

## Kapitel I

# Lineare Räume und lineare Abbildungen

*In der Geschichte der Mathematik zeigt sich uns ein großer Reichtum in der Entstehung verschiedenartiger Strukturen, die sich entfalten, durchdringen und vereinen. Die besonders einfachen und grundlegenden Strukturen treten dabei oft erst zum Schluss hervor.*

Egbert Brieskorn (1936–2013)

Vollversion

[eiserm.de/lehre/LinA](http://eiserm.de/lehre/LinA)

05.03.2022

## Inhalt dieses Kapitels I

1002

### 1 Grundbegriffe

- Lineare Räume
- Lineare Abbildungen
- Lineare Räume über  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/p$  und  $\mathbb{Q}$
- Lineare Unterräume
- Bild und Kern einer linearen Abbildung
- Beispiele aus der Analysis
- Erzeugte Unterräume

### 2 Universelle Werkzeuge

- Quotientenraum und kanonische Faktorisierung
- Korrespondenzsatz und Isomorphiesatz
- Exakte Sequenzen, Anwendungsbeispiele
- Direkte Summen, extern und intern

In diesem Kapitel beginnen wir das Kerngeschäft der Linearen Algebra: lineare Räume (speziell Vektorräume) und ihre linearen Abbildungen.

Unser leuchtendes Vorbild ist dabei zunächst der Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  mit koordinatenweiser Addition und Skalierung (aka Skalarmultiplikation). Dieselbe Konstruktion gelingt ganz allgemein über jedem Ring  $R$ , wir erhalten so den linearen Raum  $R^I$  über  $R$ , siehe Beispiel I1A.

Aus diesen motivierenden Beispielen extrahieren wir die wesentlichen Rechenregeln und erheben diese anschließend zur Definition I1B. Zahlreiche relevante Beispiele und erste Eigenschaften belegen, dass wir damit einen nützlichen Begriff geschaffen haben.

Das Konzept der linearen Räume wird sich als sehr wirkungsvoll und praktisch erweisen, es ist eine gute Grundlage für alles Weitere.

Eine  $R$ -lineare Abbildung  $f: U \rightarrow V$  zwischen  $R$ -linearen Räumen  $U$  und  $V$  erhält ihre Struktur, das heißt,  $f$  ist additiv und  $R$ -homogen.

Wir gelangen so zum Konzept des Homomorphismus von  $R$ -linearen Räumen (I1F), analog zu Homomorphismen von Gruppen (G10). Auch hier belegen relevante Beispiele und erste Eigenschaften, dass wir damit einen nützlichen Begriff geschaffen haben.

Die Frage nach sinnvoller Verallgemeinerung ist meist nicht leicht und lässt sich wenn überhaupt immer nur rückblickend beantworten: Letztlich entscheiden darüber gute Erfahrungen im Aufbau der Theorie und zahlreicher Anwendungen, die Sie nach und nach sehen werden.

Hierzu legen wir in diesem Kapitel die Grundlagen und bauen Theorie und Anwendungen im weiteren Verlauf schrittweise immer weiter aus.

Im Vergleich mit der Literatur werden Sie feststellen, dass ich zunächst allgemein mit linearen Räumen über Ringen arbeite, wo andere Autoren lieber speziell mit Vektorräumen über Körpern beginnen. Beides hat gewisse Vor- und Nachteile, die Abwägung ist eine spannende Frage. Zu Ihrer wohlwollenden Einstimmung will ich mein Vorgehen erklären und stelle dazu meine mathematisch-didaktischen Überlegungen voran.

Zugegeben, am liebsten wäre mir Lineare Algebra allein über Körpern, und geometrisch interessieren mich dabei  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  ganz besonders.

Doch dieser Wunsch nach Einfachheit stößt sich schnell an der Realität: Eher früher als später benötigen wir Matrixringe und Polynomringe, etc.

Die zugehörigen linearen Räume sind „so gut wie“ Vektorräume, aber eben nicht mehr über einem Körper, sondern nur noch einem Ring.

Das liegt in der Natur der Sache, die Realität ist manchmal kompliziert, und die mathematische Beschreibung soll ihr gerecht werden.

Ich beginne daher mit dem großen, recht weit gesteckten Rahmen der linearen Räume über Ringen. Das ermöglicht uns ein wesentlich größeres Spektrum an illustrativen und relevanten Beispielen.

Allein das halte ich bereits für ein starkes Argument, denn ein gut verstandenes Beispiel ist mehr wert als drei schlecht verstandene Sätze. Zudem sind die grundlegenden Begriffe und Techniken dieselben, daher verspüren wir anfangs kaum Drang und Zwang zu Körpern.

Wo wir Kommutativität und Invertierbarkeit wirklich benötigen, da macht der allgemeine Rahmen dies klar und verständlich.

Zugegeben, wir müssen besonders sorgfältig arbeiten und genau hinsehen, aber das ist ja nicht schlecht, sondern eher zu begrüßen.

Auch den besonders schönen kommutativen Fall versteht man besser im nicht-kommutativen Kontext. So wissen Sie seine Annehmlichkeiten erst zu schätzen. *You don't know what you have until it's gone.*

Es wäre möglich, zunächst im kleinen Rahmen anzufangen, und dann schrittweise die Begriffe zu erweitern, je nach dem wachsenden Bedarf. Das ist in gewisser Weise die historische Entwicklung; dieses Vorbild kann ein guter Ratgeber zur Didaktik sein, muss es aber nicht.

Unsere Zeit ist kostbar, daher müssen wir aus der historischen Entwicklung eine effiziente logische Entwicklung destillieren.

Sollte man dennoch klein anfangen, mit Körpern und Vektorräumen, oder gar, wie manche denken, allein mit  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}^n$  sowie  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{C}^n$ ?

Ein Vorteil ist, dass Körper und Vektorräume näher am geometrischen Modell der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  und des euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^n$  sind.

Dieses hilfreiche Modell schult die geometrische Anschauung und verhilft uns zu einer Intuition, doch diese kann leider auch trügen.

Über allgemeinen Körpern oder gar Ringen sind voreilige Annahmen und falsche Vorstellungen eher hinderlich als hilfreich, sie müssen erst verlernt werden bevor sie dann erst richtig gelernt werden können.

Das Problem bei der schrittweisen Erweiterung der Begriffe ist nicht so sehr die Redundanz, die mag sogar helfen, sondern das Umstürzen liebgegener Gewissheiten, die plötzlich nicht mehr gelten, und die nötige Zeit des Umdenkens und neu Lernens.

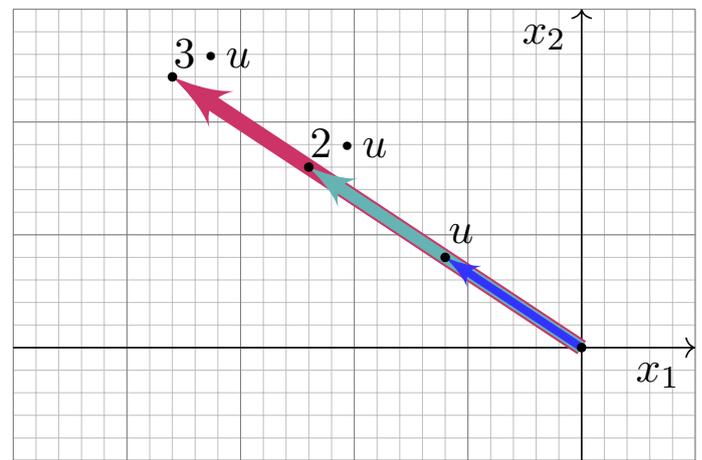
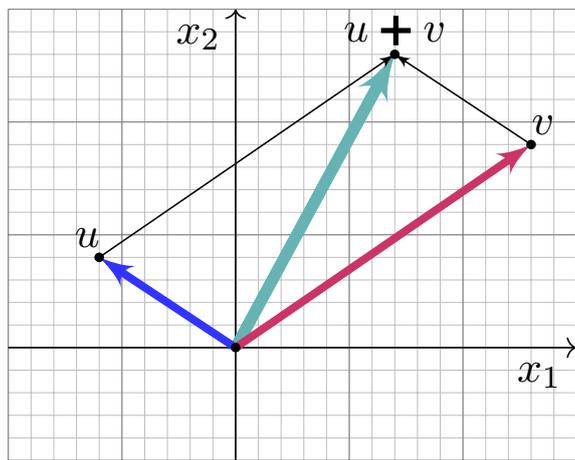
Letztendlich sind beide Wege durchaus möglich und auch erfolgreich. Die Wahl ist eine Entscheidung zwischen kurzfristiger Erleichterung und langfristigem Nutzen. Es ist wie bei der vollständigen Induktion:

*Ihre Investition von heute ist Ihr Ertrag von morgen!*

Ich halte es daher für besser, Sie von Anfang an auf die nötige Vielfalt sanft vorzubereiten. Umso mehr schätzen wir die heile Welt der Körper.

*If people do not believe that mathematics is simple,  
it is only because they do not realize how complicated life is.*

John von Neumann (1903–1957)



Auf der Menge  $\mathbb{R}^n = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$  nutzen wir die koordinatenweise Addition und Skalierung / Skalarmultiplikation:

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : \lambda \cdot (u_1, \dots, u_n) = (\lambda \cdot u_1, \dots, \lambda \cdot u_n)$$

Damit ist  $(\mathbb{R}^n, +)$  eine abelsche Gruppe und  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  ein Vektorraum über dem Körper  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ . Die Skalierung schreiben wir auch rechts:

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : (u_1, \dots, u_n) \cdot \lambda = (u_1 \cdot \lambda, \dots, u_n \cdot \lambda)$$

Jedes  $n$ -Tupel  $x = (x_1, \dots, x_n)$  können wir auf zwei Arten betrachten:

- 1 Als einen Punkt im Raum  $\mathbb{R}^n$ , so wie oben als Kreis markiert.
- 2 Als Verschiebung des Raumes  $\mathbb{R}^n$ , oben als Pfeil dargestellt.

In der zweiten Sichtweise sind Addition und (ganzzahlige) Skalierung anschaulich die Hintereinanderausführung von Verschiebungen.

**Physikalische Interpretation:** Vektoren  $x \in \mathbb{R}^n$  mit der oben erklärten Addition und Skalierung treten in Anwendungen auf als Verschiebungen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte, Felder, etc. Daher ist die Vektorrechnung grundlegend in Natur- und Ingenieurwissenschaften.

Wir nennen jedes Element  $a \in \mathbb{R}$  des Grundkörpers  $\mathbb{R}$  einen **Skalar** und jedes Element  $x \in \mathbb{R}^n$  einen **Vektor**. Die Verknüpfung  $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt daher auch **Vektoraddition**. Die Operation  $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bzw.  $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **Skalierung** oder **Skalarmultiplikation**.

⚠ Der Begriff **Skalarprodukt** bezeichnet später etwas ganz anderes, nämlich eine Abbildung  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit *Werten* in den Skalaren.

**Notation:** Zur Betonung oder als Gedächtnisstütze schreiben manche statt  $v$  gerne ein Vektorpfeilchen  $\vec{v}$  oder Unterstrich  $\underline{v}$  oder Fettdruck  $\boldsymbol{v}$ . Redundanz schadet selten, oft bietet sie eine willkommene Hilfestellung. Zudem setzt die Notation  $\vec{v}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\boldsymbol{v}$  o.ä. das einfache Symbol  $v$  wieder frei, das wird etwa in physikalischen Anwendungen gerne genutzt.

Schreiben und Sprechen beeinflussen unser Denken und Verstehen. Eine gute Notation vermeidet Missverständnisse und Fehlanwendung. Klarheit ist ein zentrales mathematisches Anliegen, darüber hinaus ist es meist eine Frage der Bequemlichkeit, des individuellen Geschmacks und der jeweils vorherrschenden Tradition, also eine soziale Konvention.

Für die Praxis empfiehlt sich, überflüssige Schnörkel wegzulassen und nur das Wesentliche so klar und präzise zu notieren, dass Lese- und Rechenfehler möglichst vermieden werden. Alle obigen Schreibweisen haben sich hierzu bewährt. Die wahre Kraft mathematischer Begriffe liegt nicht in ihrer *Schreibung*, sondern in ihrer *Bedeutung*!

Wir wollen im Folgenden klären, wie man mit Vektoren effizient rechnet. Das gehört für viele Anwendungen zu den grundlegenden Werkzeugen. Oft wird dabei jedoch nicht nur der Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen genutzt, sondern etwa der Körper  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{Q}$  oder  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p$ , wie bereits gesehen.

Sehr häufig bilden die Skalare keinen Körper, sondern nur einen Ring, etwa die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  oder Polynome  $K[X]$  über einem Körper  $K$ . Die grundlegenden Rechenregeln sind auch hier zunächst dieselben! Es lohnt sich daher, zunächst die allgemeinen Grundlagen zu klären.

In den folgenden Kapiteln werden wir die Techniken weiter ausbauen: Über Divisionsringen haben wir den Gauß-Algorithmus B2c, den Sie bereits aus Kapitel B kennen. Über kommutativen Ringen verfügen wir über die Determinante, siehe Kapitel L. Über Körpern haben wir alles!

Wir werden unseren Werkzeugkasten nun schrittweise aufbauen.

Beispiel I1A: Addition und Skalierung auf  $R^I$ 

Sei  $(R, +, 0, \cdot, 1)$  ein Ring, etwa  $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \dots$ , und  $I$  eine Menge. Auf der Menge  $R^I = \text{Abb}(I, R) = \{u: I \rightarrow R: i \mapsto u_i\}$  der  $I$ -Tupel in  $R$  nutzen wir die koordinatenweise Addition und Skalarmultiplikation:

$$\begin{aligned} + : R^I \times R^I &\rightarrow R^I : (u, v) \mapsto u + v, & (u + v)_i &:= u_i + v_i, \\ \cdot : R \times R^I &\rightarrow R^I : (a, u) \mapsto a \cdot u, & (a \cdot u)_i &:= a \cdot u_i. \end{aligned}$$

So ist  $(R^I, +)$  eine abelsche Gruppe und  $\cdot$  eine distributive Operation:

$$\begin{aligned} a \cdot (u + v) &= (a \cdot u) + (a \cdot v), & 1 \cdot u &= u, \\ (a + b) \cdot u &= (a \cdot u) + (b \cdot u), & (a \cdot b) \cdot u &= a \cdot (b \cdot u). \end{aligned}$$

**Beispiele:** Für den Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen und  $I = \{1, \dots, n\}$  erhalten wir den Vektorraum  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  über  $\mathbb{R}$  wie zuvor erklärt; für  $I = \mathbb{N}$  den Vektorraum  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$  aller Folgen  $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}: n \mapsto u_n$ ; für  $I = \mathbb{R}$  den Vektorraum  $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$  aller reellen Funktionen  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Beispiel I1A: Addition und Skalierung auf  $R^I$ 

Die Skalarmultiplikation schreiben wir links oder alternativ auch rechts:

$$\begin{aligned} + : R^I \times R^I &\rightarrow R^I : (u, v) \mapsto u + v, & (u + v)_i &:= u_i + v_i, \\ \cdot : R^I \times R &\rightarrow R^I : (u, a) \mapsto u \cdot a, & (u \cdot a)_i &:= u_i \cdot a. \end{aligned}$$

Auch dies ist eine distributive Operation des Rings  $R$  auf  $(R^I, +)$ :

$$\begin{aligned} (u + v) \cdot a &= (u \cdot a) + (v \cdot a), & u \cdot 1 &= u, \\ u \cdot (a + b) &= (u \cdot a) + (u \cdot b), & u \cdot (b \cdot a) &= (u \cdot b) \cdot a. \end{aligned}$$

Beide Schreibweisen sind nützlich und üblich, je nach Situation. Ist der Ring  $R$  kommutativ, so sind beide Operationen gleich.

**Beispiele:** Diese Konstruktion gelingt über jedem Ring  $R$ : So erhalten wir den Vektorraum  $\mathbb{R}^I$  über dem Körper  $\mathbb{R}$  und ebenso den Vektorraum  $\mathbb{Q}^I$  über dem Körper  $\mathbb{Q}$  sowie den linearen Raum  $\mathbb{Z}^I$  über dem Ring  $\mathbb{Z}$ .

Wir nennen  $(R^I, \boldsymbol{+}, \cdot)$  einen linearen Raum über dem Ring  $(R, +, \cdot)$ . Zur Betonung habe ich hier die Addition  $\boldsymbol{+}$  und die Skalierung  $\cdot$  auf der Menge  $V = R^I$  fett hervorgehoben. So unterscheiden wir sie graphisch von der zugrundeliegenden Addition  $+$  und Multiplikation  $\cdot$  der Skalare im Koeffizientenring  $(R, +, \cdot)$ . Das ist insbesondere für die ersten Rechnungen didaktisch sinnvoll, wie hier ausgeführt.

Diese pedantische Unterscheidung ist mathematisch gerechtfertigt: Streng genommen sind  $\boldsymbol{+}$  und  $+$  bzw.  $\cdot$  und  $\cdot$  verschiedene Operationen, daher verdienen sie zur Klarheit auch verschiedene Bezeichnungen.

Auf Dauer wird diese Schreibweise jedoch lästig. Aus dem Kontext ist ohnehin jeweils klar, was gemeint ist, daher schreiben wir später beide Additionen kurz  $+$  und beide Multiplikationen kurz  $\cdot$ . Das ist bequemer, daher ist diese *überladene Notation* allgemein beliebt und üblich.

Für die grundlegenden Rechnungen dieses Abschnitts betone ich weiterhin den Unterschied. Ich hoffe, diese Genauigkeit hilft Ihnen. Anschließend wird Ihnen die Unterscheidung dann leicht fallen.

Hier wirken zwei algebraische Strukturen wunderbar zusammen: einerseits die abelsche Gruppe  $(V, \boldsymbol{+})$  auf der Menge  $V = R^I$  mit der punktweise Addition  $\boldsymbol{+} : V \times V \rightarrow V$ , und andererseits die distributive Operation des Rings  $(R, +, \cdot)$  von links / rechts auf dieser Gruppe  $(V, \boldsymbol{+})$ .

Gruppen haben wir zuvor schon ausführlich diskutiert, das hilft uns jetzt, denn all diese Begriffe und Techniken fließen hier nun unmittelbar ein. Neu ist die Operation der Skalare  $a \in R$  auf den Vektoren  $u \in R^I$  durch Skalarmultiplikation  $(a, u) \mapsto a \cdot u$  bzw.  $(u, a) \mapsto u \cdot a$ .

Das ist eine zusätzliche Struktur und unterscheidet die abelsche Gruppe  $(V, \boldsymbol{+})$  vom linearen Raum  $(V, \boldsymbol{+}, \cdot)$ . Dies bietet wertvolle Möglichkeiten, wie wir im Folgenden immer wieder sehen werden:

Gute Eigenschaften des Rings  $R$  übertragen sich weitgehend auf den linearen Raum  $V$ , wir können daher unsere Rechentechniken für  $R$  auch für  $V$  nutzen! Dies gilt insbesondere für jeden Körper  $R$ .

Wir kehren die Sichtweise um und erheben diese Daten mit ihren grundlegenden Eigenschaften zur Definition:

## Definition I1B: linearer Raum über einem Ring

Ein **linkslineraler Raum**  $(V, \oplus, \cdot)$  über dem Ring  $(R, +, \cdot)$  besteht aus einer abelschen Gruppe  $(V, \oplus)$  und einer Skalierung  $\cdot: R \times V \rightarrow V$  von links, sodass für alle  $a, b \in R$  und  $u, v \in V$  gilt:

$$\begin{aligned} a \cdot (u \oplus v) &= (a \cdot u) \oplus (a \cdot v), & 1 \cdot v &= v, \\ (a + b) \cdot v &= (a \cdot v) \oplus (b \cdot v), & (a \cdot b) \cdot v &= a \cdot (b \cdot v). \end{aligned}$$

Ein **rechtslinearer Raum**  $(V, \oplus, \cdot)$  über dem Ring  $(R, +, \cdot)$  besteht aus einer abelschen Gruppe  $(V, \oplus)$  und einer Skalierung  $\cdot: V \times R \rightarrow V$  mit

$$\begin{aligned} (u \oplus v) \cdot a &= (u \cdot a) \oplus (v \cdot a), & v \cdot 1 &= v, \\ v \cdot (a + b) &= (v \cdot a) \oplus (v \cdot b), & v \cdot (b \cdot a) &= (v \cdot b) \cdot a. \end{aligned}$$

Eine solche Skalarmultiplikation  $\cdot$  ist eine **distributive Operation** des Rings  $(R, +, \cdot)$  von links bzw. rechts auf der Gruppe  $(V, \oplus)$ .

Wir nennen  $(V, \oplus, \cdot)$  einen **Vektorraum** über  $R$ , falls  $R$  ein Divisionsring ist, also ein Körper wie  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  oder ein Schiefkörper wie  $\mathbb{H}$ .

Die Skalierung schreiben wir je nach Anwendung links oder rechts, das ergibt sich oft zwangsläufig aus der vorliegenden Situation.

Beides nennen wir kurz einen  $R$ -linearen Raum; ob die Skalierung rechts oder links geschrieben wird, ergibt sich dann aus dem Kontext.

**Pars pro toto:** Oft sagt man „der Ring  $R$ “, meint aber  $\underline{R} = (R, +, \cdot)$ , oder entsprechend „der  $R$ -lineare Raum  $V$ “, meint aber  $\underline{V} = (V, \oplus, \cdot)$ .

Ist  $(V, \oplus, \cdot)$  ein linearer Raum über dem Ring  $(R, +, \cdot)$ , so schreiben wir kurz  $(V, \oplus, \cdot) \in {}_R \mathbf{Lin}$  für linkslineral und  $(V, \oplus, \cdot) \in \mathbf{Lin}_R$  für rechtslinear. Ist  $R$  kommutativ, so ist beides gleich und wir schreiben meist  $\mathbf{Lin}_R$ .

Die traditionell üblichen Bezeichnungen hierzu sind die folgenden:

Statt linearer Raum nennt man  $V$  auch einen **Modul** über dem Ring  $R$ , kurz  $R$ -Modul, geschrieben links  $V \in {}_R \mathbf{Mod}$  oder rechts  $V \in \mathbf{Mod}_R$ .

Ist der Skalarring  $R$  ein Körper wie  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p, \dots$  oder ein Schiefkörper wie  $\mathbb{H}$ , so nennen wir  $V$  einen **Vektorraum** über  $R$ , kurz  $R$ -Vektorraum, geschrieben links  $V \in {}_R \mathbf{Vec}$  oder rechts  $V \in \mathbf{Vec}_R$ .

Sei weiterhin  $(R, +, \cdot)$  ein Ring, etwa  $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \dots$

**Beispiel:** Die triviale Gruppe  $(\{0\}, +)$  ist ein linearer Raum über  $R$ . Die einzig mögliche Skalierung ist hier  $\cdot : R \times \{0\} \rightarrow \{0\} : a \cdot 0 = 0$ . Wir nennen  $(\{0\}, +, \cdot)$  den **Nullraum**, geschrieben  $\{0\}$  oder kurz  $0$ .

**Beispiel:** Die abelsche Gruppe  $(R^I, +)$  wird zu einem linearen Raum über dem Ring  $(R, +, \cdot)$  durch die Skalierung  $\cdot$  wie oben erklärt (I1A). Insbesondere erhalten wir so den  $R$ -linearen Raum  $R^n$  und  $R^1 = R$ .

**Beispiel:** Ist  $S \leq R$  ein Teilring, so ist  $(R, +, \cdot)$  ein linearer Raum über  $S$  dank  $\cdot : S \times R \rightarrow R : (a, v) \mapsto a \cdot v$  bzw.  $\cdot : R \times S \rightarrow R : (v, a) \mapsto v \cdot a$ . So sind die Polynome  $\mathbb{R}[X]$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R} \leq \mathbb{R}[X]$ .

**Beispiel:** Die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  sind ein Vektorraum über  $\mathbb{R} \leq \mathbb{C}$ . Ebenso sind die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  ein Vektorraum über  $\mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$  und die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  ein linearer Raum über  $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$ .

**Beispiel:** Auf der abelschen Gruppe  $(\mathbb{C}^I, +)$  haben wir die Skalierung

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^I \rightarrow \mathbb{C}^I : (a \cdot v)_i = a \cdot v_i.$$

Damit ist  $(\mathbb{C}^I, +, \cdot)$  ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$ , wie oben gesehen.

Ebenso können wir mit der komplex-konjugierten Zahl multiplizieren:

$$\odot : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^I \rightarrow \mathbb{C}^I : (a \odot v)_i = \bar{a} \cdot v_i.$$

Damit ist  $(\mathbb{C}^I, +, \odot)$  ebenfalls ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$ , denn es gilt

$$\begin{aligned} a \odot (u + v) &= (a \odot u) + (a \odot v), & 1 \odot v &= v, \\ (a + b) \odot v &= (a \odot v) + (b \odot v), & (a \cdot b) \odot v &= a \odot (b \odot v). \end{aligned}$$

**⚠** Die jeweils betrachtete Skalarmultiplikation  $R \times V \rightarrow V$  ist eine zusätzliche Struktur, sie folgt i.A. nicht allein aus der Gruppe  $(V, +)$ . Zur Präzisierung müssen wir explizit angeben, was genau gemeint ist. Lineare Räume  $(V, +, \cdot)$  sind daher Tripel, nicht bloß Paare  $(V, +)$ .

**Beispiel:** Sei  $(R, +, \cdot)$  ein Ring und  $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  natürliche Zahlen. Die Menge der  $p \times q$ -Matrizen bildet die abelsche Gruppe  $(R^{p \times q}, +)$ . Sie wird ein linkslinearer bzw. rechtslinearer Raum über  $R$  vermöge

- $: R \times R^{p \times q} \rightarrow R^{p \times q} : (\lambda, A) \mapsto B = \lambda \cdot A, \quad b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij},$
- $: R^{p \times q} \times R \rightarrow R^{p \times q} : (A, \lambda) \mapsto C = A \cdot \lambda, \quad c_{ij} = a_{ij} \cdot \lambda.$

Sie wird ein linkslinearer Raum über dem Ring  $(R^{p \times p}, +, \cdot)$  vermöge

- $: R^{p \times p} \times R^{p \times q} \rightarrow R^{p \times q} : (S, A) \mapsto B = S \cdot A, \quad b_{ik} = \sum_{j=1}^p s_{ij} \cdot a_{jk}.$

Sie wird ein rechtslinearer Raum über dem Ring  $(R^{q \times q}, +, \cdot)$  vermöge

- $: R^{p \times q} \times R^{q \times q} \rightarrow R^{p \times q} : (A, T) \mapsto C = A \cdot T, \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^q a_{ij} \cdot t_{jk}.$

Speziell  $q = 1$ : Spaltenvektoren bilden die abelsche Gruppe  $(R^{p \times 1}, +)$ . Sie ist ein linkslinearer Raum über  $R^{p \times p}$ , rechtslinear über  $R^{1 \times 1} = R$ .

Speziell  $p = 1$ : Zeilenvektoren bilden die abelsche Gruppe  $(R^{1 \times q}, +)$ . Sie ist ein linkslinearer Raum über  $R^{1 \times 1} = R$ , rechtslinear über  $R^{q \times q}$ .

😊 Dieses Beispiel von Matrizen und Vektoren zeigt sehr eindrücklich, warum wir links und rechts im Allgemeinen sorgsam unterscheiden.

Jede Linksoperation des Rings  $(R, +, \cdot)$  ist eine Rechtsoperation des entgegengesetzten Rings  $(R, +, \cdot^{\text{op}})$  und ebenso umgekehrt.

Ist der Ring  $(R, +, \cdot)$  kommutativ, also  $a \cdot b = b \cdot a$  für alle  $a, b \in R$ , so ist die Skalierung links oder rechts nur eine Frage der Vorliebe.

Beide Notation sind üblich und bequem, daher bereite ich sie hier vor, damit Sie anschließend problemlos darauf zurückgreifen können.

Oft wird nur eine Seite erklärt, typischerweise links, und das ist aus logischer Sicht auch vollkommen ausreichend. In der Praxis werden dann aber doch beide Seiten verwendet, und jede/r muss sich dann seinen Teil denken. Dieses Vorgehen ist möglich, aber nicht ideal.

**Beispiel:** Der Schiefkörper  $\mathbb{H} = \mathbb{R}[i, j, k]$  der Quaternionen ist ein Vektorraum über dem Teilkörper  $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i] \leq \mathbb{H}$  der komplexen Zahlen. Obwohl  $\mathbb{C}$  kommutativ ist, müssen wir dennoch die Skalierungen von links und rechts sorgsam unterscheiden, denn  $i \cdot j = -j \cdot i$ .

Muss es wirklich so allgemein sein? Dazu gibt es sehr verschiedene Ansichten. Am liebsten wäre mir Lineare Algebra allein über Körpern.

Doch dieser Wunsch nach Einfachheit stößt sich schnell an der Realität: Eher früher als später benötigen wir Matrixringe und Polynomringe, etc. Die zugehörigen linearen Räume sind „so gut wie“ Vektorräume, aber eben nicht mehr über einem Körper, sondern nur noch einem Ring. Das liegt in der Natur der Sache, die Realität ist manchmal kompliziert, und die mathematische Beschreibung soll ihr gerecht werden.

Es wäre möglich, zunächst im kleinen Rahmen anzufangen, und dann schrittweise die Begriffe zu erweitern, je nach dem wachsenden Bedarf. Das Problem dabei ist nicht die Redundanz, die mag sogar helfen, sondern dass liebgewonnene Gewissheiten plötzlich nicht mehr gelten. Ich halte es daher für besser, Sie von Anfang an auf die nötige Vielfalt sanft vorzubereiten. Umso mehr schätzen wir die heile Welt der Körper.

Müssen wir wirklich links und rechts unterscheiden? Über kommutativen Ringen ist dies nur ein rein formaler Unterschied in der Schreibweise: Jede Linksskalierung kann ebenso gut rechts geschrieben werden, und umgekehrt; die geforderten Axiome bleiben dabei erhalten.

Über nicht-kommutativen Ringen, zum Beispiel Matrixringen wie oben, ist die Unterscheidung jedoch wesentlich. . . und nicht weiter schwer.

Eine gewisse Selbstdisziplin bei der Notation ist erfahrungsgemäß hilfreich, begründete Vereinfachungen sind umso mehr willkommen.

Es scheint mir daher auch hier ehrlich, zunächst sorgsam vorzugehen und nicht voreilig „links gleich rechts“ auszurufen.

*„Na prima“, sagt der Mensch, „das war ja einfach“,  
und beweist, weil's gerade so schön ist, dass schwarz gleich weiß ist,  
und kommt wenig später auf einem Zebrastreifen unter die Räder.*

Douglas Adams (1952–2001), *Per Anhalter durch die Galaxis*

## Lemma I1c: Null und Negation

Sei  $(V, +, \cdot)$  ein linearer Raum über dem Ring  $(R, +, 0, \cdot, 1)$ , also eine abelsche Gruppe  $(V, +, 0, -)$  mit distributiver Operation  $\cdot: R \times V \rightarrow V$  von links bzw.  $\cdot: V \times R \rightarrow V$  von rechts. Für alle  $a \in R$  und  $v \in V$  gilt:

- 1  $a \cdot 0 = 0$                       bzw.     $0 \cdot a = 0$
- 2  $0 \cdot v = 0$                         bzw.     $v \cdot 0 = 0$
- 3  $(-1) \cdot v = -v$                 bzw.     $v \cdot (-1) = -v$

**Beweis:** (1) Es gilt  $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = (a \cdot 0) + (a \cdot 0)$ .

Addition von  $-(a \cdot 0)$  ergibt  $0 = a \cdot 0$ , wie behauptet.

(2) Es gilt  $0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = (0 \cdot v) + (0 \cdot v)$ .

Addition von  $-(0 \cdot v)$  ergibt  $0 = 0 \cdot v$ .

(3) Es folgt  $v + ((-1) \cdot v) = (1 \cdot v) + ((-1) \cdot v) = (1 - 1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$ .

In der Gruppe  $(V, +, 0)$  ist somit  $(-1) \cdot v = -v$  das Inverse zu  $v$ . □ QED

**Konvention:** Wir sparen Klammern und schreiben  $u + (a \cdot v) = u + a \cdot v$  (Punkt vor Strich). Für die Multiplikation schreiben wir statt  $a \cdot v$  kurz  $av$ .

## Kürzungsregeln für Vektorräume

## Lemma I1d: Kürzungsregel

Sei  $(V, +, \cdot)$  ein linearer Raum über dem Divisionsring  $(R, +, \cdot)$ , etwa von links vermöge  $\cdot: R \times V \rightarrow V$ . Für alle  $a, b \in R$  und  $u, v \in V$  gilt:

1 Torsionsfreiheit:

$$a \neq 0 \wedge v \neq 0 \Rightarrow a \cdot v \neq 0$$

$$a \cdot v = 0 \Rightarrow a = 0 \vee v = 0$$

2 Kürzungsregel:

$$a \cdot u = a \cdot v \wedge a \neq 0 \Rightarrow u = v$$

$$a \cdot v = b \cdot v \wedge v \neq 0 \Rightarrow a = b$$

**Beweis:** (1) Gilt  $a \cdot v = 0$  und  $a \neq 0$ , so können wir mit  $a^{-1}$  multiplizieren:

$$0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1} \cdot (a \cdot v) = (a^{-1} \cdot a) \cdot v = 1 \cdot v = v$$

(2a) Aus  $a \cdot u = a \cdot v$  folgt  $0 = (a \cdot u) - (a \cdot v) = a \cdot (u - v)$ .

Dank (1) und  $a \neq 0$  folgt  $u - v = 0$ , somit  $u = v$ .

(2b) Aus  $a \cdot v = b \cdot v$  folgt  $0 = (a \cdot v) - (b \cdot v) = (a - b) \cdot v$ .

Dank (1) und  $v \neq 0$  folgt  $a - b = 0$ , somit  $a = b$ . □ QED

😊 Wir sehen in der Rechnung noch einmal sehr schön, wie die Axiome des linearen Raumes  $(V, +, \cdot)$  hier wunderbar zusammenarbeiten!

😊 Das Lemma gilt wörtlich genauso bei distributiver Operation  $\cdot : V \times R \rightarrow V$  des Rings  $R$  von rechts auf der abelschen Gruppe  $(V, +)$ .

Aussage (1) ist eine Besonderheit über Divisionsringen, für beliebige Ringe gilt dies nicht. Zur Illustration betrachten wir die Spaltenvektoren  $(R^{n \times 1}, +, \cdot)$  als linkslinearen Raum über dem Matrixring  $(R^{n \times n}, +, \cdot)$ :

**Beispiel:** Für  $2 \times 2$ -Matrizen über den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  gilt:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hier lässt sich die Linkskürzungsregel nicht anwenden! Ebenso gilt:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Auch die Rechtskürzungsregel lässt sich demnach hier nicht anwenden!

**Beispiel:** Die abelsche Gruppe  $(\mathbb{Z}/n, +)$  wird zu einem  $\mathbb{Z}$ -linearen Raum vermöge der (einzig möglichen) Skalarmultiplikation

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n : a \cdot [b] = [a \cdot b].$$

Für  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  finden wir Torsion: Für  $n \neq 0$  und  $[b] \neq [0]$  gilt

$$n \cdot [b] = [n \cdot b] = [0].$$

Noch etwas konkreter betrachten wir  $\mathbb{Z}/6$  und

$$3 \cdot [2] = [0].$$

Ebenso ist  $(\mathbb{Z}/n, +)$  ein  $\mathbb{Z}/n$ -linearer Raum. Hier entspricht Torsion den Nullteilern des Rings  $\mathbb{Z}/n$ . Zu Illustration betrachten wir wieder  $\mathbb{Z}/6$  und

$$[3] \cdot [2] = [0].$$

Diese Schwierigkeiten können über einem Divisionsring  $R$  nicht auftreten, das ist genau die Aussage des obigen Lemmas.

😊 In Definition I1B des linearen Raumes  $(V, +, \cdot)$  sind manche der acht Axiome redundant und folgen automatisch aus den anderen Axiomen: Insbesondere müssen additive Inverse und Kommutativität nicht explizit gefordert werden, wir können sie aus den anderen Axiomen folgern. Wenn Sie also spitzfindig sein wollen, oder besonders effizient und ökonomisch arbeiten, dann können Sie noch etwas Arbeit sparen.

Sollten wir die Axiome auf ein logisches Minimum reduzieren? Hier gehen die Ansichten und Vorlieben etwas auseinander. . .

Ich formuliere Definition I1B nach ästhetisch-didaktischem Empfinden, so lässt sie sich besser aussprechen und auch leichter einprägen.

Die minimalistische Strenge formuliere ich lieber aus Übung:

**Aufgabe:** Sei  $(V, +)$  eine Halbgruppe und  $(R, +, 0, \cdot, 1)$  ein Ring mit einer distributiven Operation  $\cdot : R \times V \rightarrow V$ , sodass  $0 \cdot V = \{0\}$  gilt.

Dann ist  $(V, +)$  eine abelsche Gruppe und  $(V, +, \cdot)$  ein  $R$ -linearer Raum. Dasselbe gilt bei distributiver Operation  $\cdot : V \times R \rightarrow V$  von rechts.

**Lösung:** (0) Das Element  $0$  ist beidseitig neutral zu  $u \in V$ :

$$u + 0 = (1 \cdot u) + (0 \cdot u) = (1 + 0) \cdot u = 1 \cdot u = u.$$

$$0 + u = (0 \cdot u) + (1 \cdot u) = (0 + 1) \cdot u = 1 \cdot u = u.$$

(1) Das Element  $-u = (-1) \cdot u$  ist beidseitig invers zu  $u$ :

$$u + (-u) = 1 \cdot u + (-1) \cdot u = (1 + (-1)) \cdot u = 0 \cdot u = 0.$$

$$(-u) + u = (-1) \cdot u + 1 \cdot u = ((-1) + 1) \cdot u = 0 \cdot u = 0.$$

(2) Zur Kommutativität entwickeln wir  $(1 + 1) \cdot (u + v)$  auf zwei Arten:

$$(1 + 1) \cdot (u + v) \stackrel{\text{DR}}{=} 1 \cdot (u + v) + 1 \cdot (u + v) \stackrel{\text{Ntr}}{=} u + v + u + v$$

$$(1 + 1) \cdot (u + v) \stackrel{\text{DL}}{=} (1 + 1) \cdot u + (1 + 1) \cdot v$$

$$\stackrel{\text{DR}}{=} 1 \cdot u + 1 \cdot u + 1 \cdot v + 1 \cdot v \stackrel{\text{Ntr}}{=} u + u + v + v$$

Wir addieren  $-u$  von links,  $-v$  von rechts und erhalten  $u + v = v + u$ .

**Satz I1E: abelsche Gruppe mit Ringoperation**

(0) Sei  $(V, +)$  eine abelsche Gruppe. Die Menge  $E = \text{End}(V, +)$  bildet einen Ring  $(E, \boldsymbol{+}, \circ)$  mit punktweiser Addition  $\boldsymbol{+}$  und Komposition  $\circ$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{+} : E \times E &\rightarrow E : (f \boldsymbol{+} g)(x) = f(x) + g(x), \\ \circ : E \times E &\rightarrow E : (f \circ g)(x) = f(g(x)). \end{aligned}$$

Sei  $(R, +, \cdot)$  ein Ring und  $\varphi: R \rightarrow E$  eine Abbildung. Äquivalent sind:

(1) Die Abbildung  $\varphi: (R, +, \cdot) \rightarrow (E, \boldsymbol{+}, \circ)$  ist ein Ringhomomorphismus.

(2) Die Verknüpfung  $\cdot: R \times V \rightarrow V: (a, v) \mapsto a \cdot v = \varphi(a)(v)$  ist eine distributive Operation. Das heißt, für alle  $a, b \in R$  und  $u, v \in V$  gilt

$$\begin{aligned} a \cdot (u + v) &= (a \cdot u) + (a \cdot v), & 1 \cdot v &= v, \\ (a + b) \cdot v &= (a \cdot v) + (b \cdot v), & (a \cdot b) \cdot v &= a \cdot (b \cdot v). \end{aligned}$$

Ebenso entspricht jeder Ringhomomorphismus  $\varphi: (R, +, \cdot) \rightarrow (E, \boldsymbol{+}, \bullet)$  einer Operation des Rings  $(R, +, \cdot)$  von rechts auf der Gruppe  $(V, +)$ .

**Übung:** Führen Sie Aussage (0) und die Äquivalenz  $(1) \Leftrightarrow (2)$  aus. Sie müssen hierzu nichts Neues erfinden, sondern nur gewissenhaft die Definitionen anwenden, also einsetzen und ausrechnen!

Dieser Satz erklärt noch einmal auf eine weitere, unabhängige Weise, warum unsere Axiome I1B eines linearen Raumes „natürlich“ sind, also eine / die „richtige“ Verallgemeinerung unserer vorigen Beispiele:

😊 *Jede distributive Operation  $\cdot: R \times V \rightarrow V$  auf  $(V, +)$  entspricht einem Ringhomomorphismus  $\varphi: R \rightarrow \text{End}(V, +)$ , und umgekehrt.*

Inzwischen sind uns Ringe und ihre Homomorphismen recht vertraut, und wir halten die vereinbarten Axiome für eine sinnvolle Grundlage. Diese Zuversicht übertragen wir nun von Ringen auf lineare Räume.

Die Frage nach sinnvoller Verallgemeinerung ist meist nicht leicht und lässt sich wenn überhaupt immer nur rückblickend beantworten: Letztlich entscheiden darüber gute Erfahrungen im Aufbau der Theorie und zahlreicher Anwendungen, die Sie nach und nach sehen werden.

Definition 11F:  $R$ -lineare Abbildung

Seien  $(U, +, \cdot)$  und  $(V, +, \cdot)$  lineare Räume über dem Ring  $(R, +, \cdot)$ .

(1) Ein **Gruppenhomomorphismus**  $f : (U, +) \rightarrow (V, +)$  ist

$$\text{additiv: } f(u + v) = f(u) + f(v) \quad \text{für alle } u, v \in U.$$

Hierfür schreiben wir kurz  $f \in \text{Hom}(U, V) := \text{Hom}(U, +; V, +)$ .

(2) Eine  **$R$ -lineare Abbildung**  $f : (U, +, \cdot) \rightarrow (V, +, \cdot)$  ist additiv und

$$\text{R-homogen: } f(a \cdot v) = a \cdot f(v) \quad \text{bzw.} \quad f(v \cdot a) = f(v) \cdot a$$

für alle  $a \in R$  und  $v \in U$ . Wir nennen dann  $f$  einen **Homomorphismus von  $R$ -linearen Räumen** oder kurz einen  **$R$ -Homomorphismus**, geschrieben  $f \in \text{Hom}_R(U, V) := \text{Hom}_{(R, +, \cdot)}(U, +, \cdot; V, +, \cdot)$ .

**Bemerkung:** Zusammengefasst sind (1) und (2) äquivalent zu

(3)  $f(u + a \cdot v) = f(u) + a \cdot f(v)$  bzw.  $f(u + v \cdot a) = f(u) + f(v) \cdot a$ .

**Beweis:** Für „(3)  $\Rightarrow$  (1)“ wähle  $a = 1$ . Für „(3)  $\Rightarrow$  (2)“ wähle  $u = 0$ .

Bitte beachten Sie, dass jedes der beiden Symbole  $+$  und  $\cdot$  hier in drei verschiedenen Bedeutungen auftritt: Für den Skalarring  $R$  als Addition und Multiplikation, zudem auf der Menge  $U$  als Addition  $+: U \times U \rightarrow U$  und Skalarmultiplikation  $\cdot: U \times R \rightarrow U$ , ebenso auf der Menge  $V$  als Addition  $+: V \times V \rightarrow V$  und Skalarmultiplikation  $\cdot: V \times R \rightarrow V$ .

Für die Homomorphismen der abelschen Gruppen schreiben wir kurz

$$\text{Hom}(U, V) = \text{Hom}(U, +; V, +).$$

Die zusätzliche Bedingung der  $R$ -Homogenität vermerken wir explizit durch die Angabe des Rings  $(R, +, \cdot)$ , meist kurz als Subskript  $R$ :

$$\text{Hom}_R(U, V) = \text{Hom}_{(R, +, \cdot)}(U, +, \cdot; V, +, \cdot).$$

Die lange Schreibweise rechts ist korrekt, aber lästig. Die Kurzform links genügt, solange die fehlenden Daten aus dem Kontext hervorgehen.

Sender und Empfänger treffen dabei eine wohlwollende Übereinkunft: Alle fehlenden Daten müssen aus dem Kontext erschlossen werden.

Schreibweise für  **$R$ -Homomorphismen** und  **$R$ -Isomorphismen**:

$$\text{Hom}_R(U, V) = \{ f : U \rightarrow V \text{ linear} \}$$

$$\text{Iso}_R(U, V) = \{ f : U \rightarrow V \text{ linear und bijektiv} \}$$

Schreibweise für  **$R$ -Endomorphismen** und  **$R$ -Automorphismen**:

$$\text{End}_R(V) = \text{Hom}_R(V, V)$$

$$\text{Aut}_R(V) = \text{Iso}_R(V, V) = \text{GL}(V)$$

### Lemma I1G: Komposition und Umkehrung

(0) Für jeden  $R$ -linearen Raum  $(V, +, \cdot)$  ist die Identität  $\text{id}_V : V \rightarrow V$  ein Homomorphismus (und somit ein Iso-/Endo-/Automorphismus).

(1) Sind  $f : (U, +, \cdot) \rightarrow (V, +, \cdot)$  und  $g : (V, +, \cdot) \rightarrow (W, +, \cdot)$  Homomorphismen von  $R$ -linearen Räumen, so auch  $g \circ f : (U, +, \cdot) \rightarrow (W, +, \cdot)$ .

(2) Ist  $f : (U, +, \cdot) \rightarrow (V, +, \cdot)$  ein bijektiver  $R$ -Homomorphismus, so auch die Umkehrabbildung  $g = f^{-1} : (V, +, \cdot) \rightarrow (U, +, \cdot)$ .

**Aufgabe:** Beweisen Sie dies zur Wiederholung (wie Lemma G1P).

**Lösung:** Aussage (0) ist klar.

Zum Beweis von (1) seien  $u, v \in U$  und  $a \in R$ :

$$\begin{aligned} (g \circ f)(u + v \cdot a) &\stackrel{\text{Def}}{=} g(f(u + v \cdot a)) \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} g(f(u) + f(v) \cdot a) \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} g(f(u)) + g(f(v)) \cdot a \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} (g \circ f)(u) + (g \circ f)(v) \cdot a \end{aligned}$$

(2) Dank G1P wissen wir bereits, dass  $g(x + y) = g(x) + g(y)$  gilt.

Erinnerung: Zu  $x, y \in V$  sei  $u = g(x)$  und  $v = g(y)$ . Damit folgt:

$$g(x + y) = g(f(u) + f(v)) = g(f(u + v)) = u + v = g(x) + g(y)$$

Für jeden Skalar  $a \in R$  gilt nun ganz analog:

$$g(x \cdot a) = g(f(u) \cdot a) = g(f(u \cdot a)) = u \cdot a = g(x) \cdot a$$

Somit ist auch  $g$  linear über  $R$ , also ein  $R$ -Homomorphismus.

Die Rechnung gilt genauso bei Skalarmultiplikation von links.

## Lineare Abbildungen: erste Beispiele

**Beispiel:** Die Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 3x$  ist  $\mathbb{R}$ -linear.

Sie ist ein  $\mathbb{R}$ -Automorphismus mit  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{3}x$ .

😊 Rechnen Sie es nach! Es genügt einsetzen und ausrechnen. Wir führen dies in Beispiel I1H ganz allgemein für Matrizen aus.

**Beispiel:** Die Abbildung  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 3x + 2$  ist nicht  $\mathbb{R}$ -linear, nicht einmal additiv, denn insbesondere gilt  $g(0) = 2 \neq 0$ .

⚠ Im lässigen Sprachgebrauch wird oft auch  $g$  als lineare Funktion bezeichnet. Genauer (und richtig!) sollte man **affin-linear** sagen.

**Beispiel:** Die Betragsfunktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$  ist nicht  $\mathbb{R}$ -linear, nicht einmal additiv: Es gilt  $h(1 + (-1)) = 0$  vs  $h(1) + h(-1) = 2$ .

⚠ Positive Homogenität: Für alle  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt  $h(a \cdot u) = a \cdot h(u)$ . Für  $a < 0$  gilt dies nicht mehr:  $h(-1 \cdot 7) = 7$  vs  $-1 \cdot h(7) = -7$ .

😊 Zum Nachweis der Nicht-Linearität genügt *ein* Gegenbeispiel, so wie hier für die Funktionen  $g$  und  $h$  exemplarisch vorgeführt.

## Lineare Abbildungen: erste Beispiele

**Übung:** Welche der folgenden Abbildungen sind  $\mathbb{R}$ -linear?

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{4x^2 - 9y^2}{2x - 3y} & \text{falls } 2x \neq 3y, \\ 4x & \text{falls } 2x = 3y, \end{cases}$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{4x^2 - 9y^2}{2x - 3y} & \text{falls } 2x \neq 3y, \\ 5x & \text{falls } 2x = 3y. \end{cases}$$

$$g_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : g_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\sin(y)| - \sqrt{1 - \cos(y)^2} \\ \sin(x) + \cos(x + \pi/2) \end{pmatrix}$$

$$g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : g_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\sin(y)| - \sqrt{1 - \cos(y)^2} \\ \sin(x) + \cos(x - \pi/2) \end{pmatrix}$$

⚠ Gefordert ist nicht, dass die Abbildungsvorschrift linear „ausieht“, sondern einzig und allein, dass die Abbildung die Definition I1F erfüllt.

**Lösung:**  $f_1(x, y) = 2x + 3y$  und  $g_1(x, y) = (0, 0)$  sind  $\mathbb{R}$ -linear, jedoch nicht  $f_2$  und  $g_2$ : Es gilt  $f_2(3, 0) = 6$  und  $f_2(0, 2) = 6$  vs  $f_2(3, 2) = 10$ .

Für  $u = (\pi/2, 0)$  gilt  $g_2(u + u) = (0, 0)$  vs  $g_2(u) + g_2(u) = (0, 4)$ .

**Beispiel:** Seien  $(U, +, \cdot)$  und  $(V, +, \cdot)$  lineare Räume über dem Ring  $R$ . Die Nullabbildung  $0 : U \rightarrow V : u \mapsto 0$  ist  $R$ -linear, also  $0 \in \text{Hom}_R(U, V)$ .

**Beispiel:** Die Projektion  $\text{pr}_i : R^n \rightarrow R : x \mapsto x_i$  ist  $R$ -linear, ebenso die Projektion  $p_n^m : R^n \rightarrow R^m : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_m)$  für  $1 \leq m \leq n$ .

**Beispiel:** Die Auswertung  $\delta_a : R^X \rightarrow R : f \mapsto f(a)$  ist  $R$ -linear, ebenso die Einschränkung  $R^X \rightarrow R^Y : f \mapsto f|_Y$  für  $Y \subseteq X$ .

**Beispiel:** Die komplexe Konjugation

$$\text{conj} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$$

ist  $\mathbb{R}$ -linear, aber nicht  $\mathbb{C}$ -linear: Es gilt  $\text{conj}(i \cdot 1) = -i$  vs  $i \cdot \text{conj}(1) = i$ .

😊 Geometrische Anschauung, mathematische Intuition oder schlicht Erfahrung sind oft hilfreich. Lassen Sie sich davon ruhig inspirieren! Präzise Definitionen wirken und helfen Ihnen weit darüber hinaus: Sie schaffen Klarheit, wo uns Anschauung und Intuition verlassen!

**Übung:** Sind die folgenden Abbildungen linear über  $\mathbb{R}$ ? über  $\mathbb{R}[X]$ ?

$$f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] : P(X) \mapsto P(X) \cdot X^2,$$

$$g : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] : P(X) \mapsto P(X^2),$$

$$h : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] : P(X) \mapsto P(X)^2.$$

**Antwort:** (1)  $f$  ist linear über  $\mathbb{R}[X]$  und somit  $\mathbb{R}$ . (2)  $g$  ist linear über  $\mathbb{R}$ ; wir erkennen  $g$  als einen Einsetzungshomomorphismus (Satz G3E). Aber  $g$  ist nicht  $\mathbb{R}[X]$ -homogen: etwa  $g(X \cdot 1) = X^2$  vs  $X \cdot g(1) = X$ . (3)  $h$  ist nicht additiv: etwa  $h(X + X) = 4X^2$  vs  $h(X) + h(X) = 2X^2$ .

**Übung:** Jedes Polynom  $P \in \mathbb{R}[X]^*$  definiert zwei Abbildungen

$$q : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] : S \mapsto S \text{ quo } P,$$

$$r : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] : S \mapsto S \text{ rem } P.$$

Sind diese linear über  $\mathbb{R}$ ? und über  $\mathbb{R}[X]$ ?

**Antwort:** Beide sind linear über  $\mathbb{R}$ , aber nicht linear über  $\mathbb{R}[X]$ . Formulieren Sie dies explizit aus mit Hilfe von Satz G3H.

## Beispiel I1H: Matrizen wirken als lineare Abbildungen.

Weiterhin sei  $(R, +, \cdot)$  ein Ring, etwa  $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \dots$

Jede Matrix  $A \in R^{m \times n}$  definiert die zugehörige Abbildung

$$f = f_A : R^n \rightarrow R^m : v \mapsto Av.$$

(0) Dabei gilt  $f_A \circ f_B = f_{AB}$  dank Assoziativität  $A(Bv) = (AB)v$ .  
Genau dann ist  $f_A$  bijektiv, wenn  $A$  invertierbar ist (Satz B2D).

(1) Die Abbildung  $f$  ist additiv, denn für alle  $u, v \in R^n$  gilt:

$$A(u + v) = Au + Av$$

(2) Zudem ist  $f$  rechtshomogen, denn für alle  $v \in R^n$  und  $\lambda \in R$  gilt:

$$A(v\lambda) = (Av)\lambda$$

(3) Ist der Ring  $R$  zudem kommutativ, so ist  $f$  auch linkshomogen:

$$A(\lambda v) = (A\lambda)v = (\lambda A)v = \lambda(Av)$$

Wir identifizieren  $R^n$  hier mit Spaltenvektoren  $R^{n \times 1}$  und nutzen die Matrixmultiplikation, spezialisiert zu „Matrix mal Vektor“ vermöge

$$\cdot : R^{m \times n} \times R^{n \times 1} \rightarrow R^{m \times 1} : (A, v) \mapsto w = A \cdot v, \quad w_{i1} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot v_{j1}.$$

Die Rechenregeln haben wir in Kapitel B sorgsam nachgerechnet.

😊 Das ist für Sie bereits jetzt ein großer Vorteil: Sie verfügen über ein reichhaltiges Repertoire an illustrativen und relevanten Beispielen!

Für Beispiele wie I1H ist demnach nichts weiter zu tun; wenn Sie dies jedoch wünschen, kann eine explizite Wiederholung nicht schaden.

😊 Fast alle Illustrationen dieses Kapitels sind ebenso direkt und leicht: Es genügt, die Definitionen einzusetzen und sorgsam auszurechnen.

Ich ermutige Sie, dies selbst zu versuchen und Routine zu entwickeln. So werden Ihnen die neuen Begriffe und Techniken schnell vertraut.

Beispiel I1H illustriert eine wichtige Beobachtung:

⚠️ Wenn wir über einem nicht-kommutativen Ring  $R$  arbeiten, dann sollten Matrizen und Skalare von entgegengesetzten Seiten operieren.

😊 Über einem kommutativen Ring ist diese Unterscheidung unnötig.

In den anfänglichen Beispielen arbeiten wir meist über kommutativen Ringen, sogar über Körpern, das ist besonders einfach und elegant.

Aller Voraussicht nach werden Ihnen bald auch nicht-kommutative Situationen begegnen, spätestens wenn Sie mit Matrizen arbeiten. Dann sollten Sie wissen, wie man korrekt damit umgeht.

Auch den besonders schönen kommutativen Fall versteht man besser im nicht-kommutativen Kontext. So wissen Sie seine Annehmlichkeiten erst zu schätzen. *You don't know what you have until it's gone.*

## Von Matrizen zu Homomorphismen

😊 Matrizen und Homomorphismen über  $R$  verhalten sich ähnlich. Diese Analogie werden wir im Folgenden immer weiter ausbauen.

Warum bleiben wir nicht gleich bei Matrizen? Nun, die Erfahrung zeigt: Matrizen sind wunderbar konkret, aber nur eingeschränkt nutzbar. Homomorphismen sind allgemeiner und viel flexibler einsetzbar.

Für Matrizen über  $R$  haben wir hilfreiche Rechenregeln, die Sie aus Kapitel B kennen, und die uns seitdem stets gute Dienste leisten.

Diese nützlichen Rechenregeln wollen wir nun auf  $R$ -Homomorphismen übertragen, soweit möglich. Das ist das Ziel der beiden folgenden Sätze.

Den ersten Satz werde ich für Sie hier ausführlich beweisen, den Beweis des zweiten Satzes empfehle ich Ihnen als Übung.

**Satz I11:** die Homomorphismengruppe  $\text{Hom}(U, V) \geq \text{Hom}_R(U, V)$

Weiterhin seien  $(U, +, \cdot)$  und  $(V, +, \cdot)$  lineare Räume über dem Ring  $R$ .

(1) Die Menge  $V^U = \text{Abb}(U, V)$  aller Abbildungen  $f, g: U \rightarrow V$  wird zu einer abelschen Gruppe  $(\text{Abb}(U, V), +)$  mit der punktweisen Addition:

$$(f + g)(u) := f(u) + g(u) \quad \text{für alle } u \in U$$

Darin liegen die Homomorphismen als Untergruppe:

$$\text{Abb}(U, V) \geq \text{Hom}(U, V) \geq \text{Hom}_R(U, V)$$

(2) Zudem sind  $\text{Abb}(U, V) \geq \text{Hom}(U, V)$  lineare Räume über  $R$  vermöge der punktweisen Skalarmultiplikation mit  $\lambda \in R$ :

$$(\lambda \cdot f)(u) := \lambda \cdot f(u) \quad \text{bzw.} \quad (f \cdot \lambda)(u) := f(u) \cdot \lambda.$$

Ist  $R$  zudem kommutativ, so ist auch  $\text{Hom}_R(U, V)$  ein  $R$ -linearer Raum.

😊 Sind  $U, V$  Vektorräume über einem Körper  $K$ , so auch  $\text{Hom}_K(U, V)$ .

**Beweis:** (1) Für jede Menge  $U$  ist  $(\text{Abb}(U, V), +)$  eine Gruppe (G1Y).

Sind  $f, g: U \rightarrow V$  additiv, so auch  $f + g$ , denn für alle  $u, v \in U$  gilt:

$$\begin{aligned} (f + g)(u + v) &\stackrel{\text{Def}}{=} f(u + v) + g(u + v) \stackrel{\text{Add}}{=} f(u) + f(v) + g(u) + g(v) \\ &\stackrel{\text{Com}}{=} f(u) + g(u) + f(v) + g(v) \stackrel{\text{Def}}{=} (f + g)(u) + (f + g)(v) \end{aligned}$$

Sind  $f, g: U \rightarrow V$  sogar  $R$ -linear, so auch  $f + g$ , denn für alle  $a \in R$  gilt:

$$\begin{aligned} (f + g)(u \cdot \lambda) &\stackrel{\text{Def}}{=} f(u \cdot \lambda) + g(u \cdot \lambda) \stackrel{\text{Lin}}{=} f(u) \cdot \lambda + g(u) \cdot \lambda \\ &\stackrel{\text{DL}}{=} (f(u) + g(u)) \cdot \lambda \stackrel{\text{Def}}{=} (f + g)(u) \cdot \lambda \end{aligned}$$

(2) Für jede Menge  $U$  ist  $(\text{Abb}(U, V), +, \cdot)$  ein  $R$ -linearer Raum wie im Fundamentalbeispiel I1A. Ist  $f: U \rightarrow V$  additiv, so auch  $f \cdot \lambda$ , denn:

$$\begin{aligned} (f \cdot \lambda)(u + v) &\stackrel{\text{Def}}{=} f(u + v) \cdot \lambda \stackrel{\text{Add}}{=} (f(u) + f(v)) \cdot \lambda \\ &\stackrel{\text{DL}}{=} f(u) \cdot \lambda + f(v) \cdot \lambda \stackrel{\text{Def}}{=} (f \cdot \lambda)(u) + (f \cdot \lambda)(v) \end{aligned}$$

Ist  $R$  kommutativ und  $f: U \rightarrow V$  linear über  $R$ , so auch  $f \cdot \lambda$ , denn:

$$\begin{aligned} (f \cdot \lambda)(u \cdot \mu) &\stackrel{\text{Def}}{=} f(u \cdot \mu) \cdot \lambda \stackrel{\text{Lin}}{=} f(u) \cdot \mu \cdot \lambda \\ &\stackrel{\text{Com}}{=} f(u) \cdot \lambda \cdot \mu \stackrel{\text{Def}}{=} (f \cdot \lambda)(u) \cdot \mu \end{aligned}$$

Die Rechnungen gelten genauso bei Skalarmultiplikation von links. **QED**

**Satz 11J:** der Endomorphismenring  $\text{End}(V) \geq \text{End}_R(V)$ 

Weiterhin seien  $(U, +, \cdot)$ ,  $(V, +, \cdot)$ ,  $(W, +, \cdot)$  lineare Räume über  $R$ .

Wir betrachten die Komposition von Homomorphismen:

$$\circ : \text{Hom}(V, W) \times \text{Hom}(U, V) \rightarrow \text{Hom}(U, W) : (g, f) \mapsto g \circ f$$

$$\circ : \text{Hom}_R(V, W) \times \text{Hom}_R(U, V) \rightarrow \text{Hom}_R(U, W) : (g, f) \mapsto g \circ f$$

(1) Komposition ist additiv in jedem der beiden Faktoren:

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f,$$

$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2.$$

(2) Die Endomorphismenmenge  $\text{End}(V) = \text{End}(V, +)$  wird zu einem Ring  $(\text{End}(V), +, \circ)$  mit punktwise Addition  $+$  und Komposition  $\circ$ .

Darin liegt  $(\text{End}_R(V), +, \circ) \leq (\text{End}(V), +, \circ)$  als Unterring.

(3) Ist  $R$  kommutativ, so ist die Komposition von  $R$ -Homomorphismen sogar  $R$ -linear in jedem der beiden Faktoren, und wir haben zudem den zentralen Ringhomomorphismus  $R \rightarrow \text{End}_R(V) : \lambda \mapsto \lambda \cdot \text{id}_V$ .

**Bemerkung:** Additivität (1) gilt für Gruppenhomomorphismen  $\text{Hom}$ , somit insbesondere für  $R$ -lineare Abbildungen  $\text{Hom}_R \leq \text{Hom}$ .

Daraus folgt die Ringeigenschaft (2) von  $\text{End}(V) \geq \text{End}_R(V)$ .

Für die  $R$ -Linearität (3) benötigen wir, dass  $R$  kommutativ ist.

Im Endomorphismenring  $\text{End}(V) \geq \text{End}_R(V)$  ist  $\text{Aut}(V) = \text{End}(V)^\times$  bzw.  $\text{Aut}_R(V) = \text{End}_R(V)^\times$  die Gruppe der invertierbaren Elemente.

**Übung:** Rechnen Sie die Aussagen dieses Satzes sorgsam nach.

Dies ist eine hilfreiche Übung zum Verständnis der Definitionen.

Wie in der vorigen Aufgabe müssen Sie hierzu nichts Neues erfinden, sondern nur gewissenhaft die Definitionen einsetzen und ausrechnen.

Das ist anfangs schwierig, solange die Begriffe noch ungewohnt sind.

Ich ermutige Sie, es selbst zu versuchen und Routine zu entwickeln.

😊 Sie sollten vor solchen allgemeinen Sätzen keine Angst haben, sondern sie freudig begrüßen und als schön und nützlich erkennen. Die Rechnungen sind zwar länglich, aber nicht wirklich schwierig, und sie belegen: Alle Begriffe fügen sich wunderbar zusammen!

Beispiel I1κ:  $\mathbb{Z}$ -lineare Räume und Abbildungen

(0) Jede abelsche Gruppe  $(V, +)$  ist ein  $\mathbb{Z}$ -linearer Raum vermöge

$$\cdot : V \times \mathbb{Z} \rightarrow V : (v, n) \mapsto v \cdot n = \begin{cases} \sum_{k=1}^{+n} (+v) & \text{falls } n \geq 0, \\ \sum_{k=1}^{-n} (-v) & \text{falls } n \leq 0. \end{cases}$$

Dies ist die einzige distributive Operation des Rings  $\mathbb{Z}$  auf  $(V, +)$ .

(1) Zu jedem  $\mathbb{Z}$ -linearen Raum  $(V, +, \cdot)$  können wir allein aus  $(V, +)$  die Skalarmultiplikation  $\cdot : V \times \mathbb{Z} \rightarrow V$  eindeutig rekonstruieren.

(2) Jeder Gruppenhomomorphismus  $f : (V, +) \rightarrow (W, +)$  zwischen abelschen Gruppen  $(V, +)$  und  $(W, +)$  ist automatisch  $\mathbb{Z}$ -linear:

$$f(v \cdot n) = f(v) \cdot n$$

Wörtlich dasselbe gilt für die Schreibweise als Vielfaches von links.

Dank Satz I1E wissen wir: Jede distributive Operation  $\cdot : V \times R \rightarrow V$  entspricht einem Ringhomomorphismus  $\varphi : (R, +, \cdot) \rightarrow (\text{End}(V), +, \bullet)$ .

Die obige Operation entspricht dem eindeutigen Ringhomomorphismus

$$\varphi : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \rightarrow (\text{End}(V, +), \boldsymbol{+}, \bullet) : n \mapsto \text{id}_V \cdot n.$$

Bei Schreibweise als Vielfaches von links erhalten wir entsprechend

$$\varphi : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \rightarrow (\text{End}(V, +), \boldsymbol{+}, \circ) : n \mapsto n \cdot \text{id}_V.$$

Das ist dieselbe Abbildung, denn  $\text{id}_V \cdot n = n \cdot \text{id}_V = \text{id}_V + \dots + \text{id}_V$ .

Aus Satz G2H kennen wir die **Charakteristik**  $k = \text{char}(\text{End}(V, +))$ .

Positive Charakteristik  $k > 0$  bedeutet  $\text{id}_V \cdot k = \sum_{i=1}^k \text{id}_V = 0$ .

Das bedeutet, für jedes Element  $v \in V$  gilt  $v \cdot k = \sum_{i=1}^k v = 0$ .

Dabei ist  $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft.

Diese Betrachtung für uns direkt zum nächsten Beispiel.

**Beispiel I1L:  $\mathbb{Z}/p$ -lineare Räume und Abbildungen**

Wie zuvor sei  $(V, +)$  eine abelsche Gruppe mit  $\cdot : V \times \mathbb{Z} \rightarrow V$ .

(0) Gegeben sei  $p \in \mathbb{N}$ , sodass  $v \cdot p = 0$  für alle  $v \in V$  gilt.

Dann ist  $(V, +)$  ein linearer Raum über dem Ring  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  vermöge

$$\cdot : V \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow V : (v, [n]) \mapsto v \cdot [n] := v \cdot n.$$

Dies ist die einzige distributive Operation des Rings  $\mathbb{Z}/p$  auf  $(V, +)$ .

Für  $p = 0$  erhalten wir die Skalierung durch  $\mathbb{Z}/0\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$  wie zuvor.

Ist  $p > 0$  prim, so ist  $(V, +)$  ein Vektorraum über  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

(1) Zu jedem  $\mathbb{Z}/p$ -linearen Raum  $(V, +, \cdot)$  können wir allein aus  $(V, +)$  die Skalarmultiplikation  $\cdot : V \times \mathbb{Z}/p \rightarrow V$  eindeutig rekonstruieren.

(2) Jeder Gruppenhomomorphismus  $f : (V, +) \rightarrow (W, +)$  zwischen  $\mathbb{Z}/p$ -linearen Räumen  $(V, +)$  und  $(W, +)$  ist automatisch  $\mathbb{Z}/p$ -linear:

$$f(v \cdot [n]) = f(v) \cdot [n]$$

**Lineare Räume über  $\mathbb{Z}/2$** 

**Beispiel:** Sei  $X$  eine Menge. Die Potenzmenge  $V = \mathfrak{P}(X)$  bildet die abelsche Gruppe  $(V, \Delta, \emptyset)$  bezüglich der symmetrischen Differenz

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Für jedes Element  $A \in V$ , also jede Teilmenge  $A \subseteq X$ , gilt  $A \Delta A = \emptyset$ .

Somit ist  $(V, \Delta)$  ein  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum, vermöge  $A \cdot [0] = \emptyset$  und  $A \cdot [1] = A$ .

Wir haben die (kanonische, natürliche) Bijektion

$$(\mathbf{I}, \text{supp}) : \mathfrak{P}(X) \cong \text{Abb}(X, \{0, 1\}).$$

Diese ist ein Isomorphismus von  $\mathbb{F}_2$ -Vektorräumen  $(V, \Delta) \cong (\mathbb{F}_2^X, +)$ .

**Übung:** Dies ist sogar ein Ringisomorphismus  $(V, \Delta, \cap) \cong (\mathbb{F}_2^X, +, \cdot)$ .

Beispiel 11M:  $\mathbb{Q}$ -lineare Räume und Abbildungen

Wie zuvor sei  $(V, +)$  eine abelsche Gruppe mit  $\cdot : V \times \mathbb{Z} \rightarrow V$ .

(0) Zu jedem  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  sei die Ver- $n$ -fachung bijektiv,

$$\mu_n : V \xrightarrow{\sim} V : u \mapsto u \cdot n.$$

Das bedeutet: Zu jedem  $v \in V$  existiert also genau eine  $n$ -Teilung  $u \in V$  mit  $u \cdot n = v$ ; wir definieren so  $v/n := u = \mu_n^{-1}(v)$  und

$$\cdot : V \times \mathbb{Q} \rightarrow V : (v, z/n) \mapsto v \cdot (z/n) = (v \cdot z)/n.$$

Dies ist die einzige distributive Operation des Körpers  $\mathbb{Q}$  auf  $(V, +)$ .

(1) Zu jedem  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $(V, +, \cdot)$  können wir allein aus  $(V, +)$  die Skalarmultiplikation  $\cdot : V \times \mathbb{Q} \rightarrow V$  eindeutig rekonstruieren.

(2) Jeder Gruppenhomomorphismus  $f : (V, +) \rightarrow (W, +)$  zwischen  $\mathbb{Q}$ -Vektorräumen  $(V, +)$  und  $(W, +)$  ist automatisch  $\mathbb{Q}$ -linear:

$$f(v \cdot z/n) = f(v) \cdot z/n$$

Jeder der Ringe  $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p, \mathbb{Q}$  hat diese besondere Eigenschaft!

Die Aussage, dass  $(V, +, \cdot)$  ein  $R$ -linearer Raum ist, stellt eine ganz konkrete Bedingung an die zu Grunde liegende Gruppe  $(V, +)$ .

- Für  $R = \mathbb{Z}$  fordern wir nur die Kommutativität,
- für  $R = \mathbb{Z}/p$  fordern wir zudem  $v \cdot p = 0$  für alle  $v \in V$ ,
- für  $R = \mathbb{Q}$  stattdessen  $\mu_n : u \mapsto u \cdot n$  bijektiv für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ .

Die zusätzliche Struktur der Skalarmultiplikation  $\cdot : V \times R \rightarrow V$  lässt sich dann allein aus  $(V, +)$  eindeutig rekonstruieren.

 Das ist eine Besonderheit der Ringe  $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p, \mathbb{Q}$ , allgemein gilt dies nicht. Hierzu erinnern wir an das folgende Beispiel über  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$ .

**Beispiel I1N: lineare Räume über  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$** 

(1) Sei  $(V, +, \cdot)$  ein  $\mathbb{C}$ -linearer Raum vermöge  $\cdot : \mathbb{C} \times V \rightarrow V$ .  
Dann ist  $(V, +, \cdot)$  ein  $\mathbb{R}$ -linearer Raum dank der Einschränkung

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V : (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v.$$

Die Abbildung  $J : V \rightarrow V : v \mapsto i \cdot v$  ist  $\mathbb{R}$ -linear und erfüllt  $J \circ J = -\text{id}_V$ .

(2) Sei  $(V, +, \cdot)$  ein  $\mathbb{R}$ -linearer Raum vermöge  $\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ .  
Gegeben sei eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $J : V \rightarrow V$  mit  $J \circ J = -\text{id}_V$ .  
Mit diesen Daten definieren wir

$$\cdot : \mathbb{C} \times V \rightarrow V : (x + yi) \cdot v = x \cdot v + y \cdot J(v)$$

Dies ist eine distributive Operation des Körpers  $\mathbb{C}$  auf  $(V, +)$ .

Dies zeigt noch einmal, dass die  $\mathbb{C}$ -Operation  $\cdot$  nicht allein aus  $(V, +, \cdot)$  eindeutig rekonstruierbar ist: Neben  $J$  erfüllt auch  $-J$  die Forderung, wir erhalten so die Operation durch das komplex-konjugierte (I112).

**Lineare Räume über  $K[X]$** **Beispiel I1O: lineare Räume über  $K[X]$** 

Sei  $K$  ein kommutativer Ring und  $K[X]$  der Polynomring.

(1) Sei  $(V, +, \cdot)$  ein  $K[X]$ -linearer Raum vermöge  $\cdot : K[X] \times V \rightarrow V$ .  
Dann ist  $(V, +, \cdot)$  ein  $K$ -linearer Raum dank der Einschränkung

$$\cdot : K \times V \rightarrow V : (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v.$$

Die Abbildung  $T : V \rightarrow V : v \mapsto X \cdot v$  ist  $K$ -linear, kurz  $T \in \text{End}_K(V)$ .

(2) Sei  $(V, +, \cdot)$  ein  $K$ -linearer Raum vermöge  $\cdot : K \times V \rightarrow V$ .  
Gegeben sei eine  $K$ -lineare Abbildung  $T : V \rightarrow V$ .  
Mit diesen Daten definieren wir

$$\cdot : K[X] \times V \rightarrow V : \left(\sum_i p_i X^i\right) \cdot v = \sum_i p_i \cdot T^i(v)$$

Dies ist eine distributive Operation des Rings  $K[X]$  auf  $(V, +)$ .

😊 Dies entspricht der universellen Abbildungseigenschaft G3E des Polynomrings  $K[X]$ , hier angewendet auf  $K[X] \rightarrow \text{End}_K(V) : X \mapsto T$ .

## Definition I1P: linearer Unterraum

Sei  $(V, +, \cdot)$  ein  $R$ -linearer Raum. Ein  **$R$ -linearer Unterraum**  $U \leq (V, +, \cdot)$  ist eine Untergruppe  $U \leq (V, +)$  mit der Eigenschaft

$$R \cdot U \subseteq U \quad \text{bzw.} \quad U \cdot R \subseteq U.$$

Äquivalent umformuliert:  $U \subseteq V$  ist eine Teilmenge, sodass gilt:

$$(0) 0 \in U, \quad (1) U + U \subseteq U, \quad (2) R \cdot U \subseteq U \quad \text{bzw.} \quad U \cdot R \subseteq U.$$

Dank Lemma I1C beinhaltet Bedingung (2) die Negation  $-U \subseteq U$ .

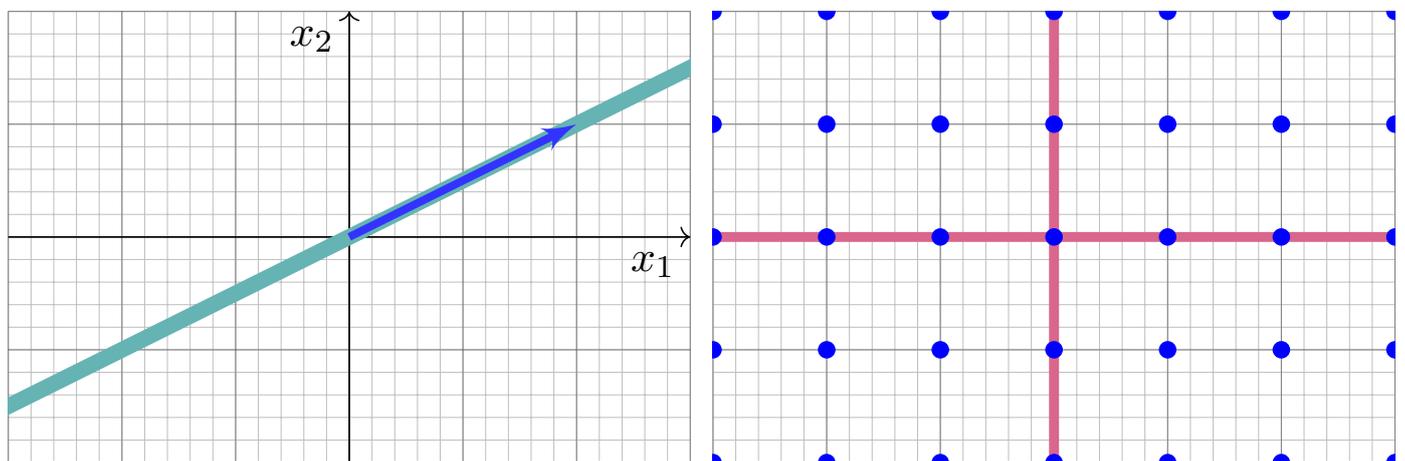
Durch Einschränkung ist dann  $(U, +_U, \cdot_U)$  selbst ein  $R$ -linearer Raum und die Inklusion  $\iota: (U, +_U, \cdot_U) \hookrightarrow (V, +, \cdot)$  eine  $R$ -lineare Abbildung.

**Beispiel:** In  $(V, +, \cdot)$  sind die Mengen  $\{0\}$  und  $V$  lineare Unterräume.

**Beispiel:** Die  $\mathbb{Z}$ -linearen Unterräume von  $\mathbb{Z}$  sind  $n\mathbb{Z}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  (G1V).

**Übung:** Sind  $U_1, U_2 \leq V$  Unterräume, so auch  $U_1 + U_2$  und  $U_1 \cap U_2$ . Zur Lösung, auch für beliebige Summen und Schnitte, siehe Satz I1x.

## Lineare Unterräume



**Beispiele:** Wir betrachten den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^n$ .

- 1 Die Gerade  $G = (2, 1) \cdot \mathbb{R}$  ist ein  $\mathbb{R}$ -linearer Unterraum von  $\mathbb{R}^2$ .
- 2 Die Ebene  $E = (1, 2, 5) \cdot \mathbb{R} + (0, 3, 2) \cdot \mathbb{R}$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Unterraum von  $\mathbb{R}^3$ .

**Gegenbeispiele:** Wir betrachten den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^2$ .

- 3 Die Untergruppe  $U = \mathbb{Z}^2$  ist kein  $\mathbb{R}$ -Unterraum, denn  $U \cdot \mathbb{R} \not\subseteq U$ .
- 4  $V = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$  erfüllt  $V \cdot \mathbb{R} \subseteq V$ , aber  $V + V \not\subseteq V$ .

**Beispiel:** Die Teilmenge  $W = i\mathbb{R}$  in  $\mathbb{C}$  ist ein  $\mathbb{R}$ -linearer Unterraum. Hingegen ist  $W$  kein  $\mathbb{C}$ -linearer Unterraum, denn  $W \cdot i \not\subseteq W$ .

Definition 11P ist klar und einfach: Ein  $R$ -linearer Unterraum  $U \leq (V, +, \cdot)$  ist eine Untergruppe  $U \leq (V, +)$  mit  $R \cdot U \subseteq U$  bzw.  $U \cdot R \subseteq U$ .

Äquivalent umformuliert:  $U \subseteq V$  ist eine Teilmenge, sodass gilt:

(0)  $0 \in U$ , (1)  $U + U \subseteq U$ , (2)  $R \cdot U \subseteq U$  bzw.  $U \cdot R \subseteq U$ .

Zum Verständnis helfen Beispiele und Gegenbeispiele wie oben:

(3) Die Teilmenge  $U = \mathbb{Z}^2$  in  $\mathbb{R}^2$  erfüllt zwar  $0 \in U$  und  $-U \subseteq U$  sowie  $U + U \subseteq U$ , aber  $U \cdot \mathbb{R} \not\subseteq U$ . Konkretes Gegenbeispiel: Es gilt  $(1, 0) \in U$ , aber  $(1, 0) \cdot 1/2 \notin U$ . Somit ist  $U \leq \mathbb{R}^2$  zwar eine Untergruppe, also ein  $\mathbb{Z}$ -linearer Unterraum, aber kein  $\mathbb{R}$ -linearer Unterraum.

(4) Die Teilmenge  $V = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$  besteht aus der  $x$ -Achse  $\mathbb{R} \times \{0\}$  und der  $y$ -Achse  $\{0\} \times \mathbb{R}$ . Es gilt  $V \cdot \mathbb{R} \subseteq V$ , aber  $V + V \not\subseteq V$ . Konkretes Gegenbeispiel:  $(1, 0), (0, 1) \in V$ , aber  $(1, 0) + (0, 1) \notin V$ . Somit ist  $V$  keine Untergruppe, erst recht kein  $\mathbb{R}$ -linearer Unterraum.

Das folgende Beispiel des Unterraums  $R^{(I)} \leq R^I$  ist etwas allgemeiner und wird uns im Folgenden immer wieder gute Dienste erweisen.

Beispiel 11Q: der lineare Raum  $R^{(I)} \leq R^I$  über  $R$

Sei  $(R, +, 0, \cdot, 1)$  ein Ring, etwa  $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \dots$ , und  $I$  eine Menge.

(0) Die Abbildungsmenge  $R^I = \text{Abb}(I, R) = \{u : I \rightarrow R : i \mapsto u_i\}$  ist ein  $R$ -linearer Raum mit koordinatenweiser Addition und Skalierung.

(1) Für den Träger  $\text{supp}(u) = \{i \in I \mid u_i \neq 0\}$  gilt

$$\begin{aligned} \text{supp}(a \cdot u) &\subseteq \text{supp}(u), & \text{supp}(0) &= \emptyset, \\ \text{supp}(u \cdot a) &\subseteq \text{supp}(u), & \text{supp}(u + v) &\subseteq \text{supp}(u) \cup \text{supp}(v). \end{aligned}$$

(2) Wir erhalten so den  $R$ -linearen Unterraum

$$R^{(I)} := \{u : I \rightarrow R \mid \#\text{supp}(u) < \infty\} \leq R^I$$

der Funktionen mit endlichem Träger. Ist  $I$  endlich, so gilt  $R^{(I)} = R^I$ .

(3) Zu  $i \in I$  definieren wir  $e_i : I \rightarrow R$  durch  $e_i(i) = 1$  und  $e_i(j) = 0$  sonst. Jedes Element  $u \in R^{(I)}$  schreibt sich eindeutig als Linearkombination  $u = \sum_{i \in I} u_i e_i$  (linkslinear) bzw.  $u = \sum_{i \in I} e_i u_i$  (rechtslinear).

## Bild und Kern einer linearen Abbildung

### Satz I1R: Bild und Kern, surjektiv und injektiv

Sei  $f : V \rightarrow W$  eine  $R$ -lineare Abbildung.

- (1) Ist  $U \leq V$  ein Unterraum, so auch das Bild  $f(U) \leq W$ . Insbesondere ist das Bild  $\text{im}(f) = f(V) \leq W$  ein Unterraum.
- (2) Genau dann ist  $f$  surjektiv, wenn  $\text{im}(f) = W$  gilt.
- (3) Ist  $U \leq W$  ein Unterraum, so auch  $f^{-1}(U) \leq V$ . Somit ist der Kern  $\ker(f) := f^{-1}(\{0\}) \leq V$  ein Unterraum.
- (4) Genau dann ist  $f$  injektiv, wenn  $\ker(f) = \{0\}$  gilt. Allgemein:
- (5) Für  $v \in V$  und  $w = f(v) \in \text{im}(f)$  gilt  $f^{-1}(\{w\}) = v + \ker(f)$ . Jede Faser ist entweder leer oder eine Translation des Kerns.

😊 Das unscheinbare Injektivitätskriterium (4) ist überaus praktisch und wird sich im Folgenden immer wieder als hilfreich erweisen.

Arbeitersparnis: Für die Injektivität einer  $R$ -linearen Abbildung  $f : V \rightarrow W$  müssen wir nicht alle Fasern  $f^{-1}(\{w\})$  prüfen, sondern nur eine einzige Faser, nämlich  $\ker(f) = f^{-1}(\{0\})$ .

## Bild und Kern einer linearen Abbildung

**Beweis:** (1) Dank G1R(1) ist  $f(U) \leq W$  eine Untergruppe. Zu  $w \in f(U)$  existiert  $u \in U$  mit  $w = f(u)$ . Für  $a \in R$  gilt  $wa = f(u)a = f(ua) \in f(U)$ .

(2) Die Aussage  $\text{im}(f) = W$  ist die Definition von Surjektivität.

(3) Dank G1R(3) ist  $f^{-1}(U) \leq V$  eine Untergruppe. Für  $a \in R$  und  $v \in f^{-1}(U)$  gilt  $f(v) \in U$ , also  $f(va) = f(v)a \in U$ , somit  $va \in f^{-1}(U)$ .

(4) Die Implikation „ $f$  injektiv  $\Rightarrow \ker(f) = \{0\}$ “ ist klar. Umgekehrt:

(5) Für  $v, v' \in V$  mit  $f(v) = f(v')$  gilt  $0 = f(v') - f(v) = f(v' - v)$ , also  $v' - v \in \ker(f)$ , somit  $v' \in v + \ker(f)$ . Mit  $\ker(f) = \{0\}$  folgt  $v' = v$ .

Allgemein: Für  $w = f(v) \in \text{im}(f)$  folgt  $f^{-1}(\{w\}) = v + \ker(f)$ . ◻

😊 Jede Faser ist entweder leer oder eine Translation des Kerns.

Das hilft uns beim Lösen von linearen Gleichungssystemen  $f(x) = y$ , es gibt uns Struktur und Überblick. Abstraktion wirkt ganz konkret:

Zur homogenen Gleichung  $f(x) = 0$  heißt  $x_h \in \ker(f)$  eine homogene Lösung. Zur inhomogenen Gleichung  $f(x) = y$  heißt  $x_p \in f^{-1}(\{y\})$  eine partikuläre Lösung. Damit gilt  $f^{-1}(\{y\}) = x_p + \ker(f)$ : **Die allgemeine Lösung ist eine partikuläre plus eine beliebige homogene Lösung.**

**Aufgabe:** Bestimmen Sie in  $\mathbb{Q}^5$  die Lösungsmenge zu  $Ax = b$  mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & -9 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 5}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^4.$$

**Lösung:** Wir bringen die erweiterte Koeffizientenmatrix  $(A|b)$  in RZSF:

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & -9 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{B2c}]{\text{Gau\ss}} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 5/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 10/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Die Lösungsmenge  $L(A, b) = \{ x \in \mathbb{Q}^5 \mid Ax = b \}$  ist demnach explizit

$$L(A, b) = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbb{Q} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbb{Q} \begin{bmatrix} 5/3 \\ 10/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = v + \ker(A).$$

**Aufgabe:** Sei  $R$  ein Ring, etwa  $R = \mathbb{Q}$  wie im vorigen Beispiel. Gegeben sei  $A \in R^{p \times q}$  und  $b \in R^p$ . Das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  hat die Lösungsmenge  $L(A, b) := \{ x \in R^q \mid Ax = b \}$ .

- 1 Es gilt  $L(A, b) + L(A, c) \subseteq L(A, b + c)$  für alle  $b, c \in R^p$  sowie  $L(A, b) \cdot \lambda \subseteq L(A, b \cdot \lambda)$  für alle  $\lambda \in R$ .
- 2 Der wichtigste Spezialfall ist die homogene Gleichung  $Ax = 0$ : Die Menge  $L(A, 0) = \ker(A)$  ist ein  $R$ -linearer Unterraum von  $R^q$ .
- 3 Ist  $x_p \in L(A, b)$  eine „partikuläre“ Lösung der Gleichung  $Ax = b$ , so erhalten wir die gesamte Lösungsmenge  $L(A, b) = x_p + L(A, 0)$ .

Man sagt hierzu zusammenfassend: **Die allgemeine Lösung ist eine partikuläre plus eine beliebige homogene Lösung.**

**Lösung:** Das ist genau die Rechnung zum vorigen Satz I1R, hier spezialisiert für die lineare Abbildung  $f : R^q \rightarrow R^p : x \mapsto Ax$ .

😊 Das hilft uns beim Lösen von linearen Gleichungssystemen, es gibt uns Struktur und Überblick. Abstraktion wirkt ganz konkret.

Wir betrachten  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Die Menge aller  $\mathbb{K}$ -wertigen Folgen,

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{ a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : n \mapsto a_n \},$$

ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit punktweiser Addition und Skalierung (I1A).

Darin liegt der Untervektorraum  $c(\mathbb{N}, \mathbb{K})$  der  $\mathbb{K}$ -konvergenten Folgen, und der Grenzwert  $\lim : c(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  ist eine  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Ihr Bild ist  $\mathbb{K}$ , der Kern ist der Unterraum  $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{K})$  aller Nullfolgen.

Der Grenzwert  $\lim : c(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  ist zudem sogar multiplikativ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$$

Diese Rechenregeln vereinfachen die Bestimmung von Grenzwerten.

😊 Ausführliche Beweise und Beispiele lernen Sie in der Analysis.

# Beispiel: Grenzwert von Reihen

Zu  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$  definieren wir die Folge  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$  der **Partialsommen**  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ . Wir erhalten den  $\mathbb{K}$ -Isomorphismus  $(\Sigma, \Delta) : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ :

$$\Sigma : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : a \mapsto s = \Sigma a, \quad s_n = \sum_{k=0}^n a_k,$$

$$\Delta : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : s \mapsto a = \Delta s, \quad a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Eine Folge  $a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  heißt **summierbar**, falls  $\Sigma a \in c(\mathbb{N}, \mathbb{K})$  gilt, also die Partialsommen  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergieren.

Für jede summierbare Folge  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$  definieren wir die **Summe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

Auch diese Zuordnung ist linear:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda \cdot a_k) = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Diese Rechenregeln vereinfachen die Bestimmung von Summen.

😊 Ausführliche Beweise und Beispiele lernen Sie in der Analysis.

**Beispiel 11s: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**

Sei  $X = ]a, b[$  ein reelles Intervall mit  $a < x_0 < b$  in  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ .  
 In  $\mathbb{R}^X = \text{Abb}(X, \mathbb{R}) = \{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \}$  liegen die Untervektorräume

$$\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R}) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) = \{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \},$$

$$\mathcal{C}^1(X, \mathbb{R}) = \{ F : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig differenzierbar} \}.$$

Darauf sind Differenzieren und Integrieren  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildungen:

$$D : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{C}^0 : F \mapsto f, \quad f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{F(t) - F(x)}{t - x},$$

$$I : \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{C}^1 : f \mapsto F, \quad F(x) = \int_{t=x_0}^x f(t) dt.$$

Dank Hauptsatz (HDI) gilt  $DI(f) = f$  und  $ID(F) = F - F(x_0)$ .  
 Wir erhalten so den Isomorphismus von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen

$$(I, D) : \mathcal{C}^0 \cong \mathcal{C}_0^1 := \{ F \in \mathcal{C}^1 \mid F(x_0) = 0 \}.$$

Beispiel: Ableitung und Integral

Die  $\mathbb{R}$ -Linearität der Ableitung  $D : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{C}^0 : F \mapsto F'$  bedeutet

$$(F + G)' = F' + G' \quad \text{und} \quad (\lambda F)' = \lambda F'$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Die  $\mathbb{R}$ -Linearität des Integrals  $I : \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{C}^1$  bedeutet

$$\int_{t=x_0}^x f(t) + g(t) dt = \int_{t=x_0}^x f(t) dt + \int_{t=x_0}^x g(t) dt \quad \text{und}$$

$$\int_{t=x_0}^x \lambda f(t) dt = \lambda \int_{t=x_0}^x f(t) dt.$$

😊 Aus  $DI(f) = f$  folgt sofort:  $D$  ist surjektiv, also  $\text{im}(D) = \mathcal{C}^0$ ,  
 und  $I$  ist injektiv, also  $\ker(I) = \{0\}$ . Aus  $ID(F) = F - F(x_0)$  folgt  
 $\ker(D) = \{ F = \text{const} \}$  und  $\text{im}(I) = \mathcal{C}_0^1 = \{ F \in \mathcal{C}^1 \mid F(x_0) = 0 \}$ .

😊 Je zwei Stammfunktionen  $F, G$  zu  $f$  unterscheiden sich nur durch  
 eine Konstante:  $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$ , also  $F - G = \text{const}$ .

😊 Durch die Integralfunktion  $F(x) = \int_{t=x_0}^x f(t) dt$  mit Start in  $x_0$   
 wird die Integrationskonstante durch  $F(x_0) = 0$  eindeutig festgelegt.

Sei  $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$  die Menge der stetigen Funktionen  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\mathcal{C}^n(X, \mathbb{R})$  die Menge der  $n$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen:

$$\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R}) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) = \{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \}$$

$$\mathcal{C}^n(X, \mathbb{R}) = \{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ diff'bar und } f' \in \mathcal{C}^{n-1}(X, \mathbb{R}) \}$$

$$\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(X, \mathbb{R})$$

$$\text{Poly}(X, \mathbb{R}) = \{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists P \in \mathbb{R}[t] \forall x \in X: f(x) = P(x) \}$$

Dies sind  $\mathbb{R}$ -lineare Unterräume von  $\text{Abb}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^X$ :

$$\mathbb{R}^X > \mathcal{C}^0 > \mathcal{C}^1 > \dots > \mathcal{C}^n > \dots > \mathcal{C}^\infty > \text{Poly}.$$

Hierzu beweisen Sie in der Analysis: Sind  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig so auch  $f + g$  und  $\lambda f$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Sind  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  sogar differenzierbar, so auch  $f + g$  und  $\lambda f$ , und es gilt  $(f + g)' = f' + g'$  und  $(\lambda f)' = \lambda f'$ .

**Aufgabe:** Nennen Sie jeweils ein Beispiel für die strikte Inklusion

$$\mathbb{R}^I > \mathcal{C}^0 > \mathcal{C}^1 > \dots > \mathcal{C}^n > \dots > \mathcal{C}^\infty > \text{Poly}.$$

**Lösung:** Zur Vereinfachung betrachten wir  $X = ]a, b[$  mit  $a < 0 < b$ .

- Die Vorzeichenfunktion  $h: X \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \text{sign}(x)$  ist unstetig, liegt also in  $\text{Abb}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^X$ , aber nicht in  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ .
- Die Betragsfunktion  $f_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto |x|$  liegt in  $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ , aber nicht in  $\mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ .
- Die Funktion  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto |x|x^n$  liegt in  $\mathcal{C}^n(X, \mathbb{R})$ , aber nicht in  $\mathcal{C}^{n+1}(X, \mathbb{R})$ .
- Die Exponentialfunktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto e^x$  liegt in  $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ , aber nicht in  $\text{Poly}(X, \mathbb{R})$ .

Ableitung und Integral stiften hierauf den  $\mathbb{R}$ -Isomorphismus

$$(I, D) : \mathcal{C}^n \cong \mathcal{C}_0^{n+1} := \{ F \in \mathcal{C}^{n+1} \mid F(x_0) = 0 \}.$$

Beim Differenzieren verlieren wir eine Stufe an Glattheit,  
beim Integrieren gewinnen wir eine Stufe an Glattheit.

Slogan: Integrieren glättet, Differenzieren raut auf.

Der  $\mathbb{R}$ -Isomorphismus gilt auch für  $n = \infty$ :

$$(I, D) : \mathcal{C}^\infty \cong \mathcal{C}_0^\infty := \{ F \in \mathcal{C}^\infty \mid F(x_0) = 0 \}.$$

Zur Vereinfachung betrachten wir  $X = ]a, b[$  mit  $a < 0 < b$  und  $x_0 = 0$ .  
Speziell für Polynomfunktionen erhalten wir die expliziten Formeln

$$D : F(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \mapsto f(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1},$$

$$I : f(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k \mapsto F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} b_k x^{k+1}.$$

Daraus folgt unmittelbar  $DI(f) = f$  und  $ID(F) = F - F(0)$ .  
Wir erhalten so den Isomorphismus von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen

$$(I, D) : \text{Poly} \cong \text{Poly}_0 := \{ F \in \text{Poly} \mid F(0) = 0 \}.$$

**Satz I1τ: endlich erzeugter Unterraum**

Sei  $(V, +, \cdot)$  ein (rechts)linearer Raum über dem Ring  $(R, +, \cdot)$ .

Gegeben sei zudem eine endliche Familie  $u_1, \dots, u_n \in V$ .

(1) Diese Familie  $F = (u_1, \dots, u_n)$  definiert die  $R$ -lineare Abbildung

$$\Phi_F : R^n \rightarrow V : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto u_1\lambda_1 + \dots + u_n\lambda_n.$$

(2) Ihr Bild ist der von  $F = (u_1, \dots, u_n)$  in  $V$  **erzeugte Unterraum**:

$$V \geq \text{im}(\Phi_F) = u_1R + \dots + u_nR =: \langle u_1, \dots, u_n \rangle_R = U$$

Er besteht aus allen **Linearkombinationen** der Familie  $F$  über  $R$ .

(3) Diese Teilmenge  $U \subseteq V$  ist ein  $R$ -linearer Unterraum  $U \leq (V, +, \cdot)$  und zudem der kleinste, der die Elemente  $u_1, \dots, u_n$  enthält.

**Beispiele:** Im Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  über  $\mathbb{R}$  erhalten wir so als Unterräume

- die Gerade  $G = \langle (2, 1, 0) \rangle_{\mathbb{R}} = \langle (6, 3, 0) \rangle_{\mathbb{R}} = \langle (4, 2, 0), (6, 3, 0) \rangle_{\mathbb{R}}$ ,
- die Ebene  $E = \langle (1, 2, 5), (0, 3, 2) \rangle_{\mathbb{R}} = \langle (1, 2, 5), (0, 3, 2), (1, 5, 7) \rangle_{\mathbb{R}}$ .

**Beispiel I1u: Unterräume in  $\mathbb{Z}$** 

In  $\mathbb{Z}$  gilt  $\langle 3, 5 \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$  und  $\langle 8, 12 \rangle_{\mathbb{Z}} = 4\mathbb{Z}$  und  $\langle 24, 42 \rangle = 6\mathbb{Z}$ .

Allgemein gilt  $\langle u_1, \dots, u_n \rangle_{\mathbb{Z}} = \text{ggT}(u_1, \dots, u_n)\mathbb{Z}$ .

**Beweis:** Für  $n = 1$  ist die Aussage trivial. Wir betrachten daher  $n = 2$ . Sei  $U = \langle u_1, u_2 \rangle = u_1\mathbb{Z} + u_2\mathbb{Z}$  und  $d = \text{ggT}(u_1, u_2)$ . Wir zeigen  $U = d\mathbb{Z}$ :

Dank  $d \mid u_1$  und  $d \mid u_2$  existieren  $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$  mit  $dd_1 = u_1$  und  $dd_2 = u_2$ .

Daraus folgt  $u_1a_1 + u_2a_2 = d(d_1a_1 + d_2a_2) \in d\mathbb{Z}$ , also  $U \subseteq d\mathbb{Z}$ .

Zu  $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}$  existieren dank Satz A2i Bézout-Koeffizienten  $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ , sodass  $u_1a_1 + u_2a_2 = d$  gilt. Dies zeigt  $d \in U$ , also  $d\mathbb{Z} \subseteq U$ .

Die allgemeine Aussage folgt nun per Induktion über  $n$ :

Wir zeigen  $\langle u_1, \dots, u_n \rangle_{\mathbb{Z}} = d\mathbb{Z}$  mit  $d = \text{ggT}(u_1, \dots, u_n)$ .

Nach Induktionsvoraussetzung haben wir  $\langle u_2, \dots, u_n \rangle_{\mathbb{Z}} = v\mathbb{Z}$  mit

$v = \text{ggT}(u_2, \dots, u_n)$ . Daraus folgt  $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle_{\mathbb{Z}} = u_1\mathbb{Z} + v\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$

mit  $d = \text{ggT}(u_1, v) = \text{ggT}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ . **QED**

**Satz I1v: erzeugter Unterraum**

Sei  $(V, +, \cdot)$  ein (rechts)linearer Raum über dem Ring  $(R, +, \cdot)$ . Gegeben sei eine Familie  $F = (u_i)_{i \in I}$  von Vektoren  $u_i \in V$ .

(1) Diese Familie  $F$  definiert die  $R$ -lineare Abbildung

$$\Phi_F : R^{(I)} \rightarrow V : (\lambda_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} u_i \lambda_i.$$

(2) Ihr Bild ist der von  $F = (u_i)_{i \in I}$  in  $V$  **erzeugte Unterraum**:

$$U \geq \text{im}(\Phi_F) = \left\{ \sum_{i \in I} u_i \lambda_i \mid \lambda \in R^{(I)} \right\} =: \langle u_i \mid i \in I \rangle_R = U$$

Er besteht aus allen **Linearkombinationen** der Familie  $F$  über  $R$ .

(3) Diese Teilmenge  $U \subseteq V$  ist ein  $R$ -linearer Unterraum  $U \leq (V, +, \cdot)$  und zudem der kleinste, der alle Elemente  $u_i$  mit  $i \in I$  enthält.

Im Spezialfall  $I = \{1, \dots, n\}$  und  $F = (u_1, \dots, u_n)$  gilt wie zuvor

$$\Phi_F : R^n \rightarrow V : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto u_1 \lambda_1 + \dots + u_n \lambda_n,$$

$$U = \langle u_1, \dots, u_n \rangle_R = u_1 R + \dots + u_n R.$$

**Erzeugte Unterräume**

Für  $R$ -lineare Unterräume  $U_i \leq V$  definieren wir ihre Summe durch

$$U = \sum_{i \in I} U_i := \left\{ \sum_{i \in I} u_i \mid u_i \in U_i \wedge \#\text{supp}(u) < \infty \right\}.$$

Damit ist  $U \leq V$  ein  $R$ -linearer Unterraum, und zwar der kleinste, der alle  $U_i$  mit  $i \in I$  enthält (I1x). Somit gilt  $\langle u_i \mid i \in I \rangle = \sum_{i \in I} u_i R$ .

**Beweis des Satzes:** (0) Die Abbildung

$$\Phi_F : R^{(I)} \rightarrow V : (\lambda_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} u_i \lambda_i$$

ist wohldefiniert, denn die Summe ist (im Wesentlichen) endlich.

(1) Die Abbildung  $\Phi_F$  ist  $R$ -linear. Für alle  $\lambda, \mu \in R^{(I)}$  und  $a \in R$  gilt:

$$\begin{aligned} \Phi_F(\lambda + \mu \cdot a) &= \sum_{i \in I} u_i (\lambda_i + \mu_i a) = \sum_{i \in I} u_i \lambda_i + u_i \mu_i a \\ &= \sum_{i \in I} (u_i \lambda_i) + \sum_{i \in I} (u_i \mu_i) a = \Phi_F(\lambda) + \Phi_F(\mu) \cdot a \end{aligned}$$

(2) Dank Satz I1R ist die Bildmenge  $U = \text{im}(\Phi_F) \leq V$  ein Unterraum.

(3) Jeder Unterraum  $U' \leq V$ , der alle  $u_i$  mit  $i \in I$  umfasst, enthält auch  $u_i R$  für jedes  $i \in I$  und somit  $U = \langle u_i \mid i \in I \rangle = \sum_{i \in I} u_i R$ . □

## Beispiel: Polynome

Die folgenden ehrlichen Anwendungsbeispiele sind wunderbar konkret und anschaulich, doch etwas vertrackt. Sie illustrieren eindrücklich, warum wir nicht nur endlich erzeugte Unterräume betrachten wollen, denn viele natürliche Beispiele sind nun mal nicht endlich erzeugt.

**Beispiel:** Sei  $K$  ein kommutativer Ring und  $K[X]$  der Polynomring. Dann gilt  $K[X] = \langle X^n \mid n \in \mathbb{N} \rangle_K$ , denn jedes Polynom  $P \in K[X]$  schreibt sich (sogar eindeutig) als eine Linearkombination

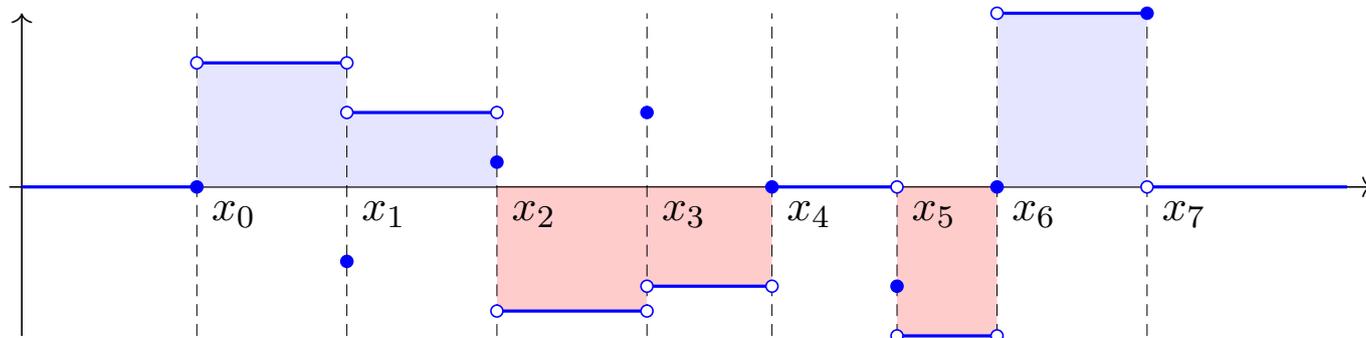
$$P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n \quad \text{mit} \quad a \in K^{(\mathbb{N})}.$$

Der Raum  $K[X]$  kann über  $K$  nicht endlich erzeugt werden, denn  $\langle P_1, \dots, P_n \rangle_K \leq K[X]_{\leq m}$  mit  $m = \max\{\deg P_1, \dots, \deg P_n\}$ .

**Übung:** Dasselbe gilt allgemein für  $R^{(I)} = \langle e_i \mid i \in I \rangle$ , siehe I1Q: Ist die Menge  $I$  unendlich, so ist  $R^{(I)}$  über  $R$  nicht endlich erzeugt.

**Übung:** Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  sind ein Vektorraum über  $\mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$ . Dieser kann über  $\mathbb{Q}$  nicht endlich oder abzählbar erzeugt werden.

## Beispiel: Treppenfunktionen



Eine Treppenfunktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stückweise konstant. Ausführlich:

Wir nennen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  **Treppenfunktion**, wenn es eine Unterteilung  $U = \{x_0 < x_1 < \dots < x_\ell\} \subset \mathbb{R}$  gibt und Werte  $f_1, \dots, f_\ell \in \mathbb{R}$ , so dass  $f(x) = f_k$  für  $x_{k-1} < x < x_k$  gilt, sowie  $f(x) = 0$  für  $x < x_0$  und  $x > x_\ell$ .

Wir schreiben hierfür kurz  $f \in T_U$  und setzen  $T = T(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \bigcup_U T_U$ .

### Satz I1w: eindimensionale Treppenfunktionen

Die Treppenfunktionen  $T(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  bilden einen  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum. Dieser wird erzeugt von den Indikatorfunktionen  $\mathbf{I}_{[a,b]}$  mit  $a \leq b$  in  $\mathbb{R}$ . Dabei gelten die Relationen  $\mathbf{I}_{[a,c]} = \mathbf{I}_{[a,b]} + \mathbf{I}_{[b,c]} - \mathbf{I}_{[b,b]}$  für  $a < b < c$ .

😊 Zu jeder Unterteilung  $U \subset \mathbb{R}$  ist  $T_U \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  ein Untervektorraum.

⚠ Zu jeder Treppenfunktion  $f$  existieren unendlich viele angepasste Unterteilungen  $U \subset \mathbb{R}$ , insbesondere können wir jede Unterteilung  $U \subset \mathbb{R}$  durch Einfügen weiterer Zwischenstellen zu  $U' \supseteq U$  verfeinern.

**Beweis des Satzes:** Bei Verfeinerung  $U \subseteq U' \subset \mathbb{R}$  gilt  $T_U \leq T_{U'} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ . Damit ist auch die Vereinigung  $T = \bigcup_U T_U$  ein Untervektorraum in  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ :

- Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Für  $f \in T$  gilt  $f \in T_U$  für ein  $U \subset \mathbb{R}$ . Also liegt auch das Vielfache  $\lambda f \in T_U$  in  $T$ .
- Seien  $f, g \in T$ . Somit gilt  $f \in T_U$  und  $g \in T_V$ . Daraus folgt  $f, g \in T_W$  mit  $W = U \cup V$ . Also liegt auch die Summe  $f + g \in T_W$  in  $T$ .

Für jedes endliche Intervall  $Q \subset \mathbb{R}$  ist  $\mathbf{I}_Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Treppenfunktion. Umgekehrt ist jede Treppenfunktion  $f \in T$  eine Linearkombination

$$f = \sum_{k=1}^{\ell} f_k \mathbf{I}_{]x_{k-1}, x_k[} + \sum_{k=0}^{\ell} f(x_k) \mathbf{I}_{[x_k, x_k]}.$$

Für  $a < b$  gilt  $\mathbf{I}_{]a, b[} = \mathbf{I}_{[a, b]} - \mathbf{I}_{[a, a]} - \mathbf{I}_{[b, b]}$ . Somit wird der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  erzeugt von den Indikatorfunktionen  $\mathbf{I}_{[a, b]}$  mit  $a \leq b$  in  $\mathbb{R}$ . QED

Vorsicht ist geboten: Die Schreibweise als Linearkombination von Indikatorfunktionen  $\mathbf{I}_{[a, b]}$  ist keineswegs eindeutig. Zum Beispiel gilt

$$\mathbf{I}_{[0, 2]} = \mathbf{I}_{[0, 1]} + \mathbf{I}_{[1, 2]} - \mathbf{I}_{[1, 1]}.$$

😊 Dies ist ein schönes Beispiel für die (später ausgeführten) Begriffe *Erzeugendensystem* und *lineare Unabhängigkeit* und *Basis*:

Die Familie der Indikatorfunktionen  $\mathbf{I}_{[a, b]}$  mit  $a \leq b$  in  $\mathbb{R}$  erzeugt  $T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , aber sie ist, wie hier zu sehen, linear abhängig und somit keine Basis.

😊 In der Analysis sind Treppenfunktionen ein erster wichtiger Schritt zur Integration von Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und allgemein  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Zu diesem Zweck konstruiert man das Integral  $\int_{\mathbb{R}} : T(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  als  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung mit der Normierung  $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[a, b]}(x) dx = b - a$ .

Diese Bedingung legt das Integral auf ganz  $T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  eindeutig fest, da die Indikatorfunktionen  $\mathbf{I}_{[a, b]}$  den Vektorraum  $T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  erzeugen!

Wir führen diese Konstruktion ab Seite I237 detailliert aus.

Schnitt und Summe von Unterräumen sind eine nützliche und allgegenwärtige Konstruktion, daher schauen wir genauer hin:

**Satz I1x:** Unterräume bilden einen vollständigen Verband.

Sei  $V$  ein  $R$ -linearer Raum über dem Ring  $R$  sowie

$(U_i)_{i \in I}$  eine Familie von  $R$ -linearen Unterräumen  $U_i \leq V$ .

(1) Die Schnittmenge  $A = \bigcap_{i \in I} U_i$  ist ein  $R$ -linearer Unterraum in  $V$  und zudem der größte, der in allen Unterräumen  $U_i$  enthalten ist.

(2) Die Summe  $B = \sum_{i \in I} U_i$  ist ein  $R$ -linearer Unterraum in  $V$  und zudem der kleinste, der alle Unterräume  $U_i$  enthält.

Wir betrachten die Menge  $X = \{ U \leq V \}$  aller Unterräume von  $V$ .

Bezüglich Inklusion ist  $(X, \subseteq)$  eine geordnete Menge (Poset F1A).

Dank (1) und (2) ist  $(X, \subseteq)$  ein vollständiger Verband (gemäß F1L)

mit Infimum  $\bigwedge_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} U_i$  und Supremum  $\bigvee_{i \in I} U_i = \sum_{i \in I} U_i$ .

**Beispiel:** Jede Menge  $\Omega$  definiert den vollständigen Verband  $(\mathfrak{P}(\Omega), \subseteq)$ . Hierbei ist  $\inf U = \bigcap U$  der Schnitt und  $\sup U = \bigcup U$  die Vereinigung.

😊 Wir sehen nun für Unterräume von  $V$  eine ähnliche Struktur, mit Infimum  $\bigwedge_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} U_i$  und Supremum  $\bigvee_{i \in I} U_i = \sum_{i \in I} U_i$ .

⚠ Die Vereinigung von Unterräumen ist i.A. kein Unterraum, eindruckliche Gegenbeispiele kennen Sie bereits von Seite I150.

Die Rolle des Supremums übernimmt hier die Summe; das ist nützlich zu wissen und erklärt die zuvor beobachteten Zusammenhänge.

**Aufgabe:** Rechnen Sie die Aussagen des Satzes anhand der zugehörigen Definitionen sorgsam nach.

**Lösung:** Für jeden Index  $i \in I$  ist  $U_i \leq V$  ein Unterraum. Gemäß 11P bedeutet das  $0 \in U_i$  und  $U_i + U_i \subseteq U_i$  und  $U_i \cdot R \subseteq U_i$ .

(1a) Wir zeigen, dass auch  $A = \bigcap_{i \in I} U_i$  ein Unterraum ist.

Wir zeigen  $0 \in A$ : Da  $0 \in U_i$  für alle  $i \in I$  gilt, folgt sofort  $0 \in A$ .

Wir zeigen  $A + A \subseteq A$ : Hierzu seien  $x, y \in A$ . Das bedeutet  $x, y \in U_i$  für alle  $i \in I$ . Daraus folgt  $x + y \in U_i$  für alle  $i \in I$ . Wir schließen  $x + y \in A$ .

Wir zeigen  $A \cdot R \subseteq A$ : Hierzu seien  $x \in A$  und  $\lambda \in R$ . Das bedeutet  $x \in U_i$  für alle  $i \in I$ . Daraus folgt  $x \cdot \lambda \in U_i$  für alle  $i \in I$ , also  $x \cdot \lambda \in A$ .

(1b) Sei  $U \leq V$  ein Unterraum, sodass  $A \subseteq U_i$  für alle  $i \in I$  gilt.

Daraus folgt  $U \subseteq \bigcap_{i \in I} U_i = A$ . Somit ist  $A$  der größte Unterraum, der in allen Unterräumen  $U_i$  enthalten ist.

(2a) Wir zeigen, dass auch  $B = \sum_{i \in I} U_i$  ein Unterraum ist:

$$B = \sum_{i \in I} U_i := \left\{ \sum_{i \in I} u_i \mid u_i \in U_i \wedge \#\text{supp}(u) < \infty \right\}$$

Wir haben  $0 \in B$  dank  $0 = \sum_i 0$  mit  $0 \in U_i$  für alle  $i \in I$ .

Wir zeigen  $B + B \subseteq B$ : Hierzu seien  $x, y \in B$ . Das bedeutet  $x = \sum_i x_i$  und  $y = \sum_i y_i$  mit  $x_i, y_i \in U_i$ , und nur endlich viele Summanden sind ungleich Null. Daraus folgt  $x + y = \sum_i (x_i + y_i) \in B$ .

Wir zeigen  $B \cdot R \subseteq B$ : Hierzu seien  $x \in B$  und  $\lambda \in R$ . Das bedeutet  $x = \sum_i x_i$  wie oben. Daraus folgt  $x \cdot \lambda = \sum_i (x_i \cdot \lambda) \in B$ .

(2b) Nach Konstruktion der Summe gilt  $B \supseteq U_i$  für alle  $i \in I$ .

Sei  $U \leq V$  ein Unterraum, sodass  $U \supseteq U_i$  für alle  $i \in I$  gilt.

Daraus folgt  $U \supseteq \sum_{i \in I} U_i = B$ , da wir in  $U$  summieren können.

Somit ist  $B$  der kleinste Unterraum, der alle Unterräume  $U_i$  enthält.

Jeder Unterraum  $U \leq \mathbb{Z}$  ist von der Form  $U = u\mathbb{Z}$  mit  $u \in \mathbb{N}$ . (G1v)  
Daraus erhalten wir das folgende schöne und nützliche Ergebnis:

### Satz I1Y: Schnitt und Summe von Unterräumen in $\mathbb{Z}$

Zu jedem  $i \in I$  sei  $U_i = u_i\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$  ein  $\mathbb{Z}$ -linearer Unterraum.

(1) Die Schnittmenge  $A = \bigcap_{i \in I} U_i$  ist ein  $\mathbb{Z}$ -linearer Unterraum in  $\mathbb{Z}$ ,  
und zudem der größte, der in allen Unterräumen  $U_i$  enthalten ist.

Konkret gilt dabei  $A = a\mathbb{Z}$  mit  $a = \text{kgV}(u_i : i \in I)$ .

(2) Die Summe  $B = \sum_{i \in I} U_i$  ist ein  $\mathbb{Z}$ -linearer Unterraum in  $\mathbb{Z}$   
und zudem der kleinste, der alle Unterräume  $U_i$  enthält.

Konkret gilt dabei  $B = b\mathbb{Z}$  mit  $b = \text{ggT}(u_i : i \in I)$ .

 Beachten Sie, wie „kleinste“ und „größte“ vertauscht werden.  
Der folgende Beweis erklärt ganz konkret, warum dies so sein muss.

**Aufgabe:** Beweisen Sie den vorigen Satz.

Zeigen Sie zunächst die folgende Äquivalenz:

(0) Genau dann gilt  $b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}$ , wenn  $a \mid_{\mathbb{Z}} b$  gilt.

**Lösung:** „ $\Rightarrow$ “: Aus  $b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}$  folgt insbesondere  $b \in a\mathbb{Z}$ .

Demnach gilt  $b = aa'$  für ein  $a' \in \mathbb{Z}$ , und somit  $a \mid_{\mathbb{Z}} b$ .

„ $\Leftarrow$ “: Teilbarkeit  $a \mid_{\mathbb{Z}} b$  bedeutet, es existiert  $a' \in \mathbb{Z}$  mit  $aa' = b$ .

Demnach gilt  $b \in a\mathbb{Z}$ , und daraus folgt  $b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}$ .

**Bemerkung:** Die Definition der Teilbarkeit und die obige Rechnung  
übertragen sich von  $\mathbb{Z}$  wörtlich auf jeden kommutativen Ring.

Die Besonderheit des Rings  $\mathbb{Z}$  ist der Klassifikationssatz G1v:  
Jeder Unterraum  $U \leq \mathbb{Z}$  ist von der Form  $U = u\mathbb{Z}$  mit  $u \in \mathbb{N}$ .

**Beweis des Satzes:**

(1) Sei  $A = \bigcap_{i \in I} u_i \mathbb{Z}$ . Dank G1v gilt  $A = a\mathbb{Z}$  für ein  $a \in \mathbb{N}$ .

(a) Aus  $A = a\mathbb{Z} \subseteq u_i \mathbb{Z}$  folgt  $u_i \mid a$ . Dies gilt für alle  $i \in I$ .

(b) Angenommen,  $a' \in \mathbb{Z}$  erfüllt  $u_i \mid a'$  für alle  $i \in I$ .

Dann gilt  $a'\mathbb{Z} \subseteq u_i \mathbb{Z}$  für alle  $i \in I$ , also  $a'\mathbb{Z} \subseteq A$ .

Aus  $a'\mathbb{Z} \subseteq A = a\mathbb{Z}$  wiederum folgt  $a \mid a'$ .

Das bedeutet,  $a$  ist ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von  $(u_i)_{i \in I}$ .

(2) Sei  $B = \sum_{i \in I} u_i \mathbb{Z}$ . Dank G1v gilt  $B = b\mathbb{Z}$  für ein  $b \in \mathbb{N}$ .

(a) Aus  $u_i \mathbb{Z} \subseteq B = b\mathbb{Z}$  folgt  $b \mid u_i$ . Dies gilt für alle  $i \in I$ .

(b) Angenommen,  $b' \in \mathbb{Z}$  erfüllt  $b' \mid u_i$  für alle  $i \in I$ .

Dann gilt  $u_i \mathbb{Z} \subseteq b'\mathbb{Z}$  für alle  $i \in I$ , also  $B \subseteq b'\mathbb{Z}$ .

Aus  $B = b\mathbb{Z} \subseteq b'\mathbb{Z}$  wiederum folgt  $b' \mid b$ .

Das bedeutet,  $b$  ist ein größter gemeinsamer Teiler von  $(u_i)_{i \in I}$ .

**Beispiel:** Zur Illustration nenne ich

$$12\mathbb{Z} + 15\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z},$$

$$12\mathbb{Z} \cap 15\mathbb{Z} = 60\mathbb{Z}.$$

Sie können sich leicht weitere Beispiele ausdenken wie

$$12\mathbb{Z} + 15\mathbb{Z} + 7\mathbb{Z} = 1\mathbb{Z},$$

$$12\mathbb{Z} \cap 15\mathbb{Z} \cap 7\mathbb{Z} = 420\mathbb{Z}.$$

😊 Konkrete numerische Beispiele können wir wunderbar effizient mit dem euklidischen Algorithmus A2H berechnen.

😊 Vergleichen Sie dies mit den Beispielen und dem Beweis von I1U. Warum ist der Beweis des allgemeineren Satzes I1Y so leicht?

**Aufgabe:** (1) Die Vereinigung von Unterräumen ist i.A. kein Unterraum. Nennen Sie möglichst einfache und anschauliche Gegenbeispiele!

(2) Seien  $U_1, U_2 \leq V$  Unterräume. Genau dann ist  $U := U_1 \cup U_2$  selbst ein Unterraum in  $V$ , wenn  $U_1 \leq U_2$  oder  $U_2 \leq U_1$  gilt.

(3) Wie sieht es aus für eine aufsteigende Kette  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von Unterräumen, also  $U_0 \leq U_1 \leq U_2 \leq \dots \leq V$ ?

**Lösung:** (1) Wir betrachten den Raum  $R^2$  über einem Ring  $R$ . Hierin sind  $U_1 = Re_1 = \{ (x, 0) \mid x \in R \}$  und  $U_2 = Re_2 = \{ (0, y) \mid y \in R \}$  Unterräume, doch  $U = U_1 \cup U_2$  ist kein Unterraum von  $R^2$ :  
Es gilt  $(1, 0) \in U$  und  $(0, 1) \in U$ , aber  $(1, 0) + (0, 1) \notin U$ .

(2) Wir zeigen die Kontraposition:

Angenommen es gilt  $U_1 \not\leq U_2$  und  $U_2 \not\leq U_1$ .

Dann ist  $U := U_1 \cup U_2$  kein Unterraum in  $V$ .

Beweis hierzu: Es gibt Vektoren  $v_1 \in U_1 \setminus U_2$  und  $v_2 \in U_2 \setminus U_1$ .

Wir betrachten  $v = v_1 + v_2$ . Wäre  $v \in U$ , so sind zwei Fälle möglich:

Im Falle  $v \in U_1$  hätten wir  $v_2 = v - v_1 \in U_1$ ; Widerspruch.

Im Falle  $v \in U_2$  hätten wir  $v_1 = v - v_2 \in U_2$ ; Widerspruch.

Wir schließen  $v \notin U$ . Somit ist  $U$  kein Unterraum in  $V$ .

(3) Sei  $U_0 \leq U_1 \leq U_2 \leq \dots \leq V$  eine Kette von Unterräumen in  $V$ .

Dann ist ihre Vereinigung  $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$  wiederum ein Unterraum in  $V$ .

Beweisen Sie dies als Übung, oder besser gleich den folgenden Satz.

**Satz I1Z: Vereinigung einer gerichteten Familie von Unterräumen**

Sei  $V$  ein  $R$ -linearer Raum. Hierin sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine gerichtete Familie von Unterräumen  $U_i \leq V$ , indiziert durch eine gerichtete Menge  $(I, \leq)$ :

(a) Für je zwei vergleichbare Indizes  $i \leq j$  in  $I$  gelte  $U_i \leq U_j$  in  $V$ .

(b) Zu je zwei Indizes  $i, j \in I$  existiere ein  $k \in I$  mit  $i \leq k$  und  $j \leq k$ .

Dann ist die Vereinigung  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  ein  $R$ -linearer Unterraum von  $V$ .

**Bemerkung:** Eine **prägeordnete Menge**  $(I, \leq)$  besteht aus einer Menge  $I$  und einer Präordnung  $\leq$  auf  $I$ , siehe Definition F1A.

Wir nennen  $(I, \leq)$  eine **gerichtete Menge** und  $\leq$  eine **Richtung**, falls jede endliche Teilmenge in  $I$  eine obere Schranke in  $I$  hat (F1G).

Das bedeutet  $I \neq \emptyset$  und zu  $i, j \in I$  existiert  $k \in I$  mit  $i \leq k$  und  $j \leq k$ .

In Satz I1Z sprechen wir daher von einer **gerichteten Familie**  $(U_i)_{i \in I}$  von Unterräumen  $U_i \leq V$ , indiziert durch die gerichtete Menge  $(I, \leq)$ .

**Beispiele:** Die geordneten Mengen  $(\mathbb{N}, \leq)$  und  $(\mathbb{R}, \leq)$  sind gerichtet.

**Aufgabe:** Beweisen Sie diesen Satz.

**Lösung:** Wir zeigen, dass  $U \leq V$  ein  $R$ -linearer Unterraum ist.

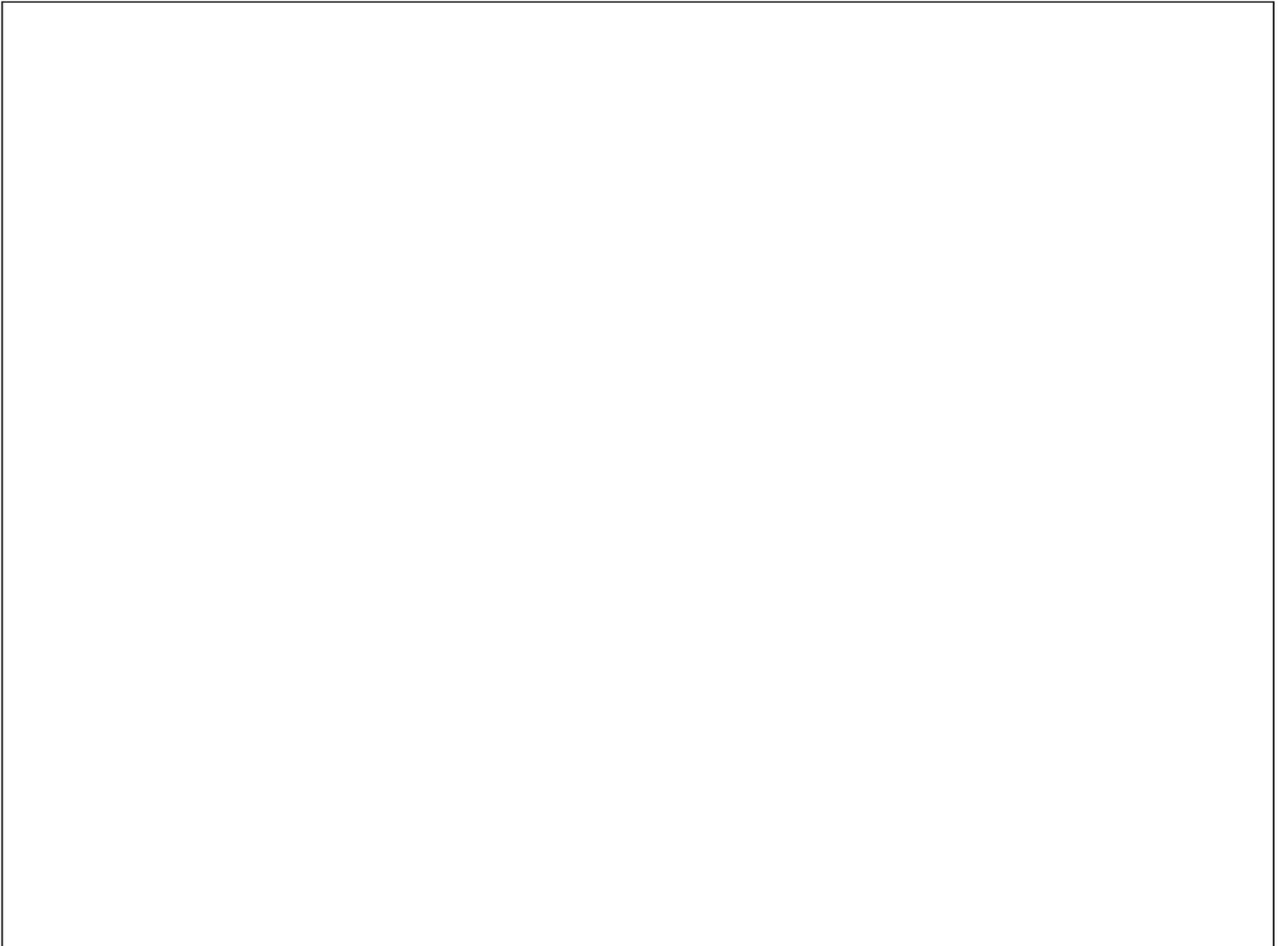
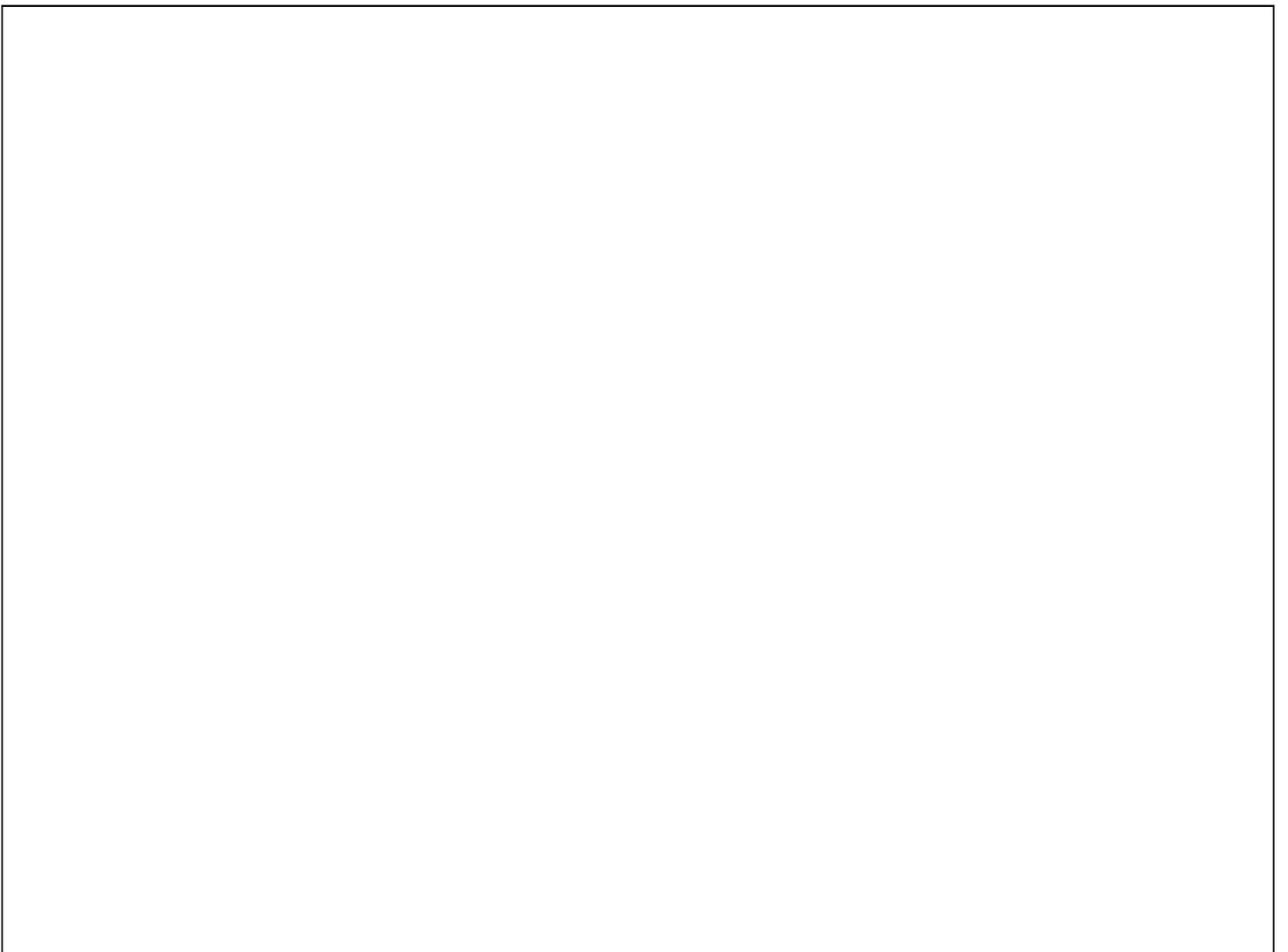
(0) Dank  $I \neq \emptyset$  existiert ein  $i \in I$ . Da  $U_i \leq V$  ein Unterraum ist, haben wir den Nullvektor  $0 \in U_i$ . Somit gilt  $0 \in U = \bigcup_{i \in I} U_i$ .

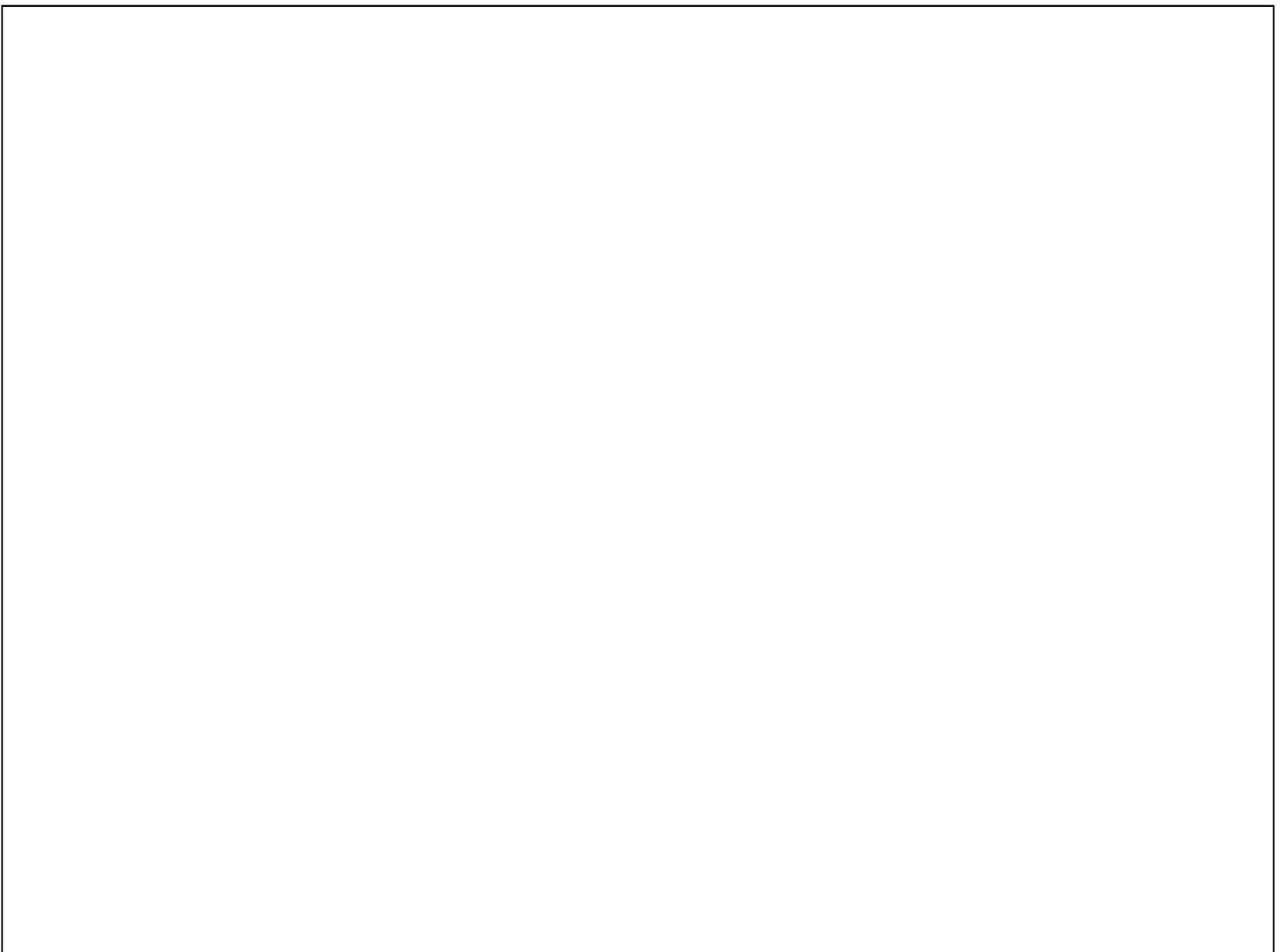
(1) Zu je zwei Vektoren  $u, v \in U$  existieren Indizes  $i, j \in I$  mit  $u \in U_i$  und  $v \in U_j$ . Hierzu wiederum existiert eine obere Schranke  $k \in I$  mit  $i \leq k$  und  $j \leq k$ , also  $U_i \leq U_k$  und  $U_j \leq U_k$ , und somit  $u, v \in U_k$ .

Da  $U_k \leq V$  ein Unterraum ist, gilt  $u + v \in U_k$ , also  $u + v \in U$ .

(2) Zu  $u \in U$  existiert  $i \in I$ , sodass  $u \in U_i$  gilt. Da  $U_i \leq V$  ein Unterraum ist, gilt  $Ru \leq U_i$  bzw.  $uR \leq U_i$ . Somit gilt  $Ru \leq U$  bzw.  $uR \leq U$ .

😊 Eigenschaften (0) und (2) gelten für jede nicht-leere Familie  $(U_i)_{i \in I}$  von Unterräumen  $U_i \leq V$ . Für die Abgeschlossenheit unter Addition (1) benötigen wir mehr: Uns genügt eine gerichtete Familie  $(U_i)_{i \in I}$ .





Vorbild: Zum Unterraum  $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$  konstruieren wir den Quotienten  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Die Quotientenabbildung  $q: \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ist  $\mathbb{Z}$ -linear mit  $\ker(q) = n\mathbb{Z}$ .

Allgemein: Sei  $V$  ein  $R$ -linearer Raum und  $U \leq V$  ein Unterraum. Insbesondere ist die Teilmenge  $U \leq (V, +)$  eine Untergruppe, es gilt also  $0 \in U$  und  $-U \subseteq U$  und  $U + U \subseteq U$ . Daraus folgt:

Der Unterraum  $U \leq V$  definiert auf  $V$  die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x - y \in U.$$

- 1 Reflexivität: Es gilt  $x \sim x$ , denn  $x - x = 0 \in U$ .
- 2 Symmetrie:  $x \sim y$  bedeutet  $x - y \in U$ , also  $y - x \in U$ , somit  $y \sim x$ .
- 3 Transitivität:  $x \sim y$  und  $y \sim z$  bedeuten  $x - y \in U$  und  $y - z \in U$ , daraus folgt  $U \ni (x - y) + (y - z) = x - z$ , somit  $x \sim z$ .

**Beispiel:** Für  $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$  erhalten wir die Kongruenz  $x \equiv y \Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}$ . Die Äquivalenzklasse von  $x$  ist  $[x] = x + n\mathbb{Z} = \{x + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Der Quotient ist demnach  $q: \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}: x \mapsto [x] = x + n\mathbb{Z}$ .

Die Menge  $V$  wird in Äquivalenzklassen bezüglich  $\sim$  zerlegt (E318). Zu jedem Vektor  $x \in V$  haben wir die zugehörige Äquivalenzklasse:

$$[x] = x + U := \{x + u \mid u \in U\}$$

Alle Äquivalenzklassen fassen wir zur Quotientenmenge zusammen:

$$V/U := \{[x] = x + U \mid x \in V\}$$

Die zugehörige Quotientenabbildung ist demnach:

$$q: V \twoheadrightarrow V/U: x \mapsto [x] = x + U$$

**Beispiel:** Für  $U = \{0\}$  erhalten wir  $V/\{0\} = \{\{x\} \mid x \in V\}$ . Die Quotientenabbildung  $q: V \rightarrow V/\{0\}: x \mapsto \{x\}$  ist bijektiv.

**Beispiel:** Für  $U = V$  erhalten wir  $V/V = \{V\}$ .

Die Quotientenabbildung  $q: V \rightarrow V/V: x \mapsto V$  ist konstant.

Diese beiden Extremfälle kommen also natürlich vor, siehe E321. Interessant sind vor allem die Fälle dazwischen, also  $0 < U < V$ .

## Konstruktion der Quotientengruppe $(U/V, +)$

Aus  $x \sim x'$  und  $y \sim y'$  folgt  $x + y \sim x' + y'$ , denn

$$(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') \in U + U \subseteq U$$

Somit erhalten wir auf  $V/U$  eine wohldefinierte Addition

$$+ : V/U \times V/U \rightarrow V/U : ([x], [y]) \mapsto [x] + [y] := [x + y].$$

Wohldefiniert bedeutet hier: Das Ergebnis von  $[x + y]$  hängt nur von den Klassen  $[x], [y]$  ab, und nicht von der Wahl der Repräsentanten  $x, y$ .

Wählen wir statt  $x, y$  andere Repräsentanten  $x', y'$ , so ist die Summe  $x' + y' \sim x + y$  äquivalent, die Klasse  $[x' + y'] = [x + y]$  also gleich.

Demnach ist  $q : (V, +) \twoheadrightarrow (V/U, +)$  ein surjektiver Homomorphismus, und die Gruppeneigenschaften übertragen sich von  $(V, +)$  auf  $(V/U, +)$ .

**Bemerkung:** Wir können die Definition  $[x] + [y] = [x + y]$  auch als Komplexverknüpfung betrachten (G1D), denn für alle  $x, y \in V$  gilt

$$(x + U) + (y + U) = (x + y) + (U + U) = (x + y) + U.$$

**Beispiel:** Für  $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$  erhalten wir so die Gruppe  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ .

## Konstruktion des Quotientenraumes $(U/V, +, \cdot)$

Aus  $x \sim x'$  und  $\lambda \in R$  folgt  $x \cdot \lambda \sim x' \cdot \lambda$ , denn

$$(x \cdot \lambda) - (x' \cdot \lambda) = (x - x') \cdot \lambda \in U \cdot R \subseteq U$$

Somit erhalten wir auf  $V/U$  eine wohldefinierte Skalarmultiplikation

$$\cdot : V/U \times R \rightarrow V/U : ([x], \lambda) \mapsto [x] \cdot \lambda = [x \cdot \lambda].$$

Nach Voraussetzung ist  $\cdot : V \times R \rightarrow V$  eine distributive Operation (I1B), und diese Eigenschaft überträgt sich auf  $\cdot : V/U \times R \rightarrow V/U$ . (Übung!)

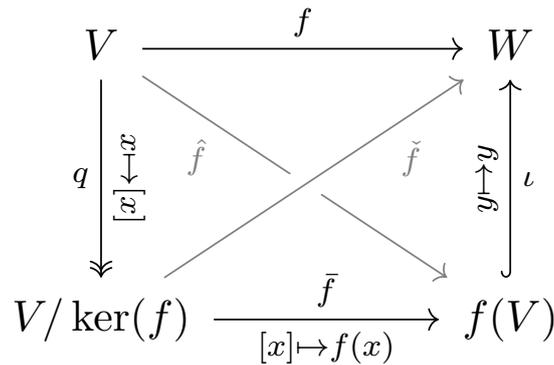
Die Rechnung gilt genauso bei Skalarmultiplikation von links.

Zusammenfassend erhalten wir das folgende schöne Ergebnis:

### Satz I2A: Quotientenraum und Quotientenhomomorphismus

Sei  $V$  ein  $R$ -linearer Raum und  $U \leq V$  ein  $R$ -linearer Unterraum. Dann ist der Quotient  $V/U$  wie oben erklärt ein  $R$ -linearer Raum, und die Quotientenabbildung  $q : V \twoheadrightarrow V/U : x \mapsto x + U$  ist  $R$ -linear. Nach Konstruktion ist  $q$  surjektiv mit  $\ker(q) = U$ .

😊 Slogan: Wir können jeden Unterraum  $U \leq V$  so „zu Null machen“.



**Satz I2B: die kanonische Faktorisierung**

Jede  $R$ -lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  faktorisiert gemäß  $f = \iota \circ \bar{f} \circ q$  in

- 1 die Quotientenabbildung  $q : V \twoheadrightarrow V / \ker(f) : x \mapsto [x]$ ,
- 2 die Bijektion  $\bar{f} : V / \ker(f) \xrightarrow{\sim} f(V) : [x] \mapsto f(x)$ ,
- 3 die Inklusion  $\iota : f(V) \hookrightarrow W : y \mapsto y$ .

Diese sind  $R$ -linear, insbesondere ist  $\bar{f}$  ein  $R$ -Isomorphismus. Wir nennen daher  $\bar{f}$  den **kanonischen Isomorphismus** zu  $f$ .

😊 So können wir jede  $R$ -lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  kanonisch zerlegen in die drei einfacheren Abbildungen  $q, \bar{f}, \iota$ . Diese heißen daher **kanonische Surjektion / Bijektion / Injektion**.

**Beweis:** Die Abbildungen  $q$  und  $\bar{f}$  und  $\iota$  sind wohldefiniert. Für Quotient  $q$  und Inklusion  $\iota$  ist dies klar nach Konstruktion. Für  $\bar{f}$  folgt dies aus dem Faktorisierungssatz I2E oder hier direkt:

(0) Wohldefiniertheit: Aus  $[x] = [x']$  folgt  $f(x) = f(x')$ , denn  $[x] = [x'] \Leftrightarrow x - x' \in \ker(f) \Leftrightarrow 0 = f(x - x') = f(x) - f(x') \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ .

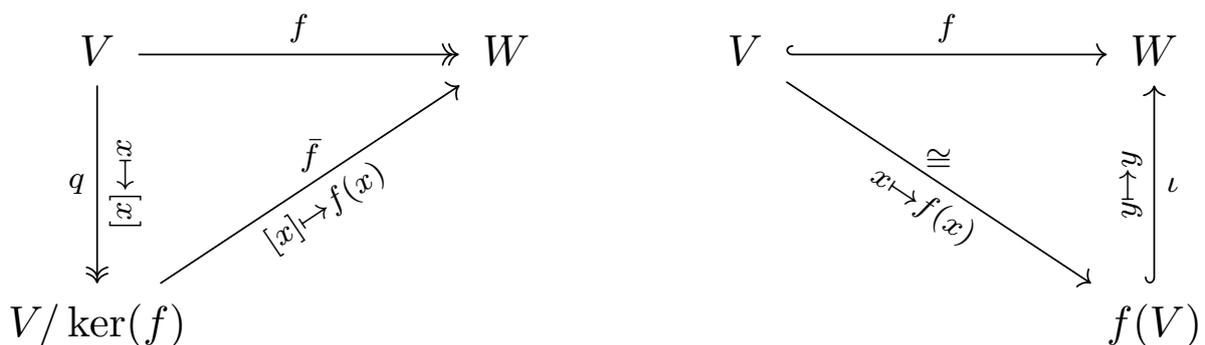
(1) Injektivität: Gleichheit  $\bar{f}(c) = \bar{f}(c')$  bedeutet: Für Repräsentanten  $x \in c$  und  $x' \in c'$  gilt  $f(x) = f(x')$ , somit  $x - x' \in \ker(f)$ , also  $c = c'$ .

(2) Surjektivität: Zu jedem Bildelement  $y \in f(V)$  existiert (mindestens) ein Urbild  $x \in V$  mit  $f(x) = y$ . Somit gilt auch  $\bar{f}([x]) = f(x) = y$ .

Die  $R$ -Linearität von  $q, \bar{f}, \iota$  folgt sofort aus der Konstruktion. ◻

**Bemerkung:** So können wir  $f$  anschaulich „bijektiv machen“ zu  $\bar{f}$ . Manchmal genügt surjektiv machen zu  $\hat{f}$  oder injektiv machen zu  $\check{f}$ .

Die einfachsten Beispiele ergeben sich wie folgt:



**Beispiel:** Ist  $f: V \rightarrow W$  surjektiv, so erhalten wir  $\bar{f}: V/\ker(f) \xrightarrow{\sim} W$ . Hier gilt  $f(V) = W$  und die Inklusion  $\iota: f(V) \hookrightarrow W$  ist die Identität.

**Beispiel:** Ist  $f: V \rightarrow W$  injektiv, so erhalten wir  $\bar{f}: V/\{0\} \xrightarrow{\sim} f(V)$ . Hier gilt  $\ker(f) = \{0\}$  und  $q: V \xrightarrow{\sim} V/\{0\}$  ist ein Isomorphismus.

**Beispiel:** Ist  $f: V \rightarrow W$  bijektiv, so erhalten wir  $\bar{f}: V/\{0\} \xrightarrow{\sim} W$ . Hier gilt sowohl  $\ker(f) = \{0\}$  als auch  $f(V) = W$ .

Aus Kapitel E kennen Sie als grundlegende Konstruktion die kanonische Faktorisierung für beliebige Abbildungen zwischen Mengen (Satz E31):

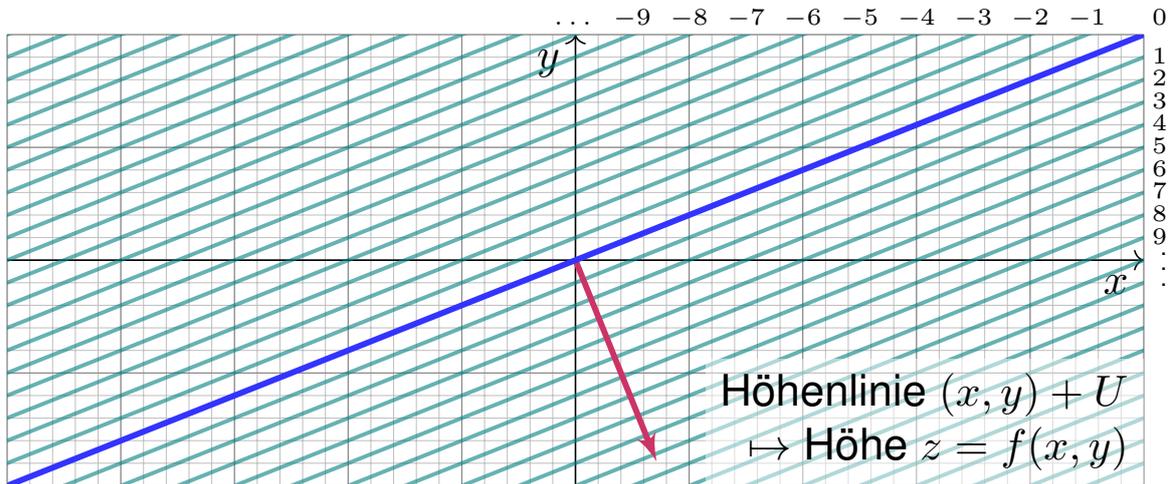
Jede Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  faktorisiert gemäß  $f = \iota \circ \bar{f} \circ q$  in

- 1 die Quotientenabbildung  $q: X \twoheadrightarrow X/R_f: x \mapsto [x]$ ,
- 2 die Bijektion  $\bar{f}: X/R_f \xrightarrow{\sim} f(X): [x] \mapsto f(x)$ ,
- 3 die Inklusion  $\iota: f(X) \hookrightarrow Y: y \mapsto y$ .

Neu hinzu kommt hier nun, dass für jede lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  dabei die lineare Struktur erhalten bleibt. Den Quotienten  $V/R_f$  können wir zudem elegant als  $V/U$  formulieren mit dem Kern  $U = \ker(f)$ .

Beim ersten Kontakt ist das noch neu und ungewohnt und erfordert daher Gewöhnung und Übung. Davon abgesehen ist es nicht schwer.

Genau deshalb ist es wichtig, schon früh mit diesen Begriffen zu arbeiten. Bitte lesen Sie sich die schrittweise Konstruktion in Ruhe durch und illustrieren Sie dies mit Beispielen wie den folgenden.



**Aufgabe:** Führen Sie die kanonische Faktorisierung explizit aus für die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto z = 2x - 5y$ .

**Lösung:** (1) Es gilt  $\text{im}(f) = \mathbb{R}$ : Zu  $z \in \mathbb{R}$  finden wir  $f(z/2, 0) = z$ .

(2) Es gilt  $\ker(f) = (5, 2) \cdot \mathbb{R}$ . Die Inklusion „ $\supseteq$ “ folgt aus  $f(5, 2) = 0$ . „ $\subseteq$ “: Aus  $f(x, y) = 0$  folgt  $2x = 5y$ ; für  $t = x/5$  gilt  $(x, y) = (5t, 2t)$ .

(3) Modulo  $U = (5, 2) \cdot \mathbb{R}$  induziert  $f$  den  $\mathbb{R}$ -Isomorphismus

$$\bar{f} : \mathbb{R}^2/U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} : (x, y) + U \mapsto f(x, y) = 2x - 5y.$$

😊 Wir können uns  $z = f(x, y) = 2x + 5y$  als Höhe vorstellen. Der Kern  $U = \ker(f) = (5, 2) \cdot \mathbb{R}$  ist die Ursprungsgerade auf Höhe 0. Die Äquivalenzklasse  $(x, y) + U$  ist dann die Höhenlinie durch  $(x, y)$ . Die von  $f$  induzierte kanonische Bijektion

$$\bar{f} : \mathbb{R}^2/U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} : (x, y) + U \mapsto 2x - 5y.$$

ordnet jeder Höhenlinie ihre Höhe zu. So gesehen ist alles ganz einfach und anschaulich. Am Anfang jedoch erfordert das etwas Gewöhnung und Einübung, bis es sich wirklich einfach und anschaulich anfühlt.

😊 Die kanonische Faktorisierung gilt allgemein wie in Satz E3I: Jede beliebige Abbildung  $f : V \rightarrow W$  faktorisiert gemäß  $f = \iota \circ \bar{f} \circ q$ . Wir betrachten hier speziell eine  $R$ -lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$ . Damit wird die gesamte Konstruktion  $R$ -linear und somit besonders übersichtlich: Der Kern  $U = \ker(f) \leq V$  und das Bild  $f(V) \leq W$  sind  $R$ -lineare Unterräume, ebenso der Quotient  $V/U$ , und alle drei Abbildungen  $q, \bar{f}, \iota$  sind  $R$ -linear wie in Satz I2B erklärt.

Sie kennen die Schreibweise „+ const“ bei Stammfunktionen wie

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{const}, \quad \int e^x dx = e^x + \text{const}, \quad \text{usw.}$$

**Aufgabe:** Erklären Sie dies mit Hilfe der kanonischen Faktorisierung!

**Lösung:** Auf dem Intervall  $X = ]a, b[ \subseteq \mathbb{R}$  haben wir die Ableitung

$$D : \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R}) : F \mapsto f = F'.$$

Diese  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung ist surjektiv, also  $\text{im}(D) = \mathcal{C}^0$ , und ihr Kern  $\ker(D) = \{ F = \text{const} \} =: U$  besteht aus allen konstanten Funktionen.

Dank kanonischer Faktorisierung erhalten wir den  $\mathbb{R}$ -Isomorphismus

$$\bar{D} : \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})/U \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R}) : F + U \mapsto f = F'.$$

Die Umkehrabbildung  $\int$  ordnet jeder stetigen Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion  $F$  zu, genauer: ihre Äquivalenzklasse  $\int f = F + U$ .

⚠ Ohne den Quotienten modulo  $U$  ist die Umkehrung nicht definiert! Genau dies steckt hinter der üblichen Schreibweise  $\int f = F + \text{const}$ .

Wir betrachten den Körper  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  und die  $\mathbb{K}$ -wertigen Folgen

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{ a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : n \mapsto a_n \}.$$

Darin liegt der Unterraum  $c = c(\mathbb{N}, \mathbb{K})$  der  $\mathbb{K}$ -konvergenten Folgen, darin wiederum liegt der Unterraum  $c_0 = c_0(\mathbb{N}, \mathbb{K})$  der Nullfolgen.

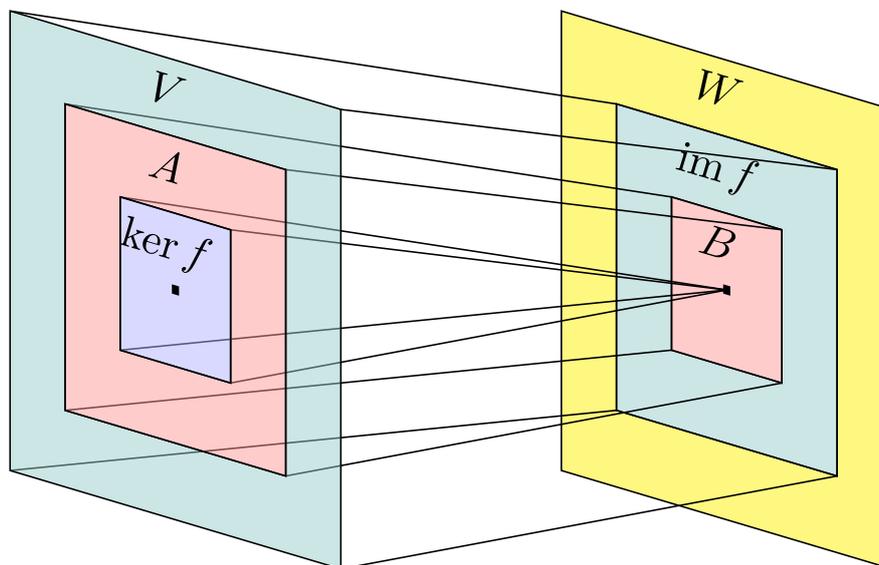
**Aufgabe:** Konstruieren Sie einen  $\mathbb{K}$ -Isomorphismus  $c/c_0 \cong \mathbb{K}$ .

**Lösung:** Der Grenzwert  $\lim : c(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  ist eine  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung. Ihr Bild ist ganz  $\mathbb{K}$ , der Kern ist der Unterraum  $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{K})$  aller Nullfolgen. Dank kanonischer Faktorisierung induziert  $\lim$  den  $\mathbb{R}$ -Isomorphismus

$$c(\mathbb{N}, \mathbb{K})/c_0(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K} : [a] \mapsto \lim a.$$

😊 Diese Idee kann man nutzen zur Konstruktion der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  aus den rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$ . Hierzu betrachtet man die Cauchy-Folgen  $C(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) \leq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$  und erhält so die ersehnte Vervollständigung

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow C(\mathbb{N}, \mathbb{Q})/c_0(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}.$$



Satz I2c: Korrespondenzsatz für Unterräume

(0) Jede  $R$ -lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  stiftet eine Bijektion

$$(f_*, f^*) : \{ A \leq V \mid \ker(f) \leq A \} \cong \{ B \leq \text{im}(f) \}.$$

(1) Für jeden Unterraum  $A \leq V$  gilt  $f^{-1}(f(A)) = A + \ker(f)$ .

(2) Für jeden Unterraum  $B \leq W$  gilt  $f(f^{-1}(B)) = B \cap \text{im}(f)$ .

Der Korrespondenzsatz für Unterräume

(0) Ausführlich besagt dieses Bijektionspaar  $(f_*, f^*)$ :

**1** Für jeden Unterraum  $A \leq V$  mit  $\ker(f) \leq A$  ist die Bildmenge  $B := f(A) \leq \text{im}(f)$  ein Unterraum, und es gilt  $f^{-1}(B) = A$ .

**2** Für jeden Unterraum  $B \leq \text{im}(f)$  ist umgekehrt die Urbildmenge  $A := f^{-1}(B) \leq V$  ein Unterraum mit  $\ker(f) \leq A$  und  $f(A) = B$ .

**Beweis:** (1) Für jeden Unterraum  $A \leq V$  gilt

$$f^{-1}(f(A)) \stackrel{\text{Def}}{=} \bigcup_{x \in A} f^{-1}(f(\{x\})) \stackrel{\text{IIR}}{=} \bigcup_{x \in A} x + \ker(f) \stackrel{\text{Def}}{=} A + \ker(f).$$

(0a) Zusammen mit  $\ker(f) \leq A$  erhalten wir  $f^{-1}(f(A)) = A$ .

(2) Für jeden Unterraum  $B \leq W$  gilt

$$f(f^{-1}(B)) \stackrel{\text{Def}}{=} \bigcup_{y \in B} f(f^{-1}(\{y\})) \stackrel{\text{Bild}}{=} B \cap \text{im}(f).$$

(0b) Zusammen mit  $B \leq \text{im}(f)$  erhalten wir  $f(f^{-1}(B)) = B$ .

**QED**

**Satz I2D: Isomorphiesatz für lineare Räume**

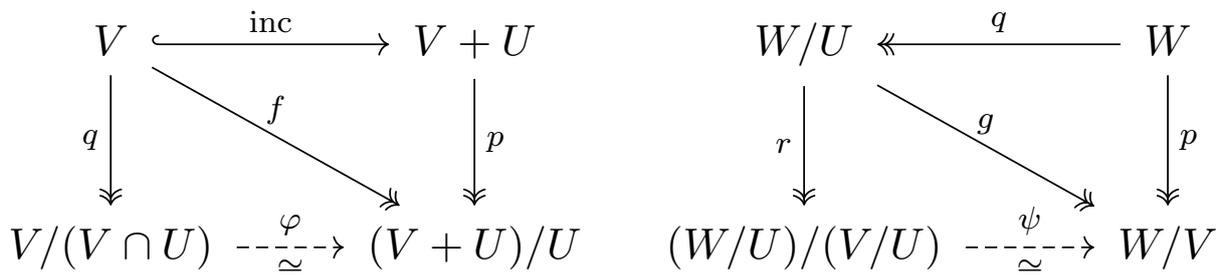
(1) Sind  $U, V \leq W$  Unterräume, so auch  $U + V$  und  $U \cap V$ , und es gilt:

$$\varphi : V/(V \cap U) \xrightarrow{\sim} (V + U)/U : v + (V \cap U) \mapsto v + U$$

(2) Sind  $U \leq V \leq W$  lineare Räume, so gilt die Kürzungsregel:

$$\psi : (W/U)/(V/U) \xrightarrow{\sim} W/V : (w + U) + (V + U) \mapsto w + V$$

**Beweis:** Wir konstruieren zunächst zwei Hilfsabbildungen  $f$  und  $g$ :



Daran lesen wir ab (1)  $\ker(f) = V \cap U$  und (2)  $\ker(g) = V/U$ .

Die kanonische Faktorisierung I2B erledigt nun die Arbeit.

**QED**

**Aufgabe:** Führen Sie die Details dieser Konstruktion aus! Wie sind die Abbildungen definiert? Warum gilt  $\ker(f) = V \cap U$  und  $\ker(g) = V/U$ ?

**Lösung:** (1) Wir definieren  $f = p \circ \text{inc} : V \hookrightarrow V + U \twoheadrightarrow (V + U)/U$ .

Nach Konstruktion gilt  $\text{im}(f) = (V + U)/U$  und  $\ker(f) = V \cap U$ .

Die kanonische Faktorisierung I2B ergibt dann:

$$\varphi : V/(V \cap U) \xrightarrow{\sim} (V + U)/U : v + (V \cap U) \mapsto v + U$$

(2) Wir definieren  $g : W/U \rightarrow W/V : x + U \mapsto x + V$ , entweder direkt durch diese Formel oder mit dem folgenden Faktorisierungssatz I2E.

Nach Konstruktion gilt  $\text{im}(g) = W/V$  und  $\ker(g) = V/U$ .

Die kanonische Faktorisierung I2B ergibt dann:

$$\psi : (W/U)/(V/U) \xrightarrow{\sim} W/V : (w + U) + (V + U) \mapsto w + V$$

😊 Diese beiden Konstruktionen werden in den obigen Diagrammen zusammengefasst. Beide Darstellungen sind nützlich: Das Diagramm ist übersichtlich. Der Text ist ausführlich. Lernen Sie beides zu nutzen!

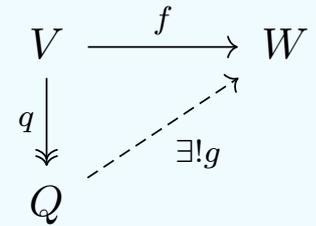
## Faktorisierung über eine Surjektion

### Satz I2E: lineare Faktorisierung über eine Surjektion

Sei  $q: V \twoheadrightarrow Q$  eine  $R$ -lineare Surjektion.

Gegeben sei eine  $R$ -lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$ .

Zu  $(f, q)$  suchen wir eine **Faktorisierung**  $g: Q \rightarrow W$  mit  $f = g \circ q$ , also  $f(x) = g(q(x))$  für alle  $x \in V$ .



**Eindeutigkeit:** Je zwei Faktorisierungen  $g, g': Q \rightarrow W$  sind gleich: Zu jedem Element  $\bar{x} \in Q$  existiert ein Urbild  $x \in V$  mit  $q(x) = \bar{x}$ , also gilt  $g(\bar{x}) = g(q(x)) = (g \circ q)(x) = (g' \circ q)(x) = g'(q(x)) = g'(\bar{x})$ .

**Existenz:** Genau dann existiert  $g: Q \rightarrow W$  mit  $f = g \circ q$ , wenn  $\ker(q) \subseteq \ker(f)$  gilt. **Konstruktion:** Zu jedem  $\bar{x} \in Q$  wählen wir willkürlich ein Urbild  $x \in V$  mit  $q(x) = \bar{x}$  und setzen  $g(\bar{x}) := f(x)$ .

Diese Abbildung  $g: Q \rightarrow W$  ist wohldefiniert und  $R$ -linear.

Der Bildraum  $g(Q) = f(V)$  in  $W$  bleibt dabei unverändert.

Für den Kern gilt nach Konstruktion  $\ker(g) = q(\ker f)$ .

Genau dann ist  $g$  injektiv, wenn  $\ker(q) = \ker(f)$  gilt.

## Faktorisierung über eine Surjektion

Im Falle  $f = g \circ q$  sagen wir **die Abbildung  $f$  faktorisiert über  $q$  zu  $g$**  oder auch  **$f: V \rightarrow W$  induziert  $g: Q \rightarrow W$  über  $q: V \twoheadrightarrow Q$** .

**Beweis:** Das ist die Faktorisierung  $f = g \circ q$  aus Satz E3J.

Die  $R$ -Linearität von  $g$  rechnet man unmittelbar nach:

Linearität: Sei  $\lambda \in R$ . Zu  $\bar{x}, \bar{y} \in Q$  wählen wir Urbilder  $x, y \in V$ .

Zu  $\bar{x} + \bar{y} \cdot \lambda \in Q$  ist dann  $x + y \cdot \lambda \in V$  ein Urbild, denn  $q$  ist  $R$ -linear.

Also gilt  $g(\bar{x} + \bar{y} \cdot \lambda) = f(x + y \cdot \lambda) = f(x) + f(y) \cdot \lambda = g(\bar{x}) + g(\bar{y}) \cdot \lambda$ .

Die weiteren Aussagen sind klar. (Formulieren Sie dies aus!) ◻

**Beispiel:** Speziell sei  $q: V \rightarrow V/U$  ein Quotient. Genau dann faktorisiert  $f: V \rightarrow W$  über  $q$  zu  $g: V/U \rightarrow W$ , wenn  $U \subseteq \ker(f)$  gilt.

In diesem Fall ist  $g$  eindeutig und wohldefiniert durch  $g(x + U) = f(x)$ .

😊 Der Faktorisierungssatz ist das Universalwerkzeug zur Konstruktion von  $R$ -linearen Abbildungen  $g: Q \rightarrow W$  auf dem Quotienten  $Q = V/U$ : Auf die Elemente  $C \in Q$ , also Äquivalenzklassen  $C = q(x)$ , haben wir meist keinen direkten Zugriff, sondern nur über Repräsentanten  $x \in C$ . Wir definieren  $g: Q \rightarrow W$  mit Hilfe von Repräsentanten gemäß Satz E3J.

## Faktorisierung über eine Surjektion

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f} & W \\
 q \downarrow & \nearrow g & \\
 Q & & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f_i} & \mathbb{R} \\
 q \downarrow & \nearrow g_i & \\
 \mathbb{R} & & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 4x - 5y \\
 f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 4x - 10y \\
 q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2x - 5y
 \end{array}$$

**Aufgabe:** Finden Sie alle Faktorisierungen  $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- 1 mit  $f_1 = g_1 \circ q$ , also  $g_1(2x - 5y) = 4x - 5y$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ ;
- 2 mit  $f_2 = g_2 \circ q$ , also  $g_2(2x - 5y) = 4x - 10y$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Lösung:** Wir wenden den Faktorisierungssatz E3J an:

- 1 Es gibt keine Faktorisierung  $g_1$ , denn  $f_1$  ist nicht kompatibel mit  $q$ :  
Es gilt  $\ker(q) = (5, 2) \cdot \mathbb{R} \not\subseteq \ker(f_1)$ , denn  $f_1(5, 2) = 10 \neq 0$ .  
Es müsste  $g_1(0) = 0$  und zugleich  $g_1(2 \cdot 5 - 5 \cdot 2) = 10$  gelten.
- 2 Es gibt genau eine Faktorisierung  $g_2$ , denn  $f_2$  ist kompatibel mit  $q$ :  
Es gilt  $\ker(q) = (5, 2) \cdot \mathbb{R} \subseteq \ker(f_2)$ , denn  $f_2(5, 2) = 0$ .  
Explizit finden wir  $g_2(z) = 2z$ .

## Faktorisierung über eine Injektion

Dual zur Faktorisierung über eine Surjektion wie in Satz I2E können wir über eine Injektion faktorisieren. Das ist wesentlich einfacher:

### Satz I2F: lineare Faktorisierung über eine Injektion

Sei  $i : U \hookrightarrow W$  eine  $R$ -lineare Injektion.

Gegeben sei eine  $R$ -lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$ .

Zu  $(f, i)$  suchen wir eine **Faktorisierung**  $g : V \rightarrow U$  mit  $f = i \circ g$ , also  $f(x) = i(g(x))$  für alle  $x \in V$ .

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f} & W \\
 & \searrow \exists! g & \uparrow i \\
 & & U
 \end{array}$$

**Eindeutigkeit:** Je zwei Faktorisierungen  $g, g' : V \rightarrow U$  sind gleich.

Aus  $f(x) = i(g(x)) = i(g'(x))$  folgt  $g(x) = g'(x)$  dank Injektivität von  $i$ .

**Existenz:** Genau dann existiert  $g : V \rightarrow U$  mit  $f = i \circ g$ , wenn  $f(V) \subseteq i(U)$  gilt. In diesem Falle setzen wir  $g(x) = i^{-1}(f(x))$ .

Diese Abbildung  $g : V \rightarrow U$  ist wohldefiniert und  $R$ -linear.

Wichtiger Spezialfall: Ist  $\iota : U \subseteq W$  eine Inklusion und  $f(V) \subseteq U$ , so ist  $g = f|_V^U$  die Einschränkung von  $f$  auf die Zielmenge  $U$ , siehe D306.

**Aufgabe:** Gegeben sei eine  $R$ -lineare Surjektion  $q: V \twoheadrightarrow Q$ .  
Zu jedem  $R$ -linearen Raum  $W$  erhalten wir die Abbildung

$$\Phi : \text{Hom}_R(Q, W) \rightarrow \text{Hom}_R(V, W) : g \mapsto f = g \circ q.$$

- (1) Ist  $\Phi$  injektiv? surjektiv? Bestimmen Sie das Bild von  $\Phi$ .
- (2) Ist die Abbildung  $\Phi$  additiv? sogar  $R$ -linear?

**Lösung:** (1) Die  $R$ -lineare Surjektion  $q: V \twoheadrightarrow Q$  induziert die Injektion

$$\Phi : \text{Hom}_R(Q, W) \hookrightarrow \text{Hom}_R(V, W) : g \mapsto f = g \circ q$$

und somit eine Bijektion auf ihr Bild:

$$\Phi : \text{Hom}_R(Q, W) \xrightarrow{\sim} \{ f \in \text{Hom}_R(V, W) \mid \ker(q) \subseteq \ker(f) \}$$

Dies ist eine Umformulierung des Faktorisierungssatzes I2E.

(2a) Die Mengen  $\text{Hom}_R(Q, W)$  und  $\text{Hom}_R(V, W)$  sind abelsche Gruppen bezüglich der punktweisen Addition, siehe Satz I1I.

Die Abbildung  $\Phi : g \mapsto g \circ q$  ist additiv in  $g$ , dank Satz I1J

(2b) Ist  $R$  zudem kommutativ, so sind  $\text{Hom}_R(Q, W)$  und  $\text{Hom}_R(V, W)$  sogar  $R$ -lineare Räume und die Abbildung  $\Phi$  ist  $R$ -linear.

**Aufgabe:** Gegeben sei eine  $R$ -lineare Injektion  $\iota : U \hookrightarrow W$ .

Zu jedem  $R$ -linearen Raum  $V$  erhalten wir die Abbildung

$$\Psi : \text{Hom}_R(V, U) \rightarrow \text{Hom}_R(V, W) : g \mapsto f = \iota \circ g.$$

(1) Ist  $\Psi$  injektiv? surjektiv? Bestimmen Sie das Bild von  $\Psi$ .

(2) Ist die Abbildung  $\Psi$  additiv? sogar  $R$ -linear?

**Lösung:** (1) Die  $R$ -lineare Injektion  $\iota : U \hookrightarrow W$  induziert die Injektion

$$\Psi : \text{Hom}_R(V, U) \hookrightarrow \text{Hom}_R(V, W) : g \mapsto f = \iota \circ g.$$

und somit eine Bijektion auf ihr Bild:

$$\Psi : \text{Hom}_R(V, U) \xrightarrow{\sim} \{ f \in \text{Hom}_R(V, W) \mid \text{im}(f) \subseteq \text{im}(\iota) \}$$

Dies ist eine Umformulierung des Faktorisierungssatzes I2F.

(2a) Die Mengen  $\text{Hom}_R(V, U)$  und  $\text{Hom}_R(V, W)$  sind abelsche Gruppen bezüglich der punktweisen Addition, siehe Satz I1i.

Die Abbildung  $\Psi : g \mapsto \iota \circ g$  ist additiv in  $g$ , dank Satz I1j

(2b) Ist  $R$  zudem kommutativ, so sind  $\text{Hom}_R(V, U)$  und  $\text{Hom}_R(V, W)$  sogar  $R$ -lineare Räume und die Abbildung  $\Psi$  ist  $R$ -linear.

**Aufgabe:** Wir betrachten die  $\mathbb{Z}$ -linearen Räume  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  sowie die Quotientenabbildung  $q: \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}: a \mapsto [a] = a + n\mathbb{Z}$ .

- (0) Warum sind  $\mathbb{Z}$ -Unterräume dasselbe wie Untergruppen? (I1k)  
 (1) Zur Erinnerung: Bestimmen Sie alle Unterräume  $U \leq \mathbb{Z}$ . (G1v)  
 (2) Korrespondenz: Bestimmen Sie alle Unterräume  $V \leq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . (I2c)

**Lösung:** (0) Das folgt aus Existenz und Eindeutigkeit der  $\mathbb{Z}$ -Operation.

- (1) Die Unterräume  $U \leq \mathbb{Z}$  sind von der Form  $U = u\mathbb{Z}$  mit  $u \in \mathbb{N}$ . (G1v)  
 (2a) Ist  $V \leq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ein Unterraum, so auch  $U := q^{-1}(V) \leq \mathbb{Z}$ , und es gilt  $\ker(q) = n\mathbb{Z} \leq U$ . Dank (1) haben wir  $U = u\mathbb{Z}$ ; aus  $n\mathbb{Z} \subseteq u\mathbb{Z}$  folgt  $u \mid n$ .  
 (2b) Umgekehrt: Für jede Zahl  $u \in \mathbb{N}$  mit  $u \mid n$  haben wir  $U = u\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$  mit  $\ker(q) = n\mathbb{Z} \leq u\mathbb{Z} = U$  und somit  $V = q(u\mathbb{Z}) = u\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Dank Korrespondenzsatz I2c erhalten wir: Die Unterräume von  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  sind von der Form  $u\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  mit  $u \in \mathbb{N}$  und  $u \mid n$ .

- Beispiele:** (a) Die Unterräume von  $\mathbb{Z}/0\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$  sind  $u\mathbb{Z}/0\mathbb{Z}$  mit  $u \in \mathbb{N}$ .  
 (b) Ist  $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  eine Primzahl, so hat  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  genau zwei Unterräume, nämlich den trivialen  $\{0\} = p\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  und den gesamten  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 1\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .  
 (c) Die Unterräume von  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  sind neben den extremen Beispielen  $\{0\} = 4\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = 1\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  nur noch  $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{[0], [2]\}$ .  
 (d) Die Unterräume von  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  sind neben  $\{0\} = 8\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = 1\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  nur  $2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \{[0], [2], [4], [6]\}$  und  $4\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \{[0], [4]\}$ .  
 (e) Die Unterräume von  $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$  sind neben  $\{0\}$  und  $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$  nur  $3\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} = \{[0], [3], [6], [9], [12]\}$  und  $5\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} = \{[0], [5], [10]\}$ .

😊 Sie können direkt nachprüfen, dass die angegebenen Beispiele tatsächlich Untergruppen sind, und somit  $\mathbb{Z}$ -lineare Unterräume.

😊 Korrespondenz I2c und Klassifikation G1v garantieren zudem, dass diese Beispiele die einzigen Untergruppen / Unterräume sind!

**Aufgabe:** Bestimmen Sie  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Lösung:** Zu jedem  $a \in \mathbb{N}$  existiert genau eine  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung  $f_a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  mit  $f_a(1) = [a]$ , nämlich  $f_a(k) = [ak]$ . Dabei gilt  $f_a = f_b$  genau dann, wenn  $a - b \in n\mathbb{Z}$ . Somit erhalten wir die Bijektion

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) : [a] \mapsto f_a.$$

**Aufgabe:** Bestimmen Sie Kern und Bild von  $f_a \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ .

**Lösung:** (a) Für  $a = 0$  gilt  $\ker(f_0) = \mathbb{Z}$ . Für  $a \neq 0$  gilt

$$\ker(f_a) = \{ k \in \mathbb{Z} \mid ak \in n\mathbb{Z} \} = \frac{\text{kgV}(a, n)}{a} \mathbb{Z}.$$

(b) Wir nutzen die Quotientenabbildung  $q : \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Nach Konstruktion von  $f_a$  gilt  $\text{im}(f_a) = q(a\mathbb{Z})$ , also

$$q^{-1}(\text{im}(f_a)) \stackrel{\text{Def}}{=} q^{-1}(q(a\mathbb{Z})) \stackrel{\text{I2c}}{=} a\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} \stackrel{\text{I1y}}{=} \text{ggT}(a, n)\mathbb{Z}.$$

Somit gilt  $\text{im}(f_a) = \text{ggT}(a, n)\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**Beispiel:** Wir betrachten die  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/60\mathbb{Z} : k \mapsto 12k.$$

Hier gilt  $\ker(f) = 5\mathbb{Z}$  und  $\text{im}(f) = 12\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ .

**Beispiel:** Wir betrachten die  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/60\mathbb{Z} : k \mapsto 27k.$$

Hier gilt  $\ker(f) = 15\mathbb{Z}$  und  $\text{im}(f) = 3\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ .

**Aufgabe:** Bestimmen Sie  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  für alle  $m, n \in \mathbb{N}$ .  
Wie viele Elemente hat diese Menge im Fall  $m, n \geq 1$ ?

**Lösung:** (0) Den Spezialfall  $m = 0$  haben wir oben bereits gelöst:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) : [a] \mapsto f_a.$$

(1) Für den Fall  $m \geq 1$  nutzen wir den Spezialfall (0) und den Quotienten  $q: \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  mit dem Faktorisierungssatz I2E.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ q \downarrow & \nearrow g & \\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & & \end{array}$$

Sei  $g: \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  eine beliebige  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung.  
Es gilt  $g([1]) = [a]$  für ein  $a \in \mathbb{Z}$ , also  $g = g_a: [k] \mapsto [ak]$ .  
Durch den Wert  $a$  ist  $g$  eindeutig festgelegt.

Die  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung  $g_a: \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  mit  $g_a([1]) = [a]$  definiert eine  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung  $f_a = g_a \circ q: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  mit  $f_a(1) = [a]$  und der Kompatibilitätsbedingung  $m\mathbb{Z} \subseteq \ker(f_a)$ , und ebenso umgekehrt.

Für  $n = 0$  ist das nur für  $a = 0$  möglich; für  $a \neq 0$  gilt nämlich  $\ker(f_a) = \{0\} \not\supseteq m\mathbb{Z}$ , da wir  $m \geq 1$  voraussetzen. Das bedeutet:

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \{0\}$$

Im Falle  $n \geq 1$  finden wir dagegen die Bijektion:

$$\frac{n}{\text{ggT}(m, n)} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) : [a] \mapsto g_a$$

Somit hat die Menge  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  genau  $\text{ggT}(m, n)$  Elemente.

**Beispiel:** Es gilt  $\text{Hom}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}) \cong \{ [0] \}$ .  
Es gilt  $\text{Hom}(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}) \cong \{ [0], [3], [6], [9], [12] \}$ .

Die hier angegebene Bijektion ist sogar ein Isomorphismus!

**Aufgabe:** Illustrieren Sie den Isomorphiesatz I2D für  $U, V \leq W = \mathbb{Z}$ .

**Lösung:** Dank G1v gilt  $U = u\mathbb{Z}$  und  $V = v\mathbb{Z}$  mit  $u, v \in \mathbb{N}$ .

Dank I1v gilt  $V + U = \text{ggT}(u, v)\mathbb{Z}$  und  $V \cap U = \text{kgV}(u, v)\mathbb{Z}$ .

(1) Der Isomorphiesatz I2D(1) besagt:

$$\varphi : V/(V \cap U) \xrightarrow{\sim} (V + U)/U : x + (V \cap U) \mapsto x + U$$

Wir illustrieren dies für  $V = 12\mathbb{Z}$  und  $U = 15\mathbb{Z}$ :

$$\varphi : 12\mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} 3\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} : 12k + 60\mathbb{Z} \mapsto 12k + 15\mathbb{Z}$$

(2) Für  $U \leq V \leq W = \mathbb{Z}$  besagt der Isomorphiesatz I2D(2):

$$\psi : (W/U)/(V/U) \xrightarrow{\sim} W/V : (x + U) + (V + U) \mapsto x + V$$

Wir illustrieren dies für  $U = 6\mathbb{Z}$  und  $V = 3\mathbb{Z}$ :

$$\psi : (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} : (x + 6\mathbb{Z}) + (3\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}) \mapsto x + 3\mathbb{Z}$$

**Bemerkung:** Im Isomorphiesatz I2D(2) schreibe ich  $V/U = V + U$  für das Bild des Unterraums  $V \leq W$  unter der Quotientenabbildung

$$q : W \rightarrow W/U : x \mapsto x + U.$$

Die Schreibweise  $V/U = \{ [x] = x + U \mid x \in V \}$  betont,  $V/U \leq W/U$  ein Unterraum ist. Die alternative und bequeme Schreibweise  $V + U$  ist suggestiver für die Zuordnungsvorschrift des Isomorphismus

$$\psi : (W/U)/(V/U) \xrightarrow{\sim} W/V : (x + U) + (V + U) \mapsto x + V.$$

Formal korrekt sollte ich schreiben:

$$\psi : (W/U)/(V/U) \xrightarrow{\sim} W/V : (w + U) + (V/U) \mapsto w + V.$$

**Aufgabe:** Wir betrachten den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  der reellen Folgen.

(0) Wiederholen Sie die Definition der Konvergenz  $a \rightarrow 0$  bzw.  $a \rightarrow z$  für eine Folge  $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  und eine reelle Zahl  $z \in \mathbb{R}$ .

In der Grenzwertrechnung erlaubt man sich, eine Folge  $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  an endlich vielen Stellen zu  $b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  abzuändern und betrachtet beide Folgen als äquivalent, gesprochen: **schließlich gleich**.

(1) Wie können Sie dies möglichst explizit und elegant als einen Quotienten konstruieren? Ist das Ergebnis ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum?

(2) Können Sie für eine Äquivalenzklasse schließlich gleicher Folgen immer noch die Begriffe „Konvergenz“ und „Grenzwert“ erklären?

(3) Faktorisiert  $\lim : c(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  über diesen Quotienten zu einer linearen Abbildung auf dem Quotientenraum?

(0) Die Folge  $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  **konvergiert gegen**  $z \in \mathbb{R}$ , falls  $a \rightarrow z$  gilt:

$$a \rightarrow z \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : |a_n - z| < \varepsilon$$

In Worten: Zu jedem noch so kleinen  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  existiert ein Index  $m \in \mathbb{N}$ , sodass für jeden Index  $n \in \mathbb{N}_{\geq m}$  die Ungleichung  $|a_n - z| < \varepsilon$  gilt.

In diesem Falle nennen wir die Folge  $a$  **konvergent** mit **Grenzwert**  $z$ . Wir nennen  $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  eine **Nullfolge**, falls  $a \rightarrow 0$  gilt.

**Bemerkung:** Jede Folge  $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  hat höchstens einen Grenzwert in  $\mathbb{R}$ . Hat sie keinen Grenzwert, so nennen wir die Folge  $a$  **divergent**.

Der Begriff der *Konvergenz* ist grundlegend für die gesamte Analysis und ihre Anwendungen. Die Mathematiker des 19. Jahrhunderts vollbrachten die Meisterleistung, ihn rigoros präzise herauszuarbeiten und hierauf eine leistungsfähige Theorie zu errichten, die bis heute trägt und weiter ausgebaut wird. Von ihren Erfolgen legt die Differential- und Integralrechnung beredtes Zeugnis ab, die alle Studenten der Mathematik in ihren ersten Vorlesungen kennenlernen, und die überall in den Natur- und Ingenieurwissenschaften erfolgreich angewendet werden.

(1) Wörtlich übersetzt bedeutet „ $a$  schließlich gleich  $b$ “ folgendes:

$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m} : a_n = b_n$$

Algebraisch entspricht dies einer sehr vertrauten Bedingung:

$$a - b \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$$

Der gesuchte Quotient ist daher überraschend simpel:

$$F = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$$

Elemente  $\alpha \in F$  sind Äquivalenzklassen von Folgen  $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

Die Klasse  $[a]$  enthält alle Folgen, die schließlich gleich  $a$  sind.

😊 Wir wissen, dass  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  ein  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum ist (I1Q). Dank Satz I2A ist der Quotient  $F = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

(2) Jede Äquivalenzklasse  $\alpha \in F$  können wir repräsentieren durch eine (willkürlich gewählte) Folge  $a \in \alpha$ . Wir können jedoch nicht mehr vom „ $n$ ten Folgenterm  $\alpha_n \in \mathbb{R}$ “ sprechen: denn dies ist nicht wohldefiniert!

Dennoch ist die Konvergenz „ $\alpha \rightarrow z$ “ wohldefiniert durch

$$\alpha \rightarrow z \quad :\Leftrightarrow \quad a \rightarrow z$$

für ein  $a \in \alpha$ . Gilt dies für einen Repräsentanten, so gilt es für alle! Konvergenz hängt nicht vom willkürlich gewählten Repräsentanten ab.

(3) Wir haben  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \leq \ker(\lim) = c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ . Dank Faktorisierungssatz I2E induziert die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $\lim : c(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  somit eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $\bar{\lim} : c(\mathbb{N}, \mathbb{R}) / \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Quotientenraum.

😊 Diese Überlegungen nutzt man häufig in der Grenzwertrechnung, meist jedoch nicht so explizit, sondern unbewusst oder gar heimlich. Nun wissen Sie genauer, welches Prinzip eigentlich dahinter steckt.

Sei  $T \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  der Vektorraum aller Treppenfunktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (I1w). Dieser wird erzeugt von den Indikatorfunktionen  $\mathbf{I}_{[a,b]}$  mit  $a \leq b$  in  $\mathbb{R}$ . Wir betrachten also die Indexmenge  $I = \{Q = [a, b] \mid a \leq b \text{ in } \mathbb{R}\}$  und die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $\Phi: \mathbb{R}^{(I)} \rightarrow T: c \mapsto \sum_{Q \in I} c_Q \mathbf{I}_Q$ .

**Lemma I2G:** Relationen zwischen den Indikatorfunktionen  $\mathbf{I}_{[a,b]}$

Es gilt  $\ker(\Phi) = K := \{e_{[a,c]} - e_{[a,b]} - e_{[b,c]} + e_{[b,b]} \mid a < b < c \text{ in } \mathbb{R}\}$ .

**Beweis:** Die Inklusion „ $\supseteq$ “ ist klar, denn für alle  $a < b < c$  in  $\mathbb{R}$  gilt

$$\mathbf{I}_{[a,c]} = \mathbf{I}_{[a,b]} + \mathbf{I}_{[b,c]} - \mathbf{I}_{[b,b]}.$$

Demnach induziert  $\Phi$  modulo  $K$  die Abbildung  $\bar{\Phi}: \mathbb{R}^{(I)}/K \rightarrow T$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{(I)} & \xrightarrow{\Phi} & T \\ q \downarrow & \nearrow \exists! \bar{\Phi} & \\ \mathbb{R}^{(I)}/K & & \end{array}$$

Die Aussage  $\ker(\Phi) = K$  ist somit äquivalent zu Bijektivität von  $\bar{\Phi}$ .

Für die Umkehrung „ $\subseteq$ “ konstruieren wir  $\bar{\Psi}: T \rightarrow \mathbb{R}^{(I)}/K$ .

Zu jeder Treppenfunktion  $f \in T$  existiert eine Unterteilung

$U = \{x_0 < x_1 < \dots < x_\ell\} \subset \mathbb{R}$  und Werte  $f_1, \dots, f_\ell \in \mathbb{R}$ , sodass

$$f = \sum_{k=1}^{\ell} f_k \mathbf{I}_{]x_{k-1}, x_k[} + \sum_{k=0}^{\ell} f(x_k) \mathbf{I}_{[x_k, x_k]}.$$

Wir definieren daher  $\Psi_U: T_U \rightarrow \mathbb{R}^{(I)}$  durch

$$\Psi_U(f) := \sum_{k=1}^{\ell} f_k (e_{[x_{k-1}, x_k]} - e_{[x_{k-1}, x_{k-1}]} - e_{[x_k, x_k]}) + \sum_{k=0}^{\ell} f(x_k) e_{[x_k, x_k]}.$$

Je zwei Unterteilungen  $U, V \subset \mathbb{R}$  haben gemeinsame Verfeinerungen, die kleinstmögliche ist  $W = U \cup V$ . Schrittweises Verfeinern zeigt nun:

$$\Psi_U(f) \sim \Psi_W(f) \sim \Psi_V(f) \quad \text{mod } K$$

Somit ist  $\bar{\Psi}(f) := \Psi_U(f) + K$  unabhängig von der Unterteilung  $U$ .

Daher ist  $\bar{\Psi}: T \rightarrow \mathbb{R}^{(I)}/K: f \mapsto \Psi_U(f) + K$  wohldefiniert und

stiftet den ersehnten Isomorphismus  $(\bar{\Phi}, \bar{\Psi}): \mathbb{R}^{(I)}/K \cong T$ . □

😊 Die offensichtlichen Relationen  $\mathbf{I}_{[a,c]} = \mathbf{I}_{[a,b]} + \mathbf{I}_{[b,c]} - \mathbf{I}_{[b,b]}$  erzeugen demnach bereits alle Relationen. Das ist gut und nützlich zu wissen...

Wir ordnen jedem Intervall  $Q = [a, b]$  seine Länge  $\lambda([a, b]) = b - a$  zu.  
Wir wollen jeder Treppenfunktion  $f \in T$  eine Zahl zuordnen gemäß

$$f = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{I}_{Q_k} \quad \implies \quad \begin{aligned} M(f) &:= \max\{c_1, \dots, c_{\ell}\}, \\ N(f) &:= \sum_{k=1}^{\ell} c_k^2 \lambda(Q_k), \\ P(f) &:= \sum_{k=1}^{\ell} c_k \lambda(Q_k)^2. \end{aligned}$$

**Aufgabe:** Was ist hieran gefährlich falsch? Sind  $M, N, P$  wohldefiniert?  
Versuchen Sie, diese Werte für folgende Funktionen zu bestimmen:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot \mathbf{I}_{[0,1]} &= (+1) \cdot \mathbf{I}_{[0,1]} + (-1) \cdot \mathbf{I}_{[0,1]} \\ f &= 2 \cdot \mathbf{I}_{[0,2]} + 3 \cdot \mathbf{I}_{[1,3]} &= 2 \cdot \mathbf{I}_{[0,1[} + 5 \cdot \mathbf{I}_{[1,2]} + 3 \cdot \mathbf{I}_{[2,3]} \\ g &= 7 \cdot \mathbf{I}_{[0,1[} - 6 \cdot \mathbf{I}_{[1,3]} &= 7 \cdot \mathbf{I}_{[0,1[} - 6 \cdot \mathbf{I}_{[1,2]} - 6 \cdot \mathbf{I}_{[2,3]} \end{aligned}$$

**Lösung:** Die Zuordnungen  $M, N, P$  sind nicht wohldefiniert!

⚠ Verschiedene Darstellungen / Schreibweisen derselben Funktion liefern verschiedene Ergebnisse: Das ergibt überhaupt keinen Sinn!

Wir möchten das Integral definieren durch die naheliegende Formel

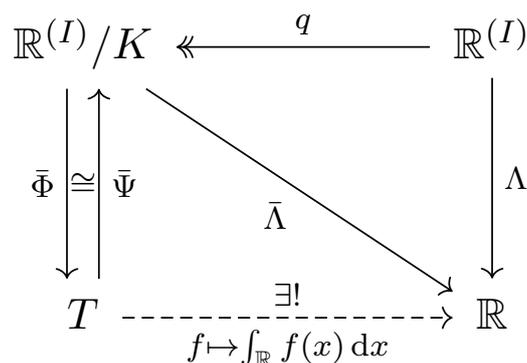
$$\int_{\mathbb{R}} \left[ \sum_{Q \in I} c_Q \mathbf{I}_Q(x) \right] dx = \sum_{Q \in I} c_Q \lambda(Q).$$

Die obigen Beispiele mahnen zur Vorsicht: Ist das wohldefiniert?

Wir betrachten daher zunächst  $\Lambda : \mathbb{R}^{(I)} \rightarrow \mathbb{R} : c \mapsto \sum_{Q \in I} c_Q \lambda(Q)$ .

Diese Abbildung ist  $\mathbb{R}$ -linear und verschwindet auf  $K = \ker(\Lambda)$ .

Wir erhalten so die ersehnte  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $\int : T \rightarrow \mathbb{R}$ :



Jede Konstruktion des Integrals muss dieses Problem irgendwie lösen.

😊 Nun wissen Sie genauer, was hinter den Kulissen eigentlich vorgeht.

## Definition I2H: exakte Sequenz, Bild gleich Kern

Wir betrachten  $R$ -lineare Räume und ihre  $R$ -lineare Abbildungen.

Eine **Sequenz**  $S = (f_i : V_i \rightarrow V_{i+1})_{i=0}^{n-1}$  der Länge  $n$  hat die Form

$$S : V_0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \dots \longrightarrow V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_n.$$

Sie heißt **exakt an der Stelle**  $i$  mit  $0 < i < n$ , falls  $\text{im}(f_{i-1}) = \ker(f_i)$ . Die Sequenz  $S$  heißt **exakt**, falls sie an jeder Stelle exakt ist.

😊 An jeder Stelle ist das Bild von links gleich dem Kern nach rechts. Zusammengefasst erhalten wir den kurzen Slogan: *Bild gleich Kern!* Exaktheit ist nichts fundamental Neues, sie hebt lediglich eine wichtige Eigenschaft hervor. Das erweist sich als eine sehr effiziente Sichtweise. Diese bequeme Schreib- und Sprechweise bündelt eine erstaunliche Vielfalt nützlicher Informationen, wie die folgenden Beispiele zeigen.

## Exakte Sequenzen

**Beispiel:** Die Exaktheit der Sequenz

$$0 \xrightarrow{0} V \xrightarrow{f} W$$

ist äquivalent zu  $\ker(f) \stackrel{!}{=} \text{im}(0) = \{0\}$ , das heißt  $f$  ist injektiv (I1R).

**Beispiel:** Die Exaktheit der Sequenz

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{0} 0$$

ist äquivalent zu  $\text{im}(f) \stackrel{!}{=} \ker(0) = W$ , das heißt  $f$  ist surjektiv (I1R).

**Beispiel:** Die Exaktheit der Sequenz

$$0 \xrightarrow{0} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{0} 0$$

bedeutet  $f$  ist bijektiv, also ein  $R$ -Isomorphismus.

**Beispiel:** Die kanonische Faktorisierung von  $f : V \rightarrow W$  induziert

$$0 \xrightarrow{0} V/\ker(f) \xrightarrow{\bar{f}} \text{im}(f) \xrightarrow{0} 0.$$

## Exakte Sequenzen

**Beispiel:** Für jeden Unterraum  $U \leq V$  bilden Inklusion  $\iota: U \hookrightarrow V$  und Quotient  $q: V \twoheadrightarrow V/U$  die kurze exakte Sequenz

$$0 \xrightarrow{0} U \xrightarrow{\iota} V \xrightarrow{q} V/U \xrightarrow{0} 0.$$

Das erste Beispiel ist die Restklassenkonstruktion:

$$0 \xrightarrow{0} n\mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$$

**Beispiel:** Der Grenzwert besichert uns die kurze exakte Sequenz

$$0 \xrightarrow{0} c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\iota} c(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\lim} \mathbb{R} \xrightarrow{0} 0.$$

Die Ableitung auf  $X = ]a, b[$  besichert uns die kurze exakte Sequenz

$$0 \xrightarrow{0} \mathbb{R} \xrightarrow{\iota} \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{D} \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{0} 0.$$

Hier ist  $\iota(a) = \text{const}_X^a$  die Einbettung der reellen Zahlen als Konstanten.

## Exakte Sequenzen

**Beispiel:** Für jede  $R$ -lineare Surjektion  $f: V \twoheadrightarrow W$  haben wir

$$0 \xrightarrow{0} \ker(f) \xrightarrow{\iota} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{0} 0.$$

Für jede  $R$ -lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  haben wir entsprechend

$$0 \xrightarrow{0} \ker(f) \xrightarrow{\iota} V \xrightarrow{\hat{f}} \text{im}(f) \xrightarrow{0} 0.$$

Wir nennen  $\text{coker}(f) := W/\text{im}(f)$  den **Cokern** von  $f$  und erhalten so:

$$0 \xrightarrow{0} \ker(f) \xrightarrow{\iota} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{q} \text{coker}(f) \xrightarrow{0} 0$$

Dadurch wird die Symmetrie der Begriffe vollständig wiederhergestellt.

😊 Dies sind jeweils exakte Sequenzen: überall gilt „Bild gleich Kern“. Hier ist  $\iota$  die Inklusion und  $q$  der Quotient. Sequenzen sind sehr flexibel: Auch Varianten sind möglich, wie in obigen Beispielen aus der Analysis.

😊 Ich wiederhole daher noch einmal Ziel und Zweck dieses Begriffs: Exakte Sequenzen bündeln nützliche Informationen auf effiziente Weise.

Sequenzen geringer Länge 2, 3, 4, 5 wie oben sind besonders häufig. Gelegentlich möchte man auch unendliche Sequenzen betrachten, zum Beispiel  $S = (f_i : V_i \rightarrow V_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$  oder  $S = (f_i : V_i \rightarrow V_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ .

Allgemein betrachten wir daher eine **Sequenz**  $S = (f_i : V_i \rightarrow V_{i+1})_{i \in I}$ , wobei die Indexmenge  $I \subseteq \mathbb{Z}$  und das Innere  $I^\circ$  folgende Form haben:

$$\begin{aligned} I &= \mathbb{Z}, & I^\circ &= \mathbb{Z}, \\ I &= \mathbb{Z}_{\geq a}, & I^\circ &= \mathbb{Z}_{> a}, \\ I &= \mathbb{Z}_{< b}, & I^\circ &= \mathbb{Z}_{< b}, \\ I &= \{ i \in \mathbb{Z} \mid a \leq i < b \}, & I^\circ &= \{ i \in \mathbb{Z} \mid a < i < b \}. \end{aligned}$$

Die Sequenz  $S$  heißt **exakt an der Stelle**  $i \in I^\circ$ , falls  $\text{im}(f_{i-1}) = \ker(f_i)$ . Die Sequenz  $S$  heißt **exakt**, falls sie an jeder Stelle  $i \in I^\circ$  exakt ist.

**Bemerkung:** Meist lässt sich die Sequenz  $S$  auf natürliche Weise nach links und rechts verlängern, so dass wir  $I = \mathbb{Z}$  annehmen können.

Notfalls füllen wir durch Nullräume und Nullabbildungen auf; an den Rändern erhalten Kern und Cokern die Exaktheit.

## Exakte Sequenzen und Komplexe

**Bemerkung:** Die Bedingung  $\text{im}(f_{i-1}) \subseteq \ker(f_i)$  ist meist recht leicht zu prüfen, denn sie ist äquivalent zu der Gleichung  $f_i \circ f_{i-1} = 0$ .

Wenn die Abbildungen  $f_{i-1}$  und  $f_i$  ganz konkret vorliegen, so genügt es, die Komposition zu berechnen und mit der Nullabbildung zu vergleichen.

Eine Sequenz  $S = (f_i : V_i \rightarrow V_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$  mit der Eigenschaft  $f_i \circ f_{i-1} = 0$  für alle  $i \in \mathbb{Z}$  heißt **Kettenkomplex** oder kurz **Komplex**.

In der Linearen Algebra sind Komplexe anfangs noch selten, daher will und werde ich hier nicht genauer darauf eingehen.

Exakte Sequenzen hingegen treten sehr früh und prominent auf, deshalb möchte ich Ihnen diese hilfreiche Sichtweise nahebringen.

Muss das gleich so früh am Anfang geschehen? Ich denke ja! Auch in der Mathematik sieht man nämlich nur, was man weiß.

*Man erblickt nur, was man schon weiß und versteht.*

Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832)

**Exkurs:** Komplexe spielen eine wichtige Rolle in der homologischen Algebra und der algebraischen Topologie und verwandten Gebieten.

Die Vektoranalysis zum Beispiel untersucht glatte Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und Vektorfelder  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  auf einem Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ . Gradient, Rotation und Divergenz bilden darauf einen Komplex:

$$C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{grad}} C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{rot}} C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{div}} C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$$

Ausgeschrieben bedeutet das  $\text{rot} \circ \text{grad} = 0$  und  $\text{div} \circ \text{rot} = 0$ .

Diese wunderbaren Rechentechniken lernen Sie in der Analysis und ebenso in der Höheren Mathematik im zweiten und dritten Semester.

Für  $\Omega = \mathbb{R}^3$  oder einen Quader  $\Omega = ]a_1, b_1[ \times ]a_2, b_2[ \times ]a_3, b_3[$  ist diese Sequenz tatsächlich exakt. Interessanterweise gilt Exaktheit nicht mehr, wenn das Gebiet  $\Omega$  Löcher hat.

In diesem Sinne misst der obige Komplex die Löcher des Gebiets  $\Omega$ . Diese Beobachtung ist der Ausgangspunkt der algebraischen Topologie.

Nach diesem Exkurs zu Komplexen komme ich auf Exaktheit zurück, die uns in zahlreichen konkreten Rechnungen noch beschäftigen wird.

**Bemerkung:** Die Bedingung  $\text{im}(f_{i-1}) \subseteq \ker(f_i)$  ist meist leicht; wie oben erklärt genügt es, die Gleichung  $f_i \circ f_{i-1} = 0$  zu prüfen.

Die Umkehrung  $\text{im}(f_{i-1}) \supseteq \ker(f_i)$  ist naturgemäß schwieriger: Hierzu müssen wir typischerweise den gesamten Kern bestimmen.

In den meisten Beweisen zur Exaktheit wird  $\text{im}(f_{i-1}) \subseteq \ker(f_i)$  leicht und routiniert ablaufen, während  $\text{im}(f_{i-1}) \supseteq \ker(f_i)$  aufwändiger ist.

**Beispiel:** Einen ersten (wenn auch noch allzu schwachen) Eindruck vermittelt der folgende Satz und sein Beweis zu direkten Summen.

**Beispiel:** Eine perfekte Illustration zeigt der Beweis von Lemma I2G zur Exaktheit von  $K \rightarrow \mathbb{R}^{(I)} \rightarrow T \rightarrow 0$  für  $\Phi: \mathbb{R}^{(I)} \rightarrow T: c \mapsto \sum_{Q \in I} c_Q \mathbf{I}_Q$ .

Die Inklusion  $K \subseteq \ker(\Phi)$  ist offensichtlich. Zur Umkehrung  $K \supseteq \ker(\Phi)$  konstruieren wir  $\bar{\Psi}: T \rightarrow \mathbb{R}^{(I)}/K$ ; das ist schon deutlich raffinierter!

## Direkte Summen, extern und intern

Sind  $V_1, \dots, V_n$  lineare Räume, so auch ihre **externe direkte Summe**

$$V_1 \times \cdots \times V_n = \{ (v_1, \dots, v_n) \mid v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n \}.$$

Wie üblich nutzen wir die koordinatenweise Addition und Skalierung.

### Satz I21: interne Summe

Sind  $V_1, V_2 \leq W$  lineare Unterräume, so auch  $U := V_1 \cap V_2 \leq W$  und  $V = V_1 + V_2 \leq W$ . Diese fügen sich zur kurzen exakten Sequenz

$$0 \xrightarrow{0} U \xrightarrow[u \mapsto (-u, u)]{f} V_1 \times V_2 \xrightarrow[(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2]{g} V_1 + V_2 \xrightarrow{0} 0.$$

Wichtiger Spezialfall: Gilt  $U = \{0\}$ , so erhalten wir den Isomorphismus

$$g : V_1 \times V_2 \xrightarrow{\sim} V_1 + V_2 : (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2.$$

**Beweis:** Die Abbildungen  $f$  und  $g$  sind linear,  $f$  ist injektiv,  $g$  ist surjektiv. Es gilt  $g \circ f = 0$ , also  $\text{im}(f) \subseteq \ker(g)$ . Umgekehrt gilt  $\text{im}(f) \supseteq \ker(g)$ , denn  $(v_1, v_2) \in \ker(g)$  bedeutet  $v_1 = -v_2 \in V_1 \cap V_2 = U$ . **QED**

## Direkte Summen, extern und intern

Das ist ein schönes Beispiel für die ordnende Kraft exakter Sequenzen: Wir können alle relevanten Informationen in einer Zeile bündeln!

😊 Im wichtigen Spezialfall  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$  ist  $g$  ein Isomorphismus. In Worten bedeutet das: Jeder Vektor  $v \in V$  zerlegt sich eindeutig als Summe  $v = v_1 + v_2$  mit Komponenten  $v_1 \in V_1$  und  $v_2 \in V_2$ .

Die Summe  $V = V_1 + V_2$  nennen wir dann eine **direkte Summe** und schreiben  $V = V_1 \oplus V_2$ . Wir nennen  $V_2$  ein **direktes Komplement** zu  $V_1$ , und umgekehrt. Eine solche Zerlegung ist eine besondere Eigenschaft!

⚠ Nicht jeder Unterraum  $V_1 \leq V$  erlaubt ein direktes Komplement  $V_2$ .

**Beispiel:** Im  $\mathbb{Z}$ -linearen Raum  $V = \mathbb{Z}$  ist  $V_1 = 2\mathbb{Z}$  ein Unterraum. Es gilt  $\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} + \{0, 1\}$ , aber es gibt keinen Unterraum  $V_2 \leq \mathbb{Z}$  mit  $V = V_1 \oplus V_2$ .

**Beweis:** Jeder  $\mathbb{Z}$ -lineare Unterraum  $V_2 \leq \mathbb{Z}$  ist von der Form  $V_2 = n\mathbb{Z}$  (G1v). Für  $n = 0$  ist  $2\mathbb{Z} + 0\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ . Für  $n \geq 1$  ist  $2\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} \neq \{0\}$ .

Allgemein ist die interne direkte Summe  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$  in  $W$  die gewöhnliche Summe  $V = V_1 + \cdots + V_n$  mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass  $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = \{0\}$  für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt.

**Definition I2J: interne direkte Summe**

Seien  $V_1, \dots, V_n \leq W$  lineare Unterräume mit der Eigenschaft

$$(\star) \quad V_i \cap \left( \sum_{j \neq i} V_j \right) = \{0\} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Dann nennen wir  $V = V_1 + \dots + V_n \leq W$  eine **interne direkte Summe**:

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n := V_1 + \dots + V_n \leq W \quad \text{mit } (\star)$$

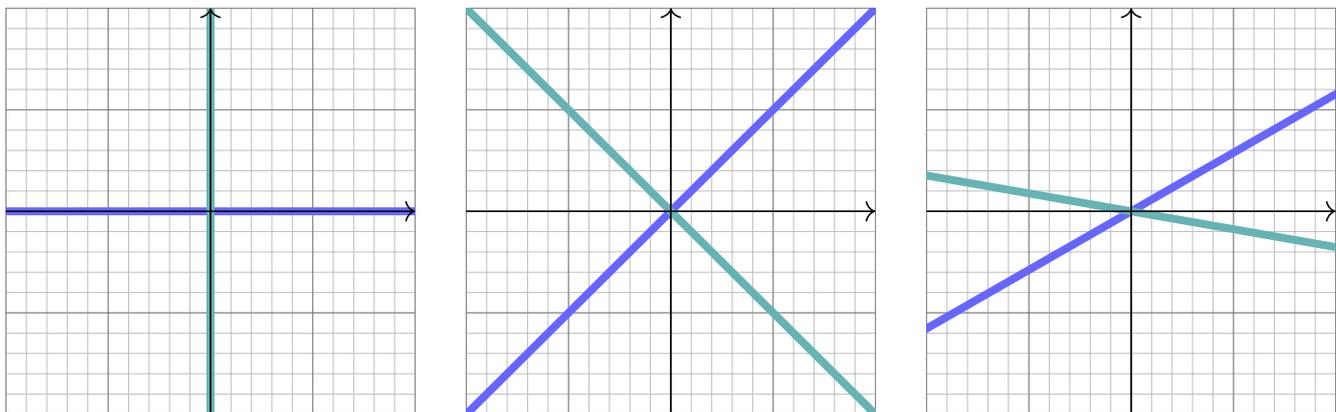
Diese ist isomorph zur **externen direkten Summe** vermöge

$$g : V_1 \times \dots \times V_n \xrightarrow{\sim} V_1 \oplus \dots \oplus V_n : (v_1, \dots, v_n) \mapsto v_1 + \dots + v_n.$$

In Worten bedeutet das: Jeder Vektor  $v \in V$  zerlegt sich eindeutig als Summe  $v = v_1 + \dots + v_n$  mit Komponenten  $v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n$ .

**Beweis:** Die Abbildung  $g$  ist linear und surjektiv, nach Definition von  $V$ . Für  $(v_1, \dots, v_n) \in \ker(g)$  gilt  $v_i = -(\sum_{j \neq i} v_j) \in V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = \{0\}$ , also  $v_i = 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Das zeigt  $\ker(g) = \{0\}$ . □

## Direkte Summen, extern und intern



**Beispiele:** Die folgenden internen Summen sind direkt:

- 1  $\mathbb{R}^2 = A_1 \oplus A_2$  mit  $A_1 = (1, 0) \cdot \mathbb{R}$  und  $A_2 = (0, 1) \cdot \mathbb{R}$ ,
- 2  $\mathbb{R}^2 = D_1 \oplus D_2$  mit  $D_1 = (1, 1) \cdot \mathbb{R}$  und  $D_2 = (1, -1) \cdot \mathbb{R}$ ,
- 3  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ , allgemein  $\mathbb{C} = e^{i\alpha}\mathbb{R} \oplus e^{i\beta}\mathbb{R}$  mit  $0 \leq \alpha < \beta < \pi$ ,
- 4  $\mathbb{R}^n = e_1\mathbb{R} \oplus \dots \oplus e_n\mathbb{R} = \langle e_1, \dots, e_k \rangle \oplus \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$ ,
- 5  $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R} \oplus X \cdot \mathbb{R}[X] = \mathbb{R} \oplus \{ F \in \mathbb{R}[X] \mid F(a) = 0 \}$  mit  $a \in \mathbb{R}$ ,
- 6  $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}[X^2] \oplus X \cdot \mathbb{R}[X^2]$ , gerade plus ungerade (Beispiel I2M).

## Projektion auf direkte Summanden

### Satz I2K: Projektion auf direkte Summanden

(1) Gegeben sei eine (interne) direkte Summe  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ .

Wir definieren den **Projektor**  $p_i : V \rightarrow V : \sum_j v_j \mapsto v_i$  für  $v_j \in V_j$ .

Die Abbildungen  $p_1, \dots, p_n$  sind linear mit der Eigenschaft

$$(\star) \quad p_1 + \cdots + p_n = \text{id}_V \quad \text{und} \quad p_i \circ p_j = 0 \quad \text{für } i \neq j$$

sowie  $p_i^2 = p_i$  mit Bild  $\text{im}(p_i) = V_i$  und Kern  $\ker(p_i) = \bigoplus_{j \neq i} V_j$ .

Hierzu gilt die folgende Umkehrung:

(2) Gegeben seien lineare Abbildungen  $p_1, \dots, p_n : V \rightarrow V$  mit  $(\star)$ .

Dann folgt Idempotenz  $p_i^2 = p_i$  für alle  $i$ , und für  $V_i = \text{im}(p_i) \leq V$  gilt

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n.$$

😊 In diesem Sinne ist jede Summenzerlegung  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$  äquivalent zu Projektoren  $p_1, \dots, p_n : V \rightarrow V$  mit der Eigenschaft  $(\star)$ . Wir rechnen hier im Endomorphismenring  $\text{End}_R(V)$ , siehe Satz I1J.

## Projektion auf direkte Summanden

**Beweis:** Aussage (1) ist klar nach Konstruktion: Nachrechnen!

(2a) Für jeden Index  $i = 1, \dots, n$  gilt  $p_i^2 = p_i$ , denn

$$\begin{aligned} p_i &\stackrel{\text{Ntr}}{=} p_i \circ \text{id}_V \stackrel{(\star)}{=} p_i \circ (p_1 + \cdots + p_n) \\ &\stackrel{\text{Dist}}{=} p_i \circ p_1 + \cdots + p_i \circ p_n \stackrel{(\star)}{=} p_i^2. \end{aligned}$$

(2b) Wir zeigen  $V = V_1 + \cdots + V_n$ : Die Inklusion „ $\supseteq$ “ ist klar.

Zur Inklusion „ $\subseteq$ “ sei  $x \in V$ . Für  $x_i := p_i(x) \in p_i(V) = V_i$  gilt

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_n &\stackrel{\text{Def}}{=} p_1(x) + \cdots + p_n(x) \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} (p_1 + \cdots + p_n)(x) \stackrel{(\star)}{=} \text{id}_V(x) = x. \end{aligned}$$

(2c) Wir zeigen  $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = \{0\}$ : Sei  $x \in V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j)$ .

Zu  $x \in V_i = p_i(V)$  existiert  $v \in V$  mit  $x = p_i(v) = p_i^2(v) = p_i(x)$ .

Aus  $x \in \sum_{j \neq i} p_j(V)$  folgt durch Anwendung von  $p_i$ :

$$x = p_i(x) \in p_i(\sum_{j \neq i} p_j(V)) = \sum_{j \neq i} p_i p_j(V) \stackrel{(\star)}{=} \{0\}$$

Die Aussagen (2b) und (2c) beweisen  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ .

□ QED

## Projektion auf direkte Summanden

### Korollar I2L: Projektor und Idempotenz

(1) Gegeben sei eine (interne) direkte Summe  $V = V_1 \oplus V_2$ .

Wir definieren den **Projektor auf  $V_1$  parallel zu  $V_2$**  durch

$$p : V \rightarrow V : v_1 + v_2 \mapsto v_1 \quad \text{für } v_1 \in V_1 \text{ und } v_2 \in V_2.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, linear, idempotent gemäß  $p^2 = p$ , mit dem Bild  $\text{im}(p) = V_1$  und dem Kern  $\text{ker}(p) = V_2$ .

(2) Sei  $p : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung und idempotent, also  $p^2 = p$ . Das zugehörige Paar  $p_1 = p$  und  $p_2 = \text{id}_V - p$  erfüllt  $p_1 + p_2 = \text{id}_V$  und  $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$ , und induziert somit die Zerlegung

$$V = \text{im}(p) \oplus \text{ker}(p).$$

**Beispiel:** Zu  $a \in \mathbb{R}$  sei  $p = p_a : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] : F \mapsto F(a)$ . Wir erhalten:

$$\mathbb{R}[X] = \text{im}(p) \oplus \text{ker}(p) = \mathbb{R} \oplus \{ F \in \mathbb{R}[X] \mid F(a) = 0 \}$$

Für jede Wahl  $a \in \mathbb{R}$  erhalten wir einen anderen Summanden  $\text{ker}(p_a)$ .

## Projektion auf direkte Summanden

### Beispiel I2M: Zerlegung in gerade und ungerade

Jede Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  schreibt sich eindeutig als Summe  $f = g + u$  einer geraden Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(-x) = g(x)$ , und einer ungeraden Funktion  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(-x) = -u(x)$ . Genauer gilt hier:

$$\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^+ \oplus \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^-$$

Diese Zerlegung folgt aus den  $\mathbb{R}$ -linearen Projektoren

$$p_1 = p_+ : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \mapsto g \quad \text{mit} \quad g(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)],$$

$$p_2 = p_- : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \mapsto u \quad \text{mit} \quad u(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)].$$

Sie erfüllen  $p_1 + p_2 = \text{id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$  sowie  $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$ , wir können also den vorigen Satz I2K anwenden.

Dieselbe Zerlegung gilt ebenso in  $\mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  und  $\text{Poly}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Angewendet auf  $\mathbb{R}[X]$  erhalten wir  $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}[X^2] \oplus X \cdot \mathbb{R}[X^2]$ .

Wir möchten nicht nur endliche direkte Summen nutzen wie

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}e_i = \mathbb{R}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_n,$$

sondern auch unendliche direkte Summen wie

$$\mathbb{R}[X] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}X^n = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}X^2 \oplus \dots$$

Das gelingt uns im Prinzip ganz genauso wie im endlichen Fall, aber es gibt einige technische Details, die wir klären müssen.

😊 Wer sich vor allgemeinen Überlegungen gruselt, kann die folgende Ergänzung getrost ignorieren – und bei Bedarf darauf zurückkommen.

😊 Wer sich vor unendlichen Indexmengen wie  $\mathbb{N}$  nicht fürchtet, den wird die folgende Ergänzung beruhigen, oder gar erfreuen, denn alles verläuft wie im endlichen Fall – mit der nötigen Umsicht.

😊 Ich denke, man versteht den endlichen Fall dadurch sogar besser: Der allgemeine Kontext erklärt, was „eigentlich“ passiert und macht alle „zufälligen“ Besonderheiten des endlichen Falls klar und verständlich.

### Definition I2N: Produktraum, allgemein

Sei  $R$  ein Ring, etwa  $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \dots$ , und  $I$  eine Menge. Zu jedem Index  $i \in I$  sei ein  $R$ -linearer Raum  $V_i$  gegeben.

Der **Produktraum** der Familie  $(V_i)_{i \in I}$  ist das kartesische Produkt

$$P = \prod_{i \in I} V_i := \{ u = (u_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I : u_i \in V_i \}$$

mit koordinatenweiser Addition und Skalarmultiplikation. Damit ist  $P$  ein  $R$ -linearer Raum. Hierzu gehören die **kanonischen Projektionen**

$$p_i = \text{pr}_i : P \rightarrow V_i : u \mapsto u_i.$$

Nach Konstruktion sind dies  $R$ -lineare Abbildungen.

Wir nutzen kartesische Produkte wie in D3E erklärt. Alle Konstruktionen, die wir dort für Produkte und Summen von Mengen ausgeführt haben, übertragen wir nun auf Produkte und Summen von linearen Räumen.

**Beispiel:** Speziell für  $I = \{1, \dots, n\}$  erhalten wir wie zuvor

$$\prod_{i \in I} V_i = V_1 \times \dots \times V_n = \{ u = (u_1, \dots, u_n) \mid u_1 \in V_1, \dots, u_n \in V_n \}.$$

**Beispiel:** Das abzählbare Produkt  $\prod_{n \in \mathbb{N}} V_n$  besteht aus allen Folgen

$$u = (u_0, u_1, u_2, \dots) \quad \text{mit } u_n \in V_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

**Beispiel:** Gilt  $V_i = R$  für alle  $i \in I$ , so finden wir das vertraute Beispiel

$$\prod_{i \in I} R = R^I = \{ u : I \rightarrow R \}.$$

**Beispiel:** Gilt  $V_i = V$  für alle  $i \in I$ , so finden wir entsprechend

$$\prod_{i \in I} V = V^I = \{ u : I \rightarrow V \}.$$

All diese Mengen versehen wir jeweils mit koordinatenweiser Addition und Skalierung; erst dadurch werden sie zu  $R$ -linearen Räumen.

### Satz I20: universelle Abbildungseigenschaft (UAE)

Sei  $P = \prod_{i \in I} V_i$  der Produktraum der Familie  $(V_i)_{i \in I}$ .

$$\begin{array}{ccc} U & \overset{\exists! f}{\dashrightarrow} & P \\ & \searrow f_i & \downarrow p_i \\ & & V_i \end{array}$$

Zu jeder Familie  $(f_i : U \rightarrow V_i)_{i \in I}$  von  $R$ -linearen Abbildungen existiert genau eine  $R$ -lineare Abbildung  $f : U \rightarrow P$  mit  $p_i \circ f = f_i$  für alle  $i \in I$ , also  $f(u) = (f_i(u))_{i \in I}$ . Wir haben somit die kanonische Bijektion

$$\Phi : \text{Hom}_R\left(U, \prod_{i \in I} V_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(U, V_i) : f \mapsto (p_i \circ f)_{i \in I}.$$

Wir schreiben  $f = \prod_{i \in I} f_i := \Phi^{-1}((f_i)_{i \in I})$ , kurz  $f = (f_i : U \rightarrow V_i)_{i \in I}$ : Die Funktion  $f$  besteht aus ihren Koordinatenfunktionen  $f_i$  für  $i \in I$ .

**Beweis:** Dies folgt aus der Definition I2N des Produkts.

QED

**Definition I2P: Summenraum, allgemein**

Sei  $R$  ein Ring, etwa  $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \dots$ , und  $I$  eine Menge. Zu jedem Index  $i \in I$  sei ein  $R$ -linearer Raum  $V_i$  gegeben.

Der **Summenraum** der Familie  $(V_i)_{i \in I}$  ist

$$S = \bigoplus_{i \in I} V_i := \left\{ x \in \prod_{i \in I} V_i \mid \#\text{supp}(x) < \infty \right\}$$

mit koordinatenweiser Addition und Skalarmultiplikation. Damit ist  $S \leq P$  ein  $R$ -linearer Raum. Hierzu gehören die **kanonischen Injektionen**

$$\iota_i : V_i \hookrightarrow S : u_i \mapsto u \quad \text{mit } u_j = 0 \text{ für alle } j \neq i.$$

Nach Konstruktion sind dies  $R$ -lineare Abbildungen.

**Bemerkung:** Ist die Indexmenge  $I$  endlich, so gilt  $\bigoplus_{i \in I} V_i = \prod_{i \in I} V_i$ . Ist die Indexmenge hingegen unendlich, so gilt hier  $\bigoplus_{i \in I} V_i < \prod_{i \in I} V_i$ .

**Beispiel:** Speziell für  $I = \{1, \dots, n\}$  erhalten wir wie zuvor

$$\bigoplus_{i \in I} V_i = V_1 \oplus \dots \oplus V_n = \{ u = (u_1, \dots, u_n) \mid u_1 \in V_1, \dots, u_n \in V_n \}.$$

**Beispiel:** Die abzählbare Summe  $\prod_{n \in \mathbb{N}} V_n$  besteht aus allen Folgen

$$u = (u_0, u_1, u_2, \dots) \quad \text{mit } u_n \in V_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und endlichem Träger: Es existiert ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $u_n = 0$  für alle  $n > m$ .

**Beispiel:** Gilt  $V_i = R$  für alle  $i \in I$ , so finden wir das vertraute Beispiel

$$\bigoplus_{i \in I} R = R^{(I)} = \{ u : I \rightarrow R \mid \#\text{supp}(u) < \infty \} \leq R^I.$$

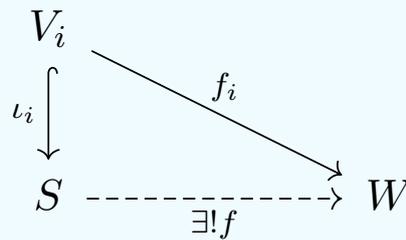
**Beispiel:** Gilt  $V_i = V$  für alle  $i \in I$ , so finden wir entsprechend

$$\bigoplus_{i \in I} V = V^{(I)} = \{ u : I \rightarrow V \mid \#\text{supp}(u) < \infty \} \leq V^I.$$

All diese Mengen versehen wir jeweils mit koordinatenweiser Addition und Skalierung; erst dadurch werden sie zu  $R$ -linearen Räumen.

**Satz I2Q: universelle Abbildungseigenschaft (UAE)**

Sei  $S = \bigoplus_{i \in I} V_i$  die externe direkte Summe der Familie  $(V_i)_{i \in I}$ .



Zu jeder Familie  $(f_i : V_i \rightarrow W)_{i \in I}$  von  $R$ -linearen Abbildungen existiert genau eine  $R$ -lineare Abbildung  $f : S \rightarrow W$  mit  $f \circ \iota_i = f_i$  für alle  $i \in I$ , also  $f(u) = \sum_{i \in I} f_i(u_i)$ . Wir haben somit die kanonische Bijektion

$$\Phi : \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{i \in I} V_i, W\right) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(V_i, W) : f \mapsto (f \circ \iota_i)_{\lambda \in I}.$$

Wir schreiben hierfür kurz  $f = \bigoplus_{i \in I} f_i := \Phi^{-1}((f_i)_{i \in I})$ .

**Beweis:** Dies folgt aus der Definition I2P der Summe. □

😊 Eigenschaften I2O und I2Q sind dual: Alle Pfeile werden umgedreht.

**Beispiel:** Wir betrachten  $V_i = R$  für alle  $i \in I$ , also

$$\bigoplus_{i \in I} R = R^{(I)} = \left\{ u : I \rightarrow R \mid \#\text{supp}(u) < \infty \right\} \leq R^I$$

Gegeben sei ein  $R$ -linearer Raum  $W$  und  $w_i \in W$  für jedes  $i \in I$ . Dazu haben wir die  $R$ -lineare Abbildung  $f_i : V_i \rightarrow W : \lambda_i \mapsto w_i \lambda_i$ . Dank Satz I2Q erhalten wir die vertraute  $R$ -lineare Abbildung

$$f = \bigoplus_{i \in I} f_i : R^{(I)} \rightarrow W : \lambda \mapsto \sum_{i \in I} w_i \lambda_i.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn die Summe ist endlich, genauer gesagt: nur endlich viele Summanden sind ungleich Null.

**Bemerkung:** Der Produktraum  $P = \prod_{i \in I} V_i$  hat seine kanonischen Projektionen  $p_i : P \twoheadrightarrow V_i$ . Der Summenraum  $S = \sum_{i \in I} V_i$  hat seine kanonischen Injektion  $\iota_i : V_i \hookrightarrow S$ . Für diese gilt jeweils die universelle Abbildungseigenschaft I2O bzw. I2Q. Auch der Summenraum  $S$  erlaubt Projektionen, als Einschränkung  $p_i|_S : S \hookrightarrow P \twoheadrightarrow V_i$ . Der Produktraum  $P$  erlaubt ebenfalls Injektionen, durch die Inklusion  $\text{inc} \circ \iota_i : V_i \hookrightarrow S \hookrightarrow P$ . Diese Abbildungen erfüllen jedoch keine besonderen Eigenschaften.

**Definition I2R: interne direkte Summe**

Zu jedem  $i \in I$  sei  $V_i \leq W$  ein  $R$ -linearer Unterraum. Dabei gelte

$$V_i \cap \left( \sum_{j \neq i} V_j \right) = \{0\} \quad \text{für alle } i \in I.$$

Dann nennen wir ihre Summe in  $W$  eine **interne direkte Summe**:

$$V = \bigoplus_{i \in I}^{\text{int}} V_i := \sum_{i \in I} V_i \leq W$$

Diese ist isomorph zur **externen direkten Summe** vermöge

$$g : \bigoplus_{i \in I}^{\text{ext}} V_i \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I}^{\text{int}} V_i : (v_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} v_i.$$

In Worten bedeutet das: Jeder Vektor  $v \in V$  zerlegt sich eindeutig als Summe  $v = \sum_{i \in I} v_i$  mit Komponenten  $v_i \in V_i$  für jedes  $i \in I$ .

**Beweis:** Die Abbildung  $g$  ist linear und surjektiv, nach Definition von  $V$ . Für  $(v_i)_{i \in I} \in \ker(g)$  gilt  $v_i = -(\sum_{j \neq i} v_j) \in V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = \{0\}$ , also  $v_i = 0$  für alle  $i \in I$ . Das zeigt  $\ker(g) = \{0\}$ . □

## Interne direkte Summe

**Bemerkung:** Es ist etwas unglücklich, dass die externe und die interne direkte Summe beide mit demselben Symbol  $\bigoplus$  bezeichnet werden. Andererseits besteht ein kanonischer Isomorphismus, wie oben erklärt:

$$g : \bigoplus_{i \in I}^{\text{ext}} V_i \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I}^{\text{int}} V_i : (v_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} v_i.$$

Zur Klarheit und Betonung habe ich hier „ext“ und „int“ hinzugefügt. In der Praxis lässt man diese durchaus hilfreichen Bezeichnungen meist weg und stellt (hoffentlich) durch den Kontext klar, was gemeint ist.

Im endlichen Falle (Satz I2J) habe ich dieses Problem der Notation gemildert, indem ich  $V_1 \times \cdots \times V_n$  für die externe direkte Summe schreibe und  $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$  für die interne direkte Summe in  $W$ .

Im unendlichen Falle steht dieser Trick nicht zur Verfügung, da wir nicht das Produkt  $P = \prod_{i \in I} V_i$  benötigen, sondern die Summe  $S = \bigoplus_{i \in I}^{\text{ext}} V_i$ , und diese ist ein strikt kleinerer Teilraum  $S < P$ , wie oben erklärt.

**Beispiel:** Für den Polynomring über  $\mathbb{R}$  gilt

$$\mathbb{R}[X] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}}^{\text{int}} \mathbb{R}X^n = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}X^2 \oplus \dots$$

Jedes Polynom  $P \in \mathbb{R}[X]$  schreibt sich eindeutig als eine Summe

$$P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}.$$

Das war das motivierende Beispiel, das ich eingangs betont habe. Dies ist eine (abzählbar) unendliche direkte Summe von Teilräumen.

**Beispiel:** Mit den kanonischen Injektionen  $\iota_i$  (I2P) gilt

$$\bigoplus_{i \in I}^{\text{ext}} V_i = \bigoplus_{i \in I}^{\text{int}} \iota_i(V_i) \leq \prod_{i \in I} V_i$$

Hier gilt „ $<$ “, falls  $V_i \neq \{0\}$  für unendlich viele Indizes  $i \in I$  zutrifft, und „ $=$ “, falls  $V_i \neq \{0\}$  nur für endlich viele Indizes  $i \in I$  zutrifft.

Eine typische Illustration hierfür ist  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} < \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

**Beispiel:** Für  $R^{(I)}$  wie in Beispiel I1Q gilt

$$R^{(I)} = \bigoplus_{i \in I}^{\text{int}} Re_i \quad \text{bzw.} \quad R^{(I)} = \bigoplus_{i \in I}^{\text{int}} e_i R.$$

Jedes Element  $u \in R^{(I)}$  schreibt sich eindeutig als Summe  $u = \sum_{i \in I} u_i e_i$  (linkslinear) bzw.  $u = \sum_{i \in I} e_i u_i$  (rechtslinear).

Hierbei ist  $Re_i$  bzw.  $e_i R$  das Bild der kanonischen Injektion  $\iota_i: R \hookrightarrow R^{(I)}$ . Auch dies ist eine (beliebig große) direkte Summe von Teilräumen.

**Aufgabe:** Sei  $I = A \sqcup B$  eine Zerlegung der Menge  $I$ .

Erinnerung: Das bedeutet  $I = A \cup B$  und  $A \cap B = \emptyset$ .

(1) Beweisen Sie die (interne) direkte Summenzerlegung

$$R^{(I)} = \langle e_i \mid i \in A \rangle \oplus \langle e_i \mid i \in B \rangle.$$

(2) Konstruieren Sie explizit einen  $R$ -Isomorphismus

$$(\varphi, \psi) : R^{(I)} \cong R^{(A)} \times R^{(B)} \quad \text{bzw.} \quad (\varphi, \psi) : R^I \cong R^A \times R^B.$$

Allgemein sei  $I = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  eine Zerlegung der Menge  $I$ .

Das bedeutet  $I = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  und  $A_\lambda \cap A_\mu = \emptyset$  für alle  $\lambda \neq \mu$ .

(3) Beweisen Sie die (interne) direkte Summenzerlegung

$$R^{(I)} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda}^{\text{int}} \langle e_i \mid i \in A_\lambda \rangle.$$

(4) Konstruieren Sie explizit einen  $R$ -Isomorphismus

$$(\varphi, \psi) : R^{(I)} \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda}^{\text{ext}} R^{(A_\lambda)} \quad \text{bzw.} \quad (\varphi, \psi) : R^I \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} R^{A_\lambda}.$$

**Lösung:** Wir betrachten hier  $R^{(I)}$  als rechtslinearen Raum über  $R$ ; der linkslineare Fall gelingt genauso. Jedes Element  $u \in R^{(I)}$  schreibt sich eindeutig als Linearkombination  $u = \sum_{i \in I} e_i u_i$ , siehe I1Q.

(1a) Wir zeigen zunächst  $R^{(I)} = \langle e_i \mid i \in A \rangle + \langle e_i \mid i \in B \rangle$ .

Die Inklusion „ $\supseteq$ “ ist klar. Zur Inklusion „ $\subseteq$ “ sei  $u \in R^{(I)}$ . Dann gilt

$$u = \sum_{i \in I} e_i u_i = \sum_{i \in A} e_i u_i + \sum_{i \in B} e_i u_i \in \langle e_i \mid i \in A \rangle + \langle e_i \mid i \in B \rangle.$$

(1b) Wir zeigen anschließend  $\langle e_i \mid i \in A \rangle \cap \langle e_i \mid i \in B \rangle = \{0\}$ .

Die Inklusion „ $\supseteq$ “ ist klar. Zur Inklusion „ $\subseteq$ “ sei  $u : I \rightarrow R : i \mapsto u_i$ :

Für  $u \in \langle e_i \mid i \in A \rangle$  gilt  $\text{supp}(u) \subseteq A$ , also  $u_i = 0$  für alle  $i \in I \setminus A = B$ .

Für  $u \in \langle e_i \mid i \in B \rangle$  gilt  $\text{supp}(u) \subseteq B$ , also  $u_i = 0$  für alle  $i \in I \setminus B = A$ .

Für  $u \in \langle e_i \mid i \in A \rangle \cap \langle e_i \mid i \in B \rangle$  gilt  $u_i = 0$  für alle  $i \in A \cup B = I$ .

Das bedeutet  $u = 0$ .

(2) Es genügen  $\varphi(u) = (u|_A, u|_B)$  und  $\psi(u_A, u_B) = u_A \sqcup u_B$ .

Diese beiden Abbildungen sind wohldefiniert und  $R$ -linear und erfüllen  $\psi \circ \varphi = \text{id}$  und  $\varphi \circ \psi = \text{id}$ .

(3a) Wir zeigen zunächst  $R^{(I)} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle e_i \mid i \in A_\lambda \rangle$ .

Die Inklusion „ $\supseteq$ “ ist klar. Zur Inklusion „ $\subseteq$ “ sei  $u \in R^{(I)}$ .

Dann gilt  $u = \sum_{i \in I} e_i u_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in A_\lambda} e_i u_i \in \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle e_i \mid i \in A_\lambda \rangle$ .

(3b) Wir zeigen anschließend

$$\langle e_i \mid i \in A_\lambda \rangle \cap \sum_{\mu \neq \lambda} \langle e_i \mid i \in A_\mu \rangle = \{0\}.$$

Die Summe können wir zusammenfassen zu

$$\sum_{\mu \neq \lambda} \langle e_i \mid i \in A_\mu \rangle = \langle e_i \mid i \in B_\lambda \rangle$$

mit  $B_\lambda = \bigcup_{\mu \neq \lambda} A_\mu = I \setminus A_\lambda$ . Wir können daher (1b) anwenden.

(4) Es genügen  $\varphi(u) = (u|_{A_\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$  und  $\psi((u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda$

Diese beiden Abbildungen sind wohldefiniert und  $R$ -linear

und erfüllen  $\psi \circ \varphi = \text{id}$  und  $\varphi \circ \psi = \text{id}$ .

Und die Moral von der Geschichte? Wie bearbeiten wir Anwendungen, in denen endliche Summen und Linearkombinationen nicht genügen?

In der Linearen Algebra arbeiten wir ausschließlich mit endlichen Summen  $\sum_{i \in I} v_i$  und endlichen Linearkombinationen  $\sum_{i \in I} v_i \lambda_i$ .

Oft ist die Indexmenge  $I$  zwar unendlich, doch wir stellen auch dann explizit sicher, dass nur endlich viele Summanden ungleich Null sind.

Die Analysis klärt den Begriff der Konvergenz und erntet als Lohn die bewundernswert starken Methoden der Grenzwerte und Reihen.

Beide Sichtweisen vereinen sich später in der Funktionalanalysis, wo Lineare Algebra und Analysis wunderbar zusammenarbeiten.

Die soliden Grundlagen der Linearen Algebra werden sich auch dort, wie überall, für Sie auszahlen.