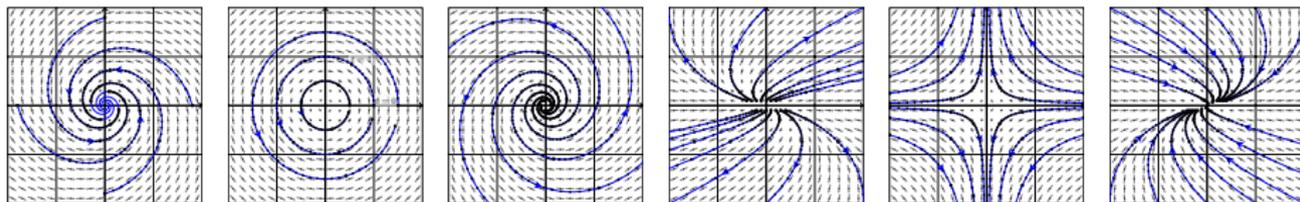


## Kapitel N

## Hauptvektoren und Jordanisierung



*To learn to succeed,  
you must first learn to fail.*

Michael Jordan (1963–)

# Inhalt dieses Kapitels N

## 1 Hauptvektoren und Jordanisierung

- Die Jordan–Normalform: Existenz und Eindeutigkeit
- Erste Beispiele und Anwendungen
- Beweis des Satzes von Jordan

## 2 Differenzengleichungen und Differentialgleichungen

- Diskrete Ableitung und Verschiebeoperator
- Ableitung und lineare Differentialgleichungen
- Inhomogene lineare Differentialgleichungen
- Freie und erzwungene harmonische Schwingung

## 3 Lineare Differentialgleichungssysteme

- Gekoppelte Oszillatoren und Eigenfrequenzen
- Matrix-Exponentialfunktion und Jordanisierung
- Linearisierung um Fixpunkte und In/Stabilität

# Kanonische Darstellung eines Endomorphismus

Worum geht es bei der kanonischen Darstellung von Endomorphismen?  
Vorgelegt sei eine lineare Abbildung  $f: V \rightarrow V$  über einem Körper  $K$ .  
Unser Ziel ist eine möglichst einfache und übersichtliche Darstellung von  $f$  als Matrix bezüglich einer Basis von  $V$  – geschickt zu  $f$  angepasst!

Im vorigen Kapitel M haben wir zuerst die Diagonalisierung geklärt:  
Bezüglich einer Eigenbasis  $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$  gilt  $f(v_i) = \lambda_i v_i$  für alle  $i \in I$ .  
Das ist der Idealfall: In endlicher Dimension ist die darstellende Matrix dann diagonal, also  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Einfacher geht es nicht.

Leider ist nicht jeder Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  diagonalisierbar!

Wir konzentrieren uns auf endliche Dimension  $\dim_K V = n < \infty$ .  
Notwendig ist, dass das charakteristische Polynom  $\chi_f \in K[X]_n^1$   
über  $K$  in Linearfaktoren zerfällt. Hinreichend wird dies jedoch erst,  
wenn die geometrische Vielfachheit die algebraische erreicht (M3w).

In diesem Kapitel N lösen wir alle verbleibenden Fälle, in denen zwar  $\chi_f$   
über  $K$  zerfällt, aber dennoch zu wenige Eigenvektoren zu  $f$  existieren.

Die Jordan–Form ist ein grundlegendes Ergebnis der Linearen Algebra und zugleich ein Universalwerkzeug in ihren zahlreichen Anwendungen. Sie ist benannt nach dem französischen Mathematiker Camille Jordan (1838–1921), der sie 1870 veröffentlichte. Karl Weierstraß (1815–1897) hatte kurz zuvor bereits 1868 ein äquivalentes Ergebnis vorgestellt.

Genutzt wird die Jordan–Form nicht nur in der Algebra, sondern auch in der Analysis. Anwendern in den Natur- und Ingenieurwissenschaften ist sie höchst willkommen zur Lösung von linearen Differentialgleichungssystemen  $\dot{u} = Au$  mit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Der Ingenieur Yvon Villarceau löste 1870 den Fall von  $n = 2$  Variablen, doch fehlten ihm die algebraischen Werkzeuge für das allgemeine Problem. Jordan antwortete ihm 1871, wie die Normalform dieses Problem löst, und übernahm diese Lösung in die zweite Auflage seines Lehrwerks *Cours d'analyse* von 1887.

Auch diese wichtigen Anwendungen will ich hier gebührend beleuchten. Zeit und Mühe sind gut investiert, denn dadurch werden Motivation, Anwendungen und Techniken wesentlich besser verständlich.

## Ist jede quadratische Matrix trigonalisierbar?

Welche quadratischen Matrizen  $A \in K^{n \times n}$  sind trigonalisierbar?

**Hindernis:** Zerfällt das charakteristische Polynom  $\chi_A$  in  $K[X]$ ?

Für  $n \geq 2$  gilt dies i.A. nicht, typisches Gegenbeispiel über  $\mathbb{R}$ :

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad \Rightarrow \quad \chi_A = (X - a)^2 + b^2 \in \mathbb{R}[X]_2^1$$

In  $\mathbb{C}[X]$  gilt  $\chi_A(X) = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$  mit  $\sigma(A; \mathbb{C}) = \{\lambda, \bar{\lambda}\} = \{a \pm ib\}$ .

Für  $b \neq 0$  hat  $\chi_A$  keine reelle Nullstelle, zerfällt also nicht in  $\mathbb{R}[X]$ .

☹️ Somit ist  $A$  für  $b \neq 0$  über  $\mathbb{R}$  nicht trigonalisierbar,  $A \not\sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ .

😊 Zur Trigonalisierung ist dies bereits das einzige Hindernis:

◆ Satz M3B: Trigonalisierung  $\Leftrightarrow$  Zerfällung

Genau dann ist eine Matrix  $A \in K^{n \times n}$  über  $K$  trigonalisierbar, wenn ihr charakteristisches Polynom  $\chi_A \in K[X]$  über  $K$  zerfällt.

⚠️ Das hängt sowohl von der Matrix  $A$  als auch von dem Körper  $K$  ab.

# Ist jede quadratische Matrix trigonalisierbar?

😊 Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $K$ , etwa  $\mathbb{C}$  (A3C), zerfällt jedes Polynom in Linearfaktoren (M2L), dieses erste Hindernis tritt über  $K$  demnach nie auf, und jede Matrix ist über  $K$  trigonalisierbar.

😊 Im Allgemeinen ist der Körper  $K$  nicht algebraisch abgeschlossen. Notfalls, wenn  $\chi_f$  über  $K$  nicht zerfällt, können wir in einer geeigneten Körpererweiterung  $\bar{K} \supseteq K$  arbeiten, sodass  $\chi_f$  über  $\bar{K}$  zerfällt.

**Beispiel:** Bei der Untersuchung der Fibonacci-Folge in  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  tritt die folgende Matrix  $A$  auf als Darstellung des Verschiebeoperators:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \implies \chi_A = X^2 - X - 1$$

Das charakteristische Polynom zerfällt nicht über  $\mathbb{Q}$ , dies gelingt jedoch über der Körpererweiterung  $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ : Die beiden Nullstellen von  $\chi_A$  sind  $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$  und  $\psi = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ . Somit lässt sich die Matrix  $A$  über dem Körper  $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$  diagonalisieren und so die Fibonacci-Folge durch die einfache geschlossene Formel  $f_n = (\phi^n - \psi^n)/(\phi - \psi)$  darstellen.

# Ist jede trigonalisierbare Matrix diagonalisierbar?

Welche quadratischen Matrizen  $A \in K^{n \times n}$  sind diagonalisierbar?

- 1. Hindernis:** Zerfällt das charakteristische Polynom  $\chi_A$  in  $K[X]$ ?
- 2. Hindernis:** Erreicht die geometrische Vielfachheit die algebraische?

## ◆ Satz M3w: Kriterien für Diagonalisierbarkeit

Sei  $f: V \rightarrow V$  eine  $K$ -lineare Abbildung und  $\dim_K V = n < \infty$ .

Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- 1** Der Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  ist diagonalisierbar.
- 2** Es gilt die Eigenraumzerlegung  $V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(f)} \text{Eig}(f, \lambda)$ .
- 3** Es gilt die Dimensionsformel  $n = \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \dim_K \text{Eig}(A, \lambda)$ .
- 4** Das charakteristische Polynom  $\chi_f$  zerfällt über  $K$  in Linearfaktoren und für jeden Eigenwert  $\lambda \in \sigma(f)$  gilt  $\dim_K \text{Eig}(f, \lambda) = \text{ord}(\chi_f, \lambda)$ .
- 5** Das Minimalpolynom  $\mu_f$  zerfällt einfach über  $K$ ,  
ausgeschrieben  $\mu_f = \prod_{\lambda \in \sigma(f)} (X - \lambda)$ .

**Übung:** Beweisen Sie diesen Satz zur Wiederholung.

## Ist jede trigonalisierbare Matrix diagonalisierbar?

😊 Das erste Hindernis tritt über einem algebraisch abgeschlossenen Körper wie  $\mathbb{C}$  nie auf. Über jedem nicht-abgeschlossenen Körper  $K$  lässt es sich durch eine geeignete Körpererweiterung  $\bar{K} \geq K$  lösen.

⚠ Das zweite Hindernis ist noch ernster und lässt sich nicht umgehen. Typisches Gegenbeispiel ist ein **Jordan-Block** der Dimension  $n \geq 2$ :

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in K^{n \times n} \quad \Rightarrow \quad B - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Aufgabe:** Bestimmen Sie zu  $B$  das Spektrum und die Eigenräume.

**Lösung:** Für  $\mu \neq \lambda$  ist  $B - \mu I$  invertierbar, also  $\text{Eig}(B, \mu) = \{0\}$ .

Es bleibt nur  $\text{Eig}(B, \lambda) = Ke_1$ , also erlaubt  $B$  keine Eigenbasis.

Das Polynom  $\chi_B(x) = (X - \lambda)^n$  hat die Nullstelle  $\lambda$  mit Vielfachheit  $n$ .

Der zugehörige Kern  $\ker(B - \lambda I) = Ke_1$  hat aber nur Dimension 1:

Die geometrische Vielfachheit ist hier kleiner als die algebraische!

# Jordan-Blöcke und Hauptvektorketten

😊 Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $K$ , etwa  $K = \mathbb{C}$ , zerfällt jedes Polynom. Somit ist jede Matrix in  $K^{n \times n}$  trigonalisierbar.

☹️ Leider ist dennoch nicht jede Matrix in  $K^{n \times n}$  diagonalisierbar:

$$B = J(n, \lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in K^{n \times n}$$

☹️ Es gibt nicht genug **Eigenvektoren** zu  $B$  für eine Basis von  $K^n$ .

😊 Wir nutzen das Nächstbeste, die **Hauptvektorkette**  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ :

$$0 \xleftarrow{B-\lambda} e_1 \xleftarrow{B-\lambda} e_2 \xleftarrow{B-\lambda} \dots \xleftarrow{B-\lambda} e_n$$

## Definition N1A: Hauptvektoren

Sei  $f \in \text{End}_K(V)$  und  $\lambda \in K$ . Eine **Hauptvektorkette** / **Jordan-Kette**

$$0 \xleftarrow{f-\lambda} v_1 \xleftarrow{f-\lambda} v_2 \xleftarrow{f-\lambda} \dots \xleftarrow{f-\lambda} v_\ell$$

besteht aus Vektoren  $v_0 = 0 \neq v_1, \dots, v_\ell \in V$  mit  $(f - \lambda)(v_k) = v_{k-1}$ .

# Jordan–Blöcke und Hauptvektorketten

Wir schreiben kurz  $B - \lambda$  für  $B - \lambda I$  und  $f - \lambda$  für  $f - \lambda \text{id}_V$ .

Wir nennen  $v_k$  einen **Hauptvektor  $k$ ter Stufe**. Das bedeutet:

$$(f - \lambda)^k(v_k) = 0 \quad \text{aber} \quad v_1 = (f - \lambda)^{k-1}(v_k) \neq 0$$

Die Eigenvektoren  $v_1$  von  $f$  sind genau die **Hauptvektoren 1. Stufe**:

$$(f - \lambda)^1(v_1) = 0 \quad \text{aber} \quad v_1 = (f - \lambda)^0(v_1) \neq 0$$

Jeder Vektor  $v_2$  mit  $(f - \lambda)(v_2) = v_1$  ist ein **Hauptvektor 2. Stufe**.

Jeder Vektor  $v_3$  mit  $(f - \lambda)(v_3) = v_2$  ist ein **Hauptvektor 3. Stufe**, usw.

Daher heißen Hauptvektoren auch **verallgemeinerte Eigenvektoren**.

Jordan–Blöcke spielen im Folgenden die zentrale Rolle: Sie zeigen einfach und eindrücklich, dass nicht jede Matrix diagonalisierbar ist.

Die gute Nachricht: Jordan–Blöcke sind auch schon das Schlimmste, was uns passieren kann (wie immer vorausgesetzt,  $\chi_f$  zerfällt über  $K$ ).

Jeder Jordan–Block der Größe  $n \times n$  entspricht einer Hauptvektorkette der Länge  $n$  und umgekehrt. Der folgende Satz N1B besagt, dass wir zu  $f: V \rightarrow V$  eine Basis aus Hauptvektorketten konstruieren können.

# Jordan-Basen und Jordan-Normalform

Beim Diagonalisierungsproblem sind Jordan-Blöcke unvermeidlich. Müssen wir zudem noch mit schlimmeren Komplikationen rechnen? Nein, glücklicherweise sind sie bereits alles, was passieren kann:

## Satz N1B: Jordan-Basis eines Endomorphismus

Sei  $f \in \text{End}_K(V)$  mit  $\dim_K V = n < \infty$  und  $\chi_f \in K[X]$  zerfalle über  $K$ .

(1) Dann existiert zu  $f$  eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  aus Hauptvektorketten. Wir nennen jede solche Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  eine **Jordan-Basis** zu  $f$ .

So wird  $f$  dargestellt als Diagonalmatrix von **Jordan-Blöcken**:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_k \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad B_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in K^{n_i \times n_i}$$

(2) Wir nennen diese Darstellung die **Jordan-(Normal)Form** von  $f$ , kurz JNF; sie ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Jordan-Blöcke.

## Jordan-Basen und Jordan-Normalform

Für jeden Endomorphismus  $f$  über  $\mathbb{C}$  zerfällt das charakteristische Polynom, also  $\chi_f(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$  mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ . Sind alle Nullstellen verschieden, so ist  $f$  diagonalisierbar (M2N).

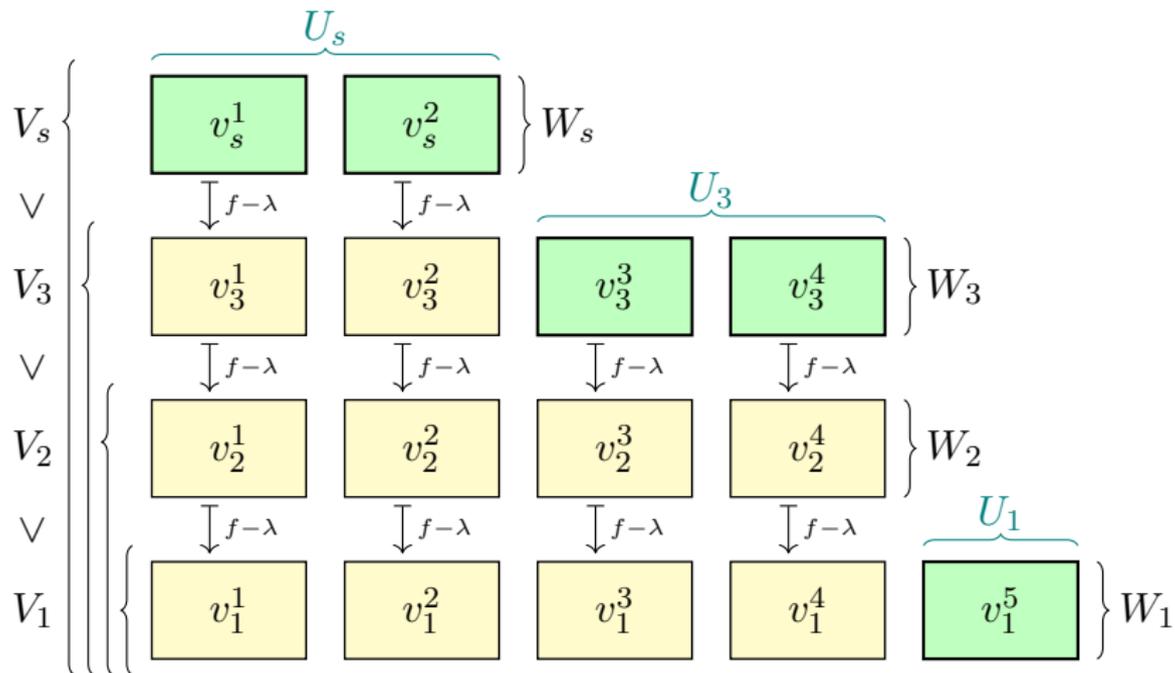
 Bei mehrfachen Nullstellen müssen wir genauer hinschauen: Möglicherweise ist  $f$  diagonalisierbar (M1C) oder auch nicht (M1D).

Gegenbeispiel: Für die Matrix  $B$  existieren nicht genug Eigenvektoren, um eine Basis zu bilden. Mit der Verallgemeinerung zu Hauptvektoren können wir dieses Problem allgemein lösen. Die Matrix kommt zwar nicht in Diagonalform, wird aber immerhin so einfach wie möglich.

Jeder  $r$ -fache Eigenwert  $\lambda$  erlaubt mindestens einen und höchstens  $r$  linear unabhängige Eigenvektoren; alle Möglichkeiten können auftreten. Hingegen existieren zu  $\lambda$  immer  $r$  linear unabhängige Hauptvektoren! Genauer besagt Satz N1B: Es gibt eine Basis aus Hauptvektorketten.

Die nächsten Folien erklären das Standardverfahren zur Jordanisierung; der Beweis arbeitet die nötigen Argumente anschließend sorgfältig aus.

## Standardverfahren zur Jordanisierung: Hauptraum-Sudoku!



**Kurzfassung:** Zu jedem Eigenwert  $\lambda$  von  $f : V \rightarrow V$  konstruieren wir ein solches Young-Diagramm und lesen daraus die Jordan-Form ab.

**Langfassung:** Wir füllen die Kästchen geschickt mit Hauptvektorketten und erhalten daraus wie ersehnt eine Jordan-Basis von  $V$  zu  $f$ .

# Standardverfahren zur Jordanisierung: Hauptraum-Sudoku!

Sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $n = \dim V < \infty$  und  $f: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Nach folgendem Verfahren finden wir eine Jordan-Basis von  $V$  zu  $f$  und somit die Jordan-Form von  $f$ .

(Einzige Voraussetzung ist, dass das charakteristische Polynom  $\chi_f$  über  $K$  in Linearfaktoren zerfällt. Der Beweis von Satz N1B ist nichts anderes als dieser Algorithmus plus Nachweis der Korrektheit aller Schritte.)

Zunächst benötigen wir alle Eigenwerte von  $f$ :

- 1 Bestimme das charakteristische Polynom  $\chi_f \in K[X]$ .
- 2 Bestimme die Eigenwerte  $\lambda_i \in K$  mit Vielfachheiten  $r_i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ .

*Abbruch:* Falls  $\chi_f$  nicht zerfällt, so ist  $f$  nicht jordanisierbar (M3B).

*Vereinfachung:* Falls  $\chi_f$  einfach zerfällt, so ist  $f$  diagonalisierbar (M2N), also  $V = \bigoplus_i \text{Eig}(f, \lambda_i)$ . In diesem Falle genügt das Standardverfahren zur Diagonalisierung (M2I). Allgemein jedoch müssen wir jordanisieren.

(Keine Sorge: Das folgende Standardverfahren zur Jordanisierung beinhaltet die Diagonalisierung als besonders einfachen Spezialfall.)

# Standardverfahren zur Jordanisierung: Hauptraum-Sudoku!

Für jeden Eigenwert  $\lambda$  mit Vielfachheit  $r$  setze  $g := f - \lambda \operatorname{id}_V : V \rightarrow V$  und führe die folgenden Schritte (3) und (4) sowie bei Bedarf (5) aus:

- 3** Für  $i = 0, 1, \dots, s$  setze  $V_i := \ker g^i = \ker(f - \lambda \operatorname{id}_V)^i$  und bestimme die Dimension  $k_i := \dim V_i$  bis schließlich  $k_s = r$  gilt (dank N1M).

*Visualisierung:* Diese Daten stellen wir wie oben als Young-Diagramm übersichtlich dar; die Zeile  $i = 1, \dots, s$  enthält  $z_i := k_i - k_{i-1}$  Kästchen. Dabei gilt  $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_s$ : Kein Kästchen hängt in der Luft (N1J).

- 4** Lies die Jordan-Form  $\operatorname{diag}(B_1, \dots, B_t)$  ab: Die  $j$ te Spalte der Höhe  $\ell$  zum Eigenwert  $\lambda$  steht für eine Hauptvektorkette der Länge  $\ell$  und somit für den Jordan-Block  $B_j = J(\ell, \lambda)$ . Diese Jordan-Form ist eindeutig bis auf die willkürliche Reihenfolge der Eigenwerte.

*Kurzfassung:* Wenn zu  $f$  nur die Jordan-Form  $J = M_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}}(f)$  gefragt ist, so sind wir an dieser Stelle schon fertig.

*Langfassung:* Falls zudem eine explizite Jordan-Basis  $\mathcal{J}$  gesucht ist, so gelingt uns dies wie folgt: In den grünen Kästchen stehen die Startvektoren der Hauptvektorketten. Diese suchen wir!

## Standardverfahren zur Jordanisierung: Hauptraum-Sudoku!

- 5** Für  $i = s, \dots, 1$  wähle in  $V_i$  zu  $V_{i-1} \oplus g(W_{i+1})$  ein Komplement  $U_i$ , sodass  $V_i = V_{i-1} \oplus g(W_{i+1}) \oplus U_i$  gilt, und setze  $W_i = g(W_{i+1}) \oplus U_i$ . Anfangs gilt  $W_{s+1} = 0$ , also  $U_s = W_s$ . Wähle eine Basis von  $U_i$  und lasse diese Startvektoren zu Hauptvektorketten runterrieseln (N1J).

*Konkrete Rechnung mit Basisvektoren:* In jeder Schicht  $i = s, \dots, 1$  konstruieren wir eine Basis von  $W_i$ . Zuvor berechnet ist eine Basis  $w_1, \dots, w_q$  der darüberliegenden Schicht  $W_{i+1}$ . (Anfangs  $W_{s+1} = 0$ .) Runterrieseln liefert eine Basis  $g(w_1), \dots, g(w_q)$  des Bildes  $g(W_{i+1})$ . Wähle eine Hilfsbasis  $v_1, \dots, v_p$  von  $V_{i-1}$  und setze diese zur Basis  $v_1, \dots, v_p, g(w_1), \dots, g(w_q)$  von  $V_{i-1} \oplus g(W_{i+1})$  zusammen. Ergänze diese schließlich zu einer Basis  $v_1, \dots, v_p, g(w_1), \dots, g(w_q), u_1, \dots, u_h$  von  $V_i$ . Trage die Startvektoren  $u_1, \dots, u_h$  in die grünen Kästchen ein und lasse runterrieseln. Unsere Basis von  $W_i$  ist nun  $g(w_1), \dots, g(w_q), u_1, \dots, u_h$ . Mit diesen Daten gehen wir weiter zur darunterliegenden Schicht  $i - 1$ .

- 6** Lies die Jordan-Basis  $\mathcal{J}$  zu  $f$  ab: Alle Spalten von links nach rechts, jede Spalte von unten nach oben (in der Konvention von Satz N1B). Füge diese Jordan-Ketten für alle Eigenwerte zur Jordan-Basis  $\mathcal{J}$ .

## Beispiele: Welche Jordan–Formen sind möglich?

**Aufgabe:** Gegeben sei eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit charakteristischem Polynom  $\chi_A \in \mathbb{R}[X]_n^1$ . Welche Jordan–Normalformen sind möglich?

- (1)  $\chi_A = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$  sowie (2)  $\chi_A = (X - 1)(X - 2)^2(X - 3)$ ,  
 (3)  $\chi_A = (X - 2)^2(X - 3)^2$ , (4)  $\chi_A = (X - 2)^3(X - 3)$ , (5)  $\chi_A = (X - \lambda)^4$

**Lösung:** (1) Die Matrix  $A$  ist diagonalisierbar (M2N). Durch die Wahl einer Eigenbasis  $(v_1, v_2, v_3)$  von  $\mathbb{R}^3$  zu  $A$  erhalten wir  $T \in GL_3 \mathbb{R}$  mit

$$A \sim T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) Die Matrix  $A$  ist eventuell diagonalisierbar... oder sie ist es nicht:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

😊 Diese beiden Normalformen sind die einzigen Möglichkeiten (N1B).

## Beispiele: Welche Jordan–Formen sind möglich?

😊 Der einfachste Fall sind  $n$  paarweise verschiedene Eigenwerte. Hier greift Satz M2N und garantiert uns die Diagonalisierbarkeit:

$$V = \text{Eig}(f, \lambda_1) \oplus \text{Eig}(f, \lambda_2) \oplus \cdots \oplus \text{Eig}(f, \lambda_n).$$

😞 Leider ist nicht jede Matrix so einfach zu durchschauen, es können mehrfache Eigenwerte auftreten. Dann steht die Diagonalisierbarkeit in Frage (M3w): Erreicht die geometrische Vielfachheit die algebraische?

😊 Dank der Jordan–Normalform (N1B) können wir alle möglichen Fälle einfach und übersichtlich darstellen, egal ob diagonalisierbar oder nicht. Das ist eine enorme Vereinfachung und sehr nützliche Struktur.

Im vorliegenden Beispiel (2) gibt es genau zwei Möglichkeiten: Dank Satz N1B ist jede Matrix  $A$  mit charakteristischem Polynom  $\chi_A = (X - 1)(X - 2)^2(X - 3)$  entweder ähnlich zur Diagonalmatrix links oder ähnlich zur hier gezeigten Jordan–Matrix rechts.

Auch in den folgenden Beispielen gibt es jeweils nur endlich viele Möglichkeiten, und wir können diese leicht vollständig aufzählen.

## Beispiele: Welche Jordan-Formen sind möglich?

(3) Bei  $\chi_A = (X - 2)^2(X - 3)^2$  sind vier Normalformen möglich:

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(4) Bei  $\chi_A = (X - 2)^3(X - 3)$  sind genau drei Normalformen möglich:

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(5) Bei  $\chi_A = (X - \lambda)^4$  sind genau fünf Normalformen möglich:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

## Beispiele: Welche Jordan–Formen sind möglich?

 Die Reihenfolge der Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  ist dabei beliebig; in  $(\mathbb{R}, \leq)$  können wir sie zum Beispiel der Größe nach anordnen. Im Allgemeinen jedoch gibt es hierzu keine sinnvolle Konvention.

Die Konstruktion aller möglichen Jordan–Matrizen ist denkbar einfach. Dank Satz N1B haben wir neben der Existenz auch die Eindeutigkeit!

Zu jedem Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$  mit Vielfachheit  $r \geq 1$  überlegen wir uns, wie wir die gegebene Dimension  $r$  in Jordan–Blöcke aufteilen können. Das entspricht den Zahlpartitionen, wie anschließend in N1C erklärt.

Zu jedem Eigenwert sortieren wir die Jordan–Blöcke nach ihrer Größe, und zwar absteigend wie im Young–Diagramm. Diese übliche Konvention ist zwar etwas willkürlich, aber doch sehr nützlich und übersichtlich.

**Übung:** Umordnung der Jordan–Blöcke führt zu einer ähnlichen Matrix.

 Da wir aus jeder Ähnlichkeitsklasse genau einen Repräsentanten auswählen wollen, verhelfen uns die hier erklärten Konventionen zur (weitgehenden) Eindeutigkeit, wie in den Beispielen (3–5) zu sehen.

# Kombinatorik: Wie viele Jordan–Formen gibt es?

**Aufgabe:** Gegeben sei eine Matrix  $A \in K^{n \times n}$  mit charakteristischem Polynom  $\chi_A = (X - \lambda)^n$ . Wie viele Jordan–Formen gibt es hierzu?

**Lösung:** Zur systematischen Aufzählung zerlegen wir  $n \in \mathbb{N}$  in eine Summe  $n = n_1 + \cdots + n_k$  mit  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Da die Reihenfolge keine Rolle spielt, können wir die Summanden absteigend ordnen:

**Definition N1c:** (ungeordnete) Zahlpartition

Eine **Partition** der Zahl  $n \in \mathbb{N}$  als Summe von  $k \in \mathbb{N}$  (ungeordneten, umsortierbaren) Summanden ist ein Tupel  $(n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$  mit

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k \quad \text{und} \quad n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1.$$

Ihre Menge bezeichnen wir mit  $P(n, k)$  und  $P(n) = \bigsqcup_{k=0}^n P(n, k)$ , ihre Anzahl mit  $p(n, k) = \#P(n, k)$  und  $p(n) = \#P(n) = \sum_{k=0}^n p(n, k)$ .

So zählt  $P(n, k)$  die Young–Diagramme mit  $n$  Kästchen und  $k$  Spalten. Mit dieser hilfreichen Notation können wir auch für große  $n$  die Anzahl der möglichen Jordan–Formen übersichtlich darstellen und berechnen.

# Kombinatorik: Wie viele Jordan–Formen gibt es?

Partitionen spielen in Kombinatorik und Informatik eine wichtige Rolle. Auch in der Linearen Algebra treten sie ganz natürlich auf, wie hier bei der Aufzählung von Jordan–Normalformen. Zur Betonung sagen wir **Zahlpartition** in N1c im Gegensatz zu **Mengenpartition** in E2k.

**Beispiele:** Für  $n = 2, 3, 4, 5$  erhalten wir die folgenden Zahlpartitionen:

$$n = 2 = 1 + 1$$

$$n = 3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$n = 4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

$$\begin{aligned} n = 5 &= 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

Im letzten Beispiel finden wir also  $P(5, 0) = \emptyset$ ,  $P(5, 1) = \{(5)\}$ ,  
 $P(5, 2) = \{(4, 1), (3, 2)\}$ ,  $P(5, 3) = \{(3, 1, 1), (2, 2, 1)\}$ ,  
 $P(5, 4) = \{(2, 1, 1, 1)\}$ ,  $P(5, 5) = \{(1, 1, 1, 1, 1)\}$ .

Wir suchen nun eine möglichst effiziente Methode, um die Anzahlen  $p(n, k)$  und auch die Mengen  $P(n, k)$  systematisch zu konstruieren.

# Kombinatorik: Wie viele Jordan–Formen gibt es?

Für die ersten Partitionszahlen erhalten wir somit folgende Werte:

$n$	$p(n)$	$p(n, k)$							
		$k = 0$	1	2	3	4	5	6	...
0	1	1	0	0	0	0	0	0	...
1	1	0	1	0	0	0	0	0	...
2	2	0	1	1	0	0	0	0	...
3	3	0	1	1	1	0	0	0	...
4	5	0	1	2	1	1	0	0	...
5	7	0	1	2	2	1	1	0	...
6	11	0	1	3	3	2	1	1	...

Hierbei gilt  $P(n) = \bigsqcup_{k=0}^n P(n, k)$ , also  $p(n) = \#P(n) = \sum_{k=0}^n p(n, k)$ .

Für  $k = n$  gilt  $P(n, n) = \{(1, 1, \dots, 1)\}$ , und somit  $p(n, n) = 1$ .

Für  $k > n$  gilt  $P(n, k) = \emptyset$ , und somit  $p(n, k) = 0$ .

**Bemerkung:** Für alle  $k$  mit  $n/2 \leq k \leq n$  gilt zudem  $p(n, k) = p(n - k)$ :

Wenn wir zunächst jeden Summanden mit 1 belegen, so bleibt noch  $n - k \leq k$  zu verteilen. Hierfür gibt es genau  $p(n - k)$  Möglichkeiten.

## Kombinatorik: Wie viele Jordan-Formen gibt es?

Wie berechnen wir die Partitionszahlen  $p(n, k)$  und  $p(n)$  geschickt?  
Eine Möglichkeit ist die explizite Konstruktion von  $P(n, k)$ . Effizienter:

## Satz N1D: Rekursionsformel für Partitionszahlen

(0) Für  $k = 0$  gilt  $p(0, 0) = 1$  sowie  $p(n, 0) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ .

(1) Für alle  $1 \leq k \leq n$  gilt  $p(n, k) = p(n - 1, k - 1) + p(n - k, k)$

**Aufgabe:** Beweisen Sie die Rekursionsformeln des Satzes.

**Lösung:** (0) Nach Definition N1c gilt  $P(0, 0) = \{()\}$  und  $P(n, 0) = \{\}$ .

(1) Wir zerlegen  $P(n, k) = P_1(n, k) \sqcup P_2(n, k)$  in disjunkte Teilmengen

- $P_1(n, k) := \{ (n_1, \dots, n_k) \in P(n, k) \mid n_k = 1 \} \cong P(n - 1, k - 1)$ ,  
vermöge der Bijektion  $(n_1, \dots, n_{k-1}, 1) \mapsto (n_1, \dots, n_{k-1})$ , und
- $P_2(n, k) := \{ (n_1, \dots, n_k) \in P(n, k) \mid n_k \geq 2 \} \cong P(n - k, k)$ ,  
vermöge der Bijektion  $(n_1, \dots, n_k) \mapsto (n_1 - 1, \dots, n_k - 1)$ .

**Übung:** Füllen Sie damit die Tabelle für  $0 \leq k \leq n \leq 10$  aus! Zur Probe:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	...

# Minimalpolynom aus der Jordan–Form

**Aufgabe:** Bestimmen Sie das Minimalpolynom der Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Lösung:** Das char. Polynom ist  $\chi_A = \chi_B = \chi_C = (X - 2)^3(X - 3)^2$ .  
Das Minimalpolynom folgt aus der max. Größe der Jordan–Blöcke:

$$\mu_A = (X - 2)^1(X - 3)^1,$$

$$\mu_B = (X - 2)^2(X - 3)^2,$$

$$\mu_C = (X - 2)^3(X - 3)^1.$$

**Aufgabe:** Setzen Sie  $A, B, C$  in  $(X - 2)^k(X - 3)^\ell$  ein und bestimmen Sie die minimalen Exponenten  $k$  und  $\ell$ , für die Matrix annulliert wird.

**Aufgabe:** Formulieren Sie hierzu eine allgemeine, einfache Merkregel:  
Wie extrahieren Sie das Minimalpolynom aus der Jordan–Form?

# Minimalpolynom aus der Jordan–Form

## Satz N1E: charakteristisches Polynom und Minimalpolynom

Sei  $f: V \rightarrow V$  eine  $K$ –lineare Abbildung und  $\dim_K V = n < \infty$ .

(1) Angenommen,  $\chi_f$  zerfällt in Linearfaktoren über  $K$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \chi_f &= (X - \lambda_1)^{r_1} \cdots (X - \lambda_k)^{r_k} && \text{mit } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j \text{ und} \\ \mu_f &= (X - \lambda_1)^{s_1} \cdots (X - \lambda_k)^{s_k} && \text{mit } 1 \leq s_i \leq r_i \text{ für alle } i. \end{aligned}$$

(2) Der Exponent  $s_i$  ist die maximale Größe aller Jordan–Blöcke zu  $\lambda_i$ . Der Exponent  $r_i$  ist die Summe der Größen aller Jordan–Blöcke zu  $\lambda_i$ .

(3) Genau dann ist der Endomorphismus  $f$  über  $K$  diagonalisierbar, wenn sein Minimalpolynom  $\mu_f \in K[X]$  über  $K$  einfach zerfällt.

**Beweis:** Diese Zusammenfassung ist eine unmittelbare Anwendung der zuvor erarbeiteten Sätze (1) M3R und (2) M3O und (3) M3W. ◻

**Übung:** Führen Sie zur Wiederholung die Aussage (2) sorgfältig aus: Warum hat das Minimalpolynom genau diese schöne einfache Form?

## Jordan-Formen zu gegebenem Minimalpolynom

**Aufgabe:** Welche Jordan-Formen sind möglich mit charakteristischem Polynom  $\chi_A = (X - \lambda)^5$  und Minimalpolynom  $\mu_A = (X - \lambda)^s$ ?

**Lösung:** (1) Im Falle  $\mu_A = (X - \lambda)^1$  ist  $A$  diagonalisierbar:

$$A \sim T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

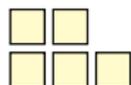
Young-Diagramm



In diesem Fall ist  $A$  selbst diagonal, denn  $A = T(\lambda I)T^{-1} = \lambda I$ .

(2) Im Falle  $\mu_A = (X - \lambda)^2$  gibt es genau zwei Möglichkeiten:

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$



## Jordan-Formen zu gegebenem Minimalpolynom

(3) Im Falle  $\mu_A = (X - \lambda)^3$  gibt es genau zwei Möglichkeiten:

$$\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \square \square \end{array} A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{array}{c} \square \\ \square \square \\ \square \square \end{array}$$

(4) Im Falle  $\mu_A = (X - \lambda)^4$  bzw.  $\mu_A = (X - \lambda)^5$  bleibt nur

$$\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \square \end{array} A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array}$$

😊 Das Minimalpolynom bündelt nützliche Informationen zur Größe der Jordan-Blöcke und damit insbesondere zur Diagonalisierbarkeit.

# Die Zerlegung $J = D + N$ in diagonal plus nilpotent

Bemerkung N1F: Potenzen der Jordan-Form  $J = D + N$

Die Jordan-Form  $T^{-1}AT = J = D + N$  ist Summe der Diagonalmatrix  $D$  und der nilpotenten Matrix  $N$ , und beide kommutieren:  $DN = ND$ .

Angenommen  $N^s = 0$ . Dank binomischem Lehrsatz E2J gilt dann:

$$J^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^{s-1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k$$

Aus  $A = TJT^{-1}$  folgt dann  $A^n = TJ^nT^{-1}$  für jeden Exponenten  $n \in \mathbb{N}$ . Dies ergibt eine geschlossene Formel für jeden Koeffizienten von  $A^n$ .

**Beweis:** Jeder Jordan-Block operiert auf seinem zyklischen Unterraum. Dank der Zerlegung als direkte Summe kommutieren sie untereinander. In jedem einzelnen Jordan-Block  $D + N$  gilt  $D = \lambda I$ , also  $DN = ND$ .

Induktion über  $n$ : Für  $n = 0$  gilt  $A^0 = I$  und  $TJ^0T^{-1} = TIT^{-1} = I$ .

Für  $n \geq 1$  gilt  $A^n = A \cdot A^{n-1} = TJT^{-1} \cdot TJ^{n-1}T^{-1} = TJ^nT^{-1}$ . ◻

Die Zerlegung  $J = D + N$  in diagonal plus nilpotent

Illustrative Beispiele:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} & \binom{n}{4}\lambda^{n-4} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} & 0 \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^n & n\mu^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^n \end{bmatrix}$$

# Der Spezialfall $A = \lambda I + N$ mit $N$ nilpotent

**Bemerkung N1G:** Spezialfall  $A = \lambda I + N$

Angenommen, für  $A \in K^{r \times r}$  gilt  $\mu_A = (X - \lambda)^r$ . Dann folgt  $A = \lambda I + N$  mit  $N^s = 0$  für ein  $s \in \{1, \dots, r\}$ . Dank binomischem Lehrsatz E2J gilt:

$$A^n = (\lambda I + N)^n = \sum_{k=0}^{s-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k$$

Dies ergibt eine geschlossene Formel für jeden Koeffizienten von  $A^n$ .

**Beweis:** Aus der Jordan-Form  $T^{-1}AT = J = \lambda I + M$  mit  $M^s = 0$  folgt  $A = TJT^{-1} = \lambda I + N$  mit  $N = TMT^{-1}$ , also ebenso  $N^s = 0$ . ◻

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 14 & 10 & -18 \\ 11 & 9 & -17 \end{bmatrix}$$

**Aufgabe:** Für die obige Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  gilt  $\mu_A = (X - \lambda)^3$ . Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für jeden Koeffizienten von  $A^n = (a_{ij}^{(n)})$ .

## Der Spezialfall $A = \lambda I + N$ mit $N$ nilpotent

Standardverfahren: Bestimme die Jordan-Form  $T^{-1}AT = J = D + N$ .  
 Rücktransformation ergibt  $A^n = TJ^nT^{-1} = T \left[ \sum_{k=0}^{s-1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \right] T^{-1}$ .

😊 Allgemein und gelingt immer: Wir berechnen  $J$  sowie  $T$  und  $T^{-1}$ .

☹ Die Berechnung ist aufwändig. Geht es vielleicht auch kürzer?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 14 & 10 & -18 \\ 11 & 9 & -17 \end{bmatrix}$$

Im Spezialfall haben wir den kurzen Weg:  $A = \lambda I + N$  mit  $N$  nilpotent.  
 Aus  $\text{tr}(A) = -6$  lesen wir  $\lambda = -2$  (M3F). Somit ist  $N = A + 2I$  nilpotent:

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 14 & 12 & -18 \\ 11 & 9 & -15 \end{bmatrix} \implies N^2 = \begin{bmatrix} -18 & -15 & 24 \\ 12 & 10 & -16 \\ -6 & -5 & 8 \end{bmatrix} \implies N^3 = 0$$

😊 Damit ist auch die Annahme  $\mu_A = (X - \lambda)^3$  nachträglich bewiesen.

😊 Wir erhalten so  $A^n = \lambda^n N^0 + n\lambda^{n-1}N^1 + \binom{n}{2}\lambda^{n-2}N^2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  
 Das ist eine einfache geschlossene Formel für die Koeffizienten von  $A^n$ .

## Zum Beweis: Jordanisierung gelingt!

Warum können wir jeden Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  über  $K$  jordanisieren, vorausgesetzt  $\dim_K V < \infty$  und  $\chi_f$  zerfällt über  $K$ ?

Zum Konstruktion einer Jordan-Basis benötigen wir zwei Bausteine:

- 1 Der Vektorraum  $V$  ist die direkte Summe der Haupträume (N1M).
- 2 Jeder Hauptraum erlaubt eine Basis aus Hauptvektorketten (N1L).

Es gibt nicht immer genug Eigenvektoren, um eine Basis zu bilden.

Aussage (1) garantiert, dass es immer genug Hauptvektoren gibt.

Dank (2) können wir diese sogar zu Hauptvektorketten anordnen.

So finden wir eine Jordan-Basis, bestehend aus Hauptvektorketten.

Das Standardverfahren zur Jordanisierung haben wir als Algorithmus erklärt (ab Seite N106). Wir wollen nun seine Korrektheit beweisen.

## Zum Beweis: Jordanisierung gelingt!

Wir beweisen den Satz von Jordan (N1B) wie folgt:

Zuerst halten wir fest: Hauptvektorketten sind linear unabhängig (N1H). Das ist für konkrete Rechnungen eine hilfreiche Gewissheit.

Anschließend erklären wir die Haupträume (N1I) von  $f: V \rightarrow V$  als verallgemeinerte Eigenräume und klären ihre interne Struktur (N1J).

Daraus folgt sofort die Eindeutigkeit der Jordan-Form (N1K) und die Jordanisierung für nilpotente Endomorphismen (N1L).

Die Hauptraumzerlegung (N1M) vollendet schließlich den Beweis: Existenz einer Jordan-Basis und Eindeutigkeit der Jordan-Form.

Erst in diesem letzten Schritt benötigen wir, dass das charakteristische Polynom  $\chi_f$  über  $K$  zerfällt. Über  $K = \mathbb{C}$  ist dies immer garantiert.

## Hauptvektorketten sind linear unabhängig.

Satz N1H: Hauptvektorketten sind linear unabhängig.

Sei  $f: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung über  $K$  und  $\lambda \in K$  ein Skalar.

(1) Jede Hauptvektorkette  $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_\ell)$  zu  $\lambda$  ist linear unabhängig.

$$0 \xleftarrow{f-\lambda} v_1 \xleftarrow{f-\lambda} v_2 \xleftarrow{f-\lambda} \dots \xleftarrow{f-\lambda} v_\ell$$

(2) Eine Familie von Hauptvektorketten  $\mathcal{F} = (v_1^1, \dots, v_{\ell_1}^1; \dots; v_1^k, \dots, v_{\ell_k}^k)$  zu  $\lambda$  ist genau dann linear unabhängig, wenn die zugrundeliegenden Eigenvektoren  $\mathcal{E} = (v_1^1, \dots, v_1^k)$  linear unabhängig sind.

$$0 \xleftarrow{f-\lambda} v_1^1 \xleftarrow{f-\lambda} v_2^1 \xleftarrow{f-\lambda} \dots \xleftarrow{f-\lambda} v_{\ell_1}^1$$

$$\vdots$$

$$0 \xleftarrow{f-\lambda} v_1^k \xleftarrow{f-\lambda} v_2^k \xleftarrow{f-\lambda} \dots \xleftarrow{f-\lambda} v_{\ell_k}^k$$

😊 Alle Vektoren in einem korrekt ausgefüllten Young-Diagramm, wie auf Seite N105 dargestellt, sind demnach linear unabhängig.

## Hauptvektorketten sind linear unabhängig.

**Beweis:** (1) Wir führen Induktion über die Länge  $\ell$  der Hauptvektorkette. Der Fall  $\ell = 1$  ist klar (I1D), denn es gilt  $v_1 \neq 0$  nach Definition N1A.

Sei also  $\ell \geq 2$ . Gegeben seien Koeffizienten  $a_1, \dots, a_{\ell-1}, a_\ell \in K$  mit  $a_1 v_1 + \dots + a_{\ell-1} v_{\ell-1} + a_\ell v_\ell = 0$ . Wir zeigen  $0 = a_1 = \dots = a_{\ell-1} = a_\ell$ . Die Anwendung von  $(f - \lambda)^{\ell-1}$  ergibt zunächst  $a_\ell v_1 = 0$ , also gilt  $a_\ell = 0$ . Die reduzierte Familie  $\mathcal{F}' = (v_1, \dots, v_{\ell-1})$  ohne  $v_\ell$  ist linear unabhängig nach Induktionsvoraussetzung. Wir schließen  $0 = a_1 = \dots = a_{\ell-1} = a_\ell$ .

(2) Wir führen Induktion über die maximale Länge  $\ell = \max\{\ell_1, \dots, \ell_k\}$ . Der Fall  $\ell = 1$  ist trivial, denn hier ist  $\mathcal{F} = \mathcal{E}$  linear unabhängig.

Wir können  $\ell = \ell_1 = \dots = \ell_r > \ell_{r+1} \geq \dots \geq \ell_k \geq 1$  annehmen.

Gegeben seien Koeffizienten  $a_j^i \in K$  mit  $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell_k} a_j^i v_j^i = 0$ .

Die Anwendung von  $(f - \lambda)^{\ell-1}$  reduziert dies zu  $\sum_{i=1}^r a_\ell^i v_1^i = 0$ .

Da die Familie  $\mathcal{E}$  linear unabhängig ist, folgt  $a_\ell^1 = \dots = a_\ell^r = 0$ .

Die Familie  $\mathcal{F}'$  entsteht aus  $\mathcal{F}$  durch Löschung von  $v_\ell^1, \dots, v_\ell^r$ .

Nach Induktionsvoraussetzung ist  $\mathcal{F}'$  linear unabhängig,

also gilt  $a_j^i = 0$  für alle  $i, j$ . Das war zu zeigen.

QED

# Haupträume eines Endomorphismus

## Definition N11: Haupträume eines Endomorphismus

Sei  $f: V \rightarrow V$  eine  $K$ -lineare Abbildung und  $\lambda \in K$  ein Skalar.

(1) Der **Hauptraum der Stufe**  $s = 0, 1, 2, \dots$  von  $f$  zu  $\lambda$  ist

$$V_s := \ker(f - \lambda \operatorname{id}_V)^s.$$

(2) Wir erhalten so eine aufsteigende Kette  $f$ -invarianter Unterräume:

$$\{0\} = V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq V_3 \leq \dots \leq V \quad \text{und} \quad f(V_i) \subseteq V_i$$

Hierbei ist  $V_1 = \ker(f - \lambda \operatorname{id}_V)$  der **Eigenraum** von  $f$  zu  $\lambda$ ,  
und  $V_s$  heißt auch **verallgemeinerter Eigenraum** der Stufe  $s$ .

(3) Der **Hauptraum** von  $f$  zu  $\lambda$  (ohne Einschränkung der Stufe) ist

$$\operatorname{Hau}(f, \lambda) := \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \ker(f - \lambda \operatorname{id}_V)^s.$$

(4) Dank (2) ist  $\operatorname{Hau}(f, \lambda)$  ein  $f$ -invarianter Unterraum von  $V$ . Er besteht aus allen Vektoren  $v \in V$  mit  $(f - \lambda \operatorname{id}_V)^s(v) = 0$  für einen hinreichend großen Exponenten  $s \in \mathbb{N}$ , der im Allgemeinen von  $v$  abhängen wird.

# Haupträume eines Endomorphismus

**Aufgabe:** Zeigen Sie die Aussagen (2) und (4). (Streng genommen sollte eine Definition keine Behauptungen enthalten, doch hier will ich davon abweichen und sofort die grundlegenden Eigenschaften nennen.)

**Lösung:** (2) Wir setzen abkürzend  $g := f - \lambda$ , genauer  $g = f - \lambda \operatorname{id}_V$ . Sei  $v \in V_s$ . Daraus folgt  $g^{s+1}(v) = g(g^s(v)) = g(0) = 0$ , also  $v \in V_{s+1}$ . Dank  $g \circ f = f \circ g$  folgt  $g^s(f(v)) = f(g^s(v)) = f(0) = 0$ , also  $f(v) \in V_s$ .

(4) Ist  $V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \dots \leq V$  eine Kette von Unterräumen in  $V$ , dann ist ihre Vereinigung  $\bigcup_{s \in \mathbb{N}} V_s$  ebenfalls ein Unterraum in  $V$ . Beweisen Sie dies als Übung, oder konsultieren Sie Satz I1z.

**Bemerkung:** Ist  $V$  endlich-dimensional, so auch jeder Unterraum

$$V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \dots \leq V,$$

und diese Kette stabilisiert, das heißt es existiert ein Index  $s \in \mathbb{N}$ , sodass  $V_s = V_r$  für alle  $r \geq s$  gilt, also  $\operatorname{Hau}(f, \lambda) = \ker(f - \lambda \operatorname{id}_V)^s$ .

Der folgende Satz klärt die interne Struktur des Hauptraumes  $\operatorname{Hau}(f, \lambda)$ , so wie wir sie im Standardverfahren zur Jordanisierung (N106) nutzen.

## Interne Struktur eines Hauptraums

## Satz N1J: interne Struktur eines Hauptraums

Sei  $f: V \rightarrow V$  linear über  $K$  sowie  $\lambda \in K$  ein Skalar und  $g = f - \lambda \text{id}_V$ .

(0) Für die Haupträume  $V_i := \ker g^i$  der Stufe  $i = 0, 1, 2, \dots$  gilt

$$\{0\} = V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \dots \leq V.$$

Für die Dimensionen  $k_i := \dim V_i$  folgt somit  $0 = k_0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots$ .

Für alle  $i \geq 1$  wählen wir eine Basis von  $V_{i-1}$ , ergänzen diese zu einer Basis von  $V_i$  und erhalten so eine Summenzerlegung  $V_i = V_{i-1} \oplus W_i$ .

(1) Dann ist  $g$  injektiv auf  $W_{i+1}$ . Zudem gilt  $V_{i-1} \cap g(W_{i+1}) = \{0\}$ , also

$$g: W_{i+1} \xrightarrow{\sim} g(W_{i+1}) \quad \text{und} \quad V_{i-1} \oplus g(W_{i+1}) \leq V_i.$$

Insbesondere folgt daraus  $\dim W_{i+1} \leq \dim W_i$ .

(2) Sei zudem  $k_1 = \dim V_1 = \dim W_1$  endlich. Per Induktion über  $i \in \mathbb{N}$  folgt aus (1), dass auch  $\dim W_i \leq k_1$  und  $\dim V_i \leq ik_1$  endlich sind.

Für die Zuwächse  $z_i = k_i - k_{i-1} = \dim W_i$  gilt  $z_1 \geq z_2 \geq z_3 \geq \dots$ .

## Interne Struktur eines Hauptraums

**Beweis:** Aussage (0) haben wir bereits zuvor in N1I geklärt.

Durch Basiswahl und Ergänzung erhalten wir  $V_i = V_{i-1} \oplus W_i$ .

(1) Für  $w \in W_{i+1} \setminus \{0\}$  gilt  $w \notin V_i$ , also  $0 \neq g^i(w) = g^{i-1}(g(w))$ . Das bedeutet  $g(w) \neq 0$  und  $g(w) \notin V_{i-1}$ , also  $g: W_{i+1} \xrightarrow{\sim} g(W_{i+1})$  und  $V_{i-1} \oplus g(W_{i+1}) \leq V_i$ . Daraus folgt  $\dim W_{i+1} \leq \dim W_i$ .

(2) Dies folgt sofort per Induktion über  $i \in \mathbb{N}$ .

QED

😊 Dies rechtfertigt die Darstellung als Young-Diagramm (Seite N105). Jede Zeile  $i = 1, \dots, s$  enthält  $z_i := k_i - k_{i-1} = \dim W_i$  Kästchen. Dabei gilt  $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_s$ : Kein Kästchen hängt in der Luft.

😊 Zudem präzisiert Satz N1J auch die Stabilisierung: Gilt  $V_s = V_{s+1}$  für ein  $s \in \mathbb{N}$ , so folgt  $V_s = V_r$  für alle  $r \geq s$ .

😊 Unser Satz N1J gilt auch für unendliche Dimension. Im Falle  $k_1 < \infty$  erhalten wir die lineare Schranke  $k_i \leq ik_1$ .

## Eindeutigkeit der Jordan–Form

## Satz N1κ: Eindeutigkeit der Jordan–Form

Vorgelegt seien in  $K^{n \times n}$  zwei Jordan–Matrizen

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_\ell \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_m \end{bmatrix}$$

mit Jordan–Blöcken  $B_i = J(\ell_i, \lambda_i)$  und  $C_j = J(m_j, \mu_j)$  für alle  $i$  und  $j$ .

(1) Sind  $B$  und  $C$  ähnlich, also  $C = T^{-1}BT$  für ein  $T \in \text{GL}_n K$ , dann gilt  $\ell = m$  und nach Umordnung  $B_i = C_i$  für alle  $i = 1, \dots, \ell$ .

(2) Genauer: Die Anzahl  $n(B; \ell, \lambda)$  der Blöcke  $J(\ell, \lambda)$  der Matrix  $B$  ist

$$n(B; \ell, \lambda) = 2 \dim \ker(B - \lambda)^\ell - \dim \ker(B - \lambda)^{\ell-1} - \dim \ker(B - \lambda)^{\ell+1}.$$

Diese Anzahl ist eine Invariante unter Ähnlichkeit  $B \sim C$  von Matrizen: Aus  $C = T^{-1}BT$  folgt  $n(C; \ell, \lambda) = n(B; \ell, \lambda)$  für alle  $\lambda \in K$  und  $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ .

## Eindeutigkeit der Jordan–Form

**Beweis:** (2) Jeder Jordan–Block  $J(\ell, \lambda)$  der Größe  $\ell \times \ell$  entspricht einer Hauptvektorkette der Länge  $\ell$ , und umgekehrt. Zur Matrix  $B$  definieren wir  $k_\ell := \dim \ker(B - \lambda)^\ell$  und setzen  $z_\ell := k_\ell - k_{\ell-1}$  wie in Satz N1J.

Die Zahl  $z_\ell \in \mathbb{N}$  ist die Breite der Zeile  $\ell$  im Young–Diagramm (N105) zum Hauptvektorraum  $\text{Hau}(B, \lambda)$ . Dies ist zugleich die Anzahl der Hauptvektorketten der Länge  $\geq \ell$ . Somit ist  $n(B; \ell, \lambda) = z_\ell - z_{\ell+1}$  die gesuchte Anzahl der Hauptvektorketten der Länge genau  $\ell$ .

Aus  $C = T^{-1}BT$  folgt  $(C - \lambda)^\ell = (T^{-1}BT - \lambda)^\ell = T^{-1}(B - \lambda)^\ell T$ , also  $\dim \ker(C - \lambda)^\ell = \dim \ker(B - \lambda)^\ell$  für alle  $\lambda \in K$  und  $\ell \in \mathbb{N}$ .

Nach obiger Rechnung folgt demnach  $n(C; \ell, \lambda) = n(B; \ell, \lambda)$ .

Daraus schließen wir Aussage (1).

◻

😊 Für alle jordanisierbaren Matrizen haben wir damit das Klassifikationsproblem bis auf Ähnlichkeit gelöst.

😊 Über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper wie  $\mathbb{C}$  ist jede Matrix jordanisierbar, wie wir nun zeigen werden.

## Jordanisierung eines nilpotenten Endomorphismus

## Satz N1L: Jordanisierung eines nilpotenten Endomorphismus

(1) Sei  $g: V \rightarrow V$  linear über  $K$  und nilpotent,  $g^s = 0$ . Dann existiert zu  $g$  eine Jordan-Basis von  $V$ , also eine Basis aus Hauptvektorketten.

**Beweis:** Die Konstruktion haben wir ab Seite N106 ausgeführt.

- Für  $i = 0, 1, \dots, s$  setze  $V_i := \ker g^i$  und bestimme die Dimension  $k_i := \dim V_i$ . Den Struktursatz N1J mit diesen Daten visualisieren wir als Young-Diagramm, wie auf Seite N105 gezeigt.
- Für  $i = s, \dots, 1$  wähle in  $V_i$  zu  $V_{i-1} \oplus g(W_{i+1})$  ein Komplement  $U_i$ , sodass  $V_i = V_{i-1} \oplus g(W_{i+1}) \oplus U_i$  gilt, und setze  $W_i = g(W_{i+1}) \oplus U_i$ . Anfangs gilt  $W_{s+1} = 0$ , also  $U_s = W_s$ . Wähle eine Basis von  $U_i$  und lasse diese Startvektoren zu Hauptvektorketten runterrieseln.

Das Gelingen dieser Konstruktion verdanken wir dem Struktursatz N1J. Das so ausgefüllte Young-Diagramm liefert eine Basis von  $V$ . QED

## Jordanisierung eines nilpotenten Endomorphismus

## Satz N1L: Jordanisierung eines nilpotenten Endomorphismus

(2) Sei  $f : V \rightarrow V$  linear über  $K$ . Dann erlaubt jeder Hauptraum  $\text{Hau}(f, \lambda)$  eine Jordan-Basis, also eine Basis aus Hauptvektorketten.

**Beweis:** Wir betrachten die Abbildung  $g = f - \lambda_i$  auf dem Hauptraum  $\text{Hau}(f, \lambda)$ . Dieser Endomorphismus ist nilpotent. Dank (1) können wir eine Jordan-Basis zu  $g$  konstruieren, und damit zu  $f$ . QED

😊 Damit können wir jeden nilpotenten Endomorphismus  $g$  jordanisieren, und allgemein  $f$  auf jedem Hauptraum  $\text{Hau}(f, \lambda)$ .

Es bleibt schließlich noch die Hauptraumzerlegung zu klären. Das ist der Inhalt des folgenden, abschließenden Satzes.

Erst in diesem letzten Schritt benötigen wir, dass das charakteristische Polynom  $\chi_f$  über  $K$  zerfällt. Über  $K = \mathbb{C}$  ist dies immer garantiert.

# Die Hauptraumzerlegung

## Satz N1M: Hauptraumzerlegung

Vorgelegt sei  $f: V \rightarrow V$  linear über  $K$  mit  $n = \dim_K(V) < \infty$ .  
Das charakteristische Polynom von  $f$  zerfällt über  $K$  gemäß

$$\chi_f(X) = (X - \lambda_1)^{r_1} (X - \lambda_2)^{r_2} \cdots (X - \lambda_k)^{r_k}$$

wobei  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in K$  und  $\lambda_i \neq \lambda_j$  für  $i \neq j$  gelte.

(1) Dann haben wir die Summenzerlegung in Haupträume:

$$V = \text{Hau}(f, \lambda_1) \oplus \text{Hau}(f, \lambda_2) \oplus \cdots \oplus \text{Hau}(f, \lambda_k)$$

Dabei gilt  $\text{Hau}(f, \lambda_i) = \ker(f - \lambda_i \text{id}_V)^{r_i}$  und  $\dim_K \text{Hau}(f, \lambda_i) = r_i$ .

😊 Das erinnert uns an die Eigenraumzerlegung aus Satz M1I. Der entscheidende Vorteil gegenüber Eigenräumen  $\text{Eig}(f, \lambda_i)$  ist, dass die Haupträume  $\text{Hau}(f, \lambda_i)$  *immer* eine Summenzerlegung von ganz  $V$  ergeben. Insbesondere hat jeder Hauptraum  $\text{Hau}(f, \lambda_i)$  *immer* die richtige Dimension, nämlich genau die algebraische Vielfachheit  $r_i$ .

## Die Hauptraumzerlegung

**Aufgabe:** Beweisen Sie dies mit dem Satz M3K von Cayley–Hamilton und der Kernzerlegung M3v dank Bézout wie in Kapitel M vorbereitet.

**Lösung:** Dank Cayley–Hamilton M3K gilt  $\chi_f(f) = 0$ . Wir setzen voraus, dass  $\chi_f$  über  $K$  zerfällt. Die zugehörige Kernzerlegung M3v ergibt

$$V = \ker(f - \lambda_1)^{r_1} \oplus \ker(f - \lambda_2)^{r_2} \oplus \cdots \oplus \ker(f - \lambda_k)^{r_k}.$$

Für  $i \in \{1, \dots, k\}$  betrachten wir den Summanden  $H_i := \ker(f - \lambda_i)^{r_i}$  und seine Dimension  $s_i = \dim H_i$ . Auf  $H_i$  ist  $f - \lambda_i$  nilpotent, also hat  $f_i := f|_{H_i} : H_i \rightarrow H_i$  das charakteristische Polynom  $(X - \lambda_i)^{s_i}$  (M3T).

Auf der direkten Summe  $V = \bigoplus_i H_i$  gilt somit  $\chi_f = \prod_i (X - \lambda_i)^{s_i}$ . Der Polynomvergleich zeigt  $s_i = r_i$  für alle  $i$ , also  $\dim H_i = r_i$ .

Wir haben somit  $H_i = \ker(f - \lambda_i)^{r_i} \leq \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \ker(f - \lambda_i)^s = \text{Hau}(f, \lambda_i)$ . Auf  $H_j$  mit  $j \neq i$  ist  $f - \lambda_i$  ein Isomorphismus, also gilt  $\text{Hau}(f, \lambda_i) \leq H_i$ .

Damit ist die ersehnte Hauptraumzerlegung  $V = \bigoplus_i H_i$  bewiesen, mit  $H_i := \ker(f - \lambda_i)^{r_i} = \text{Hau}(f, \lambda_i)$  und  $\dim H_i = r_i$ . ◻

# Die Hauptraumzerlegung

## Satz N1M: Hauptraumzerlegung

(2) Sei  $\mathcal{A}_i$  eine Basis von  $\text{Hau}(f, \lambda_i)$ . Zusammengesetzt erhalten wir eine Basis  $\mathcal{A}$  von  $V$ . Die Abbildung  $f$  wird dann dargestellt durch

$$A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_k \end{bmatrix}.$$

Hierbei gilt  $A_i = \lambda_i E_{r_i} + N_i$  mit einer nilpotenten Matrix  $N_i \in K^{r_i \times r_i}$ . Somit erhalten wir die Zerlegung  $A = D + N$  mit  $D, N \in K^{n \times n}$ , wobei  $D$  diagonal und  $N$  nilpotent ist und zudem  $DN = ND$  gilt.

(3) Für jeden Hauptraum können wir eine Jordan-Basis wählen. So wird  $f$  dargestellt als Diagonalmatrix von Jordan-Blöcken:

$$A_i = \text{diag}(J(r_{i,1}, \lambda_i), J(r_{i,2}, \lambda_i), \dots, J(r_{i,k_i}, \lambda_i))$$

mit  $r_{i,1} \geq r_{i,2} \geq \dots \geq r_{i,k_i}$  und  $r_i = r_{i,1} + r_{i,2} + \dots + r_{i,k_i}$ .

# Rückblick auf den Satz von Jordan

😊 Damit haben wir den Satz von Jordan (N1B) bewiesen, also die Existenz einer Jordan–Basis und die Eindeutigkeit der Jordan–Form.

Die sorgsame Ausführung des Beweises beschert uns ein genaues Verständnis und darüber hinaus als Bonus noch weitere Erkenntnisse:

😊 Zugleich haben wir das Standardverfahren zur Jordanisierung als Algorithmus erklärt (ab Seite N106) und seine Korrektheit bewiesen.

Das beweist insbesondere die Existenz einer Jordan–Basis und ist zudem eine Anleitung für die konkrete Berechnung.

😊 Jordan–Basen gibt es viele, doch die Jordan–Form ist eindeutig (bis auf Umordnung der Jordan–Blöcke). Dies folgt aus den Invarianten  $n(f; \ell, \lambda)$  aus Satz N1K, diese zählen die Jordan–Blöcke  $J(\ell, \lambda)$  von  $f$ .

Diese Invarianten ermöglichen insbesondere die Kurzfassung des Standardverfahrens, wenn nur die Jordan–Form ohne Basis gefragt ist.

# Kern und Defekt einer Komposition

## Lemma N2A: Defekt-Ungleichung

(1) Für jeden Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  über  $K$  gilt

$$\dim_K \ker(f^r) \leq r \cdot \dim_K \ker(f).$$

(2) Allgemein seien  $f: U \rightarrow V$  und  $g: V \rightarrow W$  lineare Abbildungen,

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W.$$

(2a) Daraus erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \ker(f) \xrightarrow{\text{inc}} \ker(g \circ f) \xrightarrow[u \mapsto f(u)]{f'} \text{im}(f) \cap \ker(g) \xrightarrow[v \mapsto g(v)]{g'} 0.$$

(2b) Insbesondere gilt für die Dimensionen:

$$\begin{aligned} \dim_K \ker(g \circ f) &= \dim_K \ker(f) + \dim_K [\text{im}(f) \cap \ker(g)] \\ &\leq \dim_K \ker(f) + \dim_K \ker(g) \end{aligned}$$

# Kern und Defekt einer Komposition

**Aufgabe:** Treten alle numerisch möglichen Fälle tatsächlich auf?

Ausführlich: Gegeben seien  $k, \ell, m \in \mathbb{N}$  mit  $k \leq m \leq k + \ell$ . Finden Sie

$$\begin{aligned} f: U &\rightarrow V && \text{mit} && \dim \ker(f) = k, \\ g: V &\rightarrow W && \text{mit} && \dim \ker(g) = \ell, \\ h &= g \circ f && \text{mit} && \dim \ker(h) = m. \end{aligned}$$

Das zeigt: Die Abschätzung des Lemmas lässt sich nicht verbessern.

**Bemerkung:** Das ist eine offene Frage. Gesucht ist eine Konstruktion, möglichst einfach und elegant. Hier können und sollen Sie kreativ sein! Bitte machen Sie sich die Freude und versuchen Sie es zunächst selbst.

**Lösung:** Für  $n := k + \ell - m$  gilt  $0 \leq n \leq \ell$ . Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1_{\ell \times \ell} & 0_{\ell \times k} \\ 0_{n \times \ell} & 0_{n \times k} \end{bmatrix}, \quad B = [1_{n \times n} \quad 0_{n \times \ell}], \quad BA = [1_{n \times n} \quad 0_{n \times m}].$$

Diese definieren lineare Abbildungen  $f: K^{\ell+k} \rightarrow K^{\ell+n}: u \mapsto Au$  und  $g: K^{n+\ell} \rightarrow K^n: v \mapsto Bv$  mit  $h = g \circ f: K^{\ell+k} \rightarrow K^n$  wie gewünscht.

# Kern und Defekt einer Komposition

Zur Erinnerung: Die Dimension des Kerns heißt abkürzend auch Defekt. Daher nenne ich die Aussagen (1) und (2b) griffig *Defekt-Ungleichung*. Aussage (2a) formuliert dies bequem und präzise als *exakte Sequenz*.

**Aufgabe:** Beweisen Sie die Defekt-Ungleichungen des Lemmas.

**Bemerkung:** Das ist eine geschlossene Frage. Gesucht ist ein Beweis, möglichst einfach und elegant. Hier können und sollen Sie akribisch die Begriffe einüben und die nötigen Argumente sorgsam ausführen. Bitte machen Sie sich die Freude und versuchen Sie es selbst.

**Lösung:** (1) Anschaulich, in endlicher Dimension  $\dim V < \infty$ : Wir nutzen das Young–Diagramm des Hauptraums zum Eigenwert 0. Das Fundament der Breite  $z_1 = \dim_K \ker(f)$  erlaubt weitere Schichten der Breite  $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_r$ , somit  $\dim_K \ker(f^r) = z_1 + \dots + z_r \leq rz_1$ .

😊 Den allgemeinen Fall (1) entnehmen wir Satz N1J.

😊 Alternativ folgt (1) aus Aussage (2), die wir nun beweisen.

# Kern und Defekt einer Komposition

(2a) Zunächst ist die Sequenz wie angegeben tatsächlich wohldefiniert:

Für  $u \in \ker(f)$  gilt  $g(f(u)) = g(0) = 0$ , somit  $\ker(f) \leq \ker(g \circ f)$ .

Für  $u \in \ker(g \circ f)$  gilt  $f(u) \in \operatorname{im}(f) \cap \ker(g)$ , denn  $g(f(u)) = 0$ .

Zur Erinnerung, Exaktheit bedeutet „Bild gleich Kern“ an jeder Stelle:  
Das Bild von links ist gleich dem Kern nach rechts. (Definition I2H)

Exaktheit links ist klar, denn die Inklusion  $\ker(f) \hookrightarrow \ker(g \circ f)$  ist injektiv.

Die Exaktheit rechts entspricht der Surjektivität der Abbildung  $f'$ .

Jedes Element  $v \in \operatorname{im}(f) \cap \ker(g)$  hat die Form  $v = f(u)$  mit  $g(v) = 0$ .

Somit existiert  $u \in \ker(g \circ f)$  mit  $v = f'(u)$ . Das heißt,  $f'$  ist surjektiv.

Die Exaktheit in der Mitte bedeutet  $\ker(f') = \ker(f)$ :

Dies gilt, denn  $\ker(f) \leq \ker(g \circ f)$ , und  $f'$  ist die Einschränkung von  $f$  auf den Startraum  $\ker(g \circ f)$  und den Zielraum  $\operatorname{im}(f) \cap \ker(g)$ .

Die Aussage (2b) folgt aus (2a) dank der Dimensionsformel J2M.

Aus (2b) schließlich folgt (1) mit  $g = f^{r-1}$  und Induktion über  $r$ .

# Die diskrete Ableitung und ihre Hauptfolgen

Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper, etwa  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Wir arbeiten im Vektorraum  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  aller Folgen  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}: n \mapsto f(n)$  mit Indexmenge  $\mathbb{N}$  und Werten in  $\mathbb{K}$ .

Wir betrachten den Differenzenoperator (aka die diskrete Ableitung):

$$\Delta: \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}: f \mapsto \Delta f \quad \text{mit} \quad (\Delta f)(n) = f(n+1) - f(n).$$

**Aufgabe:** (1) Bestimmen Sie  $V_r = \ker \Delta^r$  und  $V = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} V_r$  in  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .  
 (2) Nennen Sie eine Basis aus Hauptvektorketten von  $V_r$  und  $V$ .

😊 Hier haben wir eine aufsteigende Kette von Untervektorräumen  $V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \dots$  in  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , daher ist ihre Vereinigung  $V = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} V_r$  ebenfalls ein Untervektorraum von  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . (Warum? Übung!)

**Lösung:** (1a) Für  $r = 0$  haben wir  $\Delta^0 = \text{id}$ , also  $V_0 = \{0\}$ .

(1b) Die Gleichung  $\Delta f = 0$  bedeutet  $f(n+1) - f(n) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Somit gilt  $V_1 = \ker \Delta = \langle 1 \rangle_{\mathbb{K}}^!$  mit der konstanten Funktion  $1 = \text{const}_{\mathbb{N}}^1$ .

(1c) Aus  $\dim_{\mathbb{K}} \ker \Delta = 1$  folgt  $\dim_{\mathbb{K}} \ker \Delta^r \leq r$  für alle  $r \in \mathbb{N}$ . (N1J/N2A)

# Die diskrete Ableitung und ihre Hauptfolgen

(1d) Wir erinnern uns an die Binomialkoeffizienten und betrachten

$$f_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : f_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Hier gilt  $f_0(n) = 1$  und  $f_1(n) = n$  und  $f_2(n) = n(n-1)/2$  usw.

Für die diskrete Ableitung finden wir:

$$\Delta f_k(n) \stackrel{\text{Def}}{=} f_k(n+1) - f_k(n) \stackrel{\text{Def}}{=} \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \stackrel{\text{E229}}{=} \binom{n}{k-1} \stackrel{\text{Def}}{=} f_{k-1}(n)$$

(1e) Wir haben also eine (unendlich lange) Hauptvektorkette

$$0 \xleftarrow{\Delta} f_0 \xleftarrow{\Delta} f_1 \xleftarrow{\Delta} f_2 \xleftarrow{\Delta} f_3 \xleftarrow{\Delta} \dots$$

Jede Hauptvektorkette ist linear unabhängig.

(2) Somit erhalten wir die ersehnten Basen aus Hauptvektorketten:

$$V_r = \ker \Delta^r = \langle f_0, \dots, f_{r-1} \rangle_{\mathbb{K}}^!,$$

$$V = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} V_r = \langle f_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle_{\mathbb{K}}^!$$

## Die diskrete Ableitung und ihre Hauptfolgen

$\binom{n}{k}$	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k=0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45
3	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120
4	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210

## Satz N2B

Wir betrachten den Differenzenoperator / die diskrete Ableitung

$$\Delta : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : f \mapsto \Delta f \quad \text{mit} \quad (\Delta f)(n) = f(n+1) - f(n).$$

Zum Eigenwert 0 sind die Haupträume der Stufe  $r = 1, 2, 3, \dots$  dann

$$\ker(\Delta^r) = \langle f_k \mid k < r \rangle_{\mathbb{K}}^{\dagger} \quad \text{mit} \quad f_k(n) = \binom{n}{k} \quad \text{und}$$

$$0 \xleftarrow{\Delta} f_0 \xleftarrow{\Delta} f_1 \xleftarrow{\Delta} f_2 \xleftarrow{\Delta} f_3 \xleftarrow{\Delta} f_4 \xleftarrow{\Delta} \dots$$

# Die diskrete Ableitung und ihre Hauptfolgen

😊 Wir sehen an diesem Zahlenbeispiel sehr schön, warum der Differenzenoperator auch als „diskrete Ableitung“ betrachtet wird: Die Folge  $f = \Delta F$  mit  $f(n) = F(n+1) - F(n)$  gibt in jedem Punkt die „Steigung“ von  $F$  an, also die Differenz zum nächsten Wert.

😊 Umgekehrt entsteht  $F$  aus  $f$  durch „diskrete Integration“: Wir geben die Folge  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$  sowie den Startwert  $F(0) = 0$  vor und erhalten alle weiteren Werte  $F(n)$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$  rekursiv durch Aufsummieren gemäß  $F(n+1) = F(n) + f(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Genau dies ist die Definition der Summe  $F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$ .

😊 Die so entstehende Tabelle ist gerade das Pascalsche Dreieck! Die Darstellung haben wir der vorliegenden Situation angepasst: In jeder Zeile halten wir  $k \in \mathbb{N}$  fest und lassen  $n \in \mathbb{N}$  laufen. (Üblicherweise ist  $n \in \mathbb{N}$  die Zeile und  $k \in \{0, \dots, n\}$  läuft.)

😊 Eine Art diskrete Ableitung macht im Young–Diagramm aus  $\dim V_k$  die Breite  $\dim W_k = \dim V_k - \dim V_{k-1}$  der Schichten und daraus schließlich die Anzahl der Startvektoren,  $\dim U_k = \dim W_k - \dim W_{k+1}$ .

# Der Verschiebeoperator und seine Hauptfolgen

Auf dem Folgenraum  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  betrachten wir den Verschiebeoperator

$$s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : f \mapsto sf \quad \text{mit} \quad (sf)(n) = f(n+1).$$

**Aufgabe:** Bestimmen Sie alle Haupträume  $V_r = \ker(s - \lambda)^r$  der Stufe  $r = 1, 2, 3, \dots$ . Nennen Sie eine Basis aus Hauptvektorketten.

**Lösung:** (a) Sei  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Stufe  $r = 1$  ist der Eigenraum (M247):

$$\text{Eig}(s, \lambda) = \langle f_0 \rangle_{\mathbb{K}}^! \quad \text{mit} \quad f_0 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : n \mapsto \lambda^n$$

(b) Aus  $\dim_{\mathbb{K}} \ker(s - \lambda) = 1$  folgt  $\dim_{\mathbb{K}} \ker(s - \lambda)^r \leq r$  dank N1J/N2A.

(c) Wir inspirieren uns an der vorigen Aufgabe und N1F und betrachten

$$f_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : n \mapsto \binom{n}{k} \lambda^{n-k}.$$

Dank Rekursionsformel der Binomialkoeffizienten E229 finden wir:

$$(s - \lambda)f_k(n) = \binom{n+1}{k} \lambda^{n+1-k} - \binom{n}{k} \lambda^{n+1-k} = \binom{n}{k-1} \lambda^{n-(k-1)} = f_{k-1}(n)$$

(d) Wir erhalten also auch hier eine unendlich lange Hauptvektorkette:

$$0 \xleftarrow{s-\lambda} f_0 \xleftarrow{s-\lambda} f_1 \xleftarrow{s-\lambda} f_2 \xleftarrow{s-\lambda} f_3 \xleftarrow{s-\lambda} \dots$$

# Anwendung: lineare Rekursionsgleichungen

😊 Das ist ein sehr effizientes und elegantes Vorgehen:  
Wir bestimmen zunächst den Eigenraum  $V_1 = \text{Eig}(s, \lambda)$ .  
Daraus folgt die Abschätzung  $\dim_{\mathbb{K}} \ker(s - \lambda)^r \leq r$  für alle  $r \in \mathbb{N}$ .  
Durch explizite Konstruktion finden wir eine Hauptvektorkette,  
somit eine Basis von  $V_r$ , und daraus folgt  $\dim_{\mathbb{K}} \ker(s - \lambda)^r = r$ .

😊 Ich zelebriere diese Anwendung hier betont ausführlich, da es sich um allgemein wichtige Operatoren handelt, und all unsere Werkzeuge der Linearen Algebra hier zur Blüte kommen und Früchte tragen.  
Die Formel (c) fällt nicht vom Himmel, siehe Bemerkung N1F.

**Übung:** Was genau passiert im interessanten Sonderfall  $\lambda = 0$ ?  
Wie ist die Formel  $f_k(n) = \binom{n}{k} \lambda^{n-k}$  hier zu interpretieren?

😊 Zusammenfassend formuliere ich hierzu den folgenden Satz zum Verschiebeoperator und den Lösungen von Rekursionsgleichungen.  
Anschließend werden wir dieses erfolgreiche Rezept genauso auf die Ableitung und Differentialgleichungen anwenden.

# Der Verschiebeoperator und seine Hauptfolgen

## Satz N2c: Hauptfolgen des Verschiebeoperators

Auf dem Folgenraum  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  betrachten wir den Verschiebeoperator

$$s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : f \mapsto sf \quad \text{mit} \quad (sf)(n) = f(n+1).$$

(1) Zum Eigenwert  $\lambda$  sind die Haupträume der Stufe  $r = 1, 2, 3, \dots$  dann

$$\ker(s - \lambda)^r = \langle f_k \mid k < r \rangle_{\mathbb{K}}^{\dagger} \quad \text{mit} \quad f_k(n) = \binom{n}{k} \lambda^{n-k} \quad \text{und}$$

$$0 \xleftarrow{s-\lambda} f_0 \xleftarrow{s-\lambda} f_1 \xleftarrow{s-\lambda} f_2 \xleftarrow{s-\lambda} f_3 \xleftarrow{s-\lambda} f_4 \xleftarrow{s-\lambda} \dots$$

(2) Vorgelegt sei ein normiertes Polynom

$$P = X^r + a_{r-1}X^{r-1} + \dots + a_0X^0 = (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_k)^{r_k}.$$

Dann hat  $L = \ker P(s) \leq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  eine Basis aus Hauptvektorketten:

$$L = \ker(s - \lambda_1)^{r_1} \oplus \dots \oplus \ker(s - \lambda_k)^{r_k}$$

Damit können wir jede lineare Rekursionsgleichung  $P(s)f = 0$  lösen.

# Der Verschiebeoperator und seine Hauptfolgen

## Satz N2C: Hauptfolgen des Verschiebeoperators

(3) Die Auswertung stiftet den  $\mathbb{K}$ -Isomorphismus

$$q : L \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^r : f \mapsto (f(0), f(1), f(2), \dots, f(r-1)).$$

Damit können wir jedes Anfangswertproblem lösen, das heißt, die eindeutige Lösung als einfache, geschlossene Formel darstellen.

😊 Damit können Sie lineare Rekursionsgleichungen  $P(s)f = 0$  lösen, nun für alle Polynome  $P \in \mathbb{K}[X]_r^1$ , auch mit mehrfachen Eigenwerten!

😊 Dasselbe gilt entsprechend für die diskrete Ableitung  $\Delta = s - \text{id}$ : Nur die Eigenwerte verschieben sich, denn  $\Delta - \lambda = s - (1 + \lambda)$ .

**Beweis:** (1) Die Haupträume kennen wir aus der vorigen Aufgabe.

(2) Diese direkte Summe ist die Kernzerlegung aus Satz M3v.

(3) Auswertung und Dimension kennen wir aus Satz M2R:

Zu je  $r$  beliebig vorgegebenen Startwerten  $f_0, \dots, f_{r-1} \in \mathbb{K}$

existiert genau eine  $P$ -rekursive Folge  $f = (f_0, \dots, f_{r-1}, f_r, \dots)$ . ◻

# Der Verschiebeoperator und seine Hauptfolgen

---

**Aufgabe:** Wie lösen Sie mit Satz N2c lineare Rekursionsgleichungen? Erklären Sie hierzu das Standardverfahren (ohne & mit Anfangswerten).

# Der Verschiebeoperator und seine Hauptfolgen

---

# Der Verschiebeoperator und seine Hauptfolgen

---

# Der Verschiebeoperator und seine Hauptfolgen

---

# Die Ableitung auf Polynomen und ihre Hauptfunktionen

Über dem Körper  $\mathbb{K}$  betrachten wir die Ableitung auf Polynomen:

$$\partial : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] : P = \sum_{i=0}^n p_i X^i \mapsto \partial P = \sum_{i=1}^n i p_i X^{i-1}$$

**Aufgabe:** Bestimmen Sie alle Haupträume  $V_r = \ker(\partial - \lambda)^r$  der Stufe  $r = 1, 2, 3, \dots$ . Nennen Sie eine Basis aus Hauptvektorketten.

**Lösung:** Wir betrachten die Eigenvektorgleichung  $\partial P = \lambda P$ .

Sei  $\lambda \neq 0$ . Für  $P \neq 0$  gilt  $\deg(\partial P) < \deg(\lambda P)$ , also  $\text{Eig}(\partial, \lambda) = \{0\}$ .

Somit bleibt nur  $\lambda = 0$  als einzig möglicher Eigenwert von  $\partial$ .

(0a) Charakteristik  $\text{char } \mathbb{K} = 0$ : Wir finden  $\ker(\partial) = \langle X^0 \rangle_{\mathbb{K}}^!$ .

(0b) Aus  $\dim_{\mathbb{K}} \ker(\partial) = 1$  folgt  $\dim_{\mathbb{K}} \ker(\partial^r) \leq r$  für  $r \in \mathbb{N}$ . (N1J/N2A)

(0c) Die Polynome  $F_k = X^k/k! \in \mathbb{K}[X]$  bilden eine Hauptvektorkette:

$$0 \xleftarrow{\partial} F_0 \xleftarrow{\partial} F_1 \xleftarrow{\partial} F_2 \xleftarrow{\partial} F_3 \xleftarrow{\partial} \dots$$

(0d) Dank linearer Unabhängigkeit finden wir so:

$$\ker(\partial^r) = \mathbb{K}[X]_{<r} = \langle F_k \mid k < r \rangle_{\mathbb{K}}^!$$

# Die Ableitung auf Polynomen und ihre Hauptfunktionen

(1a) Charakteristik  $\text{char } \mathbb{K} = p > 0$  verhält sich anders!

$$\ker(\partial) = \langle X^0, X^p, X^{2p}, X^{3p}, \dots \rangle_{\mathbb{K}}^!$$

(1b) Für die Polynome  $F_{m,k} = X^{mp+k}/k!$  mit  $k = 0, 1, \dots, p-1$  gilt:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xleftarrow{\partial} & F_{0,0} & \xleftarrow{\partial} & F_{0,1} & \xleftarrow{\partial} & \dots \xleftarrow{\partial} & F_{0,p-1} \\ 0 & \xleftarrow{\partial} & F_{1,0} & \xleftarrow{\partial} & F_{1,1} & \xleftarrow{\partial} & \dots \xleftarrow{\partial} & F_{1,p-1} \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \xleftarrow{\partial} & F_{m,0} & \xleftarrow{\partial} & F_{m,1} & \xleftarrow{\partial} & \dots \xleftarrow{\partial} & F_{m,p-1} \\ \vdots & & & & & & & \end{array}$$

(1c) Wir finden hier eine Basis aus mehreren Hauptvektorketten:

$$\ker(\partial^r) = \langle F_{m,k} \mid m \in \mathbb{N}, k < r \rangle_{\mathbb{K}}^!$$

Dies gilt für  $r = 0, 1, \dots, p$ , wobei  $\ker \partial^0 = \{0\}$  und  $\ker \partial^p = \mathbb{K}[X]$ .

 Die Ableitung von Polynomen definieren wir über jedem Körper  $\mathbb{K}$ . In positiver Charakteristik verhält sie sich jedoch recht ungewohnt. Umso erfreulicher ist es, auch hier einfache Strukturen zu finden.

## Lineare Differentialgleichung und Exponentialfunktion

Zu lösen sei die folgende **Differentialgleichung mit Anfangswert**:

$$u'(t) = a u(t) \quad \text{mit} \quad u(0) = v$$

Diese Aufgabenstellung nennt man **Anfangswertproblem**, kurz AWP, oder auch **Cauchy-Problem**. Wir arbeiten über dem Körper  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

Gegeben ist die Konstante  $a \in \mathbb{K}$  und der Anfangswert  $v \in \mathbb{K}$ .

Gesucht sind alle differenzierbaren Funktionen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}: t \mapsto u(t)$ , die  $u(0) = v$  und die Gleichung  $u'(t) = a u(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  erfüllen.

- Aufgabe:** (1) Existenz: Finden Sie eine Lösung  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}: t \mapsto u(t)$ .  
 (2) Eindeutigkeit: Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems.

**Lösung:** (1) Die Funktion  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}: u(t) = e^{ta}v$  ist eine Lösung.

(2) Sei  $\tilde{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  eine weitere Lösung. Wir betrachten  $w(t) = e^{-ta}\tilde{u}(t)$ . Dank Produktregel erhalten wir  $w'(t) = -a e^{-ta} \cdot \tilde{u}(t) + e^{-ta} \cdot a\tilde{u}(t) = 0$ . Dank Mittelwertsatz ist  $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  konstant  $v$ , also  $\tilde{u}(t) = e^{ta}v = u(t)$ .

😊 Es gibt genau eine Lösung  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ , nämlich  $u(t) = e^{ta}v$ .

## Lineare Differentialgleichung und Exponentialfunktion

☹️ Aus der vorigen Aufgabe wissen wir, dass Polynomfunktionen nicht zur Lösung der Differentialgleichung  $u'(t) = a u(t)$  mit  $a \neq 0$  taugen.

😊 Die Exponentialfunktion erweitert unser Arsenal ganz wesentlich:

$$\exp : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} : x \mapsto \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k / k!$$

**Analysis:** Diese Potenzreihe konvergiert absolut in jedem Punkt  $x \in \mathbb{K}$ . Wir dürfen termweise ableiten, wie Polynome, und erhalten  $\exp' = \exp$ . Dank Kettenregel ist die Ableitung von  $t \mapsto \exp(ta)$  dann  $t \mapsto a \exp(ta)$ .

😊 Neben der Existenz erhalten wir auch die Eindeutigkeit der Lösung. Damit ist dieses grundlegende Problem gelöst, darauf bauen wir auf.

Wir gehen genauso vor wie in der Rechnung zur diskreten Ableitung und bestimmen alle Haupträume durch eine explizite Konstruktion.

**Lineare Algebra:** Ausgestattet mit diesen grundlegenden Daten lösen wir routiniert jede Differentialgleichung höherer Ordnung (gemeint ist: homogen lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten).

# Der Ableitungsoperator und seine Hauptfunktionen

Auf  $\mathcal{C}^\infty = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$  über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  haben wir den Ableitungsoperator

$$\partial : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{C}^\infty : f \mapsto f'.$$

**Aufgabe:** Bestimmen Sie alle Haupträume  $V_r = \ker(\partial - \lambda)^r$  der Stufe  $r = 1, 2, 3, \dots$ . Nennen Sie eine Basis aus Hauptvektorketten.

**Lösung:** (a) Sei  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Stufe  $r = 1$  ist der Eigenraum (N219):

$$\text{Eig}(s, \lambda) = \langle f_0 \rangle_{\mathbb{K}}^! \quad \text{mit} \quad f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : t \mapsto e^{t\lambda}$$

(b) Aus  $\dim_{\mathbb{K}} \ker(\partial - \lambda) = 1$  folgt  $\dim_{\mathbb{K}} \ker(\partial - \lambda)^r \leq r$  dank N1J/N2A.

(c) Wir inspirieren uns an vorigen Beispielen und betrachten

$$f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : t \mapsto \frac{t^k}{k!} e^{t\lambda}.$$

Dank Produktregel der Ableitung finden wir:

$$(\partial - \lambda)f_k(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{t\lambda} + \lambda \frac{t^k}{k!} e^{t\lambda} - \lambda \frac{t^k}{k!} e^{t\lambda} = f_{k-1}(t)$$

(d) Wir erhalten also auch hier eine unendlich lange Hauptvektorkette:

$$0 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_0 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_1 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_2 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_3 \xleftarrow{\partial - \lambda} \dots$$

# Der Ableitungsoperator und seine Hauptfunktionen

## Satz N2D: Hauptfunktionen des Ableitungsoperator

Auf  $\mathcal{C}^\infty = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$  über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  haben wir den Ableitungsoperator

$$\partial : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{C}^\infty : f \mapsto f'.$$

(1) Zum Eigenwert  $\lambda$  sind die Haupträume der Stufe  $r = 1, 2, 3, \dots$  dann

$$\ker(\partial - \lambda)^r = \langle f_k \mid k < r \rangle_{\mathbb{K}} \quad \text{mit} \quad f_k(t) = e^{t\lambda} t^k / k! \quad \text{und}$$

$$0 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_0 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_1 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_2 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_3 \xleftarrow{\partial - \lambda} f_4 \xleftarrow{\partial - \lambda} \dots$$

(2) Vorgelegt sei ein normiertes Polynom

$$P = X^r + a_{r-1}X^{r-1} + \dots + a_0X^0 = (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_k)^{r_k}.$$

Dann hat  $L = \ker P(\partial) \subseteq \mathcal{C}^\infty$  eine Basis aus Hauptvektorketten:

$$L = \ker(\partial - \lambda_1)^{r_1} \oplus \dots \oplus \ker(\partial - \lambda_k)^{r_k}$$

Damit können wir jede lineare Differentialgleichung  $P(\partial)f = 0$  lösen.

# Der Ableitungsoperator und seine Hauptfunktionen

## Satz N2D: Hauptfunktionen des Ableitungsoperator

(3) Die Auswertung zum Zeitpunkt  $t = 0$  stiftet den  $\mathbb{K}$ -Isomorphismus

$$q : L \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^r : f \mapsto (f(0), f'(0), f''(0), \dots, f^{(r-1)}(0)).$$

Damit können wir jedes Anfangswertproblem lösen, das heißt, die eindeutige Lösung als einfache, geschlossene Formel darstellen.

(4) Für jede Hauptfunktion  $f_k$  zu  $\lambda$  gilt  $f_k^{(n)}(0) = \binom{n}{k} \lambda^{n-k}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beweis:** (1) Die Haupträume kennen wir aus der vorigen Aufgabe.

(2) Diese direkte Summe ist die Kernzerlegung M3v.

(3) Dank (4) und Satz N2C bildet  $q : L \rightarrow \mathbb{K}^r$  eine Basis von  $L$  auf eine Basis von  $\mathbb{K}^r$  ab. Somit ist  $q$  ein Isomorphismus. ◻

**Aufgabe:** Berechnen Sie  $f_k^{(n)}(t)$  mit Auswertung  $f_k^{(n)}(0) = \binom{n}{k} \lambda^{n-k}$  zunächst für kleine Beispiele und dann allgemein per Induktion.

## Der Ableitungsoperator und seine Hauptfunktionen

**Lösung:** Wir wissen  $\partial f_k = \lambda f_k + f_{k-1}$ . Per Induktion zeigen wir:

$$\partial^n f_k = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} f_{k-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \lambda^{n-i} f_{k-i}$$

Zu einfacheren Schreibweise setzen wir  $f_k := 0$  für  $k \in \mathbb{Z}_{<0}$ . Die Aussage gilt für  $n = 0$ . Induktionsschritt von  $n - 1$  auf  $n$ :

$$\begin{aligned} \partial^n f_k &= \partial(\partial^{n-1} f_k) = \partial \left[ \sum_{i \in \mathbb{Z}} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} f_{k-i} \right] \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-i} f_{k-i} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \binom{n-1}{j} \lambda^{n-1-j} f_{k-j-1} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-i} f_{k-i} + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \binom{n-1}{i-1} \lambda^{n-i} f_{k-i} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} f_{k-i} \end{aligned}$$

Wir nutzen die Indexverschiebung  $i = j + 1$  bzw.  $j = i - 1$ . Schließlich gilt  $f_0(0) = 1$  und  $f_k(0) = 0$  für alle  $k \neq 0$ , also  $(\partial^n f_k)(0) = \binom{n}{k} \lambda^{n-k}$ .

# Konjugiert-komplexe Lösungen

⚠ Anwendungen erfordern oft **reelle Lösungen**  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Zu lösen sei über  $\mathbb{R}$  die homogene lineare Differentialgleichung

$$P(\partial) u(t) = 0.$$

Hierzu sei  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$  ein **reelles Polynom**.

Ist  $\lambda = \sigma + i\omega$  mit  $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$  eine Nullstelle von  $P$ , dann auch  $\bar{\lambda} = \sigma - i\omega$ .

Unsere DG hat dann die beiden **konjugiert-komplexen Lösungen**

$$z_1(t) = e^{\lambda t} = e^{\sigma t} e^{+i\omega t} = e^{\sigma t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)),$$

$$z_2(t) = e^{\bar{\lambda} t} = e^{\sigma t} e^{-i\omega t} = e^{\sigma t} (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)).$$

Basiswechsel: Hieraus kombinieren wir die beiden **reellen Lösungen**

$$u_1(t) = \operatorname{Re}[z_1(t)] = \frac{1}{2} [z_1(t) + z_2(t)] = e^{\sigma t} \cos(\omega t),$$

$$u_2(t) = \operatorname{Im}[z_1(t)] = \frac{1}{2i} [z_1(t) - z_2(t)] = e^{\sigma t} \sin(\omega t).$$

Im Falle  $\omega \neq 0$  sind diese beiden Lösungen linear unabhängig.

## Anwendungsbeispiel: komplex vs reell

**Aufgabe:** Lösen Sie (a) allgemein und (b) das Anfangswertproblem

$$u''(t) + 2u'(t) + 5u(t) = 0 \quad \text{mit} \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 3$$

**Lösung:** (a) Das charakteristische Polynom ist  $P(X) = X^2 + 2X + 5$ . Die Nullstellen  $\lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$  sind komplex-konjugiert.

Komplexes Fundamentalsystem:  $e^{(-1+2i)t}$ ,  $e^{(-1-2i)t}$

Komplexe Lösungen:  $z(t) = c_1 e^{(-1+2i)t} + c_2 e^{(-1-2i)t}$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Reelles Fundamentalsystem:  $e^{-t} \cos(2t)$ ,  $e^{-t} \sin(2t)$

Reelle Lösungen:  $u(t) = \alpha_1 e^{-t} \cos(2t) + \alpha_2 e^{-t} \sin(2t)$  mit  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left. \begin{aligned} u(0) = \alpha_1 &= 1 \\ u'(0) = -\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases}$$

Probe! Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems ist demnach

$$u(t) = e^{-t} (\cos(2t) + 2 \sin(2t)).$$

😊 Über die komplexe Lösung kommt man zur selben Lösung des AWP.

# Mehrfache konjugiert-komplexe Lösungen

Zu lösen sei über  $\mathbb{R}$  die homogene lineare Differentialgleichung

$$P(\partial) u(t) = 0.$$

Hierzu sei  $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$  ein **reelles Polynom**.

Ist  $\lambda = \sigma + i\omega$  mit  $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$  und  $\omega \neq 0$  eine  $k$ -fache Nullstelle von  $P$ , dann auch die komplex-konjugierte Zahl  $\bar{\lambda} = \sigma - i\omega$ .

Unsere DG hat dann die  $2k$  **konjugiert-komplexen Lösungen**

$$\begin{aligned} e^{\lambda t}, e^{\lambda t} t, \dots, e^{\lambda t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \\ e^{\bar{\lambda} t}, e^{\bar{\lambda} t} t, \dots, e^{\bar{\lambda} t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}. \end{aligned}$$

Basiswechsel: Hieraus kombinieren wir die  $2k$  **reellen Lösungen**

$$\begin{aligned} e^{\sigma t} \cos(\omega t), e^{\sigma t} \cos(\omega t) t, \dots, e^{\sigma t} \cos(\omega t) \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \\ e^{\sigma t} \sin(\omega t), e^{\sigma t} \sin(\omega t) t, \dots, e^{\sigma t} \sin(\omega t) \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}. \end{aligned}$$

Dank  $\omega \neq 0$  sind diese  $2k$  Lösungen linear unabhängig.

## Anwendungsbeispiel: komplex vs reell

**Aufgabe:** Finden Sie ein reelles Fundamentalsystem der Gleichung

$$u^{(4)}(t) + 8u''(t) + 16u(t) = 0.$$

**Lösung:** Das char. Polynom unserer Gleichung  $P(\partial)u = 0$  ist

$$P(X) = X^4 + 8X^2 + 16 = (X^2 + 4)^2 = (X - 2i)^2(X + 2i)^2.$$

Doppelte Nullstellen  $2i$ ,  $-2i$ . Ein komplexes Fundamentalsystem ist

$$e^{2it}, \quad e^{-2it}, \quad te^{2it}, \quad te^{-2it}.$$

Probe! Hieraus gewinnen wir das reelle Fundamentalsystem

$$\cos(2t), \quad \sin(2t), \quad t \cos(2t), \quad t \sin(2t).$$

Basiswechsel! Jede reelle Lösung hat demnach die Form

$$u(t) = \cos(2t)(\alpha_1 + \alpha_2 t) + \sin(2t)(\alpha_3 + \alpha_4 t)$$

mit eindeutig bestimmten Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ .

😊 Wie immer gilt: **Anfangswerte**  $u(t_0), u'(t_0), u''(t_0), u'''(t_0) \in \mathbb{R}$  zu einem Startzeitpunkt  $t_0$  können beliebig vorgegeben werden; sie legen die freien Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$  eindeutig fest.

# Der Ableitungsoperator und seine Hauptfunktionen

---

**Aufgabe:** Wie lösen Sie mit Satz N2D lineare Differentialgleichungen? Erklären Sie hierzu das Standardverfahren (ohne & mit Anfangswerten).

# Der Ableitungsoperator und seine Hauptfunktionen

---

# Der Ableitungsoperator und seine Hauptfunktionen

---

# Der Ableitungsoperator und seine Hauptfunktionen

---

# Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten eine **lineare Differentialgleichung** über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ :

$$u^{(n)}(t) + a_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = b(t)$$

Gegeben sind die **konstanten Koeffizienten**  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$  und als **rechte Seite** die stetige Funktion  $b: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{K}$  auf einem Intervall.

Mit  $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  bündeln wir dies zu

$$P(\partial) u(t) = b(t).$$

Gesucht sind als **Lösungen** alle Funktionen  $u: I \rightarrow \mathbb{K}$  in  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ , die die Gleichung  $P(\partial) u(t) = b(t)$  in jedem Punkt  $t \in I$  erfüllen.

Beim **Anfangswertproblem** sind zudem die Anfangswerte in  $t_0 \in I$  vorgegeben durch  $u(t_0) = v_0, u'(t_0) = v_1, \dots, u^{(n-1)}(t_0) = v_{n-1} \in \mathbb{K}$ .

Für  $b = 0$  erhalten wir die **homogene Differentialgleichung**

$$P(\partial) u(t) = 0.$$

😊 Letztere können wir bereits vollständig und explizit lösen (N2D).

# Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Übliche Bezeichnung in den Anwendungen und in der Mathematik:

Gleichung	Bezeichnung	Struktur
$P(\partial) u(t) = 0$	homogene lineare DG	linear
$P(\partial) u(t) = b(t)$	inhomogene lineare DG	affin-linear

Bezeichnung und Struktur entsprechen linearen Gleichungssystemen:

$Ax = 0$	homogenes LGS	linear
$Ax = b$	inhomogenes LGS	affin-linear

⚠ Der Funktionenraum  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$  ist unendlich-dimensional, wir können daher nicht direkt auf die Matrizenrechnung zurückgreifen! Schade.

😊 Homogene Differentialgleichungen  $P(\partial) u(t) = 0$  können wir bereits allgemein, vollständig und explizit lösen durch Hauptfunktionen (N2D).

Wie lösen wir inhomogene Differentialgleichungen  $P(\partial) u(t) = b(t)$ ?

😊 Satz N2G zeigt eine systematische Lösungsformel durch Integration. Für spezielle rechte Seiten gibt es einfache Lösungsformeln (N2E) bzw. Lösungsansätze (N2F), die meist leichter und schneller zum Ziel führen.

# Lösungsformel für exponentielle rechte Seiten

## Satz N2E: Lösungsformel für exponentielle rechte Seiten

Sei  $P \in \mathbb{K}[X]$  ein Polynom. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$P(\partial) u(t) = e^{\mu t}.$$

(0) Gilt  $P(\mu) \neq 0$ , so haben wir die **kanonische Lösung**

$$u_0(t) = e^{\mu t} / P(\mu).$$

(1) Ist  $\mu$  eine  $k$ -fache Nullstelle des Polynoms  $P$ , so sprechen wir von  $k$ -**facher Resonanz** und erhalten die **modifizierte Lösung**

$$u_0(t) = e^{\mu t} t^k / P^{(k)}(\mu).$$

(2) Dank **Superposition** lösen wir damit auch rechte Seiten der Form

$$e^{\sigma t} \cos(\omega t) = \frac{1}{2} [e^{(\sigma+i\omega)t} + e^{(\sigma-i\omega)t}],$$

$$e^{\sigma t} \sin(\omega t) = \frac{1}{2i} [e^{(\sigma+i\omega)t} - e^{(\sigma-i\omega)t}].$$

## Lösungsformel für exponentielle rechte Seiten

**Aufgabe:** Rechnen Sie die Lösungsformeln des Satzes sorgsam nach.

**Lösung:** (0) Wir haben  $\partial^k e^{\mu t} = \mu^k e^{\mu t}$  und somit  $P(\partial) e^{\mu t} = P(\mu) e^{\mu t}$ .  
Im Falle  $P(\mu) \neq 0$  erhalten wir die kanonische Lösung  $u_0(t) = e^{\mu t} / P(\mu)$ .

(1) Wir zerlegen  $P(X) = \tilde{P}(X)(X - \mu)^k$  mit  $\tilde{P}(\mu) \neq 0$  und erhalten

$$P(\partial) [e^{\mu t} t^k] = \tilde{P}(\partial)(\partial - \mu)^k [e^{\mu t} t^k] = \tilde{P}(\partial) e^{\mu t} k! = \tilde{P}(\mu) e^{\mu t} k!$$

$$P^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \partial^j \tilde{P}(t) \cdot \partial^{k-j} (t - \mu)^k \implies P^{(k)}(\mu) = \tilde{P}(\mu) k!$$

Wir erhalten so die modifizierte Lösung  $u_0(t) = e^{\mu t} t^k / P^{(k)}(\mu)$ .

(2) Dank (0) und (1) finden wir Lösungen  $u_{\pm}$  mit  $P(\partial) u_{\pm}(t) = e^{(\sigma \pm i\omega)t}$ .

Dank Linearität des Operators  $P(\partial)$  erhalten wir

$$P(\partial) \frac{1}{2} [u_+(t) + u_-(t)] = \frac{1}{2} [e^{(\sigma+i\omega)t} + e^{(\sigma-i\omega)t}] = e^{\sigma t} \cos(\omega t),$$

$$P(\partial) \frac{1}{2i} [u_+(t) - u_-(t)] = \frac{1}{2i} [e^{(\sigma+i\omega)t} - e^{(\sigma-i\omega)t}] = e^{\sigma t} \sin(\omega t).$$



All diese rechten Seiten können wir somit leicht und explizit lösen!

# Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten

## Satz N2F: Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten

Seien  $P, R \in \mathbb{K}[X]$  Polynome. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$P(\partial) u(t) = e^{\mu t} R(t).$$

(1) Ist  $\mu$  eine  $k$ -fache Nullstelle von  $P$ , so existiert eine Lösung

$$u_0(t) = e^{\mu t} t^k Q(t)$$

mit einem eindeutigen Polynom  $Q \in \mathbb{K}[X]$  vom Grad  $\deg Q = \deg R$ .

(2) Speziell  $P(\partial) u(t) = e^{\mu t}$  wird gelöst durch  $u_0(t) = e^{\mu t} t^k / P^{(k)}(\mu)$ .

😊 Wir berechnen  $Q$  leicht durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich. Hier ist  $k = 0$  erlaubt; bei  $k > 0$  sprechen wir von  $k$ -facher **Resonanz**.

😊 Dieser Ansatz gelingt ebenso für rechte Seiten  $e^{0t} R(t) = R(t)$  sowie

$$e^{\sigma t} \cos(\omega t) R(t) = \frac{1}{2} [e^{(\sigma+i\omega)t} + e^{(\sigma-i\omega)t}] R(t),$$

$$e^{\sigma t} \sin(\omega t) R(t) = \frac{1}{2i} [e^{(\sigma+i\omega)t} - e^{(\sigma-i\omega)t}] R(t).$$

## Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten

**Vorbereitung:** Wir wollen Differentialoperatoren geschickt nutzen. Dank Leibniz–Regel für Produkte  $\partial(f \cdot g) = (\partial f) \cdot g + f \cdot (\partial g)$  gilt:

$$\begin{aligned}\partial \left[ e^{\mu t} g(t) \right] &= e^{\mu t} \left[ (\partial + \mu) g(t) \right] \\ \partial^k \left[ e^{\mu t} g(t) \right] &= e^{\mu t} \left[ (\partial + \mu)^k g(t) \right]\end{aligned}$$

Für jedes Polynom  $P \in \mathbb{K}[X]$  und jede Konstante  $\mu \in \mathbb{K}$  gilt somit:

$$P(\partial) \left[ e^{\mu t} g(t) \right] = e^{\mu t} \left[ P(\partial + \mu) g(t) \right]$$

Als typisches Beispiel haben wir insbesondere:

$$(\partial - \lambda)^k \left[ e^{\mu t} g(t) \right] = e^{\mu t} \left[ (\partial - \lambda + \mu)^k g(t) \right]$$

Diese hilfreiche **Verschiebungsregel** vereinfacht unsere Rechnungen:

$$P(\partial) e^{\mu t} = e^{\mu t} P(\partial + \mu)$$

# Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten

**Beweis des Satzes:** Der Satz erklärt ein Lösungsrezept: „Wenn das Problem soundso gegeben ist, dann sieht die Lösung soundso aus.“

Wir zeigen, dass der genannte Ansatz tatsächlich immer gelingt.

Hierzu betrachten wir die Menge aller Polynome in  $t$  vom Grad  $< n$ :

$$\mathbb{K}[t]_{<n} = \{ a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} \mid a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K} \}.$$

Dies ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension  $n$ . Die  $k$ -fache Ableitung  $\partial^k : \mathbb{K}[t]_{<n} \rightarrow \mathbb{K}[t]_{<n-k}$  ist surjektiv. Ihr Kern ist der Unterraum  $\mathbb{K}[t]_{<k}$ .

Für  $\lambda \neq 0$  hingegen ist  $(\partial - \lambda) : \mathbb{K}[t]_{<n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}[t]_{<n}$  ein Isomorphismus: Dieser Operator erhält den Grad, hat trivialen Kern, ist somit injektiv, dank endlicher Dimension auch surjektiv. Alternative und konkretere Sichtweise: Bezüglich der Monombasis  $t^0, t^1, \dots, t^{n-1}$  schreibt sich  $\partial - \lambda$  als obere Dreiecksmatrix mit Determinante  $(-\lambda)^n \neq 0$ .

Nach Voraussetzung gilt  $P(X) = \tilde{P}(X) (X - \mu)^k$  mit  $\tilde{P}(\mu) \neq 0$ , also

$$P(\partial) [e^{\mu t} t^k Q(t)] = e^{\mu t} P(\partial + \mu) [t^k Q(t)] = e^{\mu t} \tilde{P}(\partial + \mu) \partial^k [t^k Q(t)].$$

Zunächst senkt  $\partial^k$  den Grad um  $k$ , sodann erhält  $\tilde{p}(\partial + \mu)$  den Grad.

# Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten

Zusammenfassend erhalten wir also Vektorraumisomorphismen

$$\begin{aligned} \partial^k &: t^k \mathbb{K}[t]_{<n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}[t]_{<n}, \\ P(\partial) &: e^{\mu t} t^k \mathbb{K}[t]_{<n} \xrightarrow{\sim} e^{\mu t} \mathbb{K}[t]_{<n}. \end{aligned}$$

Für unsere Differentialgleichung bedeutet das ausführlich folgendes:

Zu jedem Polynom  $R(x) = r_0 + r_1 x + \dots + r_{n-1} x^{n-1} \in \mathbb{K}[x]_{<n}$  existiert genau ein Polynom  $Q(x) = q_0 + q_1 x + \dots + q_{n-1} x^{n-1} \in \mathbb{K}[x]_{<n}$ , das unsere Differentialgleichung  $P(\partial) [e^{\mu x} x^k Q(x)] = e^{\mu x} R(x)$  löst.

😊 Die praktische Berechnung gelingt durch Koeffizientenvergleich: Die lineare Abbildung  $Q \mapsto R$  können wir leicht ausrechnen, für ihre Umkehrung  $R \mapsto Q$  nutzen wir die Methoden der Linearen Algebra.

Dies gelingt besonders leicht im wichtigen Spezialfall  $P(\partial) u(t) = e^{\mu t}$ :

$$\begin{aligned} P(\partial) [e^{\mu t} t^k] &= \tilde{P}(\partial)(\partial - \mu)^k [e^{\mu t} t^k] = \tilde{P}(\partial) e^{\mu t} k! = \tilde{P}(\mu) e^{\mu t} k! \\ P^{(k)}(t) &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \partial^j \tilde{P}(t) \cdot \partial^{k-j} (t - \mu)^k \implies P^{(k)}(\mu) = \tilde{P}(\mu) k! \end{aligned}$$

😊 Somit wird  $P(\partial) u(t) = e^{\mu t}$  gelöst durch  $u_0(t) = e^{\mu t} t^k / P^{(k)}(\mu)$ . QED

## Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten

## Satz N2G: Greensche Fundamentallösung und Lösungsformel

Sei  $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$  ein Polynom und  $b: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{K}$  stetig. Zu lösen ist die Differentialgleichung

$$P(\partial) x(t) = b(t).$$

Die homogene Gleichung  $P(\partial) u = 0$  hat genau eine Lösung  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  mit den Anfangswerten  $u(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0$  und  $u^{(n-1)}(0) = 1$ .

Wir nennen  $u$  die **Greensche Fundamentallösung**. Hieraus erhalten wir eine Lösung der inhomogenen Gleichung  $P(\partial) x = b$  durch **Faltung**:

$$x(t) = \int_{\tau=t_0}^t u(t-\tau) b(\tau) d\tau.$$

Genauer ist  $x: I \rightarrow \mathbb{K}$  die eindeutige Lösung der Gleichung  $P(\partial) x = b$  mit verschwindenden Anfangswerten  $x(t_0) = \dots = x^{(n-1)}(t_0) = 0$ .

😊 Weitere erhalten wir durch Addition homogener Lösungen (N2H).

## Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten

**Aufgabe:** Zu lösen sei, für  $-\pi/2 < t < \pi/2$ , die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + x(t) = \frac{1}{\cos t} \quad \text{mit} \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

**Lösung:** Die allgemeine homogene Lösung ist  $u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ , Fundamentallösung mit  $u(0) = 0$  und  $\dot{u}(0) = 1$  ist  $u(t) = \sin t$ . Wir falten:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{\tau=0}^t \sin(t-\tau) \frac{1}{\cos \tau} d\tau = \int_{\tau=0}^t (\sin t \cos \tau - \cos t \sin \tau) \frac{1}{\cos \tau} d\tau \\ &= \int_{\tau=0}^t \sin t - \cos t \cdot \frac{\sin \tau}{\cos \tau} d\tau = \left[ \tau \sin t + \cos t \cdot \ln \cos \tau \right]_{\tau=0}^t \\ &= t \sin t + \cos t \cdot \ln \cos t \end{aligned}$$

😊 Die Probe ist wie immer leicht und lohnend! Geduldig ausrechnen:

$$\dot{x}(t) = \sin t + t \cos t - \sin t \cdot \ln \cos t - \sin t$$

$$\ddot{x}(t) = \cos t - t \sin t - \cos t \cdot \ln \cos t + \sin(t)^2 / \cos t$$

Einsetzen:  $\ddot{x}(t) + x(t) = \cos t + \sin(t)^2 / \cos t = 1 / \cos t$ . Alles passt!

## Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten

**Aufgabe:** Beweisen Sie Greens Lösungsformel durch Nachrechnen.

**Lösung:** (a) Für die Ableitung nutzen wir die Leibniz–Regel:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau=t_0}^{h(t)} f(t, \tau) d\tau = h'(t) f(t, h(t)) + \int_{\tau=t_0}^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, \tau) d\tau$$

Angewendet auf  $h(t) = t$  und  $f(t, \tau) = u(t - \tau) b(\tau)$  erhalten wir

$$x'(t) = \underbrace{u(0)}_{=0} b(t) + \int_{\tau=t_0}^t u'(t - \tau) b(\tau) d\tau,$$

$$x''(t) = \underbrace{u'(0)}_{=0} b(t) + \int_{\tau=t_0}^t u''(t - \tau) b(\tau) d\tau,$$

$$\vdots$$

$$x^{(n-1)}(t) = \underbrace{u^{(n-2)}(0)}_{=0} b(t) + \int_{\tau=t_0}^t u^{(n-1)}(t - \tau) b(\tau) d\tau,$$

$$x^{(n)}(t) = \underbrace{u^{(n-1)}(0)}_{=1} b(t) + \int_{\tau=t_0}^t u^{(n)}(t - \tau) b(\tau) d\tau.$$

## Greensche Lösungsformel für beliebige rechte Seiten

Einsetzen dieser Ableitungen in unsere Differentialgleichung ergibt:

$$\begin{aligned}
 x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) \\
 = b(t) + \int_{\tau=t_0}^t \underbrace{\left[ u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u \right]}_{= 0, \text{ da } u \text{ eine Lösung der homogenen DG ist}}(t - \tau) b(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

Somit ist  $x$  eine Lösung der inhomogenen Gleichung  $P(\partial) x = b$ .

(b) Die Anfangswerte  $x(t_0) = x'(t_0) = \dots = x^{(n-2)}(t_0) = x^{(n-1)}(t_0) = 0$  folgen sofort aus der Berechnung der Ableitungen (a) im Punkt  $t = t_0$ .

**Anschauliche Erklärung** wie sie in der Physik beliebt ist: Für alle  $t < 0$  sei das System in Ruhelage  $u(t) = 0$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  gilt  $u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0$ , und es wird abrupt beschleunigt durch  $u^{(n-1)}(0) = 1$ . Man stellt sich dies als „Hammerschlag“ vor. Das System vollführt als sogenannte **Impulsantwort** die Bewegung  $u(t)$  für alle Zeit  $t \geq 0$ .

Entsprechend verschoben ist  $u(t - \tau) b(\tau)$  ein Hammerschlag zum Zeitpunkt  $\tau$  mit Stärke  $b(\tau)$ . Das Integral über  $\tau$  ist die Summe dieser Beiträge: Wir nutzen **Superposition** dank Linearität und erhalten so  $x(t) = \int_{\tau=t_0}^t u(t - \tau) b(\tau) d\tau$  als Summe kleiner Hammerschläge  $b(\tau) d\tau$ . Diese Intuition liefert tatsächlich eine korrekte Lösung: Wir haben es nachgerechnet!

## Satz N2H: Struktursatz für lineare Differentialgleichungen

Gegeben seien  $P \in \mathbb{K}[X]_n^1$  und  $b: I \rightarrow \mathbb{K}$  stetig auf dem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Wir untersuchen die Lösungsmenge  $L = \{ u \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}) \mid P(\partial) u = b \}$ .

(0) **Globale Existenz und Eindeutigkeit:** Zu jedem Anfangsdatum  $(t_0, v_0, \dots, v_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$  existiert genau eine Lösung  $u \in L$  mit  $u(t_0) = v_0, \dots, u^{(n-1)}(t_0) = v_{n-1}$ . Wir haben also eine Bijektion:

$$\Psi_{t_0} : L \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n : u \mapsto (u(t_0), u'(t_0), \dots, u^{(n-1)}(t_0))$$

(1)  $L_0 = \{ u \mid P(\partial) u = 0 \}$  ist ein **Vektorraum** der Dimension  $n$  über  $\mathbb{K}$ . Wir finden ein **Fundamentalsystem**  $u_1, \dots, u_n \in L_0$ , also eine Basis:

$$L_0 = \{ c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \} \cong \mathbb{K}^n$$

(2)  $L = \{ u \mid P(\partial) u = b \}$  ist ein **affiner Raum** der Dimension  $n$  über  $\mathbb{K}$ . Für jede **Partikulärlösung**  $u_0 \in L$  gilt  $L = u_0 + L_0$ , ausgeschrieben:

$$L = u_0 + L_0 = \{ u_0 + c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \}$$

# Affin-lineare Struktur des Lösungsraumes

😊 „Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“  
Sie kennen diese Strukturaussagen von linearen Gleichungssystemen!  
Diese gilt allgemein für lineare Abbildungen, also auch  $P(\partial) : \mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{C}^0$ .

⚠ Die Menge  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$  aller  $n$ -mal stetig diff'baren Funktionen ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Allerdings ist er unendlich-dimensional; daher greifen die so erfolgreichen Methoden der Matrizenrechnung wie etwa der Gauß-Algorithmus hier nicht. Wir müssen genauer hinsehen!

😊 Glücklicherweise ist unser Lösungsraum  $L$  endlich-dimensional, und wir können allgemein die Dimension  $\dim_{\mathbb{K}}(L_0) = n$  bestimmen. Bei jeder konkreten Berechnung wissen wir daher genau, wie viele Lösungen wir suchen müssen und wann wir alle gefunden haben!

⚠ Die Dimension  $\dim_{\mathbb{K}}(L_0) = n$  besagt  $L_0 \cong \mathbb{K}^n$ . Darüber hinaus sind die konkreten Isomorphismen interessant, insbesondere  $\Psi_{t_0} : L_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n$ .

😊 Zu Verständnis und Lösung von Differentialgleichungen arbeiten Analysis und Lineare Algebra wunderbar zusammen. Hier wie überall lohnt sich Ihre Investition in solide mathematische Grundlagen.

# Affin-lineare Struktur des Lösungsraums

😊 In der Analysis lernen Sie diesen Satz von anderer Seite kennen, meist über den Existenz- und Eindeigkeitssatz von Picard–Lindelöf.

😊 Wir kommen hier (beinahe) ausschließlich mit Linearer Algebra aus, benötigen lediglich die Exponentialfunktion (N2D) und die Greensche Lösungsformel (N2G). Auch das ist raffiniert, prüfen Sie die Argumente!

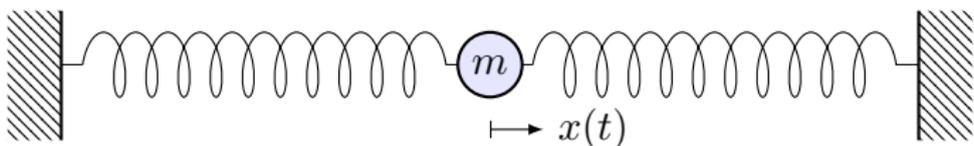
**Aufgabe:** Wiederholen Sie gewissenhaft die bisher bewiesenen Sätze zu Differentialgleichungen und zeigen Sie damit den Struktursatz N2H.

# Affin-lineare Struktur des Lösungsraums

---

# Beispiel: mechanische Schwingung

Schwingung einer Masse an einer Feder:



Zeit  $t \in \mathbb{R}$ , Auslenkung  $x(t)$  aus Ruhelage, Rückstellkraft  $F_1 = -kx$ , zusätzlich noch Reibung / viskoser Strömungswiderstand  $F_2 = -c\dot{x}$ .

Newtons Bewegungsgesetz  $m\ddot{x} = F_1 + F_2$ , also  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ .

Dies führt zu einer **linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung**

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

mit konstanten Koeffizienten  $\delta = c/2m \geq 0$  und  $\omega_0^2 = k/m$ ,  $\omega_0 \geq 0$ .

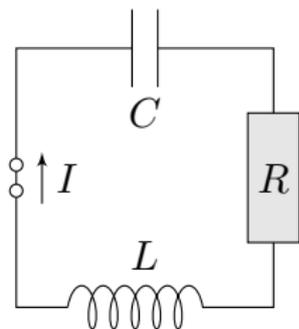
Bei äußerer Anregung durch eine Kraft  $F(t) = m f(t)$  gilt:

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

Allgemein suchen wir alle möglichen Lösungen  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto x(t)$ , speziell die Lösung  $x$  zu vorgegebenen Anfangswerten  $x(t_0)$  und  $\dot{x}(t_0)$ .

## Beispiel: elektrischer Schwingkreis

Diese Differentialgleichung begegnet uns in sehr vielen Situationen. Sie ist daher grundlegend wichtig in Naturwissenschaft und Technik.



Elektrischer Schwingkreis (RLC), Radioempfänger:  
Beziehungen zwischen Strom  $I$  und Spannung  $U$ :

- Ohmscher Widerstand:  $U_R = RI$ ,
- Selbstinduktivität der Spule:  $U_L = L\dot{I}$ ,
- Kapazität des Kondensators:  $I = C\dot{U}_C$ .

In der Reihenschaltung summieren sich diese Spannungen zu Null:  
 $U_L + U_R + U_C = 0$ . Wir erhalten  $L\ddot{I}(t) + R\dot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = 0$ , also

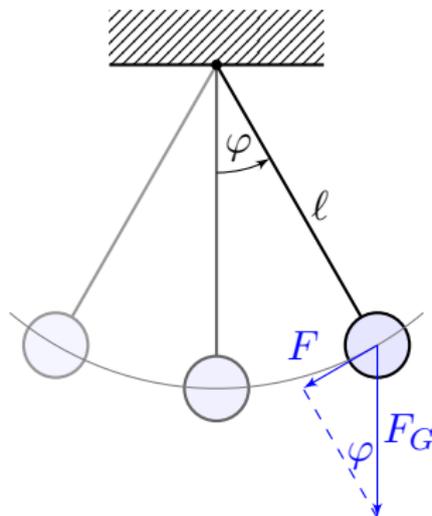
$$\ddot{x}(t) + 2\delta \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

mit  $x(t) = I(t)$  sowie  $\delta = \frac{R}{2L}$  und  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ . Bei äußerer Anregung gilt:

$$\ddot{x}(t) + 2\delta \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

Wir suchen Lösungen  $x(t)$ , speziell zu Anfangswerten  $x(0)$  und  $\dot{x}(0)$ .

## Beispiel: das mathematische Pendel



Die Rückstellkraft ist hier nicht-linear:

$$F(t) = -m \cdot g \cdot \sin \varphi(t)$$

$m$  = Masse des Pendelkörpers

$g = 9.81 \text{ m/s}^2$  Erdbeschleunigung

$F_G = mg$  Gravitationskraft zur Masse  $m$

$l$  = Länge des Pendelstabes

$\varphi(t)$  = Winkelauslenkung

$l \varphi(t)$  = Auslenkung

Newtons Bewegungsgesetz  $F(t) = m l \ddot{\varphi}(t)$  führt zu

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \sin \varphi(t).$$

Anders als vorige ist dies eine **nicht-lineare Differentialgleichung**. Gegeben sind die anfängliche Position  $\varphi(0)$  und Geschwindigkeit  $\dot{\varphi}(0)$ . Fragen: Wie sieht die Trajektorie aus? Wie lang dauert eine Periode?

## Beispiel: Pendel bei kleinen Amplituden

⚠ Wir vereinfachen etwas: punktförmige Masse des Pendelkörpers, vernachlässigbare Masse des Stabes, reibungsfreie Aufhängung, etc. Für kleine Auslenkungen gilt  $\sin(\varphi) \approx \varphi$ . (Faustregel für  $|\varphi| < 5^\circ$ ) Dies führt uns zur **linearisierten Differentialgleichung**:

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell} \varphi(t)$$

Diese Differentialgleichung ist viel einfacher, denn sie ist linear in  $\varphi$ :

$$\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2 \varphi(t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Dies ist die Bewegungsgleichung eines **harmonischen Oszillators**:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad \ddot{\varphi}(t) = -\varphi_0 \omega^2 \cos(\omega t + \alpha).$$

Für kleine Auslenkungen ist demnach die Periodendauer  $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ . Die Anfangsdaten bestimmen die Auslenkung  $\varphi_0$  und die Phase  $\alpha$ .

⚠ Für große Auslenkungen brauchen wir eine genauere Rechnung! Die Lösung ist schwieriger und wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

# Freie harmonische Schwingung

**Aufgabe:** Finden Sie alle Lösungen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0.$$

Wir nennen dies die Gleichung des **harmonischen Oszillators** mit **Dämpfung**  $\delta \geq 0$  und **ungedämpfter Eigenfrequenz**  $\omega_0 > 0$ .

Dies ist eine lineare DG zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. In diesem einfachen aber sehr wichtigen Spezialfall zeigen sich bereits alle Techniken dieses Kapitels, wenn auch erst in embryonaler Form.

**Lösung:** Der Exponentialansatz  $u(t) = e^{\lambda t}$  führt zur char. Gleichung

$$\underbrace{(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2)}_{\text{charakteristisches Polynom}} e^{\lambda t} = 0 \quad \iff \quad \lambda = \underbrace{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}_{\text{Eigenwerte des Systems}} \in \mathbb{C}.$$

Je nach Diskriminante beobachten wir verschiedene Reaktionen:

$\delta < \omega_0$ : **schwache Dämpfung**, zwei komplex-konjugierte Nullstellen

$\delta > \omega_0$ : **starke Dämpfung**, zwei reelle Nullstellen  $\lambda_1 < -\delta < \lambda_2 < 0$

$\delta = \omega_0$ : **kritische Dämpfung**, doppelte reelle Nullstelle  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$

# Freie harmonische Schwingung

Physikalische Anwendungen fordern meist **reelle Lösungen**  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Oft vereinfachen sich Rechnungen und Formulierungen von Sätzen, wenn wir allgemeiner auch **komplexe Lösungen**  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  zulassen und anschließend in reelle Lösungen umrechnen.

Die Bewegung  $u(t)$  wird durch die Startwerte  $u(0)$  und  $\dot{u}(0)$  festgelegt. Die Anfangswerte sind beliebig, wir haben daher **zwei Freiheitsgrade**.

Als Lösungsraum erwarten wir einen **Vektorraum der Dimension 2**: Diese mathematische Aussage haben wir oben im Struktursatz N2H zusammengefasst und zuvor explizit und konstruktiv hergeleitet.

Das **charakteristische Polynom** der DG ist  $P(X) = X^2 + 2\delta X + \omega_0^2$ . Die Lösungsformel beschert uns die **Eigenwerte**  $\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$  und so **linear unabhängige Lösungen**  $u_1(t) = e^{\lambda_1 t}$  und  $u_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ . Hierbei unterscheiden wir den komplexen Fall  $\delta < \omega_0$  und den reellen Fall  $\delta > \omega_0$ ; anschließend lösen wir auch den kritischen Fall  $\delta = \omega_0$ .

Wir diskutieren zunächst die homogenen Gleichung: rechte Seite  $f = 0$ , anschließend eine harmonische Anregung der Form  $f(t) = \cos(\omega t)$ .

## Schwache Dämpfung: $\delta < \omega_0$

Im Fall  $0 \leq \delta < \omega_0$  gibt es **zwei komplex-konjugierte Nullstellen**

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm i\omega \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad 0 < \omega \leq \omega_0.$$

Die komplexen Lösungen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  der Differentialgleichung sind

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

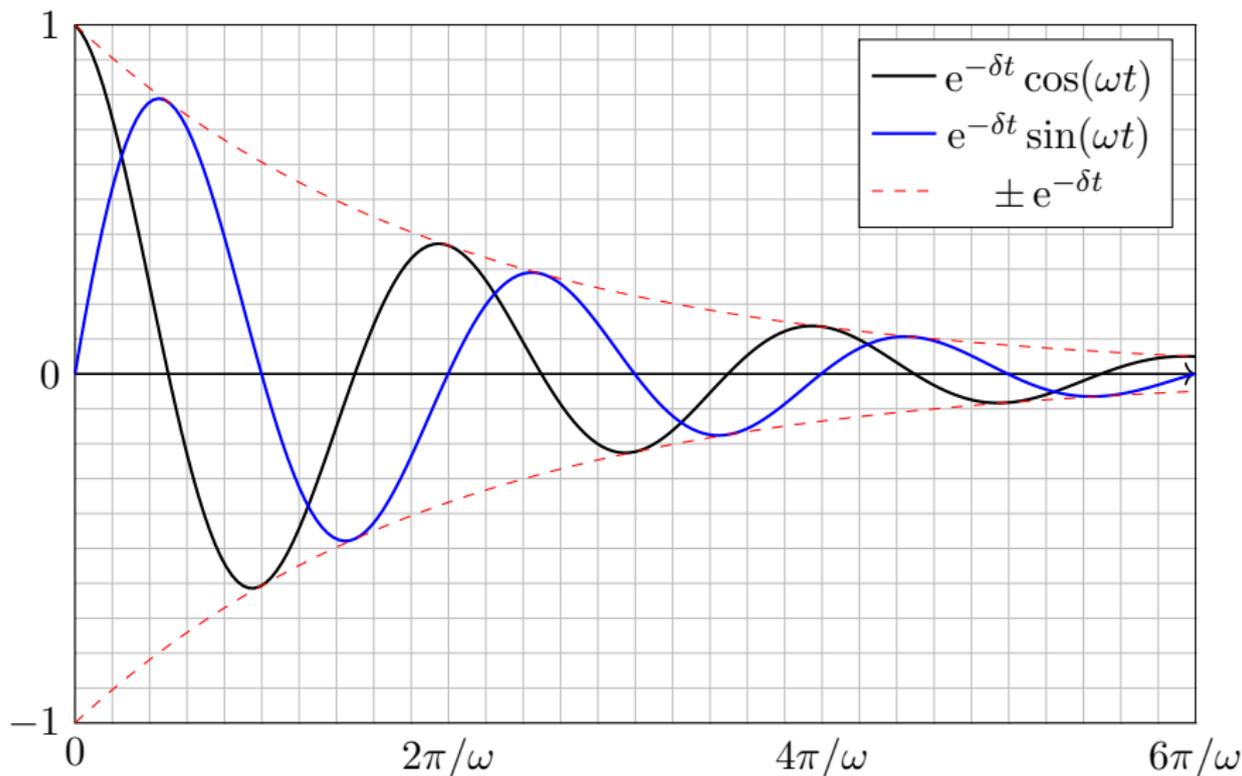
- 😊 Diese Lösungen bilden einen zweidimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.
- 😊 Über den komplexen Zahlen ist die Rechnung leicht. Physikalische Anwendungen fordern meist die Umrechnung in reelle Lösungen: Die reellen Lösungen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung sind

$$u(t) = e^{-\delta t} [\alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \sin(\omega t)] \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

- 😊 Diese Lösungen bilden einen zweidimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.
  - 😊 Sie entsprechen Real- und Imaginärteil der komplexen Lösungen.
- Für  $\delta = 0$  haben wir eine **ungedämpfte Schwingung** mit  $\omega = \omega_0$ .

## Schwache Dämpfung: $\delta < \omega_0$

Die Masse wird durch die Federkraft zur Ruhelage zurückgezogen, aufgrund ihrer Trägheit schwingt die Masse jedoch darüber hinaus.



## Starke Dämpfung: $\delta > \omega_0$

Im Fall  $\delta > \omega_0$  gibt es **zwei reelle Nullstellen**  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , nämlich

$$\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < -\delta < \lambda_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0.$$

Hierzu gehören die Lösungen  $e^{\lambda_1 t}$  und  $e^{\lambda_2 t}$  als Eigenfunktionen.

Die allgemeine Lösung erhalten wir durch Linearkombination:

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

😊 Diese Lösungen bilden einen zweidimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum: Für reelle Lösungen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dürfen wir die Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  frei wählen, für komplexe Lösungen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  entsprechend  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ .

**Zahlenbeispiel:** Die Differentialgleichung  $\ddot{u}(t) + 4\dot{u}(t) + 3u(t) = 0$  führt zur Gleichung  $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ , also  $\lambda_1 = -3$  und  $\lambda_2 = -1$ .

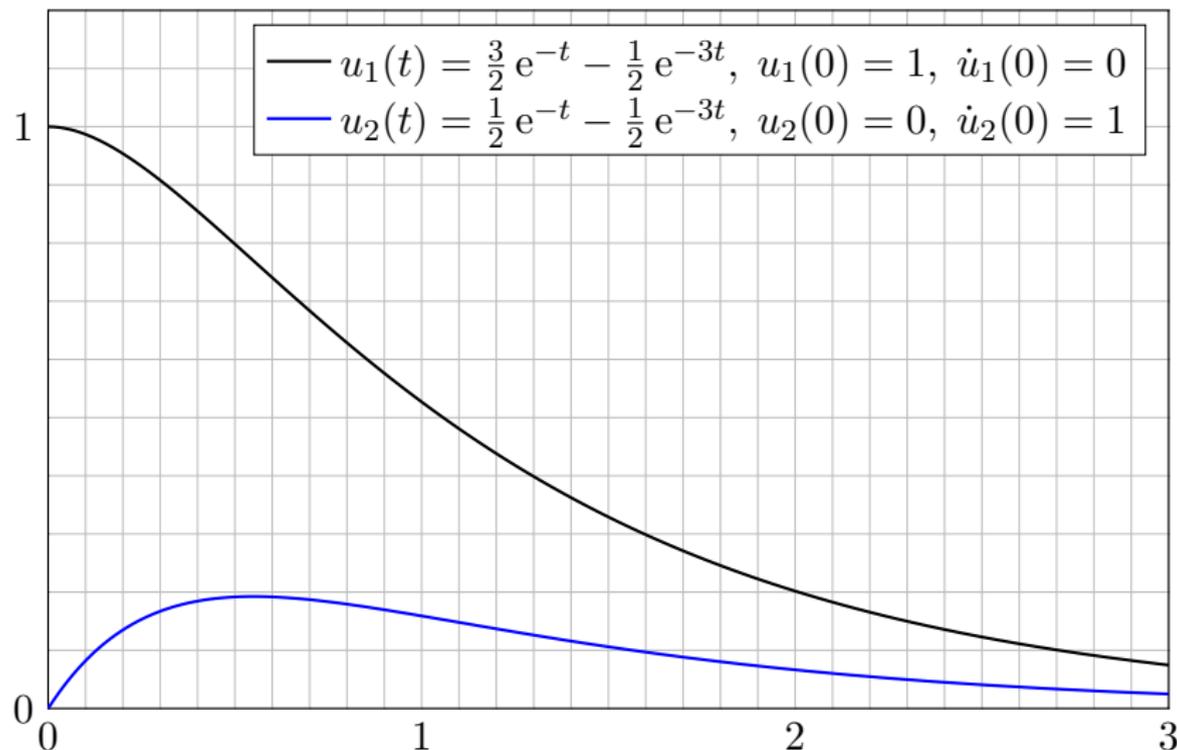
Linearfaktorzerlegung  $(\partial_t + 3)(\partial_t + 1)u(t) = 0$ , Lösungen  $e^{-3t}, e^{-t}$ . Die DG hat als reelle Lösungen  $u(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t}$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Anfangswerte  $u(0) = 1$  und  $\dot{u}(0) = 0$  führen zu  $u(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$ .

Anfangswerte  $u(0) = 0$  und  $\dot{u}(0) = 1$  führen zu  $u(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$ .

## Starke Dämpfung: $\delta > \omega_0$

Dies nennt man auch den **Kriechfall**: Es gibt keine Schwingung, das System kriecht nach einer Auslenkung zur Ruhelage zurück.



## Kritische Dämpfung: $\delta = \omega_0$

Im Fall  $\delta = \omega_0$  gibt es eine **doppelte reelle Nullstelle**  $\lambda = -\delta$ .

Wir finden die Lösung  $e^{\lambda t}$  und zusätzlich  $t e^{\lambda t}$  als Hauptfunktionen.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist in diesem Fall:

$$u(t) = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t)$$

😊 Diese Lösungen bilden einen zweidimensionalen Vektorraum:  
Für reelle Lösungen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dürfen wir die Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  frei wählen, für komplexe Lösungen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  entsprechend  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ .

**Nachrechnen:** Zu lösen ist hier  $\ddot{u}(t) - 2\lambda \dot{u}(t) + \lambda^2 u(t) = 0$ .

Linearfaktorzerlegung  $(\partial_t - \lambda)(\partial_t - \lambda) u(t) = 0$ . Einsetzen:

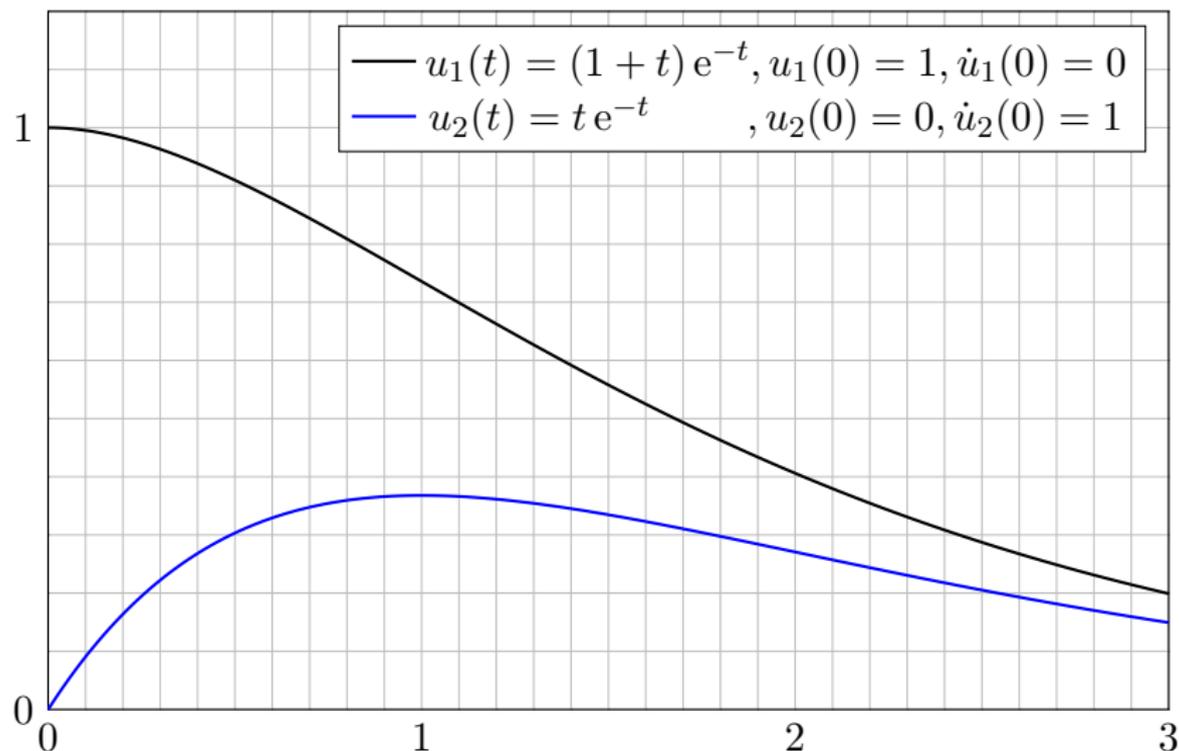
$$\begin{aligned} (\partial_t - \lambda)(\partial_t - \lambda) [e^{\lambda t}] &= (\partial_t - \lambda)[\lambda e^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t}] \\ &= (\partial_t - \lambda)[0] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\partial_t - \lambda)(\partial_t - \lambda) [t e^{\lambda t}] &= (\partial_t - \lambda)[e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t} - \lambda t e^{\lambda t}] \\ &= (\partial_t - \lambda)[e^{\lambda t}] &= 0 \end{aligned}$$

😊 Damit sind zwei linear unabhängige Lösungen gefunden.

## Kritische Dämpfung: $\delta = \omega_0$

Dies nennt man den **aperiodischen Grenzfall**: Er liegt genau auf der Grenze zwischen gedämpfter Schwingung und Kriechfall.



# Erzwungene harmonische Schwingung

**Aufgabe:** Bei Anregung durch  $f(t) = a \cos(\omega_1 t)$  ist als DG zu lösen

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = a \cos(\omega_1 t).$$

Gesucht ist eine reelle Lösung der Form  $u(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$ , zu bestimmen sind hierbei die Amplitude  $A$  und die Phase  $\varphi$ .

**Lösung:** Dies ist der Realteil der komplexen Differentialgleichung

$$\ddot{z}(t) + 2\delta \dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = a e^{i\omega_1 t}.$$

Der Exponentialansatz  $z(t) = c e^{i\omega t}$  führt uns zur Gleichung

$$[-\omega^2 + 2\delta i\omega + \omega_0^2] c e^{i\omega t} \stackrel{!}{=} a e^{i\omega_1 t}.$$

Damit finden wir  $\omega = \omega_1$  und  $c = a / (\omega_0^2 - \omega^2 + 2\delta i\omega) = A e^{-i\varphi}$ .

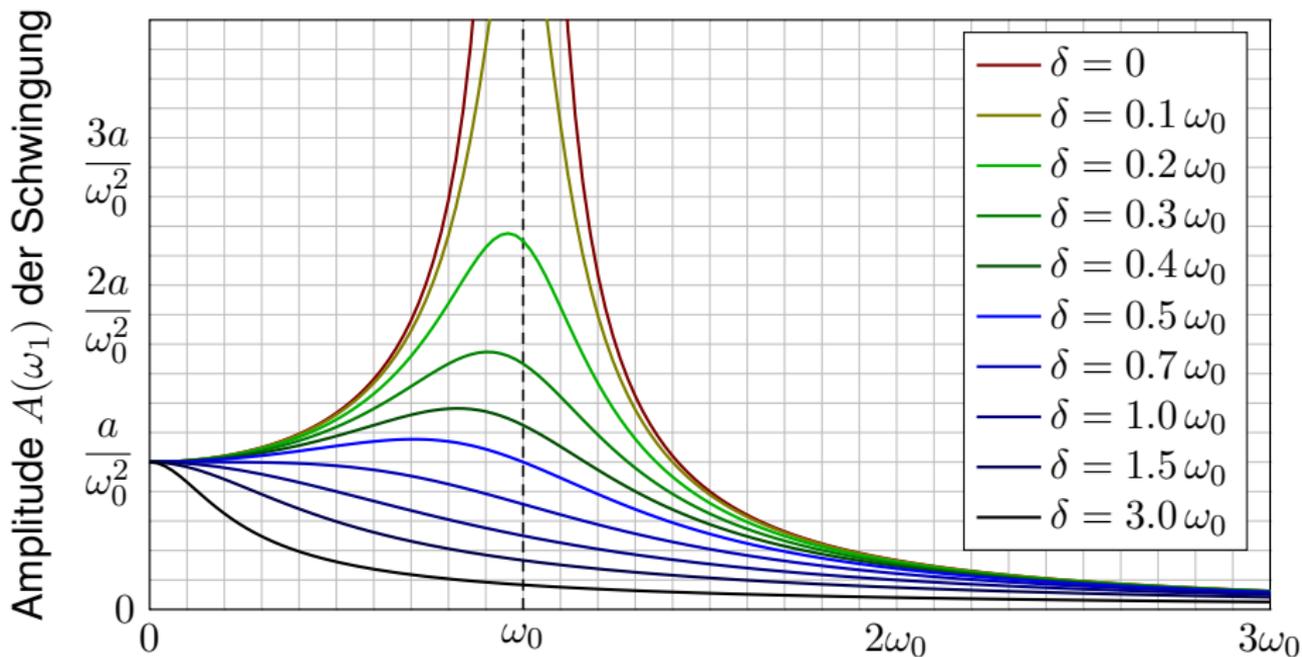
Das System reagiert mit derselben Frequenz wie die Anregung!

In Polardarstellung  $c = A e^{-i\varphi}$  erhalten wir  $z(t) = A e^{i(\omega_1 t - \varphi)}$  mit

$$A = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2 \omega_1^2}}, \quad \varphi = \arctan \frac{2\delta \omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2} + \begin{cases} 0 & \text{für } \omega_1 < \omega_0, \\ \pi & \text{für } \omega_1 > \omega_0. \end{cases}$$

😊 Damit haben wir die reelle Lösung  $u(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$  gefunden.

## Erzwungene harmonische Schwingung



Frequenz  $\omega_1$  der äußeren Anregung  $f(t) = a \cos(\omega_1 t)$

Die Amplitude ist maximal für  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$  bzw.  $\omega_1 = 0$  falls  $2\delta^2 > \omega_0^2$ .  
 Die **Resonanz** ist dabei umso stärker, je kleiner die Dämpfung  $\delta$  ist.  
 Für  $\delta \approx 0$  und  $\omega_1 \approx \omega_0$  kommt es zur **Resonanzkatastrophe**.

# Erzwungene harmonische Schwingung

⚠ Im Sonderfall  $\delta = 0$  und  $\omega_1 = \omega_0$  schlägt unser Ansatz  $c e^{i\omega t}$  fehl!

$$\ddot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = [\omega_0^2 - \omega^2] c e^{i\omega t} \neq a e^{i\omega_0 t}$$

Zur Gleichheit muss  $\omega = \omega_0$  gelten, aber dann verschwindet  $[\omega_0^2 - \omega^2]$ . In obiger Formel für  $c$  ist das genau die Polstelle! Modifizierter Ansatz:

$$z(t) = ct e^{i\omega t}, \quad \dot{z}(t) = c e^{i\omega t} + ct i\omega e^{i\omega t}, \quad \ddot{z}(t) = 2ci\omega e^{i\omega t} - ct\omega^2 e^{i\omega t}$$

$$\implies \ddot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = [2i\omega + t(\omega_0^2 - \omega^2)] c e^{i\omega t} \stackrel{!}{=} a e^{i\omega_0 t}$$

Durch Vergleich finden wir die Werte  $\omega = \omega_0$  und  $c = a/(2i\omega_0)$ . Also:

$$z(t) = \frac{at e^{i\omega_0 t}}{2i\omega_0} = \frac{at \cos(\omega_0 t) + iat \sin(\omega_0 t)}{2i\omega_0} = \frac{at}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t) - i \frac{at}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t)$$

Der Realteil  $u(t) = (a/2\omega_0) t \sin(\omega_0 t)$  löst  $\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = a \cos(\omega_0 t)$ .

⚠ Das System reagiert mit derselben Frequenz  $\omega$  wie die Anregung, aber die Amplitude wächst unbeschränkt: Man nennt dies **Resonanz**.

😊 Anschaulich: Jedes Kind lernt dieses Phänomen beim Schaukeln. Die Anregungsfrequenz trifft genau eine Eigenfrequenz des Systems!

# Amplitude und Resonanz

Erzwungene Schwingungen sind ein weit verbreitetes Phänomen:

- Mechanik: Schaukel, Brücke bei gleichmäßigen Schritten / Wind, Vibrationen von Fahrzeugteilen bei bestimmten Drehzahlen,
- Akustik: Tonerzeugung in Musikinstrumenten, Resonanzkörper, Mitschwingen einer nicht gespielten Saite oder einer Stimmgabel,
- Elektrotechnik: elektrischer Schwingkreis, Radioempfang, WLAN,
- Hydromechanik: Tideresonanz der Ozeane und großen Meere.

Auch die (Hochschul-)Didaktik zeigt Resonanzphänomene: Jede Lernende folgt ihrem eigenen kognitiven Bewegungsgesetz (Rückstellkraft, Trägheit, Vergessen), wird von außen durch die Lehrende angeregt auf einer vorgegebenen Frequenz (als erzwungene Bewegung, extrinsisch). Trifft die anregende Frequenz in etwa eine Eigenfrequenz (intrinsisches Interesse), so kommt es zur Resonanz: Das ist die ideale Lern- und Lehrsituation! Anregung mit zu niedriger oder zu hoher Frequenz hingegen zeigt kaum Wirkung. Auch das kennen Sie aus eigener Erfahrung.

Bei hunderten Teilnehmern sind die individuellen Eigenfrequenzen meist sehr breit gestreut. Egal auf welcher Frequenz ich sende, nur bei einem kleinen Teil bringt es eine Saite zum Klingen. Dieses Phänomen ist mir schmerzhaft bewusst, aber unter den gegebenen Bedingungen wohl unvermeidlich. Das erklärt auch die Bedeutung, sich aufeinander einzustellen. Ich versuche, auf verschiedenen Frequenzen zu senden, und lausche den Reaktionen. Das eigentlich Erstaunliche ist nicht, wie oft die Übertragung misslingt, sondern dass sie manchmal tatsächlich funktioniert.

# Zusammenfassung: freie harmonische Schwingung

Gegeben seien reelle Konstanten  $\delta, \omega_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  sowie  $\omega_1, a \in \mathbb{R}_{>0}$ .

## Satz N2I: freie harmonische Schwingung

### (1) Die **homogene lineare Differentialgleichung**

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0$$

hat einen zweidimensionalen Lösungsraum; die allgemeine Lösung ist

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \quad \text{mit freien Konstanten } c_1, c_2 \in \mathbb{K}$$

$$= \begin{cases} e^{-\delta t} [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)] & \text{für } \delta < \omega_0 \text{ und } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \\ e^{-\delta t} [c_1 e^{-\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}] & \text{für } \delta > \omega_0 \text{ und } \lambda = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \\ e^{-\delta t} [c_1 + c_2 t] & \text{für } \delta = \omega_0 \text{ (kritische Dämpfung)}. \end{cases}$$

Diese Lösungen sind reell, also eine Basis über  $\mathbb{R}$ , ebenso über  $\mathbb{C}$ .

**Anfangswerte**  $u(t_0)$  und  $\dot{u}(t_0)$  können beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten  $c_1, c_2$  eindeutig fest (und umgekehrt).

# Zusammenfassung: erzwungene harmonische Schwingung

## Satz N21: erzwungene harmonische Schwingung

### (2) Die **inhomogene lineare Differentialgleichung**

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = a \cos(\omega_1 t)$$

hat einen zweidim. affinen Lösungsraum; die allgemeine Lösung ist

$$u(t) = u_0(t) + c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \quad \text{mit freien Konstanten } c_1, c_2 \text{ und}$$

$$u_0(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_1 t - \varphi) & \text{für } \delta > 0 \text{ oder } \omega_1 \neq \omega_0 \text{ (generisch N261),} \\ & \text{Amplitude } A = a / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2 \omega_1^2}, \\ & \text{Phase } \varphi = \arctan[2\delta\omega_1 / (\omega_0^2 - \omega_1^2)] (+\pi), \\ \frac{at}{2\omega_1} \sin(\omega_1 t) & \text{für } \delta = 0 \text{ und } \omega_1 = \omega_0 \text{ (Resonanz N263).} \end{cases}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

**Anfangswerte**  $u(t_0)$  und  $\dot{u}(t_0)$  können beliebig vorgegeben werden:  
Sie legen die freien Konstanten  $c_1, c_2$  eindeutig fest (und umgekehrt).

# Freie und erzwungene harmonische Schwingung

Typische Beispiele: Bei **schwacher Dämpfung**  $0 < \delta < \omega_0$  gilt

$$u(t) = \underbrace{A \cos(\omega_1 t - \varphi)}_{\text{periodische Lösung}} + \underbrace{e^{-\delta t} [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)]}_{\text{Einschwingvorgang} \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty}.$$

Nach Einschwingzeit sehen wir nur noch die periodische Lösung  $u_0$ : Das System reagiert mit derselben Frequenz  $\omega_1$  wie die Anregung, mit konstanter Amplitude  $A$  und Phasenverschiebung  $\varphi$  wie berechnet.

Für  $\omega_1 \rightarrow 0$  gilt  $A \rightarrow 1/\omega_0^2$ : Niedrige Frequenzen werden gedämpft.

Für  $\omega_1 \rightarrow \infty$  gilt  $A \rightarrow 0$ : Hohe Frequenzen werden verschluckt.

Der Sonderfall  $\delta = 0$  und  $\omega_1 = \omega_0$  führt zur **Resonanz(katastrophe)**:

$$u(t) = \underbrace{\frac{at}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t)}_{\text{Amplitude wächst unbeschränkt}} + \underbrace{c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)}_{\text{periodisch, insbesondere beschränkt}}$$

Manchmal ist genau dies erwünscht, etwa beim Radioempfang.

😊 Mit unseren Techniken lösen Sie alle Fälle vollständig und explizit.

# Freie und erzwungene harmonische Schwingung

Die allgemeine Lösung / Schwingung  $u: I \rightarrow \mathbb{R}$  ist die **Überlagerung** einer inhomogenen Lösung / **erzwungenen Schwingung**  $u_0$  und einer homogenen Lösung / **freien Schwingung**  $c_1 u_1 + c_2 u_2$ .

Die Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  ergeben sich aus Anfangsdaten  $u(t_0), \dot{u}(t_0)$ . Bei Dämpfung  $\delta > 0$  klingen  $u_1(t) \rightarrow 0$  und  $u_2(t) \rightarrow 0$  exponentiell ab. Der Einfluss der Startwerte ist nach gewisser **Einschwingzeit** kaum noch spürbar, es bleibt schließlich nur die **periodische Lösung**  $u_0$ .

Im dämpfungsfreien Fall  $\delta = 0$  klingen die freien Schwingungen  $u_1(t) = \cos(\omega_0 t)$  und  $u_2(t) = \sin(\omega_0 t)$  nicht ab. Zudem führt eine äußere Anregung mit Frequenz  $\omega_1 = \omega_0$  zur **Resonanzkatastrophe**: Die Amplitude der Schwingung wächst (theoretisch) unbegrenzt.

Für **praktische Zwecke** gilt dies bereits für  $\delta \approx 0$ : Die Schwingungen  $u_1, u_2$  klingen sehr langsam ab, bei realistischer Beobachtungsdauer sind Dämpfungsverluste kaum wahrnehmbar. Bei Anregung mit  $\omega_1 \approx \omega_0$  kommt es zu sehr starker Resonanz, die Amplitude der erzwungenen Schwingung wächst schließlich über die Belastbarkeit des Materials.

## Warum zelebriere ich dieses Beispiel so ausführlich?

Aus rein mathematischer Sicht ist die Gleichung des harmonischen Oszillators lediglich ein einfaches Beispiel unserer allgemeinen Theorie. Dennoch haben wir gute Gründe, dies hier gebührend zu feiern:

- 😊 Phänomene von Schwingungen und Resonanzen treten auch im Alltag sehr häufig auf: Achten Sie darauf und lernen Sie zu staunen!
- 😊 Die Frage und die Antwort sind anschaulich, motivierend und intuitiv: Anders als bei anderen Gleichungen können Sie die Lösungen spüren!
- 😊 In zahlreichen naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen ist der harmonische Oszillator zentrales Modell und leuchtendes Vorbild.
- 😊 In embryonaler Form enthält das Beispiel alle Schwierigkeiten und Schönheiten der allgemeinen Theorie linearer Differentialgleichungen.
- 😊 Insbesondere zeigt es die Eleganz und geradezu die Notwendigkeit der komplexen Zahlen: Erst über  $\mathbb{C}$  wird die Sachlage klar und einfach.
- 😊 Selbst einfache Beispiele entfalten eine beachtliche Komplexität. Erst mit der zugrundeliegenden Theorie verschaffen wir uns Überblick.

## Warum sind Existenz und Eindeutigkeit so wichtig?

In der Geschichte der Mathematik wurde das Problem der *Existenz und Eindeutigkeit* von Lösungen erst erstaunlich spät entdeckt. . . und gelöst.

Im 17. Jahrhundert entwickeln Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) und Isaac Newton (1642–1726) und andere die Infinitesimalrechnung. Aus physikalisch–geometrischen Anwendungen treten dabei unmittelbar Differentialgleichungen in den Fokus des mathematischen Interesses. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen standen dabei nie in Zweifel. Umso schockierender waren daher die ersten Gegenbeispiele von Gleichungen mit mehrdeutigen Lösungen oder ganz ohne Lösung.

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) und seine Nachfolger begründeten die bis heute übliche mathematische Strenge. Existiert eine Lösung? Erst dann lohnt sich überhaupt danach zu suchen. Ist sie eindeutig? Haben wir eine, so brauchen wir nicht nach weiteren zu fahnden.

 Erst nach Klärung dieser grundlegenden Fragen können wir uns weiteren Eigenschaften und numerischen Näherungen zuwenden.

## Abstrakt bedeutet. . . vielseitig anwendbar!

Das einleitende Beispiel einer mechanischen Schwingung ist besonders anschaulich und sinnlich direkt zugänglich. Wir alle haben dies schon als Kinder spielerisch gelernt: beim Schaukeln, Seilspringen, usw.

Der elektrische Schwingkreis ist weniger sinnlich-anschaulich, doch er führt zu genau derselben Differentialgleichung! Dieselben Gleichungen und Lösungsmethoden lassen sich auf zahlreiche Probleme anwenden, die zunächst sehr verschieden anmuten, aber doch einen gemeinsamen Kern haben. Das ist das Gütesiegel für Effizienz und Denkökonomie!

Wir bestaunen und bewundern hier ein Paradebeispiel für die viel zitierte Abstraktion in der Mathematik: Sie ist kein Schimpfwort für „fern jeder Anwendung“, sondern eine Auszeichnung für „vielseitig anwendbar“. Zumindest sollte dies meiner Ansicht nach so sein. Achten Sie darauf, wenn jemand über „abstrakten Quatsch“ schimpft, vielleicht Sie selbst: Meist ist dies weniger eine objektive Aussage über den Gegenstand, sondern vielmehr das offene Bekenntnis der eigenen Ignoranz.

## Grundlegende Theorie, große praktische Wirkung

So einfach der elektrische Schwingkreis auch erscheinen mag, er hat doch phantastische Anwendungen hervorgebracht wie den Funkverkehr, engl. *radio communication*, die unser heutiges Leben nachhaltig prägen.

Guglielmo Marconi (1874–1937) war ein italienischer Erfinder und Unternehmer. Als erstem gelangen ihm drahtlose Verbindungen über größere Entfernungen, 1903 die erste transatlantische Funkverbindung: Grußbotschaften zwischen König Edward VII. in England und Präsident Theodore Roosevelt in den USA. Marconi begründete unter anderem den Seefunkverkehr und bekam für seine Verdienste im April 1912 eine kostenlose Passage für die Jungfernfahrt der RMS Titanic angeboten; da er jedoch Schriftverkehr erledigen wollte, nahm er drei Tage früher die RMS Lusitania, da es an Bord dieses Schiffs eine Stenografin gab. Im Jahre 1930 gründete er gemeinsam mit Papst Pius XI. Radio Vatikan.

Für seine praktischen Arbeiten erhielt er 1909 den Nobelpreis für Physik, zusammen mit Ferdinand Braun, der die theoretischen Grundlagen dazu erarbeitete. ([de.wikipedia.org/wiki/Guglielmo\\_Marconi](https://de.wikipedia.org/wiki/Guglielmo_Marconi))

# Was sind Differentialgleichungssysteme?

Wir arbeiten über dem Körper  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  der reellen / komplexen Zahlen. In vielen Anwendungen geht es statt einer einzelnen Größe  $x(t) \in \mathbb{K}$  um mehrere Größen  $x_1(t), \dots, x_n(t) \in \mathbb{K}$ , deren zeitliche Entwicklung durch **gekoppelte Differentialgleichungen** beschrieben wird:

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \end{cases}$$

Mit  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  und  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  bündeln wir dies kurz und übersichtlich zu einer **vektorwertigen Differentialgleichung**:

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

Bei einer **autonomen Differentialgleichung** hängt  $f$  nicht von  $t$  ab:

$$x'(t) = f(x(t))$$

Wir können autonomisieren durch Einführung von  $x_0 = t$  und  $f_0 = 1$ .

# Was sind Differentialgleichungssysteme?

Gegeben ist als rechte Seite die stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supset G \rightarrow \mathbb{K}^n$  auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ , zumindest mit nicht-leerem Inneren.

Gesucht sind alle differenzierbaren Funktionen  $x: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  auf einem (maximalen) Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , die zunächst die Bedingung  $(t, x(t)) \in G$  und dort die ersehnte Gleichung  $x'(t) = f(t, x(t))$  für alle  $t \in I$  erfüllen.

Zeitinvarianz: Bei einer autonomen Differentialgleichung  $x' = f(x)$  ist mit jeder Lösung  $x: I \rightarrow \mathbb{K}^n$  auch die um  $\tau \in \mathbb{R}$  verschobene Funktion  $\tilde{x}: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{K}^n: \tilde{x}(t) = x(t - \tau)$  auf dem Intervall  $\tilde{I} = I + \tau$  eine Lösung.

Dies führt uns zu den Grundfragen der Differentialgleichungen:

- Gibt es immer eine Lösung? mehrere?
- Wie finden wir eine Lösung? gar alle?

Wir benötigen wie immer zwei sich ergänzende Lösungsmethoden:

- Leistungsstarke Lösungstheorie als Grundlage
- Erprobte Rezepte für spezielle Gleichungen

Für manche  $f$  können wir die DG exakt lösen, sonst nur numerisch.

# Was sind lineare Differentialgleichungssysteme?

Jedes **lineare Differentialgleichungssystem** ist von folgender Form:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

Gegeben sind die **Koeffizienten**  $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{K}$  und die **rechten Seiten**  $b_i : I \rightarrow \mathbb{K}$  als stetige Funktionen auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , gebündelt:

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

Gesucht sind als **Lösungen** alle Funktionen  $x : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  in  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ , die die Gleichung  $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$  in jedem Punkt  $t \in I$  erfüllen.

Die zugehörige **homogene Gleichung** erhalten wir für  $b = 0$ :

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

Beim **Anfangswertproblem** ist zudem  $x(t_0) = v \in \mathbb{K}^n$  vorgegeben.

# Was sind lineare Differentialgleichungssysteme?

Wir nennen  $A(t)$  die **Koeffizientenmatrix** oder die **Systemmatrix**. Die rechte Seite  $b(t)$  heißt auch **Inhomogenität** oder **Störterm**.

Unser Ziel ist die Berechnung einer **Basis des Lösungsraumes**. Dazu können wir explizite Lösungsformeln angeben und für wichtige Beispiele ausrechnen. Hierzu benötigen wir geeignete Techniken aus der Analysis, insbesondere die allgegenwärtige Integration.

Lineare Differentialgleichungssysteme mit **konstanten Koeffizienten** sind der allereinfachste Fall: Die Lösung der Gleichung  $x'(t) = Ax(t)$  gelingt uns vollständig bereits mit den Techniken der Linearen Algebra: Wir finden eine Basis des Lösungsraums mit Hilfe der Hauptvektoren einer Jordan-Basis; die Integration tritt dabei in den Hintergrund.

Wir mobilisieren nahezu alle bisherigen Begriffe und Techniken: Vektorraum, Basis, Dimension, lineare Abbildung, Kern und Bild, Darstellung durch Matrizen, Determinante, charakteristisches Polynom, Eigenvektoren und Diagonalform, Hauptvektoren und Jordan-Form.

# Reduktion eines DGSystems auf erste Ordnung

😊 Differentialgleichungen erster Ordnung sind universell: Wir können jede DG  $n$ ter Ordnung auf ein DGSystem erster Ordnung reduzieren!

**Reduktion:** Vorgelegt sei eine **Differentialgleichung  $n$ ter Ordnung:**

$$(1) \quad x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$$

Diese können wir umformulieren in ein **DGSystem erster Ordnung:**

$$(2) \quad \begin{cases} x'_0(t) & = & x_1(t) \\ x'_1(t) & = & x_2(t) \\ & \vdots & \\ x'_{n-2}(t) & = & x_{n-1}(t) \\ x'_{n-1}(t) & = & f(t, x_0(t), x_1(t), \dots, x_{n-1}(t)) \end{cases}$$

**Übung:** Rechnen Sie diesen genial-einfachen Trick sorgsam nach:  
Löst  $x : I \rightarrow \mathbb{K}$  die DG (1), so löst  $(x, x', \dots, x^{(n-1)})$  das DGSystem (2).  
Löst  $(x_0, \dots, x_{n-1}) : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  das DGSystem (2), so löst  $x_0$  die DG (1).

# Einfachste DGSysteme: entkoppelte Gleichungen

😊 Es genügt daher, **DGSysteme erster Ordnung** zu untersuchen!  
Diese Formulierung ist einfacher und erlaubt starke Werkzeuge:  
In jeder Dimension  $n$  gilt **Existenz & Eindeutigkeit & Stabilität** dank  
des Satzes von Picard–Lindelöf, den Sie in der Analysis kennenlernen.

😊 Der einfachste Fall sind **entkoppelte Gleichungen**:

$$x_1'(t) = f_1(t, x_1(t))$$

$$x_2'(t) = f_2(t, x_2(t))$$

$$\vdots$$

$$x_n'(t) = f_n(t, x_n(t))$$

Hierzu lösen wir  $n$  eindimensionale Differentialgleichungen.

⚠ Im Allgemeinen sind die gegebenen Gleichungen aber gekoppelt.  
Für dieses Problem benötigen wir daher passende Rechenmethoden.  
Hierzu nutzen wir die Werkzeuge der Analysis und der Linearen Algebra,  
insbesondere Eigen- und Hauptvektoren, wie wir gleich sehen werden.

# Reduktion eines linearen DGSystems auf erste Ordnung

Zu lösen sei eine lineare Differentialgleichung  $n$ ter Ordnung:

$$(1) \quad x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t) x'(t) + a_0(t) x(t) = b(t)$$

Diese ist äquivalent zu einem linearen DGSystem erster Ordnung:

$$(2) \quad \begin{cases} x_0' & = & & & x_1 \\ & \vdots & & & \\ x_{n-2}' & = & & & x_{n-1} \\ x_{n-1}' & = & -a_0 x_0 & -a_1 x_1 & \dots & -a_{n-1} x_{n-1} & +b \end{cases}$$

Das entspricht  $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)$  mit zugehöriger Systemmatrix

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

**Beispiel:** Wir nutzen dies für gekoppelte Oszillatoren, siehe N325.

# Lineare DGSyeme: entkoppelte Gleichungen

😊 Besonders wichtig und gut zu lösen sind lineare DGSyeme  $x'(t) = Ax(t) + b(t)$  mit konstanter Koeffizientenmatrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ .

😊 Der einfachste Fall sind auch hier **entkoppelte Gleichungen**:

$$x'_1(t) = a_1 x_1(t)$$

$$x'_2(t) = a_2 x_2(t)$$

$$\vdots$$

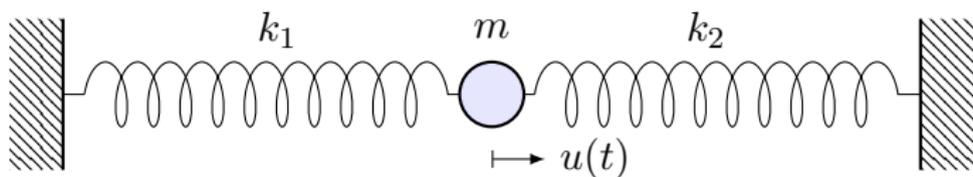
$$x'_n(t) = a_n x_n(t)$$

Die Lösungen  $x_k(t) = c_k e^{a_k t}$  können wir sofort ausschreiben!

😊 Oft lassen sich komplexe Lösungen  $e^{(\sigma \pm i\omega)t}$  leichter berechnen und dann in reelle Lösungen  $e^{\sigma t} \cos(\omega t)$  und  $e^{\sigma t} \sin(\omega t)$  umrechnen. Wir nutzen dies oben für den harmonischen Oszillator, siehe N253.

⚠ Im Allgemeinen sind die gegebenen Gleichungen aber gekoppelt. Für dieses Problem benötigen wir daher passende Rechenmethoden. Hierzu nutzen wir die Werkzeuge der Analysis und der linearen Algebra!

## Der harmonische Oszillator als dynamisches System



**Aufgabe:** Formulieren und lösen Sie den harmonischen Oszillator...

- (1) als eine eindimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung,
- (2) als ein zweidim. Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

**Lösung:** (1) Zeit  $t \in \mathbb{R}$ , Position  $u(t) \in \mathbb{R}$ , Geschwindigkeit  $\dot{u}(t) \in \mathbb{R}$ , Beschleunigung  $\ddot{u}(t) \in \mathbb{R}$ , Kraft  $-\omega_0^2 u(t) - 2\delta \dot{u}(t)$ , Bewegungsgesetz:

$$\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0$$

Lösung  $u(t) = e^{-\delta t} [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)]$  falls  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} > 0$ .

Die Anfangsdaten  $(u(t_0), \dot{u}(t_0))$  bestimmen die Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

(2) Zustand  $(x_1(t), x_2(t)) = (u(t), \dot{u}(t))$ , Zustandsraum  $\mathbb{R}^2$ , DGSystem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 & -2\delta x_2 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

# Der harmonische Oszillator als dynamisches System

😊 Allgemeiner Trick: Reduktion von höherer auf erste Ordnung! [N307](#)

😊 DGSystem erster Ordnung = Vektorfeld auf dem Zustandsraum!

Der harmonische Oszillator dient uns weiterhin als zentrales Modell: Es ist besonders einfach und anschaulich, lässt sich leicht lösen, und zeigt im Prinzip bereits alle wesentlichen Phänomene! [N253](#)

Wir schreiben seine Differentialgleichung zweiter Ordnung hier neu als System erster Ordnung: Das ist ein Vektorfeld auf dem Zustandsraum!

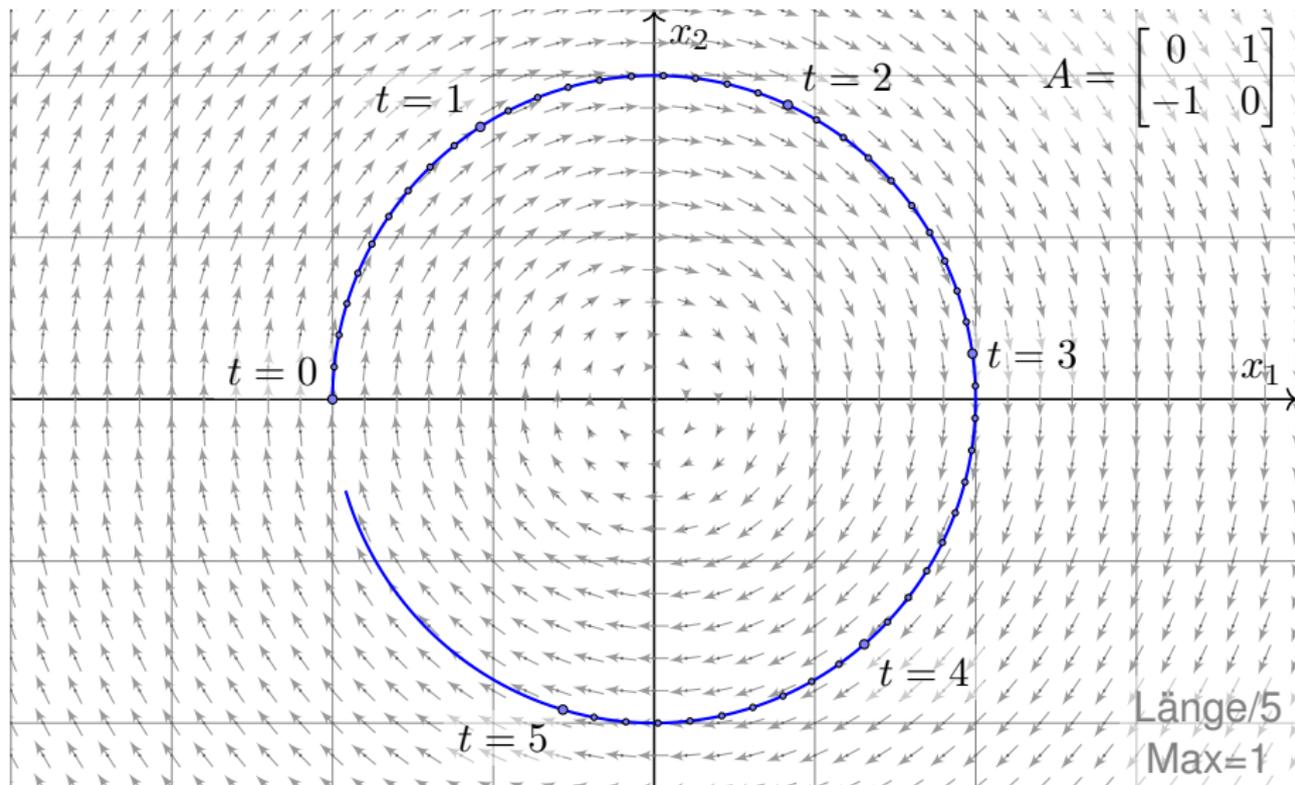
Jedes solche Richtungsfeld ist geometrisch besonders anschaulich als ein „Fluss“, und dies nützt ebenso in der Analysis und der Numerik.

Lösungskurven des DGSystems sind die Trajektorien: Die nächsten beiden Graphiken zeigen den nicht bzw. schwach gedämpften Fall. Hierzu kennen wir bereits die exakten Lösungen. [N265](#)

Die dritte Graphik zeigt mehrere numerische Näherungen durch das Euler–Verfahren: Solche Näherungen sind nützlich, wenn wir keine exakte Lösung kennen oder mühsam beschaffen wollen, und nötig, wenn gar keine Lösungsformel in geschlossener Form existiert.

Der harmonische Oszillator im Zustandsraum  $\mathbb{R}^2$ 

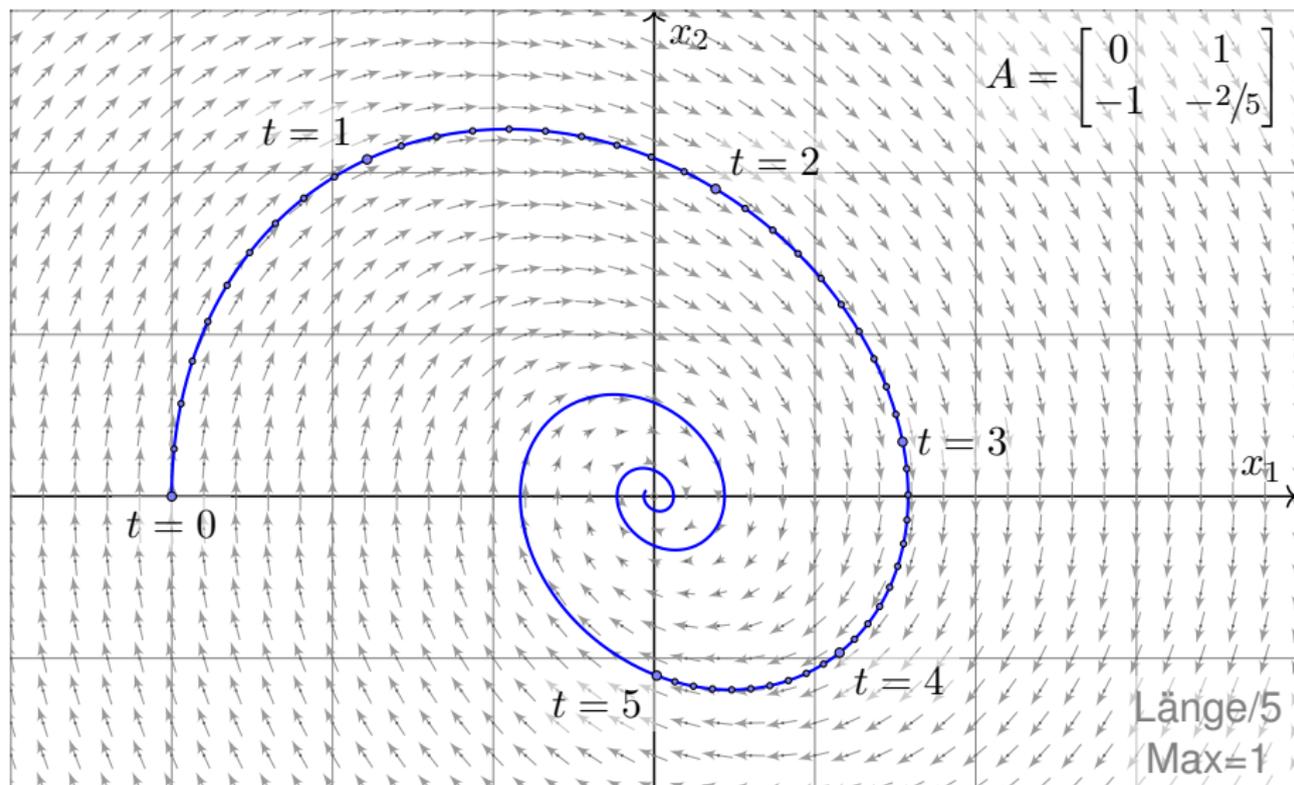
Harmonischer Oszillator, keine Dämpfung  $\delta = 0$ , zum Beispiel  $\omega_0 = 1$ :



Kein Energieverlust, daher sogar Rückkehr in den Anfangszustand.

Der harmonische Oszillator im Zustandsraum  $\mathbb{R}^2$ 

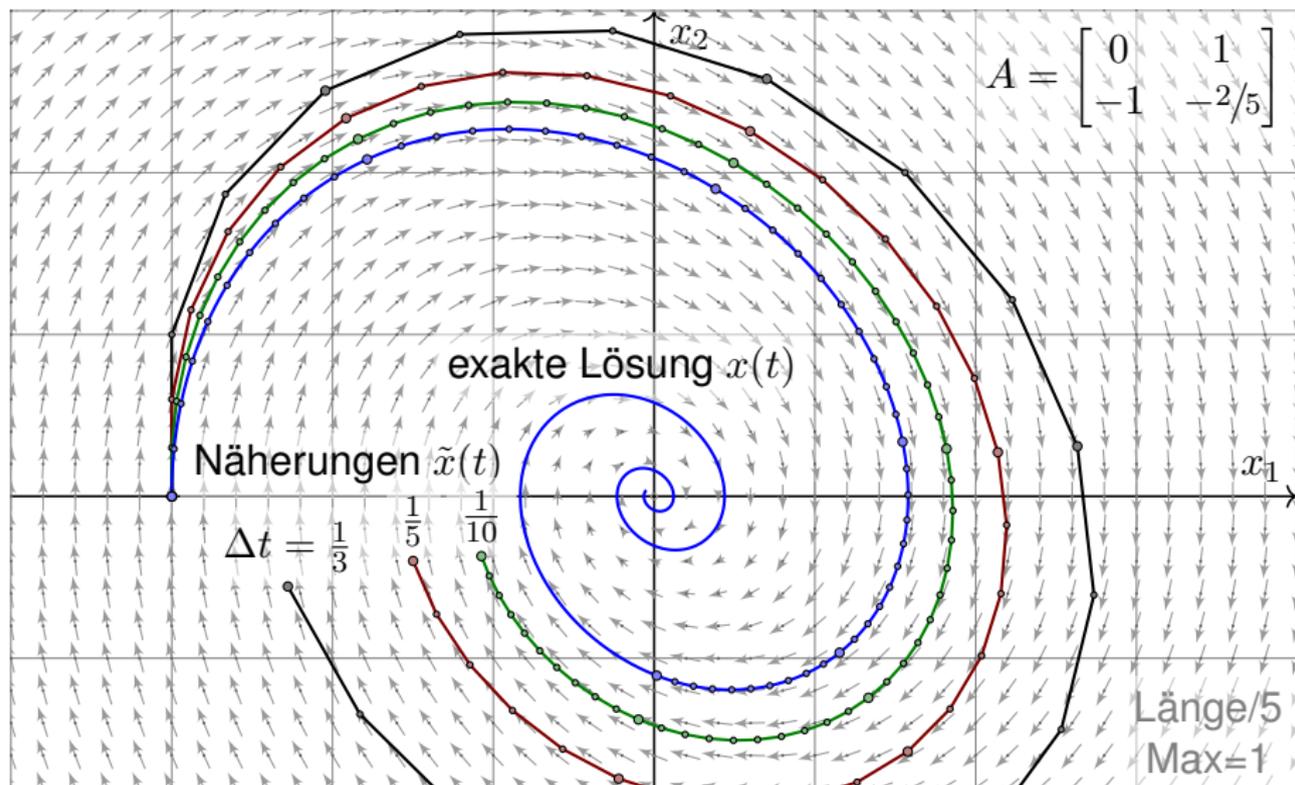
Schwache Dämpfung  $0 < \delta < \omega_0$ , zum Beispiel  $\delta = 1/5$  und  $\omega_0 = 1$ :



Echter Energieverlust, daher keine Rückkehr in den Anfangszustand.

## Numerische Näherung durch das Euler-Verfahren

Approximation durch das Euler-Verfahren mit Schrittweite  $\Delta t = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ :



Wir erkennen graphisch den Rechenaufwand und Approximationsfehler.

# Numerische Näherung durch das Euler–Verfahren

Zu lösen sei ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0$$

😊 Dies ist im Wesentlichen ein Vektorfeld  $f$  auf dem Zustandsraum! Gesucht ist eine Lösungskurve  $x(t)$ , die die obige Gleichung erfüllt. Das **Euler–Verfahren** verschafft uns eine numerische Näherung  $\tilde{x}$ :

Wir wählen Zeitschritte  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$  mit  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ . Am einfachsten äquidistant  $t_i = t_0 + i\Delta t$  mit fester Schrittweite  $\Delta t > 0$ . Die Ableitung  $\dot{x}$  approximieren wir durch den **Differenzenquotienten**:

$$\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \approx \dot{x}(t_i) \stackrel{!}{=} f(t, x(t_i))$$

Damit berechnen wir Näherungswerte  $\tilde{x}(t_1), \tilde{x}(t_2), \tilde{x}(t_3), \dots$  rekursiv:

$$\tilde{x}(t_{i+1}) = \tilde{x}(t_i) + f(t_i, \tilde{x}(t_i)) \cdot (t_{i+1} - t_i) \quad \text{für } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Unter geeigneten Bedingungen existiert genau eine Lösung  $x(t)$  und die Euler–Approximation  $\tilde{x}(t)$  kommt für kleine Schrittweiten beliebig nahe.

## Numerische Näherung durch das Euler–Verfahren

## Geometrische Voraussetzungen für das Euler–Verfahren:

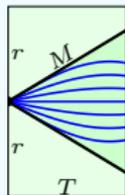
Sei  $I = [t_0, t_0 + T] \subset \mathbb{R}$  ein Zeitintervall der Länge  $T > 0$ .

Sei  $K = \bar{B}(x_0, r) \subset \mathbb{K}^n$  der Ball um  $x_0$  mit Radius  $r > 0$ .

Sei  $f : I \times K \rightarrow \mathbb{K}^n$  stetig, somit beschränkt, also  $|f| \leq M$ .

Hierbei gelte  $T \cdot M \leq r$ , notfalls verkleinern wir  $T$  und  $I$ .

Dies garantiert, dass Lösungen nicht vorzeitig aus  $K$  rauslaufen.



Gesucht ist  $x : I \rightarrow K$  diff'bar mit  $x(t_0) = x_0$  und  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ .

Das heißt: In jedem Punkt  $(t, x(t))$  ist die Tangente  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ .

**Euler–Approximation:** Wir wählen eine Partition des Zeitintervalls

$$P = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T\}.$$

Wie oben illustriert definieren wir hierzu den **Euler–Polygonzug**

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_N \\ \tilde{x}_0 & \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_N \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i}{t_{i+1} - t_i} = f(t_i, \tilde{x}_i)$$

😊 Praktisch: Aus  $\tilde{x}_0 = x_0$  berechnet man schrittweise  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N$ :  
Im Punkt  $(t_i, \tilde{x}_i)$  wird die Kurve in Richtung  $f(t_i, \tilde{x}_i)$  weitergeschickt.

## Numerische Näherung durch das Euler–Verfahren

## Satz N3A: Existenz von Lösungen, Peano 1890

Zu lösen sei die Differentialgleichung  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  mit  $x(t_0) = x_0$ .

Unter den oben erklärten geometrischen Voraussetzungen gilt:

Es existieren Partitionen  $P_1, P_2, P_3, \dots \subset I$ , deren Euler–Polygonzüge  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots : I \rightarrow K$  gegen eine Lösung  $x : I \rightarrow K$  konvergieren.

- 😊 Dies garantiert Existenz von Lösungen, 😞 keine Eindeutigkeit.
- 😊 Die Rechnung ist für  $\Delta t = T/N$  sehr leicht zu implementieren.
- 😞 Präzision verlangt großes  $N$ , damit wächst der Rechenaufwand.
- 😞 Praktisches Problem: Der Satz ist nicht konstruktiv! Gegeben  $\varepsilon > 0$ , wie wählt man eine Partition  $P$ , um eine  $\varepsilon$ –Approximation zu erhalten?
- 😊 Die Numerik untersucht und optimiert solche Näherungsverfahren. Ziel: gute Fehlerschranken und hohe Präzision bei geringem Aufwand. Die **Numerik der gewöhnlichen Differentialgleichungen** ist ein hoch entwickeltes Gebiet und stellt umfangreiche Werkzeuge zur Verfügung.

# Newtons Himmelsmechanik: die Bewegungsgleichung

**Aufgabe:** Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen von  $n$  Körpern mit Masse  $m_k > 0$ , Position  $u_k(t) \in \mathbb{R}^3$  und Geschwindigkeit  $v_k(t) \in \mathbb{R}^3$ .

**Lösung:** Newtons Gravitationsgesetz ergibt die Differentialgleichungen

$$\dot{u}_k = v_k, \quad \dot{v}_k = f_k(u) := \sum_{j \neq k} \gamma m_j \frac{u_j - u_k}{|u_j - u_k|^3}.$$

Vorgegeben sind die Anfangsdaten  $u_k(0)$  und  $v_k(0)$  zur Zeit  $t = 0$ .

Als Lösung gesucht ist die Bewegung  $(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) : [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^{6n}$ .

Erlaubt ein so komplexes System immer genau eine Lösung? Ja, das ist der zentrale  $\exists$ &E-Satz! Kollision oder Expulsion nach  $\infty$  sind möglich: Eventuell existiert die Lösung nur für eine kurze Zeit  $T > 0$ . Für manche Startwerte sind Lösungen periodisch, oder beinahe: Zu unserem Glück!

😊 Den Fall  $n = 2$  lösen Kegelschnitte: Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln.

☹ Für  $n \geq 3$  lässt sich dieses DGSsystem i.A. nicht geschlossen lösen!

😊 Euler-Verfahren: diskrete Zeitschritte  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ ,

$$u_k(t_{i+1}) \approx u_k(t_i) + v_k(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i),$$

$$v_k(t_{i+1}) \approx v_k(t_i) + f_k(u) \cdot (t_{i+1} - t_i).$$

# Newtons Himmelsmechanik: der historische Triumph

Das Verständnis der **Himmelsmechanik** markiert den Übergang vom Mittelalter zur Neuzeit!

Die Beobachtung des Nachthimmels und seiner Sterne fasziniert uns Menschen seit Alters her. Neben den zahlreichen „Fixsternen“ (weit entfernte Sterne) erkennen wir einige „Wandelsterne“ (Planeten unseres Sonnensystems). Ihre Bewegung lässt Regeln erahnen, doch für Wandelsterne scheinen diese zunächst kompliziert und verwirrend. Sie quantitativ zu erfassen und gründlich zu verstehen, ist einer der großen Triumphe menschlicher Neugier und systematischer Forschung!

Von der Erde besehen scheinen sich alle Sterne um uns zu drehen, doch die exakte Bewegung der Planeten erweist sich als schrecklich kompliziert. Kopernikus' heliozentrisches Modell (1543) ist einfacher, daher nützlicher: Die Bahnen der Planeten um die Sonne erweisen sich recht genau als Ellipsen. Diese Koordinatentransformation hat enorme Wirkung und schreibt Weltgeschichte!

Aus Tycho Brahes präzisen **Beobachtungsdaten** leitete Johannes Kepler drei Gesetze ab, die die Ellipsenbewegung der Planeten um die Sonne gut *beschreiben*. Eine *Erklärung* der Bewegungen durch einheitliche physikalische Prinzipien gelang erst Isaac Newton 1686 mit seinen Principia!

Die moderne Naturwissenschaft beginnt mit Newtons Formulierung der drei Bewegungsgesetze, des universellen Gravitationsgesetzes und seiner Lösung des Zwei-Körper-Problems. Mit einer Handvoll physikalischer Prinzipien und den passenden mathematischen Werkzeugen konnte er die Keplerschen Regeln *erklären*, ja *herleiten*. Newtons revolutionäre Idee: Überall im Universum gelten dieselben Gesetze! Newtons Mechanik erklärt die Schwerkraft hier auf Erden ebenso wie außerirdische Phänomene: den Umlauf der Planeten um die Sonne und des Mondes um die Erde, sogar die Gezeiten unserer Meere, ebenso die Coriolis-Kraft und das Foucaultsche Pendel.

# Newtons Himmelsmechanik: die Herausforderung

Allein schon das obige Differentialgleichungssystem zu formulieren, ist eine Meisterleistung der Mathematik und Physik der Neuzeit. Wir nennen dies **Himmelsmechanik** und sind völlig zu Recht stolz auf sie: Mathematische Sprache und Werkzeuge erleuchten die gesamte Entwicklung und ebnen den Weg von Beobachtung über Erklärung und Berechnung bis zur Raumfahrt.

Auch nach über 300 Jahren sind Newtons Gleichungen immer noch nützlich wie am ersten Tag! Daten ändern sich, Methoden bleiben bestehen. Solide mathematische Arbeit hat eine extrem lange Wirksamkeit. Daher lohnt es sich auch für Sie heute, in mathematische Grundlagen zu investieren und diese wirksamen Werkzeuge zu erlernen, anzuwenden und fortzuführen.

Die drei Fälle  $n = 1$  und  $n = 2$  sowie  $n \geq 3$  sind sehr verschieden! Für einen einzigen Körper ( $n = 1$ ) enthalten Newtons Gleichungen  $\dot{u}_1 = v_1$  und  $\dot{v}_1 = 0$  keine gravitative Wechselwirkung. Ihre Lösung ist eine **geradlinige Bewegung**, nämlich  $u_1(t) = u_1(0) + v_1 t$ .

Ein Zwei-Körper-System ( $n = 2$ ) wie Sonne-Erde oder Erde-Mond ist bereits ausgesprochen interessant. Newton konnte seine Gleichungen hier gut lösen, sie ergeben Ellipsenbahnen und erklären die Keplerschen Gesetze. Allgemeiner sind auch Parabeln und Hyperbeln als Lösungen möglich, je nach Anfangsdaten  $u_1(0), v_1(0), u_2(0), v_2(0)$ . In allen Fällen gelingt die Lösung hier noch in geschlossener Form. Man nennt ein solches System **vollständig integrabel**.

Newton betrachtete anschließend das Drei-Körper-System Sonne-Erde-Mond. Dies entzog sich jedoch hartnäckig einer Lösung und wurde zum berühmtesten offenen Problem der Mathematik. Das **Drei-Körper-Problem** gilt bis heute als eines der schwierigsten Probleme, die zahlreichen Anstrengungen zu seiner Lösung erfordern und erzeugen immer wieder wichtige neue Methoden.

# Newtons Himmelsmechanik: mögliche Lösungsmethoden

Für künstliche Satelliten wird das **zirkuläre restringierte Drei-Körper-Problem** (CR3BP) sehr ausgiebig untersucht: Zwei massereiche Körper umkreisen sich kreisförmig, während der dritte Körper nahezu masselos ist. Hier findet man die berühmten fünf Lagrange-Punkte.

Nur wenige und sehr spezielle Sonderfälle des  $n$ -Körper-Problems sind geschlossen lösbar. Auch diese haben ihren eigenen Reiz: Seit 1994 wurden zahlreiche **Choreographien** entdeckt, in denen  $n$  Körper symmetrisch angeordnet werden und dann periodische Bahnen durchlaufen. Für generische Anfangsdaten hingegen ist die Bewegung **chaotisch** und kann nur numerisch annähernd berechnet werden. Siehe *Solving the Three Body Problem*, [youtu.be/et7XvBenEo8](https://youtu.be/et7XvBenEo8).

Zum Kontrast untersuchen und vergleichen wir zwei klassische Anwendungen der Mechanik: Einerseits gekoppelte **lineare Systeme** wie harmonische Oszillatoren [N309] [N381], andererseits Planetenbewegung und ähnliche **nicht-lineare Systeme**. Nicht-lineare Systeme sind schwierig und verhalten sich oft chaotisch. Lineare Systeme sind besonders gutartig und einfach zu lösen. Daher sollten Sie Linearität wertschätzen, verstehen und nutzen lernen!

Auch nicht-lineare Systeme lassen sich mitunter gut lösen, wie einfache Beispiele zeigen. Dies sind aber Ausnahmen und seltene Glücksfälle. Typischerweise sind nicht-lineare Systeme nicht geschlossen lösbar. Es bleibt dann nur die **numerische Approximation** mit Hilfe geeigneter Näherungsverfahren, z.B. das Euler-Verfahren oder besser gleich das Runge-Kutta-Verfahren. Mehr hierzu erfahren Sie in der Numerik. Aufbauend auf den mathematischen Grundlagen können Sie die Numerik von Differentialgleichungen nutzen und wo nötig vertiefen.

Allgemeine Grundlagen und konkrete Anwendungen ergänzen sich wunderbar.

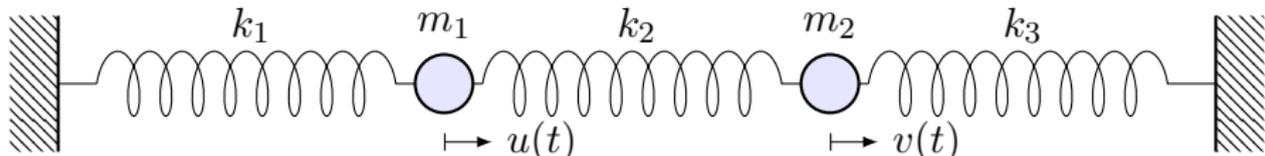








# Gekoppelte Oszillatoren als dynamisches System



Zwei Massen  $m_1, m_2 > 0$  sind durch Federn  $k_1, k_2, k_3 > 0$  verbunden.

**Aufgabe:** Formulieren Sie das hier skizzierte dynamische System...

(0) als Bewegungsgleichung sowie (1) als DGSystem erster Ordnung.

(2) Welche Struktur hat die Lösungsmenge? (a) „Form“ und (b) „Größe“?

**Lösung:** (0) Auslenkungen  $u(t), v(t)$  aus der Ruhelage. Kräftebilanz:

$$F_1(t) = -k_1 u(t) - k_2 [u(t) - v(t)]$$

$$F_2(t) = -k_3 v(t) - k_2 [v(t) - u(t)]$$

Bewegungsgesetz:  $m_1 \ddot{u}(t) = F_1(t)$  und  $m_2 \ddot{v}(t) = F_2(t)$ . Hieraus folgt:

$$\ddot{u}(t) = -\frac{k_1+k_2}{m_1} u(t) + \frac{k_2}{m_1} v(t)$$

$$\ddot{v}(t) = +\frac{k_2}{m_2} u(t) - \frac{k_2+k_3}{m_2} v(t)$$

😊 Zur Vereinfachung betrachten wir keine Reibung oder äußere Kräfte.

# Gekoppelte Oszillatoren als dynamisches System

(1) Wir haben ein (lineares) DGSsystem zweiter Ordnung:

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = a u(t) + b v(t) \\ \ddot{v}(t) = c u(t) + d v(t) \end{cases}$$

Neue Variablen  $x_1 = u$ ,  $x_2 = v$ ,  $x_3 = \dot{u}$ ,  $x_4 = \dot{v}$  reduzieren dies zu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \text{kurz} \quad \dot{x} = A x$$

Das DGSsystem (1) ist einfacher als (0), da erster Ordnung. Unser System  $\dot{x} = Ax$  ist homogen linear mit Systemmatrix  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ . Hier sind die Koeffizienten konstant, das heißt, sie hängen nicht von der Zeit  $t$  ab. Für solche homogen-linearen DGSsysteme mit konstanten Koeffizienten entwickeln wir mit Hilfe der Linearen Algebra exakte und zudem effiziente Lösungsmethoden: Wie in der folgenden Aufgabe nutzen wir dazu Eigenvektoren und alle zugehörigen Techniken. Der grundlegende Existenz- und Eindeutigkeitsatz N3G erklärt ganz allgemein die Struktur:

(2) Die Lösungsmenge ist (a) ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum (b) der Dimension 4.

# Gekoppelte Oszillatoren: Symmetrie und Ansatz

- Aufgabe:** (3) Lösen Sie den symmetrischen Fall  $m_1 = m_2, k_1 = k_3$ .  
 (4) Welche Bewegung folgt aus  $u(0) = 2, v(0) = 0, \dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0$ ?

**Lösung:** Einstweilen nutzen wir unsere physikalische Anschauung!

(3a) Der Ansatz  $u = v$  entkoppelt zu  $\ddot{u} = -\frac{k_1}{m_1}u, \ddot{v} = -\frac{k_1}{m_1}v$ .

Lösungen:  $u_1(t) = \cos(\omega_1 t)$  und  $u_2(t) = \sin(\omega_1 t)$  mit  $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}$ .

(3b) Der Ansatz  $u = -v$  entkoppelt zu  $\ddot{u} = -\frac{k_1+2k_2}{m_1}u, \ddot{v} = -\frac{k_1+2k_2}{m_1}v$ .

Lösungen:  $u_3(t) = \cos(\omega_2 t)$  und  $u_4(t) = \sin(\omega_2 t)$  mit  $\omega_2^2 = \frac{k_1+2k_2}{m_1}$ .

Sind wir schon fertig? Ja! Jede Lösung ist eine Linearkombination

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} u_3(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} u_4(t) \\ v_4(t) \end{bmatrix}.$$

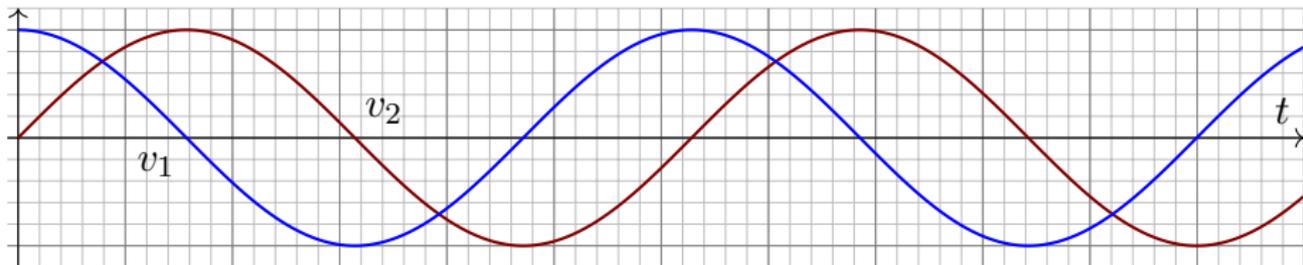
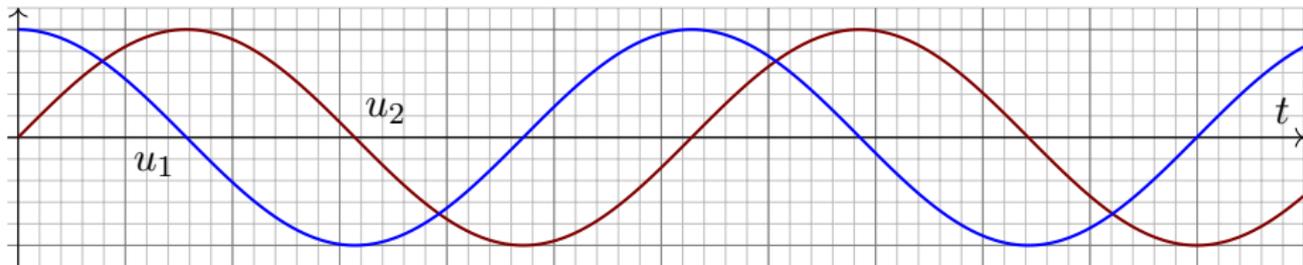
😊 Als **Anfangswerte** zur Zeit  $t_0$  können Position und Geschwindigkeit  $u(t_0), v(t_0), \dot{u}(t_0), \dot{v}(t_0) \in \mathbb{R}$  beliebig vorgegeben werden: Sie legen die freien Konstanten  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$  eindeutig fest (und umgekehrt).

# Gekoppelte Oszillatoren: Symmetrie und Ansatz

- 😊 Unser DGSystem ist sehr einfach: Die Gleichungen sind linear! Linearkombinationen von Lösungen sind daher wieder Lösungen. Mit anderen Worten: Der Lösungsraum ist ein **Vektorraum** über  $\mathbb{R}$ .
- 😊 Unser **geschickter Ansatz** entkoppelt das Gleichungssystem: Eindimensionale Differentialgleichungen können wir bereits lösen! Die einfache Rechnung bestätigt und präzisiert unsere physikalische Anschauung: Die Probe ist nun leicht: Einsetzen und Ausrechnen!
- 😊 Wir haben vier Lösungen gefunden. Diese sind **linear unabhängig**. Der Lösungsraum hat also Dimension  $\geq 4$ . Gibt es noch mehr?
- ⚠️ Wir wünschen uns ein einfaches Kriterium für Dimension = 4. Dann wüssten wir sicher: Wir haben alle Lösungen gefunden! Physikalisch ist das plausibel: Jede Masse hat zur Zeit  $t_0$  eine Position und eine Geschwindigkeit. Diese Daten sollten den weiteren Verlauf eindeutig festlegen. Wir hätten demnach genau 4 Freiheitsgrade.
- 😊 Diese Heuristik lässt sich mathematisch formulieren und beweisen: Es gilt der grundlegende **Existenz- und Eindeigkeitssatz N3G!**

# Gekoppelte Oszillatoren: gleichsinnige Eigenschwingungen

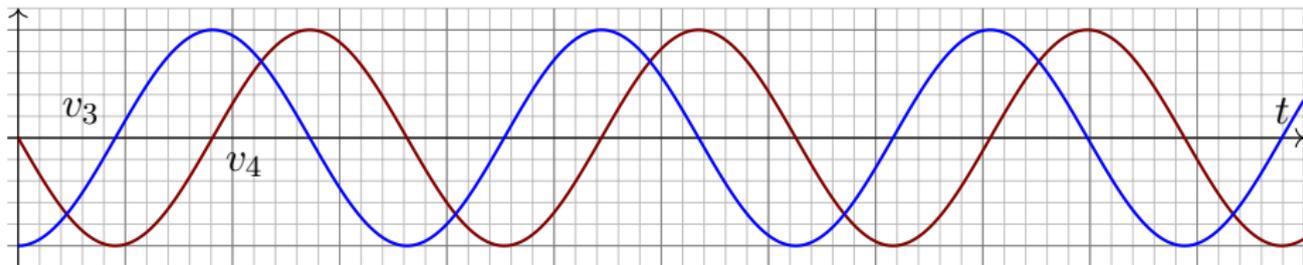
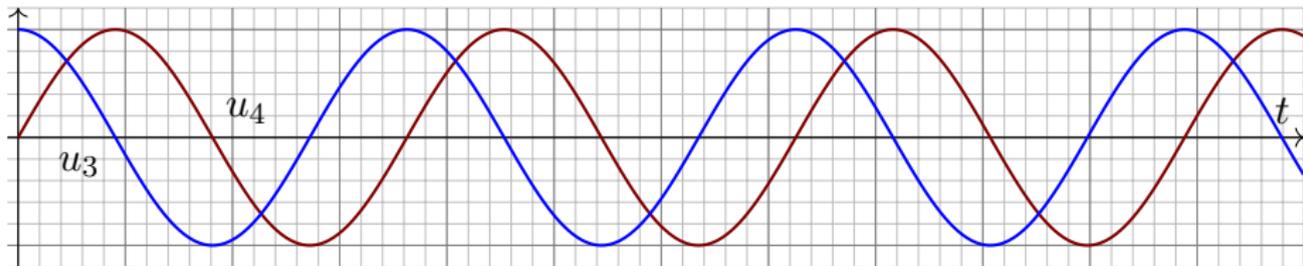
Illustration für den Fall  $m_1 = m_2 = 1$  und  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ .  
 Gleichsinnige Eigenschwingungen zur Frequenz  $\omega_1 = 1$ :



😊 Die Eigenschwingungen unseres Systems sind besonders leicht zu berechnen. Zudem erweisen sie sich als einfach und übersichtlich: Harmonische Schwingung: Jede dieser vier Lösungen ist periodisch.

# Gekoppelte Oszillatoren: gegensinnige Eigenschwingungen

Illustration für den Fall  $m_1 = m_2 = 1$  und  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ .  
Gegensinnige Eigenschwingungen zur Frequenz  $\omega_2 = \sqrt{3}$ :



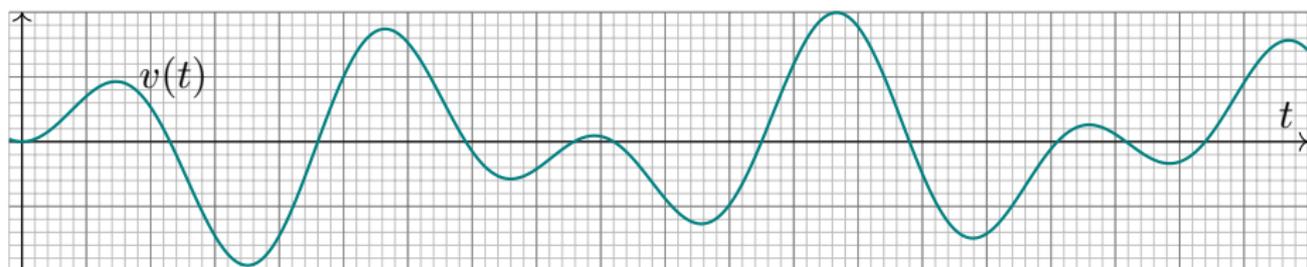
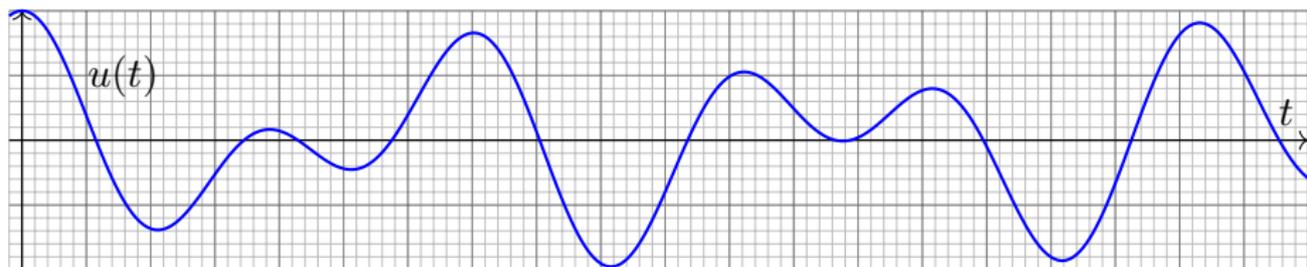
😊 Die Frequenz der gegensinnigen Schwingung ist deutlich größer als die der gleichsinnigen Schwingung. Das ist anschaulich plausibel; probieren Sie es mal aus! Nun können wir es sogar präzise ausrechnen.

# Überlagerung von Eigenschwingungen

(4) Diese Linearkombination von Eigenschwingungen löst das AWP:

$$u(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{3}t), \quad u(0) = 2, \quad \dot{u}(0) = 0$$

$$v(t) = \cos(t) - \cos(\sqrt{3}t), \quad v(0) = 0, \quad \dot{v}(0) = 0$$



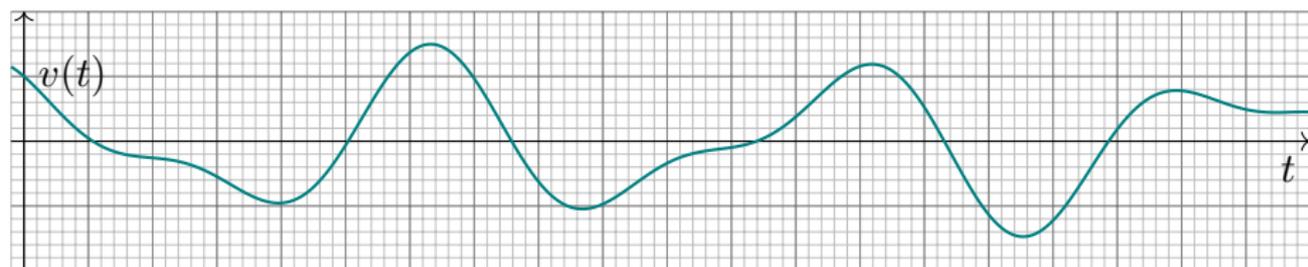
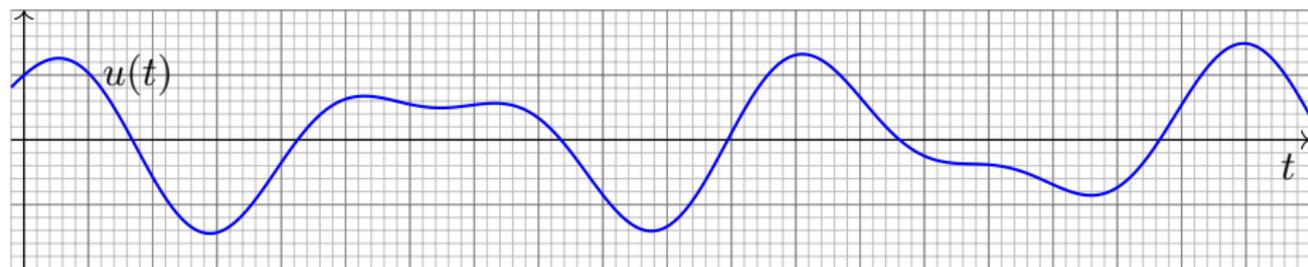
**⚠** Diese Bewegung ist nicht periodisch! Sie scheint zuerst kompliziert, ist aber nur die Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen.

# Überlagerung von Eigenschwingungen

Zur Illustration eine weitere Linearkombination von Eigenschwingungen:

$$u(t) = \cos(t) + \frac{1}{2} \sin(\sqrt{3}t)$$

$$v(t) = \cos(t) - \frac{1}{2} \sin(\sqrt{3}t)$$



😊 Die Anfangswerte  $u(0)$ ,  $\dot{u}(0)$  sowie  $v(0)$ ,  $\dot{v}(0)$  können beliebig vorgegeben werden; sie legen den weiteren Verlauf eindeutig fest.

## Schwache Kopplung führt zu Schwebungen.

**Aufgabe:** (5) Was geschieht bei schwacher Kopplung? Anschaulich?

Nehmen Sie weiterhin  $m_1 = m_2$  und  $k_1 = k_3$  an, zudem  $0 < k_2 \ll k_1$ .

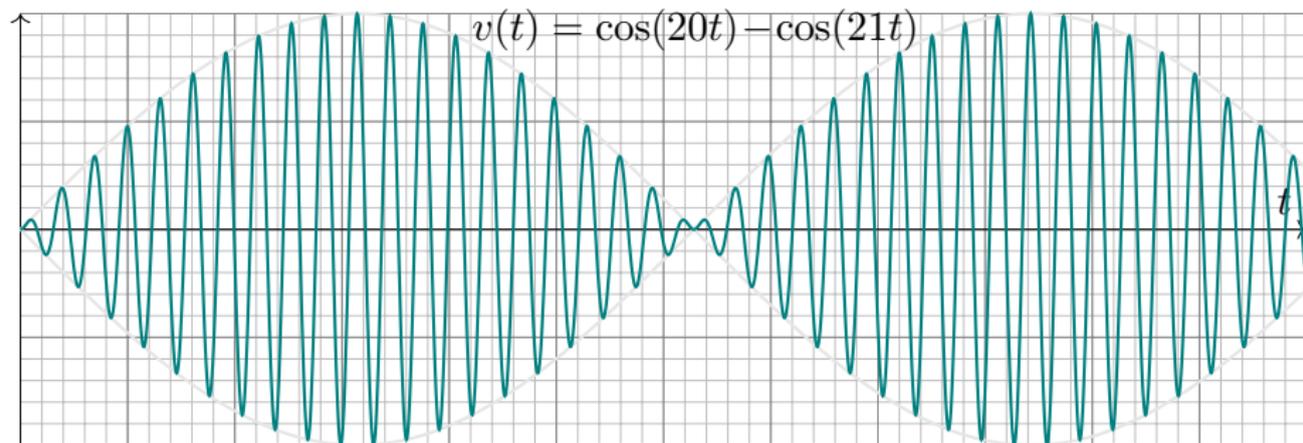
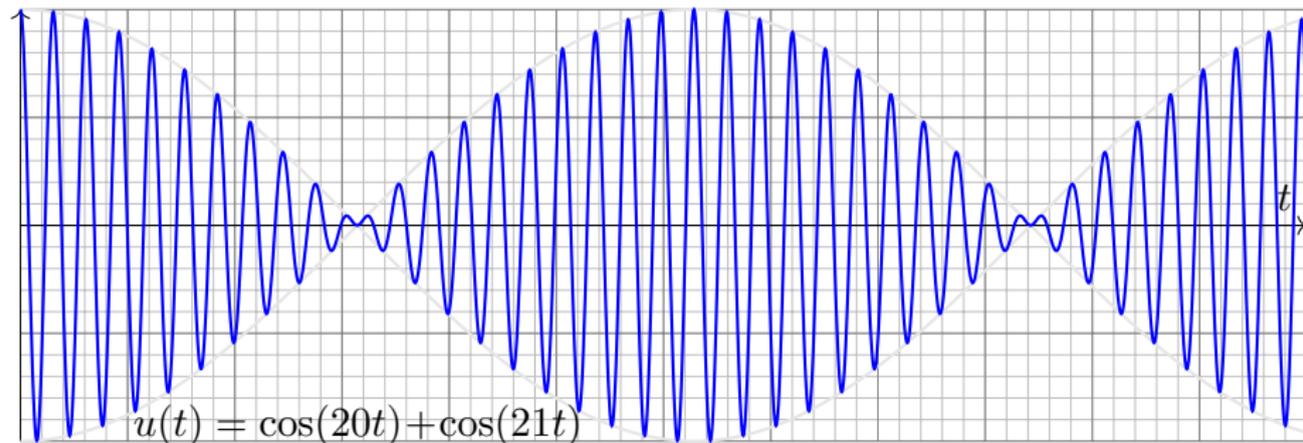
(6) Berechnen und diskutieren Sie ein konkretes Zahlenbeispiel mit den Massen  $m_1 = m_2 = 1$  und den Federn  $k_1 = k_3 = 400$  und  $k_2 = 20.5$ . Welche Bewegung folgt nun aus  $u(0) = 2$ ,  $v(0) = 0$ ,  $\dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0$ ?

**Lösung:** (5) Zunächst die *qualitativ-anschauliche Erklärung*: Die beiden Eigenfrequenzen  $\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$  und  $\omega_2 = \sqrt{(k_1 + 2k_2)/m_1}$  unseres Systems liegen nahe beieinander, da wir  $0 < k_2 \ll k_1$  annehmen.

Wir erwarten eine *Schwebung*: in der Überlagerung  $\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$  nimmt die gesamte Amplitude der Summe periodisch zu und ab, additive Phasen und subtraktive Phasen wechseln sich ab.

(6) *Quantitativ-numerisches Beispiel*: Wir finden  $\omega_1 = 20$  und  $\omega_2 = 21$ . Das Anfangswertproblem  $u(0) = 2$ ,  $v(0) = 0$  und  $\dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0$  wird gelöst durch  $u(t) = \cos(20t) + \cos(21t)$  und  $v(t) = \cos(20t) - \cos(21t)$ . Die folgenden Graphiken illustrieren den zeitlichen Verlauf für  $t \in [0, 12]$ .

# Schwache Kopplung führt zu Schwebungen.



## Schwache Kopplung führt zu Schwebungen.

Anschaulich geschieht hier folgendes: Wir können den linken Oszillator auslenken und dann loslassen. Er schwingt daraufhin nahezu frei, doch nach und nach überträgt sich (fast) seine gesamte Energie auf den rechten Oszillator, anschließend geschieht dasselbe umgekehrt.

**Aufgabe:** (7) Erklären Sie das oben skizzierte Phänomen der Schwebungen mit Hilfe der trigonometrischen **Additionstheoreme**.

**Lösung:** Aus der Euler-Gleichung  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$  und der Homomorphie  $e^{z+w} = e^z e^w$  erhalten wir (nach kurzer Rechnung):

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

## Schwache Kopplung führt zu Schwebungen.

In unserem Zahlenbeispiel erhalten wir:

$$u(t) = \cos(20t) + \cos(21t) = 2 \cos(0.5t) \cdot \cos(20.5t)$$

$$v(t) = \cos(20t) - \cos(21t) = -2 \sin(0.5t) \cdot \sin(20.5t)$$

Wir interpretieren daher die Überlagerung  $u(t) = A(t) \cos(20.5t)$  als eine Grundschiwingung der mittleren Frequenz  $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = 20.5$  mit der variablen Amplitude  $A(t) = 2 \cos(0.5t)$ ; diese hat die deutlich niedrigere Frequenz  $\delta = \frac{1}{2}|\omega_1 - \omega_2| = 0.5$ , sodass  $\omega_{1/2} = \bar{\omega} \mp \delta$  gilt.

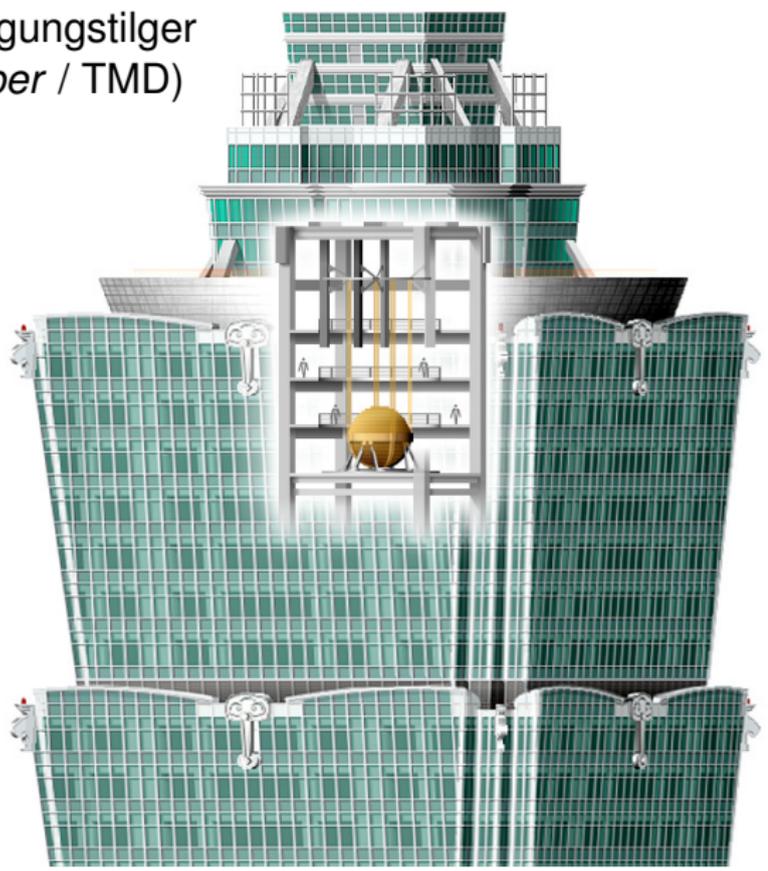
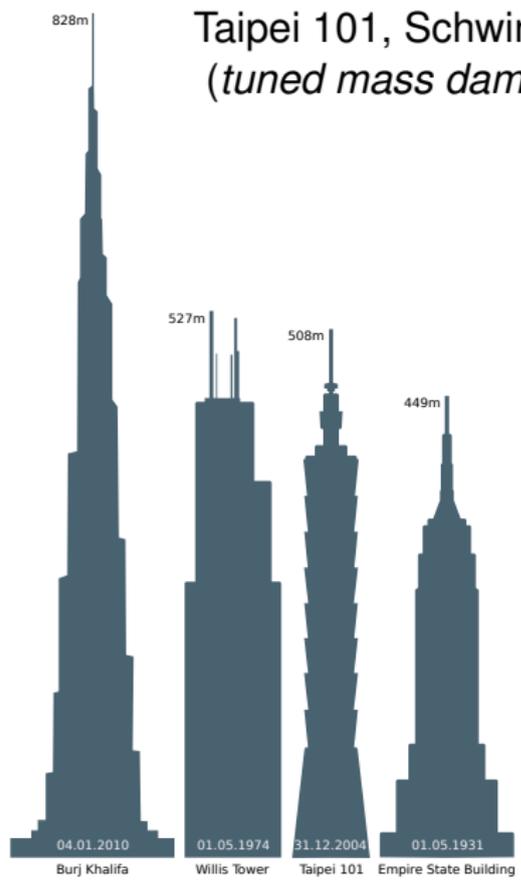
Diese Rechnung ist in der obigen Graphik schön anschaulich illustriert durch die Trägerschiwingung  $\cos(20.5t)$  und die Einhüllende  $\pm 2 \cos(0.5t)$ .

Das Phänomen der Schwebung entsteht immer, wenn sich zwei ähnlich große Schwiwingungen mit nahezu gleichen Frequenzen überlagern.

In der Akustik sind solche Schwebungen deutlich zu hören: Der Ton ist moduliert, seine Lautstärke schwankt mit der Schwebungsfrequenz, was mitunter als recht unangenehm empfunden wird. Das ist keine akustische Täuschung, sondern ein reales physikalisches Phänomen.

# Anwendung in Wolkenkratzern: Schwingungstilger

## Taipei 101, Schwingungstilger (*tuned mass damper* / TMD)



## Anwendung in Wolkenkratzern: Schwingungstilger

Gebäude werden zu Schwingungen angeregt, extern durch Wind oder Erdbeben, intern durch Menschen oder Maschinen. Dagegen helfen **Schwingungstilger**, justiert auf die Eigenfrequenz des Gebäudes. Berlins Fernsehturm hat in seiner Spitze ein 1.5-Tonnen-Tilgerpendel. Londons Millennium Bridge, 2000 eröffnet und *wobbly bridge* genannt, wurde nachträglich mit 52 kleinen *tuned mass dampers* ausgestattet.

Das Taipei Financial Center in Taiwan hielt ab 2004 den Rekord des höchsten Gebäudes der Welt, bis es 2009 vom Burj Khalifa überholt wurde. Zwischen dem 88. und 92. Stockwerk befindet sich eine 660 Tonnen schwere Stahlkugel als Pendel mit ölhydraulischer Dämpfung. Es ist öffentlich zugänglich und eine beliebte Touristen-Attraktion.

Das Gebäude überträgt Schwingungsenergie auf diesen Oszillator, der sie absorbiert und dann durch Dämpfung in Wärme umwandelt. Die maximale Beschleunigung bei Stürmen wird so etwa halbiert! (Taiwan ist sowohl aktive Erdbebenregion als auch Taifungebiet.) Ein Video sagt mehr als tausend Worte: [youtu.be/f1U4SAgy60c](https://youtu.be/f1U4SAgy60c).

# Anwendung im Schiffsbau: frahmscher Schlingertank

Wasserwellen regen ein Schiff zu Schwingungen an:

- 1 Das Schiff „rollt“ um seine Längsachse, kippt also nach links (Backbord) und rechts (Steuerbord).
- 2 Das Schiff „stampft“ um seine Querachse, neigt sich also nach vorne (zum Bug) und hinten (zum Heck).

Wenn die anregende Frequenz des Seegangs unglücklich nah an der Eigenfrequenz des Schiffes liegt, so kommt es zur Resonanz. Um eine Katastrophe zu verhindern, möchte man vorsorgen und die auftretenden Resonanzen so weit wie möglich abschwächen.

Für die Rollbewegung um die Längsachse gelingt dies recht effizient mit zwei raffiniert gekoppelten Schwingungen. Hierzu entwickelte der deutsche Schiffsbauer Hermann Frahm (1867–1939) um 1900 den sogenannten frahmschen **Schlingertank**. Dieser besteht aus zwei Wassertanks an den Längsseiten des Schiffes, die möglichst hoch liegen und über Rohre kommunizieren. Hierin füllt man Wasser, bis die Eigenfrequenz des Tanks der des Schiffes entspricht.

# Anwendung im Schiffsbau: frahmscher Schlingertank

Seitlich auftreffende Wellen regen das Schiff zum Rollen an.

Im Resonanzfall erzwingt dies eine Schwingung des Schiffes mit der Phasenverschiebung um  $\pi/2$  gegenüber der Anregung. Das rollende Schiff lässt nun seinerseits das Ballastwasser im Tank periodisch hin- und herströmen, ebenso mit einer Phasenverschiebung um  $\pi/2$ .

Die äußere Anregung und die innere Schwingung des Tanks sind daher gegenphasig. Die so wirkenden entgegengesetzten Drehmomente heben sich weitgehend auf, was die Rollbewegung deutlich verringert.

Die Grundidee ist genial-einfach und in unserem mathematischen Modell gut nachzuverfolgen. Die technische Ausführung erfordert die geeignete Kalibrierung der Parameter und ist eine eigene Kunst.

Das gesamte System ist in Wirklichkeit nicht-linear: Die Frequenz des Schiffes und des Ballastwasser hängen von der Amplitude ab, dadurch wird ihr Zusammenspiel recht kompliziert. Das Prinzip ist jedoch gleich.

## Existenz und Eindeutigkeit dank Exponentialfunktion

Zu lösen sei das folgende Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  und vorgegebenem Anfangswert  $v \in \mathbb{K}^n$ :

$$u'(t) = A u(t) \quad \text{mit} \quad u(0) = v$$

**Aufgabe:** (1) Existenz: Finden Sie eine Lösung  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n : t \mapsto u(t)$ .  
 (2) Eindeutigkeit: Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems.

**Idee:** Für  $n = 1$  haben wir die Exponentialfunktion  $a \mapsto e^a$  genutzt. N219  
 Nutzen Sie ebenso (noch naiv) die Matrix-Exponentialfunktion  $A \mapsto e^{tA}$ .

**Lösung:** (1) Die Funktion  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n : u(t) = e^{tA} v$  ist eine Lösung.

Probe: Es gilt  $u(0) = v$  und  $u'(t) = A e^{tA} v = A u(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

(2) Sei  $\tilde{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$  eine weitere Lösung. Wir betrachten  $w(t) = e^{-tA} \tilde{u}(t)$ .  
 Dank Produktregel erhalten wir  $w'(t) = -A e^{-tA} \cdot \tilde{u}(t) + e^{-tA} \cdot A \tilde{u}(t) = 0$ .  
 Dank Mittelwertsatz ist  $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$  konstant, also  $\tilde{u}(t) = e^{tA} v = u(t)$ .

😊 Es gibt genau eine Lösung  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ , nämlich  $u(t) = e^{tA} v$ .

# Existenz und Eindeutigkeit dank Exponentialfunktion

⚠ Wir nutzen die Exponentialfunktion und ihre guten Eigenschaften! Diese Rechnung ist nicht nur ein eitles Glasperlenspiel, sondern sie löst zwei fundamentale Probleme: Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung.

😊 Im vorigen Beispiel konnten wir vier unabhängige Lösungen raten, dank physikalischer Anschauung durch unseren geschickten Ansatz. Diese Konstruktion beweist insbesondere die Existenz von Lösungen!

⚠ Dieser heuristische Lösungsansatz verrät uns jedoch noch nicht, ob es nicht vielleicht noch weitere Lösungen gibt, die verborgen auf uns lauern und uns womöglich böse Streiche und Kummer bereiten.

😊 Unsere Rechnung mit der Matrix-Exponentialfunktion  $A \mapsto e^A$  garantiert, dass es zu jedem Startvektor  $v$  genau eine Lösung gibt. Dieses Argument beweist insbesondere die Eindeutigkeit der Lösung!

😊 Das ist schon raffiniert: Die *Existenz* der Matrix-Exponentialfunktion beweist die *Eindeutigkeit* der Lösung zu jedem Anfangswertproblems.

# Die Exponentialfunktion für Skalare $a \in \mathbb{K}$

**Erinnerung:** Sei  $a \in \mathbb{K}$ . Wir suchen eine Lösung  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  der eindimensionalen Differentialgleichung  $u'(t) = a u(t)$  mit  $u(0) = 1$ .

Hierzu gibt es genau eine Lösung, nämlich die Funktion  $u(t) = e^{at}$ . Wir nutzen dabei dankend die gute alte, vertraute Exponentialfunktion, am schönsten und bequemsten in ihrer Darstellung als Potenzreihe:

$$\exp: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} : x \mapsto \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Diese Reihe konvergiert für jedes Element  $x \in \mathbb{K}$  und definiert so die Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ . Diese Funktion erfreut sich vieler guter Eigenschaften, die Sie bereits kennen und lieben, und in zahlreichen Anwendungen auch liebend gerne nutzen.

😊 Wir hätten so gerne diese Exponentialfunktion für Matrizen! In der obigen Aufgabe haben wir ja schon ihren Nutzen erlebt. Ebenso wird sie sich in weiteren Anwendungen bewähren.

# Die Exponentialfunktion für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

**Allgemeiner:** Sei nun  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine Matrix (zuvor  $n = 1$ , jetzt  $n \geq 2$ ). Wir suchen  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  mit  $U'(t) = AU(t)$  und  $U(0) = I$ .

⚠️ Wünschen ist erlaubt, doch nicht alles, was wir *definieren* können, existiert auch. Den Nachweis der Existenz erbringen wir idealerweise, indem wir das ersehnte Objekt *konstruieren*, so explizit wie möglich.

Als Lösung vermuten wir auch hier die Exponentialfunktion  $U(t) = e^{tA}$ . Am bequemsten wäre hierzu die Darstellung als Potenzreihe:

$$\exp : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n} : X \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3!} + \dots$$

😊 Als schönes Video von 3Blue1Brown: [youtu.be/0850WBJ2ayo](https://youtu.be/0850WBJ2ayo)  
Das sieht verwegen aus, aber es funktioniert ganz wunderbar:

Wir wagen diesen mutigen Schritt und setzen Matrizen nicht nur in Polynome  $P \in \mathbb{K}[X]$  ein, sondern hier auch in eine Potenzreihe.

Der folgende Satz garantiert, dass diese Exponentialreihe tatsächlich für jede Matrix konvergiert und alle ersehnten Eigenschaften hat.

# Die Exponentialfunktion für Matrizen

## Satz N3B: die Exponentialfunktion für Matrizen

Wir arbeiten weiterhin über dem Körper  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

0 Für jede Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  konvergiert die **Exponentialreihe**

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \dots$$

1 Zudem gilt der Euler–Grenzwert  $(1 + \frac{1}{n}A)^n \rightarrow \exp(A)$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Die so definierte **Matrix-Exponentialfunktion**  $\exp: \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  erfüllt die von  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  vertrauten Eigenschaften:

2 Die Nullmatrix wird auf die Einheitsmatrix  $\exp(0) = I$  abgebildet.

3 Aus  $AB = BA$  folgt  $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$ .

4 Insbesondere gilt  $\exp(A)\exp(-A) = \exp(A - A) = \exp(0) = I$ .  
Somit ist die Matrix  $\exp(A)$  invertierbar mit  $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$ .

5 Die Zuordnung  $t \mapsto \exp(tA)$  definiert eine differenzierbare Kurve in  $GL_n \mathbb{K} \subset \mathbb{K}^{n \times n}$  mit  $0 \mapsto I$  und  $\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA)$ .

# Die Exponentialfunktion für Matrizen

## Satz N3B: die Exponentialfunktion für Matrizen

Die Exponentialfunktion verträgt sich zudem mit Matrix-Operationen:

- 6 Transposition:  $\exp(A^T) = \exp(A)^T$
- 7 komplexe Konjugation:  $\exp(\overline{A}) = \overline{\exp(A)}$
- 8 Konjugation:  $\exp(T^{-1}AT) = T^{-1} \exp(A)T$
- 9 Determinantenformel:  $\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A))$

**Übung:** Rechnen Sie alle Aussagen dieses Satzes sorgsam nach!

😊 Dies gelingt wörtlich genauso wie für die reelle Exponentialfunktion!

Die Techniken der Analysis benötigen Sie vor allem für die Konvergenz  $(0,1)$ . Alle weiteren Aussagen (2–9) erhalten Sie, indem Sie termweise rechnen – und dies dürfen Sie: Potenzreihen verhalten sich (innerhalb ihres Konvergenzbereichs) wie Polynome (von unendlichem Grad).

⚠ In  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  kommutieren je zwei Elemente, daher spüren Sie dort von der Kommutativität (3) nichts. Für Matrizen ist sie jedoch wesentlich.

# Konvergenz der Exponentialfunktion für Matrizen

😊 Wir wollen die Größe von Matrizen  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  messen und damit insbesondere Fragen der Konvergenz klären. Dazu benötigen wir eine **Matrixnorm**, also eine Abbildung  $\|-\| : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  mit den folgenden vier Eigenschaften für alle Matrizen  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  und Skalare  $\lambda \in \mathbb{K}$ :

$$\text{N0: } \|A\| \geq 0 = \|0\| \quad (\text{Positivität})$$

$$\text{N1: } \|A\| > 0 \text{ für } A \neq 0 \quad (\text{Definitheit})$$

$$\text{N2: } \|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad (\text{Homogenität})$$

$$\text{N3: } \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

$$\text{N4: } \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (\text{Submultiplikativität})$$

**Beispiel:** Die **Frobenius-Norm** entspricht der euklidischen Norm:

$$\|-\| = \|-\|_F : \mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R} : A \mapsto \|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

Auf  $\mathbb{K}^{m \times n}$  ist dies eine Norm (N0–3) und zudem submultiplikativ (N4) für je zwei komponierbare Matrizen  $A \in \mathbb{K}^{p \times q}$  und  $B \in \mathbb{K}^{q \times r}$ . (Übung!) Wir untersuchen Normen und Skalarprodukte später noch genauer.

# Konvergenz der Exponentialfunktion für Matrizen

**Aufgabe:** (0) Folgern Sie die Konvergenz der Matrix-Exponentialreihe.

**Lösung:** (a) Wir zeigen zuerst die absolute Konvergenz dieser Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \stackrel{N2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \stackrel{N4}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \stackrel{\text{Def}}{=} \exp(\|A\|) < \infty$$

(b) Der Raum  $\mathbb{K}^{n \times n}$  ist Cauchy-vollständig bezüglich der Norm  $\|-\|$ .

(c) Dank (a) konvergiert die Exponentialreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$  absolut, und dank (b) konvergiert sie auch in  $\mathbb{K}^{n \times n}$ . Zudem gilt die Abschätzung:

$$\|\exp(A)\| \stackrel{\text{Def}}{=} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \stackrel{N3}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \stackrel{(a)}{\leq} \exp(\|A\|)$$

😊 Für konvergente Potenzreihen gelten wunderschöne Rechenregeln: Sie verhalten sich (innerhalb ihres Konvergenzbereichs) wie Polynome! Insbesondere dürfen wir solche Reihen umordnen, termweise addieren, multiplizieren und differenzieren – wie von Polynomen vertraut.

Genauer hierzu lernen Sie im ersten Studienjahr der Analysis.

Wir wollen diese überaus nützlichen Rechenregeln dankend nutzen.

## Beispiel: Diagonalmatrizen

**Aufgabe:** Berechnen Sie die Exponentialfunktion  $\exp(A)$  einer Diagonalmatrix  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  sowie  $\exp(tA)$  für  $t \in \mathbb{R}$ .

**Lösung:** (0) Die Potenzen der Matrix  $A$  sind leicht zu berechnen:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \implies A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

(1) Hieraus berechnen wir ebenso leicht die Exponentialreihe:

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

(2) Mit dem Zeitparameter  $t \in \mathbb{R}$  im Exponenten erhalten wir:

$$\exp(tA) = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix}$$

## Beispiel: eine kleine Dreiecksmatrix

**Aufgabe:** Berechnen Sie  $\exp(A)$  einer  $2 \times 2$ -Dreiecksmatrix.

**Lösung:** (0) Wir betrachten eine obere  $2 \times 2$ -Dreiecksmatrix:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & (a+b)c \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} a^3 & (a^2 + ab + b^2)c \\ 0 & b^3 \end{bmatrix}, \dots$$

(1) Wir nehmen zunächst  $a \neq b$  an. Per Induktion finden wir dann

$$A^k = \begin{bmatrix} a^k & \frac{a^k - b^k}{a-b} c \\ 0 & b^k \end{bmatrix} \implies \exp \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^a & \frac{e^a - e^b}{a-b} c \\ 0 & e^b \end{bmatrix}.$$

(2) Resonanz: Für  $b \rightarrow a$  gilt  $\frac{e^a - e^b}{a-b} \rightarrow e^a$ . Für  $a = b$  finden wir tatsächlich:

$$A^k = \begin{bmatrix} a^k & k a^{k-1} c \\ 0 & a^k \end{bmatrix} \implies \exp \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^a & c e^a \\ 0 & e^a \end{bmatrix}.$$

Für große Matrizen ist diese Rechnung ebenso möglich, aber mühsam. Im Folgenden werden wir hierfür Eigen- und Hauptvektoren nutzen. Diese Werkzeuge erweisen sich auch hier als sehr effizient.

## Beispiel: ein nilpotenter Jordan-Block

**Aufgabe:** Berechnen Sie  $\exp(tN)$  einer nilpotenten Jordan-Matrix

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dots$$

**Lösung:** (1) Es gilt  $N^4 = 0$ . Die Exponentialreihe bricht hier ab:

$$\exp \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{N^0}{0!} + \frac{N^1}{1!} + \frac{N^2}{2!} + \frac{N^3}{3!} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) Mit dem Zeitparameter  $t \in \mathbb{R}$  im Exponenten erhalten wir:

$$\exp(tN) = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Beispiel: ein allgemeiner Jordan-Block

**Aufgabe:** Berechnen Sie  $\exp(tB)$  einer beliebigen Jordan-Matrix

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}.$$

**Lösung:** (1) Dank  $B = \lambda I + N$  und  $IN = NI$  erhalten wir

$$\exp(B) = \exp(\lambda I + N) = \exp(\lambda I) \exp(N) = e^\lambda \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) Mit dem Zeitparameter  $t \in \mathbb{R}$  im Exponenten erhalten wir:

$$\exp(tB) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Beispiel: eine euklidische Drehmatrix

**Aufgabe:** Lösen Sie das DGSystem  $x'_1 = -x_2$  und  $x'_2 = x_1$ .

**Lösung:** Wir lösen das Differentialgleichungssystem  $x' = Ax$  mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

Hieraus berechnen wir mühelos die Matrix-Exponentialfunktion:

$$\exp(tA) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots & -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \dots \\ t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

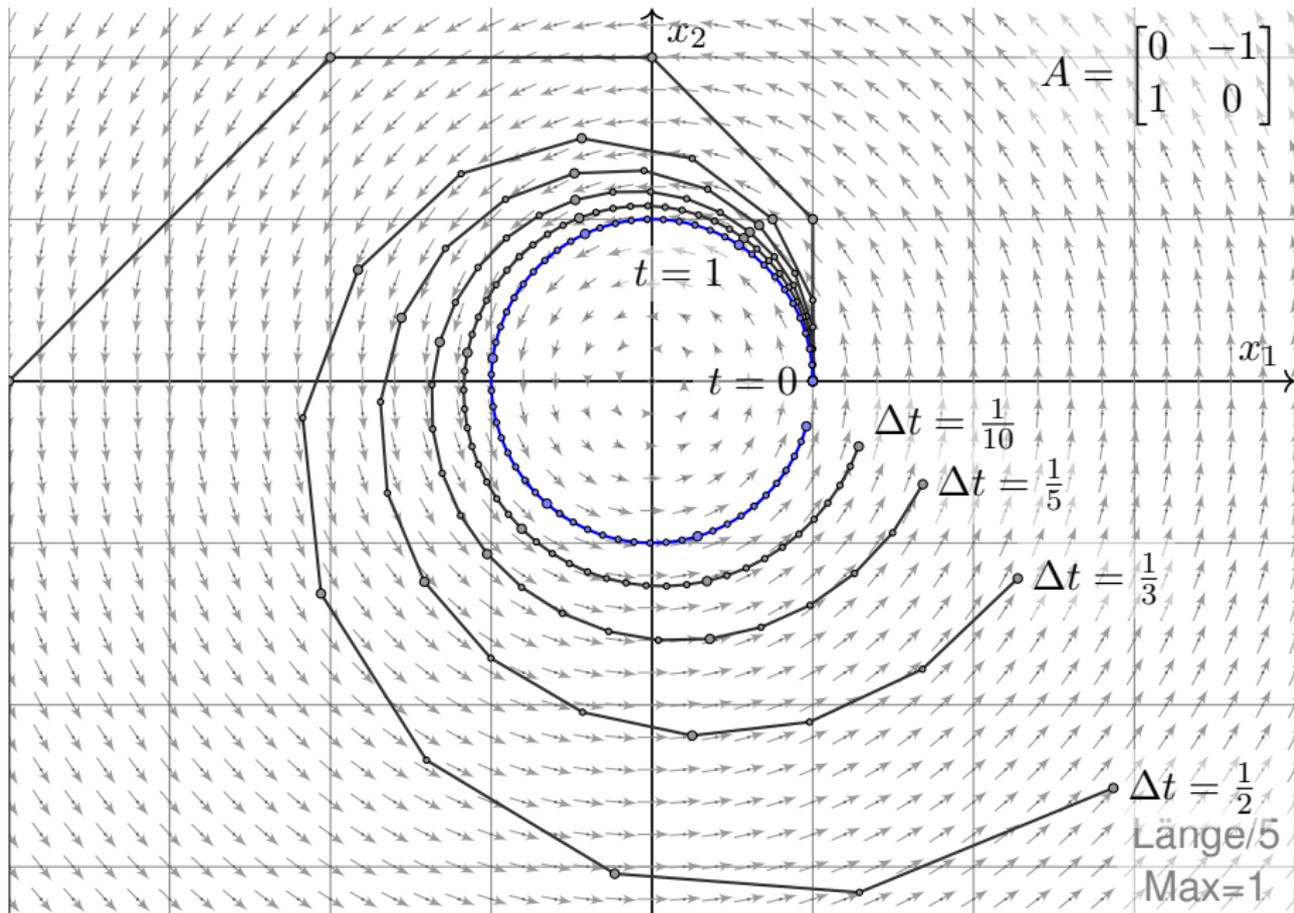
Die Probe ist leicht: Für die Ableitung gilt wie gewünscht

$$\frac{d}{dt}X(t) = \begin{bmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{bmatrix} = AX(t).$$

😊 Das AWP  $x' = Ax$  mit  $x(0) = v$  wird gelöst durch  $x(t) = \exp(tA)v$ .

😊 Das Euler-Verfahren zur numerischen Näherung entspricht hierbei dem Euler-Grenzwert  $(1 + \frac{1}{n}A)^n \rightarrow \exp(A)$  wie in der Graphik illustriert.

# Exponentialfunktion und Euler-Verfahren



## Beispiel: eine hyperbolische Drehmatrix

**Aufgabe:** Lösen Sie das DGSystem  $x'_1 = x_2$  und  $x'_2 = x_1$ .

**Lösung:** Wir lösen das Differentialgleichungssystem  $x' = Ax$  mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

Hieraus berechnen wir mühelos die Matrix-Exponentialfunktion:

$$\exp(tA) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots & t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \\ t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots & 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}$$

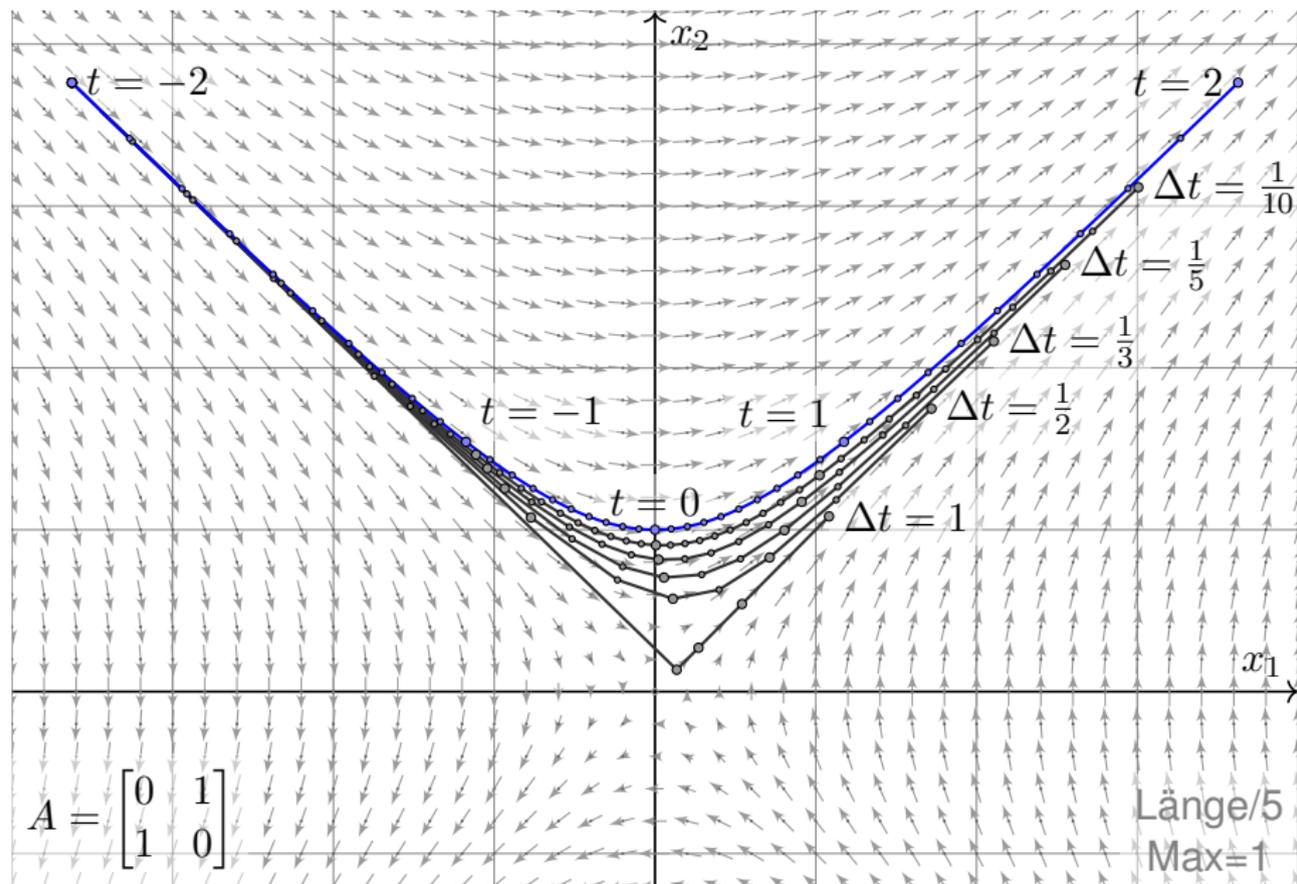
Die Probe ist leicht: Für die Ableitung gilt wie gewünscht

$$\frac{d}{dt}X(t) = \begin{bmatrix} \sinh t & \cosh t \\ \cosh t & \sinh t \end{bmatrix} = AX(t).$$

😊 Das AWP  $x' = Ax$  mit  $x(0) = v$  wird gelöst durch  $x(t) = \exp(tA)v$ .

😊 Das Euler-Verfahren zur numerischen Näherung entspricht hierbei dem Euler-Grenzwert  $(1 + \frac{1}{n}A)^n \rightarrow \exp(A)$  wie in der Graphik illustriert.

# Exponentialfunktion und Euler-Verfahren



# Die Matrix–Exponentialfunktion

😊 Diese schönen Beispiele illustrieren die Konstruktion von  $\exp(A)$  und zeigen zugleich eindrucklich, wie wir die Matrix-Exponentialfunktion in vielen günstigen Fällen ganz explizit und effizient berechnen können.

So ermutigt beweisen wir nun die Aussagen (2–9) des Satzes N3B. Die Aussagen (3) und (5) formuliere ich untenstehend als Aufgabe.

😊 Das ist eine gute Fingerübung, die jede/r Mathematiker/in im Schlaf beherrschen sollte: Die Rechnungen erweisen sich gleich als erfreulich einfache Umformungen. Das eigentlich Knifflige und das mathematisch Interessante sind die dahinterliegenden Rechenregeln für Potenzreihen!

😊 Wir danken der Analysis für die Bereitstellung guter Werkzeuge. Wer sie noch nicht gehört hat, darf sich ab jetzt schon darauf freuen.

**Bemerkung:** Die Konvergenz bezüglich der Matrixnorm  $\|-\|$  auf  $\mathbb{K}^{n \times n}$  ist äquivalent zur Konvergenz jeder Koordinate im Grundkörper  $\mathbb{K}$ . Für Konvergenzfragen sind daher alle Matrixnormen untereinander äquivalent, und wir dürfen uns die jeweils bequemste aussuchen.

# Die Matrix–Exponentialfunktion

Den Euler–Grenzwert (1), also  $(1 + \frac{1}{n}A)^n \rightarrow \exp(A)$  für  $n \rightarrow \infty$ , werde ich hier nicht beweisen, sondern der Analysis überlassen — oder wenn Sie es selbst versuchen wollen: Ihrer mathematischen Abenteuerlust.

Die Aussage (2) des Satzes hingegen ist klar, denn wir haben:

$$\exp(0) \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} \stackrel{\text{Def}}{=} I + 0 + 0 + \dots = I$$

Dank Funktionalgleichung (3) folgt daraus die Inversionsformel (4):

$$\exp(A) \exp(-A) \stackrel{(4)}{=} \exp(A - A) \stackrel{(2)}{=} I$$

Somit ist die Matrix  $\exp(A)$  invertierbar mit  $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$ .

Wir kommen nun zu den interessanten Aussagen (3) und (5).

Diese haben wir in den obigen Beispielen bereits in Aktion gesehen.

Nun wollen wir diese nützlichen Rechenregeln allgemein beweisen.

# Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

**Aufgabe:** (3) Für je zwei kommutierende Matrizen  $A, B \in K^{n \times n}$  gilt:

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) \quad \text{falls} \quad AB = BA.$$

**Lösung:** Dank (a) Umordnungssatz und (b) binomischem Lehrsatz gilt

$$\begin{aligned} \exp(A) \exp(B) &\stackrel{\text{Def}}{=} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right] \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B^\ell}{\ell!} \right] \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \frac{B^\ell}{\ell!} \\ &\stackrel{(a)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+\ell=n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^\ell}{\ell!} \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\ &\stackrel{(b)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A + B)^n \stackrel{\text{Def}}{=} \exp(A + B). \end{aligned}$$

😊 Dies entspricht dem **Potenzgesetz**, daher die Kurzschreibweise

$$e^A := \exp(A) \quad \text{und} \quad e^{A+B} = e^A e^B.$$

😊 Das ist wörtlich die Rechnung für die reelle Exponentialfunktion!

# Die Ableitung der Exponentialfunktion

**Aufgabe:** (5) Aus der Exponentialreihe folgt die **Ableitungsregel**

$$\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA).$$

**Lösung:** Dank (a) Ableitungsregel für Potenzreihen gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp(tA) &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k &&\stackrel{(a)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{t^k}{k!} A^k \\ &\stackrel{\text{Abl}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k &&\stackrel{\text{Ind}}{=} A \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j &&\stackrel{\text{Def}}{=} A \exp(tA). \end{aligned}$$

Wir nutzen hier die Indexverschiebung  $k = j + 1$ , umgekehrt  $j = k - 1$ .

😊 In Kurzschreibweise erhalten wir die vertraute Formel

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}.$$

😊 Das ist eine definierende Eigenschaft der Exponentialfunktion. Genau diese nutzen wir zur Lösung von Differentialgleichungen!

## Exponentialfunktion und Matrixoperationen

**Aufgabe:** Beweisen Sie sorgsam die Aussagen (6–9) des Satzes N3B.

**Lösung:** (6) Die Transposition  $\tau : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  quadratischer Matrizen ist ein Ringantiautomorphismus, denn es gilt  $(A + B)^\tau = A^\tau + B^\tau$  und  $(A \cdot B)^\tau = B^\tau \cdot A^\tau$  sowie  $(A^\tau)^\tau = A$  für alle  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \exp(A^\tau) &\stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=0}^N \frac{(A^\tau)^k}{k!} \right] \stackrel{(a)}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \right]^\tau \\ &\stackrel{(b)}{=} \left[ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \right]^\tau \stackrel{\text{Def}}{=} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right]^\tau \stackrel{\text{Def}}{=} \exp(A)^\tau \end{aligned}$$

Für die Gleichung (b) nutzen wir die Stetigkeit der Abbildung  $\tau$ . Wir gehen bei dieser einfachen Rechnung bewusst kleinschrittig vor, so sehen wir genau, welche Eigenschaften wirklich benötigt werden: Für jeden stetigen Ring(anti)homomorphismus  $\Phi : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  gilt

$$\exp(\Phi(A)) = \Phi(\exp(A)).$$

## Exponentialfunktion und Matrixoperationen

(7) Die komplexe Konjugation  $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$  ist ein Körperautomorphismus, denn es gilt  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$  und  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$  sowie  $\overline{\bar{z}} = z$  für alle  $z, w \in \mathbb{C}$ . Für Matrizen über  $\mathbb{C}$  definieren wir die komplexe Konjugation koeffizientenweise durch

$$\bar{\cdot} : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n} : A = (a_{ij}) \mapsto \bar{A} = (\overline{a_{ij}}).$$

Dies ist ein Ringautomorphismus von  $(\mathbb{C}^{n \times n}, +, \cdot)$  und zudem stetig. (Warum? Nachrechnen!) Wie in (6) folgt daraus  $\exp(\bar{A}) = \overline{\exp(A)}$ .

(8) Für jede invertierbare Matrix  $T \in GL_n \mathbb{K}$  ist die Konjugation

$$\text{conj}_T : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n} : A \mapsto T^{-1}AT$$

ein Ringautomorphismus von  $(\mathbb{K}^{n \times n}, +, \cdot)$  und stetig. (Warum? Übung!) Wie in (6) folgt daraus  $\exp(T^{-1}AT) = T^{-1}\exp(A)T$ .

## Exponentialfunktion und Matrixoperationen

(9) Wir zeigen schließlich die bemerkenswerte Determinantengleichung

$$\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A)).$$

(9a) Wir beweisen dies zunächst für Dreiecksmatrizen. Hier gilt:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \implies A^k = \begin{bmatrix} a_{11}^k & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn}^k \end{bmatrix}$$

Damit erhalten wir ohne weitere Mühe:

$$\begin{aligned} \det \exp \begin{bmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} &\stackrel{\text{Def}}{=} \det \begin{bmatrix} \exp(a_{11}) & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \exp(a_{nn}) \end{bmatrix} \\ &\stackrel{\text{L2v}}{=} \exp(a_{11}) \cdots \exp(a_{nn}) \\ &\stackrel{(3)}{=} \exp(a_{11} + \cdots + a_{nn}) \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \exp(\operatorname{tr}(A)) \end{aligned}$$

## Exponentialfunktion und Matrixoperationen

(9b) Für den allgemeinen Fall nutzen wir Satz M3B:

Über  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ist jede Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  trigonalisierbar, es existiert also  $T \in GL_n \mathbb{C}$ , so dass  $T^{-1}AT$  trigonal ist.

Determinante und Spur bleiben dabei unverändert (M2F):

$$\begin{aligned} \det(\exp(A)) &\stackrel{\text{M2F}}{=} \det(T^{-1} \exp(A) T) &&\stackrel{(8)}{=} \det(\exp(T^{-1}AT)) \\ &\stackrel{(9a)}{=} \exp(\text{tr}(T^{-1}AT)) &&\stackrel{\text{M2F}}{=} \exp(\text{tr}(A)) \end{aligned}$$

(9c) Jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  können wir in  $\mathbb{C}^{n \times n}$  betrachten.

Determinante und Spur bleiben dabei unverändert.

Dank (9b) gilt somit  $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$ .

😊 Wieder einmal fügen sich Theorie und Praxis wunderbar zusammen, solide Grundlagen führen zu hilfreichen Rechenregeln. Dazu betone ich: Im *Beweis* nutzen wir die Trigonalisierung, in *Rechnungen* jedoch nicht.

😊 Für große Matrizen ist die Berechnung der Exponentialfunktion und der Determinante im Allgemeinen sehr aufwändig. Die Berechnung der Komposition  $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$  hingegen ist erfreulich leicht!

# Von Eigenvektoren zu Eigenfunktionen

**Aufgabe:** Gegeben seien die Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  und der Vektor  $v \in \mathbb{K}^n$ . Zu lösen ist das Differentialgleichungssystem mit Anfangswert

$$u'(t) = A u(t), \quad u(0) = v.$$

Wie sieht die Lösung aus, wenn  $v$  ein Eigenvektor von  $A$  ist?

**Lösung:** Nach Voraussetzung gilt  $Av = \lambda v$  mit dem Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

(1) Wie betrachten die Funktion  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n : t \mapsto u(t) = e^{\lambda t} v$ .

Es gilt  $u'(t) = \lambda u(t)$  und  $Au(t) = \lambda u(t)$ , also löst  $u$  die ersehnte Differentialgleichung  $u'(t) = Au(t)$  mit dem Anfangswert  $u(0) = v$ . Dank Eindeutigkeit ist dies *die* Lösung des Anfangswertproblems.

(2) Dieselbe Antwort erhalten wir, wenn wir die Exponentialfunktion  $e^{tA}$  auf den Eigenvektor  $v$  anwenden und  $u(t) = e^{tA} v$  vereinfachen:

$$e^{tA} v = \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right] v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A^k v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\lambda^k v) = \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda^k \right] v = e^{t\lambda} v$$

Die Konvergenz klärt man wie oben, etwa mit der Frobenius-Norm.

## Von Eigenvektoren zu Eigenfunktionen

## Satz N3C: Lösung eines DGSystems durch Eigenfunktionen

Gegeben sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Zu lösen sei das DGSystem  $u'(t) = A u(t)$ .

(1) Jeder Eigenvektor  $v \in \mathbb{K}^n$  mit  $Av = \lambda v$  definiert eine Eigenfunktion

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n : t \mapsto u(t) = e^{\lambda t} v.$$

Diese löst das DGSystem  $u'(t) = A u(t)$  mit dem Anfangswert  $u(0) = v$ .  
Zeitlich verschoben zu  $\tilde{u}(t) = u(t - t_0)$  gilt  $\tilde{u}'(t) = A \tilde{u}(t)$  mit  $\tilde{u}(t_0) = v$ .

(2) Angenommen, die Matrix  $A$  ist über  $\mathbb{K}$  diagonalisierbar, erlaubt also eine Basis  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$  aus Eigenvektoren. Dann lösen wir unser DGSystem durch eine Basis aus Eigenfunktionen  $u_k(t) = e^{\lambda_k t} v_k$ :

Jede Lösung des DGSystems  $u'(t) = A u(t)$  ist eine Linearkombination  $u = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$  mit eindeutigen Koeffizienten  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ .

😊 Ist die Matrix  $A$  diagonalisierbar, so ist damit die Lösung leicht!

☹️ Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar. Was tun? Hauptvektoren!

# Von Hauptvektoren zu Hauptfunktionen

😊 Eine wichtige Anwendung von Eigen- und Hauptvektoren ist die exakte Lösung linearer Differentialgleichungssysteme  $u'(t) = A u(t)$ :

## Satz N3D: Lösung eines DGSystems durch Hauptfunktionen

Gegeben sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Zu lösen sei das DGSystem  $u'(t) = A u(t)$ .

Hierzu sei  $0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} v_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_\ell$  eine **Hauptvektorkette**.

Diese löst das DGSystem durch die **Hauptfunktionen**  $u_1, \dots, u_\ell$  mit

$$u_k(t) = e^{\lambda t} \left[ v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right].$$

Wie die Hauptvektoren bilden auch die Hauptfunktionen eine Kette:

$$\begin{array}{l} 0 \xleftarrow{A-\lambda} u_1 \xleftarrow{A-\lambda} u_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} u_\ell \quad \text{also} \quad Au_k = \lambda u_k + u_{k-1}, \\ 0 \xleftarrow{\partial-\lambda} u_1 \xleftarrow{\partial-\lambda} u_2 \xleftarrow{\partial-\lambda} \dots \xleftarrow{\partial-\lambda} u_\ell \quad \text{also} \quad u'_k = \lambda u_k + u_{k-1}. \end{array}$$

Es gilt  $u_k(0) = v_k$ ; verschoben zu  $\tilde{u}_k(t) = u_k(t - t_0)$  gilt  $\tilde{u}_k(t_0) = v_k$ .

# Von Hauptvektoren zu Hauptfunktionen

Die Hauptvektoren  $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{K}^n$  sind linear unabhängig, daher auch die zugehörigen Hauptfunktionen  $u_1, \dots, u_\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ , denn  $u_k(0) = v_k$ .

Ist  $A$  diagonalisierbar, so existiert eine Basis aus Eigenfunktionen (N3C).

Ist  $A$  nicht diagonalisierbar, so doch immerhin noch jordanisierbar:

Über  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  finden wir immer eine Basis aus Hauptvektorketten!

Über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  erhalten wir daraus reelle Lösungen, siehe unten.

😊 Damit ist das zunächst recht schwierige analytische Problem, ein DGSsystem  $u'(t) = Au(t)$  zu lösen, zurückgeführt auf das einfachere algebraische Problem, Hauptvektoren der Matrix  $A$  zu berechnen.

😊 Das ist mitunter mühsam aber letztlich Routinearbeit. Es kann insbesondere von Computer-Algebra-Systemen ausgeführt werden. In günstigen Fällen gelingt uns die Lösung direkt per Handrechnung.

😊 Wir erkennen hieran Stabilität und Langzeitverhalten der Lösungen:  
Für  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  gilt exponentielles Abklingen,  $|u_k(t)| \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .  
Für  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  gilt exponentielles Wachstum,  $|u_k(t)| \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$ .  
Für  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  ist  $u_1$  beschränkt, aber  $u_2, \dots, u_\ell$  wachsen polynomiell.

# Anwendungsbeispiel zu Hauptfunktionen

**Aufgabe:** Finden Sie ein Fundamentalsystem aus Hauptfunktionen zu

$$(1) \quad u' = A u \text{ mit } A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (2) \quad u' = B u \text{ mit } B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Wie verhalten sich die Lösungen für  $t \rightarrow \infty$  und  $\lambda < 0$ ?  $\lambda > 0$ ?  $\lambda = 0$ ?

**Lösung:** (1) Die Matrix  $A$  hat den doppelten Eigenwert  $\lambda$ .

Eigenvektoren bestimmen wir durch  $(A - \lambda)v = 0$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0, \quad \text{mögliche Lösungen } v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten das Fundamentalsystem bzw. die Fundamentalmatrix:

$$u_1(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \implies \quad U(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

😊 Jede andere Basis  $(v_1, v_2)^T$  des  $\mathbb{C}^2$  wäre hier ebenso möglich.

Sie führt zum Fundamentalsystem  $u_1(t) = e^{\lambda t}v_1$ ,  $u_2(t) = e^{\lambda t}v_2$ .

⚠️ Eigenvektoren von  $A$  entsprechen Eigenfunktionen von  $u' = A u$ , aber es sind verschiedene Objekte: Bitte sauber unterscheiden!

## Anwendungsbeispiel zu Hauptfunktionen

(2) Auch die Matrix  $B$  hat den doppelten Eigenwert  $\lambda$ . Eigenvektoren:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v_1 = 0, \quad \text{eine Lösung } v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wir suchen daher noch einen Hauptvektor  $v_2$  über  $v_1$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v_2 = v_1, \quad \text{eine Lösung } v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten das Fundamentalsystem bzw. die Fundamentalmatrix:

$$u_1(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad U(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

😊 Andere Wahlen sind möglich: Jeder Vektor  $v_1 = (a, 0)^\top$  mit  $a \neq 0$  ist Eigenvektor, und jeder Vektor  $v_2 = (b, a)^\top$  liegt darüber als Hauptvektor.

$$u_1(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} at + b \\ a \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad U(t) = \begin{bmatrix} a e^{\lambda t} & (at + b) e^{\lambda t} \\ 0 & a e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

⚠️ Hauptvektoren von  $A$  entsprechen Hauptfunktionen von  $u' = Au$ , aber es sind verschiedene Objekte: Bitte sauber unterscheiden!

# Anwendungsbeispiel zu Hauptfunktionen

---

# Anwendungsbeispiel zu Hauptfunktionen

---

## Von komplexen zu reellen Lösungen

Zur Vereinfachung rechnen wir meist über den komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ .

Vorteil: Jede Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  hat  $n$  Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ .

Für eine reelle Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  werden wir im Allgemeinen nicht  $n$  reelle Eigenwerte finden: Wir brauchen auch komplexe Eigenwerte!

Für reelle DGSysteme wollen wir aber meist nur reelle Lösungen!

Diesen Zusammenhang können wir nun klären, wie bereits gesehen:

### Lemma N3E: Konjugation von Lösungen und Basiswechsel

(0) Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Zu lösen sei das DGSystem

$$u'(t) = A u(t).$$

Ist  $u$  Lösung von  $u'(t) = A u(t)$ , so ist  $\bar{u}$  Lösung von  $\bar{u}'(t) = \bar{A} \bar{u}(t)$ .

(1) Genau dann ist die Matrix reell, also  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , wenn  $\bar{A} = A$  gilt. In diesem Fall ist zu  $u$  mit  $u' = A u$  auch  $\bar{u}$  mit  $\bar{u}' = A \bar{u}$  eine Lösung.

Somit sind  $\operatorname{Re} u = \frac{1}{2}(u + \bar{u})$  und  $\operatorname{Im} u = \frac{1}{2i}(u - \bar{u})$  reelle Lösungen.

Dies entspricht einem Basiswechsel von  $(u, \bar{u})$  zu  $(\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u)$ .

## Von komplexen zu reellen Lösungen

## Satz N3F: reelle Lösungen

Gegeben sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Zu lösen sei das DGSystem  $u'(t) = A u(t)$ .

Sei  $0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_\ell$  eine Hauptvektorkette zu  $\lambda = \sigma + i\omega$ .

Dann ist  $0 \xleftarrow{A-\bar{\lambda}} \bar{v}_1 \xleftarrow{A-\bar{\lambda}} \dots \xleftarrow{A-\bar{\lambda}} \bar{v}_\ell$  eine Hauptvektorkette zu  $\bar{\lambda} = \sigma - i\omega$ .

Somit hat das DGSystem die folgenden  $2\ell$  **reellen Lösungen**:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} u_k(t) &= e^{\sigma t} \operatorname{Re} \left( e^{i\omega t} \left[ v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right] \right) \\ \operatorname{Im} u_k(t) &= e^{\sigma t} \operatorname{Im} \left( e^{i\omega t} \left[ v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right] \right) \end{aligned}$$

Im Falle  $\omega \neq 0$  sind diese  $2\ell$  Lösungen linear unabhängig. (Im Falle  $\omega = 0$  erhalten wir nur eine Kette von  $\ell$  linear unabhängigen Lösungen.)

😊 Wir erkennen hieran Stabilität und Langzeitverhalten der Lösungen, wie oben erklärt, je nach Vorzeichen  $\sigma > 0$  oder  $\sigma < 0$  oder  $\sigma = 0$ .

## Anwendungsbeispiel: komplex und reell

**Aufgabe:** Zu lösen sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} u_1' = -2u_1 + 1u_2, & u_1(0) = 1, \\ u_2' = -1u_1 - 2u_2, & u_2(0) = 2. \end{cases}$$

- (1) Finden Sie ein komplexes Fundamentalsystem und (2) ein reelles.
- (3) Stabilität: Wie verhalten sich die Lösungen für  $t \rightarrow \infty$ ?
- (4) Lösen Sie schließlich das AWP.

**Lösung:** In Matrix-Schreibweise gilt  $u' = Au$  mit  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ .

Das charakteristische Polynom der Matrix  $A$  ist:

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ -1 & -2 - \lambda \end{bmatrix} = (-2 - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 5$$

Die Nullstellen sind  $\lambda_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 - 5} = -2 \pm i$ . Eigenvektoren?

Zu  $\lambda_1 = -2 + i$ :  $\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} v_1 = 0$ , eine Lösung  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

Zu  $\lambda_2 = -2 - i$ :  $\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} v_2 = 0$ , eine Lösung  $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

# Anwendungsbeispiel: komplex und reell

(1) Komplexes Fundamentalsystem des DGSystems:

$$u_1(t) = e^{(-2+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} +\cos t + i \sin t \\ -\sin t + i \cos t \end{bmatrix}, \quad u_2(t) = e^{(-2-i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

(2) Reelles Fundamentalsystem des DGSystems:

$$x_1(t) = \operatorname{Re} u_1(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}, \quad x_2(t) = \operatorname{Im} u_1(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

(3) Die allgemeine reelle Lösung klingt exponentiell ab:

$$x(t) = X(t) c = e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

(4) Spezielle Lösung zu den gegebenen Anfangsdaten:

$$x(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \implies x(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos t + 2 \sin t \\ 2 \cos t - \sin t \end{bmatrix}.$$



Dies löst das Anfangswertproblem. Machen Sie die Probe!

## Satz N3G: Lösungen eines homogenen DGSystems

Gegeben seien  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Wir betrachten die Lösungsmenge

$$L = \{ u \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n) \mid u' = Au \}.$$

(0) **Globale Existenz und Eindeutigkeit:** Zu jedem Anfangsdatum  $(t_0, v) \in I \times \mathbb{K}^n$  existiert genau eine Lösung  $u \in L$  mit  $u(t_0) = v$ :

$$u(t) = e^{(t-t_0)A} v$$

Die Auswertung  $\Psi_{t_0} : L \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n : u \mapsto u(t_0)$  ist also eine Bijektion.

(1)  $L = \{ u \mid u' = Au \}$  ist ein **Vektorraum** der Dimension  $n$  über  $\mathbb{K}$ .  
Wir finden ein **Fundamentalsystem**  $u_1, \dots, u_n \in L$ , also eine Basis:

$$L = \{ c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \} \cong \mathbb{K}^n$$

(2) Über  $\mathbb{C}$  finden wir explizit eine Basis aus Hauptfunktionen (N3D),  
über  $\mathbb{R}$  entsprechend durch die zugehörigen reellen Lösungen (N3F).

## Lösungen eines homogenen Differentialgleichungssystems

⚠ Die Menge  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$  aller  $n$ -mal stetig diff'baren Funktionen ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Allerdings ist er unendlich-dimensional; daher greifen die so erfolgreichen Methoden der Matrizenrechnung wie etwa der Gauß-Algorithmus hier nicht. Wir müssen genauer hinsehen!

😊 Glücklicherweise ist unser Lösungsraum  $L$  endlich-dimensional, und wir können allgemein die Dimension  $\dim_{\mathbb{K}}(L) = n$  bestimmen. Bei jeder konkreten Berechnung wissen wir daher genau, wie viele Lösungen wir suchen müssen und wann wir alle gefunden haben!

😊 Die Dimension  $\dim_{\mathbb{K}}(L) = n$  besagt  $L \cong \mathbb{K}^n$ , zunächst allgemein. Besonders nützlich sind die konkreten Isomorphismen  $\Psi_{t_0} : L \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n$ . Wir haben Existenz und Eindeutigkeit oben explizit durchgerechnet.

😊 Zu Verständnis und Lösung von Differentialgleichungen arbeiten Analysis und Lineare Algebra wunderbar zusammen. Hier wie überall lohnt sich Ihre Investition in solide mathematische Grundlagen.

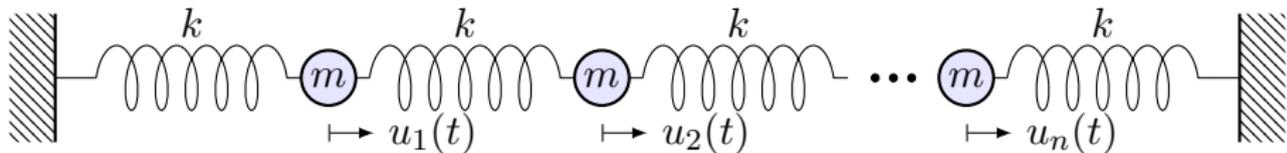


# Lösungen eines homogenen Differentialgleichungssystems

---

# Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

Wir untersuchen die Ausbreitung einer Welle, zum Beispiel einer Druck- oder Schallwelle, zunächst als diskretes, endlich-dimensionales Modell: mit Federn verbundene Massenpunkte. In diesem schönen Beispiel können wir alles explizit berechnen und anschaulich interpretieren. Zudem können wir unsere Methoden der linearen Algebra und Analysis erproben und schärfen.



- Aufgabe:** (1) Formulieren Sie das hier skizzierte dynamische System als ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung.
- (2) Welche Struktur hat die Lösungsmenge? (a) „Form“ und (b) „Größe“?
- (3) Finden Sie alle Lösungen zum Produktansatz  $u_j(t) = e^{i\alpha_j} e^{i\omega t}$ .
- (4) Gewinnen Sie hieraus eine reelle Basis des Lösungsraumes.

## Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

**Lösung:** (1a) Auslenkung  $u_j(t) \in \mathbb{R}$  aus der Ruhelage, lineare Rückstellkraft  $F_j = k(u_{j+1} - u_j) + k(u_{j-1} - u_j)$ , Newtons Bewegungsgesetz  $F_j = m\ddot{u}_j$ . Mit  $c^2 = k/m$  erhalten wir

$$\ddot{u}_j(t) = c^2 [u_{j-1}(t) - 2u_j(t) + u_{j+1}(t)] \quad \text{mit} \quad u_0(t) = u_{n+1}(t) = 0.$$

Dies gilt für jeden der Massenpunkte  $j = 1, \dots, n$  im Inneren der Kette. Randbedingung: Die beiden Enden  $u_0 = u_{n+1} = 0$  sind hierbei fixiert.

(1b) Diese Bewegungsgleichung ist zweiter Ordnung in  $n$  Unbekannten. Wir reduzieren sie nun äquivalent zu erster Ordnung in  $2n$  Unbekannten:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}(t) \\ \ddot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ c^2 B_n & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}$$

Für  $x = (u, \dot{u})$  ist dies eine homogene lineare Differentialgleichung  $\dot{x}(t) = A x(t)$  mit der angegebenen Koeffizientenmatrix  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ . Hier ist  $0_n$  die  $(n \times n)$ -Nullmatrix und  $I_n$  die  $(n \times n)$ -Einheitsmatrix.

## Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

Die Bandmatrix  $B_n$  kodiert hierbei die geometrische Anordnung:

$$B_n := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

(2) Wir suchen  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  mit  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  und  $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ c^2 B & 0 \end{pmatrix}$ .

Die Menge aller Lösungen  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  ist ein  **$\mathbb{R}$ -Vektorraum**.

Dank  $\exists$ &E-Satz N3G hat dieser Vektorraum die **Dimension  $2n$** .

Genauer: Dank Existenz und Eindeutigkeit gehört zu jedem Startwert  $x(0) = (u(0), \dot{u}(0)) \in \mathbb{R}^{2n}$  genau eine Lösungsfunktion  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ .

😊 Diese Information strukturiert und erleichtert unsere Rechnung: Wir müssen jetzt nur noch  $2n$  linear unabhängige Lösungen finden. Das DGSsystem scheint kompliziert, doch wir können es explizit lösen!

## Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

(3) Einsetzen des Produktansatzes  $u_j(t) = e^{i\omega t} e^{i\alpha j}$  ergibt:

$$-\omega^2 e^{i\omega t} e^{i\alpha j} = c^2 [e^{i\omega t} e^{i\alpha(j-1)} - 2e^{i\omega t} e^{i\alpha j} + e^{i\omega t} e^{i\alpha(j+1)}] \quad \text{also}$$

$$\omega^2 = -c^2(e^{-i\alpha} - 2 + e^{i\alpha}) = -c^2(e^{-i\alpha/2} - e^{i\alpha/2})^2 = 4c^2 \sin(\alpha/2)^2$$

Zu jedem  $\alpha$  erhalten wir  $\omega = \pm 2c \sin(\alpha/2)$ . Reelle Lösungen sind:

$$u_j(t) = \begin{cases} \sin(\alpha j) \cos(\omega t), & \cos(\alpha j) \cos(\omega t), \\ \sin(\alpha j) \sin(\omega t), & \cos(\alpha j) \sin(\omega t), \end{cases}$$

**Randbedingungen:** Die beiden linken Lösungen erfüllen  $u_0(t) = 0$ , und  $u_{n+1}(t) = 0$  für  $\alpha = \ell\pi/(n+1)$  und  $\ell = 1, \dots, n$ . **Eigenfunktionen:**

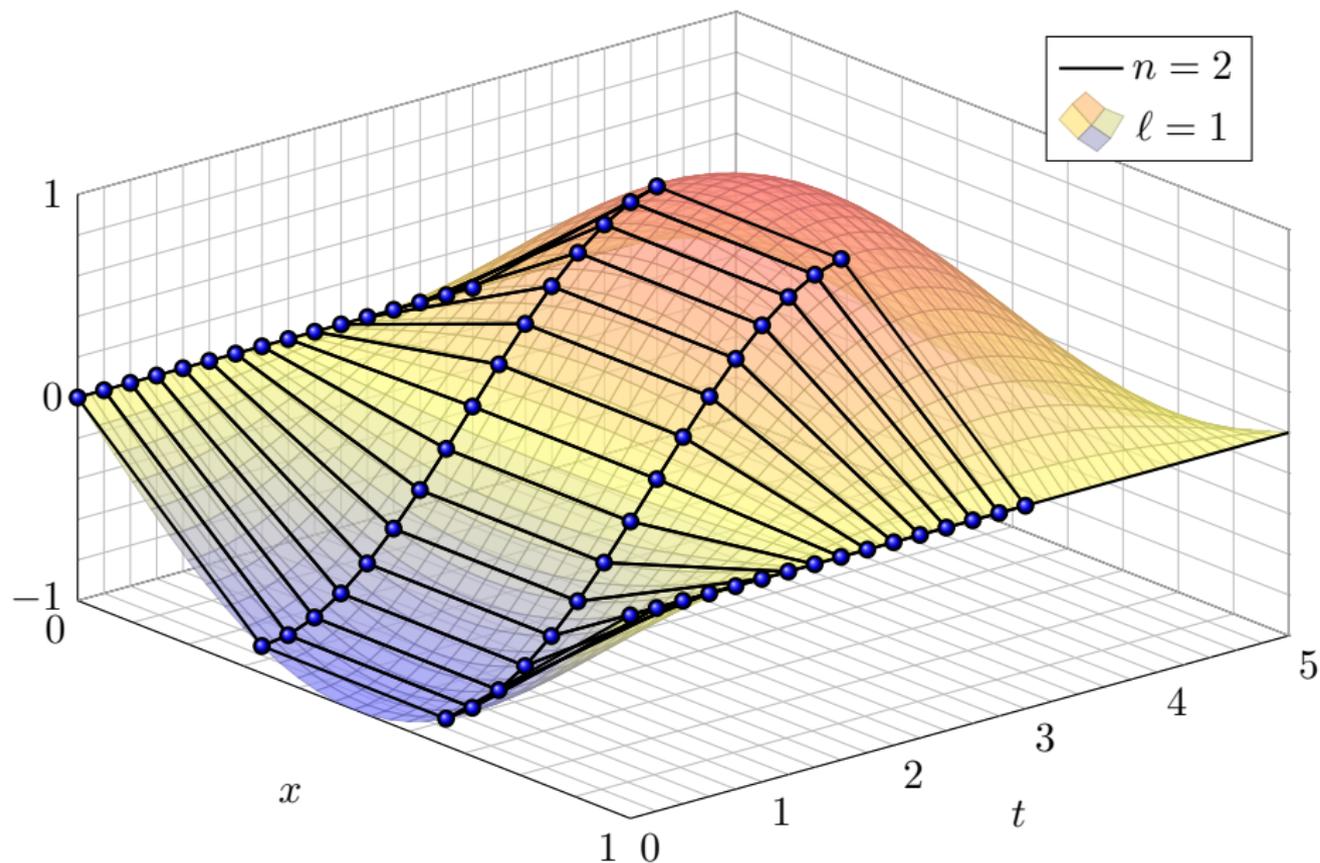
$$\left. \begin{aligned} u_{\ell,j}(t) &= \sin(\alpha_{\ell} j) \cos(\omega_{\ell} t) \\ v_{\ell,j}(t) &= \sin(\alpha_{\ell} j) \sin(\omega_{\ell} t) \end{aligned} \right\} \text{ mit } \begin{cases} \alpha_{\ell} = \ell\pi/(n+1), \\ \omega_{\ell} = 2c \sin(\alpha_{\ell}/2). \end{cases}$$

(4) Dies sind  $2n$  linear unabhängige Lösungen, also eine **Basis**!

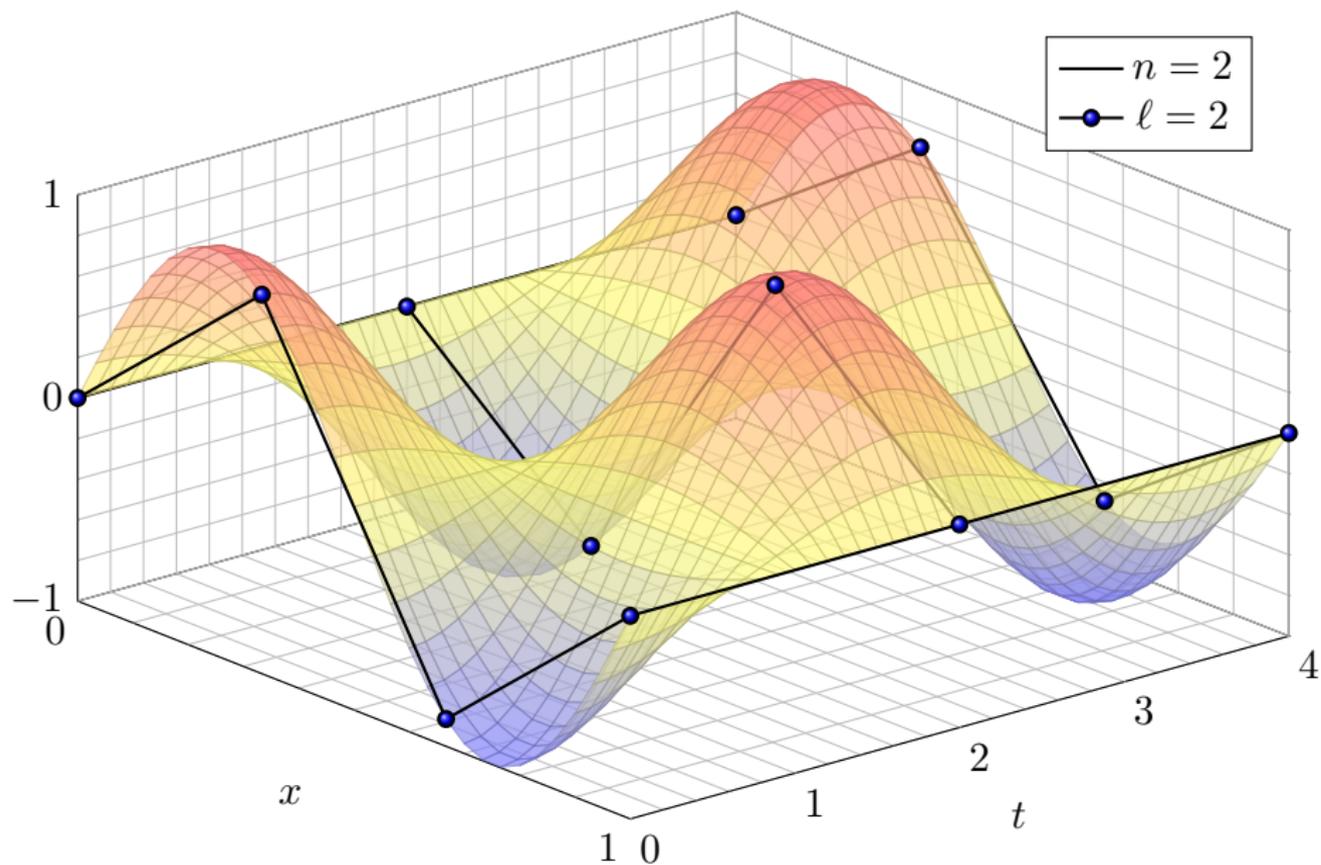
Je zwei unabhängige Eigenfunktionen,  $\partial_t^2 u_{\ell} = -\omega_{\ell}^2 u_{\ell}$ ,  $\partial_t^2 v_{\ell} = -\omega_{\ell}^2 v_{\ell}$ .

Die doppelten Eigenwerte  $\omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots < \omega_n^2$  sind verschieden.

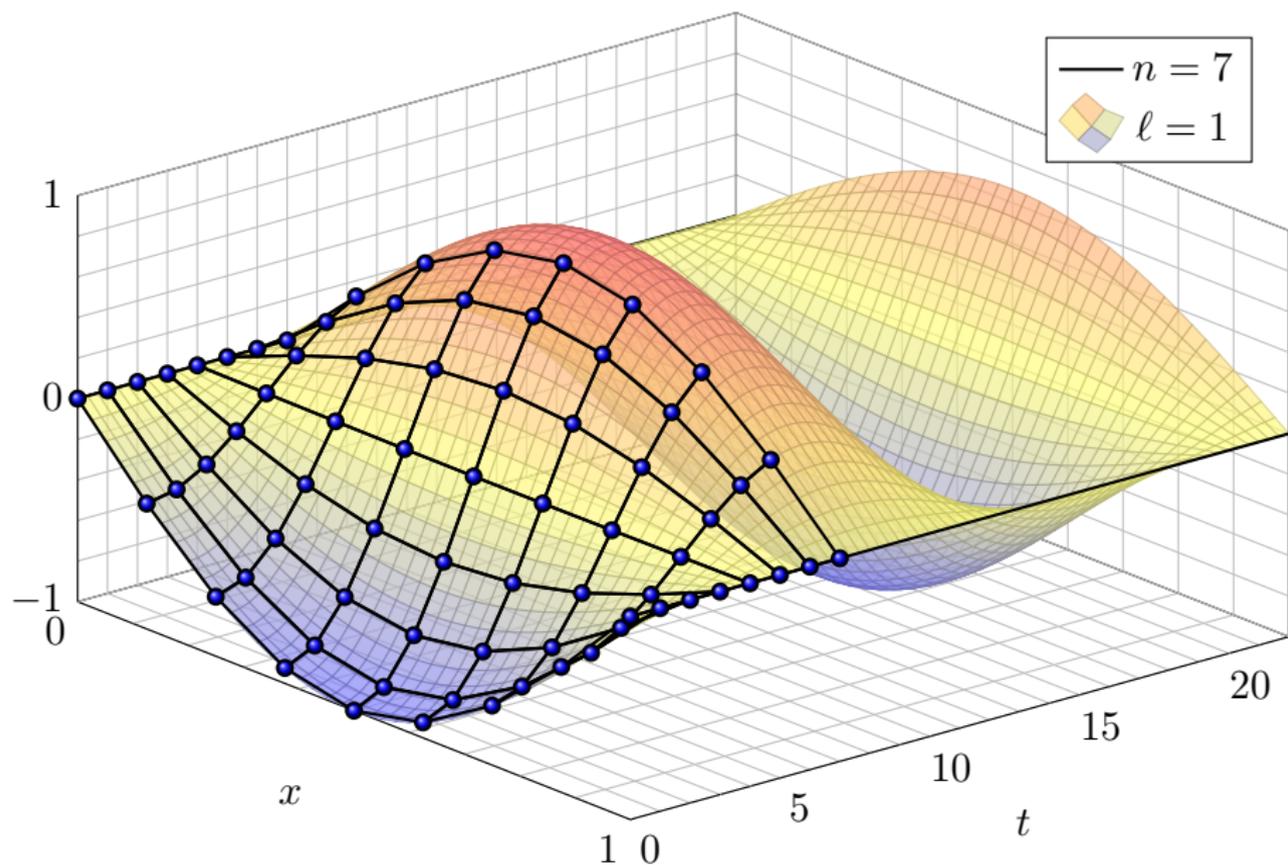
Daher sind die zugehörigen Eigenfunktionen linear unabhängig.

Eigenfunktionen: Grundschiwingung ( $\ell = 1$ )

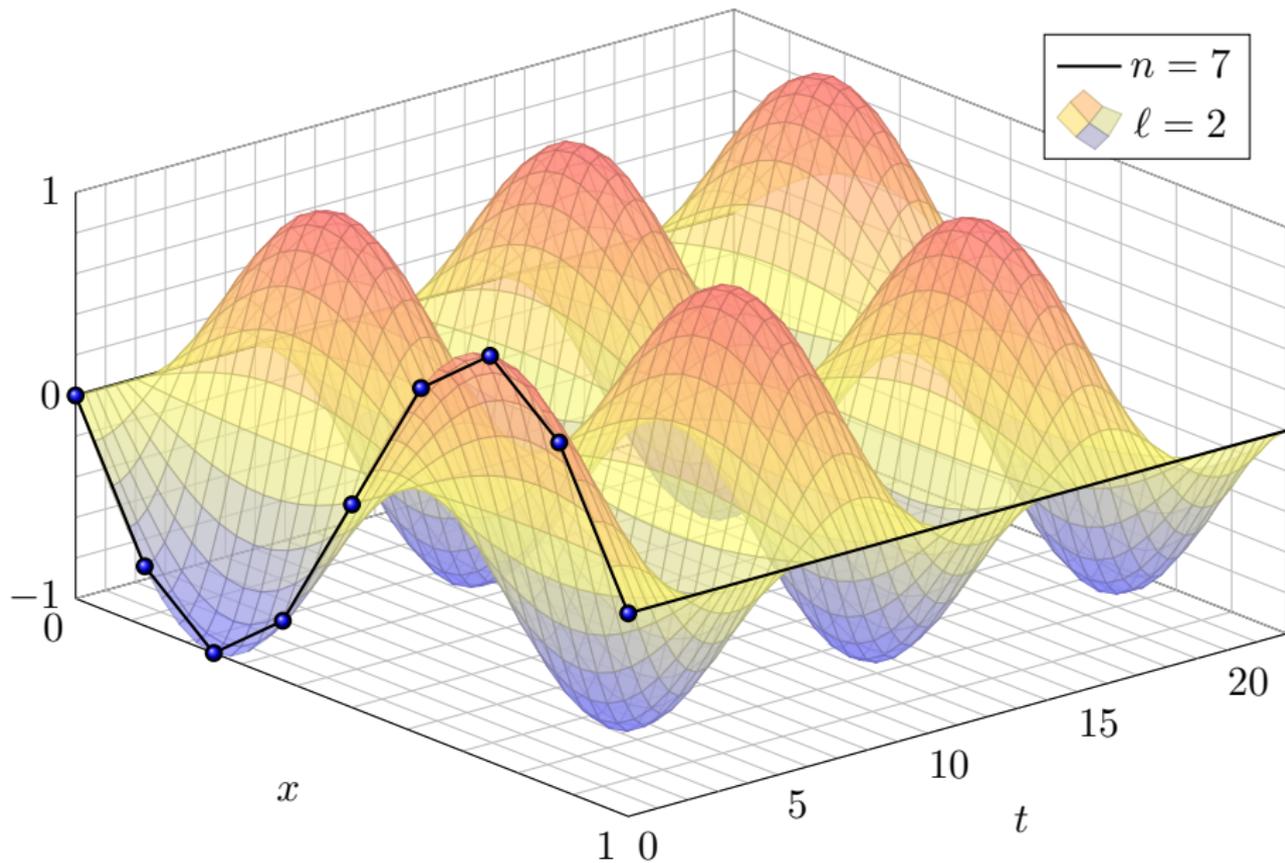
Dies ist eine stehende Welle; Randbedingungen  $u_0(t) = u_{n+1}(t) = 0$ .

Eigenfunktionen: Oberschwingung ( $\ell = 2$ )

Auch dies ist eine stehende Welle; die Frequenz  $\omega_2 > \omega_1$  wird größer.

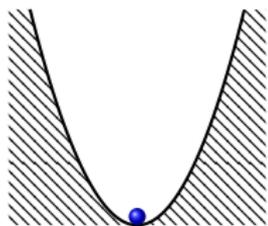
Eigenfunktionen: Grundschiwingung ( $\ell = 1$ )

Dieses Phänomen kennt jedes Kind vom Seilspringen. Probieren Sie es!

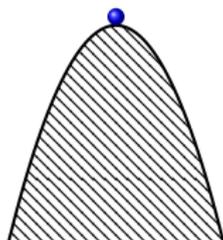
Eigenfunktionen: erste Oberschwingung ( $\ell = 2$ )

Von der Intuition zur Präzision: Nun können wir alles ausrechnen!

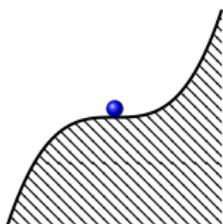
# Gleichgewichtslagen und In/Stabilität von Fixpunkten



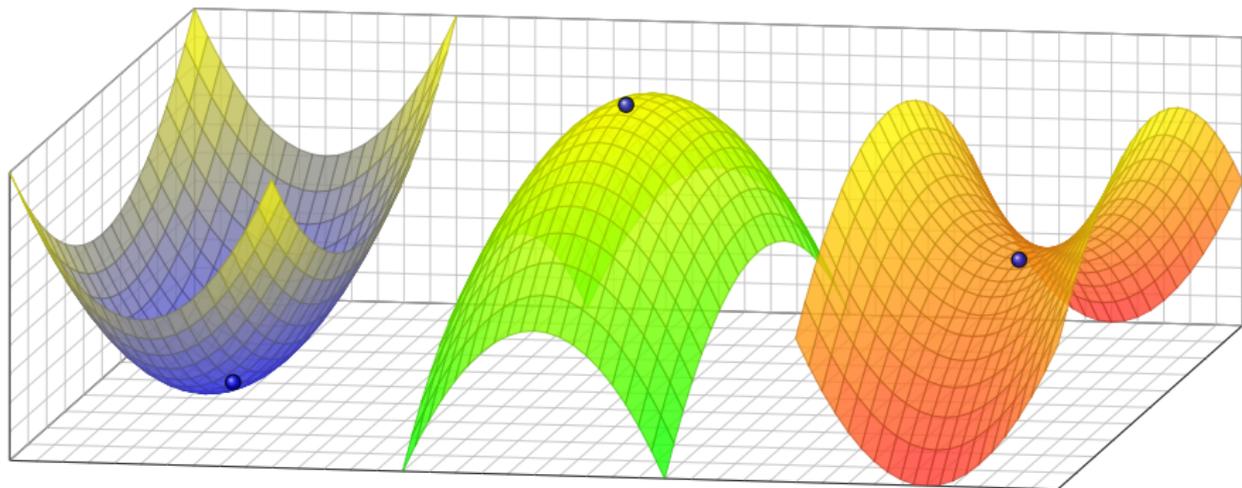
Der Fixpunkt ist  
stabil / attraktiv.



Der Fixpunkt ist  
instabil / repulsiv.



kritischer Fixpunkt  
(höhere Ordnung)



# Gleichgewichtslagen und In/Stabilität von Fixpunkten

Anfangsdaten sind oft zufälligen kleinen Schwankungen unterworfen, etwa durch kleine äußere Störungen oder ungenaue Messdaten.

Wir wollen das Langzeitverhalten aller Trajektorien verstehen, die in einer Umgebung des Fixpunktes  $x_0$  starten, also mit  $|x(0) - x_0| < \delta$ .

- Gilt Abklingen  $|x(t) - x_0| \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ ? sogar exponentiell?
- Gilt zumindest Beschränktheit  $|x(t) - x_0| < \varepsilon$  für alle  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ?
- Oder entkommt  $x(t)$  jeder kleinen  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$ ?

 Instabile Fixpunkte sind meist Opfer des **Schmetterlingseffekts!** Sie zeigen eine extrem sensible Abhängigkeit von den Anfangsdaten. Typischerweise können kleine Störungen exponentiell anwachsen. Beispiele wie  $\dot{x}(t) = a x(t)$  zeigen, dass dies tatsächlich vorkommt.

 Technische Anwendungen erfordern meist stabile Gleichgewichte! Die **Stabilitätstheorie** untersucht die Auswirkung kleiner Störungen, die als Abweichung von Gleichgewichtszuständen auftreten, etwa in der Technischen Mechanik oder in der Regelungstechnik.

# Eindimensionale Dynamik um einen Fixpunkt

**Aufgabe:** (1) Wir untersuchen  $\dot{x}(t) = a x(t)$  mit  $x(0) = x_0$  und  $a \in \mathbb{R}$ .  
Welches asymptotische Verhalten haben die Lösungen für  $t \rightarrow \infty$ ?

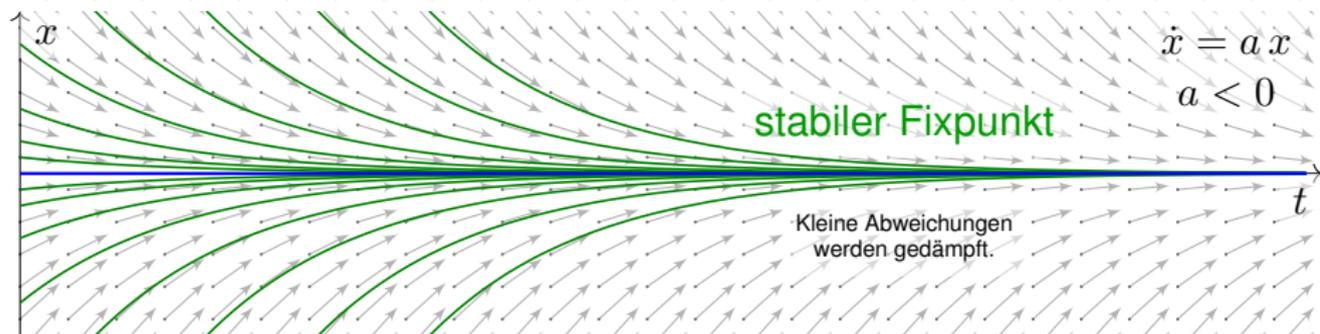
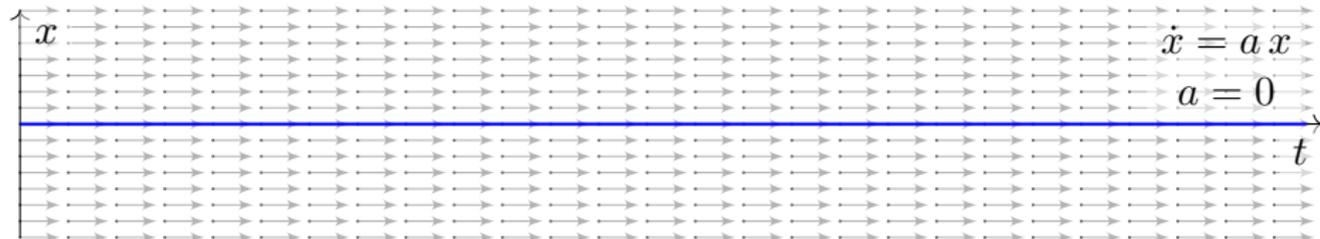
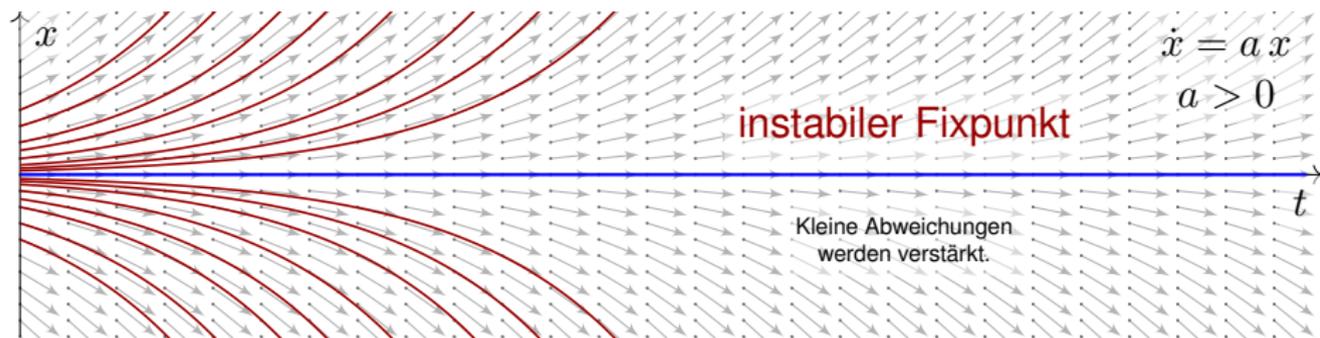
(2) Welches Verhalten erwarten Sie für eine nicht-lineare Gleichung  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  mit  $x(0) = x_0$  und  $f(x_0) = 0$ ? Ist  $x_0$  ein Fixpunkt?  
Welche Rolle spielt die Ableitung  $f'(x_0)$  für die Stabilität?

**Lösung:** (1) Dieses AWP hat als eindeutige Lösung  $x(t) = x_0 e^{at}$ .  
Die Dynamik eindimensionaler linearer Systeme ist sehr einfach:

- $a > 0$  streckt; Störungen werden exponentiell verstärkt.  
Der einzige Fixpunkt 0 ist **instabil**.
- $a < 0$  staucht: Störungen werden exponentiell gedämpft.  
Der einzige Fixpunkt 0 ist **stabil**.
- Im Falle  $a = 0$  ist jeder Startpunkt  $x_0$  ein Fixpunkt.

(2) Nicht-lineare Systeme sind wesentlich komplizierter! In der Nähe eines Fixpunktes können wir linearisieren und annähernd eine **lineare Dynamik** erwarten. Diese Technik wird im Folgenden ausgeführt.

# Eindimensionale Dynamik um einen Fixpunkt



Wir betrachten ein **autonomes Differentialgleichungssystem**:

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Hierbei sei  $f: \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Die rechte Seite  $f(x)$  hängt nicht explizit von der Zeit  $t$  ab, daher **autonom**. Zu jedem Startpunkt  $x_0 \in \overset{\circ}{G}$  existiert eine eindeutige Lösung  $x: [0, T[ \rightarrow \overset{\circ}{G}$  für  $T > 0$  mit  $x(0) = x_0$  und  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  für  $t \in [0, T[$ . Für das maximale  $T$  gilt entweder  $T = \infty$  oder  $f(t) \rightarrow \partial G \cup \{\infty\}$  für  $t \nearrow T < \infty$ .

**Aufgabe:** Was geschieht bei Start nahe einer Gleichgewichtslage?

**Lösung:** Jeder Startpunkt  $x_0$  mit  $f(x_0) = 0$  ist ein **Fixpunkt**.

Für kleine Auslenkungen  $x(t) = x_0 + u(t)$  können wir **linearisieren**:

$$\dot{u}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(x_0 + u(t)) \approx f(x_0) + f'(x_0)u(t) = Au(t)$$

Sei  $x: [0, T[ \rightarrow \overset{\circ}{G}$  die Lösung zum Startpunkt  $x(0) = x_0$  mit  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  für alle  $t \in [0, T[$ .

**Ruhelage:** Genau dann herrscht Konstanz  $x(t) = x_0$  für alle  $t \in [0, T[$ , wenn  $f(x_0) = 0$  gilt. Die **Jacobi-Matrix**  $A = f'(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  von  $f$  beschreibt das Verhalten um den Fixpunkt  $x_0$ : Wir erhalten als Näherung die lineare Differentialgleichung  $\dot{u}(t) = Au(t)$ . Hierdurch erhalten lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten ihre zentrale Bedeutung!

# Linearisierung um Fixpunkte und In/Stabilität

😊 Kleine Auslenkungen aus der Ruhelage  $x_0$  folgen näherungsweise dem linearen DGS-System mit konstanter Systemmatrix  $A = f'(x_0)$ :

$$\text{nicht-linear } \dot{x}(t) = f(x(t)) \rightsquigarrow \text{linear } \dot{u}(t) = A u(t)$$

😊 Linearisierung vereinfacht die ursprüngliche Gleichung enorm! Jede Lösung dieser Approximation ist von der Form  $u(t) = e^{tA} u_0$ . Zu Eigenwerten  $\lambda = \sigma \pm i\omega$  gehören **Eigenfunktionen** der Form

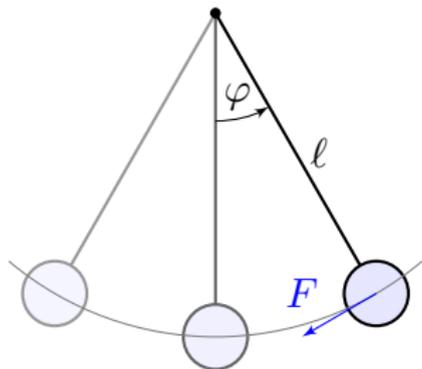
$$u(t) = e^{\sigma t} [\cos(\omega t) v_1 + \sin(\omega t) v_2]$$

😊 Der allgemeine Fall von **Hauptfunktionen** wurde oben ausgeführt. Damit erkennen wir die **Stabilität** des Fixpunktes:

- $\text{Re}(\lambda) < 0$  staucht; kleine Störungen werden exponentiell gedämpft. Der Fixpunkt ist **stabil**, wenn  $\text{Re}(\lambda) < 0$  für alle Eigenwerte gilt.
- $\text{Re}(\lambda) > 0$  streckt; kleine Störungen werden exponentiell verstärkt. Der Fixpunkt ist **instabil**, wenn  $\text{Re}(\lambda) > 0$  für einen Eigenwert gilt.

Der Grenzfall  $\text{Re}(\lambda_k) = 0$  bedarf genauere Analyse (höhere Ordnung).

# Linearisierung um Fixpunkte und In/Stabilität



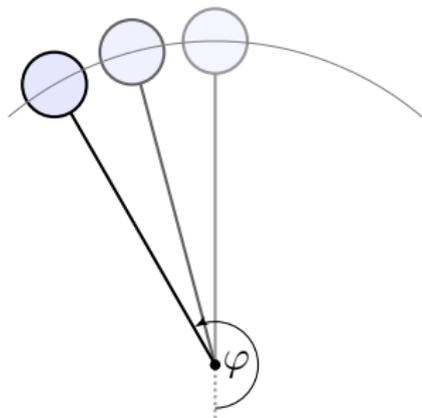
Dynamisches System:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ -(g/l) \sin \varphi - 2\delta\omega \end{bmatrix}$$

Linearisierung um  $(0, 0)$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(g/l) & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Der Fixpunkt  $(0, 0)$  ist stabil.



Dynamisches System:

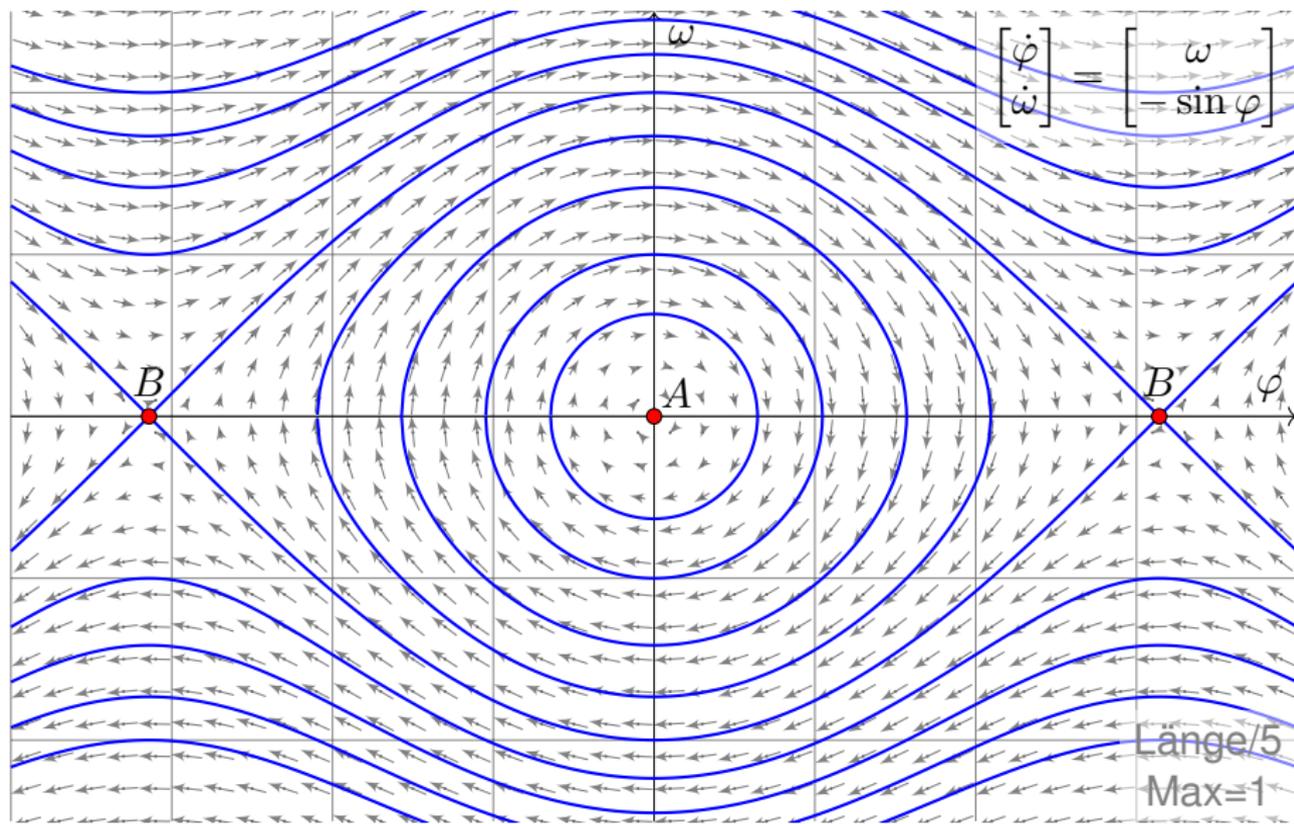
$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ -(g/l) \sin \varphi - 2\delta\omega \end{bmatrix}$$

Linearisierung um  $(\pi, 0)$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +(g/l) & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Der Fixpunkt  $(\pi, 0)$  ist instabil.

# Linearisierung um Fixpunkte und In/Stabilität



Wir erkennen harmonische Oszillation um das untere Gleichgewicht  $A$ . Der obere Scheitelpunkt  $B$  hingegen ist ein instabiles Gleichgewicht.

## Zweidimensionale Dynamik um einen Fixpunkt

Wir untersuchen das DGSsystem  $\dot{u}(t) = A u(t)$  zur Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ :  
 Polynom  $\det(A - XI) = X^2 - 2aX + d$ , Eigenwerte  $\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - d}$ .  
 Spur  $\text{tr}(A) = 2a$ , Determinante  $\det(A) = d$ , Diskriminante  $\Delta = a^2 - d$ .

**Aufgabe:** Skizzieren Sie die Dynamik je nach Lage der Eigenwerte (14 Fälle) und untersuchen Sie das Verhalten von  $|u(t)|$  für  $t \rightarrow \infty$ .

- Gilt Abklingen  $|u(t)| \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ ? sogar exponentiell?
- Gilt Beschränktheit  $0 < c_0 \leq |u(t)| \leq c_1 < \infty$  für alle  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ?
- Oder wächst  $|u(t)|$  unbeschränkt? polynomiell? gar exponentiell?

**Lösung:** Wir unterscheiden zunächst reelle und komplexe Eigenwerte:

$$a^2 < d: \text{komplex-konjugiert } \lambda_{1,2} = a \pm ib, \quad A \sim \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$a^2 > d: \text{zwei reelle Eigenwerte } \lambda_1 < \lambda_2, \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$a^2 = d: \text{ein doppelter Eigenwert } \lambda, \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ oder } A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

## Zweidimensionale Dynamik um einen Fixpunkt

😊 Damit haben wir alle möglichen Fälle vollständig gelöst!  
Dank Eigen- und Hauptfunktionen wird alles klar und einfach.

Ähnlichkeit  $A \sim B$  bedeutet, dass  $A$  und  $B$  konjugiert sind (M2D),  
also  $B = T^{-1}AT$  für eine geeignete Basiswechselmatrix  $T \in GL_2 \mathbb{R}$ .

Dies beschreibt den Übergang zu unserer neuen Basis aus Eigen- bzw. Hauptvektoren, in der sich das Problem wesentlich einfacher darstellt.

😊 Wir finden drei Klassen, je nach Vorzeichen der Diskriminante

$$\Delta = \frac{1}{4}(\text{tr } A)^2 - \det A.$$

Das Vorzeichen der Diskriminante unterscheidet, wie oben gesehen,  
zwischen reellen Eigenwerten und (echt) komplexen Eigenwerten.

Der Fixpunkt ist stabil, wenn  $\text{Re}(\lambda) < 0$  für beide Eigenwerte gilt.  
Das bedeutet: Kleine Störungen werden exponentiell gedämpft.

Das gilt hier genau dann, wenn  $\text{tr}(A) < 0$  und  $\det(A) > 0$  gilt.  
Die stabile Region ist grün gefärbt, die instabile Region rot.



# Zweidimensionale Dynamik um einen Fixpunkt

Diese schöne Graphik gibt einen guten Überblick: Sie klassifiziert die (linearisierte) Dynamik um einen Fixpunkt in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ .

Im obigen Beispiel des mathematischen Pendels haben wir bereits zwei Fälle gesehen, einen stabilen und einen instabilen Fixpunkt.

Die folgenden Folien diskutieren alle gezeigten Einzelfälle im Detail, wir zoomen also auf einzelne Punkte dieser Gesamtkunstwerks.

 Wir betrachten hier als einfaches Modell die linearisierte Gleichung. Nicht-lineare dynamische Systeme sind meist wesentlich komplizierter!

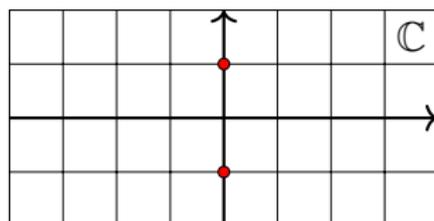
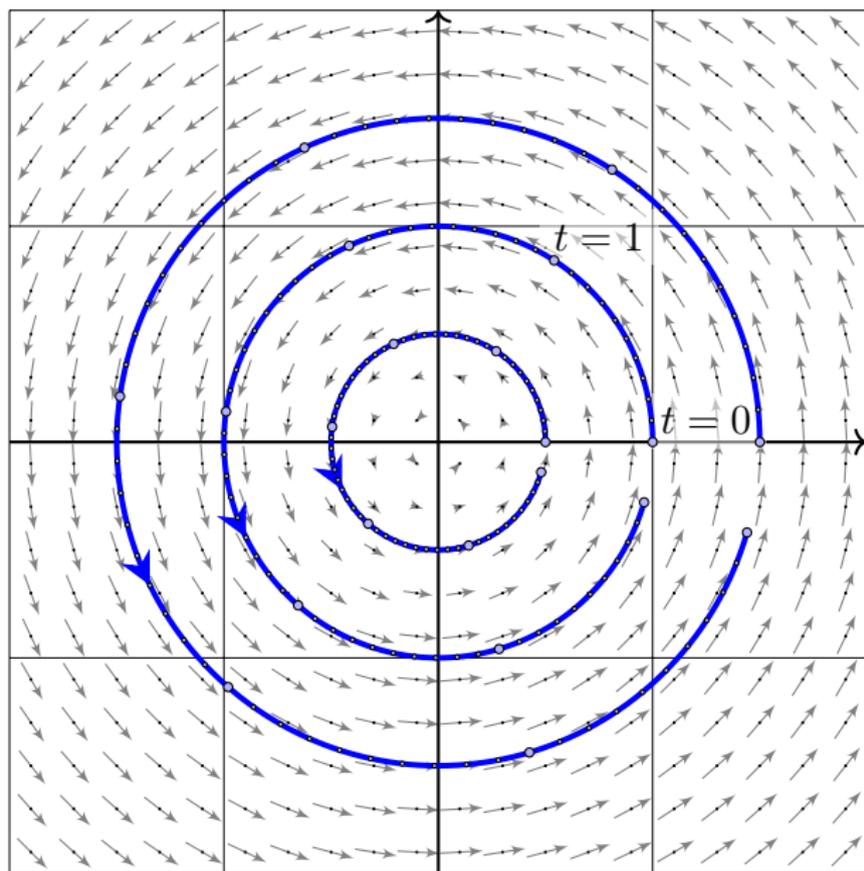
Dennoch gibt uns das linearisierte Modell sehr nützliche Auskunft, denn im Kleinen verhält sich das nicht-lineare Modell ganz ähnlich:

 Für die Stabilität des Fixpunktes  $x_0$  genügt die Matrix  $A = f'(x_0)$ , falls alle Eigenwerte negativen Realteil haben (Satz von Lyapunov).

 In diesem Falle sieht die lokale Dynamik von  $\dot{x} = f(x)$  topologisch aus wie im linearisierten Modell  $\dot{u} = Au$  (Satz von Hartman–Grobman).

 Dieser Linearisierungssatz gilt ganz allgemein in jeder Dimension  $n$  um jeden *hyperbolischen* Fixpunkt (ohne Eigenwerte mit Realteil Null).

## Wirbelpunkt: elliptische Transformation



Komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \pm ib$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

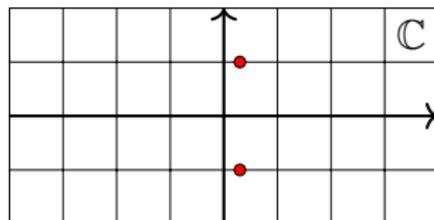
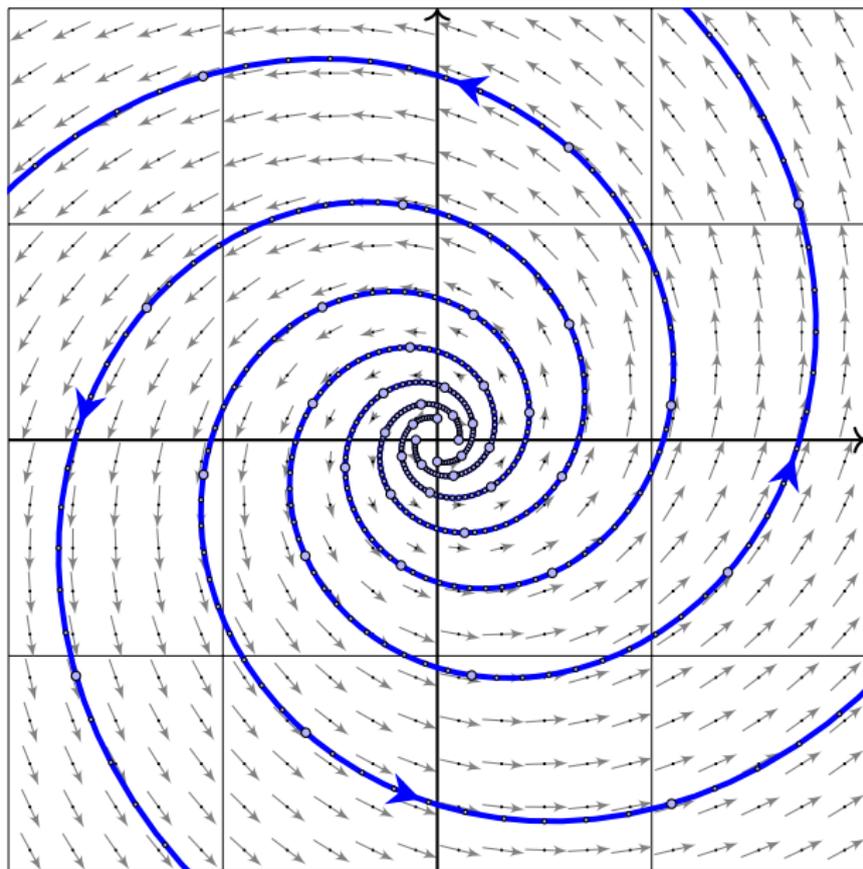
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

# Instabiler Strudel: Spiral-Expansion



Komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = a \pm ib, \quad a > 0$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

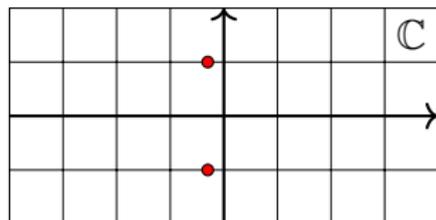
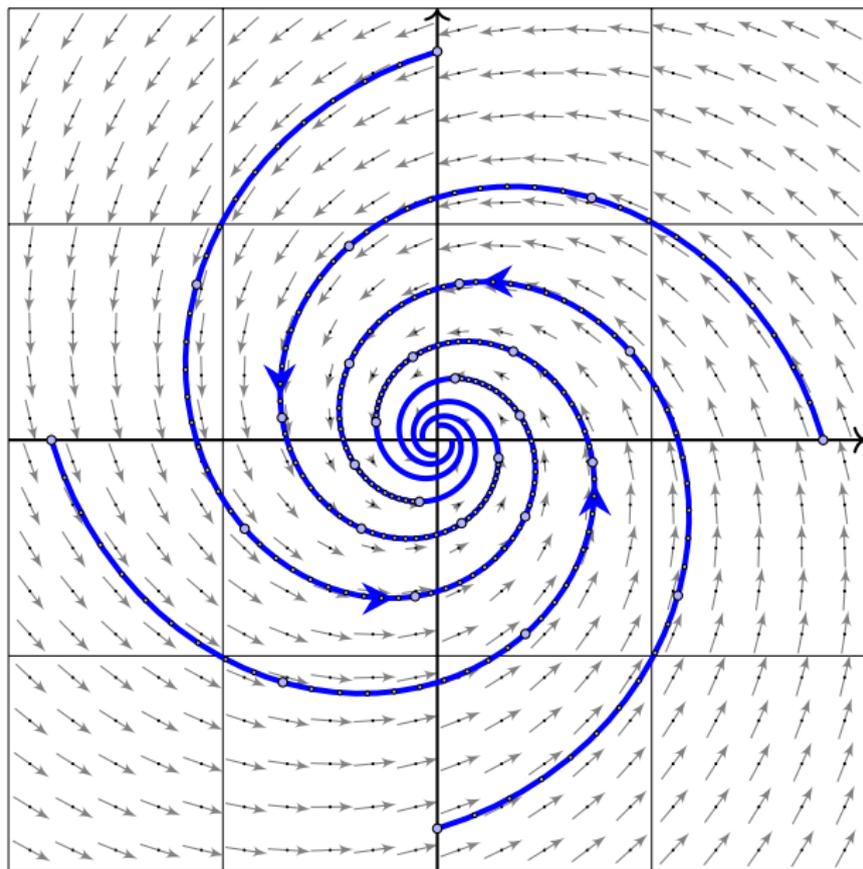
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & -1 \\ 1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{0.3t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

# Stabiler Strudel: Spiral-Kontraktion



Komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = a \pm ib, \quad a < 0$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -0.3 & -1 \\ 1 & -0.3 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{-0.3t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

# Stabilität und Eigenwerte

😊 Die ersten drei Fälle komplex-konjugierter Eigenwerte zeigen bereits den Einfluss auf das Langzeitverhalten und die Stabilität der Lösungen:

- $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  staucht; kleine Störungen werden exponentiell gedämpft. Der Fixpunkt 0 ist **stabil**, wenn  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  für alle Eigenwerte gilt.
- $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  streckt; kleine Störungen werden exponentiell verstärkt. Der Fixpunkt 0 ist **instabil**, wenn  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  für einen Eigenwert gilt.

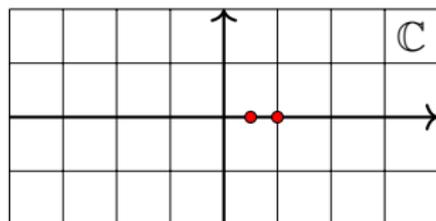
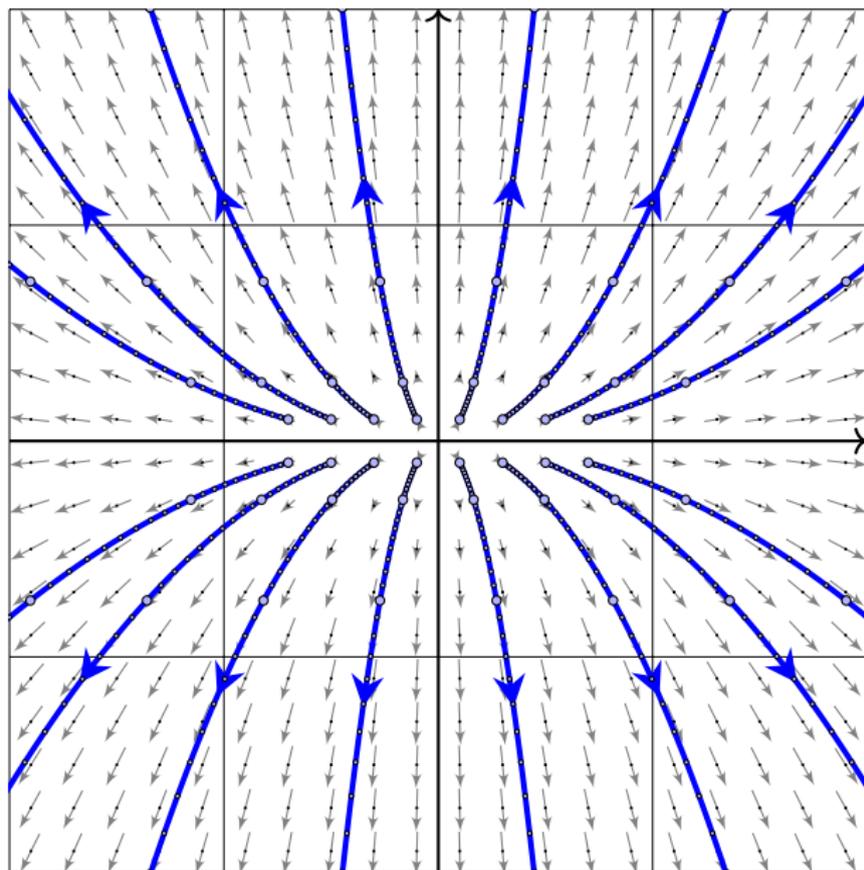
😊 Wir diskutieren die verbleibenden Fälle reeller Eigenwerte  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ :

Im Falle  $\lambda_1 < \lambda_2$  unterscheiden wir fünf Fälle je nach Lage zu 0:  
Die Matrix  $A$  ist hierbei wegen  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  immer diagonalisierbar.

Im Falle  $\lambda_1 = \lambda_2$  unterscheiden wir drei Fälle je nach Lage zu 0:  
Im einfachsten Falle ist  $A \sim \operatorname{diag}(\lambda, \lambda)$  diagonalisierbar (drei Fälle);  
andernfalls nutzen wir Hauptvektoren zur Jordan-Form (drei Fälle).

😊 Dank unserer gründlichen Vorarbeit zu Eigen- und Hauptvektoren können wir alle 14 Fälle vollständig lösen und übersichtlich darstellen. Ebenso gelingt die Klassifikation linearer Dynamik in jeder Dimension!

# Instabiler Knoten: nodale Expansion



Zwei reelle Eigenwerte

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

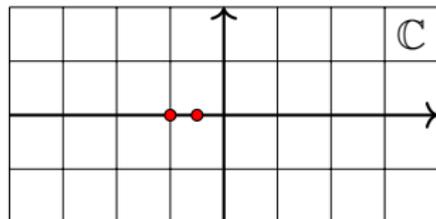
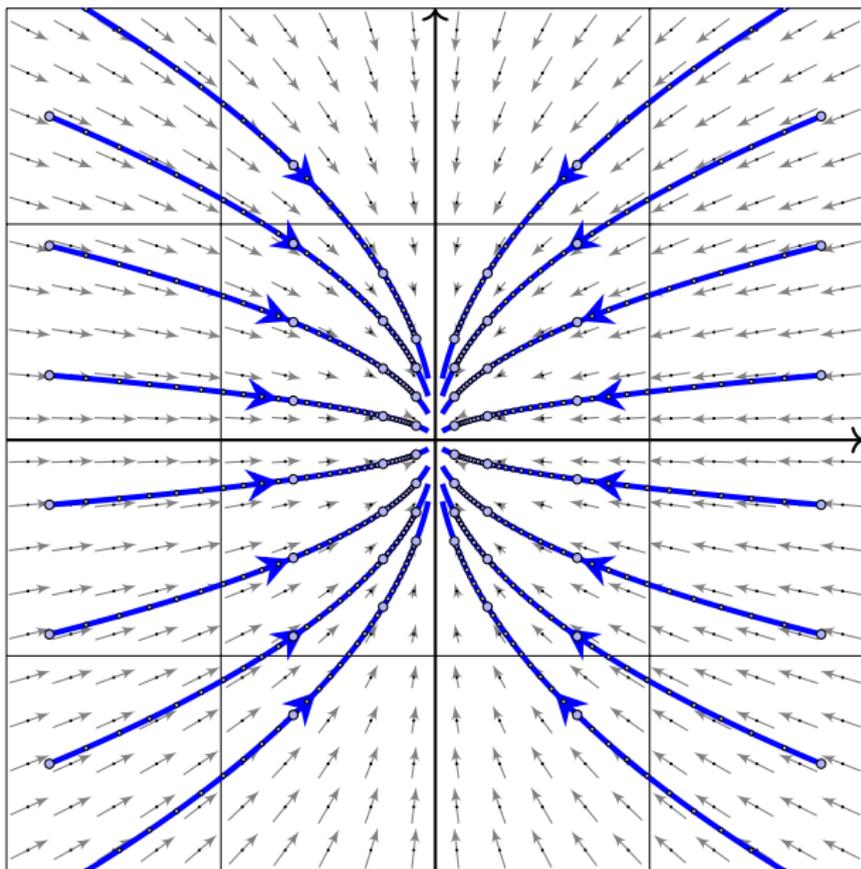
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

# Stabiler Knoten: nodale Kontraktion



Zwei reelle Eigenwerte

$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

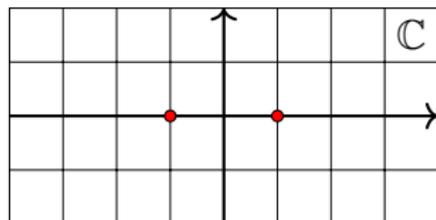
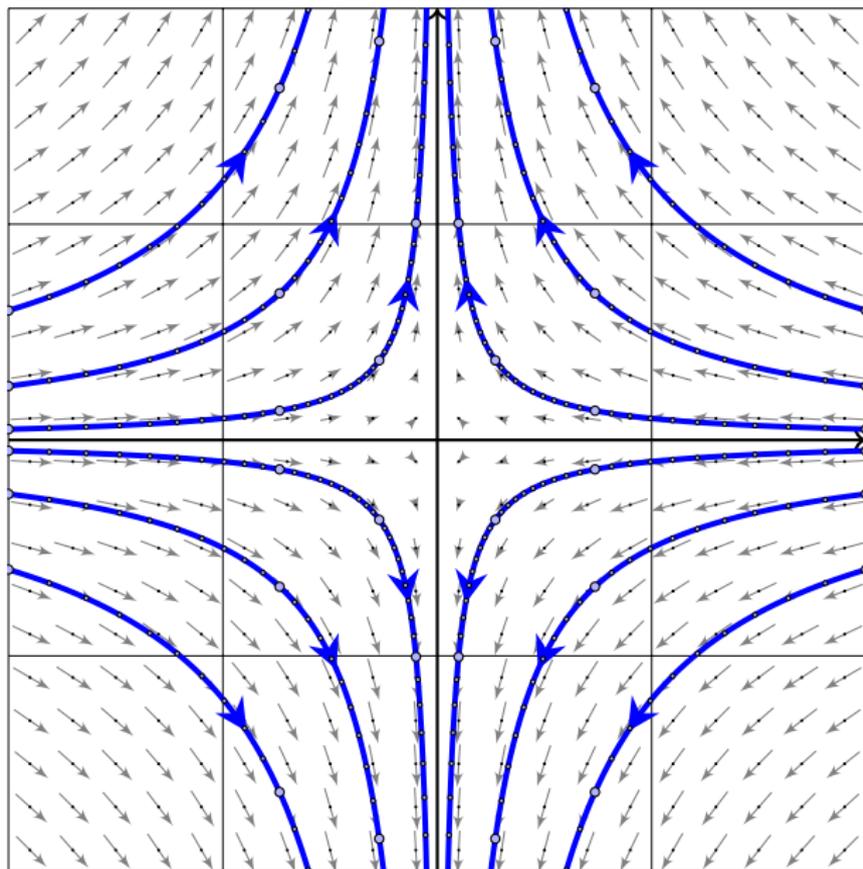
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{bmatrix}$$

## Sattelpunkt: hyperbolische Transformation



Zwei reelle Eigenwerte

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

# Eigenwerte und Eigenvektoren

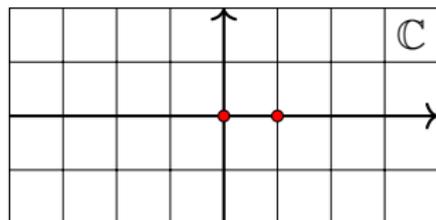
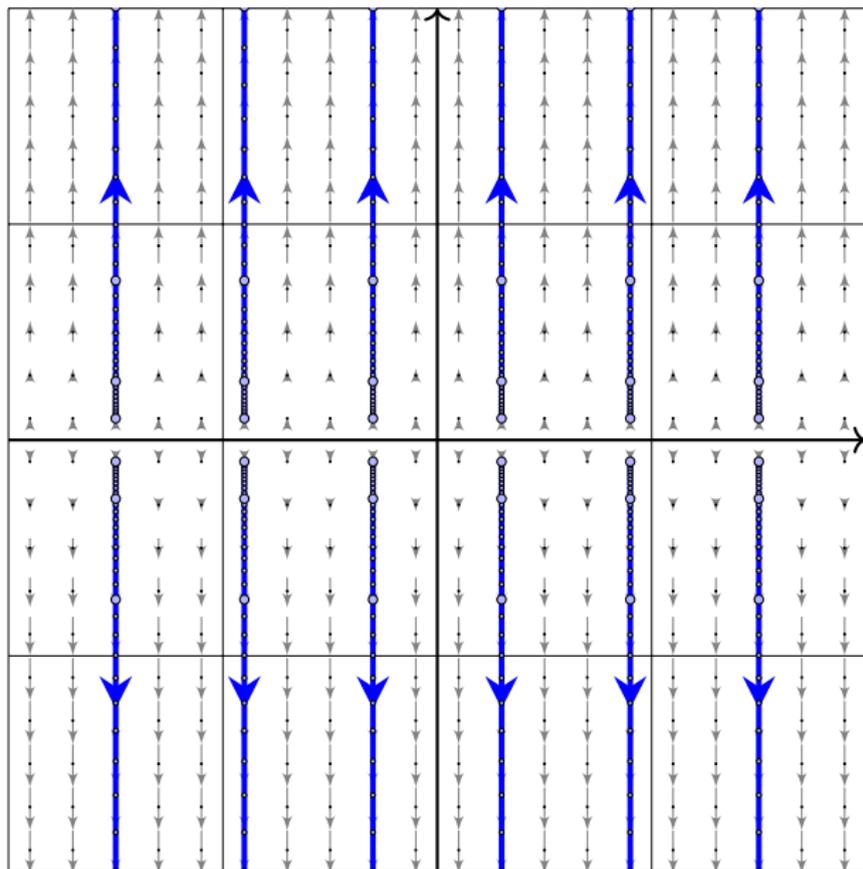
😊 Die hier illustrierten Beispiele zeigen die typische ebene Dynamik um den Fixpunkt  $(0, 0)^T$  im elliptischen und im hyperbolischen Fall: Die Eigenwerte geben Auskunft über Dynamik und Stabilität!

- Sind beide Eigenwerte positiv, so erhalten wir eine Expansion, typischerweise zwei Eigenräume / Achsen: langsam und schnell.
- Sind beide Eigenwerte negativ, so erhalten wir eine Kontraktion, typischerweise zwei Eigenräume / Achsen: langsam und schnell.
- Ist einer negativ und einer positiv, so erhalten wir eine stabile und eine instabile Richtung, wie im hyperbolischen Fall gezeigt.

😊 Die nächsten Folien zeigen schließlich alle Rand- und Sonderfälle. Zur Vereinfachung transformieren wir die beiden Eigen/Hauptvektoren der Systemmatrix  $A$  auf  $(1, 0)^T$  und  $(0, 1)^T$ ; das ist übersichtlicher.

⚠ Im Allgemeinen liegen diese beiden Achsen beliebig in der Ebene; sie sind typischerweise verdreht und stehen nicht senkrecht zueinander. Nach Koordinatenwechsel entsteht das hier gezeigte, einfache Bild. Die Aufgabe auf Seite N3117 zeigt ein realistisches Beispiel.

## Lineare Expansion



Zwei reelle Eigenwerte

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

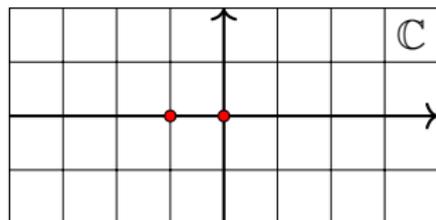
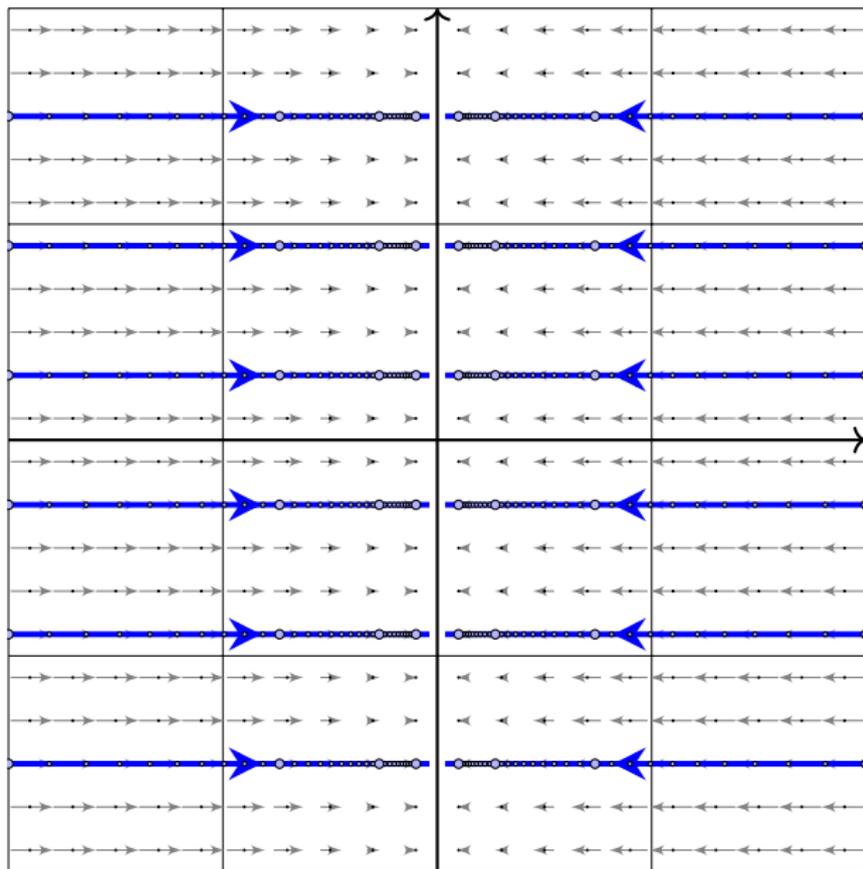
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

## Lineare Kontraktion



Zwei reelle Eigenwerte

$$\lambda_1 < \lambda_2 = 0$$

Allgemeiner Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

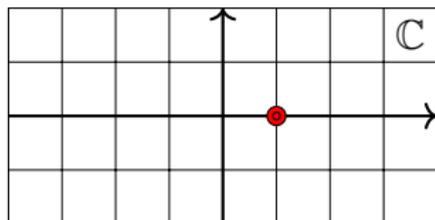
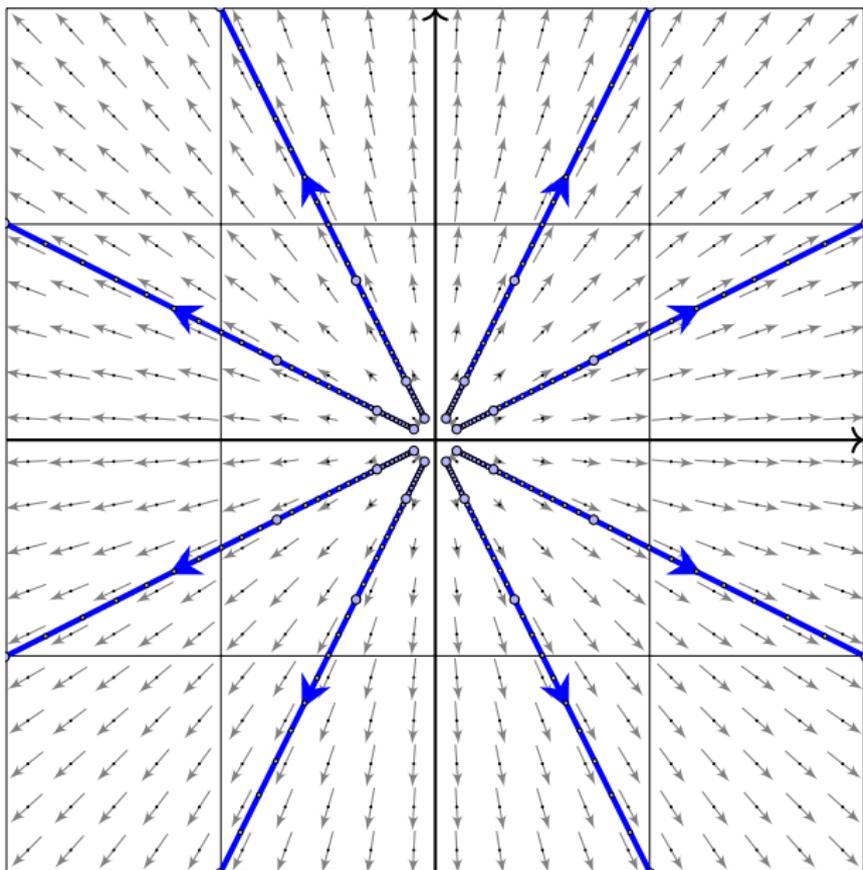
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Zentrale Expansion



Doppelter Eigenwert

$$\lambda > 0$$

Diagonalisierbarer Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

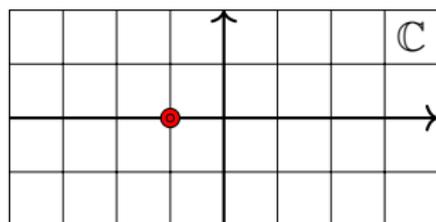
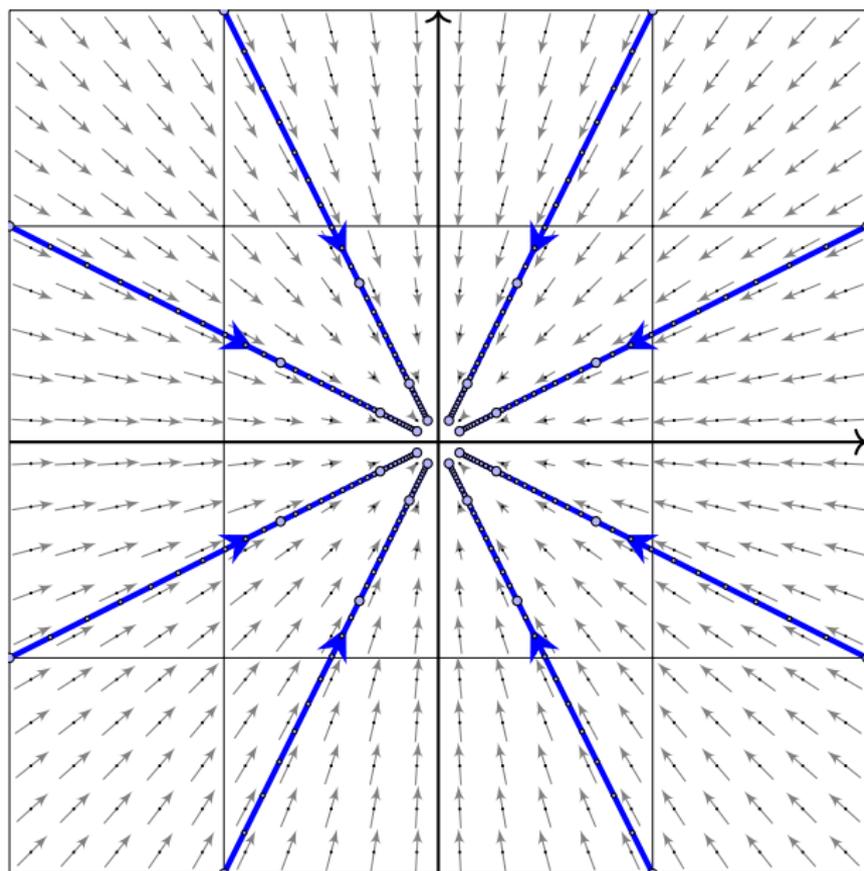
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

## Zentrale Kontraktion



Doppelter Eigenwert  
 $\lambda < 0$

Diagonalisierbarer Fall

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

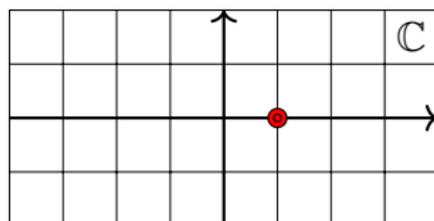
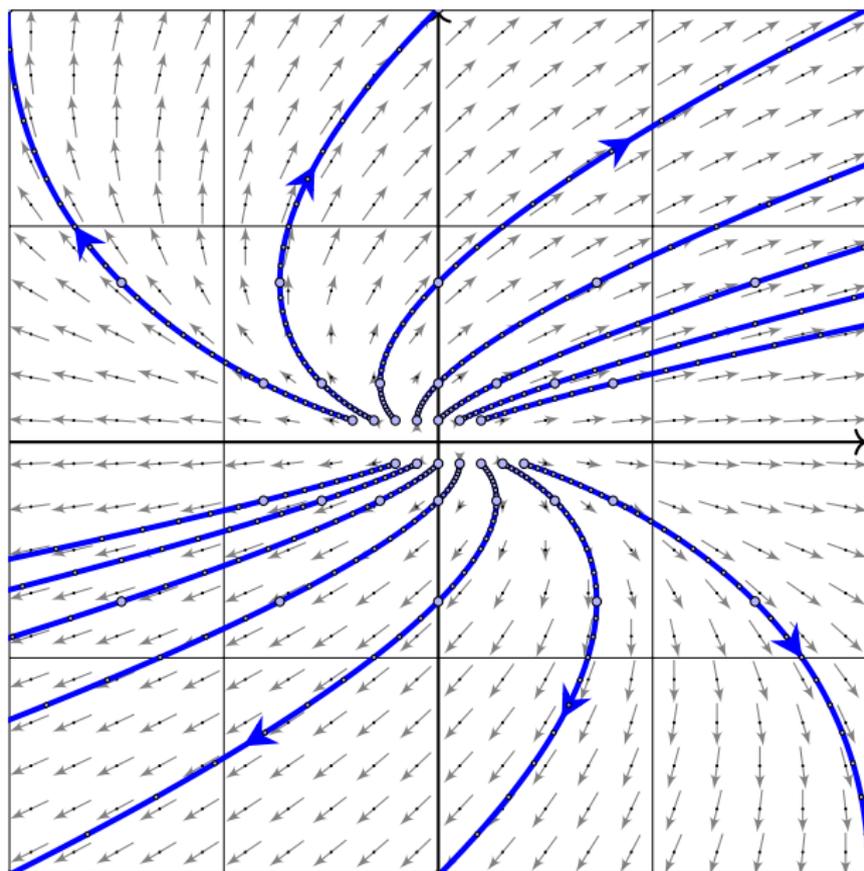
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

# Instabiler Knoten: parabolische Expansion



Doppelter Eigenwert  
 $\lambda > 0$

Nicht-diagonalisierbar

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

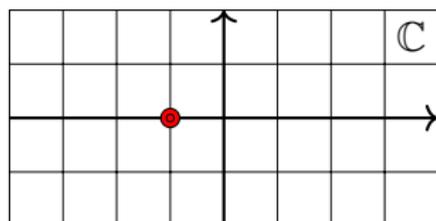
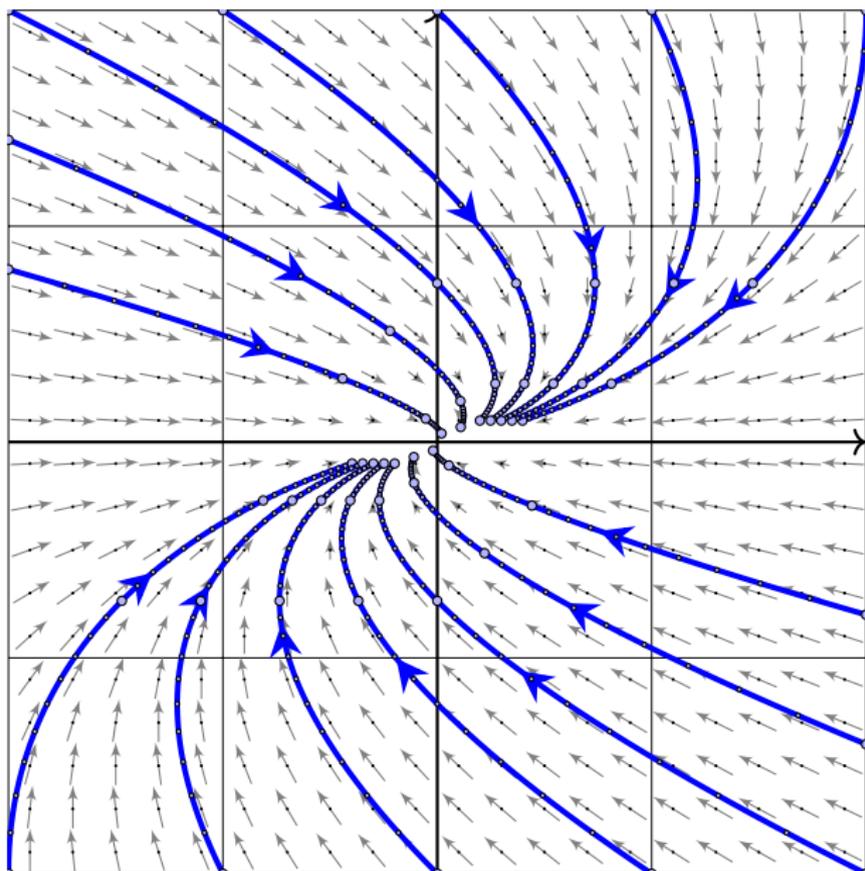
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t & t e^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

# Stabiler Knoten: parabolische Kontraktion



Doppelter Eigenwert  
 $\lambda < 0$

Nicht-diagonalisierbar

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

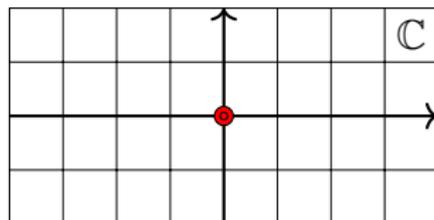
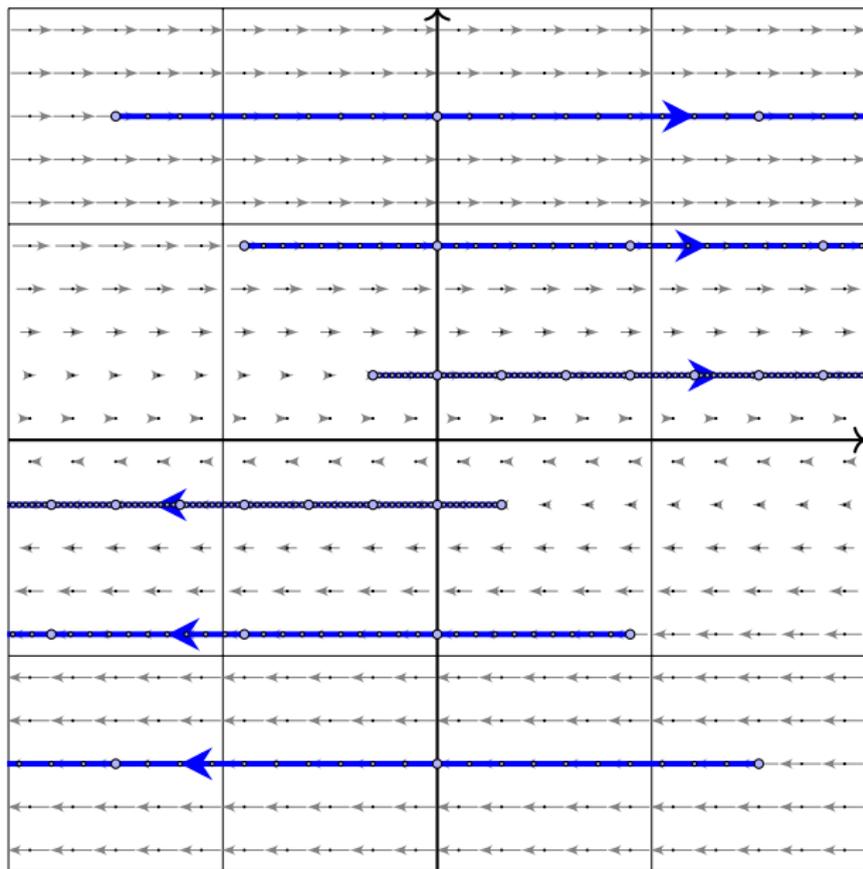
Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & t e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

# Scherung



Doppelter Eigenwert

$$\lambda = 0$$

Nicht-diagonalisierbar

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Konkretes Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fundamentalmatrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Diagonalisierbar oder nicht diagonalisierbar?

Für jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mit doppeltem Eigenwert  $\lambda$  gilt  $\lambda \in \mathbb{R}$  sowie

$$\text{entweder } A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Im ersten Fall existiert eine Basis des  $\mathbb{R}^2$  aus Eigenvektoren von  $A$ . Die Matrix  $A$  wird hierdurch diagonalisiert. Es gilt dann:

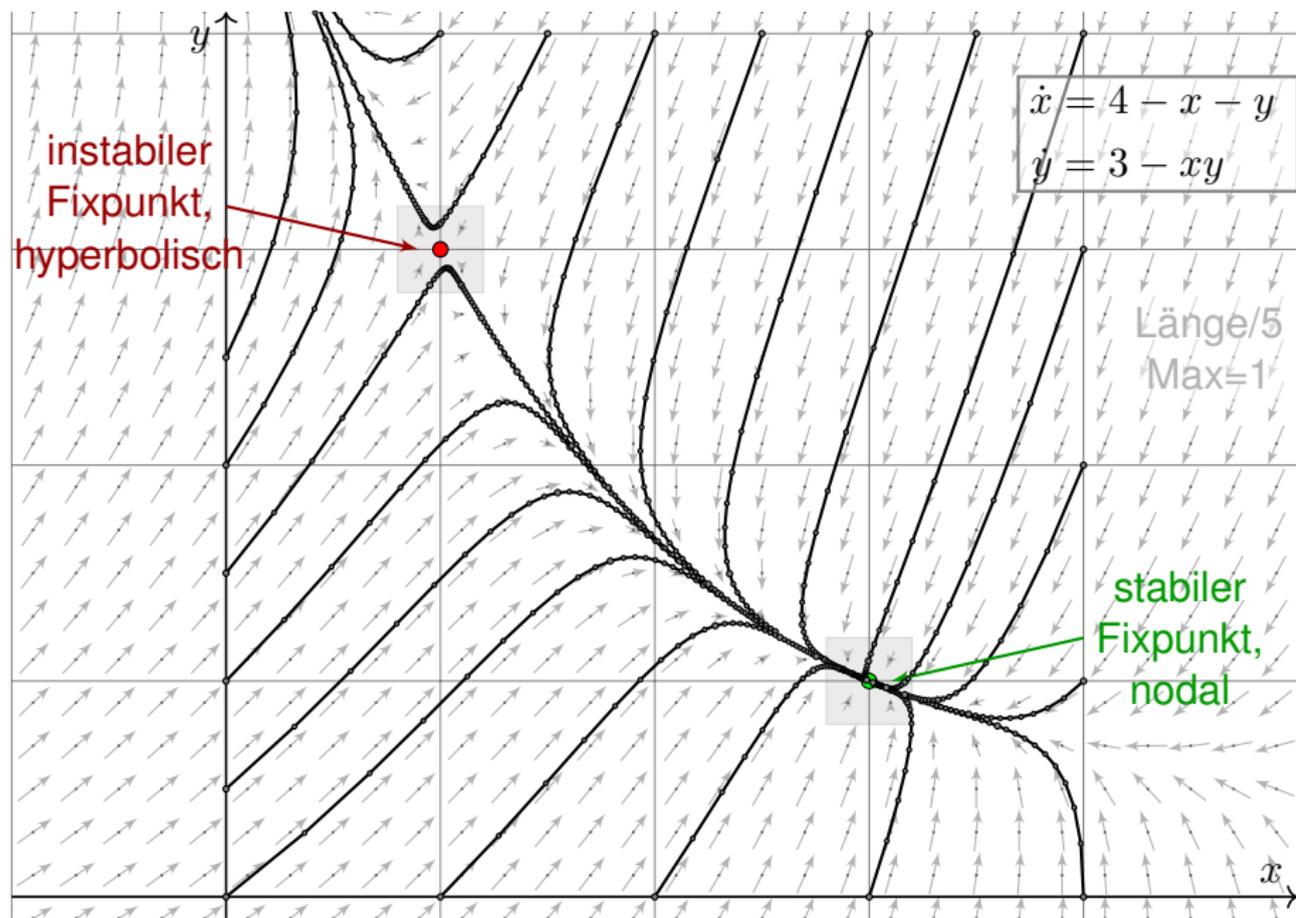
$$e^{tA} \sim e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Andernfalls existiert eine Hauptvektorkette der Länge 2. Diese nutzen wir als Basis des  $\mathbb{R}^2$  und erhalten obigen Jordan-Block. Es gilt dann:

$$e^{tA} \sim e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

😊 Nach demselben Schema können wir  $n$ -dimensionale autonome Systeme analysieren: Fixpunkte, Linearisierung, Eigenwerte, Stabilität. Unsere gründliche Vorarbeit zu Eigen- und Hauptvektoren zahlt sich aus!

## Ein einfaches nicht-lineares DGSsystem



## Ein einfaches nicht-lineares DGSsystem

**Aufgabe:** Wir untersuchen folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} \dot{x} = 4 - x - y \\ \dot{y} = 3 - xy \end{cases}$$

(0) Skizzieren Sie das zugehörige Vektorfeld und einige Flusslinien.

(1a) Finden Sie alle Fixpunkte. Es gibt genau zwei:  $(1, 3)$  und  $(3, 1)$ .

(1b) Linearisieren Sie um jeden Fixpunkt: Welche Dynamik gilt hier?

Leichtere Teilfrage: Ist der betrachtete Fixpunkt stabil oder instabil?

Was bedeuten die zugehörigen Eigenvektoren und die Eigenwerte?

(2) Erklären Sie (qualitativ anhand Ihrer Skizze) für jeden Startpunkt

$(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^2$  das Verhalten der Lösung  $(x(t), y(t))$  für  $t \rightarrow \infty$ .

(2a) Gibt es zu jedem Startwert eine Lösung? Ist sie eindeutig?

(2b) Für welche Startwerte konvergiert die Lösung gegen  $(3, 1)$ ?

(2c) Für welche Startwerte konvergiert die Lösung gegen  $(1, 3)$ ?

(2d) Für welche Startwerte divergiert die Lösung? gegen  $\infty$ ?

Ist dieses Verhalten stabil? Wird das Ziel in endlicher Zeit erreicht?

## Ein einfaches nicht-lineares DGSsystem

**Lösung:** (1a) Fixpunkte sind die Nullstellen des Vektorfeldes:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 4 - x - y \stackrel{!}{=} 0 \\ \dot{y} &= 3 - xy \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

Die erste Gleichung bedeutet  $y = 4 - x$ , einsetzen in die zweite ergibt:

$$3 - 4x + x^2 = 0 \iff x \in \{1, 3\}$$

😊 Die beiden einzigen Fixpunkte sind daher  $(1, 3)$  und  $(3, 1)$ . Probe!

(1b) Wir berechnen die Jacobi-Matrix in jedem der beiden Fixpunkte:

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 - x - y \\ 3 - xy \end{bmatrix} \implies f'\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -y & -x \end{bmatrix}$$

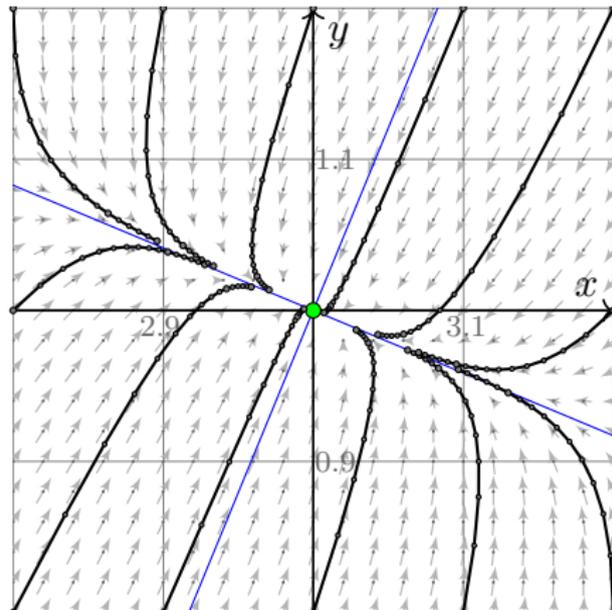
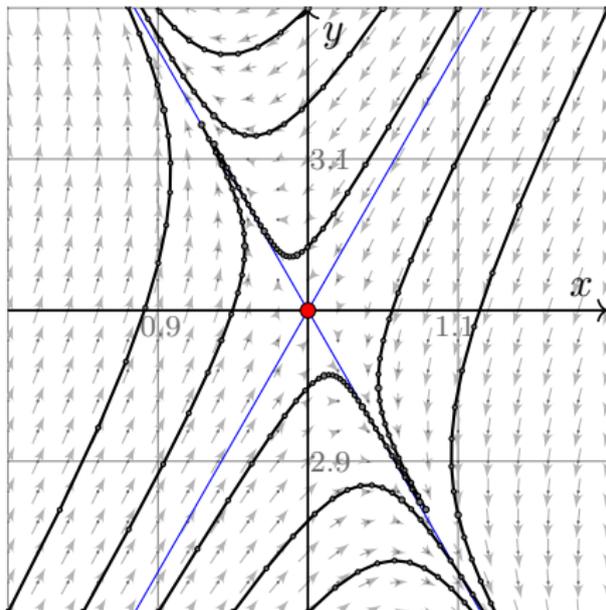
$$f'\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \det = -2 < 0, \operatorname{tr} = -2 < 0 : \\ \text{instabil! genauer: hyperbolisch} \end{cases}$$

$$f'\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \det = +2 > 0, \operatorname{tr} = -4 < 0 : \\ \text{stabil! genauer: nodale Kontraktion} \end{cases}$$

😊 Vergleich mit der obigen Skizze: Das entspricht der Anschauung!

## Ein einfaches nicht-lineares DGSsystem

Die Vergrößerung um die Fixpunkte zeigt annähernd lineares Verhalten:



Die beiden Eigenvektoren entsprechen den Hauptachsen der Dynamik:

$$v = \begin{bmatrix} \pm 1/\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda = \mp\sqrt{3} - 1$$

$$v = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{2} - 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda = \mp\sqrt{2} - 2$$

😊 Rechts ist die Jacobi-Matrix symmetrisch, die EV daher orthogonal.