Prof. Dr. Michael Eisermann • Lineare Algebra

Kapitel F

Ordnungsrelationen und Mächtigkeit

Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden
— aber nicht noch einfacher.

Albert Einstein (1879–1955)

Vollversion • eiserm.de/lehre/LinA • 05.03.2022

Inhalt dieses Kapitels F

Ordnungsrelationen

Ordnungsrelationen werden überall genutzt innerhalb der Mathematik sowie in ihren zahlreichen Anwendungen und nahezu überall im Alltag:

1. Mathematik und Physik:
   Anordnung der reellen Zahlen.
2. Informatik und Programmierung:
   Daten suchen und sortieren.
3. Optimierung und Spieltheorie:
   Ertrag maximieren, Kosten minimieren.
4. Wirtschafts- und Sozialwissenschaften:
   Präferenzen über mögliche Alternativen.

Überall wird mit „größer / kleiner / gleich“ oder „besser / schlechter / egal“ Ordnung geschaffen. Hierzu benötigen wir präzises Grundvokabular!

Im ersten Teil dieses Kapitels ist genau das unser Ziel: Wir diskutieren die nötigen Grundbegriffe zu Ordnungsrelationen, so dass Sie damit in Ihrem weiteren Studium gut und sicher arbeiten können.

Unendliche Mengen

Im zweiten Teil dieses Kapitels untersuchen wir unendliche Mengen. Die Grundlagen zu endlichen Mengen kennen Sie aus Kapitel E.

Der Invarianzsatz E1H garantiert: Für jede endliche Menge X und jede Selbstabbildung $h : X \to X$ sind die Eigenschaften *injektiv* und *surjektiv* und *bijektiv* äquivalent! Dies charakterisiert die endlichen Mengen (F2E). Für unendliche Mengen hingegen gilt diese Äquivalenz nicht mehr!

Auch für unendliche Mengen wollen wir die „Elementezahl“ vergleichen, und dies geschieht genau wie im endlichen Fall durch In/Sur/Bijektionen. Durch Bijektion definieren wir den Begriff der „Gleichmächtigkeit“, damit klären wir erste Beispiele und beweisen grundlegende Rechenregeln.

Dabei stellt sich heraus, dass die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}^n$, ... untereinander gleichmächtig sind, wir sagen dazu auch: sie sind *abzählbar unendlich*. Hingegen ist die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen *überabzählbar unendlich*. Unendliche Mengen halten einige Überraschungen bereit!

Zum krönenden Abschluss erhalten wir Cantors ebenso eleganten wie sensationellen Beweis, dass fast alle reellen Zahlen transzendent sind.

Ordnungsrelationen: reelle Zahlen

In der Mathematik und der Physik, sowie generell in allen Natur- und Ingenieurwissenschaften, spielen die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ eine zentrale Rolle, insbesondere ihre charakterisierende Eigenschaft: Der Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ ist *geordnet* und zudem *(ordnungs)vollständig*.

Vollständigkeit bedeutet: Zu jeder Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$, die nicht-leer und nach oben beschränkt ist, existiert in $\mathbb{R}$ eine kleinste obere Schranke. Diese Ordnungsbegriffe wollen wir in diesem Kapitel genauer erklären, und bereits die reellen Zahlen sind hierfür eine starke Motivation.

Auf dieser Vollständigkeit gründet die gesamte Analysis und somit all ihre wunderbaren Anwendungen: Grenzwerte von Folgen und Reihen, Ableitungen und Integrale, Fourier–Reihen und Differentialgleichungen, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Optimierung, ... sowie darauf aufbauend ihre numerische Implementierung auf dem Computer.

Ordnungsrelationen: Suchen und Sortieren

In der Informatik und der Programmierung werden Ordnungsrelationen nahezu überall genutzt, um Daten effizient zu suchen und zu sortieren.

In fact, there were many installations in which the task of sorting was responsible for more than half of the computing time. From these statistics we may conclude that either (i) there are many important applications of sorting, or (ii) many people sort when they shouldn't, or (iii) inefficient sorting algorithms have been in common use. The real truth probably involves all three of these possibilities, but in any event we can see that sorting is worthy of serious study, as a practical matter.

Donald E. Knuth, *The Art of Computer Programming*

Der Erfolg von Computeranwendungen beruht nur zu einem Teil auf der Rechenleistung, zu einem weit größeren auf effizienten Algorithmen!

Ordnungsrelationen: Optimierung und Alltagsanwendungen

In der Optimierung und der Spieltheorie will man den Ertrag maximieren und/oder die Kosten minimieren. Das beginnt mit der Erklärung einer zu optimierenden „Zielfunktion“ und einer geeigneten Ordnungsrelation auf den Ergebnissen. Gesucht sind dann die besten Handlungsoptionen.

Die Wirtschafts- und Sozialwissenschaften nutzen diese Sichtweise: Hier beschreibt man komplexe Entscheidungssituationen durch die Präferenzen der Individuen über die möglichen Ergebnisse und sucht dann möglichst optimale Aktionen / Handlungsoptionen / Alternativen.

Auch im Alltag nutzen wir überall die Vergleiche wie „größer / kleiner / gleich“ oder „besser / schlechter / egal“. Das sind Ordnungsrelationen! Ihre sichere Beherrschung liegt nahezu allen rationalen Entscheidungen zu Grunde.

Zur mathematische Untersuchung solcher Probleme benötigen wir präzises Grundvokabular: Die zentrale Forderung ist die *Transitivität*. Häufig erwarten wir Transitivität und werden vom Gegenteil arg verblüfft. In solch Extremfällen sprechen wir von einem *Intransitivitäts-Paradox*.

Ordnungsrelationen in der Linearen Algebra

Ordnungsrelationen sind auch in der Linearen Algebra grundlegend. Als Ausblick nenne ich hier nur kurz folgende Beispiele:

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Genau dann ist die Familie $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V, wenn sie linear unabhängig ist und *maximal* mit dieser Eigenschaft, ebenso wenn sie V erzeugt und *minimal* ist mit dieser Eigenschaft. Wir benötigen hierzu präzise Begriffe!

Der Aufspann einer Teilmenge $X \subseteq V$ ist der *kleinste* Unterraum $U \leq V$, der die Menge X enthält. Dazu können wir U durch Ausschöpfung von innen konstruieren, aber ebenso durch Eingrenzung von außen, also als *Supremum*: Wir betrachten den Durchschnitt U aller Unterräume, die X enthalten, und zeigen dann, dass $U \leq V$ tatsächlich ein Unterraum ist. Somit ist U die kleinste obere Schranke von X, also das Supremum.

Auch die Summe von zwei Untervektorräumen sollte man so sehen: Es ist der kleinste Vektorraum, der beide enthält, als ein Supremum. Das Infimum ist als Durchschnitt besonders leicht zu konstruieren. Die Unterräume von V bilden damit einen Verband.

Ordnungsrelationen

Beispiel: Für natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ definieren wir die Kleiner-Gleich-Relation $a \le b$ durch die Bedingung $a + x = b$ für ein $x \in \mathbb{N}$:

$$(\le) = R = \{ (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} : a + x = b \}$$

Diese Relation auf $X = \mathbb{N}$ erfreut sich folgender Eigenschaften:

Reflexivität, **Refl**(X, R): $\Delta_X \subseteq R$, $a \le a$
Transitivität, **Tran**(X, R): $R \bullet R \subseteq R$, $a \le b \wedge b \le c \Rightarrow a \le c$
Antisymmetrie, **Asym**(X, R): $R \cap R^\intercal \subseteq \Delta_X$, $a \le b \wedge b \le a \Rightarrow a = b$
Totalität, **Total**(X, R): $R \cup R^\intercal = X \times X$, $a \le b \vee b \le a$

Definition F1A: Ordnungsrelation

Eine Relation $R \subseteq X \times X$ auf der Menge X heißt… falls… gilt:

Name \ Eigenschaften	Refl	Tran	Asym	Total
totale Ordnung, lineare Ordnung, Toset	✓	✓	✓	✓
(partielle) **Ordnung**, Halbordnung, Poset	✓	✓	✓	
totale Präordnung, Präferenzordnung	✓	✓		✓
(partielle) **Präordnung**, Quasiordnung	✓	✓		

Ordnungsrelationen

Ist $R \subseteq X \times X$ eine totale / partielle Prä/Ordnung auf der Menge X, so nennen wir das Paar (X, R) eine total / partiell prä/geordnete Menge.

Die englischen Bezeichnungen Poset / Toset sind bequem und üblich. Für prägeordnete Mengen findet man auch die Bezeichnung Proset.

Manche der Axiome sind redundant: Aus Totalität folgt Reflexivität. Reflexivität und Antisymmetrie sind äquivalent zu $R \cap R^\intercal = \Delta_X$.

Beispiel: Jede Äquivalenzrelation ist eine symmetrische Präordnungen: Zusätzlich zu Reflexivität und Transitivität fordern wir noch Symmetrie.

Übliche Schreibweisen für Ordnungen sind $\le, =, \ge$ oder $\sqsubseteq, =, \sqsupseteq$, für die Inklusion von Mengen passt dazu $\subseteq, =, \supseteq$ besonders gut.

Für Präordnungen eignen sich $\preccurlyeq, \approx, \succcurlyeq$ oder $\lesssim, \approx, \gtrsim$. Hier wird die Gleichheit $=$ gelockert zur Äquivalenz $\approx$ assoziierter Elemente.

Für die zugehörigen Striktordnungen schreiben wir dann entsprechend $<, =, >$ und $\sqsubset, =, \sqsupset$ und $\subsetneq, =, \supsetneq$ und $\prec, \approx, \succ$, etc.

Ordnungsrelationen: total vs partiell

Beispiel: Auf $\mathbb{N}$ ist $\le$ eine totale Ordnung, das Paar $(\mathbb{N}, \le)$ ist ein Toset. Dasselbe gilt für $(\mathbb{Z}, \le)$ und $(\mathbb{Q}, \le)$ und $(\mathbb{R}, \le)$ mit der üblichen Ordnung.

Beispiel: Sei Ω eine Menge und $\mathscr{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ die Potenzmenge. Die Inklusionsrelation $\subseteq$ erfreut sich folgender Eigenschaften:

Reflexivität, **Refl**$(\mathscr{A}, \subseteq)$: $A \subseteq A$
Transitivität, **Tran**$(\mathscr{A}, \subseteq)$: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
Antisymmetrie, **Asym**$(\mathscr{A}, \subseteq)$: $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$

Totalität gilt jedoch nicht: Es gilt weder $\{1\} \subseteq \{2\}$ noch $\{2\} \subseteq \{1\}$. Auf $\mathscr{A}$ ist $\subseteq$ eine partielle Ordnung, das Paar $(\mathscr{A}, \subseteq)$ ist ein Poset.

Definition F1B: vergleichbare Elemente

Sei $\preccurlyeq$ eine Prä/Ordnung auf X, also $(X, \preccurlyeq)$ eine prä/geordnete Menge.

Zwei Elemente $a, b \in X$ heißen **vergleichbar**, falls $a \preccurlyeq b$ oder $b \preccurlyeq a$ gilt. Die Prä/Ordnung $\preccurlyeq$ ist **total**, wenn je zwei Elemente vergleichbar sind.

Gilt weder $a \preccurlyeq b$ noch $b \preccurlyeq a$, so nennen wir a und b **unvergleichbar**. Dies kürzen wir mit $a \parallel b$ ab. Im obigen Beispiel gilt $\{1\} \parallel \{2\}$.

Ordnungsrelationen: assoziierte Elemente

Beispiel: Auf der Menge $\mathbb{Z}$ definieren wir die Teilbarkeitsrelation $a \mid_{\mathbb{Z}} b$ durch $\exists a' \in \mathbb{Z} : aa' = b$. Diese erfreut sich folgender Eigenschaften:

Reflexivität, **Refl**$(\mathbb{Z}, |_{\mathbb{Z}})$: $a \mid_{\mathbb{Z}} a$
Transitivität, **Tran**$(\mathbb{Z}, |_{\mathbb{Z}})$: $a \mid_{\mathbb{Z}} b \wedge b \mid_{\mathbb{Z}} c \Rightarrow a \mid_{\mathbb{Z}} c$

Antisymmetrie gilt jedoch nicht: Aus $a \mid_{\mathbb{Z}} b$ und $b \mid_{\mathbb{Z}} a$ folgt nur $a = \pm b$. Auf der Menge $\mathbb{Z}$ ist die Teilbarkeit $|_{\mathbb{Z}}$ nur eine (partielle) Präordnung.

Definition F1C: assoziierte Elemente

Jede Präordnung $(\preccurlyeq) = R$ auf X definiert eine Äquivalenzrelation $(\approx) = R \cap R^\intercal$, **assoziierte Elemente** $a \approx b$ erfüllen $a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a$.

Der Quotient $q : X \twoheadrightarrow Q = X/_{\approx} : a \mapsto [a]$ fasst assoziierte Elemente zusammen; auf Q erhalten wir die Ordnung $\le$ mit $[a] \le [b] \Leftrightarrow a \preccurlyeq b$.

Übung: Weisen Sie die impliziten Behauptungen sorgsam nach!

Beispiel: In der prägeordneten Menge $(\mathbb{Z}, |_{\mathbb{Z}})$ gilt $a \approx b \Leftrightarrow a = \pm b$, und $q : \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/_{\approx} : a \mapsto \{\pm a\}$ entspricht $p : (\mathbb{Z}, |_{\mathbb{Z}}) \twoheadrightarrow (\mathbb{N}, |_{\mathbb{N}}) : a \mapsto |a|$. Die Präordnung $|_{\mathbb{Z}}$ auf $\mathbb{Z}$ wird zusammengefasst zur Ordnung $|_{\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{N}$.

Ordnungsrelationen: Striktordnung

Definition F1D: zugehörige Striktordnung

Sei $\preccurlyeq$ eine Prä/Ordnung auf X, also $(X, \preccurlyeq)$ eine prä/geordnete Menge.

Zu $(\preccurlyeq) = R$ ist $(\succcurlyeq) = R^\intercal$ die **umgekehrte Relation**: $a \succcurlyeq b \Leftrightarrow b \preccurlyeq a$.
Die Negation von $a \preccurlyeq b$ schreiben wir $a \not\preccurlyeq b$, also: $a \not\preccurlyeq b \Leftrightarrow \neg(a \preccurlyeq b)$.

Die **Striktordnung** $(\prec) = S$ zu $(\preccurlyeq) = R$ ist $a \prec b \Leftrightarrow a \preccurlyeq b \wedge b \not\preccurlyeq a$.
Die Striktordnung zu $\succcurlyeq$ schreiben wir entsprechend $\succ$.

Für je zwei Elemente a, b in $(X, \preccurlyeq)$ gilt genau eine der vier Relationen

$$a \prec b \;\dot\vee\; a \succ b \;\dot\vee\; a \approx b \;\dot\vee\; a \parallel b.$$

Ist die betrachtete Präordnung $(\preccurlyeq)$ total, so ist $a \parallel b$ ausgeschlossen.
Ist $(\preccurlyeq)$ eine Ordnung, also antisymmetrisch, so gilt $a \approx b \Leftrightarrow a = b$.

Ist $(\le) = R$ eine totale Ordnung, so gilt für die Striktordnung $(<) = S$:
Trichotomie, **Tri**(X, S): $X \times X = S \sqcup \Delta_X \sqcup S^\intercal$, $x < y \,\dot\vee\, x = y \,\dot\vee\, y < x$
Transitivität, **Tran**(X, S): $S \bullet S \subseteq S$, $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$
Wir nennen $(<) = S \subseteq X \times X$ dann eine **totale Striktordnung** auf X.
In diesem Falle ist $(\le) = R = S \sqcup \Delta_X$ eine totale Ordnung auf X.

Ordnungsrelationen: Einschränkung

Definition F1E: eingeschränkte Ordnungsrelation

Sei $U \subseteq X$. Ist (X, R) eine total / partiell prä/geordnete Menge, so auch ihre **Einschränkung** (U, R_U) auf die Menge U mit $R_U = R \cap (U \times U)$.

Wir nennen U in $(X, \le)$ eine **Kette**, wenn $(U, \le_U)$ total geordnet ist.

Beispiel: Wir schränken $(\mathbb{R}, \le_\mathbb{R})$ ein zu $(\mathbb{Q}, \le_\mathbb{Q})$ zu $(\mathbb{Z}, \le_\mathbb{Z})$ zu $(\mathbb{N}, \le_\mathbb{N})$. Bequemer kürzen wir meist (U, R_U) zu (U, R) ab, also hier $(\mathbb{R}, \le)$ zu $(\mathbb{Q}, \le)$ zu $(\mathbb{Z}, \le)$ zu $(\mathbb{N}, \le)$. Alle vier sind total geordnet, also Ketten.

Beispiel: Die Teilbarkeits-Präordnung $|_\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Z}$ wird auf $\mathbb{N}$ eingeschränkt zur Teilbarkeits-Ordnung $|_\mathbb{N}$. Hier gilt Antisymmetrie, aber nicht Totalität.

Beispiel: In $(\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ haben wir die Kette

$$U = \{\, \emptyset \subset \{0\} \subset \{0,1\} \subset \{0,1,2\} \subset \{0,1,2,3\} \,\}.$$

Notation: Wir schreiben kurz und bequem $\{a_1 < a_2 < \dots < a_n\}$ für die Menge $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ mit der Ordnung $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. (Satz F1F)
☺ Jede endliche Kette lässt sich so sortieren und bequem darstellen.

Ordnungsrelationen: Zurückziehen

Beispiel: Auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ definieren wir die Präordnung $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow |a| \le |b|$.
Eingeschränkt auf $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Q}_{\ge 0}$ oder $\mathbb{R}_{\ge 0}$ ist dies die übliche Ordnung.
In $\mathbb{R}$ hingegen sind $\pm a$ assoziiert, in $\mathbb{C}$ jeweils ganze Kreislinien (E322).

Allgemein haben wir die **Zurückziehung** bezüglich $f : X \to (Y, \sqsubseteq)$:
Sei $(Y, \sqsubseteq)$ eine prägeordnete Menge und $f : X \to Y$ eine Abbildung.
Auf X erhalten wir daraus die Präordnung $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow f(a) \sqsubseteq f(b)$.

Ist f injektiv und $\sqsubseteq$ eine Ordnung, also antisymmetrisch, so auch $\preccurlyeq$.
Ist $\sqsubseteq$ total, so auch $\preccurlyeq$: Je zwei Elemente sind vergleichbar.

Beispiel: Für $f : \mathbb{C} \to (\mathbb{R}, \le) : z \mapsto |z|$ erhalten wir das obige Beispiel.

Beispiel: Für die Inklusion $U \hookrightarrow X$ erhalten wir die Einschränkung.

Beispiel: Sei $(X, \preccurlyeq)$ eine geordnete Menge (Poset) und endlich, wir haben also eine Bijektion $\{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} X : i \mapsto x_i$. Diese können wir so sortieren, dass $x_{i-1} \preccurlyeq x_i$ gilt für alle $i = 2, \dots, n$, eventuell mit $\approx$. Dies zerlegt X in Äquivalenzklassen, und die Quotientenabbildung entspricht einer Surjektion $f : X \twoheadrightarrow \{1, \dots, k\}$ mit $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow f(x) \le f(y)$.

Ordnungsrelationen: Erzeugung

Satz F1F: die erzeugte Präordnung

Jede Relation $R \subseteq X \times X$ erzeugt eine Präordnung $P \subseteq X \times X$:

$$P = \bigcup\nolimits_{n \in \mathbb{N}} R^{\bullet n} = \Delta_X \cup R \cup (R \bullet R) \cup (R \bullet R \bullet R) \cup \dots$$

Damit ist P die kleinste Präordnung auf X, die R enthält.
Wir nennen P die von R auf X **erzeugte Präordnung**.

Übung: (1) Zeigen Sie, dass P tatsächlich eine Präordnung auf X ist.
(2) Zudem ist P die kleinste Präordnung, die P enthält (siehe Satz E3H).

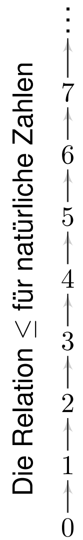
Beispiel: Für $X = \mathbb{N}$ und $R = \{\, (a, a+1) \mid a \in \mathbb{N} \,\}$ erhalten wir $P = \{\, (a, a+x) \mid a, x \in \mathbb{N} \,\} = (\le)$, die übliche Ordnung auf $\mathbb{N}$.

Beispiel: Wir schreiben $\{a \approx b \prec c \approx d\}$ für die Menge $X = \{a, b, c, d\}$ mit der durch diese Angaben erzeugten Präordnung $P = (\preccurlyeq)$.

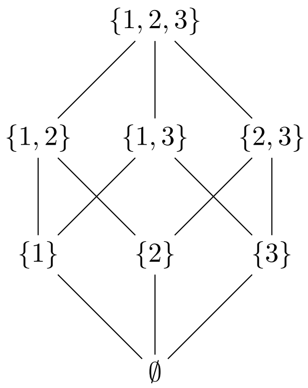
Beispiel: Ist R bereits transitiv, $R \bullet R = R$, so gilt $P = \Delta_X \cup R$.
Ist (X, R) eine geordnete Menge mit Striktordnung $S = R \smallsetminus \Delta_X$, so ist S transitiv, also $S \bullet S = S$, und erzeugt $P = \Delta_X \cup S = R$.

Hasse–Diagramm als graphische Darstellung

Die Relation $a \le b$ schreiben wir durch einen Pfeil $a \to b$ oder kurz eine Linie von a hoch zu b. Dies erzeugt eine Präordnung gemäß Satz F1F.



Inklusion von Mengen in $\mathfrak{P}(\{1,2,3\})$



Ordnungsrelationen: kleine Beispiele

Aufgabe: Für jede Menge X vereinbaren wir:

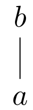
$$\mathbb{O}(X) := \{\, R \subseteq X \times X \mid R \text{ ist eine totale Ordnung auf } X \,\}$$
$$\mathbb{P}(X) := \{\, R \subseteq X \times X \mid R \text{ ist eine totale Präordnung auf } X \,\}$$

(1) Bestimmen Sie $\mathbb{O}(X)$ und $\mathbb{P}(X)$ für $X = \{a, b\}$. (2) für $X = \{a, b, c\}$.
(3) Bestimmen Sie $\sharp\mathbb{O}(X)$ und $\sharp\mathbb{P}(X)$ für X endlich mit n Elementen.

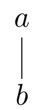
Lösung: (1) Es gibt genau drei totale Präordnungen auf $\{a, b\}$:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{O} = \left\{ \begin{array}{ll} \{(a,a),(a,b),(b,b)\} & \text{kurz: } a \prec b \\ \{(a,a),(b,a),(b,b)\} & \text{kurz: } b \prec a \end{array}\right. \\ \qquad\;\; \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\} \quad \text{kurz: } a \approx b \end{array}\right\} = \mathbb{P}$$

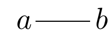
	a	b
a	1	1
b	0	1



	a	b
a	1	0
b	1	1



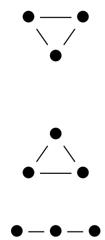
	a	b
a	1	1
b	1	1



Ordnungsrelationen: kleine Beispiele

(2) Es gibt genau 13 totale Präordnungen auf $X = \{a, b, c\}$:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbb{O} = \left\{ \begin{array}{l} a \prec b \prec c \\ a \prec c \prec b \\ b \prec a \prec c \\ b \prec c \prec a \\ c \prec a \prec b \\ c \prec b \prec a \end{array}\right. & \begin{array}{l} a \prec b \approx c \\ b \prec a \approx c \\ c \prec a \approx b \\ a \approx b \prec c \\ a \approx c \prec b \\ b \approx c \prec a \\ a \approx b \approx c \end{array} \end{array}\right\} = \mathbb{P}$$



(3) Für $\sharp X = n$ finden wir $\sharp\mathbb{O}(X) = n!$ und $\sharp\mathbb{P}(X) = \sum_{k=0}^{n} k! \left\{ {n \atop k} \right\}$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sharp\mathbb{O}$	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800
$\sharp\mathbb{P}$	1	3	13	75	541	4 683	47 293	545 835	7 087 261	102 247 563

🙂 Die totalen Prä/Ordnungen auf X entsprechen den Bijektionen $f : X \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$ bzw. den Surjektionen $f : X \twoheadrightarrow \{1, \dots, k\}$.

Ordnungsrelationen: kleine Beispiele

Die Anzahl $\sharp\mathbb{O}(X) = n!$ ist leicht zu sehen: Für jede Totalordnung auf X besteht das Hasse–Diagramm aus n übereinanderliegenden Punkten. Wir haben demnach $n!$ mögliche Beschriftungen mit Elementen aus X, und je zwei Beschriftungen ergeben verschiedene Totalordnungen.

Die Formel $\sharp\mathbb{P}(X) = \sum_{k=0}^{n} k! \left\{ {n \atop k} \right\}$ ist raffinierter, aber im Prinzip ähnlich: Das Hasse–Diagramm hat nun k Etagen, und $f : X \twoheadrightarrow \{1, \dots, k\}$ ordnet die Elemente von X den Etagen zu. Untere Elemente sind kleiner als obere Elemente, Elemente auf derselben Etage sind assoziiert.

Die Anzahl $\sharp\mathbb{P}(A)$ heißt auch $n$te *Fubini–Zahl* (`oeis.org/A000670`) oder *Bell–Zahl* (`en.wikipedia.org/wiki/Ordered_Bell_number`).

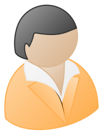
Es ist oft lehrreich, neu definierte Objekte zu zählen. Dies zwingt dazu, die Definition genau zu verstehen und klärt so Missverständnisse auf.

Defendit numerus. [Die Zahl gibt Schutz.] Juvenal (58–138 n.Chr.), *Satiren*

Efrons intransitive Würfel: Welcher ist der beste?

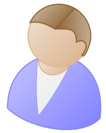
F113

Aufgabe: Der Statistiker Bradley Efron erfand folgende Würfel:



Alice

$$\begin{aligned} A &: 5,5,5,1,1,1 \\ B &: 6,6,2,2,2,2 \\ C &: 3,3,3,3,3,3 \\ D &: 4,4,4,4,0,0 \end{aligned}$$



Bob

Je zwei Würfel treten gegeneinander an, z.B. A gegen B. Wie groß sind die Gewinnwkten $\mathbf{P}(A > B)$ etc.? Welcher Würfel ist dabei der beste?

Lösung: Abzählen aller Gewinnkombinationen ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A > B) &= 12/36 = 1/3, & \mathbf{P}(B > C) &= 12/36 = 1/3, \\ \mathbf{P}(C > D) &= 12/36 = 1/3, & \mathbf{P}(D > A) &= 12/36 = 1/3, \\ \mathbf{P}(A > C) &= 18/36 = 1/2, & \mathbf{P}(B > D) &= 20/36 = 5/9. \end{aligned}$$

Es gibt keinen „besten“ Würfel: Jeder wird vom nächsten geschlagen!

Penney’s Game: Intransitivität entsteht auch in zufälligen 0-1-Folgen beim Wettrennen von je zwei der acht Tripel: Wer schlägt hier wen?

Intransitive Gewinnwahrscheinlichkeiten

F114 Ergänzung

Aufgabe: Spieler A und B wählen je ein Muster der Länge n. Es gewinnt, wes Muster als erstes auftritt. Ab $n \geq 3$ sind die Wkten nicht transitiv!

B\A	00	01	10	11
00		1/2	3/4	1/2
01	1/2		1/2	1/4
10	1/4	1/2		1/2
11	1/2	3/4	1/2	

Wkt, dass Muster A vor Muster B eintritt.

B\A	000	001	010	011	100	101	110	111
000		1/2	3/5	3/5	7/8	7/12	7/10	1/2
001	1/2		1/3	1/3	3/4	3/8	1/2	3/10
010	2/5	2/3		1/2	1/2	1/2	5/8	5/12
011	2/5	2/3	1/2		1/2	1/2	1/4	1/8
100	1/8	1/4	1/2	1/2		1/2	2/3	2/5
101	5/12	5/8	1/2	1/2	1/2		2/3	2/5
110	3/10	1/2	3/8	3/4	1/3	1/3		1/2
111	1/2	7/10	7/12	7/8	3/5	3/5	1/2	

Es kommt noch verrückter: Die Muster 1010 und 0100 haben mittlere Wartezeit 20 bzw. 18, doch 1010 kommt vor 0100 mit Wkt $9/14 > 1/2$. Das seltenere Muster gewinnt gegen das häufigere Muster! Das zeigt, wie trügerisch unsere Intuition zu Wartezeiten und Gewinnwkten ist. Martin Gardner: *The Colossal Book of Mathematics.* Norton & Co 2001

Warum gilt Intransitivität als paradox?

F115 Ergänzung

Häufig erwarten wir Transitivität und werden vom Gegenteil arg verblüfft. In solch Extremfällen sprechen wir von einem **Intransitivitäts-Paradox**.

Beispiel: Im Zeitalter digitaler Photographie kommt es vor, dass Sie von einem Motiv viele ähnliche Bilder / Schnappschüsse haben. Nun wollen Sie das schönste aussuchen und alle anderen löschen. Sie können je zwei vergleichen, aber nach dreien gefällt Ihnen doch das erste besser, sodass $x \prec y \prec z \prec x$. (Das liegt manchmal an wechselnden Kriterien.)

Beispiel: Lineare Ordnungen nutzen wir zum Suchen und Sortieren in Wörterbüchern, Datenbanken, Turnieren. Zirkulär wäre katastrophal. Für lineare Ordnungen haben wir phantastisch effiziente Algorithmen, ohne Transitivität versagen sie jedoch kläglich: Suchen und Sortieren kommt nicht zum Ende oder liefert fehlerhafte, widersinnige Resultate.

Beispiel: Bei Wahlen möchten wir demokratisch einen Sieger küren. Das ist unmöglich, falls das Ergebnis eine intransitive Relation ist. Sie kennen das von *Schere-Stein-Papier*. Das Wahlergebnis ist in diesem (und ähnlichen) Fällen nicht transitiv und daher unbrauchbar.

Warum gilt Intransitivität als irrational?

F116 Ergänzung

Wir untersuchen **rationale Entscheidungen** [*rational choice theory*]. Mit Transitivität verbieten wir zyklische Anordnungen wie $x \succ y \succ z \succ x$ oder allgemeiner $x \succcurlyeq y \succcurlyeq z \succ x$. Eine solche Präferenz würden wir als irrational betrachten. Warum ist Intransitivität eine logische Katastrophe?

Beispiel: In den Wirtschaftswissenschaften begründet man Transitivität dadurch, dass man einem Individuum mit intransitiver Präferenz alles Geld abknöpfen kann durch eine ewige **Geldpumpe** [*money pump*]:

Wegen $x \succcurlyeq y \succcurlyeq z$ kann man z zuerst in y und dann in x eintauschen; wegen $z \succ x$ kann man x gegen z und einen Geldbetrag tauschen, usw. Dieser närrische Kreislauf endet erst, wenn alles Geld verbraucht ist, oder wenn schließlich die Vernunft einsetzt: Intransitiv ist irrational.

Genau dieses Verhalten zeigt *Hans im Glück* der Brüder Grimm. Vordergründig illustriert dies Irrationalität, Planlosigkeit, Impulsivität, leichtfertiges Handeln ohne Erwägung naheliegender Konsequenzen, Unbeständigkeit durch Wechsel der Kriterien je nach Situation.

Untere und obere Schranken

Definition F1G: untere und obere Schranken

Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge (Poset) sowie $U, V \subseteq X$ und $s \in X$.

s ist untere Schranke / Minorante von U: $\quad s \leq U \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in U : s \leq x$

s ist obere Schranke / Majorante von U: $\quad U \leq s \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in U : x \leq s$

Diese Eigenschaft definiert die Menge der unteren / oberen Schranken:

$$\begin{aligned}\operatorname{UnSch}(U) &= \operatorname{UnSch}(U; X, \leq) := \{\, s \in X \mid s \leq U \,\}\\ \operatorname{ObSch}(U) &= \operatorname{ObSch}(U; X, \leq) := \{\, s \in X \mid U \leq s \,\}\end{aligned}$$

Wir nennen die Menge U in $(X, \leq)$ **nach unten / oben beschränkt**, falls $\operatorname{UnSch}(U) \neq \emptyset$ bzw. $\operatorname{ObSch}(U) \neq \emptyset$ gilt. Ebenso definieren wir:

$$U \leq V \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in U \ \forall y \in V \ : \ x \leq y$$

Die Negation $s \not\leq U$ und $U \not\leq s$ und $U \not\leq V$ bedeutet, es gibt mindestens eine Ausnahme. Für die Striktordnung $<$ schreiben wir entsprechend $s < U$ und $U < s$ und $U < V$ und negiert $s \not< U$ und $U \not< s$ und $U \not< V$.

Untere und obere Schranken

Beispiele: In $(\mathbb{R}, \leq)$ gilt

$$\begin{array}{llll} 0 < [1,3], & 1 \not< [1,3], & 1 \leq [1,3], & 2 \not\leq [1,3],\\ [1,3] \not\leq 2, & [1,3] \leq 3, & [1,3] \not< 3, & [1,3] < 4,\\ [1,3] < [4,6], & [1,3] \not< [3,5], & [1,3] \leq [3,5], & [1,3] \not\leq [2,4]. \end{array}$$

Für alle $a \leq b$ in $\mathbb{R}$ haben wir

$$\begin{array}{ll} \operatorname{UnSch}([a,b]) = \mathbb{R}_{\leq a}, & \operatorname{ObSch}([a,b]) = \mathbb{R}_{\geq b},\\ \operatorname{UnSch}(\mathbb{R}_{\geq a}) = \mathbb{R}_{\leq a}, & \operatorname{ObSch}(\mathbb{R}_{\geq a}) = \emptyset,\\ \operatorname{UnSch}(\mathbb{R}_{\leq b}) = \emptyset, & \operatorname{ObSch}(\mathbb{R}_{\leq b}) = \mathbb{R}_{\geq b},\\ \operatorname{UnSch}(\mathbb{R}) = \emptyset, & \operatorname{ObSch}(\mathbb{R}) = \emptyset,\\ \operatorname{UnSch}(\emptyset) = \mathbb{R}, & \operatorname{ObSch}(\emptyset) = \mathbb{R}. \end{array}$$

Beispiel: Die bequeme Schreibweise $1 \leq a, b \leq 5$ wird oft genutzt für $1 \leq \{a, b\} \leq 5$, also ausgeschrieben $1 \leq a \wedge a \leq 5 \wedge 1 \leq b \wedge b \leq 5$.

Notationskonflikt: Auch die Interpretation $1 \leq a \wedge b \leq 5$ ist möglich. Zur Sicherheit sollte man im Kontext erklären, was genau gemeint ist.

Kleinste und größte Elemente

Definition F1H: kleinste und größte Elemente

Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge (Poset) sowie $U \subseteq X$ und $s \in X$.

s ist kleinstes Element von U $\quad :\Leftrightarrow \quad s \in U \wedge s \leq U$

s ist größtes Element von U $\quad :\Leftrightarrow \quad s \in U \wedge U \leq s$

Diese Eigenschaft definiert die Menge der kleinsten / größten Elemente:

$$\begin{aligned}\operatorname{Kl}(U) &= \operatorname{Kl}(U, \leq) := \{\, s \in U \mid s \leq U \,\}\\ \operatorname{Gr}(U) &= \operatorname{Gr}(U, \leq) := \{\, s \in U \mid U \leq s \,\}\end{aligned}$$

Eindeutigkeit: U enthält höchstens ein kleinstes / größtes Element:

Für je zwei Elemente $s, t \in \operatorname{Kl}(U)$ gilt $s \leq t$ und $t \leq s$, also $s = t$. Entweder gilt $\operatorname{Kl}(U) = \emptyset$ oder $\operatorname{Kl}(U) = \{s\}$, kurz $s =: \operatorname{kl}(U)$.

Für je zwei Elemente $s, t \in \operatorname{Gr}(U)$ gilt $s \leq t$ und $t \leq s$, also $s = t$. Entweder gilt $\operatorname{Gr}(U) = \emptyset$ oder $\operatorname{Gr}(U) = \{t\}$, kurz $t =: \operatorname{gr}(U)$.

Kleinste und größte Elemente

Beispiele: In $(\mathbb{R}, \leq)$ gilt für alle $a < b$:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{Kl}([a,b]) = \{a\}, & \operatorname{Gr}([a,b]) = \{b\},\\ \operatorname{Kl}(]a,b]) = \emptyset, & \operatorname{Gr}(]a,b]) = \{b\},\\ \operatorname{Kl}([a,b[) = \{a\}, & \operatorname{Gr}([a,b[) = \emptyset,\\ \operatorname{Kl}(]a,b[) = \emptyset, & \operatorname{Gr}(]a,b[) = \emptyset. \end{array}$$

Beispiele: In $(\mathfrak{P}(\Omega), \subseteq)$ gilt:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{Kl}\mathfrak{P}(\Omega) = \{\emptyset\}, & \operatorname{Gr}\mathfrak{P}(\Omega) = \{\Omega\},\\ \operatorname{kl}\mathfrak{P}(\Omega) = \emptyset, & \operatorname{gr}\mathfrak{P}(\Omega) = \Omega. \end{array}$$

Kleinste oder größte Elemente existieren auch hier nicht immer:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{Kl}\{\{1\},\{2\}\} = \emptyset, & \operatorname{Gr}\{\{1\},\{2\}\} = \emptyset,\\ \operatorname{Kl}\{\{1\},\{2\},\{1,2\}\} = \emptyset, & \operatorname{Gr}\{\{1\},\{2\},\{1,2\}\} = \{\{1,2\}\},\\ \operatorname{Kl}\{\{1\},\{1,2\},\{1,3\}\} = \{\{1\}\}, & \operatorname{Gr}\{\{1\},\{1,2\},\{1,3\}\} = \emptyset,\\ \operatorname{Kl}\{\{1\},\{1,2\}\} = \{\{1\}\}, & \operatorname{Gr}\{\{1\},\{1,2\}\} = \{\{1,2\}\}. \end{array}$$

Minimale und maximale Elemente

Definition F1I: minimale und maximale Elemente

Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge (Poset) sowie $U \subseteq X$ und $s \in X$.

$$
\begin{aligned}
&s \text{ ist minimal in } U &&:\Leftrightarrow \quad s \in U \ \wedge\ \forall t \in U \ :\ t \leq s \Rightarrow t = s\\
&s \text{ ist maximal in } U &&:\Leftrightarrow \quad s \in U \ \wedge\ \forall t \in U \ :\ s \leq t \Rightarrow s = t
\end{aligned}
$$

Diese Eigenschaft definiert die Menge der Minima / Maxima von U:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Min}(U) &= \operatorname{Min}(U, \leq) := \left\{ s \in U \,\middle|\, \forall t \in U \,:\, t \leq s \Rightarrow t = s \right\}\\
\operatorname{Max}(U) &= \operatorname{Max}(U, \leq) := \left\{ s \in U \,\middle|\, \forall t \in U \,:\, s \leq t \Rightarrow s = t \right\}
\end{aligned}
$$

Bemerkung: In jedem Poset $(X, \leq)$ gelten die Inklusionen

$$\operatorname{Min}(U) \supseteq \operatorname{Kl}(U) \quad \text{und} \quad \operatorname{Max}(U) \supseteq \operatorname{Gr}(U).$$

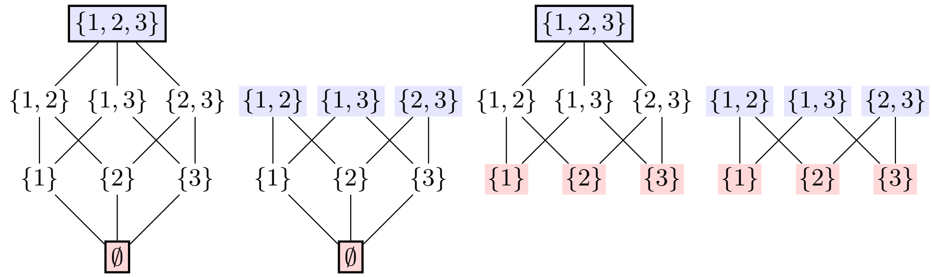
☺ Ist $(U, \leq)$ zudem total geordnet, also eine Kette in $(X, \leq)$, so gilt

$$\operatorname{Min}(U) = \operatorname{Kl}(U) \quad \text{und} \quad \operatorname{Max}(U) = \operatorname{Gr}(U).$$

Entweder gilt $\operatorname{Min}(U) = \emptyset$ oder $\operatorname{Min}(U) = \{s\}$, kurz $s =: \min(U)$.
Entweder gilt $\operatorname{Max}(U) = \emptyset$ oder $\operatorname{Max}(U) = \{t\}$, kurz $t =: \max(U)$.

Minimale und maximale Elemente

Beispiele: Für U in $(\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ finden wir:



Minimale Elemente sind rot markiert, maximale Element blau.
Kleinste und größte Elemente sind zudem eingerahmt.

Beispiel: In $(\mathfrak{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$ betrachten wir

$$U = \{\, A \subseteq \mathbb{N} \mid \sharp A = \sharp(\mathbb{N} \smallsetminus A) = \infty \,\} \quad \text{und} \quad V = U \cup \{\{-1\}\}.$$

Hier gilt $\operatorname{Min}(U) = \operatorname{Max}(U) = \emptyset$, also auch $\operatorname{Kl}(U) = \operatorname{Gr}(U) = \emptyset$,
hingegen $\operatorname{Min}(V) = \operatorname{Max}(V) = \{\{-1\}\}$ und $\operatorname{Kl}(V) = \operatorname{Gr}(V) = \emptyset$.

Infimum und Supremum

Definition F1J: Infimum und Supremum

Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge (Poset) sowie $U \subseteq X$ und $s \in X$.

$$
\begin{aligned}
&s \text{ ist Infimum von } U &&:\Leftrightarrow \quad s \leq U \ \wedge\ \forall t \in X \ :\ t \leq U \Rightarrow t \leq s\\
&s \text{ ist Supremum von } U &&:\Leftrightarrow \quad U \leq s \ \wedge\ \forall t \in X \ :\ U \leq t \Rightarrow s \leq t
\end{aligned}
$$

Das Infimum ist also **die größte untere Schranke** (untere Grenze),
und das Supremum ist **die kleinste obere Schranke** (obere Grenze).

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Inf}(U) &= \operatorname{Inf}(U; X, \leq) := \operatorname{Gr}(\operatorname{UnSch}(U; X, \leq))\\
\operatorname{Sup}(U) &= \operatorname{Sup}(U; X, \leq) := \operatorname{Kl}(\operatorname{ObSch}(U; X, \leq))
\end{aligned}
$$

Insbesondere sind beide somit eindeutig:
Entweder gilt $\operatorname{Inf}(U) = \emptyset$ oder $\operatorname{Inf}(U) = \{s\}$, kurz $s =: \inf(U)$.
Entweder gilt $\operatorname{Sup}(U) = \emptyset$ oder $\operatorname{Sup}(U) = \{t\}$, kurz $t =: \sup(U)$.

Wir nennen $(X, \leq)$ **ordnungsvollständig**, falls jede nicht-leere nach unten / oben beschränkte Teilmenge ein Infimum / Supremum besitzt.

Infimum und Supremum

Beispiel: In $(\mathbb{N}, |)$ gilt $\operatorname{UnSch}\{a, b\} = \operatorname{GT}(a, b)$ und $\inf\{a, b\} = \operatorname{ggT}(a, b)$ sowie entsprechend $\operatorname{ObSch}\{a, b\} = \operatorname{GV}(a, b)$ und $\sup\{a, b\} = \operatorname{kgV}(a, b)$.

Beispiel: In $(\mathfrak{P}(\Omega), \subseteq)$ gilt $\inf\{A, B\} = A \cap B$ und $\sup\{A, B\} = A \cup B$.
Für jedes Mengensystem $U \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $\inf U = \bigcap U$ und $\sup U = \bigcup U$.

Beispiel: In $(\mathbb{Q}, \leq)$ sei $U = \{\, x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2 \,\}$. Obere Schranken sind $1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, \dots$ Es gibt in $\mathbb{Q}$ keine kleinste obere Schranke!

Beispiel: In $(\mathbb{R}, \leq)$ gilt: Zu jeder Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$, die nicht-leer und nach oben beschränkt ist, existiert in $\mathbb{R}$ eine kleinste obere Schranke.
Im vorigen Beispiel gilt $\operatorname{Sup}(U; \mathbb{Q}, \leq) = \emptyset$, aber $\operatorname{Sup}(U; \mathbb{R}, \leq) = \{\sqrt{2}\}$.
Die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ sind ein geordneter Körper, doch die zugrundeliegende geordnete Menge $(\mathbb{Q}, \leq)$ hat noch erhebliche Lücken!
Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ sind ein vollständig geordneter Körper.
Erst damit lassen sich viele fundamentale und praktische Probleme elegant und befriedigend lösen und eine tragfähige Grundlage finden.

Infimum und Supremum: erweiterte Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}}$

Wir definieren die **erweiterte Zahlengerade** $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Die Ordnung setzen wir fort durch $-\infty < a < +\infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Satz F1K: Supremum und Infimum in $\bar{\mathbb{R}}$

Jede Teilmenge $M \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ hat ein Supremum und ein Infimum in $\bar{\mathbb{R}}$.
Dies definiert die beiden Abbildungen $\inf, \sup : \mathfrak{P}(\bar{\mathbb{R}}) \to \bar{\mathbb{R}}$.

Beispiele: Für alle $a < b$ in $\bar{\mathbb{R}}$ haben wir

$$\begin{aligned}
&\operatorname{UnSch}(]a,b[) = [-\infty, a], && \operatorname{ObSch}(]a,b[) = [b, +\infty],\\
&\inf(]a,b[) = a, && \sup(]a,b[) = b,\\
&\operatorname{UnSch}(\bar{\mathbb{R}}) = \{-\infty\}, && \operatorname{ObSch}(\bar{\mathbb{R}}) = \{+\infty\},\\
&\inf(\bar{\mathbb{R}}) = -\infty, && \sup(\bar{\mathbb{R}}) = +\infty,\\
&\operatorname{UnSch}(\emptyset) = [-\infty, +\infty], && \operatorname{ObSch}(\emptyset) = [-\infty, +\infty],\\
&\inf(\emptyset) = +\infty, && \sup(\emptyset) = -\infty.
\end{aligned}$$

Infimum und Supremum: die Abbildungsmenge $\bar{\mathbb{R}}^\Omega$

Sei Ω eine Menge. Wir betrachten Funktionen $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$.
Die Ordnungsrelation $\le$ auf $\bar{\mathbb{R}}^\Omega$ definieren wir punktweise:

$$f \le g \quad :\iff \quad \forall x \in \Omega : f(x) \le g(x)$$

Das bedeutet, der Graph von f liegt unterhalb des Graphen von g.
Auch $\min(f,g)$ und $\max(f,g)$ definieren wir punktweise:

$$\begin{aligned}
\min(f,g) &: \Omega \to \bar{\mathbb{R}} : x \mapsto \min(f(x), g(x))\\
\max(f,g) &: \Omega \to \bar{\mathbb{R}} : x \mapsto \max(f(x), g(x))
\end{aligned}$$

Ist $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie von Funktionen $f_i : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$, so definieren wir:

$$\begin{aligned}
\inf\nolimits_{i\in I} f_i &: \Omega \to \bar{\mathbb{R}} : x \mapsto \inf\{\, f_i(x) \mid i \in I \,\}\\
\sup\nolimits_{i\in I} f_i &: \Omega \to \bar{\mathbb{R}} : x \mapsto \sup\{\, f_i(x) \mid i \in I \,\}
\end{aligned}$$

Dasselbe vereinbaren wir für Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$,
indem wir sie durch die Inklusionsabbildung $\mathbb{R} \hookrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ verlängern.

Verbände und Vollständigkeit

Definition F1L: Verband und Vollständigkeit

Ein **Verband** $(X, \le)$ ist eine geordnete Menge (Poset), in der je zwei Elemente $a, b \in X$ ein Infimum $a \wedge b = \inf\{a,b\}$ und ein Supremum $a \vee b = \sup\{a,b\}$ in X haben. Dies definiert die Verknüpfungen

$$\wedge, \vee : X \times X \to X : a \wedge b = \inf\{a,b\}, \quad a \vee b = \sup\{a,b\}.$$

Strenger nennen wir $(X, \le)$ einen **vollständigen Verband**,
wenn jede Teilmenge $U \subseteq X$ ein Infimum $\bigwedge U = \inf U$ und ein
Supremum $\bigvee U = \sup U$ in X hat. Dies definiert die Abbildungen

$$\bigwedge, \bigvee : \mathfrak{P}(X) \to X : \bigwedge U = \inf U, \quad \bigvee U = \sup U.$$

Beispiel: Die Logik nutzt den zweielementigen Verband $(\{0,1\}, \le)$.
Hierbei ist $a \wedge b$ das logische Und sowie $a \vee b$ das logische Oder.

Beispiel: Jede Menge Ω definiert den vollständigen Verband $(\mathfrak{P}(\Omega), \subseteq)$.
Hierbei ist $\inf U = \bigcap U$ der Schnitt und $\sup U = \bigcup U$ die Vereinigung.

Verbände und Vollständigkeit

Beispiel: Die natürlichen Zahlen sind ein Verband $(\mathbb{N}, |_\mathbb{N})$ mit der Teilbarkeitsrelation. Hier gilt $a \wedge b = \operatorname{ggT}(a,b)$ und $a \vee b = \operatorname{kgV}(a,b)$.
Dieser Verband ist vollständig, kleinstes Element ist 1, größtes ist 0.

Beispiel: Jede total geordnete Menge $(X, \le)$ ist ein Verband
dank $a \wedge b = \min\{a,b\} \in \{a,b\}$ und $a \vee b = \max\{a,b\} \in \{a,b\}$.
Demnach sind $(\mathbb{N}, \le)$, $(\mathbb{Z}, \le)$, $(\mathbb{Q}, \le)$, $(\mathbb{R}, \le)$ Verbände. Diese sind
nicht vollständig, insbesondere fehlen $\sup \emptyset = -\infty$ und $\inf \emptyset = +\infty$.

Beispiel: Die erweiterte Zahlengerade $(\bar{\mathbb{R}}, \le)$ mit $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
ist ein vollständiger Verband (Satz F1K), ebenso jedes Intervall $([a,b], \le)$
mit $a \le b$ in $\bar{\mathbb{R}}$ (siehe F1P). Auch $(\bar{\mathbb{N}}, \le)$ mit $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $(\bar{\mathbb{Z}}, \le)$ mit
$\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ sind vollständig, nicht jedoch $(\bar{\mathbb{Q}}, \le)$ mit $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}$.

Beispiel: Somit sind auch die Abbildungsmengen $(\bar{\mathbb{R}}^\Omega, \le)$ und
$([a,b]^\Omega, \le)$ vollständige Verbände, wie oben erklärt. Der Vergleich $\le$ wird
hierbei punktweise definiert, ebenso Infimum und Supremum.

Übung: Ist $(X, \le)$ ein (vollständiger) Verband, so auch $(X^\Omega, \le)$
für jede Menge Ω. Beispiel: $(\mathfrak{P}(\Omega), \subseteq) \cong (\{0,1\}^\Omega, \le)$ gemäß D3D

Extremwerte einer Funktion

Sei Ω eine Menge, etwa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir betrachten Funktionen $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$. Infimum und Supremum von f definieren wir durch

$$a = \inf f := \inf\{\, f(x) \mid x \in \Omega \,\},$$
$$b = \sup f := \sup\{\, f(x) \mid x \in \Omega \,\}.$$

Somit gilt $f(X) \subseteq [a, b]$. Gilt zudem $a \in f(X)$ bzw. $b \in f(X)$, so existieren $x_0, x_1 \in [a, b]$ mit $f(x_0) \le f(x) \le f(x_1)$ für alle $x \in [a, b]$.
Wir sagen dann, die Funktion f **nimmt ihr Infimum / Supremum** an. In diesem Fall existiert das **Minimum / Maximum** der Funktion f:

$$\min f \;:= f(x_0) = \min\{\, f(x) \mid x \in \Omega \,\} \;= \inf f,$$
$$\max f := f(x_1) = \max\{\, f(x) \mid x \in \Omega \,\} = \sup f.$$

Die Menge aller Minimalstellen / Maximalstellen schreiben wir

$$\operatorname{Arg\,min}(f) := \{\, x \in \Omega \mid f(x) = \inf f \,\},$$
$$\operatorname{Arg\,max}(f) := \{\, x \in \Omega \mid f(x) = \sup f \,\}.$$

Extremwerte einer Funktion

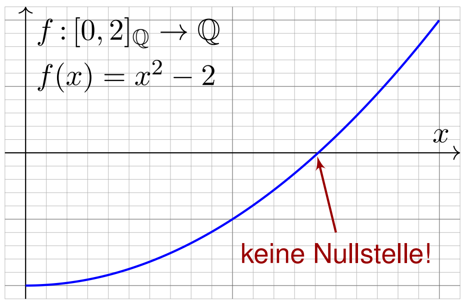
Somit nimmt die Funktion f genau dann ihr Infimum / Supremum an, wenn die Menge $\operatorname{Arg\,min}(f)$ bzw. $\operatorname{Arg\,max}(f)$ nicht-leer ist.

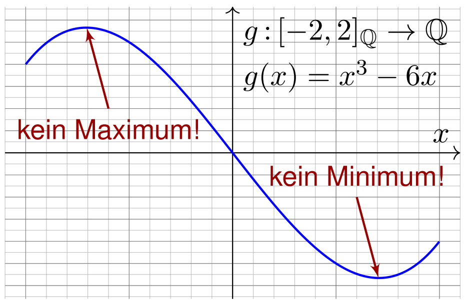
Darum geht es in der Optimierung: Den Minimalwert / Maximalwert einer Funktion $f : \Omega \to R$ bestimmen, und zudem einen oder alle Minimalstellen / Maximalstellen finden. Sie kennen erste Beispiele bereits aus der Schule unter dem Stichwort *Kurvendiskussion*.

Bemerkenswerterweise stellt sich selbst bei dieser einfachen Aufgabe bald heraus, dass die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ hierfür ungenügend sind und wir zu ihrer Vervollständigung übergehen sollten: den reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Erst damit lassen sich viele fundamentale und praktische Probleme elegant und befriedigend lösen und eine tragfähige Grundlage finden.

🙂 Die folgende Seite zeigt zwei einfache, eindrückliche Beispiele und zudem zwei grundlegend wichtige Sätze der Analysis.
Sie sind intuitiv plausibel, erschütternd falsch über $\mathbb{Q}$,
und glücklicherweise gültig über $\mathbb{R}$.

Extremwerte einer Funktion





Satz F1M: Zwischenwertsatz / Zusammenhang

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ hat die Zwischenwerteigenschaft: Zu jedem $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \le y \le f(b)$ existiert $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Satz F1N: Minimum und Maximum / Kompaktheit

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt Minimum und Maximum an: Es existieren $x_0, x_1 \in [a, b]$ mit $f(x_0) \le f(x) \le f(x_1)$ für alle $x \in [a, b]$.

Extrema in der Mathematik

Extreme Elemente (kleinstes / größtes Element bzw. Minima / Maxima) sind in der Mathematik und auch überall sonst besonders interessant. Viele ausgezeichnete Objekte entstehen als Lösung eines Problems der Minimierung bzw. der Maximierung. Erste sehr einfache Beispiele kennen Sie bereits aus dem Verlauf dieser Vorlesung:

Beispiel: Die von $P \subseteq X \times X$ erzeugte Äquivalenzrelation $T \subseteq X \times X$ ist die kleinste Äquivalenzrelation auf X, die P enthält (Satz E3H).

Beispiel: Die von $R \subseteq X \times X$ erzeugte eine Präordnung $P \subseteq X \times X$ ist die kleinste Präordnung auf X, die R enthält (Satz F1F).

Das ist ein recht allgemeines Prinzip zur Definition und zur Konstruktion mathematischer Objekte: Auf diese Weise konstruieren wir die erzeugte Untergruppe, den erzeugten Unterring, den erzeugten Untervektorraum, und vieles mehr. Später im Studium begegnet Ihnen auf gleiche Art die erzeugte Topologie und die erzeugte σ–Algebra in der Maßtheorie

Monotone Abbildungen

Definition F1O: isotone und antitone Abbildung

Sei $f:(X,\leq)\to(Y,\preccurlyeq)$ eine Abbildung geordneter Mengen.

$$\begin{aligned}
&f \text{ ist isoton} &&:\Leftrightarrow\quad \forall a,b\in X \;:\; a\leq b \Rightarrow f(a)\preccurlyeq f(b)\\
&f \text{ ist strikt isoton} &&:\Leftrightarrow\quad \forall a,b\in X \;:\; a< b \Rightarrow f(a)\prec f(b)\\
&f \text{ ist antiton} &&:\Leftrightarrow\quad \forall a,b\in X \;:\; a\leq b \Rightarrow f(a)\succcurlyeq f(b)\\
&f \text{ ist strikt antiton} &&:\Leftrightarrow\quad \forall a,b\in X \;:\; a< b \Rightarrow f(a)\succ f(b)
\end{aligned}$$

Isoton heißt auch **(monoton) wachsend** oder **ordnungserhaltend**, **antiton** heißt auch **(monoton) fallend** oder **ordnungsumkehrend**, beides heißt kurz **monoton**. Statt **strikt** sagt man auch **streng**.

Ein **(Ordnungs-)Isomorphismus** $(f,g):(X,\leq)\cong(Y,\preccurlyeq)$ ist ein ordnungserhaltendes Bijektionspaar, $f:(X,\leq)\to(Y,\preccurlyeq)$ isoton und $g:(Y,\preccurlyeq)\to(X,\leq)$ isoton mit $g\circ f=\mathrm{id}_X$ und $f\circ g=\mathrm{id}_Y$.

Monotone Abbildungen

Beispiel: Eine monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}$ ist eine isotone Abbildung $a:(\mathbb{N},\leq)\to(\mathbb{R},\leq):n\mapsto a_n$, also $a_0\leq a_1\leq a_2\leq a_3\leq\dots$; eine monoton fallende Folge entsprechend $a_0\geq a_1\geq a_2\geq a_3\geq\dots$.

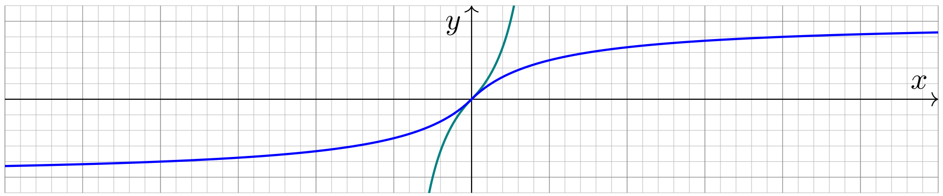
Beispiel: Die Abbildung $f:(\mathbb{R},\leq)\to(\mathbb{R},\leq):x\mapsto x^2$ ist nicht monoton, weder fallend noch wachsend. Die Einschränkung $f|_{\mathbb{R}_{\leq 0}}:\mathbb{R}_{\leq 0}\to\mathbb{R}$ ist streng fallend, und $f|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$ ist streng wachsend.

Beispiel: Die Abbildungen $f,g:(\mathbb{R},\leq)\to(\mathbb{R},\leq)$ mit $f(x)=x^3$ und $g(x)=\sqrt[3]{x}$ sind streng wachsend und erfüllen $g\circ f=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und $f\circ g=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Sie sind somit ein Ordnungsisomorphismus.

Beispiel: Zu jeder Abbildung $f:X\to Y$ zwischen Mengen X und Y sind $f_*:(\mathfrak{P}(X),\subseteq)\to(\mathfrak{P}(Y),\subseteq)$ und $f^*:(\mathfrak{P}(Y),\subseteq)\to(\mathfrak{P}(X),\subseteq)$ isoton, und strikt genau dann, wenn f injektiv bzw. surjektiv ist.

Beispiel: Das Komplement $\complement:(\mathfrak{P}(X),\subseteq)\to(\mathfrak{P}(X),\subseteq)$ ist strikt antiton. Somit ist $(\complement,\complement):(\mathfrak{P}(X),\subseteq)\cong(\mathfrak{P}(X),\supseteq)$ ein Ordnungsisomorphismus.

Ordnungsisomorphismen



Beispiel F1P: erweiterte Zahlengerade und Intervall

Es gilt $\mathbb{R}\cong\,]-1,1[$, genauer $(f,g):\mathbb{R}\cong\,]-1,1[$ vermöge

$$\begin{aligned}
f &: \mathbb{R}\to\,]-1,1[\;:\; x\mapsto x/(1+|x|),\\
g &: \,]-1,1[\,\to\mathbb{R} \;:\; y\mapsto y/(1-|y|).
\end{aligned}$$

Die beiden Abbildungen f und g sind isoton, also ordnungserhaltend. Dies setzen wir durch $\pm\infty \leftrightarrows \pm 1$ fort zu den Ordnungsisomorphismen

$$\begin{aligned}
(f_{\bar{\mathbb{R}}},g_{\bar{\mathbb{R}}}) &: (\bar{\mathbb{R}},\leq)\cong([-1,1]_{\mathbb{R}},\leq),\\
(f_{\bar{\mathbb{Q}}},g_{\bar{\mathbb{Q}}}) &: (\bar{\mathbb{Q}},\leq)\cong([-1,1]_{\mathbb{Q}},\leq).
\end{aligned}$$

Die erweiterte Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}}\cong[-1,1]$ ist somit sehr anschaulich!

Ordnungsisomorphismen

Übung: Was genau ist noch zu zeigen? Weisen Sie es sorgsam nach!

Satz F1Q: Streng monoton impliziert injektiv.

Sei $(X, \leq)$ total geordnet und $(Y, \preccurlyeq)$ geordnet.

(1) Ist $f : (X, \leq) \to (Y, \preccurlyeq)$ streng monoton, so ist f injektiv.

(2) Ist $f : (X, \leq) \to (Y, \preccurlyeq)$ streng isoton, so ist f ordnungsreflektierend:

$$\forall a, b \in X \;:\; f(a) \preccurlyeq f(b) \;\Rightarrow\; a \leq b$$

Ist f zudem bijektiv, so ist auch $f^{-1} : (Y, \preccurlyeq) \to (X, \leq)$ streng isoton.

Beweis: (1) Zu $a \neq b$ in X gilt entweder $a < b$ oder $a > b$.
Ohne Einschränkung sei $a < b$, notfalls tauschen wir a und b.

Ist f streng wachsend, so gilt $f(a) \prec f(b)$, also $f(a) \neq f(b)$.
Ist f streng fallend, so gilt $f(a) \succ f(b)$, also $f(a) \neq f(b)$.

In beiden Fällen ist f injektiv.

(2) Seien $a, b \in X$ und $f(a) \preccurlyeq f(b)$. Angenommen, es gälte nicht $a \leq b$.
Da $(X, \leq)$ total geordnet ist, bedeutet das $a > b$. Da f streng isoton ist,
folgt $f(a) \succ f(b)$, im Widerspruch zur Voraussetzung $f(a) \preccurlyeq f(b)$. $\boxed{\text{QED}}$

Aufgabe: Seien $(X, \leq)$ und $(Y, \preccurlyeq)$ geordnete Mengen (Posets).
Ist $f : (X, \leq) \to (Y, \preccurlyeq)$ bijektiv und strikt isoton ein Isomorphismus?

Lösung: Nein! Wir betrachten die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen mit
der partiellen Ordnung $(\preccurlyeq) = \{\, (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} : a + x = b \,\}$.
Die Funktion $f : (\mathbb{Z}, \preccurlyeq) \to (\mathbb{Z}, \preccurlyeq) : x \mapsto x + 1$ ist bijektiv und strikt isoton,
die Umkehrfunktion $f^{-1} : (\mathbb{Z}, \preccurlyeq) \to (\mathbb{Z}, \preccurlyeq) : x \mapsto x - 1$ ist nicht isoton!

Satz F1R: Fixpunktsatz von Knaster–Tarski

Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge, in der jede Teilmenge $U \subseteq X$
ein Infimum und ein Supremum besitzt, etwa $([0, 1], \leq)$ oder $(\bar{\mathbb{R}}, \leq)$.

Ist $f : (X, \leq) \to (X, \leq)$ eine isotone Selbstabbildung,
so ist die Fixpunktmenge $F = \operatorname{fix}(f)$ nicht-leer.

Übung: Beweisen Sie dies, zunächst im Spezialfall $X = [0, 1]$.

Die natürlichen Zahlen sind wohlgeordnet.
F141

Satz F1S: Die natürlichen Zahlen sind wohlgeordnet.

In $(\mathbb{N}, \leq)$ hat jede nicht-leere Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ ein kleinstes Element m.

Beweis: (1) Es gibt ein Element $s \in A$, daher gilt $(s+1) \not\leq A$.

(2) Es gibt ein Element $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq A$ und $(m+1) \not\leq A$.
Andernfalls gälte $n \leq A \Rightarrow (n+1) \leq A$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.
Dank $0 \leq A$ folgt per Induktion $\mathbb{N} \leq A$, im Widerspruch zu (1).

(3) Für dieses Element gilt $m \in A$.
Andernfalls wäre $(m+1) \leq A$, im Widerspruch zu (2). QED

🙂 Diese Aussage erweitert unser Repertoire an Induktionsbeweisen. Um zu beweisen, dass eine Aussage $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, nehmen wir das Gegenteil an und betrachten den „kleinsten Verbrecher“, also das kleinste Gegenbeispiel. Dies führen wir dann zum Widerspruch. Dieses Vorgehen ist für manche Beweise sehr effizient.

Wohlgeordnete Mengen
F142

Definition F1T: Wohlordnung

Eine geordnete Menge $(X, \leq)$ heißt **wohlgeordnet**, falls jede nicht-leere Teilmenge $A \subseteq X$ ein kleinstes Element besitzt.
In diesem Falle heißt $\leq$ eine **Wohlordnung** auf X.

Bemerkung: Jede Wohlordnung ist total, denn zu je zwei Elementen $a, b \in X$ besitzt $\{a, b\}$ ein kleinstes Element, also gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$.

Beispiel: Die natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, \leq)$ sind wohlgeordnet (Satz F1S). Hingegen sind $(\mathbb{Z}, \leq)$ und $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\mathbb{R}, \leq)$ nicht wohlgeordnet.

Beispiel: Ist $U \subseteq X$ und $(X, \leq)$ wohlgeordnet, so auch $(U, \leq_U)$.
Insbesondere ist $\{\, 1 < 2 < \dots < n \,\}$ wohlgeordnet für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel: Ist $(X, \leq)$ endlich und total geordnet, so auch wohlgeordnet.
Dank $\sharp X = n < \infty$ existiert eine Bijektion $\nu : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} X : i \mapsto x_i$.
Diese können wir so sortieren, dass $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ gilt. Somit ist $\nu : \{1 < 2 < \dots < n\} \xrightarrow{\sim} \{x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$ ein Isomorphismus.

Der Wohlordnungssatz
F143

Beispiel: Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind wohlgeordnet mit der Ordnung

$$(\mathbb{Z}, \preccurlyeq) = \{\, 0 \prec 1 \prec 2 \prec 3 \prec \dots \prec -1 \prec -2 \prec -3 \prec \dots \,\}.$$

Sprichwörtlich: *Chuck Norris hat bis unendlich gezählt. Zwei Mal.*

Beispiel: Für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist keine Wohlordnung elementar konstruierbar. Dennoch existieren solche Wohlordnungen:

Satz F1U: Wohlordnungssatz

Auf jeder Menge X existiert mindestens eine Wohlordnung $\leq$.

Bemerkung: Diesen Satz beweist man mit Hilfe des Auswahlaxioms. Umgekehrt folgt daraus das Auswahlaxiom, die beiden sind äquivalent:

Anwendungsbeispiel: Sei $(X, \leq)$ eine wohlgeordnete Menge.
Zu jeder Zerlegung $Q \subseteq \mathfrak{P}(X)^*$ mit $X = \bigsqcup Q$ erhalten wir dann das Repräsentantensystem $R = \{\, \min C \mid C \in Q \,\}$, kanonisch bezüglich $\leq$.

🙂 Das ist oft bequem, um alle willkürlichen Wahlen in ein konkretes Eingabedatum $(X, \leq)$ abzukapseln. Die weitere Konstruktion kommt dann ohne Wahlen aus, sie ist eindeutig auf Grundlage von $(X, \leq)$.

Das Lemma von Zorn
F144

Satz F1V: Lemma von Zorn

Eine geordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat, enthält mindestens ein maximales Element.

Oft konstruieren wir mathematische Objekte schrittweise, als eine Kette aufsteigender Größe. Ein maximales Element ist ein fertiges Resultat.

If you are building a mathematical object in stages and find that (i) you have not finished even after infinitely many stages, and (ii) there seems to be nothing to stop you continuing to build, then Zorn's lemma may well be able to help you.
Timothy Gowers: *How to use Zorn's lemma.* `gowers.wordpress.com/2008/08/12`

Für Konstruktionen mit unendlichen Mengen ist Zorns Lemma daher oft ein bequemes Hilfsmittel. Wie der Wohlordnungssatz ist Zorns Lemma äquivalent zum Auswahlaxiom: Auf Grundlage der Zermelo–Fraenkel–Axiome impliziert jede der drei Aussagen die beiden anderen.
Dennoch provozieren sie unterschiedliche Gefühle:

> *The Axiom of Choice is obviously true, the well-ordering principle obviously false, and who can tell about Zorn's lemma?* (Jerry Bona)

Sind alle natürlichen Zahlen interessant?

Wir verfügen nun über recht mächtige mathematische Werkzeuge, und unvorsichtig verwendet kann man damit mächtig Quatsch erzeugen.

Quatz F1W: interessante Zahlen
Jede natürliche Zahl ist interessant.

Beweis: Angenommen, es gäbe uninteressante natürliche Zahlen. Unter diesen gäbe es dann eine kleinste – und die wäre interessant! Dies ist ein Widerspruch. Damit ist der Quatz bewiesen. QED

⚠ Warnung: Der folgende Quatz provoziert anhaltendes Nachdenken. Lesen Sie dies bitte nur, wenn Sie mathematisch gefestigt sind, Neugier und Grübelfreude verspüren und Zeit dafür haben.

Wir nutzen das lateinische Alphabet `a,b,c,...,z,A,B,C,...,Z`, mit Ziffern `0,1,...,9` usw. Insgesamt genügen uns 100 Zeichen.
Damit definieren wir natürliche Zahlen wie `20201206` oder `789!` oder
`Die kleinste natürliche Zahl n, die ln(ln(n))>100 erfüllt.`

☺ Auch große Zahlen lassen sich mit kurzen Zeichenketten definieren.

Sind die natürlichen Zahlen endlich?

Quatz F1X: Endlichkeit der natürlichen Zahlen
Jede natürliche Zahl lässt sich mit höchstens 200 Zeichen definieren.
Es gibt 100^{200} Zeichenketten der Länge 200 mit unseren 100 Zeichen, also höchstens 100^{200} natürliche Zahlen: Die Menge $\mathbb{N}$ ist endlich!

Beweis: Angenommen, es gäbe natürliche Zahlen die sich nur mit mehr als 200 Zeichen definieren lassen. Dann gäbe es darunter eine kleinste:

```
Sei N die kleinste natürliche Zahl, die sich
nur mit mehr als 200 Zeichen definieren lässt.
```

Diese Zahl N haben wir soeben mit weniger als 200 Zeichen definiert. Dies ist ein Widerspruch. Damit ist der Quatz bewiesen. QED

Selbstverständlich ist die Behauptung falsch, und die Schlussfolgerung, dass $\mathbb{N}$ endlich sei, ist absurd. Doch der Beweis scheint überzeugend.

Übung: Wo genau liegt bei diesem Argument der Fehler?

Sind die natürlichen Zahlen endlich?

Hier wird später einmal eine Erklärung dieses Logikrätsels stehen. Viel fruchtbarer ist jedoch – wie immer – das eigene Nachdenken.

Die Behauptung, die Menge $\mathbb{N}$ sei endlich, ist offensichtlich falsch. Das Argument kann daher nicht richtig sein. Tatsächlich ist es falsch, doch auf eine subtile Weise, der Fehler ist keineswegs offensichtlich.

Dieser Quatz ist ein schaurig-schönes Beispiel für einen Denkfehler. Darf man als Lehrer/in überhaupt falsche Behauptungen zeigen? Ich denke, ja: Auch aus mahnenden Fehlern kann man lernen.

Es gibt drei Möglichkeiten, klug zu handeln:
1. Durch Nachahmen — Das ist die leichteste.
2. Durch Nachdenken — Das ist die edelste.
3. Durch Erfahrung — Das ist die bitterste.
Konfuzius (551–497 v.Chr.)

Sind die natürlichen Zahlen endlich?

Rekursion und ihre Folgen

Beispiel: Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}_{>0}$ und die Selbstabbildung

$$\varphi : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto \tfrac{1}{2}(x + \tfrac{2}{x}).$$

Wir wählen den **Startwert** $x_0 := 1$ und definieren **rekursiv**

$$x_{n+1} := \varphi(x_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dies **konstruiert** die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{>0}$, also $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0} : n \mapsto x_n$.

$x_0 = 1$
$x_1 = 1.5$
$x_2 = 1.416666666\,6666666666\,6666666666\,6666666666\,6666666666\,6666666666\dots$
$x_3 = 1.414215686\,2745098039\,2156862745\,0980392156\,8627450980\,3921568627\dots$
$x_4 = 1.414213562\,3746899106\,2629557889\,0134910116\,5596221157\,4404458490\dots$
$x_5 = 1.414213562\,3730950488\,0168962350\,2530243614\,9819257761\,9742849828\dots$
$x_6 = 1.414213562\,3730950488\,0168872420\,9698078569\,6718753772\,3400156101\dots$
$\dots$

Wie garantieren wir Existenz und Eindeutigkeit der Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$?

Rekursion und ihre Folgen

Die Konstruktion von Folgen per Rekursion ist ein sehr flexibles und praktisches Werkzeug, es wird daher in nahezu allen Bereichen der Mathematik gerne genutzt. Sie sehen hier eine Anwendung des **Newton–Verfahrens** zur iterativen Näherung einer Nullstelle.

🙂 Diese Folge konvergiert, wie hier zu erahnen, extrem schnell gegen einen Grenzwert. Dieser Wert ist der Fixpunkt der Abbildung φ, also $\sqrt{2}$. Mehr zum Newton–Verfahren und zu iterativen Methoden lernen Sie in der Analysis und der Numerik. Das ist ein sehr dynamisches Thema!

Wir wollen im Folgenden klären, dass die Angabe des Startpunkts x_0 und der Rekursionsvorschrift $x_{n+1} := \varphi(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ tatsächlich genügen, um die gewünschte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eindeutig zu konstruieren. Es geht also um die **Existenz** und die **Eindeutigkeit** einer Funktion

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0} : n \mapsto x_n$$

mit den geforderten Eigenschaften. Endlich viele Rekursionsschritte sind kein Problem, doch wir wollen dies für alle $n \in \mathbb{N}$ bündeln.

Modelle der natürlichen Zahlen

Beispiel: Endliche Zeichenketten über dem Alphabet $\{0, 1\}$ gemäß
0 ↦ 1 ↦ 10 ↦ 11 ↦ 100 ↦ 101 ↦ 110 ↦ 111 ↦ 1000 ↦ 1001 ↦ ....

Beispiel: John von Neumanns Modell der natürlichen Zahlen
$0 = \emptyset \mapsto 1 = \{0\} \mapsto 2 = \{0,1\} \mapsto 3 = \{0,1,2\} \mapsto 4 = \{0,1,2,3\} \mapsto \dots$.

Definition F2A: Modell der natürlichen Zahlen

Sei N eine Menge, $0 \in N$ ein Element und $\nu : N \to N$ eine Abbildung. Wir nennen 0 das Startelement und ν die Nachfolgerabbildung.

$$\{0\} \xhookrightarrow{\text{inc}} N \xrightarrow{\nu} N$$

Wir nennen das Tripel $(N, 0, \nu)$ ein **Modell der natürlichen Zahlen**, falls es die folgenden drei **Dedekind–Peano–Axiome** erfüllt:

- D0: Es gilt $0 \notin \nu(N)$: Für alle $p \in N$ gilt $\nu(p) \neq 0$.
- D1: Die Abbildung ν ist injektiv: Für alle $p \neq q$ in N gilt $\nu(p) \neq \nu(q)$.
- D2: Induktion: Für alle $E \subseteq N$ mit $0 \in E$ und $\nu(E) \subseteq E$ gilt $E = N$.

Modelle der natürlichen Zahlen

Die wesentliche Grundlage der Rekursion sind die natürlichen Zahlen. Zwei schön konkrete Modelle nenne ich hier, es gibt zahllose weitere. Genauso gelingt dies im vertrauten Dezimalsystem, zur Basis Zehn:

$$\begin{array}{llllllllll}
0 \mapsto & 1 \mapsto & 2 \mapsto & 3 \mapsto & 4 \mapsto & 5 \mapsto & 6 \mapsto & 7 \mapsto & 8 \mapsto & 9 \mapsto \\
10 \mapsto & 11 \mapsto & 12 \mapsto & 13 \mapsto & 14 \mapsto & 15 \mapsto & 16 \mapsto & 17 \mapsto & 18 \mapsto & 19 \mapsto \\
20 \mapsto & 21 \mapsto & 22 \mapsto & 23 \mapsto & & \dots & & \mapsto 97 & \mapsto 98 & \mapsto 99 \mapsto \\
100 \mapsto & 101 \mapsto & 102 \mapsto & 103 \mapsto & \dots
\end{array}$$

Wir müssen uns gar nicht festlegen, welche Menge N wir betrachten. Es zählt allein, dass $(N, 0, \nu)$ die Dedekind–Peano–Axiome erfüllt! Wir konzentrieren uns auf die charakteristischen Eigenschaften: Definition F2A macht unseren Blick frei auf das Wesentliche.

🙂 Die Mathematik, recht besehen, ist das Reich der Freiheit. Jede darf sich ihre natürlichen Zahlen vorstellen, wie sie mag. Wir finden anschließend eine eindeutige Übersetzung (F2C).

Dedekinds Rekursionssatz

Satz F2B: Rekursionssatz von Dedekind, 1888

Sei $(N, 0, \nu)$ ein Modell der natürlichen Zahlen (wie in F2A erklärt).

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, mapsto, "\nu"] \arrow[d, mapsto, "f"] & 1 \arrow[r, mapsto, "\nu"] \arrow[d, mapsto, "f"] & 2 \arrow[r, mapsto, "\nu"] \arrow[d, mapsto, "f"] & 3 \arrow[r, mapsto, "\nu"] \arrow[d, mapsto, "f"] & \dots \\
a_0 \arrow[r, mapsto, "\alpha"] & a_1 \arrow[r, mapsto, "\alpha"] & a_2 \arrow[r, mapsto, "\alpha"] & a_3 \arrow[r, mapsto, "\alpha"] & \dots
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[d, "f"] \\
\{a_0\} \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] & A \arrow[r, "\alpha"] & A
\end{tikzcd}
$$

Das Tripel (A, a_0, α) bestehe aus einer Menge A, einem Element $a_0 \in A$ als Startpunkt und einer Abbildung $\alpha : A \to A$ als Rekursionsvorschrift.

Dann existiert genau eine Abbildung $f : N \to A$ als **rekursive Folge** mit Startwert $f(0) = a_0$ und der Rekursionsgleichung $f \circ \nu = \alpha \circ f$.

Eindeutigkeit: Angenommen die Abbildungen $f, g : N \to A$ erfüllen beide $f(0) = g(0) = a_0$ sowie $f \circ \nu = \alpha \circ f$ und $g \circ \nu = \alpha \circ g$.
Sei $E := \{\, n \in N \mid f(n) = g(n) \,\}$. Dann gilt $0 \in E$ und $\nu(E) \subseteq E$, denn aus $n \in E$ folgt $f(\nu(n)) = \alpha(f(n)) = \alpha(g(n)) = g(\nu(n))$, also $\nu(n) \in E$.
Dank Induktion (D2) folgt $E = N$. Das bedeutet $f = g$.

Dedekinds Rekursionssatz

Konstruktion von $f : N \to A$: Eine Teilmenge $R \subseteq N \times A$ nennen wir **rekursiv**, wenn $(0, a_0) \in R$ gilt und mit $(n, a) \in R$ auch $(\nu(n), \alpha(a)) \in R$.
Die größte rekursive Menge ist $N \times A$. Die kleinste ist der Durchschnitt

$$F := \bigcap \{\, R \subseteq N \times A \mid R \text{ ist rekursiv} \,\}.$$

Auch F ist rekursiv! Wir zeigen, dass $f = (N, F, A)$ eine Abbildung ist.

$$E := \{\, n \in N \mid \exists! a \in A : (n, a) \in F \,\}$$

Wir haben $E = N$ zu zeigen. Dies beweisen wir per Induktion.

Induktionsanfang $0 \in E$: Wir haben $(0, a_0) \in F$, denn F ist rekursiv.
Gäbe es ein Paar $(0, b) \in F$ mit $b \neq a_0$, dann wäre $R = F \smallsetminus \{(0, b)\}$ rekursiv dank (D0). Das steht im Widerspruch zur Definition von F.

Induktionsschritt $n \in E \Rightarrow n + 1 \in E$: Wegen $n \in E$ existiert genau ein $a \in A$ mit $(n, a) \in F$. Daher gilt $(\nu(n), \alpha(a)) \in F$, denn F ist rekursiv.
Gäbe es ein Paar $(\nu(n), b) \in F$ mit $b \neq \alpha(a)$, dann wäre $F \smallsetminus \{(\nu(n), b)\}$ rekursiv dank (D1). Das steht im Widerspruch zur Definition von F. QED

Dedekinds Rekursionssatz

🙂 Rekursion nutzen wir überall! So definieren wir insbesondere die Addition, Multiplikation und Potenz auf den natürlichen Zahlen (A1A).

Bitte unterscheiden Sie die beiden Begriffe **Rekursion** und **Induktion**! Beide Werkzeuge werden oft gemeinsam genutzt, so wie hier zu sehen, sie sind jedoch verschieden und erfüllen unterschiedliche Aufgaben: Per Induktion beweisen wir, per Rekursion konstruieren wir.

🙂 **Per Induktion beweisen wir** eine Aussage $p(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$p(0)$	Induktionsanfang: Wir beweisen die Aussage $p(0)$.
$p(n) \Rightarrow p(n+1)$	Induktionsschritt: Wir beweisen $p(n) \Rightarrow p(n+1)$.
$\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$	Induktionsschluss: die Allaussage $\forall n \in \mathbb{N} : p(n)$.

🙂 **Per Rekursion konstruieren wir** eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$.
Gegeben sei ein Element $a_0 \in A$ und eine Selbstabbildung $\alpha : A \to A$.
Rekursionsanfang: Wir legen den Startpunkt $f(0) = a_0$ fest.
Rekursionsschritt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $f(n+1) = \alpha(f(n))$.
Dank Rekursionssatz F2B definiert dies genau eine Funktion $f : \mathbb{N} \to A$.

Dedekinds Rekursionssatz

Korollar F2C: Einzigkeit der natürlichen Zahlen

Zu je zwei Modellen $(N, 0, \nu)$ und $(N', 0', \nu')$ der natürlichen Zahlen existiert ein eindeutiger Isomorphismus $(f, f') : (N, 0, \nu) \cong (N', 0', \nu')$.

$$
\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] \arrow[d, shift right, "f"'] & N \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, shift right, "f"'] & N \arrow[d, shift right, "f"'] \\
\{0'\} \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] \arrow[u, shift right, "f'"'] & N' \arrow[r, "\nu'"] \arrow[u, shift right, "f'"'] & N' \arrow[u, shift right, "f'"']
\end{tikzcd}
$$

Ausführlich: Es existiert genau ein Bijektionspaar $(f, f') : N \cong N'$ mit $f(0) = 0'$ und $f \circ \nu = \nu' \circ f$ sowie $f'(0') = 0$ und $f' \circ \nu' = \nu \circ f'$.

Beweis: Dank Existenz und Eindeutigkeit in Satz F2B existiert genau eine Abbildung $f : N \to N'$ mit $f(0) = 0'$ und $f \circ \nu = \nu' \circ f$ und genau eine Abbildung $f' : N' \to N$ mit $f'(0') = 0$ und $f' \circ \nu' = \nu \circ f'$.
Dank Eindeutigkeit in F2B gilt $f' \circ f = \mathrm{id}_N$ und $f \circ f' = \mathrm{id}_{N'}$. QED

🙂 Jeder darf sich seine natürlichen Zahlen vorstellen, wie er mag. Zwischen je zwei Modellen übersetzt der eindeutige Isomorphismus.

Konstruktion einer Einbettung $\mathbb{N} \hookrightarrow X$

Satz F2D: Konstruktion einer Einbettung $\mathbb{N} \hookrightarrow X$

Sei X eine Menge und unendlich, das heißt, es gibt keine Bijektion $\nu : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} X$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Injektion $\nu : \mathbb{N} \hookrightarrow X$.

Beweis: Wir konstruieren $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset X$ mit $\sharp A_n = n$.

Wir beginnen mit $A_0 := \emptyset$. Sei $A_n \subseteq X$ mit $\sharp A_n = n$ bereits konstruiert. Nach Voraussetzung gilt $A_n \neq X$, also gibt es ein Element $x_n \in X \smallsetminus A_n$. Wir wählen willkürlich und setzen $A_{n+1} := A_n \sqcup \{x_n\}$ mit $\sharp A_{n+1} = n + 1$.

Dies definiert die Abbildung $\nu : \mathbb{N} \to X : n \mapsto x_n$. Diese ist injektiv. $\boxed{\text{QED}}$

Formale Ausführung: Gegeben sei eine Wohlordnung auf X (F1U). Wir starten mit der Menge $A_0 = \emptyset$ und nutzen die Rekursionsvorschrift

$$\varphi : \mathfrak{P}_{<\infty}(X) \to \mathfrak{P}_{<\infty}(X) : A \mapsto A' = A \sqcup \{\min(X \smallsetminus A)\}.$$

Dank Rekursionssatz (F2B) erhalten wir so die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dies definiert eine Injektion $\nu : \mathbb{N} \hookrightarrow X : n \mapsto \min(X \smallsetminus A_n)$. $\boxed{\text{QED}}$

Konstruktion einer Einbettung $\mathbb{N} \hookrightarrow X$

Die erste, anschauliche Konstruktion ist zunächst überzeugend, doch bei genauerer Betrachtung bin ich damit nicht recht glücklich:

In dieser Konstruktion müssen wir immer wieder willkürlich wählen! Für endlich viele (wenige) Schritte will ich das gerne übernehmen, doch für unendlich viele solcher Schritte fehlt mir schlicht die Zeit.

Wir wollen daher diese Wahlen auf ein Verfahren übertragen. Genau solch ein Verfahren beschreibt die formale Ausführung. Mit diesen Daten und dieser Methode läuft die Maschine von alleine.

Dedekinds Charakterisierung un/endlicher Mengen

Satz F2E: Dedekinds Charakterisierung un/endlicher Mengen

Für jede Menge X sind folgende Aussagen äquivalent:

(E0) X ist endlich, das heißt es existiert $\nu : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} X$.

(E1) Jede Surjektion $g : X \twoheadrightarrow X$ ist injektiv, somit bijektiv.

(E2) Jede Injektion $f : X \hookrightarrow X$ ist surjektiv, somit bijektiv.

(E3) Es gibt keine Bijektion $X \cong Y$ auf eine echte Teilmenge $Y \subsetneq X$.

Umgekehrt sind folgende Aussagen äquivalent:

(U0) X ist unendlich. (Dank F2D existiert also $\nu : \mathbb{N} \hookrightarrow X$.)

(U1) Es gibt Surjektionen $g : X \twoheadrightarrow X$, die nicht injektiv sind.

(U2) Es gibt Injektionen $f : X \hookrightarrow X$, die nicht surjektiv sind.

(U3) Es gibt eine Bijektion $X \cong Y$ auf eine echte Teilmenge $Y \subsetneq X$.

Dedekinds Charakterisierung un/endlicher Mengen

Beweis: Die Äquivalenzen „(E2) $\Leftrightarrow$ (E3)“ und „(U2) $\Leftrightarrow$ (U3)“ sind klar: Zur Injektion $f : X \hookrightarrow X$ mit $Y = f(X)$ gehört die Bijektion $f|^Y : X \xrightarrow{\sim} Y$. Zur Bijektion $h : X \xrightarrow{\sim} Y$ mit $Y \subseteq X$ gehört die Injektion $\iota_Y^X \circ h : X \hookrightarrow X$.

Der Invarianzsatz E1H garantiert „(E0) $\Rightarrow$ (E1)“ und „(E0) $\Rightarrow$ (E2)“. Die Umkehrungen „(U0) $\Rightarrow$ (U1)“ und „(U0) $\Rightarrow$ (U2)“ gelten für $X = \mathbb{N}$:

Die Nachfolgerabbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n + 1$ ist injektiv (D1), aber nicht surjektiv (D0). Die Linksinverse $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto \max(0, n - 1)$ hingegen ist surjektiv, aber nicht injektiv, denn $g(0) = g(1) = 0$.

Allgemein: Zu X unendlich existiert eine Injektion $\nu : \mathbb{N} \hookrightarrow X$ (F2D). Sei $B = \nu(\mathbb{N}) \subseteq X$ die Bildmenge. Wir haben dann $\mu = \nu|^B : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} B$. Zu jeder Abbildung $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definieren wir

$$h' : X \to X : x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \in X \smallsetminus B, \\ (\mu \circ h \circ \mu^{-1})(x) & \text{falls } x \in B. \end{cases}$$

Genau dann ist h' injektiv bzw. surjektiv, wenn h dies ist. $\boxed{\text{QED}}$

Mächtigkeit von Mengen

Definition F2F: Mächtigkeit von Mengen

Seien X und Y Mengen. Wir vereinbaren folgende Schreibweisen:

1. $X \preccurlyeq Y$, falls eine Injektion $f : X \hookrightarrow Y$ existiert: reflexiv & transitiv! Interpretation: „Die Menge X ist höchstens so groß wie Y."
2. $Y \succcurlyeq X$, falls eine Surjektion $g : Y \twoheadrightarrow X$ existiert oder $X = \emptyset$ gilt. Dies ist äquivalent zu $X \preccurlyeq Y$ (Links/Rechtsinverse, Satz D3A). Interpretation: „Die Menge Y ist mindestens so groß wie X."
3. $X \cong Y$, falls eine Bijektion $(h, k) : X \cong Y$ existiert: Äquivalenz. Interpretation: „Die beiden Mengen X und Y sind gleich groß." Traditionell sagen wir hierzu **gleichmächtig** oder **äquipotent**.

Existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $\nu : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} X$, so nennen wir die Menge X **endlich**, $\sharp X = n$, andernfalls **unendlich**.

Existiert eine Bijektion $\nu : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} X$, so heißt X **abzählbar unendlich**.

Abzählbar bedeutet endlich oder abzählbar unendlich, kurz $X \preccurlyeq \mathbb{N}$. Andernfalls gilt $X \not\preccurlyeq \mathbb{N}$, und X heißt **überabzählbar (unendlich)**.

Mächtigkeit von Mengen

Die Relation $X \cong Y \Leftrightarrow \exists (h, k) : X \cong Y$ ist reflexiv dank $(\mathrm{id}, \mathrm{id}) : X \cong X$, symmetrisch dank Vertauschung und transitiv dank Komposition.

Die Relation $X \preccurlyeq Y \Leftrightarrow \exists f : X \hookrightarrow Y$ ist reflexiv dank $\mathrm{id}_X : X \hookrightarrow X$ und transitiv, denn die Komposition von Injektionen ergibt eine Injektion.

Satz von Cantor–Bernstein (F2N): Aus $X \preccurlyeq Y$ und $Y \preccurlyeq X$ folgt $X \cong Y$. Aus $f : X \hookrightarrow Y$ und $g : Y \hookrightarrow X$ gewinnen wir $(h, k) : X \cong Y$.

Die Relation $Y \succcurlyeq X \Leftrightarrow (\exists g : Y \twoheadrightarrow X) \vee X = \emptyset$ ist äquivalent zu $X \preccurlyeq Y$: Zu jeder Surjektion $g : Y \twoheadrightarrow X$ existiert $f : X \hookrightarrow Y$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ (D3A).

Wie üblich schreiben wir $X \prec Y$ für $X \preccurlyeq Y \wedge Y \not\preccurlyeq X$. Interpretation: „Die Menge X ist strikt kleiner als Y."

Wie üblich schreiben wir $Y \succ X$ für $Y \succcurlyeq X \wedge X \not\succcurlyeq Y$. Interpretation: „Die Menge Y ist strikt größer als X."

⚠ Die Begriffe „kleiner" und „größer" und „gleich groß" sind hier immer im Sinne der Mächtigkeit gemeint, also auf In/Sur/Bijektionen bezogen.

Mächtigkeit von Teilmengen in $\mathbb{N}$

Aufgabe: Ist die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ größer als die Menge der Quadratzahlen $Q = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$?

Lösung: (0) Im Sinne der Inklusion haben wir $Q \subsetneq \mathbb{N}$. Im Poset $(\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ ist demnach Q strikt kleiner als $\mathbb{N}$.

(1) Im Sinne der Mächtigkeit sind beide Mengen gleich groß! Wir haben $(h, k) : \mathbb{N} \cong Q$ mit $h(x) = x^2$ und $k(y) = \sqrt{y}$.

⚠ Um mögliche Missverständnisse zu vermeiden, sagen wir statt *gleich groß* genauer *gleichmächtig* im Sinne der Definition F2F.

Die Mengen $\mathbb{N}$ und Q sind gleichmächtig, sie haben dieselbe **Mächtigkeit**, man sagt auch: sie haben dieselbe **Kardinalität**.

Mächtigkeit von Teilmengen in $\mathbb{N}$

Aufgabe: Vergleichen Sie die Mächtigkeit der Menge $\mathbb{N}$ mit der Menge $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ der Primzahlen in $\mathbb{N}$.

Lösung: Beide sind gleichmächtig, wir haben eine Bijektion $\mathbb{N} \cong P$.

Ausführliche Konstruktion: Dank Satz C2C ist die Menge P unendlich. Ihre Elemente können wir aufsteigend anordnen zu $p_0 < p_1 < p_2 < \dots$. Dies stiftet die (kanonische, isotone) Bijektion $h : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} P : n \mapsto p_n$.

🙂 Computer-Algebra-Systeme implementieren diese Abbildung $h : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} P$ als eine Funktion, etwa `Prime[n]` oder `ithprime(n)`.

Mächtigkeit der Potenzmenge

Satz F2G: Cantors (zweites) Diagonalargument

Zu jeder Menge X ist die Potenzmenge strikt größer: Es gibt Injektionen $X \hookrightarrow \mathfrak{P}(X)$, etwa $x \mapsto \{x\}$, aber keine Surjektionen $X \twoheadrightarrow \mathfrak{P}(X)$:

$$\text{Es gilt } X \prec \mathfrak{P}(X), \text{ das heißt } X \preccurlyeq \mathfrak{P}(X) \text{ und } X \not\cong \mathfrak{P}(X).$$

Insbesondere ist die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ überabzählbar.

Beweis: Vorgelegt sei eine beliebige Abbildung $f : X \to \mathfrak{P}(X)$.
Wir zeigen, dass f nicht surjektiv ist. Dazu betrachten wir die Menge

$$A = \{\, x \in X \mid x \notin f(x) \,\} \subseteq X.$$

Angenommen, es gäbe ein Element $x \in X$ mit $f(x) = A$.

- Gilt $x \in A$, so folgt $x \notin f(x) = A$, ein Widerspruch.
- Gilt $x \notin A$, so folgt $x \in f(x) = A$, ein Widerspruch.

Wir schließen: Es existiert kein Element $x \in X$ mit $f(x) = A$. $\boxed{\text{QED}}$

Mächtigkeit der Potenzmenge

🙂 Dieser Beweis ist genial einfach und einfach genial!
Der Trick heißt auch *Cantors zweites Diagonalargument*.
Cantors erstes Diagonalargument beweist $\mathbb{N}^2 \cong \mathbb{N}$, siehe F2K.

Das Argument erinnert uns eindringlich an das Barbier-Paradoxon und die Russelsche Antinomie (D127). Dieses logische Problem der allzu naiven Mengenlehre beheben wir durch Beschränkung auf die streng reglementierten Mengenkonstruktionen nach Zermelo–Fraenkel und machen seither sehr gute Erfahrungen damit.

Im vorliegenden Beweis ist alles kristallklar, alles geht mit rechten Dingen zu: Wir widerlegen die Aussage $A \in \operatorname{im}(f)$, ganz einfach. Zudem ist dies ein wunderbares Beispiel für einen Beweis durch Widerspruch zusammen mit einer einfachen Fallunterscheidung.

🙂 Ich hoffe, unsere soliden Vorbereitungen zahlen sich hier (und überall) für Sie aus, und Sie genießen die schönen Aha–Erlebnisse.

Illustration zu Cantors Diagonalverfahren

Angenommen, wir haben eine Folge von Mengen $A_0, A_1, A_2, \dots \subseteq \mathbb{N}$, zum Beispiel $A_0 = \emptyset$, $A_1 = \{0,1,3\}$, $A_2 = \mathbb{N}$, $A_3 = 2\mathbb{N}$, $A_4 = 2\mathbb{N}+1$, ….
Diese Mengen können wir übersichtlich in einer Tabelle anordnen:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
A_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	…
A_1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	…
A_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	…
A_3	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	…
A_4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	…
…	…										

Als Tabelle schreiben wir $a_{ij} = 1$, falls $j \in A_i$, und $a_{ij} = 0$, falls $j \notin A_i$.
Entlang der Diagonalen bilden wir die Menge $A = \{\, i \in \mathbb{N} \mid a_{ii} = 0 \,\}$.
Diese Menge kommt nicht in unserer Liste vor, denn $i \in A_i \Leftrightarrow i \notin A$.

🙂 Es gibt keine Abzählung $A_0, A_1, A_2, \dots$ der Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$.
Jede Folge $A_0, A_1, A_2, \dots \subseteq \mathbb{N}$ lässt immer noch Mengen aus.

Illustration zu Cantors Diagonalverfahren

Mächtigkeit der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Satz F2H: Mächtigkeit von $\mathbb{Z}$

Die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig, kurz $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
b	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	5	...

Aufgabe: Formulieren Sie explizit dieses Bijektionspaar $(f, g) : \mathbb{N} \cong \mathbb{Z}$.

Lösung: Wir fassen diese Idee in explizite Formeln:

$$f \;:\; \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \;:\; a \mapsto \begin{cases} a/2 & \text{falls } a \in 2\mathbb{N}, \\ -(a+1)/2 & \text{falls } a \in 2\mathbb{N}+1, \end{cases}$$

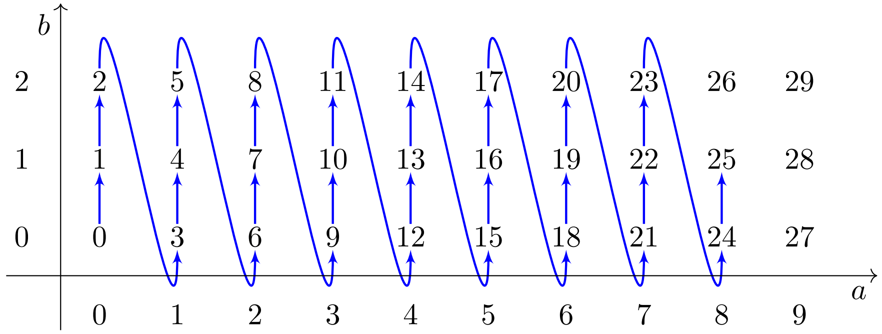
$$g \;:\; \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \;:\; b \mapsto \begin{cases} 2b & \text{falls } b \geq 0, \\ -2b-1 & \text{falls } b < 0. \end{cases}$$

☺ Diese Abbildungen sind wohldefiniert und zueinander invers: Es gilt $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. Nachrechnen! QED

Mächtigkeit des Produkts $\mathbb{N} \times \{1, \dots, n\}$

Satz F2I: Mächtigkeit von $\mathbb{N} \times \{1, \dots, n\}$

Die Mengen $\mathbb{N} \times \{1, \dots, n\}$ und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig.



Aufgabe: Formulieren Sie explizit dieses Bijektionspaar.

Lösung: Wir nutzen zunächst $\{1, \dots, n\} \cong \{0, \dots, n-1\} : k \leftrightarrows k - 1$.
Zudem haben wir das Bijektionspaar $(f, g) : \mathbb{N} \times \{0, \dots, n-1\} \cong \mathbb{N}$ mit $f(a, b) = na + b$ und $g(c) = (c \operatorname{quo} n, c \operatorname{rem} n)$. QED

Grundrechenarten für Mächtigkeiten

Satz F2J: Grundrechenarten für Mächtigkeiten

Gegeben seien Bijektionen $(\alpha, \alpha') : A \cong A'$ und $(\beta, \beta') : B \cong B'$.
Daraus erhalten wir die Bijektionen

$$\begin{aligned} (\alpha \sqcup \beta, \alpha' \sqcup \beta') &\;:\; A \sqcup B \cong A' \sqcup B', \\ (\alpha \times \beta, \alpha' \times \beta') &\;:\; A \times B \cong A' \times B', \\ (\varphi, \varphi') &\;:\; \mathrm{Abb}(A, B) \cong \mathrm{Abb}(A', B') \end{aligned}$$

mit $\varphi(f) = \beta \circ f \circ \alpha'$ und $\varphi'(f') = \beta' \circ f' \circ \alpha$. Zudem haben wir

$$(\psi, \psi') \;:\; (Z^X)^Y \cong Z^{X \times Y} \;:\; f \leftrightarrows g$$

mit $g(x, y) = f(y)(x)$ für $f : Y \to \mathrm{Abb}(X, Z)$ und $g : X \times Y \to Z$.

Beweis: Diese Abbildungen sind wohldefiniert und zueinander invers: Alles liegt explizit vor, es genügt sorgsames Nachrechnen! QED

Grundrechenarten für Mächtigkeiten

Für die erste Bijektion $A \sqcup B \cong A' \sqcup B'$ setzen wir Disjunktheit voraus, also $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$. Dies können wir immer erzwingen durch

$$(\{1\} \times A) \sqcup (\{2\} \times B) = (\{1\} \times A') \sqcup (\{2\} \times B')$$

Anschaulich gesagt, wir ersetzen die Menge A durch die Kopie $\{1\} \times A$; zwischen beiden übersetzen wir durch die kanonische Bijektion (ι_2, pr_2). Entsprechend verfahren wir für $\{2\} \times B$ sowie $\{1\} \times A'$ und $\{2\} \times B'$.

Beispiel: Es gilt $(\{1\} \times \mathbb{N}) \sqcup (\{2\} \times \mathbb{N}) = \{1, 2\} \times \mathbb{N} \cong \{0, 1\} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$.
Dies ist die Vereinigung von zwei disjunkten Kopien der Menge $\mathbb{N}$, die Mächtigkeit bleibt dabei gleich (F2I).

Beispiel: Aus $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$ folgt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dank F2J.
Wir werden im Folgenden sehen, dass $\mathbb{N}^2 \cong \mathbb{N}$ gilt (F2K).

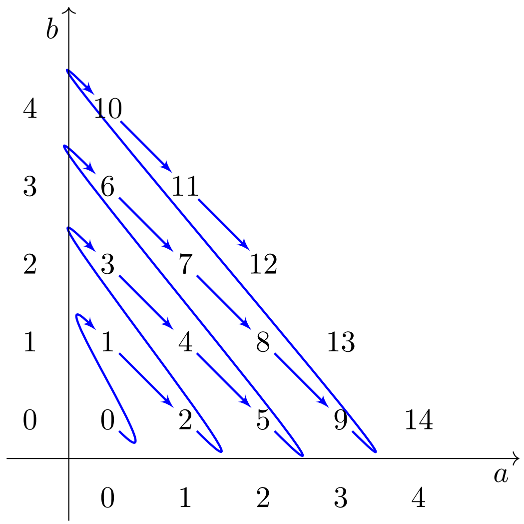
Beispiel: Aus $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$ folgt $\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{N}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ dank F2J.
Wir zeigen im Folgenden $\mathbb{N}^n \cong \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ (F2M).

Mächtigkeit des Produkts $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Satz F2K: Cantors erstes Diagonalargument

Die Menge $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist gleichmächtig zu $\mathbb{N}$, kurz $\mathbb{N}^2 \cong \mathbb{N}$.

Beweisidee:



Mächtigkeit des Produkts $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Aufgabe: Formulieren Sie explizit dieses Bijektionspaar $(f, g) : \mathbb{N}^2 \cong \mathbb{N}$.

Lösung: Wir formulieren obige Skizze als Rekursion (Satz F2B):

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2 : \quad g(0) = (0,0) \text{ und } g(n+1) = \varphi(g(n)),$$

$$\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2 : (a,b) \mapsto \begin{cases} (0, a+1) & \text{falls } b = 0, \\ (a+1, b-1) & \text{falls } b > 0. \end{cases}$$

Damit gilt etwas bequemer ausgeschrieben $g(c) = (s, r-s)$ mit

$$r = \max\{\, n \in \mathbb{N} \mid n(n+1)/2 \le c \,\},$$
$$s = c - r(r+1)/2.$$

Die Umkehrfunktion ist erfreulich einfach (dank dem kleinen Gauß):

$$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} : (a,b) \mapsto a + (a+b)(a+b+1)/2$$

☺ Diese Abbildungen sind wohldefiniert und zueinander invers:
Es gilt $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}^2}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Nachrechnen! $\boxed{\text{QED}}$

Abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen

Beispiel: Die Vereinigung $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \{i\} \times \mathbb{N} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.
Für den allgemeinen Fall nutzen wir geschickt diesen Spezialfall:

Satz F2L: abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen

Jede abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar:

Sei I eine abzählbare Indexmenge. Zu jedem Index $i \in I$ sei A_i eine abzählbare Menge. Dann ist auch $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ abzählbar.

Beweis: Gegeben seien $f : I \hookrightarrow \mathbb{N}$ und $g_i : A_i \hookrightarrow \mathbb{N}$ für jedes $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
A = \bigcup_{i \in I} A_i \arrow[r, hook, dashed, "h"] \arrow[d, shift right, hook, "r"'] & \mathbb{N} \\
A' = \bigsqcup_{i \in I} \{i\} \times A_i \arrow[u, shift right, two heads, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[r, hook, "(i,a) \mapsto (f(i), g_i(a))"] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[u, hook, "\text{F2K}"']
\end{tikzcd}$$

Nach Indexwechsel dürfen wir $I \subseteq \mathbb{N}$ annehmen. Eine Rechtsinverse zu $\mathrm{pr}_2 : A' \twoheadrightarrow A$ ist $r : a \mapsto (j, a)$ mit $j = \min\{\, i \in I \mid a \in A_i \,\}$ dank F1S.
Somit gilt $A \preccurlyeq A' \preccurlyeq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \preccurlyeq \mathbb{N}$. Dank Transitivität folgt $A \preccurlyeq \mathbb{N}$. $\boxed{\text{QED}}$

Abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen

Korollar F2M: Mächtigkeit von $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$

(1) Es gilt $\mathbb{N}^n \cong \mathbb{N}$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$.

(2) Es gilt $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \cong \mathbb{N}$ für die Menge alle Folgen mit endlichem Träger:

$$\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} := \{\, f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \sharp\,\mathrm{supp}(f) < \infty \,\}.$$

(3) Hingegen ist die Menge $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{\, f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,\}$ überabzählbar.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Aussagen als Wiederholung und Übung.

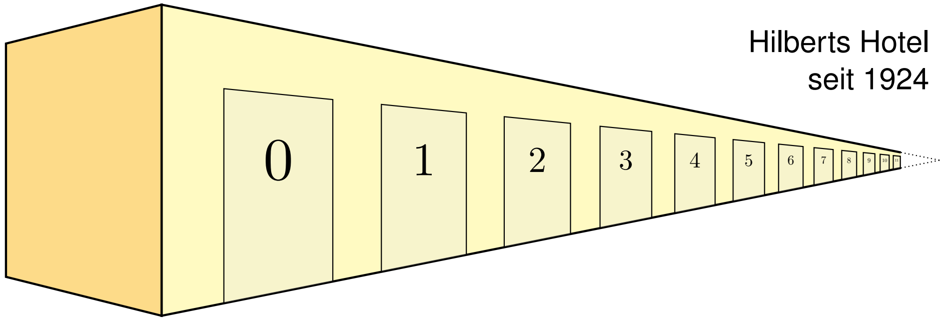
Lösung: (1) Induktion über $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$: Für $n = 1$ gilt $\mathbb{N}^1 \cong \mathbb{N}$.
Für $n \ge 2$ finden wir induktiv $\mathbb{N}^n = \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ (F2K).
(2) Die Menge $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ ist eine abzählbare Vereinigung (F2L) gemäß

$$\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\, f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \mathrm{supp}(f) \subset \{0, \dots, n\} \,\}$$

(3) Wir haben $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, und $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar (F2G).

Hilberts Hotel

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen,
soll uns niemand vertreiben können. (David Hilbert)



Hilberts Hotel hat die Zimmer $0, 1, 2, 3, \dots$. Alle Zimmer sind belegt.
Ein weiterer Gast kommt noch unter dank $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N} : n \mapsto n + 1$,
… auch abzählbar viele neue Gäste dank $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N} : n \mapsto 2n$,
… sogar $\mathbb{N}^2 \hookrightarrow \mathbb{N} : (a, b) \mapsto a + (a + b)(a + b + 1)/2$.

Hilberts Hotel

Wenn in einem **endlichen Hotel** alle Zimmer belegt sind, dann kann kein Gast mehr aufgenommen werden, auch wenn die Managerin die Gäste neu auf die Zimmer verteilt. Es hilft alles nichts! (Invarianz E1H)

Anders in **Hilberts Hotel** mit unendlich vielen Zimmern $0, 1, 2, 3, \dots$: Sind alle Zimmer belegt, so kann immer noch ein Gast aufgenommen werden: Der Gast von Zimmer 0 zieht nach 1, der von 1 nach 2, der von 2 nach 3, usw. Wir nutzen hierzu die Bijektion $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}_{\ge 1} : n \mapsto n + 1$.

Ebenso zwei Gäste, oder drei, oder vier… Nun kommt ein Hilbert–Bus mit unendlich vielen neuen Gästen. Die Managerin quartiert die alten Gäste um vermöge der Bijektion $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} 2\mathbb{N} : n \mapsto 2n$. Die neuen Gäste beziehen ihre Zimmer vermöge $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} 2\mathbb{N} + 1 : n \mapsto 2n + 1$. Zusammen erhalten wir so die Bijektion $\{0, 1\} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} : (i, n) \mapsto 2n + i$ (Satz F2I).

Schließlich kommen unendlich viele Busse, jeder mit unendlich vielen Gästen. Kein Problem, wir haben eine Bijektion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ (Satz F2K).

Übung: Wie verteilen Sie die Zimmer jeweils neu? Schreiben Sie zur Wiederholung alle relevanten Bijektion möglichst schön und explizit aus!

Hilberts Hotel

HOTEL INFINITY, lyrics © 2000 by Lawrence Mark Lesser

On a dark desert highway — not much scenery
Except this long hotel stretchin' far as I could see.
Neon sign in front read "No Vacancy,"
But it was late and I was tired, so I went inside to plea.

The clerk said, "No problem. Here's what can be done —
We'll move those in a room to the next higher one.
That will free up the first room and that's where you can stay."
I tried understanding that as I heard him say:

[CHORUS] *"Welcome to the Hotel called Infinity —*
Where every room is full (every room is full)
Yet there's room for more.
Yeah, plenty of room at the Hotel called Infinity —
Move 'em down the floor (move 'em down the floor)
To make room for more."

Hilberts Hotel

I'd just gotten settled, I'd finally unpacked
When I saw 8 more cars pull into the back.
I had to move to room 9; others moved up 8 rooms as well.
Never more will I confuse a Hilton with a Hilbert Hotel!

My mind got more twisted when I saw a bus without end
With an infinite number of riders coming up to check in.
"Relax," said the nightman. "Here's what we'll do:
Move to the double of your room number:
that frees the odd-numbered rooms." [CHORUS]

Last thing I remember at the end of my stay —
It was time to pay the bill but I had no means to pay.
The man in 19 smiled, "Your bill is on me.
20 pays mine, and so on, so you get yours for free!"

(`www.math.utep.edu/Faculty/lesser/GreatestLESSERhits.html`)

Der Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

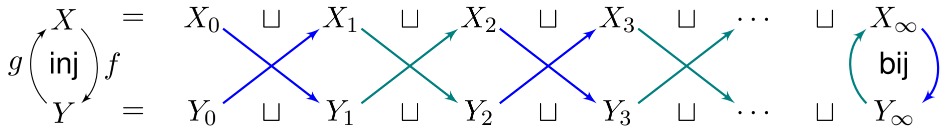
F233

☺ Wir wollen nun zeigen: Aus $X \preccurlyeq Y$ und $Y \preccurlyeq X$ folgt $X \cong Y$:

Satz F2N: Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

Aus gegebenen Injektionen $f : X \hookrightarrow Y$ und $g : Y \hookrightarrow X$ können wir eine Bijektion $(h, k) : X \cong Y$ konstruieren.

Wir bilden Urbildketten $x_0 \mapsfrom y_1 \mapsfrom x_2 \mapsfrom y_3 \mapsfrom \dots$ maximaler Länge. Die Elemente der Länge n bilden die Menge $X_n \subseteq X$ bzw. $Y_n \subseteq Y$.



Cantors Reißverschluss: Jede Abbildung rechts von „=“ ist bijektiv! Aus $f_n = f|_{X_n}^{Y_{n+1}} : X_n \xrightarrow{\sim} Y_{n+1}$ und $g_n = g|_{Y_n}^{X_{n+1}} : Y_n \xrightarrow{\sim} X_{n+1}$ erhalten wir $h = f_0 \sqcup g_0^{-1} \sqcup f_2 \sqcup g_2^{-1} \sqcup \cdots \sqcup f_\infty$ und $k = g_0 \sqcup f_0^{-1} \sqcup g_2 \sqcup f_2^{-1} \sqcup \cdots \sqcup f_\infty^{-1}$.

☺ Der folgende Beweis formuliert diese Idee sorgfältig aus.

Der Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

F234 Erläuterung

Wir lesen $X \preccurlyeq Y$ als „Die Menge X ist höchstens so groß wie Y.“
Wir lesen $Y \succcurlyeq X$ als „Die Menge Y ist mindestens so groß wie X.“
Wir lesen $X \cong Y$ als „Die Mengen X und Y sind gleich groß“, hierzu sagen wir traditionell **gleichmächtig** oder **äquipotent**.

Der Satz garantiert, dass wir Mengen nach Mächtigkeit ordnen können. Wir definieren die strikte Ordnung $X \prec Y$ durch $X \preccurlyeq Y$ und $Y \not\preccurlyeq X$ und entsprechend $X \succ Y$ durch $X \succcurlyeq Y$ und $Y \not\succcurlyeq X$. Demnach gilt also höchstens eine der drei Alternativen $X \prec Y$ oder $X \cong Y$ oder $X \succ Y$.

Der Äquivalenzsatz wurde 1887 von Georg Cantor formuliert, aber erst zehn Jahre später 1897 bewiesen. Dies gelang dem damals 19-jährigen Studenten Felix Bernstein in Cantors Seminar an der Universität Halle. Zeitgleich und unabhängig veröffentlichte Ernst Schröder einen Beweis, der sich jedoch später als fehlerhaft erwies. Bereits 1887 fand Richard Dedekind einen Beweis, den er nicht veröffentlichte. Daher trägt der Äquivalenzsatz oft eine Kombination dieser Namen. Wir präsentieren im Folgenden eine Konstruktion, die ohne das Auswahlaxiom auskommt.

Der Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

F235

Beweis: Gegeben sind $f : X \hookrightarrow Y$ und $g : Y \hookrightarrow X$. Die beiden Mengen

$$X_0 := X \smallsetminus g(Y) \quad \text{und} \quad Y_0 := Y \smallsetminus f(X)$$

enthalten alle Elemente ohne Urbild. Per Rekursion (F2B) enthalten

$$X_{n+1} := g(Y_n) \quad \text{und} \quad Y_{n+1} := f(X_n)$$

alle Elemente mit Urbildfolge der Länge $n+1$. Schließlich enthalten

$$X_\infty := \bigcap\nolimits_{\ell\in\mathbb{N}} (g \circ f)^\ell(X) \quad \text{und} \quad Y_\infty := \bigcap\nolimits_{\ell\in\mathbb{N}} (f \circ g)^\ell(Y)$$

alle Elemente mit unendlicher Urbildfolge. Wir definieren

$$h : X \to Y : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \bigsqcup_{\ell\in\mathbb{N}} X_{2\ell} \sqcup X_\infty, \\ y & \text{für } x = g(y) \in \bigsqcup_{\ell\in\mathbb{N}} X_{2\ell+1}, \end{cases}$$

$$k : Y \to X : y \mapsto \begin{cases} x & \text{für } y = f(x) \in \bigsqcup_{\ell\in\mathbb{N}} Y_{2\ell+1} \sqcup Y_\infty, \\ g(y) & \text{für } y \in \bigsqcup_{\ell\in\mathbb{N}} Y_{2\ell}. \end{cases}$$

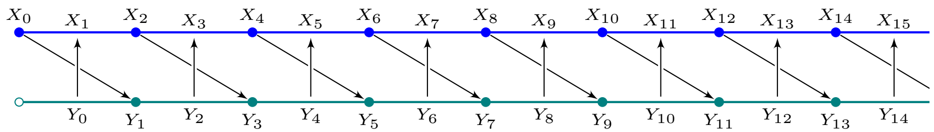
Damit gilt $k \circ h = \mathrm{id}_X$ und $h \circ k = \mathrm{id}_Y$. $\boxed{\text{QED}}$

Der Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

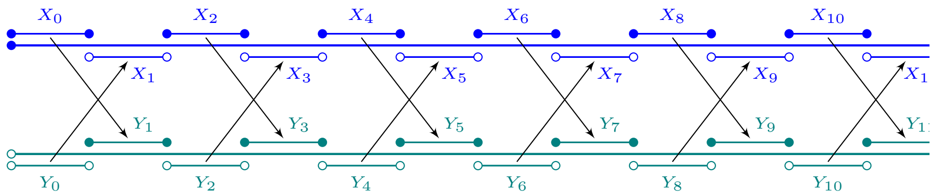
F236

Beispiel: Die Intervalle $X = [0, \infty[$ und $Y =]0, \infty[$ sind gleichmächtig.

Beweis: Wir haben $f : X \hookrightarrow Y : x \mapsto x + 1$ und $g = \mathrm{inc} : Y \hookrightarrow X : y \mapsto y$. Dank Cantor–Bernstein erhalten wir daraus $(h, k) : X \cong Y$. Skizze:



Alternative: Wir nutzen $f : x \mapsto x + 1$ und $g : y \mapsto y + 1$. Skizze:



Beispiel: Die Intervalle $X = [0, 3]$ und $Y = [0, 2[$ sind gleichmächtig. Wir nutzen beispielsweise $f : X \hookrightarrow Y : x \mapsto x/2$ und $g : Y \hookrightarrow X : y \mapsto y$.

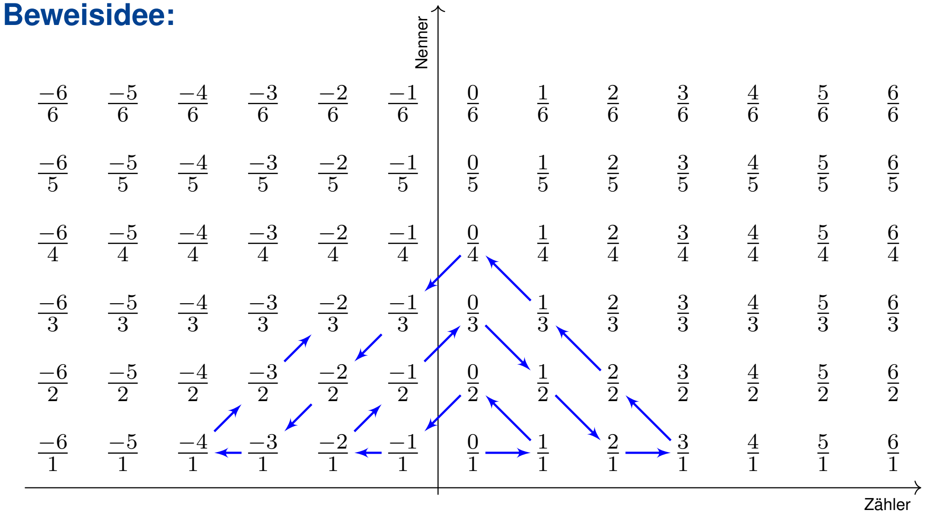
Übung: Führen Sie die Cantor–Bernstein–Konstruktion jeweils aus!

Mächtigkeit der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Satz F2O: Mächtigkeit von $\mathbb{Q}$

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar unendlich, kurz $\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$.

Beweisidee:



Mächtigkeit der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Es gibt viele Möglichkeiten, eine solche Abzählung auszuführen. Die Skizze zeigt eine anschauliche, graphische Vorgehensweise.

Wir wollen eine Bijektion $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$ konstruieren. Bei der oben skizzierten Abzählung werden tatsächlich alle rationalen Zahlen erreicht, jedoch müssen mehrfache Darstellungen derselben Zahl übergangen werden. Die Grundidee ist anschaulich anhand der Skizze vollkommen klar, doch eine vollständige Präzisierung scheint zunächst schwierig.

Um dies sorgfältig und explizit auszuformulieren, ist es geschickt, unsere bisherigen Konstruktionen gewinnbringend einzusetzen:

Wir haben einerseits $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, andererseits ist $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{\, z/n \mid z \in \mathbb{Z} \,\}$ abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen, also abzählbar dank F2L. Aus $f : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ und $g : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{N}$ erhalten wir $(h,k) : \mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$ dank Satz F2N.

Damit gelingt eine ebenso präzise wie konkrete Konstruktion. Wir müssen nur den Mut fassen, alles auszuschreiben!

☺ *Beautiful is better than ugly. Explicit is better than implicit.*

Mächtigkeit der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Beweis: Wir haben einerseits die Inklusion $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, also $\mathbb{N} \preccurlyeq \mathbb{Q}$. Die rationalen Zahlen sind also mindestens abzählbar unendlich.

Andererseits haben wir die Surjektion $q : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \twoheadrightarrow \mathbb{Q} : (a,b) \mapsto a/b$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Q} \arrow[r, hook, dashed, "h"] \arrow[d, hook, shift left, "r"] & \mathbb{N} \\
\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \arrow[u, two heads, shift left, "q"] \arrow[r, hook, "\text{F2H}"] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[u, hook, "\text{F2K}"']
\end{tikzcd}
$$

Somit gilt $\mathbb{Q} \preccurlyeq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \preccurlyeq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \preccurlyeq \mathbb{N}$. Dank Transitivität folgt $\mathbb{Q} \preccurlyeq \mathbb{N}$. Die rationalen Zahlen sind also höchstens abzählbar unendlich.

☺ Dank Cantor–Bernstein F2N gilt $\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$. $\boxed{\text{QED}}$

Bemerkung: Die Quotientenabbildung $q : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \twoheadrightarrow \mathbb{Q} : (a,b) \mapsto a/b$ erlaubt eine schöne explizite Rechtsinverse $r : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* : c \mapsto (a,b)$ mit $c = a/b$ und $\operatorname{ggT}(a,b) = 1$: Dies ist die eindeutige Darstellung als vollständig gekürzter Bruch. Wir haben also $(r,q) : \mathbb{Q} \rightleftarrows \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

Mächtigkeit der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Korollar F2P: Mächtigkeit von $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$

(1) Es gilt $\mathbb{Q}^n \cong \mathbb{N}$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$.

(2) Es gilt $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})} \cong \mathbb{N}$ für die Menge aller Folgen mit endlichem Träger:

$$\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})} := \{\, f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \mid \sharp\operatorname{supp}(f) < \infty \,\}.$$

(3) Hingegen ist die Menge $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = \{\, f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \,\}$ überabzählbar.

Aufgabe: Beweisen Sie diese Aussagen als Wiederholung und Übung.

Lösung: Dies beweisen wir wörtlich wie in F2M mit Hilfe von Satz F2J.

(1) Wir führen Induktion über $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$: Für $n = 1$ gilt $\mathbb{Q}^1 \cong \mathbb{N}$ (F2O). Für $n \ge 2$ finden wir induktiv $\mathbb{Q}^n = \mathbb{Q}^{n-1} \times \mathbb{Q} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ (F2K).

(2) Die Menge $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ ist eine abzählbare Vereinigung (F2L) gemäß

$$\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\, f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \mid \operatorname{supp}(f) \subset \{0,\dots,n\} \,\}$$

(3) Wir haben $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, und $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar (F2G).

Entwicklung reeller Zahlen in Basis B

Sei $B \in \mathbb{N}_{\ge 2}$, etwa $B = 2$ binär, $B = 3$ ternär oder $B = 10$ dezimal:

$$\pi = 3.14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\,\dots$$
$$0.1 = 0.09999\,99999\,99999\,99999\,99999\,99999\,\dots$$

Satz F2Q: B–adische Entwicklung

Jede Ziffernfolge $a_1, a_2, a_3, \dots \in \{0, \dots, B-1\}$ definiert eine reelle Zahl

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k B^{-k} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k B^{-k} \quad \in \quad [0,1].$$

Umgekehrt lässt sich jede reelle Zahl $a \in [0,1]$ so als eine B–adische Entwicklung schreiben (auf mindestens eine, höchstens zwei Weisen).

$$q \;:\; \{0, \dots, B-1\}^{\mathbb{N}} \twoheadrightarrow [0,1] \;:\; (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \mapsto a$$

Zu jeder reellen Zahl $a \in \,]0,1]$ existiert genau eine solche B–adische Entwicklung, bei der unendlich viele Ziffern von 0 verschieden sind.

$$r \;:\; [0,1] \hookrightarrow \{0, \dots, B-1\}^{\mathbb{N}} \;:\; a \mapsto (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

Entwicklung reeller Zahlen in Basis B

Für $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k B^{-k}$ gilt $0 = s_0 \le s_1 \le s_2 \le s_3 \le \ldots \le 1$, also existiert der Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$, denn $(\mathbb{R}, \le)$ ist vollständig! Die B–adische Reihe definiert so die Abbildung $q : \mathbb{Z}_B^{\mathbb{N}} \twoheadrightarrow [0,1]$.

Umgekehrt konstruieren wir $r : [0,1] \to \mathbb{Z}_B^{\mathbb{N}} : a \mapsto (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv: Gegegen sei $a \in \,]0,1]$ und $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_B^n$ mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k B^{-k} < a$. Dazu definieren wir dann $a_{n+1} = \max\{\, z \in \mathbb{Z}_B \mid s_n + zB^{-n-1} < a \,\}$. Im Sonderfall $a = 0$ setzen wir $r(0) = (0,0,0,\dots) \in \mathbb{Z}_B^{\mathbb{N}}$.

Somit ist r rechtsinvers zu q, das bedeutet, es gilt $q \circ r = \mathrm{id}_{[0,1]}$. Diese Konstruktion beweist, dass q surjektiv und r injektiv ist. Die Abbildung q ist zwar surjektiv, aber leider nicht injektiv: Manche Zahlen wie $a = 0.1$ haben zwei Darstellungen!

Es ist nicht ganz so einfach, eine Bijektion $\mathbb{Z}_B^{\mathbb{N}} \cong [0,1]$ zu konstruieren. Immerhin erhalten wir eine Bijektion $(q|_X^Y, r|_Y^X) : X \cong Y$ zwischen den Teilmengen $X = \{1, \dots, B-1\}^{\mathbb{N}} \subsetneq \mathbb{Z}_B^{\mathbb{N}}$ und $Y = q(X) \subsetneq [0,1]$.

Der Satz von Cantor–Bernstein F2N löst das Problem sehr elegant! Der folgende Satz fügt nun alle Vorbereitungen sorgsam zusammen.

Mächtigkeit der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Satz F2R: Mächtigkeit von $\mathbb{R}$

(1) Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar. Genauer konstruieren wir eine Bijektion $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{N})$.

(2) Insbesondere ist die Menge $\mathbb{R}$ gleichmächtig zur Menge $\mathbb{R}^n$ aller n–Tupel für $n \ge 1$ sowie zur Menge $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,\}$ aller Folgen.

Beweis: (1a) Wir haben Bijektionen $f : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \,]-1,+1[\, : x \mapsto x/(1+|x|)$ (D3C) sowie $g : \,]-1,+1[\, \xrightarrow{\sim} \,]0,1[\, : x \mapsto (x+1)/2$. Die Binärentwicklung stiftet die Injektion $r : \,]0,1[\, \hookrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dank Satz F2Q für $B = 2$.

(1b) Umgekehrt haben wir $\{0,1\} \xrightarrow{\sim} \{1,2\}$ und somit $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\sim} \{1,2\}^{\mathbb{N}}$. Satz F2Q für $B = 3$ stiftet eine Injektion $q : \{1,2\}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow \,]0,1] \subset \mathbb{R}$.

Insgesamt haben wir also Injektionen $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \hookrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Dank Cantor–Bernstein F2N erhalten wir eine Bijektion $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

(2) Wir haben Bijektionen $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \{1, \dots, p\} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Aus $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ folgt $\mathbb{R}^p \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\{1,\dots,p\}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. $\boxed{\text{QED}}$

Übung: Führen Sie die letzten Rechnungen aus mit Hilfe von Satz F2J.

Mächtigkeit der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Schon das Ergebnis $\mathbb{N}^2 \cong \mathbb{N}$ ist erstaunlich, daraus abgeleitet $\mathbb{N}^n \cong \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \cong \mathbb{N}$ umso mehr (F2M). Zum Glück verfügen wir über effiziente Werkzeuge und können diese Behauptungen nun beweisen.

Naiv würde man vermuten, dass $\mathbb{N}^n$ „wesentlich mehr“ Punkte hat als $\mathbb{N}$. Das ist jedoch nicht der Fall, jedenfalls soweit es Bijektionen betrifft.

Ebenso möchte man glauben, dass $\mathbb{R}^n$ „wesentlich mehr“ Punkte hat als $\mathbb{R}$. Auch diese Intuition liegt falsch, wir finden Bijektionen $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}$.

Das zeigt, wie sehr unsere naive Anschauung uns hier in die Irre leitet. Es betont auch den Wert präziser Definitionen und sorgsamer Beweise.

Dieses Thema wird Sie in Ihrem Studium immer wieder beschäftigen: Natürlich möchten Sie jedem Raum $\mathbb{R}^n$ seine Dimension „$\dim \mathbb{R}^n = n$“ zusprechen. Allein die Mächtigkeit macht jedoch keinen Unterschied: Alle Räume $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$ stehen paarweise in Bijektion. Die Dimension erhält erst durch zusätzliche Struktur ihren Sinn: bezüglich linearer Abbildungen von $\mathbb{R}$–Vektorräumen, oder Diffeomorphismen, oder Homöomorphismen, … Dazu später mehr im Studium.

Gibt es transzendente Zahlen?

Definition F2S: algebraisch vs transzendent

Eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt **algebraisch**, wenn sie Nullstelle eines rationalen Polynoms $P \in \mathbb{Q}[X]^*$ ist. Andernfalls heißt α **transzendent**.

Beispiele: Jede rationale Zahl $\alpha \in \mathbb{Q}$ ist algebraisch, als Nullstelle des Polynoms $X - \alpha \in \mathbb{Q}[X]^*$. Die reelle Zahl $\alpha = \sqrt{2}$ ist nicht rational (A1F), aber algebraisch, denn α ist Nullstelle von $X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]^*$.

Es ist im Allgemeinen viel schwieriger, Transzendenz nachzuweisen!

Beispiel: Die Eulersche Zahl e ist transzendent. (C. Hermite, 1873)

$$\mathrm{e} = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

Beispiel: Die Kreiszahl π ist transzendent. (F. Lindemann, 1882)

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal ist unmöglich!

Gibt es transzendente Zahlen?

Bereits im 18. Jahrhundert entwickelte sich langsam die Vorstellung von Transzendenz und die Vermutung, dass es transzendente Zahlen gibt, so etwa bei Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) und Leonhard Euler (1707–1783). Euler formulierte zwar keine klare Definition, war aber überzeugt, dass es solche „schwer fassbaren“ Zahlen geben müsse.

Ebenso wie „irrational“ für ‘unvernünftig’ ist auch „transzendent“ für ‘jenseits aller Vernunft’ zunächst ein negativer Begriff des Erstaunens, ja des Erschreckens. Diese Zahlen sind algebraisch nicht zugänglich.

Erste Konstruktionen und Nachweise transzendenter Zahlen gelangen 1844 Joseph Liouville (1809–1882), etwa für die Liouville-Konstante

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0.110001000000000000000001000\dots$$

Georg Cantor bewies 1874 erneut die Existenz transzendenter Zahlen: Wie wir gleich sehen, sind sogar fast alle reellen Zahlen transzendent! Im Gegensatz zu Liouville ist Cantors Beweis jedoch nicht konstruktiv; er hilft nicht, einer fest gegebenen Zahl Transzendenz nachzuweisen.

Gibt es transzendente Zahlen?

Satz F2T: Die algebraischen Zahlen sind abzählbar.

Die Menge $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ der algebraischen Zahlen ist abzählbar, kurz $\mathbb{A} \cong \mathbb{N}$. Somit ist das Komplement $\mathbb{T} = \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{A}$ überabzählbar, genauer $\mathbb{T} \cong \mathbb{R}$.

Beweis: Die Menge der Polynome vom Grad $< n$ ist abzählbar:

$$\mathbb{Q}[X]_{<n} \underset{\text{Def}}{\cong} \mathbb{Q}^n \underset{\text{F2O}}{\cong} \mathbb{N}^n \underset{\text{F2M}}{\cong} \mathbb{N}$$

Also ist auch $\mathbb{Q}[X]$ abzählbar, als abzählbare Vereinigung (F2L):

$$\mathbb{Q}[X] \underset{\text{Def}}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}[X]_{<n}$$

Zu jedem $P \in \mathbb{Q}[X]^*$ ist die Nullstellenmenge in $\mathbb{R}$ endlich (B3A, Übung). Somit ist die Menge $\mathbb{A}$ abzählbar, als abzählbare Vereinigung (F2L):

$$\mathbb{A} \underset{\text{Def}}{=} \bigcup_{P \in \mathbb{Q}[X]^*} \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \;\middle|\; P(\alpha) = 0 \right\}$$

Wir haben also $\mathbb{A} \preccurlyeq \mathbb{N}$. Zusammen mit $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{A}$ folgt $\mathbb{A} \cong \mathbb{N}$ (F2N). $\boxed{\text{QED}}$

Gibt es transzendente Zahlen?

Da $\mathbb{A}$ abzählbar ist, aber $\mathbb{R} = \mathbb{A} \sqcup \mathbb{T}$ überabzählbar, muss $\mathbb{T}$ überabzählbar sein, durch Kontraposition von Satz F2L.
Die genauere Bijektion $\mathbb{T} \cong \mathbb{R}$ führe ich hier nicht aus.

Diese grundlegende Elementezählung hat erstaunliche Konsequenzen:

Wenn Sie zufällig gleichverteilt eine reelle Zahl $\alpha \in [0, 1]$ wählen, dann ist das Ergebnis mit 100% Wahrscheinlichkeit transzendent.

Sobald Sie jedoch eine konkrete Zahl α vorliegen haben, ist es meist extrem schwierig, ihr Transzendenz nachzuweisen.

Das ist Fluch und Segen von elegant-nicht-konstruktiven Beweisen. Ähnliche Situationen kennen wir von Dirichlets Schubfachprinzip E1I oder Zagiers Ein-Satz-Beweis für Fermats Zwei-Quadrate-Satz E3E.

Eine solche reine Existenzaussage ist zwar leider nicht konstruktiv, doch oft ist eine schwache Aussage besser als gar keine Aussage. Sie ist nicht das Ende der Problemlösung, sondern ein guter Anfang.