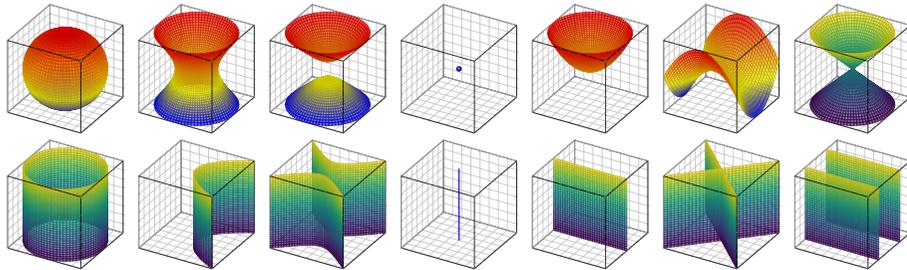


Kapitel O

Bilinearformen und Quadriken



*Bildung ist nicht nur das Lernen von Fakten,
sondern die Schulung des Geistes zu denken.*

Albert Einstein (1879–1955)

Inhalt dieses Kapitels O

- 1 Bilinearformen und darstellende Matrizen
- 2 Diagonalisierung symmetrischer Bilinearformen
 - Zusammenfassung zur Klassifikation
- 3 Quadriken und ihre affine Klassifikation
 - Zusammenfassung zur Klassifikation

Von linearen zu quadratischen Gleichungen

O003
Überblick

Bislang haben wir fast ausschließlich lineare Objekte untersucht: lineare Räume V, W und ihre linearen Abbildungen $f: V \rightarrow W$.

Die Lösungsmenge L jedes linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ bzw. $Ax = b$ können wir effizient berechnen mit dem Gauß-Algorithmus.

Zudem kennen wir Form und Größe von L : Dies ist ein linearer bzw. affiner Teilraum, und wir können seine Dimension bestimmen.

Strukturell gilt dasselbe für den Kern $\ker(f) = f^{-1}(\{0\})$ bzw. allgemein die Urbildmenge $f^{-1}(\{b\})$ jeder linearen Abbildung $f: V \rightarrow W$.

Statt linearer Gleichungen können wir allgemein Polynome von Grad 2, 3, 4, ... betrachten und deren Nullstellenmengen untersuchen.

Als wichtiges Beispiel kennen wir die Determinante $\det: K^{n \times n} \rightarrow K$. Die Determinante einer quadratischen Matrix A ist nicht linear in A , sondern multilinear in den Spalten bzw. Zeilen von A , und insgesamt ein homogenes Polynom von Grad n in den Koeffizienten von A . Seine Nullstellenmenge sind die nicht-invertierbaren Matrizen.

Von linearen zu quadratischen Gleichungen

O004
Überblick

In diesem Kapitel geht es grundlegend um quadratische Polynome; deren Nullstellenmengen heißen Quadriken. Erfreulicherweise sind quadratische Polynome noch recht nah am linearen Fall, und wir können die bewährten Methoden der Linearen Algebra wunderbar anwenden.

Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ gelingt uns so eine vollständige Klassifikation aller Quadriken im Raum \mathbb{K}^n bis auf Affinität, also Koordinatenwechsel. Schon in der Ebene \mathbb{R}^2 und im Raum \mathbb{R}^3 begegnet uns dabei eine bewundernswerte Vielfalt. Die Klassifikation schafft Überblick und wohlthuende Klarheit, dazu passt das Eingangszitat dieses Kapitels:

*Bildung ist nicht nur das Lernen von Fakten,
sondern die Schulung des Geistes zu denken.*

Albert Einstein (1879–1955)

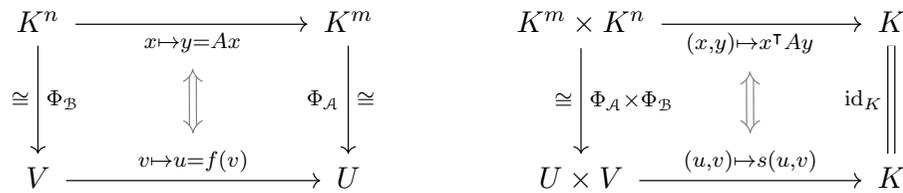
Wir folgen dem Lernbuch von Fischer, 4. Auflage 2019 (mit Präzisierungen und Ergänzungen).

⚠ In der aktuellen Version bietet dieses Kapitel nur eine knappe Zusammenfassung zentraler Begriffe und Ergebnisse.

Zusammenfassung: Homomorphismen vs Bilinearformen

O201

Sei K ein Körper sowie U, V Vektorräume über K mit Basen \mathcal{A}, \mathcal{B} .



(1) Wir können jede K -lineare Abbildung $f: V \rightarrow U$ darstellen durch eine Matrix $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) \in K^{m \times n}$. Dies definiert den K -Isomorphismus

$$(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}, L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}) : \text{Hom}_K(V, U) \cong K^{m \times n}.$$

(2) Wir können jede K -Bilinearform $s: U \times V \rightarrow K$ darstellen durch eine Matrix $A = M_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}(s) \in K^{m \times n}$. Wir erhalten so den K -Isomorphismus

$$(M_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}, F_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}) : \text{Bil}_K(U, V; K) \cong K^{m \times n}.$$

⚠ Wir nutzen dieselben Matrizen für zwei ganz verschiedene Dinge!

Zusammenfassung: Homomorphismen vs Bilinearformen

O202
Erläuterung

In jedem dieser beiden Fällen formuliert das kommutative Diagramm die wesentliche Eigenschaft und legt damit auch die Definitionen fest.

(1) Gegeben ist im ersten Fall eine K -lineare Abbildung $f: V \rightarrow U$. Für die darstellende Matrix $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) \in K^{m \times n}$ betrachten wir die Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ des Startraums V und schreiben zu jedem Vektor b_j sein Bild $f(b_j) = \sum_{i=1}^m b'_i a_{i,j}$ im Zielraum U als Linearkombination der Basis $\mathcal{A} = (b'_1, \dots, b'_m)$. Dies definiert die Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j}$.

⚠ Per Konvention lassen wir Abbildungen und Matrizen hier von links auf Vektoren operieren, das impliziert dann alle weiteren Indexregeln. (Die Notation wäre noch etwas schöner bei Operation von rechts.)

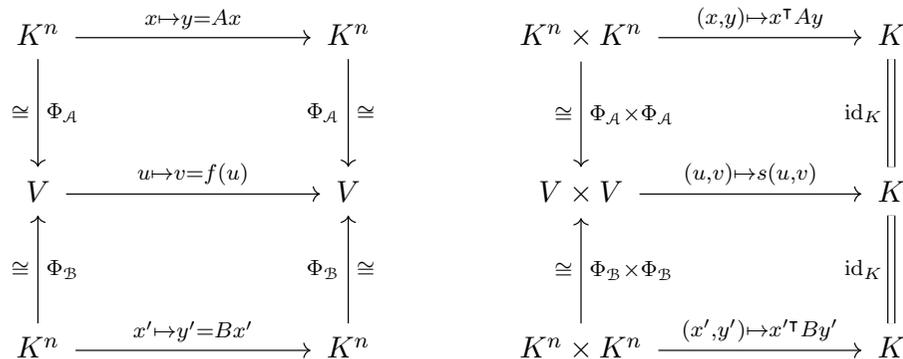
(2) Gegeben ist im zweiten Falle eine K -Bilinearform $s: U \times V \rightarrow K$. Für die Matrix $A = M_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}(s)$ betrachten wir die Basen $\mathcal{A} = (b'_1, \dots, b'_m)$ von U und $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von V und setzen $a_{i,j} = s(b'_i, b_j)$ für alle i, j .

⚠ Auch dies definiert eine Matrix $A \in K^{m \times n}$, aber mit einer völlig anderen Herkunft und Bedeutung als im ersten Fall.

Zusammenfassung: Endomorphismen vs Bilinearformen

O203

Wir betrachten speziell $U = V$ mit gemeinsamer Basis:



(1) Ähnlichkeit $A \sim B = S^{-1}AS$

(2) Kongruenz $A \sim B = S^TAS$

Basiswechsel $S = T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \in \text{GL}_n(K)$ mit $x \mapsto x' = Sx = (\Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}})(x)$.

Endomorphismus: $y' = Bx' \Leftrightarrow (Sy) = B(Sx) \Leftrightarrow y = (S^{-1}BS)x$

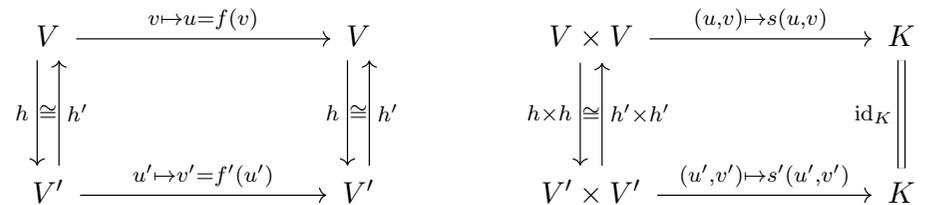
Bilinearform: $x'^T By' = (Sx)^T B(Sy) = x^T (S^TBS)y$

⚠ Verschiedene Bedeutung und anderes Transformationsverhalten!

Zusammenfassung: Endomorphismen vs Bilinearformen

O204

Wir erklären Isomorphie für Endomorphismen und Bilinearformen:



Zwei Endomorphismen $f: V \rightarrow V$ und $f': V' \rightarrow V'$ über K heißen **isomorph** oder **äquivalent**, falls ein Isomorphismus $(h, h'): V \cong V'$ mit $h \circ f = f' \circ h$ existiert, also $f' = h \circ f \circ h^{-1}$ bzw. $f = h^{-1} \circ f' \circ h$.

Zwei Bilinearformen $s: V \times V \rightarrow K$ und $s': V' \times V' \rightarrow K$ über K heißen **isomorph** oder **isometrisch**, falls ein Isomorphismus $(h, h'): V \cong V'$ mit $s = s' \circ (h \times h)$ existiert, also $s(u, v) = s'(h(u), h(v))$ für alle $u, v \in V$.

Klassifikation: Wie erkennen wir Isomorphie möglichst effizient? Hier helfen uns **Normalformen** und **Invarianten**!

Satz O2A: Diagonalisierung symmetrischer Bilinearformen

Sei K ein Körper mit $\text{char } K \neq 2$, hierüber sei V ein Vektorraum mit $n = \dim_K V < \infty$ und $s : V \times V \rightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform.

(1) Dann existiert eine orthogonale Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V , mit

$$s(v_i, v_j) = 0 \quad \text{für alle } i \neq j.$$

Die darstellende Matrix von s bezüglich \mathcal{B} ist demnach diagonal:

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(s) \stackrel{\text{Def}}{=} (s(v_i, v_j))_{i,j} \stackrel{(1)}{=} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_n \end{bmatrix}$$

(2) Jede symmetrische Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist $\text{GL}_n(K)$ -kongruent zu einer Diagonalmatrix: Es existiert $S \in \text{GL}_n(K)$, sodass

$$A \sim B = S^T A S = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n).$$

😊 Diesen Satz können wir auf zwei Arten beweisen (siehe Fischer):

(1) Einerseits per Induktion über die Dimension $n = \dim_K(V)$.

(2) Andererseits durch den symmetrisierten Gauß-Algorithmus.

Beide Beweise leisten im Wesentlichen dasselbe, betonen aber komplementäre Aspekte und ergänzen sich wunderbar.

😊 Zum Kontrast blicken wir nochmal zurück auf die Diagonalisierung eines Endomorphismen $f : V \rightarrow V$. Diese ist wesentlich schwieriger und aufwändiger: charakteristisches Polynom, Zerfällung, Eigenräume, ...

😞 Die Diagonalisierung eines Endomorphismus gelingt nicht immer, daher haben wir ausführlich auch die Jordanisierung untersucht.

😊 Die Diagonalisierung einer symmetrischen Bilinearform $s : V \times V \rightarrow K$ gelingt immer, einzige Voraussetzung ist $\text{char } K \neq 2$.

Satz O2B: Klassifikation symmetrischer Bilinearformen über \mathbb{C}

(1) Zu jeder symmetrischen Bilinearform $s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ über \mathbb{C} von Dimension n und Rang r existiert eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V mit

$$s(v_i, v_j) = 1 \quad \text{für } i = j \in \{1, \dots, r\},$$

$$s(v_i, v_j) = 0 \quad \text{für alle anderen } (i, j).$$

Die darstellende Matrix von s bezüglich \mathcal{B} ist demnach

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(s) \stackrel{\text{Def}}{=} (s(v_i, v_j))_{i,j} \stackrel{(1)}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{r \times r} & \mathbf{0}_{r \times d} \\ \mathbf{0}_{d \times r} & \mathbf{0}_{d \times d} \end{bmatrix} \stackrel{\text{Def}}{=} D_{n \times n}^r.$$

(2) Jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ -kongruent zu genau einer solchen Modellmatrix: Es existiert $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, sodass

$$A \sim B = S^T A S = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0).$$

(3) Genau dann sind zwei symmetrische Bilinearformen s, s' über \mathbb{C} isometrisch, bzw. zwei symmetrische Matrizen A, A' über \mathbb{C} kongruent, wenn Sie dieselbe Dimension und denselben Rang über \mathbb{C} haben.

😊 Diese Klassifikation gilt wörtlich genau so über jedem Körper K , in dem jedes Element ein Quadrat ist. Dies gilt insbesondere über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper, etwa den komplexen Zahlen \mathbb{C} .

Beweis: (1) Dank der oben erklärten Diagonalisierung (O2A) existiert zu s eine diagonalisierende Basis (u_1, \dots, u_n) von V mit $s(u_i, u_j) \in K^\times$ für $i = j \in \{1, \dots, r\}$ und $s(u_i, u_j) = 0$ sonst.

Für $i = 1, \dots, r$ wählen wir eine der beiden Quadratwurzeln $a_i \in K$ mit $a_i^2 = s(u_i, u_i)$ und setzen $v_i = u_i/a_i$. Damit gilt $s(v_i, v_i) = 1$. Die Basisvektoren $v_i = u_i$ für $i = r + 1, \dots, n$ ändern wir nicht.

(2) Dies ist die äquivalente Matrixformulierung der Aussage (1).

(3) „ \Rightarrow “: Die Dimension und der Rang sind Invarianten unter Isometrie symmetrischer Bilinearformen bzw. Kongruenz symmetrischer Matrizen.

„ \Leftarrow “: Haben s, s' dieselbe Dimension und denselben Rang, so finden wir diagonalisierende Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ wie in (1), und diese liefern die ersehnte Isometrie $(h, h') : (V, s) \xrightarrow{\sim} (V', s') : v_i \mapsto v'_i$. ◻

Satz O2c: Klassifikation symmetrischer Bilinearformen über \mathbb{R}

(1) Zu jeder symmetrischen Bilinearform $s: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ über \mathbb{R} von Dimension n und Rang r existiert eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V mit

$$\begin{aligned} s(v_i, v_j) &= +1 && \text{für } i = j \in \{1, \dots, r_+\}, \\ s(v_i, v_j) &= -1 && \text{für } i = j \in \{r_+ + 1, \dots, r_+ + r_-\}, \\ s(v_i, v_j) &= 0 && \text{für alle anderen Paare } (i, j). \end{aligned}$$

Die darstellende Matrix von s bezüglich \mathcal{B} ist demnach

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(s) \stackrel{\text{Def}}{=} (s(v_i, v_j))_{i,j} \stackrel{(1)}{=} \begin{bmatrix} 1_{r_+ \times r_+} & 0_{r_+ \times r_-} & 0_{r_+ \times r_0} \\ 0_{r_- \times r_+} & -1_{r_- \times r_-} & 0_{r_- \times r_0} \\ 0_{r_0 \times r_+} & 0_{r_0 \times r_-} & 0_{r_0 \times r_0} \end{bmatrix}$$

(2) Jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ -kongruent zu einer solchen Modellmatrix: Es existiert $S \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, sodass

$$A \sim B = S^T A S = \text{diag}(+1, \dots, +1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0).$$

Satz O2c: Klassifikation symmetrischer Bilinearformen über \mathbb{R}

(3) Sei $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_n)$ eine weitere Basis von V mit

$$\begin{aligned} s(v'_i, v'_j) &= +1 && \text{für } i = j \in \{1, \dots, r'_+\}, \\ s(v'_i, v'_j) &= -1 && \text{für } i = j \in \{r'_+ + 1, \dots, r'_+ + r'_-\}, \\ s(v'_i, v'_j) &= 0 && \text{für alle anderen Paare } (i, j). \end{aligned}$$

Dann gilt $(r_+, r_-, r_0) = (r'_+, r'_-, r'_0)$ dank Sylvesters Trägheitssatz.

Wir nennen diese Invariante (r_+, r_-, r_0) das **Signaturtripler** von s , mit dem **Positivitätsindex** r_+ und dem **Negativitätsindex** r_- .

Ihre Differenz $\text{sign}(s) := r_+ - r_-$ heißt auch die **Signatur** und $\text{null}(s) := r_0$ die **Nullität** der reellen Bilinearform s .

(4) Genau dann sind zwei symmetrische Bilinearformen s, s' über \mathbb{R} isometrisch, bzw. zwei symmetrische Matrizen A, A' über \mathbb{R} kongruent, wenn Sie dieselben Signaturtripler haben, $(r_+, r_-, r_0) = (r'_+, r'_-, r'_0)$.

😊 Diese Klassifikation gilt wörtlich genau so über jedem geordneten Körper (K, \leq) , in dem jedes positive Element $a > 0$ ein Quadrat ist.

Beweis: (1) Dank O2A existiert eine Basis (u_1, \dots, u_n) von V mit $s(u_i, u_j) \in K^\times$ für $i = j \in \{1, \dots, r\}$ und $s(u_i, u_j) = 0$ sonst. Für $i = 1, \dots, r$ wählen wir eine der beiden Quadratwurzeln $a_i \in K$ mit $a_i^2 = |s(u_i, u_i)|$ und setzen $v_i = u_i/a_i$. Damit gilt $s(v_i, v_i) = \pm 1$. Die Basisvektoren $v_i = u_i$ für $i = r + 1, \dots, n$ ändern wir nicht. Schließlich sortieren wir die Basis (v_1, \dots, v_n) wie angegeben.

(2) Dies ist die äquivalente Matrixformulierung der Aussage (1).

(3) Dies ist die Aussage des Trägheitssatzes von Sylvester.

(4) „ \Rightarrow “: Über K ist das Signaturtripler eine Invariante unter Isometrie symmetrischer Bilinearformen bzw. Kongruenz symmetrischer Matrizen.

„ \Leftarrow “: Haben s, s' dasselbe Signaturtripler, so finden wir hierzu diagonalisierende Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ wie in (1), und diese liefern die ersehnte Isometrie $(h, h'): (V, s) \xrightarrow{\sim} (V', s'): v_i \mapsto v'_i$. ◻

Ausblick: Ganz analog können wir nach der Klassifikation quadratischer Formen über jedem kommutativen Ring K fragen. Von zentralem Interesse sind die klassischen Fälle $\mathbb{Z}, \mathbb{F}_q, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

😊 Die Fälle \mathbb{R} und \mathbb{C} haben wir oben vollständig klären können. Dies ist insbesondere für geometrische Anwendungen wichtig.

Über jedem endlichen Körper \mathbb{F}_q sowie über den rationalen Zahlen \mathbb{Q} ist die Klassifikation ebenfalls bekannt, doch wesentlich aufwändiger.

📖 L.J. Gerstein: *Basic Quadratic Forms*. Amer. Math. Soc. 2008
J. Milnor, D. Husemoller: *Symmetric Bilinear Forms*. Springer 1973
J.-P. Serre: *A Course in Arithmetic*. Springer 1973

Über den ganzen Zahlen \mathbb{Z} ist die Untersuchung quadratischer Formen ein klassisches Problem, extrem facettenreich und faszinierend.

📖 J.H. Conway, N.J.A. Sloane: *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Springer 1999, ch. 15: *On the Classification of Integral Quadratic Forms*.

😊 Eine Quadrik ist die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung. Sei K ein Körper, geometrisch denken wir insbesondere an $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Wir betrachten ein Polynom $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ vom Grad ≤ 2 :

$$P = \underbrace{a_{00}}_{\text{Konstante}} + \underbrace{2 \sum_{i=1}^n a_{i0} X_i}_{\text{lineare Terme}} + \underbrace{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} X_i X_j}_{\text{gemischte Terme}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n a_{ii} X_i^2}_{\text{quadratische Terme}}$$

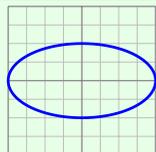
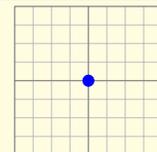
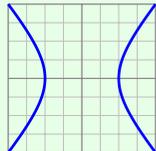
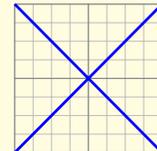
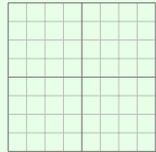
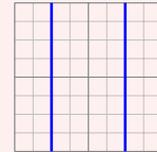
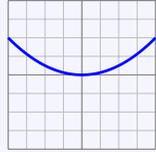
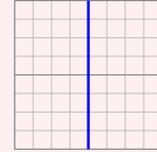
Die Koeffizienten fassen wir in zwei symmetrischen Matrix zusammen:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}^{j=1,\dots,n} \in K^{n \times n} \quad \text{und} \quad A' = (a_{ij})_{i=0,\dots,n}^{j=0,\dots,n} \in K^{(n+1) \times (n+1)}$$

Hier ist $X^T A X$ der homogene Teil in Grad 2: die quadratische Form. Es gilt $P = X^T A' X$ in homogenen Koordinaten $X^T = (1, X_1, \dots, X_n)$. Im Falle $A = 0$ ist P nur ein Polynom vom Grad ≤ 1 , also affin-linear. Wir werden daher meist stillschweigend $A \neq 0$ annehmen.

Definition O3A: Quadrik

Sei $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ ein quadratisches Polynom. Die zugehörige Nullstellenmenge $Q = \{x \in K^n \mid P(x) = 0\}$ nennen wir eine **Quadrik**.

<p>Kreis / Ellipse</p> $x^2 + 4y^2 = 1$ 	<p>Punkt</p> $x^2 + y^2 = 0$ 
<p>Hyperbel</p> $4x^2 - 3y^2 = 1$ 	<p>schneidendes Geradenpaar</p> $x^2 - y^2 = 0$ 
<p>leere Menge</p> $x^2 + y^2 = -1$ 	<p>paralleles Geradenpaar</p> $4x^2 = 1$ 
<p>Parabel</p> $x^2 = 2y$ 	<p>Gerade</p> $x^2 = 0$ 

Sei K ein Körper sowie $A \in K^{m \times n}$ und $u \in K^m$. Wir nennen

$$f : K^n \rightarrow K^m : x \mapsto y = Ax + u$$

eine **affine Abbildung** oder auch **affin-lineare Abbildung**.

Das entspricht der Komposition der linearen Abbildung $x \mapsto \bar{x} = Ax$ mit der anschließenden Verschiebung $\bar{x} \mapsto y = \bar{x} + u$ um den Vektor u . Der Spezialfall $u = 0$ entspricht einer linearen Abbildung $x \mapsto y = Ax$.

In der obigen Konvention identifizieren wir K^n mit $\{1\} \times K^n \subset K^{1+n}$ und erhalten so $f' : \{1\} \times K^n \rightarrow \{1\} \times K^m : x' \mapsto y' = A'x'$ mit $x' = (1, x_1, \dots, x_n)^T$ und $y' = (1, y_1, \dots, y_m)^T$ und $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & A \end{bmatrix}$.

Übung: (1) Die Identität $\text{id}' : x' \mapsto x'$ ist eine affine Abbildung, mit der Einheitsmatrix $I' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ als darstellender Matrix.

(2) Die Komposition von zwei affinen Abbildungen $f' : x' \mapsto y' = A'x'$ und $g' : y' \mapsto z' = B'y'$ ist die affine Abbildung $g' \circ f' : x' \mapsto z' = B'A'x'$, wobei $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ w & C \end{bmatrix}$ mit $C = BA$ und $w = v + Bu$ gilt.

Wir nennen f eine **Affinität**, wenn f zudem bijektiv ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $A \in \text{GL}_n(K)$ gilt. In diesem Falle ist die Inverse $f^{-1} : K^n \rightarrow K^n : y \mapsto x = A^{-1}(y - u) = A^{-1}y - A^{-1}u$ selbst affin. Somit gilt $f'^{-1} : \{1\} \times K^n \rightarrow \{1\} \times K^n : y' \mapsto x' = A'^{-1}y'$.

Übung: Die Affinitäten von K^n bilden eine Gruppe, kurz $(\text{GA}(K^n), \circ)$, genauer: eine Untergruppe in der symmetrischen Gruppe $(\text{Sym}(K^n), \circ)$. Für $n = 1$ gilt $\text{GA}(K) = \{f : K \xrightarrow{\sim} K : x \mapsto ax + u \mid a \in K^\times, u \in K\}$.

In obiger Matrixdarstellung definieren wir hierzu die Matrixgruppe

$$\text{GA}_n(K) := \left\{ T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & T \end{bmatrix} \mid T \in \text{GL}_n(K), u \in K^n \right\} \leq \text{GL}_{n+1}(K).$$

Wir erhalten so eine kurze exakte Sequenz von Gruppen:

$$1 \longrightarrow K^n \xleftarrow{i} \text{GA}_n(K) \xrightleftharpoons[p_j]{p} \text{GL}_n(K) \longrightarrow 1$$

mit $i(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & I \end{bmatrix}$ und $p(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & T \end{bmatrix}) = T$ sowie $j(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}$. Speziell für $n = 1$ gilt $\text{GA}_1(K) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & a \end{bmatrix} \mid u \in K, a \in K^\times \right\}$.

😊 Unsere obige Definition einer Quadrik $Q \subseteq K^n$ ist unabhängig von den willkürlich gewählten affinen Koordinaten: Jedes Bild der Quadrik Q unter einer Affinität $f: K^n \rightarrow K^n$ ist wieder eine Quadrik. Genauer gilt:

Satz O3B: Transformationsformel für Quadriken

(1) Sei $Q = \{x \in K^n \mid x'^\top A' x' = 0\}$ die Quadrik zu $A' \in K^{n' \times n'}$.

Sei $f: K^n \rightarrow K^n$ eine Affinität gegeben durch $S' \in \text{GA}_n(K)$ mit der Inversen $T' = S'^{-1}$. Dann ist auch die Bildmenge $f(Q) \subseteq K^n$ eine Quadrik, nämlich $f(Q) = \{x \in K^n \mid x'^\top B' x' = 0\}$ mit $B' = T'^\top A' T'$.

(2) Dies definiert eine Äquivalenzrelation \sim auf $K^{n' \times n'}$.

Wir betrachten $A', B' \in K^{n' \times n'}$ als affin-äquivalent, kurz $A' \sim B'$, wenn es eine Matrix $T' \in \text{GA}_n(K)$ gibt, sodass $B' = T'^\top A' T'$ gilt.

Wir nutzen durchgehend erweiterte Matrizen $A' = \begin{bmatrix} c & b^\top \\ b & A \end{bmatrix} \in K^{n' \times n'}$ und die erweiterte Dimension $n' = n + 1$ als bequeme Abkürzungen.

Aufgabe: Diese Rechnung ist Routine. Führen Sie sie aus!

Lösung: (1) Für $y' = f'(x')$ gilt $y' = S'x'$ und umgekehrt $x' = T'y'$.

$$\begin{aligned} y \in f(Q) &\iff x = f^{-1}(y) \in Q &\iff x'^\top A' x' = 0 \\ &\iff (T'y')^\top A' (T'y') = 0 &\iff y'^\top (T'^\top A' T') y' = 0 \end{aligned}$$

Also gilt $f(Q) = \{y \in K^n \mid y'^\top B' y' = 0\}$, wie behauptet.

(2) Die Äquivalenzeigenschaften folgen aus den Gruppeneigenschaften:

Reflexivität: Es gilt $A' = I'^\top A' I'$ dank der Identität $I' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

Symmetrie: Aus $B' = T'^\top A' T'$ folgt $A' = S'^\top B' S'$ dank $S' = T'^{-1}$.

Transitivität: Aus $B' = T'^\top A' T'$ und $C' = U'^\top B' U'$ folgt $C' = V'^\top A' V'$ dank $V' = T'U'$, denn $U'^\top T'^\top A' T' U' = U'^\top B' U' = C'$. QED

Die Nullstellenmenge $Q = \{x \in K^n \mid P(x) = 0\}$ ändert sich nicht, wenn wir das Polynom P mit einem Skalar $\lambda \in K^\times$ multiplizieren.

Neben Koordinatenwechsel durch Affinitäten erlauben wir daher im Folgenden auch Skalierungen $P \mapsto \lambda P$ bzw. $A' \mapsto \lambda A'$ mit $\lambda \in K^\times$.

Definition O3C: Äquivalenz unter Affinitäten und Skalierungen

(1) Wir betrachten $A', B' \in K^{n' \times n'}$ als **affin-skalierungs-äquivalent**, geschrieben $A' \equiv B'$, wenn es einen Skalar $\lambda \in K^\times$ und eine Matrix $T' \in \text{GA}_n(K)$ gibt, sodass $B' = \lambda T'^\top A' T'$ gilt.

(2) Dies ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge $K^{n' \times n'}$ der Matrizen. Wir bezeichnen mit $[A']$ die Äquivalenzklasse von A' bezüglich \equiv .

Wir suchen im Folgenden eine Klassifikation aller Quadriken $Q \subseteq K^n$, genauer gesagt: der sie definierenden quadratischen Polynome $P \in K[X_1, \dots, X_n]$, modulo Affinitäten und Skalierungen.

Anders gesagt, wir wollen die Quotientenmenge aller Matrizen $K^{n' \times n'}$ modulo \equiv verstehen, also modulo Affinitäten und Skalierungen.

😊 Die folgende Klassifikation verschafft uns eine einfache Übersicht, zunächst allgemein über jedem Körper der Charakteristik $\text{char } K \neq 2$.

😊 Anschließend wollen wir dies speziell für $K = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ präzisieren, indem wir die Formel weiter vereinfachen und so eindeutig machen.

Satz O3D: affine Klassifikation der Quadriken

Sei K ein Körper der Charakteristik $\text{char } K \neq 2$.

Gegeben sei eine Quadrik $Q = \{x \in K^n \mid x^T A x' = 0\}$.

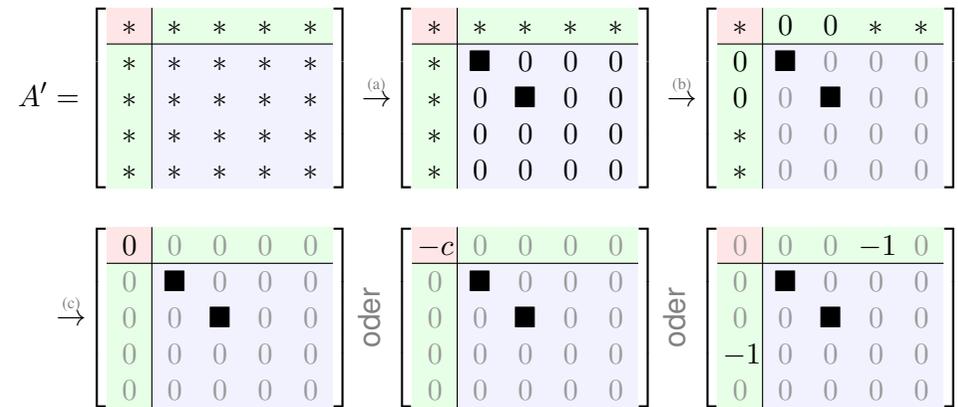
(0) Für $r := \text{rang } A$ und $r' := \text{rang } A'$ gilt $\delta := r' - r \in \{0, 1, 2\}$.

(1) Es existiert eine Affinität $f: K^n \xrightarrow{\sim} K^n$, sodass $f(Q) \subseteq K^n$ gegeben ist durch eine Gleichung in Standardform

$$\underbrace{a_1 y_1^2 + \dots + a_r y_r^2}_{=: q(y_1, \dots, y_r)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \delta = 0 \text{ (kegeliger Typ),} \\ 1 & \text{falls } \delta = 1 \text{ (zentraler Typ),} \\ 2y_{r+1} & \text{falls } \delta = 2 \text{ (parabolischer Typ).} \end{cases}$$

Hier ist q eine diagonale quadratische Form vom Rang r ; es genügt ein Repräsentant modulo Kongruenz und (für $\delta \neq 1$ auch) Skalierung.

Wir interessieren uns hier zunächst nur für die Nullstellenmenge Q , und eine Skalierung $A' \mapsto \lambda A'$ mit $\lambda \in K^\times$ ändert diese nicht.



Beweis: (1) Wir bringen $P = X^T A' X'$ in die gewünschte Standardform:
 (a) Dank Satz O2A diagonalisieren wir zunächst die quadratische Form.
 (b) Damit löschen wir soweit möglich den linearen Teil (links und oben).
 (c) Wir unterscheiden $\delta \in \{0, 1, 2\}$ und verschieben wie angegeben.
 (d) Im Falle $\delta = 1$ nutzen wir zudem eine Skalierung zum Wert $c = 1$.

Satz O3D: affine Klassifikation quadratischer Polynome

(2) Die symmetrische Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist $\text{GL}_n(K)$ -kongruent zu einer Diagonalmatrix (O2A): Es existiert $S \in \text{GL}_n(K)$, sodass

$$A \sim B = S^T A S = \text{diag}(b_1, \dots, b_r, 0, \dots, 0) \quad \text{mit } b_1, \dots, b_r \neq 0.$$

(3) Es existiert eine Affinität $f: K^n \rightarrow K^n: x' \mapsto y' = T'^{-1} x'$ mit $T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & T \end{bmatrix} \in \text{GA}_n(K)$, sodass $B' = T'^T A' T'$ gegeben ist durch

$$y'^T B' y' = b_1 y_1^2 + \dots + b_r y_r^2 - \{0, c, 2y_{r+1}\}.$$

(4) Nach Skalierung erhalten wir $C' = \lambda U'^T A' U'$ mit $U' \in \text{GA}_n(K)$ und

$$z'^T C' z' = c_1 z_1^2 + \dots + c_r z_r^2 - \{0, 1, 2z_{r+1}\}.$$

Im Falle $\delta = 1$ nutzen wir $\lambda = c^{-1}$ und $U' = T'$. Im Falle $\delta \neq 1$ können wir $\lambda \in K^\times$ beliebig wählen; für $\delta = 2$ kompensieren wir durch $z_{r+1} = \lambda y_{r+1}$.

Genauer als nur die Nullstellenmengen in (1) untersuchen wir in (2,3,4) quadratische Polynome modulo Kongruenz, Affinität und Skalierung.

😊 Für die Quadrik sind Skalierungen des Polynoms unerheblich. Für die Polynome selbst macht es jedoch einen Unterschied.

⚠ Vorsicht, hier irrt das Lernbuch von Fischer (in der aktuellen 4. Auflage von 2019), da es die Aussagen (1) und (2,3,4) vermischt. Allein durch Affinität ist die Standardform (4) für das Polynom nicht zu erreichen. Dennoch resümiert Fischer auf Seite 430 etwas kryptisch:

Affine Normalform der Gleichung eines Kegelschnitts Ist $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein Kegelschnitt, so kann man seine Gleichung durch eine affine Transformation auf genau eine der oben angegebenen Normalformen bringen.

← Gemeint ist eine affine Bijektion, also eine Affinität.
 Wann sind zwei Gleichungen gleich? Ist hier das Polynom gemeint? Dann wäre es falsch.

😊 Wir klassifizieren anschließend alle Quadriken über \mathbb{C} und über \mathbb{R} . Die positiven Konstanten $\alpha, \beta, \gamma > 0$ können wir dabei frei wählen. Zur affinen Normalform setzen wir überall $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

⚠ Vorsicht, auch auf Seite 436 irrt das Lernbuch von Fischer: Das Signaturtripler ist nur im Falle $\delta = 1$ eindeutig festgelegt. Im Falle $\delta \neq 1$ können wir durch Skalierung mit -1 alle Vorzeichen umklappen.

Satz O3E: affine Klassifikation quadratischer Polynome über \mathbb{C}

Gegeben sei die symmetrische Matrix $A' \in \mathbb{C}^{n' \times n'}$ und damit das quadratische Polynom $P = X'^T A' X' \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n'}]$.

(0) Für $r := \text{rang } A$ und $r' := \text{rang } A'$ gilt $\delta := r' - r \in \{0, 1, 2\}$.

(1) Durch Affinität und Skalierung können wir das Polynom P in genau eine der folgenden Normalformen überführen:

$$y_1^2 + \dots + y_r^2 - \begin{cases} 0 & \text{falls } \delta = 0 \text{ (kegeliger Typ),} \\ 1 & \text{falls } \delta = 1 \text{ (zentraler Typ),} \\ 2y_{r+1} & \text{falls } \delta = 2 \text{ (parabolischer Typ).} \end{cases}$$

(2) Die beiden Zahlen (r, r') bilden somit ein vollständiges System von Invarianten für diese algebraische Klassifikation über \mathbb{C} .

☺ Im Vergleich zu Satz O3D erhalten wir über \mathbb{C} zwei Verbesserungen: Erstens, die Gleichungen für Quadriken werden noch weiter vereinfacht. Zweitens, die oben angegebene Normalform ist nun sogar eindeutig!

Satz O3F: affine Klassifikation quadratischer Polynome über \mathbb{R}

Gegeben sei die symmetrische Matrix $A' \in \mathbb{R}^{n' \times n'}$ und damit das quadratische Polynom $P = X'^T A' X' \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_{n'}]$.

(0) Für $r := \text{rang } A$ und $r' := \text{rang } A'$ gilt $\delta := r' - r \in \{0, 1, 2\}$.

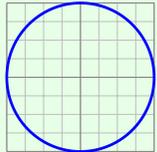
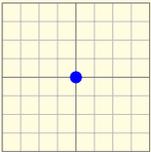
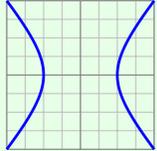
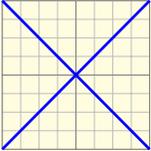
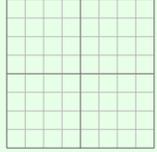
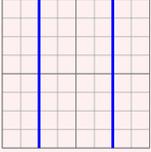
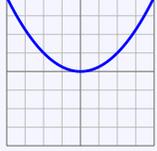
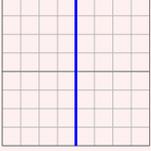
(1) Durch Affinität und Skalierung können wir das Polynom P in genau eine der folgenden Normalformen überführen:

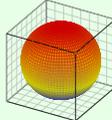
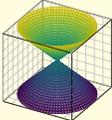
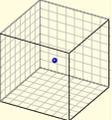
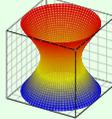
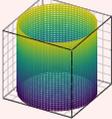
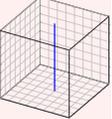
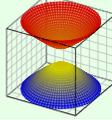
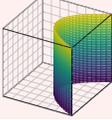
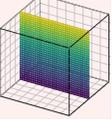
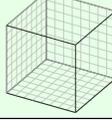
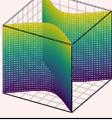
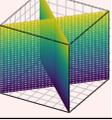
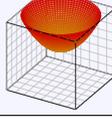
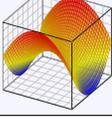
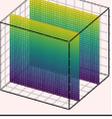
$$y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2 - \begin{cases} 0 & \text{falls } \delta = 0, \\ 1 & \text{falls } \delta = 1, \\ 2y_{r+1} & \text{falls } \delta = 2. \end{cases}$$

Dabei gilt $0 \leq p \leq r$ falls $\delta = 1$ und $r/2 \leq p \leq r$ falls $\delta \neq 1$.

(2) Die drei Zahlen (r, r', p) bilden somit ein vollständiges System von Invarianten für diese algebraische Klassifikation über \mathbb{R} .

☺ Im Vergleich zu Satz O3E erhalten wir über \mathbb{R} als weitere Invariante $|\text{sign}(A)|$, den Betrag der Signatur der symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

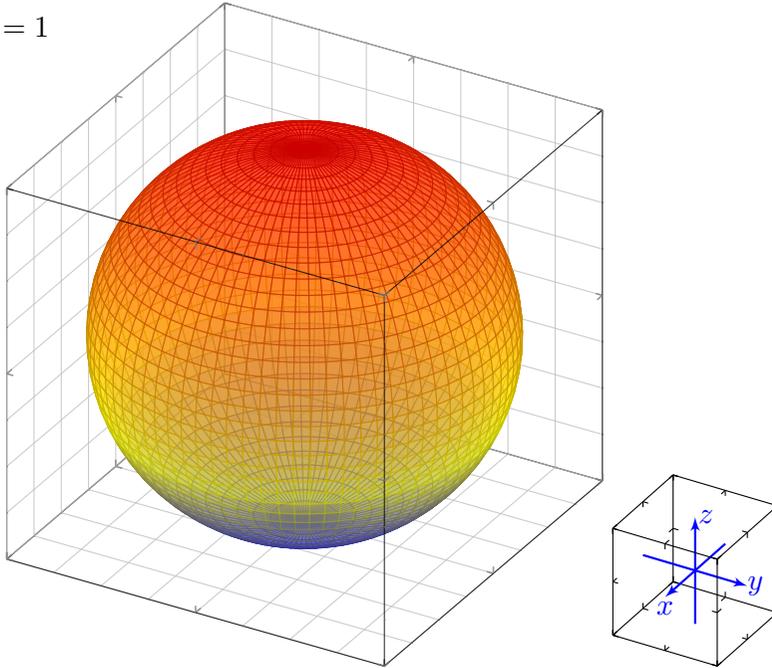
<p>Ellipse</p> $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	<p>Punkt</p> $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 0$ 
<p>Hyperbel</p> $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	<p>schneidendes Geradenpaar</p> $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0$ 
<p>leere Menge</p> $-\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	<p>paralleles Geradenpaar</p> $\frac{x^2}{\alpha^2} = 1$ 
<p>Parabel</p> $\frac{x^2}{\alpha^2} = 2y$ 	<p>Gerade</p> $\frac{x^2}{\alpha^2} = 0$ 

<p>Ellipsoid</p> $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ 	<p>elliptischer Doppelkegel</p> $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$ 	<p>Punkt</p> $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$ 
<p>einschaliges Hyperboloid</p> $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ 	<p>elliptischer Zylinder</p> $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	<p>Gerade</p> $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 0$ 
<p>zweischaliges Hyperboloid</p> $-\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ 	<p>parabolischer Zylinder</p> $\frac{x^2}{\alpha^2} = 2y$ 	<p>Ebene</p> $\frac{x^2}{\alpha^2} = 0$ 
<p>leere Menge</p> $-\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ 	<p>hyperbolischer Zylinder</p> $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ 	<p>schneidendes Ebenenpaar</p> $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0$ 
<p>elliptisches Paraboloid</p> $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 2z$ 	<p>hyperbolisches Paraboloid</p> $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 2z$ 	<p>paralleles Ebenenpaar</p> $\frac{x^2}{\alpha^2} = 1$ 

Reelle Quadriken im \mathbb{R}^3 : Ellipsoid

O317

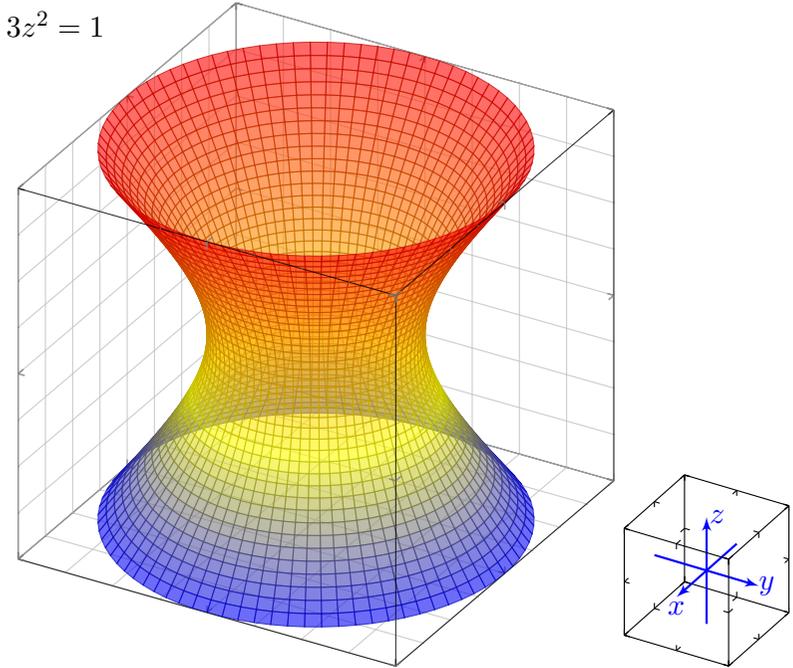
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



Reelle Quadriken im \mathbb{R}^3 : einschaliges Hyperboloid

O318

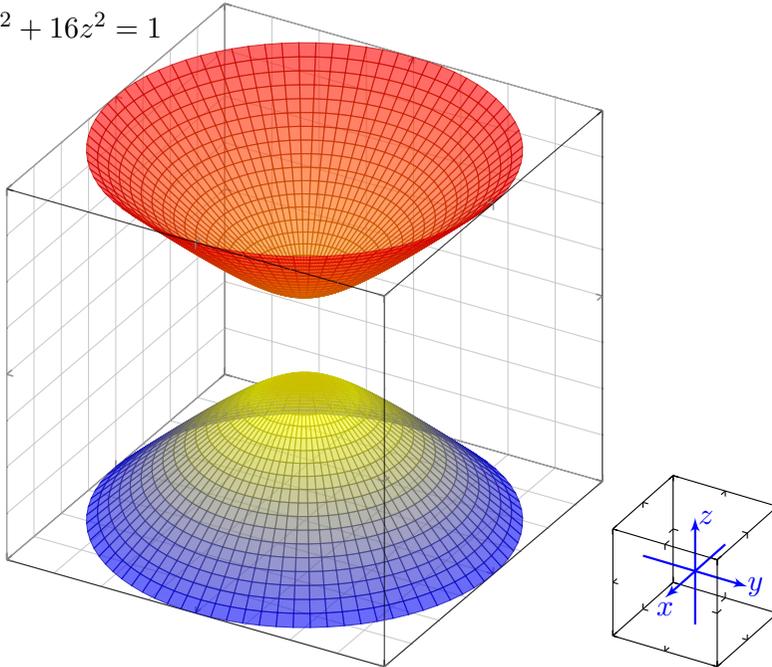
$$4x^2 + 4y^2 - 3z^2 = 1$$



Reelle Quadriken im \mathbb{R}^3 : zweischaliges Hyperboloid

O319

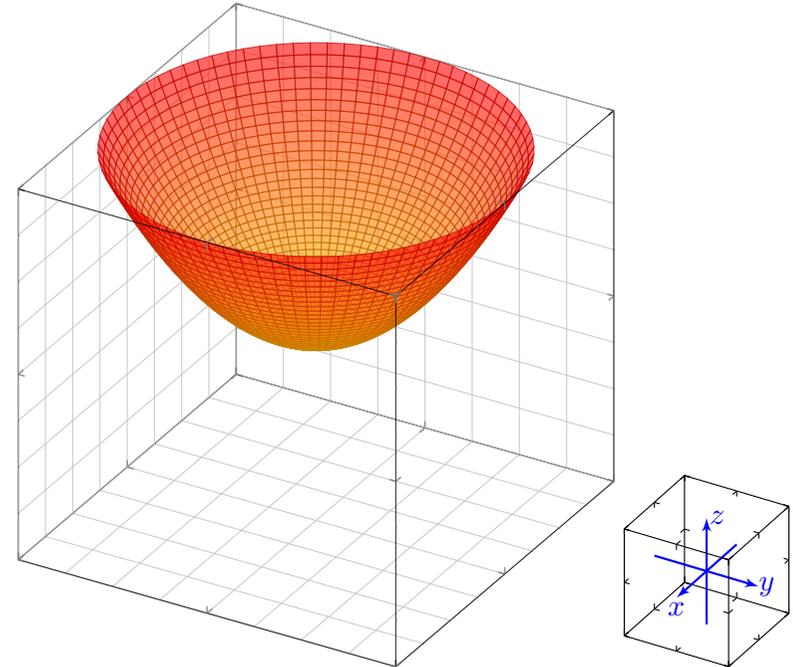
$$-15x^2 - 15y^2 + 16z^2 = 1$$



Reelle Quadriken im \mathbb{R}^3 : elliptisches Paraboloid

O320

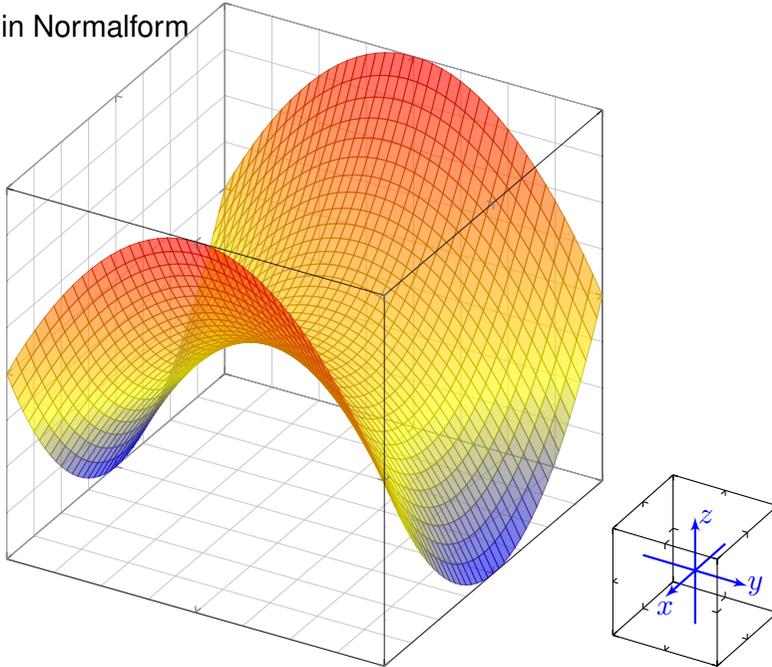
$$z = x^2 + y^2$$



Reelle Quadriken im \mathbb{R}^3 : hyperbolisches Paraboloid

O321

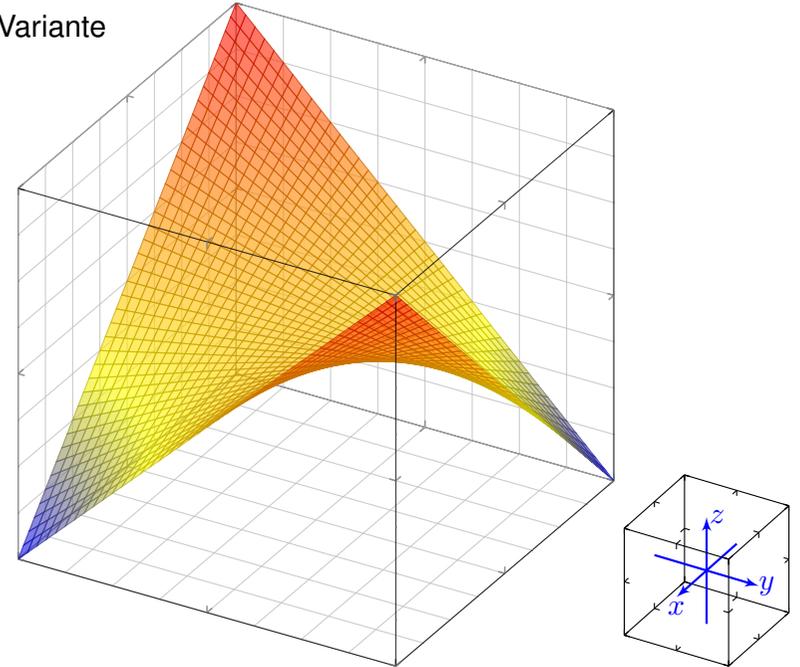
$z = x^2 - y^2$, in Normalform



Reelle Quadriken im \mathbb{R}^3 : hyperbolisches Paraboloid

O322

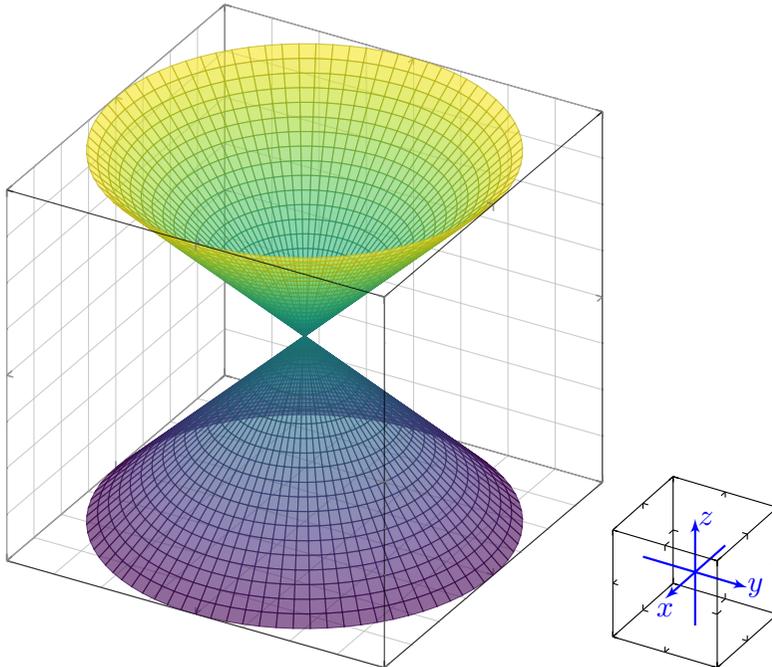
$z = xy$, als Variante



Reelle Quadriken im \mathbb{R}^3 : elliptischer Doppelkegel

O323

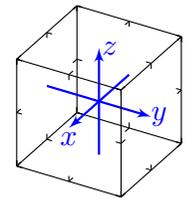
$z^2 = x^2 + y^2$



Reelle Quadriken im \mathbb{R}^3

O324
Erläuterung

Alle Graphiken zeigen den Standardwürfel $[-1, 1]^3$. Der Ästhetik halber spare ich alle Beschriftungen, da sie sich ohne jede Mühe rekonstruieren lassen. Die Skalierungskonstanten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ wähle ich jeweils so, dass ein harmonisches Bild entsteht.



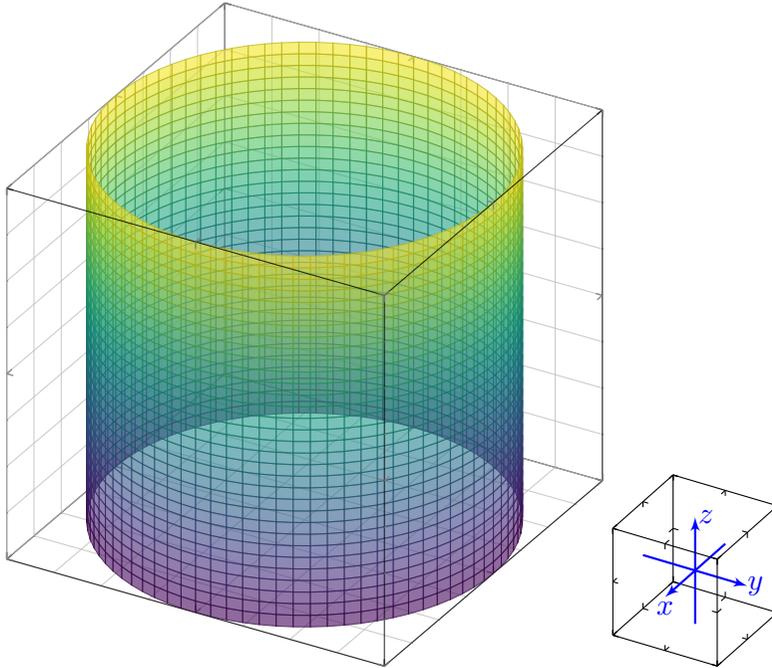
Unter einer typischen Quadrik im \mathbb{R}^3 stellen wir uns eine Fläche vor. Die leere Menge, Punkt und Gerade sehen jedoch recht mager aus. Es gibt in diesen Fällen allerdings noch viele Punkte im Komplexen, also Lösungen in \mathbb{C}^3 , die wir im Schnitt mit $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$ nicht sehen.

Die folgenden Polynome enthalten nicht alle drei Variablen x, y, z , sondern nur zwei Variablen x, y oder gar nur noch eine Variable x . (Ganz ohne Variablen könnten wir auch noch 0 und 1 hinzufügen.) Die zugehörige Quadrik ist daher ein Zylinder über einer Quadrik in kleinerer Dimension. Wir erkennen hier die zuvor diskutierte Klassifikation der reellen Quadriken in der Ebene \mathbb{R}^2 .

Reelle Quadriken im \mathbb{R}^3 : elliptischer Zylinder

O325

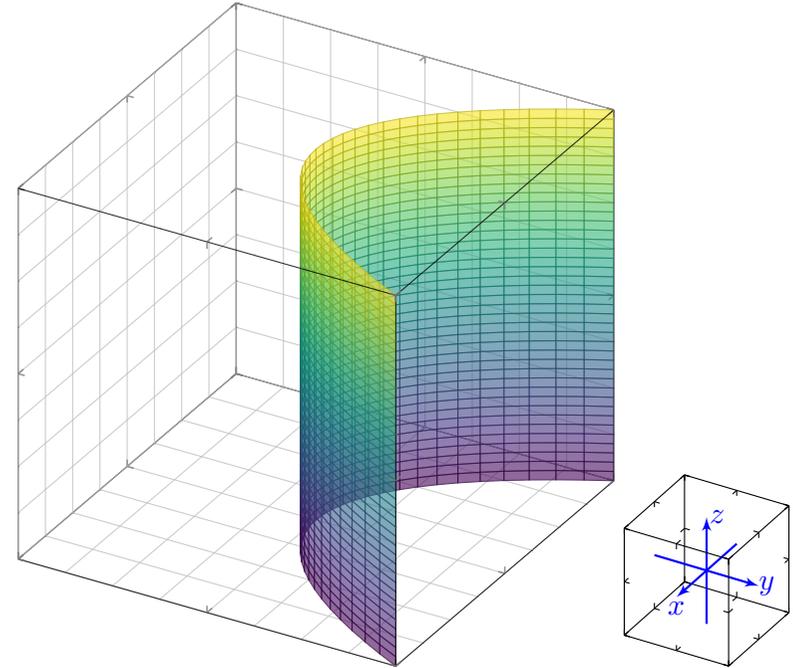
$$x^2 + y^2 = 1$$



Reelle Quadriken im \mathbb{R}^3 : parabolischer Zylinder

O326

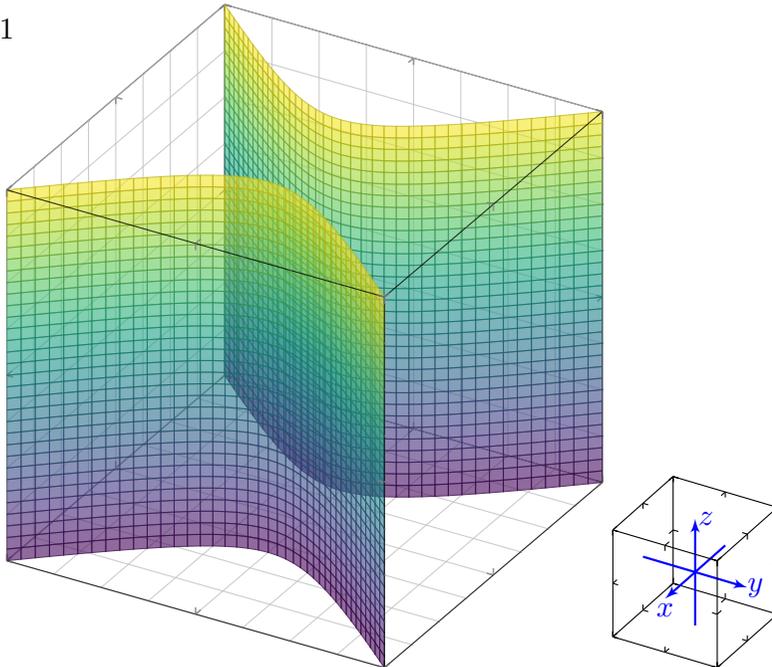
$$y = x^2$$



Reelle Quadriken im \mathbb{R}^3 : hyperbolischer Zylinder

O327

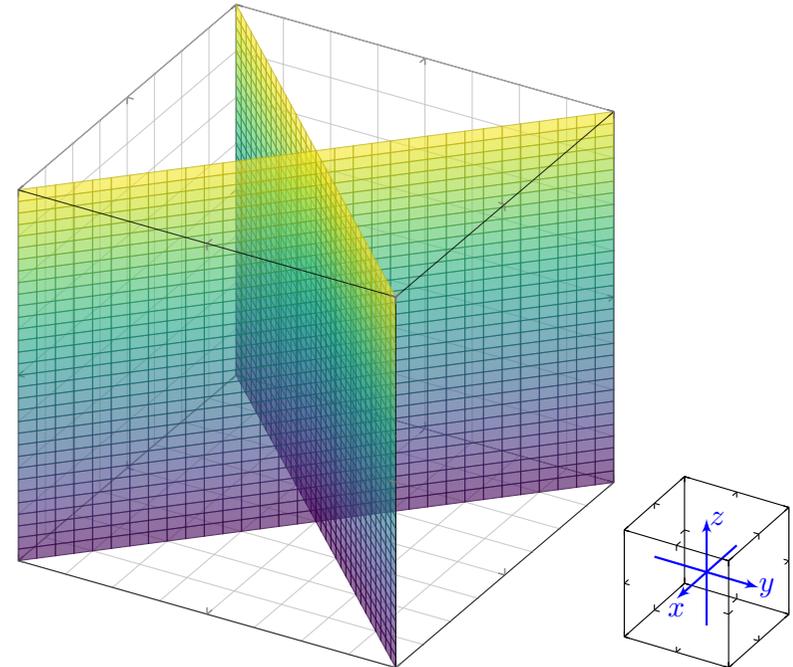
$$9x^2 - 8y^2 = 1$$



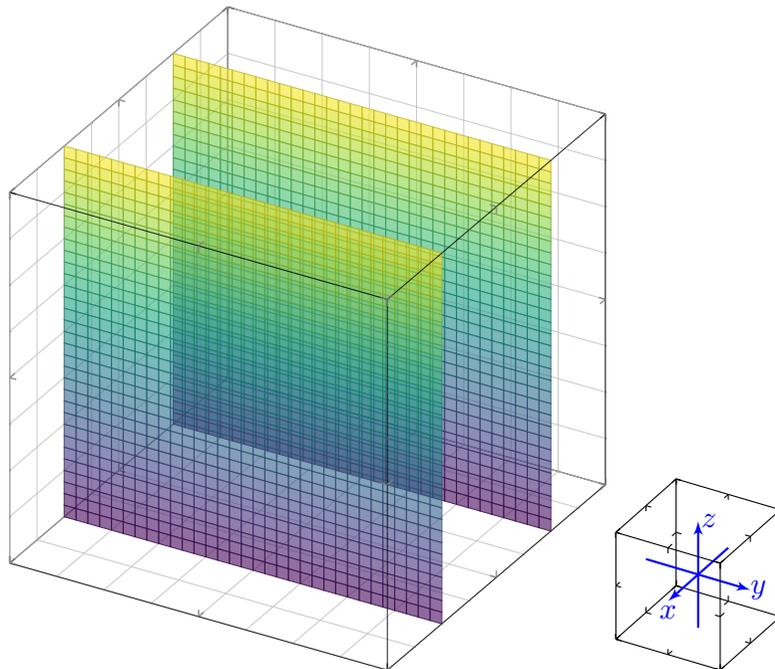
Reelle Quadriken im \mathbb{R}^3 : schneidendes Ebenenpaar

O328

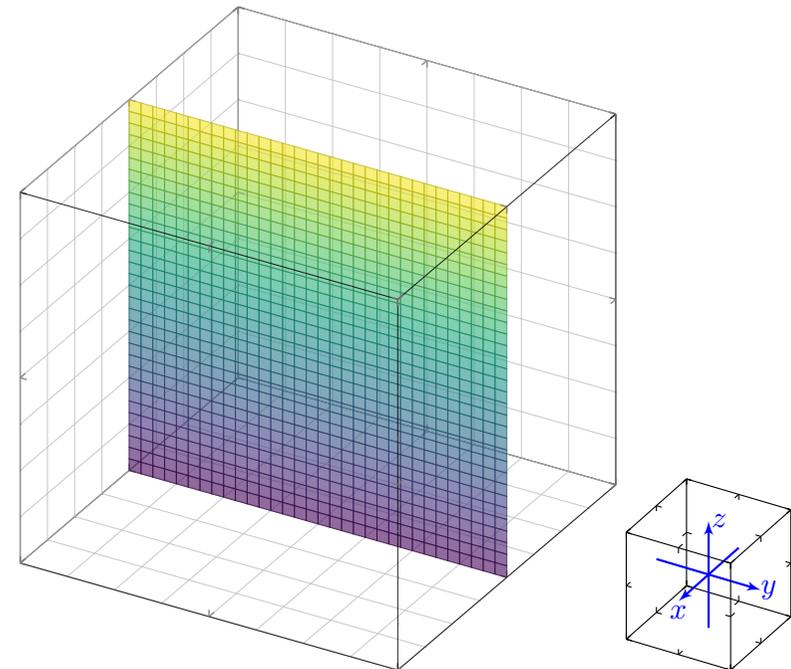
$$x^2 - y^2 = 0$$



$$4x^2 = 1$$



$$x^2 = 0$$



Übung: Machen Sie sich mit der Klassifikation O316 vertraut: Nehmen Sie sich die Liste aller Normalformen und fertigen Sie jeweils selbst eine Skizze an. Umgekehrt: Übersetzen Sie die Abbildungen in Gleichungen.

Anleitung zum Zeichnen von solchen Nullstellen- / Lösungsmengen: Lege eine Koordinate fest, etwa $z = \text{const}$, und zeichne den Schnitt; wiederhole so oft wie nötig oder gewünscht, bis ein Bild entsteht.

Übung: Sind wirklich alle Fälle aus der Klassifikation O3F abgebildet? Welche Quadriken fehlen? Welche Quadriken treten mehrfach auf? Beschreiben $z = x^2 - y^2$ und $z = xy$ affin-äquivalente Quadriken?

Übung: Bei Quadriken $x^T A' x' = 0$ verlangen wir normalerweise $A \neq 0$. Welche Quadriken kommen noch hinzu, falls wir $A = 0$ erlauben? Klassifizieren Sie alle Quadriken $Q \subset \mathbb{R}^1$ in Dimension 1.

Übung: Welche Quadriken $Q \subset \mathbb{R}^3$ sind Vereinigung von Geraden? Bei den meisten ist dies offensichtlich, doch bei zweien überraschend! Hinweis: Es gibt eine mit $(r, r') = (3, 4)$ und eine mit $(r, r') = (2, 4)$.

Für $n = 1, 2, 3$ betrachten wir die Klassifikation von $A' \in \mathbb{R}^{n' \times n'}$ modulo der Äquivalenz \equiv unter Affinitäten und Skalierungen, wie in O3c erklärt.

Übung: Bestimmen Sie jeweils $r = \text{rang } A$ und $r' = \text{rang } A'$ sowie $s = |\text{sign } A|$ und $s' = |\text{sign } A'|$. Sind dies Invarianten unter Äquivalenz? Können Sie damit bereits alle Äquivalenzklassen $[A']$ unterscheiden?

Übung: Wenn Sie die Koeffizienten der Matrix A' zufällig wählen (unabhängig, stetig verteilt), welchen Typ $\delta \in \{0, 1, 2\}$ erwarten Sie?

Übung: Welche Äq'-klassen $[A']$ sind stabil bei kleinen Störungen? Das heißt: Liegt B' genügend nahe bei A' , so ist B' äquivalent zu A' .

Übung: Wir sagen $[A']$ liegt im Rand von $[C']$ wenn gilt: Es gibt beliebig kleine Änderungen von A' zu einem B' , sodass B' äquivalent zu C' ist.

Anschaulich sagen wir auch: Die Klasse $[C']$ degeneriert zu $[A']$.

Beispiel: Beide Hyperboloide degenerieren zum Doppelkegel.

- (1) Diese Relation ist reflexiv und transitiv, also eine Präordnung (F1A).
- (2) Bestimmen Sie diese Präordnung für die obigen 3, 8, 15 Klassen.