

## Kapitel K

# Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen

*We share a philosophy about linear algebra:  
we think basis-free, we write basis-free,  
but when the chips are down  
we close the office door and  
compute with matrices like fury.*

Irving Kaplansky (1917–2006), über sich und Paul Halmos

Vollversion

[eiserm.de/lehre/LinA](http://eiserm.de/lehre/LinA)

05.03.2022

## Inhalt dieses Kapitels K

K002

- 1 Lineare Abbildungen und Matrizen
  - Das Prinzip der linearen Fortsetzung
  - Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen
  - Anwendungsbeispiel: Ableitung von Polynomen
  - Anwendungsbeispiel: Ableitung von  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\exp$
  - Verträglichkeit mit Addition und Komposition
- 2 Kanonische Darstellung und Basiswechsel
  - Kanonische Darstellung einer linearen Abbildung
  - Matrixdualität: Zeilenrang gleich Spaltenrang
  - Basiswechsel und Koordinatentransformation
  - Anwendungsbeispiele, erste Diagonalisierungen
- 3 Aufgaben und Ergänzungen

In diesem Kapitel geht es vorrangig darum, eine  $R$ -lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  geeignet darzustellen durch eine Matrix  $A \in R^{m \times n}$ .

Dies gelingt, sobald eine Basis  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  des Startraums  $V$  und eine Basis  $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$  des Zielraums  $W$  gegeben ist. Wir erhalten dann eine Bijektion zwischen Matrizen und linearen Abbildungen:

$$(\mathbf{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}, \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) : R^{m \times n} \cong \text{Hom}_R(V, W).$$

Das ist Gegenstand des Darstellungssatzes K1F. Diese Bijektion respektiert die Addition (K1I) sowie Multiplikation und Komposition (K1J). Wir erhalten so den Isomorphismus von Ringen bzw. Gruppen:

$$(\mathbf{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}, \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) : (R^{n \times n}, +, \cdot) \cong (\text{End}_R(V), +, \circ)$$

$$(\mathbf{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}, \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) : (\text{GL}_n R, \cdot) \cong (\text{Aut}_R(V), \circ).$$

Als Matrizen werden diese Objekte leichter fasslich!

Diese Übersetzung von Matrizen zu linearen Abbildungen und zurück ist überaus nützlich! Eigentlich interessiert uns die lineare Abbildung  $f$ , doch mit der Matrix  $A$  können wir besonders gut und effizient rechnen. Das Bijektionspaar  $(\mathbf{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}, \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})$  übersetzt verlustfrei zwischen beiden.

Dazu muss allerdings eine Basis  $\mathcal{B}$  des Startraums und eine Basis  $\mathcal{C}$  des Zielraums  $W$  vorliegen! Das ist einerseits eine Bürde, denn wir müssen Basen konstruieren und dabei willkürliche Wahlen treffen, andererseits bietet uns diese Wahl auch gewisse Freiheiten.

Diese Freiheit können wir nutzen, etwa zur kanonischen Darstellung von  $f: V \rightarrow W$  durch eine besonders einfache Modellmatrix (K2C).

Es ist ein wichtiges und interessantes Problem, zu  $f: V \rightarrow V$  eine angepasste Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  zu wählen, sodass die darstellende Matrix  $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  möglichst einfach wird, am besten diagonal. Hierzu werden wir in den nächsten Kapiteln die nötigen Techniken entwickeln. Schon jetzt können wir relevante Beispiele bearbeiten zur Illustration und Motivation.

Ich zeige in diesem Kapitel (wie gelegentlich auch bereits zuvor) mit Begeisterung schöne und relevante Beispiele aus der Analysis. Diese Querbezüge sollten Sie nicht schrecken, sondern freuen: Bitte denken Sie nicht in Schubladen, sondern lernen Sie vernetzt, das hilft!

Die Methoden der Linearen Algebra lassen sich überall gewinnbringend nutzen, auch und gerade in der Analysis, zum Beispiel bei der Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen und linearen Systemen. Wir machen uns daher früh mit konkreten Beispielen vertraut.

Natürlich sollten Sie zur Übung auch willkürliche Zahlenbeispiele routiniert rechnen (können), ohne jede Anschauung und Bedeutung. Das erfordert wie immer Übung und gelingt nur durch die eigene Hand, diese Mühe kann und diese Freude will ich Ihnen nicht nehmen.

Ich empfehle hierzu unser didaktische Online-Tool Gaël. Damit können Sie leicht experimentieren und Erfahrungen sammeln. Kleine Beispiele gelingen Ihnen von Hand, große Beispiele übergeben Sie vollständig dem Computer, Gaël ist ideal für den Übergang.

Auch solche numerischen Beispiele sind wichtig und sehr hilfreich. Die knappe Zeit der Vorlesung investiere ich lieber in schöne, relevante Beispiele mit Bedeutung und Anschauung!



Wie testen wir effizient die Gleichheit von zwei linearen Abbildungen?

## Lemma K1A: Vergleich von Homomorphismen auf Erzeugern

Wir vergleichen lineare Abbildungen  $f, g: V \rightarrow W$  über dem Ring  $R$ .

Hierzu sei  $(v_i)_{i \in I}$  eine Familie in  $V$  mit  $f(v_i) = g(v_i)$  für alle  $i \in I$ .

(1) Daraus folgt  $f(v) = g(v)$  für alle  $v \in U = \langle v_i \mid i \in I \rangle_R$ .

(2) Erzeugt  $(v_i)_{i \in I}$  den gesamten Raum  $V$ , so folgt  $f = g$ .

😊 Es genügt,  $f$  und  $g$  auf einem Erzeugendensystem zu vergleichen.

**Beweis:** (1) Jedes Element  $v \in U$  schreibt sich als Linearkombination

$$v = \sum_{i \in I} v_i \lambda_i \quad \text{mit} \quad \lambda \in R^{(I)}.$$

Dank Linearität von  $f$  und  $g$  folgt daraus:

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(\sum_{i \in I} v_i \lambda_i\right) \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{i \in I} f(v_i) \lambda_i \\ &\stackrel{\text{Vor}}{=} \sum_{i \in I} g(v_i) \lambda_i \stackrel{\text{Lin}}{=} g\left(\sum_{i \in I} v_i \lambda_i\right) = g(v) \end{aligned}$$

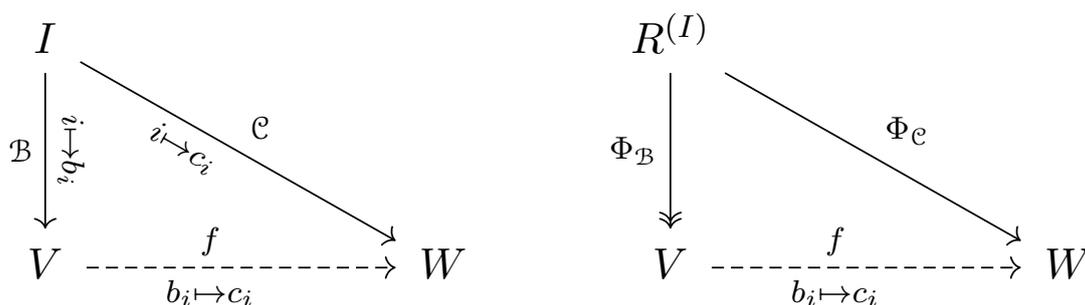
(2) Im Falle  $U = V$  bedeutet das  $f = g$ . ◻

# Vergleich von Homomorphismen auf Erzeugern

😊 Dieses Lemma hilft beim **Vergleich** von linearen Abbildungen.

⚠ Es ist jedoch ungeeignet zur **Konstruktion** linearer Abbildungen.

😊 Zur Konstruktion von  $f$  nutzen wir den Faktorisierungssatz I2E:



Genau dann existiert die lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  mit  $f \circ \Phi_{\mathcal{B}} = \Phi_c$ , wenn  $\ker(\Phi_{\mathcal{B}}) \subseteq \ker(\Phi_c)$  gilt. Diese Bedingung ist trivialerweise erfüllt, falls  $\ker(\Phi_{\mathcal{B}}) = \{0\}$ , wenn also  $\Phi_{\mathcal{B}}$  bijektiv und somit  $\mathcal{B}$  eine Basis ist.

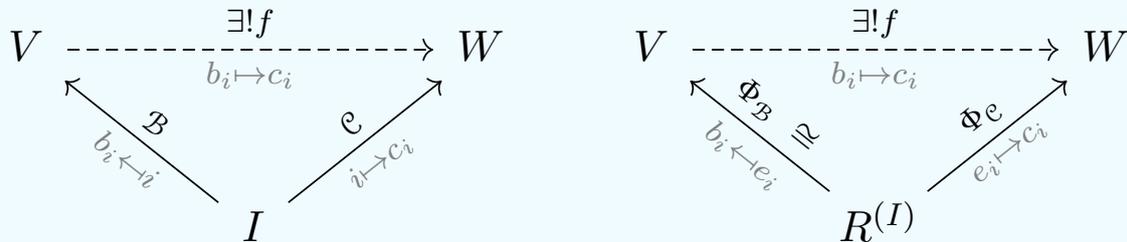
😊 Dieser wichtige Spezialfall ist die Aussage des folgenden Satzes. Er ist ein universelles Werkzeug zur Konstruktion linearer Abbildungen  $f: V \rightarrow W$ , falls der Starraum  $V$  mit einer Basis  $\mathcal{B}$  ausgestattet ist.

## Prinzip der linearen Fortsetzung

Wie konstruieren wir effizient eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$ ?

## Satz K1B: das Prinzip der linearen Fortsetzung, PLF

Gegeben sei ein  $R$ -linearer Raum  $V$  mit einer Basis  $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$  und ein  $R$ -linearer Raum  $W$  mit einer beliebigen Familie  $\mathcal{C} = (c_i)_{i \in I}$ .



Dann existiert genau eine  $R$ -lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  mit  $f(b_i) = c_i$  für alle  $i \in I$ , nämlich  $f = \Phi_{\mathcal{C}} \circ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}$ . Ausgeschrieben bedeutet das:

$$f\left(\sum_{i \in I} b_i \lambda_i\right) = \sum_{i \in I} c_i \lambda_i \quad \text{für alle } (\lambda_i)_{i \in I} \in R^{(I)}.$$

😊 Es genügt die Bilder einer Basis vorzugeben und linear fortzusetzen.

## Prinzip der linearen Fortsetzung

**Aufgabe:** Beweisen Sie diesen Satz! Was ist hier zu zeigen?

Die Formulierung ist vollkommen explizit. Rechnen Sie es nach!

**Lösung:** Wir müssen Existenz und Eindeutigkeit der Lösung  $f$  zeigen.

**Existenz:** Die Komposition  $f = \Phi_{\mathcal{C}} \circ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} : V \rightarrow W$  ist  $R$ -linear (I1G). Gemäß dieser Konstruktion gilt für jeden Index  $i \in I$  wie gewünscht

$$f(b_i) = \Phi_{\mathcal{C}}(\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(b_i)) = \Phi_{\mathcal{C}}(e_i) = c_i.$$

Somit erfüllt  $f$  die beiden im Satz geforderten Eigenschaften.

**Eindeutigkeit:** Die Eindeutigkeit folgt aus dem vorigen Lemma K1A: Sind  $f, g : V \rightarrow W$  zwei Lösungen, so gilt  $f = g$ .

**Bemerkung:** Die Basis  $\mathcal{B} : I \rightarrow V$  von  $V$  stiftet demnach die Bijektion

$$\text{Hom}_R(V, W) \xrightarrow{\sim} \text{Abb}(I, W) : f \mapsto \mathcal{C} = f \circ \mathcal{B}.$$

Die Umkehrung ist die lineare Fortsetzung  $\mathcal{C} \mapsto f = \Phi_{\mathcal{C}} \circ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}$ . Das ist eine universelle Abbildungseigenschaft für  $(V, \mathcal{B})$ .

## Beispiel K1c: formale Ableitung von Polynomen

Sei  $K$  ein kommutativer Ring und  $K[X]$  der Polynomring über  $K$ .  
Wir definieren die (formale) **Ableitung** als die  $K$ -lineare Abbildung

$$D = \partial : K[X] \rightarrow K[X] : X^n \mapsto nX^{n-1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dies gelingt dank Prinzip der linearen Fortsetzung K1B. Wir erhalten

$$D = \partial : K[X] \rightarrow K[X] : F = \sum_n a_n X^n \mapsto f = \sum_n n a_n X^{n-1}.$$

Im Falle  $\mathbb{Q} \leq K$  definieren wir ebenso das (unbestimmte) **Integral**:

$$I = \int : K[X] \rightarrow K[X] : X^n \mapsto \frac{1}{n+1} X^{n+1}$$

Dank dem Prinzip der linearen Fortsetzung K1B erhalten wir hier:

$$I = \int : K[X] \rightarrow K[X] : f = \sum_n a_n X^n \mapsto F = \sum_n \frac{a_n}{n+1} X^{n+1}$$

Damit gilt der **HDI** für Polynome:  $DI(f) = f$  und  $ID(F) = F - F(0)$ .  
Dank Lemma K1A genügt es, dies auf der Monombasis zu prüfen.

## Anwendungsbeispiel: formale Ableitung von Polynomen

Das ist die „formale“ Definition der Ableitung  $D : K[X] \rightarrow K[X]$  auf dem Polynomring  $K[X]$  über einem beliebigen Grundring  $K$ .

😊 In der Analysis lernen Sie die Ableitung über  $K = \mathbb{R}$  (später  $\mathbb{C}$ ) als Grenzwert des Differenzenquotienten kennen, ausgeschrieben

$$D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : F \mapsto f, \quad f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{F(t) - F(x)}{t - x}.$$

Für die Polynomfunktion  $F(x) = x^n$  berechnen Sie damit  $f(x) = nx^{n-1}$ .  
Die Ableitung ist linear, für  $F(x) = \sum_n a_n x^n$  folgt  $f(x) = \sum_n n a_n x^{n-1}$ .

😊 Die Formel  $X^n \mapsto nX^{n-1}$  nehmen wir uns nun zum Vorbild und definieren  $D : K[X] \rightarrow K[X]$  formal wie oben erklärt.  
Diese Konstruktion gelingt ganz ohne Grenzwerte.

😊 Polynome sind ein sehr übersichtliches und einfaches Beispiel, alle Formeln lassen sich wie hier gesehen explizit ausschreiben.  
Das Prinzip der linearen Fortsetzung besagt dasselbe nun allgemein: Sobald eine Basis gegeben ist, können wir  $f$  direkt hinschreiben.

**Satz K1c: Leibniz–Produktregel für die formale Ableitung**

Sei  $K$  ein kommutativer Ring und  $K[X]$  der Polynomring über  $K$ .  
 Hierauf sei  $\partial : K[X] \rightarrow K[X]$  die (formale) Ableitung, wie oben erklärt.  
 Für alle Polynome  $P, Q \in K[X]$  gilt dann

$$\partial(P \cdot Q) = (\partial P) \cdot Q + P \cdot (\partial Q).$$

Diese Eigenschaft heißt **Produktregel** oder auch **Leibniz–Regel**.

**Aufgabe:** Beweisen Sie dies (1) für Monome  $P = X^m$  und  $Q = X^n$  und (2) für beliebige Polynome  $P, Q \in K[X]$  durch lineare Fortsetzung.

**Lösung:** (1) Für Monome ist die explizite Rechnung leicht:

$$\begin{aligned} \partial(X^m \cdot X^n) &\stackrel{K[X]}{=} \partial(X^{m+n}) \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} (m+n)X^{m+n-1} \\ (\partial X^m) \cdot X^n + X^m \cdot (\partial X^n) &\stackrel{\text{Def}}{=} mX^{m-1} \cdot X^n + X^m \cdot nX^{n-1} \\ &\stackrel{K[X]}{=} (m+n)X^{m+n-1} \end{aligned}$$

(2) Wir zeigen nun die Leibniz–Regel  $\partial(P \cdot Q) = (\partial P) \cdot Q + P \cdot (\partial Q)$  für alle Polynome  $P, Q \in K[X]$ . Dank (1) gilt sie für alle Monome.  
 Wir nutzen nun geschickt das Eindeutigkeitslemma K1A:

(2a) Wir fixieren  $Q = X^n$  und betrachten die Fehlerabbildung

$$\varepsilon : K[X] \rightarrow K[X] : P \mapsto (\partial P) \cdot Q + P \cdot (\partial Q) - \partial(P \cdot Q).$$

Jedes Monom  $P = X^m$  erfüllt  $\varepsilon(X^m) = 0$  dank (1).

Die Abbildung  $\varepsilon$  ist linear. Also folgt  $\varepsilon = 0$  dank K1A.

(2b) Wir fixieren  $P \in K[X]$  und betrachten die Fehlerabbildung

$$\varepsilon : K[X] \rightarrow K[X] : Q \mapsto (\partial P) \cdot Q + P \cdot (\partial Q) - \partial(P \cdot Q).$$

Jedes Monom  $Q = X^n$  erfüllt  $\varepsilon(X^n) = 0$  dank (2a).

Die Abbildung  $\varepsilon$  ist linear. Also folgt  $\varepsilon = 0$  Dank K1A.

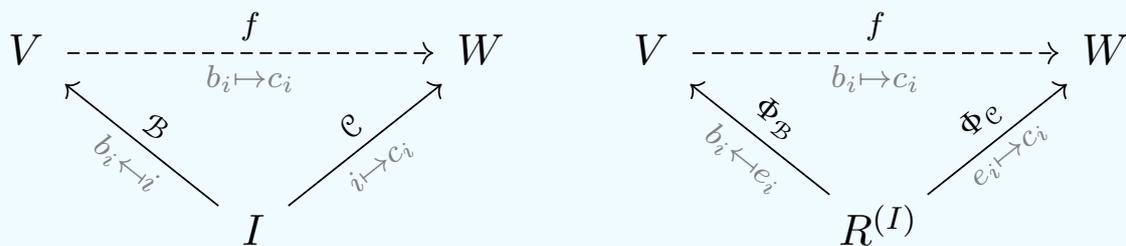
😊 Das Prinzip der linearen Fortsetzung K1B dient zur Konstruktion, das Eindeutigkeitslemma K1A zum Vergleich von linearen Abbildungen.  
 Diese Werkzeuge trivialisieren viele Rechnungen, so wie hier zu sehen.

😊 Über jedem Divisionsring  $R$  können wir das Prinzip der linearen Fortsetzung K1B kombinieren mit dem Basisergänzungssatz J2B:

### Satz K1D: starkes Prinzip der linearen Fortsetzung, SPLF

Seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über dem Divisionsring  $R$ .

(1) Gegeben seien Familien  $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$  in  $V$  und  $\mathcal{C} = (c_i)_{i \in I}$  in  $W$ .  
Wir suchen  $R$ -lineare Abbildungen  $f: V \rightarrow W$  mit  $f(b_i) = c_i$  für  $i \in I$ .



Ist  $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$  erzeugend / unabhängig / eine Basis von  $V$ ,  
so existiert höchstens / mindestens / genau eine Lösung  $f$ .

😊 Wir nennen dies das *starke* Prinzip der linearen Fortsetzung, da es nicht nur Basen behandelt, sondern beliebige Familien. Dafür benötigen wir auch stärkere Voraussetzungen, nämlich einen Divisionsring  $R$ , da wir im Fall (b) den Basisergänzungssatz J2B einsetzen.

**Aufgabe:** Beweisen Sie diese drei Aussagen!  
Nutzen Sie dazu die zuvor bewiesenen Ergebnisse.

**Lösung:** Zwei der drei Fälle haben wir bereits geklärt:

(1a) Ist die Familie  $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$  erzeugend, so nutzen wir das Eindeutigkeitslemma K1A: Es existiert höchstens eine Lösung  $f$ .

(1c) Ist  $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$ , so nutzen wir das Prinzip der linearen Fortsetzung K1B: Es existiert genau eine Lösung  $f$ .

(1b) Ist  $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$  linear unabhängig in  $V$ , so können wir zu einer Basis  $(b_j)_{j \in J}$  mit  $I \subseteq J$  ergänzen (J2B). Für  $j \in J \setminus I$  wählen wir  $c_j \in W$  beliebig, etwa  $c_j = 0$ . Anschließend können wir (1c) anwenden.

😊 Wie charakterisieren wir Basen durch eine Abbildungseigenschaft?

### Satz K1D: starkes Prinzip der linearen Fortsetzung, SPLF

Seien  $V$  und  $W \neq 0$  Vektorräume über dem Divisionsring  $R$ .

(2) Gegeben sei eine Familie  $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$  in  $V$ . Die Auswertung ergibt

$$\text{ev}_{\mathcal{B}} : \text{Hom}_R(V, W) \rightarrow \text{Abb}(I, W) : f \mapsto (f(b_i))_{i \in I}.$$

Genau dann ist  $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$  erzeugend / unabhängig / eine Basis von  $V$ , wenn die Auswertungsabbildung  $\text{ev}_{\mathcal{B}}$  injektiv / surjektiv / bijektiv ist.

😊 Das ist eine bemerkenswerte Charakterisierung dieser „internen“ Eigenschaften einer Familie  $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$  in  $V$  durch die „externen“ Abbildungseigenschaften von Homomorphismen  $f : V \rightarrow W$ .

**Aufgabe:** Beweisen Sie diese drei Äquivalenzen!

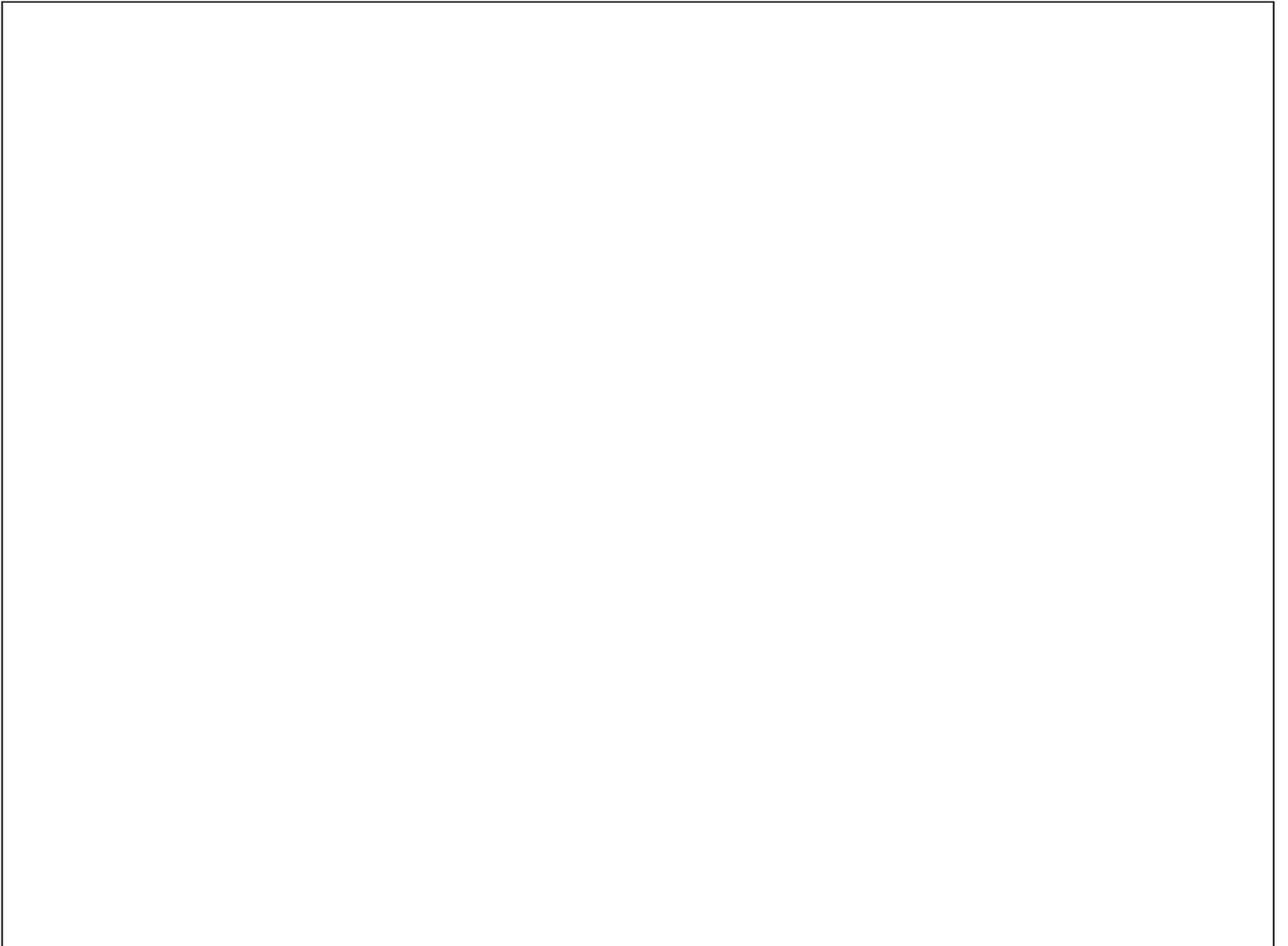
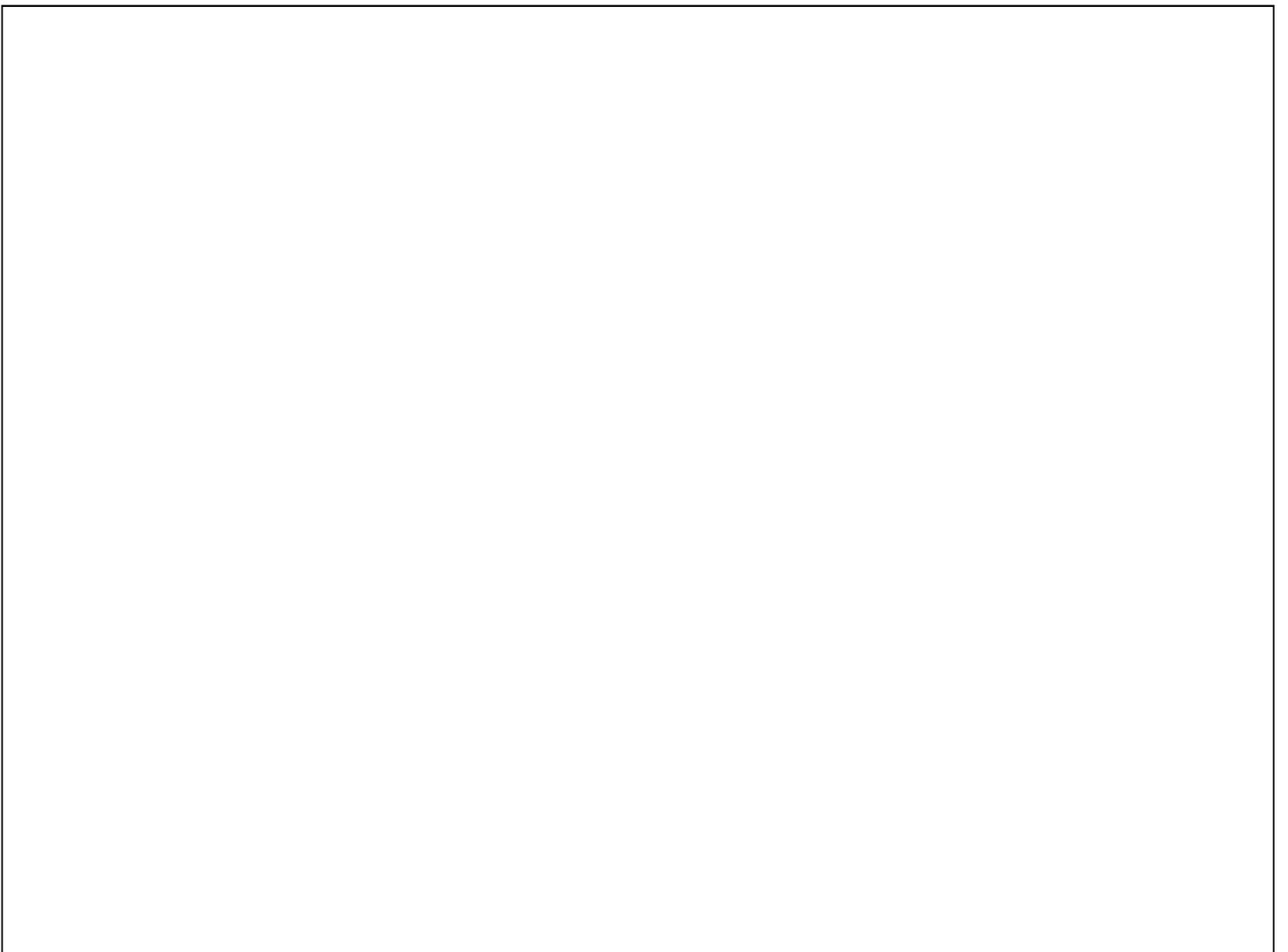
Nutzen Sie dazu die zuvor bewiesenen Ergebnisse.

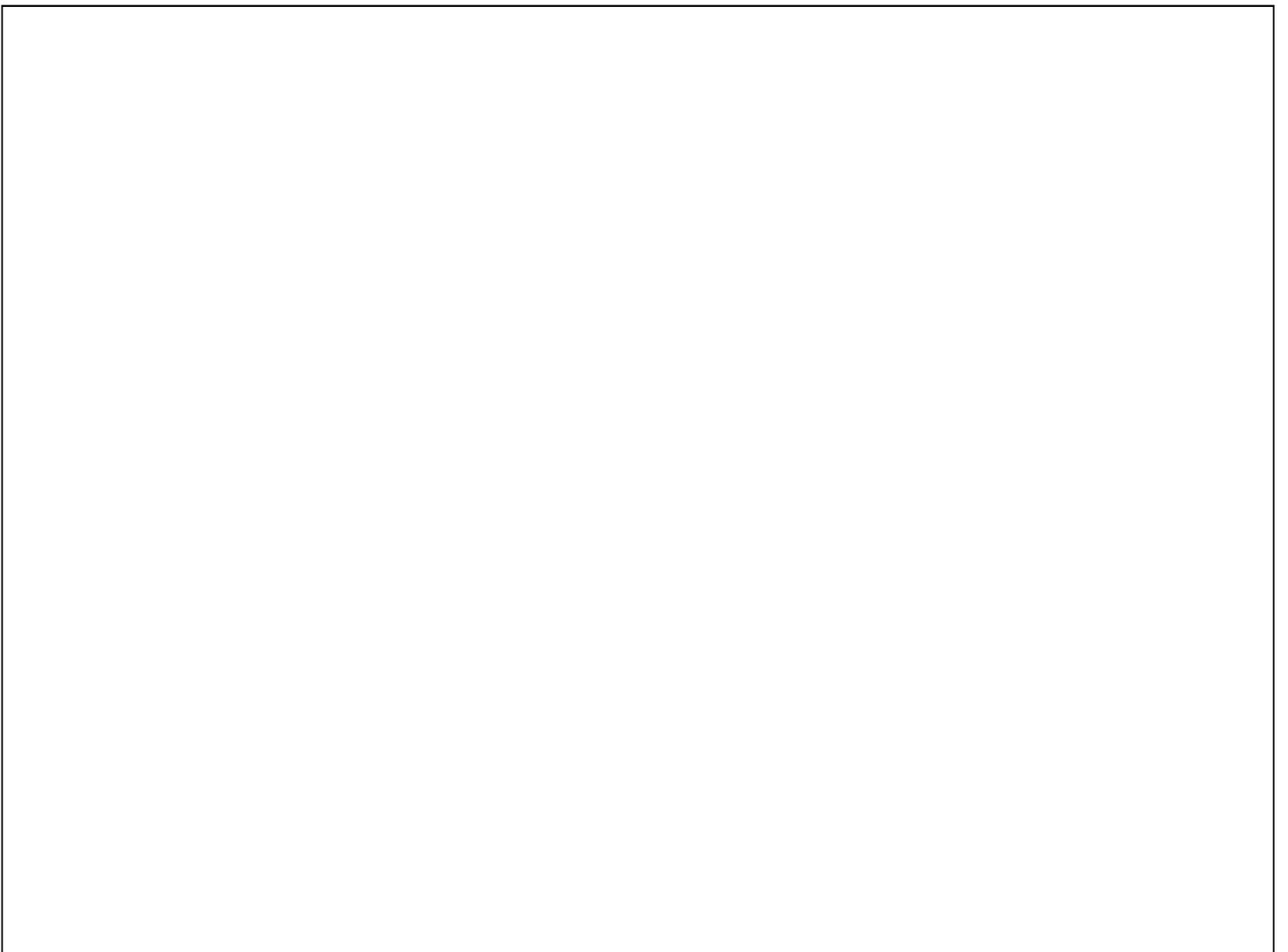
**Lösung:** Die drei Implikationen „ $\Rightarrow$ “ haben wir in (1) bereits gezeigt. Wir beweisen nun die drei Umkehrungen „ $\Leftarrow$ “ durch Kontraposition:

(2a) Die Familie  $\mathcal{B}$  erzeugt den Unterraum  $U = \langle b_i \mid i \in I \rangle_R \leq V$ . Angenommen, es gilt  $U \neq V$ . Wir wählen eine Basis  $(b_i)_{i \in J}$  von  $U$  mit  $J \subseteq I$  (J2B) und ergänzen diese zu einer Basis  $(b_i)_{i \in J \sqcup K}$  von  $V$  (J2B). Wegen  $K \neq \emptyset$  ist die Auswertung  $\text{ev}_{\mathcal{B}} : f \mapsto (f(b_i))_{i \in I}$  nicht injektiv: Auf  $(b_i)_{i \in J \sqcup K}$  können wir die Werte beliebig vorgeben (dank K1B), doch  $\text{ev}_{\mathcal{B}}$  ignoriert den Teil auf  $K$ , also alle Werte  $(b_i)_{i \in K}$ .

(2b) Angenommen, die Familie  $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$  ist linear abhängig in  $V$ , das heißt, es gilt eine Relation  $\sum_{i \in I} b_i \lambda_i$  mit  $\lambda_j \neq 0$  für ein  $j \in I$ . Nach Division in  $R$  gilt  $v_j = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} b_i \mu_i$  mit  $\mu_i = -\lambda_i / \lambda_j$ . Dann gilt  $f(v_j) = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} f(b_i) \mu_i$  auch für die Bilder. Somit ist die Auswertung  $\text{ev}_{\mathcal{B}}$  nicht surjektiv.

(2c) Ist die Auswertung  $\text{ev}_{\mathcal{B}}$  bijektiv, also injektiv und surjektiv, so ist  $\mathcal{B}$  erzeugend dank (2a) und linear unabhängig dank (2b), also eine Basis von  $V$ .





## Darstellung einer linearen Abbildung durch eine Matrix

Zu jeder Matrix  $A \in R^{m \times n}$  gehört ihre  $R$ -lineare Abbildung (I1H):

$$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} \implies f_A : R^n \rightarrow R^m : x \mapsto Ax = \sum_{j=1}^n v_j x_j$$

Die  $j$ te Spalte von  $A$  sind die Koordinaten des  $j$ ten Bildvektors  $v_j = Ae_j$ .

### Satz K1E: Bijektion zwischen Matrizen und linearen Abbildungen

Diese Zuordnung  $A \mapsto f_A$  ist eine Bijektion:

$$L : R^{m \times n} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_R(R^n, R^m) : A \mapsto f_A$$

Zu jeder  $R$ -linearen Abbildung  $f : R^n \rightarrow R^m$  existiert genau eine Matrix  $A = M(f) \in R^{m \times n}$ , sodass  $f = f_A$  gilt, also  $f(x) = Ax$  für alle  $x \in R^n$ .

Wir erhalten so das Bijektionspaar  $A \mapsto f = L(A)$  und  $f \mapsto A = M(f)$ :

$$(L, M) : R^{m \times n} \cong \text{Hom}_R(R^n, R^m).$$

## Darstellung einer linearen Abbildung durch eine Matrix

**Beweis:** Gegeben sei eine  $R$ -lineare Abbildung  $f : R^n \rightarrow R^m$ .

Gesucht ist eine darstellende Matrix  $A \in R^{m \times n}$  mit  $f_A = f$ .

(1) Existenz: Wir lesen die obige Konstruktion rückwärts:

Die  $j$ te Spalte von  $A$  sind die Koordinaten des  $j$ ten Bildvektors  $f(e_j)$ .

Wir stellen jeden Bildvektor  $f(e_j)$  in der Basis  $(e_i)_{i=1}^m$  des Zielraums dar:

$$e_j \mapsto f(e_j) = \sum_{i=1}^m e_i a_{ij} \text{ mit } a_{ij} \in R \implies A = (a_{ij})$$

Die Koeffizienten  $a_{ij}$  definieren die Matrix  $M(f) = A := (a_{ij}) \in R^{m \times n}$ .

Nach Konstruktion gilt  $f(e_j) = f_A(e_j)$  für alle  $j = 1, \dots, n$ .

Dank Eindeutigkeitslemma K1A folgt  $f = f_A$ .

(2) Eindeutigkeit: Seien  $A, A' \in R^{m \times n}$  zwei Matrizen mit  $f = f_A = f_{A'}$ .

Für alle  $j = 1, \dots, n$  ist  $f_A(e_j) = \sum_{i=1}^m e_i a_{ij}$  gleich  $f_{A'}(e_j) = \sum_{i=1}^m e_i a'_{ij}$ .

Dank linearer Unabhängigkeit folgt  $a_{ij} = a'_{ij}$  für alle  $i = 1, \dots, m$ . QED

**Aufgabe:** Wir betrachten die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 4z - 2y \\ 5x + 2z \end{bmatrix}.$$

Schreiben Sie diese Abbildung als Matrix  $A$ , sodass  $f = f_A$  gilt.

**Lösung:** Wir schreiben jeden Bildvektor  $f(e_j)_{j=1}^3$  in der Basis  $(e_i)_{i=1}^2$ :

$$f(e_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{cases} +0e_1 \\ +5e_2 \end{cases}, \quad f(e_2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} -2e_1 \\ +0e_2 \end{cases}, \quad f(e_3) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{cases} +4e_1 \\ +2e_2 \end{cases}.$$

Wir erhalten:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} = M(f) \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

**Probe:** Wir schreiben  $f_A : x \mapsto Ax$  explizit aus:

$$f_A : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0x - 2y + 4z \\ 5x + 0y + 2z \end{bmatrix}.$$

😊 Somit gilt die Gleichheit  $f = f_A$  wie gewünscht.

😊 Im Nachgang denken Sie vermutlich: Das ist ja simpel!  
In diesem Falle kann ich Ihnen nur zustimmen: Ja, das ist es.

- Der obige Satz erklärt Ihnen genau, wie die Matrix  $A$  zu bilden ist.
- Sie müssen nicht kreativ werden, nur gewissenhaft rechnen.
- Beachten Sie die Indexkonventionen. Das war's schon.

Auch wenn die Idee klar ist, so brauchen die konkreten Rechnungen wie immer etwas Gewöhnung und Übung. Bitte rechnen Sie Beispiele und Übungen sorgfältig durch, dann geht es Ihnen leicht von der Hand.

⚠️ Für größere Matrizen können die Rechnungen umfangreich werden. Vermutlich möchten Sie später diese Arbeit dem Computer übertragen.

😊 Sie können die Matrizenrechnung sofort auf dem Computer nutzen, und genau dazu müssen Sie diese simplen Rechenregeln beherrschen, damit Sie wissen, was Sie tun bzw. was Sie delegieren.

⚠️ Oft identifiziert man die Matrix  $A$  mit der Abbildung  $f_A$ . Es sind aber verschiedene Objekte, daher will ich zunächst den Unterschied betonen.

Jede Matrix  $A \in R^{m \times n}$  definiert eine lineare Abbildung  $f_A : R^n \rightarrow R^m$ .  
Jede lineare Abbildung  $f : R^n \rightarrow R^m$  entspricht einer Matrix  $A \in R^{m \times n}$ .

Wir können dies auf beliebige  $R$ -lineare Räume  $V$  und  $W$  übertragen, sobald eine Basis  $\mathcal{B} = (b_j)_{j=1}^n$  von  $V$  und  $\mathcal{C} = (c_i)_{i=1}^m$  von  $W$  vorliegt:

$$\begin{array}{ccc}
 R^n & \xrightarrow{x \mapsto Ax} & R^m \\
 \downarrow \Phi_{\mathcal{B}} \cong & \begin{array}{c} f_A \\ \updownarrow \\ f \end{array} & \downarrow \Phi_{\mathcal{C}} \cong \\
 V & \xrightarrow{\quad} & W
 \end{array}$$

😊 Dieses übersichtliche Diagramm fasst die Konstruktion zusammen:  
Wir erhalten  $f = \Phi_{\mathcal{C}} \circ f_A \circ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}$  und umgekehrt  $f_A = \Phi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{B}}$ .

😊 Der folgende Satz schreibt die zugehörigen Formeln explizit aus.  
Beides ist nützlich und wichtig: Übersicht und Details.

### Satz K1F: Bijektion zwischen Matrizen und linearen Abbildungen

Sei  $R$  ein Ring sowie  $V$  und  $W$  (rechts)lineare Räume über  $R$ .

Gegeben sei eine Basis  $\mathcal{B} = (b_j)_{j=1}^n$  von  $V$  und  $\mathcal{C} = (c_i)_{i=1}^m$  von  $W$ .

(1) Jede Matrix  $A \in R^{m \times n}$  definiert die zugehörige  $R$ -lineare Abbildung

$$f = L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(A) : V \rightarrow W : v = \sum_{j=1}^n b_j \lambda_j \mapsto w = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i, \quad \mu_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j.$$

Die Koordinaten  $\lambda \in R^n$  bezüglich  $\mathcal{B}$  werden zu  $\mu = A\lambda$  bezüglich  $\mathcal{C}$ .

(2) Die  $j$ te Spalte von  $A$  sind die Koordinaten des  $j$ ten Bildvektors  $f(b_j)$ :

$$f : b_j \mapsto f(b_j) = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij} \quad \text{mit } a_{ij} \in R$$

(3) Jede  $R$ -lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  lässt sich so eindeutig durch eine Matrix  $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) \in R^{m \times n}$  darstellen. Wir erhalten die Bijektion

$$(L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}, M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) : R^{m \times n} \cong \text{Hom}_R(V, W).$$

**Aufgabe:** Das folgt aus dem vorigen Satz K1E. Führen Sie dies aus!

**Lösung:** Die Formeln des Satzes übersetzen das obige Diagramm.

(1) Gegeben sei eine beliebige Matrix  $A \in R^{m \times n}$ . Die hier definierte Abbildung  $f = L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(A) : V \rightarrow W$  ist wohldefiniert und linear, siehe I1H.

(2) Speziell für  $\lambda = e_j$  erhalten wir die Bilder der Basisvektoren:

$$f : b_j \mapsto f(b_j) = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij}$$

Bereits diese Eigenschaft definiert  $f$  dank linearer Fortsetzung K1B; diese rekonstruiert die explizite Formel wie in (1) angegeben.

(3) Gegeben sei nun umgekehrt eine  $R$ -lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$ . Wie in (2) schreiben wir jeden Bildvektor  $f(b_j)$  in der Basis  $\mathcal{C} = (c_i)_{i=1}^m$ .

Die so gefundenen Koeffizienten  $a_{ij}$  definieren die zur Abbildung  $f$  gehörige darstellende Matrix  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) := A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$ .

Dank Eindeutigkeitslemma K1A gilt  $f = L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(A)$

**Alternative:** Dank Satz K1E haben wir bereits das Bijektionspaar

$$(L, M) : R^{m \times n} \cong \text{Hom}_R(R^n, R^m).$$

(4) Wie im obigen Diagramm dargestellt gilt

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(A) &= \Phi_{\mathcal{C}} \circ L(A) \circ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}, \\ M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) &= M(\Phi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{B}}). \end{aligned}$$

Dies definiert das Bijektionspaar  $(L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}, M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) : R^{m \times n} \cong \text{Hom}_R(V, W)$ :

(4a) Für jede Matrix  $A \in R^{m \times n}$  und  $f := L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(A)$  gilt  $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ , denn

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(A)) = M(\Phi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{C}} \circ L(A) \circ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}}) = A.$$

(4b) Für  $f \in \text{Hom}_R(V, W)$  und  $A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$  gilt  $f = L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(A)$ , denn

$$L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)) = \Phi_{\mathcal{C}} \circ L(M(\Phi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{B}})) \circ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} = f.$$

**Aufgabe:** Stellen Sie die Ableitung  $\partial : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$  als Matrix  $A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\partial)$  bezüglich der Monombasen dar. Wir betrachten hier

den Raum  $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$  mit der Basis  $\mathcal{B} = (X^j)_{j=0}^3$ ,

den Raum  $W = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$  mit der Basis  $\mathcal{C} = (X^i)_{i=0}^2$ .

**Lösung:** Wir schreiben  $\partial(X^j) = \sum_{i=0}^2 X^i a_{ij}$  in Koordinaten aus:

$$X^0 \mapsto \partial X^0 = 0 = 0 \cdot X^0 + 0 \cdot X^1 + 0 \cdot X^2,$$

$$X^1 \mapsto \partial X^1 = 1 = 1 \cdot X^0 + 0 \cdot X^1 + 0 \cdot X^2,$$

$$X^2 \mapsto \partial X^2 = 2X = 0 \cdot X^0 + 2 \cdot X^1 + 0 \cdot X^2,$$

$$X^3 \mapsto \partial X^3 = 3X^2 = 0 \cdot X^0 + 0 \cdot X^1 + 3 \cdot X^2.$$

In der  $j$ ten Spalten von  $A$  stehen die Koordinaten des  $j$ ten Bildvektors:

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\partial) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

😊 Wir folgen dem expliziten Verfahren des Darstellungssatzes K1F: Wir bestimmen die Koeffizienten  $a_{ij} \in R$  in der eindeutigen Darstellung

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij}.$$

Diese Koeffizienten fassen wir *spaltenweise* zur Matrix  $A$  zusammen:

Die  $j$ te Spalte von  $A$  sind die Koordinaten des  $j$ ten Bildvektors  $f(b_j)$ .

Für diese ersten Beispiele habe ich nicht-quadratische Matrizen gewählt, damit die spaltenweise Konstruktion besonders augenfällig wird.

⚠️ Oft betrachten wir quadratische Matrizen, und dort besteht eine gewisse Verwechslungsgefahr da Spalten und Zeilen gleich lang sind. Bis dahin ist Ihnen die Spaltenkonvention hoffentlich in Fleisch und Blut übergegangen. Zur Betonung sind unsere ersten Beispiele rechteckig, nicht quadratisch, das verhindert weitgehend alle Missverständnisse.

⚠️ Die Spaltenkonvention kommt daher, dass wie Matrizen gemäß  $Ax$  von links auf Vektoren wirken lassen. Manche Autoren bevorzugen  $xA$ , das geht ebenfalls, und dann ist alles entsprechend umgekehrt.

**Aufgabe:** Stellen Sie die Ableitung  $\partial : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$  als Matrix  $A' := M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(\partial)$  bezüglich der faktoriellen Basen dar. Wir betrachten hier

den Raum  $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$  mit der Basis  $\mathcal{B}' = \left(\frac{1}{j!}X^j\right)_{j=0}^3$ ,

den Raum  $W = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$  mit der Basis  $\mathcal{C}' = \left(\frac{1}{i!}X^i\right)_{i=0}^2$ .

**Lösung:** Wir schreiben  $\partial\left(\frac{1}{j!}X^j\right) = \sum_{i=0}^2 \frac{1}{i!}X^i a'_{ij}$  in Koordinaten aus:

$$\frac{1}{0!}X^0 \mapsto 0 = 0 \cdot \frac{1}{0!}X^0 + 0 \cdot \frac{1}{1!}X^1 + 0 \cdot \frac{1}{2!}X^2,$$

$$\frac{1}{1!}X^1 \mapsto \frac{1}{0!}X^0 = 1 \cdot \frac{1}{0!}X^0 + 0 \cdot \frac{1}{1!}X^1 + 0 \cdot \frac{1}{2!}X^2,$$

$$\frac{1}{2!}X^2 \mapsto \frac{1}{1!}X^1 = 0 \cdot \frac{1}{0!}X^0 + 1 \cdot \frac{1}{1!}X^1 + 0 \cdot \frac{1}{2!}X^2,$$

$$\frac{1}{3!}X^3 \mapsto \frac{1}{2!}X^2 = 0 \cdot \frac{1}{0!}X^0 + 0 \cdot \frac{1}{1!}X^1 + 1 \cdot \frac{1}{2!}X^2.$$

In der  $j$ ten Spalten von  $A'$  stehen die Koordinaten des  $j$ ten Bildvektors:

$$A' = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(\partial) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

😊 Sie sehen an diesem Beispiel sehr eindrücklich, dass die darstellende Matrix sensibel von den gewählten Basen abhängt.

😊 Die Form dieser Matrix ist interessant, siehe K1H, insbesondere wenn wir  $\partial : \mathbb{R}[X]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq n}$  als Endomorphismus betrachten.

**Aufgabe:** Stellen Sie das Integral  $f : \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$  als Matrix  $B := M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$  bezüglich der Monombasen dar.

$$f : P \mapsto Q \quad \text{sodass } \partial Q = P \text{ und } Q(0) = 0$$

**Lösung:** Zu jedem Basisvektor  $X^i$  der Basis  $\mathcal{C} = (X^i)_{i=0}^2$  schreiben wir den Bildvektor  $f(X^i) = \sum_{j=0}^3 X^j b_{ji}$  in der Basis  $\mathcal{B} = (X^j)_{j=0}^3$ .

$$X^0 \mapsto \int X^0 = X = 0 \cdot X^0 + 1 \cdot X^1 + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3,$$

$$X^1 \mapsto \int X^1 = \frac{1}{2} X^2 = 0 \cdot X^0 + 0 \cdot X^1 + \frac{1}{2} \cdot X^2 + 0 \cdot X^3,$$

$$X^2 \mapsto \int X^2 = \frac{1}{3} X^3 = 0 \cdot X^0 + 0 \cdot X^1 + 0 \cdot X^2 + \frac{1}{3} \cdot X^3.$$

In der  $i$ ten Spalte von  $B$  steht das Bild des  $i$ ten Basisvektors:

$$B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

**Aufgabe:** Stellen Sie das Integral  $\int : \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$  als Matrix  $B' := M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f)$  bezüglich der faktoriellen Basen dar.

$$\int : P \mapsto Q \quad \text{sodass } \partial Q = P \text{ und } Q(0) = 0$$

**Lösung:** Zu jedem Basisvektor  $\frac{1}{i!}X^i$  der Basis  $\mathcal{C}' = (\frac{1}{i!}X^i)_{i=0}^2$  schreiben wir den Bildvektor  $\int(\frac{1}{i!}X^i) = \sum_{j=0}^3 \frac{1}{j!}X^j b'_{ji}$  in der Basis  $\mathcal{B}' = (\frac{1}{j!}X^j)_{j=0}^3$ .

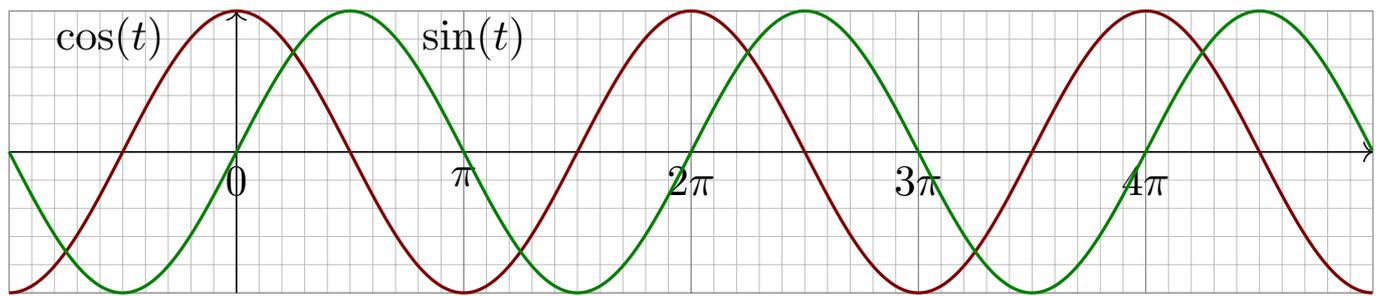
$$\frac{1}{0!}X^0 \mapsto \frac{1}{1!}X^1 = 0 \cdot \frac{1}{0!}X^0 + 1 \cdot \frac{1}{1!}X^1 + 0 \cdot \frac{1}{2!}X^2 + 0 \cdot \frac{1}{3!}X^3,$$

$$\frac{1}{1!}X^1 \mapsto \frac{1}{2!}X^2 = 0 \cdot \frac{1}{0!}X^0 + 0 \cdot \frac{1}{1!}X^1 + 1 \cdot \frac{1}{2!}X^2 + 0 \cdot \frac{1}{3!}X^3,$$

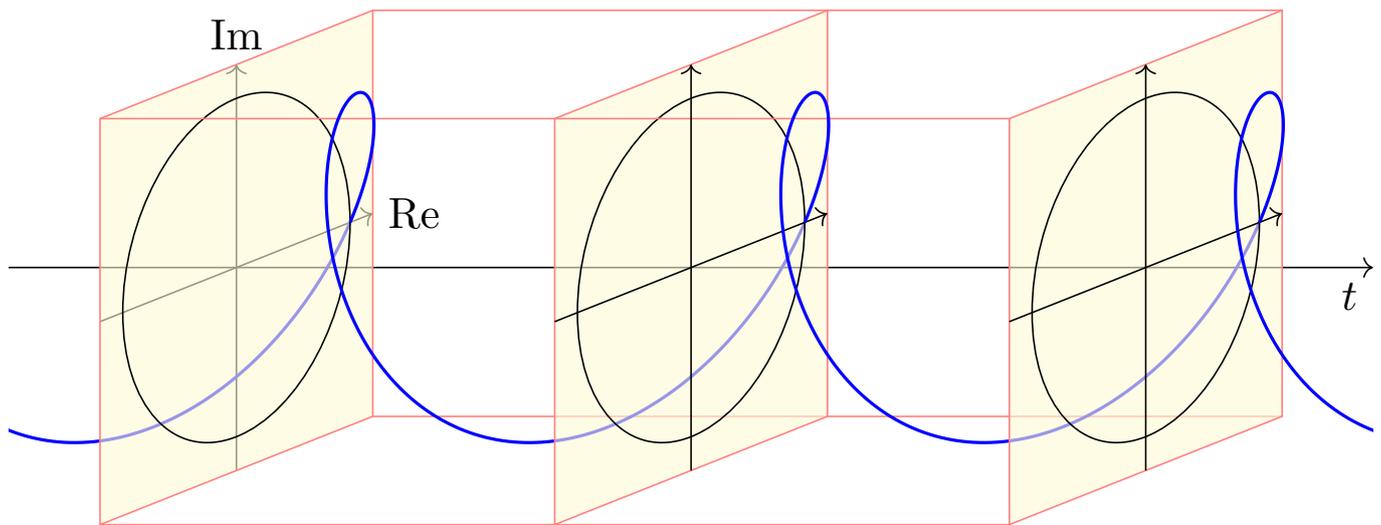
$$\frac{1}{2!}X^2 \mapsto \frac{1}{3!}X^3 = 0 \cdot \frac{1}{0!}X^0 + 1 \cdot \frac{1}{1!}X^1 + 0 \cdot \frac{1}{2!}X^2 + 1 \cdot \frac{1}{3!}X^3.$$

In der  $i$ ten Spalte von  $B'$  steht das Bild des  $i$ ten Basisvektors:

$$B' = M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Die komplexe Exponentialfunktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$ :



Sie kennen die reellen Funktionen Sinus und Cosinus,  $\sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  
Diese fassen wir in der komplexen Exponentialfunktion zusammen:

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Die obige Graphik macht dies dreidimensional anschaulich.  
In der komplexen Ebene  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  beschreibt  $g$  die Kreislinie.  
Wenn wir gleichzeitig die Zeitachse nach rechts abtragen,  
so erhalten wir die gezeigte rechtshändige Schraubenlinie.

Die komplex-konjugierte Funktion

$$\bar{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto e^{-it} = \cos t - i \sin t$$

beschreibt entsprechend eine linkshändige Schraubenlinie.

**Aufgabe:** Zeigen Sie  $g' = ig$  durch (1) Ableiten und (2) geometrisch.

**Lösung:** (1) Wir leiten  $g$  termweise ab und vergleichen:

$$g(t) = \cos t + i \sin t$$

$$g'(t) = -\sin t + i \cos t$$

$$ig(t) = i \cos t - \sin t$$

(2) Wir können alle Ableitungen auch geometrisch bestimmen!

Wir benötigen dazu nur eine Information (die ich voraussetze):

$g$  durchläuft die Kreislinie mit konstanter Geschwindigkeit 1.

Die Tangente an den Kreis steht senkrecht auf den Radius, hier  $g(t)$ .

Also ist der Geschwindigkeitsvektor  $g'(t)$  ein reelles Vielfaches von  $ig(t)$ .

Da wir zudem  $|g'(t)| = 1$  und die Richtung kennen, folgt  $g'(t) = ig(t)$ .

Das obige Bild hilft der Anschauung, für unsere nächsten Rechnungen benötigen wir zudem die Ableitungen. Den „Ableitungsoperator“ wollen wir in den folgenden Beispielen als lineare Abbildung betrachten und bezüglich geeigneter Basen als Matrix darstellen.

**Aufgabe:** Wir arbeiten über dem Körper  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .  
Wir betrachten den Funktionenraum  $\mathbb{K}^{\mathbb{R}} = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$  über  $\mathbb{K}$  und darin

$$V := \langle \cos, \sin \rangle_{\mathbb{K}} = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : t \mapsto a \cos(t) + b \sin(t) \mid a, b \in \mathbb{K} \right\}.$$

- (1) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{A} = (\cos, \sin)$  eine Basis von  $V$  über  $\mathbb{K}$  ist.  
(2) Stellen Sie die Ableitung  $\partial : V \rightarrow V$  als Matrix bezüglich  $\mathcal{A}$  dar.

**Lösung:** (1) Die Familie  $\mathcal{A} = (\cos, \sin)$  erzeugt  $V$ , nach Konstruktion.  
Zur Unabhängigkeit nutzen wir die  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung  $\Psi : V \rightarrow \mathbb{K}^2$  mit

$$\Psi(f) = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(\pi/2) \end{bmatrix}, \quad M = (\Psi(\cos), \Psi(\sin)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix  $M$  ist invertierbar, ihre Spalten sind also linear unabhängig.  
Folglich ist auch  $\mathcal{A} = (\cos, \sin)$  linear unabhängig über  $\mathbb{K}$ , dank J1i.

- (2) Wir finden  $\cos' = -\sin$  und  $\sin' = \cos$ . Die darstellende Matrix ist

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\partial) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

😊 Die lineare Unabhängigkeit lässt sich in diesem Beispiel nicht direkt mit dem Gauß-Algorithmus berechnen. Doch wir können linear abbilden in einen Koordinatenraum  $\mathbb{K}^n$  und dann Bemerkung J1i anwenden.

**Bemerkung:** Alternativ nutzen wir die Abbildung  $\Psi : V \rightarrow \mathbb{K}^2$  mit

$$\Psi(f) = \begin{bmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{bmatrix}, \quad M = (\Psi(\cos), \Psi(\sin)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix  $M$  ist invertierbar, ihre Spalten sind also linear unabhängig.  
Folglich ist auch  $\mathcal{A} = (\cos, \sin)$  linear unabhängig über  $\mathbb{K}$ , dank J1i.

😊 Der Raum  $V = \langle \cos, \sin \rangle_{\mathbb{K}} \leq \mathbb{K}^{\mathbb{R}}$  hat zunächst keine Koordinaten:  
Es gibt kein „kanonisches“ oder „naturegegebenes“ Koordinatensystem.  
Für konkrete Rechnungen können wir jedoch Koordinaten einführen,  
und die naheliegende Wahl hierzu ist die Basis  $\mathcal{A} = (\cos, \sin)$   
Die folgende Aufgabe zeigt eine weitere mögliche Basiswahl.  
Die darstellende Matrix wird dann sogar diagonal!

**Aufgabe:** Im Funktionenraum  $\mathbb{C}^{\mathbb{R}} = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  über  $\mathbb{C}$  betrachten wir  $g(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$  und  $\bar{g}(t) = e^{-it} = \cos t - i \sin t$ , sowie

$$\begin{aligned} V &:= \langle \cos, \sin \rangle_{\mathbb{C}}^{\dagger} \geq \langle g, \bar{g} \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

- (1) Zeigen Sie, dass auch  $\mathcal{B} = (g, \bar{g})$  eine Basis von  $V$  über  $\mathbb{C}$  ist.  
 (2) Stellen Sie die Ableitung  $\partial: V \rightarrow V$  als Matrix bezüglich  $\mathcal{B}$  dar.

**Lösung:** (1) Die Familie  $\mathcal{B} = (g, \bar{g})$  erzeugt  $V = \langle \cos, \sin \rangle_{\mathbb{C}}^{\dagger}$ , denn

$$\begin{aligned} \cos(t) &= \text{Re } g(t) = \frac{1}{2}[g(t) + \bar{g}(t)] \in \langle g, \bar{g} \rangle_{\mathbb{C}}, \\ \sin(t) &= \text{Im } g(t) = \frac{1}{2i}[g(t) - \bar{g}(t)] \in \langle g, \bar{g} \rangle_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Wegen  $\dim_{\mathbb{C}}(V) = 2$  ist  $\mathcal{B}$  minimal, also eine Basis von  $V$ , dank J2L.

(2) Wir finden  $g' = ig$  und  $\bar{g}' = -i\bar{g}$ . Die darstellende Matrix ist also

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\partial) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

😊 Funktionenräume sind besonders lehrreiche Beispiele:

- 1 Sie sind relevant in der Analysis und vielen Anwendungen.
- 2 Wir rechnen nicht unmittelbar in einem Koordinatenraum.
- 3 Wir können jedoch hilfreiche Koordinaten einführen, ...
- 4 und dazu müssen wir die Definitionen ernst nehmen!

😊 Das vorliegende Beispiel zeigt, warum die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  hier nützlicher und somit „natürlicher“ sind als die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ : In der Basis  $\mathcal{B} = (g, \bar{g})$  wird die darstellende Matrix  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\partial)$  diagonal! Das ist für viele Rechnungen einfacher und daher vorteilhaft.

😊 Außerdem ist die Exponentialfunktion (zuerst reell, dann komplex) die wichtigste Funktion der Analysis, daher kann es nicht schaden, sie hier als Beispiel zu untersuchen. Nutzen Sie die Querbezüge, denken Sie nicht in Schubladen, sondern lernen Sie vernetzt!

## Beispiel K1G: Exponentialfunktionen und Diagonalmatrix

Wir arbeiten über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Gegeben seien Konstanten  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  in  $\mathbb{K}$  mit  $\lambda_i \neq \lambda_j$  für  $i \neq j$ . Wir betrachten die Funktionen

$$f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : t \mapsto e^{\lambda_k t}.$$

Die Familie  $\mathcal{B} = (f_0, \dots, f_n)$  ist linear unabhängig über  $\mathbb{K}$ . (Übung!)

$$\begin{aligned} V &:= \langle f_0, \dots, f_n \rangle_{\mathbb{K}} \\ &= \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : t \mapsto c_0 e^{\lambda_0 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mid c_0, \dots, c_n \in \mathbb{K} \right\} \end{aligned}$$

Für die Ableitung finden wir  $\partial f_k = \lambda_k f_k$ . Die darstellende Matrix von  $\partial : V \rightarrow V$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$  ist demnach eine **Diagonalmatrix**:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\partial) = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

😊 Wenn Sie möchten, lesen Sie dieses Beispiel zunächst für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , sodass Sie vereinfachend nur reelle Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten. Die Rechnung über  $\mathbb{C}$  verläuft wörtlich genauso. Es ist daher günstig, beide Fälle  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  gleich zusammenfassend zu behandeln.

😊 Das ist ein schönes Beispiel für eine gelungene **Diagonalisierung**. Die allgemeine Problemstellung lautet entsprechend: Gegeben ist eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow V$ . Hierzu wollen wir eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  finden, sodass die darstellende Matrix  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  möglichst einfache Gestalt hat, idealerweise sogar diagonal. Hier gelingt genau dies!

Die allgemeine Problemstellung der Diagonalisierung werden wir in Definition K2M gegen Ende des Kapitels zusammenfassen. Diagonalisierung ist ein zentrales Anliegen der Linearen Algebra; wir werden es in den nächsten Kapiteln genauer untersuchen.

**Aufgabe:** (1) Beweisen Sie, dass  $f_0, \dots, f_n$  linear unabhängig sind. Untersuchen Sie hierzu die  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung  $\Psi : V \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$  mit

$$\Psi(f) = (f(0), f'(0), \dots, f^{(n)}(0))^T.$$

Das entspricht dem Beginn der Taylor-Entwicklung im Punkt 0.

(2) Überprüfen Sie die behaupteten Ableitungen  $\partial f_k = \lambda_k f_k$  und so die darstellende Matrix  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\partial)$  wie angegeben.

**Lösung:** (2) Reell ist dies klar, es gilt ebenso komplex.

Für jede komplexe Zahl  $\lambda = \sigma + i\tau$  mit  $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$  haben wir:

$$f(t) = e^{\lambda t} = e^{\sigma t} \cdot e^{i\tau t} = e^{\sigma t} [\cos(\tau t) + i \sin(\tau t)]$$

Nach den reellen Ableitungsregeln finden wir:

$$f'(t) = \sigma e^{\sigma t} \cdot e^{i\tau t} + e^{\sigma t} \cdot i\tau e^{i\tau t} = \lambda e^{\lambda t}.$$

**Lösung:** (1) Wir fassen die Bildvektoren als Matrix zusammen:

$$\Psi(f) = \begin{bmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ \vdots \\ f^{(n)}(0) \end{bmatrix}, \quad M = (\Psi(f_0), \dots, \Psi(f_n)) = \begin{bmatrix} \lambda_0^0 & \lambda_1^0 & \dots & \lambda_n^0 \\ \lambda_0^1 & \lambda_1^1 & \dots & \lambda_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0^n & \lambda_1^n & \dots & \lambda_n^n \end{bmatrix}.$$

Dies ist die Vandermonde-Matrix bzw. ihre Transponierte (Satz B3A). Die Matrix  $M$  ist invertierbar, ihre Spalten sind also linear unabhängig. Folglich sind auch  $f_0, \dots, f_n$  linear unabhängig, dank J11.

**Bemerkung:** Die darstellende Matrix von  $\Psi$  bezüglich der Basen  $\mathcal{B} = (f_0, \dots, f_n)$  und  $\mathcal{E} = (e_0, \dots, e_n)$  ist demnach  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\Psi) = M$ .

**Bemerkung:** Alternativ können wir als Abbildung  $\Psi : V \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$  auch die Auswertung an den Stellen  $t = 0, 1, \dots, n$  betrachten. Wir erhalten dann die Vandermonde-Matrix zu  $\mu_k = e^{\lambda_k}$ .

## Beispiel K14: Exponentialfunktionen und Jordan-Block

Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Zu  $k \in \mathbb{N}$  betrachten wir die Funktion

$$f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : t \mapsto \frac{t^k}{k!} e^{\lambda t}.$$

Die Familie  $\mathcal{B} = (f_0, \dots, f_n)$  ist linear unabhängig über  $\mathbb{K}$ . (Übung!)

$$\begin{aligned} V &:= \langle f_0, \dots, f_n \rangle_{\mathbb{K}} \\ &= \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : t \mapsto (c_0 + c_1 t + \dots + c_n t^n) e^{\lambda t} \mid c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \right\} \end{aligned}$$

Wir finden  $\partial f_0 = \lambda f_0$  und  $\partial f_k = \lambda f_k + f_{k-1}$  für  $k \geq 1$ . Die darstellende Matrix von  $\partial : V \rightarrow V$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$  ist ein **Jordan-Block**:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\partial) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

😊 Wenn Sie möchten, lesen Sie dieses Beispiel zunächst für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , sodass Sie vereinfachend nur reelle Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten. Die Rechnung über  $\mathbb{C}$  verläuft wörtlich genauso. Es ist daher günstig, beide Fälle  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  gleich zusammenfassend zu behandeln.

😊 Das ist ein schönes Beispiel für eine gelungene **Jordanisierung**. Zu einer linearen Abbildung  $f : V \rightarrow V$  wollen wir eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  finden, sodass die darstellende Matrix  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  möglichst einfache Gestalt hat. Diagonalisierung ist in diesem Beispiel nicht möglich, aber die gezeigte Jordan-Matrix ist die nächstbeste Lösung.

**Aufgabe:** (1) Beweisen Sie, dass  $f_0, \dots, f_n$  linear unabhängig sind.  
 (2) Überprüfen Sie die behaupteten Ableitungen  $\partial f_k = \lambda_k f_k + f_{k-1}$  und so die darstellende Matrix  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\partial)$  wie angegeben.

**Lösung:** (2a) Für  $f_0(t) = e^{\lambda t}$  wissen wir bereits  $f_0'(t) = \lambda e^{\lambda t}$ .  
 Für  $f_k(t) = e^{\lambda t} t^k / k!$  mit  $k \geq 1$  finden wir dank Produktregel:

$$f_k'(t) = \lambda e^{\lambda t} t^k / k! + e^{\lambda t} t^{k-1} / (k-1)! = \lambda f_k(t) + f_{k-1}(t)$$

(2b) Zur Aufstellung der Matrix  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\partial)$  setzen wir wie in (1) voraus, dass die Familie  $\mathcal{B} = (f_0, \dots, f_n)$  tatsächlich eine Basis von  $V$  ist.  
 Die  $k$ te Spalte der Matrix  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\partial)$  besteht aus den Koeffizienten des Bildes  $\partial f_k = \lambda_k f_k + f_{k-1}$ . Wir erhalten die oben angegebene Matrix.

**Lösung:** (1a) Aus  $f = \sum_{k=0}^n \alpha_k f_k$  mit  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  folgt

$$f(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k!} t^k.$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Somit gilt  $f = 0$  nur, falls  $\alpha_k = 0$  für alle  $k$ . (B3A, G3M).

(1b) Wir nutzen die lineare Abbildung  $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\Psi(f) = \begin{bmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ \vdots \\ f^{(n)}(0) \end{bmatrix}, \quad M = (\Psi(f_0), \dots, \Psi(f_n)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix  $M$  ist invertierbar, ihre Spalten sind also linear unabhängig. Folglich sind auch  $f_0, \dots, f_n$  linear unabhängig, dank J1i.

**Bemerkung:** Die darstellende Matrix von  $\Psi$  bezüglich der Basen  $\mathcal{B} = (f_0, \dots, f_n)$  und  $\mathcal{E} = (e_0, \dots, e_n)$  ist demnach  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\Psi) = M$ .

**Satz K11: Verträglichkeit mit Addition und Skalierung**

Sei  $R$  ein Ring sowie  $V$  und  $W$  (rechts)lineare Räume über  $R$ .  
Gegeben sei eine Basis  $\mathcal{V} = (v_i)_{i=1}^n$  von  $V$  und  $\mathcal{W} = (w_i)_{i=1}^m$  von  $W$ .

(1) Die Menge  $\text{Hom}_R(V, W)$  ist eine Gruppe bezüglich punktweiser Addition, dank Satz I11. Das oben konstruierte Bijektionspaar

$$(\mathbf{L}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}, \mathbf{M}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}) : (R^{m \times n}, +) \cong (\text{Hom}_R(V, W), +)$$

ist ein Isomorphismus abelscher Gruppen.

(2) Ist  $R$  zudem kommutativ, so ist auch  $\text{Hom}_R(V, W)$  ein  $R$ -linearer Raum bezüglich punktweiser Skalierung, dank Satz I11. Damit ist

$$(\mathbf{L}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}, \mathbf{M}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}) : (R^{m \times n}, +, \cdot) \cong (\text{Hom}_R(V, W), +, \cdot)$$

sogar ein Isomorphismus  $R$ -linearer Räume. Insbesondere gilt

$$\dim_R \text{Hom}_R(V, W) = \dim_R(R^{m \times n}) = mn.$$

Anschaulich gesagt:

- 1** Wenn Sie Matrizen  $A$  und  $A'$  in  $R^{m \times n}$  addieren, dann addieren sich die zugehörigen linearen Abbildungen  $f$  und  $f'$  in  $\text{Hom}_R(V, W)$ .
- 2** Wenn Sie eine Matrix  $A$  in  $R^{m \times n}$  skalieren zu  $\lambda A$ , dann skaliert auch die zugehörige lineare Abbildung  $f$  in  $\text{Hom}_R(V, W)$  zu  $\lambda f$ .

Gerade diese grundlegenden Rechenregeln werden wir später oft und gerne nutzen, meist sogar ohne es weiter zu bemerken. Es ist daher hilfreich, sie hier explizit zu formulieren... und auch zu beweisen.

**Aufgabe:** Rechnen Sie diese beiden Aussagen nach!

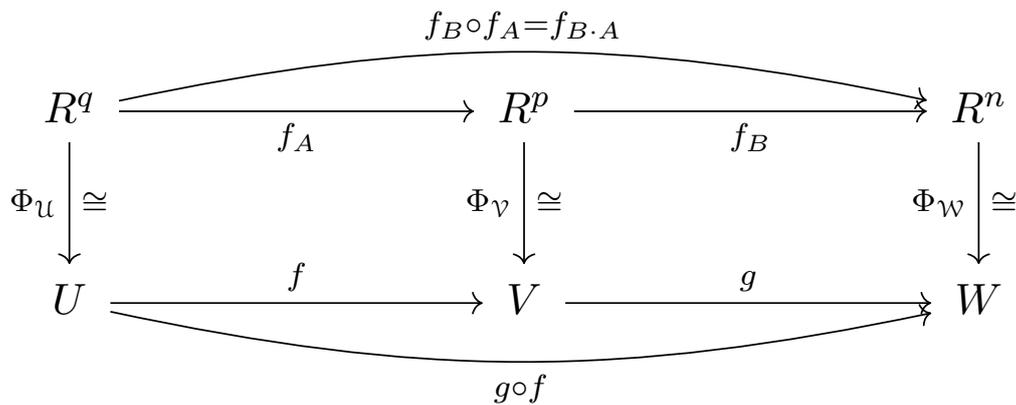
**Lösung:** (1) Gegeben seien Matrizen  $A$  und  $A'$  in  $R^{m \times n}$  mit ihren linearen Abbildungen  $f = L_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}(A)$  und  $f' = L_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}(A')$ . Wir finden:

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}(A + A') : v = \sum_{j=1}^n v_j \lambda_j &\mapsto \sum_{i=1}^m w_i \sum_{j=1}^n (a_{ij} + a'_{ij}) \lambda_j \\ &= \sum_{i=1}^m w_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j + \sum_{i=1}^m w_i \sum_{j=1}^n a'_{ij} \lambda_j = f(v) + f'(v) \end{aligned}$$

(2) Für jeden Skalar  $\mu \in R$  gilt dann entsprechend dank Kommutativität:

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}(A\mu) : v = \sum_{j=1}^n v_j \lambda_j &\mapsto \sum_{i=1}^m w_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \mu \lambda_j \\ &= \sum_{i=1}^m w_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j \mu = f(v) \mu \end{aligned}$$

😊 Alternativ genügt es jeweils, die Bilder der Basis  $\mathcal{V}$  zu vergleichen.



### Satz K1J: Matrixmultiplikation und Komposition

Sei  $R$  ein Ring sowie  $U, V, W$  (rechts)lineare Räume über  $R$  mit Basen  $\mathcal{U} = (u_i)_{i=1}^q$  von  $U$  und  $\mathcal{V} = (v_j)_{j=1}^p$  von  $V$  und  $\mathcal{W} = (w_k)_{k=1}^n$  von  $W$ .

(1) Für je zwei Matrizen  $A \in R^{p \times q}$  und  $B \in R^{n \times p}$  gilt:

$$L_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}(B \cdot A) = L_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}(B) \circ L_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(A)$$

(2) Für je zwei  $R$ -lineare Abbildungen  $f: U \rightarrow V$  und  $g: V \rightarrow W$  folgt:

$$M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}(g \circ f) = M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}(g) \cdot M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(f)$$

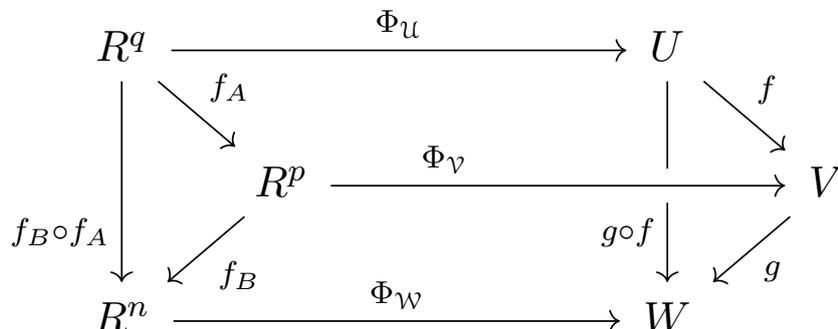
Die Grundidee des Beweises ist im obigen Diagramm dargestellt!

Für je zwei Matrizen  $A \in R^{p \times q}$  und  $B \in R^{n \times p}$  haben wir die linearen Abbildungen  $f_A: R^q \rightarrow R^p: x \mapsto y = Ax$  und  $f_B: R^p \rightarrow R^n: y \mapsto z = Ay$ . Die Komposition ist dann  $f_B \circ f_A = f_{B \cdot A}$ , denn für alle  $x \in R^q$  gilt:

$$(f_B \circ f_A)(x) = f_B(f_A(x)) = B(Ax) = (BA)x = f_{BA}(x)$$

Diese Eigenschaft überträgt sich nun allgemein durch das Bijektionspaar  $(L, M)$  wie im Satz ausformuliert.

Hier noch einmal dasselbe Diagramm in anderer Darstellung:



**Aufgabe:** Beweisen Sie den Satz nach Vorbild der obigen Diagramme.

**Lösung:** (1) Zu  $A \in R^{p \times q}$  und  $B \in R^{n \times p}$  gilt:

$$\begin{aligned}
 L_V^W(B) \circ L_U^V(A) &\stackrel{\text{Def}}{=} \Phi_W f_B \Phi_V^{-1} \circ \Phi_V f_A \Phi_U^{-1} \\
 &\stackrel{\text{Ass}}{=} \Phi_W f_{B \cdot A} \Phi_U^{-1} \stackrel{\text{Def}}{=} L_U^W(B \cdot A)
 \end{aligned}$$

(2) Zu  $f: U \rightarrow V$  und  $g: V \rightarrow W$  sowie  $A = M_U^V(f)$  und  $B = M_V^W(g)$  gilt:

$$\begin{aligned}
 M_U^W(g \circ f) &\stackrel{\text{KIF}}{=} M_U^W(L_V^W(B) \circ L_U^V(A)) \\
 &\stackrel{(1)}{=} M_U^W(L_U^W(B \cdot A)) \stackrel{\text{KIF}}{=} B \cdot A \stackrel{\text{Def}}{=} M_V^W(g) \cdot M_U^V(f)
 \end{aligned}$$

😊 Der Beweis übersetzt das Diagramm in explizite Formeln.

**Aufgabe:** Stellen Sie die Ableitung  $\partial: \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$  als Matrix  $A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\partial)$  bezüglich der Monombasen  $\mathcal{B} = (X^j)_{j=0}^3$  und  $\mathcal{C} = (X^i)_{i=0}^2$  dar, ebenso das Integral  $\int: \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$  als Matrix  $B$ .

Was erwarten Sie für die Produkte  $A \cdot B$  und  $B \cdot A$ ?

**Lösung:** Wir finden

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\partial) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\int) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Für die Produkte gilt

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

😊 Das entspricht dem HDI (I1s, K1c), hier durch Matrizen formuliert.

**Aufgabe:** Stellen Sie die Ableitung  $\partial : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$  als Matrix  $A$  bezüglich der Monombasis  $\mathcal{B}$  dar, ebenso  $\partial^2 = \partial \circ \partial$  als Matrix  $B$ .  
Vergleichen Sie die Matrix  $B$  mit dem Produkt  $A \cdot A$ . Was erwarten Sie?

**Lösung:** Wir finden

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\partial) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\partial^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

😊 Tatsächlich gilt  $A \cdot A = B$ , wie vom Kompositionssatz K1k garantiert.

**Bemerkung:** In der faktoriellen Basis  $\mathcal{B}'$  finden wir

$$A' = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\partial) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B' = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\partial^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

😊 Auch hier gilt  $A' \cdot A' = B'$ , wie vom Kompositionssatz K1k garantiert.

$$\begin{array}{ccc}
 R^n & \xrightarrow{f_A} & R^n \\
 \Phi_{\mathcal{B}} \cong \downarrow & & \downarrow \cong \Phi_{\mathcal{B}} \\
 V & \xrightarrow{f} & V
 \end{array}$$

### Korollar K1κ: Endomorphismenring und Automorphismengruppe

Sei  $V$  ein (rechts)linearer Raum über  $R$  mit Basis  $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^n$ .

Das oben konstruierte Bijektionspaar

$$(\mathbb{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}, \mathbb{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) : (R^{n \times n}, +, \cdot) \cong (\text{End}_R(V), +, \circ)$$

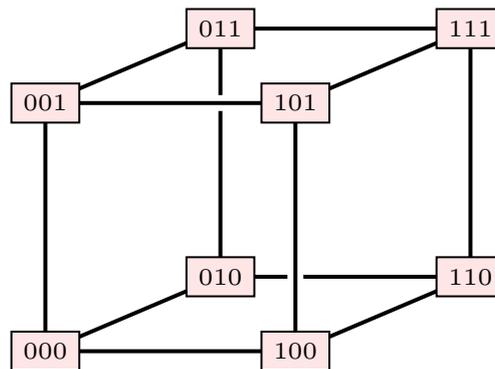
ist ein Isomorphismus von Ringen. Insbesondere ist

$$(\mathbb{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}, \mathbb{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) : (\text{GL}_n R, \cdot) \cong (\text{Aut}_R(V), \circ)$$

ein Isomorphismus von Gruppen.

**Beweis:** Die Verträglichkeit mit der Addition haben wir in Satz K1I bewiesen. Die Verträglichkeit mit Multiplikation und Komposition ist der Spezialfall  $U = V = W$  in Satz K1J.

□ QED



**Aufgabe:** Wir betrachten die abelsche Gruppe  $(V, +) = (\mathbb{F}_2^3, +)$ .  
Wie viele Elemente haben  $\text{End}(V, +)$  und  $\text{Aut}(V, +)$ ?

**Lösung:** Die Gruppe  $(V, +)$  ist ein Vektorraum über  $K = \mathbb{F}_2$ . (I1L)  
Jeder Gruppenhomomorphismus  $f : (V, +) \rightarrow (V, +)$  ist  $K$ -linear.

😊 Damit greifen unsere Werkzeuge der Linearen Algebra!

Dank K1K haben wir  $\text{End}_K(V) \cong \mathbb{F}_2^{3 \times 3}$ , also  $\# \text{End}_K(V) = 2^9 = 512$ .

Aus  $\text{Aut}_K(V) \cong \text{GL}_3 \mathbb{F}_2$  folgt  $\# \text{Aut}_K(V) = 7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$ , siehe J218.

😊 Eine Automorphismengruppe zu bestimmen ist meist schwierig.  
Warum ist es hier nun so leicht? Wir haben die starken Werkzeuge der Linearen Algebra, hier Vektorräume und Basen und Matrixdarstellung!

## Die Modellmatrix $D_{m \times n}^r$ vom Rang $r$

### Definition K2A: die Modellmatrix $D_{m \times n}^r$ vom Rang $r$

Sei  $R$  ein Ring und  $m, n, r \in \mathbb{N}$  mit  $r \leq \min\{m, n\}$ . Wir definieren

$$D = D_{m \times n}^r := \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{r \times r} & 0_{r \times n'} \\ 0_{m' \times r} & 0_{m' \times n'} \end{bmatrix}.$$

Dies nennen wir die **Modellmatrix** der Größe  $m \times n$  vom Rang  $r$  und

$$f_D : R^n \rightarrow R^m : (x_1, \dots, x_r, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

die zugehörige  $R$ -lineare **Modellabbildung**. Daran lesen wir ab:

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(f_D) &= \operatorname{im}(D_{m \times n}^r) = \langle e_1, \dots, e_r \rangle_R^! \leq R^m, \\ \ker(f_D) &= \ker(D_{m \times n}^r) = \langle e_{r+1}, \dots, e_n \rangle_R^! \leq R^n. \end{aligned}$$

## Die Modellmatrix $D_{m \times n}^r$ vom Rang $r$

😊 Die Modellabbildung  $f_D$  ist besonders einfach und übersichtlich. Erstaunlicherweise lässt sich *jede* lineare Abbildung so darstellen!

### Definition K2B: Rang und Defekt

Sei  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung über einem Divisionsring  $R$ .

Wir definieren den **Rang** und den **Defekt** von  $f : V \rightarrow W$  durch

$$\operatorname{rang}_R(f) := \dim_R \operatorname{im}(f) \quad \text{und} \quad \operatorname{def}_R(f) := \dim_R \ker(f).$$

**Erinnerung:** Dank Dimensionsformel J2N gilt

$$\operatorname{rang}(f) + \operatorname{def}(f) = \dim(V).$$

**Typisches Beispiel::** Wir betrachten die obige Modellabbildung:

$$f : R^n \rightarrow R^m : (x_1, \dots, x_r, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

Hier gilt  $\operatorname{rang}(f) = r$  und  $\operatorname{def}(f) = n - r$ . Dieses Beispiel ist typisch: Der folgende Satz zeigt, dass jede lineare Abbildung genau so aussieht.

## Kanonische Darstellung einer linearen Abbildung

$$\begin{array}{ccc}
 R^n & \xrightarrow{\quad} & R^m \\
 \Phi_{\mathcal{B}} \cong \downarrow & \begin{array}{c} f_D : (x_1, \dots, x_r, \dots, x_n) \\ \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \end{array} & \downarrow \Phi_{\mathcal{C}} \cong \\
 V & \xrightarrow{\quad} & W \\
 & f : \begin{cases} v_i \mapsto w_i & \text{für } i = 1, \dots, r, \\ v_i \mapsto 0 & \text{für } i = r+1, \dots, n \end{cases} & 
 \end{array}$$

### Satz K2c: kanonische Darstellung einer linearen Abbildung

Sei  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung von  $R$ -Vektorräumen endlicher Dimension  $n := \dim_R(V)$  und  $m := \dim_R(W)$  mit Rang  $r := \text{rang}_R(f)$ . Dann existieren Basen  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$  und  $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$  von  $W$  mit  $f(v_i) = w_i$  für  $i = 1, \dots, r$  und  $f(v_i) = 0$  für  $i = r+1, \dots, n$ . Somit wird  $f$  dargestellt durch die Modellmatrix  $D_{m \times n}^r = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ .

**Beweis:** Wir wählen eine Basis  $w_1, \dots, w_r$  des Bildes  $\text{im}(f) \leq W$  und ergänzen zu einer Basis  $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$  von  $W$ . Wir wählen Urbilder  $v_1, \dots, v_r \in V$  mit  $v_i \mapsto w_i$  und ergänzen durch eine Basis  $v_{r+1}, \dots, v_n$  des Kerns  $\ker(f)$ . Dank J2M ist  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$ . QED

## Kanonische Darstellung einer linearen Abbildung

😊 Die Modellabbildung  $f_D$  ist besonders einfach und übersichtlich. Erfreulicherweise lässt sich *jede* lineare Abbildung so darstellen:

Wir lesen die lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  in den richtigen Basen, und schon vereinfacht sich  $f$  zu unserer Modellabbildung  $f_D$ !

Ausblick: Die Analysis führt den Darstellungssatz K2c fort, lokal für jede glatte Abbildung  $f: (\mathbb{R}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$  mit lokal konstantem Rang.

😊 Das ist die einfachst-mögliche Matrixdarstellung der Abbildung  $f$ . Sie entsteht durch die Wahl angepasster Basen für Start und Ziel.

Es ist bemerkenswert, dass hierfür insgesamt nur drei Zahlen nötig sind. Mit der kanonischen Darstellung lösen wir auch die Klassifikation K2E.

😊 Dabei klären wir zusätzlich zur Existenz auch die Eindeutigkeit: Die Abbildung  $f$  ist äquivalent zu genau einer Modellabbildung.

Diese Klassifikation gibt uns einen guten Überblick aller Möglichkeiten: Lineare Abbildungen von Vektorräumen sind schließlich sehr simpel!

Wir betrachten lineare Abbildungen über einem Ring  $R$ :

$$\begin{array}{ccc}
 V' & \xrightarrow{f'} & W' \\
 \varphi \cong \downarrow & & \downarrow \cong \psi \\
 V & \xrightarrow{f} & W
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 R^n & \xrightarrow{f_A} & R^m \\
 \Phi_B \cong \downarrow & & \downarrow \cong \Phi_C \\
 V & \xrightarrow{f} & W
 \end{array}$$

## Definition K2D: Äquivalenz $R$ -linearer Abbildungen

Lineare Abbildungen  $f' : V' \rightarrow W'$  und  $f : V \rightarrow W$  heißen **äquivalent**, wenn hierzu Isomorphismen  $\varphi : V' \xrightarrow{\cong} V$  und  $\psi : W' \rightarrow W$  existieren, sodass  $f \circ \varphi = \psi \circ f'$  gilt, also  $f = \psi \circ f' \circ \varphi^{-1}$  und  $f' = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ .

Wir schreiben hierfür  $(\varphi, \psi) : f' \cong f$  oder kurz  $f' \cong f$

Die Notation  $(\varphi, \psi) : f' \cong f$  nennt explizit alle Daten,  $f' \cong f$  nur implizit; die Isomorphismen müssen dann aus dem Kontext erschlossen werden.

# Äquivalenz linearer Abbildungen

**Beispiel:** Jede lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  endlich-dimensionaler Vektorräume ist äquivalent zu einer Matrixdarstellung:

$$(\Phi_B, \Phi_C) : f_A \cong f \quad \text{kurz} \quad f_A \cong f \quad \text{mit} \quad A \in R^{m \times n}.$$

Noch bequemer und etwas schludrig schreiben wir  $f \cong A$ , in Worten: Die Abbildung  $f : V \rightarrow W$  lässt sich durch die Matrix  $A$  darstellen.

**Aufgabe:** Zeigen Sie, dass  $\cong$  eine Äquivalenzrelation zwischen linearen Abbildungen von  $R$ -linearen Räumen ist.

**Lösung:** Wir zeigen Reflexivität, Symmetrie, Transitivität.

**Reflexivität:** Für jede lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  gilt  $(\text{id}_V, \text{id}_W) : f \cong f$ , denn  $f \circ \text{id}_V = \text{id}_W \circ f$ .

**Symmetrie:** Aus  $(\varphi, \psi) : f \cong g$ , also  $g \circ \varphi = \psi \circ f$ , folgt  $f \circ \varphi^{-1} = \psi^{-1} \circ g$ , also  $(\varphi^{-1}, \psi^{-1}) : g \cong f$ .

**Transitivität:** Aus  $(\varphi, \psi) : f \cong g$  und  $(\varphi', \psi') : g \cong h$  folgt  $(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi) : f \cong h$ , denn  $h \circ \varphi' \circ \varphi = \psi' \circ g \circ \varphi = \psi' \circ \psi \circ f$ .

😊 Nach der Klassifikation der endlich-dimensionalen Vektorräume (Satz J2J) folgt nun die Klassifikation ihrer linearen Abbildungen:

## Satz K2E: Klassifikation linearer Abbildungen

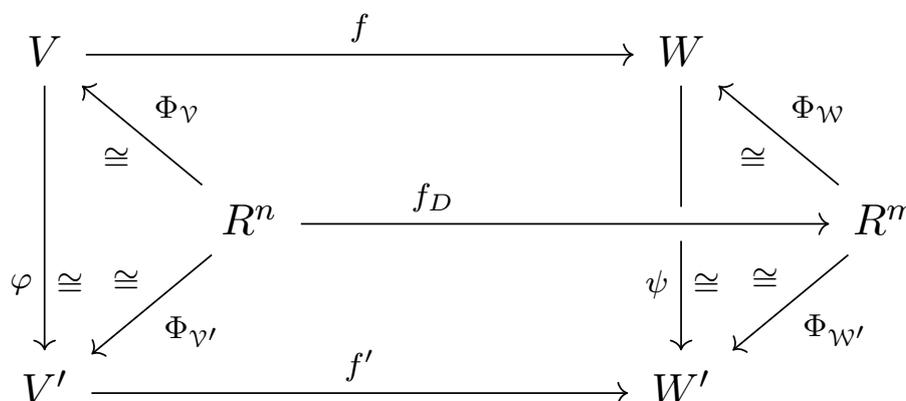
Gegeben seien zwei lineare Abbildungen  $f: V \rightarrow W$  und  $f': V' \rightarrow W'$  endlich-dimensionaler Vektorräume über einem Divisionsring  $R$ .

Genau dann sind  $f$  und  $f'$  äquivalent, kurz  $f \cong f'$ , wenn gilt:

$$(\dim V, \dim W, \text{rang } f) = (\dim V', \dim W', \text{rang } f')$$

😊 Die Lineare Algebra mag Ihnen zwar anfangs abstrakt erscheinen, doch die betrachteten Objekte sind schließlich einfach und übersichtlich! Das Isomorphieproblem für Vektorräume über  $R$  wird durch eine einzige Zahl gelöst: die Dimension (als Kardinalität einer Basis), siehe Satz J2J. Das Isomorphieproblem für lineare Abbildungen  $f: V \rightarrow W$  wird durch drei einfache Kennzahlen vollständig gelöst: Neben den Dimensionen  $\dim V$  und  $\dim W$  benötigen Sie nur noch den Rang  $\text{rang } f$ .

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “: Die Äquivalenz  $(\varphi, \psi): f \cong f'$  besagt  $f' \circ \varphi = \psi \circ f$  mit  $\varphi: V \xrightarrow{\sim} V'$  und  $\psi: W \xrightarrow{\sim} W'$ . Daraus folgt  $\dim V = \dim V'$  und  $\dim W = \dim W'$  sowie  $\text{im}(f') = \text{im}(f' \circ \varphi) = \text{im}(\psi \circ f) \cong \text{im}(f)$ .



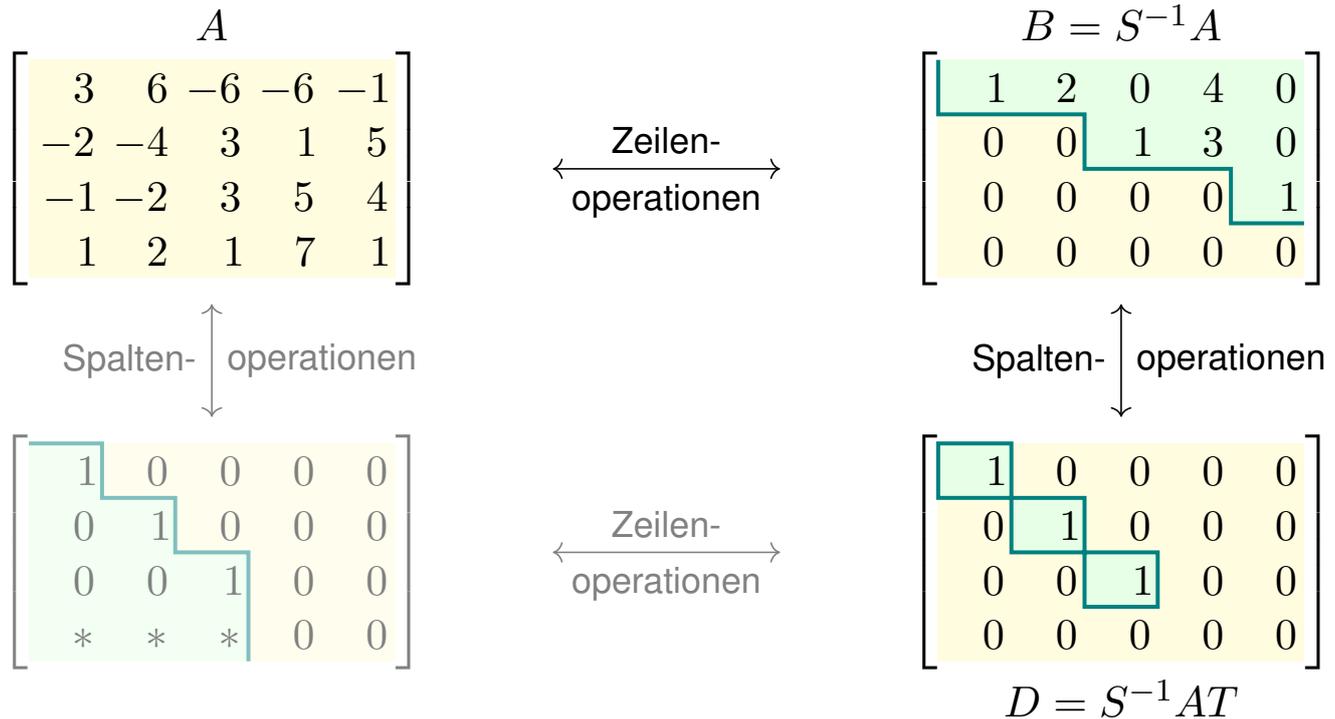
„ $\Leftarrow$ “: Es gelte  $(\dim V, \dim W, \text{rang } f) = (\dim V', \dim W', \text{rang } f')$ .

Dank K2c finden wir Basen mit  $D_{m \times n}^r = M_V^W(f) = M_{V'}^{W'}(f')$ .

Für  $\varphi := \Phi_{V'} \circ \Phi_V^{-1}$  und  $\psi := \Phi_{W'} \circ \Phi_W^{-1}$  gilt  $(\varphi, \psi): f \cong f'$ .

QED

Mit Gauß wandeln wir jede Matrix  $A \in R^{m \times n}$  zur Modellmatrix  $D_{m \times n}^r$ :



😊 Wir haben im  $D = \langle e_1, \dots, e_r \rangle_R^!$  und  $\ker D = \langle e_{r+1}, \dots, e_n \rangle_R^!$ ; dank  $SD = AT$  folgt im  $A = \langle Se_1, \dots, Se_r \rangle_R^!$  und  $\ker A = \langle Te_{r+1}, \dots, Te_n \rangle_R^!$ .

## Algo K2F: Gauß-Algorithmus zur kanonischen Darstellung

**Eingabe:** eine Matrix  $A \in R^{m \times n}$  über einem Divisionsring  $R$

**Ausgabe:**  $S, S^{-1} \in GL_m R$  und  $T, T^{-1} \in GL_n R$  mit  $S^{-1}AT = D_{m \times n}^r$

- 1: Konstruiere  $S, S^{-1}$  zur reduzierten Zeilenstufenform  $S^{-1}A$
- 2: Konstruiere  $T, T^{-1}$  zur red. Spaltenstufenform  $S^{-1}AT = D_{m \times n}^r$
- 3: **return**  $(S, S^{-1}, T, T^{-1})$

**Beweis:** Wir haben in Kapitel B den Gauß-Algorithmus zur reduzierten Zeilenstufenform ausgeführt (Satz B2c). Entsprechendes gilt auch für Spaltenumformungen; diese operieren von rechts. □

😊 Der Gauß-Algorithmus konstruiert durch elementare Zeilen- bzw. Spaltenoperationen zugleich  $S, S^{-1}$  sowie  $T, T^{-1}$ , also die gesuchten Transformationsmatrizen zusammen mit ihrem Inversen.

**Satz K2F: Gauß–Algorithmus zur kanonischen Darstellung**

Sei  $A \in R^{m \times n}$  eine Matrix über dem Divisionsring  $R$ .

(1) Der Gauß–Algorithmus K2F liefert hierzu invertierbare Matrizen  $S, S^{-1} \in GL_m(R)$  und  $T, T^{-1} \in GL_n(R)$ , sodass  $AT = SD_{m \times n}^r$  gilt.

(2) Daraus folgt  $\text{rang}(A) = r$  und  $\text{def}(A) = n - r$  und explizit

$$\begin{aligned} \text{im}(A) &= \langle Se_1, \dots, Se_r \rangle_R^!, \\ \text{ker}(A) &= \langle Te_{r+1}, \dots, Te_n \rangle_R^!. \end{aligned}$$

😊 Dies ist ein Basiswechsel: Wir lesen die Matrix  $A \in R^{m \times n}$  in den richtigen Basen, und schon vereinfacht sich  $A$  zur Modellmatrix  $D_{m \times n}^r$ !

😊 Die Bestimmung von Bild  $\text{im}(A)$  und Kern  $\text{ker}(A)$  haben wir bereits zuvor in Satz J1P gelöst. Mit Satz K2F sehen Sie hier nun eine elegante Umformulierung; beide Algorithmen tun im Wesentlichen dasselbe.

**Gauß–Algorithmus zur kanonischen Darstellung**

**Beweis:** An der Modellmatrix  $D = D_{m \times n}^r$  lesen wir ab:

$$\begin{aligned} \text{im}(D_{m \times n}^r) &= \langle e_1, \dots, e_r \rangle_R^! \leq R^m, \\ \text{ker}(D_{m \times n}^r) &= \langle e_{r+1}, \dots, e_n \rangle_R^! \leq R^n. \end{aligned}$$

Das Bild von  $A$  folgern wir aus  $AT = SD$  gemäß

$$\text{im}(A) = \text{im}(AT) = \text{im}(SD) = \langle Se_1, \dots, Se_r \rangle_R^!.$$

Für den Kern von  $A$  finden wir entsprechend:

$$\begin{aligned} Ax = 0 &\iff (AT)T^{-1}x = 0 \iff (SD)T^{-1}x = 0 \\ &\iff T^{-1}x \in \text{ker}(D) = \langle e_{r+1}, \dots, e_n \rangle_R^! \\ &\iff x \in T \text{ker}(D) = \langle Te_{r+1}, \dots, Te_n \rangle_R^!. \end{aligned}$$

Damit sind Bild und Kern von  $A$  explizit bestimmt.

**QED**

Für  $A, B \in R^{m \times n}$  sowie  $S \in GL_m R$  und  $T \in GL_n R$  gilt:

$$S^{-1}AT = B \iff AT = SB \iff A = SBT^{-1}$$

Analog zu linearen Abbildungen (K2D) vereinbaren wir:

## Definition K2G: Äquivalenz von Matrizen

Zwei Matrizen  $A, B \in R^{m \times n}$  heißen **äquivalent**, wenn invertierbare Matrizen  $S \in GL_m R$  und  $T \in GL_n R$  existieren, sodass  $AT = SB$  gilt.

Wir schreiben hierfür  $(T, S) : B \cong A$  oder kurz  $B \cong A$

**Aufgabe:** Dies ist eine Äquivalenzrelation auf  $R^{m \times n}$  (siehe K206).

**Lösung:** Wir zeigen Reflexivität, Symmetrie, Transitivität.

*Reflexivität:*  $(E_n, E_m) : A \cong A$ , denn  $AE_n = E_m A$ .

*Symmetrie:* Aus  $(T, S) : B \cong A$  folgt  $(T^{-1}, S^{-1}) : A \cong B$ .

*Transitivität:* Aus  $(T, S) : A \cong B$  und  $(T', S') : B \cong C$  folgt  $(T' \circ T, S' \circ S) : A \cong C$ , denn  $C \circ T' \circ T = S' \circ B \circ T = S' \circ S \circ A$ .

Analog zur Klassifikation K2E linearer Abbildungen erhalten wir aus dem Gauß–Algorithmus K2F nun die Klassifikation der Matrizen:

## Satz K2H: Klassifikation von Matrizen bis auf Äquivalenz

Über jedem Divisionsring  $R$  gilt:

(1) Genau dann sind zwei Matrizen  $A, B \in R^{m \times n}$  äquivalent, wenn sie gleichen **Rang** haben, also  $\text{rang } A = \text{rang } B$  gilt.

(2) In jeder Äquivalenzklasse liegt genau eine Modellmatrix  $D_{m \times n}^r$ . Dieser kanonische Repräsentant heißt **Gauß–Normalform** (GNF)

**Beweis:** (1a) „ $\Rightarrow$ “: Der Rang ist invariant unter Äquivalenz  $B = S^{-1}AT$ , denn  $\text{im}(B) = BR^n = S^{-1}ATR^n = S^{-1}AR^n = S^{-1}\text{im}(A) \cong \text{im}(A)$ .

(1b) „ $\Leftarrow$ “: Dank K2F sind  $A$  und  $B$  äquivalent zur Modellmatrix  $D_{m \times n}^r$ . Dank Symmetrie und Transitivität sind sie zueinander äquivalent.

(2) Mit denselben Argumenten folgt (b) Existenz und (a) Eindeutigkeit einer Modellmatrix  $D_{m \times n}^r$  in jeder Äquivalenzklasse. □

Das Äquivalenzproblem für Matrizen  $A \in R^{m \times n}$  wird durch drei einfache Kennzahlen vollständig gelöst: Neben den Dimensionen (Zeilenzahl  $m$  und Spaltenzahl  $n$ ) benötigen Sie nur noch den Rang  $\text{rang } A$ .

Der Gauß–Algorithmus K2F erledigt diese Aufgabe gewohnt effizient. Ich betone erneut, dass wir hierzu über einem Divisionsring  $R$  arbeiten. Die allgemeine Definition K2G der Äquivalenz gilt über jedem Ring, der Klassifikationssatz K2H hingegen gilt nur über Divisionsringen.

Wir kommen damit erneut auf die grundlegenden Begriffe **Äquivalenz** und **Invarianz** zurück, die uns schon des Öfteren begegnet sind:

Aus Satz E1H kennen wir die wichtigste Invariante der Mathematik: Die Elementezahl ändert sich nicht unter Anwendung von Bijektionen!

In Satz J2J haben wir dies auf  $R$ –Vektorräume übertragen:

Die  $R$ –Dimension ändert sich nicht unter  $R$ –linearen Bijektionen!

Allgemeiner übertragen wir dies nun auf den Rang, also die Dimension des Bildraums, von linearen Abbildungen (K2E) und von Matrizen (K2H).

Allgemein versteht die Mathematik unter einer **Invariante** folgendes: Jedem der betrachteten Objekte (hier: Matrizen  $A \in R^{m \times n}$ ) wird eine Größe zugeordnet (hier: ihr Rang); diese Größe ändert sich nicht unter den betrachteten Umformungen (hier: Äquivalenz  $(T, S) : B \cong A$ ).

Invarianten sind ein wichtiges Hilfsmittel bei Klassifikationsproblemen: Objekte mit unterschiedlichen Invarianten sind wesentlich verschieden. Manchmal gilt sogar die Umkehrung, und Objekte mit gleichen Werten unter der Invariante lassen sich ineinander umformen. Wir sprechen dann von einer **vollständigen Invarianten**. Genau das liegt hier vor!

Jede Matrix  $A \in R^{m \times n}$  definiert eine Familie von Zeilenvektoren  $u_1, \dots, u_m \in R^{1 \times n}$  und von Spaltenvektoren  $v_1, \dots, v_n \in R^{m \times 1}$ :

$$A = \begin{bmatrix} \text{---} & u_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & u_m & \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

Diese erzeugen den Zeilenraum bzw. den Spaltenraum:

Zeilenraum:  $ZR(A) := R \cdot u_1 + \cdots + R \cdot u_m = R^{1 \times m} \cdot A \leq R^{1 \times n}$

Spaltenraum:  $SR(A) := v_1 \cdot R + \cdots + v_n \cdot R = A \cdot R^{n \times 1} \leq R^{m \times 1}$

Über einem Divisionsring  $R$  verfügen wir zudem über Dimensionen:

Zeilenrang:  $zr(A) := \dim_R ZR(A)$

Spaltenrang:  $sr(A) := \dim_R SR(A)$

Wir zeigen nun eine bemerkenswerte Gleichheit:

$$\text{Zeilenrang} = \text{Spaltenrang}$$

😊 Wir folgen den richtigen Konventionen: Der Spaltenraum  $SR(A)$  ist rechtslinear über  $R$ , der Zeilenraum  $ZR(A)$  hingegen ist linkslinear!

Jede Matrix  $A \in R^{m \times n}$  über einem Ring  $R$  induziert zwei Abbildungen:

$$f_A : R^{n \times 1} \rightarrow R^{m \times 1} : x \mapsto Ax, \quad \text{im}(f_A) = A \cdot R^{n \times 1} \leq R^{m \times 1}$$

$$g_A : R^{1 \times m} \rightarrow R^{1 \times n} : y \mapsto yA, \quad \text{im}(g_A) = R^{1 \times m} \cdot A \leq R^{1 \times n}$$

Dabei ist  $f_A$  rechtslinear über  $R$ , und  $g_A$  ist linkslinear über  $R$ , gemäß der üblichen Konvention: Matrizen und Skalare operieren auf entgegengesetzten Seiten. Mit dieser Regel sortiert sich alles von selbst!

Sei nun  $R$  ein Divisionsring, um den Gauß-Algorithmus anzuwenden: Dank Satz K2J haben beide Abbildungen  $f_A$  und  $g_A$  den gleichen Rang!

- Der Rang von  $f_A$  ist der Spaltenrang von  $A$ .
- Der Rang von  $g_A$  ist der Zeilenrang von  $A$ .

Die beiden Abbildungen  $f_A$  und  $g_A$  sind zunächst sehr unterschiedlich. Sie entstehen aus derselben Matrix  $A$ , aber auf verschiedene Weisen. Die Gleichheit von Spaltenrang und Zeilenrang ist bemerkenswert.

**Lemma K21: Zeilenoperationen vs Spaltenoperationen**

(1) Zeilenoperation durch  $S \in GL_m R$  ändert nicht den Zeilenraum:

$$\text{ZR}(SA) \stackrel{\text{Def}}{=} R^{1 \times m} \cdot S \cdot A = R^{1 \times m} \cdot A \stackrel{\text{Def}}{=} \text{ZR}(A)$$

Die Spaltenräume sind i.A. verschieden, doch immer isomorph:

$$\text{SR}(SA) \stackrel{\text{Def}}{=} S \cdot A \cdot R^{n \times 1} \cong A \cdot R^{n \times 1} \stackrel{\text{Def}}{=} \text{SR}(A)$$

(2) Spaltenoperation durch  $T \in GL_n R$  ändert nicht den Spaltenraum:

$$\text{SR}(AT) \stackrel{\text{Def}}{=} A \cdot T \cdot R^{n \times 1} = A \cdot R^{n \times 1} \stackrel{\text{Def}}{=} \text{SR}(A)$$

Die Zeilenräume sind i.A. verschieden, doch immer isomorph:

$$\text{ZR}(AT) \stackrel{\text{Def}}{=} R^{1 \times m} \cdot A \cdot T \cong R^{1 \times m} \cdot A \stackrel{\text{Def}}{=} \text{ZR}(A)$$

(3) Zeilenrang und Spaltenrang bleiben dabei immer erhalten! (J21)

**Beweis:** Da die Matrizen  $S \in GL_m R$  und  $T \in GL_n R$  invertierbar sind, induzieren Sie die folgenden  $R$ -linearen Isomorphismen:

$$\begin{aligned} g_S &: R^{1 \times m} \xrightarrow{\sim} R^{1 \times m} : y \mapsto yS, & g_S^{-1} &= g_{S^{-1}} \\ f_S &: R^{m \times 1} \xrightarrow{\sim} R^{m \times 1} : x \mapsto Sx, & f_S^{-1} &= f_{S^{-1}} \\ f_T &: R^{n \times 1} \xrightarrow{\sim} R^{n \times 1} : x \mapsto Tx, & f_T^{-1} &= f_{T^{-1}} \\ g_T &: R^{1 \times n} \xrightarrow{\sim} R^{1 \times n} : y \mapsto yT, & g_T^{-1} &= g_{T^{-1}} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Gleichheit  $R^{1 \times m} \cdot S = R^{1 \times m}$  und  $T \cdot R^{n \times 1} = R^{n \times 1}$  sowie die Isomorphie der Teilräume  $A \cdot R^{n \times 1} \cong S \cdot A \cdot R^{n \times 1}$  in  $R^{m \times 1}$  und  $R^{1 \times m} \cdot A \cong R^{1 \times m} \cdot A \cdot T$  in  $R^{1 \times n}$ . **QED**

😊 Beachten Sie die akribische Buchführung über rechts und links. Damit werden all unsere Rechnungen einfacher und transparenter! Das gilt allgemein, selbst wenn der Grundring  $R$  kommutativ ist.

😊 Für die Matrizenrechnung müssen wir ohnehin links und rechts unterscheiden, also machen wir es gleich systematisch richtig.

**Satz K2J:** Zeilenrang und Spaltenrang sind gleich.

Sei  $R$  ein Divisionsring. Für jede Matrix  $A \in R^{m \times n}$  über  $R$  gilt dann:

$$\text{Zeilenrang} = \text{Spaltenrang}$$

Diesen gemeinsamen Wert nennen wir den Rang der Matrix  $A$ .

**Beweis:** Der Gauß–Algorithmus K2F liefert invertierbare Matrizen  $S \in GL_m R$  und  $T \in GL_n R$ , sodass  $S^{-1}AT = D_{m \times n}^r$ . Dank K2I folgt:

$$\text{ZR}(A) \cong \text{ZR}(S^{-1}AT) \quad \text{und} \quad \text{SR}(A) \cong \text{SR}(S^{-1}AT)$$

Zeilen- und Spaltenraum wandeln, doch ihre Dimension bleibt gleich!  
Dank dem vorangegangenen Lemma K2I lesen wir den Rang ab:

$$\begin{aligned} \text{zr}(A) &\stackrel{\text{K2I}}{=} \text{zr}(S^{-1}AT) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \text{zr}(D_{m \times n}^r) \stackrel{\text{klar}}{=} r, \\ \text{sr}(A) &\stackrel{\text{K2I}}{=} \text{sr}(S^{-1}AT) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \text{sr}(D_{m \times n}^r) \stackrel{\text{klar}}{=} r. \end{aligned}$$

Für unsere Modellmatrix  $D_{m \times n}^r$  ist die Aussage offensichtlich. QED

Das ist, wenn man's recht denkt, schon ein erstaunliches Ergebnis!

 Zeilenraum und Spaltenraum haben zunächst nichts gemeinsam: Sie liegen in ganz verschiedenen Vektorräumen:  $\text{ZR}(A) \leq R^{1 \times n}$  und  $\text{SR}(A) \leq R^{m \times 1}$ . Insbesondere ist  $\text{ZR}(A)$  linkslinear über  $R$  und  $\text{SR}(A)$  rechtslinear über  $R$ , allein deshalb können sie nicht isomorph sein. Zeilenraum und Spaltenraum leben in verschiedenen Welten.

 Dennoch haben  $\text{ZR}(A)$  und  $\text{SR}(A)$  dieselbe Dimension über  $R$ ! Der Beweis dank Gauß–Algorithmus K2F ist elegant und recht leicht: Wir müssen nur die Umformungen  $S^{-1}AT = D_{m \times n}^r$  genau anschauen. Lemma K2I garantiert, dass sich Zeilen- und Spaltenrang dabei nicht ändern. Für unsere Modellmatrix  $D_{m \times n}^r$  ist die Gleichheit offensichtlich.

 Es hilft sehr, links und rechts zu unterscheiden, etwa in Lemma K2I! Ist  $R$  kommutativ, also ein Körper, so entfällt die formale Notwendigkeit.

Satz K2J bleibt so oder so erstaunlich und bemerkenswert.

**Aufgabe:** Sind die Spalten der folgenden Matrix eine Basis des  $\mathbb{R}^5$ ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 7 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 7 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 7 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

**Lösung:** Zwischen den Zeilen besteht eine *offensichtliche* Relation! Daher gilt Zeilenrang  $\leq 4$ . Dank Satz K2J folgt Spaltenrang  $\leq 4$ .

⚠ Die letzte Abschätzung ist zunächst *nicht* genauso offensichtlich, dazu müsste man rechnen, etwa mit Gauß J1P zur Zeilenstufenform.

😊 Dank Satz K2J können wir uns diese erneute Rechnung sparen. Genau diese Rechnung haben wir im Beweis allgemein durchgeführt.

⚠ Die Relationen zwischen den Spalten sind *nicht* offensichtlich! Hier gilt  $\ker(A) = \ker(B) = \ker(C) = (119, 52, 15, -158, 98)^T \cdot \mathbb{R}$ .

Als offensichtliche Relationen einer Familie gelten: (a) ein Nullvektor, (b) ein doppelter Vektor, (c) ein Vektor ist Vielfaches eines anderen.

Für die Zeilenvektoren liegt eine solche offensichtliche Relation vor. Relationen zwischen den Spalten  $v_1, \dots, v_5$  sind *nicht* offensichtlich.

Satz K2J garantiert, dass es eine nicht-triviale Relation geben muss, die Rechnung wird also erfolgreich sein. Probieren Sie es mit Gaël!

😊 Mit dem Gauß-Verfahren J1P finden Sie:

$$119v_1 + 52v_2 + 15v_3 - 158v_4 + 98v_5 = 0$$

Genauer gilt  $\ker = (119, 52, 15, -158, 98)^T \cdot \mathbb{R}$ , alle Relationen sind also Vielfache der obigen. Ich denke, das ist *nicht* offensichtlich.

😊 Dies betont den Nutzen des Satzes: Zeilenrang gleich Spaltenrang! Je mehr Sie wissen und verstehen, desto weniger müssen Sie rechnen, Oder: Desto besser können Sie die Ergebnisse Ihrer Rechnungen prognostizieren und überprüfen, Fehler erkennen und beheben.

😊 Wenn es nur darum geht, den Rang einer Matrix zu berechnen, dann dürfen wir Zeilenoperationen und Spaltenoperation beliebig mischen!

⚠ Zur Lösung des linearen Gleichungssystems  $Ax = b$  wollen wir das möglichst vermeiden! Hier nutzen wir nur Zeilenoperationen  $S \in GL_m R$ ; die rechte Seite  $b$  transformieren wir dabei sorgsam mit:

$$Ax = b \iff (S^{-1}A)x = S^{-1}b$$

⚠ Wenn wir jedoch neben Zeilenoperationen auch Spaltenoperationen nutzen, so müssen wir auch die Unbekannte  $x$  geeignet transformieren:

$$Ax = b \iff (S^{-1}AT)T^{-1}x = S^{-1}b$$

😊 Der Gauß–Algorithmus K2F transformiert  $A$  zur Modellmatrix  $D_{m \times n}^r$ . Richtig angewendet ist das eine sehr elegante und effiziente Methode.

Zur Vereinfachung genügt es glücklicherweise, nur Zeilenoperationen vorzunehmen: Zur Bestimmung von Bild und Kern siehe Satz J1P.

Sie sehen hier erneut ein sehr fruchtbares Zusammenspiel:

- Die Matrizenrechnung bietet uns effiziente Berechnungsverfahren, hier insbesondere den Gauß–Algorithmus in all seinen Varianten.
- Die Lineare Algebra untermauert dies durch eine starke Theorie als Grundlage, hier insbesondere zu Basen und Dimension.

Beide gemeinsam ergänzen und verstärken sich gegenseitig und arbeiten wunderbar zusammen, wie linke und rechte Hand.

Lernen Sie beides zu nutzen!

**Aufgabe zur Wiederholung:** Sei  $R$  ein Divisionsring.  
Für jede quadratische Matrix  $A \in R^{n \times n}$  sind äquivalent:

- 1 Surjektivität von  $f_A$ : Die Spalten von  $A$  erzeugen  $R^{n \times 1}$ .
- 2 Injektivität von  $f_A$ : Die Spalten von  $A$  sind linear unabhängig.
- 3 Bijektivität von  $f_A$ : Die Spalten von  $A$  sind eine Basis von  $R^{n \times 1}$ .
- 4 Injektivität von  $g_A$ : Die Zeilen von  $A$  sind linear unabhängig.
- 5 Surjektivität von  $g_A$ : Die Zeilen von  $A$  erzeugen  $R^{1 \times n}$ .
- 6 Bijektivität von  $g_A$ : Die Zeilen von  $A$  sind eine Basis von  $R^{1 \times n}$ .
- 7 Die Matrix  $A$  ist rechtsinvertierbar.
- 8 Die Matrix  $A$  ist linksinvertierbar.
- 9 Die Matrix  $A$  ist invertierbar.

Erklären Sie für möglichst viele Paare  $(i, j)$  mit  $i, j \in \{1, \dots, 9\}$ , warum die Aussage  $i$  in obiger Liste die Aussage  $j$  impliziert. Nennen Sie den entsprechenden Satz, besser die Beweisidee, am besten formulieren Sie den Beweis selbstständig aus.

Satz B2D: Gauß–Algorithmus zur Lösung von  $Ax = b$  und Inversion  
Satz J1P: Dimensionsformel  $\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V$  für  $f : V \rightarrow W$   
Satz K2J: Gleichheit von Zeilenrang und Spaltenrang für  $A \in R^{m \times n}$

$\Rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	=	J1P	J1P		K2J		B2D		
2	J1P	=	J1P					B2D	
3	triv	triv	=						B2D
4				=	J1P'	J1P'	B2D'		
5	K2J			J1P'	=	J1P'		B2D'	
6				triv	triv	=			B2D'
7	B2D			B2D'			=	B2D	B2D
8		B2D			B2D'		B2D	=	B2D
9			B2D			B2D'	triv	triv	=

Ein Apostroph ' bedeutet, dass wir Satz und Beweis für  $Ax = b$  umformulieren zum entsprechenden Ergebnis für  $yA = c$ .

**Satz K2κ:  $\exists$ &E der reduzierten Zeilenstufenform**

Sei  $R$  ein Divisionsring und  $A \in R^{m \times n}$  eine Matrix über  $R$ .

**Existenz:** Es existiert eine invertierbare Matrix  $S \in \text{GL}_m R$ , für die  $A' = SA \in R^{m \times n}$  in reduzierter Zeilenstufenform ist.

**Eindeutigkeit:** Ist zudem  $T \in \text{GL}_m R$  invertierbar und auch  $TA$  in reduzierter Zeilenstufenform, so gilt die Gleichheit  $TA = SA = A'$ .

Dies definiert zu  $A$  **die reduzierte Zeilenstufenform**  $\text{rref}(A) := A'$ . Dasselbe gilt für **die reduzierte Spaltenstufenform**  $\text{rcef}(A)$  zu  $A$ .

 Zu  $A$  ist die RZSF  $A'$  eindeutig, die Zeilenumformungen von  $A$  zu  $A'$  hingegen sind es nicht: Im Allgemeinen gilt  $S \neq T$ , aber  $SA = TA = A'$ .

 Existenz und Eindeutigkeit sind Grundlage jeder Implementierung: Computer-Algebra-Systeme bieten hierzu den Befehl  $\text{rref}(A)$ .

 Existenz und Eindeutigkeit sind auch willkommen für Klausuren: Der Rechenweg ist nicht eindeutig, das Ergebnis hingegen schon.

**Aufgabe:** Beweisen Sie den Satz per Induktion über die Spaltenzahl  $n$ .

**Lösung:** (1) Die Existenz folgt aus dem Gauß-Algorithmus B2c.

(2) Der Fall  $n = 0$  einer leeren Matrix ist trivial. Im Folgenden sei  $n \geq 1$ . Wir zerlegen  $A = (v_1, \dots, v_{n-1}, v_n) \in R^{m \times n}$  in die ersten  $n - 1$  Spalten  $B = (v_1, \dots, v_{n-1}) \in R^{m \times (n-1)}$  und die letzte Spalte  $v_n \in R^{m \times 1}$ .

Nach Voraussetzung sind  $SA$  und  $TA$  in reduzierter Zeilenstufenform, also auch  $SB$  und  $TB$ . Nach Induktionsvoraussetzung gilt  $SB = TB$ .

Zwei Fälle sind möglich: (a) Gilt  $v_n \in \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle_R = \text{SR}(B)$ , also  $v_n = Bx$  mit  $x \in R^{(n-1) \times 1}$ , so folgt  $Sv_n = SBx = TBx = Tv_n$ .

(b) Andernfalls gilt  $v_n \notin \text{SR}(B)$ , also  $Sv_n \notin \text{SR}(SB)$  und  $Tv_n \notin \text{SR}(TB)$ . Daraus folgt  $Sv_n = Tv_n = e_r$  für diese reduzierten Zeilenstufenformen.

In beiden Fällen schließen wir  $SA = TA$ .

QED

Alle Lehrbücher zur Linearen Algebra erklären den Gauß–Algorithmus und dazu (mehr oder weniger explizit) die reduzierte Zeilenstufenform. Erstaunlich viele kehren jedoch die Eindeutigkeit unter den Teppich und sprechen dann doch heimlich von „der“ reduzierten Zeilenstufenform. Wir wollen es hier besser machen und sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit klar benennen und beweisen. Das ist ehrliches Handwerk.

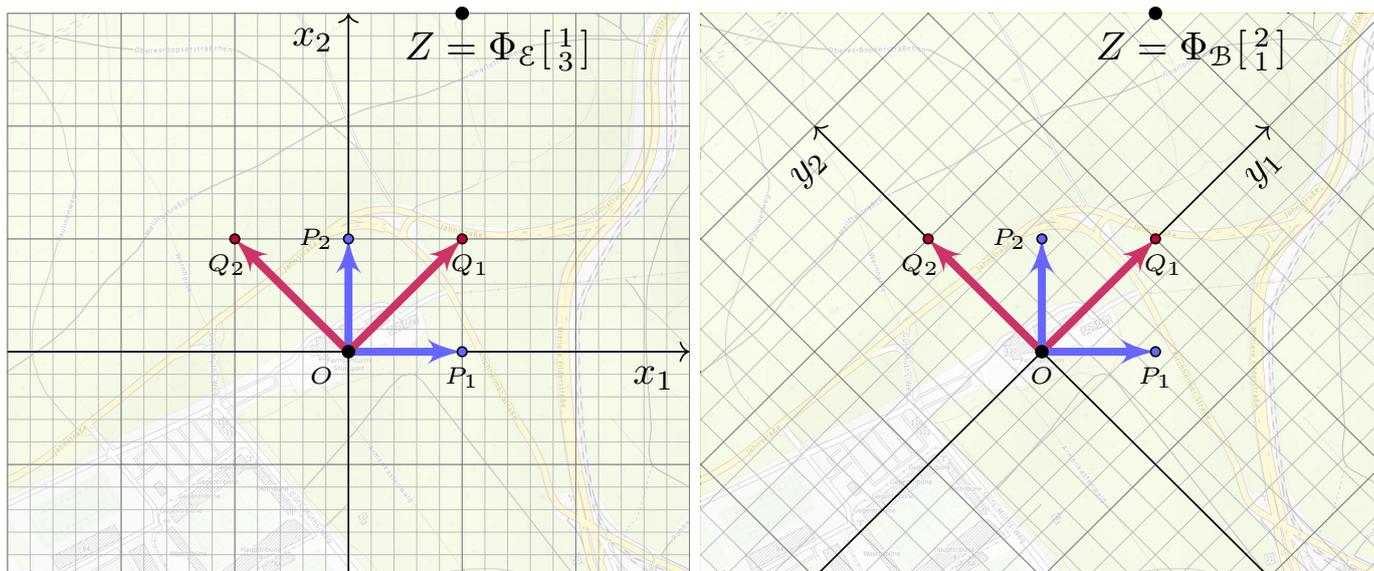
Die Eindeutigkeit hat eine ganz konkrete und praktische Bedeutung: Angenommen zwei Studierende untersuchen eine Matrix  $A \in R^{m \times n}$ , und jeder konstruiert seine RZSF durch seinem eigenen Rechenweg. Finden beide schließlich zu demselben Ergebnis? Satz K2k sagt ja! Das ist durchaus erstaunlich, denn die Zeilenumformungen lassen noch sehr viele Freiheiten für die Ausführung der Rechnungen.

Warum ist die Existenz einer reduzierten Zeilenstufenform relativ leicht, doch die Eindeutigkeit vergleichsweise schwierig zu beweisen?

Das führt uns zu zwei einfachen, aber grundlegenden Beobachtungen:

Um zu zeigen, dass eine Frage lösbar ist, genügt es, sie auf *einem* Weg zu lösen: Dies erledigt der universell anwendbare Gauß–Algorithmus. So konnten wir die Existenz einer RZSF bereits in Kapitel B zeigen, durch explizite Konstruktion in Form eines geeigneten Algorithmus.

Um zu zeigen, dass die Lösung eindeutig ist, müssen wir sicherstellen, dass das Ergebnis auf *jedem* Weg dasselbe ist. Das ist etwas kniffliger, hierzu benötigen wir Invarianten und nutzen geschickt den Spaltenraum. Daher beantworten wir diese Frage erst jetzt in Kapitel K.

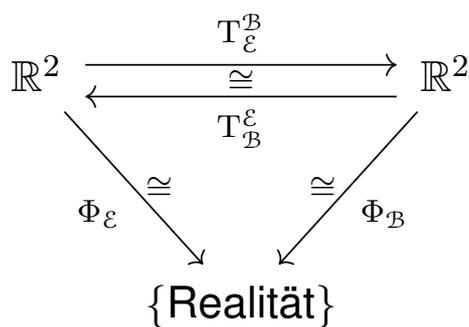


**Aufgabe:** Wir betrachten den  $\mathbb{R}$ -linearen Raum  $\mathbb{R}^2$  mit den Basen

$$\mathcal{E} : e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} : b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jeder Vektor  $v \in \mathbb{R}^2$  schreibt sich eindeutig als  $v = e_1x_1 + e_2x_2$  und ebenso  $v = b_1y_1 + b_2y_2$  mit  $x, y \in \mathbb{R}^2$ . Wie rechnen Sie  $x$  und  $y$  um?

Ich stelle mir dies wie folgt vor: Beide Koordinatensysteme,  $\Phi_{\mathcal{E}}$  und  $\Phi_{\mathcal{B}}$ , sind Karten für eine physikalische Situation, etwa eine Landkarte.



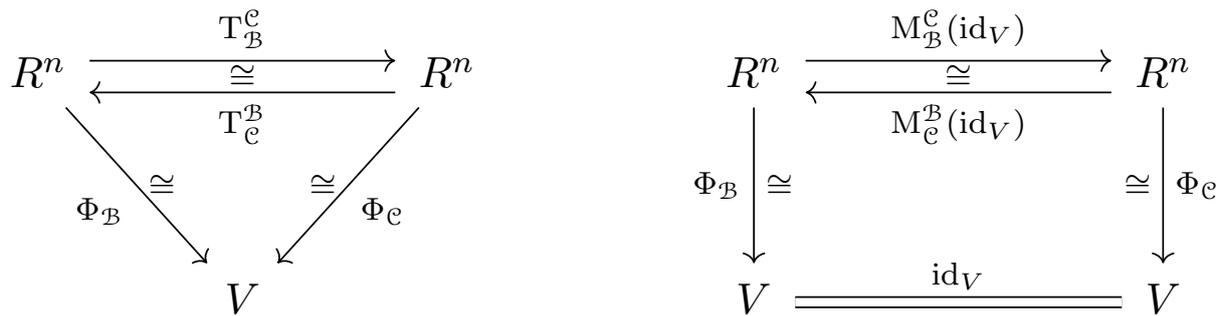
Die Graphik zeigt eine Karte um den Fernsehturm nebst Gazi-Stadion. Beide Koordinatensysteme haben ihre Vorzüge, je nach Anwendung:  $\mathcal{E}$  ist genordet, aber  $\mathcal{B}$  passt eventuell besser zu Ihrem Vorhaben.

Jeder Punkt der Realität (im Kartengebiet) lässt sich eindeutig im Koordinatensystem  $\Phi_{\mathcal{E}}$  beschreiben, und ebenso in  $\Phi_{\mathcal{B}}$ . Beispiel:

$$Z = \Phi_{\mathcal{E}}\left[\frac{1}{3}\right] = \Phi_{\mathcal{B}}\left[\frac{2}{1}\right]$$

Wir wollen nun die beiden Koordinatensysteme ineinander umrechnen.

😊 Oft wollen wir eine gegebene Basis durch eine andere ersetzen. Dazu müssen wir nur die alten Koordinaten in die neuen umrechnen:



Die Umrechnung von  $\mathcal{B}$  nach  $\mathcal{C}$  leistet die **Basiswechselmatrix**

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{id}_V).$$

Das bedeutet, wir schreiben die Startbasis  $\mathcal{B}$  in der Zielbasis  $\mathcal{C}$ :

$$\text{id}_V(b_j) = \sum_{i=1}^n c_i t_{ij} \text{ mit } t_{ij} \in R \implies T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = T = (t_{ij})_{ij}$$

Die Koordinaten transformieren sich dann mit der Matrix  $T$ :

$$v \stackrel{\text{Basis}}{=} \sum_{j=1}^n b_j x_j \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n c_i t_{ij}) x_j \stackrel{\text{Ass}}{=} \sum_{i=1}^n c_i (\sum_{j=1}^n t_{ij} x_j)$$

Die Koordinaten  $x \in R^n$  bezüglich  $\mathcal{B}$  werden zu  $y = Tx$  bezüglich  $\mathcal{C}$ .

😊 Die letzte Gleichung entspricht der Assoziativität von Matrizen. Die Transformation der Koordinaten ist also erfreulich einfach!

😊 Die Basiswechselmatrix  $T = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  ist eigentlich nichts Neues: Es ist die Matrixdarstellung der Identität  $\text{id}_V$  in den Basen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$ .

😊 Ist  $V = R^n$  selbst ein Koordinatenraum, so wie im einführenden Beispiel, so können wir die Basis  $\mathcal{B}$  als die Spalten einer Matrix  $B$  auffassen, und ebenso die Basis  $\mathcal{C}$  als die Spalten einer Matrix  $C$ .

Die gesuchte Basiswechselmatrix  $T$  erfüllt dann die Gleichung

$$\begin{aligned} B &= C \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \implies T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = C^{-1}B \\ C &= B \cdot T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \implies T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = B^{-1}C \end{aligned}$$

In unserem Beispiel ist  $\mathcal{C} = \mathcal{E}$  die Standardbasis, daher gilt  $C = 1_{n \times n}$ , und somit  $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = B$  sowie  $T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = B^{-1}$ . Das vereinfacht die Rechnungen.

**Beispiel:** Wir betrachten den  $\mathbb{R}$ -linearen Raum  $\mathbb{R}^2$  mit den Basen

$$\mathcal{E} : e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} : b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Für  $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$  schreiben wir die Startbasis  $\mathcal{B}$  in der Zielbasis  $\mathcal{E}$ ; das ist leicht:

$$\left. \begin{array}{l} b_1 = 1e_1 + 1e_2 \\ b_2 = -1e_1 + 1e_2 \end{array} \right\} \implies T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Für  $T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$  schreiben wir die Startbasis  $\mathcal{E}$  in der Zielbasis  $\mathcal{B}$  (LGS / Gauß):

$$\left. \begin{array}{l} e_1 = \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 \\ e_2 = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 \end{array} \right\} \implies T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

**Probe:** Gilt  $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = 1_{2 \times 2}$ ? und  $T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = 1_{2 \times 2}$ ? Ja, tatsächlich!

**Beispiel:**

$$T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \cdot \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}(Z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(Z)$$

Umgekehrt gilt:

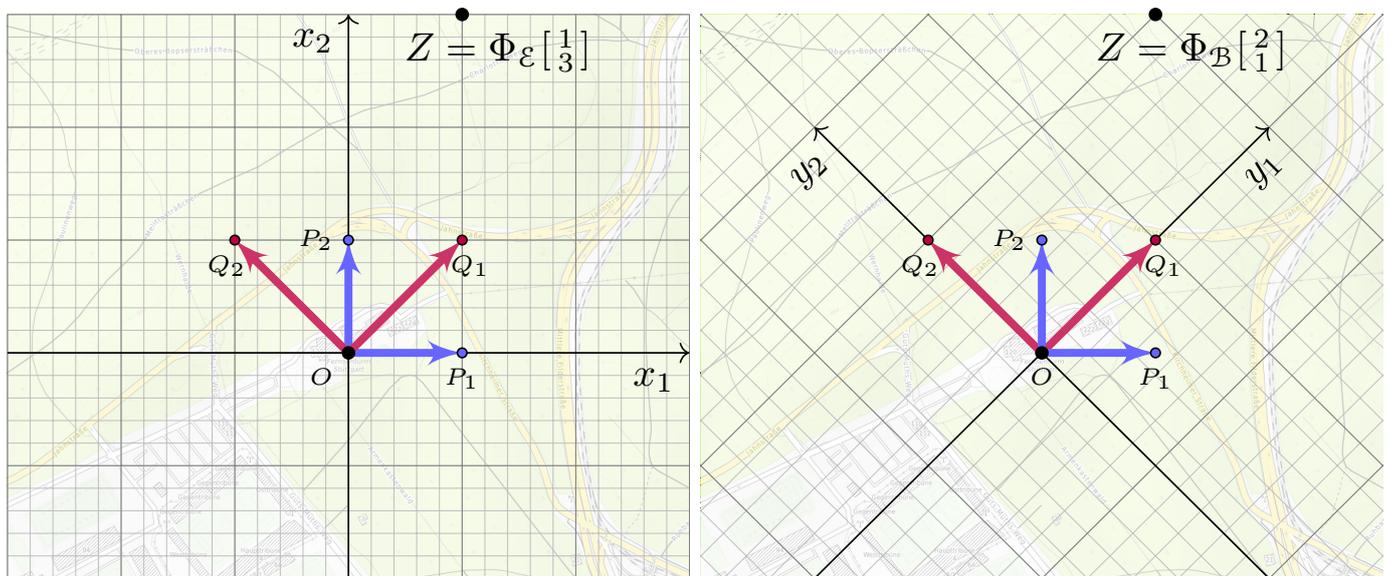
$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(Z) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}(Z)$$

Die Bedingungen  $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = 1$  und  $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = 1$  dienen hier zur Probe: Dies nutzen Sie zur abschließenden Überprüfung Ihrer Rechnung.

Ebenso können Sie dies auch zur Berechnung nutzen: Wenn Sie die eine Matrix bereits kennen, so erhalten Sie die andere durch Inversion.

Zur Bestimmung einer Basiswechselmatrix bieten sich typischerweise drei Möglichkeiten, die Sie kennen und geschickt nutzen sollten:

- 1 Sie lösen das lineare Gleichungssystem für die Koeffizienten.
- 2 Sie invertieren die bereits gefundene, umgekehrte Transformation.
- 3 In einfachen Fällen lesen Sie die Koeffizienten direkt ab, so wie hier.



Jeder Vektor  $v \in \mathbb{R}^2$  schreibt sich eindeutig als  $v = e_1x_1 + e_2x_2$  und ebenso  $v = b_1y_1 + b_2y_2$  mit  $x, y \in \mathbb{R}^2$ . Wie rechnen Sie  $x$  und  $y$  um?

**Lösung:** Die Umrechnung gelingt durch die Transformationsmatrizen

$$T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} : x \mapsto y \quad \text{und} \quad T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} : y \mapsto x.$$

Damit ist unser (zugegeben einfaches) Transformationsproblem gelöst! Sie sehen zudem die allgemeine Methode: einfach und elegant.

😊 Die Umrechnung der Koordinaten ist eine lineare Abbildung, wie zu erwarten, und kann daher durch eine Matrix dargestellt werden. Genau diese Matrix haben wir nun explizit bestimmt.

😊 Die Basiswechselmatrix  $T = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  ist eigentlich nichts Neues: Es ist die Matrixdarstellung der Identität  $\text{id}_V$  in den Basen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$ . Da Basiswechsel jedoch oft vorkommen, schauen wir genauer hin und halten einige nützliche Rechenregeln für Basiswechsel fest.

**Satz K2L: die Transformationsformel**

Weiterhin sei  $R$  ein Ring sowie  $V$  und  $W$  (rechts)lineare Räume über  $R$ . Für je zwei Basen  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  von  $V$  definieren wir die **Basiswechselmatrix**

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{id}_V).$$

Für alle Basen  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  von  $V$  gilt dann:

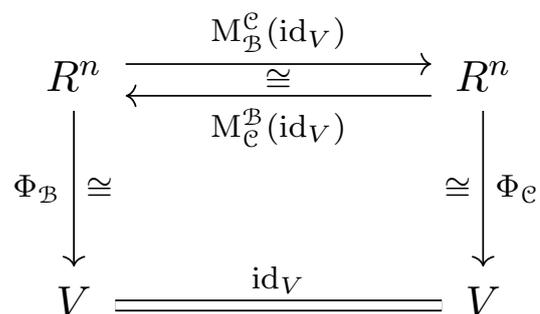
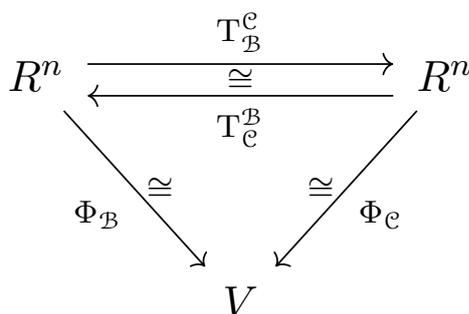
- 1 Identität:  $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = 1_{n \times n}$
- 2 Inversion:  $T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = 1_{n \times n}$
- 3 Komposition:  $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$
- 4 Koordinatentransformation:  $\Phi_{\mathcal{C}}^{-1} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}$

Für jede lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  folgt die **Transformationsformel**:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f) = T_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Hierbei sind  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  Basen von  $V$  und  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  Basen von  $W$ .

**Beweis:** Aussage (4) ist die Definition von  $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{id}_V)$ .

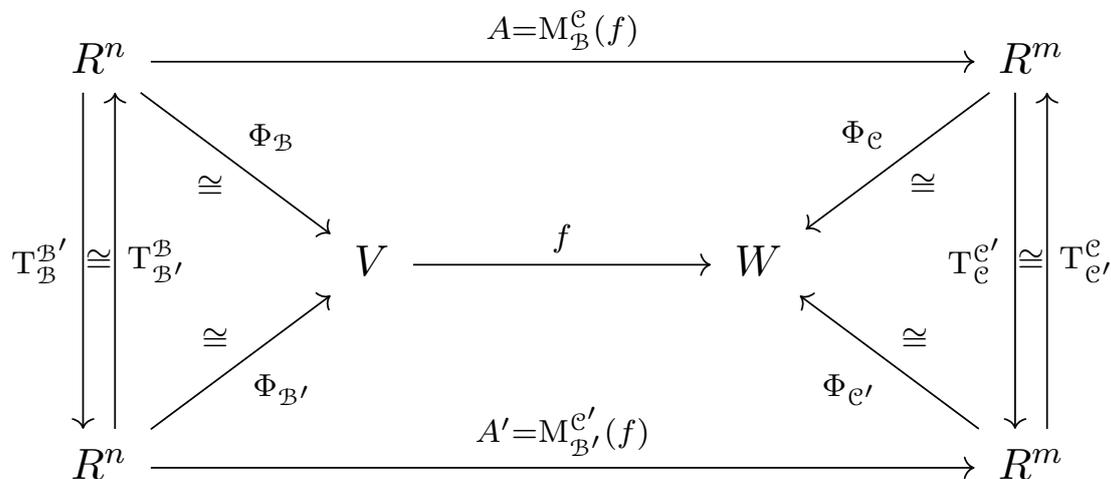


**⚠** Zur Vereinfachung der Diagramme identifizieren wir hier jede Matrix  $A \in R^{m \times n}$  mit der zugehörigen Abbildungen  $f_A : R^n \rightarrow R^m$  gemäß K1E.

Die Aussage (1)  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) = 1_{n \times n}$  ist klar nach Definition.

Die Aussagen (2–3) folgen aus dem Kompositionssatz K1J.

Die Transformationsformel lesen wir aus folgendem Diagramm ab:



**Aufgabe:** Übersetzen Sie dieses Diagramm in einen Beweis.

**Lösung:** Wir formulieren die Konstruktionsschritte explizit aus:

Nach Definition K1F der Matrix  $A = M_B^c(f)$  gilt  $f_A = \Phi_c^{-1} \circ f \circ \Phi_B$ .

Nach Definition K1F der Matrix  $A' = M_{B'}^{c'}(f)$  gilt  $f_{A'} = \Phi_{c'}^{-1} \circ f \circ \Phi_{B'}$ .

Nach Definition K1F der Matrix  $T = M_{B'}^B(\text{id}_V)$  gilt  $f_T = \Phi_{B'}^{-1} \circ \Phi_B$ .

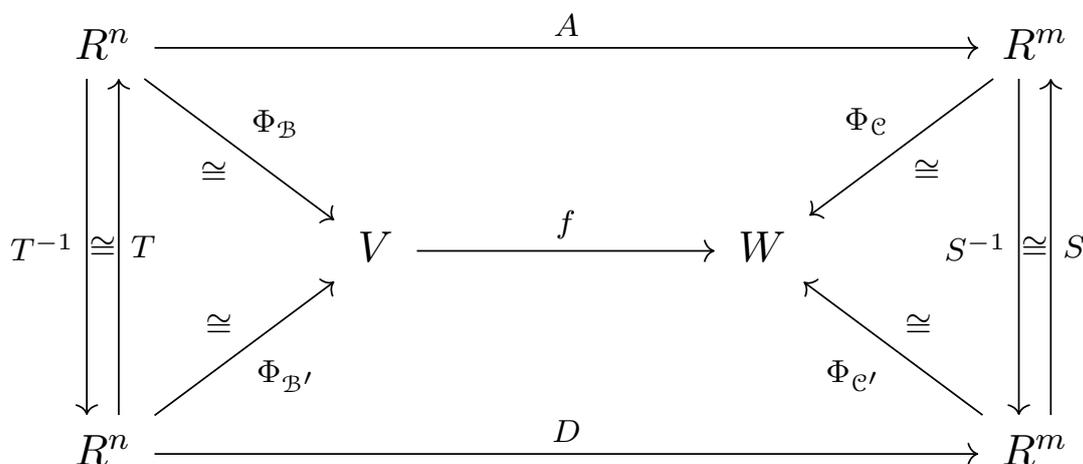
Nach Definition K1F der Matrix  $T' = M_c^{c'}(\text{id}_W)$  gilt  $f_{T'} = \Phi_{c'}^{-1} \circ \Phi_c$ .

Daraus folgt  $f_{A'} = f_{T'} \circ f_A \circ f_T$ , also  $A' = T' \cdot A \cdot T$  wie behauptet.

😊 Das Diagramm erklärt die Idee und gibt Ihnen einen guten Überblick. Der schrittweise ausformulierte Beweis liefert detaillierte Argumente, in der logisch richtigen Reihenfolge, eventuell ergänzt durch weitere Informationen, im vorliegenden Fall zum Beispiel explizite Formeln.

😊 Diagramm / Bild und Text / Formel sind bewährte Mittel zur Kommunikation in der Mathematik und angepasst auch außerhalb. Beides ist nützlich und hilfreich. Lernen Sie beides zu nutzen und ineinander zu übersetzen, so wie hier exemplarisch vorgeführt.

**Beispiel:** Basiswechsel K2c zur Modellmatrix  $D = D_{m \times n}^r = S^{-1}AT$ .



**Aufgabe:** Wie führt der Gauß–Algorithmus zu einem Basiswechsel?

**Lösung:** Gegeben sei eine lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  endlich-dimensionaler Vektorräume über dem Divisionsring  $R$ .

Wir wählen (zunächst beliebige, also willkürliche) Basen  $\mathcal{B}$  von  $V$  und  $\mathcal{C}$  von  $W$ . Damit stellen wir  $f$  als Matrix  $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$  dar.

Nun wollen wir diese Basen verbessern, also möglichst gut an  $f$  anpassen, sodass die darstellende Matrix möglichst einfach wird.

Der Gauß–Algorithmus K2F liefert uns hierzu invertierbare Matrizen  $S, S^{-1} \in GL_m R$  und  $T, T^{-1} \in GL_n R$ , sodass  $D_{m \times n}^r = S^{-1}AT$ .

Dies definiert neue Basen  $\mathcal{B}'$  von  $V$  und  $\mathcal{C}'$  von  $W$ , wie im Diagramm gezeigt. Bezüglich dieser angepassten Basen wird  $f$  nun dargestellt durch die Modellmatrix  $D_{m \times n}^r = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f)$ . Damit ist das Ziel erreicht.



## Basiswechsel zur Diagonalisierung

**Beispiel:** Im Funktionenraum  $\mathbb{C}^{\mathbb{R}} = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  über  $\mathbb{C}$  betrachten wir  $g(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$  und  $\bar{g}(t) = e^{-it} = \cos t - i \sin t$ . Wir haben

$$\begin{aligned} V &= \langle \cos, \sin \rangle_{\mathbb{C}}^! = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto a_1 \cos(t) + a_2 \sin(t) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{C} \} \\ &= \langle g, \bar{g} \rangle_{\mathbb{C}}^! = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C} \}. \end{aligned}$$

**Aufgabe:** (1) Stellen Sie die Ableitung  $\partial: V \rightarrow V$  in diesen Basen dar.  
 (2) Berechnen Sie die Basiswechsellmatrizen zwischen diesen Basen.  
 (3) Prüfen Sie Ihre Ergebnisse mit der Transformationsformel.

**Lösung:** (1) Wir betrachten die Basen  $\mathcal{A} = (\cos, \sin)$  und  $\mathcal{B} = (g, \bar{g})$ .

(1a) Wir finden  $\cos' = -\sin$  und  $\sin' = \cos$ . Die darstellende Matrix ist

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\partial) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1b) Wir finden  $g' = ig$  und  $\bar{g}' = -i\bar{g}$ . Die darstellende Matrix ist also

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\partial) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

## Basiswechsel zur Diagonalisierung

Zum guten Abschluss diskutieren wir noch einmal die Ableitung  $\partial: V \rightarrow V$  auf dem Funktionenraum  $V = \langle \cos, \sin \rangle_{\mathbb{C}}^! = \langle g, \bar{g} \rangle_{\mathbb{C}}^!$ .

Die darstellenden Matrizen zu  $\partial$  haben wir bereits im ersten Teil dieses Kapitels bestimmt. Nun vollenden wir dieses schöne Beispiel durch die Betrachtung der Basiswechsellmatrizen. Diese Illustration liefert relevantes Anschauungsmaterial, zwar einfach, doch lehrreich.

(2) Wir betrachten die Basen  $\mathcal{A} = (\cos, \sin)$  und  $\mathcal{B} = (g, \bar{g})$ .

(2a) Für  $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$  schreiben wir die Startbasis  $\mathcal{B}$  in der Zielbasis  $\mathcal{A}$ :

$$\left. \begin{array}{l} g(t) = 1 \cos(t) + i \sin(t) \\ \bar{g}(t) = 1 \cos(t) - i \sin(t) \end{array} \right\} \implies T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$$

(2b) Für  $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$  schreiben wir die Startbasis  $\mathcal{A}$  in der Zielbasis  $\mathcal{B}$ :

$$\left. \begin{array}{l} \cos(t) = \frac{1}{2}g(t) + \frac{1}{2}\bar{g}(t) \\ \sin(t) = \frac{1}{2i}g(t) - \frac{1}{2i}\bar{g}(t) \end{array} \right\} \implies T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{bmatrix}$$

**Probe:** Gilt  $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = 1_{2 \times 2}$ ? und  $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = 1_{2 \times 2}$ ? Ja, tatsächlich!

(3) Einsetzen in die Transformationsformel  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\partial) = T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\partial) \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ :

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$$

Ist diese Probe erfolgreich? Rechnen Sie es aus!

Die Bedingungen  $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = 1$  und  $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = 1$  dienen hier zur Probe: Dies nutzen Sie zur abschließenden Überprüfung Ihrer Rechnung.

Umgekehrt können Sie dies auch zur Berechnung nutzen: Wenn Sie die eine Matrix bereits kennen, so erhalten Sie die andere durch Inversion.

## Definition K2M: Diagonalisierung eines Endomorphismus

Sei  $R$  ein Ring, wir denken insbesondere an Körper wie  $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_p, \dots$

(1) Sei  $f: V \rightarrow V$  linear über  $R$ . Eine **diagonalisierende Basis** zu  $f$  ist eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , für die die darstellende Matrix von  $f$  diagonal ist:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Existiert eine solche Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , so nennen wir  $f$  **diagonalisierbar**.

(2) Sei  $A \in R^{n \times n}$ . Ein **diagonalisierender Basiswechsel** zu  $A$  über  $R$  ist eine invertierbare Matrix  $T \in GL_n(R)$ , so dass  $T^{-1}AT$  diagonal ist:

$$T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Existiert eine solche Matrix  $T$ , so nennen wir  $A$  **diagonalisierbar**.

Diagonalisierung ist ein zentrales Anliegen der Linearen Algebra; wir werden dies in den nächsten Kapiteln noch genau untersuchen.

Wir können das *Problem* der Diagonalisierung über jedem beliebigen Ring formulieren, doch in dieser Allgemeinheit scheint eine effektive *Lösung* ziemlich hoffnungslos. Wie üblich fokussieren wir uns auf Divisionsringe, damit wir den Gauß–Algorithmus nutzen können.

Zudem benötigen wir die Determinante aus dem folgenden Kapitel, und diese steht (nur) über allen kommutativen Ringen zur Verfügung. Wir werden daher das Diagonalisierungsproblem ernsthaft nur über kommutativen Divisionsringen angehen, also über Körpern.

😊 Im Folgenden bearbeiten wir die Diagonalisierung ausschließlich über einem Körper und schreiben Skalare dann traditionell links.

😊 Der folgende Dreischritt *Definition – Satz – Beispiel* bietet Ihnen bereits handfestes Material und dient hier vor allem als Vorschau.

**Definition K2N: Eigenraum einer linearen Abbildung**

Sei  $K$  ein Körper und hierüber  $f: V \rightarrow V$  eine  $K$ -lineare Abbildung. Zu jedem Skalar  $\lambda \in K$  definieren wir den zugehörigen **Eigenraum**

$$E(\lambda) = \text{Eig}(f, \lambda) := \{ v \in V \mid f(v) = \lambda v \} \stackrel{!}{=} \ker(f - \lambda \text{id}_V).$$

Im Falle  $E(\lambda) \neq \{0\}$  nennen wir  $\lambda$  einen **Eigenwert** von  $f$ .

**Übung:** Zeigen Sie die letzte Gleichung und folgern Sie daraus, dass  $\text{Eig}(f, \lambda) \leq V$  tatsächlich ein  $K$ -linearer Unterraum ist. (Das erfordert Kommutativität von  $K$ , egal ob die Skalare links oder rechts stehen.)

**Beispiele:** Die beiden einfachsten Spezialfälle kennen Sie bereits:

- 0 Für  $\lambda = 0$  ist  $\text{Eig}(f, 0) = \ker(f)$  der Kern der Abbildung  $f$ .
- 1 Für  $\lambda = 1$  ist  $\text{Eig}(f, 1) = \text{fix}(f)$  die Fixpunktmenge von  $f$ .

**Satz K2O: Diagonalisierung und Eigenraumzerlegung**

Genau dann ist  $f: V \rightarrow V$  diagonalisierbar über dem Körper  $K$ , wenn  $V = \bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$  die direkte Summe von Eigenräumen ist.

Relevant sind dabei nur die nicht-trivialen Eigenräume  $E(\lambda) \neq \{0\}$ , also nur die Summanden zu Eigenwerten  $\lambda$  der Abbildung  $f$ .

**Übung:** Beweisen Sie die im Satz formulierte Äquivalenz. (Sie finden eine ausführliche Diskussion später in Satz M11, doch es gibt kein Hindernis, dies nicht jetzt schon zu beweisen. Versuchen Sie es!)

😊 Anschaulich gesagt: Genau dann ist  $f: V \rightarrow V$  diagonalisierbar, wenn es genügend Eigenvektoren gibt, um eine Eigenbasis bilden.

😊 Das folgende Zahlenbeispiel zeigt eine schöne Illustration. Wir halten dazu bereits alle nötigen Werkzeuge in Händen.

**Aufgabe:** Zum Spaltenvektor  $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  betrachten wir

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto x - v \cdot v^\top \cdot x.$$

(1a) Ist diese Abbildung  $f$  linear über  $\mathbb{R}$ ?

(1b) Schreiben Sie  $f$  als Matrix  $A$  bezüglich der Standardbasis.

Zu  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  definieren wir den **Eigenraum**

$$E(\lambda) := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = \lambda x \}.$$

(2a) Ist  $E(\lambda)$  in  $\mathbb{R}^2$  ein  $\mathbb{R}$ -linearer Unterraum?

(2b) Bestimmen Sie Basen für  $E(+1)$  und  $E(-1)$ .

(3a) Erhalten Sie so eine direkte Summe  $E(+1) \oplus E(-1) = \mathbb{R}^2$ ?

(3b) Setzen Sie die Basen aus (2b) zu einer Basis  $\mathcal{B}$  von  $\mathbb{R}^2$  zusammen.

(3c) Schreiben Sie  $f$  als Matrix bezüglich dieser angepassten Basis  $\mathcal{B}$ .

(4a) Zeichnen Sie  $E(+1)$  und  $E(-1)$  in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ .

(4b) Erklären Sie die Wirkung von  $f$  geometrisch.

Zu jedem Wert  $\lambda \in \mathbb{R}$  definieren wir den Eigenraum  $E(\lambda)$  wie gezeigt. Relevant sind dabei nur die nicht-trivialen Eigenräume  $E(\lambda) \neq \{0\}$ .

Für das vorliegende Beispiel sind nur die beiden Werte  $\lambda = \pm 1$  relevant, denn für alle  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$  gilt  $E(\lambda) = \{0\}$ . Probieren Sie Beispiele aus!

Sie lernen in den folgenden Kapiteln, wie Sie die **Eigenwerte** von  $f$  bestimmen, also diejenigen Werte  $\lambda$ , für die  $E(\lambda) \neq \{0\}$  gilt.

(Wenn Sie dies später im Rückblick lesen, können Sie es bereits: Es gelingt mit Determinante und charakteristischem Polynom.)

Unsere Aufgabenstellung umgeht dieses Problem elegant dadurch, dass die beiden Eigenwerte  $\lambda = \pm 1$  hier fest vorgegeben werden.

Alle weiteren Rechnungen liegen bereits jetzt in Ihrer Reichweite und bilden eine schöne Illustration all unserer bisherigen Techniken.

Zudem bietet es eine gute Motivation für die folgenden Kapitel zu Determinanten, Eigenwerten und Eigenvektoren.

## Basiswechsel zur Diagonalisierung

**Lösung:** Zum Spaltenvektor  $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  betrachten wir

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto x - v \cdot v^\top \cdot x.$$

(1a) Ja, die Abbildung  $f$  ist linear, wie wir direkt nachrechnen:

$$f(x + \lambda y) = \dots = f(x) + \lambda f(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ und } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(1b) Wir berechnen die Bilder der Basisvektoren:

$$\left. \begin{array}{l} f(e_1) = \dots = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 \\ f(e_2) = \dots = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 \end{array} \right\} \implies A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

😊 Die beiden Basisvektoren  $e_1$  und  $e_2$  werden hier vertauscht.

**Alternative:** Wir formen die Abbildungsvorschrift von  $f$  explizit um:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot x \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x \end{aligned}$$

## Basiswechsel zur Diagonalisierung

Damit haben wir unsere Abbildung  $f$  als Matrix dargestellt und somit in eine sehr übersichtliche Form gebracht: Damit können wir arbeiten!

Für Matrizen haben wir effiziente Standardverfahren, insbesondere den Gauß-Algorithmus zur Lösung von linearen Gleichungssystemen, zur Bestimmung von Bild und Kern etc.

Zum Beispiel können wir nun leicht den Eigenraum  $E(0)$  berechnen:

$$E(0) = \ker(f) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Zur Diagonalisierung suchen wir nicht-triviale Eigenräume.

Die freundliche Aufgabenstellung nimmt uns die Suche ab:

Im vorliegenden Beispiel sind dies  $E(+1)$  und  $E(-1)$ .

Diese beiden schauen wir uns nun genauer an!

(2a) Wir betrachten  $E(\lambda) := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = \lambda x \}$ . Für  $x \in \mathbb{R}^2$  gilt:

$$f(x) = \lambda x \iff 0 = f(x) - \lambda x = f(x) - \lambda \text{id}(x) = (f - \lambda \text{id})(x)$$

Somit ist die Menge  $E(\lambda)$  der Kern der Abbildung  $f - \lambda \text{id}$ :

$$E(\lambda) = \ker(f - \lambda \text{id})$$

Die Abbildung  $f - \lambda \text{id}$  ist linear (I1I), ihr Kern ist ein Unterraum (I1R).

(2b) Wir bestimmen die Unterräume  $E(+1)$  und  $E(-1)$  wie folgt:

$$E(+1) = \ker(f - \text{id}) = \ker \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \mathbb{R} b_1 \quad \text{mit} \quad b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E(-1) = \ker(f + \text{id}) = \ker \begin{bmatrix} +1 & 1 \\ 1 & +1 \end{bmatrix} = \mathbb{R} b_2 \quad \text{mit} \quad b_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3) Wir erhalten so zu  $f$  die angepasste Basis  $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$  von  $\mathbb{R}^2$ . Nach Konstruktion gilt  $f(b_1) = +1 \cdot b_1$  und  $f(b_2) = -1 \cdot b_2$ , also

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wir wechseln von der Standardbasis  $\mathcal{E}$  zur angepassten Basis  $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{E} : e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} : b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dadurch diagonalisieren wir die Darstellungsmatrix von  $f$ :

$$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow D = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Auf Seite K237 haben wir bereits die Basiswechselmatrizen bestimmt:

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

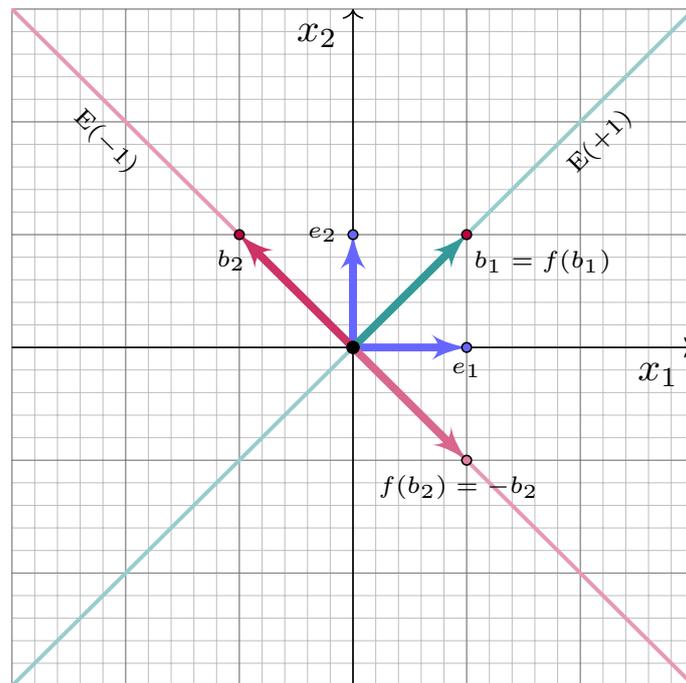
Wenn Sie dies üben möchten, können Sie diese numerischen Daten in die Transformationsformel K2L einsetzen und auf Konsistenz prüfen.

## Basiswechsel zur Diagonalisierung

(4) In der angepassten Basis  $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$  können wir die Abbildung  $f$  besonders einfach darstellen. . . und daher auch leichter zeichnen!

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Die Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist die Spiegelung an der Hauptdiagonalen.

## Basiswechsel zur Diagonalisierung

Eine solcherart angepasste Basis  $\mathcal{B}$  zu  $f$  ist etwas ganz Besonderes: Bezüglich  $\mathcal{B}$  wird  $f$  durch eine Diagonalmatrix dargestellt, wie erhofft.

Wir nennen dies eine **diagonalisierende Basis** zu  $f$ , wie oben in Definition K2M vereinbart, oder auch kurz eine **Eigenbasis** zu  $f$ .

Die Eigenräume unserer Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sind etwas Natürliches. Glücklicherweise erhalten wir hier  $\mathbb{R}^2 = E(+1) \oplus E(-1)$ , wie erhofft.

Die Wahl der jeweiligen Basen  $b_1 \in E(+1)$  und  $b_2 \in E(-1)$  ist hingegen etwas willkürlich; wir können auch Vielfache dieser Vektoren wählen.

😊 Die so gewonnene Eigenbasis  $\mathcal{B}$  zeigt uns, was  $f$  eigentlich tut: Hier offenbart die Abbildung  $f$  ihr wahres Wesen, ihren Charakter, hier erkennen wir  $f$  sofort als Spiegelung.

**Aufgabe:** Wie viele injektive Abbildungen gibt es?

(1) Wie viele Injektionen  $f : \{1, 2, 3\} \hookrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$  gibt es?

Was gilt für Injektionen  $f : X = \{1, \dots, k\} \hookrightarrow Y = \{1, \dots, n\}$ ?

(2) Wie viele  $\mathbb{F}_2$ -lineare Injektionen  $f : \mathbb{F}_2^3 \hookrightarrow \mathbb{F}_2^5$  gibt es?

Was gilt allgemein für  $\mathbb{F}_q$ -lineare Injektionen  $f : \mathbb{F}_q^k \hookrightarrow \mathbb{F}_q^n$ ?

**Lösung:** (1a) Wir können die möglichen Abbildungen direkt abzählen: Für  $f(1)$  haben wir noch alle 5 Wahlen, für  $f(2)$  bleiben noch 4 Wahlen, für  $f(3)$  nur noch 3 Wahlen. Insgesamt gibt es  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$  Injektionen. Alternative: Es gibt genau  $3! \binom{5}{3} = 6 \cdot 10 = 60$  Injektionen (siehe E249).

(1b) Für endliche Mengen  $X, Y$  mit  $\#X = k$  und  $\#Y = n$  gilt (Satz E2L):

$$\# \text{Inj}(X, Y) = n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1) = \binom{n}{k} \cdot k!$$

Hierbei zählt der Binomialkoeffizient  $\binom{n}{k} = \# \binom{Y}{k}$  die  $k$ -elementigen Teilmengen  $A \subseteq Y$  der  $n$ -elementigen Menge  $Y$  (Satz E2I).

Im Spezialfall  $k = n$  erhalten wir  $\# \text{Bij}(X, Y) = n!$ .

(2a) Wir nutzen geschickt das Prinzip der linearen Fortsetzung (K1B). Für  $f(e_1) \in \mathbb{F}_q^5 \setminus \{0\}$  haben wir  $2^5 - 2^0 = 31$  Wahlen, für  $f(e_2)$  bleiben  $2^5 - 2^1 = 30$  Wahlen, für  $f(e_3)$  bleiben schließlich  $2^5 - 2^2 = 28$  Wahlen. Insgesamt gibt es  $31 \cdot 30 \cdot 28 = 26040$  Injektionen  $f : \mathbb{F}_2^3 \hookrightarrow \mathbb{F}_2^5$  über  $\mathbb{F}_2$ .

(2b) Seien  $V, W$  Vektorräume über  $\mathbb{F}_q$  mit  $\dim(V) = k$  und  $\dim(W) = n$ . Die Anzahl der  $\mathbb{F}_q$ -linearen Injektionen  $f : V \rightarrow W$  ist wie in (2a):

$$\# \text{Inj}_{\mathbb{F}_q}(V, W) = \prod_{i=0}^{k-1} (q^n - q^i)$$

Im Spezialfall  $k = n$  erhalten wir

$$\# \text{Iso}_{\mathbb{F}_q}(V, W) = \# \text{GL}_n \mathbb{F}_q = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)$$

Das sind die Anzahlen, die wir aus Satz J2H kennen.

**Aufgabe:** Wie viele surjektive Abbildungen gibt es?

(3) Wie viele Surjektionen  $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \twoheadrightarrow \{1, 2, 3\}$  gibt es?

Was gilt für Surjektionen  $f : X = \{1, \dots, k\} \twoheadrightarrow Y = \{1, \dots, n\}$ ?

(4) Wie viele  $\mathbb{F}_2$ -lineare Surjektionen  $f : \mathbb{F}_2^5 \twoheadrightarrow \mathbb{F}_2^3$  gibt es?

Was gilt allgemein für  $\mathbb{F}_q$ -lineare Surjektionen  $f : \mathbb{F}_q^k \twoheadrightarrow \mathbb{F}_q^n$ ?

**Lösung:** (3b) Wir zerlegen die Menge  $X$  in Fasern (wie in Satz E2L):

$$\text{Sur}(X, Y) \cong \{ (Q, \bar{f}) \mid Q \in \{X_n\}, \bar{f} : Q \xrightarrow{\sim} Y \}$$

Jede Surjektion  $f : X \twoheadrightarrow Y$  ist eindeutig bestimmt durch ihre Zerlegung  $Q \in \{X_n\}$  in Fasern und die Bijektion  $\bar{f} : Q \xrightarrow{\sim} Y$ . Wir haben also:

$$\# \text{Sur}(X, Y) = \sum_{Q \in \{X_n\}} \# \text{Bij}(Q, Y) = \{k_n\} \cdot n!$$

Hierbei zählt die Stirling-Zahl  $\{k_n\} = \#\{X_n\}$  die  $n$ -elementigen Partitionen  $Q \in \{X_n\}$  der  $k$ -elementigen Menge  $X$  (wie in Satz E2K).

(3a) Für  $(k, n) = (5, 3)$  finden wir  $\{5_3\} = 25$  und  $3! = 6$ , also insgesamt  $\# \text{Sur}(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3\}) = 25 \cdot 6 = 150$  Surjektionen (siehe E249).

(4b) Seien  $V, W$  Vektorräume über  $\mathbb{F}_q$  mit  $\dim(V) = k$  und  $\dim(W) = n$ .

$$\text{Sur}_{\mathbb{F}_q}(V, W) \cong \{ (U, \bar{f}) \mid U \leq V, \bar{f} : V/U \xrightarrow{\sim} W \}$$

Jede  $\mathbb{F}_q$ -lineare Surjektion  $f : V \twoheadrightarrow W$  ist eindeutig bestimmt durch ihren Kern  $U = \ker(f) \leq V$  mit der Dimension  $\dim(U) = k - n$  (J2N) und den induzierten  $\mathbb{F}_q$ -linearen Isomorphismus  $\bar{f} : V/U \xrightarrow{\sim} W$  (I2B). Daraus gewinnen wir dank Satz J2H:

$$\# \text{Sur}_{\mathbb{F}_q}(V, W) = \binom{k}{k-n}_q \cdot \# \text{GL}_n \mathbb{F}_q$$

(4a) In unserem Beispiel mit  $q = 2$  und  $(k, n) = (5, 3)$  finden wir

$$\binom{5}{2}_2 = \frac{(2^5 - 2^0)(2^5 - 2^1)}{(2^2 - 2^0)(2^2 - 2^1)} = \frac{31 \cdot 30}{3 \cdot 2} = 155,$$

$$\# \text{GL}_3 \mathbb{F}_2 = (2^3 - 2^0)(2^3 - 2^1)(2^3 - 2^2) = 7 \cdot 6 \cdot 4 = 168,$$

also insgesamt  $\# \text{Sur}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2^5, \mathbb{F}_2^3) = 155 \cdot 168 = 26040$  Surjektionen über  $\mathbb{F}_2$ .

**Aufgabe:** Wie viele Abbildungen mit vorgegebenem Rang gibt es?

(5) Wie viele Abbildungen  $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  treffen 2 Punkte?

Was gilt für  $f: X = \{1, \dots, k\} \rightarrow Y = \{1, \dots, n\}$  mit  $\# \text{im}(f) = r$ ?

(6) Wie viele  $\mathbb{F}_2$ -lineare Abbildung  $f: \mathbb{F}_2^4 \rightarrow \mathbb{F}_2^3$  vom Rang 2 gibt es?

Was gilt für  $\mathbb{F}_q$ -lineare Abbildungen  $f: \mathbb{F}_q^k \rightarrow \mathbb{F}_q^n$  vom Rang  $r$ ?

**Lösung:** (5b) Wir nutzen geschickt die kanonische Faktorisierung E31:

$$\begin{aligned} \text{Abb}(X, Y)_r &:= \{ f: X \rightarrow Y \mid \# \text{im}(f) = r \} \\ &\cong \{ (Q, \bar{f}, B) \mid Q \in \binom{X}{r}, B \in \binom{Y}{r}, \bar{f}: Q \xrightarrow{\sim} B \} \end{aligned}$$

Jede Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  mit  $\# \text{im}(f) = r$  ist eindeutig bestimmt durch ihre Zerlegung  $Q \in \binom{X}{r}$  in Fasern und ihre Bildmenge  $B \in \binom{Y}{r}$  sowie die induzierte Bijektion  $\bar{f}: Q \xrightarrow{\sim} B$  zwischen beiden. Wir haben also:

$$\# \text{Abb}(X, Y)_r = \sum_{Q \in \binom{X}{r}} \sum_{B \in \binom{Y}{r}} \# \text{Bij}(Q, B) = \binom{k}{r} \cdot \binom{n}{r} \cdot r!$$

(5a) Für  $(k, n, r) = (4, 3, 2)$  finden wir  $\binom{4}{2} = 7$  und  $\binom{3}{2} = 3$  und  $2! = 2$ , also insgesamt  $\# \text{Abb}(\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3\})_2 = 7 \cdot 3 \cdot 2 = 42$ .

(6b) Seien  $V, W$  Vektorräume über  $\mathbb{F}_q$  mit  $\dim(V) = k$  und  $\dim(W) = n$ .

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{F}_q}(V, W)_r &:= \{ f: V \rightarrow W \mid \# \text{rang}(f) = r \} \\ &\cong \{ (U, \bar{f}, B) \mid U \leq V, B \leq W, \bar{f}: V/U \xrightarrow{\sim} B, \dim B = r \} \end{aligned}$$

Jede  $\mathbb{F}_q$ -lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  vom Rang  $r \in \mathbb{N}$  ist eindeutig bestimmt durch ihren Bildraum  $B = \text{im}(f) \leq W$  mit  $\dim(B) = r$  (J2K), ihren Kern  $U = \ker(f) \leq V$  mit  $\dim(U) = k - r$  (J2N) und schließlich den Isomorphismus  $\bar{f}: V/U \xrightarrow{\sim} B$  (I2B). Daraus gewinnen wir (J2H):

$$\# \text{Hom}_{\mathbb{F}_q}(V, W)_r = \binom{k}{k-r}_q \cdot \binom{n}{r}_q \cdot \# \text{GL}_r \mathbb{F}_q$$

(6a) In unserem Beispiel mit  $q = 2$  und  $(k, n, r) = (4, 3, 2)$  finden wir

$$\# \text{GL}_2 \mathbb{F}_2 = (2^2 - 2^0)(2^2 - 2^1) = 3 \cdot 2 = 6,$$

$$\binom{4}{2}_2 = \frac{(2^4 - 2^0)(2^4 - 2^1)}{(2^2 - 2^0)(2^2 - 2^1)} = \frac{15 \cdot 14}{3 \cdot 2} = 35,$$

$$\binom{3}{2}_2 = \frac{(2^3 - 2^0)(2^3 - 2^1)}{(2^2 - 2^0)(2^2 - 2^1)} = \frac{7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 7,$$

also insgesamt  $\# \text{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2^4, \mathbb{F}_2^3)_2 = 35 \cdot 7 \cdot 6 = 1470$ .

Zusammenfassend erhalten wir den folgenden schönen Satz:

### Satz K3A: Anzahl der Abbildungen mit vorgegebenem Rang

Seien  $V, W$  Vektorräume über  $\mathbb{F}_q$  mit  $\dim(V) = k$  und  $\dim(W) = n$  und

$$\text{Hom}_{\mathbb{F}_q}(V, W)_r := \{ f : V \rightarrow W \mid \# \text{rang}(f) = r \}.$$

Für jeden Rang  $r \in \mathbb{N}$  haben wir:

$$\# \text{Hom}_{\mathbb{F}_q}(V, W)_r = \binom{k}{r}_q \cdot \binom{n}{r}_q \cdot \# \text{GL}_r \mathbb{F}_q$$

Im Spezialfall  $r = k$  erhalten wir  $\# \text{Inj}_{\mathbb{F}_q}(V, W) = \binom{n}{k}_q \cdot \# \text{GL}_k \mathbb{F}_q$ .

Im Spezialfall  $r = n$  erhalten wir  $\# \text{Sur}_{\mathbb{F}_q}(V, W) = \binom{k}{n}_q \cdot \# \text{GL}_n \mathbb{F}_q$ .

Im Spezialfall  $r = k = n$  erhalten wir  $\# \text{Iso}_{\mathbb{F}_q}(V, W) = \# \text{GL}_k \mathbb{F}_q$ .

**Beweis:** Wir strukturieren die Menge  $\text{Hom}_{\mathbb{F}_q}(X, Y)_r$  wie in der vorigen Aufgabe ausgeführt und gewinnen daraus die ersehnte Abzählung.

Zudem nutzen wir die Spiegelsymmetrie  $\binom{k}{k-r}_q = \binom{k}{r}_q$ . □ QED

### Abbildungen mit vorgegebenem Rang

Zum Vergleich wiederholen wir die Zählung für beliebige Abbildungen:

### ◆ Satz E2M: Anzahl der Abbildungen mit vorgegebenem Rang

Seien  $X, Y$  endliche Mengen mit  $\#X = k$  und  $\#Y = n$  Elementen sowie

$$\text{Abb}(X, Y)_r := \{ f : X \rightarrow Y \mid \# \text{im}(f) = r \}.$$

Für jeden Rang  $r \in \mathbb{N}$  haben wir:

$$\# \text{Abb}(X, Y)_r = \left\{ \begin{matrix} k \\ r \end{matrix} \right\} \cdot \binom{n}{r} \cdot r!$$

Im Spezialfall  $r = k$  erhalten wir  $\# \text{Inj}(X, Y) = \binom{n}{k} \cdot k!$ .

Im Spezialfall  $r = n$  erhalten wir  $\# \text{Sur}(X, Y) = \left\{ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\} \cdot n!$ .

Im Spezialfall  $r = k = n$  erhalten wir  $\# \text{Bij}(X, Y) = n!$ .

Beachten Sie die  $k$ - $n$ -Symmetrie in Satz K3A; sie geht in E2M verloren.

Im Modell  $V = \mathbb{F}_q^k$  und  $W = \mathbb{F}_q^n$  haben wir  $\text{Hom}_{\mathbb{F}_q}(V, W) \cong \mathbb{F}_q^{n \times k}$  (K1E).

Die Transposition gibt uns eine Bijektion  $\mathbb{F}_q^{n \times k} \cong \mathbb{F}_q^{k \times n}$ , und dabei bleibt der Rang  $r$  erhalten, denn es gilt Spaltenrang gleich Zeilenrang (K2J).