

Kapitel W

Linearformen und Dualität

Duality gives two different points of view of looking at the same object.

Sir Michael Atiyah (1929–2019), *Duality in Mathematics and Physics*



A coconut is just a nut.

Inhalt dieses Kapitels W

- 1 Linearformen und Dualraum
 - Der Dualraum V^* zu V
 - Duale Familien in V^* und V
 - Die duale Familie $\mathcal{B}^*$ einer Basis $\mathcal{B}$
 - Der natürliche Homomorphismus von V zum Bidual V^{**}
- 2 Dualität und Bilinearformen
 - Der Annulator $X^\circ \leq V^*$ einer Teilmenge $X \subseteq V$
 - Bilinearformen und Dualität
 - Perfekte Bilinearformen
 - Skalarprodukte
- 3 Duale Homomorphismen
 - Der duale Homomorphismus $f^* : V^* \rightarrow U^*$ zu $f : U \rightarrow V$
 - Matrizen und duale Abbildung $f^* : u \mapsto uA$ zu $f : v \mapsto Av$
 - Bild und Kern und exakte Sequenzen

Dualräume: einfach und wirksam

In diesem Kapitel behandeln wir die sagenhaften Dualräume. Dies ist ein grundlegendes und letztlich einfaches Konzept. Sie nutzen schon längst die Dualität zwischen Gleichungen und Lösungen, meist noch ohne sie zu benennen. Das holen wir nun nach mit unseren geschärften Werkzeugen.

Wir werden dabei gute alte Bekannte wiedertreffen: lineare Räume und lineare Abbildungen, Koordinatenräume und Matrizen, Basen und das Prinzip der linearen Fortsetzungen, in/sur/bijektive Abbildungen, uvm. Dualräume sind ein ideales Testfeld für all unsere bisherigen Techniken!

In studentischer Folklore gelten Dualräume traditionell als schwierig. Beim ersten Kontakt kann ich das gut verstehen, denn die Begriffe sind neu und allgemein, kurz abstrakt. Nach ausreichend Übung weicht das „Hä?“ einem erleichterten „Achso!“, denn es ist wirklich nicht schwer.

Neben präzisen Vokabeln und sorgsamten Rechnungen gibt es hier keine wirklichen mathematischen Schwierigkeiten. Wohl gibt es die üblichen lernpsychologischen Hürden, wie oft bei neuen ungewohnten Begriffen. Hier helfen Ihnen Stift und Papier, eigenes Rechnen und gute Betreuung.

Dualräume: einfach und wirksam

In diesem Kapitel arbeiten wir durchweg über einem beliebigen Ring R . Um Trivialitäten zu vermeiden, fordern wir lediglich $0 \neq 1$, also $R \supsetneq \{0\}$. Unser Ring R muss dabei kein Körper sein, ja nicht einmal kommutativ; mögliche Beispiele sind $R = \mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{K}^{r \times r}, \dots$ und viele mehr.

Ich habe mich hier ganz bewusst zu dieser Allgemeinheit entschlossen, teils aus mathematischen Motiven, vor allem als psychologische Hilfe:

- 1 Oft kostet Allgemeinheit mehr Mühe, hier jedoch ist es umgekehrt: Alle Beweise sind im allgemeinen Fall keinen Deut schwieriger, sondern im Gegenteil wesentlich klarer und dadurch leichter.
- 2 Der nicht-kommutative Fall zwingt uns zu Links-Rechts-Disziplin. Dadurch gibt es keine Wahlmöglichkeiten und keine Abzweigungen. Es gibt nur genau eine Formulierung, und diese ist dann die richtige!
- 3 Wir erhalten gratis ein riesiges Repertoire hilfreicher Gegen/Beispiele. Diese illustrieren eindrucklich alle Feinheiten und Besonderheiten, die einem allzu eingeschränkten Blick sonst leicht entgehen.

Wo Divisionsringe oder Körper verlangt sind, sage ich dies dazu.

Bei theoretischen Grundlagen plädiere ich für logischen Minimalismus; nicht immer, aber hier; nicht dogmatisch, sondern aus guter Erfahrung: Wer nur das Allernötigste voraussetzt, kann zwar nur wenig damit tun, doch zum Glück auch nur wenig Unfug treiben und kaum Irrwege gehen.

Bei den Beispielen, Illustrationen und Anwendungen hingegen plädiere ich dafür, aus dem Vollen zu schöpfen, neben der Linearen Algebra auch die Analysis, die Numerik, die Physik und vieles mehr zu bewundern. Dazu habe ich im Folgenden einige Ausblicke zumindest skizziert.

Wir gehen den langen Weg und schmähen weder Satz noch Beispiel. Das ist mathematisch ehrlich und didaktisch hilfreich, so hoffe ich! Die Theorie strukturiert und vereinfacht, hier sollte alles klar sein. In den Anwendungen jedoch tobt das Leben, prall und verwirrend.

Manche Studierende skandieren „Wir wollen keine abstrakte Theorie, sondern nur Beispiele!“ Ich denke, die gute Mischung macht den Erfolg. Abstraktion strukturiert und vereinfacht: Eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre zahlreichen Spezialfälle.

Seien Sie versichert: Linearformen und Dualität sind nicht esoterisch, sondern allgegenwärtige Phänomene, in vielfältiger Erscheinung!

Sie sehen dies bereits in der Schule, wenn Sie eine (affine) Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ beschreiben wollen oder bestimmen müssen: Dies gelingt auf zwei duale Weisen, explizit durch eine **Parametrisierung**

$$E = \{p_0 + t_1(p_1 - p_0) + t_2(p_2 - p_0) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

oder implizit als Lösungsmenge einer affin-linearen **Gleichung**

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\}.$$

Diese **dualen Darstellungen** lassen sich ineinander umrechnen, und jede hat ihre eigenen Vorzüge. Sie lösen zwei zueinander duale Probleme:

- 1 Geben Sie ein (beliebiges, willkürliches) Element $x \in E$ explizit an.
- 2 Prüfen Sie zu einem (vorgegebenen) Punkt $x \in \mathbb{R}^3$, ob $x \in E$ gilt.

Die erste Frage ist in der ersten Darstellung leicht, in der zweiten schwer. Für die zweite Frage ist es umgekehrt. Beide ergänzen sich wunderbar!

Wir betrachten lineare Abbildungen $f: V \rightarrow W$ über einem Ring R . Speziell beim Zielraum $W = R$ nennen wir dies eine **Linearform**.

Linearformen werden tatsächlich überall genutzt, wo gerechnet wird, meist ganz natürlich, ohne es zu merken oder besonders zu erwähnen. Ich nenne einige spektakuläre Anwendungen in Mathematik und Physik:

Algebraisch-numerische Anwendungen:

- Dualität zwischen Gleichungssystemen und Lösungsräumen (§M3)
- Dualität in der Optimierung, insb. für lineare Ungleichungen (§Z1)

Analytisch-geometrische Anwendungen:

- mehrdimensionale Differential- und Integralrechnung (§Y2)
- Differentialgeometrie, Krümmung, Relativitätstheorie

Anwendungen in der Funktionalanalysis:

- Dualräume mit Topologie / Norm / Skalarprodukt
- Distributionen als Dualraum der Testfunktionen

Wie so oft wurden und werden viele *theoretische* Entwicklungen der Mathematik angetrieben durch ganz handfeste *konkrete* Bedürfnisse ersehnter Anwendungen. Im vorliegenden Falle ist dies ganz genauso! Das Abstrakte hilft dem Konkreten, und umgekehrt, so wie es sein soll. Effizientes Anwenden lebt von der Theorie als verlässlicher Grundlage.

Allgegenwärtige Anwendungen in der Physik:

- Distributionen als verallgemeinerte Funktionen
- Mechanik, Wegintegrale über Differentialformen
- Thermodynamik, Wegintegrale über Differentialformen
- Elektrodynamik, das Vektorpotential als Differentialform
- Ko/Vektoren in spezieller und allgemeiner Relativitätstheorie
- Quantenmechanik, Bra und Ket als duale Vektoren

Ich werde dazu im Folgenden die grundlegenden Begriffe entwickeln und zugleich illustrative Beispiele skizzieren. Sie werden dabei sehen: Die Theorie ist leicht, Beispiele sind komplex. So und nicht umgekehrt.

Jede **affin-lineare Gleichung** über dem Ring R hat die Form

$$u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n = c.$$

In Matrixnotation (D121) schreiben wir $u \cdot v = c$ als Zeile mal Spalte:

$$u = [u_1 \ \dots \ u_n], \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad u \cdot v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$$

Anschaulich ist v ein **Vektor** und dual hierzu ist u ein **Kovektor**. Insbesondere können wir u und v als **Linearformen** interpretieren:

$$\varphi_u : R^{n \times 1} \rightarrow R : v \mapsto u \cdot v \quad \text{vs} \quad \psi_v : R^{1 \times n} \rightarrow R : u \mapsto u \cdot v$$

Albert Einstein (1879–1955) führte 1916 seine **Summenkonvention** ein: Kovektor $u = (u^i)$ mal Vektor $v = (v_i)$ ergibt den Skalar $u^i v_i := \sum_i u^i v_i$. Paul Dirac (1902–1984) erfand hierzu 1939 seine **Bra-Ket-Notation**: Aus Bra $\langle u |$ und Ket $| v \rangle$ wird durch Auswertung der Skalar $\langle u | v \rangle$.

Definition W1A: Linearformen auf einem linearen Raum V über R

Sei $(R, +, 0, \cdot, 1)$ ein Ring und darüber $(V, +, \cdot)$ ein rechtslinearer Raum. Eine **Linearform** auf V ist eine rechtslineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow R$ in den Grundring R , das heißt für alle $u, v \in V$ und $\lambda, \mu \in R$ gilt:

$$\varphi(u\lambda + v\mu) = \varphi(u)\lambda + \varphi(v)\mu.$$

Dasselbe gilt entsprechend für linkslineare Räume und Abbildungen.

Beispiel: Die Spur $\text{tr} : R^{n \times n} \rightarrow R : (a_{ij}) \mapsto \sum_i a_{ii}$ ist eine Linearform, nicht jedoch die Determinante $\det : R^{n \times n} \rightarrow R$ für $n \geq 2$, siehe O2p.

Beispiel: Auf dem Funktionenraum $V = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ haben wir die folgenden Linearformen, auch **lineare Funktionale** genannt:

$$\begin{aligned} \delta_a : V &\rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f(a), & \text{Auswertung im Punkt } a \\ \delta'_a : V &\rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto -f'(a), & \text{Anstieg/Abfall im Punkt } a \\ \iota_a : V &\rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \int_{x=0}^a f(x) \, dx. & \text{Integral bis zum Punkt } a \end{aligned}$$

Beispiel: Auf $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ ist das Integral eine Linearform:

$$I : V \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \int_{x=a}^b f(x) \, dx$$

Diese wollen wir numerisch approximieren, möglichst gut und günstig. Sei $n \geq 1$. Zu Stützstellen $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$ und Gewichten $(w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}$ definieren wir die **Abtastung** (engl. *sampling*)

$$S_x^w : V \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto (b-a) \sum_{i=1}^n w_i f(x_i).$$

Wir können und wollen vereinfachend $[a, b] = [-1, 1]$ annehmen dank der affinen Transformation $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (2x - a - b)/(b - a)$.

Berühmte Beispiele sind die Mittelpunktsregel ($n = 1, x_1 = 0, w_1 = 1$), die Trapezregel ($n = 2, x = (-1, 1), w = (1/2, 1/2)$), die Keplersche Fassregel ($n = 3, x = (-1, 0, 1), w = (1/6, 4/6, 1/6)$) und viele weitere.

Diese sind in der numerischen Integration wichtig und allgegenwärtig. Gäbe es Linearformen noch nicht, wir erfänden sie in der Numerik neu!

😊 Jedes S_x^w ist eine Linearform, also ein Element des Dualraums V^* . Wir suchen (x, w) , sodass S_x^w das Integral I möglichst gut approximiert.

Newton–Cotes: Der erste und einfachste Fall entsteht, wenn wir die Stützstellen fest vorschreiben, etwa äquidistant $x_k = a + (b - a) \cdot k/n$. Dann können wir die Gewichte $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}$ so wählen, dass exakte Gleichheit $I(f) = S_x^w(f)$ für alle Polynome vom Grad $< n$ gilt. (Übung!) Die obige Trapezregel und die Fassregel sind genau von dieser Form.

Gauß–Legendre: Es erweist sich als vorteilhaft, die Stützstellen nicht äquidistant zu wählen, sondern je nach Bedarf ihre Lage zu optimieren. Es existiert genau eine Lösung (x, w) , sodass Gleichheit $I(f) = S_x^w(f)$ für alle Polynome vom Grad $< 2n$ gilt. Mehr hierzu in der Numerik! Zudem ist Gleichheit bis Grad $\leq 2n$ nachweislich nicht möglich.

😊 Das antwortet auf die eingangs gestellte Optimierungsfrage: Unter allen Abtastungen mit höchstens n Auswertungen ist Gauß–Legendre die beste Approximation, also wie gewünscht: möglichst gut und günstig.

Definition W1B: der Dualraum V^* zum Raum V

Der **Dualraum** V^* von V ist die Menge aller Linearformen auf V :

$$V^* = \text{Hom}_R(V, R) = \{ \varphi : V \rightarrow R \mid \varphi \text{ ist rechtslinear} \}$$

Dies ist ein linkslinearer Raum $(V^*, +, \cdot)$ mit **punktweiser Verknüpfung**:

Addition $+: V^* \times V^* \rightarrow V^* : (\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v),$

Skalierung $\cdot : R \times V^* \rightarrow V^* : (\alpha\varphi)(v) = \alpha\varphi(v).$

Ist ${}_S V_R$ linear über (S, R) , so ist $V^* = \text{Hom}_R(V, R)$ linear über (R, S) .
Entsprechendes gilt bei Vertauschung von rechts und links.

♦ **Satz L2K:** Auch Homomorphismen sind Vektoren.

Ist ${}_S V_R$ ein linearer Raum über (S, R) und ${}_T W_R$ ein linearer Raum über (T, R) , so ist $\text{Hom}_R(V, W) \leq W^V$ ein linearer Raum über (T, S) .
Für $T = W = R$ erhalten wir den Dualraum $V^* = \text{Hom}_R(V, R) \leq R^V$.

Beweis: Wir haben $0 \in \text{Hom}_R(V, R)$. Sind $\varphi, \psi : V \rightarrow R$ rechtslinear, so auch $\alpha\varphi + \beta\psi : V \rightarrow R$ für $\alpha, \beta \in R$, denn für $u, v \in V$ und $\lambda, \mu \in R$ gilt:

$$\begin{aligned} (\alpha\varphi + \beta\psi)(u\lambda + v\mu) &\stackrel{\text{Def}}{=} \alpha\varphi(u\lambda + v\mu) + \beta\psi(u\lambda + v\mu) \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \alpha\varphi(u)\lambda + \alpha\varphi(v)\mu + \beta\psi(u)\lambda + \beta\psi(v)\mu \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} (\alpha\varphi + \beta\psi)(u)\lambda + (\alpha\varphi + \beta\psi)(v)\mu \end{aligned}$$

Somit ist $V^* = \text{Hom}_R(V, R) \leq R^V$ linkslinear über R . Für $\sigma \in S$ gilt:

$$\begin{aligned} (\varphi\sigma)(u\lambda + v\mu) &\stackrel{\text{Def}}{=} \varphi(\sigma u\lambda + \sigma v\mu) \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \varphi(\sigma u)\lambda + \varphi(\sigma v)\mu \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} (\varphi\sigma)(u)\lambda + (\varphi\sigma)(v)\mu \end{aligned}$$

Somit ist V^* rechtslinear über S . QED

Bemerkung: Ist der Ring R kommutativ, zum Beispiel ein Körper, so brauchen wir links und rechts hier nicht weiter zu unterscheiden. Der nicht-kommutative Fall zwingt uns zu Links-Rechts-Disziplin.

Beispiel W1c: Spaltenraum $V = R^{n \times 1}$ und Zeilenraum $V^* \cong R^{1 \times n}$

Sei R ein Ring und hierüber $V = R^{n \times 1}$ der Raum der Spaltenvektoren. Der Dualraum $V^* \cong R^{1 \times n}$ ist isomorph zum Raum der Zeilenvektoren.

Genauer: Zu $a \in R^{1 \times n}$ definieren wir $\varphi_a : V \rightarrow R$ durch $\varphi_a(x) = a \cdot x$.

(1) Die Abbildung φ_a ist rechtslinear, also $\varphi_a \in \text{Hom}_R(V, R) =: V^*$.

(2) Die Abbildung $\varphi : R^{1 \times n} \rightarrow V^* : a \mapsto \varphi_a$ ist linkslinear.

(3) Sie ist zudem bijektiv, also ein Isomorphismus.

Aufgabe: Rechnen Sie die hier gemachten Behauptungen sorgsam nach.

Beweis: *Matrixkalkül!* Die Matrixmultiplikation $R^{p \times q} \times R^{q \times r} \rightarrow R^{p \times r}$, hier für $(p, q, r) = (1, n, 1)$, ist (1) linear rechts und (2) linear links. (§D1) (3) *Matrixdarstellung!* Jede rechtslineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow R$ können wir eindeutig als Matrix $a \in R^{1 \times n}$ darstellen (Satz D1j), also $\varphi = \varphi_a$. QED

😊 Wir werden diese Dualität in W2E noch eleganter formulieren, nämlich gleichberechtigt in $R^{n \times 1} = V$ und $R^{1 \times n} \cong V^*$.

Bemerkung: Sei R ein Ring und hierüber $V = R^{1 \times n}$ der linkslineare Raum der Zeilenvektoren. Der Dualraum $V^* \cong R^{1 \times n}$ ist isomorph zum rechtslinearen Raum der Spaltenvektoren. Der Beweis verläuft genauso. Bitte führen Sie dies zur Übung der Begriffe selbst nochmals sorgsam aus! Formal erhalten wir dieses Ergebnis durch Transposition von Matrizen. Dabei müssen wir allerdings zusätzlich auch alle Faktoren vertauschen: Das gelingt automatisch über jedem kommutativen Ring; über einem nicht kommutativen Ring benötigen wir einen Anti-Automorphismus.

Wie versprochen sind Linearformen und Dualräume ein einfaches und grundlegendes Konzept. Einzig die Abstraktion mag etwas schrecken.

Zeilen- und Spaltenvektoren sind ein simples, doch hilfreiches Beispiel, aber längst noch nicht alles! Zur Illustration betone ich zudem einige Beispiele der Analysis, der Numerik, dem Obsthandel und der Physik.

Wem das doch zu naiv-angewandt und verwirrend-anschaulich ist, der genieße die einfache Theorie und Anwendungen erst später.

Ein Obstladen führt Bestandslisten, etwa für Einkauf und Verkauf:

$$v = v_1 \text{ Apfel} + v_2 \text{ Birne} + \dots + v_n \text{ Zitrone}$$

Solche Bestandslisten über $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$ bilden einen linearen Raum:

$$V = \langle \text{Obst} \rangle_R^! \quad \text{mit Basis} \quad \text{Obst} = \{ \text{Apfel}, \text{Birne}, \dots, \text{Zitrone} \}$$

☹ Ein Skalarprodukt ist sinnlos, es würde Äpfel mit Birnen vergleichen:

$$\langle v | v \rangle = v_1^2 \text{ Apfel}^2 + v_2^2 \text{ Birne}^2 + \dots + v_n^2 \text{ Zitrone}^2$$

Dual zu Bestandslisten sind Preislisten (etwa in Euro pro Obst):

$$u = u_1/\text{Apfel} + u_2/\text{Birne} + \dots + u_n/\text{Zitrone}$$

Auch Preislisten über R bilden einen linearen Raum:

$$V^* = \langle \text{Obst}^{-1} \rangle_R^! \quad \text{mit Basis} \quad \text{Obst}^{-1} = \{ 1/\text{Apfel}, 1/\text{Birne}, \dots \}$$

😊 Die Auswertung $\beta : V^* \times V \rightarrow R : (u, v) \mapsto u \cdot v$ ist bilinear über R .

Diese Illustration klingt etwas albern, ist aber sprechend und nützlich. Dasselbe Phänomen finden Sie in der Physik, dort seriös ausgeführt.

Wir betrachten hierbei unsere Basiselemente Apfel, Birne, ..., Zitrone als physikalische Einheiten und führen sie daher in der Notation explizit mit.

Für den Kovektor sind die physikalischen Einheiten dann die Kehrwerte $1/\text{Apfel}, 1/\text{Birne}, \dots, 1/\text{Zitrone}$. Das ist sehr natürlich und anschaulich.

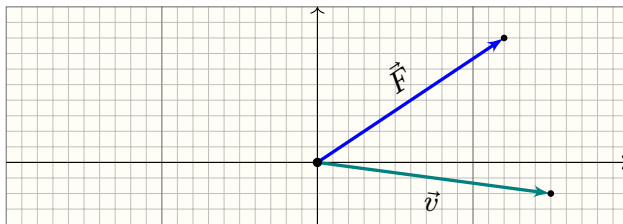
Dies betont den Unterschied zwischen den beiden Räumen V und V^* : Sie codieren duale Daten, daher verhalten sie sich entgegengesetzt.

Auf V haben wir kein sinnvolles Skalarprodukt. Stattdessen haben wir jedoch die Auswertung $\beta : V^* \times V \rightarrow R$ von Kovektoren auf Vektoren.

Diese Sichtweise ist zunächst nicht ganz so anschaulich und vertraut, doch sie ist eine universelle Konstruktion und bietet viele Vorteile:

Anders als Skalarprodukte benötigen wir dazu keine zusätzliche Struktur: Zu jedem linearen Raum V haben wir den zugehörigen Dualraum V^* und die Auswertung $\beta : V^* \times V \rightarrow R$. Dies wollen wir nun nutzen lernen!

Aus der Schulphysik kennen wir die anschaulichen Merkgeln „Arbeit = Kraft mal Weg“ und „Leistung = Arbeit durch Zeit“.



Daraus folgt „Leistung = Kraft mal Geschwindigkeit“. Ausgeschrieben:

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s}, \quad \vec{v} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}, \quad P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Letzteres sieht aus wie ein Skalarprodukt, ist aber eine Auswertung!

$$B : V^* \times V \rightarrow \mathbb{R} : (\vec{F}, \vec{v}) \mapsto \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Hier ist $\vec{v} \in V = \mathbb{R}^{3 \times 1}$ ein Vektor und $\vec{F} \in V^* \cong \mathbb{R}^{1 \times 3}$ ein Kovektor.

Wie im vorigen Beispiel sollten wir nicht Äpfel mit Birnen vergleichen! Die Verschiebung $\Delta \vec{s}$ und Geschwindigkeit $\vec{v} = \Delta \vec{s} / \Delta t$ sind Vektoren, die Kraft $\vec{F}$ wirkt hierauf als Kovektor. Die Auswertung ergibt dann die Arbeit $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s}$ bzw. die Leistung $P = \Delta W / \Delta t = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Auch hier sind die physikalischen Einheiten hilfreich zum Verständnis: Unsere beiden physikalischen Größen *Geschwindigkeit* $\vec{v}$ und *Kraft* $\vec{F}$ haben verschiedene „Dimensionen“ (ein sehr unglücklicher Name!), das heißt: verschiedene Maßeinheiten. Wir messen Geschwindigkeit in 1 m/s und Kraft in $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$. Demnach liegen $\vec{v}$ und $\vec{F}$ nicht im selben Vektorraum: Wir können sie nicht einmal sinnvoll addieren! Die Auswertung $\vec{F} \cdot \vec{s}$ kann demnach kein Skalarprodukt sein.

Hingegen können wir wunderbar $\vec{F}$ auf $\vec{s}$ auswerten, und umgekehrt: Die zugehörigen Vektorräume V^* und V sind dual zueinander.

(Natürlich haben wir für Geschwindigkeitsvektoren ein Skalarprodukt. Dies nutzen wir insbesondere in der Formel für die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$, wobei $\vec{v}^2 = \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle$ eine skalare Größe ergibt.)

Satz W1D: duale Familien

Gegeben sei eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ im rechtslinearen Raum V über R und eine Familie $(\varphi_i)_{i \in I}$ im linkslinearen Dualraum $V^* = \text{Hom}_R(V, R)$.

Die Familien $(\varphi_i)_{i \in I}$ und $(v_i)_{i \in I}$ sind **dual** zueinander, falls gilt:

$$\varphi_i(v_j) = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

In diesem Falle ist $(v_i)_{i \in I}$ in V linear unabhängig, ebenso $(\varphi_i)_{i \in I}$ in V^* .

Beweis: Duale Familien bezeugen gegenseitig ihre lineare Unabhängigkeit!

(1a) Für $v = \sum_{j \in I} v_j \mu_j$ mit $\mu \in R^{(I)}$ gilt $\varphi_i(v) \stackrel{\text{lin}}{=} \sum_{j \in I} \varphi_i(v_j) \mu_j \stackrel{\text{dual}}{=} \mu_i$.

(1b) Aus $v = 0$ folgt $\mu_i \stackrel{(1a)}{=} \varphi_i(v) \stackrel{\text{lin}}{=} 0$ für alle $i \in I$.

(2a) Für $\varphi = \sum_{i \in I} \lambda_i \varphi_i$ mit $\lambda \in R^{(I)}$ gilt $\varphi(v_j) \stackrel{\text{lin}}{=} \sum_{i \in I} \lambda_i \varphi_i(v_j) \stackrel{\text{dual}}{=} \lambda_j$.

(2b) Aus $\varphi = 0$ folgt $\lambda_j \stackrel{(2a)}{=} \varphi(v_j) \stackrel{\text{lin}}{=} 0$ für alle $j \in I$. QED

Aufgabe: Sei $\Omega =]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R}$ ein reelles Intervall vom Radius $\varepsilon > 0$. Im $\mathbb{R}$ -Vektorraum $V = \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir zu jedem $k \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$g_k : \mathbb{R} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^k/k!.$$

Linearkombination mit $a \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ergibt die Funktion $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k/k!$. Ist $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ linear unabhängig? Finden Sie eine duale Familie $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$!

Lösung: Die Ableitung $\partial : V \rightarrow V$ definiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ die Linearform

$$\psi_k : f \mapsto (\partial^k f)(0).$$

Für alle Indizes $k, \ell \in \mathbb{N}$ gilt nach Konstruktion (und kurzer Rechnung)

$$\psi_k(g_\ell) = \delta_{k,\ell} := \begin{cases} 1 & \text{falls } k = \ell, \\ 0 & \text{falls } k \neq \ell. \end{cases}$$

Also ist $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in V linear unabhängig, ebenso $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ im Dualraum V^* .

Beispiel W1E: Monome und Ableitungen im $\mathbb{R}^n$

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ betrachten wir um 0 einen offenen Ball $\Omega = B(0, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \varepsilon\}$ mit beliebig kleinem Radius $\varepsilon > 0$.

(1) Im $\mathbb{R}$ -Vektorraum $V = \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ betrachten wir die Monomfunktion

$$f_k : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R} : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x^k = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$$

zum Multiindex $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$. Linearkombination mit $a \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N}^n)}$ ergibt die n -dimensionalen Polynomfunktion $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k x^k$.

(2) Dual hierzu betrachten wir die Linearform $\varphi_k \in V^*$ gegeben durch

$$\varphi_k : V \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \frac{(\partial^k f)(0)}{k!} \quad \text{mit } \partial^k = \partial_1^{k_1} \dots \partial_n^{k_n} \text{ und } k! = k_1! \dots k_n!$$

Für alle Multiindizes $k, \ell \in \mathbb{N}^n$ gilt nach Konstruktion $\varphi_k(f_\ell) = \delta_{k,\ell}$.

(3) Dank W1D folgt: Die Familie $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^n}$ in V ist linear unabhängig, und die duale Familie $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^n}$ im Dualraum V^* ist linear unabhängig.

Bemerkung: Beachten Sie die geschickte Wahl der Konstanten:

Dual zu $(f_k : x \mapsto x^k)_{k \in \mathbb{N}^n}$ ist wie oben $(\varphi_k : f \mapsto (\partial^k f)(0)/k!)_{k \in \mathbb{N}^n}$.

Dual zu $(g_k : x \mapsto x^k/k!)_{k \in \mathbb{N}^n}$ ist entsprechend $(\psi_k : f \mapsto (\partial^k f)(0))_{k \in \mathbb{N}^n}$.

Diese einfache Beobachtung ist der Ausgangspunkt eines wichtigen Kapitels der Analysis: die Theorie der Taylor-Polynome und -Reihen. Zur Funktion $f \in \mathcal{C}^m(\Omega, \mathbb{R})$ um den Punkt 0 gehört das **Taylor-Polynom**

$$(T_m^0 f)(x) = \sum_{|k| \leq m} c_k x^k \quad \text{mit seinen Koeffizienten } c_k = (\partial^k f)(0)/k!.$$

Dies ist das Polynom vom Grad $\leq m$ mit denselben Ableitungen bis Grad $\leq m$ wie f im Punkt 0. Entsprechendes gilt verschoben um jeden Punkt $a \in \mathbb{R}^n$. Für $m = 1$ beschreibt dies die Tangentialebene (affin-linear), für $m = 2$ die Schmiegequadrik (als quadratisches Polynom). Dies nutzt man zur Untersuchung kritischer Stellen, insbesondere Minima und Maxima.

Das Restglied $(\varepsilon_m^0 f)(x) = f(x) - (T_m^0 f)(x)$ gibt Auskunft über den Fehler in jedem Punkt $x \in \Omega$. In günstigen Fällen gilt Konvergenz $|\varepsilon_m^0 f| \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$, und wir erhalten so die Darstellung von f als Taylor-Reihe.

Satz W1H: die duale Familie $\mathcal{B}^* = (v_i^*)_{i \in I}$ einer Basis $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$

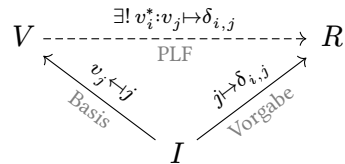
Sei V ein linearer Raum über R . (1) Zu jeder Basis $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ von V existiert genau eine duale Familie $\mathcal{B}^* = (v_i^*)_{i \in I}$ in $V^* = \text{Hom}_R(V, R)$.

(2) Ist I zudem endlich, so ist $\mathcal{B}^* = (v_i^*)_{i \in I}$ eine Basis von V^* .

Wir nennen dies kurzerhand die duale Basis zur Basis $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$.

(3) Ist I jedoch unendlich, so ist $\mathcal{B}^* = (v_i^*)_{i \in I}$ keine Basis von V^* .

Die Familie $(v_i^*)_{i \in I}$ in V^* ist linear unabhängig, aber nicht erzeugend.



Beweis: (1) Prinzip der linearen Fortsetzung (Satz N1B): Zu jedem Index $i \in I$ existiert genau eine lineare Abbildung $v_i^* : V \rightarrow R$ mit $v_i^*(v_j) = \delta_{i,j}$ für alle $j \in I$. Diese ist explizit gegeben durch $v_i^*(\sum_{j \in I} v_j \mu_j) = \mu_i$.

Die duale Familie $(v_i^*)_{i \in I}$ in V^* ist ebenfalls linear unabhängig (W1D).

(2,3) Sie erzeugt den Dualraum V^* genau dann, wenn I endlich ist:

„ $\Leftarrow$ “: Sei I endlich. Zu $\varphi \in V^*$ sei $\psi := \sum_{i \in I} \varphi(v_i) v_i^* \in \langle v_i^* : i \in I \rangle_R$.

Für $j \in I$ gilt $\psi(v_j) \stackrel{\text{lin}}{=} \sum_{i \in I} \varphi(v_i) v_i^*(v_j) \stackrel{\text{dual}}{=} \varphi(v_j)$, also $\psi = \varphi$ dank N1A.

„ $\Rightarrow$ “: Dank PLF N1B existiert $\varphi : V \rightarrow R$ linear mit $\varphi(v_j) = 1$ für alle $j \in I$.

Alternativ, $\varphi : V \rightarrow R : v \mapsto \sum_{i \in I} v_i^*(v)$ ist wohldefiniert und linear, also $\varphi \in V^*$. Sie erfüllt $\varphi(v_j) = 1$ für alle $j \in I$. Für jeden Vektor $v = \sum_{j \in I} v_j \mu_j$ mit $\mu \in R^{(I)}$ folgt $\varphi(v) \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{i \in I} v_i^*(v) \stackrel{\text{lin}}{=} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} v_i^*(v_j) \mu_j \stackrel{\text{dual}}{=} \sum_{i \in I} \mu_i$.

Nach Voraussetzung existieren Koeffizienten $\lambda \in R^{(I)}$ mit $\varphi = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i^*$. Für alle $j \in I$ folgt $1 \stackrel{\text{Def}}{=} \varphi(v_j) \stackrel{\text{Vor}}{=} \sum_{i \in I} \lambda_i v_i^*(v_j) \stackrel{\text{dual}}{=} \lambda_j$, also ist I endlich. **QED**

◆ Beispiel W6A: Polynome und Auswertung

Der Raum $V = \mathbb{R}[X]$ aller Polynome über $\mathbb{R}$ hat die Monombasis $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Im Dualraum V^* ist ihre duale Familie $(\varphi_k : f \mapsto (\partial^k f)(0)/k!)_{k \in \mathbb{N}}$ (W1E). Die Auswertung $\text{ev}_1 : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f(1)$ liegt nicht in $\langle \varphi_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle_{\mathbb{R}}^!$.

Beispiel: duale Familie einer Basis

Aufgabe: Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2 \times 1}$ über $\mathbb{R}$ vergleichen wir zwei Basen,

$$\mathcal{A} = \left(a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \left(b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie die hierzu dualen Basen des Dualraums $V^* \cong \mathbb{R}^{1 \times 2}$.

Lösung: Nach Definition der dualen Familie finden wir

$$a_1^* = [1 \ 0], \quad a_2^* = [0 \ 1] \quad \text{und} \quad b_1^* = [1 \ -1], \quad b_2^* = [0 \ 1].$$

⚠ Beachten Sie die Tücke der Notation: Es gilt $a_1 = b_1$, doch $a_1^* \neq b_1^*$.

Merke: Die Konstruktion der Linearform $v_i^* : V \rightarrow R : v_j \mapsto \delta_{i,j}$ in $\mathcal{B}^*$ hängt nicht nur von v_i ab, sondern von der gesamten Basis $\mathcal{B} = (v_j)_{j \in I}$.

Bemerkung: Zu der linear unabhängigen Familie $(a_1) = (b_1)$ in V existieren mehrere duale Familien in V^* , etwa $(a_1^*) \neq (b_1^*)$. Zur Eindeutigkeit in Satz W1H benötigen wir eine Basis!

Beispiel: duale Familie einer Basis

🤔 Wie lösen Sie die vorige Aufgabe effizient? Matrixdualität! (M3)

Aufgabe: Sei $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$ eine Basis im Spaltenraum $V = \mathbb{R}^{n \times 1}$. Wie berechnen Sie die duale Basis $\mathcal{B} =$ im Zeilenraum $V^* \cong \mathbb{R}^{1 \times n}$?

Lösung: Wir bilden die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Spalten $a_1, \dots, a_n$. Gesucht ist die inverse Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Zeilen $b_1, \dots, b_n$, sodass $BA = 1_{n \times n}$ gilt, also $b_i \cdot a_j = \delta_{i,j}$ für alle Indizes i, j .

😊 Über jedem Divisionsring R löst dies der Gauß-Algorithmus. Erfolgreiche Inversion bezeugt gegenseitig die Basiseigenschaft.

Wiederholung: Gegeben sei eine (un/endliche) Basis $(v_i)_{i \in I}$ von V . Wie berechnen Sie $v_i^*(v)$ für einen beliebigen Vektor $v \in V$?

Lösung: Es gilt $v = \sum_{j \in I} v_j \mu_j$ mit eindeutigen Koeffizienten $\mu \in R^{(I)}$. Daraus folgt $v_i^*(v) \stackrel{\text{lin}}{=} \sum_{j \in I} v_i^*(v_j) \mu_j \stackrel{\text{dual}}{=} \mu_i$. Voilà!

😊 Die Linearform v_i^* filtert den zugehörigen Koeffizienten μ_i heraus. Diese Eigenschaft ist theoretische Grundlage und praktischer Nutzen!

Beispiel W1i: der Koordinatenraum $R^{(I)}$ und sein Dualraum R^I

Über dem Ring R betrachten wir $V = R^{(I)}$ als rechtslinearen Raum. Der Dualraum $V^* = \text{Hom}_R(V, R)$ ist dann linkslinear über R (W1A). Dank PLF (N1B) haben wir den R -linearen Isomorphismus

$$V^* \cong R^I : \varphi \mapsto u = (\varphi(e_i))_{i \in I}$$

Die Umkehrung $u \mapsto \varphi$ ist explizit gegeben durch $\varphi(v) := \sum_{i \in I} u_i v_i$.

(0) Zur Standardbasis $(e_i)_{i \in I}$ in V gehört die duale Familie $(e_i^*)_{i \in I}$ in V^* . Diese erzeugt den Dualraum V^* genau dann, wenn I endlich ist. (W1H)

(1) Speziell für $I = \{1, \dots, n\}$ finden wir erneut das Eingangsbeispiel von Spaltenvektoren $V = R^{n \times 1} \cong R^n$ und Zeilenvektoren $V^* \cong R^{1 \times n} \cong R^n$.

(2) Für $I = \mathbb{N}$ ist $V = R^{(\mathbb{N})} \cong R[X]$ der Raum der Folgen mit *endlichem* Träger. Hingegen ist $V^* \cong R^{\mathbb{N}} \cong R[[X]]$ der Raum *aller* Folgen, siehe W6A.

⚠ Für I unendlich sind $V = R^{(I)}$ und $V^* \cong R^I$ deutlich verschieden!

Zur Erinnerung: R^I ist der Raum aller Abbildungen $v : I \rightarrow R : i \mapsto v_i$, wobei Addition und Skalierung punktweise erklärt sind (L2D). Darin ist $R^{(I)} = \{v \in R^I \mid \# \text{supp}(v) < \infty\}$ der Unterraum aller Abbildungen $v : I \rightarrow R$ mit endlichem Träger $\text{supp}(v) = \{i \in I \mid v_i \neq 0\}$, siehe L2D.

Ist R ein Körper oder ein Divisionsring, so hat jeder R -Vektorraum V eine Basis $(v_i)_{i \in I}$, ist also isomorph zu unserem Koordinatenraum $R^{(I)}$. Dieser einfache Koordinatenraum ist somit das zentrale Beispiel und über einem Divisionsring sogar repräsentativ für *alle* linearen Räume.

Jeder R -Vektorraum V sieht also aus wie ein Koordinatenraum $R^{(I)}$, und der Dualraum V^* ist demnach isomorph zu R^I . Das ist konkret. Mit diesen vertrauten Räumen haben wir durchgehend gearbeitet und schon viele gute Erfahrungen gemacht, so auch hier.

⚠ Die duale Familie $(v_i^*)_{i \in I}$ in $V^* \cong R^I$ ist linear unabhängig (W1D), erzeugt aber in V^* nur den Unterraum $U^* := \langle v_i^* : i \in I \rangle_R \cong R^{(I)} \leq R^I$. Genau dann gilt $U^* = V^*$, wenn I endlich ist. Dies führen wir nun aus.

 Sind der Raum V und sein Dualraum V^* isomorph?

W123

Wie oben gesehen ist V ein rechtslinearer Raum über R und daher V^* ein linkslinearer Raum über R , oder umgekehrt bei Bedarf. Im Allgemeinen kann es daher keinen Isomorphismus geben, selbst wenn beide Räume selbe Dimension haben. Mit etwas mehr Struktur gelingt dies jedoch:

Korollar W1j: nicht-kanonische Isomorphie zwischen V und V^*

Sei (R, σ) ein involutiver Ring (D1G), etwa kommutativ (R, id_R) oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$ oder $R = \mathbb{K}^{r \times r}$ mit $\sigma : A \mapsto A^\dagger$.

Sei V ein rechtslinearer Raum über R mit endlicher Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$. Dann ist V^* ein linkslinearer Raum mit dualer Basis $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$.

Dann erhalten wir den semilinearen Isomorphismus (S1B)

$$(\Psi_{\mathcal{B}}, \Psi_{\mathcal{B}}^*) : V \cong V^* : \sum_{i \in I} v_i \mu_i \mapsto \sum_{i \in I} \mu_i^\sigma v_i^*.$$

Über jedem kommutativen Ring R , insbesondere über jedem Körper, müssen wir rechts und links nicht streng unterscheiden. Somit existiert ein Isomorphismus $V \cong V^*$. Er ist nicht natürlich, sondern willkürlich. nicht objektiv, sondern subjektiv, abhängig von der gewählten Basis.

 Sind der Raum V und sein Dualraum V^* isomorph?

 W124
Ausführung

⚠ Der Isomorphismus $(\Psi_{\mathcal{B}}, \Psi_{\mathcal{B}}^*) : V \cong V^*$ ist nicht natürlich, insbesondere müssen wir links und rechts zurechtbiegen.

⚠ Der Isomorphismus $(\Psi_{\mathcal{B}}, \Psi_{\mathcal{B}}^*) : V \cong V^*$ ist nicht kanonisch, sondern hängt von der willkürlich gewählten Basis $\mathcal{B}$ ab.

⚠ Ohne Vorgabe einer Basis können wir herzlich wenig sagen.

Beispiel W1k: Raum und Dualraum sind nicht immer isomorph.

Wir betrachten die abelsche Gruppe $V = \mathbb{Z}/n$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

(1) Als linearer Raum über dem Ring $\mathbb{Z}$ gilt $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}) = 0$.

(2) Über dem Ring $\mathbb{Z}/n$ hingegen gilt $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}/n}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/n) \cong \mathbb{Z}/n$.

Beweis: (1) Jeder Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}/n \rightarrow \mathbb{Z}$ ist trivial, denn für $a = \varphi(1) \in \mathbb{Z}$ mit Ordnung n bleibt nur $a = 0$, also $\varphi = 0$.

(2) Wir haben $\text{Hom}_{\mathbb{Z}/n}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/n) \cong \mathbb{Z}/n : \varphi \mapsto \varphi(1)$. Das ist Beispiel W1i im Spezialfall $I = \{1\}$: Jeder Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}/n \rightarrow \mathbb{Z}/n$ hat die Form $\varphi : x \mapsto ax$ mit $a = \varphi(1)$. Diese Zuordnung $\varphi \mapsto \varphi(1)$ ist $\mathbb{Z}/n$ -linear und bijektiv, also ein Isomorphismus über $\mathbb{Z}/n$. QED

Satz W1L: der natürliche Homomorphismus von V zum Bidual V^{**}

Sei V ein rechtslinearer Raum über dem Ring R .

Der Dualraum $V^* = \text{Hom}_R(V, R)$ ist ein linkslinearer Raum.

Der Bidualraum $V^{**} = (V^*)^* = \text{Hom}_R(V^*, R)$ ist wieder rechtslinear.

(0) Wir haben die natürliche Abbildung

$$\iota : V \rightarrow V^{**} : v \mapsto \iota(v) \quad \text{mit} \quad \iota(v)(\varphi) := \varphi(v).$$

(1) Diese Abbildung ι ist rechtslinear, kurz $\iota \in \text{Hom}_R(V, V^{**})$.

(2) Hat V eine Basis $(v_i)_{i \in I}$, so ist ι injektiv, kurz $\iota : V \hookrightarrow V^{**}$.

(3) Hat V eine endliche Basis $(v_i)_{i \in I}$, so ist ι bijektiv, $\iota : V \xrightarrow{\sim} V^{**}$.

Beispiel: Für $V = R^{n \times 1}$ über R gilt $V^* \cong R^{1 \times n}$ und dann $V^{**} \cong R^{n \times 1}$. In dieser Darstellung ist der natürliche Isomorphismus ι die Identität.

Aufgabe: Weisen Sie die Aussagen des Bidualsatzes sorgsam nach! Alle Daten liegen explizit vor. Es genügt gewissenhaftes Nachrechnen.

Beweis: (0) Die Abbildung $\iota(v) : V^* \rightarrow R : \varphi \mapsto \varphi(v)$ ist linkslinear (W1B). Somit erhalten wir tatsächlich $\iota(v) \in \text{Hom}_R(V^*, R) = (V^*)^* = V^{**}$.

(1) Die so definierte Abbildung $\iota : V \rightarrow V^{**} : v \mapsto \iota(v)$ ist rechtslinear.

Warum? Nachrechnen! Für alle $u, v \in V$ und $\lambda, \mu \in R$ sowie $\varphi \in V^*$ gilt:

$$\begin{aligned} \iota(u\lambda + v\mu)(\varphi) &\stackrel{\text{Def}}{=} \varphi(u\lambda + v\mu) \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \varphi(u)\lambda + \varphi(v)\mu \stackrel{\text{Def}}{=} \iota(u)(\varphi)\lambda + \iota(v)(\varphi)\mu \end{aligned}$$

Dank Extensionalität schließen wir $\iota(u\lambda + v\mu) = \iota(u)\lambda + \iota(v)\mu$.

(2) Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und $(v_i^*)_{i \in I}$ die duale Familie in V^* (W1H). Die Bildfamilie $(\iota(v_i))_{i \in I}$ in V^{**} ist dual zu $(v_i^*)_{i \in I}$ in V^* , denn wir haben $\iota(v_j)(v_i^*) \stackrel{\text{Def}}{=} v_i^*(v_j) \stackrel{\text{dual}}{=} \delta_{i,j}$. Somit ist $(\iota(v_i))_{i \in I}$ linear unabhängig (W1D), also $\iota : V \rightarrow V^{**} : \sum_i v_i \mu_i \mapsto \sum_i \iota(v_i) \mu_i$ injektiv (M1A).

(3) Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine endliche Basis von V , so auch dual $(v_i^*)_{i \in I}$ in V^* (W1H) und bidual $(v_i^{**})_{i \in I}$ in V^{**} ; dank Eindeutigkeit gilt $\iota(v_i) = v_i^{**}$ (W1H). Somit ist $\iota : V \rightarrow V^{**} : \sum_i v_i \mu_i \mapsto \sum_i v_i^{**} \mu_i$ bijektiv (M1A). QED

😊 Bisher sind Beweise und Rechnungen zur Dualität alle „lokal-trivial“. Wir müssen nur die Definitionen genau und gewissenhaft anwenden.

🤔 Wie kommt das? Das verdanken wir, wie so oft, der Abstraktion!

😊 Die geläuterten Grundlagen erlauben nur das absolut nötige Minimum an Rechenregeln. Unser Suchraum ist deshalb winzig, oft gibt es nur eine einzige sinnvolle Umformung, und diese ist dann natürlich die richtige.

Aufgabe: Gehen Sie jeden Schritt durch und prüfen sie die Argumente kritisch, zum Beispiel: Warum gilt die Gleichheit $\iota(v_i) = v_i^{**}$ in Schritt (3)?

Lösung: Wir haben die Basis $(v_i^*)_{i \in I}$ in V^* dank W1H. Hierzu dual ist sowohl $(v_i^{**})_{i \in I}$, erneut dank W1H, als auch $(\iota(v_i))_{i \in I}$, denn wir haben $\iota(v_i)(v_j^*) \stackrel{\text{Def}}{=} v_j^*(v_i) \stackrel{\text{dual}}{=} \delta_{i,j} \stackrel{\text{Def}}{=} v_i^{**}(v_j^*)$ für alle $j \in I$. Dank Vergleichslemma N1A und Extensionalität gilt $\iota(v_i) = v_i^{**}$. Genau das war nachzurechnen.

Bemerkung: Unser Homomorphismus $\iota : V \rightarrow V^{**}$ ist *natürlich*! Im Gegensatz zu W1J gelingt die Konstruktion von ι ohne willkürliche Wahlen, insbesondere ohne die Wahl einer Basis. Die Existenz einer Basis garantiert die Injektivität, eine endliche Basis sogar die Bijektivität.

In diesem Kapitel arbeiten wir zunächst über einem beliebigen Ring R . Um Trivialitäten zu vermeiden, fordern wir lediglich $0 \neq 1$, also $R \supsetneq \{0\}$. Dadurch schließen wir lediglich den Nullring $R = \{0\}$ mit $0 = 1$ aus. Somit enthält $\delta_{i,j} \in \{0, 1\}$ genau die gewünschte Information.

Das ist schwindelerregend allgemein, doch zum Ausgleich betrachten wir meist nur freie Räume, also mit einer Basis, das vereinfacht enorm. So können wir alle *Definitionen* ganz bequem allgemein formulieren, doch die *Rechnungen* vereinfachen wir durch Annahme einer Basis.

Über einem Körper oder Divisionsring ist jeder Vektorraum frei (M2K), unsere Sätze gelten in diesen Fällen also ohne jede Einschränkung. Wie gesehen genügt für viele Sätze bereits die Annahme einer Basis, und die Beweise sind wörtlich dieselben; daher bleibt R allgemein.

Es gibt im Folgenden ein paar Aussagen, für die wir tatsächlich mehr benötigen; in diesen Fällen setze ich dann einen Divisionsring voraus. Solange es weder Aussage noch Beweis verkompliziert, verzichte ich auf diese Einschränkung und formuliere so allgemein wie möglich.

Gibt es eine anschauliche Interpretation?

W129
Ausführung

⚠ Die wichtige Warnung vorweg: Suchen Sie nicht krampfhaft (nur) anschaulich zu verstehen, gerade bei Linearformen ist es viel leichter, formal zu rechnen. Investieren Sie Ihre liebevolle Mühe anfangs besser in die wenigen Definitionen und Sätze und die lehrreichen Beweise.

Wir stellen uns einen Vektor $v \in V$ als **physikalische Größe** vor, zum Beispiel eine Verschiebung im $\mathbb{R}^3$ oder eine Geschwindigkeit. Jeder Kovektor $u \in V^*$ ist dual dazu ein **Messgerät** für Vektoren $v \in V$. Die Messung ist die Auswertung von u auf v : Der Kovektor u nimmt als Eingabe den Vektor v und gibt als Ausgabe den **skalaren Messwert** $u(v)$. Hierzu haben wir bereits vielfältige Anwendungsbeispiele skizziert:

- Zeilenvektor u mal Spaltenvektor v (D121)
- Auswertung / Abtastung einer Funktion f (W103)
- Preisliste ausgewertet auf einer Bestandsliste (W109)
- Auswertung einer Kraft auf einer Geschwindigkeit (W111)
- Anwendung einer Ableitung auf einen Tangentialvektor
- Integral eines Kovektorfeldes entlang eines diff'baren Weges.

Gibt es eine anschauliche Interpretation?

W130
Ausführung

🤔 Wie können wir uns den Bidualraum V^{**} anschaulich vorstellen? Seine Elemente $\psi \in V^{**}$ sind Messgeräte für Kovektoren $u \in V^*$. Was also bedeuten solche „Kokovektoren“? 🍷 möglichst konkret? Ist das abstrakter Kokolores? Nein, wir können konkret damit rechnen!

😊 Am einfachsten können wir Messgeräte $u \in V^*$ messen, indem wir sie auf ein und dieselbe Datenlage $v \in V$ anwenden. Das ist die oben erklärte Abbildung $\iota : V \rightarrow V^{**} : \iota(v)(u) = u(v)$.

😊 Die gute Nachricht des sagenhaft eleganten Bidualsatzes W1L lautet:
(0) Zu jedem Vektor $v \in V$ verhalten wir so den Kokovektor $\iota(v) \in V^{**}$.
(1) Die so definierte Zuordnung $\iota : V \rightarrow V^{**}$ ist eine lineare Abbildung.
(2) Hat der Raum V eine Basis $(v_i)_{i \in I}$, so ist ι injektiv, kurz $\iota : V \hookrightarrow V^{**}$.
(3) Hat V eine endliche Basis $(v_i)_{i \in I}$, so ist ι bijektiv, $\iota : V \xrightarrow{\sim} V^{**}$.

In endlicher Dimension verliert das Bidual V^{**} also seinen Schrecken: Wir können uns *jeden* Kokovektor als einen Vektor $v \in V$ vorstellen. Die Anwendung von $v \in V$ auf $u \in V^*$ ist schlicht die Auswertung $u(v)$. Damit wird das gefürchtete Bidual schließlich wunderbar leicht.

Anschaulich oder formal? Ja, gerne beides!

W131
Ausführung

Mit dieser kurzen Skizze zur Anschauung lasse ich es bewenden. Ich gebe gerne anschauliche Illustrationen, das mag manchmal helfen. Sie *ergänzen* die Definitionen, doch *ersetzen* diese keinesfalls. Lernen Sie beides zu nutzen, wie linke und rechte Hand.

😊 Viele mathematische Probleme scheinen nur von ferne schwer; sie lösen sich in Wohlgefallen auf, sobald Sie sie ernsthaft durcharbeiten. Nochmal: Suchen Sie nicht krampfhaft (nur) anschaulich zu verstehen, gerade bei Linearformen ist es wesentlich leichter, formal zu rechnen.

Stattdessen betone ich lieber meine tiefe Überzeugung und Rat: Linearformen und Dualräume sind naturgemäß sehr einfach, Sie müssen wie immer „nur“ die Definitionen genau lernen und gewissenhaft anwenden. Hier üben Sie diese Sorgfalt!

*Der Appetit kommt mit dem Essen.
Das Verstehen kommt mit dem Üben.
Die Sicherheit kommt mit dem Rechnen.
Die Anschauung kommt mit der Erfahrung.*

Anschaulich oder formal? Ja, gerne beides!

W132
Ausführung

🤔 Ist das „abstrakt“ und „schwer“? Nein, wenn Sie es recht betrachten, eigentlich nicht: Die Definition erklärt Ihnen ganz genau, wie Sie mit Linearformen rechnen, so werden diese recht leicht und sehr konkret! Dualräume sind neu und ungewohnt, das schon, aber mehr auch nicht.

Mit linearen Abbildungen haben Sie bislang gute Erfahrungen gemacht, und Linearformen sind hierzu der einfachste Spezialfall. Das kann nicht wirklich schwierig sein, es erfordert lediglich Sorgfalt und Einübung. Genau dazu sind Grundfragen wie Linearformen eine gute Diagnose.

Also, fassen Sie guten Mut und packen Sie es professionell an! Nach zwei Semestern Mathestudium wissen Sie, wie es gelingt. Hier können Sie Ihr solides Grundlagenwissen einbringen, und wo noch etwas fehlt die Lücken endlich schließen.

Freuen Sie sich auf Quiz und Übung! Sie werden anschließend erfreut feststellen: Die eingehende Beschäftigung mit Linearformen verfestigt und vertieft Ihr Verständnis. Wir beleuchten im Folgenden vielfältige Aspekte: Annulator, Bilinearformen, duale Abbildungen, usw.

Definition W2A: der Annulator einer Teilmenge / eines Teilraums

Über R sei V ein linearer Raum und $V^* = \text{Hom}_R(V, R)$ sein Dualraum. Zu jeder Teilmenge $X \subseteq V$ ist der **Annulator** $X^\circ \subseteq V^*$ definiert durch

$$X^\circ := \{ \varphi \in V^* \mid \forall v \in X : \varphi(v) = 0 \}.$$

Die Bedingung „ $\varphi(v) = 0$ für alle $v \in X$ “ schreiben wir kurz $\varphi(X) = 0$.

Es gilt $X^\circ \leq V^*$. Aus $X \subseteq Y \subseteq U := \langle X \rangle_R$ folgt $X^\circ = Y^\circ = U^\circ \leq V^*$.

Beweis: (1) Es gilt $\text{const}_V^0 = 0 \in X^\circ$. Aus $\varphi, \varphi' \in X^\circ$ und $\lambda, \lambda' \in R$ folgt $\lambda\varphi + \lambda'\varphi' \in X^\circ$, denn für jeden Vektor $x \in X \subseteq V$ gilt

$$(\lambda\varphi + \lambda'\varphi')(x) \stackrel{\text{Def}}{=} \lambda\varphi(x) + \lambda'\varphi'(x) \stackrel{\text{Vor}}{=} 0.$$

(2) Die Inklusionen $X^\circ \supseteq Y^\circ \supseteq U^\circ$ sind klar. Zudem gilt $X^\circ \subseteq U^\circ$: Für $\varphi \in X^\circ$ gilt $X \subseteq \text{Ker}(\varphi)$, und daraus folgt $U = \langle X \rangle_R \subseteq \text{Ker}(\varphi)$, denn der Kern ist ein Unterraum (L2B). Das bedeutet $\varphi \in U^\circ$. QED

Bemerkung: Beachten Sie die Ähnlichkeit, aber auch den Unterschied zum Orthogonalraum $X^\perp$ bezüglich eines Skalarprodukts $\langle - | - \rangle$ auf V .

$$X^\perp := \{ v \in V \mid \forall u \in X : \langle u | v \rangle = 0 \} \leq V$$

Der Annulator X° der Teilmenge $X \subseteq V$ liegt im Dualraum V^* , der Orthogonalraum $X^\perp$ hingegen ist immer ein Unterraum von V . Die beiden können also niemals *gleich* sein, bestenfalls *isomorph*.

Im nächsten Abschnitt werden wir die beiden Sichtweisen versöhnen und mit Hilfe einer Bilinearform einen Isomorphismus konstruieren.

Gemäß $X^\perp = \langle X \rangle_R^\perp$ können wir auch hier zum erzeugten Teilraum $U = \langle X \rangle_R \leq V$ übergehen. Bei einem Skalarprodukt gilt $V = U \oplus U^\perp$, und wir nennen dann $U^\perp$ das orthogonale Komplement zu U in V .

😊 Dualität ist, wie bereits eingangs motiviert, die natürliche Verallgemeinerung von Bilinearformen und Skalarprodukten. Auch das nächste Beispiel illustriert dies sehr eindrücklich.

Beispiel zum Annulator

Aufgabe: Gegeben sind die folgenden Vektoren in $V = \mathbb{R}^{3 \times 1}$ über $\mathbb{R}$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie zu $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ den Annulator X° in $V^* \cong \mathbb{R}^{1 \times 3}$.

Lösung: Wir schreiben die Spalten v_1, v_2, v_3, v_4 in die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$. Wir suchen alle $u \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ mit $uA = 0$. Mit Spaltenoperationen bringen wir A in reduzierte Spaltenstufenform (RSSF) $C = AT$ mit $T \in \text{GL}_4 \mathbb{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{RSSF}]{\text{Gauß}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

Demnach gilt $uA = 0$ genau dann, wenn $uC = 0$. Daraus lesen wir ab:

$$X^\circ = \langle u_1 \rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{mit} \quad u_1 = [-2 \quad 5 \quad -1]$$

😊 Anschaulich ist $\langle X \rangle \leq \mathbb{R}^3$ eine Ebene, und u_1 steht hierzu senkrecht.

😊 Allgemein: $\dim \langle X \rangle = 2$ und $\dim X^\circ = 1$ addieren sich zu $\dim V = 3$.

Beispiel zum Annulator

⚠ Statt dem Rechtskern berechnen wir hier den Linkskern von A .

Meist schreiben wir lineare Gleichungssysteme in der vertrauten Konvention $Ax = y$ mit $x \in R^{n \times 1}$ und $y \in R^{m \times 1}$ als Spaltenvektoren und der Koeffizientenmatrix $A \in R^{m \times n}$. Mit Zeilenoperationen D2H bringen wir A in reduzierte *Zeilenstufenform* $B = SA$ mit $S \in \text{GL}_m R$. Statt $Ax = y$ lösen wir die äquivalente, leichtere Gleichung $SAx = Sy$.

Im vorliegenden Falle bietet sich jedoch die Schreibweise $uA = 0$ an, mit $u \in R^{1 \times m}$ und $0 \in R^{1 \times n}$ als Zeilenvektoren. Mit Spaltenoperationen bringen wir A in reduzierte *Spaltenstufenform* $C = AT$ mit $T \in \text{GL}_n R$. Statt $uA = 0$ lösen wir die äquivalente, leichtere Gleichung $uAT = 0$. Das Gauß-Verfahren ist in beiden Situationen vollkommen analog.

Über jedem involutiven Ring (R, σ) , können Sie die beiden Probleme und Lösungsverfahren ineinander umrechnen: Aus $Ax = y$ wird $x^\dagger A^\dagger = y^\dagger$ und umgekehrt. Ist unser Ring R nicht involutiv, so gilt dies nicht, daher scheint mir hier die nötige Links-Rechts-Disziplin natürlich und hilfreich. Über jedem kommutativen Ring (R, id_R) ist Umwälzen besonders leicht.

Satz W2B: Dimension und Struktur des Annulators

Sei V ein R -linearer Raum, $U \leq V$ ein Unterraum, dazu $U^\circ \leq V^*$.

(1) Ist R ein Divisionsring, so gilt die Dimensionsformel

$$\dim_R(U) + \dim_R(U^\circ) = \dim_R(V).$$

(2) Allgemein über jedem Ring R gilt die folgende Implikation:

$$V = U \oplus \langle v_1, \dots, v_k \rangle_R^! \implies U^\circ = \langle v_1^*, \dots, v_k^* \rangle_R^! \leq V^*$$

Hier ist $v_i^* : V \rightarrow R$ definiert durch $v_i^*(v_j) = \delta_{i,j}$ und $v_i|_U = 0$ für alle i, j .

(3) Aus dem Quotienten $q : V \twoheadrightarrow V/U$ erhalten wir den Isomorphismus

$$q^* : (V/U)^* \xrightarrow{\sim} U^\circ : \psi \mapsto \psi \circ q.$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & R \\ q \downarrow & \nearrow \psi & \\ V/U & & \end{array}$$

Letzteres folgt aus der linearen Faktorisierung über die Surjektion $q : V \twoheadrightarrow V/U$ (Satz L3c).

Die Dimensionsformel (1) ist haben wir im vorigen Beispiel beobachtet. Die Gleichheit dort war tatsächlich kein Zufall, sondern gilt allgemein. Um allgemein von Dimension sprechen zu können, benötigen wir einen Divisionsring, wir denken insbesondere an Körper wie $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_q, \dots$.

Die Aussage (2) gilt allgemeiner über jedem Ring R , allerdings müssen wir eine Basis voraussetzen, hier in der Form $V = U \oplus \langle v_1, \dots, v_k \rangle_R^!$. Wenn U eine Basis hat, kurz $U = \langle v_i \mid i \in J \rangle_R^!$ mit $\dim U = \#J =: j$, dann folgt die Dimensionsformel (1), denn wir haben $\dim V = j + k$.

Für die Aussage (2) spielt jedoch die Struktur von U gar keine Rolle, wir benötigen lediglich ein Komplement mit einer endlichen Basis. Die griffige Formel lautet dann als Slogan: Die Dimension des Annulators $U^\circ \leq V^*$ ist die Codimension des Unterraums $U \leq V$.

Die Aussage (3) ist die allgemeinste Formulierung dieser drei Aussagen, denn sie impliziert unmittelbar die Gleichung (2) und damit auch (1). Der Preis für diese Allgemeinheit ist die etwas höhere Abstraktion, doch diese Investition zahlt sich aus in Klarheit, Effizienz und Eleganz.

Beweis: Diese schönen Rechenregeln beweisen Sie in den Übungen! Bitte nutzen Sie diese gute Gelegenheit, die Grundlagen des ersten Semesters handfest zu wiederholen und etwaige Lücken zu schließen.

Hier lohnt sich, dabei die Reihenfolge umzudrehen, vom Allgemeinen zum Speziellen vorzugehen, und dadurch Einsparungen zu nutzen:

(3) Die Abbildung $q^* : (V/U)^* \rightarrow U^\circ : \psi \mapsto \psi \circ q$ ist ein R -linearer Isomorphismus. Wiederholen Sie dazu die Faktorisierung über eine Surjektion, sie ist genau darauf zugeschnitten. Damit ist es leicht.

(2) Wir nehmen an, dass U ein Komplement W mit R -Basis $(v_1, \dots, v_k)$ besitzt, also $V = U \oplus W$ wie oben angegeben. Die dualen Basisvektoren $\tilde{v}_i^* \in W^*$ setzen wir fort zu Linearformen $v_i^* \in V^*$ durch $v_i^*(w) = \tilde{v}_i^*(w)$ für $w \in W$ und $v_i^*(u) = 0$ für $u \in U$. Dann ist $(v_1^*, \dots, v_k^*)$ eine Basis von U° .

(1) Ist R ein Divisionsring, so folgt aus (3) oder (2) die Dimensionsformel

$$\dim_R(U) + \dim_R(U^\circ) = \dim_R(V).$$

Aufgabe: Sei R ein Divisionsring und $V = R^n$ ein Koordinatenraum. Übersetzen Sie obige Gleichung $\dim_R(U) + \dim_R(U^\circ) = \dim_R(V)$ in ein äquivalentes Matrixergebnis, das Ihnen aus der LinA1 vertraut ist.

😊 Das vorige Zahlenbeispiel W203 führt uns zur allgemeinen Regel:

Lösung: Zu jedem Unterraum $U \leq V$ finden wir eine Basis $(a_1, \dots, a_\ell)$ dank Basisauswahlsatz M2κ. Dabei gilt $\ell \leq n$ dank Ergänzungssatz M3o.

Für die daraus gebildete Matrix $A = (a_1, \dots, a_\ell) \in R^{n \times \ell}$ gilt demnach $U = \text{Im}(A) = AR^\ell = \langle a_1, \dots, a_\ell \rangle_R^!$. Der (Spalten)Bildraum ist $U \leq R^n$. Der (Spalten)Kern von A ist $\{0\}$, da die Spalten linear unabhängig sind.

Der Spaltenrang von A ist ℓ , also auch der Zeilenrang (Satz M31). Der Zeilenkern $\{u \in R^n \mid uA = 0\} \cong U^\circ$ hat somit Dimension $n - \ell$. Das ist genau die obige Gleichung $\dim_R(U) + \dim_R(U^\circ) = \dim_R(V)$.

😊 Die abstrakte Sichtweise ist elegant und allgemein, dazu ergänzend konkretisiert sie sich in Koordinaten zur vertrauten Matrizenrechnung. Konkret oder abstrakt? Anschaulich oder formal? Ja, gerne beides!

Satz W2c: Rechenregeln für den Annulator

Über R sei V ein linearer Raum und $V^* = \text{Hom}_R(V, R)$ sein Dualraum.

(1a) Der Übergang zum Annulator kehrt alle Inklusionen um:

$$A \subseteq B \subseteq V \implies B^\circ \leq A^\circ \leq V^*$$

(1b) Für den kleinsten bzw. größten Unterraum gilt dabei

$$\{0\}^\circ = V^* \quad \text{und} \quad V^\circ = \{0\}.$$

(2a) Für Summe $A + B$ und Schnitt $A \cap B$ von $A, B \leq V$ gilt:

$$(A + B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ \quad \text{und} \quad (A \cap B)^\circ \supseteq A^\circ + B^\circ$$

(2b) Allgemein gilt für jede Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Unterräumen $A_i \leq V$:

$$(\sum_{i \in I} A_i)^\circ = \bigcap_{i \in I} A_i^\circ \quad \text{und} \quad (\bigcap_{i \in I} A_i)^\circ \supseteq \sum_{i \in I} A_i^\circ$$

Gleichheit gilt hier, falls R ein Divisionsring ist und die Menge I endlich.

Beweis: (1a) Sei $A \subseteq B \subseteq V$. Für $\varphi \in B^\circ$ gilt $\varphi(B) = 0$, also $\varphi(A) = 0$, und somit $\varphi \in A^\circ$. Das zeigt $B^\circ \leq A^\circ$. (1b) Die Spezialfälle sind klar.

(2b) Wir zeigen $(\sum_{i \in I} A_i)^\circ = \bigcap_{i \in I} A_i^\circ$.

„ $\subseteq$ “: Aus $\varphi \in (\sum_{i \in I} A_i)^\circ$ folgt insbesondere $\varphi \in A_i^\circ$ für alle $i \in I$.

„ $\supseteq$ “: Aus $\varphi \in \bigcap_{i \in I} A_i^\circ$ folgt $\varphi \in A_i^\circ$ für alle $i \in I$, also $\varphi(A_i) = 0$, somit $\varphi(\sum_{i \in I} A_i) = 0$ dank Additivität von φ , und das heißt $\varphi \in (\sum_{i \in I} A_i)^\circ$.

(2b) Wir zeigen $(\bigcap_{i \in I} A_i)^\circ \supseteq \sum_{i \in I} A_i^\circ$.

„ $\supseteq$ “: Sei $\varphi \in \sum_{i \in I} A_i^\circ$ eine endliche Summe $\varphi = \sum_{i \in I} \varphi_i$ mit $\varphi_i \in A_i^\circ$. Auf $B = \bigcap_{i \in I} A_i$ gilt $\varphi_i(B) = 0$, also auch $\varphi(B) = 0$, somit $\varphi \in B^\circ$.

„ $\subseteq$ “: Sei I endlich. Wir betrachten $f: V \rightarrow \prod_{i \in I} V/A_i = \bigoplus_{i \in I} V/A_i$. Der Kern ist $\bigcap_{i \in I} A_i$. Wir nutzen nun $(\text{Ker } f)^\circ = \text{Im}(f^*)$, siehe W3K. QED

Beispiel: Sei $V = R^{(I)}$ und $A_i = \{v \in V \mid v_i = 0\}$, also $V = A_i \oplus \langle e_i \rangle_R^!$. Dann gilt $B := \bigcap_{i \in I} A_i = \{v \in V \mid \forall i \in I: v_i = 0\} = \{0\}$, also $B^\circ = V^*$. Hingegen gilt $A_i^\circ = \langle e_i^* \rangle_R^!$ (W2B), also $C := \sum_{i \in I} A_i^\circ = \langle e_i \mid i \in I \rangle_R^!$. Gleichheit $B^\circ = C$ gilt hier nur, falls die Menge I endlich ist! (W1r)

Satz W2c: Rechenregeln für den Annulator

(3a) Für direkte Summen gilt:

$$V = A \oplus B \implies V^* = B^\circ \oplus A^\circ$$

(3b) Für allgemeine direkte Summen gilt:

$$V = \bigoplus_{i \in I} V_i \implies V^* = \prod_{i \in I} V_i^*$$

mit $V_i^* \cong (\sum_{j \neq i} V_j)^\circ$. Ist I zudem endlich, so folgt:

$$V = \bigoplus_{i \in I} V_i \xrightarrow{I \text{ endlich}} V^* = \bigoplus_{i \in I} V_i^*$$

(4) Für jeden Unterraum $A \leq V$ gilt

$$(A^\circ)^\circ \supseteq \iota(A).$$

Gleichheit gilt im Falle $V = A \oplus B$ und $A = \langle v_1, \dots, v_k \rangle_R^!$.

Beweis: (3b) Sei $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$. Jede Linearform $\varphi: V \rightarrow R$ entspricht einer Familie $(\varphi_i)_{i \in I}$ von Linearformen $\varphi: V_i \rightarrow R$, und umgekehrt. Für die Projektion $p_i: V \twoheadrightarrow V_i$ gilt $\text{Ker } p_i = \sum_{j \neq i} V_j$. Dies induziert $V / \text{Ker } p_i \cong V_i$. Dank W2B folgern wir daraus $V_i^* \cong (\sum_{j \neq i} V_j)^\circ$.

Ist die Indexmenge I endlich, so haben wir $\prod_{i \in I} V_i^* = \bigoplus_{i \in I} V_i^*$. Diesen besonders sympathischen Fall heben wir in (3a) hervor.

(4) Die Inklusion $(A^\circ)^\circ \supseteq \iota(A)$ gilt immer und ist offensichtlich:

Für alle $v \in A$ und $\varphi \in A^\circ$ gilt nach Definition $\iota(v)(\varphi) = \varphi(v) = 0$.

Angenommen, es gilt zusätzlich $V = A \oplus B$ und $A = \langle v_1, \dots, v_k \rangle_R^!$. Dank (3) und W2B gilt dann $V^* = B^\circ \oplus A^\circ$ mit $B^\circ = \langle v_1^*, \dots, v_k^* \rangle_R^!$. Ebenso folgt $(V^*)^* = (A^\circ)^\circ \oplus (B^\circ)^\circ$ mit $(A^\circ)^\circ = \langle v_1^{**}, \dots, v_k^{**} \rangle_R^!$. Somit ist $\iota: A \hookrightarrow (A^\circ)^\circ: v_i \mapsto v_i^{**}$ ein Isomorphismus. QED

Beispiel: Zur Illustration betrachten wir $A = V = \langle v_i \mid i \in I \rangle_R^!$. Hier gilt offensichtlich $A^\circ = \{0\} \leq V^*$ und demnach $(A^\circ)^\circ = V^{**}$. Gleichheit $\iota(A) = (A^\circ)^\circ$ gilt hier nur, falls die Menge I endlich ist! (W1r)

Aufgabe: Wir betrachten erneut folgende Vektoren in $V = \mathbb{R}^{3 \times 1}$ über $\mathbb{R}$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Diese erzeugen die Unterräume $A = \langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}}^!$ und $B = \langle v_2 \rangle_{\mathbb{R}}^!$. Berechnen und vergleichen Sie $(A + B)^\circ$ und $A^\circ \cap B^\circ$ sowie $(A \cap B)^\circ$ und $A^\circ + B^\circ$.

Lösung: Wir haben $A + B = \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}}^!$ und finden $(A + B)^\circ = \langle u_1 \rangle_{\mathbb{R}}^!$ mit $u_1 = (-2, 5, -1) \in \mathbb{R}^{1 \times 3} \cong V^*$ dank Gauß-Algorithmus (W203). Anschaulich ist $A + B$ eine Ebene, und u_1 steht hierzu senkrecht.

Dagegen gilt $A^\circ = \langle u_1, e_2^* \rangle_{\mathbb{R}}^!$, $B^\circ = \langle u_1, e_1^* \rangle_{\mathbb{R}}^!$ und $A^\circ \cap B^\circ = \langle u_1 \rangle_{\mathbb{R}}^!$. Geometrisch ist dies der Schnitt von zwei Ebenen in einer Geraden. Rechnerisch lohnt sich hier bereits die Gleichung $A^\circ \cap B^\circ = (A + B)^\circ$.

Weiter finden wir den Schnitt $A \cap B = \{0\}$, also $(A \cap B)^\circ = V^*$, sowie $A^\circ + B^\circ = \langle e_1^*, e_2^*, u_1 \rangle = V^*$. Das bestätigt $(A \cap B)^\circ = A^\circ + B^\circ$.

☺ Die Rechenregeln W2c für den Annulator entsprechen intuitiv anschaulichen Gesetzmäßigkeiten für lineare Gleichungssysteme. Die abstrakte Formulierung fasst konkrete Anwendungen zusammen.

☺ Der Schnitt $V_1 \cap \dots \cap V_k$ von Unterräumen $V_1, \dots, V_k \leq V := \mathbb{R}^{n \times 1}$ ist zunächst nicht leicht zu berechnen. Das ändert sich schlagartig, wenn jeder als Kern $V_i = \text{Ker } M_i$ einer Matrix $M_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$ gegeben ist. Dann ist

$$V_1 \cap \dots \cap V_k = \text{Ker } M \quad \text{mit} \quad M = \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Hier betrachten wir $U = \mathbb{R}^{1 \times n}$ als Raum der Zeilenvektoren.

Die Zeilen der Matrix M_i spannen hierin den Unterraum $U_i \leq U$ auf.

Der Dualraum $U^* \cong \mathbb{R}^{n \times 1}$ ist dann der Raum der Spaltenvektoren.

Darin liegt der Unterraum $V_i = \text{Ker } M_i = \{v \in \mathbb{R}^{n \times 1} \mid M_i v = 0\} = U_i^\circ$.

☺ Wir nutzen dankend $V_1 \cap \dots \cap V_k = (U_1 + \dots + U_k)^\circ$: Wir wollen die linke Seite berechnen, die rechte beherrschen wir bestens dank Gauß.

Aufgabe: Sei $R \geq \mathbb{Q}$. Im Raum $V := R^{(\mathbb{N})}$ sei $v_i := ie_i - e_{i-1}$ für alle $i \geq 1$. Bestimmen Sie zur Menge $X = \{v_i \mid i \geq 1\}$ den Annulator X° in $V^* \cong R^{\mathbb{N}}$.

Lösung: Wir lösen ein unendliches Gleichungssystem! Für $u \in R^{\mathbb{N}}$ gilt $u \in X^\circ$ gdw $0 = u(v_i) = iu_i - u_{i-1}$ für alle $i \geq 1$. Für $i \geq 1$ gilt rekursiv $u_i = u_{i-1}/i$ und somit $u_i = u_0/i!$, ausgeschrieben: $X^\circ = \langle \exp \rangle_R^!$ (S141)

☺ Wir sehen, spüren und verstehen in diesen Sätzen deutlich, dass unendlich-dimensionale Räume oft nur schwache Werkzeuge zulassen (wie im Beispiel zwar keine Matrizen, dafür manchmal Rekursion o.ä.). Dennoch scheint mir das allgemeine Vorgehen und der so geschärfte Kontrast von endlicher vs unendlicher Dimension überaus lehrreich:

- 1 Wir lernen die Besonderheiten wahrzunehmen und wertzuschätzen, hier die Existenz endlicher Basen und ihrer guten Eigenschaften. Wir verstehen das Besondere besser im allgemeinen Kontext.
- 2 Der unendlich-dimensionale Fall wird in der Funktionalanalysis mit analytisch-topologischen Methoden „repariert“, soweit möglich. Auch diese Fortführung können wir hier bereits motivieren.

☺ Der Dualraum V^* zu V und der Annulator $X^\circ \leq V^*$ zu $X \subseteq V$ verallgemeinern (formalisieren, abstrahieren, verschönern) lineare Gleichungssysteme! Das entspricht der konkreten Matrixdualität! (M3)

Vielleicht sind Sie dennoch unsicher, ob sich der erhöhte Aufwand lohnt, oder fragen sich, ob das alles nicht auch irgendwie einfacher geht.

In diesem Falle können Sie sich gerne selbst überzeugen, dass über einem Körper und in endlicher Dimension die Formulierungen nicht einfacher und die Beweise nicht kürzer werden (eher im Gegenteil, so die Gefahr). Es fallen lediglich lehrreiche Gegen/Beispiele weg, was eher schade ist.

Ich denke, das allgemeine Vorgehen lohnt langfristig und bereits jetzt: Der schöne Spezialfall wird klarer verständlich im allgemeinen Kontext. Das erfordert natürlich erhöhte Konzentration und Präzision. Bitte sehen Sie das nicht als Fluch, sondern als Segen.

Ist V ein rechtslinearer Raum über R , so ist der Dualraum $U := V^*$ linkslinear (W1B), und wir haben die gegenseitige **Auswertung**

$$\beta : U \times V \rightarrow R : (u, v) \mapsto u(v).$$

Dies ist eine Bilinearform (W1B), **rechtslinear in V** , **linkslinear in U** :

$$\begin{aligned}\beta(u, v + v') &= \beta(u, v) + \beta(u, v'), & \beta(u, v \cdot \mu) &= \beta(u, v) \mu, \\ \beta(u + u', v) &= \beta(u, v) + \beta(u', v), & \beta(\lambda \cdot u, v) &= \lambda \beta(u, v).\end{aligned}$$

für alle Vektoren $v, v' \in V$ und $u, u' \in U$ sowie alle Skalare $\lambda, \mu \in R$.

Definition S1D: Bilinearform aka Paarung

Über R sei U ein linkslinearer Raum und V ein rechtslinearer Raum sowie

$$\beta : U \times V \rightarrow R : (u, v) \mapsto \beta(u, v).$$

Dies ist eine **Bilinearform**, falls für alle $u \in U$ und $v \in V$ gilt:

$$\begin{aligned}\beta_1(u) = \beta(u, -) : V \rightarrow R : v \mapsto \beta(u, v) & \text{ ist rechtslinear, also } \beta_1(u) \in V^*, \\ \beta_2(v) = \beta(-, v) : U \rightarrow R : u \mapsto \beta(u, v) & \text{ ist linkslinear, also } \beta_2(v) \in U^*.\end{aligned}$$

Wir erinnern und präzisieren die bewährten Begriffe zu Bilinearformen:

Definition W2D: Bilinearform aka Paarung

Jede Bilinearform β definiert lineare Abbildungen in die Dualräume:

$$\begin{aligned}\beta_1 : U \rightarrow V^* : u \mapsto \beta_1(u) = \beta(u, -) & \text{ linkslinear,} \\ \beta_2 : V \rightarrow U^* : v \mapsto \beta_2(v) = \beta(-, v) & \text{ rechtslinear.}\end{aligned}$$

Der **Linkskern** und der **Rechtskern** von β sind die Unterräume

$$\begin{aligned}\text{Ker } \beta_1 = {}^\perp V &= \{u \in U \mid \forall v \in V : \beta(u, v) = 0\} \leq U, \\ \text{Ker } \beta_2 = U^\perp &= \{v \in V \mid \forall u \in U : \beta(u, v) = 0\} \leq V.\end{aligned}$$

Wir nennen β **regulär**, wenn β_1 und β_2 injektiv sind.

- $\text{Ker } \beta_1 = \{0\}$: Zu jedem $u \in U \setminus \{0\}$ existiert $v \in V$ mit $\beta(u, v) \neq 0$.
- $\text{Ker } \beta_2 = \{0\}$: Zu jedem $v \in V \setminus \{0\}$ existiert $u \in U$ mit $\beta(u, v) \neq 0$.

Wir nennen β **perfekt**, wenn β_1 und β_2 sogar Isomorphismen sind.

In Worten: Vermittelt durch β ist U dual zu V , und V ist dual zu U .

Beispiel W2E: Zeilenraum $R^{1 \times n}$ und Spaltenraum $R^{n \times 1}$

Über jedem Ring R haben wir die Paarung durch **Matrixmultiplikation**:

$$\beta : R^{1 \times n} \times R^{n \times 1} \rightarrow R : (u, v) \mapsto u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_{1,i} \cdot v_{i,1}$$

Dies definiert die beiden Isomorphismen W1c zu den Dualräumen:

$$\begin{aligned}\beta_1 : R^{1 \times n} &\xrightarrow{\sim} (R^{n \times 1})^* : u \mapsto \beta_1(u) = [\beta(u, -) : v \mapsto u \cdot v] \\ \beta_2 : R^{n \times 1} &\xrightarrow{\sim} (R^{1 \times n})^* : v \mapsto \beta_2(v) = [\beta(-, v) : u \mapsto u \cdot v]\end{aligned}$$

😊 Dies präzisiert den Isomorphismus, den wir seit W1c gerne nutzen. Zudem wird dies nun wunderbar elegant und symmetrisch formuliert dank Schönfinkeln der Bilinearform $\beta(-, -)$ zu $\beta(u, -)$ und zu $\beta(-, v)$.

Zum Raum $V = R^{n \times 1}$ der Spaltenvektoren ist $V^* = \text{Hom}_R(V, R)$ nicht *gleich* dem Raum $R^{1 \times n}$ der Zeilenvektoren, doch immerhin kanonisch isomorph: Die obige Paarung β stiftet den ersehnten Isomorphismus.

🤔 Können wir nicht zur Vereinfachung Zeilenvektoren $u \in U := R^{1 \times n}$ und Spaltenvektoren $v \in V := R^{n \times 1}$ als gleich betrachten, kurzum:

$$R^{1 \times n} \stackrel{?}{=} R^n \stackrel{?}{=} R^{n \times 1}$$

☹ Nun ja, das geht, aber nur willkürlich und mit brutaler Gewalt.

😊 Besser: Sei (R, σ) ein involutiver Ring (D1G), etwa kommutativ (R, id_R) oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$ oder $R = \mathbb{K}^{r \times r}$ mit $\sigma : A \mapsto A^\dagger$. Dann haben wir die Adjunktion $(\dagger, \dagger) : R^{1 \times n} \cong R^{n \times 1}$, also die vertraute Transposition-Konjugation, als semilinearen Isomorphismus (W1J).

😊 Wir betrachten den Spaltenraum $V = R^{n \times 1}$ als rechtslinear über R . Hierzu ist der Dualraum $V^* = \text{Hom}_R(V, R) \cong R^{1 \times n}$ dann linkslinear. Ebenso betrachten wir den Zeilenraum $U = R^{1 \times n}$ als linkslinear über R . Hierzu ist der Dualraum $U^* = \text{Hom}_R(U, R) \cong R^{n \times 1}$ dann rechtslinear.

😊 Dies wird nun elegant zusammengefasst durch die perfekte Paarung $\beta : U \times V \rightarrow R$. Gleichberechtigt gilt nun $\beta_1 : U \xrightarrow{\sim} V^*$ und $\beta_2 : V \xrightarrow{\sim} U^*$.

Beispiel W2F: der Koordinatenraum $R^{(I)}$ und sein Dualraum R^I

Über jedem Ring R haben wir die Paarung durch **Auswertung**:

$$\beta : R^I \times R^{(I)} \rightarrow R : (u, v) \mapsto \beta(u, v) = \sum_{i \in I} u_i v_i$$

- (1) Diese Bilinearform ist regulär: β_2 ist injektiv, β_1 sogar bijektiv. (W1I)
- (2) Ist die Menge I endlich, so ist auch β_2 bijektiv, also β perfekt. (W1I)
- (3) Umgekehrt: Ist R ein Divisionsring und β perfekt, so ist I endlich.

Aufgabe: Rechnen Sie dies sorgsam nach! Die Aussagen (1) und (2) folgen aus unseren vorigen Überlegungen, allein (3) ist noch etwas trickreich.

☹ Gilt die schöne Äquivalenz „ β perfekt gdw I endlich“ nicht allgemein, über jedem beliebigen Ring? O nein, es gibt verrückte Gegenbeispiele:

♦ **Satz M1z:** Specker 1950

Über $\mathbb{Z}$ ist die Paarung $\beta : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{Z} : (u, v) \mapsto \sum_{i \in I} u_i v_i$ perfekt, induziert also $\beta_1 : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}, \mathbb{Z})$ und $\beta_2 : \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$.

Beweis: Wir nutzen die Definition und unsere vorigen Überlegungen:

(1a) Sei $u \in U \setminus \{0\}$. Es gilt $u_i \neq 0$ für ein $i \in I$, also $\beta(u, e_i) = u_i \neq 0$.

(1b) Sei $v \in V \setminus \{0\}$. Es gilt $v_i \neq 0$ für ein $i \in I$, also $\beta(e_i, v) = v_i \neq 0$.

(2a) Die Abbildung $\beta_1 : R^I \rightarrow (R^{(I)})^*$ ist ein Isomorphismus (W1I).

(2b) Ist I endlich, so ist auch β_2 ein Isomorphismus (W1I, W1H).

(3) Wir nehmen Satz W1H zum Vorbild und adaptieren den Beweis. Unser Koordinatenraum $V := R^{(I)}$ hat die Standardbasis $(e_i)_{i \in I}$.

Fortan sei R ein Divisionsring. Dann hat auch $U := R^I$ eine Basis, genauer können wir $(e_i)_{i \in I}$ ergänzen zu einer Basis $(e_i)_{i \in J}$ mit $J \supseteq I$.

Wir definieren $\psi : U \rightarrow R$ durch $\psi(\sum_{i \in J} \lambda_i e_i) = \sum_{i \in J} \lambda_i$. Die Summe ist wohldefiniert, da endlich getragen. Zudem ist ψ linkslinear, also $\psi \in U^*$.

Angenommen, $\beta_2 : V \rightarrow U^*$ ist surjektiv. Dann existiert zu ψ ein $v \in V$, also $v = \sum_{i \in I} v_i \mu_i$ mit $\mu \in R^{(I)}$, sodass $\psi = \beta_2(v) = \beta(-, v)$. Für alle $j \in I$ folgt $1 \stackrel{\text{Def}}{=} \psi(e_j) \stackrel{\text{Vor}}{=} \beta(e_j, v) \stackrel{\text{lin}}{=} \sum_{i \in I} \beta(e_j, e_i) \mu_i \stackrel{\text{dual}}{=} \mu_j$, also ist I endlich. QED

Der lineare Raum $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ über $\mathbb{Z}$ ist frei dank der Standardbasis $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Der Raum $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ ist hierzu dual, gemäß W1I, und viel größer. Ist er frei? Der folgende Satz von Reinhold Baer ist überaus erstaunlich:

♦ **Satz M1z:** Baer 1937

Der Folgenraum $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ über $\mathbb{Z}$ ist nicht frei, erlaubt also keine Basis.

Das alleine ist schon bemerkenswert und lehrreich.

Es kommt noch verrückter: Die Paarung $\beta : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{Z}$ ist perfekt... wider intuitive Erwartung! Der Isomorphismus β_1 gilt allgemein (W1I), doch der Isomorphismus $\beta_2 : \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$ ist völlig unerwartet! Wir erwarten für $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Z})$ einen noch größeren Raum als $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, doch erhalten nur den viel kleineren Raum $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} < \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.

Der Beweis ist elementar, aber erwartungsgemäß recht trickreich. Wenn Sie mal Zeit dazu haben, gerne staunen und dazulernen, genießen Sie ihn; alle Argumente liegen in Ihrer Reichweite.

Mathematische Abstraktion ist etwas Gutes, Sie sollen sie nicht fürchten, sondern schätzen und nutzen lernen. Im Idealfall bedeutet sie nicht Anwendungsferne, sondern im Gegenteil vielseitige Anwendbarkeit. (Ich muss dies betonen, weil allzu oft das Gegenteil behauptet wird.)

Lernen Sie also beides zu schätzen und zu nutzen: Theorie und Praxis. Naheliegende Fragen führen genau betrachtet zu tief sinnigen Antworten. Auch scheinbar simple Grundlagen können immer wieder überraschen: Wenn wir nur genauer hinsehen, entdecken wir viel Schönes.

Dieses Kapitel beginnt mit dem grundlegenden Begriff der Linearform, illustriert ihn mit ersten einfachen Beispielen für den Alltagsgebrauch, auch mit ernsthaften Sätzen und raffiniert-anspruchsvollen Beweisen. Die Abstraktion ist hier leicht, schwierig sind die konkreten Beispiele!

Das Angebot an Beispielen ist reich, hier wählen und dosieren Sie selbst. Studierenden mute ich damit viel Eigenständigkeit zu, und sie lohnt sich! Bei einem ersten Durchgang folgen Sie dem blauen Faden. Für weitere Durchgänge habe ich die tieferliegenden Beispiele eingewoben.

😊 Perfekte Paarungen existieren nur in endlicher Dimension:

Satz W2G: Perfektion, Injektion und Dimension

Sei R ein Divisionsring und hierüber $\beta : U \times V \rightarrow R$ eine Bilinearform.

(1) Ist β regulär, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) β ist perfekt. (b) $\dim_R(U) < \infty$. (c) $\dim_R(V) < \infty$.

Beweis: „(c) $\Rightarrow$ (b,a)“: Sei $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung sind die Homomorphismen $\beta_1 : U \rightarrow V^*$ und $\beta_2 : V \rightarrow U^*$ injektiv. Daraus folgt:

$$\dim U \stackrel{\text{M2y}}{\leq} \dim V^* \stackrel{\text{W1H}}{=} \dim V \stackrel{\text{M2y}}{\leq} \dim U^* \stackrel{\text{W1H}}{=} \dim U$$

Demnach haben alle vier Räume U, U^*, V, V^* dieselbe Dimension n . Somit sind β_1 und β_2 nicht nur injektiv, sondern sogar bijektiv (M2y).

Ebenso beweist man „(b) $\Rightarrow$ (c,a)“. (Übung zur Wiederholung!)

Die Umkehrung „(a) $\Rightarrow$ (b,c)“ erhalten wir aus der folgenden

Verschärfung,

die ich zwecks Klarheit und angemessener Betonung separat formuliere.

Wir müssen besonders sorgsam arbeiten und werden reichlich belohnt!

Satz W2G: Perfektion, Surjektion und Dimension

(2) Sind $\beta_1 : U \rightarrow V^*$ und $\beta_2 : V \rightarrow U^*$ surjektiv, so folgt:

(a) $\dim_R(U) < \infty$, (b) $\dim_R(V) < \infty$, (c) β ist perfekt.

Beweis: (a) Sei $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von U (M2K). Wir nutzen $\beta_2 : V \rightarrow U^*$: Zu jedem $j \in I$ existiert $v_j \in V$ mit $\beta(-, v_j) = u_j^*$, also $\beta(u_i, v_j) = \delta_{i,j}$.

Wir nutzen $\beta_1 : U \rightarrow V^*$: Die Bildfamilie $(v_i^* = \beta(u_i, -))_{i \in I}$ erzeugt V^* .

Es gilt Dualität $v_i^*(v_j) \stackrel{\text{Def}}{=} \beta(u_i, v_j) \stackrel{\text{Def}}{=} \delta_{i,j}$, also lineare Unabhängigkeit.

Dank PLF N1F existiert $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(v_j) = 1$ für alle $j \in I$. Dazu existiert $\lambda \in R^{(I)}$ mit $\varphi = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i^*$. Hierbei gilt $1 \stackrel{\text{Def}}{=} \varphi(v_j) \stackrel{\text{Vor}}{=} \sum_{i \in I} \lambda_i v_i^*(v_j) \stackrel{\text{dual}}{=} \lambda_j$ für alle $j \in I$. Also ist die Menge I endlich, das heißt $\dim U < \infty$.

(b) Ebenso zeigt man $\dim V < \infty$. (Übung: Vergleiche mit Satz W1H!)

(c) Daraus schließen wir die Gleichheit aller vier Dimensionen:

$$\dim U \stackrel{\text{M2y}}{\geq} \dim V^* \stackrel{\text{W1H}}{=} \dim V \stackrel{\text{M2y}}{\geq} \dim U^* \stackrel{\text{W1H}}{=} \dim U$$

Somit sind β_1 und β_2 nicht nur surjektiv, sondern bijektiv (M2y).

QED

Das ist ein recht elegantes und bemerkenswertes Ergebnis über allen Divisionsringen, insbesondere über allen Körpern: Perfekte Paarungen existieren nur in endlicher Dimension!

Der Beweis ist ebenso elegant und sehr scharfsinnig.

Bitte gehen Sie alle Argumente noch einmal sorgsam durch, anschließend versuchen Sie es zur Kontrolle selbst ohne Vorlage. Sie werden sehen, es ist eine wunderbare Übung zur Wiederholung.

Hier spielen alle Grundbegriffe erneut harmonisch zusammen: lineare Räume und lineare Abbildungen, lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensysteme, Basen, Basisauswahl und -Ergänzung, etc. Es ist daher schön, dies im Rückblick aufzugreifen und zu vertiefen.

Umgekehrt kann man Satz W2G als allzu einschränkend empfinden. Die Funktionalanalysis bricht aus dem Käfig endlicher Dimension aus und verfeinert den Begriff des Dualraums analytisch-topologisch. Dadurch entstehen wichtige neue perfekte Paarungen in unendlicher Dimension und diese erweisen sich als erfreulich starke Werkzeuge.

Über jedem Körper oder Divisionsring R gilt zusammenfassend:

Perfekte Paarungen existieren nur in endlicher Dimension, und in endlicher Dimension sind sie leicht zu erkennen.

Wiederholung: Beweisen Sie dazu die folgenden Umformulierungen.

Korollar W2H: Kriterien für die Perfektion einer Paarung

Sei R ein Divisionsring und darüber $\beta : U \times V \rightarrow R$ eine Bilinearform endlich-dimensionaler Vektorräume U und V . Dann sind äquivalent:

- 1 Die Bilinearform β ist perfekt.
- 2 Die Bilinearform β ist regulär aka nicht-ausgeartet.
- 3 $\dim U = \dim V$ und β ist linksregulär, also $\beta_1 : U \rightarrow V^*$ injektiv.
- 4 $\dim U = \dim V$ und β ist rechtsregulär, also $\beta_2 : V \rightarrow U^*$ injektiv.
- 5 Zu jeder Basiswahl von U und V ist die Gram-Matrix invertierbar.
- 6 Zu einer Basiswahl von U und V ist die Gram-Matrix invertierbar.

Wir erinnern uns:

♦ **Definition D1c:** involutiver Ring, kurz *Ring

Sei $(R, +, 0, \cdot, 1)$ ein Ring. Eine **Involution** $\sigma : R \rightarrow R : a \mapsto a^\sigma = \bar{a}$ erfüllt $(a^\sigma)^\sigma = a$ sowie $(a + b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma$ und $(a \cdot b)^\sigma = b^\sigma \cdot a^\sigma$ für alle $a, b \in R$, somit $0^\sigma = 0$ und $1^\sigma = 1$. Das Paar (R, σ) heißt dann **involutiver Ring**.

Beispiele: (0) Jeder kommutative Ring $\mathbb{K}$ ist involutiv mit $\sigma = \text{id}_{\mathbb{K}}$.

(1) Auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist die Konjugation $\text{conj}_{\mathbb{K}} : a \mapsto \bar{a}$ eine Involution.

(2) Ist $(\mathbb{K}, \sigma)$ ein involutiver Ring, so auch $(R = \mathbb{K}^{n \times n}, \dagger)$ mit $A^\dagger = (A^\sigma)^\top$, der Matrixring mit Adjunktion, aka Transkonjugation $(a_{ij})_{ij} \mapsto (a_{ij}^\sigma)_{ji}$.

♦ **Bemerkung S1c:** Konjugation von rechts nach links und umgekehrt

Wir können jeden R -rechtslinearen Raum $(U, +, \cdot)$ zu einem R -linkslinearen Raum $(U, +, \circ)$ konjugieren durch $\lambda \circ u := u \cdot \bar{\lambda}$.

Wir schreiben diese Räume $(U, +, \cdot)$ und $(U, +, \circ)$ kurz U und $\bar{U}$.

Ebenso umgekehrt von links nach rechts, dabei gilt involutiv $\bar{\bar{U}} = U$.



😊 Ringinvolution ist uns von Matrizen vertraut und sehr oft nützlich, ganz wesentlich ist sie etwa bei Skalarprodukten über $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

Aufgabe: Was ist zu der Bemerkung noch zu zeigen? Beweisen Sie es! Wiederholen Sie die Definition L1A eines (links/rechts)linearen Raumes.

Beweis: Wir rechnen die Behauptung nach für $u, v \in U$ und $\lambda, \mu \in R$:

$$(L1) \quad 1 \circ u \stackrel{\text{Def}}{=} u \cdot \bar{1} \stackrel{\text{Inv}}{=} u \cdot 1 \stackrel{(R1)}{=} u$$

$$(L2) \quad (\lambda \cdot \mu) \circ u \stackrel{\text{Def}}{=} u \cdot (\overline{\lambda \cdot \mu}) \stackrel{\text{Inv}}{=} u \cdot (\bar{\mu} \cdot \bar{\lambda}) \stackrel{(R2)}{=} (u \cdot \bar{\mu}) \cdot \bar{\lambda} \stackrel{\text{Def}}{=} \lambda \circ (\mu \circ u)$$

$$(L3) \quad (\lambda + \mu) \circ u \stackrel{\text{Def}}{=} u \cdot (\overline{\lambda + \mu}) \stackrel{\text{Inv}}{=} u \cdot (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \stackrel{(R3)}{=} u \cdot \bar{\lambda} + u \cdot \bar{\mu} \stackrel{\text{Def}}{=} \lambda \circ u + \mu \circ u$$

$$(L4) \quad \lambda \circ (u + v) \stackrel{\text{Def}}{=} (u + v) \cdot \bar{\lambda} \stackrel{(R4)}{=} u \cdot \bar{\lambda} + v \cdot \bar{\lambda} \stackrel{\text{Def}}{=} \lambda \circ u + \lambda \circ v$$

Beispiel: Für jeden kommutativen Ring (R, id_R) nutzen wir $\bar{\lambda} = \lambda$ und wälzen so die Skalare von rechts nach links und umgekehrt.

Bemerkung: Genau dann ist $\beta : U \times V \rightarrow R$ **sesquilinear**,

$$\beta(u, v + v') = \beta(u, v) + \beta(u, v'), \quad \beta(u, v \cdot \mu) = \beta(u, v) \cdot \mu,$$

$$\beta(u + u', v) = \beta(u, v) + \beta(u', v), \quad \beta(u \cdot \lambda, v) = \bar{\lambda} \cdot \beta(u, v),$$

wenn die Abbildung $\beta : \bar{U} \times V \rightarrow R$ **bilinear** ist,

$$\beta(u, v + v') = \beta(u, v) + \beta(u, v'), \quad \beta(u, v \cdot \mu) = \beta(u, v) \cdot \mu,$$

$$\beta(u + u', v) = \beta(u, v) + \beta(u', v), \quad \beta(\lambda \circ u, v) = \lambda \cdot \beta(u, v).$$

Erinnerung: Gilt speziell $U = V$ und $\beta(u, v) = \overline{\beta(v, u)}$ für alle $u, v \in V$, so nennen wir β **hermitesch** oder **konjugiert-symmetrisch**. (S1H)

$$\begin{array}{ccccc} V & \times & V & \xrightarrow{\beta: (u, v) \mapsto \beta(u, v)} & R \\ & \searrow \text{id} & \swarrow \text{id} & & \downarrow \lambda \mapsto \bar{\lambda} \\ V & \times & V & \xrightarrow{\beta: (v, u) \mapsto \beta(v, u)} & R \end{array}$$

Die Konjugation auf dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen mussten wir in das Skalarprodukt einführen, um positive Definitheit zu erreichen. Das wirkte anfangs etwas lästig und erschien als notdürftige Reparatur. Hier nun sehen wir, wie sich alles elegant und natürlich zusammenfügt.

Wie versprochen zahlt sich unsere Links-Rechts-Disziplin sofort aus, und das sogar für kommutative Ringe wie hier für den Körper $\mathbb{C}$! Die gute Notation denkt für uns mit, sie verhindert Rechenfehler, sie macht den Weg frei und nimmt uns einen Teil der Arbeit ab.

Aufgabe: Ist $\beta : U \times V \rightarrow R$ eine Bilinearform, so auch $\beta^\dagger : \bar{V} \times \bar{U} \rightarrow R$ mit $\beta^\dagger(v, u) = \overline{\beta(u, v)}$. Genau dann ist β hermitesch, wenn $\beta^\dagger = \beta$ gilt.

Lösung: Additivität ist klar. Für $u \in U$ und $v \in V$ sowie $\lambda, \mu \in R$ gilt:

$$\begin{aligned} \beta^\dagger(\lambda \circ v, u \circ \mu) &\stackrel{\text{Def}}{=} \beta^\dagger(v \cdot \bar{\lambda}, \bar{\mu} \cdot u) \stackrel{\text{Def}}{=} \overline{\beta(\bar{\mu} \cdot u, v \cdot \bar{\lambda})} \\ &\stackrel{\text{Bil}}{=} \overline{\bar{\mu} \cdot \beta(u, v) \cdot \bar{\lambda}} \stackrel{\text{Inv}}{=} \bar{\lambda} \cdot \overline{\beta(u, v)} \cdot \bar{\bar{\mu}} \stackrel{\text{Inv}}{=} \lambda \cdot \beta^\dagger(v, u) \cdot \mu \end{aligned}$$

Beispiel W21: das Standardskalarprodukt als perfekte Paarung

(1) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist $V = \mathbb{K}^n = \mathbb{K}^{n \times 1}$ ein rechtslinearer Raum mit

$$\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u | v \rangle = u^\dagger v = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} \cdot v_i.$$

Das Skalarprodukt ist eine positiv-definite hermitesche Sesquilinearform.

Somit ist die Abbildung $\beta : \bar{V} \times V \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u | v \rangle$ bilinear:

$$\begin{aligned} \beta(\lambda \circ u, v) &\stackrel{\text{Def}}{=} \beta(u \cdot \bar{\lambda}, v) \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{i=1}^n \overline{(u_i \cdot \bar{\lambda})} \cdot v_i \stackrel{\text{Inv}}{=} \sum_{i=1}^n (\lambda \cdot \overline{u_i}) \cdot v_i \\ &\stackrel{\text{Ass}}{=} \sum_{i=1}^n \lambda \cdot (\overline{u_i} \cdot v_i) \stackrel{\text{Dst}}{=} \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \overline{u_i} \cdot v_i \stackrel{\text{Def}}{=} \lambda \cdot \beta(u, v) \end{aligned}$$

Diese induziert lineare Abbildungen in die Dualräume:

$$\begin{aligned} \beta_1 : \bar{V} &\simeq V^* : u \mapsto \beta_1(u) = \langle u | - \rangle, & \overline{\mathbb{K}^{n \times 1}} &\simeq \mathbb{K}^{1 \times n} : u \mapsto u^\dagger, \\ \beta_2 : V &\simeq \bar{V}^* : v \mapsto \beta_2(v) = \langle - | v \rangle, & \mathbb{K}^{n \times 1} &\simeq \overline{\mathbb{K}^{1 \times n}} : v \mapsto v^\dagger. \end{aligned}$$

Diese sind injektiv dank positiver Definitheit des Skalarprodukts, daher bijektiv dank Satz W2G. Somit ist β eine perfekte Paarung.

Wie üblich betrachten wir $V = \mathbb{K}^{n \times 1}$ als Raum der Spaltenvektoren und dual hierzu $V^* \cong \mathbb{K}^{1 \times n}$ als Raum der Zeilenvektoren (W1c).

Zudem haben wir das obige Skalarprodukt $\langle - | - \rangle$ bzw. die Bilinearform $\beta : \bar{V} \times V \rightarrow \mathbb{K}$. Die zugehörigen Isomorphismen haben dann die Form

$$\begin{aligned} \beta_1 : \overline{\mathbb{K}^{n \times 1}} &\simeq \mathbb{K}^{1 \times n} : u \mapsto u^\dagger = \overline{u}^\top, \\ \beta_2 : \mathbb{K}^{n \times 1} &\simeq \overline{\mathbb{K}^{1 \times n}} : v \mapsto v^\dagger = \overline{v}^\top. \end{aligned}$$

😊 Diese sind statt *semilinear* nun *linear* dank Umwälzen der Skalare: Nach Konstruktion gilt $\lambda \circ u = u \cdot \bar{\lambda} \mapsto \lambda \cdot u^\dagger$ und $\lambda \cdot v \mapsto v^\dagger \cdot \bar{\lambda} = \lambda \circ v^\dagger$.

😊 Die beiden Isomorphismen $\beta_1 : \bar{V} \simeq V^*$ und $\beta_2 : V \simeq \bar{V}^*$ entsprechen hier der vertrauten Adjunktion, also Transposition-Konjugation.

Bemerkung: In Diracs Bra-Ket-Notation wird aus dem Ket-Vektor $|v\rangle \in V$ der Bra-Kovektor $\langle v| = |v\rangle^\dagger \in V^*$. Umgekehrt wird entsprechend aus dem Bra-Kovektor $\langle u| \in V^*$ der Ket-Vektor $|u\rangle = \langle u|^\dagger \in V$. Dies sind semilineare Isomorphismen, denn Skalare werden dabei konjugiert.

Beispiel W21: Skalarprodukt als reguläre Paarung

(2) Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sei V ein rechtslinearer Raum mit Skalarprodukt

$$\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u | v \rangle.$$

Wir betrachten dies als bilineare Abbildung

$$\beta : \bar{V} \times V \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u | v \rangle.$$

Diese induziert lineare Abbildungen in die Dualräume:

$$\begin{aligned} \beta_1 : \bar{V} &\rightarrow V^* : u \mapsto \beta_1(u) = \langle u | - \rangle \\ \beta_2 : V &\rightarrow \bar{V}^* : v \mapsto \beta_2(v) = \langle - | v \rangle \end{aligned}$$

Beide sind injektiv, also β regulär, dank positiver Definitheit:

$$\forall v \in V \setminus \{0\} : \langle v | v \rangle > 0$$

Genau dann ist β perfekt, wenn V endlich-dimensional ist. (W2G)

In Teil (2) dieses Beispiels betrachten wir ein beliebiges Skalarprodukt, gemäß Definition S2A, auf einem Vektorraum V über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Dank positiver Definitheit ist dies weiterhin eine reguläre Bilinearform, doch perfekt ist sie nur in endlicher Dimension, genau wie in Teil (1).

Wie angekündigt verallgemeinert die duale Paarung $V^* \times V \rightarrow R$ über R die altbewährten Skalarprodukte $\langle - | - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Mit diesem abschließenden Beispiel sehen Sie, wie sich die vertrauten Begriffe zu Skalarprodukten in diesen allgemeineren Kontext einbetten.

Bemerkung: In W1j haben wir zu jeder Basis $\mathcal{B}$ von V den antilinearen Isomorphismus $(\Psi_{\mathcal{B}}, \Psi_{\mathcal{B}}^*) : V \cong V^*$ konstruiert. Dieser ist jedoch nicht kanonisch, denn er hängt ab von der willkürlich gewählten Basis $\mathcal{B}$. Im Gegensatz hierzu ist der Isomorphismus $\beta_1 : \bar{V} \simeq V^*$ kanonisch, sobald der Raum V mit einem Skalarprodukt β ausgestattet ist.

Übung: Es gilt $\beta_1 = \Psi_{\mathcal{B}}$ für jede Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V . Die Konstruktion aus W1j war also nicht vergebens.

Wiederholung: Was bedeutet die Bijektivität von β_1 und β_2 konkret? Formulieren Sie dies so präzise und zugleich so dramatisch wie möglich.

Satz W2j: Darstellungssatz von Riesz für perfekte Paarung

Sei $\beta : U \times V \rightarrow R$ eine perfekte Paarung über R . Dann gilt:

- (1) Jede beliebige Linearform $\varphi : V \rightarrow R$ ist konkret gegeben durch $\varphi = \beta(u, -)$ für genau einen darstellenden Vektor $u \in U$.
- (2) Jede beliebige Linearform $\psi : U \rightarrow R$ ist konkret gegeben durch $\psi = \beta(-, v)$ für genau einen darstellenden Vektor $v \in V$.

Beispiel: Über $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und Konjugation $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$ ist das Standardskalarprodukt $\langle - | - \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\langle u | v \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i$ eine perfekte Paarung. Somit ist jede Linearform $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ von der Form $\varphi = \langle u | - \rangle$ für genau einen darstellenden Vektor $u \in \mathbb{K}^n$.

Wiederholung: Führen Sie dies explizit aus. Wie berechnen Sie u ? Das führt uns zu folgendem schönen Ergebnis....

Satz W2j: Darstellungssatz von Riesz für endliche ONB

Sei $(V, \langle - | - \rangle)$ ein hermitescher Raum über $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Jede Linearform $\varphi : V \rightarrow \mathbb{K}$ lässt sich dann durch genau einen Vektor $u \in V$ darstellen als $\varphi = \langle u | - \rangle$. Für alle $v \in V$ gilt also:

$$\varphi(v) = \langle u | v \rangle$$

Dieser Vektor ist explizit gegeben durch $u = e_1 \overline{\varphi(e_1)} + \dots + e_n \overline{\varphi(e_n)}$.

Beweis: Eindeutigkeit: Ist $u = \sum_{i=1}^n e_i \mu_i$ mit $\mu \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung, so gilt:

$$\mu_j \stackrel{\text{ONB}}{=} \langle e_j | u \rangle \stackrel{\text{S2}}{=} \overline{\langle u | e_j \rangle} \stackrel{\text{Vor}}{=} \overline{\varphi(e_j)}$$

Existenz: Wir setzen $u := \sum_{j=1}^n e_j \overline{\varphi(e_j)}$. Für $v = \sum_{j=1}^n e_j \lambda_j \in V$ gilt dann:

$$\langle u | v \rangle \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_i \sum_j \varphi(e_i) \langle e_i | e_j \rangle \lambda_j \stackrel{\text{ONB}}{=} \sum_i \varphi(e_i) \lambda_i \stackrel{\text{Lin}}{=} \varphi(\sum_i e_i \lambda_i) \stackrel{\text{Def}}{=} \varphi(v)$$

Die angegebene Formel liefert also die eindeutige Lösung. QED

Wiederholung: Sei V ein rechtslinearer Raum über dem *Ring (R, σ) .

- (0) Wie dualisieren Sie eine Basis $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ von V ?
- (1) Können Sie einen Vektor $v \in V$ dualisieren zu $v^* \in V^*$?
- (2) Gelingt dies für (V, β) mit Bilinearform β auf dem Raum V ?

Lösung: (0) Dank Satz W1H existiert zur Basis $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ von V genau eine duale Familie $\mathcal{B}^* = (v_i^*)_{i \in I}$ in V^* . Diese ist charakterisiert durch die definierende Eigenschaft $v_i^*(v_j) = \delta_{i,j}$ für alle $i, j \in I$. Existenz und Eindeutigkeit folgen aus dem Prinzip der linearen Fortsetzung (PLF N1B).

(1) Nein, die Linearform „ v^* “ hat keinen wohldefinierten Sinn. Wir haben keine natürliche Abbildung $V \rightarrow V^*$. Warum sprechen wir dennoch von v_i^* wie in (0)? Beachten Sie die Tücke der Notation: Die Konstruktion der Linearform $v_i^* : V \rightarrow R : v_j \mapsto \delta_{i,j}$ in $\mathcal{B}^*$ hängt nicht nur vom einzelnen Vektor v_i ab, sondern von der gesamten Basis $\mathcal{B} = (v_j)_{j \in I}$, siehe W119.

(2) Mit der Bilinearform $\beta : \bar{V} \times V \rightarrow R$ als zusätzlicher Struktur gelingt es, zudem erfreulich leicht: Wir haben nun $\beta_1 : \bar{V} \rightarrow V^* : v \mapsto v^* := \beta(v, -)$. Diese Konstruktion hängt von β ab, aber dies ist nun Teil der Daten.

Skalarprodukt über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$	Dualität über jedem Ring $\mathbb{K}$
linearer Raum V über $\mathbb{K}$	Dualraum $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$
Skalarprodukt $\langle - - \rangle$: $V \times V \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto \langle u v \rangle$	duale Paarung $\langle - - \rangle_V$: $V^* \times V \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto u(v)$
orthonormale Familie $(v_i)_{i \in I}$ mit $\langle v_i v_j \rangle = \delta_{i,j}$ für alle i, j	duale Familien $(v_i)_{i \in I}$ und $(v_i^*)_{i \in I}$ mit $v_i^*(v_j) = \delta_{i,j}$ für alle i, j
Koordinatenraum $\mathbb{K}^n$, $\langle u v \rangle = u^\dagger v = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i$	$V \cong \mathbb{K}^{n \times 1}$ und $V^* \cong \mathbb{K}^{1 \times n}$, $V^* \times V \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto u \cdot v$
Standardbasis $(e_i)_{i=1}^n$	Standardbasen $(e_i)_{i=1}^n$ und $(e_i^*)_{i=1}^n$
Orthogonalraum zu $X \subseteq V$, $X^\perp = \{u \in V \mid \forall v \in X : \langle u v \rangle = 0\}$	Annulator von $X \subseteq V$, $X^\circ = \{u \in V^* \mid \forall v \in X : u(v) = 0\}$
Adjungierte $f^\dagger : V \rightarrow U$ zu $f : U \rightarrow V$ gemäß $\langle v f(u) \rangle_V = \langle f^\dagger(v) u \rangle_U$	duale Abbildung $f^* : V^* \rightarrow U^*$ zu $f : U \rightarrow V$ gemäß $\langle \varphi f(u) \rangle_V = \langle f^*(\varphi) u \rangle_U$



Die duale Paarung $V^ \times V \rightarrow R : \langle u | v \rangle = u(v)$
über jedem Ring R verallgemeinert Skalarprodukte.*



☺ Erstaunlicherweise gelingt uns dies über *jedem* beliebigen Ring R .
Um Trivialitäten zu vermeiden, fordern wir lediglich $0 \neq 1$, also $R \supsetneq \{0\}$.

Die Allgemeinheit fordert anfangs etwas Mut, gelingt dann aber leicht.
Im Gegenteil ist die strukturelle Einfachheit selbst besonders lehrreich.
Der Rückblick erklärt zudem manche Besonderheit von Skalarprodukten,
im allgemeinen Rahmen verstehen wir auch das Besondere besser.

Die obige Tabelle führt die Entsprechung der Begriffe genauer aus.
Alles fügt sich sehr erfreulich, elegant und effizient zusammen.

Wir erklären nun das letzte fehlende Puzzlestück: duale Abbildungen.
Auch diese erfordern weiterhin erhöhte Konzentration und Präzision.
Sie mobilisieren und wiederholen damit viele schöne Methoden.

Motivation: die Adjunktionsformel

W303

Sei R ein Ring. Hierüber sei V ein rechtslinearer Raum. Der Dualraum V^* ist linkslinear (W1B). Beide sind verknüpft durch die **duale Paarung**:

$$V^* \times V \rightarrow R : (\varphi, v) \mapsto \langle \varphi | v \rangle_V = \varphi(v)$$

Dieselbe Situation finden wir für jeden weiteren R -linearen Raum U :

$$U^* \times U \rightarrow R : (\psi, u) \mapsto \langle \psi | u \rangle_U = \psi(u)$$

Zu jeder linearen Abbildung $f : U \rightarrow V$ wünschen wir uns eine duale Abbildung $f^* : V^* \rightarrow U^*$, sodass die vertraute **Adjunktionsformel** gilt:

$$\langle \varphi | f(u) \rangle_V = \langle f^*(\varphi) | u \rangle_U$$

für alle $\varphi \in V^*$ und $u \in U$. Dies gelingt auf genau eine Weise:

$$f \mapsto f^*, \quad f^*(\varphi) := \varphi \circ f$$

Die Linearform φ auf V wird so zurückgezogen zu $\varphi \circ f$ auf U .
Die hier gefundene Formel erheben wir nun zur Definition.

Motivation: die Adjunktionsformel

W304
Erläuterung

☺ Die duale Abbildung $f^* : V^* \rightarrow U^*$ zu $f : U \rightarrow V$ ist zunächst leicht
zu *definieren*: Wir setzen $f^*(\varphi) := \varphi \circ f$. Was könnte einfacher sein?

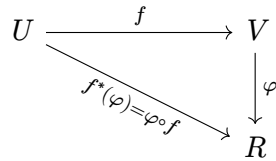
⚠ Diese Abbildung zu *verstehen* ist jedoch wesentlich schwieriger.
Wir erstellen im Folgenden Rechenregeln, Beispiele und Anwendungen.

*In der Geschichte der Mathematik zeigt sich uns ein großer Reichtum
in der Entstehung verschiedenartiger Strukturen, die sich entfalten,
durchdringen und vereinen. Die besonders einfachen und grund-
legenden Strukturen treten dabei oft erst zum Schluss hervor.*

*So ist es auch mit der linearen Algebra. Mit einem Alter von
vielleicht hundert Jahren ist sie noch jung, und ihr Gegenstand ist
eine besonders einfache Struktur, die Bestandteil vieler anderer
und sehr viel komplexerer Strukturen in anderen Gebieten ist.*

*Das Studium dieser Struktur steht daher heute mit Recht
am Anfang des Studiums der Mathematik überhaupt.*

Egbert Brieskorn (1936–2013),
Lineare Algebra und Analytische Geometrie (1983)



Definition W3A: die duale Abbildung

(0) Jede lineare Abbildung $f : U \rightarrow V$ induziert ihre **duale Abbildung**

$$f^* : V^* \rightarrow U^* : \varphi \mapsto \varphi \circ f.$$

(1) Ist f rechtslinear, so ist f^* linkslinear. Wir erhalten

$$* : \text{Hom}_R(U, V) \rightarrow \text{Hom}_R(V^*, U^*) : f \mapsto f^*.$$

(2) Die Dualisierung $*$ ist ein Homomorphismus der additiven Gruppen.

(3) Ist der Ring R kommutativ, so ist die Dualisierung $*$ sogar R -linear.

(4) Ist (R, σ) involutiv, so ist die Dualisierung $*$ immerhin semilinear.

Beweis: (0) Sind $f : U \rightarrow V$ und $\varphi : V \rightarrow R$ rechtslinear, so auch $\varphi \circ f$. (L1J)
Das zeigt $f^*(\varphi) \in U^*$, also ist $f^* : V^* \rightarrow U^* : \varphi \mapsto \varphi \circ f$ wohldefiniert.
Wir sagen: Die Linearform φ auf V wird zurückgezogen zu $\varphi \circ f$ auf U .

(1) Für alle Linearformen $\varphi, \psi \in V^*$ und Skalare $\lambda, \mu \in R$ gilt:

$$f^*(\lambda\varphi + \mu\psi) \stackrel{\text{Def}}{=} (\lambda\varphi + \mu\psi) \circ f \stackrel{\text{DL}}{=} \lambda(\varphi \circ f) + \mu(\psi \circ f) \stackrel{\text{Def}}{=} \lambda f^*(\varphi) + \mu f^*(\psi)$$

Somit ist die Abbildung $f^* : V^* \rightarrow U^* : \varphi \mapsto \varphi \circ f$ tatsächlich linear.

(2) Die Zuordnung $* : \text{Hom}_R(U, V) \rightarrow \text{Hom}_R(V^*, U^*) : f \mapsto f^*$ ist additiv:

$$(f + g)^*(\varphi) \stackrel{\text{Def}}{=} \varphi \circ (f + g) \stackrel{\text{DL}}{=} (\varphi \circ f) + (\varphi \circ g) \stackrel{\text{Def}}{=} f^*(\varphi) + g^*(\varphi)$$

für alle $\varphi \in V^*$. Dank Extensionalität gilt Additivität $(f + g)^* = f^* + g^*$.

(4) Wir zeigen $(f\lambda)^* = \lambda^\sigma f^*$. Für $\varphi \in V^*$ und $u \in U$ gilt:

$$\begin{aligned} (f\lambda)^*(\varphi)(u) &\stackrel{\text{Def}}{=} (\varphi \circ (f\lambda))(u) \stackrel{\text{Def}}{=} \varphi((f\lambda)(u)) \stackrel{\text{Def}}{=} \varphi(f(u)\lambda) \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} \varphi(f(u))\lambda \stackrel{\text{Def}}{=} f^*(\varphi)(u)\lambda \stackrel{\text{Def}}{=} (\lambda^\sigma f^*(\varphi))(u) \end{aligned}$$

Die Dualisierung $f \mapsto f^*$ ist demnach semilinear über (R, σ) .

QED

Komposition von Homomorphismen

😊 **Merkregel:** Die Dualisierung kehrt alle Pfeile und Kompositionen um:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \xrightarrow{g} W \\ \downarrow k = g \circ f & & \uparrow \\ U^* & \xleftarrow{f^*} & V^* \xleftarrow{g^*} W^* \\ \uparrow k^* = f^* \circ g^* & & \downarrow \end{array}$$

Satz W3B: Dualisierung ist ein kontravarianter Funktor.

(1) Dual zur Identität $\text{id}_V : V \rightarrow V$ ist $\text{id}_V^* = \text{id}_{V^*} : V^* \rightarrow V^*$.

(2) Dual zur Komposition $k = g \circ f$ ist $k^* = f^* \circ g^*$.

Beweis: (1) Für $\text{id}_V : V \rightarrow V$ und alle $\varphi \in V^*$ gilt:

$$\text{id}_V^*(\varphi) \stackrel{\text{Def}}{=} \varphi \circ \text{id}_V \stackrel{\text{Id}}{=} \varphi \stackrel{\text{Def}}{=} \text{id}_{V^*}(\varphi)$$

(2) Für $f : U \rightarrow V$ und $g : V \rightarrow W$ und alle $\varphi \in W^*$ gilt:

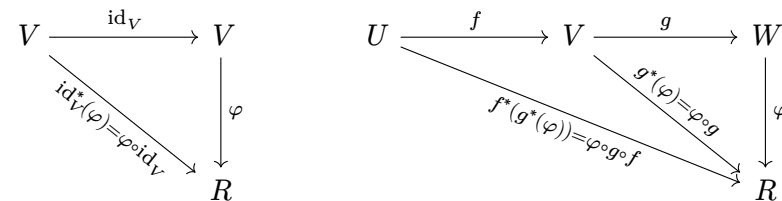
$$(g \circ f)^*(\varphi) \stackrel{\text{Def}}{=} \varphi \circ (g \circ f) \stackrel{\text{Ass}}{=} (\varphi \circ g) \circ f \stackrel{\text{Def}}{=} f^*(g^*(\varphi)) \stackrel{\text{Def}}{=} (f^* \circ g^*)(\varphi)$$

Dank Extensionalität gilt $\text{id}_V^* = \text{id}_{V^*}$ und $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

QED

Komposition von Homomorphismen

In Worten: Die Linearform φ auf W wird zurückgezogen zu $\varphi \circ g$ auf V und weiter zu $\varphi \circ g \circ f$ auf U . Ergänzend als kommutatives Diagramm:



Zusammengefasst: Jedem linearen Raum V ordnen wir seinen dualen Raum $V^* = \text{Hom}_R(V, R)$ zu und jeder linearen Abbildung $f : U \rightarrow V$ ihre duale Abbildung $f^* : V^* \rightarrow U^* : \varphi \mapsto \varphi \circ f$. Die Zuordnung $f \mapsto f^*$ ist additiv, über (R, σ) sogar semilinear, respektiert Identitäten gemäß $\text{id}_V^* = \text{id}_{V^*}$ und kehrt Kompositionen um gemäß $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

😊 Diese Rechenregeln sind zwar sehr einfach, aber umso öfter nützlich.
Vornehm gesagt: Die Dualisierung ist ein **kontravarianter Funktor**.

Gegeben seien über R Basen $(u_1, \dots, u_n)$ von U und $(v_1, \dots, v_m)$ von V sowie dual $(u_1^*, \dots, u_n^*)$ von U^* und $(v_1^*, \dots, v_m^*)$ von V^* dank Satz W1H.

Jede rechtslineare Abbildung $f : U \rightarrow V$ stellen wir dar durch ihre Matrix $A \in R^{m \times n}$ mit $f(u_j) = \sum_{i=1}^m v_i a_{ij}$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Die linkslineare Abbildung $f^* : V^* \rightarrow U^*$ stellen wir dar durch ihre Matrix $B \in R^{m \times n}$ mit $f^*(v_i^*) = \sum_{j=1}^n b_{ij} u_j^*$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$.

Aufgabe: Wie berechnen Sie aus der Matrix A die Matrix B ?

Lösung: *Calculus!* Für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle v_i^* | f(u_j) \rangle_V &\stackrel{\text{Vor}}{=} v_i^* \left(\sum_{k=1}^m v_k a_{kj} \right) \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{k=1}^m v_i^*(v_k) a_{kj} \stackrel{\text{dual}}{=} a_{ij} \\ \langle f^*(v_i^*) | u_j \rangle_U &\stackrel{\text{Vor}}{=} \left(\sum_{k=1}^n b_{ik} u_k^* \right) (u_j) \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{k=1}^n b_{ik} u_k^*(u_j) \stackrel{\text{dual}}{=} b_{ij} \end{aligned}$$

😊 Die (linkslinear!) darstellende Matrix von f^* ist demnach $B = A$.

Alternative: Über jedem *Ring (R, σ) können wir auch $f^* : V^* \rightarrow U^*$ rechtslinear betrachten, nun mit $f^*(v_i^*) = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j^* = \sum_{j=1}^n u_j^* a_{ij}^\sigma$.

⚠ Die (rechtslinear!) darstellende Matrix von f^* ist dann $A^\dagger = \overline{A}^\tau$.

Satz W3c: dualer Homomorphismus in Matrixdarstellung

Seien U und V rechtslineare Räume über R mit endlichen Basen $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$ und $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_m)$. Dann haben wir:

$$\begin{array}{ccc} R^{n \times 1} & \xrightarrow[Ax]{A} & R^{m \times 1} \\ \Phi_{\mathcal{A}} \downarrow \cong & & \Phi_{\mathcal{B}} \downarrow \cong \\ U & \xrightarrow[f]{u \mapsto v = f(u)} & V \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R^{1 \times n} & \xleftarrow[A^* A = x^* \leftarrow y^*]{A} & R^{1 \times m} \\ \Phi_{\mathcal{A}^*} \downarrow \cong & & \Phi_{\mathcal{B}^*} \downarrow \cong \\ U^* & \xleftarrow[f^*]{f^*(v^*) = u^* \leftarrow v^*} & V^* \end{array}$$

(1) Jede lineare Abbildung $f : U \rightarrow V$ und ihr Dual $f^* : V^* \rightarrow U^*$ werden durch dieselbe Matrix A dargestellt: Im ersten Falle wirkt A von links auf Spaltenvektoren, im zweiten Falle von rechts auf Zeilenvektoren.

(2) Über jedem DRing gilt $\text{rang}(f) \stackrel{\text{Def}}{=} \text{sr}(A) \stackrel{\text{M3I}}{=} \text{zr}(A) \stackrel{\text{Def}}{=} \text{rang}(f^*)$ dank M3I.

😊 Das ist die natürliche Darstellung mit Zeilen- und Spaltenvektoren. Falls gewünscht können wir, über jedem *Ring (R, σ) , Zeilenvektoren zu Spaltenvektoren transponieren. Dann wird f^* durch $A^\dagger$ dargestellt.

Matrixdualität

Aufgabe: Zu $A \in R^{m \times n}$ sei $f_A : U = R^{n \times 1} \rightarrow V = R^{m \times 1} : u \mapsto Au$. Beschreiben Sie das Dual $f_A^* : V^* \rightarrow U^*$ ebenfalls durch eine Matrix.

Lösung: Wir identifizieren jeden Zeilenvektor $v^* \in R^{1 \times m} \cong V^*$ mit der Linearform $[v^*] : V \rightarrow R : v \mapsto v^* \cdot v$, ebenso $R^{1 \times n} \cong U^*$. Damit gilt $f_A^*([v^*]) \stackrel{\text{Def}}{=} [v^*] \circ f_A \stackrel{\text{Vor}}{=} [v^* A] : U \rightarrow R : u \mapsto Au \mapsto v^*(Au) = (v^* A)u$.

Satz W3D: Matrixdarstellung und Dualität

(1) Für $U = R^{n \times 1}$ und $V = R^{m \times 1}$ sowie $U^* \cong R^{1 \times n}$ und $V^* \cong R^{1 \times m}$ gilt:

$$\begin{aligned} f_A : R^{n \times 1} &\rightarrow R^{m \times 1} : u \mapsto A \cdot u \implies \\ f_A^* : R^{1 \times m} &\rightarrow R^{1 \times n} : v^* \mapsto v^* \cdot A \end{aligned}$$

(2) Ist R ein Divisionsring, so können wir die Dimensionen betrachten. In endlicher Dimension können wir f und f^* wie oben durch eine Matrix $A \in R^{m \times n}$ darstellen. Spaltenrang und Zeilenrang sind dann gleich (M3I):

$$\text{rang}(f) \stackrel{\text{Def}}{=} \text{sr}(A) \stackrel{\text{M3I}}{=} \text{zr}(A) \stackrel{\text{Def}}{=} \text{rang}(f^*)$$

Matrixdualität

Beispiel / Übung: Über $\mathbb{R}$ sei $f : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^9$ linear mit $\dim \text{Ker}(f) = 2$. Wie folgt daraus $\dim \text{Ker}(f^*) = 5$? Welche Sätze nutzen Sie dazu?

Alternative: Über jedem *Ring (R, σ) können wir auch U^* und V^* als Spaltenvektoren darzustellen und $f^* : V^* \rightarrow U^*$ rechtslinear betrachten:

$$f : R^n \rightarrow R^m : u \mapsto A \cdot u \implies f^* : R^m \rightarrow R^n : (v^*)^\dagger \mapsto A^\dagger \cdot (v^*)^\dagger$$

Die duale Abbildung f^* wird in dieser Schreibweise durch die adjungierte Matrix $A^\dagger = \overline{A}^\tau$ dargestellt. Das ist möglich, wenn auch etwas künstlich.

😊 Das nutzt man gerne über jedem kommutativen Ring (R, id_R) , insbesondere über jedem Körper. Hier genügt Transposition.

😊 Für $(\mathbb{K}, \text{conj}_{\mathbb{K}})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ nutzen wir die Konjugation $\text{conj}_{\mathbb{K}}$. Die zu f duale Abbildung f^* wird in dieser Schreibweise durch die transponiert-konjugierte Matrix dargestellt. Auch das ist oft nützlich.

😊 Die natürliche und allgemeine Schreibweise zeigt unser Satz W3D: Transformation von Zeilen- zu Spaltenvektoren wird dabei vermieden. Sie ist möglich, manchmal nützlich, aber auch immer etwas künstlich.

Aufgabe: Wir betrachten die folgenden Sequenzen über $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z}^{2 \times 1} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^{3 \times 1} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}^{3 \times 1}, \quad 0 \xrightarrow{h} \mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{Z}$$

- (1) Sind diese Sequenzen exakt, gilt hier also „Bild = Kern“?
 (2) Wie sehen die dualen Sequenzen aus? Sind diese exakt?

Lösung: (1) Wir vergleichen Bild und Kern:

- (a) Es gilt $\text{Im}(f) = \langle e_2, e_3 \rangle_{\mathbb{Z}}^! = \text{Ker}(g)$, also exakt.
 (b) Hier gilt $\text{Im}(h) = \{0\} = \text{Ker}(k)$, also ebenfalls exakt.

- (2) Die dualen Sequenzen können wir wie folgt darstellen:

$$\mathbb{Z}^{1 \times 2} \xleftarrow{f^*} \mathbb{Z}^{1 \times 3} \xleftarrow{g^*} \mathbb{Z}^{1 \times 3}, \quad 0 \xleftarrow{h^*} \mathbb{Z} \xleftarrow{k^*} \mathbb{Z}$$

- (a) Links gilt $\text{Im}(g^*) = \langle e_1^* \rangle_{\mathbb{Z}}^! = \text{Ker}(f^*)$, also exakt.
 (b) Rechts gilt $\text{Im}(k^*) = 2\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z} = \text{Ker}(h^*)$, also *nicht* exakt!

Konkrete Beispiele wie diese zeigen eindrücklich: Nach Klärung der Grundbegriffe erhalten wir ganz handfeste Objekte und Rechnungen. Insbesondere mit Matrizen können wir weiterhin wunderbar rechnen!

😊 Wie im obigen Satz stellen wir die rechtslinearen Räume durch Spaltenvektoren dar und dual hierzu die linkslinearen Räume durch Zeilenvektoren. Wir „kippen“ also die Vektoren, dafür bleiben die Matrizen unverändert. Das vermeidet Fehler und ist narrensicher.

Die Matrizen wirken allerdings verschieden: Im ersten Falle von links auf Spaltenvektoren, nach dem Dualisieren von rechts auf Zeilenvektoren!

😊 Wer möchte kann alles transponieren und so die Matrizen weiterhin von links wirken lassen; das war bisher unsere übliche Konvention. Über jedem kommutativen Ring so wie hier $(\mathbb{Z}, \text{id}_{\mathbb{Z}})$ ist dies erlaubt.

⚠ Über dem Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist die Dualisierung nicht exakt: Aus manchen exakten Sequenzen macht sie nicht-exakte Sequenzen. Diesem Problem wollen wir nun auf den Grund gehen.

Bemerkung: In Diracs Bra-Ket-Notation wird die lineare Abbildung A als Operator zwischen dem Bra-Kovektor $\langle u|$ und dem Ket-Vektor $|v\rangle$ geschrieben, wie der Sandwichbelag zwischen den beiden Brothälften:

$$\langle u| A |v\rangle$$

Die geschickte Notation entspricht sowohl der rechtslinearen Abbildung

$$f : V \rightarrow V : |v\rangle \mapsto A |v\rangle$$

auf den Ket-Vektoren als auch der dualen linkslinearen Abbildung

$$f^* : V^* \rightarrow V^* : \langle u| \mapsto \langle u| A$$

auf den Bra-Kovektoren. Diese Schreibweise ist genial einfach!

📖 P.A.M. Dirac: *A new notation for quantum mechanics*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 35 (1939) 416–418.

Die Bra-Ket-Notation ist inzwischen in der Quantentheorie fest etabliert. Ihr Nutzen entfaltet sich jüngst und besonders in der Quanteninformatik.

😊 Die gute Notation denkt für uns mit. Daher habe ich in Satz W3D die natürliche Schreibweise mit Zeilen- und Spaltenvektoren betont. Wir *können* zu Spaltenvektoren transponieren (und ggf. konjugieren), aber wir *müssen* es nicht, und meist *wollen* wir dies auch nicht.

Aufgabe: Formulieren Sie Riesz' Darstellung W2j in Diracs Schreibweise.

Lösung: Sei $(V, \langle - | - \rangle)$ ein hermitescher Raum über $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit endlicher Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Mit $|e_i\rangle = e_i$ und $\langle e_i| = e_i^*$ gilt dann:

$$\text{id}_V = \sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle e_i|$$

Wie ist die Gleichung zu verstehen? Die rechte Seite $f : V \rightarrow V$ ist linear und erfüllt $f(e_j) = \sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle e_i | e_j \rangle = e_j$ für $j = 1, \dots, n$, also $f = \text{id}_V$.

$$\text{id}_{V^*} = \sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle e_i|$$

Selbe Matrix, neue Interpretation: Die rechte Seite $g : V^* \rightarrow V^*$ wirkt von rechts, somit $g(e_j^*) = \sum_{i=1}^n \langle e_j | e_i \rangle \langle e_i| = e_j^*$ für $j = 1, \dots, n$, also $g = \text{id}_{V^*}$.

Satz W3E: Dualität und Bi/Sur/Injektivität

Seien $f : U \rightarrow V$ und $g : V \rightarrow U$ linear über dem Ring R .

- (1) Ist $(f, g) : U \xrightarrow{\sim} V$ ein Retraktionspaar, so auch $(g^*, f^*) : U^* \xrightarrow{\sim} V^*$.
- (2) Ist $(f, g) : U \cong V$ ein Isomorphismus, so auch $(g^*, f^*) : U^* \cong V^*$.
- (3) Ist $f : U \rightarrow V$ bijektiv, so ist $f^* : V^* \rightarrow U^*$ bijektiv.
- (4) Ist $f : U \rightarrow V$ surjektiv, so ist $f^* : V^* \rightarrow U^*$ injektiv.

Für die folgende Aussage sei R ein Divisionsring:

- (5) Ist $f : U \rightarrow V$ injektiv, so ist $f^* : V^* \rightarrow U^*$ surjektiv.

Beispiel: Über beliebigen Ringen, bereits über $\mathbb{Z}$, ist Aussage (5) falsch: Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}$ ist injektiv, aber $f^* : \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z}$ nicht surjektiv.

Beweis: (1) Aus $g \circ f = \text{id}_U$ folgt $f^* \circ g^* = \text{id}_{U^*}$ dank Funktorialität W3B.
 (2) Aus $g \circ f = \text{id}_U$ und $f \circ g = \text{id}_V$ folgt $f^* \circ g^* = \text{id}_{U^*}$ und $g^* \circ f^* = \text{id}_{V^*}$.
 (3) Ist $f : U \rightarrow V$ linear und bijektiv, so auch $g = f^{-1} : V \rightarrow U$ (Satz L1J).
 Aus $(f, g) : U \cong V$ folgt $(g^*, f^*) : U^* \cong V^*$ dank (2), also ist f^* bijektiv.

(4) Seien $\varphi, \psi \in V^*$. Aus $f^*(\varphi) = f^*(\psi)$ folgt $\varphi \circ f = \psi \circ f$, gekürzt $\varphi = \psi$.
 Ausführlich (B1G): Zu jedem $v \in V$ existiert ein Urbild $u \in U$ mit $f(u) = v$, somit $\varphi(v) = \varphi(f(u)) = \psi(f(u)) = \psi(v)$, also $\varphi = \psi$ dank Extensionalität.

(5) Sei R ein Divisionsring und hierüber $f : U \rightarrow V$ linear und injektiv. Wir wollen zeigen, dass die duale Abbildung $f^* : V^* \rightarrow U^*$ surjektiv ist. Hierzu konstruieren wir eine Retraktion $(f, g) : U \xrightarrow{\sim} V$ und nutzen (1).

Wir wählen eine Basis $(u_i)_{i \in J}$ von U . (M2K) Dann ist $(v_i := f(u_i))_{i \in J}$ in V linear unabhängig. (M1R) Wir ergänzen zu einer Basis $(v_i)_{i \in J \sqcup K}$ von V .

Dank PLF (N1B) existiert $g : V \rightarrow U$ linear mit $v_i \mapsto u_i$ für $i \in J$ ergänzt durch $v_i \mapsto 0$ für $i \in K$. Damit gilt $g \circ f = \text{id}_U$, also $(f, g) : U \xrightarrow{\sim} V$.

Daraus folgt $f^* \circ g^* = \text{id}_{U^*}$. Somit ist $f^* : V^* \rightarrow U^*$ surjektiv. (B1G) QED

Ausführlich: Zu $\psi \in U^*$ konstruieren wir $\varphi : V \rightarrow R$ durch $\varphi = \psi \circ g$.
 Damit gilt $f^*(\varphi) = \psi$, denn $f^*(\varphi) = (\psi \circ g) \circ f = \psi \circ (g \circ f) = \psi \circ \text{id}_U = \psi$.
Erinnerung: f^* ist **rr**rechtsinvertierbar, also insbesondere **surr**surjektiv.
 Ebenso ist g^* **li**linksinvertierbar, also insbesondere **ii**njektiv.

Die Aussagen (1–5) sind nach aufsteigender Schwierigkeit sortiert.
 Die Beweise sind eine gute Fingerübung und Wiederholung der Begriffe.

Warum sind die Aussagen (1) und (2) so leicht zu beweisen?
 Das liegt gerade an der Funktorialität W3B der Dualisierung:
 Gleichungen wie $g \circ f = \text{id}_U$ werden durch den Funktor $*$
 in ebensolche Gleichungen $f^* \circ g^* = \text{id}_{U^*}$ überführt.

Auch die Aussage (3) zu Bijektionen ist leicht zu beweisen, dank (2):
 Jede bijektive lineare Abbildung $f : U \rightarrow V$ ist ein Isomorphismus (L1J),
 lässt sich also zu einem Isomorphismuspaar $(f, g) : U \cong V$ ergänzen.
 Das verdanken wir dem erfreulichen Satz L1J, dass die Umkehrfunktion
 $g = f^{-1}$ selbst wieder linear ist! Anschließend genügt (2).

Auch (4) ist noch leicht, allein für (5) müssen wir ernsthaft arbeiten.
 Die Aussage ohne weitere Voraussetzungen wäre falsch; schon das deutet
 bereits darauf hin, dass hier ernsthaft etwas zu beweisen ist:
 Wir nutzen Basisauswahl und Basisergänzung (M2K).

 Benötigen wir für (5) wirklich einen Divisionsring oder ist dies ein Artefakt eines ungeschickten Beweises? Dies klärt ein Gegenbeispiel:

Beispiel W3F: Dualisieren über dem Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

Über dem Ring $\mathbb{Z}$ betrachten wir den linearen Raum $V = \mathbb{Z}^{n \times 1}$ und

$$f : V \rightarrow V : v \mapsto Av \quad \text{mit} \quad A \in \mathbb{Z}^{n \times n}.$$

Dual hierzu haben wir $V^* \cong \mathbb{Z}^{1 \times n}$ und $f^* : V^* \rightarrow V^* : u \mapsto uA$.

- (1) Genau dann ist f (bzw. f^*) injektiv, wenn $\det A \neq 0$ gilt.
- (2) Genau dann ist f^* (bzw. f) surjektiv, wenn $\det A = \pm 1$ gilt.

Die beiden Eigenschaften (1) und (2) klaffen also auseinander!

Das kleinste Gegenbeispiel entsteht für $n = 1$ und $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : v \mapsto 2 \cdot v$.
 Dieser Homomorphismus ist injektiv, doch der duale Homomorphismus
 $f^* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : u \mapsto u \cdot 2$ ist nicht surjektiv, denn 1 wird nicht getroffen.

😊 Über jedem Körper schließt sich diese Lücke, wie in W3E bewiesen.

Satz W3c: Dualität und Exaktheit

Wir betrachten eine Sequenz von R -linearen Abbildungen und ihr Dual:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & U & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{g} & W \longrightarrow \dots \\ \dots & \longleftarrow & U^* & \xleftarrow{f^*} & V^* & \xleftarrow{g^*} & W^* \longleftarrow \dots \end{array}$$

(1) Aus $g \circ f = 0$ folgt $f^* \circ g^* = 0$. Also:

$$\text{Im}(f) \subseteq \text{Ker}(g) \implies \text{Ker}(f^*) \supseteq \text{Im}(g^*)$$

(2) Spaltet zudem $W = \text{Im}(g) \oplus W'$, so folgt umgekehrt:

$$\text{Im}(f) \supseteq \text{Ker}(g) \implies \text{Ker}(f^*) \subseteq \text{Im}(g^*)$$

(3) Über jedem Divisionsring R ist die Voraussetzung (2) erfüllt (M3o). Aus Exaktheit $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$ folgt somit Exaktheit $\text{Ker}(f^*) = \text{Im}(g^*)$.

Nochmal die Daten zur Erinnerung:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & U & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{g} & W \longrightarrow \dots \\ \dots & \longleftarrow & U^* & \xleftarrow{f^*} & V^* & \xleftarrow{g^*} & W^* \longleftarrow \dots \end{array}$$

Beweis: (1) Gegeben ist $\text{Im}(f) \subseteq \text{Ker}(g)$. Das bedeutet $g \circ f = 0$. Dualisieren ergibt $f^* \circ g^* = 0$, und das bedeutet $\text{Ker}(f^*) \supseteq \text{Im}(g^*)$.

(2) Wir setzen nun $W = \text{Im}(g) \oplus W'$ voraus.

Aus $\text{Im}(f) \supseteq \text{Ker}(g)$ folgern wir $\text{Ker}(f^*) \subseteq \text{Im}(g^*)$:

Sei $\varphi \in \text{Ker}(f^*)$, also $\varphi \in V^*$ mit $0 = f^*(\varphi) = \varphi \circ f$. Daraus folgt $\text{Im}(f) \subseteq \text{Ker}(\varphi)$, also $\text{Ker}(g) \subseteq \text{Ker}(\varphi)$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & R \\ g \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \uparrow \tilde{\varphi} \\ \text{Im}(g) & \xrightarrow{\text{inc}} & W \end{array}$$

Dank Faktorisierung (Satz L3c) existiert $\bar{\varphi} : \text{Im}(g) \rightarrow R$ mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ g$, und dank $W = \text{Im}(g) \oplus W'$ die Fortsetzung $\tilde{\varphi} : W \rightarrow R$ mit $\tilde{\varphi}|_{W'} = 0$.

Somit gilt $g^*(\tilde{\varphi}) \stackrel{\text{Def}}{=} \tilde{\varphi} \circ g \stackrel{\text{Def}}{=} \bar{\varphi} \circ g \stackrel{\text{Def}}{=} \varphi$, also $\varphi \in \text{Im}(g^*)$.

QED

Nochmal Dualität und Sur/In/Bijektivität

W323
Ausführung

Beispiel W3h: nochmal Dualität und Sur/In/Bijektivität

Sei $f : U \rightarrow V$ linear über R und $f^* : V^* \rightarrow U^*$ dual hierzu.

(1) Ist f surjektiv, so ist f^* injektiv:

$$\begin{array}{ccccccc} U & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{0} & 0 & & \text{exakt} \\ U^* & \xleftarrow{f^*} & V^* & \xleftarrow{0} & 0 & & \text{exakt} \end{array}$$

(2) Ist f injektiv mit $V = \text{Im}(f) \oplus V'$, so ist f^* surjektiv:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{0} & U & \xrightarrow{f} & V & & \text{exakt} \\ 0 & \xleftarrow{0} & U^* & \xleftarrow{f^*} & V^* & & \text{exakt} \end{array}$$

(3) Ist f bijektiv, so auch f^* :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{0} & U & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{0} & 0 \quad \text{exakt} \\ 0 & \xleftarrow{0} & U^* & \xleftarrow{f^*} & V^* & \xleftarrow{0} & 0 \quad \text{exakt} \end{array}$$

Nochmal Dualität und Sur/In/Bijektivität

W324
Ausführung

😊 Die Schreibweise als exakte Sequenz bündelt nützliche Information. Nun erhalten wir damit nützliche Dualitätsregeln für exakte Sequenzen. Sur/In/Bijektivität sind wichtige Spezialfälle und werden hier betont.

⚠ In (2) ist die zusätzliche Voraussetzung $V = \text{Im}(f) \oplus V'$ zwar lästig, aber doch wesentlich. Andernfalls finden wir Gegenbeispiele:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z} & & \text{exakt} \\ & h & & k & & & \\ 0 & \xleftarrow{0} & \mathbb{Z} & \xleftarrow{2} & \mathbb{Z} & & \text{nicht exakt} \\ & h^* & & k^* & & & \end{array}$$

Hier erlaubt das Bild $\text{Im}(k) = 2\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ kein Komplement. Tatsächlich ist die duale Sequenz nicht exakt, denn es gilt $\text{Im}(k^*) = 2\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z} = \text{Ker}(h^*)$.

😊 Über einem Divisionsring R ist die Voraussetzung (2) immer erfüllt: Jeder Untervektorraum $U \leq V$ hat ein Komplement U' , d.h. $V = U \oplus U'$. Das verdanken wir dem Basisauswahl- und Ergänzungssatz, siehe M3o. Dualisierung überführt also exakte Sequenzen in exakte Sequenzen.

Beispiel W31: Einschränkung auf $U \leq V$

(0) Die Inklusion $\iota = \text{inc}_U^V : U \hookrightarrow V : u \mapsto u$ induziert die Einschränkung

$$\iota^* : V^* \rightarrow U^* : \varphi \mapsto \varphi \circ \iota = \varphi|_U.$$

(1) Ihr Kern ist der Annulator

$$\text{Ker}(\iota^*) = \{ \varphi \in V^* \mid \varphi|_U = 0 \} = U^\circ.$$

(2) Wir erhalten so die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow U^\circ \xrightarrow{\text{inc}} V^* \xrightarrow{\iota^*} U^*.$$

(3) Gilt zudem $V = U \oplus U'$, so erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow U^\circ \xrightarrow{\text{inc}} V^* \xrightarrow{\iota^*} U^* \longrightarrow 0.$$

(4) Über einem Divisionsring gilt Letzteres immer.

Übung: Rechnen Sie die genannten Beispiele sorgsam nach. Welche Definitionen und Sätze nutzen Sie dazu?

😊 Die Inklusion $\iota : U \hookrightarrow V$ und die Einschränkung $\iota^* : V^* \rightarrow U^*$ sind besonders nützlich, anschaulich und einfach zu verstehen.

Insbesondere finden wir hier erneut den Annulator $\text{Ker}(\iota^*) = U^\circ$. Auch dieser Begriff reiht sich so in unseren Werkzeugkasten ein.

Diesen Zusammenhang nutzen wir im folgenden Korollar und Anwendungsbeispiel zu den Rechenregeln für den Annulator.

😊 Wir sehen daran sehr schön: Es gibt hier zwei Stufen von Beweisen.

Die einen sind „lokal-trivial“: Es genügt, die Definitionen einzusetzen, und an jeder Stelle im Beweis gibt es nur eine sinnvolle Fortsetzung.

Die anderen benötigen wirklich einen Divisionsring, etwa zu Basiswahl, direktem Komplement oder Spaltung. Hier ist tatsächlich etwas zu tun, und dazu gibt es mehrere Möglichkeiten, der Suchraum sinnvoller Argumentationen ist (nicht riesig aber) spürbar größer.

Korollar W3j: Annulator des Kerns und Bild des Duals

Sei R ein Ring und $f : U \rightarrow V$ linear mit Spaltung $V = \text{Im}(f) \oplus V'$.

(0) Ist R ein Divisionsring, so ist Letzteres immer erfüllt (Satz M3o).

(1) Dank Satz W3G erhalten wir zwei exakte Sequenzen:

$$\text{Ker}(f) \xrightarrow{\iota} U \xrightarrow{f} V \quad (\text{immer exakt})$$

$$\text{Ker}(f)^* \xleftarrow{\iota^*} U^* \xleftarrow{f^*} V^* \quad (\text{dank Spaltung})$$

(2) Für $\iota^* : \varphi \mapsto \varphi \circ \iota$ gilt $\text{Ker}(\iota^*) \stackrel{\text{Def}}{=} \text{Ker}(f)^\circ$. Daraus folgt:

$$(\text{Ker } f)^\circ = \text{Im}(f^*)$$

😊 Die letzte Gleichung erlaubt eine oft bequeme Umrechnung. Ohne die Spaltung $V = \text{Im}(f) \oplus W$ gilt immerhin $(\text{Ker } f)^\circ \supseteq \text{Im}(f^*)$.

Beispiel: Für $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : x \mapsto 2x$ gilt $(\text{Ker } f)^\circ = \mathbb{Z} \supsetneq 2\mathbb{Z} = \text{Im}(f^*)$.

😊 Mit unseren so geschärften Werkzeugen vollenden wir Satz W2c:

Beispiel W3k: Rechenregeln für den Annulator

Für jede Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Unterräumen $A_i \leq V$ gilt:

$$(\sum_{i \in I} A_i)^\circ = \bigcap_{i \in I} A_i^\circ \quad \text{und} \quad (\bigcap_{i \in I} A_i)^\circ \supseteq \sum_{i \in I} A_i^\circ$$

Gleichheit gilt hier, falls R ein Divisionsring ist und die Menge I endlich.

Beweis: Nach Satz W2c zeigen wir nur noch die letzte Aussage.

Für den Quotienten $f_i : V \twoheadrightarrow V/A_i$ gilt $\text{Ker}(f_i) \stackrel{\text{Def}}{=} A_i$, also $\text{Im}(f_i^*) \stackrel{\text{W3j}}{=} A_i^\circ$. Da die Indexmenge I endlich ist, können wir dies zusammensetzen zu

$$f : V \rightarrow \prod_{i \in I} V/A_i = \bigoplus_{i \in I} V/A_i : v \mapsto (f_i(v))_{i \in I}.$$

Demnach gilt $\text{Ker}(f) = \bigcap_{i \in I} A_i$. Dank W3j gilt $(\text{Ker } f)^\circ = \text{Im}(f^*)$, wobei

$$f^* : \bigoplus_{i \in I} (V/A_i)^* \rightarrow V^* : (\varphi_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} f_i^*(\varphi_i).$$

Daraus erhalten wir $(\bigcap_{i \in I} A_i)^\circ = (\text{Ker } f)^\circ = \text{Im}(f^*) = \sum_{i \in I} A_i^\circ$.

QED

Über jedem Divisionsring haben wir in Satz W3J gezeigt:

$$(\text{Ker } f)^\circ = \text{Im}(f^*)$$

Vermuten Sie hierzu eine duale Aussage? mit Bild und Kern vertauscht?

Bemerkung W3L: Annullator des Bildes und Kern des Duals

Für jede R -lineare Abbildung $f : U \rightarrow V$ gilt:

$$(\text{Im } f)^\circ = \text{Ker}(f^*)$$

Aufgabe: Beweisen Sie dies (und freuen Sie sich, wie leicht es geht).

Beweis: Nach Definition W3A haben wir $f^* : V^* \rightarrow U^* : \varphi \mapsto \varphi \circ f$, also

$$\text{Ker}(f^*) \stackrel{\text{Def}}{=} \{ \varphi \in V^* \mid \varphi \circ f = 0 \} \stackrel{\text{Def}}{=} (\text{Im } f)^\circ.$$

Warum gilt die letzte Gleichheit „nach Definition“? Ausführlich gilt:

$$\begin{aligned} \varphi \circ f = 0 &\stackrel{\text{Def}}{\iff} \forall u \in U : \varphi(f(u)) = 0 \\ &\stackrel{\text{Def}}{\iff} \forall v \in \text{Im } f : \varphi(v) = 0 \stackrel{\text{Def}}{\iff} \varphi \in (\text{Im } f)^\circ \end{aligned}$$

☺ Im Rückblick und in der sorgsam Wiederholung sehen Sie: Die meisten Beweise und Rechnungen zur Dualität sind „lokal-trivial“. Allerdings nicht alle: Manchmal müssen wir etwas ernsthafter arbeiten, etwa wenn wir Basen wählen oder Komplemente konstruieren.

Diese Konstruktionen gelingen glücklicherweise über jedem DRing, aber nicht über jedem Ring, wie hilfreiche Gegenbeispiele belegen. Wie gut, dass wir Lineare Algebra nicht nur über Körpern betreiben, sondern mit Ringen ein reiches Repertoire an Gegen/Beispielen haben.

Ist das Fluch oder Segen? Manche halten die allgemeinere Sichtweise für einen Fluch. Ich plädiere für Segen: Nur anhand guter Gegen/Beispiele verstehen Sie, dass es wirklich etwas zu beweisen gibt. Das beginnt bei der Existenz von Basen und der Invarianz der Dimension und zieht sich seither wie ein roter Faden durch die gesamte Lineare Algebra.

Ich halte es daher für besser, Sie von Anfang an auf die nötige Vielfalt sanft vorzubereiten. Umso mehr schätzen wir die heile Welt der Körper.

Aufgabe: Wie interpretieren Sie $(\text{Im } f)^\circ = \text{Ker}(f^*)$ und $(\text{Ker } f)^\circ \supseteq \text{Im}(f^*)$ im konkret-vertrauten Rahmen der Matrixdualität?

Lösung: Zur Matrix $A \in R^{m \times n}$ betrachten wir die lineare Abbildung $f_A : R^{n \times 1} \rightarrow R^{m \times 1} : v \mapsto Av$ und dual $f_A^* : R^{1 \times m} \rightarrow R^{1 \times n} : u \mapsto uA$.

(1) Der Raum $\text{Im } f_A \leq R^{m \times 1}$ wird erzeugt von den Spalten der Matrix A . Der Annullator $(\text{Im } f_A)^\circ \leq R^{1 \times m}$ besteht demnach aus allen Kovektoren $u \in R^{1 \times m}$, die alle Spalten der Matrix A annullieren, also $uA = 0$ erfüllen. Das ist genau der Linkskern, also $\text{Ker}(f_A^*)$. Das zeigt $(\text{Im } f_A)^\circ = \text{Ker}(f_A^*)$.

(2) Der Raum $\text{Im}(f_A^*) \leq R^{1 \times n}$ wird erzeugt von den Zeilen der Matrix A . Der Annullator $(\text{Ker } f)^\circ$ besteht aus den Kovektoren $u \in R^{1 \times n}$, die alle Elemente $v \in \text{Ker } f$ annullieren. Dazu gehört auch jede Zeile u von A , denn aus $Av = 0$ folgt insbesondere $uv = 0$. Das zeigt $(\text{Ker } f_A)^\circ \supseteq \text{Im}(f_A^*)$.

☺ Das gilt soweit alles über jedem Ring R , hier speziell ausgeführt für Koordinatenräume und Matrizen. Auch das ist lehrreich.

☺ Auch für $(\text{Ker } f)^\circ \supsetneq \text{Im}(f^*)$ haben wir Beispiele in Matrixform.

Über dem Ring $R = \mathbb{Z}$ haben wir das Gegenbeispiel $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : v \mapsto 2v$, allgemein $f_A : \mathbb{Z}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{Z}^{n \times 1} : v \mapsto Av$ mit $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ und $|\det A| \geq 2$. Hier ist f injektiv, also $\text{Ker } f_A = \{0\} \leq \mathbb{Z}^{n \times 1}$, daher $(\text{Ker } f_A)^\circ = \mathbb{Z}^{1 \times n}$. Jedoch ist $f_A^* : \mathbb{Z}^{1 \times n} \rightarrow \mathbb{Z}^{1 \times n} : u \mapsto uA$ nicht surjektiv, sonst wäre A invertierbar und $\det A = \pm 1$. Das zeigt $(\text{Ker } f)^\circ \supsetneq \text{Im}(f^*)$.

☺ Spezialisierung auf Matrizen liefert konkretes Anschauungsmaterial. Der Erfolg der Linearen Algebra beruht auf der effizienten Verbindung von allgemeiner Theorie mit Datenstrukturen und Algorithmen.

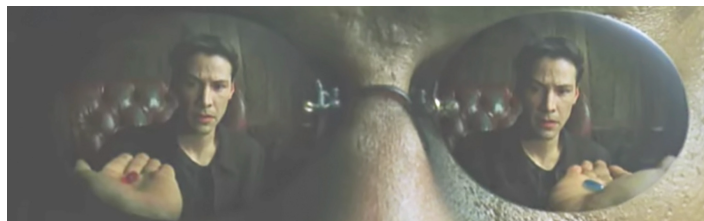
☹ Für die Nachweise der obigen Rechenregeln bieten Matrizen keine Vorteile, im Gegenteil: Sie schränken unnötig ein und die Rechnungen werden nicht kürzer, sondern mit unnötigem „Matrixzucker“ überzogen.

☺ Daher arbeiten wir konkret, wo nützlich, und abstrakt, wo möglich.

Kapitel W

Bonusmaterial

*A mathematician is a device for turning coffee into theorems.
A comathematician is a device for turning cotheorems into ffee.*



Ist Dualität effiziente Denkökonomie oder nur Kokolores?

Inhalt dieses Kapitels W

- 5 Was heißt hier natürlich?
 - Der natürliche Homomorphismus ist natürlich natürlich.
 - Von Freiheit und Basen zu projektiver Erzeugung
- 6 Anwendungen in der Mathematik
 - Polynome, Koeffizienten und Auswertungen
 - Komplexe Funktionen und Cauchy-Wegintegral
- 7 Anwendungen in der Physik
 - Diracs Bra-Ket-Notation für Ko/Vektoren

Linearformen, praktisch und didaktisch

Lineare Abbildungen $f: V \rightarrow W$ über einem Ring R sind allgegenwärtig und Ihnen inzwischen wohlvertraut, algorithmisch etwa in Darstellung durch Matrizen $A \in R^{n \times m}$. Linearformen $f: V \rightarrow R$ sind der einfachste und sympathischste Fall: Hier ist der Zielraum $W = R$ unser Grundring. Sie sind in Anwendungen selbstverständlich ein universelles Werkzeug. Sie sind Standardstoff der Linearen Algebra und in Klausuren beliebt. Anfänger:innen finden dies zunächst schwer, Übung ändert es rasch.

Zusammengefasst: Jedem linearen Raum V ordnen wir seinen dualen Raum $V^* = \text{Hom}_R(V, R)$ zu und jeder linearen Abbildung $f: U \rightarrow V$ ihre duale Abbildung $f^*: V^* \rightarrow U^*: \varphi \mapsto \varphi \circ f$. Die Zuordnung $f \mapsto f^*$ ist additiv, über (R, σ) sogar semilinear, respektiert Identitäten gemäß $\text{id}_V^* = \text{id}_{V^*}$ und kehrt Kompositionen um gemäß $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Linearformen sind erfahrungsgemäß ein bewährter Indikator, wie ernsthaft Sie mathematisches Denken bereits geübt haben und wie weit Sie die formale Arbeitsweise verinnerlichen konnten. Dann sind solche Fragen in Prüfungen leicht erarbeitete Punkte.

Linearformen, praktisch und didaktisch

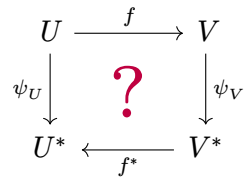
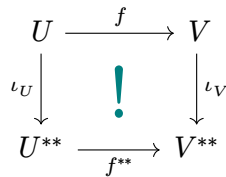
Linearformen sind ebenso grundlegend wie praktisch:

Dualität von linearen Räumen und linearen Abbildungen verallgemeinert die Matrixdualität von Gleichungssystemen und ihre Lösungsräumen.

Bitte nutzen Sie Linearformen und Dualität jetzt als Ansporn. Sie mobilisieren und wiederholen damit viele schöne Methoden der Linearen Algebra (und bereiten sich so auf die Klausur vor). Was sie bisher vernachlässigt haben, sollen Sie nun nachholen!

Leider ist auch die Gegenstrategie weit verbreitet: Augen und Ohren fest verschließen, die Luft anhalten und hoffen, dass alles bald vorbei geht. Genau dazu sind Linearformen und ähnliche Fragen eine gute Diagnose. Jetzt ist Ihre letzte Gelegenheit, gute Gewohnheiten anzunehmen!

Auch beim Studieren und Praktizieren gilt eine Art Dualität: Nutzen Sie Theorie und Anwendung gleichermaßen, wie linke und rechte Hand. Vertrauen Sie, bleiben Sie mutig und neugierig und offen für beides! Sie werden sehen, es macht Freude: erkennen. beweisen. anwenden.

Satz W5A: Natürlichkeit des natürlichen Homomorphismus(1) Zu jeder R -linearen Abbildung $f: U \rightarrow V$ gilt $\iota_V \circ f = f^{**} \circ \iota_U$.**Übung:**
Beweisen
Sie dies!Dual
gelingt
es nicht!Wir betrachten erneut den **natürlichen Homomorphismus** $\iota_V: V \rightarrow V^{**}$ von jedem linearen Raum V in sein Bidual V^{**} , mit $\iota_V(v)(\varphi) = \varphi(v)$, kurz:

$$\iota_V: V \rightarrow V^{**} : v \mapsto [\varphi \mapsto \varphi(v)]$$

😊 Zunächst einmal bedeutet „natürlich“, ganz naiv anschaulich, dass es eine naheliegende Konstruktion ist (einfach, kanonisch, direkt), und wir dazu keine willkürlichen Wahlen treffen müssen (eine Basis wählen o.ä.) (Pseudopraktisches Geschwurbel ist beliebt: *You know it when you see it.*)

🤔 Können wir diese vage Idee präzisieren? O ja: „natürlich“ bedeutet, dass ι mit allen hier relevanten Homomorphismen kommutiert, wie in (1). Genau das rechnen Sie in dieser Übung nach. Daher der irre Titel.

Aufgabe: Sei R ein Ring. Zu jedem R -linearen Raum V sei V^* sein Dual. Bestimmen Sie alle natürlichen Homomorphismen $\psi_\bullet = (\psi_V: V \rightarrow V^*)_V$.

Satz W5A: Natürlichkeit ist extrem stark.

(2) Die Nullabbildung $0_\bullet = (0_V: V \rightarrow V^*)_V$ ist natürlich, denn für jede lineare Abbildung $f: U \rightarrow V$ gilt $0_U = f^* \circ 0_V \circ f$. Weitere gibt es nicht!

Beweis: Seien $\psi_\bullet = (\psi_V: V \rightarrow V^*)_V$ Homomorphismen und natürlich.

Für jede lineare Abbildung $f: U \rightarrow V$ bedeutet das $\psi_U = f^* \circ \psi_V \circ f$.

Wir setzen $f = 0_V: V \rightarrow V$ ein und erhalten $\psi_V = 0_V^* \circ \psi_V \circ 0_V = 0_V$. **QED**

Wir ignorieren hier den formalen Unterschied, dass U, V rechtslinear und U^*, V^* linkslinear sind. Vereinfachend sei R kommutativ und alle Räume zentral. Das obige Argument gilt für beliebige Abbildungen $\psi_\bullet$.

😊 Sie sehen hier eine interessante Bewegung in der Mathematik:

Natürlichkeit ist zunächst eine gänzlich informelle Beobachtung, noch ohne präzise Definition, aber eine willkommene Eigenschaft. In Anwendungen tritt sie immer und immer wieder auf, und so langsam formt sich daraus ein Bild, was „natürlich“ bedeuten kann... und soll?

Für jeden Körper R und jeden endlich-dimensionalen K -Vektorraum V ist der natürliche Homomorphismus ein Isomorphismus. (Satz W1L)

Bemerkenswerter Kontrast: Es gibt keinen natürlichen Isomorphismus $\psi_V: V \rightarrow V^*$. Anschaulich-vage ist das klar: Es gibt zwar viele solcher Isomorphismen, doch zur Konstruktion eines konkreten Isomorphismus ψ_V müssen wir eine Basis wählen. Das fühlt sich nicht natürlich an.

Hier spüren wir die Notwendigkeit einer präzisen Definition: Wenn wir zeigen wollen, dass etwas möglich ist, so genügt es, dass wir es tun. Wenn wir zeigen wollen, dass es unmöglich ist, so genügt es nicht, es erfolglos zu versuchen und frustriert aufzugeben. Wir benötigen ein Hindernis!

🤔 Wie können wir also *beweisen*, handfest und nachvollziehbar, dass kein natürlicher Isomorphismus $\psi_V: V \rightarrow V^*$ existiert?

Intuition ist schön, Erfahrung ist gut, doch beides kann täuschen: Nur weil wir es nicht geschafft haben, bedeutet das noch lange nicht, dass es unmöglich ist. Soviel Ehrlichkeit und Bescheidenheit muss sein.

„Ich kann es nicht, also kann es niemand.“ Das ist Beweis durch Mangel an Phantasie, außerhalb der Mathematik zwar beliebt, aber unzulässig!

Wir nehmen also unseren Mut zusammen, und definieren *Natürlichkeit*. Die obigen Beweise sind dann erfreulich leicht. Alles wird klar:

Satz W5A: Natürlichkeit ist extrem stark.

(3) Nur eine Abbildung $\psi_V: V \rightarrow V^*$ ist natürlich zu allen $f \in \text{End}_R(V)$, im Sinne von $\psi_V = f^* \circ \psi_V \circ f$, nämlich die Nullabbildung $\psi_V = 0_V$.

Klarheit der Sprache, Klarheit des Denkens.

Satz W5B: duale Charakterisierung von Freiheit und Basis

Sei R ein Divisionsring, darüber V ein linearer Raum mit Dualraum V^* . Vorgelegt sei eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V . Dann gilt:

- (1) $(v_i)_{i \in I}$ ist frei. $\iff$ Es existiert mindestens eine duale Familie.
- (2) $(v_i)_{i \in I}$ ist erzeugend. $\implies$ Es existiert höchstens eine duale Familie.
- (3) $(v_i)_{i \in I}$ ist eine Basis. $\iff$ Es existiert genau eine duale Familie.

Aufgabe: Beweisen Sie die genannten Charakterisierungen und widerlegen Sie zudem die hierbei fehlende Implikation. (Diese reparieren wir unten durch projektive Erzeugung W5D.)

Beweis: (1) „ $\Leftarrow$ “: Diese Implikation kennen wir bereits aus Satz W1D: Duale Familien bezeugen gegenseitig ihre lineare Unabhängigkeit.

„ $\Rightarrow$ “: Dank Basisergänzungssatz M2K existiert eine Basis $(v_i)_{i \in J}$ mit $J \supseteq I$. Dank Satz W1H (PLF N1B) existiert (genau) eine duale Familie $(v_i^*)_{i \in J}$. Somit ist die Familie $(\varphi_i = v_i^*)_{i \in I}$ in V^* dual zu $(v_i)_{i \in I}$ in V .

(2) „ $\Rightarrow$ “: Seien sowohl $(\varphi_i)_{i \in I}$ als auch $(\psi_i)_{i \in I}$ in V^* dual zu $(v_i)_{i \in I}$ in V . Für alle $i, j \in I$ gilt dann $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij} = \psi_i(v_j)$. Dank Vergleichslemma N1A folgt die Gleichheit $\varphi_i = \psi_i$ für alle $i \in I$.

⚠ Die Umkehrung „ $\Leftarrow$ “ gilt nicht! In $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ betrachten wir die Familie $(v_1 = e_1, v_2 = 2e_1)$. Da diese Vektoren linear abhängig sind, existiert *keine* duale Familie. Die Bedingung „höchstens eine“ ist hier erfüllt, dennoch erzeugt unsere Familie nicht den Raum $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$.

(3) „ $\Rightarrow$ “: Diese Implikation kennen wir bereits aus Satz W1H: Zu jeder Basis in V existiert genau eine duale Familie in V^* .

„ $\Leftarrow$ “: Hier gilt die Umkehrung! Wir setzen voraus, dass zu $(v_i)_{i \in I}$ in V *genau eine* duale Familie existiert. Zunächst ist $(v_i)_{i \in I}$ frei, siehe (1). Dank Basisergänzungssatz M2K existiert eine Basis $(v_i)_{i \in J}$ mit $J \supseteq I$. Im Falle $J \supsetneq I$ hätten wir zu $(v_i)_{i \in I}$ mindestens *zwei* duale Familien: einerseits $(\varphi_i)_{i \in I}$ mit $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$ für $j \in I$ und $\varphi_i(v_j) = 0$ für $j \in J \setminus I$, andererseits $(\psi_i)_{i \in I}$ mit $\psi_i(v_j) = \delta_{ij}$ für $j \in I$ und $\psi_i(v_j) = 1$ für $j \in J \setminus I$. Die Eindeutigkeit erzwingt also $J = I$. Somit ist $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis. QED

Der Raum $K^{s \times n}$ ist dual zu $K^{n \times s}$ über $R = K^{s \times s}$.

🤔 Müssen wir rechts und links tatsächlich sorgsam unterscheiden? Ja! Zur Illustration ein grundlegendes Beispiel der Matrizenrechnung:

Beispiel W5c: der Raum $V = K^{n \times s}$ über dem Ring $R = K^{s \times s}$

Sei K ein Ring und $R = K^{s \times s}$ der Matrixring, wobei $s \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Über R ist $U = K^{s \times n}$ linkslinear, $V = K^{n \times s}$ rechtslinear, und Matrixmultiplikation

$$\beta : K^{s \times n} \times K^{n \times s} \rightarrow K^{s \times s} : (u, v) \mapsto u \cdot v$$

ist eine perfekte Paarung (W2D), das heißt wir haben die Isomorphismen

$$\begin{aligned} \beta_1 : K^{s \times n} &\xrightarrow{\sim} (K^{n \times s})^* : u \mapsto \beta_1(u) = [\beta(u, -) : v \mapsto u \cdot v], \\ \beta_2 : K^{n \times s} &\xrightarrow{\sim} (K^{s \times n})^* : v \mapsto \beta_2(v) = [\beta(-, v) : u \mapsto u \cdot v]. \end{aligned}$$

😊 Im Spezialfall $s = 1$ finden wir erneut unser Paradebeispiel W2E. Für $s \geq 2$ sind U und V über R i.A. nicht frei, dennoch ist β perfekt!

Aufgabe: Rechnen Sie die hier gemachten Behauptungen sorgsam nach. Das ist analog zum vorigen Beispiel, allein die Isomorphie ist kniffliger!

Der Raum $K^{s \times n}$ ist dual zu $K^{n \times s}$ über $R = K^{s \times s}$.

Beweis: Zunächst ist $\beta(u, v) = u \cdot v$ linkslinear in u und rechtslinear in v . Daraus erhalten wir β_1 linkslinear und β_2 rechtslinear wie angegeben.

Aus den Standardbasen $e_1, \dots, e_n \in K^{n \times 1}$ und $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_s \in K^{s \times 1}$ über K erhalten wir die Standardbasis $e_{ij} = e_i \tilde{e}_j^T \in K^{n \times s}$ (Matrizeinheiten D1E).

Injektivität: Wir zeigen, dass $\beta_1 : u \mapsto [v \mapsto u \cdot v]$ injektiv ist. Sei $u \neq 0$, also $u_{ji} \neq 0$ für ein Indexpaar (j, i) . Für $v = e_i \tilde{e}_j^T$ folgt $(u \cdot v)_{jj} = u_{ij} \neq 0$.

Surjektivität: Wir zeigen, zu jedem $f : K^{n \times s} \rightarrow K^{s \times s}$ rechtslinear über $R = K^{s \times s}$ existiert ein $u \in K^{s \times n}$ mit $f(v) = u \cdot v$ für alle $v \in K^{n \times s}$.

Als Spalten der Matrix $u = (u_1, \dots, u_n)$ wählen wir $u_i := f(e_i \tilde{e}_1^T) \tilde{e}_1$. Nachrechnen! Für die Zeilen jeder Matrix $v = (v_1; \dots; v_n) \in K^{n \times s}$ folgt

$$\begin{aligned} u \cdot v &\stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{i=1}^n u_i v_i \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{i=1}^n f(e_i \tilde{e}_1^T) \tilde{e}_1 v_i \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} f\left(\sum_{i=1}^n e_i \tilde{e}_1^T \tilde{e}_1 v_i\right) \stackrel{\text{Def}}{=} f\left(\sum_{i=1}^n e_i v_i\right) \stackrel{\text{Def}}{=} f(v). \end{aligned}$$

Die Bijektivität von β_2 beweist man analog. QED

😊 Das ist zunächst trickreich, und dafür muss man etwas tüfteln. Liegt der Ansatz jedoch erst einmal vor, so ist die Rechnung leicht!

Beispiel: Zu jeder Basis $(b_i)_{i \in I}$ von V über R hat dank Satz W1H die duale Familie $(\varphi_i := b_i^*)_{i \in I}$ in V^* die folgenden beiden Eigenschaften:

- 1 Zu jedem $v \in V$ gilt $(\varphi_i(v))_{i \in I} \in R^{(I)}$, das heißt endlicher Träger,
- 2 und zudem $\sum_{i \in I} b_i \cdot \varphi_i(v) = v$, das heißt lineare Rekonstruktion.

Beweis: Zu jedem $v \in V$ existiert $\lambda \in R^{(I)}$ mit $v = \sum_{j \in I} b_j \cdot \lambda_j$. Somit folgt $\varphi_i(v) = b_i^*(\sum_{j \in I} b_j \cdot \lambda_j) = \sum_{j \in I} b_i^*(b_j) \cdot \lambda_j = \lambda_i$, also hat $(\varphi_i(v))_{i \in I} = \lambda$ endlichen Träger und erfüllt $\sum_{i \in I} b_i \cdot \varphi_i(v) = v$, wie gewünscht. QED

Definition W5D: projektive Erzeugung

Sei R ein Ring und darüber V ein rechtslinearer Raum. Ein **projektives Erzeugendensystem** ist eine Familie $(b_i, \varphi_i)_{i \in I}$ von Vektoren $b_i \in V$ mit Kovektoren $\varphi_i \in V^*$, die obige Eigenschaften (1) und (2) erfüllen.

Beispiel: Wie oben ist jede Basis ein projektives Erzeugendensystem. (Die nötige Ergänzung von $(b_i)_{i \in I}$ zu $(b_i, \varphi_i)_{i \in I}$ ist dabei eindeutig.) Die Umkehrung gilt nicht. Warum? Konstruieren Sie Gegenbeispiele, über einem DRing etwa ein Erzeugendensystem und echte Basisauswahl.

⚠ Traditionell sagen manche statt „projektives Erzeugendensystem“ $(b_i, \varphi_i)_{i \in I}$ lieber „projektive Basis“ oder manchmal sogar „duale Basis“. Beides finde ich unglücklich, denn es ist im Allgemeinen keine Basis!

Beispiel W5E: projektive Erzeugung von $V = K^{n \times s}$ über $R = K^{s \times s}$

- (0) Der Raum $V = K^{n \times s}$ über dem Matrixring $R = K^{s \times s}$ ist frei für $s \mid n$, sonst nicht (wobei $s \geq 1$ gelte und die Invarianz der Dimension über K).
- (1) Immer existiert jedoch ein projektives Erzeugendensystem $(b_i, \varphi_i)_{i \in I}$.
- (2) Ebenso existiert $U = K^{m \times s}$ so, dass $U \oplus V \cong K^{(m+n) \times s}$ über R frei ist.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Behauptungen.

Beweis: (0) Für $n = sl$ gilt $K^{n \times s} = K^{sl \times s} \cong (K^{s \times s})^{\ell \times 1} = R^{\ell \times 1} \cong R^\ell$.

Umgekehrt: Über $R = K^{s \times s}$ ist $V = K^{n \times s}$ endlich erzeugt. Wäre V über R frei, so hätten wir $V \cong R^{\ell \times 1}$ für ein $\ell \in \mathbb{N}$. Über K folgt $K^{n \times s} \cong K^{s \times s \ell}$.

Die Dimensionen ergeben also $ns = s^2 \ell$. Nach Kürzung folgt $n = s \ell$.

(Nur an dieser Stelle benötigen wir die Invarianz der Dimension; dies gilt für jeden Körper K , ebenso jeden DRing und jeden CRing $K \not\supseteq \{0\}$.)

Aus den Standardbasen $e_1, \dots, e_n \in K^{n \times 1}$ und $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_s \in K^{s \times 1}$ über K erhalten wir die Standardbasis $e_{ij} = e_i \tilde{e}_j^T \in K^{n \times s}$ (Matrixeinheiten D1E).

- (1) Über $R = K^{s \times s}$ wird $V = K^{n \times s}$ erzeugt von $b_i = e_i \tilde{e}_1^T$ für $i = 1, \dots, n$. Als Kovektor betrachten wir $\varphi_i : K^{n \times s} \rightarrow K^{s \times s}$ mit $\varphi_i(v) = \tilde{e}_1 e_i^T v$. Für die Zeilen jeder Matrix $v = (v_1; \dots; v_n) \in K^{n \times s}$ folgt

$$\sum_{i=1}^n b_i \cdot \varphi_i(v) \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{i=1}^n e_i \tilde{e}_1^T \tilde{e}_1 e_i^T v \stackrel{\text{Def}}{=} 1_{n \times n} v \stackrel{\text{Def}}{=} v.$$

😊 Damit haben wir unser projektives Erzeugendensystem $(b_i, c_i)_{i=1}^n$ mit den Vektoren $b_i = e_i \tilde{e}_1^T \in K^{n \times s}$ und den Kovektoren $c_i = \tilde{e}_1 e_i^T \in K^{s \times n}$.

- (2) Wir wählen $\ell \in \mathbb{N}$ groß genug mit $s \ell \geq n$ und setzen $m := s \ell - n \in \mathbb{N}$. Mit dem Summanden $U = K^{m \times s}$ ist dann $U \oplus V \cong K^{s \ell \times s}$ über R frei.

😊 Über R ist weder U noch V frei, doch ihre Summe $U \oplus V$ ist frei!

Aufgabe: Welche unserer Ergebnisse zur Dualität können Sie damit projektiv verallgemeinern? Formulieren und beweisen Sie dies für den natürlichen Homomorphismus $\iota : V \rightarrow V^{**} : v \mapsto [\iota(v) : \varphi \mapsto \varphi(v)]$.

Satz W5F: der natürliche Homomorphismus von V zum Bidual V^{**}

- (0) Ist V über R projektiv erzeugt, durch $(b_i, \varphi_i)_{i \in I}$, so ist der natürliche Homomorphismus $\iota : V \rightarrow V^{**}$ injektiv.

- (1) Sei V über R endlich projektiv erzeugt, durch $(b_i, \varphi_i)_{i=1}^n$.

- (a) Dann ist auch V^* endlich projektiv erzeugt, durch $(\varphi_i, \iota b_i)_{i=1}^n$.

- (b) Der natürliche Homomorphismus $\iota : V \rightarrow V^{**}$ ist ein Isomorphismus.

😊 Das verallgemeinert Satz W1L von Basen $(b_i)_{i \in I}$ zu $(b_i, \varphi_i)_{i \in I}$. Der Beweis wird nicht schwerer, sondern eher eleganter und leichter.

Beweis: (0) Aus $\iota(v)(\varphi_i) = \varphi_i(v)$ für $i \in I$ erhalten wir $\sum_{i \in I} b_i \varphi_i(v) = v$. Das zeigt, dass ι injektiv ist, denn aus $u, v \in V$ und $\iota(u) = \iota(v)$ folgt $u = v$.

- (1a) Für jeden Kovektor $f \in V^*$, also $f : V \rightarrow R$, gilt $\sum_{i=1}^n f(b_i) \varphi_i = f$, denn Auswerten gibt $b_j \mapsto \sum_{i=1}^n f(b_i) \varphi_i(b_j) = f(\sum_{i=1}^n b_i \varphi_i(b_j)) = f(b_j)$.

- (1b) Für jeden Kokovektor $w \in V^{**}$, gilt $\sum_{i=1}^n \iota(b_i) w(\varphi_i) = w$, denn Auswerten gibt $\varphi_j \mapsto \sum_{i=1}^n \varphi_j(b_i) w(\varphi_i) = w(\sum_{i=1}^n \varphi_j(b_i) \varphi_i) = w(\varphi_j)$.

Das beweist, dass ι surjektiv ist, insgesamt also ein Isomorphismus. QED

Beispiel W6A: Polynome und Auswertung

Der Raum $V = \mathbb{R}[X]$ aller Polynome über $\mathbb{R}$ hat die Monombasis $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Ihre duale Familie in V^* ist $(\varphi_k : f \mapsto (\partial^k f)(0)/k!)_{k \in \mathbb{N}}$. Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ liegt die Auswertung $\text{ev}_a : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f(a)$ nicht in $\langle \varphi_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle_{\mathbb{R}}$.

Aufgabe: (0) Ist $\text{ev}_a : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Linearform? Sei $U = \mathbb{R}[X]_{<n}$.

(1) Liegt $\text{ev}_a : U \rightarrow \mathbb{R}$ in $\langle \varphi_k \mid k < n \rangle_{\mathbb{R}}$? Darstellung oder Hindernis!

(2) Liegt $\text{ev}_a : V \rightarrow \mathbb{R}$ in $\langle \varphi_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle_{\mathbb{R}}$? Darstellung oder Hindernis!

Lösung: (0) Ja! Die Auswertung ev_a ist linear, denn für alle $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $\text{ev}_a(P\lambda + Q\mu) \stackrel{\text{Def}}{=} P(a)\lambda + Q(a)\mu \stackrel{\text{Def}}{=} \text{ev}_a(P)\lambda + \text{ev}_a(Q)\mu$.

(1) Bezüglich unserer Monombasis $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ schreibt sich jedes Polynom $P \in U$ als $P = \sum_{k=0}^{n-1} X^k p_k$ mit eindeutigen Koeffizienten $p_0, \dots, p_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Dank Dualität gilt $\varphi_j(P) \stackrel{\text{Vor}}{=} \varphi_j(\sum_{k=0}^{n-1} X^k p_k) \stackrel{\text{lin}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_j(X^k) p_k \stackrel{\text{dual}}{=} p_j$.

Wir haben also $\text{ev}_a(P) \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a^k p_k \stackrel{\text{dual}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a^k \varphi_k(P)$, kurz:

$$\forall a \in \mathbb{R} : \text{ev}_a|_U = \sum_{k=0}^{n-1} a^k \varphi_k$$

(2) Lokal, für jedes Polynom $P \in V$, gilt $\text{ev}_a(P) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a^k \varphi_k(P)$, denn diese Summe ist endlich getragen durch $k \in \{0, \dots, \deg P\}$.

☺ Wir nutzen auch global die schöne Formel $\text{ev}_a = \sum_{k \in \mathbb{N}} a^k \varphi_k$.

⚠ Diese bequeme Schreibweise ist nur mit größter Vorsicht zu genießen! Lokal, angewendet auf jedes $P \in \mathbb{R}[X]$, ist die Summe immer endlich und daher wohldefiniert. Global gesehen ist diese Summe jedoch für $a \neq 0$ nicht endlich getragen, also *keine* Linearkombination!

☹ Vielleicht haben wir uns nur ungeschickt angestellt? O weit gefehlt! Jede Linearkombination $\text{ev}_a = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k \varphi_k$ erzwingt $\lambda_k = \text{ev}_a(X^k) = a^k$. Das zeigt, wir können ev_a nicht aus $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ linearkombinieren, kurz:

$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \text{ev}_a \in V^* \setminus \langle \varphi_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle_{\mathbb{R}}$$

Die Auswertung an der Stelle $a = 0$ ist ein Sonderfall, hier gilt $\text{ev}_0 = \varphi_0$.

☺ Das ist die konkrete Inkarnation von Satz W1H und seinem Beweis. Linearformen sind keineswegs abstrakt, sondern wunderbar konkret.

Aufgabe: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, darin $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}^1 \subseteq \mathbb{K}$. Zu $U = \mathbb{K}[X]_{<n}$ über $\mathbb{K}$ haben wir die Basis $(X^i)_{i < n}$ und dual hierzu $(\varphi_i)_{i < n}$ von U^* . Ist jedes φ_i Linearkombination der Auswertungen $\text{ev}_{x_0}, \dots, \text{ev}_{x_{n-1}}$?

Lösung: Ja, das gelingt eindeutig dank Lagrange-Interpolation C2F oder als lineares Gleichungssystem mit der Vandermonde-Matrix D5B.

Wir betrachten speziell $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, darin die n te Einheitswurzel $\omega = e^{-2\pi i/n}$. Als Stützstellen wählen wir die Punktmenge $\{\omega^0, \dots, \omega^{n-1}\}^1 \subset \mathbb{C}$.

Aufgabe: Wie berechnen Sie $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$ effizient aus $\text{ev}_{\omega^0}, \dots, \text{ev}_{\omega^{n-1}}$?

Lösung: Die vorige Aufgabe zeigt Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. Effizient gelingt es mit der schnellen Fourier-Transformation, siehe §E7.

☺ Die Fourier-Transformation ist hier ein Basiswechsel in U^* , zwischen den Koeffizienten φ_i und den Auswertungen ev_{ω^j} . Sie kann ebenso als Basiswechsel in U interpretiert werden.

Oft nutzt man stillschweigend Koordinaten $U \cong \mathbb{C}^n$ und $U^* \cong \overline{\mathbb{C}^n}$, und das Skalarprodukt $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{K} : (x, y) \mapsto x^\dagger y$ zwischen beiden.

Linearformen sind in Anwendungen beliebt, von Analysis über Numerik zur Physik. Meist werden sie einfach stillschweigend genutzt, ausgiebig und erfolgreich, doch ohne besonderes Aufhebens, und das ist eigentlich auch gut so, denn sie sind ein naheliegendes und flexibles Werkzeug.

Zugleich behaupten manche, solch abstrakten Quatsch bräuchte ja wohl niemand, nutzen ihn aber zugleich fröhlich und alltäglich selbst. Nun ja.

Das scheint ein omnipräsentes Muster: Mathematische Ideen gelten als „abstrakt“ solange sie neu und ungewohnt sind. Sobald man sie eingeübt hat und sie nutzt, müsste jede:r die erste Bewertung aktualisieren von „abstrakt“ zu „konkret“, stattdessen wird „konkrete Mathematik“ zu „konkreter Anwendung“ umgedeutet und der Mathematik entrissen.

In dieser Sichtweise des Haters bleibt Mathematik also immer unnütz, denn sobald sie nützt, ist sie keine Mathematik mehr. Das ist zwar höchst unfair, aber beliebter *Hate Speech*. Das ist der feine Unterschied von „mathematischer Anwendung“ und „anwendbarer Mathematik“.

Beispiel W6B: Wirtinger Ableitungen

In der Zahlenebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ betrachten wir $x, y \in \mathbb{R}$ als reelle Variablen, hieraus bilden wir die komplexen Variablen $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$. Genauer gesagt betrachten wir die Polynomringe $\mathbb{C}[x, y] \supseteq \mathbb{C}[z, \bar{z}]$.

(0) Wir definieren die **Wirtinger–Ableitungen** nach z und $\bar{z}$ durch

$$\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \quad \text{und} \quad \partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y).$$

(1) Folgende Regeln rechnet man durch Einsetzen direkt nach:

$$\partial_z(z) = 1, \quad \partial_z(\bar{z}) = 0, \quad \partial_{\bar{z}}(z) = 0, \quad \partial_{\bar{z}}(\bar{z}) = 1.$$

(2) Die vertrauten Ableitungen ∂_x, ∂_y sind linear und erfüllen Produkt- und Kettenregel; dasselbe gilt daher auch für $\partial_z, \partial_{\bar{z}}$.

(3) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\partial_z(z^n) = nz^{n-1}$ und $\partial_{\bar{z}}(z^n) = 0$ sowie entsprechend $\partial_{\bar{z}}(\bar{z}^n) = n\bar{z}^{n-1}$ und $\partial_z(\bar{z}^n) = 0$.

Aufgabe: Rechnen Sie die hier gemachten Behauptungen nach.

Aufgabe: In der Ebene $\mathbb{R}^2$ betrachten wir um 0 einen offenen Ball $\Omega = B(0, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varepsilon\}$ mit beliebig kleinem Radius $\varepsilon > 0$. Im $\mathbb{C}$ -Vektorraum $V = \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ betrachten wir die Monomfunktion

$$f_{a,b} : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto z^a \bar{z}^b$$

mit Exponenten $a, b \in \mathbb{N}$. Linearkombination ergibt die Polynome $f(x, y) = \sum_{a,b \in \mathbb{N}} c_{a,b} z^a \bar{z}^b$ mit komplexen Koeffizienten $c \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N}^2)}$. Ist $(f_{a,b})_{(a,b) \in \mathbb{N}^2}$ linear unabhängig? Finden Sie eine duale Familie!

Lösung: Zu jedem Paar $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ haben wir die Ableitungen

$$\varphi_{k,\ell} : f \mapsto \frac{1}{k!\ell!} (\partial_z^k \partial_{\bar{z}}^\ell f)(0)$$

Für alle Indizes $(k, \ell), (a, b) \in \mathbb{N}^2$ gilt nach Konstruktion

$$\varphi_{k,\ell}(f_{a,b}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (k, \ell) = (a, b), \\ 0 & \text{falls } (k, \ell) \neq (a, b). \end{cases}$$

Daraus folgt sofort: Die Familie $(f_{a,b})_{(a,b) \in \mathbb{N}^2}$ in V ist linear unabhängig, und die duale Familie $(\varphi_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2}$ im Dualraum ist linear unabhängig.

Beispiel W6c: Laurent–Polynome und Cauchy–Wegintegral

In $\mathbb{C}$ betrachten wir $\Omega := B(0, \varepsilon) \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \varepsilon\}$ mit Radius $\varepsilon > 0$. Im $\mathbb{C}$ -Vektorraum $V = \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ liegt die Monomfunktion

$$f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^k$$

mit Exponent $k \in \mathbb{Z}$. Zum Radius $0 < r < \varepsilon$ betrachten wir den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \Omega : t \mapsto r e^{it}$ und das zugehörige Cauchy–Wegintegral

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{C} : f \mapsto \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z) dz := \frac{1}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Dies ist eine Linearform auf V . Die Auswertung von φ auf f_k ergibt

$$\varphi(f_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} r^k e^{ikt} r i e^{it} dt = \frac{r^{k+1}}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} e^{i(k+1)t} dt = \begin{cases} 1 & \text{für } k = -1, \\ 0 & \text{für } k \neq -1. \end{cases}$$

Linearkombination ergibt das Laurent–Polynom $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$ mit $c \in \mathbb{C}^{(\mathbb{Z})}$. Die Koeffizienten rekonstruieren wir dank $c_k = \varphi(f(z)/z^{k+1})$.

Der Weg $\gamma(t) = r e^{it}$ durchläuft den Kreis vom Radius r um den Punkt 0. Der Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(t) = r i e^{it}$ ist der um $\pi/2 \stackrel{\wedge}{=} 90^\circ$ nach links gedrehte Ortsvektor, also mit i multipliziert. Das Wegintegral $\oint_\gamma f(z) dz$ durchläuft $z = \gamma(t)$ für $t \in [0, 2\pi]$, daher substituieren wir $dz = \gamma'(t) dt$.

Das erklärt die Definition des Wegintegral entlang γ wie oben gezeigt:

$$\oint_\gamma f(z) dz := \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Bemerkenswerterweise ist das Integral unabhängig vom Radius r : Das Ergebnis der Auswertung ist $\varphi(f_k) = 1$ für $k = -1$ und $= 0$ sonst. Das liegt daran, dass $f(z) = z^k$ die Stammfunktion $F(z) = z^{k+1}/(k+1)$ hat, außer für $k = -1$. Die Funktion $z \mapsto 1/z$ ist überaus interessant!

😊 Dies ist der Ausgangspunkt einer sensationell schönen Theorie: Die komplexe Analysis untersucht komplex-differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{C} \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Hier ist das Cauchy–Wegintegral die Grundlage für die Darstellung durch Laurent–Reihen und Cauchys Residuensatz.

🤔 Können wir Vektoren und Kovektoren nicht einfach gleichsetzen? Leider nein. Diese scheinbare Abkürzung erweist sich rasch als Irrweg. Sei R ein Körper und $V \supsetneq \{0\}$ ein R -Vektorraum. Gemäß W1J stiftet jede Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ einen Isomorphismus $(\Psi_{\mathcal{B}}, \Psi_{\mathcal{B}}^*) : V \cong V^*$.

Übung: Zeigen Sie, dass dieser Isomorphismus von der Basis abhängt. Konstruieren Sie zwei Basen, die verschiedene Isomorphismen ergeben. In welchen Ausnahmefällen ist der Isomorphismus tatsächlich eindeutig?

L P I M „Lohnt sich die Mühe der mathematischen Präzision?“ O ja! Sorgfalt kostet anfänglich Mühe, doch solide Grundlage trägt nachhaltig.

Diese rein mathematischen Beziehungen sind vielen Lehrkräften nicht sehr vertraut [...] Konzepte wie der Dualraum eines Vektorraums sind ohnehin vielen Studierenden der Physik eher suspekt. [...] Dabei sind meist nur sehr wenige und einfache Regeln zu beachten, denen man außerdem eine anschauliche Deutung geben kann.
Thomas Filk: *Die Bra-Ket-Notation*, physikdidaktik.uni-freiburg.de

A NEW NOTATION FOR QUANTUM MECHANICS

By P. A. M. DIRAC

Received 29 April 1939

In mathematical theories the question of notation, while not of primary importance, is yet worthy of careful consideration, since a good notation can be of great value in helping the development of a theory, by making it easy to write down those quantities or combinations of quantities that are important, and difficult or impossible to write down those that are unimportant. The summation convention in tensor analysis is an example, illustrating how specially appropriate a notation can be.

📖 P.A.M. Dirac: *A new notation for quantum mechanics*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 35 (1939) 416–418.

Dieses Kapitel erklärt Definitionen, Sätze und Beweise und zugleich eine gute Notation, ebenso bequem-praktisch wie formal-präzise. Das dritte Ziel, die intuitive Anschauung und gute Erfahrung, lässt sich leider nicht so leicht *vermitteln*, sondern nur durch eigene Anwendung *aufbauen*.

Dirac bringt es auf den Punkt: Mathematische *Notation* ist der definierten *Bedeutung* eigentlich nachgeordnet. Lange Erfahrung zeigt jedoch, dass gute Notation wichtig ist für Lehre und Praxis, für Didaktik und Kalkül. Wir sehen und spüren dies überall... und ganz besonders bei Dualität.

Albert Einstein (1879–1955) führte 1916 seine **Summenkonvention** ein: Kovektor $u = (u^i)$ mal Vektor $v = (v_i)$ ergibt den Skalar $u^i v_i := \sum_i u^i v_i$. Hier zeigt die raffinierte Stellung des Index den Typ als Ko/Vektor an. *Fun fact:* Einstein erhielt 1921 den Physik-Nobelpreis, nicht für seine Relativitätstheorie (speziell 1905, allgemein 1915), sondern für seine quantenmechanische Erklärung des photoelektrischen Effekts (1905).

Paul Dirac (1902–1984) erfand hierzu 1939 seine **Bra-Ket-Notation**: Aus Bra $\langle u |$ und Ket $| v \rangle$ wird durch Auswertung der Skalar $\langle u | v \rangle$. *Fun fact:* Paul Dirac erhielt 1933 gemeinsam mit Erwin Schrödinger den Physik-Nobelpreis für seine Verbindung von Quantenmechanik mit spezieller Relativität. Seine Dirac-Gleichung sagte die Möglichkeit von Antimaterie voraus, was anschließend experimentell bestätigt wurde.

😊 Gute Notation soll bequem-kurz sein und zugleich präzise-informativ, sie soll möglichst das Richtige erleichtern und das Falsche erschweren. Diracs Notation erfüllt diese praktischen und ästhetischen Wünsche.

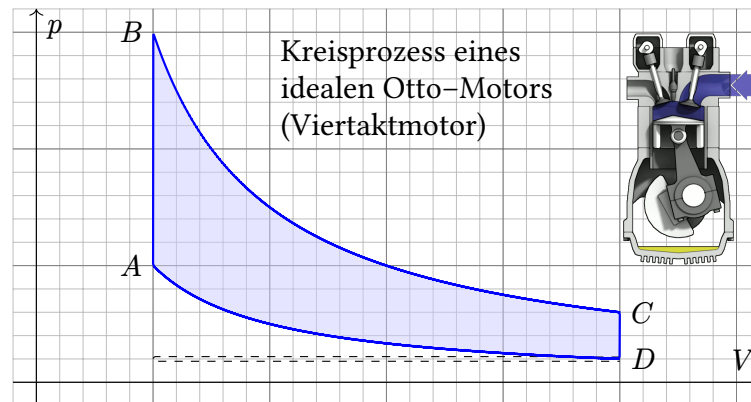
Weitergedacht gilt dies in allen Bereichen der Mathematik, in der LinA etwa wohlgeformte Formeln in der Logik, Polynome, Matrixkalkül, uvm. Syntaktische Disziplin verhindert blühenden Unsinn, sie ist ein erster Test zur Plausibilität, garantiert aber allein noch nicht die Richtigkeit.

Besonders stark spürbar entfaltet sich diese radikale Idee in modernen Programmiersprachen! Compilierte Sprachen nutzen gerne eine Art von Typisierung, die syntaktisch schon bei Compilation geprüft werden kann.

Extrem auf die Spitze treiben dies Beweisassistenten: Als Beweis einer Aussage gilt (nur) die Konstruktion eines Terms vom geforderten Typ.

In dieser Strenge erfüllt der Typenkalkül Diracs Ideal: Es ist unmöglich, etwas Falsches zu schreiben. Alles, was typkorrekt ist, ist auch richtig.

😊 Je informeller die Mathematik, desto mehr muss man selber denken.



In der Thermodynamik (etwa für ideale Gase) gibt es **Zustandsgrößen** wie den Druck p und das Volumen V : Diese beschreiben den Zustand $\gamma(t) = (p(t), V(t), \dots)$ des Systems in einem Zustandsraum $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Daneben gibt es **Prozessgrößen** wie die geleistete Arbeit $dW = p dV$. Diese hängen ab von der Zustandsänderung, also $\partial_t \gamma = (\partial_t p, \partial_t V, \dots)$. Die Auswertung ergibt $\partial_t W = dW(\partial_t \gamma) = p \partial_t V$ und $\Delta W = \int_\gamma dW$.

Der Kreisprozess eines **Otto-Motors** verläuft idealisiert wie skizziert: Verdichten: Der Kolben komprimiert Kraftstoff-Luft-Gemisch von D bis A . Arbeitstakt: Bei A wird das Gas gezündet, der Druck steigt schlagartig bis B an, dadurch dehnt sich der Kolben bis C aus und verrichtet Arbeit. Zwei weitere Takte: Ausstoß des Abgases, Ansaugen des Gemisches.

Der **Wirkungsgrad** des Motors ist die geleistete Arbeit dividiert durch die eingesetzte Verbrennungsenergie, also den Treibstoffverbrauch. Die oben skizzierte Formel liefert den zu maximierenden Wert ΔW . Solche immens praktischen Fragen der Optimierung von Maschinen waren im 19. Jahrhundert der Ausgangspunkt der Thermodynamik.

Heute ist die **Thermodynamik** eine fundamentale Wissenschaft und hat überaus wichtige technische Anwendungen: Sie dient zum Verständnis von Kraftmaschinen (wie Motoren, Turbinen, etc.) und Arbeitsmaschinen (Pumpen, Verdichter) sowie in der Klimatechnik (Heizungen, Kühlung). Daran erahnen wir bereits, dass sie einerseits fundamental wichtig ist, andererseits mathematisch-konzeptuell erstaunlich anspruchsvoll.

Den **Zustand** $\gamma(t)$ des Systems zur Zeit $t \in [t_0, t_1]$ beschreiben wir dabei durch den Druck $p(t)$, das Volumen $V(t)$ und evtl. weitere Größen. Das entspricht einem Punkt $x = \gamma(t)$ im Zustandsraum $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Eine **Zustandsfunktion** hängt vom aktuellen Zustand $\gamma(t)$ des Systems ab, nicht jedoch von der Historie, also dem durchlaufenen Weg: Zum Beispiel ist die Wärmeenergie eines idealen Gases gleich $U = fpV = f\nu RT$. Hier ist U = Wärmemenge, p = Druck, V = Volumen, ν = Stoffmenge, R = universelle Gaskonstante, T = absolute Temperatur. Der Faktor $f = 3/2$ entspricht der mikroskopischen Struktur eines einatomigen Gases wie Helium; für zweiatomige wie Wasserstoff gilt $f \approx 5/2$.

Eine **Prozessfunktion** hingegen hängt vom durchlaufenen Weg ab, wie etwa die geleistete Arbeit $\Delta W = \int_\gamma dW$ in der obigen Formel. Den Verlauf des Prozesses beschreiben wir als Weg $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow \Omega$ im Zustandsraum. Der momentane Zustand ist $x = \gamma(t)$ und die Ableitung $\dot{x} = \partial_t \gamma(t)$ ist die momentane Änderungsgeschwindigkeit. Bei einem Kreisprozess gilt $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ und dennoch $\Delta W \neq 0$!

Angeheftet in jedem Punkt $x = (p, V, \dots)$ des Zustandsraumes $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist der Tangentialraum $T_x \Omega \cong \mathbb{R}^n$ der Änderungsgeschwindigkeiten. Hierauf ist $dW = p dV: T_x \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Linearform, also $dW \in T_x^* \Omega$. Wie hier zu sehen, hängt $(dW)_x$ vom Punkt $x \in \Omega$ ab, zudem glatt. Daher sprechen wir genauer von einer **Differentialform**, siehe §Y2.

Prof. Hermann Karcher (www.math.uni-bonn.de/people/karcher) erklärte es prägnant treffend in der Notiz *Differentialformen für die Thermodynamik*:

Die Vektoranalysis lebt davon, dass wir den Raum $\mathbb{R}^3$ nicht bloß als Vektorraum, sondern als euklidischen Raum, mit einem Skalarprodukt, betrachten und nutzen können. In der Thermodynamik gibt es jedoch kein Skalarprodukt, das eine physikalische Bedeutung hätte. Deshalb können Kurvenintegrale nicht Integranden haben, die Skalarprodukt aus einem Vektorfeld mit dem Tangentialvektor der Kurve sind. Wir müssen daher lernen, die Ableitung von Funktionen und deren Anwendung auf Tangentialvektoren von Kurven ohne ein bequemes Skalarprodukt zu beschreiben. Genau hierzu dienen Differentialformen.