das Tensorprodukt von Summen ist die Summe der Tensorprodukte.* Als Ausgangspunkt dienen uns dabei die folgenden Abbildungen:

$$\begin{aligned} (\oplus_{i \in I} U_i) \times (\oplus_{j \in J} V_j) &\xrightarrow{\tilde{\mu}} \oplus_{(i,j) \in I \times J} (U_i \otimes V_j) \\ ((\sum_{i \in I} u_i), (\sum_{j \in J} v_j)) &\mapsto \sum_{(i,j) \in I \times J} (u_i \otimes v_j) \\ (\oplus_{i \in I} U_i) \otimes (\oplus_{j \in J} V_j) &\xleftarrow{\tilde{\mu}'} U_i \times V_j \\ ((u_i) \otimes (u_j)) &\leftarrow (u_i, v_j) \end{aligned}$$

Anleitung: Konstruieren Sie nach dem Vorbild der vorigen Beweise: (1) Wie definieren Sie anfangs $\tilde{\mu}$ und $\tilde{\mu}'$? Sind diese (T, S, R) -linear? (2) Wie erhalten Sie daraus μ und μ' ? (3) Sind dies Isomorphismen?

Aufgabe: Ganz leicht ist schließlich $U \otimes 0 = 0$ und $0 \otimes V = 0$.

Lösung: Der Raum $U \otimes 0$ wird erzeugt von den einfachen Tensoren $u \otimes 0 = u \otimes (0_S \cdot 0) = (u \cdot 0_S) \otimes 0 = 0_U \otimes 0$. Somit hat der Raum $U \otimes 0 = \{0_U \otimes 0\}$ nur ein einziges Element, ist also der Nullraum.

◆ **Satz G3j:** Potenzgesetze für Abbildungsmengen, Schönfinkel 1924

Für Abbildungsmengen $Y^X = \text{Fun}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y\}$ haben wir:

$$\begin{aligned} Z^{(X \sqcup Y)} &\cong Z^X \times Z^Y & : & f \mapsto (f|_X, f|_Y) \\ (X \times Y)^Z &\cong X^Z \times Y^Z & : & f \mapsto (\text{pr}_1 \circ f, \text{pr}_2 \circ f) \\ Z^{X \times Y} &\cong (Z^Y)^X & : & f \mapsto g \text{ mit } f(x, y) = g(x)(y) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} f : X \times Y \rightarrow Z \\ (x, y) \mapsto f(x, y) \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad f(x, y) = g(x)(y) \quad} \\ \xleftarrow{\quad x \mapsto [g(x) : Y \rightarrow Z] \quad} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} g : X \rightarrow \text{Fun}(Y, Z) \\ x \mapsto [g(x) : Y \rightarrow Z] \end{array} \right.$$

😊 Somit ist $g(x)$ die partielle Abbildung $f(x, -) : Y \rightarrow Z : y \mapsto f(x, y)$.
In Worten: Zu jedem festem $x \in X$ erhalten wir eine Funktion in $y \in Y$.

😊 Dieser genial-einfache Trick heißt in der Mathematik „Adjunktion“, in der Informatik kulinarisch „Currying“ nach Haskell Curry (1958), historisch korrekt „Schönfinkeln“ nach Moses Schönfinkel (1924).

Vervollständigt wird diese Liste durch $\emptyset \times X = \emptyset = X \times \emptyset$ und $X^\emptyset = \{\emptyset\}$ und $\emptyset^X = \emptyset$ für $X \neq \emptyset$ sowie $\{a\}^X = \{\text{const}_X^a\}$ und $X^{\{a\}} \cong X : f \mapsto f(a)$.

😊 Für endliche Mengen übersetzt sich dies zu Elementezahlen in $\mathbb{N}$ dank der Kardinalität $\text{card} : (\text{FinSet}, \sqcup, 0, \times, 1, ^) \rightarrow (\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1, ^)$:

◆ **Satz B5B:** Potenzgesetze für die natürlichen Zahlen

In den natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1, ^)$ gilt für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ll} \text{(P0)} & x^0 = 1 \\ \text{(P1)} & x^{y+z} = x^y \cdot x^z \\ \text{(P2)} & x^1 = x \\ \text{(P3)} & x^{y \cdot z} = (x^y)^z \\ \text{(P4)} & 1^x = 1 \\ \text{(P5)} & (x \cdot y)^z = x^z \cdot y^z \\ \text{(P6)} & 0^x = 0 \text{ für } x \neq 0 \end{array}$$

🤔 Wie übertragen wir Schönfinkels Trick auf das Tensorprodukt?
Erstaunlicherweise setzt sich auch diese Rechenregel von Mengen und Abbildungen direkt fort zu linearen Räumen und Homomorphismen!

Satz X3F: Tensor-Hom-Adjunktion

Gegeben seien Ringe T, S, R und lineare Räume ${}_T U_S, {}_S V_R$ und ${}_T W_R$.

(1) Ist $T = S = R$ kommutativ und darüber U, V, W zentral, so gilt:

$$\text{Hom}_R(U \otimes_R V, W) \cong \text{Hom}_R(U, \text{Hom}_R(V, W))$$

Beispiel: Für freie Räume $U \cong R^{(I)}$ und $V \cong R^{(J)}$ gilt $U \otimes V \cong R^{(I \times J)}$, somit $\text{Hom}_R(U \otimes_R V, W) \cong W^{I \times J} \cong (W^J)^I \cong \text{Hom}_R(U, \text{Hom}_R(V, W))$.

(2) Allgemein haben wir den natürlichen Isomorphismus:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{(T,R)}({}_T U_S \otimes {}_S V_R, {}_T W_R) &\cong \text{Hom}_{(T,S)}({}_T U_S, \text{Hom}_R({}_S V_R, {}_T W_R)) \\ \left. \begin{array}{l} f : U \otimes V \rightarrow W \\ u \otimes v \mapsto f(u \otimes v) \end{array} \right\} &\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad f(u \otimes v) = g(u)(v) \quad} \\ \xleftarrow{\quad u \mapsto [g(u) : V \rightarrow W] \quad} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} g : U \rightarrow \text{Hom}(V, W) \\ u \mapsto [g(u) : V \rightarrow W] \end{array} \right. \end{aligned}$$

Somit ist $g(u)$ die partielle Abbildung $f(u \otimes -) : V \rightarrow W : v \mapsto f(u \otimes v)$.

Aufgabe: Dies folgt aus der UAE X2A. Schreiben Sie es sorgsam aus!

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{(T,R)}({}_T U_S \otimes {}_S V_R, {}_T W_R) & \xleftarrow{\cong} & \text{Hom}_{(T,S)}({}_T U_S, \text{Hom}_R({}_S V_R, {}_T W_R)) \\ & \swarrow \text{UAE X2A} \quad \searrow \text{Schönfinkeln} & \\ & \cong & \\ & \text{Bil}_{(T,S,R)}({}_T U_S, {}_S V_R; {}_T W_R) & \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} h : U \times V \rightarrow W \\ (u, v) \mapsto h(u, v) \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad h(u, v) = g(u)(v) \quad} \\ \xleftarrow{\quad u \mapsto [g(u) : V \rightarrow W] \quad} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} g : U \rightarrow \text{Hom}(V, W) \\ u \mapsto [g(u) : V \rightarrow W] \end{array} \right.$$

Schönfinkeln definiert die Bijektion $h \mapsto g$ der Abbildungen. Dabei wird jede (T, S, R) -bilineare Abbildung h zu einem (T, S) -Homomorphismus g in die R -Homomorphismen, und umgekehrt. Sorgsam nachrechnen:

$$\begin{array}{ll} \text{(AR)} & g(u)(v + v') = g(u)(v) + g(u)(v'), \quad \text{(HR)} \quad g(u)(v \cdot r) = g(u)(v) \cdot r, \\ \text{(AL)} & g(u + u')(v) = g(u)(v) + g(u')(v), \quad \text{(HL)} \quad g(t \cdot u)(v) = t \cdot g(u)(v), \\ & \text{(HM)} \quad g(u \cdot s)(v) = g(u)(s \cdot v) \end{array}$$

Die universelle Abbildungseigenschaft X2A erledigt nun den Rest. QED

Satz X3G: Funktorialität des Tensorprodukts

(0) Zu $f : U \rightarrow U'$ linear über (T, S) und $g : V \rightarrow V'$ linear über (S, R) existiert als ihr Tensorprodukt genau eine (T, R) -lineare Abbildung

$$f \otimes g : U \otimes_S V \rightarrow U' \otimes_S V' : u \otimes v \mapsto f(u) \otimes g(v).$$

Slogan: Das Tensorprodukt linearer Abbildungen wirkt faktorweise.

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow[f \times g]{(u,v) \mapsto (f(u), g(v))} & U' \times V' \\ \downarrow \alpha \otimes \beta \leftarrow (\alpha', \beta') & \searrow \tau' \circ (f \times g) & \downarrow \alpha' \otimes \beta' \\ U \otimes V & \xrightarrow[f \otimes g]{u \otimes v \mapsto f(u) \otimes g(v)} & U' \otimes V' \end{array}$$

Beweis: Die Komposition $\tau' \circ (f \times g)$ ist (T, S, R) -bilinear und induziert dank UAE von τ die ersuchte (T, R) -lineare Abbildung $f \otimes g$. QED

Satz X3G: Funktorialität des Tensorprodukts

(1) Für die Identitäten gilt $\text{id}_U \otimes \text{id}_V = \text{id}_{U \otimes V}$.

(2) Für $f : U \rightarrow U'$ und $f' : U' \rightarrow U''$ linear über (T, S) sowie $g : V \rightarrow V'$ und $g' : V' \rightarrow V''$ linear über (S, R) gilt:

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$$

Slogan: Die Komposition der Produkte ist das Produkt der Kompositionen.

$$U \otimes_S V \xrightarrow[\text{id}_{U \otimes V}]{\text{id}_U \otimes \text{id}_V} U \otimes_S V \xrightarrow{f \otimes g} U' \otimes_S V' \xrightarrow{f' \otimes g'} U'' \otimes_S V''$$

$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$

Beweis: Die beiden (T, R) -linearen Abbildungen links und rechts sind bereits konstruiert, wir müssen sie nur noch vergleichen. Gleichheit gilt auf den einfachen Tensoren, also auf allen Tensoren (X2G). QED

Sind Basen gegeben, so können wir jede lineare Abbildung als Matrix darstellen, und ihr Tensorprodukt durch das Kronecker-Produkt X3H.

Definition X3H: Kronecker-Produkt

Für $A \in R^{m' \times m}$ und $B \in R^{n' \times n}$ definieren wir das **Kronecker-Produkt**

$$A \otimes B := \begin{bmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,m}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m',1}B & \dots & a_{m',m}B \end{bmatrix} \in R^{(m'n') \times (mn)}.$$

Ausgeschrieben:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & \dots & a_{1,1}b_{1,n} & \dots & a_{1,m}b_{1,1} & \dots & a_{1,m}b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1,1}b_{n',1} & \dots & a_{1,1}b_{n',n} & \dots & a_{1,m}b_{n',1} & \dots & a_{1,m}b_{n',n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m',1}b_{1,1} & \dots & a_{m',1}b_{1,n} & \dots & a_{m',m}b_{1,1} & \dots & a_{m',m}b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m',1}b_{n',1} & \dots & a_{m',1}b_{n',n} & \dots & a_{m',m}b_{n',1} & \dots & a_{m',m}b_{n',n} \end{bmatrix}$$

Übung: Es gibt Spezialfälle, in denen das Kronecker-Produkt gleich dem üblichen Matrixprodukt ist. Welche sind das? Siehe Matrixmodell X1E!

Satz X3H: Kronecker-Produkt

Sei $T = S = R$ kommutativ, $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_m)$ eine Basis von U und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V . Dank X2c erhalten wir für $U \otimes V$ die Produktbasis $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = (u_1 \otimes v_1, \dots, u_1 \otimes v_n, \dots, u_m \otimes v_1, \dots, u_m \otimes v_n)$.

Für die Basen $\mathcal{A}' = (u'_1, \dots, u'_{m'})$ von U' und $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_{n'})$ von V' nutzen wir ebenso die lexikographische Ordnung für die Produktbasis $\mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}' = (u'_1 \otimes v'_1, \dots, u'_1 \otimes v'_{n'}, \dots, u'_{m'} \otimes v'_1, \dots, u'_{m'} \otimes v'_{n'})$ von $U' \otimes V'$.

Für R -lineare Abbildungen $f : U \rightarrow U'$ und $g : V \rightarrow V'$ gilt dann:

$$M_{\mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}'}^{f \otimes g} = M_{\mathcal{A}'}^f \otimes M_{\mathcal{B}'}^g$$

Die Matrix des Tensorprodukts ist das Kronecker-Produkt der Matrizen.

☺ Damit haben wir auch für $f \otimes g$ eine konkrete Darstellung als Matrix. Für Matrizen beherrschen wir unsere bewährten, effizienten Werkzeuge.

Übung: Formulieren und beweisen Sie ebenso die Kronecker-Summe $\oplus$.

◆ Beispiel X1E: Matrixmodell des Tensorprodukts

Über jedem Ring R ist das dyadische Produkt ein Tensorprodukt:

$$R^{p \times 1} \otimes_R R^{1 \times q} \cong R^{p \times q} : u \otimes v \mapsto u \cdot v$$

Dieses Matrixprodukt bedeutet ausgeschrieben für $(p, q) = (3, 4)$:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 & u_1 v_4 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 & u_2 v_4 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 & u_3 v_4 \end{bmatrix}$$

Satz X4A: Das Matrixprodukt ist ein Tensorprodukt.

Für jeden Ring R und $n, p, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ haben wir den Isomorphismus:

$$R^{p \times n} \otimes_{R^{n \times n}} R^{n \times q} \cong R^{p \times q} : u \otimes v \mapsto u \cdot v$$

Übung: Beweisen Sie den behaupteten Isomorphismus aus Beispiel X1E.

Mit den üblichen Matrixoperationen ist $U_S = R^{p \times n}$ ein rechtslinearer Raum und ${}_S V = R^{n \times q}$ ein linkslinearer Raum über dem Ring $S = R^{n \times n}$.

Übung: Beweisen Sie den schönen Satz X4A, zunächst für $p = q = 1$.

(1) Die Abbildung $\mu : U_S \times {}_S V \rightarrow R : (u, v) \mapsto u \cdot v$ ist ein Produkt über S .

(2) Demnach existiert genau ein Gruppenhomomorphismus

$$f : (U_S) \otimes_S ({}_S V) \rightarrow R : u \otimes v \mapsto u \cdot v.$$

(3) Umgekehrt existiert der Gruppenhomomorphismus

$$g : R \rightarrow (U_S) \otimes_S ({}_S V) : r \mapsto \begin{bmatrix} r & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(4) Die Abbildungen f und g sind zueinander invers.

Übung: Wenn Sie diesen Fall gelöst haben, versuchen Sie es allgemein.

Tipp: Es gelingt erfreulich leicht dank der Umkehrung $g(e_{ij}) = e_{i1} \otimes e_{1j}$.

Sie haben schon oft Matrizen multipliziert, insbesondere Zeilen- mit Spaltenvektoren. Das Matrixprodukt ist tatsächlich ein Tensorprodukt!

😊 Speziell für $R^{p \times 1} \otimes_R R^{1 \times q} \rightarrow R^{p \times q}$ wissen Sie das schon länger, etwa über jedem Körper R dank Basiseigenschaft des Matrixmodells X1E.

😊 Überraschung: Allgemein ist $R^{p \times n} \times R^{n \times q} \rightarrow K^{p \times q} : (u, v) \mapsto u \cdot v$ ein Tensorprodukt! Diesmal jedoch nicht über dem Grundring R (X117), sondern über dem hier passenden mittleren Matrixring $S = R^{n \times n}$. Das ist genau die Aussage des Isomorphismus von Satz X4A.

😊 Die Matrixmultiplikation X201 war leuchtendes Vorbild für Produkte, nun erweist sie sich im Nachgang selbst als ein Tensorprodukt.

😊 Hier beweisen Sie dies für $p = q = 1$, schon in diesem einfachsten Fall können Sie viel lernen... und dann den allgemeinen Fall verstehen.

Basen haben wir hier nicht, doch unsere Werkzeuge greifen weiterhin!

Wie gut, dass wir über Körpern arbeiten können, aber nicht müssen.
Wie gut, dass wir mit Basen arbeiten können, aber keineswegs müssen.
Wie gut, dass wir umsichtig und nachhaltig vorgehen und uns damit ein großes Repertoire an Beispielen und Anwendungen erschließen.

Matrixringe gehören zum Grundbestand der Linearen Algebra.
Wir wollen sie effizient nutzen lernen und gründlich verstehen.
Daher wären Körper allein allzu hasenfüßig und eindimensional,
Matrizen führen uns unweigerlich zu nicht-kommutativen Ringen.

Die Untersuchung von Matrizen liefert konkretes Anschauungsmaterial.
Der Erfolg der Linearen Algebra beruht auf der effizienten Verbindung von allgemeiner Theorie mit ihren Datenstrukturen und Algorithmen.
Dafür sind Matrizen und ihre Methoden die bewährte Grundlage.

Satz X4B: Darstellung von Homomorphismen als Tensoren

Seien U, V rechtslineare Räume über dem Ring R . Wir wohldefinieren

$$\Psi : V \otimes_R U^* \rightarrow \text{Hom}_R(U, V) : \Psi(v \otimes \varphi)(u) = v \cdot \varphi(u).$$

(1) Hat U eine endliche Basis $(u_1, \dots, u_n)$, so ist Ψ bijektiv mit Inverser

$$\Phi : \text{Hom}_R(U, V) \rightarrow V \otimes_R U^* : f \mapsto \sum_{j=1}^n f(u_j) \otimes u_j^*.$$

(2) Hat V eine endliche Basis $(v_1, \dots, v_m)$, so ist Ψ bijektiv mit Inverser

$$\Phi : \text{Hom}_R(U, V) \rightarrow V \otimes_R U^* : f \mapsto \sum_{i=1}^m v_i \otimes f^*(v_i^*).$$

(3) Gilt (1) und (2) mit R kommutativ, so ist $(e_{i,j} = \Psi(v_i \otimes u_j^*))_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, n}$ eine R -Basis von $\text{Hom}_R(U, V) \cong R^{m \times n}$, wie von Matrizen vertraut.

(4) Ist R ein Körper, so ist Ψ injektiv, und das Bild in $\text{Hom}_R(U, V)$ sind genau die Homomorphismen mit endlichem Rang $\leq r \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^r v_i \otimes \varphi_i \mapsto \sum_{i=1}^r \Psi(v_i \otimes \varphi_i)$$

😊 Das ist die bewährte Matrizenrechnung, nun befreit von Matrizen! Diese Schreibweise (1,2) ist übersichtlich und effizient, insbesondere wenn der Rang r klein ist gegenüber den Dimensionen m und n . In Matrixdarstellung (3) finden wir das dyadische Produkt $X1E$!

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 & u_1 v_4 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 & u_2 v_4 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 & u_3 v_4 \end{bmatrix}$$

Hierzu seien U und V frei mit endlichen Basen. Wie üblich stellen wir dann $V \cong R^{m \times 1}$ durch Spaltenvektoren dar, und ebenso $U \cong R^{n \times 1}$. Dual werden hieraus Zeilenvektoren $U^* = R^{1 \times n}$. Der Isomorphismus $(\Psi, \Phi) : V \otimes_R U^* \cong \text{Hom}_R(U, V)$ entspricht dann $R^{m \times 1} \otimes_R R^{1 \times n} \cong R^{m \times n}$.

Übung: Alle Daten liegen explizit vor. Rechnen Sie Satz X4B nach!

- (0) Warum ist Ψ wohldefiniert? (1,2) Gilt $\Psi \circ \Phi = \text{id}$ und $\Phi \circ \Psi = \text{id}$?
(3) Warum sind Ψ und Φ nun R -linear? (4) Was sind Kern und Bild?

Beispiel X4c: Singulärwertzerlegung

Die obige Darstellung kennen wir von der Singulärwertzerlegung T3A:

$$\sum_{i=1}^r v_i \sigma_i \otimes u_i^* \mapsto \sum_{i=1}^r v_i \sigma_i u_i^*$$

Wir betrachten eine lineare Abbildung $f : U \rightarrow V$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Die beiden Vektorräume U und V tragen jeweils ein Skalarprodukt.

Zu f sind $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ die Singulärwerte, die Singulärvektoren $v_1, \dots, v_r \in V$ und $u_1, \dots, u_r \in U$ bilden zwei orthonormale Familien, und $u_i^* = \langle u_i | - \rangle \in U^*$ ist die zu u_i gehörige Linearform.

Damit schreibt sich die lineare Abbildung f gemäß

$$f : U \rightarrow V : u \mapsto \sum_{i=1}^r v_i \sigma_i \cdot \langle u_i | u \rangle.$$

Speziell für die euklidischen Räume $U = \mathbb{K}^m$ und $V = \mathbb{K}^n$ erhalten wir die Matrixdarstellung $M(f) = \sum_{i=1}^r v_i \sigma_i u_i^\dagger$ bezüglich der Standardbasen.

🤔 Sind die filigranen Voraussetzungen von Satz X4B wirklich nötig? Wie immer helfen Gegen/Beispiele zur Illustration und Abgrenzung!

⚠️ Die Abbildung $\Psi : V \otimes_R U^* \rightarrow \text{Hom}_R(U, V)$ existiert immer, sie ist im Allgemeinen jedoch weder injektiv noch surjektiv.

Beispiel: Über dem Ring $\mathbb{Z}$ betrachten wir die Räume $U = V = \mathbb{Z}/2$. Hier gilt $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) = \{0, \text{id}\}$. Als Dualraum finden wir $(\mathbb{Z}/2)^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) = \{0\}$ und somit $\mathbb{Z}/2 \otimes (\mathbb{Z}/2)^* = 0$.

Allgemein: Für jede endliche abelsche Gruppe $U = V \neq \{0\}$ über $\mathbb{Z}$ gilt $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(U, V) = \{0, \text{id}, \dots\}$, jedoch $U^* = 0$ und somit $V \otimes U^* = 0$. Hier ist Ψ offensichtlich injektiv, aber nicht surjektiv.

Beispiel: Über dem Ring $\mathbb{Z}/4$ betrachten wir die Räume $U = V = 2\mathbb{Z}/4$. Hier gilt $\text{Hom}_{\mathbb{Z}/4}(2\mathbb{Z}/4, 2\mathbb{Z}/4) = \{0, \text{id}\}$. Auch als Dualraum finden wir $(2\mathbb{Z}/4)^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}/4}(2\mathbb{Z}/4, \mathbb{Z}/4) = \{0, \text{inc}\}$ und als Tensorprodukt somit $2\mathbb{Z}/4 \otimes (2\mathbb{Z}/4)^* = \{0, 2 \otimes \text{inc}\}^!$. Jedoch gilt diesmal $\Psi(2 \otimes \text{inc}) = 0$, denn $\Psi(2 \otimes \text{inc})(2) = 2 \cdot 2 = 0$. Hier ist Ψ weder injektiv noch surjektiv.

Beispiel X4D: Reellifizierung und Komplexifizierung

(1a) Jeder $\mathbb{C}$ -Vektorraum $V_{\mathbb{C}}$ wird zu einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum $V_{\mathbb{R}}$ durch Einschränkung der Skalare von $\mathbb{C}$ zu $\mathbb{R}$, also die Einschränkung von

$$\cdot : V \times \mathbb{C} \rightarrow V \quad \text{zu} \quad \cdot : V \times \mathbb{R} \rightarrow V.$$

(1b) Ist $(v_j)_{j \in J}$ eine $\mathbb{C}$ -Basis von V , so ist $(v_j \cdot 1, v_j \cdot i)_{j \in J}$ eine $\mathbb{R}$ -Basis. Für die Dimensionen folgt $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{C}}(V) \cdot \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2 \dim_{\mathbb{C}}(V)$.

(1c) Jede $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung $f : V \rightarrow V'$ ist auch $\mathbb{R}$ -linear.

(2a) Zu jedem $\mathbb{R}$ -Vektorraum $U_{\mathbb{R}}$ erhalten wir den $\mathbb{C}$ -Vektorraum

$$V_{\mathbb{C}} := (U_{\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{R}\mathbb{C}_{\mathbb{C}}).$$

(2b) Ist $(u_j)_{j \in J}$ eine $\mathbb{R}$ -Basis von $U_{\mathbb{R}}$, dann ist $(v_j = u_j \otimes 1_{\mathbb{C}})_{j \in J}$ eine $\mathbb{C}$ -Basis von $V_{\mathbb{C}}$. Für die Dimensionen folgt $\dim_{\mathbb{C}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(U)$.

(2c) Jede $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $f_{\mathbb{R}} : U_{\mathbb{R}} \rightarrow U'_{\mathbb{R}}$ induziert eine zugehörige $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung $g_{\mathbb{C}} = f_{\mathbb{R}} \otimes \text{id}_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} = U_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_{\mathbb{C}} \rightarrow U'_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_{\mathbb{C}} = V'_{\mathbb{C}}$.

Die Übergang von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{R}$ ist leicht, hier genügt die Einschränkung. Umgekehrt ist die Erweiterung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ keineswegs offensichtlich! Warum wollen wir das? Der Körper $\mathbb{C}$ hat bessere Eigenschaften, insbesondere zerfällt jedes Polynom über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren.

Diesen Trick haben wir daher schon oft angewendet, mangels allgemeiner Werkzeuge jedoch zunächst noch recht hemdsärmelig: Wir stellen $f_{\mathbb{R}} : U_{\mathbb{R}} \rightarrow U'_{\mathbb{R}}$ als eine reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dar, und betrachten diese dann als eine komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

😊 Diesen Trick nutzen wir zur Diagonalisierung, Jordanisierung, uvm.

Hier sehen Sie nun, was wirklich dahinter steckt: Mit dem Tensorprodukt können wir die Komplexifizierung nun allgemein und basisfrei erklären! So erhalten wir nicht nur die komplexifizierte Matrix, sondern auch die $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung $g_{\mathbb{C}} = f_{\mathbb{R}} \otimes \text{id}_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} = U_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_{\mathbb{C}} \rightarrow U'_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_{\mathbb{C}} = V'_{\mathbb{C}}$.

😊 Dieser Trick funktioniert allgemein für jede Ringerweiterung $S \leq R$. Dies führt uns zum folgenden allgemeinen Satz.

Satz X4E: Erweiterung des Grundrings

Sei $\eta : S \rightarrow R$ ein Ringhomomorphismus, etwa $S \leq R$ und $\eta = \text{inc}_S^R$; so wird ${}_S R$ ein linkslinearer Raum über S . Sei U_S ein rechtslinearer Raum.

(1) Die **Erweiterung der Skalare** ergibt einen linearen Raum über R :

$$V_R := (U_S) \otimes_S ({}_S R_R)$$

(2) Wir haben die natürliche S -lineare Abbildung (i.A. keine Einbettung)

$$\iota : U_S \hookrightarrow U_S \otimes_S S \xrightarrow{\text{id} \otimes \eta} U_S \otimes_S R = V_R : u \mapsto v = u \otimes 1_R.$$

(3) Freie Räume bleiben frei: Ist $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von U_S über S , dann ist $(v_i = u_i \otimes 1_R)_{i \in I}$ eine Basis von V_R über R , und ι ist injektiv.

(4) Jede S -lineare Abbildung $f_S : U_S \rightarrow U'_S$ induziert eine zugehörige R -lineare Abbildung $g_R = f_S \otimes \text{id}_R : V_R = U_S \otimes_S R_R \rightarrow U'_S \otimes_S R_R = V'_R$.

(5) Die darstellenden Matrizen sind dieselben in $S^{m \times n} \leq R^{m \times n}$.

Dasselbe gilt entsprechend für linkslineare Räume.

$$\begin{array}{ccccccc} U & \xrightarrow{\text{id}_U} & U & \xrightarrow{f} & U' & \xrightarrow{f'} & U'' \\ & & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & & f' \circ f & & \\ U \otimes_S R & \xrightarrow[\text{id}_{U \otimes R}]{\text{id}_U \otimes \text{id}_R} & U \otimes_S R & \xrightarrow{f \otimes \text{id}_R} & U' \otimes_S R & \xrightarrow{f' \otimes \text{id}_R} & U'' \otimes_S R \\ & & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & & (f' \otimes \text{id}_R) \circ (f \otimes \text{id}_R) = (f' \circ f) \otimes \text{id}_R & & \end{array}$$

Satz X4E: Die Erweiterung des Grundrings ist funktoriell.

(6) Für die Identität $\text{id}_U : U \rightarrow U$ gilt

$$\text{id}_U \otimes \text{id}_R = \text{id}_{U \otimes R} = \text{id}_V : V \rightarrow V.$$

(7) Für $f : U \rightarrow U'$ und $f' : U' \rightarrow U''$ und $f' \circ f : U \rightarrow U''$ gilt

$$(f' \otimes \text{id}_R) \circ (f \otimes \text{id}_R) = (f' \circ f) \otimes \text{id}_R.$$

Übung: Alle Daten liegen explizit vor. Rechnen Sie es nach! Wie können Sie die bisherigen Ergebnisse geschickt als Werkzeuge einsetzen?

🔗 Welche $\mathbb{Q}$ -Dimension hat $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$? allgemein $(\mathbb{Z}/n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$?

Satz X4f: Tensorieren mit $\mathbb{Q}$

(1) Dank X3B haben wir den Isomorphismus

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q} : (a \otimes b) \mapsto ab.$$

(2) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ hingegen gilt

$$(\mathbb{Z}/n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0.$$

Beweis: (2) Die einfachen Tensoren erzeugen den Tensorraum (X2G), und $[a] \otimes b \stackrel{\mathbb{Q}}{=} [a] \otimes (n \cdot b/n) \stackrel{\text{HM}}{=} ([a] \cdot n) \otimes (b/n) \stackrel{\mathbb{Z}/n}{=} 0 \otimes (b/n) \stackrel{\text{HM}}{=} 0.$ QED

Anwendungsbeispiel: Sei V eine endlich erzeugte abelsche Gruppe,

$$V \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/n_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_t \quad \text{mit } n_1, \dots, n_t \geq 2.$$

Daraus extrahiert das Tensorieren mit $\mathbb{Q}$ den freien Anteil (Satz X3A):

$$V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^r \quad \text{mit } r = \dim_{\mathbb{Q}}(V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}).$$

😊 Unter diesem Isomorphismus wird die kanonische Basis $(e_1, \dots, e_r)$ von $\mathbb{Z}^r$ abgebildet auf die kanonische Basis $(e_1, \dots, e_r)$ von $\mathbb{Q}^r$.

Der Torsionsteil $\mathbb{Z}/n_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_t$ hingegen wird auf 0 abgebildet. Hierzu nutzen wir (2) und die Distributivität des Tensorprodukts (X3E).

⚠ Die natürliche Abbildung ι aus Satz X4E ist i.A. nicht injektiv! Wir illustrieren Ringerweiterungen hier mit dem Übergang von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$: Über $\mathbb{Z}$ kann das Tensorieren mit $\mathbb{Q}$ wichtige Information vernichten. Manchmal möchten wir genau das, so wie hier illustriert: vereinfachen!

😊 Über einem Körper wie $\mathbb{Q}$ hat jeder lineare Raum eine Basis. Über dem Ring wie $\mathbb{Z}$ hingegen gilt diese Eigenschaft leider nicht. Zur Vereinfachung können wir daher über $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Q}$ tensorieren; wir verlieren dabei Information, aber gewinnen stärkere Sätze.

Diese grundlegende Beobachtung führt uns zu folgender Definition.

🔗 Wie können wir den „Rang“ einer abelschen Gruppen erklären?

Definition X4c: Rang einer abelschen Gruppe

Sei $(V, +)$ eine abelsche Gruppe, also ein $\mathbb{Z}$ -linearer Raum. Der **Rang** von V , genauer der **$\mathbb{Q}$ -Rang**, ist dann definiert durch

$$\text{rang}_{\mathbb{Q}}(V) := \dim_{\mathbb{Q}}(V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}).$$

Dasselbe gilt für jeden Körper $\mathbb{K}$, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p$ mit p prim:

$$\text{rang}_{\mathbb{K}}(V) := \dim_{\mathbb{K}}(V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}).$$

Anwendungsbeispiel: Für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe

$$V \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/n_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_t$$

mit $n_1, \dots, n_t \geq 2$ gilt $\text{rang}_{\mathbb{Q}}(V) = r$ wie oben und zudem

$$\text{rang}_{\mathbb{F}_p}(V) = r + \#\{i \in \{1, \dots, t\} \mid p \mid n_i\}.$$

Wir gehen hier von $\mathbb{Z}$ zu einem Körper $\mathbb{K}$ über, die natürlichen Kandidaten hierzu sind neben dem Bruchkörper $\mathbb{Q} = \text{Frac}(\mathbb{Z})$ vor allem die Quotientenkörper $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p = \mathbb{F}_p$ für p prim. Ebenso möglich wären $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, aber bescheiden genügt $\mathbb{Q}$.

Der Vorteil eines Körpers $\mathbb{K}$ ist, wie oben motiviert, dass wir allgemein über Basen verfügen und von der Dimension über $\mathbb{K}$ sprechen können. Unsere gründliche Arbeit zu Vektorräumen zahlt sich hier aus! Das Tensorprodukt überträgt dies auf $\mathbb{Z}$ -Moduln...

Beispiel: Für $V = \mathbb{Z}^7 \oplus \mathbb{Z}_2^4 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3^2 \oplus \mathbb{Z}_9$ gilt $\text{rang}_{\mathbb{Q}}(V) = 7$ sowie $\text{rang}_{\mathbb{F}_2}(V) = 12$ und $\text{rang}_{\mathbb{F}_3}(V) = 10$ und $\text{rang}_{\mathbb{F}_p}(V) = 7$ für alle $p \geq 5$.

Für die Rechnung benötigen wir das Tensorprodukt $(\mathbb{Z}/p) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/q)$. Dies führt uns zu dem nächsten schönen Satz.

Aufgabe: Wie viele Elemente hat $(\mathbb{Z}/5) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/9)$?

Lösung: Wir finden $5 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{9}$. In $(\mathbb{Z}/5) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/9)$ folgt daraus:

$$[a]_5 \otimes [b]_9 \stackrel{\mathbb{Z}/9}{=} [a]_5 \otimes (5 \cdot 2 \cdot [b]_9) \stackrel{\text{HM}}{=} ([a]_5 \cdot 5) \otimes (2 \cdot [b]_9) \stackrel{\mathbb{Z}/5}{=} 0 \otimes (2 \cdot [b]_9)$$

Daher gilt $(\mathbb{Z}/5) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/9) = 0$. Was steckt allgemein dahinter?

Satz X4H: das Tensorprodukt $(\mathbb{Z}/p) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/q)$

Zu $p, q \in \mathbb{N}$ und $r = \text{ggT}(p, q)$ existiert der Isomorphismus

$$(\mathbb{Z}/p) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/q) \cong (\mathbb{Z}/r) : [a]_p \otimes [b]_q \mapsto [ab]_r, [c]_p \otimes [1]_q \mapsto [c]_r$$

Wichtiger Spezialfall: Gilt $\text{ggT}(p, q) = 1$, so folgt $(\mathbb{Z}/p) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/q) = 0$.

Aufgabe: Warum ist die Umkehrfunktion $[c]_p \otimes [1]_q \mapsto [c]_r$ wohldefiniert?

Lösung: Dank Bézout (B3E) existieren $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $r = pu + qv$. Damit gilt $[r]_r \mapsto [r]_p \otimes [1]_q \stackrel{\mathbb{Z}/p}{=} ([v]_p \cdot q) \otimes [1]_q \stackrel{\text{HM}}{=} [v]_p \otimes (q \cdot [1]_q) \stackrel{\mathbb{Z}/q}{=} [v]_p \otimes [0]_q \stackrel{\text{HM}}{=} 0$.

😊 Beim Tensorprodukt multiplizieren sich die Dimensionen (X1D), denn das Tensorprodukt freier Räume ist frei über der Produktbasis.

🤔 Naiv würde man für $(\mathbb{Z}/5) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/9)$ vielleicht $5 \cdot 9 = 45$ Elemente vermuten; das gilt tatsächlich für das kartesische Produkt $(\mathbb{Z}/5) \times (\mathbb{Z}/9)$.

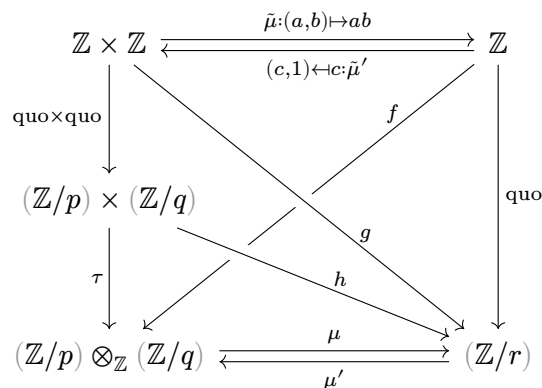
⚠️ Das Tensorprodukt hingegen verhält sich deutlich anders! Hierzu rechnen wir sorgfältig mit Erzeugern und Relationen.

⚠️ Dieselbe Notation [...] für Äquivalenzklassen bedeutet hier dreimal Verschiedenes! Zur Betonung habe ich die Indizes p, q, r hinzugefügt.

Aufgabe: Führen Sie die Konstruktion des ersehnten Isomorphismus $(\mu, \mu') : (\mathbb{Z}/p) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/q) \cong (\mathbb{Z}/r) : [a] \otimes [b] \mapsto [ab]$ detailliert aus.

😊 Wie konstruieren wir μ ? Wir beginnen mit der gewünschten Abbildung auf dem kartesischen Produkt und nutzen die UAE. Der bewährte Ansatz ist damit klar, also rechnen wir es aus!

Beweis: Wir nutzen auch hier die universelle Abbildungseigenschaft. Die Konstruktion verläuft von oben nach unten in folgendem Diagramm.



Aufgabe: Formulieren Sie Konstruktion und Nachweis sorgsam aus. Das erlaubt konkrete Zahlenbeispiele, wie oben $(\mathbb{Z}/5) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/9) = 0$ und viele mehr. Zugleich üben Sie hier nochmals alle relevanten Techniken!

😊 Solche Beweise gelingen immer nach demselben einfachen Muster. Doch um dies zu verstehen und zu verfestigen muss man genügend Beispiele selbst rechnen. Nur Mut, frisch gewagt ist halb gewonnen!

Beweis: Die Abbildung $\tilde{\mu} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : (a, b) \mapsto ab$ ist bilinear. Die Komposition $g = \text{quo} \circ \tilde{\mu}$ erfüllt zudem $g(a + pk, b + ql) = [ab]_r$, denn $(a + pk)(b + ql) = ab + aql + pkb + pkql \in ab + r\mathbb{Z}$ dank $r \mid p, q$.

Somit induziert g auf dem Quotienten die wohldefinierte Abbildung $h : (\mathbb{Z}/p) \times (\mathbb{Z}/q) \rightarrow (\mathbb{Z}/r) : ([a]_p, [b]_q) \mapsto [ab]_r$. Diese ist ebenfalls bilinear. Dank UAE erhalten wir $\mu : (\mathbb{Z}/p) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/q) \rightarrow (\mathbb{Z}/r) : [a]_p \otimes [b]_q \mapsto [ab]_r$.

Für $f : \mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Z}/p) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/q) : c \mapsto [c]_p \otimes [1]_q$ gilt $\text{Ker}(f) \supseteq r\mathbb{Z}$, wie wir oben dank Bézout-Koeffizienten nachgerechnet haben. Sie induziert somit $\mu' : (\mathbb{Z}/r) \rightarrow (\mathbb{Z}/p) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/q) : [c]_r \mapsto [c]_p \otimes [1]_q$.

Damit gilt $\mu' \circ \mu = \text{id}$ und $\mu \circ \mu' = \text{id}$. Warum? Wir rechnen es sorgsam nach für $a, b, c \in \mathbb{Z}$: Klar ist $\mu \circ \mu' : [c]_r \stackrel{\text{Def}}{\mapsto} [c]_p \otimes [1]_q \stackrel{\text{Def}}{\mapsto} [c \cdot 1]_r \stackrel{\text{Ntr}}{=} [c]_r$. Zudem gilt $\mu' \circ \mu : [a]_p \otimes [b]_q \stackrel{\text{Def}}{\mapsto} [a \cdot b]_r \stackrel{\text{Def}}{\mapsto} [a \cdot b]_p \otimes [1]_q \stackrel{\text{HM}}{=} [a]_p \otimes [b]_q$. QED

Kapitel X

Bonusmaterial

*Quantum physics becomes much easier without physics.
Stripped to its core, quantum computing is simply
linear algebra and probability theory.*
frei nach Scott Aaronson

Vollversion

eiserm.de/lehre/LinA

22.09.2026

Inhalt dieses Kapitels X

X002

- 5 Übungsaufgaben und Anwendungsbeispiele
 - Wie berechnen wir den Tensorrang?
 - Eigenschaften des Kronecker-Produkts
 - Produkt der Dualräume vs Dualraum des Produkts
- 6 Rechenregeln als kommutative Diagramme
 - Monoidaxiome vs Ringaxiome
 - Links-/Rechts-Operationen
- 7 Lineare Algebra und Quantenmechanik
 - Die Bell-Ungleichung als Spiel
 - Postulate der Quantenmechanik

Tensorrang gleich Matrixrang

X501
Erläuterung

😊 Matrizenmultiplikation X1E ist ein Modell des Tensorprodukts.
Damit eröffnen wir uns die effizienten Werkzeuge des Matrixkalküls!

Aufgabe: Gegeben seien $U = \langle a_1, \dots, a_p \rangle_K^!$ und $V = \langle b_1, \dots, b_q \rangle_K^!$.
Wie berechnen Sie den Rang eines Tensors $w \in W = U \otimes_K V$?

Lösung: Die gegebenen Basen liefern uns die Isomorphismen $U \cong K^{p \times 1}$ und $V \cong K^{1 \times q}$ und somit $W \cong K^{p \times q}$. Ohne Einschränkung dürfen wir Gleichheit statt Isomorphie annehmen, wie im Matrixmodell X1E.

Jeder Tensor $\sum_i u_i \otimes v_i$ wird somit dargestellt als Matrix $w \in K^{p \times q}$.
Die Berechnung des Rangs gelingt uns durch folgende Beobachtung:

◆ **Satz M3F:** Matrixrang gleich Tensorrang → M3G

Für jede Matrix $A \in K^{p \times q}$ sind äquivalent: (1) Die Matrix A hat Rang r .
(2) Es gilt $A = UV$ mit Matrizen $U \in R^{p \times r}$ und $V \in R^{r \times q}$ von Rang r .
(3) Es gilt $A = \sum_{i=1}^r u_i v_i$ mit $u_1, \dots, u_r \in K^{p \times 1}$ und $v_1, \dots, v_r \in K^{1 \times q}$ frei.

Wiederholung: Zeigen Sie die Äquivalenz und die Berechnung mit Gauß.

Tensorrang gleich Matrixrang

X502
Erläuterung

Erinnerung: Der Gauß-Algorithmus M3c liefert $S^{-1}AT = D_{p \times q}^r$ mit invertierbaren Matrizen $S \in GL_p R$ und $T \in GL_q R$. Daraus folgt:

$$A = SD_{p \times q}^r T^{-1} = \begin{bmatrix} U & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ * \end{bmatrix} = UV = u_1 v_1 + \dots + u_r v_r.$$

Übung: Rechnen Sie dieses Argument „(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3)“ sorgsam nach!
Erklären Sie „(2) $\Leftrightarrow$ (3)“. Beweisen Sie die Implikation „(2) $\Rightarrow$ (1)“.

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ betrachten wir $\mathbb{K}^n = \mathbb{K}^{n \times 1}$ mit Standardskalarprodukt.

😊 Die Rangfaktorisierung gemäß Satz M3F gelingt sogar orthonormal!

◆ **Satz T3B:** Singulärwertzerlegung / SVD über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{p \times q}$ erlaubt eine Singulärwertzerlegung

$$(u_i, \sigma_i, v_i)_{i=1}^r \quad \text{mit} \quad A = \sum_{i=1}^r u_i \sigma_i v_i^\dagger$$

mit orthonormalen Vektoren $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{K}^p$ und $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{K}^q$ und reellen Zahlen $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. Dabei ist r der Rang unserer Matrix A .

😊 Das Kronecker-Produkt X3H ist wunderbar explizit. Zudem gelten für Matrizen viele nützliche Rechenregeln:

Übung: Es gilt $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$ aber i.A. $A \otimes B \neq B \otimes A$; Gleichheit gilt nach geeigneter Permutation der Basis (Zeilen&Spalten).

Bei Transposition gilt $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$, bei gleicher Reihenfolge!

Beim Kronecker-Produkt erfüllt die Spur $\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A) \cdot \text{tr}(B)$. Für $A \in K^{m \times m}$ und $B \in K^{n \times n}$ gilt $\det(A \otimes B) = \det(A)^n \det(B)^m$.

Für die Spektren gilt: Aus $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ und $\sigma(B) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ folgt $\sigma(A \otimes B) = \{\lambda_i \mu_j \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$.

Für die zugehörigen Eigenräume gilt $E(A; \lambda) \otimes E(B; \mu) \subseteq E(A \otimes B; \lambda\mu)$, somit gilt $E(A \otimes B; \nu) \supseteq \bigoplus_{\lambda\mu=\nu} E(A; \lambda) \otimes E(B; \mu)$, aber i.A. nicht „ $\subseteq$ “.

Gegenbeispiel: Wir betrachten $A = B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Dann ist neben $e_1 \otimes e_1$ auch $e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$ ein Eigenvektor von $A \otimes B$ zum Eigenwert λ^2 .

Übung: Angenommen, $f: U \rightarrow U$ und $g: V \rightarrow V$ sind diagonalisierbar. Gilt dies dann auch für $f \otimes g: U \otimes V \rightarrow U \otimes V$?

Man kann dies direkt angehen, zunächst f und g als Matrizen darstellen und dann diagonalisierende Basiswechsel betrachten. Wenn man es jedoch ungeschickt anpackt, wird es leider schnell unübersichtlich. Versuchen Sie es direkt mit der Konstruktion einer Eigenbasis!

Übung: (1) Wir nutzen $\mathbb{Z}^2$ als $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ -Bimodul. Zeigen Sie, dass genau eine $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ -lineare Abbildung $f: \mathbb{Z}^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}: \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \mapsto ad - bc$ existiert; konstruieren Sie dazu ein Produkt und nutzen Sie die UAE. (2) Bestimmen Sie $\text{Ker } f$, dual durch Basis und durch Gleichung. (3) Ist $f: \mathbb{Z}^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ein Tensorprodukt $f = g \otimes h$?

Nicht immer ist das Tensorprodukt leicht zu berechnen. Tensorieren wir jedoch *freie* Räume, also zentrale Räume mit Basis, dann hat auch das Tensorprodukt eine Basis, nämlich die Produktbasis dank Satz X2c. Damit übersetzen wir lineare Abbildungen in Matrizen und zurück!

Übung: Die vorige Übung arbeitet wunderschön konkret mit Matrizen. Wenn Sie es abstrakt mögen, dann wollen Sie vielleicht folgenden Satz beweisen und mit Tensorprodukten auch Dualräume wiederholen:

Satz X5A: Produkt der Dualräume vs Dualraum des Produkts

Sei K ein kommutativer Ring und darüber U, V zentrale lineare Räume.

(1) Es existiert genau eine lineare Abbildung

$$\Phi: U^* \otimes V^* \rightarrow (U \otimes V)^* \quad \text{mit} \quad \Phi(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u)g(v).$$

(2) Hat einer der Räume U oder V eine endliche Basis, so ist Φ bijektiv.

(3) Im Allgemeinen ist diese Abbildung Φ immerhin injektiv.

Hinweis: (1) Wie nutzen Sie geschickt die UAE X2A zur Konstruktion? Beginnen Sie wie immer mit möglichst einfachen Abbildungen, hier etwa $\Psi: U^* \times V^* \rightarrow \text{Fun}(U \times V; K)$ mit $\Psi(f, g)(u, v) = f(u)g(v)$. Ist sie bilinear in u, v ? Daraus erhalten Sie $U^* \times V^* \rightarrow \text{Bil}(U \times V; K) \rightarrow \text{Hom}(U \otimes V, K)$. Ist diese Abbildung nun wiederum bilinear in f, g ? So erhalten Sie Φ .

Beispiel X5B: Das kartesische Produkt ist ein Tensorprodukt.

Zur Menge X ist $(\mathfrak{P}(X), \triangle, \emptyset, \cdot)$ ein $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum bzgl. symmetrischer Differenz $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, siehe L160. Das kartesische Produkt $\times: \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(Y) \rightarrow \mathfrak{P}(X \times Y): (A, B) \mapsto A \times B$ ist ein Tensorprodukt.

Aufgabe: Rechnen Sie dies nach! Wie gelingt dies am geschicktesten?

Lösung: Wir haben das (kanonische, natürliche) Bijektionspaar G3i

$$(1, \text{supp}): \mathfrak{P}(X) \cong \mathbb{F}_2^X.$$

Dies ist ein Isomorphismus der hier betrachteten Gruppen, sogar der $\mathbb{F}_2$ -Vektorräume dank Satz L1L. Diese Sichtweise vereinfacht alles enorm: Das kartesische Produkt entspricht dabei dem Produkt von Funktionen, $1_{A \times B}(x, y) = 1_A(x) \cdot 1_B(y)$ in $\mathbb{F}_2^{X \times Y}$. Zur Vereinfachung seien die Mengen X und Y endlich. Die Basen $(e_x)_{x \in X}$ von $\mathbb{F}_2^X$ und $(e_y)_{y \in Y}$ von $\mathbb{F}_2^Y$ werden abgebildet auf die Basis $(e_{(x,y)})_{(x,y) \in X \times Y}$ von $\mathbb{F}_2^{X \times Y}$. Demnach gilt also die Basiseigenschaft X1D/X2P, und diese charakterisiert das Tensorprodukt.

Die Monoidaxiome als kommutative Diagramme

X601
Ergänzung

Aufgabe: (0) Wiederholen Sie die Definition eines Monoids (G, μ, η) .
(1) Schreiben Sie dies als kommutative Diagramme in $(\mathbf{Set}, \times, 1)$.

Lösung: (0) Explizit geschrieben ist ein Monoid (G, μ, η) eine Menge G mit einem Produkt $\mu : G \times G \rightarrow G : (a, b) \mapsto a \cdot b$ und einem neutralen Element $\eta : 1 = \{0\} \rightarrow G : 0 \mapsto e$, sodass Assoziativität und Neutralität gelten, für eine Gruppe zudem Inversion, optional Kommutativität.

(2) Kommutative Diagramme in $\mathbf{Set}$ codieren *All-Aussagen* (siehe J169).

Ass (G, μ) : Die Verknüpfung $\mu : G \times G \rightarrow G : (a, b) \mapsto a \cdot b$ ist assoziativ:
Für alle $a, b, c \in G$ gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Als kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} (G \times G) \times G & \xleftarrow{\cong} & G \times G \times G & \xrightarrow{\cong} & G \times (G \times G) \\ \downarrow \pi_1 \times \eta & & & & \downarrow \eta \times \pi_1 \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G & \xleftarrow{\mu} & G \times G \end{array}$$

Wir identifizieren hier Tripel gemäß $((a, b), c) \not\equiv (a, b, c) \not\equiv (a, (b, c))$.

Die Monoidaxiome als kommutative Diagramme

X602
Ergänzung

Ntr (G, μ, η) : Das Element $e = \eta(0) \in G$ ist beidseitig neutral bezüglich μ :
Für alle $a \in G$ gilt $e \cdot a = a$ und $a \cdot e = a$. Als kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} & & G \times G & & \\ \eta \times \text{id} \nearrow & & \downarrow \mu & \nwarrow \text{id} \times \eta & \\ 1 \times G & & & & G \times 1 \\ & \searrow \text{pr}_2 & & \swarrow \text{pr}_1 & \\ & & G & & \end{array}$$

Com (G, μ) : Das Monoid (G, μ, η) heißt *kommutativ*, wenn μ dies ist:
Für alle $a, b \in G$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$. Als kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xleftarrow{\tau_{G,G}} & G \times G \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ G & \xlongequal{\quad} & G \end{array}$$

Hierbei ist $\tau_{G,G} : G \times G \rightarrow G \times G : (a, b) \mapsto (b, a)$ die *Vertauschung*.

😊 So können wir in $(\mathbf{Set}, \times, 1)$ algebraische Strukturen codieren.

Die Ringaxiome als kommutative Diagramme

X603
Ergänzung

Aufgabe: (0) Wiederholen Sie die Definition eines Rings $(R, +, 0, \cdot, 1)$.
(1) Schreiben Sie dies als kommutative Diagramme in $(\mathbf{Ab}, \otimes, \mathbb{Z})$.

Lösung: (0) Die additive Struktur $(R, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe, oder gleichbedeutend ein $\mathbb{Z}$ -linearer Raum. Distributivität bedeutet, das Produkt $\tilde{\mu} : R \times R \rightarrow R : (a, b) \mapsto a \cdot b$ ist $\mathbb{Z}$ -bilinear. Es entspricht der induzierten $\mathbb{Z}$ -linearen Abbildung $\mu : R \otimes_{\mathbb{Z}} R \rightarrow R : a \otimes b \mapsto a \cdot b$.

(2) Kommutative Diagramme in $\mathbf{Ab}$ codieren *All-Aussagen* (siehe J169).

Ass $(R, \tilde{\mu})$: Die Verknüpfung $\tilde{\mu} : R \times R \rightarrow R : (a, b) \mapsto a \cdot b$ ist assoziativ:
Für alle $a, b, c \in R$ gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Als kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} (R \otimes R) \otimes R & \xleftarrow{\cong} & R \otimes R \otimes R & \xrightarrow{\cong} & R \otimes (R \otimes R) \\ \downarrow \pi_1 \otimes \eta & & & & \downarrow \eta \otimes \pi_1 \\ R \otimes R & \xrightarrow{\mu} & R & \xleftarrow{\mu} & R \otimes R \end{array}$$

Wir identifizieren hier gemäß $(a \otimes b) \otimes c \not\equiv a \otimes b \otimes c \not\equiv a \otimes (b \otimes c)$.

Die Ringaxiome als kommutative Diagramme

X604
Ergänzung

Ntr $(R, \tilde{\mu}, \eta)$: Das Element $1 = \eta(1) \in R$ ist beidseitig neutral bezüglich $\tilde{\mu}$:
Für alle $a \in R$ gilt $1 \cdot a = a$ und $a \cdot 1 = a$. Als kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} & & R \otimes R & & \\ \eta \otimes \text{id} \nearrow & & \downarrow \mu & \nwarrow \text{id} \otimes \eta & \\ \mathbb{Z} \otimes R & & & & R \otimes \mathbb{Z} \\ & \searrow \lambda & & \swarrow \rho & \\ & & R & & \end{array}$$

Com $(R, \tilde{\mu})$: Der Ring $(R, \tilde{\mu}, \eta)$ heißt *kommutativ*, wenn $\tilde{\mu}$ dies ist:
Für alle $a, b \in R$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$. Als kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} R \otimes R & \xleftarrow{\tau_{R,R}} & R \otimes R \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ R & \xlongequal{\quad} & R \end{array}$$

Hierbei ist $\tau_{R,R} : R \otimes R \rightarrow R \otimes R : a \otimes b \mapsto b \otimes a$ die *Vertauschung*.

😊 So können wir in $(\mathbf{Ab}, \otimes, \mathbb{Z})$ algebraische Strukturen codieren.

Aufgabe: (2) Definieren Sie Monoidoperationen $G \curvearrowright X$ und $X \curvearrowleft G$.
(3) Schreiben Sie dies als kommutative Diagramme in $(\text{Set}, \times, 1)$.

Lösung: (2) Eine Linksoperation des Monoids (G, μ, η) auf der Menge X ist eine Abbildung $\varphi : G \times X \rightarrow X : (a, x) \mapsto a \circ x$, für die Folgendes gilt: $e \circ x = x$ und $b \circ (a \circ x) = (b \cdot a) \circ x$ für alle $b, a \in G$ und alle $x \in X$. (J3A)

Entsprechend: Eine Rechtsoperation des Monoids (G, μ, η) auf der Menge X ist eine Abbildung $\psi : X \times G \rightarrow X : (x, a) \mapsto x \cdot a$, für die Folgendes gilt: $x \cdot e = x$ und $(x \cdot a) \cdot b = x \cdot (a \cdot b)$ für alle $a, b \in G$ und alle $x \in X$. (J3A)

(3) Die Rechtsoperation ψ erfüllt also zwei kommutative Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} X \times G & \xleftarrow{\text{id} \times \eta} & X \times 1 \\ \downarrow \psi & \swarrow \text{pr}_1 & \\ X & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (X \times G) \times G & \xleftarrow{\cong} & X \times (G \times G) \\ \downarrow \text{pr}_1 \times \text{id} & & \downarrow \text{id} \times \text{pr}_1 \\ X \times G & \xrightarrow{\psi} & X \xleftarrow{\psi} X \times G \end{array}$$

Entsprechendes gilt für die Linksoperation φ . Elegant und übersichtlich.

Aufgabe: (4) Was ist eine freie G -Operation $X \curvearrowright G$ mit Basis $(x_i)_{i \in I}$?

Lösung: Wir nennen $X \curvearrowright G$ auch eine G -Menge (von rechts). Zu jeder Menge I ist der **Koordinatenraum** $\bigsqcup_{i \in I} G = I \times G$ eine solche G -Menge, mit $(i, a) \cdot b = (i, a \cdot b)$. Wir nennen $X \curvearrowright G$ **frei** mit Basis $(x_i)_{i \in I}$, falls die **Koordinatenabbildung** $\Phi : I \times G \rightarrow X : (i, a) \mapsto x_i \cdot a$ eine Bijektion ist.

$$I \times G \curvearrowright G \quad I \times G \xrightarrow[\cong]{\Phi} X \quad X \curvearrowright G$$

Dies ist eine G -homogene Abbildung, das heißt, wir haben Gleichheit von $\Phi(i, a) \cdot b \stackrel{\text{Def}}{=} (x_i \cdot a) \cdot b$ und $\Phi((i, a) \cdot b) \stackrel{\text{Def}}{=} \Phi(i, a \cdot b) \stackrel{\text{Def}}{=} x_i \cdot (a \cdot b)$. Sie existiert immer, und ihre Bi/In/Surjektivität ist uns extrem wertvoll.

Für jede Gruppe G und $X \curvearrowright G$ erhalten wir daraus den wundervollen Satz J3J von Lagrange und einen nie versiegenden Quell wirksamer Anwendungen. Das ist der Anfang der Theorie der Gruppen und sofort nutzbar, etwa für jegliche Art von Symmetrie bei Abzählaufgaben!

😊 So führt uns *eine* elegante Theorie zu *vielen* effizienten Anwendungen. Bitte bewundern Sie die Analogie zu Ringen R und R -linearen Räumen.

Aufgabe: (2) Definieren Sie R -lineare Räume $R \curvearrowright V$ und $V \curvearrowleft R$.
(3) Schreiben Sie dies als kommutative Diagramme in $(\text{Ab}, \otimes, \mathbb{Z})$.

Lösung: (2) Eine Linksoperation des Rings (R, μ, η) auf der abelschen Gruppe V ist eine distributive Operation $\varphi : R \times V \rightarrow V : (r, v) \mapsto r \circ v$ mit $1 \circ v = v$ und $s \circ (r \circ v) = (s \cdot r) \circ v$ für alle $s, r \in R$ und alle $v \in V$. (L1A)

Entsprechend: Eine Rechtsoperation des Rings (R, μ, η) auf der abelschen Gruppe V ist eine distributive Operation $\psi : V \times R \rightarrow V : (v, r) \mapsto v \cdot r$ mit $v \cdot 1 = v$ und $(v \cdot r) \cdot s = v \cdot (r \cdot s)$ für alle $r, s \in R$ und alle $v \in V$. (L1A)

(3) Die Rechtsoperation ψ erfüllt also zwei kommutative Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} V \otimes R & \xleftarrow{\text{id} \otimes \eta} & V \otimes \mathbb{Z} \\ \downarrow \psi & \swarrow \varphi & \\ V & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (V \otimes R) \otimes R & \xleftarrow{\cong} & V \otimes (R \otimes R) \\ \downarrow \text{pr}_1 \otimes \text{id} & & \downarrow \text{id} \otimes \text{pr}_1 \\ V \otimes R & \xrightarrow{\psi} & V \xleftarrow{\psi} V \otimes R \end{array}$$

Entsprechendes gilt für die Linksoperation φ . Elegant und übersichtlich.

Aufgabe: (4) Was ist ein freier R -linearer Raum $V \curvearrowright R$ mit Basis $(x_i)_{i \in I}$?

Lösung: Zu jeder Indexmenge I ist der **Koordinatenraum** $\bigoplus_{i \in I} R = R^{(I)}$ ein R -linearer Raum (von rechts), mit $(a_i)_{i \in I} \cdot b = (a_i \cdot b)_{i \in I}$. Wir nennen $V \curvearrowright R$ **frei** mit Basis $(x_i)_{i \in I}$, falls die zugehörige **Koordinatenabbildung** $\Phi : R^{(I)} \rightarrow V : (a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} x_i \cdot a_i$ eine Bijektion ist.

$$R^{(I)} \curvearrowright R \quad R^{(I)} \xrightarrow[\cong]{\Phi} V \quad V \curvearrowright R$$

Dies ist eine R -lineare Abbildung, das heißt, wir haben Gleichheit von $\Phi((a_i)_i) \cdot b \stackrel{\text{Def}}{=} (\sum_i x_i \cdot a_i) \cdot b$ und $\Phi((a_i)_i \cdot b) \stackrel{\text{Def}}{=} \Phi((a_i \cdot b)_i) \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_i x_i \cdot (a_i \cdot b)$. Sie existiert immer, und ihre Bi/In/Surjektivität ist uns extrem wertvoll.

Für jeden DRing R und $V \curvearrowright R$ erhalten wir die wundervollen Basissätze: Existenz von Basen, Invarianz der Dimension, damit Klassifikation aller R -Vektorräume. Zur Rechnung stellen wir R -lineare Abbildungen als Matrizen dar und nießen die sagenhaften Erfolge der Linearen Algebra!

😊 So führt uns *eine* elegante Theorie zu *vielen* effizienten Anwendungen. Bitte bewundern Sie die Analogie zu Gruppen G und G -Mengen.

Wir erklären Bell-Ungleichung und Quanteninformation als Spiel. Alice und Bob spielen gegen Einstein und zahlen dafür 40€. Einstein fragt zufällig $(f, g) \in \{X, Y, Z\}^2$, Alice antwortet auf f mit $a \in \{0, 1\}$, Bob antwortet auf g mit $b \in \{0, 1\}$. Ihr Ziel ist, verschiedene Fragen möglichst oft gleich zu beantworten, aber gleiche Fragen immer verschieden! Auszahlung: $(\neq, =) \mapsto +90$, $(\neq, \neq) \mapsto 0$, $(=, \neq) \mapsto 0$, $(=, =) \mapsto -1000$. Alice und Bob werden getrennt befragt, weit entfernt und gleichzeitig. Beide können sich daher nur vor der Befragung koordinieren, etwa so:

	B	x	y	z
A	0€	1	1	1
x	0	1	0	0
y	0	1	1	1
z	0	0	0	1

	B	x	y	z
A	40€	1	0	1
x	0	1	0	1
y	1	1	0	1
z	0	0	0	1

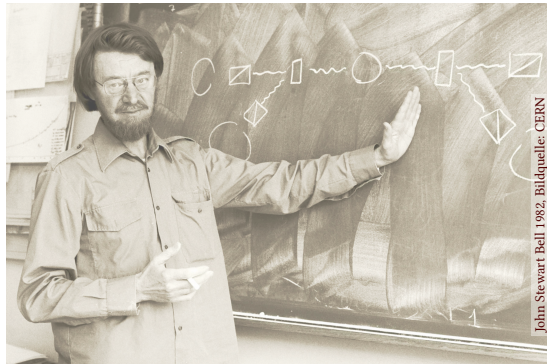
Hier gilt die **Bell-Ungleichung**: Der erwartete Gewinn ist $E \leq 40\text{€}$. Können Alice und Bob mit **Quanteninformation** mehr gewinnen? Ja!

Aufgabe: Welche erwartete Auszahlung können Alice und Bob erreichen? Erreichen sie mehr, wenn sie randomisieren? (individuell, unabhängig) Können sie noch mehr gewinnen mit einem korrelierten Signalgeber? Hier gilt die **Bell-Ungleichung**: Der erwartete Gewinn ist $E \leq 40\text{€}$.

Eskalation: Alice und Bob planen eine Funkverbindung. Alice funkt Bob ihre Frage und Antwort. Bob antwortet optimal. Erwarteter Gewinn: 60€! Zur Abwehr dieses Betrugs befragt man beide gleichzeitig weit entfernt; zwischen Mars und Erde benötigen Signale zwischen 3 und 22 Minuten.

Mit klassischer Physik gilt weiterhin obige Bell-Ungleichung $E \leq 40\text{€}$. Können Alice und Bob mit Quantentechnologie mehr gewinnen? Ja! Einstein glaubte nicht an „spukhafte Fernwirkung“, genau damit können Alice und Bob gewinnen! Das ist das Einstein-Podolsky-Rosen-Paradox.

Veritasium: *Something faster than light*. youtu.be/Nik_0AW5hFU#t=25m15s Alain Aspect, John Clauser und Anton Zeilinger erhielten dazu 2022 den Physik-Nobelpreis „for experiments with entangled photons, establishing the violation of Bell inequalities and pioneering quantum information.“



John Stewart Bell (1928–1990) war ein nordirischer Physiker. Er stammte aus armen Verhältnissen, studierte an der Queen's University of Belfast bis zum BSc 1948 in Experimentalphysik und 1949 in mathematischer Physik. Er promovierte 1956 an der University of Birmingham in Physik.

Ab 1960 arbeitete Bell am CERN in Genf im Bereich Teilchenphysik und Beschleunigerdesign. In seiner Freizeit forschte er über die Grundlagen der Quantenphysik, so auch 1963 während eines Sabbatjahrs in den USA. Seine berühmte Bellsche Ungleichung bewies und veröffentlichte er 1964. Er starb 1990 an Gehirnblutung. Kurz zuvor wurde er für den Nobelpreis nominiert, doch Nobelpreise werden nicht (mehr) posthum verliehen.

Physics Vol. 1, No. 3, pp. 195–200, 1964 Physics Publishing Co. Printed in the United States

ON THE EINSTEIN PODOLSKY ROSEN PARADOX*

J. S. BELL†

Department of Physics, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin

John Stewart Bell: *On the Einstein Podolsky Rosen paradox*. Physics 1 (1964) 195–200. doi.org/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195

Albert Einstein, Boris Podolsky, Nathan Rosen: *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* Physical Review 47 (1935) 777–780. doi.org/10.1103/PhysRev.47.777

Die Physik hinter dem EPR-Paradoxon ist faszinierend, das obige Video bietet einen lebhaften Einstieg. Der experimentelle Nachweis wurde 2022 mit dem Nobelpreis gewürdigt, www.nobelprize.org/prizes/physics/2022. Diese Grundlagen führen aktuell zum Quantum Computing.

Im Folgenden will ich den Kern des Phänomens als Spiel erklären. Die Mathematik wird dadurch erfreulich klar und einfach. Die physikalische Realisierung ist wesentlich komplizierter und wird hier nur angerissen.

Wie beschreiben wir Zufall? einfach als Lostopf!

X705

Ein **n -Lostopf** (Ω, p) aka „endlicher WRaum“ besteht aus einer Menge $\Omega = \{0, \dots, n\}$ von $n + 1$ Losen, jedes Los $i \in \Omega$ hat seine Wkt $p_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dabei gilt die Normierung $|p| := \sum_{i \in \Omega} p_i = 1$. Somit liegt p im Simplex

$$[\Omega] := \{p \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\Omega} : |p| = 1\} = \Delta^n.$$

Physikalische Realisierung: Das Los $i \in \Omega$ wird mit Wkt p_i gezogen. Dabei **kollabiert** der Zustand p zum neuen Zustand $e_i = (\dots, 0, 1, 0, \dots)$. Ziehung aka **Messung** ist kostengünstig und beliebig oft wiederholbar. Das Ergebnis ist „zufällig“ und „unabhängig“ vom Rest des Universums.

Vorbereitung: Wir können jedes $p \in [\Omega]$ herstellen. Uns genügt bereits $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\Omega}$ mit $|u| := \sum_{i \in \Omega} u_i > 0$, wir normieren dann zu $p = u/|u| \in [\Omega]$. Im einfachsten Fall $n = 1$ ist dies ein **Bernoulli-Experiment** $\Omega = \{0, 1\}$ mit Erfolgswkt $p_1 \in [0, 1]$ und Misserfolgswkt $p_0 = 1 - p_1$, z.B. Münzwurf.

Bei Gleichverteilung $p_0 = \dots = p_n$ ist dies ein **Laplace-Experiment**. Sie kennen das aus Spielen, meist in Form eines Würfels oder eines ähnlichen „Zufallsgenerators“, engl. *random number generator* (RNG).

Wie beschreiben wir Zufall? einfach als Lostopf!

X706
Erläuterung

😊 Aus Erfahrung ist Ihnen intuitiv klar, was ein Lostopf ist und wie er funktioniert. Dennoch ist es hilfreich, sich diesen einfachen Mechanismus klar zu machen, denn der klassische Lostopf dient uns als Analogon und Kontrast zum quantenmechanischen Qudit (engl. *quantum digit*).

Nach der Ziehung ist *dieser* Lostopf verbraucht. Wir können zwar ein *erneutes* Experiment durchführen, doch dazu müssen wir den Lostopf klonen, also wieder in seinen ursprünglichen Zustand (Ω, p) bringen. Damit können wir das Experiment *unabhängig* erneut ausführen.

Um es drastischer zu sagen: Unsere Messung ist zerstörend! Das können wir uns so vorstellen: Die Messung bestimmt das gezogene Los $i \in \Omega$, indem sie alle anderen vernichtet, Lose verbrennt oder Kugeln entfernt. Der Lostopf geht also von $p \in [\Omega]$ in den neuen Zustand $e_i \in [\Omega]$ über.

Die dramatische Darstellung als Projektion $p \mapsto e_i$ scheint mir hilfreich. Klassisch betont sie den Übergang zur bedingten Wkt und dass dieser Lostopf bei der Messung verbraucht wird. Mit Blick auf Qudits erklärt sie wunderbar anschaulich den Messprozess als „Kollaps“ des Zustands.

Produktwahrscheinlichkeit vs Korrelation

X707

unabhängig / Produkt

abhängig / korreliert / verschränkt

Wkt	0	1	ges.
0	0.28	0.12	0.40
1	0.42	0.18	0.60
ges.	0.70	0.30	1.00

Wkt	0	1	ges.
0	0.30	0.10	0.40
1	0.40	0.20	0.60
ges.	0.70	0.30	1.00

Wkt	0	1	ges.
0	0.40	0.00	0.40
1	0.30	0.30	0.60
ges.	0.70	0.30	1.00

Wkt	0	1	ges.
0	0.75	0.25	1.00
1	0.00	0.00	0.00
ges.	0.75	0.25	1.00

Wkt	0	1	ges.
0	0.00	0.33	0.33
1	0.00	0.67	0.67
ges.	0.00	1.00	1.00

Wkt	0	1	ges.
0	0.00	0.33	0.33
1	0.00	0.67	0.67
ges.	0.00	1.00	1.00

Jede Messung j kollabiert / projiziert die gemessene Wkt p zur bedingten Wkt p^j .

Wkt	0	1	ges.
0	0.00	1.00	1.00
1	0.00	0.00	0.00
ges.	0.00	1.00	1.00

Am Ende ist der Zustand determiniert, und unser Lostopf damit verbraucht.

Produktwahrscheinlichkeit vs Korrelation

X708
Erläuterung

Produkt: Alice hat den Lostopf (A, q) , Bob hat (B, r) , gemeinsam erhalten sie das kartesische Produkt $\Omega = A \times B$. Arbeiten beide unabhängig, so entspricht dies der Produktwkt $p(a, b) = q(a)r(b) \geq 0$ für alle $(a, b) \in \Omega$. Normierung: Hier gilt $|p| = |q| \cdot |r|$. Aus $|q| = |r| = 1$ folgt $|p| = 1$.

Gemeinsame Ziehung: Wir ziehen $(a, b) \in \Omega$ gemäß p und teilen Alice nur a mit sowie Bob nur b . Für Alice entspricht dies einer Ziehung aus (A, q) , denn $\{a\} \times B$ hat Wkt $\sum_{b \in B} p(a, b) = q(a)$. Für Bob entspricht dies einer Ziehung aus (B, r) , denn $A \times \{b\}$ hat Wkt $\sum_{a \in A} p(a, b) = r(b)$.

Unabhängigkeit: Wir erhalten so $[A] \times [B] \hookrightarrow [\Omega] : (q, r) \mapsto p =: q \otimes r$. Die ZVaren $X : \Omega \rightarrow A : (a, b) \mapsto a$ und $Y : \Omega \rightarrow B : (a, b) \mapsto b$ haben die gewünschten Randverteilungen q und r und sind zudem unabhängig, denn im Inneren gilt ja gerade die Produktformel $p(a, b) = q(a)r(b)$.

Korrelation: Nicht alle Wkten p auf $\Omega = A \times B$ sind Produktwkten von der Form $p = q \otimes r$. Beispiel: Für $A = B = \{0, 1\}$ sei $p(0, 0) = p(1, 1) = 1/2$ und somit $p(0, 1) = p(1, 0) = 0$. Die Randverteilungen $q = r = (1/2, 1/2)$ sind die eines fairen Münzwurfs, doch die ZVaren sind korreliert!

Zufall können wir berechnen! ... und interpretieren?

X709
Erläuterung

🤔 Zufall ist allgegenwärtig, überall im Leben begegnet er uns alltäglich. Wir wollen lernen, mit dem Zufall rational und sachgerecht umzugehen. Daher lohnt es sich sehr, die mathematischen Werkzeugen zu erwerben, die handfesten Begriffe und Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Erfahrung lehrt: Mit dem Zufall können wir verlässlich rechnen!

*On voit par cet Essai, que la théorie des probabilités
n'est, au fond, que le bon sens réduit au calcul.*

[Die Theorie der Wahrscheinlichkeit ist im Grunde nichts anderes
als der gesunde Menschenverstand reduziert auf die Berechnung.]

Pierre-Simon de Laplace (1749–1827)

In einer typischen Vorlesung zur Wahrscheinlichkeit gilt Leibniz' Devise *Calculemus*: Nicht ergebnislos philosophieren, sondern konkret rechnen! Das hat seine klaren Vorzüge, besonders zu Beginn des Studiums, für die WTheorie in der Mathematik oder die WRechnung im Ingenieurwesen. In der Quantentheorie lautet der Aufruf rabiati: *Shut up and calculate!* (www.nature.com/articles/505153a, hsm.stackexchange.com/questions/3615)

Wie lernen wir Zufall? ... mit Spielen!

X710
Erläuterung

In mathematics you don't understand things. You just get used to them.
John von Neumann (1903–1957)

In einer etwas späteren Phase des Lernens fragt man sich dann vielleicht, was Wahrscheinlichkeit eigentlich ist. Dies zu *fragen* ist allerdings erst dann erfolg- und ertragreich, wenn man schon damit *rechnen* kann. Langjährige Erfahrung überzeugt mich, dass Spiele eine ideale Arena bieten, um Mathematik konkret zu erfahren und motiviert zu erlernen.

Motivation: Im Spiel geht es unmittelbar um Gewinn und Verlust! (Sonst in der Lehre liegen Investition und Ertrag oft lang entfernt.)

Transparenz: Alle Spielregeln sind uns bekannt, explizit und detailliert! (Im Alltag dagegen sind uns Mechanismen und Parameter oft verborgen.)

Freiheit: Wir können Spiele selbst erschaffen und unsere Ideen erkunden! (Vorgegebene Realität legt unserer Kreativität allzu oft enge Fesseln an.)

Insbesondere können wir mit Bei-Spielen klein anfangen und zunächst einfache *toy examples* lösen und schrittweise weitere *levels* freischalten. So erklimmen wir spielerisch angeleitet die Stufen der Erkenntnis.

Wie berechnen und interpretieren wir Zufall?

X711
Erläuterung

Viele „Paradoxien“ der Quantenmechanik gründen bereits in klassischer Wahrscheinlichkeit und ihrer naiv-vagen Interpretation. Die Messung „kollabiert“ den Zustand? Diese Problematik entsteht schon klassisch!

*Nach dem Ereignis hat es keinen Sinn,
nach Wahrscheinlichkeit zu fragen.*

Albert Einstein (1879–1955)

Einstein's thoughts often turned philosophical. He told us once, "Life is finite. Time is infinite. The probability that I am alive today is zero. In spite of this, I am now alive. Now, how is that?" None of his students had an answer. After a pause, Einstein said, "Well, after the fact, one should not ask for probabilities."

Eugene Paul Wigner (1902–1995): *Recollections, as told to Andrew Szanton* zitiert in Susan Holmes: *Statistical Proof?* Bulletin AMS 55 (2018) 31–55

Die Debatte, was Wkt wirklich ist und wie sie zu interpretieren sei, ob physikalisch-objektiv oder individuell-subjektiv, spaltet Anwender:innen in Frequentisten und Bayesianer. Die Mathematik bleibt dazu agnostisch.

📺 Weitz: *Was ist eigentlich Wahrscheinlichkeit?* youtu.be/BYUKbEXXmG4

Wie berechnen und interpretieren wir Zufall?

X712
Erläuterung

🤔 Im Folgenden wagen wir das – mathematisch leichte! – Upgrade vom klassischen Lostopf ($\Omega = \{0, \dots, n\}, p \in [\Omega]$) zu seiner $\mathbb{C}$ -linearen Erweiterung, dem Qudit ($V = \mathbb{C}^\Omega, s \in |V\rangle$). Um den Übergang zu ebnen, gehe ich zuvor noch etwas genauer auf die Ziehung aka „Messung“ ein. Schon klassisch führt dies zum spannenden Begriff der bedingten Wkt.

Eine **Messvorschrift** ist eine Zerlegung $\Omega = \bigsqcup_{j=0}^k E^j$, zum Beispiel $E^j = \{j\}$ für $j \in \Omega = \{0, \dots, n\}$. Dies zerlegt $p = \sum_{j=0}^k p^j$ in $p^j = p \mathbf{1}_{E^j}$. Die **Messung** liefert einen Wert $j \in \{0, \dots, k\}$ mit Wkt $|p^j| = \sum_{i \in E^j} p_i$. Dabei **kollabiert** p zur bedingten Wkt p^j , renormiert $p^j/|p^j| \in [\Omega]$. Dieser Zustand kann für weitere Messungen verwendet werden.

Dies wird spürbar relevant im obigen Fall eines Produktraums $\Omega = A \times B$. Alice misst gemäß $\Omega = \bigsqcup_{a \in A} \{a\} \times B$. Bob misst gemäß $\Omega = \bigsqcup_{b \in B} A \times \{b\}$. Jede Messung kollabiert die Wkt p jeweils auf die bedingte Wkt $p^j/|p^j|$.

🤔 Müssen wir dabei durch Null dividieren? Das ist ein echtes Problem! Pragmatische Antwort: Es ist *möglich*, aber *unwahrscheinlich*, mit Wkt 0. (In der Spieltheorie sind diese Ausnahmen ein tiefliegendes Problem.)

Ein n -**Qudit** (V, s) aka „endlich-dim. Hilbert-Raum V mit Zustand $s \in V$ “ besteht aus einem $\mathbb{C}$ -Vektorraum $V = \mathbb{C}^\Omega$ mit einer Orthonormalbasis $|0\rangle, \dots, |n\rangle$ und einem Zustand $s = \sum_{i=0}^n |i\rangle s_i \in V$ mit $s_0, \dots, s_n \in \mathbb{C}$ und Norm $|s|_2^2 := \sum_{i=0}^n |s_i|^2 = 1$. Somit liegt s in der Einheitssphäre

$$|V| := \{s \in V : |s| = 1\} = \mathbb{S}^{2n+1}.$$

Vorbereitung: Wir können jeden beliebigen Zustand $s \in |V|$ herstellen. Uns genügt bereits $u \in V$ mit $u \neq 0$, wir normieren dann zu $s = u/|u|$. Im einfachsten Fall $n = 1$ ist dies ein **Qubit** $(\mathbb{C}^2, s)$ mit $|s_0|^2 + |s_1|^2 = 1$.

Physikalische Realisierung: Eine **Messvorschrift** ist eine orthogonale Summenzerlegung $V = \bigoplus_{j=0}^k U^j$, zum Beispiel $U^j = |j\rangle\mathbb{C}$ für $j = 0, \dots, n$. Dies zerlegt den Zustand $s = \sum_{j=0}^k s^j$ in seine Projektionen $s^j \in U^j$.

Die **Messung** liefert einen Wert $j \in \{0, \dots, k\}$ mit Wkt $|s^j|_2^2 \in [0, 1]$. Dabei **kollabiert** s zum neuen Zustand s^j , renormiert $s^j/|s^j| \in |V|$. Dieser Zustand kann für weitere Messungen verwendet werden. Ein Qudit ist somit viel flexibler als ein klassischer Lostopf!

Wer diese „Spielregeln“ erstmals sieht, hält sie vermutlich für absurd. Nicht die *mathematische* Formulierung, so hoffe ich, denn hier geht es nur um Vektoren im Raum $\mathbb{C}^\Omega$. Nein, die *physikalische* Realisierung ist gänzlich unglaublich. Und doch, genau so verhält sich Quantenphysik!

If quantum mechanics hasn't profoundly shocked you, you haven't understood it yet. (Niels Bohr, 1885–1962)

Ihr Vorteil: Sie beherrschen die mathematischen Werkzeuge und sehen nun erstaunt eine tiefsinnige Anwendung. Manchen geht es umgekehrt: Sie wollen die Anwendung verstehen und lernen dazu die Mathematik; auch gut! Hier finden wir uns alle zusammen und staunen gemeinsam.

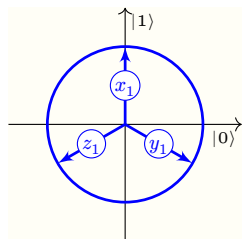
Tensorprodukt: Alice hat ihr Qudit $(\mathbb{C}^A, q)$, Bob hat $(\mathbb{C}^B, r)$, gemeinsam erhalten sie das Tensorprodukt $V = \mathbb{C}^A \otimes \mathbb{C}^B = \mathbb{C}^{A \times B}$ mit ONBasis $|a, b\rangle$ für alle Paare $(a, b) \in A \times B$. Der **Produktzustand** $s = q \otimes r \in V$ entsteht dabei aus $q = \sum_a |a\rangle \cdot q_a$ und $r = \sum_b |b\rangle \cdot r_b$ durch $s = \sum_{(a,b)} |a, b\rangle \cdot q_a r_b$. Normierung: Hier gilt $|s|_2^2 = |q|_2^2 \cdot |r|_2^2$. Aus $|q|_2 = |r|_2 = 1$ folgt $|p|_2 = 1$.

Zwei Qubits: Tensorprodukt und Verschränkung

X715

Alice und Bob erweitern ihre klassischen Lostöpfe $A = B = \{0, 1\}$ zu Qubits in $\mathbb{C}^A$ und $\mathbb{C}^B$, gemeinsam $V = \mathbb{C}^A \otimes \mathbb{C}^B = \mathbb{C}^{A \times B}$ mit ONBasis $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$. Sie präparieren den (verschränkten) Zustand

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \in |V|.$$



Die Matrizen $X_1, Y_1, Z_1 \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ projizieren jeweils auf $x_1 = \begin{bmatrix} \sin(0\pi/3) \\ \cos(0\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ gemäß $X_1 = x_1 x_1^\dagger$,
auf $y_1 = \begin{bmatrix} \sin(2\pi/3) \\ \cos(2\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$ gemäß $Y_1 = y_1 y_1^\dagger$,
auf $z_1 = \begin{bmatrix} \sin(4\pi/3) \\ \cos(4\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$ gemäß $Z_1 = z_1 z_1^\dagger$.

Ebenso arbeiten wir mit den um 90° zurückgedrehten Vektoren x_0, y_0, z_0 . Die Matrix $X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ erfüllt $X_1^\dagger = X_1$ und $X_1^2 = X_1$, ist also eine orthogonale Projektion: Sie zerlegt $\mathbb{C}^2 = x_0\mathbb{C} \oplus x_1\mathbb{C}$ in zwei Eigenräume, explizit $\text{Ker}(X_1) = x_0\mathbb{C}$ mit $x_0 = |0\rangle$ und $\text{Im}(X_1) = x_1\mathbb{C}$ mit $x_1 = |1\rangle$. Der zugehörige Messwert $x \in \{0, 1\}$ ist die Antwort auf die Frage X . Ebenso nutzen wir Y und Z . Wie groß ist nun die Gewinnerwartung?

Zwei Qubits: Tensorprodukt und Verschränkung

X716

In $V = \mathbb{C}^A \otimes \mathbb{C}^B$ misst Alice ihren Faktor $\mathbb{C}^A$ mit $X \otimes I, Y \otimes I, Z \otimes I$. In $V = \mathbb{C}^A \otimes \mathbb{C}^B$ misst Bob seinen Faktor $\mathbb{C}^B$ mit $I \otimes X, I \otimes Y, I \otimes Z$. Die Wkt für gleiche Antworten, also Gewinn von 90€, ist insgesamt $1/2$!

klassische Information	Quanteninformation				
	B				
	A	x	y	z	
	40€	0	1	0	
	1	0	1	0	

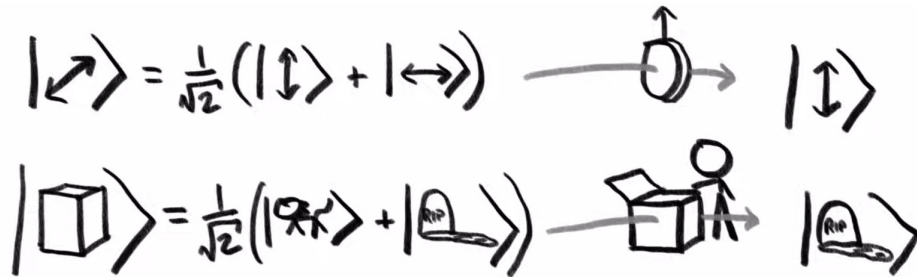
Das ist besser als Wkt $4/9$ und Erwartung 40€: nicht viel, aber messbar. Kostet Teilnahme 40€, ist das Quantenergebnis unendlich viel besser! Die physikalische Realisierung ist knifflig, die Mathematik ist leicht:

$$\begin{aligned} s &\xrightarrow{X_0 \otimes I} \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle \xrightarrow{I \otimes X_0} 0, & s &\xrightarrow{X_0 \otimes I} \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle \xrightarrow{I \otimes Y_0} \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y_0, \\ s &\xrightarrow{X_1 \otimes I} \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \xrightarrow{I \otimes X_1} 0, & s &\xrightarrow{X_1 \otimes I} \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \xrightarrow{I \otimes Y_1} \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \otimes \left(+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y_1. \end{aligned}$$

Wie versprochen ist die *Rechnung* erschütternd einfach, vor allem dank des zugrundeliegenden, sehr eleganten Tensorkalküls. Die physikalische *Interpretation* jedoch ist ebenso erschütternd tiefsinnig und schwierig.

*If people do not believe that mathematics is simple,
it is only because they do not realize how complicated life is.*

John von Neumann (1903–1957)



Video von 3Blue1Brown und MinutePhysics, youtu.be/MzRCDLre1b4,
und ebenso sehenswert von Veritasium, youtu.be/ZuvK-od647c.

Warum gilt diese einfache Matrixrechnung als paradox?
Das liegt ganz allein an der physikalischen Interpretation:

Alice und Bob können beliebig weit entfernt sein! Alice' Messung entspricht einem Münzwurf, mit Ergebnis 0 für Kopf und 1 für Zahl. Auch Bobs Messung entspricht einem Münzwurf. Diese sind jedoch nicht unabhängig, sondern raffiniert miteinander verschränkt.

Wie kann das sein? Wird hier Information von Alice zu Bob übertragen, und zwar instantan und somit echt schneller als Lichtgeschwindigkeit? Einstein wollte sich mit dieser „spukhaften Fernwirkung“ nicht abfinden. Aus dieser Sicht wird die obige Rechnung als „paradox“ bezeichnet.

Das Phänomen ist sicherlich unerwartet und unintuitiv, aber Experimente bestätigen genau diese Vorhersage. Information wird hier nicht übertragen, denn Alice kann ihren Wert zwar messen, doch nicht willkürlich vorgeben.

MAY 15, 1935

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 47

Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*
(Received March 25, 1935)

In a complete theory there is an element corresponding to each element of reality. A sufficient condition for the reality of a physical quantity is the possibility of predicting it with certainty, without disturbing the system. In quantum mechanics in the case of two physical quantities described by non-commuting operators, the knowledge of one precludes the knowledge of the other. Then either (1) the description of reality given by the wave function in

quantum mechanics is not complete or (2) these two quantities cannot have simultaneous reality. Consideration of the problem of making predictions concerning a system on the basis of measurements made on another system that had previously interacted with it leads to the result that if (1) is false then (2) is also false. One is thus led to conclude that the description of reality as given by a wave function is not complete.

Warum erzähle ich Ihnen das hier, in der Linearen Algebra?

Ist Quantenmechanik nicht viel zu schwer und unanschaulich?

Ja, Quantenmechanik ist unanschaulich, doch von fundamentaler Bedeutung: physikalisch, mathematisch, technisch, philosophisch, ...

Vor allem aber können wir an solchen Anwendungen viel lernen, vielleicht sogar etwas Physik, ganz sicher aber viel Mathematik!

Ich präsentiere Ihnen diesen faszinierenden Exkurs, um zu illustrieren, dass Sie die mathematischen Grundlagen Ihrer Linearen Algebra sehr vielseitig anwenden können, in der Physik und auch überall sonst.

Ich betone dabei nochmals: Die Mathematik ist zunächst nicht einfach, doch in Ihrer Reichweite und mit Übung gut erlernbar und verständlich. Es lohnt sich daher in solide mathematische Grundlagen zu investieren.

Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle. In den Anwendungen hingegen tobt das Leben, prall und verwirrend.

Die obigen Miniaturen zum No-Cloning-Theorem und dem EPR-Paradox zeigen eindrücklich: Die mathematischen Grundlagen der Rechnungen sind „einfache Lineare Algebra“, wie Physiker:innen gerne sagen.

Und das zu Recht. Die (abstrakten) mathematischen Werkzeuge muss man nur einmal erlernen, sie kosten anfangs etwas Geduld und Mühe, doch das ist gut investiert: sie lassen sich überall (konkret) anwenden.

Definition X7A: Postulate der Quantenmechanik

Die Quantenmechanik wird durch folgende Postulate zusammengefasst:

- 1 Der Zustand eines Systems wird beschrieben durch einen Vektor $\psi \in V$ in einem Hilbert-Raum V über $\mathbb{C}$, genannt Zustandsraum.
- 2 Jede physikalisch messbare Größe, kurz Observable genannt, wird beschrieben durch einen hermiteschen Operator $A : V \rightarrow V$.
- 3 Das Ergebnis jeder Messung von A ist ein Eigenwert $a \in \mathbb{R}$ von A . (Wenn wir $\dim V < \infty$ annehmen, so wissen wir $V = \bigoplus_{a \in \mathbb{R}} E_a$.)
- 4 Die Wkt des Messwerts a im Zustand ψ ist $P(a|\psi) = \|\psi_a\|^2 / \|\psi\|^2$ gemäß der orthogonalen Zerlegung $V = E_a \oplus E_a^\perp$ und $\psi = \psi_a + \psi'_a$.
- 5 Nach der Messung von a befindet sich das System im Zustand ψ_a . Das ist die orthogonale Projektion von V auf den Eigenraum E_a .
- 6 Die Schrödinger-Gleichung $i\hbar \partial_t \psi(t) = H(t)\psi(t)$ beschreibt die zeitliche Entwicklung; die Observable $H(t)$ ist die Gesamtenergie.

😊 Die Postulate (1–5) präzisieren die grundlegenden Rechenregeln der Quantenmechanik in der vertrauten Sprache der Linearen Algebra! So formulierte Werner Heisenberg 1925 seine **Matrizenmechanik** und Erwin Schrödinger im selben Jahre seine **Wellenmechanik**; dafür erhielten sie 1932 bzw. 1933 den Nobelpreis für Physik.

⚠ Zur Vereinfachung möchte ich im Folgenden $\dim V < \infty$ annehmen. Die zur Quantenmechanik nötige Mathematik liegt dann vollständig im Rahmen der **Linearen Algebra**. Der allgemeine Fall ist noch viel faszinierender, benötigt aber stärkere Werkzeuge der **Analysis**.

Diese Postulate der Quantenmechanik kann man wohl kaum intuitiv verstehen, wohl aber gut nutzen: Sie beschreiben die Experimente!

I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics.

Richard P. Feynman, *The Character of Physical Law* (1965)

Ich betone nochmals: Die wesentliche Schwierigkeit liegt nicht in der mathematischen Formulierung, dazu haben Sie nun alle Werkzeuge. Das Verrückte ist einzig und allein die physikalische Interpretation.

Aufgabe: Lösen Sie die Schrödinger-Gleichung im Falle $\dim V < \infty$. Der Schrödinger-Hamilton-Operator $H : V \rightarrow V$ sei zeitlich konstant:

$$i\hbar \partial_t \psi(t) = H\psi(t), \quad \psi(t_0) = \psi^0$$

Lösung: Dank Spektralsatz existiert eine Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ von V aus Eigenvektoren, also $Hv_k = E_k v_k$ mit $E_k \in \mathbb{R}$ für $k = 1, \dots, n$. Wir untersuchen nun $\psi : \mathbb{R} \rightarrow V : t \mapsto \psi(t)$ als zeitabhängigen Zustand. Zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ zerlegen wir den Zustand $\psi(t) = \sum_k \psi_k(t) v_k$ als Summe orthogonaler Eigenvektoren, also $\psi_k(t) = \langle v_k | \psi(t) \rangle \in \mathbb{C}$. Die allgemeine Schrödinger-Gleichung $i\hbar \partial_t \psi(t) = H(t)\psi(t)$ wird nun entkoppelt zu $i\hbar \partial_t \psi_k(t) = E_k \psi_k(t)$. Aus $\psi(t_0) = \sum_k \psi_k^0 v_k$ folgt somit:

$$\psi(t) = \sum_k e^{-i(t-t_0)E_k/\hbar} \psi_k^0 v_k$$

Alternative: Mit der Matrix-Exponentialfunktion (Q3B) können wir die eindeutige Lösung zusammenfassen durch $\psi(t) = e^{i(t-t_0)H/\hbar} \psi(t_0)$.

😊 Die explizite Lösung gelingt überraschend leicht: Wir benötigen dazu nur eine Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ von V aus Eigenvektoren von H . Wie der Schrödinger-Operator H genau aussieht, hängt vom konkreten Modell ab. Die Lösungsmethode hingegen ist universell anwendbar!

😊 Wir erkennen hier eine erstaunlich simple zeitliche Entwicklung: Die Amplitude $\psi_k(t) = e^{-i(t-t_0)E_k/\hbar} \psi_k^0$ bleibt im Betrag immer gleich, nur die Phase ändert sich um den Faktor $e^{-i(t-t_0)E_k/\hbar} \in \mathbb{S}^1 = \text{GU}_1 \mathbb{C}$. Die Geschwindigkeit $E_k/\hbar$ dieser Phasenänderung ist die Energie E_k des Eigenzustands v_k geteilt durch eine universelle Naturkonstante, das Plancksche Wirkungsquantum $\hbar = h/2\pi \approx 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$.

😊 Die Wkten $|\psi_k(t)|^2 \in [0, 1]$ ändern sich nicht, lediglich die Phase! Die Phase ist nicht direkt messbar, spielt aber dennoch eine wichtige Rolle: Bei der Addition (Überlagerung, Superposition) führt sie zu Verstärkung oder Auslöschung; man spricht hier von Interferenz. Die Wkten $|\psi_k(t)|^2 \in [0, 1]$ alleine genügen dafür nicht!

Aufgabe: Sei V ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$ und $\dim V = n < \infty$ und hierauf $A : V \rightarrow V$ ein hermitescher Operator.

Wir interpretieren V als Zustandsraum und A als Observable. Berechnen Sie gemäß den Postulaten der Quantenmechanik (X7A) Erwartung und Varianz des Operators A im gegebenen Zustand $\psi \in V$.

Lösung: Dank Spektralsatz existiert eine Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ von V aus Eigenvektoren, also $Av_i = a_i v_i$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$.

Wir zerlegen den Zustand $\psi = \sum_{i=1}^n \psi_i v_i$ in eine Summe orthogonaler Eigenvektoren. Die Koeffizienten hierfür sind $\psi_i = \langle v_i | \psi \rangle \in \mathbb{C}$ (S3B).

Die Betragsquadrate $|\psi_i|^2$ entsprechen Wkten. Wir normieren daher den Zustand ψ und erhalten so die Gesamtwkt $1 = \|\psi\|^2 = \sum_{i=1}^n |\psi_i|^2$.

Bei vorgegebenem Zustand $\psi \in V$ mit $\|\psi\| = 1$ interpretieren wir die Messung durch den hermiteschen Operator A als Zufallsvariable.

(Etwas nachlässig doch bequem bezeichne ich im Folgenden beides, den Operator A und die Zufallsvariable A , mit demselben Symbol.)

Die Erwartung μ der Messung durch A ist demnach:

$$\begin{aligned}\mu = \mathbf{E}(A) &= \sum_i a_i |\psi_i|^2 = \sum_i a_i \langle \psi_i | \psi_i \rangle = \sum_i a_i \langle \psi | \psi_i \rangle \\ &= \sum_i \langle \psi | A \psi_i \rangle = \langle \psi | \sum_i A \psi_i \rangle = \langle \psi | A \sum_i \psi_i \rangle \\ &= \langle \psi | A \psi \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle =: \langle A \rangle\end{aligned}$$

Hierbei ist $\langle A \rangle$ die bequeme Kurzschreibweise zum gegebenen Zustand ψ . Die Erwartung von A^2 ist entsprechend:

$$\mathbf{E}(A^2) = \langle A^2 \rangle = \langle \psi | A^2 | \psi \rangle = \langle A \psi | A \psi \rangle$$

Daraus erhalten wir wie üblich die Varianz der Zufallsvariable A als Erwartung der quadratischen Abweichung vom Mittelwert:

$$\begin{aligned}\sigma^2 = \mathbf{V}(A) &= \mathbf{E}((A - \mu)^2) = \mathbf{E}(A^2 - 2\mu A + \mu^2) \\ &= \mathbf{E}(A^2) - 2\mu \mathbf{E}(A) + \mu^2 = \mathbf{E}(A^2) - \mathbf{E}(A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2\end{aligned}$$

😊 Hier verbinden sich Lineare Algebra, Skalarprodukte und Wahrscheinlichkeitsrechnung wunderbar einfach und elegant.

😊 Zusammenfassend erhalten wir das folgende schöne Ergebnis:

Satz X7B: Erwartung und Varianz

Sei V ein Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$; zur Vereinfachung gelte $\dim V < \infty$.

Gegeben sei ein hermitescher Endomorphismus $A : V \rightarrow V$ und ein Vektor $\psi \in V$. Nach den Postulaten der Quantenmechanik (X7A) interpretieren wir die Messung durch A als eine Zufallsvariable.

(1) Erwartung und Varianz sind dann gegeben durch:

$$\begin{aligned}\mu &= \mathbf{E}(A) = \langle A \rangle := \langle \psi | A | \psi \rangle \\ \mathbf{E}(A^2) &= \langle A^2 \rangle = \langle \psi | A^2 | \psi \rangle = \langle A \psi | A \psi \rangle \\ \sigma^2 &= \mathbf{V}(A) = \mathbf{E}(A^2) - \mathbf{E}(A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2\end{aligned}$$

Dieser Satz gilt sinngemäß genauso in unendlicher Dimension; die dazu nötige technische Ausführung diskutieren wir hier nicht.

😊 Mögliche Messwerte sind die Eigenwerte von A , und ihre Wkten sind verteilt gemäß ψ . Der Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ ist der Schwerpunkt dieser Verteilung, und die Streuung $\sigma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ misst die typische Breite.

😊 Bitte beachten Sie den geschickten und fließenden Übergang von „koordinatengebundener“ zu „koordinatenfreier“ Formulierung: Unsere Rechnungen nutzen eine Eigenbasis von A , das Ergebnis jedoch nicht!

⚠ Auf dem Zustandsraum V arbeiten wir im Allgemeinen mit mehreren verschiedenen hermiteschen Operatoren $A, B, \dots$. Es hat daher meist keinen rechten Sinn, sich auf eine Basis festzulegen: Jeder hermitesche Operator erlaubt zwar eine Eigenbasis, doch bei jedem Wechsel des Operators müssen wir im Allgemeinen auch die Basis wechseln.

😊 In konkreten Rechnungen ist meist die Wahl einer Basis hilfreich; genau so haben wir oben die Erwartung definiert und berechnet.

😊 Für die Ergebnisse sind basisfreie Formulierungen am schönsten; genau so haben wir den obigen Satz X7B formuliert.

Wann können wir mit einem „scharfen“ Messergebnis rechnen?
Darauf antwortet die folgende Ergänzung des obigen Satzes:

Satz X7B: Erwartung und Varianz

(2) Genau dann gilt $V(A) = 0$, wenn ψ ein Eigenzustand von A ist.
In diesem Fall ist $E(A) = \mu$ der zugehörige Eigenwert, also $A\psi = \mu\psi$.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Äquivalenz.

Lösung: „ $\Leftarrow$ “: Angenommen, $\psi \in V \setminus \{0\}$ erfüllt $A\psi = \mu\psi$ mit $\mu \in \mathbb{R}$.
Zudem gelte $\|\psi\| = 1$. Dann gilt $E(A) = \langle \psi | A | \psi \rangle = \mu$ und ebenso
 $E(A^2) = \langle \psi | A^2 | \psi \rangle = \mu^2$, also $V(A) = E(A^2) - E(A)^2 = 0$.

„ $\Rightarrow$ “: Als Kontraposition zeigen wir: Ist ψ kein Eigenzustand, so gilt
 $V(A) > 0$. Zunächst normieren wir $\|\psi\| = 1$. Da A hermitesch ist und
 $\dim V < \infty$, zerfällt V in die orthogonale Summe von Eigenräumen.
Wir zerlegen $\psi = \sum_{k=1}^m \psi_k$ in Eigenzustände $\psi_k \neq 0$ mit $A\psi_k = \lambda_k \psi_k$ und
 $\lambda_k \neq \lambda_\ell$ für $k \neq \ell$. Gilt dabei $m \geq 2$, so folgt für die Varianz
 $V(A) = E((A - \mu)^2) = \sum_{k=1}^m (\lambda_k - \mu)^2 \|\psi_k\|^2 > 0$.

Satz X7c: Unschärferelation, Heisenberg 1927, Robertson 1929

Sei V ein Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$; zur Vereinfachung gelte $\dim V < \infty$.
Gegeben seien hermitesche Operatoren $A, B : V \rightarrow V$. Ihr Kommutator
 $[A, B] = AB - BA$ misst somit die Abweichung von der Kommutation.
Für jeden Zustand $\psi \in V$ gilt dann die Ungleichung

$$V(A) V(B) \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2.$$

Im Falle $E(A) = E(B) = 0$ bedeutet das ausgeschrieben:

$$\langle \psi | A^2 | \psi \rangle \langle \psi | B^2 | \psi \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle|^2$$

Beweis: Zur Vereinfachung der Rechnung zentrieren wir A und B zu
 $A' = A - E(A)$ und $B' = B - E(B)$. Damit verschieben wir die beiden
Erwartungswerte zu 0, doch Varianz und Kommutator ändern sich nicht.
Wir können und werden im Folgenden $E(A) = E(B) = 0$ annehmen.

Wir nutzen Hermitizität und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle &= \langle \psi | A^2 \psi \rangle \langle \psi | B^2 \psi \rangle = \langle A\psi | A\psi \rangle \langle B\psi | B\psi \rangle \\ &\geq |\langle A\psi | B\psi \rangle|^2 = |\langle \psi | AB\psi \rangle|^2 = |\langle AB \rangle|^2. \end{aligned}$$

Wir zerlegen $AB = \frac{1}{2}\{A, B\} + \frac{1}{2}[A, B]$ in die Summanden

$$\{A, B\} = AB + BA \quad \text{und} \quad [A, B] = AB - BA.$$

Der Antikommutator $\{A, B\}$ ist hermitesch, also $\langle \{A, B\} \rangle$ reell,
der Kommutator $[A, B]$ ist antihermitesch, also $\langle [A, B] \rangle$ imaginär.

$$|\langle AB \rangle| = \left| \frac{1}{2} \langle \{A, B\} \rangle + \frac{1}{2} \langle [A, B] \rangle \right| \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

Zusammengefasst erhalten wir die allgemeine Unschärferelation:

$$\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

Das beweist die behauptete Ungleichung.

QED

Auch hier ist die mathematische Behandlung vergleichsweise leicht,
die physikalische Interpretation jedoch erwies sich als revolutionär:

Falls die beiden hermiteschen Operatoren A und B kommutieren, also
 $[A, B] = 0$ erfüllen, so lassen sie sich simultan diagonalisieren (P7B).

Andernfalls gilt $[A, B] \neq 0$, und die Unschärferelation X7c besagt,
dass beide Messwerte nicht gleichzeitig exakt bestimmt sind.

Diese Unschärfe beruht nicht auf einem technisch behebbaren Mangel
eines ungenügenden Messinstruments, sondern ist prinzipieller Natur!

Heisenbergs ursprüngliche Formulierung einer Unschärferelation betraf
Ort x und Impuls p eines Teilchens: In geeigneter Darstellung gilt dabei
 $p = (\hbar/i)\partial_x$, daraus folgt $[x, p] = i\hbar$, also $\sigma(x) \cdot \sigma(p) \geq \hbar/2$. Das heißt:

Es ist prinzipiell unmöglich, den Ort und den Impuls eines Teilchens
gleichzeitig beliebig genau zu messen. Anders gesagt bedeutet das:

Es ist unmöglich, einen quantenmechanischen Zustand herzustellen,
bei dem der Ort und der Impuls beliebig genau definiert sind.