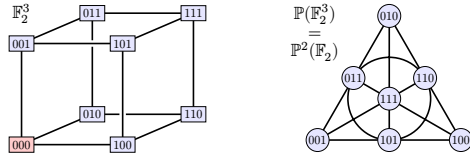


Kapitel U

Affine und projektive Räume



Aus dem K -linearen Raum $(V, +, 0, -)$ entsteht der K -affine Raum $\mathbb{A}(V) = (V, +, -)$ über V , indem wir seinen Ursprung 0 vergessen.

Im projektiven Raum $\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\}) / (K \setminus \{0\})$ ignorieren wir die Skalierung: Geraden sind die neuen Punkte!

Inhalt dieses Kapitels U

- 1 Von linearen zu affinen Räumen
 - Affine Räume, affine Abbildungen
 - Affine Unterräume, affine Basen
 - Erste Beispiele und Anwendungen
- 2 Affinitäten und Bewegungen
 - Affine Isomorphismen und $\text{AGL}_n(K)$
 - Affine Isometrien und $\text{AGO}_n(\mathbb{R})$
 - Beispiele zu reellen Quadriken
- 3 Von linearen zu projektiven Räumen
 - Geraden sind die neuen Punkte!
 - Die projektive lineare Gruppe $\text{PGL}_n(\mathbb{K})$
 - Kegelschnitte: affine Karten im projektiven Raum

Motivation und Überblick

In der Linearen Algebra untersuchen wir hauptsächlich lineare Räume und lineare Abbildungen. Dies ist eine wunderschöne und nützliche algebraische Struktur, sie erlaubt eine starke Theorie und effiziente Algorithmen, zudem anschaulich-geometrische Interpretationen.

Einige geometrische Anwendungen fordern jedoch eine etwas andere Herangehensweise. Die Punkte auf einer Landkarte, zum Beispiel, bilden zunächst keinen Vektorraum, zumindest solange noch kein Ursprung „0“ ausgezeichnet ist. Doch von a zu b auf unserer Landkarte führt genau ein Verschiebungsvektor v . So werden Punkte $a, b \in X$ und Vektoren $v \in U$ auf raffinierte Art verwoben. Diese Idee wollen wir nun präzisieren mit dem Begriff des affinen Raums X über dem linearen Raum U .

Aufbauend auf der linearen Theorie erweist sich diese affine Anwendung als erfreulich leicht, unsere soliden Grundlagen zählen sich erneut aus. Affinitäten $\text{AGL}_n(K)$ und Bewegungen $\text{AGO}_n(\mathbb{R})$ sind hier zunächst Werkstücke und anschließend Werkzeuge für das folgende Kapitel.

Motivation und Überblick

Lineare Räume haben als Geschwister die affinen Räume und ebenso die projektiven Räume. Letztere entstanden zuerst in der Renaissance aus der Untersuchung perspektivischer Darstellung in Malerei und Architektur, durch *Projektion* einer dreidimensionalen Szene auf die Bildebene.

Ein früher Vorläufer der projektiven Sichtweise sind Kegelschnitte: Sie bündeln quadratische Kurven wie Kreise, Ellipsen, Parabeln Hyperbeln. Diese faszinieren seit der griechischen Antike, sind klassischer Schulstoff und überall nützliche Werkzeuge von Architektur bis Astronomie.

Die daraus destillierten mathematischen Strukturen sind ebenso einfach und elegant wie abstrakt und nützlich. Wir werden hierzu die allerersten Schritte unternehmen, um unsere geometrische Anschauung zu schulen. *In vielen Anwendungen gilt: Fast nichts ist linear. Nahezu alles ist affin.*

Wir bereiten diese schönen Begriffe in diesem Kapitel behutsam vor, damit wir sie im nächsten Kapitel dann vertraut anwenden können, wenn wir Quadriken als geometrische Objekte klassifizieren.

🤔 Was sind K -lineare Räume? Homomorphismen? Unterräume?
Sei $(K, +, 0, \cdot, 1)$ ein Körper; als Grundlage genügt zunächst ein Ring.

Ein **linearer Raum** $(V, +, 0, \cdot)$ über K ist eine **abelsche Gruppe** $(V, +, 0)$ mit **Skalierung** $(V, +, 0) \curvearrowright (K, +, 0, \cdot, 1)$ als distributiver Operation (L1A).

Seien U, V lineare Räume über K . Eine **K -lineare Abbildung** $f: U \rightarrow V$ ist additiv, $f(x + y) = f(x) + f(y)$, und K -homogen, $f(x\lambda) = f(x)\lambda$ für alle $x, y \in U$ und alle $\lambda \in K$. Wir nennen f einen **K -Homomorphismus**. Identität, Komposition, Umkehrung ergeben Homomorphismen (L1J).

Ein **K -linearer Unterraum** $U \leq (V, +, \cdot)$ ist eine Teilmenge $U \subseteq V$ mit $0 \in U$ und $U + U \subseteq U$ und $U \cdot K \subseteq U$. Durch Einschränkung ist $(U, +, \cdot)$ selbst ein K -linearer Raum und $\text{inc}: U \hookrightarrow V$ ein K -Homomorphismus.

⚠ In jedem linearen Raum $(V, +, 0_V)$ ist der Ursprung 0_V ausgezeichnet. Jede lineare Abbildung $f: U \rightarrow V$ schickt 0_U auf 0_V . Jeder lineare Unterraum $U \leq V$ enthält $0_U = 0_V$.

⚠ Anwendungen erfordern meist mehr Flexibilität, oft ist es vorteilhaft, alle Punkte gleichberechtigt zu behandeln. Diese Idee führen wir nun gebührend aus und kommen so von *linearen* Räumen zu *affinen* Räumen. Wir erhalten damit auch allgemeinere Abbildungen und Unterräume.

Das lohnt sich in physikalischen und mathematischen Anwendungen, zuvörderst als euklidische Bewegung in der Hauptachsentransformation. Es beschert uns zudem eine anwendungsfreundliche Klärung natürlicher Begriffe wie *Punkt* vs *Vektor* oder *fester Vektor* vs *beweglicher Vektor* etc.

Dies führt uns zur abstrakten Definition eines affinen Raumes. Zuvor erinnere ich an einige vertraute Beispiele. Diese illustrieren, dass Sie schon lange mit affinen (Unter)Räumen arbeiten, etwa als Lösungsmengen von inhomogenen linearen Gleichungssystemen.

Dieses Kapitel schließt so gesehen eine Lücke von der linearen Theorie zur affinen Anwendung. Wir fixieren dazu präzise Begriffe und passende Rechenregeln, so dass Sie diese fortan guten Gewissens nutzen können.

Zu $f: V \rightarrow W$ linear und $y \in W$ betrachten wir die Lösungsmenge

$$L = \{x \in V \mid f(x) = y\}.$$

Speziell für $V = K^n$ und $W = K^m$ und $f(x) = Ax$ mit $A \in K^{m \times n}$ gilt:

$$L = \{x \in K^n \mid Ax = y\}.$$

Ist $L \subseteq V$ ein **linearer Unterraum**? (Wir schreiben dann $L \leq V$).

😊 Für $y = 0$, ja! Dies ist der wohlvertraute Kern $\text{Ker}(f) \leq V$.

😞 Für $y \neq 0$, nein! Es gilt nicht einmal $0 \in L$, also $L \not\leq V$.

Ist alle Hoffnung verloren? Ist die Menge L völlig strukturlos? O nein!
Für jede Lösung $v_0 \in L$ gilt $L = v_0 + \text{Ker } f$. Das ist ein **affiner Unterraum**!

leere Menge: $L = \emptyset$, $\dim_K(\text{Ker } f) = ?$

ein Punkt: $L = \{v_0\}$, 0

eine Gerade: $L = \{v_0 + v_1 t_1 \mid t_1 \in K\}^!$, 1

eine Ebene: $L = \{v_0 + v_1 t_1 + v_2 t_2 \mid t_1, t_2 \in K\}^!$, 2

Das ist unsere algebraische und inzwischen wohlvertraute Motivation, affine (Unter)Räume $L \subseteq V$ zu betrachten, und geradezu ihre Definition.

Jeder lineare Unterraum $U \leq V$ ist auch ein affiner Unterraum $U \subseteq V$.

Jeder affine Unterraum $X \subseteq V$ ist entweder leer oder von der Form $X = v + U$ mit $U \leq V$, also ein um v verschobener linearer Raum.

Vornehm gesagt ist $X = v + U$ eine Nebenklasse von $U \leq V$.

Diese Nebenklassen bilden die Elemente des Quotientenraums

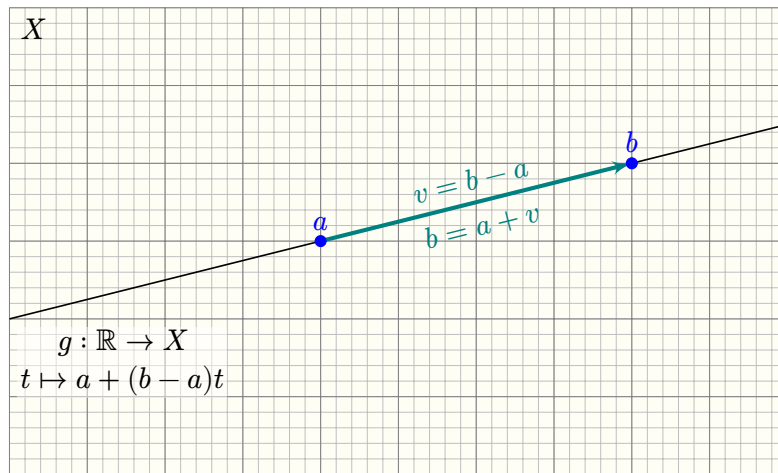
$$V/U := \{v + U \mid v \in V\}.$$

Aufgabe: Umgekehrt ist ein K -affiner Unterraum $X = v + U \subseteq V$ genau dann ein K -linearer Unterraum, $X \leq V$, wenn $v \in U$ gilt.

Lösung: „ $\Rightarrow$ “: Ist $X = v + U$ ein K -linearer Unterraum in V , kurz $X \leq V$, so gilt definitionsgemäß $0 \in X$ und $X + X \subseteq X$ und $X \cdot K \subseteq X$.

Demnach existiert zu v ein $u \in U$ mit $v + u = 0$, also $v = -u \in X$.

„ $\Leftarrow$ “: Ist $U \leq V$ ein K -linearer Unterraum und $v \in U$, so folgt $v + U = U$, denn zu jedem $u \in U$ gilt $v + u \in U$ (also „ $\subseteq$ “) und $-v + u \in U$ (somit „ $\supseteq$ “).



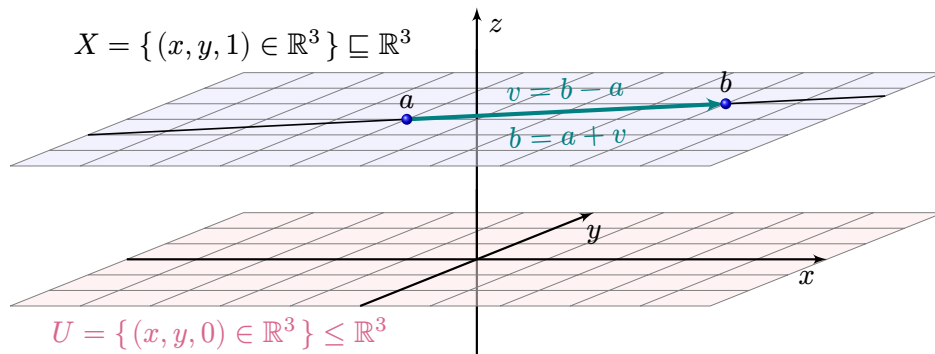
Sie betrachten ein leeres Blatt Papier X und darauf zwei Punkte $a \neq b$. Ohne „Ursprung“ ist es sinnlos, a und b zu „addieren“ oder mit $\lambda \neq 1$ zu „skalieren“. Wir können jedoch den Richtungsvektor $v = b - a$ bilden und die Verbindungsgerade G parametrisieren durch $g: \mathbb{R} \rightarrow X: t \mapsto a + vt$.

In Anwendungen der Linearen Algebra betrachtet man oft und ganz ohne Skrupel den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ als „die Zeichenebene“ und ebenso den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ als den uns umgebenden „physikalischen Raum“. Das ist eine praktisch-bequeme Kurzform, aber auch recht engstirnig.

Genau besehen ist das ein Akt der Willkür: Wir *wählen* einen Ursprung O und eine Basis $v_1, \dots, v_n$ aller Richtungen und zwingen so dem Raum X unsere Koordinaten $\Phi: \mathbb{R}^n \simeq X: (x_1, \dots, x_n) \mapsto O + v_1x_1 + \dots + v_nx_n$ auf. Anschließend rechnen wir statt im Raum X im Koordinatenraum $\mathbb{R}^n$.

⚠ Meistens jedoch gibt es keinen ausgezeichneten Ursprung und keine fest eingebauten Koordinatenachsen. Solcherart Koordinaten sind eine zusätzliche Hilfskonstruktion! Ebenso möglich ist jede andere Wahl von Koordinaten. Sie kennen und nutzen bereits Koordinatenwechsel.

😊 „Nieder mit Willkür und Privilegien!“ In einem *affinen Raum* sind alle Punkte gleichberechtigt. Koordinaten sind manchmal gar nicht nötig. Wenn sie nötig sind, dann wollen wir sie nicht willkürlich wählen, sondern dem vorliegenden Problem möglichst geschickt anpassen.



Sie betrachten die Tischebene X , etwa für physikalische Anwendungen. Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ beschreiben wir dies durch eine *affine Ebene* $X \subseteq \mathbb{R}^3$, etwa als Teilmenge $X = \{(x, y, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ wie oben skizziert.

Im Raum X ist es sinnlos, Punkte a und b zu „addieren“ oder mit $\lambda \neq 1$ zu „skalieren“. Wir können jedoch den Richtungsvektor $v = b - a$ bilden und die Verbindungsgerade G parametrisieren durch $g: \mathbb{R} \rightarrow X: t \mapsto a + vt$. Sie läuft, wie gewünscht, durch die Punkte $a = g(0)$ und $b = g(1)$.

Sei $(V, +, 0, \cdot)$ ein **linearer Raum** über dem Ring K . Wir können Vektoren $a, b \in V$ addieren und mit $\lambda \in K$ skalieren. Dabei gelten die vereinbarten Rechenregeln L1A. Demnach hat V den Nullpunkt 0 als ausgezeichneten Ursprung. Das ist wunderschön und nützlich, damit können wir rechnen. Für viele Anwendungen ist das jedoch schon zu viel verlangt!

In einem **affinen Raum** gibt es keinen besonderen Punkt, den Sie als Ursprung auszeichnen. Alle Punkte sind gleichberechtigt! Was bleibt?

Translation: Wir können jeden Punkt $a \in X$ durch einen Vektor $v \in V$ verschieben und erhalten einen neuen Punkt $b = a + v$ im Raum X .

Differenz: Umgekehrt können wir vom Punkt $a \in X$ zum Punkt $b \in X$ den Verschiebungsvektor $v = b - a$ in V bestimmen, so dass $a + v = b$ gilt.

Humorvoll zugespitzt formuliert es der beliebte Slogan:

*Ein affiner Raum ist wie ein linearer Raum,
der seinen Ursprung verloren hat.*

Definition U1A: K -affiner Raum

Sei $(V, +, 0, \cdot)$ ein K -linearer Raum. Ein **K -affiner Raum** $(X, +, -)$ über V besteht aus einer Menge $X \neq \emptyset$ mit zwei Operationen

$$+ : X \times V \rightarrow X : (a, v) \mapsto b = a + v \quad \text{Verschiebung um } v,$$

$$- : X \times X \rightarrow V : (b, a) \mapsto v = b - a \quad \text{Differenzvektor } \overrightarrow{ab},$$

sodass für alle Punkte $a, b \in X$ und alle Vektoren $u, v \in V$ gilt:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{A0:} & a + 0 = a \\ \text{A1:} & (a + u) + v = a + (u + v) \\ \text{A2:} & a + v = b \Leftrightarrow v = b - a \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} X \overset{+}{\curvearrowright} V \text{ operiert} \\ \text{transitiv und frei.} \end{array}$$

Die zugrundeliegende Menge X heißt **Punktmenge** oder **Punktraum**. Jedes Element $a \in X$ nennen wir einen **Punkt** des affinen Raums X .

Für jeden Punkt $a \in X$ gilt $V = \{b - a \mid b \in X\}$; dies ist die Menge aller **Differenzvektoren**, **Verschiebungsvektoren** oder **Richtungen**.

(A01) Die Gruppe $(V, +, 0, -)$ operiert auf der Menge X durch $X \overset{+}{\curvearrowright} V$;
(A2) transitiv / frei / beides bedeutet, von jedem $a \in X$ kommen wir zu jedem $b \in X$ mit mindestens / höchstens / genau einem Vektor $v \in V$.

⚠ Die leere Menge $X = \emptyset$ erfüllt dies für *jeden* K -linearen Raum V . Den leeren Raum behandeln wir separat, daher fordern wir hier $X \neq \emptyset$.

(1) Sei $(V, +, 0, \cdot)$ ein K -linearer Raum. Der **affine Standardraum** $\mathbb{A}(V) = (V, +, -)$ über V besteht aus der Menge $X = V$ mit der üblichen Addition $+: X \times V \rightarrow X$ und Subtraktion $-: X \times X \rightarrow V$ von Vektoren.

⚠ Auf dem affinen Raum $\mathbb{A}(V)$ haben wir weniger Struktur als auf dem zugrundeliegenden linearen Raum V : Wir vergessen den Nullpunkt und die Skalierung, es bleiben nur Addition und Subtraktion, geometrisch als Verschiebung und Differenzvektor. Ist das zu spitzfindig? Natürlicher ist:

(2) Sei $U \leq V$ ein K -linearer Unterraum. Zu jedem Fußpunkt $a \in V$ ist die Menge $X = a + U \subseteq V$ ein K -affiner Raum über U , mit der üblichen Addition $+: X \times U \rightarrow X$ und Subtraktion $-: X \times X \rightarrow U$ von Vektoren.

Elemente $a, b \in X$ nennen wir **Punkte**. Jeder Vektor $v \in V$ definiert die zugehörige **Translation** $\tau_v : X \rightarrow X : a \mapsto b = a + v$. Dazu ist τ_{-v} invers:

$$\tau_{-v} \circ \tau_v : a \mapsto (a + v) + (-v) \stackrel{\text{A1}}{=} a + (v + (-v)) \stackrel{\text{Grp}}{=} a + 0 \stackrel{\text{A0}}{=} a$$

$$\tau_v \circ \tau_{-v} : a \mapsto (a + (-v)) + v \stackrel{\text{A1}}{=} a + ((-v) + v) \stackrel{\text{Grp}}{=} a + 0 \stackrel{\text{A0}}{=} a$$

Jeder Fußpunkt $a \in X$ definiert seine **Karte** $\varphi_a : X \rightarrow V : b \mapsto v = b - a$. Invers hierzu ist die **Parametrisierung** $\psi_a : V \rightarrow X : v \mapsto b = a + v$.

$$\psi_a \circ \varphi_a : b \mapsto a + (b - a) \stackrel{\text{A2}}{=} b$$

$$\varphi_a \circ \psi_a : v \mapsto (a + v) - a \stackrel{\text{A2}}{=} v$$

Dadurch versehen wir unseren **Punktraum** X mit **Koordinaten** in V . Manchmal unterscheidet man „Ortsvektoren“ und „freie Vektoren“.

Ein **Ortsvektor** des Punktes $b \in X$ bezüglich des Fußpunktes $a \in X$ ist der Vektor $v = b - a$. Hier fungiert a als (willkürlich gewählter) Ursprung.

Ein **freier Vektor** $v \in V$ entspricht der Translation $\tau_v : x \mapsto y = x + v$: Wir können v in jedem Punkt $x \in X$ anheften und erhalten $y = x + v$.

Dank (A2) können wir die Subtraktion aus der Addition rekonstruieren. Wir fordern dann nur $(X, +)$ mit (A01), also eine Operation der Gruppe $(V, +)$ auf X , mit der zusätzlichen Eigenschaft (A2'): Zu jedem Paar von Punkten $a, b \in X$ existiert genau ein Vektor $v \in V$, der $a + v = b$ erfüllt. Dies definiert $v =: b - a$, und $-: X \times X \rightarrow V$ erfüllt (A2). Übung!

Alternativ können wir die Addition aus der Subtraktion rekonstruieren. Wir fordern dann $(X, -)$ als Menge X mit der Differenz als einer äußeren Verknüpfung $-: X \times X \rightarrow V$ und den folgenden beiden Eigenschaften:
(A0'): Für je drei Punkte $a, b, c \in X$ gilt $(c - b) + (b - a) = c - a$.
(A1'): Zu jedem $a \in X$ und $v \in V$ existiert genau ein $b \in X$ mit $b - a = v$. Dies definiert $b =: a + v$, und $+: X \times V \rightarrow X$ erfüllt (A01). Übung!

Beide Kurzformen $(X, +)$ und $(X, -)$ sind in der Literatur üblich; die jeweils andere Verknüpfung – bzw. $+$ wird dann rekonstruiert. Dies verschiebt die Definition etwas von Strukturen zu Eigenschaften. Ich plädiere in Definition U1A, wie immer, für die explizite Angabe aller Strukturen; unsere Axiome (A012) sind dadurch einfache Allaussagen.

Beispiel: Jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ definiert ihre K -lineare Abbildung $f: K^n \rightarrow K^m: u \mapsto Au$, und zusammen mit einem Fußpunkt $b \in \mathbb{A}(K^m)$ die K -affine Abbildung $g: \mathbb{A}(K^n) \rightarrow \mathbb{A}(K^m): 0 + u \mapsto b + Au$. Allgemein:

Definition U1b: K -affine Abbildung

Gegeben seien K -affine Räume $X \neq \emptyset$ über U und $Y \neq \emptyset$ über V . Eine Abbildung $g: X \rightarrow Y$ heißt **K -affin**, falls für jeden Punkt $a \in X$ die Differenzabbildung $f_a: U \rightarrow V: u \mapsto g(a + u) - g(a)$ linear ist.

Somit gilt $g(a + u) = g(a) + f_a(u)$ für jeden Vektor $u \in U$, mit f_a linear.

Gilt dies für *einen* Punkt $a \in X$, so für *jeden* Punkt $b \in X$, denn $f_b = f_a$. Dadurch ist $f = f_a$ wohldefiniert, unabhängig vom Fußpunkt $a \in X$. Wir nennen f den **Linearteil** von g und sagen g ist affin über f .

Beweis: Für alle $u \in U$ gilt $g(a + u) = g(a) + f_a(u)$. Mit f_a linear folgt $g(b + u) \stackrel{\text{Aff}}{=} g(a + (b - a) + u) \stackrel{\text{Lin}}{=} g(a) + f_a(b - a) + f_a(u) \stackrel{\text{Var}}{=} g(b) + f_a(u)$. Somit gilt $f_b(u) = g(b + u) - g(b) = f_a(u)$ für alle $u \in U$, also $f_b = f_a$. QED

Die präzise Sprechweise zu linearen Räumen und linearen Abbildungen ist Ihnen inzwischen geläufig und hat sich vielfach bewährt, sowohl im Aufbau der zugrundeliegenden Theorie als auch in ihren Anwendungen. Ganz genau so ist es nun für affine Räume und ihre affinen Abbildungen. Je nach Situation sagt man statt „affin“ zur Betonung auch „affin-linear“.

L In der Schule und manchen Anwendungen nennt man Abbildungen der Form $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto ax + b$ gern „linear“, obwohl hier eigentlich „affin-linear“ oder kurz „affin“ richtig wäre. Dieser Zusammenprall gegenläufiger Traditionen ist unschön, aber nicht mehr zu ändern.

	orthodox	alternativ
f	linear	homogen linear
g	affin(-linear)	(inhomogen) linear

☺ Erfreulich selten entstehen dadurch ernsthafte Schwierigkeiten; wo wir Verwechslungen befürchten, klären wir im Kontext, was gemeint ist.

Beispiel: (0) Jede **K -lineare** Abbildung $f: K^n \rightarrow K^m$ ist von der Form

$$f(v) = Av \quad \text{mit} \quad A \in K^{m \times n}.$$

(1) Jede **affine Abbildung** $g: \mathbb{A}(K^n) \rightarrow \mathbb{A}(K^m)$ ist von der Form

$$g(0 + v) = b + Av \quad \text{mit} \quad b \in K^m.$$

Die Abbildung $f: v \mapsto Av$ ist der **Linearteil** von $g: 0 + v \mapsto b + Av$. Wir können f allein aus g rekonstruieren dank $f(v) = g(v) - g(0)$.

Der Verschiebungsvektor $b = g(0)$ ist der **Translationsteil** von g . Die affine Abbildung g ist genau dann linear, wenn $g(0) = 0$ gilt.

*Ein affiner Raum ist wie ein linearer Raum,
der seinen Ursprung verloren hat.*

*Eine affine Abbildung ist wie eine lineare Abbildung,
die den Ursprung verschieben darf.*

(2) Eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist **differenzierbar** im Punkt $a \in D$, wenn sie sich linearisieren lässt, also affin-linear approximieren gemäß

$$\underbrace{f(a + x)}_{\text{unsere Funktion}} = \underbrace{f(a) + Ax}_{\text{affine Approximation}} + \underbrace{\varepsilon(x)}_{\text{Fehler}} \quad \text{mit } \|\varepsilon(x)\|/\|x\| \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow 0.$$

Der Fehler ist von höherer Ordnung, kurz $\varepsilon \in o(x)$.

Der Linearteil $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die Ableitung, geschrieben $f'(a) = A$.

Durch $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m: x \mapsto f(a) + Ax$ wird der (affine!) **Tangentenraum** an f im Punkt a parametrisiert. Für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist g eine Schmiegegerade, für $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Schmiegeebene an den Funktionsgraphen von f .

Allgemein beschreibt $g(a + x) = f(a) + Ax$ die affin-lineare Abbildung, die f am besten approximiert, das heißt sich am besten anschmiegt. Genau das besagt der Fehlergrenzwert $\|\varepsilon(x)\|/\|x\| \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$.

☺ **Differentialrechnung** verbindet Grenzwerte mit Linearer Algebra! Das ist das Fundament und das geniale Erfolgsrezept der Analysis. Dazu „linearisieren“ wir $f: \mathbb{A}(\mathbb{R}^n) \supseteq D \rightarrow \mathbb{A}(\mathbb{R}^m)$ so gut wie möglich.

Beispiel: Zu jedem K -linearen Unterraum $U \leq K^n$ und Punkt $a \in K^n$ erhalten wir den K -affinen Unterraum $X = a + U \subseteq \mathbb{A}(K^n)$. Allgemein:

Definition U1c: K -affiner Unterraum $X \subseteq Y$

Sei $(Y, +, -)$ ein K -affiner Raum über V . Eine Teilmenge $\emptyset \neq X \subseteq Y$ ist ein **K -affiner Unterraum**, geschrieben $X \subseteq Y$, falls für jeden Punkt $a \in X$ die Differenzmenge $U_a = X - a$ ein linearer Unterraum ist, $U_a \leq V$.

Somit gilt $X = a + U_a$ mit $U_a \leq V$ linear, wie im motivierenden Beispiel.

Gilt dies für *einen* Punkt $a \in X$, so für *jeden* Punkt $b \in X$, denn $U_b = U_a$. Dadurch ist $U = U_a$ wohldefiniert, unabhängig vom Fußpunkt $a \in X$.

So wird X selbst ein K -affiner Raum über U durch die Einschränkung von $+: Y \times V \rightarrow Y$ zu $X \times U \rightarrow X$ und $-: Y \times Y \rightarrow V$ zu $X \times X \rightarrow U$. Die Inklusionsabbildung $g: X \hookrightarrow Y$ ist affin über $f: U \hookrightarrow V$.

Beweis: Zu $U_a = X - a$ äquivalent ist $X = a + U_a$. Dank $U_a \leq V$ folgt $b + U_a \stackrel{\text{Aff}}{=} a + (b - a) + U_a \stackrel{\text{Lin}}{=} a + U_a \stackrel{\text{Vor}}{=} X$, also $U_b = X - b = U_a$. QED

So prüfen wir bequem, ob $X \subseteq Y$ ein affiner Unterraum ist, kurz $X \subseteq Y$: Für *einen* Punkt $a \in X$ muss $U = X - a \leq V$ ein linearer Unterraum sein. Daraus folgt sofort $U = X - b$, somit $X = b + U$, für *alle* Punkte $b \in X$.

Alle Punkte sind gleichberechtigt. Einer für alle, alle für einen. Der Beweis ist einfach und erspart uns Arbeitsaufwand.

Beispiel: Für $X = K \times \{0\} \cup \{0\} \times K$ gilt $\{b - a \mid a, b \in X\} = K^2$. Ist $X \subseteq K^2$ also ein affiner Unterraum? O nein! Und das ist gut so.

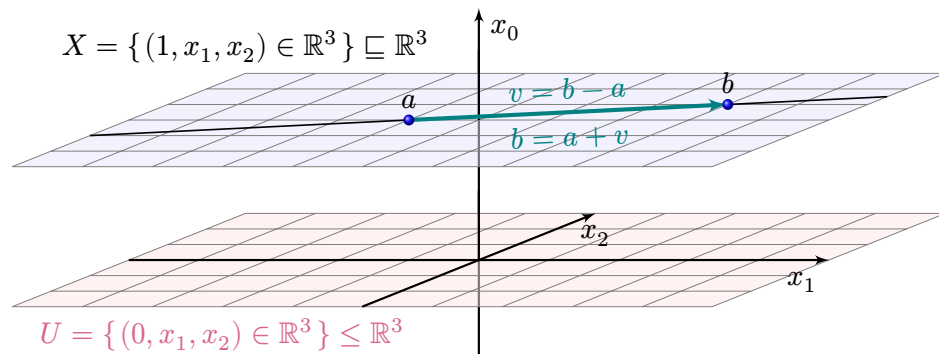
Beispiel: Zu jedem Punkt $a \in Y$ und $U \leq V$ erhalten wir $X = a + U \subseteq Y$. In Worten: Der affine Unterraum $X \subseteq Y$ über $U \leq V$ entsteht, indem wir an einem festen Punkt $a \in Y$ alle Vektoren $u \in U$ des linearen Unterraums $U \leq V$ abtragen. Jeder affine Unterraum $X \subseteq Y$ hat genau diese Form!

(0) Insbesondere gilt $\{a\} \subseteq Y$ über $\{0\} \leq V$ und $Y \subseteq Y$ über $V \leq V$.

(1) Ist $U \leq V$ eindimensional, so ist $X = a + U$ eine **affine Gerade**.

(2) Ist $U \leq V$ zweidimensional, so ist $X = a + U$ eine **affine Ebene**.

Wir setzen dabei voraus, dass die Dimension über K wohldefiniert ist. Dies gilt über jedem Körper K , es genügt DRing D2M oder CRing O3A.



Hier nochmal die obige Tischebene U107 mit schönen Koordinaten:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3, \quad U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\} \leq V, \quad X = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\} \subseteq V.$$

Im $\mathbb{R}$ -linearen Raum V ist $U < V$ ein $\mathbb{R}$ -linearer Unterraum. Im $\mathbb{R}$ -affinen Raum $\mathbb{A}(V)$ über V ist $X \subseteq \mathbb{A}(V)$ ein $\mathbb{R}$ -affiner Unterraum über $U < V$.

Viele der affinen Begriffe sind Ihnen aus der Schulgeometrie vertraut und begegnen Ihnen ebenso in vielen geometrischen Anwendungen:

Beispiele: Durch je zwei Punkte $a, b \in X$, die nicht gleich sind, geht genau eine Gerade, nämlich $G = a + (b - a)K \subseteq X$.

Durch je drei Punkte $a, b, c \in X$, die nicht auf einer Geraden liegen, geht genau eine Ebene, nämlich $E = a + (b - a)K + (c - a)K \subseteq X$.

Entsprechendes gilt natürlich in jeder Dimension. Wir kommen so ganz anschaulich zu einem wichtigen Begriff: Die aufspannenden Punkte sollen „in allgemeiner Lage“ sein. Dies präzisieren wir nachfolgend als **affin unabhängige Familie** bzw. als eine **affine Basis** des Unterraums.

Aufgabe: Sei $X = a + U \subseteq \mathbb{A}(V)$ ein K -affiner Unterraum über $U \leq V$. Genau dann ist $X \leq V$ ein linearer Unterraum, wenn $0 \in X$ gilt.

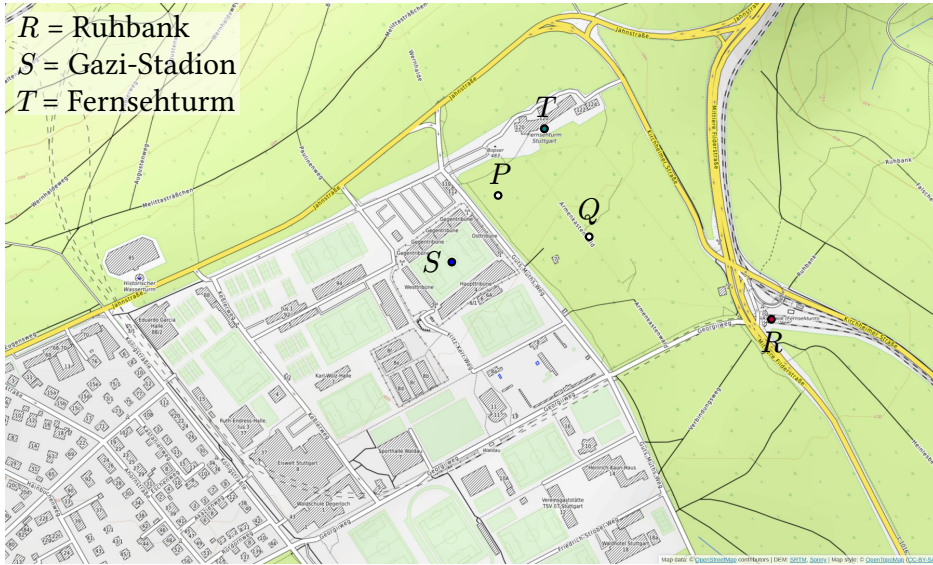
Lösung: „ $\Rightarrow$ “: Klar, jeder lineare Unterraum $X \leq V$ enthält 0.

„ $\Leftarrow$ “: Auch klar, aus $0 \in X$ folgt $X = 0 + U = U \leq V$.

Affine Koordinaten: Geocaching rund um den Fernsehturm

U121

R = Ruhbank
 S = Gazi-Stadion
 T = Fernsehturm

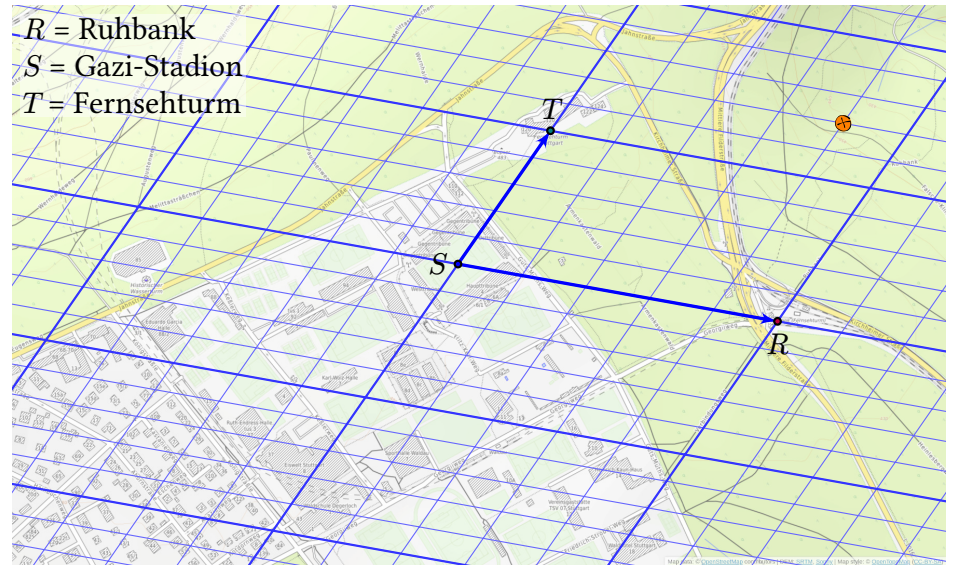


- ☹ Wo liegt $2S$? oder $S + T$? oder $S - T$? Unsinn, das sind keine Punkte!
 ☺ Sinnvoll sind Affinkombinationen wie $\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}T$ oder $\frac{1}{3}R + \frac{1}{3}S + \frac{1}{3}T$.

Affine Koordinaten: Geocaching rund um den Fernsehturm

U122

R = Ruhbank
 S = Gazi-Stadion
 T = Fernsehturm

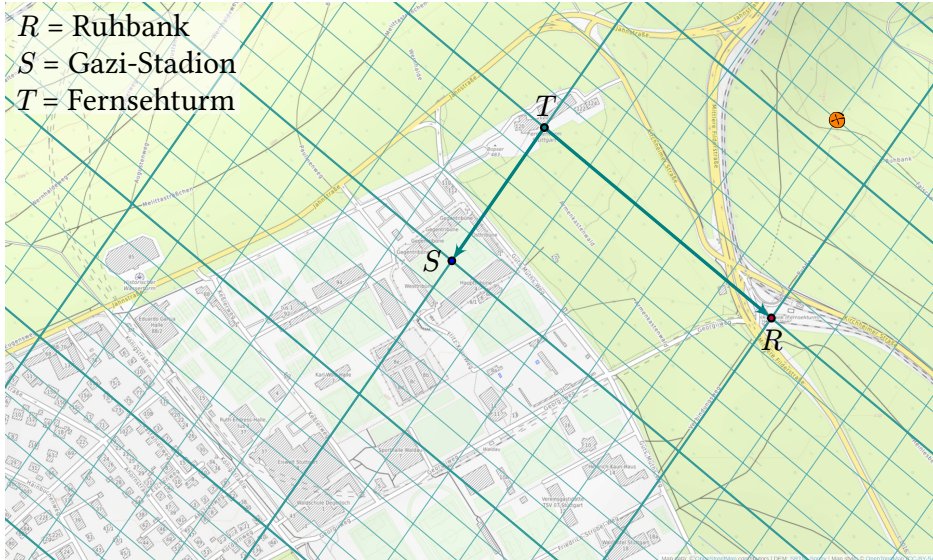


- ☺ Der Schatz befindet sich im Punkt $X = 0.8 \cdot R - 1.2 \cdot S + 1.4 \cdot T$,
 vom Punkt S ausgehend bedeutet das $X = S + 0.8(R - S) + 1.4(T - S)$.

Affine Koordinaten: Geocaching rund um den Fernsehturm

U123

R = Ruhbank
 S = Gazi-Stadion
 T = Fernsehturm

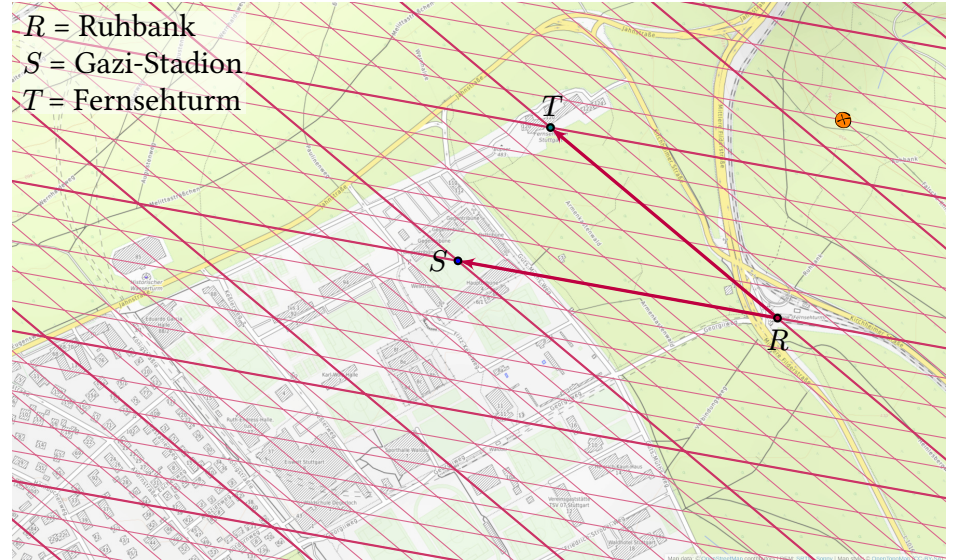


- ☺ Der Schatz befindet sich im Punkt $X = 0.8 \cdot R - 1.2 \cdot S + 1.4 \cdot T$,
 vom Punkt T ausgehend bedeutet das $X = T + 0.8(R - T) - 1.2(S - T)$.

Affine Koordinaten: Geocaching rund um den Fernsehturm

U124

R = Ruhbank
 S = Gazi-Stadion
 T = Fernsehturm



- ☺ Der Schatz befindet sich im Punkt $X = 0.8 \cdot R - 1.2 \cdot S + 1.4 \cdot T$,
 vom Punkt R ausgehend bedeutet das $X = R + 1.4(T - R) - 1.2(S - R)$.

Sei X über U ein K -affiner Raum. Gegeben seien Punkte $a_0, \dots, a_n \in X$ und Skalare $t_0, \dots, t_n \in K$ mit Gesamtmasse $t_0 + \dots + t_n = 1$. Dann ist

$$\varphi(a) := a + (a_0 - a)t_0 + \dots + (a_n - a)t_n \in X$$

unabhängig vom Fußpunkt $a \in X$, also $\varphi(a) = \varphi(b)$ für alle $a, b \in X$.

Beweis: Wir zeigen $\varphi(a + u) = \varphi(a)$ für alle $u \in U$:

$$\begin{aligned} \varphi(a + u) &\stackrel{\text{Def}}{=} a + u + \sum_{i=0}^n [a_i - (a + u)] t_i \\ \varphi(a) &\stackrel{\text{Def}}{=} a + u + \sum_{i=0}^n [(a_i - a) - u] t_i \end{aligned}$$

Die Terme sind paarweise gleich, denn $(a + u) - a_i = (a - a_i) + u$. QED

Übung: Führen Sie die vielen kleinen Zwischenschritte sorgsam aus.

Definition U1D: Affinkombination und baryzentrische Koordinaten

Diesen Punkt $\varphi(a)$ nennen wir die **Affinkombination** von $(a_i, t_i)_{i=0}^n$:

$$\sum_{i=0}^n a_i t_i := \varphi(a_0) = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i - a_0) t_i$$

Bei unserer Definition $b = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i - a_0) t_i$ haben wir willkürlich a_0 als Fußpunkt gewählt und somit die natürliche Symmetrie gebrochen. Die skizzierte Rechnung zeigt, dass jeder Fußpunkt dasselbe Ergebnis liefert. Insbesondere können wir jeden Punkt a_j als Fußpunkt wählen:

$$b = a_j + \sum_{i \neq j} (a_i - a_j) t_i$$

Ausführung: (0) Warum gilt $(a + u) - a_i = (a - a_i) + u$? Wir berechnen

$$a_i + [(a - a_i) + u] \stackrel{A1}{=} [a_i + (a - a_i)] + u \stackrel{A2}{=} a + u.$$

Dank (A2) folgt somit $(a + u) - a_i = (a - a_i) + u$, wie behauptet.

(1) Wesentlich ist schließlich die Gesamtmasse $t_0 + \dots + t_n = 1$.

$$\begin{aligned} \varphi(a + u) &\stackrel{\text{Def}}{=} a + u + \sum_{i=0}^n [a_i - (a + u)] t_i \\ &\stackrel{(0)}{=} a + u + \sum_{i=0}^n [(a_i - a) - u] t_i \\ &\stackrel{(1)}{=} a + u + \sum_{i=0}^n (a_i - a) t_i - u \stackrel{\text{Def}}{=} \varphi(a) \end{aligned}$$

Das beweist die ersehnte Unabhängigkeit vom Fußpunkt a . QED

😊 Wir wollen, wie eingangs erklärt, alle Punkte gleich behandeln. Dieses demokratische Prinzip hat jedoch seinen Preis: Für viele handfeste Konstruktionen müssen wir die natürliche Symmetrie zunächst brechen und in willkürlich gewählten „subjektiven“ Koordinaten rechnen.

Anschließend stellen wir dann erleichtert fest, dass das Ergebnis unserer Rechnung tatsächlich wohldefiniert ist, also unabhängig von unseren willkürlichen Wahlen, und somit „objektiv“. Am Ende wird alles gut.

Der Punkt $b \in X$ ist das **Baryzentrum** der Punkte $a_0, a_1, \dots, a_n \in X$ zu den **baryzentrischen Koordinaten** $t_0, t_1, \dots, t_n \in K$. Anschaulich stellt man sich diese Koeffizienten als Massen oder Ladungen vor, die unsere Punkte „gewichten“ (gr. βάρύς [barýs], ‘schwer von Gewicht, lastend’).

Speziell über dem geordneten Körper $\mathbb{R}$ erhalten wir als Teilmenge alle **Konvexkombinationen** zu $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1$. Diese interpretieren wir als Wkten, etwa $t_i = 1/(n+1)$ für $i = 0, \dots, n$, damit ist b der „Schwerpunkt“ von $a_0, \dots, a_n$, siehe obige Graphik U121.

😊 Das klärt unser Beispiel zum Geocaching: Wie finden wir den Schatz? Die Koordinaten sind baryzentrisch gegeben. Wie bestimmen wir damit den zugehörigen Punkt? Warum ist er eindeutig, also wohldefiniert?

Zu Punkten $a_0, a_1, \dots, a_n \in X$ und Koeffizienten $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ mit Summe $t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1$ definieren wir die Affinkombination

$$a_0 t_0 + a_1 t_1 + \dots + a_n t_n := a_0 + (a_1 - a_0) t_1 + \dots + (a_n - a_0) t_n$$

Wir verschieben den Punkt a_0 um $v = (a_1 - a_0) t_1 + \dots + (a_n - a_0) t_n$. Ebenso können wir *jeden* beliebigen Punkt $a \in X$ als Start auswählen, insbesondere jeden der gegebenen Referenzpunkte $a = a_0, a_1, \dots, a_n$, und dann um den Vektor $v = \sum_{i=0}^n (a_i - a) t_i$ verschieben.

⚠ Weiterhin gilt, dass wir Punkte in X weder addieren noch skalieren können. Affinkombinationen hingegen können wir bilden wie gezeigt. Im wohlwissenden Rückblick scheint das klar oder gar selbstverständlich, doch beim ersten Kontakt wie oben wirkt es wie ein Wunder.

Definition U1E: affine Basis und Dimension

Weiterhin sei Y über V ein K -affiner Raum.

(1) Beliebige Punkte $a_0, a_1, \dots, a_n \in Y$ **erzeugen** den affinen Unterraum

$$X := \{a_0 + (a_1 - a_0)\lambda_1 + \dots + (a_n - a_0)\lambda_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\} \subseteq Y$$

über dem linearen Unterraum $U := \langle a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0 \rangle_K \leq V$.

Wir schreiben hierfür kurz $X = \text{aff}_K(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

(2) Wir nennen $a_0, a_1, \dots, a_n \in Y$ **affin unabhängig**, wenn die Differenzen $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0 \in V$ linear unabhängig sind, also eine Basis von U .

(3) Gilt (1&2), so nennen wir $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ eine **affine Basis** von X .

$$\Phi : K^n \xrightarrow{\sim} X : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto a_0 + (a_1 - a_0)\lambda_1 + \dots + (a_n - a_0)\lambda_n$$

Wir nennen dann $\dim_K X := \dim_K U = n$ die affine **Dimension** von X .

Wir setzen dabei voraus, dass die Dimension über K wohldefiniert ist. Dies gilt über jedem Körper K , es genügt DRing D2M oder CRing O3A.

Aufgabe: Warum ist die obige Abbildung $\Phi : K^n \rightarrow X$ bijektiv?

In Worten: Jeder Punkt $a \in X$ lässt sich auf genau eine Weise schreiben als Affinkombination $a = a_0 + (a_1 - a_0)\lambda_1 + \dots + (a_n - a_0)\lambda_n$ mit $\lambda \in K^n$.

Lösung: Sei $X \subseteq Y$ über $U \leq V$ ein K -affiner Unterraum.

Für jede Familie $a_0, a_1, \dots, a_n \in X$ haben wir die Abbildung

$$\Phi : K^n \rightarrow X : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto a_0 + (a_1 - a_0)\lambda_1 + \dots + (a_n - a_0)\lambda_n$$

Sie ist die Komposition der beiden Abbildungen

$$\varphi : K^n \rightarrow U : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto (a_1 - a_0)\lambda_1 + \dots + (a_n - a_0)\lambda_n$$

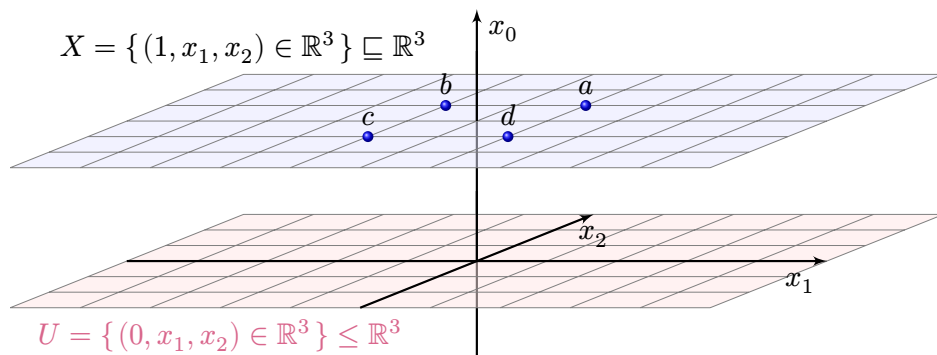
$$\psi : U \xrightarrow{\sim} X : u \mapsto a = a_0 + u$$

Der Fußpunkt $a_0 \in X$ definiert seine **Parametrisierung** $\psi : U \xrightarrow{\sim} X$ durch $u \mapsto a = a_0 + u$, mit der Umkehrung $a \mapsto u = a - a_0$, siehe Seite U111.

Genau dann sind φ und $\Phi = \psi \circ \varphi$ surjektiv / injektiv / bijektiv, wenn die Familie $(a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0)$ in U erzeugend / frei / eine Basis ist.

Beispiel: die Tischebene

Die hier erklärten affinen Eigenschaften (1–3) bleiben erhalten unter Umordnung der Familie $a_0, a_1, \dots, a_n$, siehe U1D. Das ist bemerkenswert.



Welche Teilmengen $A \subseteq \{(1, \pm 1, \pm 1)\}$ erzeugen die affine Ebene X ? Welche sind affin unabhängig in $\mathbb{R}^3$? Wie viele affine Basen erhalten Sie?

Lösung: Je drei dieser Punkte erzeugen $X \subseteq \mathbb{R}^3$, aber zwei genügen nicht. Je drei dieser Punkte sind affin unabhängig in $\mathbb{R}^3$, aber nicht alle vier. Wir können aus $\{(1, \pm 1, \pm 1)\}$ genau $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ affine Basen wählen.

Beispiel: die Tischebene

😊 Wir profitieren hier von unserer soliden Vorbereitung zu linearen Räumen, insbesondere Basis und Dimension. All dies übertragen wir nun bequem auf affine Räume.

⚠ Man beachte die genaue Anzahl: Für einen n -dimensionalen affinen Raum X hat jede Basis $a_0, a_1, \dots, a_n$ genau $n + 1$ Elemente. Das entspricht einem Fußpunkt $a_0 \in X$ und daran angeheftet die n linear unabhängigen Richtungsvektoren $u_1 = a_1 - a_0, \dots, u_n = a_n - a_0 \in U$.

⚠ Basen sind Familien, nicht bloß Mengen, das ist vielfach vorteilhaft. Schon für jede Basis $(u_1, \dots, u_n)$ eines linearen Raumes U über K ist die Reihenfolge der Vektoren ein nützlicher Teil der Daten. Zwar ist jede Umordnung ebenso eine Basis, doch wir wollen explizit Koordinaten $\Phi : K^n \xrightarrow{\sim} U$ einführen, und dazu ist die feste Indizierung wesentlich.

Dasselbe gilt nun für jede affine Basis $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ von X über U . Man kann es anders vereinbaren, doch geordnet ist meist besser.

Beispiel: Über dem Ring K betrachten wir Polynome vom Grad $< n$:

$$V = K[X], \quad U = K[X]_{<n}, \quad A = K[X]_n^1, \quad B = K[X]_n.$$

Welche dieser Mengen sind lineare Unter/Räume? affine Unter/Räume?

Beweis: (0) Die Polynome bilden den K -linearen Raum $(V, +, 0, \cdot)$.

(1) Darin ist $U = K[X]_{<n} = \{\sum_{k=0}^{n-1} p_k X^k\}$ ein linearer Unterraum, denn definitionsgemäß gilt $0 \in U$ und $U + U \subseteq U$ und $U \cdot K \subseteq U$.

(2) Hingegen ist $A = \{X^n + \sum_{k=0}^{n-1} p_k X^k\}$ kein K -linearer Unterraum, dies scheitert bereits an $0 \notin A$, **ebenso an $U + U \not\subseteq U$ und $U \cdot K \not\subseteq U$** . Jedoch ist A ein K -affiner Unterraum über U , denn $A = X^n + U \sqsubset V$.

(3) Schließlich ist $B = \{\sum_{k=0}^n p_k X^k \mid p_n \neq 0\}$ kein linearer Unterraum, denn $0 \notin B$, und für $\sharp K \geq 3$ auch kein affiner Unterraum. Warum?

Aufgabe: Ist das anschaulich plausibel? Wie beweisen Sie es? Das ist eine gute Fingerübung und Probe unserer Werkzeuge!

Anschaulich klar ist zunächst: $B \subseteq V$ ist kein affiner Raum über $U \leq V$. Zwar haben wir $+: B \times U \rightarrow B: (p, u) \mapsto q = p + u$. Aber von einem Punkt $p \in B$ ausgehend erreichen wir nicht jeden anderen Punkt $q \in B$ durch Translation mit $u \in U$. Anders gesagt, wir haben nicht die erforderliche Differenz $-: B \times B \rightarrow U: (p, q) \mapsto u = q - p$.

Lösung: Für $\sharp K = 1$ gilt $K = \{0\}$ und $\{0\} = V = U = A$, doch $B = \emptyset$. Für $\sharp K = 2$ gilt $K = \{0, 1\}$ und $V > U$, doch ausnahmsweise $A = B$. Für $\sharp K \geq 3$ zeigen wir schließlich die allgemeine Behauptung $B \not\subseteq V$. Gemäß Definition U1c untersuchen wir die Differenzmenge $W = B - X^n$.

(3a) Gilt $2 \neq 0$ in K , so folgt $2X^n \in B$, somit $W \ni 2X^n - X^n = X^n$.

(3b) Gilt $2 = 0$ in K , aber $\sharp K \geq 3$, so können wir ein beliebiges Element $a \in K \setminus \{0, 1\}$ wählen und erhalten daraus $b = a + 1 \in K^*$. Wir haben also $B \ni aX^n, bX^n \in B$ und somit erneut $W \ni bX^n - aX^n = X^n$.

Wäre $W \leq V$ ein K -linearer Unterraum, so folgt aus $W \ni X^n$ auch $W \ni -X^n$, also $B \ni X^n + (-X^n) = 0$. $\nmid$ Das beweist $W \not\subseteq V$ und $B \not\subseteq V$.

◆ **Satz L2B:** Lösungsmenge linearer Gleichungen $\rightarrow$ Merkregel D223

Sei $f: V = K^n \rightarrow W = K^m: x \mapsto Ax$ eine K -lineare Abbildung.

(0) Dann ist der Kern ein K -linearer Unterraum:

$$U := \text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\}) \leq V$$

(1) Zu jedem Zielpunkt $w \in W$ ist die Lösungsmenge

$$L = f^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

entweder leer, $L = \emptyset$, oder ein K -affiner Unterraum $L \sqsubseteq V$ über $U \leq V$. Letztenfalls gilt explizit $L = v + U \sqsubseteq V$ für jede beliebige Lösung $v \in L$.

„Allgemeine Lösung = partikuläre Lösung + homogene Lösungen.“

Demnach ist $f: V \rightarrow W$ injektiv gdw $\text{Ker}(f) = \{0\}$ gilt, siehe J2u.

Ich folge hier zähneknirschend der Konvention, dass $L = \emptyset$ kein affiner Raum ist. Dadurch wird in (1) leider eine Fallunterscheidung nötig. Das ist zwar etwas unschön, aber insgesamt der kleinere Preis.

◆ **Satz Q3D:** Struktursatz für lineare Differentialgleichungssysteme

Gegeben sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Wir untersuchen die Lösungsmenge $L = \{u \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n) \mid \dot{u} = Au + b\}$.

(0) **Globale Existenz und Eindeutigkeit:** Zu jedem Anfangsdatum $(t_0, v_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung $u \in L$ mit $u(t_0) = v_0$ dank Satz Q3c. Die Auswertung in t_0 stiftet also eine Bijektion:

$$\Psi_{t_0}: L \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n: u \mapsto u(t_0)$$

(1) $L_0 = \{u \mid \dot{u} = Au\}$ ist ein $\mathbb{K}$ -linearer U Raum der Dimension n . Wir finden ein **Fundamentalsystem** $u_1, \dots, u_n \in L_0$, etwa dank Q3c:

$$L_0 = \{c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\}^! \cong \mathbb{K}^n$$

(2) $L = \{u \mid \dot{u} = Au + b\}$ ist ein $\mathbb{K}$ -affiner U Raum der Dimension n . Für jede **Partikulärlösung** $u_0 \in L$, etwa dank Q3c, gilt demnach:

$$L = u_0 + L_0 = \{u_0 + c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}\}^!$$

Weiterhin sei V ein linearer Raum über dem Ring K . Zur Erinnerung:

😊 Eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist genau dann ein K -linearer Unterraum, wenn sie nicht-leer ist und abgeschlossen unter Linearkombinationen:

$$u_0\lambda_0 + \dots + u_n\lambda_n \in U$$

für alle Längen $n \in \mathbb{N}$, Vektoren $u_0, \dots, u_n \in U$ und Skalare $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$. Hierzu genügt bereits, Linearkombinationen der Länge $n = 1$ zu prüfen.

Ein ebenso praktisches Kriterium gilt für K -affine Unterräume:

Satz U1F: Charakterisierung K -affiner Unterräume

Sei Y ein K -affiner Raum über V . Genau dann ist eine Teilmenge $X \subseteq Y$ ein K -affiner Unterraum, wenn X nicht-leer ist und abgeschlossen unter Affinkombinationen. Das bedeutet ausgeschrieben, es gilt

$$a_0\lambda_0 + \dots + a_n\lambda_n \in X$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots, a_n \in X$ und $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$ mit $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$. Hierzu genügt bereits, Affinkombinationen der Länge $n = 1$ zu prüfen.

😊 Diese Sichtweise vereint die linearen und die affinen Begriffe.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Charakterisierungen, linear und affin.

Seien U und V lineare Räume über dem Ring K . Zur Erinnerung:

😊 Eine Abbildung $f: U \rightarrow V$ ist genau dann K -linear, wenn sie Linearkombinationen erhält. Das bedeutet ausgeschrieben

$$f(u_0\lambda_0 + \dots + u_n\lambda_n) = f(u_0)\lambda_0 + \dots + f(u_n)\lambda_n$$

für alle Längen $n \in \mathbb{N}$, Vektoren $u_0, \dots, u_n \in U$ und Skalare $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$. Hierzu genügt bereits, Linearkombinationen der Länge $n = 1$ zu prüfen.

Ein ebenso praktisches Kriterium gilt für K -affine Abbildungen:

Satz U1G: Charakterisierung K -affiner Abbildungen

Gegeben seien K -affine Räume X über U und Y über V . Eine Abbildung $g: X \rightarrow Y$ ist genau dann K -affin, wenn sie Affinkombinationen erhält. Das bedeutet ausgeschrieben

$$f(u_0\lambda_0 + \dots + u_n\lambda_n) = f(u_0)\lambda_0 + \dots + f(u_n)\lambda_n$$

für alle $a_0, \dots, a_n \in X$ und alle $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$ mit $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$. Hierzu genügt bereits, Affinkombinationen der Länge $n = 1$ zu prüfen.

😊 Diese Sichtweise vereint die linearen und die affinen Begriffe.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Charakterisierungen, linear und affin.

Die K -affinen Abbildungen bilden eine Kategorie:

Satz U1h: Identität und Komposition und Umkehrung

Gegeben seien K -affine Räume X über U und Y über V und Z über W .

- (1) Die Identität $\text{id}_X : X \rightarrow X$ eine K -affine Abbildung.
- (2) Sind $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ affine Abbildungen, so auch ihre Komposition $g \circ f : X \rightarrow Z$.
- (3) Ist $f : X \rightarrow Y$ eine K -affine Abbildung und bijektiv, so auch ihre Umkehrung $g = f^{-1} : Y \rightarrow X$.

Übung: Beweisen Sie dies nach dem Vorbild L1j linearer Räume.

Hinweis: Es gelingt besonders elegant mit obiger Charakterisierung U1G.

Satz U1i: Transport von Unterräumen

Sei $g : X \rightarrow Y$ eine K -affine Abbildung.

- (1) Ist $A \subseteq X$ ein K -affiner Unterraum, so auch $B := g(A) \subseteq Y$.
- (2) Ist $B \subseteq Y$ ein K -affiner Unterraum, so auch $A := g^{-1}(B) \subseteq X$ falls nicht-leer. Auch hier entsteht leider der lästige Sonderfall.

Übung: Beweisen Sie dies nach dem Vorbild L2b linearer Unterräume.

Hinweis: Es gelingt besonders elegant mit obiger Charakterisierung U1f.

Übung: In $\mathbb{R}^n$ betrachten wir den Einheitsball $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| \leq 1\}$ und die Einheitsphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| = 1\}$. Sind dies $\mathbb{R}$ -affine Räume? Anschaulich wohl kaum. Wie beweisen Sie es? Prüfen Sie die Definition! Glücklicherweise ist diese schlüsselfertig für Sie formuliert.

Übung: Erfinden Sie möglichst diverse Gegen/Beispiele affiner Räume.

Ist $X = \mathbb{R} \times \{1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ein $\mathbb{R}$ -affiner Unterraum? $\mathbb{Q}$ -affin? $\mathbb{Z}$ -affin?

Ist $Y = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subseteq \mathbb{R}^2$ ein $\mathbb{R}$ -affiner Unterraum? $\mathbb{Q}$ -affin? $\mathbb{Z}$ -affin?

Ist $Z = \mathbb{R} \times (1 + 2\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{R}^2$ ein $\mathbb{R}$ -affiner Unterraum? $\mathbb{Q}$ -affin? $\mathbb{Z}$ -affin?

Satz U1j: affine Basis als Matrixbedingung

(1) Sei K ein Ring. Genau dann sind die Punkte $a_0, a_1, \dots, a_m \in K^n$ eine affine Basis von $\mathbb{A}(K^n)$, wenn die folgende Matrix A invertierbar ist:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{01} & a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0n} & a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in K^{(1+n) \times (1+m)}$$

(2) Ist K kommutativ, so ist dies äquivalent zu $m = n$ und $\det A \in K^\times$.

Die Spalten sind die erweiterten Vektoren $a'_i = (1, a_{i1}, \dots, a_{in})^\top \in K^{1+n}$. Zur Matrix A gehört die lineare Abbildung $\Phi : K^{1+m} \rightarrow K^{1+n} : \lambda \mapsto A\lambda$.

(3) Genau dann ist $a_0, a_1, \dots, a_m$ affin unabhängig, wenn Φ injektiv ist.

(4) Genau erzeugt $a_0, a_1, \dots, a_m$ affin K^n , wenn $\{1\} \times K^n \subseteq \text{Im } \Phi$ gilt.

Aufgabe: Beweisen Sie diesen Satz! O wie schön zu sehen, dass unsere soliden Grundlagen der *linearen Algebra* nun ebenso *affin* wirken!

Lösung: (1) Durch Spaltenoperationen ist A äquivalent zur Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{01} & a_{11} - a_{01} & \dots & a_{m1} - a_{01} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0n} & a_{1n} - a_{0n} & \dots & a_{mn} - a_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & C \end{bmatrix}$$

Demnach gilt: A invertierbar $\Leftrightarrow B$ invertierbar $\Leftrightarrow C$ invertierbar

$\Leftrightarrow$ Die Familie $(a_1 - a_0, \dots, a_m - a_0)$ ist eine Basis von K^n über K .

$\Leftrightarrow$ Die Familie $(a_0, a_1, \dots, a_m)$ ist eine K -affine Basis von $\mathbb{A}(K^n)$.

😊 Die Matrix A formuliert dies demokratisch-symmetrisch, zur Rechnung in B brechen wir willkürlich diese Symmetrie.

(2) Dies ist die Aussage der Determinanten-Inversionsformel O2R.

Die Aussagen (3) und (4) präzisieren die beiden Teilbedingungen:

Wir betrachten $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in K^{1+m}$ mit $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$.

Damit gilt $\Phi(\lambda) = A\lambda = (1; a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 + \dots + a_m\lambda_m) \in \{1\} \times K^n$.

Affine Unabhängigkeit / Erzeugung bedeutet Φ ist injektiv / surjektiv.

Eine Familie in allgemeiner Lage: die Momentkurve

Aufgabe: Konstruieren Sie eine Familie $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ in allgemeiner Lage, d.h. $v(t_0), \dots, v(t_n)$ in $\mathbb{R}^n$ sind affin unabhängig für alle $t_0 < \dots < t_n$ in $\mathbb{R}$.

Auf den ersten Blick ist eine Lösung nicht offensichtlich.

Ebenso einfach wie elegant ist die folgende Konstruktion:

Beispiel U1k: die Momentkurve

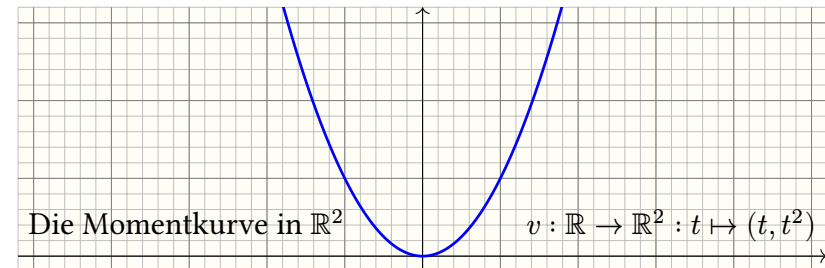
Die Momentkurve $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto (t^1, \dots, t^n)$ hat diese Eigenschaft.

Beweis: Für $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ in $\mathbb{R}$ ist die Vandermonde-Matrix

$$V := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_0 & t_1 & & t_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_0^n & t_1^n & \dots & t_n^n \end{bmatrix}$$

invertierbar. Dies folgt dank Lagrange-Interpolation, Satz D5B, oder mit der Determinante $\det V = \prod_{i < j} (t_j - t_i) \neq 0$, siehe Satz O5A. QED

Eine Familie in allgemeiner Lage: die Momentkurve



Die Formulierung „allgemeine Lage“ bedeutet maximal affin unabhängig: Keine zwei Punkte dieser Familie sind gleich, keine drei Punkte liegen auf einer Geraden, keine vier Punkte liegen in einer Ebene, usw. Dies wird nur durch die Dimension begrenzt: Je $n + 2$ Punkte im $\mathbb{R}^n$ sind affin abhängig.

Anschaulich: Die Momentkurve $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ schneidet jede Hyperebene $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$ in höchstens n Punkten, denn das Polynom $a_0 + a_1t^1 + \dots + a_nt^n$ hat höchstens n Nullstellen. Das ist die Polynom-Sichtweise der obigen Vandermonde-Matrix.

Sei $(K, +, 0, \cdot, 1)$ ein Körper; als Grundlage genügt weiterhin ein Ring. Als n -dimensionalen K -linearen Raum haben wir $U = (K^n, +, 0, -, \cdot)$. Der zugehörige K -affine Raum ist $X = \mathbb{A}(U) = (K^n, +, -)$ über U .

Als Standardeinbettung $\mathbb{A}(K^n) \hookrightarrow K^{1+n}$ nutzen wir erweiterte Vektoren:

$$\mathbb{A}(K^n) \ni x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x' \in K^{n'}, \quad n' = 1 + n$$

Jede affine Abbildung $f: K^n \rightarrow K^m: x \mapsto b + Ax$ schreibt sich nun erfreulich bequem als die Einschränkung der linearen Abbildung

$$f': K^{n'} \rightarrow K^{m'}: \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ b + Ax \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}.$$

Hierbei ist $A \in K^{m \times n}$ der Linearteil und $b \in K^m$ der Translationsteil. Beides wird raffiniert in der erweiterten Matrix A' zusammengefasst.

😊 Der Matrixkalkül hilft uns schon lange *linear*, nun auch *affin*!

Wir erweitern jeden Punkt $x \in K^n$ zum Vektor $x' = (1; x) \in K^{n'}$, jeden Punkt $y \in K^m$ zum Vektor $y' = (1; y) \in K^{m'}$, und jede K -affine Abbildung $f: K^n \rightarrow K^m: x \mapsto b + Ax$ zur K -linearen Abbildung $f': K^{n'} \rightarrow K^{m'}: x' \mapsto y' = A'x'$ mit der Darstellungsmatrix

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{bmatrix} \in K^{m' \times n'}.$$

Übung: (1) Die Identität $\text{id}': x' \mapsto x'$ ist eine affine Abbildung, mit der Einheitsmatrix $I' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ als darstellender Matrix.

(2) Die Komposition von zwei affinen Abbildungen $f': x' \mapsto y' = A'x'$ und $g': y' \mapsto z' = B'y'$ ist die affine Abbildung $g' \circ f': x' \mapsto z' = B'A'x'$, wobei $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ w & C \end{bmatrix}$ mit $C = BA$ und $w = v + Bu$ gilt. Wie schön!

(3) Genau dann ist $A' \in K^{n' \times n'}$ invertierbar, wenn $A \in K^{n \times n}$ dies ist. In diesem Falle gilt $A'^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -A^{-1}b & A^{-1} \end{bmatrix} \in K^{n' \times m'}$. Rechnen Sie es nach!

Definition U2A: Affinitäten und $\text{AGL}_n(K)$

Gegeben seien K -affine Räume X über U und Y über V .

(0) Ein **K -affiner Isomorphismus** $(f, g): X \cong Y$ ist ein Paar zueinander inverser K -affiner Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow X$, das heißt $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$. (Es genügt f oder g bijektiv, siehe U1H)

(1) Eine **Affinität** $f: X \xrightarrow{\sim} X$ ist ein affiner Automorphismus. Die Affinitäten von X bilden die Gruppe $(\text{AGL}(X), \circ, \text{id}_X)$ mit

$$\text{AGL}(X) = \{f: X \xrightarrow{\sim} X\} \leq (\text{Sym}(X), \circ, \text{id}_X).$$

(2) Speziell für $X = \mathbb{A}(K^n)$ erhalten wir die **allgemeine affine Gruppe**

$$\text{AGL}_n(K) := \left\{ A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{bmatrix} \mid A \in \text{GL}_n(K), b \in K^n \right\} \leq \text{GL}_{n+1}(K).$$

Darin liegt, als normale Untergruppe, die **spezielle affine Gruppe**

$$\text{ASL}_n(K) := \left\{ A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{bmatrix} \mid A \in \text{SL}_n(K), b \in K^n \right\} \leq \text{SL}_{n+1}(K).$$

Übung: Rechnen Sie die hier gemachten Behauptungen sorgsam nach.

Speziell für $X = K^n$ haben wir die erfreulich explizite Darstellung:

$$\text{AGL}(K^n) = \{f: K^n \xrightarrow{\sim} K^n: x \mapsto b + Ax \mid A \in \text{GL}_n(K), b \in K^n\}$$

Dank Einbettungstrick ist diese Gruppe von Abbildungen isomorph zur Matrixuntergruppe $\text{AGL}_n \leq \text{GL}_{n+1}$. Ebenso $\text{ASL}_n \leq \text{SL}_{n+1}$.

Übung: Wir erhalten zwei kurze exakte Sequenzen von Gruppen:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & (K^n, +) & \xhookrightarrow{i} & \text{AGL}_n(K) & \xrightleftharpoons[p]{j} & \text{GL}_n(K) & \longrightarrow & 1 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & (K^n, +) & \xhookrightarrow{i} & \text{ASL}_n(K) & \xrightleftharpoons[p]{j} & \text{SL}_n(K) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

mit $i(b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & I \end{bmatrix}$ und $p(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{bmatrix}) = A$ sowie $j(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$. Speziell für $n = 1$ gilt $\text{AGL}_1(K) = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{bmatrix} \mid a \in K^\times, b \in K \}$ und $\text{ASL}_1(K) = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \mid b \in K \}$.

Sei X über U ein $\mathbb{R}$ -affiner Raum. Trägt der $\mathbb{R}$ -Vektorraum U die Norm $\|-\| : U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, so trägt der $\mathbb{R}$ -affine Raum X über U die induzierte Metrik

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : (a, b) \mapsto d(a, b) = \|b - a\|.$$

Die Norm misst die Länge von Vektoren. Die Metrik misst den Abstand von Punkten. Sie ist translationsinvariant, denn $d(a + u, b + u) = d(a, b)$. Das können wir umgekehrt betrachten und zur Definition verwenden:

Ein n -dimensionaler **affin-euklidischer Raum** (X, d) ist ein metrischer Raum, der isometrisch zum euklidischen Modellraum $(\mathbb{R}^n, d)$ ist.

Jede solche Isometrie $\varphi : (X, d) \cong (\mathbb{R}^n, d)$ macht X zu einem $\mathbb{R}$ -affinen Raum über $\mathbb{R}^n$ durch $\varphi(a + u) = \varphi(a) + u$ und $b - a = \varphi(b) - \varphi(a)$.

Jede weitere Isometrie $\psi : (X, d) \cong (\mathbb{R}^n, d)$ unterscheidet sich nur durch eine affine Isometrie von $\mathbb{R}^n$ dank euklidischer Rigidität S4E.

Wir vereinbaren in Definition U2B eine feste Isometrie, das ist einfacher.

Beispiel: Die Erde ist eine Scheibe... zumindest lokal gilt dies in guter Näherung für kleine Umgebungen (M, d) wie die Waldau auf Seite U121. Wir erhalten eine Punktmenge M mit physikalisch gemessener Metrik d , und diese lässt sich recht präzise euklidisch zweidimensional einbetten, wir finden also $(M, d_M) \hookrightarrow (\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$. Die Erdkrümmung ist selbst hier nicht exakt Null, aber der Effekt bleibt lokal noch so extrem klein, dass wir ihn aus praktischer Sicht getrost vernachlässigen können.

Wenn wir also in der Geographie eine Karte erstellen oder verwenden, dann nutzen wir heimlich das Modell eines affin-euklidischen Raumes, selbst wenn die Übereinstimmung nur lokal und approximativ ist.

An dieser Stelle ist es verlockend, aber allzu voreilig zu schließen: „Was im Kleinen recht genau gilt, besteht genauso auch im Großen.“ Dieser naiven Logik zufolge wäre die Erdoberfläche auch global flach, vielleicht sogar isometrisch zu $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$. Das ist zwar ein *mögliches* mathematisches Modell, entspricht aber nicht der Beobachtung!

Beispiel: Unser Universum erscheint uns dreidimensional, zumindest lokal in unserer unmittelbaren Umgebung scheint diese Idealisierung eine gute Näherung für unsere alltägliche Erfahrung.

Genauer können wir zwischen je zwei Punkten a und b den räumlichen Abstand $d(a, b) = ct$ messen: Licht bewegt sich mit Geschwindigkeit c auf kürzestem Wege von a nach b in der Zeit t . So vermessen wir unsere lokale Umgebung (M, d) und erhalten eine Punktmenge M mit physikalisch gemessener Metrik d . Diese lässt sich recht präzise euklidisch einbetten, wir finden so $(M, d) \hookrightarrow (\mathbb{R}^3, d_{\mathbb{R}^3})$.

Ist das uns umgebende Universum auch global isometrisch zu $(\mathbb{R}^3, d_{\mathbb{R}^3})$? Das ist ein *mögliches* mathematische Modell, aber keineswegs zwingend! Selbst ohne Krümmung sind global verschiedene Räume denkbar. Im Gegenteil, genauere Messungen zeigen, dass der uns umgebende Raum tatsächlich gekrümmt ist (genauer: die Raumzeit), und bestätigt Einsteins flexibleres Modell der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Diese beiden Beispiele, Geographie und Kosmologie zeigen zweierlei:

Erstens, das euklidische Modell $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ ist unschlagbar einfach und wo es (hinreichend genau) zutrifft auch wunderbar effizient. Dies motiviert im Folgenden, sich eingehend damit zu beschäftigen.

Zweitens, in der physikalischen Interpretation müssen wir meist extrem vorsichtig sein, wenn wir aus lokalen Daten globale Schlüsse ziehen. Das ist im Folgenden nicht unser Problem, aber wichtig zu wissen.

Wir wollen im Folgenden das mathematische Modell $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ nutzen und damit arbeiten lernen. Die Anwendbarkeit auf konkrete Situationen, etwa in der Physik, ist eine Frage der betrachteten Anwendungsdomäne.

So ist es immer: Die Mathematik stellt mögliche Modelle und zugehörige Werkzeuge zur Verfügung, doch die passende Auswahl und konkrete Anwendung ist naturgemäß die Aufgabe der Anwender:innen.

Definition U2b: affin-euklidischer Raum

(0) Ein **affin-euklidischer Raum** $(X, +, -)$ ist ein $\mathbb{R}$ -affiner Raum über einem euklidischen $\mathbb{R}$ -Vektorraum $(U = \mathbb{R}^n, \langle - | - \rangle)$. Bis auf Isomorphie genügt uns hierzu der Modellraum $U = \mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt.

(1) Damit können wir Abstände messen dank der Metrik

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : (a, b) \mapsto d(a, b) = \|b - a\|.$$

Dadurch wird (X, d) zu einem metrischen Raum gemäß S2k.

(2) Zudem können wir den (absoluten) Winkel messen vermöge

$$\sphericalangle(a, z, b) := \arccos\left(\frac{\langle a - z | b - z \rangle}{\|a - z\| \cdot \|b - z\|}\right) \in [0, \pi].$$

Hierbei ist $z \in X$ der Scheitelpunkt, und die Schenkel des Winkels sind gegeben durch zwei weitere Punkte $a, b \in X$ mit $a \neq z \neq b$.

(3) Wir erklären Orthogonalität durch $\langle a - z | b - z \rangle = 0$.

😊 Jede euklidische Isometrie ist automatisch immer affin, das bekommen wir geschenkt! (Naja, wir haben es *bewiesen*, das war ehrliche Arbeit, nun können wir es getrost *nutzen*.)

Übung: Wiederholen Sie den Rigiditätssatz und seinen Beweis.

◆ Satz S4E: Rigidität euklidischer Isometrien

Wir betrachten $(\mathbb{R}^m, d)$ und $(\mathbb{R}^n, d)$ mit ihrer euklidischen Metrik.

(1) Eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax + b$ ist isometrisch gdw die Matrix A orthonormale Spalten hat, also $A^T A = 1_{m \times m}$ erfüllt.

(2) Jede isometrische Abbildung $f : (\mathbb{R}^m, d) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d)$ ist affin-linear wie in (1) angegeben, also von der Form $f(x) = Ax + b$ mit $A^T A = 1_{m \times m}$. Die affine Linearität von f wird hier nicht gefordert, sondern gefolgt!

😊 Euklidische Isometrien sind überall nützlich und wichtig. Die folgende Definition fixiert die relevanten Bezeichnungen.

Definition U2c: isometrische Affinität aka affin-euklidische Isometrie

Gegeben seien affin-euklidische Räume X über U und Y über V .

(0) Eine **affine Isometrie** $(f, g) : X \cong Y$ ist ein Paar zueinander inverser $\mathbb{R}$ -affiner, metrikerhaltender Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$

(1) Eine **isometrische Affinität** ist ein isometrischer Automorphismus $f : X \cong X$. Diese bilden die Gruppe $(\text{AGO}(X), \circ, \text{id}_X)$ mit

$$\text{AGO}(X) = \{f : X \cong X\} \leq (\text{Sym}(X), \circ, \text{id}_X).$$

(2) Speziell für $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n'}$ erhalten wir die **affin-orthogonale Gruppe**

$$\text{AGO}_n(\mathbb{R}) := \left\{ A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{bmatrix} \mid A \in \text{GO}_n(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n \right\} \leq \text{GL}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Darin liegt, normal, die **spezielle affin-orthogonale Gruppe**

$$\text{ASO}_n(\mathbb{R}) := \left\{ A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{bmatrix} \mid A \in \text{SO}_n(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n \right\} \leq \text{SL}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

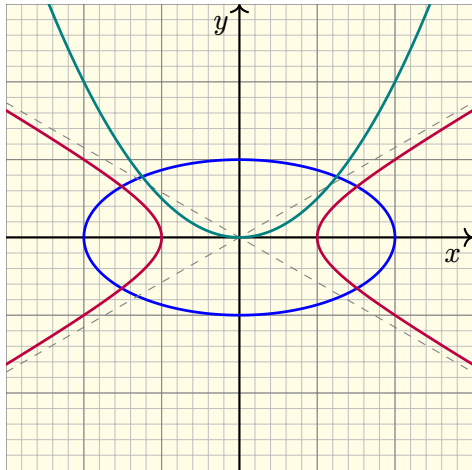
Übung: Erklären Sie $\text{AGO}_n(\mathbb{R}) \cap \text{GO}_{n+1}(\mathbb{R}) = \text{GO}_n(\mathbb{R})$, ebenso SO .

⚠ Wir haben in Definition U2A zunächst allgemeine **Affinitäten** erklärt als invertierbare affine Abbildungen $f : X \cong X$. Nun stattdessen wir X mit einer Metrik d aus. Von einer Affinität verlangen wir dann, die Metrik zu erhalten. Dies nennen wir daher **euklidisch-isometrische Affinität** oder auch **affin-euklidische Isometrie**. Man nennt dies anschaulich auch eine **euklidische Bewegung** und denkt an Drehungen und Verschiebungen.

Euklidische Affinitäten nutzen wir immer dort als Transformationen, wo wir Abstände und Winkel erhalten wollen, also isometrisch arbeiten. Allgemeine Affinitäten sind bequemer, diese nutzen wir daher gerne in allen Anwendungen, wo uns Abstände und Winkel nicht wichtig sind oder diese als zusätzliche Struktur gar nicht definiert sind.

Zur Illustration zeige ich das an Quadriken in der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ (Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln) und im reellen Raum $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe: Zeichnen Sie $x^2/4 + y^2 = 1$ und $x^2 - 3y^2 = 1$ und $x^2 = 2y$ in $\mathbb{R}^2$.



Gemeint ist damit die Lösungsmenge $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/4 + y^2 = 1\}$ und $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 = 1\}$ und $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 2y\}$.

Wie zeichnen Sie E ? Wir betrachten zunächst Schnitte mit den Achsen: Für $y = 0$ gilt $x = \pm 2$. Für $x = 0$ gilt $y = \pm 1$. Wir können weitere Punkte berechnen, oder nun nutzen, dass E eine Ellipse in Hauptachsenform ist!

Wie zeichnen Sie H ? Für $y = 0$ gilt $x = \pm 1$. Für $x = 0$ gibt es gar keine Lösung. Wir können hier jedoch bequem auflösen zu $x = \pm\sqrt{1 + 3y^2}$. Asymptotisch gilt $x = \pm\sqrt{3}y$. Diese Asymptoten helfen beim Zeichnen!

Wie zeichnen Sie P ? Das ist die gute alte Parabel! Diese ist mit $y = x^2/2$ bereits nach y aufgelöst, Sie können also ein paar Werte für x einsetzen, dann verbinden Sie diese Punkte $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ zur Parabel $P \subseteq \mathbb{R}^2$.

Wir haben auf Seite U121 mit Beispielen der Geographie begonnen. Nun wenden wir allgemeine und euklidische Affinitäten der Ebene $\mathbb{R}^2$ ebenso auf mathematische Objekte an, hier im Beispiel auf die Ellipse E , die Hyperbel H und die Parabel P in der affin-euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe: Schreiben Sie diese Gleichungen und zeichnen Sie diese Kurven in den neuen Koordinaten $u = 2 + x$ und $v = 1 + y + x/2$.

Lösung: Dies ist eine (nicht isometrische!) Affinität $T \in \text{AGL}_2 \mathbb{R}$:

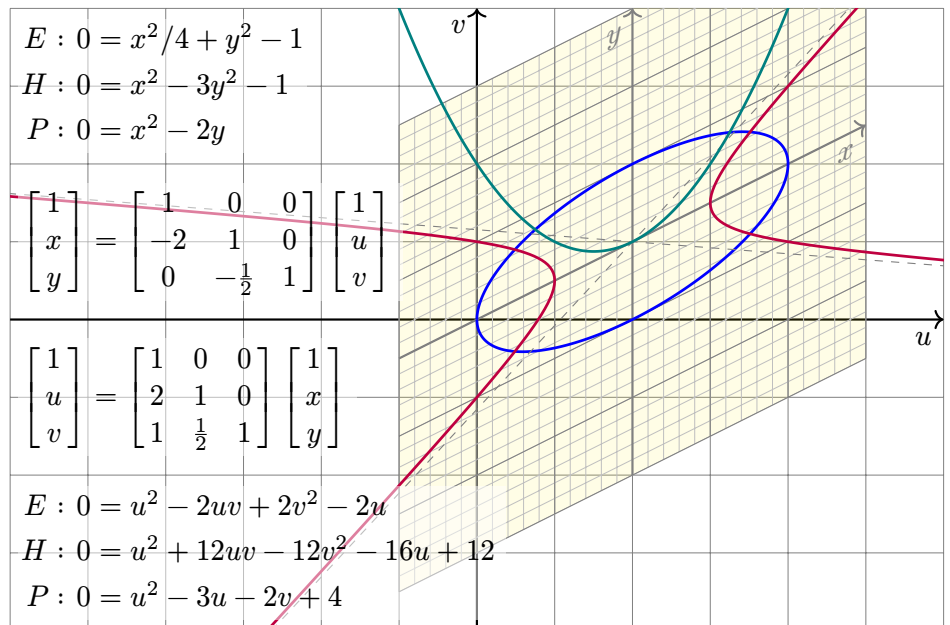
$$\begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

Übung: Rechnen Sie es nach! Einsetzen und Nennerlösen ergibt:

$$\begin{aligned} E : 0 &= u^2 - 2uv + 2v^2 - 2u, \\ H : 0 &= u^2 + 12uv - 12v^2 - 16u + 12, \\ P : 0 &= u^2 - 3u - 2v + 4. \end{aligned}$$

Dieser algebraischen Umformung der Gleichung entspricht die folgende geometrische Transformation der Lösungsmenge.

Übung: Prüfen Sie Graphik und Rechnung soweit möglich nach. Wie lesen Sie daran die Umkehrtransformation graphisch ab?



Aufgabe: Schreiben Sie diese Gleichungen und zeichnen Sie diese Kurven in den neuen Koordinaten $u = 2 + (x - y)/\sqrt{2}$ und $v = 1 + (x + y)/\sqrt{2}$.

Lösung: Dies ist eine (euklidisch-isometrische!) Affinität $T \in \text{AGO}_2 \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

Übung: Rechnen Sie dies nach! Einsetzen und Nennerlöschen ergibt:

$$E: 0 = 5u^2 - 6uv + 5v^2 - 14u + 2v + 5,$$

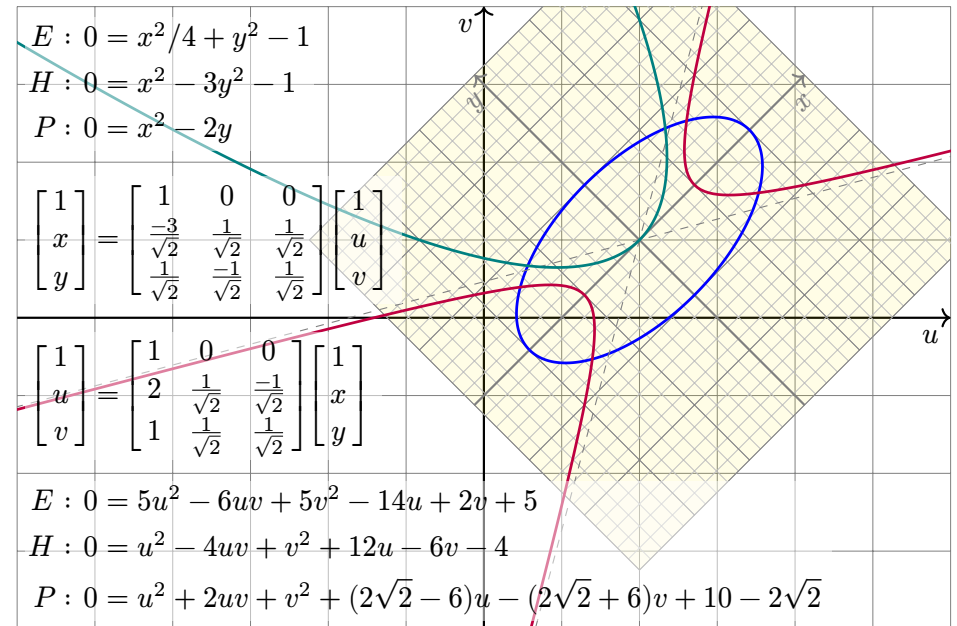
$$H: 0 = u^2 - 4uv + v^2 + 12u - 6v - 4,$$

$$P: 0 = u^2 + 2uv + v^2 + (2\sqrt{2} - 6)u - (2\sqrt{2} + 6)v + 10 - 2\sqrt{2}.$$

Diese Affinität ist euklidisch: Sie erhält Abstände und Winkel!

Dies ist in der folgenden Graphik sehr schön zu erkennen.

Übung: Prüfen Sie Graphik und Rechnung soweit möglich nach. Wie lesen Sie daran die Umkehrtransformation graphisch ab?



Ausblick: Klassifikation der ebenen Quadriken

U219
Erläuterung

In diesen Beispielen beginnen wir mit Quadriken in Hauptachsenform, also besonders schön und übersichtlich. Die Koordinatentransformation macht sie unschön und unübersichtlich. Das ist möglich, illustrativ und lehrreich, doch meist wollen wir genau umgekehrt vorgehen!

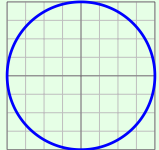
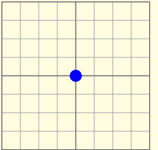
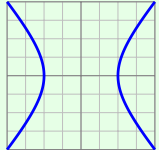
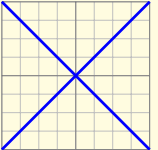
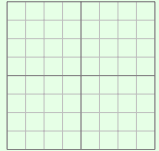
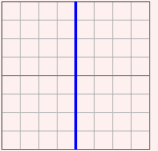
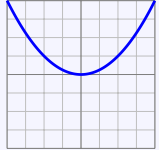
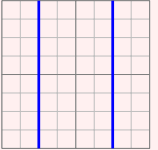
Unser Ziel im nächsten Kapitel ist genau diese Klassifikation: Was sind Quadriken und welche Normalformen gibt es für sie?
 (a) Wie kommen wir affin zu bestens angepassten Koordinaten?
 (b) Wir kommen wir affin-euklidisch sogar zu Hauptachsen?

In diesem Kapitel haben wir zunächst die Werkzeuge bereit gelegt: allgemeine und euklidische Affinitäten. So können Sie sich diese schon vorab in Ruhe anschauen und im Quiz einüben und sich vorbereiten. Dann sind Sie bestens vorbereitet auf die kommende Klassifikation.

Ich zeige dazu noch ein schönes dreidimensionales Beispiel, das Sie vermutlich überraschen und erheitern und erhellen wird.

Ausblick: Klassifikation der ebenen Quadriken

U220
Erläuterung

Ellipse $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	Punkt $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 0$ 
Hyperbel $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	schneidendes Geradenpaar $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0$ 
leere Menge $-\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	Gerade $\frac{x^2}{\alpha^2} = 0$ 
Parabel $\frac{x^2}{\alpha^2} = 2y$ 	paralleles Geradenpaar $\frac{x^2}{\alpha^2} = 1$ 

Aufgabe: (1) Zeichnen Sie die Flächen $z = x^2 - y^2$ und $z = uv$ in $\mathbb{R}^3$, gemeint ist jeweils in $\mathbb{R}^3$ die Lösungsmenge der genannten Gleichung:

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\},$$

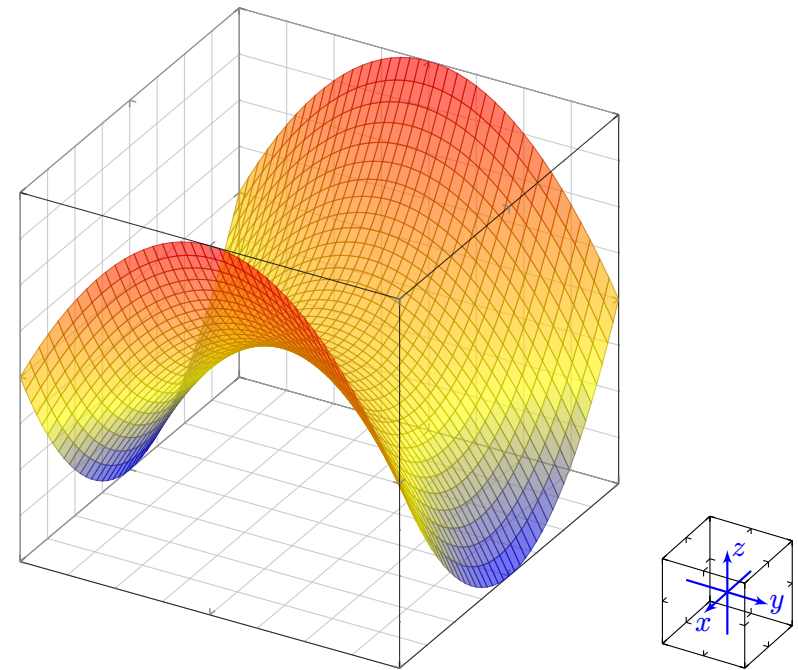
$$Q = \{(u, v, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = uv\}.$$

⚠ Zeichnen braucht Übung! Hilfreicher Trick, vor allem wenn Sie per Hand zeichnen: Ebene Zeichnungen sind wesentlich leichter! Wir zeichnen daher zunächst einige Schnitte mit Koordinatenebenen, etwa $z = 0, \pm 1, \dots$, oder $y = 0, \pm 1, \dots$, oder $x = 0, \pm 1, \dots$

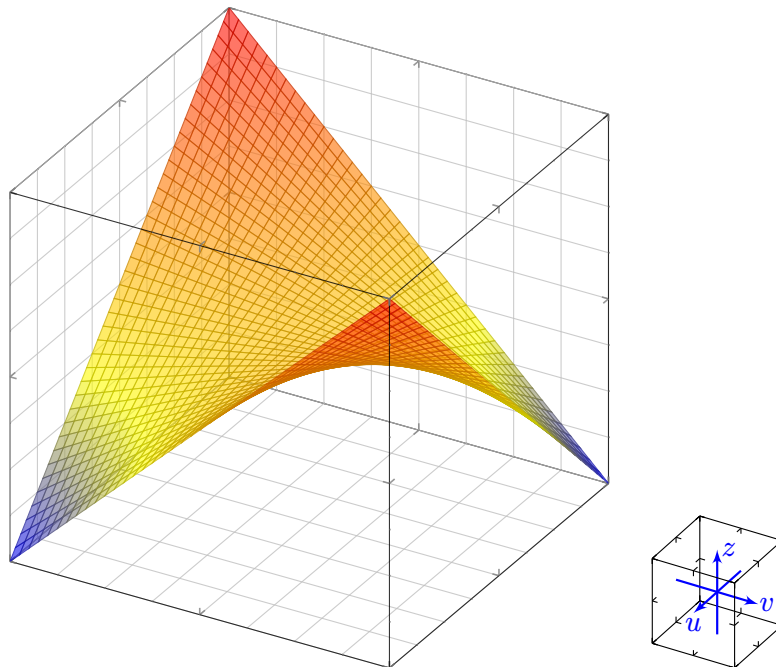
😊 Letztlich tut der Computer beim Plotten auch nichts anderes. Bitte üben Sie es zuerst einmal selbst, bis Sie genug Routine haben. Dann können Sie es guten Gewissens an den Computer delegieren. Ebenso *prüfen* Sie damit Zeichnungen, etwa die beiden Folgenden.

Was Sie hier zeichnen und bewundern heißt **hyperbolisches Paraboloid**. In einer Sichtweise besteht es aus Parabeln, in der anderen aus Geraden!

$$z = x^2 - y^2$$



$$z = uv$$



Aufgabe: (1) Zeichnen Sie die Flächen $z = x^2 - y^2$ und $z = uv$ in $\mathbb{R}^3$.
(2) In welchem Sinne ist das dieselbe Fläche in anderen Koordinaten?

Lösung: Wir erhalten $(\mathbb{R}^3, P) \cong (\mathbb{R}^3, Q)$ durch die Transformation

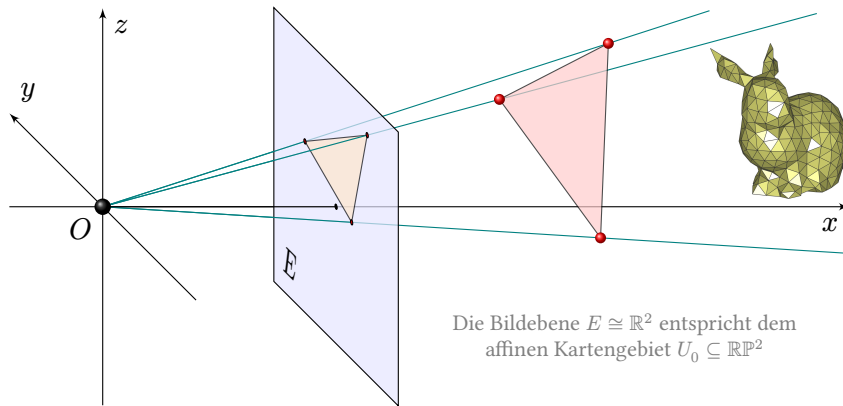
$$\begin{aligned} \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} &\iff \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases} \\ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &\iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Alternative: Das ähnliche Beispiel $z = x^2 - y^2 = 2uv$ transformieren wir durch eine euklidische Isometrie:

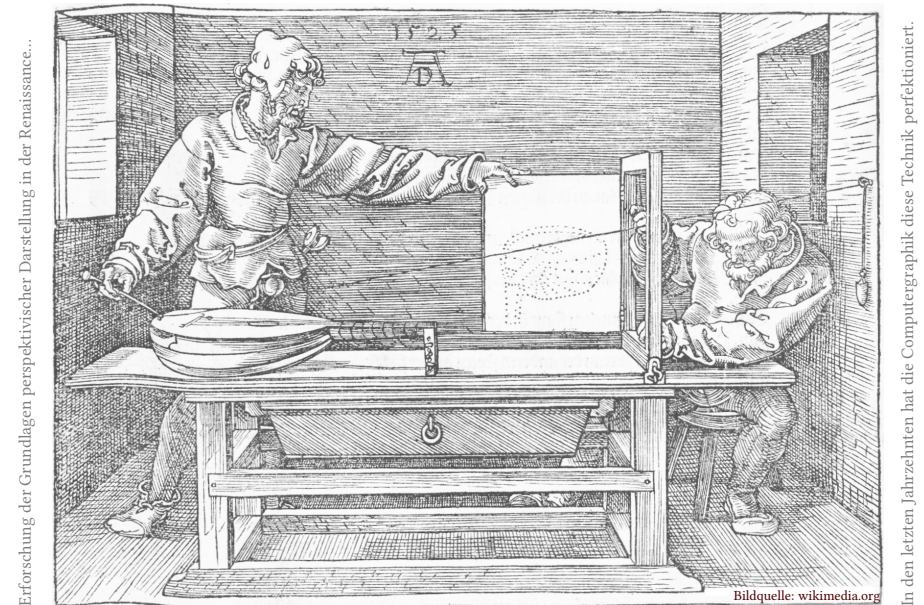
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Solche Transformationen können wir auf zwei Arten interpretieren:
Passiv: Wir ändern unsere Koordinaten, doch betrachten dasselbe Objekt.
Aktiv: Wir transformieren unser Objekt, behalten aber feste Koordinaten.

Auge oder Kamera nutzen die Zentralprojektion auf eine Bildebene E :
Alle Punkte auf einer Ursprungsgeraden werden zu einem Bildpunkt.



Die Projektion löscht die Tiefeninformation: Die dreidimensionale Szene wird zum zweidimensionalen Bild projiziert, perspektivische Darstellung. Zusätzliche Tiefeninformation ist wichtig für praktische Anwendungen: Astronomie (Parallaxe), Photographie (Tiefenschärfe), Computer Vision.



Albrecht Dürers *Unterweysung* zum Perspektivproblem

Definition U3A: der projektive Raum $\mathbb{P}(V)$

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Seine multiplikative Gruppe ist $\mathbb{K}^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
Diese operiert durch Skalierung $V \curvearrowright \mathbb{K}^\times$ auf jedem $\mathbb{K}$ -Vektorraum V ,
ebenso $V^\# \curvearrowright \mathbb{K}^\times$ auf der Menge $V^\# = V \setminus \{0\}$ aller Nicht-Null-Vektoren.
Jede Bahn / Äquivalenzklasse ist eine Gerade (jeweils ohne Nullpunkt).
Wir definieren den **projektiven Raum** $\mathbb{P}(V)$ als den Quotienten:

$$q : V^\# \rightarrow \mathbb{P}(V) := V^\# / \mathbb{K}^\times : x \mapsto q(x) = [x] = x\mathbb{K}^\times$$

Der Übergang von V zu $\mathbb{P}(V)$ heißt **Projektiv(is)ierung**.

Genau dann erzeugen zwei Vektoren $x, y \in V^\#$ dieselbe Gerade $x\mathbb{K} = y\mathbb{K}$,
geschrieben $x \sim y$, wenn ein Skalar $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ mit $x\lambda = y$ existiert.
Dies ist eine Äquivalenzrelation auf $V^\#$. Die Äquivalenzklasse $x\mathbb{K}^\times$
ist die von x aufgespannte Gerade (hier immer ohne den Nullpunkt 0).
Der Quotientenraum $V^\# / \sim$ ist der oben definierte projektive Raum $\mathbb{P}(V)$.
Kurz gesagt, als Slogan: Die Punkte von $\mathbb{P}(V)$ sind die Geraden von V .

Als kanonisches Beispiel betrachten wir den **Koordinatenraum**

$$V = \mathbb{K}^{n+1} = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}\}.$$

Den **projektiven Raum** schreiben wir dann $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}\mathbb{P}^n$ mit

$$q : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^n : (x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_0 : x_1 : \dots : x_n] = x\mathbb{K}^\times.$$

Diese Schreibweise nennen wir **homogene Koordinaten**. Für $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ gilt:

$$[x_0\lambda : x_1\lambda : \dots : x_n\lambda] = [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$$

😊 Speziell im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ trägt $\mathbb{K}^{n+1}$ die euklidische Topologie,
 $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist ein Teilraum, und $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{K}\mathbb{P}^n$ der Quotientenraum.
Diese Räume $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ und $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ untersuchen wir in der Topologie genauer.
Diese Quotientenkonstruktion ist wunderbar einfach, konkret, explizit.
Schwierig ist allein die globale Form des Quotientenraumes, dazu später.
Die Projektivierung können wir auf jeden Vektorraum anwenden, auch
auf unendlich-dimensionale Vektorräume und auf Untervektorräume.

Projektivierung respektiert Teilräume: Ist $U \leq V$ ein Untervektorraum, so operiert $\mathbb{K}^\times$ auf der Teilmenge $U^\# \subseteq V^\#$, und wir erhalten $\mathbb{P}(U) \subseteq \mathbb{P}(V)$.

Für die Koordinatenräume haben wir die kanonischen Einbettungen:

$$\text{inc} : \mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}^{n+1} : (x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{n-1}, 0)$$

$$\text{inc} : \mathbb{KP}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{KP}^n : [x_0 : \dots : x_{n-1}] \mapsto [x_0 : \dots : x_{n-1} : 0]$$

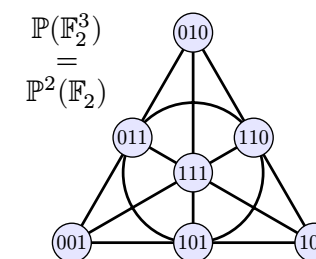
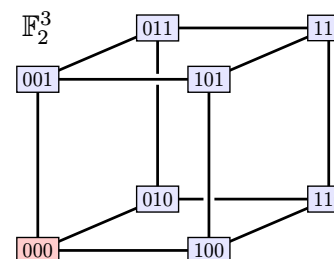
$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{K}^1 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{K}^2 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{K}^3 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{K}^4 \longrightarrow \dots \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{K}^1 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{K}^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{K}^3 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{K}^4 \setminus \{0\} \longrightarrow \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{KP}^0 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{KP}^1 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{KP}^2 & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathbb{KP}^3 \longrightarrow \dots \end{array}$$

$$\mathbb{KP}^n \supset \mathbb{KP}^{n-1} = \{[x_0 : \dots : x_{n-1} : 0]\}, \text{ also}$$

$$\mathbb{KP}^n \setminus \mathbb{KP}^{n-1} = \{[x_0 : \dots : x_{n-1} : 1]\} \cong \mathbb{K}^n$$

$$\mathbb{KP}^n \cong \mathbb{K}^0 \sqcup \mathbb{K}^1 \sqcup \mathbb{K}^2 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{K}^n$$

Ein schönes Beispiel erhalten wir für den Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ und $n = 2$:



Hier besteht $V = \mathbb{F}_2^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ aus acht Vektoren, also $V^\# = \mathbb{F}_2^3 \setminus \{0\}$ aus sieben. Jeder Vektor $v \in V^\#$ spannt die Gerade $\{0, v\} \subseteq \mathbb{F}_2^3$ auf, seine Äquivalenzklasse ist also $\{v\}$. Die sieben Geraden in $\mathbb{F}_2^3$ sind die Punkte des projektiven Raumes $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^3) = \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$.

Die obige Illustration zeigt $\mathbb{F}_2^3$ als Würfel und $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^3)$ als **Fano-Ebene**. Die sieben Ebenen in $\mathbb{F}_2^3$ betrachten wir als Geraden in $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^3) = \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$. Dies ist ein berühmt-elegantes Minimalmodell der **Inzidenzgeometrie**. Je zwei Punkte inzidieren mit genau einer Geraden, und umgekehrt.

Beispiel / Übung U3B: endliche projektive Räume

Wie viele Elemente hat $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$? Wie erklären Sie das geometrisch?

😊 Die Menge $\mathbb{F}_q^{n+1}$ hat q^{n+1} Elemente. Jede Gerade $\mathbb{F}_q \cdot v$ hat q Elemente.

🤔 Dies ist *keine* Zerlegung, da alle Geraden den Nullpunkt enthalten.

Lösung: Die Menge $V^\# = \mathbb{F}_q^{n+1} \setminus \{0\}$ hat genau $q^{n+1} - 1$ Elemente. Jede Gerade $\mathbb{F}_q^\times v$ hat genau $q - 1$ Elemente. Dies ist eine Zerlegung!

$$\# \mathbb{P}(V) = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

Beispiele:

$$\# \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2) = \frac{8 - 1}{2 - 1} = 7 = 1 + 2 + 4$$

$$\# \mathbb{P}^3(\mathbb{F}_5) = \frac{625 - 1}{5 - 1} = 156 = 1 + 5 + 25 + 125$$

Dahinter steckt die affine Zerlegung $\mathbb{KP}^n \cong \mathbb{K}^0 \sqcup \mathbb{K}^1 \sqcup \mathbb{K}^2 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{K}^n$.

😊 Wir nutzen dankend die Bahngleichung, hier frei.
Touristin fragt Schäfer: „Wie zählen Sie so schnell Ihre Schafe?“
– „Das ist ganz einfach, ich zähle die Beine und teile durch vier.“

😊 Hinter der geometrischen Summe steckt tatsächlich Geometrie!

$$\mathbb{KP}^n \supset \mathbb{KP}^{n-1} = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{KP}^n \mid x_n = 0\}, \text{ also}$$

$$\mathbb{KP}^n \setminus \mathbb{KP}^{n-1} = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{KP}^n \mid x_n = 1\} \cong \mathbb{K}^n.$$

Aus der kanonischen **Filtrierung** $\mathbb{KP}^0 \subseteq \mathbb{KP}^1 \subseteq \mathbb{KP}^2 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{KP}^n$ gewinnen wir die **Zellzerlegung** $\mathbb{KP}^n \cong \mathbb{K}^0 \sqcup \mathbb{K}^1 \sqcup \mathbb{K}^2 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{K}^n$.

😊 Dies erklärt die Formel $\# \mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ geometrisch: Die abstrakten Zahlen $1, q, q^2, \dots, q^n$ entsprechen konkreten Mengen! Ja, Sie lesen richtig: Zahlen sind abstrakt, Mengen sind konkret.

😊 Das ist eine Illustration für algebraisch-geometrischen Zahlenzauber. Diese Art der **Konkretisierung** ist oft nützlich und überaus erfolgreich. Vornehm heißt dies **Kategorifizierung**: Unsere abstrakt-algebraische Rechnung wird in einer konkreten Kategorie erklärt und interpretiert.

Bemerkung: (0) Sei $A \in GL_n \mathbb{K}$. Für $x \in \mathbb{K}^n$ gilt $Ax \in \mathbb{K}^n$.

$$GL_n \mathbb{K} \curvearrowright \mathbb{K}^n : (A, x) \mapsto Ax$$

(1) Aus $x \neq 0$ folgt $Ax \neq 0$. Somit operiert A auf $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$.

$$GL_n \mathbb{K} \curvearrowright \mathbb{K}^n \setminus \{0\} : (A, x) \mapsto Ax$$

(2) Für $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ gilt $A(\lambda x) = \lambda(Ax)$. Somit operiert A auf $\mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$.

$$GL_n \mathbb{K} \curvearrowright \mathbb{P}(\mathbb{K}^n) : (A, [x]) \mapsto [Ax]$$

(3) Dabei operieren A und λA gleich: $[(\lambda A)x] = [\lambda(Ax)] = [Ax]$.

$$PGL_n \mathbb{K} \curvearrowright \mathbb{P}(\mathbb{K}^n) : ([A], [x]) \mapsto [Ax]$$

Wir nennen daher zwei Matrizen $A, A' \in GL_n \mathbb{K}$ **projektiv äquivalent**, $A \sim A'$, wenn $A' = \lambda A$ mit $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ gilt. Dies ist eine Äquivalenzrelation auf $GL_n \mathbb{K}$ und zudem verträglich mit der Matrixmultiplikation, denn $(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)AB$. Der Quotient ist die **projektive lineare Gruppe**.

Definition U3c: die projektive lineare Gruppe

Sei $\mathbb{K}$ ein kommutativer Ring und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Die allgemeine lineare Gruppe $GL_n \mathbb{K}$ hat das Zentrum $ZGL_n \mathbb{K} = \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{K}^\times\} \cong \mathbb{K}^\times$.

Die Quotientengruppe ist die **projektive allgemeine lineare Gruppe**

$$PGL_n \mathbb{K} := GL_n \mathbb{K} / ZGL_n \mathbb{K} \\ \text{mit } ZGL_n \mathbb{K} = \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{K}^\times\}.$$

Entsprechend definieren wir die **projektive spezielle lineare Gruppe**

$$PSL_n \mathbb{K} := SL_n \mathbb{K} / ZSL_n \mathbb{K} \\ \text{mit } ZSL_n \mathbb{K} = \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{K}^\times, \lambda^n = 1\}.$$

Wiederholung: Was ist das Zentrum $Z(\mathbb{K}^{n \times n})$ des Matrixrings? (K1τ)
Zeigen Sie $Z(GL_n \mathbb{K}) = ZGL_n \mathbb{K}$ und $Z(SL_n \mathbb{K}) = ZSL_n \mathbb{K}$ wie behauptet.

Definition U3c: die projektive orthogonale Gruppe

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ haben wir die **projektive allgemeine orthogonale Gruppe**

$$PGO_n \mathbb{R} := GO_n \mathbb{R} / ZGO_n \mathbb{R} \\ \text{mit } ZGO_n \mathbb{R} = \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}\}$$

Ebenso definieren wir die **projektive spezielle orthogonale Gruppe**

$$PSO_n \mathbb{R} := SO_n \mathbb{R} / ZSO_n \mathbb{R} \\ \text{mit } ZSO_n \mathbb{R} = \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{S}^0, \lambda^n = 1\}$$

Übung: Zeigen Sie $Z(GO_n \mathbb{R}) = ZGO_n \mathbb{R}$ und $Z(SO_n \mathbb{R}) = ZSO_n \mathbb{R}$.
Die letzte Gruppe ist $\{\pm 1\}$ für n gerade, doch nur $\{1\}$ für n ungerade.
Zum Beispiel gilt $PGO_2 \mathbb{R} = GO_2 \mathbb{R} / \{\pm 1\}$ und $PSO_2 \mathbb{R} = SO_2 \mathbb{R} / \{\pm 1\}$.
Hingegen gilt $PGO_3 \mathbb{R} = GO_3 \mathbb{R} / \{\pm 1\}$, doch $PSO_3 \mathbb{R} = SO_3 \mathbb{R} / \{1\}$.

Definition U3c: die projektive unitäre Gruppe

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ haben wir die **projektive allgemeine unitäre Gruppe**

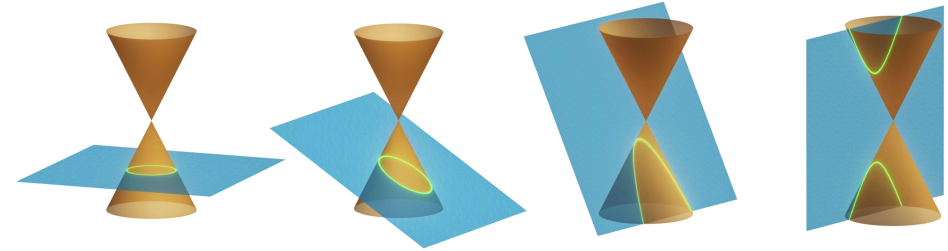
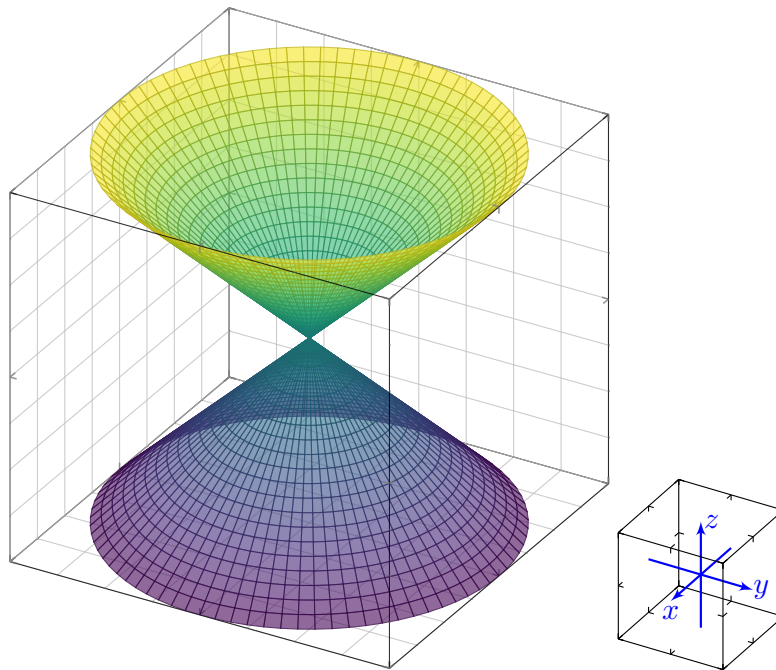
$$PGU_n \mathbb{C} := GU_n \mathbb{C} / ZGU_n \mathbb{C} \\ \text{mit } ZGU_n \mathbb{C} = \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{S}^1\}$$

Ebenso definieren wir die **projektive spezielle unitäre Gruppe**

$$PSU_n \mathbb{C} := SU_n \mathbb{C} / ZSU_n \mathbb{C} \\ \text{mit } ZSU_n \mathbb{C} = \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{S}^1, \lambda^n = 1\}$$

Übung: Zeigen Sie $Z(GU_n \mathbb{C}) = ZGU_n \mathbb{C}$ und $Z(SU_n \mathbb{C}) = ZSU_n \mathbb{C}$.
Die letzte Gruppe besteht somit genau aus den n -ten Einheitswurzeln.
Zum Beispiel gilt $PGU_2 \mathbb{C} = GU_2 \mathbb{C} / GU_1 \mathbb{C}$ und $PSU_2 \mathbb{C} = SU_2 \mathbb{C} / \{\pm 1\}$.

$$x^2 + y^2 = z^2$$



Aufgabe: (0) Zeichnen Sie die Quadrik $x^2 + y^2 = z^2$ in $\mathbb{R}^3$.

Zeichnen Sie jeweils den Schnitt mit folgenden affinen Ebenen:

- (1) $(u, v, 1)$ (2) $(u, v, 1 + u/2)$ (3) $(u, v, 1 + u)$ (4) $(1, v, u)$

Lösungsskizze: (1) $u^2 + v^2 = 1$ ist ein Kreis.

(2) $u^2 + v^2 = 1 + u + u^2/4$ ist eine Ellipse.

(3) $u^2 + v^2 = 1 + 2u + u^2$ ist eine Parabel.

(4) $1 + v^2 = u^2$ ist eine Hyperbel.

Bei Kegelschnitten wirken all unsere bisherigen geometrischen Begriffe, lineare und affine und projektive Räume, wunderbar zusammen.

Das definierende Polynom $P(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ist homogen vom Grad 2, das bedeutet $P(x\lambda, y\lambda, z\lambda) = P(x, y, z)\lambda^2$. Die Nullstellenmenge $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid P(x, y, z) = 0\}$ können wir also projektiv betrachten, als Teilmenge in $\mathbb{RP}^2$. Global mag dies zunächst noch schwierig sein, doch leicht können wir sie lokal betrachten, jeweils in affinen Karten. Genau das dürfen Sie in dieser Aufgabe selbst ausprobieren!

Übung: Sie sehen oben zunächst die Skizze, führen Sie dies genauer aus: Zeichnen Sie Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel in der u - v -Ebene. Welche der ebenen Quadriken von Seite U220 können Sie erzeugen?

Übung: Alles nochmal euklidisch: Wie parametrisieren Sie die vier affinen Ebenen euklidisch-isometrisch? Wie bringen Sie Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel dann euklidisch-isometrisch in Hauptachsen?

Vieles können Sie schon jetzt. Das nächste Kapitel erklärt es allgemein.

☺ Kreise, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln sind vertraute Objekte. Die dreidimensionale Sichtweise als Kegelschnitte lehrt eindrücklich: Diese scheinbar sehr verschiedenen Objekte sind in Wirklichkeit nur variierende affine Aspekte derselben projektiven Kurve!

The introduction of numbers as coordinates [...] is an act of violence whose only practical vindication is the special calculatory manageability.

Hermann Weyl (1885–1955), *Philosophy of Mathematics and Natural Science*

Wir betrachten den Kegel von verschiedenen Seiten, das heißt wie oben: in verschiedenen affinen Karten. Je nach Karte entstehen verschiedene ebene Quadriken, alle gemeinsam fügen sich zum Kegel zusammen.

Verschiedene Sichtwinkel zeigen nur einen Ausschnitt des Gesamtbildes. Das erinnert an die Weisen, die je nur einen Teil der Wahrheit erfassen. Kunstvoll-listig erzählt dies das Gedicht von John Godfrey Saxe (1872), hinreißend gesungen von Natalie Merchant (2009), youtu.be/31yJLFMSVbY.

In dem Beispiel zu Kegelschnitten steckt sowohl elegante Einfachheit als auch profunde Raffinesse, auf die ich hier kurz eingehen möchte.

Wir betrachten den Polynomring $R = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ in den Variablen $X_1, \dots, X_n$ über dem CRing $\mathbb{K}$. Zum Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ hat das Monom $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ den Totalgrad $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Wir setzen dazu

$$\mathbb{N}_{\leq d}^n := \{\alpha \in \mathbb{N}^n ; |\alpha| \leq d\},$$

$$\mathbb{N}_d^n := \{\alpha \in \mathbb{N}^n ; |\alpha| = d\}.$$

Ein **homogenes Polynom vom Totalgrad d** hat die Form

$$P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_d^n} p_\alpha X^\alpha \quad \text{mit } p_\alpha \in \mathbb{K}.$$

Für jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt demnach Homogenität, $P(X\lambda) = P(X)\lambda^d$.

Hat das Polynom $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ den Totalgrad $\leq d$, so können wir es **homogenisieren** zu $h_d(P) \in \mathbb{K}[X_0, X_1, \dots, X_n]$ vom Totalgrad d durch

$$P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_{\leq d}^n} p_\alpha X^\alpha \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_{\leq d}^n} p_\alpha X^\alpha X_0^{d-|\alpha|} = h_d(P).$$

Beispiel: Wie homogenisieren Sie in $\mathbb{R}[x, y, z]$ mit z zum Grad 2?

Ellipse: $x^2/4 + y^2 - 1 \mapsto x^2/4 + y^2 - z^2$

Hyperbel: $x^2 - 3y^2 - 1 \mapsto x^2 - 3y^2 - z^2$

Parabel: $x^2 - 2y \mapsto x^2 - 2yz$

Wir spendieren zu $X_1, \dots, X_n$ eine weitere Variable X_0 und nutzen diese dazu, alle Monome $X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ mit $|\alpha| \leq d$ auf den Totalgrad d zu heben.

Jedes Polynom $P \in \mathbb{K}[X_0, X_1, \dots, X_n]$ definiert seine **Nullstellenmenge**

$$V(P; \mathbb{K}^{n+1}) = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid P(x_0, \dots, x_n) = 0\}.$$

Ist das Polynom P homogen, so ist seine Nullstellenmenge V ein **Kegel**:

Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in V$ gilt $x\lambda \in V$, denn $P(x\lambda) = P(x)\lambda^d = 0$.

Daraus erhalten wir zu P die **projektive Nullstellenmenge**

$$V(P; \mathbb{K}\mathbb{P}^n) = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{K}\mathbb{P}^n \mid P(x_0, \dots, x_n) = 0\}.$$

⚠ Das Polynom P definiert die Funktion $f_P: \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}: x \mapsto P(x)$. Auf $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ hingegen erhalten wir aus P keine wohldefinierte Abbildung, denn $P(\lambda x) = \lambda^d P(x)$. Dennoch ist die Nullstellenmenge wohldefiniert.

⚠ Für ein beliebiges Polynom $P \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ ergibt es keinen Sinn zu fragen, ob ein Punkt $[x] \in \mathbb{K}\mathbb{P}^n$ eine Nullstelle von P ist, also $P(x) = 0$, denn diese Eigenschaft ist zwar für Punkte $x \in \mathbb{K}^{n+1}$ definiert, aber nicht invariant unter Skalierung. Für homogene Polynome gelingt es!

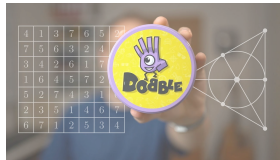
Beispiel: Die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ definiert als Lösungsmenge den Kreis $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Homogenisierung ergibt die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ und somit den Kegel $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$.

Im obigen Beispiel zu Kegelschnitten sind wir vom Kegel $x^2 + y^2 = z^2$ ausgegangen. Als Schnitt mit der affinen Ebene $(x, y, 1)$ erhalten wir den Kreis $x^2 + y^2 = 1$. Durch Homogenisierung gelangen wir vom Kreis $x^2 + y^2 = 1$ in der affinen Ebene zurück zum Kegel $x^2 + y^2 = z^2$ im $\mathbb{R}^3$. Dies interpretieren wir als Kurve in der projektiven Ebene $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$.

Slogan: Homogenisierung macht affine Kurven zu projektiven Kurven.

Kapitel U

Bonusmaterial



*Man muß jederzeit an Stelle von „Punkten, Geraden, Ebenen“
„Tische, Stühle, Bierseidel“ sagen können.*

David Hilbert (1862–1943) zur Axiomatik der Geometrie

Vollversion

eiserm.de/lehre/LinA

18.09.2026

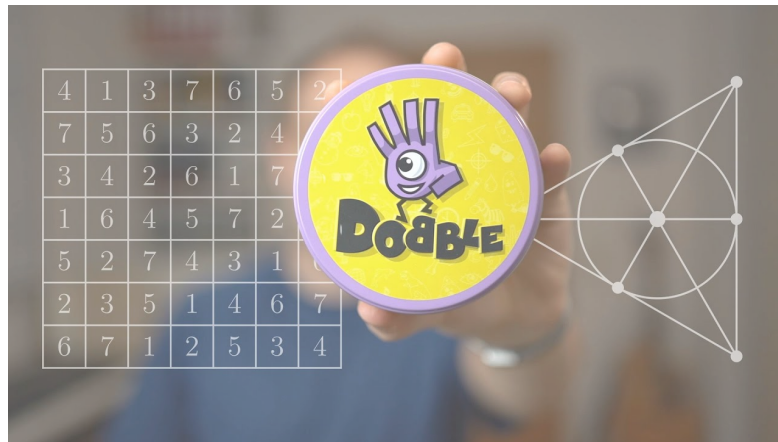
Inhalt dieses Kapitels U

U002

- 5 Analytische und synthetische Geometrie
 - Projektive Geometrie nach Veblen–Young
 - Projektive Ebenen und die Primpotenzvermutung

Dobble spielt auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^2\mathbb{F}_7$.

U403



📺 Stand-Up Maths, youtu.be/VTDKqW_GLkw. DorFuchs, youtu.be/vyYSEDGudlg.

Dobble ist ein Kartenspiel aus $55 \leq 57$ Karten mit je 8 Symbolen.
Je zwei *verschiedene* Karten haben *genau ein* Symbol gemeinsam.
Wer das Symbol zuerst findet, gewinnt. Konstruktion: Wie geht das?

Das Kartenspiel Set beruht auf dem affinen Raum $\mathbb{F}_3^4$.

U404



Hinter dem beliebten Kartenspiel Set verbirgt sich der affine Raum $\mathbb{F}_3^4$.
Spielen Sie's mit Friederike Stoll! 📺 Numberphile, youtu.be/EkFX9jUJPKk.

Die Fortsetzung heißt *ProSet* für *Projective Set*, projectiveset.jonemo.de.
Die Spieler:innen suchen dabei Ebenen in $\mathbb{F}_2^6$, also Geraden in $\mathbb{P}^5\mathbb{F}_2$.

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Der projektive Raum $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ besteht aus allen Geraden p von V , also allen 1-dimensionalen linearen Unterräumen. Die Menge $\mathbb{L} = \mathbb{L}(V)$ enthalte alle Ebenen g von V , also alle 2-dimensionalen linearen Unterräume. Dies definiert den **projektiven Raum** $\Pi = (\mathbb{P}, \mathbb{L}, <)$; Elemente von $\mathbb{P}$ heißen (projektive) Punkte, Elemente von $\mathbb{L}$ heißen (projektive) Geraden, Inzidenz $p < g$ in Π bedeutet $p \subset g$ in V .

Übung: Zeigen Sie, dass für $\Pi = (\mathbb{P}, \mathbb{L}, <)$ folgende Axiome gelten:

Definition U5A: projektive Geometrie nach Veblen–Young 1910

- (P1) *Verbindungsgerade.* Zu je zwei verschiedenen Punkten $p \neq q$ in $\mathbb{P}$ gibt es genau eine Gerade $g \in \mathbb{L}$ mit $p, q < g$. Wir schreiben hierfür $g =: p \vee q$.
- (P2) *Veblen–Young–Axiom.* Sind a, b, c, d paarweise verschiedene Punkte, und schneiden sich die Geraden $a \vee b$ und $c \vee d$, dann auch $a \vee d$ und $b \vee c$.
- (P3) *Reichhaltigkeit.* Auf jeder Geraden liegen mindestens drei Punkte: Für alle $g \in \mathbb{L}$ gibt es drei verschiedene Punkte $p, q, r \in \mathbb{P}$ mit $p, q, r < g$.

Wir haben zwei komplementäre Ansätze, projektive Räume zu definieren:

- (1) Wir geben eine Konstruktion an, etwa wie in §U3 als Quotienten. Geraden werden dabei zu Punkten, analog werden Ebenen zu Geraden.
- (2) Wir geben uns wünschenswerte Eigenschaften als Axiome vor, etwa:
 - (2a) Durch je zwei verschiedene Punkte $p \neq q$ läuft genau eine Gerade g .
 - (2b) Je zwei verschiedene Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

Die erste Eigenschaft wünschen wir uns von jedem projektiven Raum, die zweite zudem von jeder projektiven Ebene (U5D). Hat man sich auf ein Axiomensystem festgelegt, so ist zunächst nicht klar, was genau man da eigentlich beschrieben hat: Gibt es ein Modell? oder keins? oder mehr? Kann man Axiome weglassen? Damit beschäftigt sich die synthetische Geometrie. Hier prüfen Sie die Konstruktion aus §U3 auf obige Axiome.

An adequate knowledge of geometry cannot be obtained without attention to the foundations. [...] it is natural to take the foundations of projective geometry as the foundations of all geometry. (Veblen, Young, 1910)

Die obigen Axiome (P123) nutzen nur die Menge $\mathbb{P}$ der Punkte und die Menge $\mathbb{L}$ der Geraden sowie eine Inzidenzrelation $<$, die sagt, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt. Jeder Vektorraum V liefert ein Modell $(\mathbb{P}(V), \mathbb{L}(V), <)$, das diese Axiome erfüllt. Genau das ist obige Übung. Erstaunlicherweise gilt hierzu die folgende berühmte Umkehrung:

Satz U5B: Koordinatisierung, Veblen–Young 1910

Sei $\Pi = (\mathbb{P}, \mathbb{L}, <)$ ein projektiver Raum im Sinne obiger Axiome (P123). Seine Dimension sei mindestens 3, das heißt es gibt zwei Geraden g, h , die sich nicht schneiden. Dann ist Π isomorph zum projektiven Raum $\Pi(V)$ eines Vektorraums V über einem Divisionsring $\mathbb{K}$.

Aus der „rein kombinatorischen“ Inzidenzstruktur $(\mathbb{P}, \mathbb{L}, <)$ können wir also einen Divisionsring $\mathbb{K}$ rekonstruieren und Koordinaten einführen. Aus scheinbar wenig erhalten wir sehr viel, das ist höchst erstaunlich.

Albrecht Beutelspacher, Ute Rosenbaum: *Projektive Geometrie: von den Grundlagen bis zu den Anwendungen*. Vieweg 2004.

Übung: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper (mit q Elementen). Zum Vektorraum $V = \mathbb{K}^{n+1}$ betrachten wir $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ und dazu $\mathbb{S} = \{\mathbb{P}(U) \mid U \leq V\}$ mit Dimension $\dim \mathbb{P}(U) := \dim_{\mathbb{K}}(U) - 1$. Zeigen Sie, dass folgende Axiome gelten:

Definition U5c: projektive Geometrie nach Birkhoff 1935

Eine **projektive Geometrie** $(\mathbb{P}, \mathbb{S}, \dim)$ der Dimension n (und Ordnung q) besteht aus einer Menge $\mathbb{P}$ von *Punkten* und einer Menge $\mathbb{S} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{P})$ von *Teilräumen* mit einer Surjektion $\dim : \mathbb{S} \rightarrow \{-1, 0, 1, \dots, n\}$. Dabei gelte:

- 0 Es gilt $\emptyset \in \mathbb{S}$. Für $S \in \mathbb{S}$ gilt $\dim(S) = -1$ gdw $S = \emptyset$.
- 1 Für alle $x \in \mathbb{P}$ gilt $\{x\} \in \mathbb{S}$. Es gilt $\dim S = 0$ gdw $S = \{x\}$.
- 2 Die geordnete Menge $(\mathbb{S}, \subseteq)$ ist ein Verband: Zu jedem Paar $S, T \in \mathbb{S}$ existiert in $(\mathbb{S}, \subseteq)$ das Infimum $S \wedge T$ und das Supremum $S \vee T$.
- 3 Dabei gilt $\dim(S) + \dim(T) = \dim(S \wedge T) + \dim(S \vee T)$.
- 4 Für (ein und somit) alle $S \in \mathbb{S}$ mit $\dim(S) = 1$ gilt $|S| = q + 1$.

Übung: Die Axiome U5c für $(\mathbb{P}, \mathbb{S}, \dim)$ implizieren U5A für $(\mathbb{P}, \mathbb{S}_1, \in)$.

Projektive Räume der Dimension ≥ 3 sind geklärt dank Veblen–Young U5B. Projektive Ebenen sind überraschend vielfältig und schwierig!

Definition U5D: projektive Ebene, axiomatische Sichtweise

Eine **projektive Ebene** $(\mathbb{P}, \mathbb{L}, <)$ besteht aus einer Menge $\mathbb{P}$ von *Punkten* und einer Menge $\mathbb{L}$ von *Geraden* mit *Inzidenz* $(<) \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{L}$, sodass gilt:

- (P1) *Verbindungsgerade.* Zu je zwei verschiedenen Punkten $p \neq q$ in $\mathbb{P}$ gibt es genau eine Gerade $g \in \mathbb{L}$ mit $p, q < g$. Wir schreiben hierfür $g =: p \vee q$.
 (P2) *Schnittpunkt.* Zu je zwei verschiedenen Geraden $g \neq h$ in $\mathbb{L}$ gibt es genau einen Punkt $p \in \mathbb{P}$ mit $p < g, h$. Wir schreiben hierfür $p =: g \wedge h$.
 (P3) *Reichhaltigkeit.* Es gibt vier Punkte, keine drei auf einer Geraden.

Übung: Aus (P123) folgt (P4): Es gibt vier Geraden, von denen sich keine drei in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Das enthüllt eine Dualität: Ist $\Pi = (\mathbb{P}, \mathbb{L}, <)$ eine projektive Ebene, so auch ihr Dual $\Pi^\top = (\mathbb{L}, \mathbb{P}, >)$. Die Fano–Ebene $\Pi(\mathbb{F}_2^3)$ ist selbst-dual, ebenso $\Pi(\mathbb{K}^3)$ über jedem *DRing.

Übung: Zeigen Sie folgende bemerkenswerte numerische Folgerung:

Proposition U5E: Ordnung einer endlichen projektiven Ebene

Sei $\Pi = (\mathbb{P}, \mathbb{L}, <)$ eine endliche projektive Ebene. Dann existiert $q \in \mathbb{N}$, genannt die **Ordnung** von Π , mit folgender Eigenschaft: Jeder Punkt liegt auf genau $q + 1$ Geraden, jede Gerade verläuft durch genau $q + 1$ Punkte, und ihre gemeinsame Anzahl ist $|\mathbb{P}| = |\mathbb{L}| = q^2 + q + 1$.

Beispiel: Zu $q = p^d$ mit $p \in \mathbb{N}$ prim und $d \geq 1$ existiert ein Körper $\mathbb{F}_q$ mit q Elementen. Dann ist $\mathbb{P}^2 \mathbb{F}_q = \mathbb{P}(\mathbb{F}_q^3)$ eine projektive Ebene der Ordnung q . Kleinstes Beispiel: Für $q = 2$ erhalten wir die Fano–Ebene mit 7 Punkten. Ab Ordnung 9 gibt es exotische Beispiele von projektiven Ebenen, doch in allen bekannten Beispielen ist q eine Primpotenz. Dies führt uns zu:

Vermutung U5F: Primpotenzvermutung für projektive Ebenen

Jede endliche projektive Ebene hat als Ordnung q eine Primpotenz, also $q \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, \dots\}$.

Dies illustriert eine allgegenwärtige Dualität: Die Untersuchung von Axiomen und die Konstruktion von Modellen arbeiten Hand in Hand. Speziell projektive Ebenen faszinieren viele Menschen, weil sie so einfach zu definieren sind, doch erstaunlich vielfältige Modelle erlauben.

📖 Charles Weibel: *Survey of Non-Desarguesian Planes*. Notices of the AMS 54 (2007) 1294–1303. www.ams.org/notices/200710/tx071001294p.pdf

The abstract study of projective geometry first arose in the work of J.-V. Poncelet (1822) and K. von Staudt (1847). About 100 years ago, axiomatic frameworks were developed by several people, including

G. Fano, D. Hilbert, E.H. Moore, I. Schur, and O. Veblen.

It was a very active branch of mathematics during 1900–1935, and a partial list of people then in this field reads like a

“Who’s Who of Mathematics”: A. Albert, E. Artin, Dickson,

Jacobson, Jordan, Moufang, Wedderburn, Zassenhaus, and Zorn.

It was reinvigorated by R. Baer and M. Hall about 50 years ago.

To my delight, it has many connections to modern mathematics.

Die Primpotenzvermutung U5F ist bis heute offen und gilt als schwierig. (Erdős Problem 723, www.erdosproblems.com/723) Viele Mathematiker:innen haben daran gearbeitet, doch leider waren die Fortschritte bislang gering. Ein sensationell berühmtes Ergebnis zu dieser Frage lautet:

Satz U5G: Bruck–Ryser 1949

Sei $\Pi = (\mathbb{P}, \mathbb{L}, <)$ eine endliche projektive Ebene. Ihre Ordnung q erfülle zudem $q \bmod 4 \in \{1, 2\}$. Dann ist q eine Summe von zwei Quadraten.

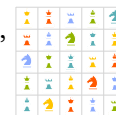
Daraus folgt die Unmöglichkeit der Ordnungen 6, 14, 21, 22,

Nicht ausgeschlossen sind hingegen $10 = 1^2 + 3^2$ und $18 = 3^2 + 3^2$.

Davon unberührt sind ebenso $12 \bmod 4 = 0$ und $15 \bmod 4 = 3$.

📖 Richard H. Bruck, Herbert J. Ryser: *The nonexistence of certain finite projective planes*. Canadian Journal of Mathematics 1 (1949) 88–93.

Bereits 1901 konnte Gaston Tarry die Ordnung 6 ausschließen, als er Eulers kombinatorisches *Problem der 36 Offiziere* löste. Den Zusammenhang erkannte allerdings erst Raj C. Bose 1938.



Jahrzehntelang suchten Afficionados nach einer projektiven Ebene der Ordnung 10. Zu dieser Zeit wurden zunehmend Computer ein mögliches Werkzeug zur Lösung kombinatorischer Probleme. Die optimistische Hoffnung war daher, das Problem zu lösen durch eine Kombination von cleveren Stift-und-Papier-Methoden mit Brute-Force-Suchprogrammen.

🤔 Wie können wir eine systematische Suche angehen?

Starke Struktur: Jede projektive Ebene $\Pi = (\mathbb{P}, \mathbb{L}, <)$ der Ordnung $q = 10$ hat $q^2 + q + 1 = 111$ Punkte und ebenso viele Geraden. Die Inzidenz ist somit eine Matrix $A \in \{0, 1\}^{\mathbb{P} \times \mathbb{L}} \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{P} \times \mathbb{L}}$ mit genau $q + 1 = 11$ Einsen in jeder Zeile und Spalte, sonst Nullen. Die obigen Axiome ($\Pi 12$) bedeuten: Es gilt $AA^T = A^T A = B$ mit Einträgen $q + 1$ auf der Diagonalen und Eins überall sonst. Der Suchraum ist zwar endlich, doch leider riesig groß!

😊 Mit genau diesem Ansatz und (Linearer) Algebra konnten Bruck und Ryser ihr berühmtes Theorem U5G beweisen. Damit lässt sich auch die Ordnung $q = 10$ angreifen, sowohl obstruktiv als auch konstruktiv.

Die Ordnung $q = 10$ wurde erst 1988 gelöst: Eine erschöpfende Suche per Computer zeigt, dass keine projektive Ebene der Ordnung 10 existiert.

Dieses Ergebnis jahrzehntelanger Suche hat damals hohe Wellen geschlagen und fasziniert bis heute. Die New York Times titelte im Dezember 1988 dazu: „Is a math proof a proof if no one can check it?“ Computerbeweise waren zunächst kontrovers, inzwischen verbreitet. Das Ergebnis wurde 2021 mit aktuellen Methoden geprüft und zertifiziert.

📖 Clement W. H. Lam: *The search for a finite projective plane of order 10*. Amer. Math. Monthly 98 (1991) 305–318. C. Bright, K.K.H. Cheung, B. Stevens, I. Kotsireas, V. Ganesh: *A SAT-based Resolution of Lam's Problem*. AAAI Conference on Artificial Intelligence (2021) 3669–3676.

Wie Lam erklärt, konnten sie mit cleverer Mathematik ihre Suche so weit optimieren, dass eine erschöpfende maschinelle Suche möglich wurde. Das ist die ersehnte Win-Win-Situation: Ein Gegenbeispiel zu finden wäre sensationell. Kein Gegenbeispiel auch. Der Rest ist Rechnen...

Die Un/Möglichkeit von Ordnung $q = 12$ ist offen. Falls uns jemand ein Gegenbeispiel vorlegt, in Form einer Matrix $A \in \{0, 1\}^{157 \times 157}$, so wäre es leicht zu *prüfen*. Es bleibt allerdings schwer zu *finden*. Sollten Sie darauf eine Forschungskarriere aufbauen? Das ist ein Fall von *high risk, high gain* und daher für den Anfang einer Karriere nicht zu empfehlen.

When I was a graduate student looking for a thesis topic, Herbert Ryser advised me not to work on the projective plane of order 10. Even though he was extremely interested in this subject, he believed that it was too difficult and that I might get nowhere with it. I took his advice and chose another problem. Somehow, this problem has a beauty that fascinates me as well as many other mathematicians. Finally in 1980, I succumbed to the temptation and started working on it with some of my colleagues. We eventually managed to get somewhere, but unfortunately, Dr. Ryser is no longer with us to hear of the final result. This is an expository article describing the evolution of the problem and how computers were used to solve it.

C.W.H. Lam: *The search for a finite projective plane of order 10*.

Andererseits gibt es kein verlässliches Maß dafür, dass eine offene Frage wie die Primpotenzvermutung U5F wirklich schwer ist. Vielleicht gibt es ein einfaches Gegenbeispiel und uns fehlt lediglich die nötige Phantasie? (So geschehen mit der im Juli 2026 plötzlich gelösten Jacobi-Vermutung.)

As with many long-standing open problems, we actually do not really know if they are difficult and why, until somebody solves the problem and even then it is not always clear. [...] As for the Prime Power Conjecture, for all we know, some smart undergraduate student can construct a counter-example.

Moishe Kohan, math.stackexchange.com/questions/3516166

Für den Anfang scheint daher ratsam: Lassen Sie Ihrer Kreativität freien Lauf, entwickeln Sie gleichzeitig mehrere Ideen, die Sie begeistern und Aussicht auf Erfolg haben, streuen Sie das Risiko und verfolgen Sie mehrere Fragen, arbeiten Sie ernsthaft, aber nicht allzu verbissen.

Kurzum: *Be yourself, don't try to be a pink unicorn. Except, if you are a pink unicorn, then be just that.*