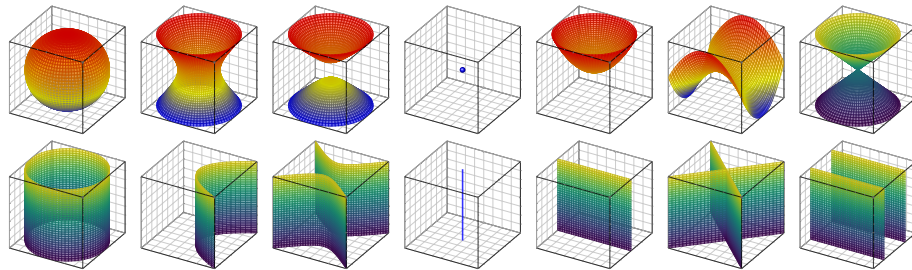


Kapitel V

Quadratische Polynome und Quadriken



*Bildung ist nicht nur das Lernen von Fakten,
sondern die Schulung des Geistes zu denken.*

Albert Einstein (1879–1955)

Inhalt dieses Kapitels V

- 1 Quadratische Formen und ihre Klassifikation
 - Der Trägheitssatz von Sylvester über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$
 - Klassifikation hermitescher Formen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$
 - Klassifikation quadratischer Formen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$
- 2 Quadratische Polynome und ihre Klassifikation
 - Affine Klassifikation reeller Quadriken
 - Euklidische Klassifikation reeller Quadriken
 - Anwendungsbeispiele und Übungsaufgaben

Von linearen zu quadratischen Gleichungen

V003
Erinnerung

Bislang haben wir sehr erfolgreich **Lineare Algebra** untersucht: lineare Räume $V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$ und lineare Abbildungen $f: V \rightarrow W: x \mapsto Ax$.

Die Lösungsmenge L jedes linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ bzw. $Ax = y$ können wir effizient berechnen mit dem Gauß-Algorithmus.

Zudem kennen wir Form und Größe von L : Dies ist ein **linearer bzw. affiner Unterraum** von V , und wir können seine Dimension bestimmen.

Strukturell gilt dasselbe für den Kern $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\}) \leq V$ und die Urbildmenge $f^{-1}(\{y\}) \subseteq V$ jeder linearen Abbildung $f: V \rightarrow W$.

Über **affin-lineare** Abbildungen hinaus können wir allgemein **Polynome** von Grad 1, 2, 3, ... betrachten und deren Nullstellenmengen untersuchen. Das ist ein riesiges Gebiet, traditionell verwurzelt und zugleich modern.

Als ein wichtiges Beispiel kennen wir die Determinante $\det: \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$. Sie ist multilinear in den Spalten bzw. Zeilen von A , insgesamt also ein homogenes Polynom von Grad n in den Koeffizienten von A . Seine Nullstellenmenge sind die nicht-invertierbaren Matrizen, es gilt $\text{GL}_n \mathbb{K} = \{A \mid \det A \neq 0\}$ und $\text{SL}_n \mathbb{K} = \{A \mid \det A = 1\}$.

Von linearen zu quadratischen Gleichungen

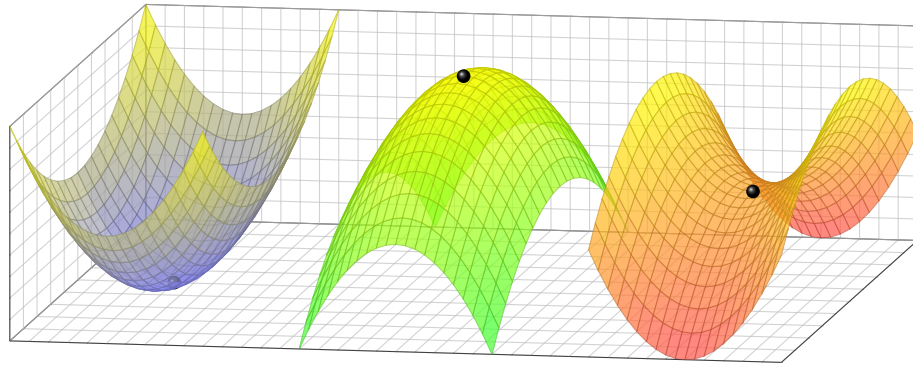
V004
Überblick

In diesem Kapitel geht es grundlegend um **quadratische Polynome**; deren Nullstellenmengen heißen **Quadriken**. Erfreulicherweise sind quadratische Polynome nahe genug am linearen Fall, und wir können die bewährten Methoden der Linearen Algebra wunderbar anwenden.

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ gelingt uns damit vollständig die **affine Klassifikation** aller Quadriken im Raum $\mathbb{K}^n$ bis auf Affinität, also Koordinatenwechsel. Wollen wir Abstände erhalten, so nutzen wir euklidische Affinitäten. Das führt uns zur zweiten und feineren **euklidischen Klassifikation**.

Die Klassifikation der reellen Quadriken ist ein Kleinod der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie. Sie ist ein weiterer würdiger Höhepunkt und mobilisiert dazu alle Techniken der vorigen Kapitel. Das klingt manchen wie ein Fluch, bitte betrachten Sie es als Segen!

Schon in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und dann im Raum $\mathbb{R}^3$ begegnet uns dabei ein Zoo von bewundernswerter Vielfalt, wie auf der obigen Titelseite skizziert und ab Seite V222 ausgeführt. Die Klassifikation schafft Überblick und wohlthuende Klarheit, dazu passt Einsteins Eingangszitat dieses Kapitels.



Erste Beispiele: $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = -x^2 - y^2$, $h(x, y) = x^2 - y^2$.

Normalform: Für $p + q + r = n$ in $\mathbb{N}$ haben wir die Modellabbildung

$$f_{p,q,r} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2.$$

Der Nullpunkt ist ein lokales Minimum gdw $q = 0$, strikt gdw $p = n$.

Der Nullpunkt ist ein lokales Maximum gdw $p = 0$, strikt gdw $q = n$.

Im Allgemeinen kommt das Problem nicht in Normalform, sondern

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{i,j} x_i a_{ij} x_j = x^T A x$$

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist vorgegeben, meist symmetrisch, $A^T = A$.

Die Modellabbildung entspricht $A = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$.

Der Matrixkalkül erweist sich hier erneut als wunderbar effizient!

Damit stellen sich uns zwei zentrale Fragen, theoretisch wie praktisch:

☹ Können wir g in eine Normalform $f_{p,q,r}$ bringen? Wie gelingt dies? Das symmetrische Gauß-Verfahren S1R diagonalisiert die Matrix A .

☹ Ist das Signaturtripel (p, q, r) wohldefiniert, eindeutig, unabhängig von der Wahl der Koordinaten? Ja, dank Sylvesters Trägheitssatz V1c.

Wir haben hier also eine typische Frage von Existenz und Eindeutigkeit, allgemein der Klassifikation: Können wir jede quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$ in geeigneten Koordinaten diagonalisieren und so eine Signatur (p, q, r) ablesen? Ist diese eindeutig, wohldefiniert, unabhängig vom Rechenweg?

😊 In den Extremfällen ist die Invarianz der Signatur offensichtlich. Zur Einstimmung ist es sicher hilfreich, sich das klar zu machen:

Aufgabe: Gilt die Signatur $(n, 0, 0)$ in einem Koordinatensystem, so auch in jedem anderen. **Lösung:** Diese Signatur ist die einzige, in der 0 ein striktes Minimum ist. Dies bleibt in jedem Koordinatensystem erhalten.

Aufgabe: Gilt die Signatur $(0, n, 0)$ in einem Koordinatensystem, so auch in jedem anderen. **Lösung:** Diese Signatur ist die einzige, in der 0 ein striktes Maximum. Dies bleibt in jedem Koordinatensystem erhalten.

Aufgabe: Gilt die Signatur $(0, 0, n)$ in einem Koordinatensystem, so auch in jedem anderen. **Lösung:** Diese Signatur ist die einzige, in der g konstant ist. Dies bleibt in jedem Koordinatensystem erhalten.

⚠ Für alle anderen Signaturen ist die Invarianz nicht so offensichtlich. Sylvesters Trägheitssatz V1c löst dieses Problem, elegant und einheitlich.

😊 Für Definitheit haben wir erfreulich effiziente Werkzeuge, siehe §T2.

Ausgehend von der quadratischen Form $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^T A x$ können wir dank Gauß-Hermite S1R eine OBasis konstruieren und positive / negative Definitheit an den Vorzeichen der Diagonaleinträge ablesen.

Wir haben das Hauptminorenkriterium T2D nach Hurwitz-Sylvester. Das bietet manchmal eine effiziente Lösung, etwa für Bandmatrizen, sobald wir die Hauptminoren gut berechnen können.

Dank Spektralsatz T1i können wir unitär diagonalisieren und an den Eigenwerte positive / negative Definitheit ablesen (T2E). Damit stehen uns alle Werkzeuge für Eigenwerte zur Verfügung.

Falls anwendbar sind Gerschgorin-Kreise T2F wunderbar effizient. Für jede strikt diagonaldominante Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ können wir so In/Definitheit direkt an ihren Diagonaleinträgen $a_{11}, \dots, a_{nn}$ ablesen. Das folgt sogar erfreulich direkt aus Gauß-Hermite, siehe Satz S1τ.

(1) Wie sieht die Lösungsmenge $L \subseteq \mathbb{K}^n$ einer linearen Gleichung aus?

$$E = \{x \in \mathbb{K}^n \mid b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + c = 0\}$$

Für $b \neq 0$ ist E ein Unterraum der Dimension $n - 1$, linear für $c = 0$, affin für $c \neq 0$. Für $b = 0$ und $c = 0$ gilt $E = \mathbb{K}^n$, für $b = 0$ und $c \neq 0$ gilt $E = \emptyset$.

(2) Wie sieht die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung aus?

$$\text{Quadrik } Q = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j + \sum_i b_i x_i + c = 0\}$$

Allgemein, zu gegebenen Polynomen $P_1, \dots, P_\ell \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ suchen wir die Nullstellenmenge $V = \{x \in \mathbb{K}^n \mid P_1(x) = \dots = P_\ell(x) = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n$. Der lineare Fall $\deg P_i \leq 1$ ist leicht, dank Gauß! Der quadratische Fall $\deg P_1 = 2$ und $\ell = 1$ gelingt uns in diesem Kapitel noch recht leicht. Mit $\deg P_i \geq 3$ beginnt die Wunderwelt der algebraischen Geometrie!

Mitternachtsformel (B109) für $n = 1$: Zu $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gilt

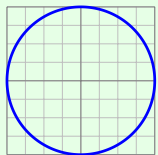
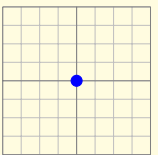
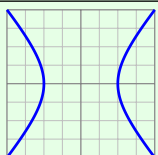
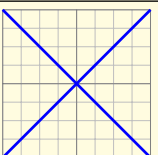
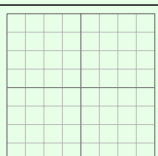
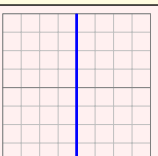
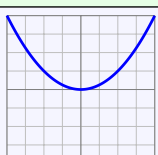
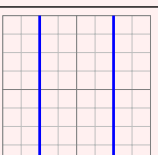
$$\underbrace{\{x \in \mathbb{R} \mid \overbrace{ax^2 + bx + c = 0}^{\text{quadratische Gleichung}}\}}_{\text{Lösungsmenge}} = \begin{cases} \left\{ \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} & \text{falls } b^2 - 4ac \geq 0, \\ \emptyset & \text{falls } b^2 - 4ac < 0. \end{cases}$$

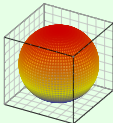
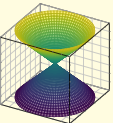
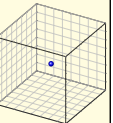
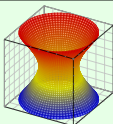
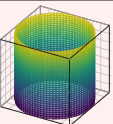
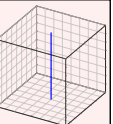
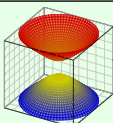
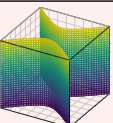
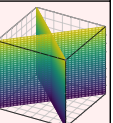
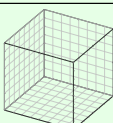
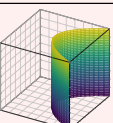
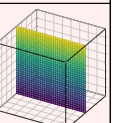
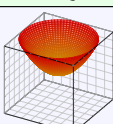
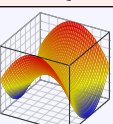
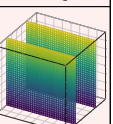
Quadriken sind ein schönes Thema. Wie immer braucht es Übung.

Nach einer wahren Begebenheit, vor der Mensa und kurz vor der Klausur. „Herr Professor, was sind Quadriken?“ fragte ein aufgeschreckter Student. Kurz vor der Klausur war die Frage kaum noch sinnvoll zu beantworten. Nimmt man sich jedoch die nötige Zeit, so ist es nicht besonders schwer. Ich würde eine erste motivierende Beschreibung so einleiten:

„Wissen Sie, was ein quadratisches Polynom ist?“ – „Ja, klar!“ – „Können Sie sich das in mehreren Variablen vorstellen?“ – „Hm, ja, doch, schon.“ – „Wie sieht die Nullstellenmenge aus?“ – „Tja, auf den ersten Blick ist das schwer zu sagen. Vermutlich gibt es da unendlich viele Möglichkeiten.“ – „Genau das sind die Quadriken! Und die Klassifikation löst Ihr Problem.“

Die folgenden beiden Folien zeigen das Ergebnis im Überblick / Ausblick. Polynome zweiten Grades sind zwar *nicht linear*, doch gerade noch durch Matrizen darstellbar. Das ist ein genial-einfacher Trick. Die Werkzeuge der Linearen Algebra greifen hier noch und verhelfen uns zur Lösung. Davon handelt das Kapitel: quadratische Polynome als *bilineare Algebra*.

Ellipse $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	Punkt $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 0$ 
Hyperbel $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	schneidendes Geradenpaar $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0$ 
leere Menge $-\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	Gerade $\frac{x^2}{\alpha^2} = 0$ 
Parabel $\frac{x^2}{\alpha^2} = 2y$ 	paralleles Geradenpaar $\frac{x^2}{\alpha^2} = 1$ 

Ellipsoid $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ 	elliptischer Doppelkegel $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$ 	Punkt $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$ 
einschaliges Hyperboloid $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ 	elliptischer Zylinder $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	Gerade $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 0$ 
zweischaliges Hyperboloid $-\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ 	hyperbolischer Zylinder $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	schneidendes Ebenenpaar $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0$ 
leere Menge $-\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ 	parabolischer Zylinder $\frac{x^2}{\alpha^2} = 2y$ 	Ebene $\frac{x^2}{\alpha^2} = 0$ 
elliptisches Paraboloid $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 2z$ 	hyperbolisches Paraboloid $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 2z$ 	paralleles Ebenenpaar $\frac{x^2}{\alpha^2} = 1$ 

Wie für Skalarprodukte (gemäß S10) vereinbaren wir nun allgemein:

Definition V1A: orthopseudonormale Familie → orthonormal S10

Sei (V, β) ein hermitescher Raum über $(\mathbb{K}, \text{conj}_{\mathbb{K}})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, und zu $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ sei $q(v) = \beta(v, v)$ die quadratische Form.

(1) Ein Vektor $u \in V$ heißt **pseudonormiert**, falls $q(u) \in \{\pm 1, 0\}$ gilt. Gilt $q(v) \neq 0$, so können wir v **pseudonormieren** zu $u = v / \sqrt{|q(v)|}$.

(2) Eine Familie $(u_i)_{i \in I}$ in V heißt **orthogonal**, falls $\beta(u_i, u_j) = 0$ für alle $i \neq j$ in I gilt, und **orthopseudonormal**, falls zudem pseudonormiert:

$$\beta(u_i, u_j) \begin{cases} = 0 & \text{falls } i \neq j: \text{ paarweise orthogonal,} \\ \in \{\pm 1, 0\} & \text{falls } i = j: \text{ individuell pseudonormiert.} \end{cases}$$

In Worten: Die Gram-Matrix ist diagonal mit $\pm 1, 0$ auf der Diagonalen.

(3) Ist die Familie $(u_i)_{i \in I}$ zudem eine Basis von $U \leq V$, so nennen wir dies eine **Orthogonalbasis** bzw. eine **Orthopseudonormalbasis** von U .

Erinnerung (S2A): Für jedes Skalarprodukt fordern wir zudem positive Definitheit. In jedem unitären Raum $(V, \langle - | - \rangle)$ gilt für jeden Vektor $v \neq 0$ daher $\langle v | v \rangle > 0$, und daher können wir v normieren zu $u = v / \sqrt{\langle v | v \rangle}$. Das ist ungemein praktisch, insbesondere für Orthonormalbasen S10:

$$\beta(u_i, u_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j: \text{ paarweise orthogonal,} \\ 1 & \text{falls } i = j: \text{ individuell normiert.} \end{cases}$$

Im allgemeinen Fall haben wir nur eine hermitesche Form $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$. Wir wissen zwar $q(v) := \beta(v, v) \in \mathbb{R}$, doch fehlt uns positive Definitheit. Daher können wir nur auf eine der drei „Längen“ $\pm 1, 0$ normieren. Um keine Verwechslung zu riskieren, sage ich **pseudonormiert**.

Bemerkung: Diagonalisierung dank Gauß-Hermite S1R gelingt über jedem *DRing $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$. Skalierung von v_i zu $u_i = v_i a_i$ ergibt $\beta(u_i, u_i) = a_i^\sigma \beta(v_i, v_i) a_i$. Um hier weiter zu kommen, sollte der Fixkörper $\mathbb{K}^\sigma = \text{fix}(\mathbb{K}, \sigma)$ zentral in $\mathbb{K}$ sein. Wir normieren dann bezüglich der Normgruppe $N(\mathbb{K}, \sigma) := \{a^\sigma a \mid a \in \mathbb{K}^\times\}$, siehe Diskriminante S1N.

Satz V1B: Orthopseudonormalisierung → Gauß-Hermite S1R

Sei $(\mathbb{K}, \sigma)$ ein Divisionsring $\mathbb{K}$ mit Involution σ und $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$.

(0) Sei (V, β) ein hermitescher Raum über $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit $\dim_{\mathbb{K}} V = n \in \mathbb{N}$. Dann existiert zu (V, β) eine Orthogonalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$.

(1) Über $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$ können wir unsere OBasis $\mathcal{B}$ zudem pseudonormieren und sortieren zu

$$(\beta(v_i, v_j))_{ij} = \begin{bmatrix} 1_{p \times p} & 0_{p \times q} & 0_{p \times r} \\ 0_{q \times p} & -1_{q \times q} & 0_{q \times r} \\ 0_{r \times p} & 0_{r \times q} & 0_{r \times r} \end{bmatrix}$$

Wir nennen $\text{Sign}(\mathcal{B}) := (p, q, r) \in \mathbb{N}^3$ die **Signatur** der Basis $\mathcal{B}$ in (V, β) .

Die Signatur (p, q, r) heißt auch **Signaturtripel** oder **(Trägheits)Index mit Positivrang p und Negativrang q und Nullität $\text{null}(\beta) := r = \dim \text{Ker } \beta$** .

🔗 Wie ändert sich die Signatur (p, q, r) mit der Wahl der Basis $\mathcal{B}$? Es gibt viele Basen! Welche Signaturtripel haben sie? Alle dasselbe!

Manche bezeichnen die Differenz $\text{sign}(\mathcal{B}) = p - q \in \mathbb{Z}$ als **Signatur**, das ist in manchen Kontexten eine sinnvolle, passendere Definition. Zwecks Betonung nennen wir dann $\text{Sign}(\mathcal{B}) = (p, q, r)$ **Signaturtripel**, es enthält alle für uns relevanten Informationen wie $n = p + q + r$.

Bislang ist (p, q, r) eine Eigenschaft der Basis $\mathcal{B}$, nicht der Form β ! Es gibt verschiedene Orthogonalbasen zu (V, β) , im Allgemeinen unendlich viele, und zu ihrer Herstellung noch mehr Rechenwege. Der Trägheitssatz garantiert, dass die Signatur immer dieselbe ist.

Erst dadurch können wir die Signatur der Form β definieren durch

$$\text{Sign}(\beta) := \text{Sign}(\mathcal{B}).$$

Diese raffinierte Definition / Konstruktion der *Signatur* erinnert uns an die ebenso raffinierte *Dimension*, siehe M201ff: Zur Dimension benötigen wir die Existenz einer Basis (M2K) und Invarianz der Basislänge (M2G). Genauso ist verhält es sich hier: Zur Signatur benötigen wir die Existenz einer OBasis (V1B) und Invarianz der Signatur dank Trägheitssatz (V1C).

Satz V1c: Sylvesters Trägheitssatz für Orthogonalbasen

Sei (V, β) ein hermitescher Raum über $(\mathbb{K}, \text{conj}_{\mathbb{K}})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

(1) Sind $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_n)$ Orthogonalbasen, dann sind ihre Signaturen $\text{Sign}(\mathcal{B}) = (p, q, r)$ und $\text{Sign}(\mathcal{B}') = (p', q', r')$ gleich.

Damit definieren wir die **Signatur** der hermiteschen Form β durch

$$\text{Sign}(\beta) := \text{Sign}(\mathcal{B}).$$

Sie ist wohldefiniert, da unabhängig von der gewählten Orthogonalbasis.

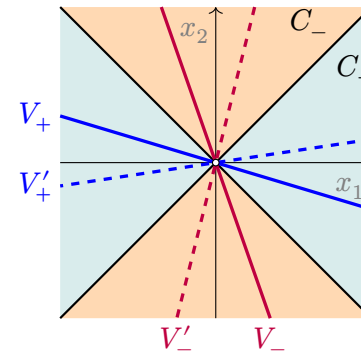
Beweis: (1) Es gilt $r = r' = \dim \text{Ker } \beta$. Wir zeigen $p = p'$ und $q = q'$. Wir pseudonormieren und sortieren die Basen wie in Satz V1B.

Auf $V'_+ = \langle v'_1, \dots, v'_{p'} \rangle_{\mathbb{K}}$ gilt $\beta \succ 0$. Warum? Dank Pythagoras, Satz S3A!

Auf $U = \langle v_{p+1}, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{K}}$ gilt $\beta \preceq 0$. Warum? Dank Pythagoras, Satz S3A!

Es folgt $V'_+ \cap U = \{0\}$: Für $v \in (V'_+ \cap U) \setminus \{0\}$ wäre $\beta(v, v) > 0 \geq \beta(v, v)$.

Aus $V'_+ \oplus U \leq V = V_+ \oplus U$ folgt $p' \leq p$. Mit vertauschten Rollen folgt $p \leq p'$, also $p = p'$. Für $-\beta$ folgt $q = q'$. Also $(p, q, r) = (p', q', r')$. QED



$$C_+ := \{x \in V \mid q(x) > 0\} \\ = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| > |x_2|\}$$

$$C_0 := \{x \in V \mid q(x) = 0\} \\ = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| = |x_2|\}$$

$$C_- := \{x \in V \mid q(x) < 0\} \\ = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| < |x_2|\}$$

Geometrische Anschauung im Beispiel: Auf $V = \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ haben wir $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K} : (x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ und $q(x) = \beta(x, x) = x_1^2 - x_2^2$. Dies zerlegt V in drei Kegel C_+, C_0, C_- . Die Räume V_+, V'_+ liegen im Kegel C_+ , die Räume V_-, V'_- liegen im Kegel C_- . Das lässt noch viel Spielraum! Die obige Skizze illustriert dies im einfachsten Beispiel (V, β) .

😊 Unsere Rechnung zeigt jedoch: Ihre Dimensionen sind eindeutig! Das ist Sylvesters Trägheitssatz und die Definition der Signatur!

😊 Wir haben Sylvesters Trägheitssatz zunächst in endlicher Dimension formuliert und bewiesen. Wir führen die Beweisidee nun allgemein aus.

Satz V1c: Sylvesters Trägheitssatz, basisfrei

(2) Gegeben seien Summenzerlegungen $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0 = V'_+ \oplus V'_- \oplus V_0$ mit $\beta \succ 0$ auf V_+ und V'_+ sowie $\beta \preceq 0$ auf V_- und V'_- , zudem $V_0 = \text{Ker } \beta$. Dann gilt $\dim V_+ = \dim V'_+$ und $\dim V_- = \dim V'_-$.

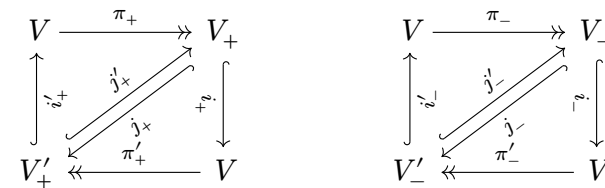
Beweis: (2) Auf $U := V_0 \oplus V_-$ gilt $\beta \preceq 0$, denn für $u \in V_0$ und $v \in V_-$ gilt $\beta(u + v, u + v) = \beta(u, u) + \beta(u, v) + \beta(v, u) + \beta(v, v) \leq 0$. Daraus folgt $V'_+ \cap U = \{0\}$, denn für $v \in (V'_+ \cap U) \setminus \{0\}$ wäre $\beta(v, v) > 0 \geq \beta(v, v)$.

Sei $j'_+ : V'_+ \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V_+$ die Inklusion $i'_+ : V'_+ \hookrightarrow V$ gefolgt von der Projektion $\pi_+ : V \twoheadrightarrow V_+$. Dank $\text{Ker } \pi_+ = U$ ist j'_+ injektiv.

Aus $j'_+ : V'_+ \hookrightarrow V_+$ folgt die Ungleichung $\dim V'_+ \leq \dim V_+$.

Mit vertauschten Rollen folgt $\dim V_+ \leq \dim V'_+$.

Angewendet auf $-\beta$ folgt $\dim V_- = \dim V'_-$. QED



Die entscheidende Aussage ist die Injektivität von $j'_+ : V'_+ \rightarrow V_+$. Unsere Rechnung zeigt, dass das Bild $\text{Im}(i'_+) = V'_+$ den Kern $\text{Ker}(\pi_+) = U$ trivial schneidet. Für $0 \neq v \in V'_+$ haben wir $\pi_+(v) \neq 0$.

Wesentlich nutzen wir dann: Aus $V'_+ \hookrightarrow V_+$ folgt $\dim V'_+ \leq \dim V_+$. In endlicher Dimension (1) gelingt dies durch Basisergänzung M2K, in beliebiger Dimension (2) durch Steinitz' Austauschsatz M2M.

Übung: Gehen Sie die Argumente sorgsam durch und zeigen Sie:

Korollar V1d: Sylvesters Trägheitssatz, allgemein

Satz V1c und Beweis gelten über jedem involutiven DRing $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit geordnetem Fixkörper $(\text{fix}(\mathbb{K}, \sigma), \leq)$, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{Q}[i], \mathbb{Q}[i, j, k]$.

Satz V1E: Klassifikation hermitescher Formen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Wir arbeiten weiterhin über $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$.

(1) Sei (V, β) ein hermitescher Raum mit Dimension $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n \in \mathbb{N}$.

(a) Dann existiert eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}$, jede mit $\text{Sign}(\mathcal{B}) = \text{Sign}(\beta)$.

(b) Eine Isometrie $(V, \beta) \cong (V', \beta')$ existiert gdw $\text{Sign}(\beta) = \text{Sign}(\beta')$.

(2) Jede hermitesche Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ erlaubt Basiswechsel $S \in \text{GL}_n \mathbb{K}$

(a) zu einer Diagonalmatrix $S^\dagger A S = B$, jede mit $\text{Sign}(B) = \text{Sign}(A)$.

(b) Eine Kongruenz $A \simeq A'$ existiert gdw $\text{Sign}(A) = \text{Sign}(A')$.

Beweis: (1a) Dank Satz V1B existiert eine OBasis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V , pseudonormiert und sortiert. Dank Sylvesters Trägheitssatz V1c hat jede andere OBasis $\mathcal{B}'$ dieselbe Signatur, also $\text{Sign}(\mathcal{B}') = \text{Sign}(\mathcal{B}) =: \text{Sign}(\beta)$.

(1b) Aus einer Isometrie $(\varphi, \psi) : (V, \beta) \cong (V', \beta')$ folgt nach Basiswahl $\text{Sign}(\beta) = \text{Sign}(\beta')$. Umgekehrt, Gleichheit $\text{Sign}(\beta) = \text{Sign}(\beta')$ garantiert OBasen $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_n)$ wie in (1a), und damit die Isometrie $(\varphi, \psi) : (V, \beta) \cong (V', \beta') : v_i \mapsto v'_i$ dank PLF N1B, S1E. QED

Übung: Sylvesters Trägheitssatz gilt über jedem *DRing $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit geordnetem Fixkörper $(\mathbb{K}^\sigma = \text{fix}(\mathbb{K}, \sigma), \leq)$, etwa $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{Q}[i], \mathbb{Q}[i, j, k]$.

Für die Klassifikation V1E benötigen wir zusätzlich, dass jedes positive Element ein Quadrat ist: Zu jedem $a \in \mathbb{K}_{\geq 0}^\sigma$ existiert eine Wurzel $w \in \mathbb{K}_{\geq 0}^\sigma$ mit $w^2 = a$. Wir nennen $\mathbb{K}^\sigma$ dann einen **euklidisch geordneten Körper**.

😊 Die Ordnung auf $(\mathbb{K}^\sigma, +, \cdot, \leq)$ kann dann allein aus der Körperstruktur rekonstruiert werden, denn in $\mathbb{K}^\sigma$ gilt $a \leq b$ gdw $\exists c \in \mathbb{K}^\sigma$ mit $a + c^2 = b$.

Übung: Zeigen Sie damit abschließend folgende Verallgemeinerung:

Korollar V1F: Klassifikation hermitescher Formen

Die hermitesche Klassifikation V1E gilt über jedem involutiven DRing $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit **euklidisch geordnetem, zentralen** Fixkörper $\mathbb{K}^\sigma = \text{fix}(\mathbb{K}, \sigma)$.

Beispiele: Der geordnete Körper $\mathbb{R}$ ist euklidisch, $\mathbb{Q}$ dagegen nicht. Den kleinsten euklidisch geordneten Körper $\mathbb{Q} < K < \mathbb{R}$ erhalten wir durch wiederholte Adjunktion aller Wurzeln positiver Elemente.

Aufgabe: Wie viele (reguläre) hermitesche Formen β gibt es auf $\mathbb{K}^n$?

Wie viele (reguläre) hermitesche Matrizen $A = A^\dagger \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt es?

Wir zählen Isomorphieklassen bzw. $\text{GL}_n \mathbb{K}$ -Kongruenzklassen.

Lösung: (1) Reguläre Signaturen sind $(n, 0, 0), (n-1, 1, 0), \dots, (0, n, 0)$.

Das sind genau $n+1$ Äquivalenzklassen. (2) Für jeden Rang $r = 0, \dots, n$ haben wir $r+1$ Äquivalenzklassen, insgesamt also $\sum_{r=0}^n (r+1) = \binom{n+2}{2}$.

Beispiel: Wie viele symmetrische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gibt es bis auf $\text{GL}_3 \mathbb{R}$ -Kongruenz? Es gibt genau $\binom{5}{2} = 10$ Äquivalenzklassen!

$$\begin{aligned} &[+, +, +], \quad [+, +, -], \quad [+, -, -], \quad [-, -, -], \\ &\quad \quad \quad [+, +, 0], \quad [+, -, 0], \quad [-, -, 0], \\ &\quad \quad \quad [+, 0, 0], \quad [-, 0, 0], \\ &\quad \quad \quad [0, 0, 0]. \end{aligned}$$

Hier steht $[+, +, +]$ für die Klasse aller symmetrischen positiv definiten Matrizen (SPD). Diese entsprechen Skalarprodukten $\langle x | y \rangle = x^\top A y$. Die Klasse $[0, 0, 0]$ enthält nur ein Element: die Nullmatrix $0_{3 \times 3}$.

Beispiel: Die spezielle Relativitätstheorie nutzt die „Raumzeit“ $\mathbb{R}^4$ mit Pseudoskalarprodukt $\langle x | y \rangle = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$ der Signatur $(+, -, -, -)$, als typische Konvention in der Quantenphysik, alternativ $(-, +, +, +)$, als typische Konvention in der allgemeinen Relativität.

😊 Signatur ist eine vollständige Invariante für $\text{GL}_n \mathbb{K}$ -Kongruenz über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$ dank unserer hermiteschen Klassifikation V1E.

😊 Noch feiner klassifiziert $\text{GU}_n \mathbb{K}$ -Kongruenz / unitäre Ähnlichkeit. Invarianten sind hier die (reellen!) Eigenwerte $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ in $\mathbb{R}$, also nicht bloß ihre Vorzeichen, sondern auch ihre Beträge! Das führen wir fort in der euklidischen Klassifikation V2E. quadratischer Polynome.

Übung: Wiederholen Sie den Spektralsatz T1i zu selbstadjungierten Endomorphismen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ mit $\sigma = \text{conj}_{\mathbb{K}}$ und folgern Sie:

♦ **Satz T2c:** Klassifikation zur $\text{GU}_n \mathbb{K}$ -Ähnlichkeit über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hermitesch. Genau dann sind A und B unitär ähnlich, also $B = S^\dagger A S$ mit $S \in \text{GU}_n(\mathbb{K})$, wenn $\chi_A = \chi_B$ in $\mathbb{R}[X]^1$.

Beispiel:

$$q(X, Y) = aX^2 + 2bXY + cY^2 = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

Definition V1c: quadratische Form als Polynom → QForm S1L

Eine **quadratische Form** (kurz **QForm**) über dem kommutativen Ring $\mathbb{K}$ in den Variablen $X_1, \dots, X_n$ ist ein homogenes Polynom vom Grad 2:

$$q(X) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} X_i X_j \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{K}$ für alle $1 \leq i \leq j \leq n$ und $a_{ij} = 0$ für $1 \leq j < i \leq n$.

Wir setzen fortan $2 \in \mathbb{K}^\times$ voraus und definieren $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ als die zu q gehörige **symmetrische Koeffizientenmatrix**. Damit gilt

$$q(X) = X^T A X = X^T B X.$$

Die zu q gehörige **symmetrische Bilinearform** ist demnach

$$\beta : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K} : (u, v) \mapsto u^T B v.$$

😊 Die hier gezeigte Symmetrisierung von A zu $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ ist die Matrixversion der Polarisierung $\beta(u, v) := \bar{q}(u + v) - \bar{q}(u) - \bar{q}(v)$ von der quadratischen Form $\bar{q} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ zur Bilinearform $\beta : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ (S1L).

⚠ Das quadratische Polynom $q \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ wird stillschweigend identifiziert mit der quadratischen Polynomfunktion $\bar{q} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$.

Erinnerung: Jedes Polynom $p \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ definiert seine zugehörige Polynomfunktion $\bar{p} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K} : x \mapsto p(x)$. Das sind verschiedene Dinge! Über jedem unendlichen Körper $\mathbb{K}$ ist diese Zuordnung $p \mapsto \bar{p}$ injektiv, aber nicht surjektiv: Nicht jede Funktion ist eine Polynomfunktion! Über jedem endlichen Körper $\mathbb{K}$ ist $p \mapsto \bar{p}$ surjektiv, aber nicht injektiv: Es gibt Polynome $p \neq 0$ mit $\bar{p} = 0$, über $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ etwa $p = X^2 + X$.

Aufgabe: Für quadratische Formen tritt das Problem nicht auf. Warum?

Lösung: Wir arbeiten mit Polynomen vom Grad 2 in Charakteristik $\neq 2$. Das Polynom $q = X^T B X$ definiert die Funktion $\bar{q}$, diese die Bilinearform β , und diese die Gram-Matrix B . Keine Information geht verloren!

♦ Satz S1R: Diagonalisierung einer quadratischen Form

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ und $q(X) = X^T A X$ mit $A = A^T$. Dann existiert eine Variablensubstitution $U = T X$ mit $T \in \text{GL}_n \mathbb{K}$ und

$$q(X_1, \dots, X_n) = b_1 U_1^2 + \dots + b_n U_n^2$$

Beispiele: Für $n = 2$ kennen Sie dies als „quadratisches Ergänzen“:

$$q(X, Y) := aX^2 + 2bXY + cY^2 \stackrel{a \neq 0}{=} a\left(X + \frac{b}{a}Y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)Y^2$$

Dies ist diagonal in den Variablen $U = X + \frac{b}{a}Y$ und $V = Y$. Ebenso:

$$q(X, Y) := XY = \left(\frac{X+Y}{2}\right)^2 - \left(\frac{X-Y}{2}\right)^2$$

😊 Zu $q(X) = X^T A X$ organisiert die Matrix A effizient die Koeffizienten.

Übung: Beweisen Sie dies zur Wiederholung. Über jedem *DRing $(\mathbb{K}, \sigma)$ konstruiert Gauß-Hermite S1R einen Basiswechsel $S = T^{-1} \in \text{GL}_n \mathbb{K}$ von A zu $B = S^T A S = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$. Nun ist $\sigma = \text{id}_{\mathbb{K}}$ und $\mathbb{K}$ ein Körper.

😊 Gauß-Hermite S1R gelingt erfreulich einfach und universell, über jedem Körper $\mathbb{K}$ mit $2 \in \mathbb{K}^\times$, sogar über jedem *DRing $(\mathbb{K}, \sigma)$ mit $2 \in \mathbb{K}^\times$.

😊 Können wir die Konstanten $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ noch weiter vereinfachen? Ja, sicher: Für $U_i = \mu_i V_i$ erhalten wir $q(X) = \sum_i b_i U_i^2 = \sum_i b_i \mu_i^2 V_i^2$.

Somit genügt ein Vertretersystem $R \subseteq \mathbb{K}$ modulo $\mathbb{K}^{\times 2} = \{\mu^2 \mid \mu \in \mathbb{K}^\times\}$. Wir können diagonalisieren $q(X) = \sum_i b_i U_i^2$ mit $b_1, \dots, b_n \in R \subseteq \mathbb{K}$.

Beispiel: Für $\mathbb{R}$ wählen wir $R = \{-1, 0, 1\}$. Für $\mathbb{C}$ wählen wir $R = \{0, 1\}$. Daraus erhalten wir die folgenden vollständigen Klassifikationssätze.

⚠ Die Voraussetzung $2 \in \mathbb{K}^\times$ wird überall dringend benötigt!

Aufgabe: (1) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und hierüber $q : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K} : x \mapsto x_1 x_2$. Ist q eine quadratische Form? Über welchen Körpern $\mathbb{K}$ existiert eine symmetrische Bilinearform $\beta : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$ mit $q(x) = \beta(x, x)$?

(2) Zeigen Sie, dass über $\mathbb{F}_2$ die Bilinearform zur Gram-Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ keine Orthogonalbasis besitzt. Warum versagt hier Gauß-Hermite S1R? Über welchen CRingen $\mathbb{K}$ ist A kongruent zu einer Diagonalmatrix?

Satz V1H: Klassifikation symmetrischer Bilinearformen über $\mathbb{R}$

(1) Zu jeder symmetrischen Bilinearform $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$ von endlicher Dimension n existiert eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V mit

$$(\beta(v_i, v_j))_{ij} = \begin{bmatrix} 1_{r_+ \times r_+} & 0_{r_+ \times r_-} & 0_{r_+ \times r_0} \\ 0_{r_- \times r_+} & -1_{r_- \times r_-} & 0_{r_- \times r_0} \\ 0_{r_0 \times r_+} & 0_{r_0 \times r_-} & 0_{r_0 \times r_0} \end{bmatrix}$$

(2) Jede symmetrische Matrix $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ -kongruent zu einer solchen Modellmatrix: Es existiert $S \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, sodass

$$A \simeq B = S^T A S = \text{diag}(+1, \dots, +1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0).$$

Die quadratische Form wird mit $X = SY$ diagonalisiert zu

$$q(X) = X^T A X = Y^T B Y = Y_1^2 + \dots + Y_{r_+}^2 - Y_{r_++1}^2 - \dots - Y_{r_++r_-}^2$$

(3) Genau dann sind zwei symmetrische Bilinearformen β, β' über $\mathbb{R}$ isometrisch, bzw. zwei symmetrische Matrizen A, A' über $\mathbb{R}$ kongruent, wenn Sie dasselbe Signaturtripler haben, $(r_+, r_-, r_0) = (r'_+, r'_-, r'_0)$.

Aufgabe: Beweisen Sie dies mit unseren zuvor erarbeiteten Werkzeugen.

Beweis: Das ist Klassifikation V1E hermitescher Formen über $(\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}})$, hier detailliert ausformuliert. Dank trivialer Involution $\sigma = \text{id}_{\mathbb{R}}$ gilt dies für jede *symmetrische* Bilinearform β und jede *symmetrische* Matrix A sowie jede *quadratische Form* q im Sinne obiger Definition V1G. QED

Übung: Die Klassifikation gilt ebenso über jedem geordneten Körper $(\mathbb{K}, \leq)$, in dem jedes positive Element $a > 0$ ein Quadrat ist, siehe V1F.

😊 Die Klassifikation V1E gilt ebenso über $(\mathbb{C}, \text{conj}_{\mathbb{C}})$ mit Konjugation für jede *hermitesche* Bilinearform β und jede *hermitesche* Matrix A und die zugehörige (konjugiert!) quadratische Form $q(X) = \overline{X}^T A X$.

⚠️ Diese quadratische Form $q(X) = \overline{X}^T A X$ entspricht dann jedoch *nicht* der obigen Definition V1G eines Polynoms von Grad 2 in den Variablen $X_1, \dots, X_n$. Wir betrachten daher dezidiert $(\mathbb{C}, \text{id}_{\mathbb{C}})$ im folgenden Satz, also den Körper $\mathbb{C}$ mit $\sigma = \text{id}_{\mathbb{C}}$ statt der üblichen Konjugation $\text{conj}_{\mathbb{C}}$.

⚠️ Hier spielt $\mathbb{C}$ eine Doppelrolle, $(\mathbb{C}, \text{conj}_{\mathbb{C}})$ vs $(\mathbb{C}, \text{id}_{\mathbb{C}})$.

Satz V1I: Klassifikation symmetrischer Bilinearformen über $(\mathbb{C}, \text{id}_{\mathbb{C}})$

(1) Zu jeder symmetrischen Bilinearform $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ über $(\mathbb{C}, \text{id}_{\mathbb{C}})$ von endlicher Dimension n existiert eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V mit

$$(\beta(v_i, v_j))_{ij} = \begin{bmatrix} 1_{r \times r} & 0_{r \times d} \\ 0_{d \times r} & 0_{d \times d} \end{bmatrix}$$

(2) Jede symmetrische Matrix $A = A^T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist kongruent über $(\mathbb{C}, \text{id}_{\mathbb{C}})$ zu einer solchen Modellmatrix: Es existiert $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, sodass

$$A \simeq B = S^T A S = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0).$$

Die quadratische Form wird mit $X = SY$ diagonalisiert zu

$$q(X) = X^T A X = Y^T B Y = Y_1^2 + \dots + Y_r^2$$

(3) Genau dann sind zwei symmetrische Bilinearformen β, β' über $(\mathbb{C}, \text{id}_{\mathbb{C}})$ isometrisch, bzw. zwei symmetrische Matrizen A, A' über $(\mathbb{C}, \text{id}_{\mathbb{C}})$ kongruent, wenn Sie dieselbe Dimension n und denselben Rang r haben.

Aufgabe: Beweisen Sie dies mit unseren zuvor erarbeiteten Werkzeugen.

⚠️ Über $(\mathbb{C}, \text{conj}_{\mathbb{C}})$ mit komplexer Konjugation haben wir wie zuvor die *hermitesche* Klassifikation V1E. Wir arbeiten hier jedoch über $(\mathbb{C}, \text{id}_{\mathbb{C}})$.

😊 Die Klassifikation V1I gilt wörtlich genau so über jedem Körper $(\mathbb{K}, \text{id}_{\mathbb{K}})$, in dem jedes Element ein Quadrat ist. Dies gilt insbesondere über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper, etwa $(\mathbb{C}, \text{id}_{\mathbb{C}})$.

Beweis: (1) Dank V1B existiert zu β eine OBasis $(u_1, \dots, u_n)$ von V mit $\beta(u_i, u_j) \in \mathbb{K}^\times$ für $i = j \in \{1, \dots, r\}$, sonst $\beta(u_i, u_j) = 0$. Für $i = 1, \dots, r$ wählen wir eine der beiden Quadratwurzeln $a_i \in \mathbb{K}$ mit $a_i^2 = \beta(u_i, u_i)$ und setzen $v_i := u_i/a_i$. Damit gilt $\beta(v_i, v_i) = 1$. Sonst $v_i := u_i$ für $i > r$.

(2) Dies ist die äquivalente Matrixformulierung der Aussage (1).

(3) „ $\Rightarrow$ “: Die Dimension und der Rang sind Invarianten unter Isometrie symmetrischer Bilinearformen bzw. Kongruenz symmetrischer Matrizen.

„ $\Leftarrow$ “: Haben β, β' selbe Dimension und Rang, so finden wir OBasen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ wie in (1) und damit die Isometrie $(\varphi, \psi) : (V, \beta) \cong (V', \beta') : v_i \mapsto v'_i$, wie immer dank linearer Fortsetzung N1B und S1E. QED

Sei $\mathbb{K}$ ein kommutativer Ring, etwa ein Körper, zum Beispiel $\mathbb{R}$.
Eine **quadratische Form** ist ein homogenes Polynom vom Grad 2:

$$q(X_1, \dots, X_n) = \underbrace{\sum_{i=1}^n a_{ii} X_i^2}_{\text{quadratische Terme}} + \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq n} \tilde{a}_{ij} X_i X_j}_{\text{gemischte Terme}} \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$$

(1) Matrixschreibweise: $q(X) = X^T A X$ mit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $A^T = A$.
Hierzu benötigen wir $2 \in \mathbb{K}^\times$ und setzen $a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2} \tilde{a}_{ij}$ für $i < j$.

(2) Wir diagonalisieren $A \simeq S^T A S = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$. Für $X = SY$ gilt:

$$q(X) = b_1 Y_1^2 + \dots + b_n Y_n^2$$

Das symmetrische Gauß-Verfahren S1R benötigt dazu einen Körper $\mathbb{K}$.

(3) Speziell über $\mathbb{R}$ können wir pseudonormieren und sortieren (V1H)
zu $A \simeq T^T A T = \text{diag}(+1, \dots, +1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$. Für $X = TZ$ gilt:

$$q(X) = +Z_1^2 + \dots + Z_{r_+}^2 - Z_{r_++1}^2 - \dots - Z_{r_++r_-}^2$$

Das ist die pseudonormierte Diagonalform. Einfacher geht es nicht!

Eine erste wichtige Anwendung kennen Sie aus der Analysis. Hierzu sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar.

😊 Um jeden Punkt $a \in U$ können wir f entwickeln zu

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + x^T f''(a)x + \text{h.o.t.}$$

Hier ist $f'(a) = ((\partial_i f)(a))_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ **die Ableitung**. Wir nennen a einen **kritischen Punkt**, wenn die Ableitung verschwindet, also $f'(a) = 0$ gilt.

🤔 Ist a ein Minimum? Maximum? Sattelpunkt? Darüber entscheidet nun die **Hesse-Matrix** $f''(a) = ((\partial_j \partial_i f)(a))_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Sie ist symmetrisch dank Satz von Schwartz. Wir betrachten sie am besten in Diagonalform:

😊 In einer OBasis wie oben gilt für $x = Sy$ die Diagonalform

$$f(a+x) = f(a) + y_1^2 + \dots + y_{r_+}^2 - y_{r_++1}^2 - \dots - y_{r_++r_-}^2.$$

Der Punkt a ist ein **lokales Minimum** gdw $r_- = 0$, **strikt** gdw $r_+ = n$.

Der Punkt a ist ein **lokales Maximum** gdw $r_+ = 0$, **strikt** gdw $r_- = n$.

Für Definitheit haben wir erfreulich effiziente Werkzeuge, siehe §T2.

Definition V2A: Quadrik

Eine **Quadrik** $Q = \{x \in \mathbb{K}^n \mid P(x) = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n$ ist die Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]_{\leq 2}$, ausgeschrieben:

$$P = \underbrace{\sum_{i=1}^n a_{ii} X_i^2}_{\text{quadratische Terme}} + \underbrace{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} X_i X_j}_{\text{gemischte Terme}} + \underbrace{2 \sum_{i=1}^n a_{i0} X_i}_{\text{lineare Terme}} + \underbrace{a_{00}}_{\text{Konstante}}$$

Die Koeffizienten fassen wir in zwei symmetrischen Matrizen zusammen:

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad A' := (a_{ij})_{i=0, \dots, n}^{j=0, \dots, n} \in \mathbb{K}^{(n+1) \times (n+1)}$$

$$A := (a_{ij})_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

So gilt $P = X'^T A' X'$ in homogenen Koordinaten $X' = (1, X_1, \dots, X_n)^T$.
Hier ist $X^T A X$ die quadratische Form als homogener Teil von Grad 2.
Im Falle $A = 0$ ist P nur ein Polynom vom Grad ≤ 1 , also affin-linear.

Ziel: Wir bringen P in eine möglichst einfache Standardform, wie in folgenden Beispielen, durch die geschickte Wahl affiner Koordinaten.

Beispiel: Schreiben Sie folgende Polynome als symmetrische Matrizen:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \end{bmatrix} = u^2 - 2uv + 2v^2 - 2u$$

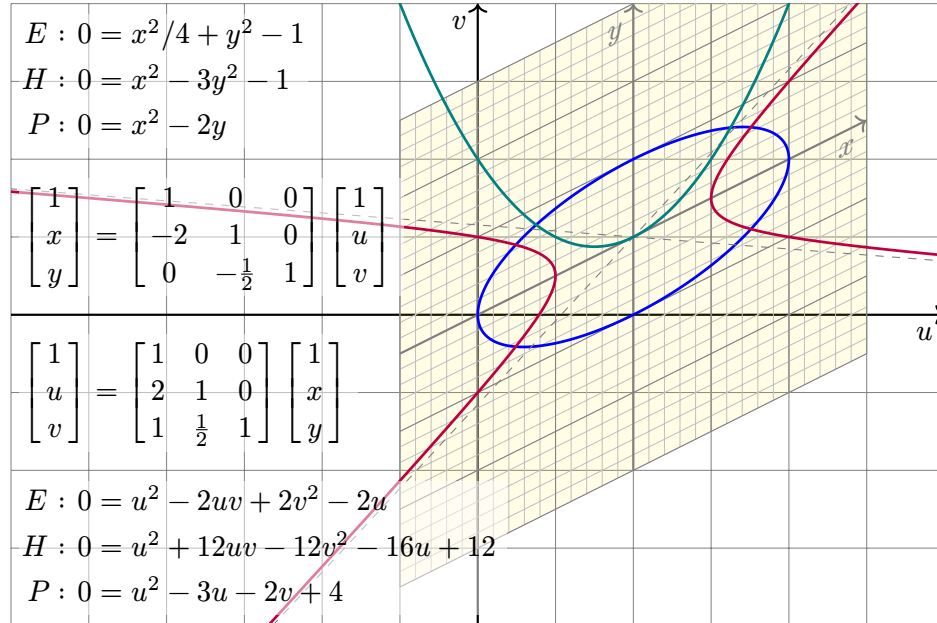
$$\begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 12 & -8 & 0 \\ -8 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \end{bmatrix} = u^2 + 12uv - 12v^2 - 16u + 12$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4 & -3/2 & -1 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \end{bmatrix} = u^2 - 3u - 2v + 4$$

😊 Diese genial-einfache Matrixschreibweise $P = X'^T A' X'$ verbindet quadratische Polynome $P \in \mathbb{K}[X]_{\leq 2}$ mit symmetrischen Matrizen A' .

😊 Damit erschließen wir die bewährten Werkzeuge des Matrixkalküls! Das ist der Grund für die erfolgreiche Klassifikation der Quadriken.

⚠ Für Polynome von Grad ≥ 3 gibt es nichts Vergleichbares.



Wir kennen dieses Beispiel von Seite U213ff aus dem letzten Kapitel U. Dort diente es uns zur Illustration affiner Abbildungen, denn es zeigt die Wirkung einer Affinität auf geometrische Objekte wie Quadriken.

Allgemeine Affinität: Wir betrachten $\mathbb{K}^n$ über $\mathbb{K}$ als affinen Raum. Als Abbildungen erlauben wir dementsprechend Affinitäten (U2A):

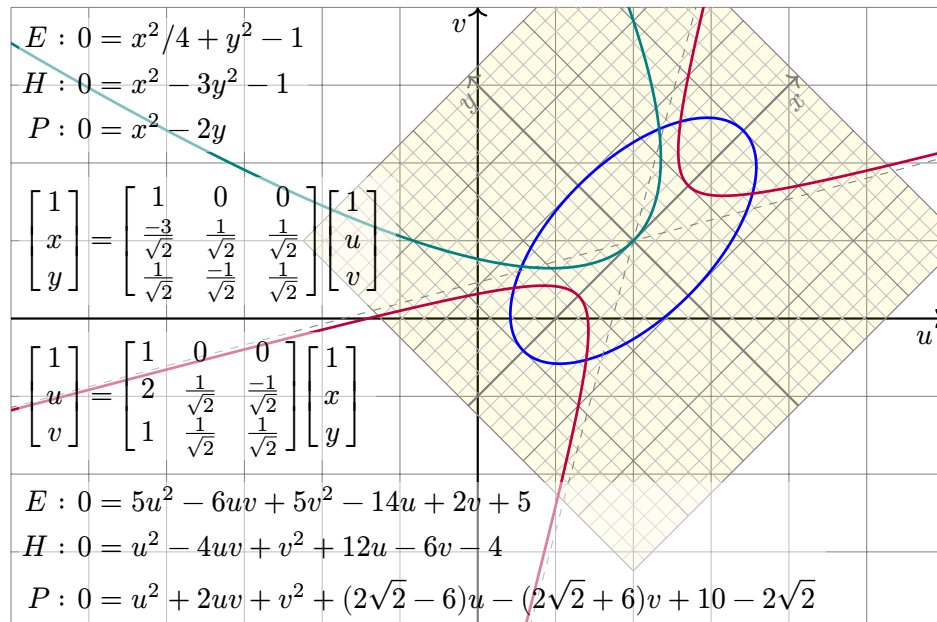
$$\text{AGL}_n(\mathbb{K}) := \{ T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & T \end{bmatrix} \mid T \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), v \in \mathbb{K}^n \} \leq \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K}).$$

Graphik und Daten überblicken Sie hier in einem Gesamtkunstwerk, als Zusammenfassung unserer schrittweisen Konstruktion (U213ff).

Wiederholung: Wie entsprechen sich Matrizen S', T' und Koordinaten?

Dabei sind wir von einer Quadrik in Hauptachsenform ausgegangen, und haben die Koordinaten x, y in neue Koordinaten u, v überführt. Aus einer schön einfachen Quadrik wird so eine unschön komplizierte Quadrik.

In diesem Kapitel gehen wir nun den schwierigeren umgekehrten Weg: Vorgelegt ist eine Quadrik, meist noch unschön und daher kompliziert. Wir bringen sie in affine Normalform V2D oder Hauptachsenform V2E.



Auch dieses Beispiel kennen wir von Seite U213ff des vorigen Kapitels U. Dort diente es uns zur Illustration von affin-euklidischen Abbildungen.

Wir betrachten hierbei $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ nicht nur als affinen Raum, sondern als affin-euklidischen Raum mit Metrik $d(a, b) = \|b - a\|$. Als metrikerhaltende Abbildungen erlauben wir dementsprechend **euklidische Affinitäten** aka affin-euklidische Isometrien (U2c):

$$\text{AGO}_n(\mathbb{R}) := \{ T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & T \end{bmatrix} \mid T \in \text{GO}_n(\mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^n \} \leq \text{GL}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Graphik und Daten überblicken Sie hier in einem Gesamtkunstwerk, als Zusammenfassung unserer schrittweisen Konstruktion (U213ff). Sie sehen deutlich, dass Abstände und Winkel erhalten werden.

In diesem Kapitel gehen wir nun den schwierigeren umgekehrten Weg: Vorgelegt ist eine Quadrik, meist noch unschön und daher kompliziert. Wir wollen sie euklidisch isometrisch in Hauptachsenform bringen.

Wiederholung: Erklären Sie diese Graphiken, Matrizen und Rechnungen, sich selbst und gerne auch anderen, so klar und präzise wie möglich.

Wir wollen die Nullstellenmenge $Q = \{x \in \mathbb{K}^n \mid P(x) = 0\}$ verstehen. Dazu transformieren wir das Polynom $P = X^T A' X \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]_{\leq 2}$. Je nach Anwendung stellen sich hier zwei verschiedene Aufgaben. Die (allgemein-)affine Klassifikation über $\mathbb{K}$ ist flexibel großzügig:

Definition V2A: skaliert-affine Kongruenz $A' \simeq B'$ in $\mathbb{K}^{n' \times n'}$

(1) Wir erlauben **Skalierung** $A' \mapsto B' = \mu A'$ mit $\mu \in \mathbb{K}^\times$ und **affine Kongruenz** $A' \mapsto B' = S'^T A' S'$ mit $S' \in \text{AGL}_n \mathbb{K}$.

$$\text{AGL}_n(\mathbb{K}) := \left\{ T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & T \end{bmatrix} \mid T \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), v \in \mathbb{K}^n \right\} \leq \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$$

Die (isometrisch-)euklidische Klassifikation über $\mathbb{R}$ ist streng restriktiv:

Definition V2A: skaliert-euklidische Kongruenz $A' \cong B'$ in $\mathbb{R}^{n' \times n'}$

(2) Wir erlauben **Skalierung** $A' \mapsto B' = \mu A'$ mit $\mu \in \mathbb{R}^\times$ und **euklidische Kongruenz** $A' \mapsto B' = S'^T A' S'$ mit $S' \in \text{AGO}_n \mathbb{R}$.

$$\text{AGO}_n(\mathbb{R}) := \left\{ T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & T \end{bmatrix} \mid T \in \text{GO}_n(\mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^n \right\} \leq \text{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Mit diesen Umformungen bringen wir jedes quadratische Polynom in eine möglichst einfache Standardform. Prägnant zusammengefasst:

Affin: $A \simeq B' = \mu S'^T A' S'$ mit $\mu \in \mathbb{K}^\times$ und $S' \in \text{AGL}_n \mathbb{K}$
Euklidisch: $A \cong B' = \mu S'^T A' S'$ mit $\mu \in \mathbb{R}^\times$ und $S' \in \text{AGO}_n \mathbb{R}$

Aufgabe: Dies sind Äquivalenzrelationen. Führen Sie es aus!

Beweis: Die Äquivalenzeigenschaften folgen direkt aus der zugrunde liegenden Gruppenoperation von $\mathbb{K}^\times \times \text{AGL}_n \mathbb{K}$ und $\mathbb{R}^\times \times \text{AGO}_n \mathbb{R}$. Lemma J3G erklärt dies allgemein. Hier ausgeführt zur Erinnerung:

Reflexivität: Es gilt $A' = \mu S'^T A' S'$ dank $S' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ und $\mu = 1$.

Symmetrie: Aus $B' = \mu S'^T A' S'$ folgt $A' = \lambda T'^T B' T'$ dank der Inversen $T' = S'^{-1}$ und $\lambda = \mu^{-1}$.

Transitivität: Aus $B' = \lambda S'^T A' S'$ und $C' = \mu T'^T B' T'$ folgt $C' = \nu U'^T A' U'$ dank der Produkte $U' = S' T'$ und $\nu = \mu \lambda$, denn $\mu \lambda T'^T S'^T A' S' T' = \mu T'^T B' T' = C'$.

QED

Bemerkung V2A: Transformation von Quadrik und Polynom

Sei $Q = \{x \in \mathbb{K}^n \mid x'^T A' x' = 0\}$ die Quadrik zur sym. Matrix $A' \in \mathbb{K}^{n' \times n'}$. Sei $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^{n'}: x' \mapsto y' = T' x'$ die Affinität zur Matrix $T' \in \text{AGL}_n \mathbb{K}$ mit Inverser $S' = T'^{-1}$. Dann ist auch die Bildmenge $f(Q) \subseteq \mathbb{K}^{n'}$ eine Quadrik, nämlich $f(Q) = \{y \in \mathbb{K}^{n'} \mid y'^T B' y' = 0\}$ mit $B' = S'^T A' S'$.

⚠ Die Transformationen S' des Polynoms $P = X'^T A' X' \in \mathbb{K}[X]_{\leq 2}$ und T' der zugehörigen Quadrik $Q \subseteq \mathbb{K}^n$ wirken entgegengesetzt!

Beweis: Für $x \mapsto y = f(x)$ gilt hin $y' = T' x'$ und zurück $x' = S' y'$.

$$\begin{aligned} y \in f(Q) &\iff x = f^{-1}(y) \in Q \\ &\iff x'^T A' x' = 0 \\ &\iff (S' y')^T A' (S' y') = 0 \\ &\iff y'^T (S'^T A' S') y' = 0 \iff y'^T B' y' = 0 \end{aligned}$$

Also gilt $f(Q) = \{y \in \mathbb{K}^{n'} \mid y'^T B' y' = 0\}$, wie behauptet.

QED

😊 Unsere Definition V2A zur Frage „Was ist eine Quadrik $Q \subseteq \mathbb{K}^n$?“ ist unabhängig von den willkürlich gewählten affinen Koordinaten: Das Bild einer Quadrik $Q \subseteq \mathbb{K}^n$ unter einer Affinität $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^{n'}$ ist wieder eine Quadrik. Genau so soll es auch sein!

😊 Die Nullstellenmenge $Q = \{x \in \mathbb{K}^n \mid P(x) = 0\}$ ändert sich nicht, wenn wir das Polynom P mit einem Skalar $\mu \in \mathbb{K}^\times$ multiplizieren. Neben Koordinatenwechsel durch Affinitäten erlauben wir daher im Folgenden auch Skalierungen $P \mapsto \mu P$, also $A' \mapsto \mu A'$ mit $\mu \in \mathbb{K}^\times$.

🤔 Wir suchen im Folgenden eine Klassifikation aller Quadriken $Q \subseteq \mathbb{K}^n$, besser: der definierenden quadratischen Polynome $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]_{\leq 2}$. Warnender Slogan: Die Quadrik Q ist nur der Schatten des Polynoms P .

😊 Die folgende Klassifikation verschafft uns eine einfache Übersicht, zunächst allgemein über jedem Körper der Charakteristik $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$.

😊 Anschließend wollen wir dies speziell für $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ präzisieren, indem wir die Formel weiter vereinfachen und so eindeutig machen.

Satz V2B: affine Klassifikation der Quadriken, Standardform

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper der Charakteristik $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$. Wir untersuchen die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{K}^n \mid x'^T A' x' = 0\}$ zur symmetrischen Matrix

$$A' = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{0*} \\ a_{*0} & A \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n' \times n'}.$$

(0) Für $r := \text{rang } A$ und $r' := \text{rang } A'$ gilt $\delta := r' - r \in \{0, 1, 2\}$.

(1) Dazu finden wir eine Affinität $f: \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n: x' \mapsto y' = T' x'$ mit $T' = S'^{-1} \in \text{AGL}_n \mathbb{K}$, sodass die Bildquadrik $f(Q) \subseteq \mathbb{K}^n$ gegeben ist durch die Gleichung $y'^T B' y' = 0$ mit $B' = \mu S'^T A' S'$ in Standardform:

$$\underbrace{b_1 y_1^2 + \dots + b_r y_r^2}_{=: q(y_1, \dots, y_r)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \delta = 0 \text{ (kegeliger Typ),} \\ 1 & \text{falls } \delta = 1 \text{ (zentraler Typ),} \\ 2y_{r+1} & \text{falls } \delta = 2 \text{ (parabolischer Typ).} \end{cases}$$

Diese Form ist noch nicht ganz eindeutig: Wir können umsortieren, Quadrate rausziehen, und im Falle $\delta \in \{0, 2\}$ zudem global skalieren.

$$A' = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{(a)} \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(b)} \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(c)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ oder } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ oder } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Algo V2B: skaliert-affine Transformation von A' zu einer Standardform

- (a) Dank Gauß-Hermite S1R diagonalisieren wir die quadratische Form A .
 (b) Mit jedem Diagonaleintrag $b_{ii} \neq 0$ löschen wir $b_{i0} = b_{0i}$ links & oben.
 (c) Wir vereinfachen die nullte Spalte und Zeile, je nach $\delta \in \{0, 1, 2\}$.

Aufgabe: Führen Sie diese zusammenfassende Skizze detailliert aus.

⚠ Wir nutzen für die Zeilen und Spalten von A' die Indizes $0, 1, 2, \dots, n$, und nennen sie daher konsequent die „nullte“, „erste“, „zweite“, usw. Die nullte Zeile und Spalte spielt eine Sonderrolle gemäß Definition V2A.

Beweis: (a) Dank Gauß-Hermite S1R diagonalisieren wir zunächst A : Wir konstruieren $S \in \text{GL}_n \mathbb{K}$ mit $B = S^T A S = \text{diag}(b_{11}, \dots, b_{rr}, 0, \dots, 0)$. Wir setzen $S' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$ und $B' = S'^T A' S'$. Damit arbeiten wir weiter.

(b) Mit jedem Diagonaleintrag $b_{ii} \neq 0$ löschen wir $b_{i0} = b_{0i}$ links & oben. Das entspricht $T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & S \end{bmatrix}$ und $C' = T'^T A' T'$. Damit arbeiten wir weiter.

(c0) Verschwindet die nullte Spalte und Zeile, so folgt $\delta = 0$, und fertig.

(c1) Gilt $c_{00} \neq 0$, sonst $c_{i0} = c_{0i} = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, so folgt $\delta = 1$. Wir skalieren die gesamte Matrix C , sodass $d_{00} = -1$ gilt, damit fertig.

(c2) Andernfalls haben wir $c_{i0} = c_{0i} \neq 0$ für manche $i \in \{r+1, \dots, n\}$. Sei $i = r+1$, notfalls tauschen wir $i \leftrightarrow r+1$ in Zeilen und Spalten. Wir skalieren zu $d_{i0} = d_{0i} = -1$ und löschen $d_{j0} = d_{0j}$ für $j \neq i$. Das zeigt $\delta = 2$. Damit sind wir fertig. QED

Wir untersuchen Quadriken $Q = \{x \in \mathbb{K}^n \mid P(x) = 0\}$ zu $P(x) = x'^T A' x'$. Genauer gesagt, haben wir die quadratischen Polynome P klassifiziert:

(1a) Die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ -kongruent über $(\mathbb{K}, \text{id}_{\mathbb{K}})$ zu einer Diagonalmatrix: Dank S1R existiert $S \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ mit

$$A \simeq B = S^T A S = \text{diag}(b_1, \dots, b_r, 0, \dots, 0).$$

(1b) Weiter existiert eine Affinität $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n: x' \mapsto y' = T'^{-1} x'$ mit $T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & S \end{bmatrix} \in \text{AGL}_n(\mathbb{K})$, sodass $C' = T'^T A' T'$ gegeben ist durch

$$y'^T C' y' = c_1 y_1^2 + \dots + c_r y_r^2 - \{0, c, 2y_{r+1}\}.$$

(1c) Skalierung ergibt $D' = \mu U'^T A' U'$ mit $U' \in \text{AGL}_n(\mathbb{K})$ und

$$z'^T D' z' = d_1 z_1^2 + \dots + d_r z_r^2 - \{0, 1, 2z_{r+1}\}.$$

Im Falle $\delta = 1$ nutzen wir $\mu = c^{-1}$ und $U' = T'$. Im Falle $\delta \neq 1$ können wir $\mu \in \mathbb{K}^\times$ beliebig wählen; für $\delta = 2$ kompensieren wir durch $z_{r+1} = \mu y_{r+1}$.

😊 Für die Quadrik Q sind Skalierungen des Polynoms P unerheblich. Für das Polynom P selbst macht es jedoch einen Unterschied.

⚠ Vorsicht, hier irrt das Lernbuch von Fischer (in der aktuellen 4. Auflage von 2019), da es die Aussagen (1) und (2,3,4) vermischt.

Allein durch Affinität ist die Standardform (4) für das Polynom nicht zu erreichen. Dennoch resümiert Fischer auf Seite 430 etwas kryptisch:

Affine Normalform der Gleichung eines Kegelschnitts Ist $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein Kegelschnitt, so kann man seine Gleichung durch eine affine Transformation auf genau eine der oben angegebenen Normalformen bringen.

Gemeint ist eine affine Bijektion, also eine Affinität.
Wann sind zwei Gleichungen gleich? Ist hier das Polynom gemeint? Dann wäre es falsch.

😊 Wir klassifizieren anschließend alle Quadriken über $\mathbb{R}$, illustriert im Überblick V221 & V222. Dabei können wir die Konstanten $\alpha, \beta, \gamma > 0$ frei wählen. Zur affinen Normalform setzen wir überall $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

⚠ Vorsicht, auch auf Seite 436 irrt das Lernbuch von Fischer: Das Signaturtripel ist nur im Falle $\delta = 1$ eindeutig festgelegt. Im Falle $\delta \neq 1$ können wir durch Skalierung mit -1 alle Vorzeichen umklappen.

Bemerkung: Für $\delta = 1$ müssen wir die Matrix einmal global skalieren. Andernfalls, für $\delta \in \{0, 2\}$, bleibt globale Skalierung noch frei wählbar. Im Fall $\delta = 0$ ist das offensichtlich, da wieder eine Standardform entsteht. Im Fall $\delta = 2$ können wir global mit $\mu \in \mathbb{K}^\times$ skalieren und dies mit der lokalen Skalierung μ^{-1} in Zeile und Spalte $r + 1$ kompensieren.

😊 Wir interessieren uns letztlich nur für die Nullstellenmenge Q , und eine globale Skalierung $A' \mapsto \mu A'$ mit $\mu \in \mathbb{K}^\times$ ändert diese nicht. Wir nutzen diese zusätzliche Freiheit gerne, um auch die Konstanten in unserer obigen Standardform soweit möglich aufzuhübschen.

⚠ Wir sprechen ganz bewusst von einer Standardform und nicht von „der Normalform“, denn das Endergebnis ist noch nicht ganz eindeutig.

😊 Über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ können wir auch die letzten Freiheiten noch ausnutzen und tatsächlich eine (nun gänzlich eindeutige!) Normalform gewinnen. Das vollendet die affine Klassifikation in den Sätzen V2c und V2d.

Übung: Führen Sie diesen letzten Schritt sorgsam aus. An welchen Stellen wird der generische Algorithmus V2B über $\mathbb{K}$ verbessert für $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$?

Satz V2c: affine Klassifikation quadratischer Polynome über $\mathbb{C} \leftrightarrow V1i$

Jedes quadratische Polynom $P = X'^T A' X' \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_{\leq 2}$ können wir darstellen durch seine symmetrische Matrix $A' = \begin{bmatrix} * & * \\ * & A \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n' \times n'}$.

(0) Für $r := \text{rang } A$ und $r' := \text{rang } A'$ gilt $\delta := r' - r \in \{0, 1, 2\}$.

(1) Durch Affinität und Skalierung zu $\mu S'^T A' S'$ können wir unser Polynom P überführen in genau eine der folgenden Normalformen:

$$Y_1^2 + \dots + Y_r^2 - \begin{cases} 0 & \text{falls } \delta = 0 \text{ (kegeliger Typ),} \\ 1 & \text{falls } \delta = 1 \text{ (zentraler Typ),} \\ 2Y_{r+1} & \text{falls } \delta = 2 \text{ (parabolischer Typ).} \end{cases}$$

(2) Die beiden Zahlen (r, δ) bilden somit ein vollständiges System von Invarianten für diese skaliert-affine Klassifikation über $\mathbb{C}$.

😊 Im Vergleich zu Satz V2B erhalten wir über $\mathbb{C}$ zwei Verbesserungen: Erstens, die Gleichungen für Quadriken werden noch weiter vereinfacht. Zweitens, die oben angegebene Normalform ist nun sogar eindeutig!

Satz V2d: affine Klassifikation quadratischer Polynome über $\mathbb{R} \leftrightarrow V1H$

Jedes quadratische Polynom $P = X'^T A' X' \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]_{\leq 2}$ können wir darstellen durch seine symmetrische Matrix $A' = \begin{bmatrix} * & * \\ * & A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n' \times n'}$.

(0) Für $r := \text{rang } A$ und $r' := \text{rang } A'$ gilt $\delta := r' - r \in \{0, 1, 2\}$.

(1) Durch Affinität und Skalierung zu $\mu S'^T A' S'$ können wir unser Polynom P überführen in genau eine der folgenden Normalformen:

$$Y_1^2 + \dots + Y_p^2 - Y_{p+1}^2 - \dots - Y_r^2 - \begin{cases} 0 & \text{falls } \delta = 0, \\ 1 & \text{falls } \delta = 1, \\ 2Y_{r+1} & \text{falls } \delta = 2. \end{cases}$$

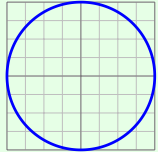
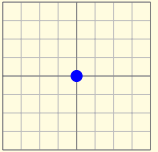
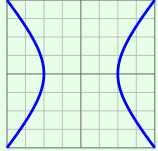
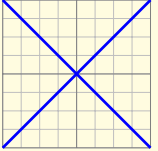
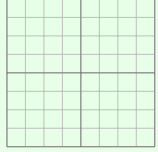
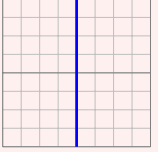
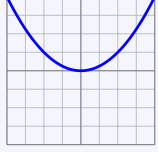
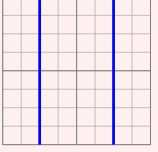
Dabei gilt $0 \leq p \leq r$ falls $\delta = 1$ und $r/2 \leq p \leq r$ falls $\delta \in \{0, 2\}$.

(2) Die drei Zahlen (p, r, δ) bilden somit ein vollständiges System von Invarianten für diese skaliert-affine Klassifikation über $\mathbb{R}$.

😊 Im Vergleich zu Satz V2c erhalten wir über $\mathbb{R}$ zudem die Signatur $\text{sign}(A) = 2p - r$ für $\delta = 1$ bzw. ihren Betrag $|\text{sign}(A)|$ für $\delta \in \{0, 2\}$.

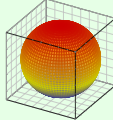
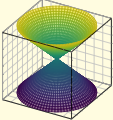
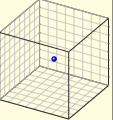
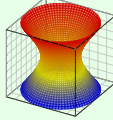
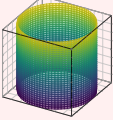
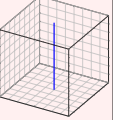
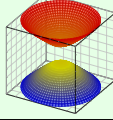
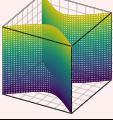
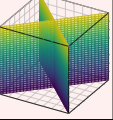
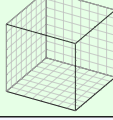
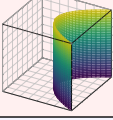
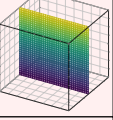
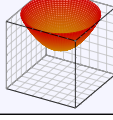
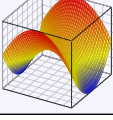
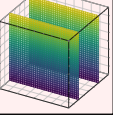
Klassifikation der reellen Quadriken in der Ebene $\mathbb{R}^2$

V221

Ellipse $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	Punkt $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 0$ 
Hyperbel $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	schneidendes Geradenpaar $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0$ 
leere Menge $-\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	Gerade $\frac{x^2}{\alpha^2} = 0$ 
Parabel $\frac{x^2}{\alpha^2} = 2y$ 	paralleles Geradenpaar $\frac{x^2}{\alpha^2} = 1$ 

Klassifikation der reellen Quadriken im Raum $\mathbb{R}^3$

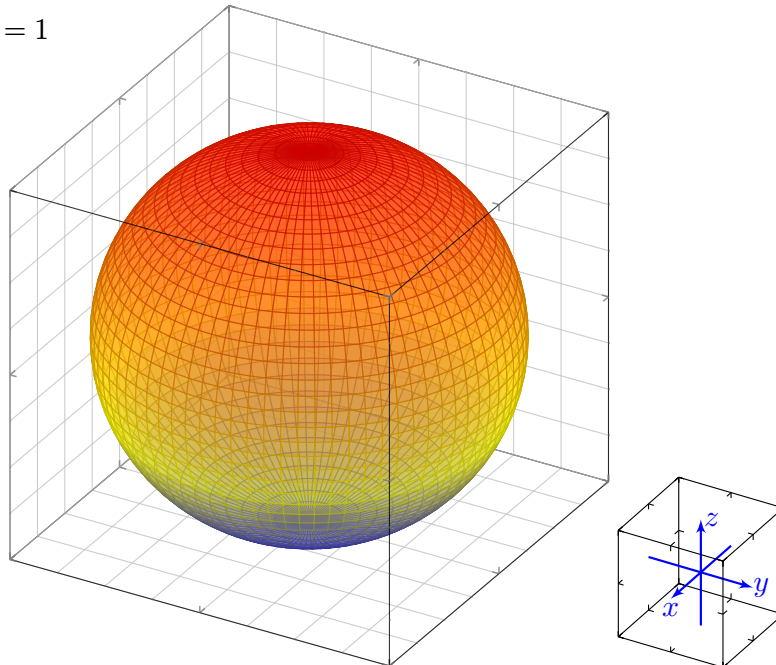
V222

Ellipsoid $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ 	elliptischer Doppelkegel $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$ 	Punkt $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$ 
einschaliges Hyperboloid $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ 	elliptischer Zylinder $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	Gerade $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 0$ 
zweischaliges Hyperboloid $-\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ 	hyperbolischer Zylinder $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	schneidendes Ebenenpaar $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0$ 
leere Menge $-\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ 	parabolischer Zylinder $\frac{x^2}{\alpha^2} = 2y$ 	Ebene $\frac{x^2}{\alpha^2} = 0$ 
elliptisches Paraboloid $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 2z$ 	hyperbolisches Paraboloid $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 2z$ 	paralleles Ebenenpaar $\frac{x^2}{\alpha^2} = 1$ 

Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: Ellipsoid

V223

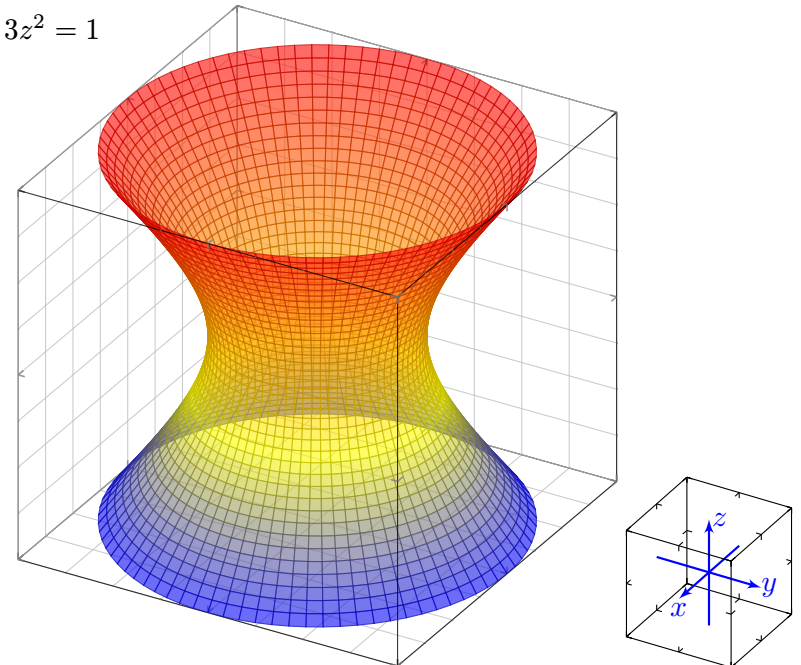
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: einschaliges Hyperboloid

V224

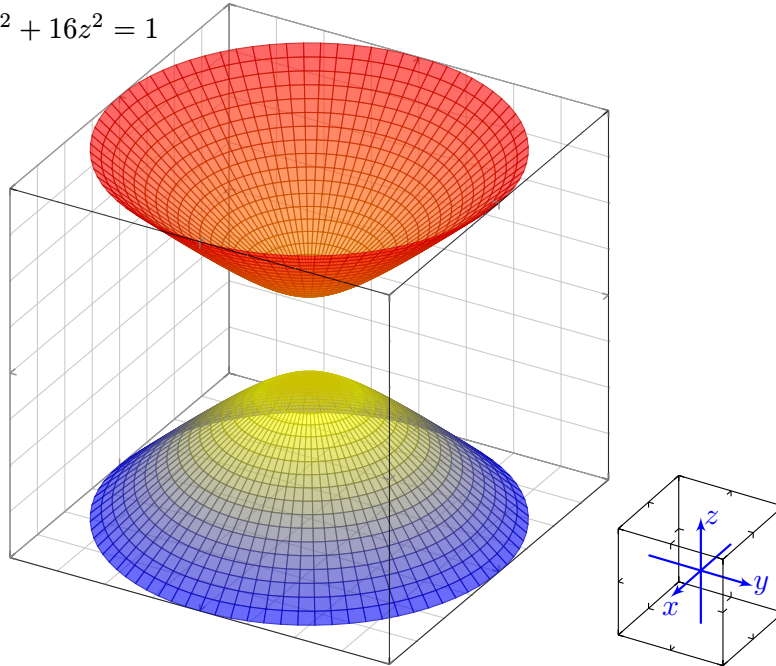
$$4x^2 + 4y^2 - 3z^2 = 1$$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: zweischaliges Hyperboloid

V225

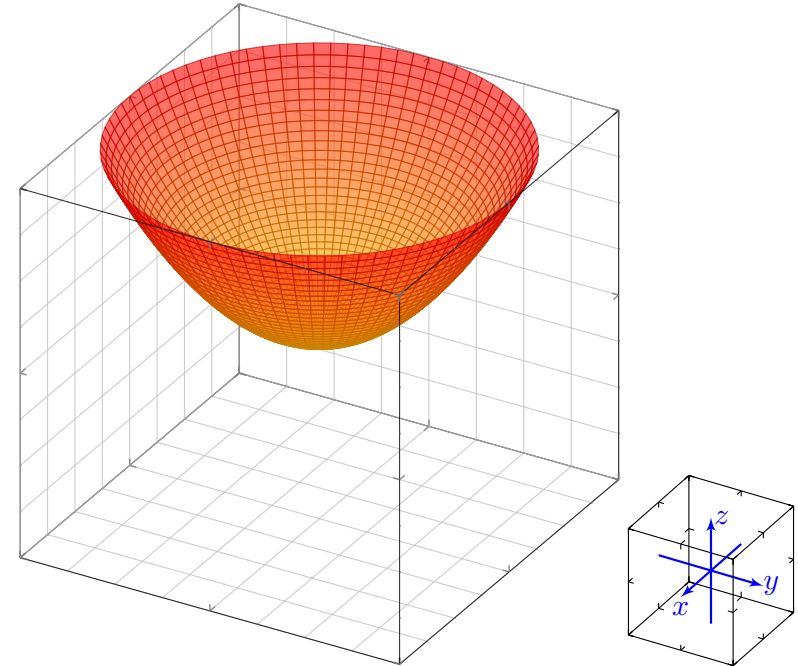
$$-15x^2 - 15y^2 + 16z^2 = 1$$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: elliptisches Paraboloid

V226

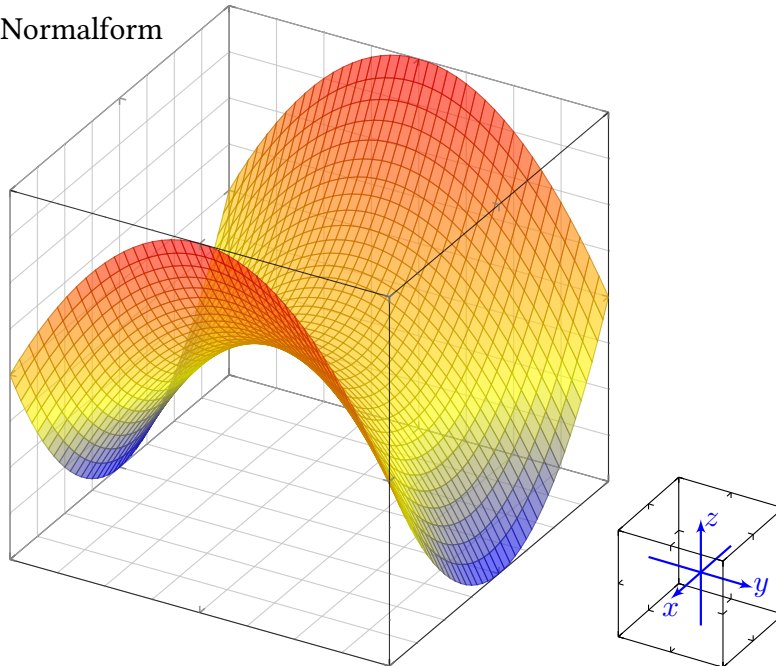
$$z = x^2 + y^2$$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: hyperbolisches Paraboloid

V227

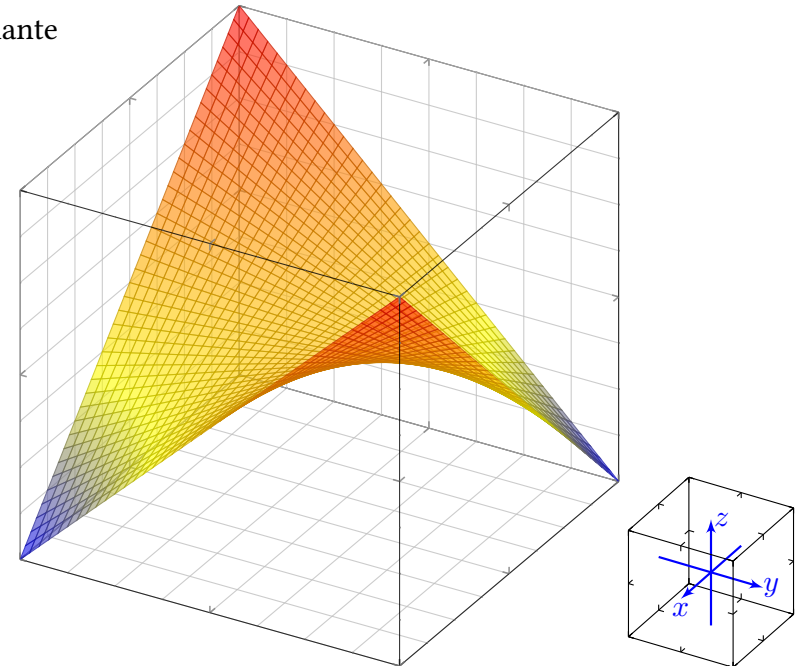
$$z = x^2 - y^2, \text{ Normalform}$$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: hyperbolisches Paraboloid

V228

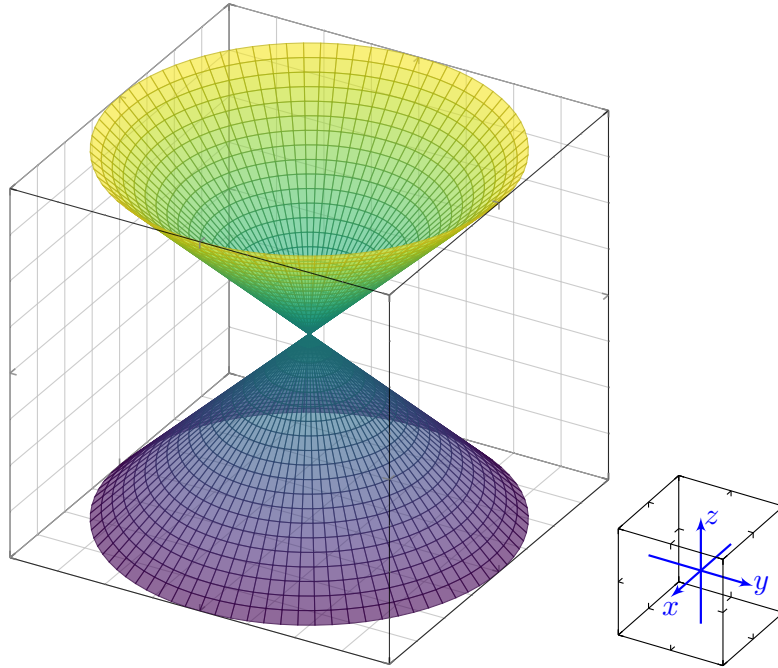
$$z = xy, \text{ Variante}$$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: elliptischer Doppelkegel

V229

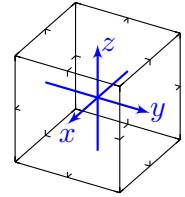
$$z^2 = x^2 + y^2$$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$

V230
Erläuterung

Alle Graphiken zeigen den Standardwürfel $[-1, 1]^3$. Der Ästhetik halber spare ich alle Beschriftungen, da sie sich ohne jede Mühe rekonstruieren lassen. Die Skalierungskonstanten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ wähle ich jeweils so, dass ein harmonisches Bild entsteht.



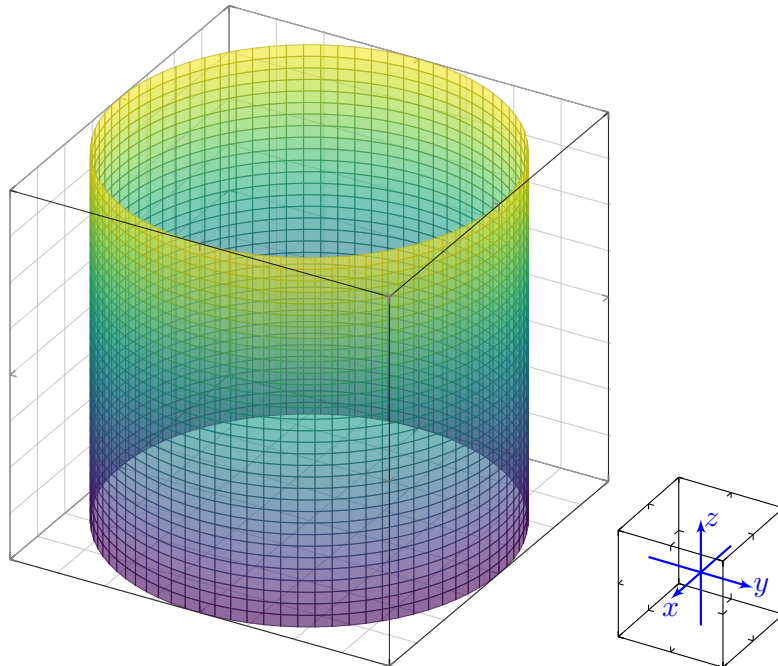
Unter einer typischen Quadrik im $\mathbb{R}^3$ stellen wir uns eine Fläche vor. Die leere Menge, Punkt und Gerade sehen jedoch recht mager aus. Es gibt in diesen Fällen allerdings noch viele Punkte im Komplexen, also Lösungen in $\mathbb{C}^3$, die wir im Schnitt mit $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$ nicht sehen.

Die folgenden Polynome enthalten nicht alle drei Variablen x, y, z , sondern nur zwei Variablen x, y oder gar nur noch eine Variable x . (Ganz ohne Variablen könnten wir auch noch 0 und 1 hinzufügen.) Die zugehörige Quadrik ist daher ein Zylinder über einer Quadrik in kleinerer Dimension. Wir erkennen hier die zuvor diskutierte Klassifikation der reellen Quadriken in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: elliptischer Zylinder

V231

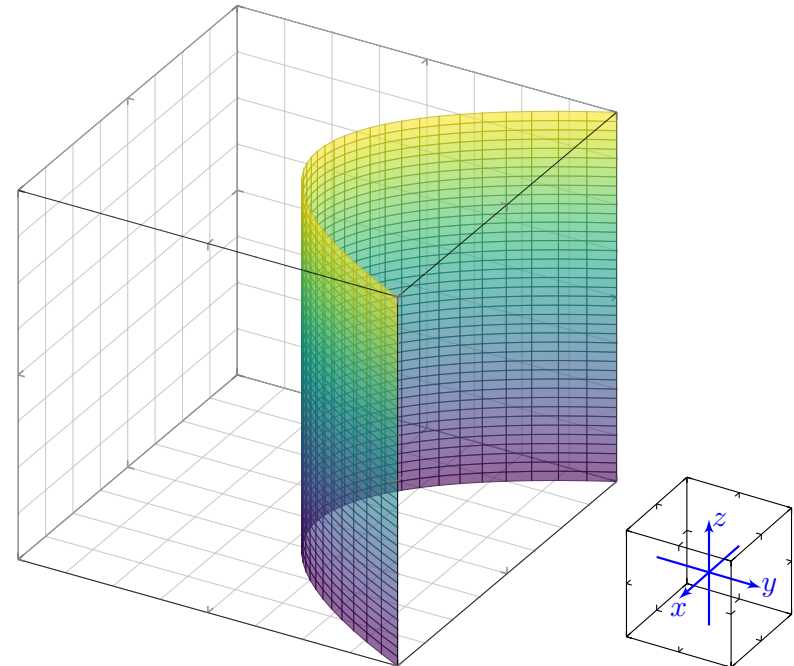
$$x^2 + y^2 = 1$$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: parabolischer Zylinder

V232

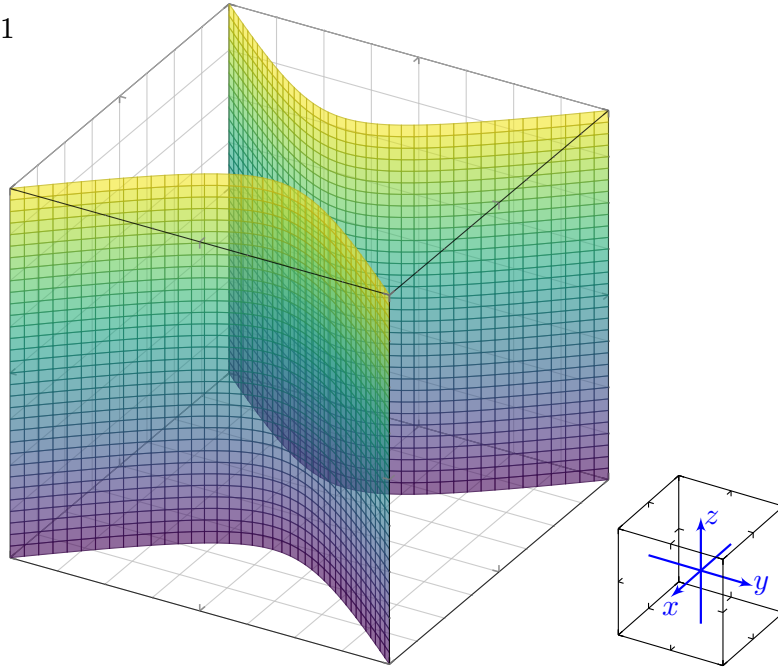
$$y = x^2$$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: hyperbolischer Zylinder

V233

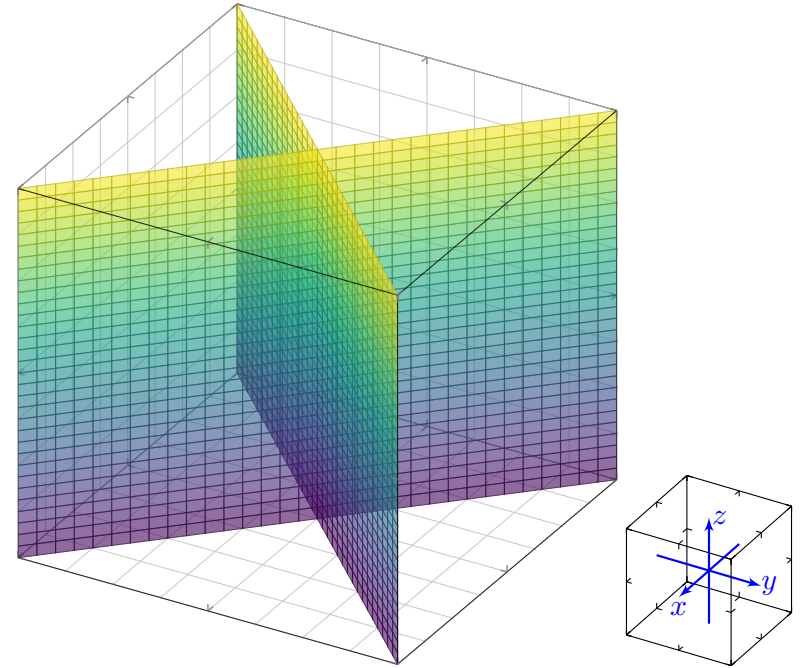
$$9x^2 - 8y^2 = 1$$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: schneidendes Ebenenpaar

V234

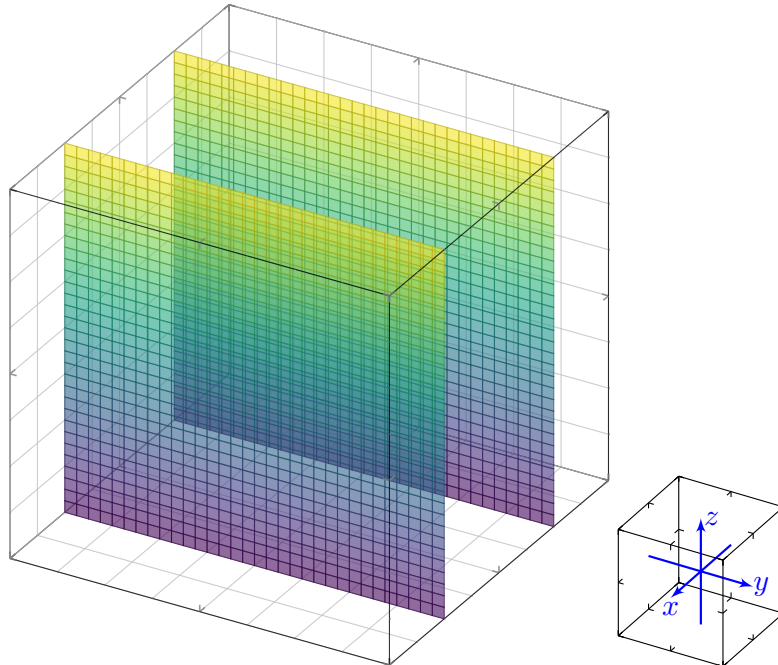
$$x^2 - y^2 = 0$$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: paralleles Ebenenpaar

V235

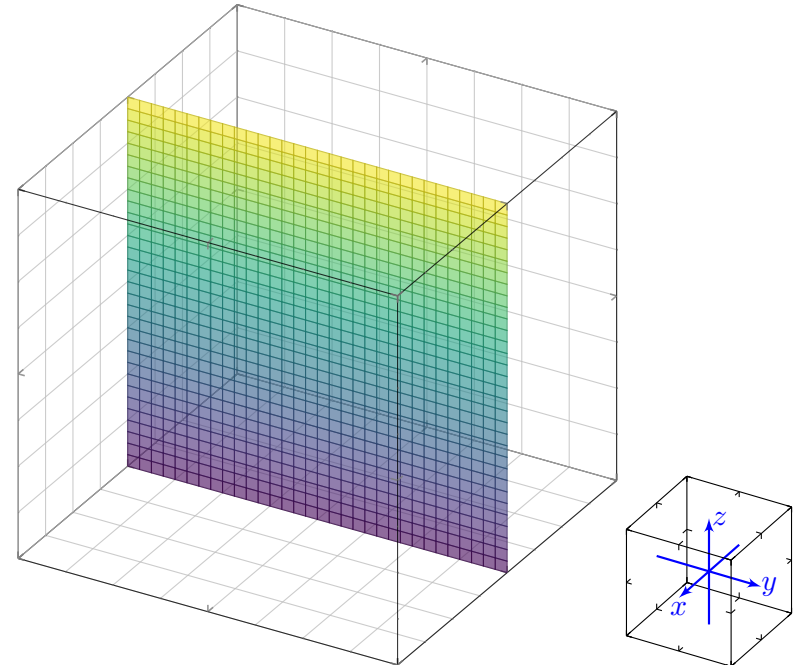
$$4x^2 = 1$$



Reelle Quadriken im $\mathbb{R}^3$: Ebene

V236

$$x^2 = 0$$



Übung: Machen Sie sich mit der Klassifikation V222 vertraut: Nehmen Sie sich die Liste aller Normalformen und fertigen Sie jeweils selbst eine Skizze an. Umgekehrt: Übersetzen Sie die Abbildungen in Gleichungen.

Anleitung zum Zeichnen von solchen Nullstellen- / Lösungsmengen: Lege eine Koordinate fest, etwa $z = \text{const}$, und zeichne den Schnitt; wiederhole so oft wie nötig oder gewünscht, bis ein Bild entsteht.

Übung: Sind wirklich alle Fälle aus der Klassifikation V2D abgebildet? Welche Quadriken fehlen? Welche Quadriken treten mehrfach auf? Beschreiben $z = x^2 - y^2$ und $z = xy$ affin-äquivalente Quadriken?

Übung: Bei Quadriken $x'^T A' x' = 0$ verlangen wir normalerweise $A \neq 0$. Welche Quadriken kommen noch hinzu, falls wir auch $A = 0$ erlauben? Schule: Klassifizieren Sie alle Quadriken $Q \subseteq \mathbb{R}^1$ in Dimension 1.

Übung: Welche Quadriken $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ sind Vereinigung von Geraden? Bei den meisten ist dies offensichtlich, doch bei zweien überraschend! Hinweis: Es gibt eine mit $(r, r') = (3, 4)$ und eine mit $(r, r') = (2, 4)$. Diese sind in Architektur und Ingenieurwesen besonders beliebt.

Für $n = 1, 2, 3$ betrachten wir die Klassifikation von $A' \in \mathbb{R}^{n' \times n'}$ modulo der Äquivalenz $\simeq$ unter Affinitäten und Skalierungen, wie in V2A erklärt.

Übung: Bestimmen Sie jeweils $r = \text{rang } A$ und $r' = \text{rang } A'$ sowie $s = |\text{sign } A|$ und $s' = |\text{sign } A'|$. Sind dies Invarianten unter Äquivalenz? Können Sie damit bereits alle Äquivalenzklassen $[A']$ unterscheiden?

Übung: Wenn Sie die Koeffizienten der Matrix A' zufällig wählen (unabhängig, stetig verteilt), welchen Typ $\delta \in \{0, 1, 2\}$ erwarten Sie?

Übung: Welche Äq'-klassen $[A']$ sind stabil unter kleinen Störungen? Das heißt: Liegt B' genügend nahe bei A' , so ist B' äquivalent zu A' .

Übung: Wir sagen $[A']$ liegt im Rand von $[C']$ wenn gilt: Es gibt beliebig kleine Änderungen von A' zu einem B' , sodass B' äquivalent zu C' ist.

Anschaulich sagen wir auch: Die Klasse $[C']$ degeneriert zu $[A']$.

Beispiel: Beide Hyperboloide degenerieren zum Doppelkegel.

(1) Diese Relation ist reflexiv und transitiv, also eine Präordnung (I1A).

(2) Bestimmen Sie diese Präordnung für die obigen 3, 8, 15 Klassen.

😊 Klassifikation schärft Verständnis, schafft Ordnung und Überblick. Idealerweise sollte sie so einfach wie möglich sein, doch so detailliert wie die Sachlage erfordert, insgesamt vollständig und redundanzfrei.

Bei Quadriken entsteht ein kleiner Zoo von bewundernswerter Vielfalt. Gerade deshalb ist es wichtig, den Satz zur Entstehung der Klassifikation zu verstehen, das ist viel leichter und klarer, effizient und nachhaltig!

*Bildung ist nicht nur das Lernen von Fakten,
sondern die Schulung des Geistes zu denken.*
Albert Einstein (1879–1955)

Als heiteren Kontrast nenne ich die berühmte *Klassifikation der Tiere* des argentinischen Schriftstellers Jorge Luis Borges (1899–1986) aus seinem Essayband *Otras inquisiciones* (1952). Borges karikiert damit willkürliche Taxonomien. Bekannt wurde sie durch den französischen Philosophen Michel Foucault (1926–1984), der damit sein Buch *Die Ordnung der Dinge* beginnt (*Les mots et les choses*, 1966), ebenso zitiert von Marcus du Sautoy: *Counting p-groups and nilpotent groups*. Publ. IHÉS 92 (2000) 63–112.

Die Tiere werden wie folgt klassifiziert: *Los animales se dividen en:*

- | | |
|---|---|
| (a) dem Kaiser gehörig, | (a) <i>pertenecientes al Emperador,</i> |
| (b) einbalsamiert, | (b) <i>embalsamados,</i> |
| (c) gezähmt, | (c) <i>amaestrados,</i> |
| (d) Milchferkel, | (d) <i>lechones,</i> |
| (e) Meerjungfrauen, | (e) <i>sirenas,</i> |
| (f) Fabeltiere, | (f) <i>fabulosos,</i> |
| (g) herrenlose Hunde, | (g) <i>perros sueltos,</i> |
| (h) in dieser Klassifikation enthalten, | (h) <i>incluidos en esta clasificación,</i> |
| (i) wie verrückt herumtollend, | (i) <i>que se agitan como locos,</i> |
| (j) unzählbare, | (j) <i>innumerables,</i> |
| (k) mit einem ganz feinen
Kamelhaarpinsel gemalte, | (k) <i>dibujados con un pincel finísimo
de pelo de camello,</i> |
| (l) und so weiter, | (l) <i>etcétera,</i> |
| (m) die soeben die Vase zerbrachen, | (m) <i>que acaban de romper el jarrón,</i> |
| (n) die von fern Fliegen ähneln. | (n) <i>que de lejos parecen moscas.</i> |

Ziel: Wir wollen Quadriken in ihre **euklidische Normalform** bringen. Dabei nutzen wir nur **euklidische Bewegungen**, also Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen; dadurch werden Längen und Winkel erhalten. Erinnerung: Die **affine Klassifikation** über $\mathbb{K}$ ist flexibel großzügig:

◆ **Definition V2A:** skaliert-affine Kongruenz $A' \cong B'$ in $\mathbb{K}^{n' \times n'}$

(1) Wir erlauben **Skalierung** $A' \mapsto B' = \mu A'$ mit $\mu \in \mathbb{K}^\times$ und **affine Kongruenz** $A' \mapsto B' = S'^T A' S'$ mit $S' \in \text{AGL}_n \mathbb{K}$.

$$\text{AGL}_n(\mathbb{K}) := \left\{ T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & T \end{bmatrix} \mid T \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), v \in \mathbb{K}^n \right\} \leq \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$$

Die (isometrisch-)euklidische Klassifikation über $\mathbb{R}$ ist streng restriktiv:

◆ **Definition V2A:** skaliert-euklidische Kongruenz $A' \cong B'$ in $\mathbb{R}^{n' \times n'}$

(2) Wir erlauben **Skalierung** $A' \mapsto B' = \mu A'$ mit $\mu \in \mathbb{R}^\times$ und **euklidische Kongruenz** $A' \mapsto B' = S'^T A' S'$ mit $S' \in \text{AGO}_n \mathbb{R}$.

$$\text{AGO}_n(\mathbb{R}) := \left\{ T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & T \end{bmatrix} \mid T \in \text{GO}_n(\mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^n \right\} \leq \text{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Satz V2E: euklidische Klassifikation quadratischer Polynome über $\mathbb{R}$

Jedes quadratische Polynom $P = X'^T A' X' \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]_{\leq 2}$ können wir darstellen durch seine symmetrische Matrix $A' = \begin{bmatrix} * & * \\ * & A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n' \times n'}$.

(0) Für $r := \text{rang } A$ und $r' := \text{rang } A'$ gilt $\delta := r' - r \in \{0, 1, 2\}$.

(1) Durch euklidische Affinität und Skalierung zu $\mu S'^T A' S'$ können wir unser Polynom P überführen in genau eine der folgenden Normalformen:

$$\frac{Y_1^2}{\alpha_1^2} + \dots + \frac{Y_p^2}{\alpha_p^2} - \frac{Y_{p+1}^2}{\alpha_{p+1}^2} - \dots - \frac{Y_r^2}{\alpha_r^2} - \begin{cases} 0 & \text{falls } \delta = 0 \text{ (kegeliger Typ),} \\ 1 & \text{falls } \delta = 1 \text{ (zentraler Typ),} \\ 2Y_{r+1} & \text{falls } \delta = 2 \text{ (parabolisch).} \end{cases}$$

Dabei gilt $0 \leq p \leq r$ falls $\delta = 1$, sonst $r/2 \leq p \leq r$ und ggf. Normierung. Hier sind $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_p > 0 < \alpha_{p+1} \leq \dots \leq \alpha_r$ die **Hauptachsenlängen**.

(2) Somit ist $(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_r; \delta)$ ein vollständiges System von Invarianten für diese skaliert-euklidische Klassifikation über $\mathbb{R}$.

☺ Im Vergleich zur affinen Klassifikation V2D erhalten wir die Längen!

$$A' = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{(a)} \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(b)} \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(c)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ oder } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ oder } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Algo V2E: skaliert-euklidische Transformation von A' zur Normalform

- (a) Dank Spektralsatz T1i können wir A orthogonal diagonalisieren zu B .
 (b) Mit jedem Diagonaleintrag $b_{ii} \neq 0$ löschen wir $b_{i0} = b_{0i}$ links & oben.
 (c) Wir vereinfachen die nullte Spalte und Zeile, je nach $\delta \in \{0, 1, 2\}$.

Aufgabe: Beweisen Sie dies nach Vorbild der affinen Klassifikation V2D.

Beweis: Dank Spektralsatz T1i können wir A orthogonal diagonalisieren: Wir finden $Q \in \text{GO}_n \mathbb{R}$ mit $B = Q^T A Q = \text{diag}(b_{11} \geq \dots \geq b_{rr}, 0, \dots, 0)$.

Wir setzen $Q' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$ und $B' = Q'^T A' Q'$. Damit arbeiten wir weiter.

(b) Mit jedem Diagonaleintrag $b_{ii} \neq 0$ löschen wir $b_{i0} = b_{0i}$ links & oben. Das entspricht $S' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & I \end{bmatrix}$ und $C' = S'^T B' S'$. Damit arbeiten wir weiter.

(c0) Verschwindet die nullte Spalte und Zeile, so folgt $\delta = 0$, und fertig.

(c1) Gilt $c_{00} \neq 0$, sonst $c_{i0} = c_{0i} = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, so folgt $\delta = 1$. Wir skalieren die gesamte Matrix C , sodass $d_{00} = -1$ gilt, damit fertig.

(c2) Andernfalls haben wir $c_{i0} = c_{0i} \neq 0$ für manche $i \in \{r+1, \dots, n\}$.

Mit Givens S4j / Householder S4o erreichen wir $d_{i0} = d_{0i} = -1$ für

$i = r+1$ und $d_{j0} = d_{0j} = 0$ für $j \neq i$. Das zeigt $\delta = 2$, damit fertig. QED

⚠ **Vorsicht**, das Lernbuch von Fischer kehrt (c2) unter den Teppich: Auf Seite 483 wird vereinfachend „nur der Fall $r = n - 1$ “ betrachtet. Für kleine Matrizen mag das oft genügen, doch es scheint allzu bequem. Dafür haben wir Givens-Rotationen und Householder-Spiegelungen!

Zahlenbeispiel zur euklidischen Klassifikation (Klausur 2021)

V245

Wir betrachten die reelle Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid P(x) = 0\}$ mit

$$P(x) = 3x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2 + 6\sqrt{2}x_1 - 10\sqrt{2}x_2 - 2.$$

Aufgabe: (0) Schreiben Sie dies als symmetrische Matrix $A' \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, sodass $P(x) = x'^T A' x'$ gilt für alle Punkte $x' = (1, x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^3$.

(1) Hierzu existiert eine euklidische Isometrie $T' \in \text{AGO}_2 \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R}^\times$, sodass die Matrix $B' = \mu T'^T A' T'$ euklidische Normalform annimmt. Bestimmen Sie die Normalform B' sowie T' und μ .

(2) Um welchen Typ von Quadrik handelt es sich gemäß Klassifikation?

(3) Skizzieren Sie die Quadrik $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ in den Koordinaten $x = (x_1, x_2)$.

Lösung: (0) Wir finden:

$$A' = \begin{bmatrix} -2 & 3\sqrt{2} & -5\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 3 & -5 \\ -5\sqrt{2} & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Zahlenbeispiel zur euklidischen Klassifikation (Klausur 2021)

V246

⚠ In Schritt (1a) unterscheiden sich affine vs euklidische Klassifikation!

(1a) Wir bestimmen eine orthonormale Eigenbasis von $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det(XI - A) = (3 - X)(3 - X) - 25 \\ &= X^2 - 6X - 16 = (X - 8)(X + 2) \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind demnach 8 und -2 . (Orthonormal-)Basen für die Eigenräume erhalten wir (ohne weitere Rechnung) aus den Matrizen

$$A - 8I = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A + 2I = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Eig}(A, 8) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle =: v_1$$

$$\text{Eig}(A, -2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle =: v_2$$

Ab hier verwenden wir Gauß-Hermite S1R mit $\text{AGO}_n \mathbb{R}$ -Kongruenz.

😊 Den Schritt (1b) nutzen affine und euklidische Klassifikation ähnlich.

Zahlenbeispiel zur euklidischen Klassifikation (Klausur 2021)

V247

(1b) Gauß S1R
mit $\text{AGO}_n \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} -10 & 0 & -2 \\ 8 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ -8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß S1R}} \begin{bmatrix} -2 & -8 & -2 \\ 8 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ -10 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß S1R}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß S1R}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß S1R}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = B'$$

(0) $-1 \cdot (1)$

(0) $-1 \cdot (2)$

global $\mu = \frac{1}{8}$

$= T'$

Zahlenbeispiel zur euklidischen Klassifikation (Klausur 2021)

V248

Erläuterung

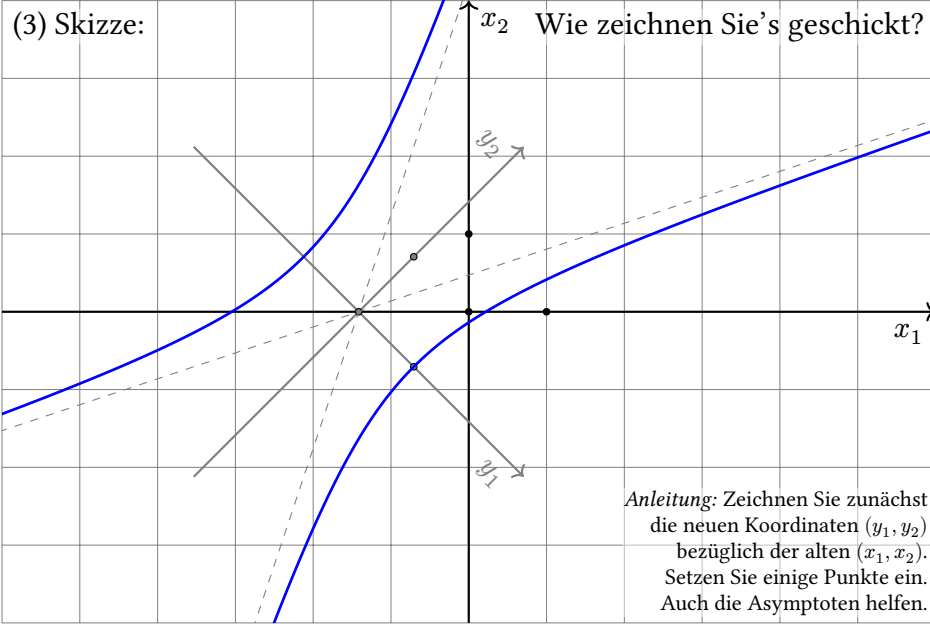
Bemerkung: Gefragt war in dieser Aufgabe die *euklidische* Normalform. Viele haben dies mit der *affinen* Normalform verwechselt, die jeweiligen Rechenmethoden wild gemischt und falsch angewendet. Bitte lernen Sie genau, welche Umformungen was tun und wann sie angebracht sind. Wie können Sie das wissen? Die freundliche Vorlesung erklärt es! (V2A)

⚠ Die nullte Zeile/Spalte spielt eine Sonderrolle. Es ergibt keinen Sinn, die nullte Zeile/Spalte zu skalieren. Ebenso darf ein Vielfaches der nullten Zeile/Spalte nicht auf eine andere addiert werden. (V2A)

⚠ Eine Skalierung der folgenden Zeilen/Spalten ist keine Isometrie! Allgemein affin ist das erlaubt, euklidisch hingegen nicht. (V2A)

(2) Unsere Quadrik $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ ist demnach eine Hyperbel, $y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 = 1$.

Bemerkung: Der ursprünglichen Gleichung $P(x) = 0$ sieht man die Form der Lösungsmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ (meist) nicht sofort an. In der Normalform $y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 = 1$ gelingt es hingegen leicht. Die Klassifikation verschafft uns so einen guten Überblick über alle Möglichkeiten. Zudem können wir die gegebene Quadrik ganz konkret darstellen, wie in der folgenden Skizze.

(3) Skizze:  Wie zeichnen Sie's geschickt?

Anleitung: Zeichnen Sie zunächst die neuen Koordinaten (y_1, y_2) bezüglich der alten (x_1, x_2) . Setzen Sie einige Punkte ein. Auch die Asymptoten helfen.

(3) Die obige Skizze zeigt $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ und beide Koordinatensysteme.

Bemerkung: (3a) Zuerst zeichnen wir den Ursprung $b = (-\sqrt{2}, 0)^\top$ des transformierten Koordinatensystems ein. Von diesem Punkt aus werden die Richtungsvektoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^\top$ und $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^\top$ abgetragen. So erhalten wir das neue Koordinatensystem, dargestellt im alten.

(3b) Wir arbeiten nun statt mit x_1, x_2 in den neuen Koordinaten y_1, y_2 . Die Gleichung $y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 = 1$ beschreibt eine Standardhyperbel, die um den Faktor 2 in y_2 -Richtung gestreckt ist. Wie zeichnen wir das geschickt? Asymptotisch gilt $y_1 \approx \pm \frac{1}{2}y_2$. Diese Asymptoten helfen beim Zeichnen!

😊 Damit lässt sich unsere Quadrik Q schließlich leicht zeichnen. Genau für diese einfache Darstellung haben wir die Koordinaten transformiert, daher ist die graphische Darstellung ein schöner, krönender Abschluss.

😊 Das korrekte Vorgehen und die saubere Zeichnung erfordern Übung. Versuchen Sie es selbst! Die freundliche Vorlesung erklärt Ihnen die Theorie und leitet Sie zur Praxis an. Der Rest ist Üben, Üben, Üben.

Übung: Starten Sie mit einem leeren Blatt Papier und lösen Sie die obige Klausuraufgabe nochmal selbständig, bis zur abschließenden Zeichnung.

Wiederholung der Grundlagen zur Vorbereitung zur Klausur:

Aufgabe: Erklären Sie in eigenen Worten, kurz aber präzise:

(0) Was ist eine Quadrik Q ? ein quadratisches Polynom P ? Wie stellen Sie das Polynom P als symmetrische Matrix A' dar?

(1) Welche Transformationen sind erlaubt, affin vs euklidisch? Was bedeutet das konkret für die erlaubten Rechenschritte? Zum Kontrast: Welche Rechenschritte sind *nicht* erlaubt?

(2) Euklidisch: Was ist die Normalform $B' = \mu T'^\top A' T'$? Wie verläuft der Algorithmus? Welche Ergebnisse sind möglich? Wie heißen die ebenen Quadriken? Welche dreidimensionalen Quadriken können Sie benennen?

(3) Affin: Was ist die (vereinfachte, affine) Normalform $B' = \mu T'^\top A' T'$? Wie verläuft der Algorithmus? Welche Ergebnisse sind noch möglich? In welchen Schritten ist affin einfacher als euklidisch?

Quadriken sind ein schönes Thema. Wie immer braucht es Übung. Ich habe dazu alle Techniken vor Ihnen ausgebreitet mit illustrativen Beispielen und hilfreichen Hinweisen. Wie jedesmal ist es nun an Ihnen, die Werkzeuge in die Hand zu nehmen und ihren Gebrauch einzuüben.

Die Klassifikation der reellen Quadriken ist ein Kleinod der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie. Sie ist ein weiterer würdiger Höhepunkt und mobilisiert dazu alle Techniken der vorigen Kapitel. Das klingt manchen wie ein Fluch, bitte betrachten Sie es als Segen!

- Diagonalisierung und Eigenbasen.
- Skalarprodukte und euklidische Isometrien.
- Spektralsatz und orthonormale Eigenbasen.
- Affine Transformationen, allgemein und euklidisch.
- Klassifikation der quadratischen Polynome und Quadriken.

Das macht Quadriken zu einem beliebten Thema... auch in Klausuren. Nur Mut! Mit der nötigen Übung ist jeder einzelne Schritt relativ leicht.

Zahlenbeispiel zur affinen Klassifikation (Klausur 2021)

V253

Wir betrachten die reelle Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid P(x) = 0\}$ mit

$$P(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 8x_2 + 8.$$

Aufgabe: (0) Schreiben Sie dies als symmetrische Matrix $A' \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, sodass $P(x) = x'^T A' x'$ gilt für alle Punkte $x' = (1, x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^3$.

(1) Hierzu existiert eine (allgemeine) Affinität $T' \in \text{AGL}_2 \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R}^\times$, sodass die Matrix $B' = \mu T'^T A' T'$ affine Normalform annimmt.

Bestimmen Sie die Normalform B' sowie T' und μ .

(2) Um welchen Typ von Quadrik handelt es sich gemäß Klassifikation?

(3) Skizzieren Sie die Quadrik $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ in den Koordinaten $x = (x_1, x_2)$.

(4) *Bonus:* Lesen Sie daran $\min \text{pr}_1(Q)$ und $\min \text{pr}_2(Q)$ ab.

Lösung: (0) Wir finden:

$$A' = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zahlenbeispiel zur affinen Klassifikation (Klausur 2021)

V254

(1) Gauß S1R
mit $\text{AGL}_n \mathbb{R}$

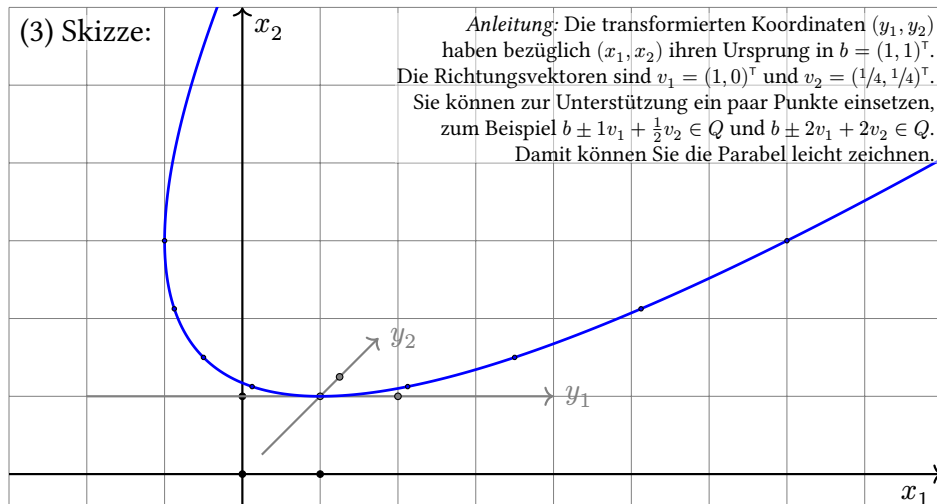
$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2) + 1 \cdot (1)} \begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2) \cdot \frac{1}{4}} \begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{(0) + 4 \cdot (2)} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = B' = T'$$

(2) Unsere Quadrik $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ ist demnach eine Parabel, $y_1^2 = 2y_2$.

Zahlenbeispiel zur affinen Klassifikation (Klausur 2021)

V255

(3) Skizze:



(4) *Bonus:* Wir finden $\min \text{pr}_1(Q) = -1$ und $\min \text{pr}_2(Q) = +1$.

Zahlenbeispiel zur affinen Klassifikation (Klausur 2021)

V256
Erläuterung

(1) Alternativer
Rechenweg:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2) + 1 \cdot (1)} \begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(0) + 1 \cdot (2)} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{global } \mu = \frac{1}{4}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1) \cdot 2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ist die affine Normalform eindeutig? Ja!

V257
Ausführung

Sie haben nun die wunderbare Klassifikation quadratischer Polynome über $\mathbb{R}$, affin gemäß Satz V2D, euklidisch dank Satz V2E. Erste Beispiele zeigen die Anwendung, nach etwas Übung gelingt Ihnen dies routiniert.

⚠ In der zweiten Aufgabe war die affine Normalform gefragt, in der ersten Aufgabe hingegen die euklidische Normalform. Das sind zwei verschiedene Ziele und dementsprechende Methoden. Bitte lernen Sie genau, welche Umformungen was tun und wann sie angebracht sind.

😊 Die affine Normalform B' ist eindeutig dank unserer Vereinbarung. Wir sortieren die Diagonaleinträge nach der bewährten Konvention: erst $+1$, dann -1 , eventuelle Nullen am Ende. In Übungen und Klausuren bereitet dies erfahrungsgemäß beiderseits keinerlei Schwierigkeiten.

⚠ Im Falle $\delta \in \{0, 2\}$ haben wir eine globale Skalierung $\mu \in \mathbb{R}^\times$ frei. Auch dazu fixieren wir schließlich noch eine passende Konvention: Wir vermeiden eine negative Mehrheit. Falls nötig skalieren wir mit -1 und sorgen so für mindestens so viele positive wie negative Einträge.

Ist die affine Transformation eindeutig? Nein!

V258
Ausführung

⚠ Die affine Normalform B' ist zwar eindeutig, doch der Rechenweg erlaubt Varianten. Dies haben wir in der vorigen Aufgabe gesehen.

⚠ Selbst die so konstruierte Transformationsmatrix T' ist nicht immer eindeutig. Wie Sie in den Übungen diskutieren, siehe V5.2, operiert hier die Stabilisatorgruppe, sie codiert genau die verbleibende Mehrdeutigkeit.

😊 Wir dürfen daher zwar von *der* affinen Normalform B' sprechen, aber vorsichtig nur von *einer* passenden Transformation (μ, T') .

Warum bin ich hier so pedantisch genau? Ich fühle zwei Gründe:

- Wir wollen lernen, uns bequem doch korrekt ausdrücken, ich in meiner Vorlesung, Sie in Ihren Übungen, wir alle in Prüfungen.
- Ich möchte ehrlich bleiben, Ihre berechtigten Fragen nicht unter den Teppich kehren, sondern mit gutem Beispiel vorangehen.

Dasselbe gilt sinngemäß für die euklidische Normalform, aber subtiler... Da diese Frage von Studierenden gestellt wird, führe ich dies gerne aus. (Keine Sorge, in Klausuren droht keine Gefahr, wir folgen der Neugier.)

Ist die euklidische Normalform eindeutig? Ja! (fast)

V259
Ausführung

😊 Die euklidische Normalform B' ist eindeutig... zumindest fast. Bei einfachen Eigenwerten, so wie hier, können wir höchstens noch die Eigenbasis umsortieren. Wir sortieren die Eigenwerte auf der Diagonalen nach der bewährten Konvention: Nullen hinten, vorne absteigend.

⚠ Im Falle $\delta \in \{0, 2\}$ haben wir eine globale Skalierung $\mu \in \mathbb{R}^\times$ frei. Auch dazu fixieren wir schließlich noch eine passende Konvention... Dazu müssen wir uns entscheiden, wie viele Haare wir spalten wollen.

Laxe Sichtweise: Wir vermeiden eine negative Mehrheit, wie immer. Die letzte Skalierung, nun noch mit $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$, fixieren wir nicht genauer.

Analogie 1: Zur Zykelschreibweise einer Permutation $\tau \in S_n$ erklärt Satz H1D die eindeutige Zerlegung. Beim Aufschreiben, etwa in einer Klausur, erlauben wir uns zudem die offensichtlichen (und harmlosen) Freiheiten.

Analogie 2: Bei der Jordan-Form sind die Jordan-Blöcke eindeutig, doch ihre Anordnung untereinander dürfen wir noch beliebig wählen. Auch dies könnten wir genauer fixieren, aber das scheint übertrieben.

Ist die euklidische Normalform eindeutig? Ja! (fast)

V260
Ausführung

Strenge Sichtweise: Wir fixieren auch noch die letzte Skalierung.

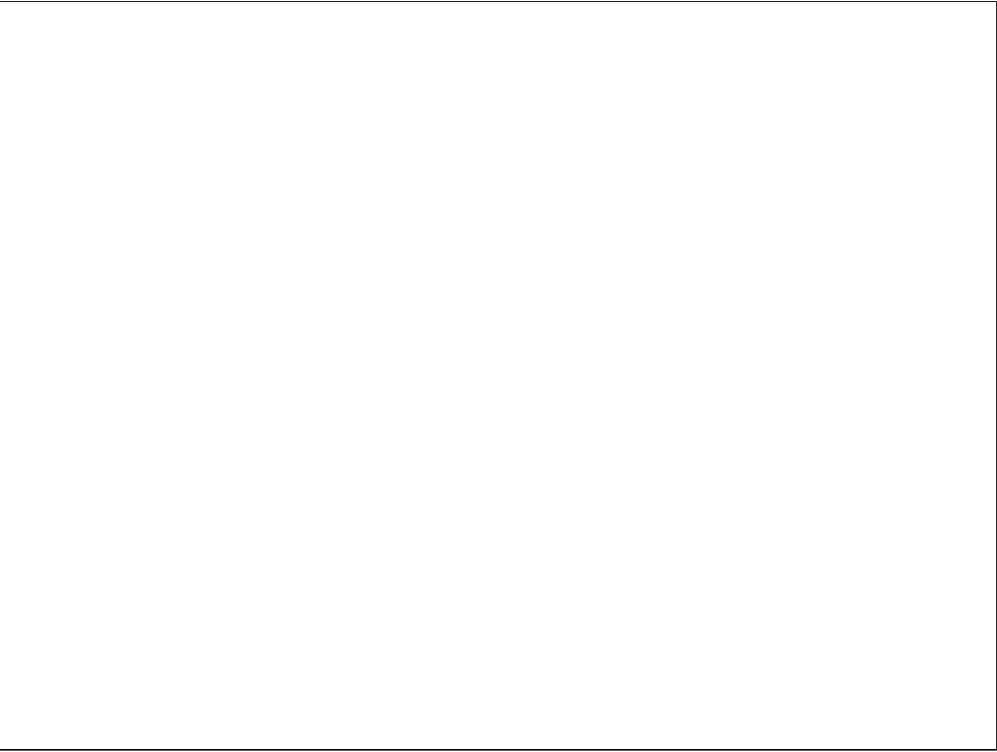
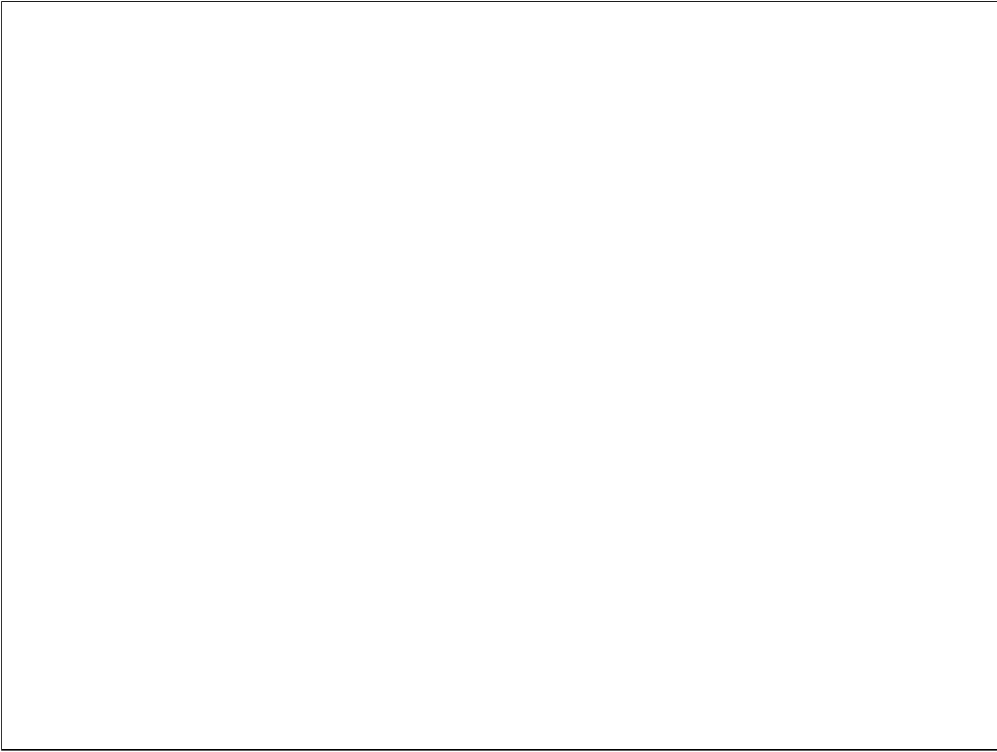
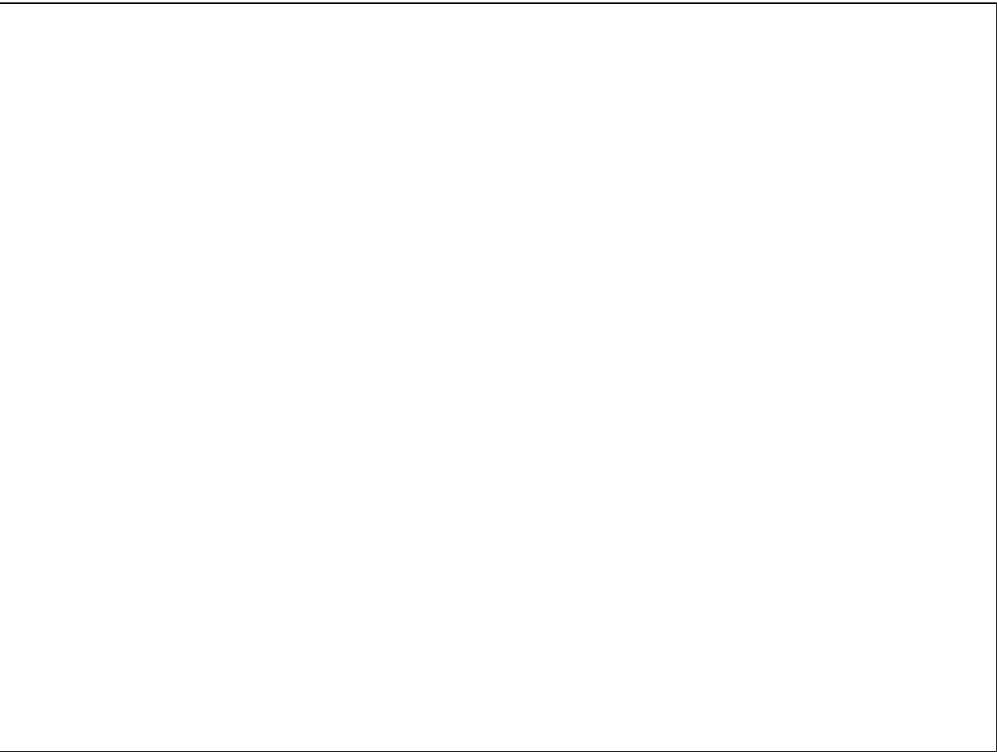
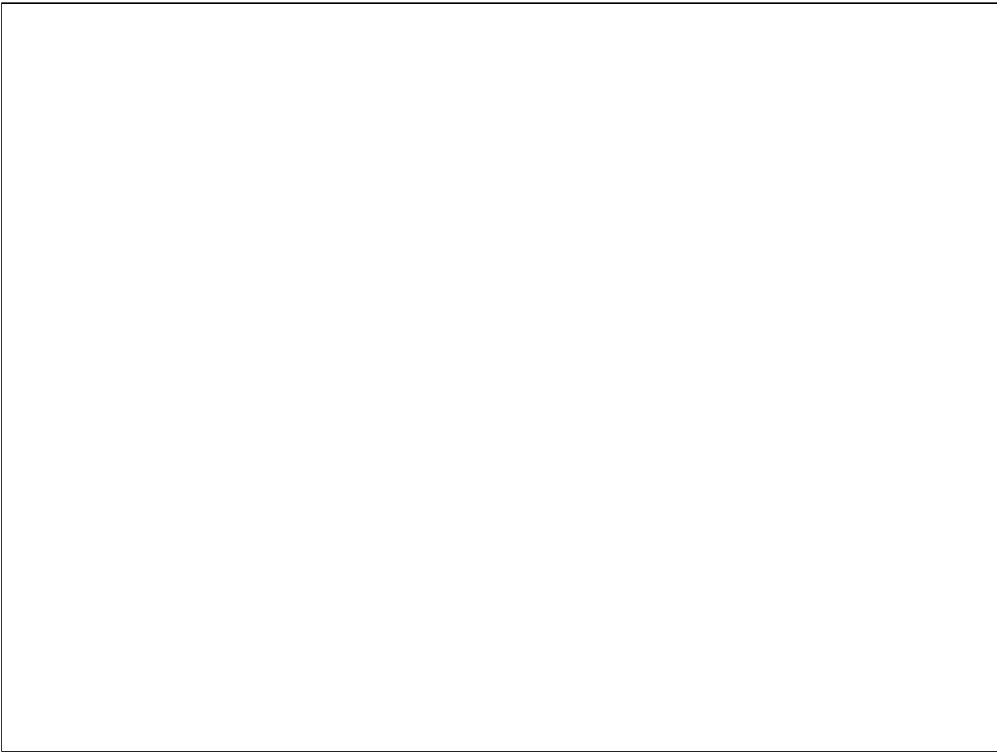
Analogie 3: Wenn Sie diese oder ähnliche Klassifikationen auf dem Computer implementieren, dann sollte dazu genau spezifiziert werden, wer welche Wahlfreiheiten hat. Andernfalls verlässt sich womöglich eine Abnehmerin auf eine Normierung, die ein Lieferant gar nicht einhält.

😊 Also gut, für alle, die es ganz genau nehmen wollen, hier mein ultimativer Vorschlag zur Normierung quadratischer Polynome in ihrer euklidischen Klassifikation im letzten noch verbleibenden Falle $\delta \in \{0, 2\}$.

(1) Wir skalieren global so, dass $\max_{i=1}^r \alpha_i^2 = 1$ gilt, oder $\sum_{i=1}^r \alpha_i^2 = 1$, o.ä. Die Hauptachsenlängen sind nicht absolut, sondern nur relativ gegeben.

(2) Wir vermeiden wie üblich eine negative Mehrheit. Das fixiert das noch fragliche Vorzeichen, allerdings selbst das nicht immer...

(3) Bleibt nur ein letztes Haar zu spalten: Was tun, wenn es ebenso viele positive wie negative Eigenwerte gibt? Wir maximieren lexikographisch. (Es scheint mir übertrieben, aber es beschert uns Eindeutigkeit. Uff!)



Kapitel V

Bonusmaterial

$(+, -, -, -)$ *H. Minkowski* $(-, +, +, +)$

*Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich
völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art
Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.*

Hermann Minkowski (1864–1909), *Raum und Zeit* (1909)

Inhalt dieses Kapitels V

5 Übungsaufgaben

■ Zahlenbeispiele zur Übung

Zahlenbeispiele zur Übung

V501
Übung

😊 Quadriken sind beliebt... auch in Hausaufgaben und in Klausuren. Wir haben für Sie ein paar schöne Beispiele ausgesucht. Auch wenn die Zahlen am Anfang groß erscheinen, löst sich vieles in Wohlgefallen auf.

Übung: (1) Bringen Sie $P = 6X_1^2 + 9X_2^2 - 4X_1X_2 + 16X_1 - 22X_2 + 9$ über $\mathbb{R}$ in euklidische Normalform. (2) Skizzieren Sie die zugehörige Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid P(x) = 0\}$ in neuen und alten Koordinaten.

Übung: (1) Bestimmen Sie die affine Normalform und eine Affinität für $P = 9X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 6X_1X_2 - 6X_1X_3 + 2X_2X_3 - 6X_1 - 2X_2 - 2X_3 + 1$. (2) Um welche Quadrik handelt es sich (als Name gemäß V222)?

🤔 Wenn wir vor einer solchen Gleichung stehen, fragen wir uns: Wie sieht die Nullstellenmenge dieser Gleichung aus? Das sieht man dem Polynom nicht direkt an. Zu dieser Frage hilft meist nur Ausrechnen! In Normalform lässt sich die Quadrik sogar von Hand leicht skizzieren.

Tipp: Machen Sie die beliebte *Punktprobe* und setzen Sie Punkte, die in Ihrer Skizze auf der Quadrik liegen, in die definierende Gleichung ein.

Zahlenbeispiele zur Übung

V502
Übung

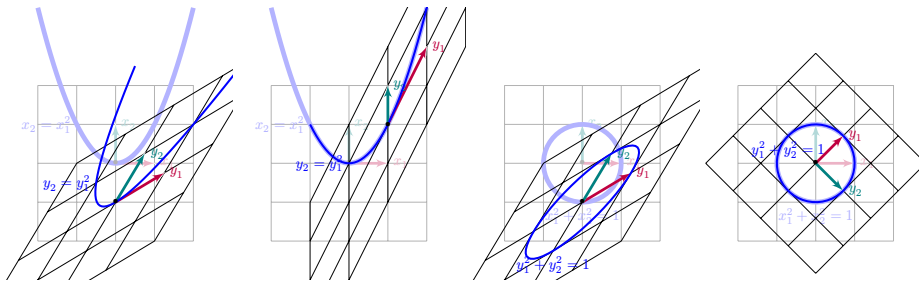
Übung: (1) Überführen Sie das Polynom $P = 23X_1^2 - 16X_2^2 - 16X_3^2 + 52X_1X_2 + 52X_1X_3 - 104X_2X_3 - 144X_1 - 72x_3 + 504 \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$ in euklidische Normalform. (2) Bestimmen Sie die Rotationsachse. (3) Skizzieren Sie Q in transformierten Koordinaten.

Tipp: Wenn Ihnen Wurzeln suspekt sind, können Sie hier tatsächlich ohne Wurzeln auskommen! Suchen Sie Eigenvektoren der Länge 3, die nur die Einträge $\pm 1, \pm 2$ haben. Wenn Ihnen die Zahlen zu groß werden, nutzen Sie einen Computer für Matrizenmultiplikationen.

Übung: (1) Bestimmen Sie die affine Normalform und eine Affinität für das Polynom $P = -8X_1^2 + 4X_1X_2 - X_2^2 + 4X_1 - 6X_2 - 9 \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ (2) Skizzieren Sie die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid P(x) = 0\}$ von Hand, zunächst bequem im transformierten Koordinatensystem (y_1, y_2) , schließlich im ursprünglichen Koordinatensystem (x_1, x_2) . (3) Erstellen Sie die Graphiken mit *Affine-Transformation.tex*.

Tipp: Machen Sie die beliebte *Punktprobe* und setzen Sie Punkte, die in Ihrer Skizze auf der Quadrik liegen, in die definierende Gleichung ein.

Zur Illustration hier ein paar ebene Affinitäten,
die Parabel und Kreis festlassen oder auch nicht:



- ☺ Der Kreis hat erwartungsgemäß viele euklidische Symmetrien.
- ☺ Die Parabel hat viel mehr affine Symmetrien als erwartet!

Diese Bilder wurden mit $\text{\LaTeX}$ und TikZ erzeugt. Zum Experimentieren stellen wir Ihnen die Vorlage `Affine-Transformation.tex` zur Verfügung. Damit können Sie leicht Parabel und Kreis und Hyperbel transformieren und so natürlich auch Ihre Ergebnisse überprüfen.

☹ Wissen Sie alles zur Parabel? Lassen Sie sich überraschen!

Vorgelegt sei eine Menge $Q \subseteq \mathbb{K}^n$, etwa eine Quadrik. Wir betrachten die **Stabilisatorgruppe** $G = \text{AGL}(\mathbb{K}^n, Q) := \{f \in \text{AGL}(\mathbb{K}^n) \mid f(Q) = Q\}$. Man zeigt leicht, dass $G \leq (\text{AGL}(\mathbb{K}^n), \circ, \text{id}_{\mathbb{K}^n})$ eine Untergruppe ist.

Aufgabe: Wir betrachten die Parabel $P = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$.

- (1) Bestimmen Sie möglichst explizit die Stabilisatorgruppe $\text{AGL}(\mathbb{R}^2, P)$.
- (2) Seien $p_1, p_2 \in P$. Wie viele $f \in \text{AGL}(\mathbb{R}^2, P)$ gibt es mit $f(p_1) = p_2$?
- (3) Seien $p_1, p_2, q_1, q_2 \in P$ zwei Punktpaare mit $p_1 \neq p_2$ und $q_1 \neq q_2$. Wie viele Affinitäten $f \in \text{AGL}(\mathbb{R}^2, P)$ gibt es mit $f(p_1) = q_1, f(p_2) = q_2$?

Aufgabe: Nun betrachten wir den Kreis $K = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

- (1) Bestimmen Sie möglichst explizit die Stabilisatorgruppe $\text{AGL}(\mathbb{R}^2, K)$.
Tipp: Ab hier können Sie anschaulich-geometrisch argumentieren:
- (2) Zu $p_1, p_2 \in K$ existieren genau zwei $f \in \text{AGL}(\mathbb{R}^2, K)$ mit $f(p_1) = p_2$.
- (3) Seien $p_1, p_2, q_1, q_2 \in K$ zwei Punktpaare mit $p_1 \neq p_2$ und $q_1 \neq q_2$. Wie viele Affinitäten $f \in \text{AGL}(\mathbb{R}^2, K)$ gibt es mit $f(p_1) = q_1, f(p_2) = q_2$?

Aufgabe: Seien $Q, Q' \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei Quadriken, sowie $q \in Q$ und $q' \in Q'$. Sei $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Affinität mit $g(Q) = Q'$ und $g(q) = q'$.

Wir setzen $\text{AGL}(\mathbb{R}^n, Q, q) = \{f \in \text{AGL}(\mathbb{R}^n, Q) \mid f(q) = q\}$. Zeigen Sie:

- (1) Ist $f \in \text{AGL}(\mathbb{R}^n, Q)$, dann ist $g \circ f \circ g^{-1} \in \text{AGL}(\mathbb{R}^n, Q')$.
- (2) Ist $f \in \text{AGL}(\mathbb{R}^n, Q, q)$, dann ist $g \circ f \circ g^{-1} \in \text{AGL}(\mathbb{R}^n, Q', q')$.
- (3) Die Abbildung $\text{AGL}(\mathbb{R}^n, Q, q) \rightarrow \text{AGL}(\mathbb{R}^n, Q', q') : f \mapsto g \circ f \circ g^{-1}$ ist eine Bijektion, genauer gesagt ein Gruppenisomorphismus.
- (4) Folgern Sie, dass es keine Affinität $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gibt mit $g(K) = P$.

Bemerkung: Parabel und Kreis sind wesentlich verschieden: Es gibt keine Affinität der Ebene $\mathbb{R}^2$, die den Kreis in die Parabel überführt. Vermutlich hätten Sie das auch erwartet, denn der Kreis ist beschränkt, die Parabel jedoch ist unbeschränkt, sie entkommt ins Unendliche. Der Kreis hat in jeder Richtung eine Tangente, die Parabel in genau einer Richtung nicht. Es gibt demnach viele Möglichkeiten, Kreis und Parabel zu unterscheiden, hier schauen wir auf die Symmetrien.

Jedes quadratische Polynom $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]_{\leq 2}$ beschreibt eindeutig eine Quadrik $Q \subseteq \mathbb{K}^n$. Umgekehrt jedoch gilt nicht, dass jede Quadrik durch ein eindeutiges Polynom beschrieben wird: Skalieren wir P mit $\mu \in \mathbb{K}^\times$ zu μP , so bleibt die Nullstellenmenge dieselbe. Auch quadratische Polynome, die nicht skalare Vielfache voneinander sind, können dieselbe Quadrik definieren. Zum Beispiel in der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ beschreiben $x_1^2 + x_2^2 = 0$ und $x_1^2 + 2x_2^2 = 0$ beide dieselbe Quadrik $Q = \{0\}$.

☹ Können wir also überhaupt sicher sein, dass es zu zwei Quadriken $Q, Q' \subseteq \mathbb{R}^n$ mit verschiedener Normalform nicht doch eine Affinität gibt, die die eine Quadrik auf die andere abbildet? Als Beispiel betrachten wir hier Parabel und Kreis. Um diese Quadriken zu unterscheiden, suchen wir Invarianten, die unter Affinitäten nicht verändert werden. Ein häufig genutztes Werkzeug, Objekte zu unterscheiden, sind Symmetriegruppen jeglicher Art. Hier betrachten wir die Affinitäten, die die Quadrik festlassen und ggf. noch einen ausgezeichneten Punkt der Quadrik.