

## Kapitel D

# Mengen, Abbildungen und Relationen

*This is not to say that the contents of this book are unusually difficult or profound. What is true is that the concepts are very general and very abstract, and that, therefore, they may take some getting used to. [...]*

*The student's task in learning set theory is to steep himself in unfamiliar but essentially shallow generalities till they become so familiar that they can be used with almost no conscious effort.*

Paul Halmos (1916–2006), *Naive set theory*

Vollversion

[eiserm.de/lehre/LinA](http://eiserm.de/lehre/LinA)

05.03.2022

## Inhalt dieses Kapitels D

D002

- 1 Die Sprache der Mengen
  - Elemente, Teilmengen und Potenzmenge
  - Aussonderung und Ersetzungsmenge
  - Schnittmenge und Vereinigungsmenge
  - Zerlegungen und Repräsentantensysteme
  - Tupel und kartesische Produktmenge
- 2 Relationen und Abbildungen
  - Motivation und erste Beispiele
  - Relationen und Abbildungen
  - Bildmenge und Urbildmenge
- 3 Invertierbarkeit von Abbildungen
  - Komposition und Einschränkung
  - Invertierbarkeit von Abbildungen
  - Beispiele und erste Anwendungen

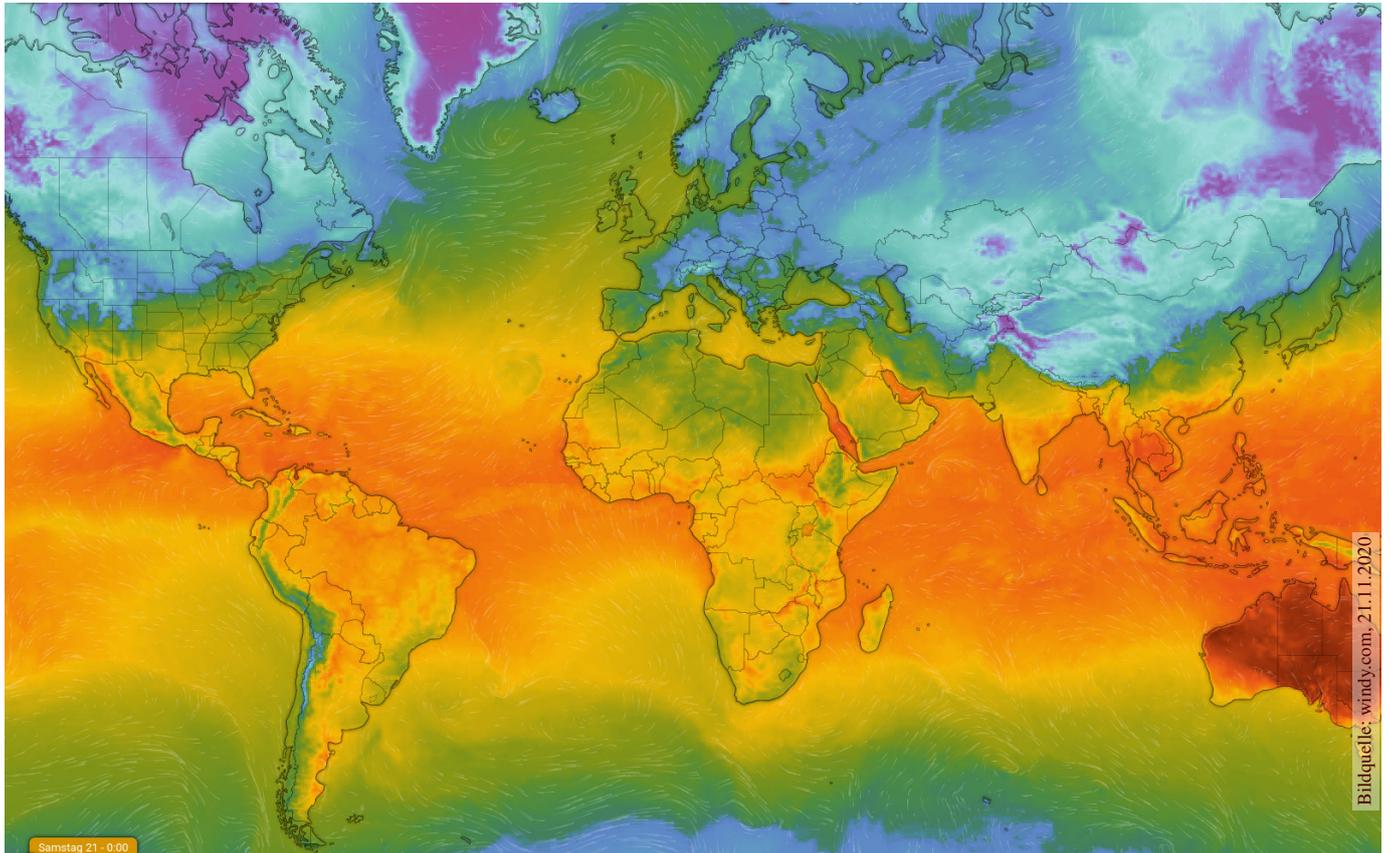
In den ersten beiden Kapiteln ging es vor allem ums Rechnen, zunächst mit Zahlen  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , dann mit Matrizen.

Damit Sie effizient arbeiten können, mussten wir auch theoretische Grundlagen klären. Dazu haben wir erste Sätze formuliert und auch Beweise geführt. Dabei haben Sie deutlich gespürt, dass Sie dringend grundlegende mathematische Werkzeuge benötigen, insbesondere Logik und Beweistechniken sowie Mengen und Abbildungen.

Diese Grundlagen erarbeiten wir uns nun Schritt für Schritt.

Im vorigen Kapitel C haben Sie gelernt, mit Aussagen und Wahrheitswerten zu rechnen, insbesondere Beweise zu führen. In diesem Kapitel D wollen wir nun ebenso gründlich klären, wie Sie mit Mengen effizient arbeiten und rechnen können.

Wir wollen dabei folgende Fragen klären: Was sind Mengen?  
Bescheidener: Nach welchen Regeln verhalten sich Mengen?  
Oder noch konkreter: Nach welchen Regeln nutzen wir Mengen?  
Unser Ziel ist also: *Set theory for the working mathematician.*



Temperatur, Luftdruck, etc.

$$f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$$

Windgeschwindigkeit, etc.

$$g : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto g(x, y)$$

😊 Funktionen begegnen Ihnen alltäglich überall, zum Beispiel bereits in den Wetternachrichten. Diese Daten wollen Sie verstehen und nutzen!

**Beispiel:** Welche Temperatur, Luftdruck und Windgeschwindigkeit herrschen heute um 12 Uhr? „Das hängt davon ab!“, sagen Sie und denken zurecht an eine Funktion: Die fraglichen Daten bestehen nicht nur aus einer Zahl oder einem Vektor, sondern hängen vom Ort  $x$  ab!

Aus Sicht der **Physik** ist das eine zentrale und raffinierte Konstruktion: Die Beschreibung der Wirklichkeit oder gar die Vorhersage erfordert eine extrem präzise Begriffsbildung und auch abstrakte Denkweise. Anders sind erfolgreiche physikalische Anwendungen nicht möglich.

Die Schwierigkeiten beginnen bereits mit konkreten **Messvorschriften**. Was bedeutet Temperatur  $f(x)$  in einem Punkt  $x$ ? Wie messen wir das? Ist dies überhaupt in jedem Punkt eine eindeutige wohldefinierte Größe? Selbst wenn wir praktisch nicht in jedem Punkt nachschauen können?

Aus Sicht der **Informatik** sind Funktionen ebenfalls überaus interessant: Wie speichern, verarbeiten und berechnen wir die relevanten Daten? Auch hier ist unser Beispiel der Wetterdaten erhellend und illustrativ: Es zeigt, wie knifflig selbst einfachste Anwendungsfragen sind.

Es ist ganz sicher unmöglich, *alle* Werte in *allen* Punkten zu speichern: Ein realer, binärer Computer kann nur endlich viele Werte speichern! Damit stellt sich sofort die Frage nach einer geeigneten **Approximation** der gedachten Funktion und einer **Kompression** der gegebenen Daten. Sodann stellt sich die Frage nach der möglichst präzisen **Berechnung**. Das ist bereits für „einfache“ Wetterdaten notorisch schwierig (D240).

Das alles sind wichtige Fragen, überaus praktisch aber auch schwierig. Um diese schwierigen Fragen soll es hier deshalb zunächst nicht gehen. Vereinfachung: Wir beginnen mit den mathematischen Grundlagen. Darauf aufbauend können Sie später komplizierte Modelle untersuchen.

Das obige Wetterbeispiel lässt bereits die Schwierigkeiten erahnen. Der mathematische Begriff einer **Funktion** ist dagegen sehr einfach: Er bietet eine dramatische Idealisierung und hilfreiche Vereinfachung. Es ist wie so oft in der Mathematik: Abstraktion hilft und vereinfacht!

Aus Sicht der **Mathematik** müssen wir zunächst zwei Fragen klären:

- Welche Daten benötigen wir zur Festlegung einer Funktion  $f$ ?
- Praktische Anwendung: Wann sind Funktionen  $f$  und  $g$  gleich?

Damit blenden wir Fragen der Physik (Messung, Ungenauigkeit) oder der Informatik (Speicherung, Verarbeitung, Näherung) vorläufig aus. Das wird später wichtig, ist aber eine klar getrennte Fragestellung. Sie dürfen diese Vereinfachung begrüßen und nutzen lernen!

*Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden*

*— aber nicht noch einfacher.*

Albert Einstein (1879–1955)

Die Mathematik nutzt die Sprache der Mengen, bewusst und erfolgreich. Anschaulich: Eine Menge ist die Zusammenfassung ihrer Elemente.

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots \}$$

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

$$\mathbb{Q} = \{ z/n \mid z, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \}$$

$$\mathbb{R} = \text{„}\mathbb{Q} \text{ und alle Grenzwerte“}$$

$$\mathbb{C} = \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

*Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung  $M$  von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten  $m$  unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von  $M$  genannt werden) zu einem Ganzen.*

Georg Cantor: *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.*

Mathematische Annalen 46 (1895), p. 481

*Eine Menge entsteht durch Zusammenfassung von Einzeldingen zu einem Ganzen. Eine Menge ist eine Vielheit, als Einheit gedacht.*

Felix Hausdorff: *Mengenlehre* (1927), p. 11

Cantor und Hausdorff haben die Grundidee schön formuliert.

Ist damit alles klar? Wohl kaum. Es ist bemerkenswert schwierig zu sagen was eine Menge *ist*, doch viel einfacher, was eine Menge *tut*. Wir werden daher ganz bescheiden klären, wie sich Mengen *verhalten*, also wie wir damit *arbeiten* können. Das soll und muss uns genügen.

😊 Trösten Sie sich mit einer vertrauen, ähnlich traurigen Wahrheit: Man kann nie genau wissen, wer ein Mensch wirklich *ist* oder was in ihm vorgeht, aber Sie können sehr wohl sehen, wie er sich *verhält*.

Für alle pragmatischen Zwecke des sozialen Umgangs genügt das.

Die Mengenlehre wurde vom deutschen Mathematiker Georg Cantor (1845–1918) zwischen 1870 und 1900 begründet, und zwar zunächst, um damit ganz konkrete Probleme der Analysis zu lösen, speziell der Fourier–Reihen. Erst nach und nach entstand aus der Mengenlehre eine eigene Theorie, die von anderen dann ausgebaut wurde.

Diese Entwicklung hält bis heute an.

Die *gesamte* Mathematik gründet, sofern sie formal betrieben wird, auf dem Fundament der Mengenlehre. Daher ist zu erwarten, dass die Mengenlehre ein mächtiges, geschärftes Werkzeug ist. Es ist gut und richtig, sich von Anfang an daran zu gewöhnen!

Einfache Beispiele sind zwar sofort und leicht zu verstehen, doch für die nachhaltigen Bedürfnisse des Mathematikstudiums müssen wir tiefer graben, um ein solides Fundament zu legen. Das kostet wie immer Zeit und Mühe, doch es lohnt sich.

Für AnfängerInnen ist der streng axiomatische Mengenbegriff schwer zugänglich; das gelingt erst in einem zweiten oder dritten Durchgang. Daher wähle ich in diesem Kapitel einen weniger strengen Zugang. Man spricht dann von *naiver Mengenlehre*.

Für Mengen nutzen wir Aussagen der Form  $x \in M$ ,  $A = B$ ,  $A \subseteq B$ ,  $A \supseteq B$ , etc. Die logischen Operatoren  $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \dots$  binden stets schwächer als diese Mengenrelationen  $\in, =, \subseteq, \supseteq, \dots$ . Wir kürzen also  $((x \in A) \wedge (A \subseteq B)) \Rightarrow (x \in B)$  ab durch  $x \in A \wedge A \subseteq B \Rightarrow x \in B$ .

Anschaulich: Eine Menge  $M$  ist die Zusammenfassung ihrer Elemente. Wir erklären nun, ausführlich und schrittweise, wie man damit rechnet.

Ist  $x$  ein **Element** von  $M$ , so sagen wir auch die Menge  $M$  enthält  $x$ , geschrieben  $x \in M$  oder  $M \ni x$ , andernfalls  $x \notin M$  oder  $M \not\ni x$ .

Zwei Mengen  $A$  und  $B$  sind **gleich**,  $A = B$ , falls sie dieselben Elemente enthalten: Für jedes Element  $x$  gilt  $x \in A$  genau dann, wenn  $x \in B$  gilt.

Jede endliche Menge lässt sich **aufzählen** gemäß  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Diese Schreibweise bedeutet:  $x \in M \Leftrightarrow x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots \vee x = a_n$ .

**Beispiel:** Demnach gilt  $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 2, 1\}$ .

Ebenso gilt  $\{\clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit\} = \{\heartsuit, \clubsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \diamondsuit, \diamondsuit, \diamondsuit, \diamondsuit\}$ .

Viele verschiedene Schreibweisen definieren ein und dieselbe Menge!

Hingegen gilt  $\{1, 2, 4\} \neq \{1, 3, 4\}$ , denn  $2 \in \{1, 2, 4\}$ , aber  $2 \notin \{1, 3, 4\}$ .

Die Aussage  $x \in M$  hat den Wahrheitswert  $0 = \text{falsch}$  oder  $1 = \text{wahr}$ .

Die Menge  $M$  zählt also nicht „wie oft“ sie  $x$  enthält, sondern nur „ob“.

Entweder  $x$  gehört zu  $M$  oder nicht, mehr lässt sich dazu nicht sagen.

(Wo immer die Anzahl wichtig ist, benötigen wir ein verfeinertes Modell.)

## Teilmengen

Wir nennen  $A$  eine **Teilmenge** von  $B$ , geschrieben  $A \subseteq B$ , falls jedes Element von  $A$  auch in  $B$  liegt. Das bedeutet  $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$ . Wir schreiben auch  $B \supseteq A$ , die Negation ist  $A \not\subseteq B$  bzw.  $B \not\supseteq A$ .

**Beispiel:** Es gilt  $\{1, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ , aber  $\{1, 2, 3\} \not\subseteq \{1, 3\}$ .

😊 Die Relation  $\subseteq$  erfüllt folgende Regeln für alle Mengen  $A, B, C$ :

Reflexivität, **Refl**( $\subseteq$ ):  $A \subseteq A$ .

Antisymmetrie, **Asym**( $\subseteq$ ): Aus  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$  folgt  $A = B$ .

Transitivität, **Tran**( $\subseteq$ ): Aus  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq C$  folgt  $A \subseteq C$ .

Die leere Menge  $\emptyset = \{\}$  enthält keine Elemente:  $x \in \emptyset \Leftrightarrow x \neq x$ .

Ausführlich heißt das  $M = \emptyset \Leftrightarrow \forall x : x \notin M$  und  $M \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x : x \in M$ .

**Beispiel:** Demnach gilt  $\emptyset \subseteq M$  für jede Menge  $M$ .

Die leere Menge  $\emptyset$  ist die einzige mit dieser Eigenschaft.

**Beweis:** Ist  $E$  eine Menge mit  $E \subseteq M$  für jede Menge  $M$ , so haben wir insbesondere  $E \subseteq \emptyset$  und zudem  $\emptyset \subseteq E$ . Wir schließen daraus  $E = \emptyset$ .

😊 Die leere Menge wird durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt.

## Teilmengen

Die Inklusion  $A \subseteq B$  bedeutet  $x \in A \Rightarrow x \in B$ ; insbesondere gilt  $B \subseteq B$ . Eine **echte** oder **strikte Teilmenge**  $A \subsetneq B$  erfüllt  $A \subseteq B$ , aber  $A \neq B$ .

⚠ In der Literatur existieren hierzu konkurrierende Schreibweisen: Bitte prüfen Sie bei der Lektüre die jeweils verwendete Definition!

	beliebige Teilmenge	strikte Teilmenge
(0)	$A \subseteq B$	$A \subsetneq B$
(1)	$A \subseteq B$	$A \subset B$
(2)	$A \subset B$	$A \subsetneq B$

Die Notation (1) ist wohl die ästhetisch schönste, analog zu  $\leq$  und  $<$ . Leider ist auch (2) weit verbreitet, auch unter Einfluss von Bourbaki, *Théorie des ensembles*. Dieses legendäre Autorenkollektiv hat mit seinen Grundlagen viel Gutes und Klärendes geleistet, hier haben sie meines Erachtens leider nur die zweitbeste Wahl getroffen.

Die Betonung (0) ist nicht so schön wie (1), aber narrensicher.

Wo es keiner Betonung oder Klärung bedarf, verwende ich auch (1).

Ich schreibe zum Beispiel ohne Skrupel  $\{0, 1\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

## Auch Mengen wollen Elemente sein!

Die Zusammenfassung von Objekten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  zu einer Menge  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  liefert ein neues, eigenständiges Objekt  $M$ .

😊 Eine Menge darf selbst Element einer anderen Mengen sein!

Der Mengenbegriff ist *iterativ* und *extrem flexibel*, jede Menge  $b$  kann nicht nur rechts in  $a \in b$  auftreten, sondern auch links in  $b \in c$ .

**Beispiel:** Die Menge  $A = \{\emptyset\}$  ist nicht leer, sie enthält das Element  $\emptyset$ . Die Menge  $B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$  enthält drei Elemente: 1 und 2 und  $\{1, 2\}$ . Wie viele Elemente enthält die Menge  $C = \{1, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 1\}\}$ ?

😊 Eine Menge  $M$  darf sich nicht selbst enthalten: Nie gilt  $M \ni M$ . Insbesondere gibt es keine „Allmenge“ oder „Menge aller Mengen“. Auch  $A = \{B\}$  und  $B = \{A\}$  verbieten wir, dann wäre  $A \ni B \ni A$ . Allgemein verbieten wir unendliche Ketten  $M_0 \ni M_1 \ni M_2 \ni \dots$

**Beispiel:** Die Mengen  $M$  und  $\{M\}$  und  $\{\{M\}\}$  sind verschieden. Wäre nämlich  $M = \{M\}$ , so hätten wir die Kette  $M \ni M \ni M \ni \dots$ . Wäre  $\{M\} = \{\{M\}\}$ , so hätten wir  $M = \{M\}$ , also  $M \ni M \ni M \dots$ . Wäre  $M = \{\{M\}\}$ , so hätten wir  $M \ni \{M\} \ni M \ni \{M\} \ni M \ni \dots$

## Potenzmenge

Alle Teilmengen von  $M$  fassen wir zu ihrer **Potenzmenge** zusammen:

$$\mathfrak{P}(M) = \mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(M) = \{ A \subseteq M \} := \{ A \mid A \subseteq M \}$$

Das bedeutet  $A \in \mathfrak{P}(M) \Leftrightarrow A \subseteq M$ . **Beispiele:**

$$\mathfrak{P}(\{1\}) = \{ \emptyset, \{1\} \}$$

$$\mathfrak{P}(\{1, 2\}) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \}$$

$$\mathfrak{P}(\{1, 2, 3\}) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$$

😊 Wenn  $M$  genau  $n$  Elemente besitzt, dann besitzt  $\mathfrak{P}(M)$  genau  $2^n$ .

**Beweis:** Jede Teilmenge  $A \subseteq M$  entsteht durch  $n$  unabhängige Wahlen: Jedes Element  $x \in M$  liegt entweder in  $A$  oder nicht, und diese Wahlen bestimmen  $A$ . Insgesamt gibt es  $2^n = 2 \cdot 2 \cdots 2$  Möglichkeiten. QED

$$\mathfrak{P}(\emptyset) = \{ \emptyset \}$$

$$\mathfrak{P}(\{\emptyset\}) = \{ \emptyset, \{\emptyset\} \}$$

$$\mathfrak{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{ \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \}$$

## Aussonderung

**Beispiel:** Es gilt  $\{x \in \mathbb{N} \mid \text{unzerlegbar}(x)\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$ .

Vorgelegt sei eine Menge  $M$  und ein Prädikat  $p(x)$  für Elemente  $x \in M$ . Wir können die Elemente  $x \in M$  mit der Eigenschaft  $p(x)$  **aussondern**:

$$A = \{x \in M \mid p(x)\}$$

Das bedeutet  $x \in A \Leftrightarrow x \in M \wedge p(x)$ . Die Teilmenge  $A$  von  $M$  besteht aus allen Elementen  $x \in M$  mit der hier geforderten Eigenschaft  $p(x)$ . Ist die Grundmenge  $M$  im Kontext unmissverständlich klar, so können wir ihre explizite Notation weglassen und schreiben kurz  $\{x \mid p(x)\}$ .

**Beispiel:** Es gilt  $\{x \in \mathbb{Z} \mid (x-3)(x-7) \leq 0\} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ .

„ $\supseteq$ “: Jedes Element  $x \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$  erfüllt  $x \in \mathbb{Z}$  und  $(x-3)(x-7) \leq 0$ .

„ $\subseteq$ “: Aus  $x \in \mathbb{Z}$  und  $(x-3)(x-7) \leq 0$  folgt umgekehrt  $x \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$ .

Warum? Dies sehen Sie an der Parabel dank Fallunterscheidung!

**Beispiel:** Wir definieren zwei Teilmengen der Potenzmenge:

$$\mathfrak{P}'(M) := \{A \in \mathfrak{P}(M) \mid A \neq M\} = \{A \subsetneq M\},$$

$$\mathfrak{P}(M)^* := \{A \in \mathfrak{P}(M) \mid A \neq \emptyset\} = \{A \subseteq M \mid A \neq \emptyset\}.$$

## Beispiel: reelle Intervalle

Für  $a \leq b$  in  $\mathbb{R}$  haben wir die **endlichen Intervalle**  $\emptyset = \{\}$  und

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, & ]a, b[ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\ [a, b[ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, & ]a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}. \end{aligned}$$

Zudem haben wir die **unendlichen Intervalle**  $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$  und

$$\begin{aligned} [a, +\infty[ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, & ]a, +\infty[ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\ ]-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, & ]-\infty, b[ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}. \end{aligned}$$

Sei  $(X, \leq)$  eine geordnete Menge, wir denken an  $(\mathbb{Q}, \leq)$  oder  $(\mathbb{R}, \leq)$ .

Eine Teilmenge  $I \subseteq X$  heißt **Intervall** in  $X$ , wenn für alle  $a < x < b$  in  $X$  mit  $a, b \in I$  auch  $x \in I$  gilt, kurz:  $I$  erfüllt die Zwischenwerteigenschaft.

**Übung:** Die obigen Mengen in  $\mathbb{R}$  sind tatsächlich Intervalle. Warum?

Ist jedes Intervall in  $\mathbb{R}$  von dieser Form? Ja, dank Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ !

Wir nutzen  $a = \inf I$  und  $b = \sup I$  in  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , damit gelingt es.

Rationale Intervalle schreiben wir  $]a, b[_{\mathbb{Q}}$  etc;  $I = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$  ist ein rationales Intervall, lässt sich aber nicht so schreiben mit  $a, b \in \mathbb{Q}$ .

## Beispiel: die Gruppe der invertierbaren Elemente

Sei  $(M, \cdot, 1)$  ein Monoid. Die Menge aller invertierbaren Elemente ist

$$M^\times = (M, \cdot)^\times = (M, \cdot, 1)^\times := \{ a \in M \mid \exists b \in M : a \cdot b = b \cdot a = 1 \}.$$

Wir sondern hier also alle invertierbaren Elemente zur Menge  $M^\times$  aus. Diese Teilmenge von  $M$  bildet eine Gruppe  $(M^\times, \cdot, 1)$ , siehe Satz B1c.

Speziell in jedem Ring  $(R, +, 0, \cdot, 1)$  definieren wir

$$R^* := \{ a \in R \mid a \neq 0 \} \quad \text{und} \quad R^\times := (R, \cdot, 1)^\times.$$

**Beispiele:** Im Ring  $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$  gilt  $\mathbb{Z}_n^\times = \{ a \in \mathbb{Z}_n \mid \text{ggT}(a, n) = 1 \}$ . Genau dann gilt  $\mathbb{Z}_n^\times = \mathbb{Z}_n^*$ , wenn  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  prim ist.

Im Ring  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  gilt  $\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\}$ . Im Körper  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  gilt  $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q}^*$ . Für jeden Ring  $(R, +, 0, \cdot, 1)$  mit  $0 \neq 1$  gilt  $R^\times \subseteq R^*$ , denn  $0 \notin R^\times$ . Genau dann gilt  $R^\times = R^*$ , wenn  $R$  ein Divisionsring ist.

Die allgemeine lineare Gruppe ist  $GL_n(R) := (R^{n \times n}, \cdot, 1_{n \times n})^\times$ . Sie besteht aus der Menge der invertierbaren  $n \times n$ -Matrizen über  $R$ .

## Ersetzungsmenge

**Beispiel:** Es gilt  $\{ x^2 \mid x \in \mathbb{Z} \} = \{ 0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots \}$ . Allgemein:

Vorgelegt sei eine Menge  $M$ . Jedem Element  $x \in M$  werde genau ein Objekt  $y = f(x)$  zugeordnet. Daraus bilden wir die **Ersetzungsmenge**:

$$E = \{ f(x) \mid x \in M \}$$

Das bedeutet  $y \in E \Leftrightarrow \exists x \in M : f(x) = y$ . Die Ersetzungsmenge  $E$  besteht aus allen Elementen  $f(x)$ , wobei  $x$  die Menge  $M$  durchläuft.

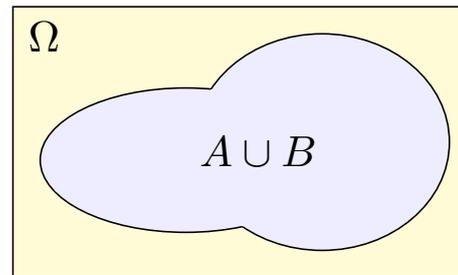
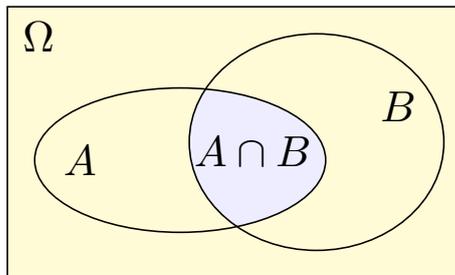
**Beispiel:** Es gilt  $2\mathbb{N} := \{ 2n \mid n \in \mathbb{N} \} = \{ 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots \}$  und ebenso  $2\mathbb{N} + 1 := \{ 2n + 1 \mid n \in \mathbb{N} \} = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots \}$ .

**Beispiel:** Es gilt  $\{ x^2 \mid x \in \mathbb{Q} \} \subsetneq \mathbb{Q}_{\geq 0}$ : „ $\subseteq$ “ aber nicht „ $\supseteq$ “! (Satz A1F) Reell hingegen gilt  $\{ x^2 \mid x \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ : „ $\subseteq$ “ und „ $\supseteq$ “ dank  $\sqrt{\quad}$  (ZWS)

**Aufgabe:** Explizieren Sie die Menge  $E = \{ \mathfrak{P}(A) \mid A \subseteq \{1, 2\} \}$ .

**Lösung:** Die Schreibweise bedeutet  $E = \{ \mathfrak{P}(A) \mid A \in \mathfrak{P}(\{1, 2\}) \}$ .

Wir finden die Menge  $E = \{ \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \}$ .



Die **Schnittmenge** „A und B“ ist

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}.$$

Sie besteht aus den Elementen, die sowohl in A als auch in B liegen.

Die **Vereinigungsmenge** „A oder B“ ist

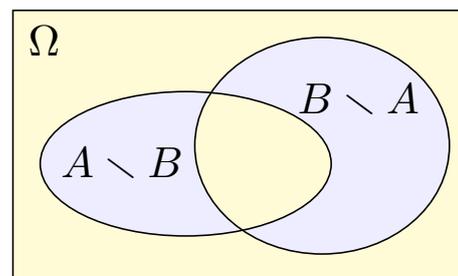
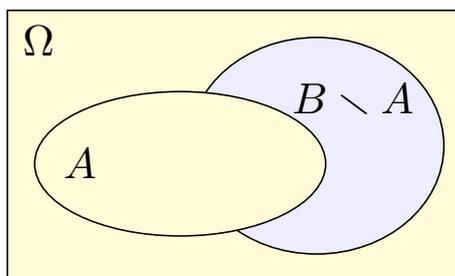
$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}.$$

Sie besteht aus den Elementen, die in A oder B liegen (oder in beiden).

Zwei Mengen A, B heißen **disjunkt** (punktfremd), falls  $A \cap B = \emptyset$  gilt.

In diesem Spezialfall ist die Vereinigung eine **disjunkte Vereinigung**:

$$A \sqcup B := A \cup B \quad \text{mit} \quad A \cap B = \emptyset$$



Die **Restmenge** oder **Differenzmenge** „B ohne A“ ist

$$B \setminus A := \{ x \in B \mid x \notin A \}.$$

Sie besteht aus allen Elementen, die in B liegen, aber nicht in A.

Die **symmetrische Differenz** „entweder A oder B“ ist

$$\begin{aligned} A \Delta B &:= \{ x \mid x \in A \dot{\vee} x \in B \} \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \end{aligned}$$

Sie besteht aus allen Elementen, die entweder in A oder in B liegen, aber nicht in beiden zugleich. Dies entspricht dem exklusiven Oder.

## Satz D1A: Rechenregeln für Mengen

Folgende Rechenregeln gelten für alle  $A, B, C \subseteq \Omega$  und  $\bar{A} = \Omega \setminus A$ .

(0) Neutralität, Absorbtion, Idempotenz, Komplemente:

$$\begin{aligned} A \cup \emptyset &= A, & A \cup \Omega &= \Omega, & A \cup A &= A, & A \cup \bar{A} &= \Omega \\ A \cap \Omega &= A, & A \cap \emptyset &= \emptyset, & A \cap A &= A, & A \cap \bar{A} &= \emptyset \end{aligned}$$

(1) Kommutativität:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

(2) Assoziativität:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(3) Distributivität:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Insbesondere ist  $(\mathfrak{P}(\Omega), \cup, \emptyset, \cap, \Omega)$  demnach ein kommutativer Halbring.

## Rechenregeln für Komplement und Restmenge

## Satz D1A: Rechenregeln für Mengen

Weiterhin seien  $A, B, C \subseteq \Omega$ . Das Komplement von  $A$  in  $\Omega$  ist

$$\bar{A} = \complement A = \complement_{\Omega} A = \Omega \setminus A := \{x \in \Omega \mid x \notin A\}.$$

(4) Es gilt  $\bar{\bar{\Omega}} = \emptyset$  und  $\bar{\emptyset} = \Omega$  sowie  $\bar{\bar{A}} = A$ . Für die Restmenge gilt:

$$B \setminus A = B \cap \bar{A}$$

(5) Für je zwei Mengen  $A, B \subseteq \Omega$  gilt nach De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

(6) Allgemein, für je drei Mengen  $A, B, C$  gilt:

$$\begin{aligned} C \setminus (A \cup B) &= (C \setminus A) \cap (C \setminus B), \\ C \setminus (A \cap B) &= (C \setminus A) \cup (C \setminus B). \end{aligned}$$

😊 Später sagen wir: Die Halbringe  $(\mathfrak{P}(\Omega), \cup, \cap)$  und  $(\mathfrak{P}(\Omega), \cap, \cup)$  sind isomorph durch Komplementbildung  $(\complement, \complement) : (\mathfrak{P}(\Omega), \cup, \cap) \cong (\mathfrak{P}(\Omega), \cap, \cup)$ .

**Aufgabe:** Beweisen Sie diese Regeln (mit Kapitel C).

**Lösung:** Dies folgt aus den entsprechenden Regeln der Logik. Ich führe dies hier in zwei typischen Fällen exemplarisch vor.

$$\begin{aligned}
 (3) \quad x \in A \cap (B \cup C) &\stackrel{\text{Def}}{\iff} x \in A \wedge (x \in B \cup C) \\
 &\stackrel{\text{Def}}{\iff} x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\
 &\stackrel[\text{C135}]{\text{Distr}}{\iff} (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
 &\stackrel{\text{Def}}{\iff} (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \\
 &\stackrel{\text{Def}}{\iff} x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
 \\
 (6) \quad x \in C \setminus (A \cup B) &\stackrel{\text{Def}}{\iff} x \in C \wedge \neg(x \in A \vee x \in B) \\
 &\stackrel[\text{C135}]{\text{DeM}}{\iff} x \in C \wedge (x \notin A \wedge x \notin B) \\
 &\stackrel[\text{C135}]{\dots}{\iff} (x \in C \wedge x \notin A) \wedge (x \in C \wedge x \notin B) \\
 &\stackrel{\text{Def}}{\iff} x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)
 \end{aligned}$$

## Vereinigung und Schnittmenge: endlich und unendlich

Vereinigung und Schnitt einer endlichen Familie von Mengen:

$$\bigcup_{k=1}^n A_k := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \quad \text{und} \quad \bigcap_{k=1}^n A_k := A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

😊 Dank Assoziativität dürfen wir beliebig klammern und dank Kommutativität zudem beliebig umordnen.

Sei  $I \neq \emptyset$  eine Menge und  $(A_i)_{i \in I}$  eine Familie von Mengen  $A_i$  indiziert durch  $i \in I$ , das heißt, jedem Index  $i \in I$  ist eine Menge  $A_i$  zugeordnet.

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{i \in I} A_i &:= \{ x \mid \exists i \in I : x \in A_i \} & \text{und} & \quad \bigcap_{i \in I} A_i := \{ x \mid \forall i \in I : x \in A_i \} \\
 &= \{ x \mid \bigvee_{i \in I} x \in A_i \} & & \quad = \{ x \mid \bigwedge_{i \in I} x \in A_i \}
 \end{aligned}$$

😊 Im Spezialfall  $I = \emptyset$  erhalten wir die leere Vereinigung  $\bigcup_{i \in \emptyset} X_i = \emptyset$ .

☹️ Der leere Durchschnitt  $\bigcap_{i \in \emptyset} X_i$  ist im Allgemeinen nicht definiert. Dies wäre wörtlich interpretiert die Menge *aller* Elemente und logisch problematisch (D107, D127). Arbeiten wir jedoch innerhalb einer festen Grundmenge  $\Omega$ , so können und werden wir  $\bigcap_{i \in \emptyset} X_i = \Omega$  vereinbaren.

## Vereinigung und Schnitt: allgemein über Mengensysteme

**Beispiel:** Wir haben  $\mathbb{R} = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}} [a, a + 1]$  und  $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{<0} \sqcup \{0\} \sqcup \mathbb{R}_{>0}$ .

Die Familie  $(A_i)_{i \in I}$  heißt **disjunkt**, falls  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$  in  $I$ . In diesem Spezialfall ist die Vereinigung eine **disjunkte Vereinigung**:

$$\bigsqcup_{i \in I} A_i := \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{mit} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{für alle } i \neq j$$

Jedes Element der Vereinigung liegt in genau einer der Mengen  $A_i$ .

**Beispiel:** Es gilt  $\mathbb{R} = \bigsqcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$  und  $\mathbb{R} = \bigsqcup_{a \in \mathbb{Z}} [a, a + 1[$  (abrunden).

**Beispiel:** Wir haben  $\bigcup \{ \{1, 2\}, \{1, 3\} \} = \{1, 2\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3\}$  und entsprechend  $\bigcap \{ \{1, 2\}, \{1, 3\} \} = \{1, 2\} \cap \{1, 3\} = \{1\}$ .

Ist  $U \neq \emptyset$  eine Menge von Mengen, so definieren wir:

$$\bigcup U = \bigcup_{A \in U} A := \{ x \mid \exists A \in U : x \in A \}$$

$$\bigcap U = \bigcap_{A \in U} A := \{ x \mid \forall A \in U : x \in A \}$$

**Beispiel:** Für jede Menge  $M$  gilt  $\bigcup \mathfrak{P}(M) = M$  und  $\bigcap \mathfrak{P}(M) = \emptyset$ .

😊 Im Sonderfall  $U = \emptyset$  gilt  $\bigcup \emptyset = \emptyset$ , 😞 aber  $\bigcap \emptyset$  ist nicht definiert. Dies wäre die Menge *aller* Elemente und problematisch (D107, D127).

## Vereinigung und Schnitt: allgemein über Mengensysteme

Wir haben also drei Operationen in aufsteigender Allgemeinheit:

- paarweise Schnitte und Vereinigungen
- endliche Schnitte und Vereinigungen
- beliebige Schnitte und Vereinigungen

Letztere formulieren wir schließlich besonders bequem, wie oben, als Schnitt  $\bigcap U$  und Vereinigung  $\bigcup U$  eines Mengensystems  $U$ .

Das ist schwindelerregend allgemein. Zum Glück haben Sie präzise Definitionen und erhellende Beispiele, daran können Sie sich halten.

**Beispiel:** Die Menge  $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$  ist eine Überdeckung von  $\{1, 2, 3\}$ .  
Zur Menge  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  ist  $Z = \{\{1, 4\}, \{2, 3, 6, 7\}, \{5\}\}$  eine Überdeckung durch disjunkte nicht-leere Teilmengen: eine Zerlegung.

Eine **Überdeckung** von  $M$  ist eine Menge  $U \subseteq \mathfrak{P}(M)$  mit  $\bigcup U = M$ :

$$\forall x \in M \exists A \in U : x \in A$$

Wir nennen  $U$  **disjunkt**, falls gilt  $\forall A, B \in U : A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ .  
Dann ist die Vereinigung eine **disjunkte Vereinigung**  $M = \bigsqcup U$ :

$$\forall x \in M \exists! A \in U : x \in A$$

Eine **Zerlegung**  $M = \bigsqcup Z$  ist eine disjunkte Überdeckung  $Z \subseteq \mathfrak{P}(M)^*$ :

$$\bigcup Z = M \wedge \forall A, B \in Z : A = B \vee A \cap B = \emptyset$$

In Worten:  $Z$  ist ein System von Teilmengen von  $M$ , alle Mengen in  $Z$  sind nicht-leer und paarweise disjunkt, und ihre Vereinigung ist  $M$ .

**Beispiel:** Es gilt  $\mathbb{R} = \bigsqcup \{ \{x\} \mid x \in \mathbb{R} \}$  und  $\mathbb{R} = \bigsqcup \{ [a, a+1[ \mid a \in \mathbb{Z} \}$ .

Überdeckungen und Zerlegungen spielen in vielen Bereichen der Mathematik eine wichtige Rolle, in immer neuen Variationen, hier begegnen Sie uns zunächst als Grundbegriffe der Mengenlehre. Nützliche Konzepte verdienen einen guten Namen.

Leider bedeutet das auch, dass Sie am Anfang Ihres Studiums mit vielen neuen Begriffen konfrontiert werden. Diese müssen Sie lernen wie Vokabeln im Sprachunterricht, ohne geht es nicht. Jeder einzelne Fall ist nicht schwer, aber insgesamt erfordert es viel Disziplin.

Hier helfen einfache und illustrative Beispiele,  
... und anschließend gute Übungen!

**Beispiel:** Zu  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  und  $Z = \{\{1, 4\}, \{2, 3, 6, 7\}, \{5\}\}$  ist  $R = \{4, 3, 5\}$  eine Auswahl, ebenso  $\{1, 6, 5\}$  oder  $\{1, 2, 5\}$  etc. Es gibt hier  $2 \cdot 4 \cdot 1 = 8$  mögliche Auswahlen. Allgemein:

Sei  $M = \bigsqcup Z$  eine Zerlegung. Eine Teilmenge  $R \subseteq M$  heißt **Auswahlmenge** oder **Repräsentantensystem** zu  $Z$ , falls gilt:

$$\forall A \in Z \exists! x \in R : x \in A$$

Das bedeutet: Die Repräsentantenmenge  $R$  wählt aus jeder Menge  $A \in Z$  der vorgegebenen Zerlegung  $Z$  genau ein Element  $a \in A$ .

**Beispiel:** Die Menge  $M = \bigsqcup \{A_1, \dots, A_n\}$  der SchülerInnen teilt sich in Klassen auf und  $R = \{a_1, \dots, a_n\}$  enthält die KlassensprecherInnen.

Einige mathematische Konstruktionen nutzen das **Auswahlaxiom (AC)**: **Zu jeder Zerlegung  $M = \bigsqcup Z$  existiert eine Auswahlmenge  $R \subseteq M$ .** Eine solche Auswahl ist überaus nützlich, doch leider nicht eindeutig!

**Beispiel:** In  $(\mathbb{N}, \leq)$  hat jede nicht-leere Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{N}$  ein kleinstes Element; wir können daher  $a = \min A$  als Repräsentanten wählen.

All unsere bisherigen Konstruktionen sind konkret, präzise, eindeutig: Aus gegebenen Mengen konstruieren wir eine wohldefinierte neue Menge, etwa die Potenzmenge  $M \mapsto \mathfrak{P}(M)$  oder die Aussonderung  $(M, p) \mapsto \{x \in M \mid p(x)\}$  oder die Ersetzung  $(M, f) \mapsto \{f(x) \mid x \in M\}$ , ebenso Schnitt  $(A, B) \mapsto A \cap B$  und Vereinigung  $(A, B) \mapsto A \cup B$  etc.

☹ Bei der Auswahl eines Repräsentantensystems ist dies anders!

Im Allgemeinen gibt es viele mögliche Auswahlen, und keine ist schöner als die andere. Wir müssen daher „irgendwie“ und „willkürlich“ wählen. Das unterscheidet das Auswahlaxiom von den vorigen Konstruktionen.

**Beispiel:** Für jede *endliche* Zerlegung  $Z = \{A_1, \dots, A_n\}$  ist das Auswahlaxiom weitgehend unproblematisch: Wir wählen willkürlich Repräsentanten  $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$ . Bei *unendlichen* Zerlegungen ist dies kritisch: Nach welchem Muster soll unsere Willkür verfahren?

Wo dies möglich und sinnvoll ist, versuche ich konstruktiv vorzugehen. Das macht die Wahl eindeutig, weniger willkürlich, gar kanonisch.

Ausgehend von der leeren Menge  $\emptyset$  können wir weitere Mengen bilden, etwa  $\{\emptyset\}$  und  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ . Zur Fortsetzung betrachten wir die Zuordnung

$$s : n \mapsto n' = n \cup \{n\}.$$

Daraus erhalten wir John von Neumanns Modell der natürlichen Zahlen:

$$\left. \begin{array}{l} 0 := \emptyset \\ 1 := \{0\} \\ 2 := \{0, 1\} \\ 3 := \{0, 1, 2\} \\ 4 := \{0, 1, 2, 3\} \\ 5 := \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ \dots \end{array} \right\} =: \omega$$

Hier ist jede natürliche Zahl  $n$  die Menge all ihrer Vorgängerinnen. So können wir die natürlichen Zahlen als Mengen implementieren.

😊 Dieses Modell  $(\omega, \emptyset, s)$  erfüllt die Dedekind–Peano–Axiome (A109).

Die Gesamtmenge  $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  definieren wir wie folgt:

- Die Menge  $\omega$  ist **induktiv**: Es gilt  $\emptyset \in \omega$  und  $\forall n \in \omega : s(n) \in \omega$ .
- Ist  $M$  eine beliebige induktive Menge, so gilt  $\omega \subseteq M$ .

Beides zusammengefasst:  $\omega$  ist die kleinste induktive Menge.

**Aufgabe:** (1) Für alle  $n \in \omega$  gilt  $\bigcup s(n) = n$ .

(2) Für je zwei Elemente  $m \neq n$  in  $\omega$  gilt  $s(m) \neq s(n)$ .

(3) Das Tripel  $(\omega, \emptyset, s)$  erfüllt die Dedekind–Peano–Axiome.

**Lösung:** (1) Wir betrachten  $M = \{n \in \omega \mid \bigcup s(n) = n\}$ .

Es gilt  $\emptyset \in M$ , denn für  $n = \emptyset$  finden wir  $\bigcup s(\emptyset) = \bigcup \{\emptyset\} = \emptyset$ .

Gilt  $n \in M$ , also  $\bigcup s(n) = n$ , so folgt  $s(n) \in M$ , denn:

$$\begin{aligned} \bigcup s(s(n)) &= \bigcup [s(n) \cup \{s(n)\}] = [\bigcup s(n)] \cup s(n) \\ &= n \cup (n \cup \{n\}) = n \cup \{n\} = s(n) \end{aligned}$$

(2) Kontraposition: Gilt  $s(m) = s(n)$  so folgt  $m = \bigcup s(m) = \bigcup s(n) = n$ .

(3) Dies fasst die bisherigen Rechnungen zu  $(\omega, \emptyset, s)$  zusammen.

So können wir die natürlichen Zahlen als Mengen implementieren.

## Die Russelsche Antinomie

**Das Barbier-Paradoxon:** Im Dorf rasiert der Barbier genau die Männer, die sich nicht selbst rasieren. Frage: Rasiert der Barbier sich selbst?

Bertrand Russel (1872–1970, Literaturnobelpreis 1950) veröffentlichte 1903 folgendes Paradoxon der naiven Mengenlehre: Wir untersuchen

$$\mathcal{R} = \{ x \mid x \notin x \}.$$

Das heißt,  $\mathcal{R}$  enthält alle Mengen  $x$ , die sich nicht selbst enthalten. Ist dieses Objekt  $\mathcal{R}$  selbst eine Menge? Gilt dann  $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$  oder  $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ ? Gilt  $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ , so folgt  $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ . Gilt  $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ , so folgt  $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ . Katastrophe!

😊 Einzig möglicher Ausweg: Dieses Objekt  $\mathcal{R}$  ist keine Menge! Nicht alles, was wir naiv hinschreiben können, ist tatsächlich sinnvoll.

**Beispiel:** Gibt es eine Menge  $\mathcal{A}$  aller Mengen? Nein, denn dann wäre  $\mathcal{R} = \{ x \in \mathcal{A} \mid x \notin x \} \subseteq \mathcal{A}$  durch Aussonderung ebenfalls eine Menge.

- ⚠ Wir müssen die Konstruktion von Mengen reglementieren!
- So restriktiv wie nötig, um Paradoxien wie die obige zu vermeiden.
  - So expressiv wie möglich, um alles zu formulieren, was wir brauchen.

## Lösung der Antinomie durch Zermelo–Fraenkel

*This is not to say that the contents of this book are unusually difficult or profound. What is true is that the concepts are very general and very abstract, and that, therefore, they may take some getting used to. [...]*

Paul Halmos (1916–2006), *Naive set theory*

Wir kennen nun für Mengen alle Operationen, die wir je benötigen. Daher halten wir Rückschau und fassen das Wesentliche zusammen.

Die folgende Zusammenfassung und Präzisierung geht zurück auf Ernst Zermelo (1871–1953) und Abraham Fraenkel (1891–1965).

Wir einigen uns auf eine Handvoll grundlegender Konstruktionen: Diese und nur diese wollen wir im Folgenden verwenden!

Die Erfahrung zeigt, dass diese Wahl gut ist: Sie vermeidet Paradoxien! Es ist nicht die einzig mögliche Wahl, aber eine allgemeine Grundlage.

😊 Kurz gesagt: Die Zermelo–Fraenkel–Axiome (kurz ZF–Axiome) sind die **Rechenregeln für Mengen**, kurz und gut, präzise und bequem.

Um Widersprüche und Paradoxien wie die Russellsche Antinomie D127 zu vermeiden, müssen wir die Konstruktion von Mengen reglementieren. Die folgenden Axiome von Zermelo und Fraenkel leisten genau dies. Sie extrahieren eine Handvoll von Konstruktionen, die im Folgenden für den Aufbau der gesamten (klassischen) Mathematik genügen.

Wir betrachten hierzu ein Universum  $\Omega$  aller Mengen. Hier ist  $\Omega$  selbst keine Menge, siehe D107 und D127, sondern benennt nur den Rahmen, in dem wir uns bewegen. Im Folgenden ist  $\Omega$  unser Diskursuniversum, darauf beziehen sich uneingeschränkte Quantoren wie  $\forall x$  und  $\exists x$ .

Alle Objekte von  $\Omega$  sind Mengen. Für diese haben wir die Relation „ $\in$ “, die wir als Elementrelation interpretieren: Zu je zwei Mengen  $A, B$  gilt entweder  $A \in B$  oder nicht, genau das nutzen wir, und mehr nicht. Aus diesen primitiven Daten  $(\Omega, \in)$  allein leiten wir alles Weitere ab, etwa die Teilmengenrelation  $A \subseteq B$  durch  $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$ .

Die ZF–Axiome erklären alle grundlegenden Rechenregeln für Mengen; zusammen mit dem Auswahlaxiom D123 erhalten wir ZFC (für *choice*).

### 0 Extensionalität:

Zwei Mengen  $A$  und  $B$  sind gleich, falls  $A \subseteq B$  und  $A \supseteq B$  gilt.

### 1 Fundierung:

Mengen erlauben keine unendlichen Ketten  $M_0 \ni M_1 \ni M_2 \ni \dots$

### 2 Leere Menge:

Es existiert eine Menge  $\emptyset$  ohne Elemente, also  $x \in \emptyset \Leftrightarrow x \neq x$ .

### 3 Potenzmenge:

Zu jeder Menge  $M$  existiert  $\mathfrak{P}(M)$ , also  $A \in \mathfrak{P}(M) \Leftrightarrow A \subseteq M$ .

### 4 Vereinigung:

Zu jeder Menge  $M$  existiert  $\bigcup M$ , also  $x \in \bigcup M \Leftrightarrow \exists A \in M : x \in A$ .

### 5 Aussonderung:

Zu jeder Menge  $M$  und jedem Prädikat  $p$  existiert  $\{x \in M \mid p(x)\}$ .

### 6 Ersetzung:

Zu jeder Menge  $M$  und jeder Zuordnung  $f$  existiert  $\{f(x) \mid x \in M\}$ .

### 7 Unendlichkeit:

Es existiert eine Menge  $\omega$  mit  $\emptyset \in \omega$  und  $(n \in \omega) \Rightarrow (n \cup \{n\} \in \omega)$ .

Axiome (0) und (1) klären zunächst die Beschaffenheit von Mengen: Vergleich und Fundierung. Die Fundierung lässt sich so formulieren: Ist  $M \neq \emptyset$  eine nicht-leere Menge, so existiert  $A \in M$  mit  $M \cap A = \emptyset$ . Das verhindert unendliche Ketten  $M_0 \ni M_1 \ni M_2 \ni \dots$ , andernfalls enthielte  $M = \{M_0, M_1, M_2, \dots\}$  kein Element  $A \in M$  mit  $M \cap A = \emptyset$ .

Axiom (2) stellt sicher, dass überhaupt irgendeine Menge in  $\Omega$  existiert. Dieses Axiom wird redundant mit (7) und (5), denn  $\emptyset = \{x \in \omega \mid x \neq x\}$ .

Mit dem Potenzmengenaxiom (3) generieren wir nun weitere Mengen, etwa  $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$  und  $\mathfrak{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ , zusammen mit Aussonderung (5) und Ersetzung (6). Zu  $A$  erhalten wir  $\{A\}$  durch Ersetzung aus  $\{\emptyset\}$ . Zu  $A, B$  erhalten wir  $\{A, B\}$  durch Ersetzung aus  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ .

Wir fordern die allgemeine Vereinigung als Axiom (4). Die Bildung von Schnittmengen folgt aus der Aussonderung (5): Ist  $M \neq \emptyset$  eine Menge, so sei  $G \in M$  und wir erhalten  $\bigcap M = \{x \in G \mid \forall A \in M : x \in A\}$ .

Soweit konstruieren wir mit (2–6) allein nur endliche Mengen. Axiom (7) garantiert, dass es in  $\Omega$  auch unendliche Mengen gibt.

Zur Aussonderung  $\{x \in M \mid p(x)\}$  ist  $p(x)$  ein Prädikat für Elemente  $x \in M$ , also eine Formel in der Sprache der Mengen und Aussagenlogik. Im Beispiel  $B \setminus A = \{x \in B \mid x \notin A\}$  ist  $p$  das Prädikat  $p(x) = (x \notin A)$ .

Zur Ersetzung  $\{f(x) \mid x \in M\}$  ist  $F(x, y)$  ein zweistelliges Prädikat, sodass zu jedem Element  $x \in M$  genau eine Menge  $y$  existiert, für die  $F(x, y)$  wahr ist. Diese eindeutige Menge  $y$  schreiben wir  $y = f(x)$ . Im Beispiel  $\{\mathfrak{P}(x) \mid x \in M\}$  ist  $F(x, y) = (\forall z : z \subseteq x \Leftrightarrow z \in y)$ .

Das Aussonderungsaxiom (5) ist redundant, es folgt aus Vereinigung (4) und Ersetzung (6): Zu  $M$  und  $p$  wollen wir  $\{x \in M \mid p(x)\}$  konstruieren. Hierzu definieren wir  $F(x, y) = (p(x) \wedge y = \{x\}) \vee (\neg p(x) \wedge y = \emptyset)$ , also  $f(x) = \{x\}$ , falls  $p(x)$  wahr ist, und  $f(x) = \emptyset$ , falls  $p(x)$  falsch ist. Damit erhalten wir  $\{x \in M \mid p(x)\} = \bigcup \{f(x) \mid x \in M\}$  wie ersehnt.

😊 Wir benötigen für ZF neben den Axiomen (0,1) zum Aufbau ganz sparsam nur die vier Konstruktionen (3,4,6,7). Für ZFC nehmen wir das Auswahlaxiom AC hinzu. Eine Handvoll von Konstruktionen genügt uns! Das ist bemerkenswert kurz und effizient, bequem und flexibel.

## Paare und kartesische Produktmenge

Aus Elementen  $x \in X$  und  $y \in Y$  bilden wir das geordnete **Paar**  $(x, y)$ . Die Gleichheit  $(x, y) = (x', y')$  soll äquivalent sein zu  $(x = x') \wedge (y = y')$ . Das ist die charakteristische Eigenschaft, die wir von Paaren verlangen.

☹ Die Paarmenge  $\{x, y\}$  ist dazu ungeeignet, denn  $\{x, y\} = \{y, x\}$ .

😊 Es gelingt jedoch mit Kuratowskis Kniff  $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ .

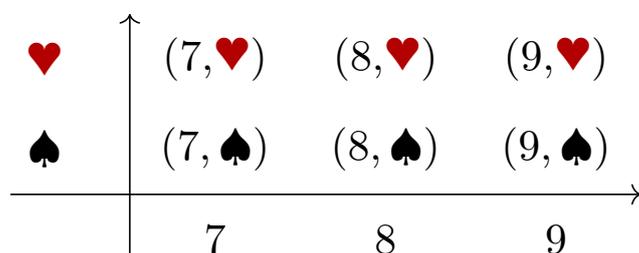
Hieraus lassen sich  $\text{pr}_1(x, y) = x$  und  $\text{pr}_2(x, y) = y$  extrahieren.

Das kartesische **Produkt** von  $X$  und  $Y$  ist die Menge aller Paare:

$$X \times Y := \{ (x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y \}$$

**Beispiel:**  $\{7, 8, 9\} \times \{\spadesuit, \heartsuit\} = \{(7, \spadesuit), (7, \heartsuit), (8, \spadesuit), (8, \heartsuit), (9, \spadesuit), (9, \heartsuit)\}$ .

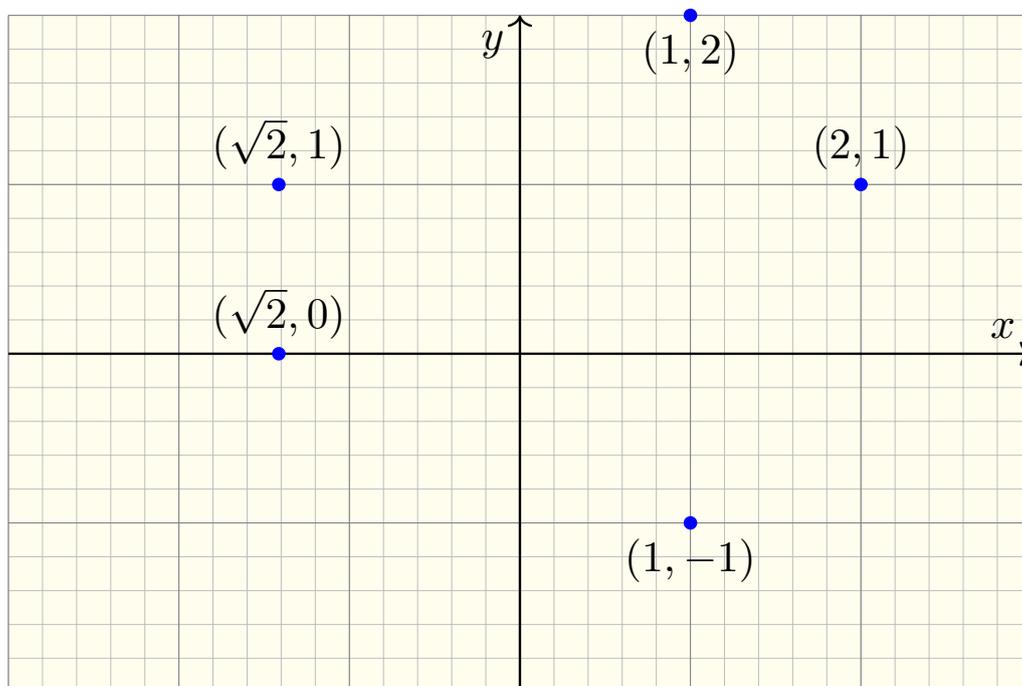
Graphisch:



Ist  $X$  eine endliche Menge mit  $n$  Elementen, so schreiben wir  $\#X = n$ .

Es gilt  $\#(X \cup Y) = \#X + \#Y - \#(X \cap Y)$  und  $\#(X \times Y) = (\#X) \cdot (\#Y)$ .

## Paare und kartesische Produktmenge



**Beispiel:** Aus der Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen erhalten wir das Produkt

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}.$$

Wir visualisieren  $\mathbb{R}$  als Gerade und  $\mathbb{R}^2$  als Ebene; dies sind die **kartesischen Koordinaten** nach René Descartes (1596–1650).

Aus den Elementen  $x, y$  bilden wir das geordnete **Paar**

$$p = (x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Hieraus lassen sich  $\text{pr}_1(x, y) = x$  und  $\text{pr}_2(x, y) = y$  extrahieren:

$$\text{Pr}_1(p, x) = [\bigcap p = \{x\}]$$

Zu  $p$  existiert genau ein  $x$  mit  $\text{Pr}_1(p, x)$ ; dies schreiben wir  $\text{pr}_1(p) := x$  und nennen dies die **erste Koordinate** oder den ersten Eintrag von  $p$ . Auch die **zweite Koordinate**  $y$  erhalten wir aus  $p = \{\{x\}, \{x, y\}\}$  dank

$$\text{Pr}_2(p, y) = [\bigcup p = \{y\} \cup \bigcap p].$$

Zu  $p$  existiert genau ein  $y$  mit  $\text{Pr}_2(p, y)$ ; dies schreiben wir  $\text{pr}_2(p) := y$ .

😊 Mit diesem einfachen Kniff können wir also jedes Paar  $(x, y)$  als eine geeignete Menge implementieren. Die Konstruktionen von Mengen à la Zermelo–Fraenkel sind bemerkenswert effizient, bequem und flexibel. Sie liefern alles, was wir für die Mathematik benötigen werden.

Die **Produktmenge**  $P = X \times Y$  wird charakterisiert durch

$$p \in P \Leftrightarrow \exists x \in X \exists y \in Y : p = (x, y).$$

Somit ist  $P$  die Menge aller Paare  $(x, y)$  mit  $x \in X$  und  $y \in Y$ . Wir schreiben dies kurz und bequem so wie oben eingeführt:

$$X \times Y := \{ (x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y \}$$

Können wir diese Menge allein mit den ZF–Axiomen konstruieren? Zunächst stellen wir fest: Für alle Elemente  $x \in X$  und  $y \in Y$  gilt

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \mathfrak{P}(X \cup Y).$$

denn  $\{x\} \subseteq X \subseteq X \cup Y$  und  $\{x, y\} \subseteq X \cup Y$ . Demnach erhalten wir

$$X \times Y := \{ p \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y)) \mid \exists x \in X \exists y \in Y : p = (x, y) \}$$

😊 Hierzu nutzen wir die Vereinigung (4), zweimal die Potenz (3) und dann die Aussonderung (5). Die ZF–Axiome reglementieren zwar streng, doch glücklicherweise gelangen uns alle gewünschten Konstruktionen!

## Paare, Tripel und $n$ -Tupel

Aus  $x \in X$  und  $y \in Y$  und  $z \in Z$  bilden wir das **Tripel**  $(x, y, z)$ .

Als charakterisierende Eigenschaft verlangen wir lediglich:

$$(x, y, z) = (x', y', z') \iff (x = x') \wedge (y = y') \wedge (z = z')$$

Eine erste mögliche Implementierung ist  $(x, y, z) := ((x, y), z)$ .

Die Rechtsklammerung  $(x, (y, z))$  wäre eine andere Möglichkeit.

Wir lernen später noch weitere Möglichkeiten kennen und nutzen.

Das kartesische **Produkt** der Mengen  $X, Y, Z$  ist die Menge aller Tripel:

$$X \times Y \times Z := \{ (x, y, z) \mid x \in X \wedge y \in Y \wedge z \in Z \}$$

**Beispiel:** Aus  $\mathbb{R}$  erhalten wir so

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \}.$$

😊 Die Konstruktionen von Mengen à la Zermelo–Fraenkel sind flexibel und effizient. Sie liefern alles, was wir für die Mathematik benötigen.

## Paare, Tripel und $n$ -Tupel

Ebenso definieren wir für  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$  das  **$n$ -Tupel**:

$$(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n) \iff (x_1 = x'_1) \wedge \dots \wedge (x_n = x'_n)$$

Eine mögliche Implementierung ist  $(x_1, x_2, \dots, x_n) := ((x_1, x_2), \dots, x_n)$ .

Jede beliebige andere Klammerung wäre ebenso eine Möglichkeit.

Wir lernen später noch weitere Möglichkeiten kennen und nutzen.

Das kartesische **Produkt** der Mengen  $X_1, \dots, X_n$  ist dann:

$$X_1 \times \dots \times X_n := \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1 \wedge \dots \wedge x_n \in X_n \}$$

**Beispiel:** Aus  $\mathbb{R}$  erhalten wir  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  (mit  $n$  Faktoren):

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$$

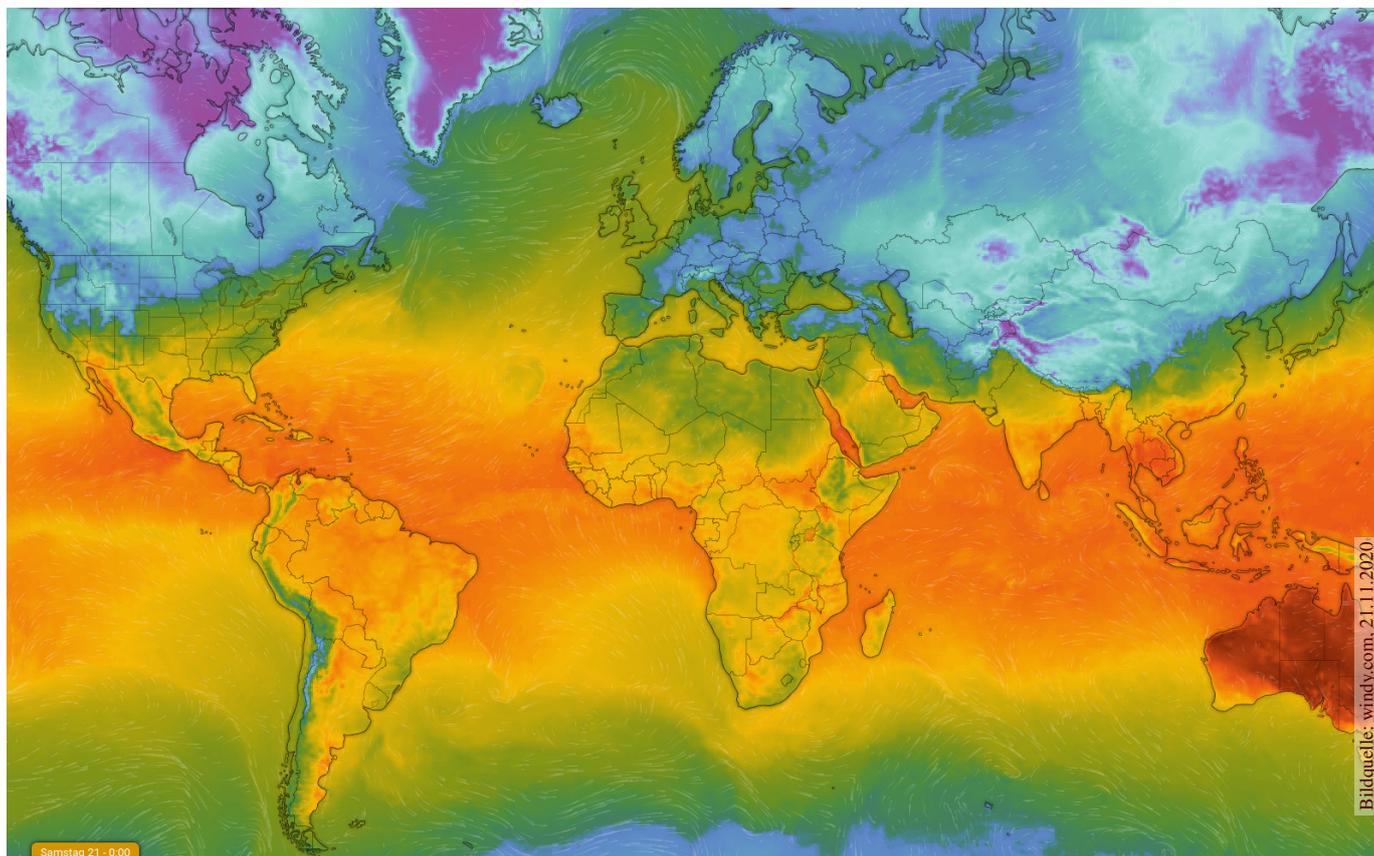
Auf dem Campus höre ich manchmal: „Der Raum  $\mathbb{R}^4$  existiert gar nicht!“

Tatsächlich können wir uns dieses Objekt schwer räumlich vorstellen.

Ob er in der „physikalischen Realität“ existiert, ist schwer zu sagen, als Modell ist er jedenfalls sehr erfolgreich in der Relativitätstheorie.

Mathematisch existiert er garantiert: Wir haben ihn gerade konstruiert!

Das genügt, um damit zu arbeiten, also in Koordinaten zu rechnen.



Temperatur, Luftdruck, etc.

$$f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$$

Windgeschwindigkeit, etc.

$$g : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto g(x, y)$$

Damit kommen wir unserem Ziel einen wichtigen ersten Schritt näher: Wir benötigen und konstruieren geeignete mathematische Werkzeuge zur Beschreibung, Untersuchung und Lösung von realen Problemen. Die Sprache der Mengen ist hierfür eine universelle Grundlage.

Die Mengenlehre ist abstrakt, zugegeben. Das ist gut und richtig so, denn sie soll ja gerade eine *allgemeine* gesicherte Grundlage bilden! Die Sprache der Mengen ist kein „abstrakter Unsinn“, sondern Sinn! Wir werden alles weitere auf diesem Fundament aufbauen können.

Hierzu sind insbesondere Funktionen ein allgegenwärtiges Werkzeug. Wir können jetzt bereits Teilmengen  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  der Ebene betrachten. Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ordnet jedem Punkt  $(x, y) \in U$  eine reelle Zahl  $f(x, y) \in \mathbb{R}$  zu. Dieses Konzept untersuchen wir als nächstes.

## Funktionen: Anschauung und Motivation

**Funktionen** sind ein zentraler Grundbegriff der Mathematik!

$$\begin{aligned} \text{sq} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x^2 \\ \text{sqrt} &: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto \sqrt{x} \\ \text{sqrt} \circ \text{sq} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto \sqrt{x^2} \\ \text{abs} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x \leq 0. \end{cases} \\ h &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x| \end{aligned}$$

Eine Funktion  $f: X \rightarrow Y$  bildet die Startmenge  $X$  in die Zielmenge  $Y$  ab: Jedem Element  $x \in X$  ordnet  $f$  ein eindeutiges Bildelement  $y \in Y$  zu; dies schreiben wir  $y = f(x)$  oder  $x \mapsto y = f(x)$ . Zusammengefasst:

$$f : X \rightarrow Y : x \mapsto y = f(x)$$

Die **Gleichheit** von zwei Funktionen  $f: X \rightarrow Y$  und  $f': X' \rightarrow Y'$  ist definiert durch  $X = X'$  und  $Y = Y'$  sowie  $f(x) = f'(x)$  für alle  $x \in X$ .

**Aufgabe:** Welche obigen Funktionen sind gleich? Nur  $\text{sqrt} \circ \text{sq} = \text{abs}$ .

## Funktionen: Anschauung und Motivation

Jede Funktion  $f: X \rightarrow Y$  besteht demnach aus drei Daten  $(X, F, Y)$ : der **Startmenge**  $X$ , der **Zielmenge**  $Y$  und dem **Funktionsgraphen**

$$F = \{ (x, y) \in X \times Y \mid y = f(x) \} \subseteq X \times Y.$$

😊 Die Menge  $F$  codiert demnach die **vollständige Wertetabelle**:

$f: \{0, 1, \dots, 10\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit folgender Zuordnung

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y$	0	1	4	8	13	27	34	29	60	83	95

$$F = \{ (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 8), (4, 13), \dots, (10, 95) \}$$

😊 Genau so wurden früher und werden auch heute noch Funktionen tabelliert, zum Beispiel Logarithmentafeln. Mit Computerhilfe geht es heutzutage noch bequemer, aber letztlich leistet er genau dasselbe.

😊 Alle modernen Programmiersprachen bieten dies als Datentyp. Dank der Sprache der Mengen können wir dies genauso problemlos nun für alle Mengen  $X, Y$  formulieren, egal ob endlich oder unendlich.

Eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  ordnet jedem Element  $x \in X$  eindeutig ein Element  $y \in Y$  zu; hierfür schreiben wir kurz  $y = f(x)$ . Dies nennt man die **Präfix-Notation**: Das Funktionssymbol steht *vor* dem Argument. Die **Postfix-Notation**  $y = (x)f$  ist seltener, kommt aber durchaus vor, etwa bei Transposition  $A \mapsto A^\top$  oder Fakultät  $n \mapsto n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ .

In den obigen Beispielen sehen Sie bereits, dass Funktionsvorschriften, Formeln und Algorithmen einerseits sehr nützlich und praktisch sind, andererseits aber nicht das Wesen einer Funktion ausmachen.

Für jede Funktion  $f : X \rightarrow Y$  zählen nur drei Daten: die Startmenge  $X$ , die Zielmenge  $Y$  und der Graph  $F \subseteq X \times Y$  (Wertetabelle, Zuordnung). Wir kehren die Sichtweise um und erheben diese Daten zur Definition!

Das ist ein sehr kühner doch konsequenter Schritt der Abstraktion. Ganz allgemein folgt dies einem mathematischen Grundprinzip:  
*Finde, was wirklich wichtig ist, und mache es zur Definition!*

### Definition D2A: Abbildung / Funktion / Zuordnung

Eine **Abbildung / Funktion / Zuordnung**  $f : X \rightarrow Y$  ist durch drei Daten  $f = (X, F, Y)$  gegeben: die Startmenge  $X$  und die Zielmenge  $Y$  sowie den Funktionsgraphen  $F \subseteq X \times Y$ .

Dabei muss  $f$  jedem Startpunkt  $x \in X$  aus der Startmenge genau einen Zielpunkt  $y \in Y$  in der Zielmenge zuordnen:

$$\mathbf{Fun}(f) \quad :\iff \quad \forall x \in X \quad \exists! y \in Y : (x, y) \in F$$

Zu jedem Paar  $(x, y) \in F$  sagen wir,  $f$  ordnet dem Element  $x \in X$  das Bildelement  $y \in Y$  zu, kurz  $x \mapsto y =: f(x)$  Präfix oder  $y =: (x)f$  Postfix.

Die **Gleichheit** von Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $f' : X' \rightarrow Y'$  bedeutet somit  $(X, F, Y) = (X', F', Y')$ , also  $X = X'$  und  $Y = Y'$  und  $F = F'$ . Letzteres heißt  $f(x) = f'(x)$  für jeden Startpunkt  $x \in X$ .

Zu  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  ist die **Komposition**  $h = f \bullet g = g \circ f$  die Abbildung  $h : X \rightarrow Z$  durch Hintereinanderausführung  $h(x) = g(f(x))$ .

**Aufgabe:** (0) Was ist falsch an der (verbreiteten aber schlampigen) Sprechweise „die Funktion  $f(x) = x^2$ “ oder „die Funktion  $y = x^2$ “? Nennen Sie mindestens zehn unterschiedliche Interpretationen!

(1) Ist „die Funktion  $f(x) = x^2$ “ monoton? (2) Ist sie umkehrbar?  
 (3) Ist „die Funktion  $f(x) = x^2$ “ gleich  $g(x) = |x|$ ? gleich  $h(x) = x$ ?

**Lösung:** (0) Zur Bearbeitung fehlen uns wesentliche Informationen: Aus welcher Startmenge kommt  $x$ ? In welcher Zielmenge landet  $y$ ?

$$\begin{array}{ll}
 f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2, & f_1^{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : x \mapsto x^2, \\
 f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x^2, & f_2^{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0} : x \mapsto x^2, \\
 f_3 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2, & f_3^{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Q} : x \mapsto x^2, \\
 f_4 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x^2, & f_4^{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0} : x \mapsto x^2, \\
 f_5 : \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2, & f_5^{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{Q} : x \mapsto x^2, \\
 f_6 : \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x^2, & f_6^{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0} : x \mapsto x^2, \\
 f_7 : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\} : x \mapsto x^2, & f_8 : \{0, \pm 1\} \rightarrow \{0, 1\} : x \mapsto x^2.
 \end{array}$$

 Nur mit diesen Daten können wir (1,2,3) überhaupt erst angehen!

 Müssen MathematikerInnen es immer so genau nehmen? Ja, sicher! Die „Funktion  $f(x) = x^2$ “ ergibt keinen rechten Sinn: Die Startmenge ist hier vollkommen unklar! Welche  $x$  sind dabei zugelassen? rational? reell? komplex? Und was ist die Zielmenge? Für die Monotonie (1), die Umkehrfunktion (2) und die Gleichheit (3) ist dies wesentlich!

Start- und Zielmenge einer Funktion müssen immer klar sein!  
 Am besten geben Sie diese Daten immer möglichst explizit an.  
 Notfalls müssen wir sie implizit aus dem Kontext erschließen:

„In der Schule bilden alle Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  ab.“

Nein, eben nicht alle, selbst dort gibt es Ausnahmen!

Eine Funktion  $f$  schreiben wir möglichst explizit wie folgt:

$$f : X \rightarrow Y : x \mapsto y = f(x)$$

Das bündelt die Information *Name: Start und Ziel: Abbildungsvorschrift*.  
 Gesprochen: Die Abbildung  $f$  bildet die Menge  $X$  in die Menge  $Y$  ab, indem sie jedem Element  $x \in X$  sein Bild  $y = f(x) \in Y$  zugeordnet.

⚠ **Funktionen** und **Formeln** sind grundsätzlich verschiedene Dinge! Häufig definieren wir eine Funktion mit Hilfe einer geeigneten Formel. Verschiedene Formeldarstellungen können jedoch dieselbe Funktion definieren, und manche Funktionen erlauben überhaupt keine Formel.

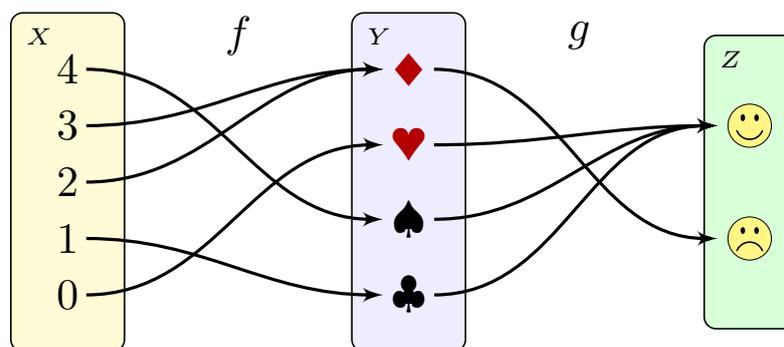
😊 **Black-Box-Prinzip:** Wichtig ist für  $f$  nur das *Was*, nicht das *Wie*. Wir fassen daher alle Rechenwege zur selben Funktion  $f$  zusammen. Diese geschickte Abstraktion ist eine dramatische Vereinfachung.

😊 Die Untersuchung möglicher Berechnungen ist wichtig, aber es ist eine klar getrennte Fragestellung. Erst wenn Sie  $f$  konkret auswerten, etwa auf dem Computer implementieren, zählt der genaue Rechenweg. Beispiel: Berechnen Sie  $|x|$  und  $\sqrt{x^2}$  mit Stift und Papier für  $x = -12345$ .

😊 Wir trennen daher die Funktion von ihren diversen Darstellungen, Schreibweisen durch Formeln, Rechenvorschriften durch Algorithmen. Das lässt uns für später viele Freiheiten, denn dieselbe Funktion kann auf verschiedenen Wegen implementiert werden; je nach Bedarf suchen wir einen möglichst günstigen (einfach, effizient, schnell, genau, etc.).

## Die Komposition zweier Funktionen ergibt eine Funktion.

D208



Zu  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  definieren wir ihre **Komposition**

$$h = f \bullet g = g \circ f : X \rightarrow Z : x \mapsto h(x) = g(f(x)).$$

**Beispiel:** In der oben gezeigten Graphik gilt

$$h(0) = \text{😊}, \quad h(1) = \text{😊}, \quad h(2) = \text{😞}, \quad h(3) = \text{😞}, \quad h(4) = \text{😊}.$$

Datenbanken nutzen Funktionen, z.B.  $f : M \rightarrow N : \text{Matrikelnr} \mapsto \text{Name}$ .

⚠ **Vorsicht!** Die Umkehrung  $f^\top : N \rightarrow M : \text{Name} \mapsto \text{Matrikelnr}$  ist leider keine Funktion, sondern nur eine Relation. Auch das ist sehr nützlich...

## Relationen und ihre Komposition

### Definition D2B: Relation zwischen zwei Mengen

Vorgelegt seien Mengen  $X$  und  $Y$ . Eine **Relation zwischen  $X$  und  $Y$**  oder ein **Relationsgraph** ist eine Teilmenge  $F \subseteq X \times Y$  des Produkts.

(1) Zu jeder Menge  $X$  definieren wir ihre **Diagonale**

$$\Delta_X = \{ (x, x) \mid x \in X \} \subseteq X \times X.$$

(2) Zu  $F \subseteq X \times Y$  definieren wir ihre **Inverse** oder **Umkehrrelation**

$$F^{-1} = F^\top = \{ (y, x) \mid (x, y) \in F \} \subseteq Y \times X.$$

(3) Zu  $F \subseteq X \times Y$  und  $G \subseteq Y \times Z$  definieren wir ihre **Komposition**

$$H =: F \bullet G = G \circ F \subseteq X \times Z \quad (\text{„}F \text{ vor } G\text{“ bzw. „}G \text{ nach } F\text{“}),$$

$$H = \{ (x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x, y) \in F \wedge (y, z) \in G \}.$$

Für  $(x, y) \in F$  schreiben wir auch bequem  $x F y$  in **Infix-Notation** und kürzen  $(x, y) \in F \wedge (y, z) \in G$  ab zu  $x F y G z$  (wie „ $x \leq y \leq z$ “).  
Somit ist die Komposition  $x (F \bullet G) z$  definiert durch  $\exists y \in Y : x F y G z$ .

## Relationen und ihre Komposition

😊 Uns interessieren meist vor allem Funktionen / Abbildungen / Zuordnungen: Das sind spezielle, besonders schöne Relationen. Gerade deshalb ist es praktisch nützlich und didaktisch hilfreich, Relationen zu betrachten: Sie bieten den allgemeinen Rahmen.

Zur Betonung nennen wir  $F \subseteq X \times Y$  auch **zweistellige** oder **binäre Relation**. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes präzisiert wird, verstehen wir unter Relation immer eine zweistellige Relation.

Eine  $n$ -stellige Relation hat die Form  $F \subseteq X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ .

Für  $n = 1$  ist dies eine Teilmenge, für  $n = 2$  eine binäre Relation.

Im Falle  $(x, y) \in F$  sagen wir auch „ $x$  und  $y$  stehen in der Relation  $F$ “ oder „ $x$  korrespondiert zu  $y$  bezüglich  $F$ “, abgekürzt  $x F y$  als Infix.

Diese Infix-Schreibweise ist vor allem für Ordnungsrelation  $\leq$  und Äquivalenzrelationen  $\sim$  üblich, da sehr bequem und suggestiv.

Die Komposition  $H = F \bullet G$  erfüllt  $x H z$  genau dann, falls es ein Bindeglied  $y$  mit  $x F y$  und  $y G z$  gibt, abgekürzt  $x F y G z$ .

## Graphisches Beispiel zur Diagonalen

Zu der Menge  $X = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$  ist die Diagonale

$$\Delta = \Delta_X = \{ (\clubsuit, \clubsuit), (\spadesuit, \spadesuit), (\heartsuit, \heartsuit), (\diamondsuit, \diamondsuit) \} \subseteq X \times X.$$

Graphisch sieht diese Teilmenge  $\Delta_X \subseteq X \times X$  so aus:

$\Delta$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$
$\clubsuit$	1	0	0	0
$\spadesuit$	0	1	0	0
$\heartsuit$	0	0	1	0
$\diamondsuit$	0	0	0	1

Der Eintrag 1/0 an der Stelle  $(x, y)$  bedeutet  $(x, y) \in \Delta$  bzw.  $(x, y) \notin \Delta$ .

😊 Die Darstellung durch 0 und 1 erinnert uns an die **Einheitsmatrix**.  
Der Name „Diagonale“ für die Menge  $\Delta_X \subseteq X \times X$  ist sprechend.

## Graphisches Beispiel zur Umkehrrelation

$F$	5	6	7
$\clubsuit$	1	0	1
$\spadesuit$	1	1	0
$\heartsuit$	0	1	0
$\diamondsuit$	0	0	0

 $\longleftrightarrow$ 

$F^\top$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$
5	1	1	0	0
6	0	1	1	0
7	1	0	0	0

Zwischen den Mengen  $X = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$  und  $Y = \{5, 6, 7\}$  betrachten wir die obige Relation  $F \subseteq X \times Y$ . Die zugehörige Umkehrrelation ist

$$F^{-1} = F^\top = \{ (y, x) \mid (x, y) \in F \} \subseteq Y \times X.$$

Das erinnert uns an die **Transposition einer Matrix** aus Kapitel B: Dort wird die Matrix  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  zu  $A^\top \in \mathbb{K}^{n \times m}$  transponiert, hier die Relation  $F \subseteq X \times Y$  zu  $F^\top \subseteq Y \times X$  gespiegelt.

# Graphisches Beispiel zur Komposition

$F$	♠	♥	♦
5	0	0	1
6	1	1	0
7	0	0	0
8	0	1	0
9	1	0	1

$G$	😊	☹️
♠	1	0
♥	1	1
♦	0	0

 $=$ 

$H$	😊	☹️
5	0	0
6	1	1
7	0	0
8	1	1
9	1	0

Wir betrachten die Mengen  $X = \{5, 6, 7, 8, 9\}$  und  $Y = \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$  und  $Z = \{\text{😊}, \text{☹️}\}$  sowie obige Relationen  $F \subseteq X \times Y$  und  $G \subseteq Y \times Z$  und

$$H = F \bullet G = \{ (x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x, y) \in F \wedge (y, z) \in G \}.$$

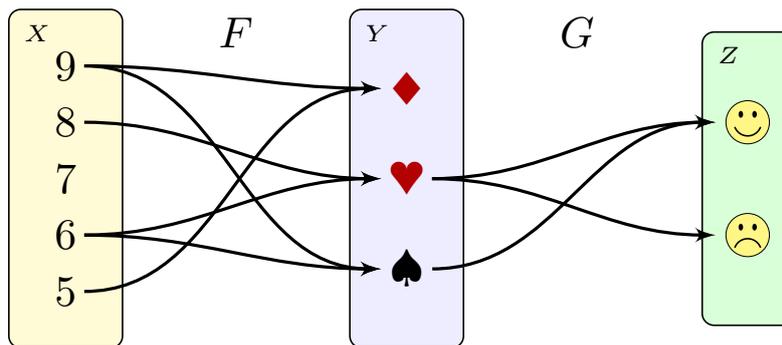
Das ist die **Matrixmultiplikation** über dem Halbring  $(\{0, 1\}, \vee, 0, \wedge, 1)$ .

Für die Komposition  $H = F \bullet G$  gilt demnach  $(x, z) \in H$  genau dann, wenn es einen Weg von  $x \in X$  nach  $z \in Z$  gibt mit Zwischenstopp in  $Y$ .

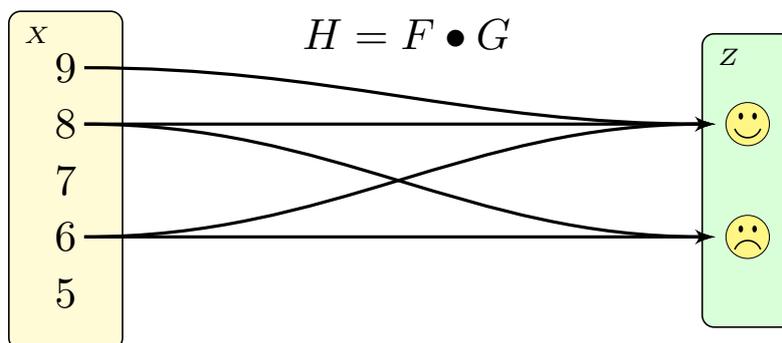
Wenn wir stattdessen über dem Halbring  $(\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1)$  rechnen, so erhalten wir die **Anzahl** der Wege, wie im nächsten Bild.

# Graphisches Beispiel zur Komposition

Dasselbe Beispiel in anderer Darstellung, diesmal in Pfeilschreibweise:



Die Komposition  $F \bullet G$  codiert Verbindungen von  $X$  über  $Y$  nach  $Z$ :



Ist das abstrakt und unnützlich? Abstrakt ja, unnützlich nein! Diese Strukturen sind abstrakt, und deshalb vielseitig anwendbar und universell nutzbar. In der Mathematik nutzen wir Mengen, insbesondere Funktionen und Relationen, um gewisse Informationen zu codieren, zu speichern und zu verarbeiten. Das hat eine direkte Entsprechung in der Informatik:

Eine **relationale Datenbank** speichert und verarbeitet Informationen als Relationen in Tabellenform. Sie wurden um 1970 von Edgar Codd bei IBM entwickelt und sind ein etablierter, weit verbreiteter Standard, etwa in Form der Datenbanksprache SQL (Structured Query Language). Sie wird nahezu überall eingesetzt, nicht zuletzt in Webanwendungen.

Relationale Datenbanken nutzen Mengen und Relationen. Sie eignen sich besonders für strukturierte Daten. In den letzten Jahrzehnten widmet sich **Big Data** zunehmend unstrukturierten und sehr große Datenmengen. Hier müssen die klassischen Konzepte erweitert und angepasst werden, auch dies gelingt auf Grundlage der Mengenlehre!

 Für die meisten Zwecke ist es wichtig zu der Relation  $F \subseteq X \times Y$  immer auch die Startmenge  $X$  und die Zielmenge  $Y$  zu kennen.

Allein aus  $F \subseteq X \times Y$  können wir nämlich die Mengen  $X$  und  $Y$  nicht immer rekonstruieren, sondern nur die eventuell kleineren Teilmengen

$$X' = \text{pr}_1 F = \{ x \mid \exists y : (x, y) \in F \},$$

$$Y' = \text{pr}_2 F = \{ y \mid \exists x : (x, y) \in F \}.$$

 Im traurigen Extremfall der leeren Relation  $F \subseteq X \times Y$  gilt  $F = \emptyset$ , und hier geben  $X' = Y' = \emptyset$  überhaupt keine Auskunft über  $X$  und  $Y$ .

Um alle nötigen Informationen parat zu halten, ist es sinnvoll und nötig, der Relation  $F \subseteq X \times Y$  explizit die Mengen  $X$  und  $Y$  mitzugeben.

 Die vollständige Information bietet das Tripel  $f = (X, F, Y)$ . Diese Überlegung führt uns zu der folgenden Definition D2c.

Auf der Menge  $X = \{0, 1, 2, 3, 4\} \subset \mathbb{N}$  betrachten wir die Relationen  $R = \{(x, y) \in X \times X \mid x \leq y\}$  und  $S = \{(x, y) \in X \times X \mid x < y\}$ .

In Infix-Notation schreiben wir kurz  $x R y \Leftrightarrow x \leq y$  und  $x S y \Leftrightarrow x < y$ .

$R$	0	1	2	3	4
0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1
3	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	1

$S$	0	1	2	3	4
0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
2	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0

- Reflexivität, **Refl**( $X, R$ ):  $\Delta_X \subseteq R$ ,  $x R x$  für alle  $x \in X$ .
- Antisymmetrie, **Asym**( $X, R$ ):  $R \cap R^T \subseteq \Delta_X$ ,  $x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y$ .
- Transitivität, **Tran**( $X, R$ ):  $R \bullet R \subseteq R$ ,  $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$ .

Eine Relation mit diesen drei Eigenschaften heißt **Ordnungsrelation**.

$R^T = \{(x, y) \in X \times X \mid x \geq y\}$  und  $S^T = \{(x, y) \in X \times X \mid x > y\}$ .

Dies sind zunächst zwei schöne, konkrete Beispiele für Relationen. Hier illustrieren sie Relationen als einfache und flexible Grundstruktur. Den allgemeinen und zentral wichtigen Begriff der Ordnungsrelation werden wir im übernächsten Kapitel F ausführlich behandeln.

Allgemein betrachten wir Relationen  $F \subseteq X \times Y$  zwischen zwei Mengen  $X$  und  $Y$  wie in Definition D2B. Hier hingegen haben wir den Spezialfall  $X = Y$  und gelangen zu Relationen  $R \subseteq X \times X$  auf einer Menge  $X$ . Dabei ergeben sich neue interessante Phänomene und Fragen wie Reflexivität, Symmetrie / Antisymmetrie, Transitivität.

Für Relationen (wie zuvor für Matrizen) haben wir drei Grundobjekte: Die Diagonale  $\Delta_X \subseteq X \times X$ , die Umkehrrelation  $F \mapsto F^T$  und die Komposition  $(F, G) \mapsto F \bullet G = G \circ F$ , wie oben erklärt und illustriert. Es ist lehrreich und auch amüsant, dass sich Reflexivität, Symmetrie / Antisymmetrie, Transitivität damit überaus elegant formulieren lassen.

Auf der Menge  $X = \{0, -1, +1, -i, +i\} \subset \mathbb{C}$  haben wir die Relationen  $R = \{ (x, y) \in X \times X \mid x^2 = y^2 \}$  und  $S = \{ (x, y) \in X \times X \mid |x| = |y| \}$ . In Infix-Notation schreiben wir  $x R y \Leftrightarrow x^2 = y^2$  und  $x S y \Leftrightarrow |x| = |y|$ .

$R$	0	-1	+1	-i	+i
0	1	0	0	0	0
-1	0	1	1	0	0
+1	0	1	1	0	0
-i	0	0	0	1	1
+i	0	0	0	1	1

$S$	0	-1	+1	-i	+i
0	1	0	0	0	0
-1	0	1	1	1	1
+1	0	1	1	1	1
-i	0	1	1	1	1
+i	0	1	1	1	1

Reflexivität,      **Refl**( $X, R$ ):       $\Delta_X \subseteq R$ ,       $x R x$  für alle  $x \in X$ .  
 Symmetrie,        **Sym**( $X, R$ ):       $R = R^\top$ ,       $x R y \Rightarrow y R x$ .  
 Transitivität,    **Tran**( $X, R$ ):       $R \bullet R \subseteq R$ ,       $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$ .

Eine Relation mit diesen drei Eigenschaften heißt **Äquivalenzrelation**.  
 Diese zerlegen  $X = \bigsqcup \{ \{0\}, \{-1, 1\}, \{-i, i\} \} = \bigsqcup \{ \{0\}, \{-1, 1, -i, i\} \}$ .

Dies sind zunächst zwei schöne, konkrete Beispiele für Relationen; Hier illustrieren sie Relationen als einfache und flexible Grundstruktur. Den allgemeinen und zentral wichtigen Begriff der Äquivalenzrelation werden wir im nächsten Kapitel E ausführlich behandeln.



Alice



Bob



Chuck

**Beispiel:** Wir betrachten  $X = \{ A=Alice, B=Bob, C=Chuck \}$ .  
 Wer duzt wen? Relationen sind extrem flexibel:

$G_0$	A	B	C
A	0	0	0
B	0	0	0
C	0	0	0

$G_1$	A	B	C
A	1	1	1
B	1	1	1
C	1	1	1

$G_2$	A	B	C
A	1	1	1
B	1	0	0
C	0	0	1

Unser realer / digitaler Alltag ist voller Relationen:

- soziale Netzwerke, Likes, Abonnenten, Follower, ...
- Webseiten und gegenseitige Links, Google PageRank, ...
- Corona-Warn-App, Kontaktgraph mit weiteren relevanten Daten ...

😊 Unsere drei einfachen Beispiele  $G_0, G_1, G_2$  illustrieren das Prinzip. Extremfälle sind  $G_0$ : Niemand duzt irgendwen,  $G_1$ : Jeder duzt jeden. Alle weiteren Relationen liegen dazwischen, im Sinne der Inklusion. Unser Beispiel  $G_2$  scheint recht plausibel und typisch:

$G_2$ : Alice duzt Chuck, aber nicht umgekehrt:  $G_2$  ist nicht symmetrisch.  
 Alice duzt sich in Selbstgesprächen, Bob niemals:  $G_2$  ist nicht reflexiv.  
 Bob duzt Alice und Alice duzt Chuck, aber Bob duzt nicht Chuck:  
 Die Relation  $G_2$  ist demnach auch nicht transitiv.

Beobachten und (er)finden Sie weitere Beispiele dieser Art!  
 Wenn Sie erst einmal auf die Idee gekommen sind und die nötigen mathematischen Begriffe kennen, so entdecken Sie überall Relationen!

Viele der aktuell großen Internetkonzerne gründen ihren Erfolg auf der mathematisch-algorithmischen Auswertung von sozialen Relationen. Dies ist ein wichtiges Anwendungsbeispiel von **Big Data**.

Die Redewendung **Six degrees of separation** bezeichnet die Idee, dass je zwei Menschen auf der Erde über sechs Zwischenstationen miteinander bekannt sind. Das scheint tatsächlich häufig zuzutreffen, siehe [en.wikipedia.org/wiki/Small-world\\_experiment](http://en.wikipedia.org/wiki/Small-world_experiment).

Der Begriff **Kleine-Welt-Phänomen** wurde 1967 von Stanley Milgram geprägt. Der Hypothese nach ist jeder Mensch mit jedem anderen über eine überraschend kurze Kette von Bekanntschaften verbunden; zwar ist die soziale Vernetzung eher dünn, erlaubt aber viele Abkürzungen.

Wie kann man daraus eine präzise, überprüfbare Aussage machen? Hierzu müssen wir zunächst die Aussage „ $x$  und  $y$  sind verbunden“ präzisieren, etwa (0)  $x$  kennt  $y$  beim Namen oder (1)  $x$  und  $y$  kennen sich gegenseitig oder (2)  $x$  und  $y$  haben sich die Hand geschüttelt, etc.

Für eine deutschsprachige Testgruppe könnte man auch „ $x$  dutzt  $y$ “ betrachten, wie im obigen Beispiel. Im der Relation  $G_2$  ist Chuck mit niemand anderem verbunden, hier wäre die Hypothese also falsch.

**Aufgabe:** Angenommen, die Relation  $R \subseteq X \times X$  codiert „ $x$  kennt  $y$ “. Wie würden Sie die Aussage *six degrees of separation* formulieren?

**Lösung:** Wir können Reflexivität  $\Delta_X \subseteq R$  annehmen oder fordern. Auch Symmetrie  $R = R^\top$  ist nach manchen Definitionen automatisch. Die Behauptung ist nun  $R \bullet R \bullet R \bullet R \bullet R \bullet R \bullet R \stackrel{!}{=} X \times X$ : Je zwei Menschen sind über höchstens sechs Zwischenstationen verbunden.

😊 Auch hier ist es lehrreich zu sehen, wie sich die ursprünglich vage Idee präzisieren lässt. Dies ist dringend notwendig, wenn konkrete Daten erhoben und Experimente durchgeführt werden sollen.

😊 Mit konkreten Daten lässt sich die Hypothese nun überprüfen, je nach Datenlage also entweder bestätigen oder widerlegen! Das ist das typische Vorgehen in den Naturwissenschaften.

## Relationen mit Start und Ziel

## Definition D2c: Relation mit Start und Ziel

Eine **Relation**  $f = (X, F, Y)$  besteht aus ihrer **Startmenge**  $X$  und ihrer **Zielfmenge**  $Y$  sowie ihrem **Relationsgraphen**  $F \subseteq X \times Y$ .

Definitionsmenge  $\text{Def}(f) := \text{pr}_1 F = \{ x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \in F \}$ ,

Bildmenge  $\text{im}(f) := \text{pr}_2 F = \{ y \in Y \mid \exists x \in X : (x, y) \in F \}$ .

(1) Zu jeder Menge  $X$  definieren wir ihre **Identität(sabbildung)**

$$\text{id}_X = (X, \Delta_X, X) \quad \text{mit} \quad \Delta_X = \{ (x, x) \mid x \in X \}.$$

(2) Zu  $f = (X, F, Y)$  definieren wir ihre **Inverse** oder **Umkehrrelation**

$$f^{-1} = f^\top = (Y, F^\top, X) \quad \text{mit} \quad F^\top = \{ (y, x) \mid (x, y) \in F \}.$$

(3) Zu  $f = (X, F, Y)$  und  $g = (Y, G, Z)$  definieren wir ihre **Komposition**

$$h = (X, H, Z) =: f \bullet g = g \circ f \quad (\text{„}f \text{ vor } g\text{“ bzw. „}g \text{ nach } f\text{“}),$$

$$H = \{ (x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x, y) \in F \wedge (y, z) \in G \}.$$

## Relationen mit Start und Ziel

Die **Startmenge**  $X$ , engl. *source*, heißt auch **Quelle** oder **Linksmenge**.

Die **Zielfmenge**  $Y$ , engl. *target*, heißt auch **Ziel** oder **Rechtsmenge**.

Die Definitionsmenge  $\text{Def}(f) \subseteq X$  heißt auch **Urbildmenge** von  $f$ , seltener auch **Argumentbereich** oder **Vorbereich** der Relation  $f$ .

Die Bildmenge  $\text{im}(f) \subseteq Y$  heißt auch **Wertemenge** oder **Wertebereich**. In diesem Kontext ist das Wort „Bereich“ synonym mit (Teil-)Menge.

😊 Das Tripel  $f = (X, F, Y)$  bietet die vollständige Information.

Wie zuvor motiviert wollen wir für  $F \subseteq X \times Y$  alle nötigen Informationen parat halten, daher geben wir  $F$  explizit die Mengen  $X$  und  $Y$  mit.

Die Definition von Relationen als Tripel hat wichtige Konsequenzen.

Die Gleichheit von  $f = (X, F, Y)$  und  $f' = (X', F', Y')$  bedeutet:

$$f = f' \quad \iff \quad X = X' \wedge Y = Y' \wedge F = F'$$

Zur Betonung nochmal in Worten: Nicht nur der Graph  $F = F'$  ist gleich, sondern auch die Startmenge  $X = X'$  und die Zielfmenge  $Y = Y'$ .

## Rechenregeln für die Komposition

**Aufgabe:** Für  $f = (X, F, Y)$  und  $g = (Y, G, Z)$  und  $h = (Z, H, W)$  gilt:

- (1) Neutralität  $\text{id}_X \bullet f = f \bullet \text{id}_Y = f$  bzw.  $f \circ \text{id}_X = \text{id}_Y \circ f = f$ .
- (2) Umkehrung  $(f \bullet g)^\top = g^\top \bullet f^\top$  bzw.  $(g \circ f)^\top = f^\top \circ g^\top$ .
- (3) Assoziativität  $(f \bullet g) \bullet h = f \bullet (g \bullet h)$  bzw.  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ .

**Lösung:** (1) Die passende Identität ist links- / rechtsneutral:

$$(x, y) \in \Delta_X \bullet F \stackrel{\text{Def}}{\iff} \exists x' \in X : x \Delta_X x' \wedge x' F y \stackrel{\Delta}{\iff} (x, y) \in F$$

$$(x, y) \in F \bullet \Delta_Y \stackrel{\text{Def}}{\iff} \exists y' \in Y : x F y' \wedge y' \Delta_Y y \stackrel{\Delta}{\iff} (x, y) \in F$$

(2) Die Umkehrung vertauscht die Faktoren:

$$(z, x) \in (F \bullet G)^\top \stackrel{\text{Def}}{\iff} (x, z) \in F \bullet G \stackrel{\text{Def}}{\iff} \exists y \in Y : x F y \wedge y G z$$

$$(z, x) \in G^\top \bullet F^\top \stackrel{\text{Def}}{\iff} \exists y \in Y : z G^\top y \wedge y F^\top x$$

(3) Wir setzen die Definition ein und rechnen es nach!

$$(x, w) \in F \bullet (G \bullet H) \stackrel{\text{Def}}{\iff} \exists y \in Y : x F y \wedge [\exists z \in Z : y G z \wedge z H w]$$

$$(x, w) \in (F \bullet G) \bullet H \stackrel{\text{Def}}{\iff} \exists z \in Z : [\exists y \in Y : x F y \wedge y G z] \wedge z H w$$

😊 Zum Glück haben wir die Logik in Kapitel C gründlich vorbereitet!

## Rechenregeln für die Komposition

⚠ Die Komposition  $f \bullet g$  bzw.  $g \circ f$  zweier Relationen ist nur dann definiert, wenn das Ziel von  $f$  mit dem Start von  $g$  übereinstimmt!

In diesem Fall heißen  $f$  und  $g$  **komponierbar** oder **verknüpfbar**.

Die **Komposition** heißt auch **Verknüpfung** oder **Verkettung** oder **Hintereinanderschaltung** oder **Hintereinanderausführung**.

Als Schreibweise vereinbaren hier zwei nützliche Konventionen:

Die Linkskomposition  $\circ$  ist üblich, die Rechtskomposition  $\bullet$  natürlich.

😊 Der obige Beweis gelingt sofort, indem Sie die Definition einsetzen. Eine solche Überprüfung heißt **trivial**, da sie rein mechanisch ist. Sie erfordert allein gewissenhafte Sorgfalt, aber keine neuen Ideen, da alles Notwendige (Definitionen, Sätze, etc.) bereits vorbereitet ist.

😊 Bitte vergleichen Sie dies mit der Multiplikation von Matrizen. Dabei drängen sich bemerkenswerte Parallelen und Analogien auf. Dort haben wir zahlreiche triviale Rechnung sorgsam ausgeführt. Auch und gerade triviale Beweise sollten Sie routiniert durchführen!

## Von Relationen zu Funktionen

Vorgelegt sei eine Relation  $f = (X, F, Y)$  mit Graph  $F \subseteq X \times Y$ .

Wir nennen  $f$  **linkstotal**, falls gilt:

$$\forall x \in X \exists y \in Y : (x, y) \in F$$

Wir nennen  $f$  **rechtstotal**, falls gilt:

$$\forall y \in Y \exists x \in X : (x, y) \in F$$

Wir nennen  $f$  **linkseindeutig**, falls gilt:

$$\forall y \in Y \forall x, x' \in X : (x, y) \in F \wedge (x', y) \in F \Rightarrow x = x'$$

Wir nennen  $f$  **rechtseindeutig**, falls gilt:

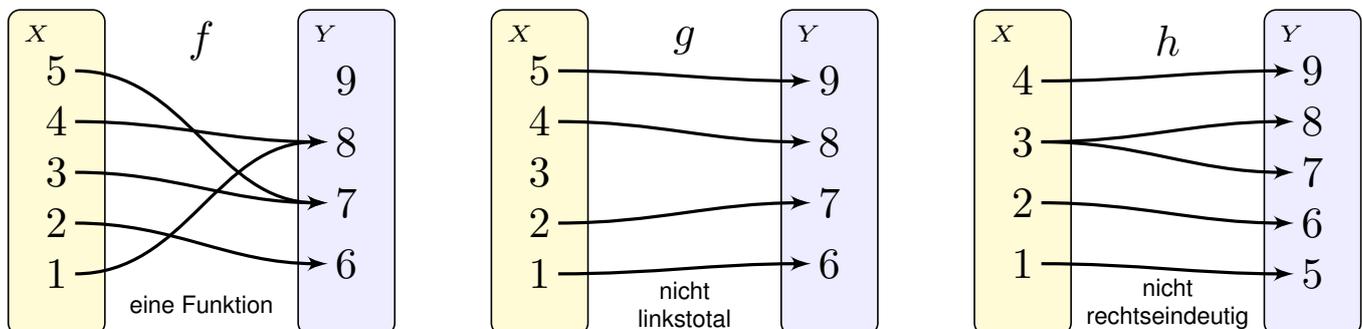
$$\forall x \in X \forall y, y' \in Y : (x, y) \in F \wedge (x, y') \in F \Rightarrow y = y'$$

Die Relation  $f = (X, F, Y)$  ist eine **Abbildung / Funktion / Zuordnung**, falls sie linkstotal und rechtseindeutig ist. Ausgeschrieben bedeutet das:

$$\mathbf{Fun}(f) \quad :\iff \quad \forall x \in X \exists! y \in Y : (x, y) \in F$$

Zu jedem Paar  $(x, y) \in F$  sagen wir dann,  $f$  ordnet dem Element  $x \in X$  das Element  $y \in Y$  zu, und schreiben hierfür  $f(x) = y$  oder  $f : x \mapsto y$ .

## Funktion oder nicht?



Die Tatsache, dass die Relation  $f = (X, F, Y)$  eine Funktion ist, also das Prädikat  $\mathbf{Fun}(f)$  erfüllt, schreiben wir kurz und bequem:

$$f : X \rightarrow Y$$

Zusätzlich können wir eine Abbildungsvorschrift angeben:

$$f : X \rightarrow Y : x \mapsto y = f(x)$$

Das bündelt die Information *Name : Start und Ziel : Abbildungsvorschrift*.

Beispiel  $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{6, 7, 8, 9\} : 1 \mapsto 8, 2 \mapsto 6, 3 \mapsto 7, 4 \mapsto 8, 5 \mapsto 7$   
 oder  $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto 1/x$  oder  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$

## Eigenschaften von Abbildungen: injektiv, surjektiv, bijektiv

Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung, also  $f = (X, F, Y)$  mit  $F \subseteq X \times Y$  und

$$\mathbf{Fun}(f) \quad :\iff \quad \forall x \in X \quad \exists! y \in Y : (x, y) \in F$$

Die Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt **injektiv**, falls sie linkseindeutig ist:

$$\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Jedes Zielelement  $y \in Y$  wird höchstens einmal getroffen.

Per Kontraposition ist das äquivalent zu:  $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ .

Die Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt **surjektiv**, falls sie rechtstotal ist:

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X : f(x) = y$$

Jedes Zielelement  $y \in Y$  wird mindestens einmal getroffen.

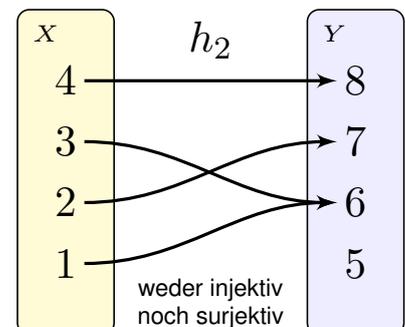
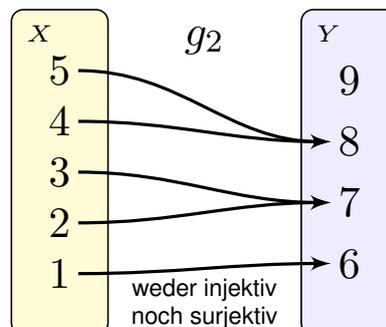
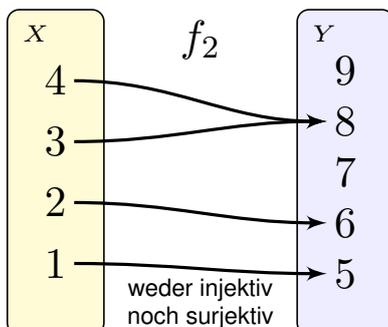
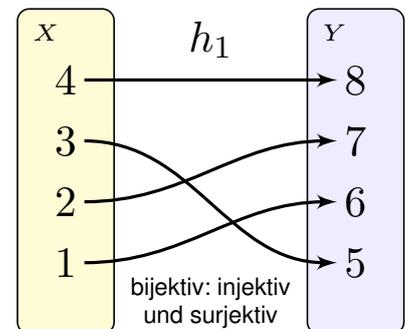
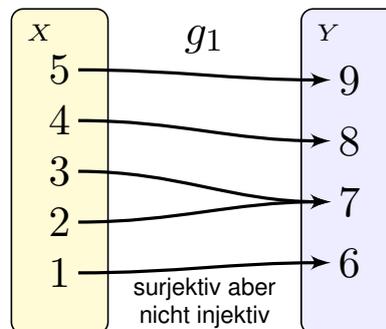
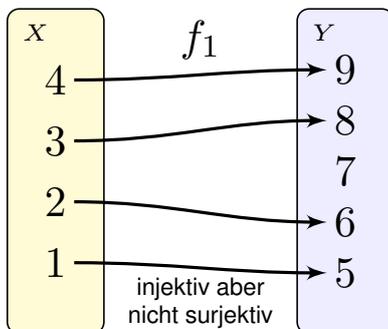
Die Bildmenge  $\text{im}(f) = \{ f(x) \mid x \in X \} \subseteq Y$  ist die ganze Menge  $Y$ .

Die Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt **bijektiv**, falls sie injektiv und surjektiv ist:

$$\forall y \in Y \quad \exists! x \in X : f(x) = y$$

Zu jedem Ziel  $y \in Y$  existiert genau ein Start  $x \in X$  mit  $f(x) = y$ .

## Eigenschaften von Abbildungen: injektiv, surjektiv, bijektiv



Eine **Bijektion**  $f: X \xrightarrow{\sim} Y$  ist eine bijektive Abbildung  $f: X \rightarrow Y$ .

Eine **Injektion**  $f: X \hookrightarrow Y$  ist eine injektive Abbildung  $f: X \rightarrow Y$ .

Eine **Surjektion**  $f: X \twoheadrightarrow Y$  ist eine surjektive Abbildung  $f: X \rightarrow Y$ .

Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung,  $f = (X, F, Y)$  mit Graph  $F \subseteq X \times Y$ .

Zu jeder Teilmenge  $A \subseteq X$  definieren wir ihre **Bildmenge unter  $f$**  durch

$$\begin{aligned} f(A) &= f_*(A) = \{ f(x) \mid x \in A \} \\ &= \{ y \in Y \mid \exists x \in A: (x, y) \in F \}. \end{aligned}$$

Genau dann gilt  $y \in f_*(A)$ , wenn ein  $x \in A$  existiert mit  $f(x) = y$ .

So induziert  $f: X \rightarrow Y$  die Abbildung  $f_*: \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(Y): A \mapsto f_*(A)$ .

**Beispiele:** (In bequem-schludriger Schreibweise  $f$  statt  $f_*$ )

Für  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^2$  gilt  $f_*([-2, 3]) = [0, 9]$  und  $f_*(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Für  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^3$  gilt  $g_*([-2, 3]) = [-8, 27]$  und  $g_*(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

Die **Bildmenge** der Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist

$$\text{im}(f) = f_*(X) = \{ f(x) \mid x \in X \} \subseteq Y.$$

Genau dann ist die Abbildung  $f$  surjektiv, wenn  $f_*(X) = Y$  gilt.

(Für jedes  $y \in Y$  hat die Faser  $f^*({y})$  mindestens ein Element.)

## Vorsicht bei Überladung der Notation

D234  
Erläuterung

Die Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  schickt jedes Startelement  $x \in X$  auf sein Bildelement  $y = f(x)$ . Gegeben sei nun eine Teilmenge  $A \subseteq X$ .

Wir schicken jedes ihrer Elemente  $x \in A$  auf sein Bild  $y = f(x)$  und fassen diese Bildelemente zusammen zu der Bildmenge

$$f(A) = f_*(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}.$$

 Die Schreibweise  $f(A)$  ist schludrig, aber verlockend bequem und daher weit verbreitet. Die Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$  und  $f_*: \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(Y)$  sind verschiedene Dinge! Gerade am Anfang sollten Sie beide gründlich unterscheiden, wenn schon nicht in der Notation, so in der Bedeutung.

Einige Autoren bemühen sich um Notation und Klärung des Problems, doch in der Literatur begegnet Ihnen vermutlich häufiger die Lässigkeit. Ich führe daher zunächst eine formal korrekte Bezeichnung ein, werde dann aber die bequem fahrlässige Schreibweise nutzen.

 Hier gilt ausnahmsweise: *Do as I say, not as I do.* (Man kann seine Kinder noch so gut erziehen, sie machen einem doch alles nach.)

## Urbildmenge

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung,  $f = (X, F, Y)$  mit  $F \subseteq X \times Y$ .

Zu jeder Teilmenge  $B \subseteq Y$  definieren wir ihr **Urbild unter  $f$**  durch

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= f^*(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \} \\ &= \{ x \in X \mid \exists y \in B : (x, y) \in F \}. \end{aligned}$$

In Worten: Für  $x \in X$  gilt  $x \in f^*(B)$  genau dann, wenn  $f(x) \in B$  gilt. So induziert  $f : X \rightarrow Y$  die Abbildung  $f^* : \mathfrak{P}(Y) \rightarrow \mathfrak{P}(X) : B \mapsto f^*(B)$ .

**Beispiele:** (In bequem-schludriger Schreibweise  $f^{-1}$  statt  $f^*$ )

Für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$  gilt  $f^{-1}(\{2\}) = \{-\sqrt{2}, +\sqrt{2}\}$ .

Für  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$  gilt  $g^{-1}(\{2\}) = \{\sqrt[3]{2}\}$ .

Die **Faser** über dem Zielpunkt  $y \in Y$  ist die Urbildmenge

$$f^*({y}) = \{ x \in X \mid f(x) = y \}.$$

Genau dann ist  $f$  injektiv / surjektiv / bijektiv, wenn für jedes  $y \in Y$  die Faser  $f^*({y})$  höchstens / mindestens / genau ein Element hat.

## Vorsicht bei Überladung der Notation

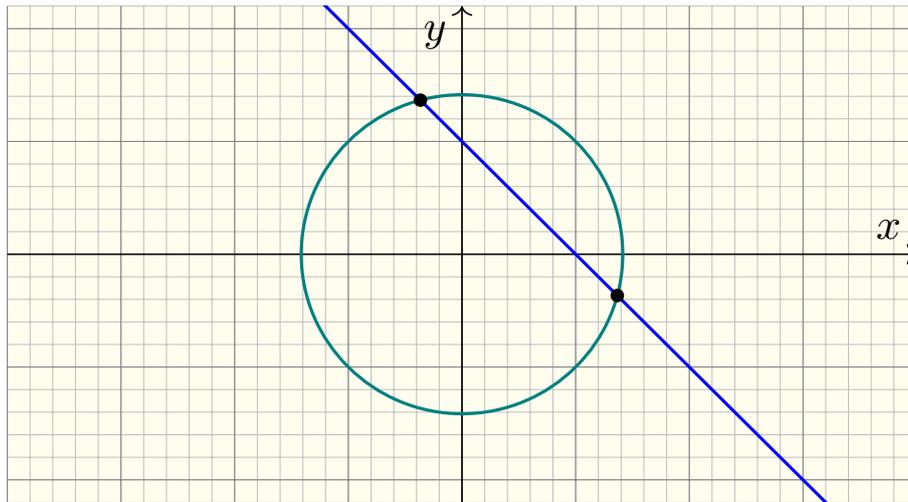
 Zu jeder Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  existiert  $f^* : \mathfrak{P}(Y) \rightarrow \mathfrak{P}(X)$ , doch die Umkehrabbildung  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  existiert dagegen nur, falls  $f$  bijektiv ist. Beides sind verschiedene Dinge! Die Schreibweise  $f^{-1}(B)$  statt  $f^*(B)$  ist schludrig, aber verlockend bequem und daher sehr weit verbreitet. Gerade am Anfang sollten Sie beide gründlich unterscheiden.

Nun mag man einwenden, dass der Kontext jeweils eindeutig erklärt, was gemeint ist. Das ist oft tatsächlich der Fall: Wir können Elemente  $y \in Y$  und Teilmengen  $B \subseteq Y$  unterscheiden, also können wir auch  $f^{-1}(y)$  und  $f^{-1}(B) = f^*(B)$  auseinanderhalten. Aus diesem Grund erzeugt dieser **Missbrauch der Notation** (engl. *abuse of notation*) vermutlich selten wirklichen Schaden. Didaktisch klug ist es nicht.

Es gibt noch eine Steigerung: Die Faser über  $y \in Y$  wird oft mit  $f^{-1}(y)$  bezeichnet. Das kann man nun wirklich nicht von der Umkehrabbildung unterscheiden. Das ist akzeptabel, solange alle Beteiligten wissen, was gemeint ist, zum Beispiel weil weit und breit keine Umkehrabbildungen vorkommen. Achten Sie in der Literatur auf die jeweilige Bedeutung.

## Beispiel zu Urbildmengen: Lösung von Gleichungen

**Beispiel:** Wir wollen  $x^2 + y^2 = 2$  und  $x + y = 1$  für  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  lösen.

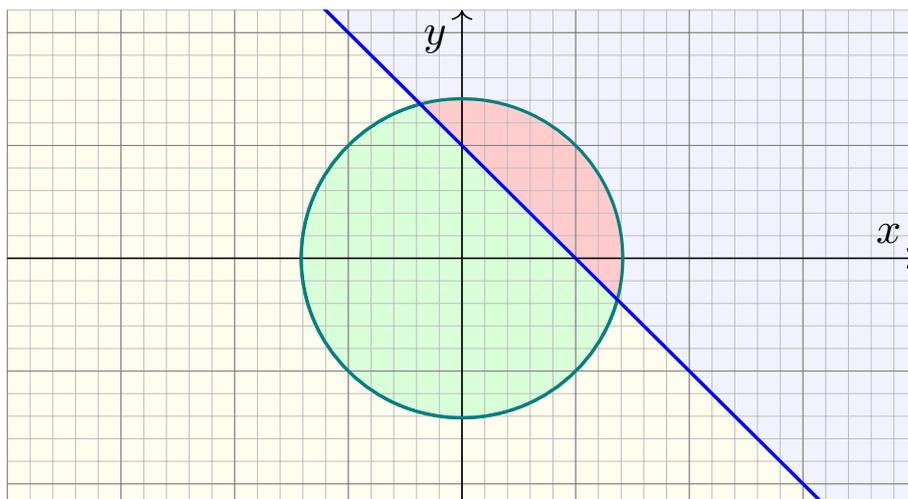


Die erste Gleichung besagt  $f(x, y) = a$  mit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ .  
Die zweite Gleichung besagt  $g(x, y) = b$  mit  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto x + y$ .  
Ihre Lösungsmengen sind jeweils  $f^{-1}(\{a\})$  und  $g^{-1}(\{b\})$ . Wir suchen

$$L = f^{-1}(\{a\}) \cap g^{-1}(\{b\}).$$

## Beispiel zu Urbildmengen: Lösung von Ungleichungen

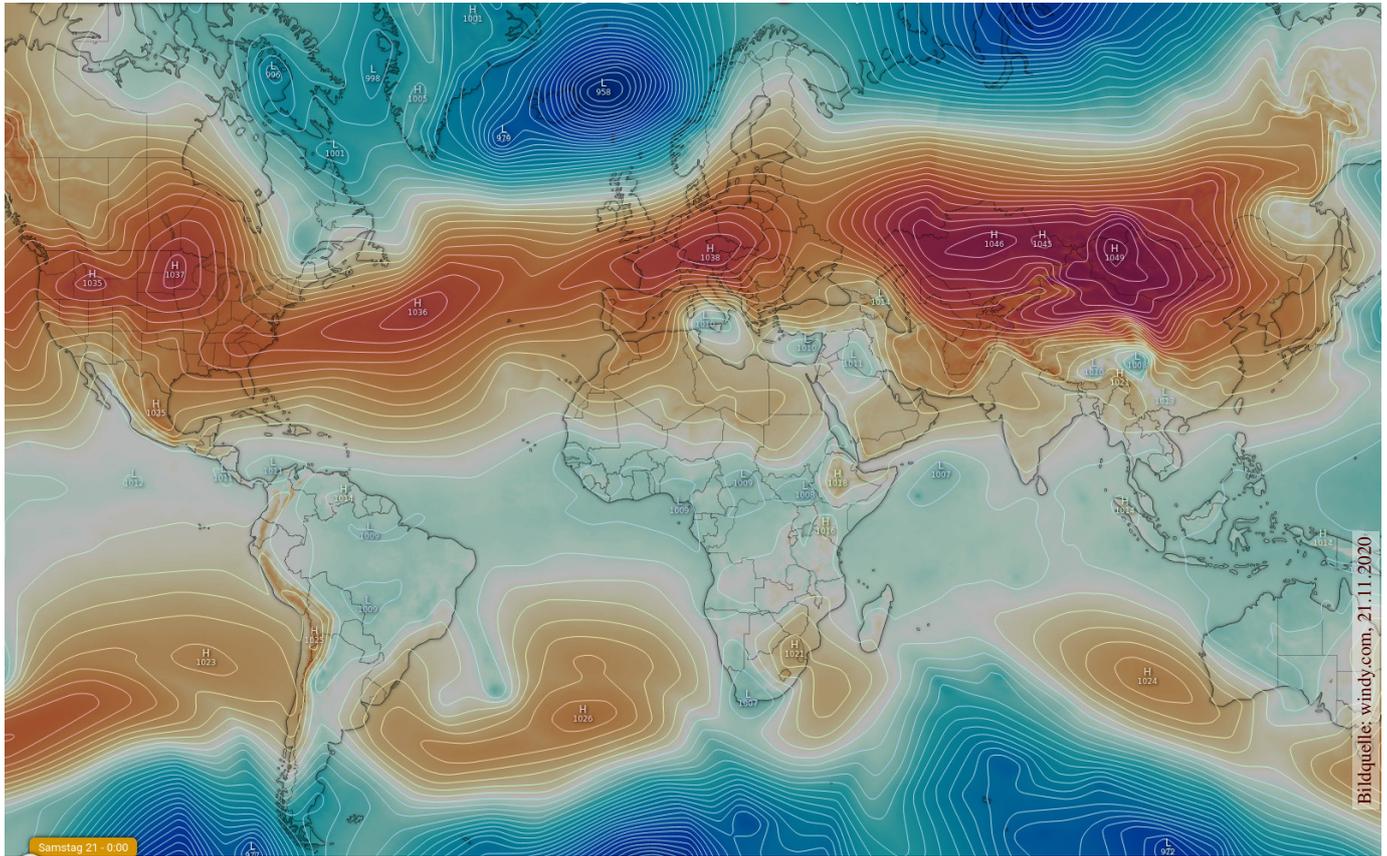
**Beispiel:** Wir wollen  $x^2 + y^2 \leq 2$  und  $x + y \geq 1$  für  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  lösen.



Diese Ungleichungen besagen  $f(x, y) \leq a$  und  $g(x, y) \geq b$ .  
Ihre Lösungsmengen sind jeweils  $f^{-1}([0, a])$  und  $g^{-1}([b, \infty[)$ .

$$L = f^{-1}([0, a]) \cap g^{-1}([b, \infty[).$$

Graphische Lösung: Wir schneiden Kreisscheibe und Halbebene.



Luftdruck  $f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$ , Isobaren  $f^{-1}(\{c\})$ ,  
 Tiefdruckgebiete  $f^{-1}(\mathbb{R}_{\leq a})$  und Hochdruckgebiete  $f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq b})$

## Bewegung von Fluiden

Die Bewegung von Fluiden, etwa strömenden Flüssigkeiten oder Gasen, wird beschrieben durch die Navier–Stokes–Gleichungen. Wir können sie hier noch nicht verstehen, aber schon bewundern:

Massenerhaltung:	$\sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$
Impulserhaltung:	$\underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t}}_{\text{Änderung}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\nu \Delta v_i}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{intern}} + \underbrace{f_i}_{\text{extern}}$

Diese  $1 + n$  Gleichungen beschreiben die Strömungsgeschwindigkeit  $v : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  einer Flüssigkeit zur Zeit  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$  am Ort  $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  in der Ebene ( $n=2$ ) oder im Raum ( $n=3$ ), mit konstanter Dichte  $\rho \in \mathbb{R}$  und Viskosität  $\nu \in \mathbb{R}$ , Druck  $p : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und äußerer Kraft  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Die mathematischen Grundlagen zur Lösbarkeit dieser Gleichungen sind ein weiteres der sieben Millennium-Probleme.

## Satz D2D: Ur/Bilder und Mengenoperationen

Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung sowie  $A, A', A_i \subseteq X$  und  $B, B', B_i \subseteq Y$ .

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}, \quad f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$$

Aus dieser Definition ergeben sich folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) &= \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i), & f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) &\subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i), \\ f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) &= \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i), & f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &= \bigcup_{i \in I} f(A_i), \\ f^{-1}(Y) &= X, \quad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, & f(X) &\subseteq Y, \quad f(\emptyset) = \emptyset, \\ B \subseteq B' &\Rightarrow f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(B'), & A \subseteq A' &\Rightarrow f(A) \subseteq f(A'), \\ f^{-1}(B \setminus B') &= f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(B'), & f(A \setminus A') &\supseteq f(A) \setminus f(A'), \\ f(f^{-1}(B)) &= B \cap f(X) \subseteq B, & f^{-1}(f(A)) &\supseteq A. \end{aligned}$$

Für jede injektive / surjektive Abbildung  $f$  gilt statt „ $\subseteq$ “ / „ $\subseteq$ “ stärker „ $=$ “.

## Abbildungen und Mengenoperationen

**Beweis:** Ich führe die ersten beiden Aussagen aus. Hierzu sei  $I \neq \emptyset$ .

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

Wir nutzen die Definition von Urbild und Schnittmenge:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) &\stackrel{\text{Def}}{\iff}_{\text{D235}} f(x) \in \bigcap_{i \in I} B_i && \stackrel{\text{Def}}{\iff}_{\text{D118}} \bigwedge_{i \in I} f(x) \in B_i \\ &\stackrel{\text{Def}}{\iff}_{\text{D235}} \bigwedge_{i \in I} x \in f^{-1}(B_i) && \stackrel{\text{Def}}{\iff}_{\text{D118}} x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i) \end{aligned}$$

Für die Bildmenge gilt zunächst nur „ $\subseteq$ “, erst bei Injektivität auch „ $\supseteq$ “:

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$$

„ $\subseteq$ “: Sei  $y \in f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$ . Das bedeutet, es gibt  $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$  mit  $f(x) = y$ . Für alle  $i \in I$  gilt  $x \in A_i$ , also  $y = f(x) \in f(A_i)$ , somit  $y \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$ .

„ $\supseteq$ “: Sei  $y \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$ , also  $y \in f(A_i)$  für jedes  $i \in I$ , somit  $y = f(x_i)$  für ein  $x_i \in A_i$ . Da  $f$  injektiv ist, haben wir  $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$ . Für alle  $i \in I$  gilt demnach  $x = x_i \in A_i$ , also  $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$  und  $y = f(x) \in f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$ .

Ist  $f : X \rightarrow Y$  nicht injektiv, dann gibt es Familien  $(A_i)_{i \in I}$  mit

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subsetneq \bigcap_{i \in I} f(A_i).$$

Angenommen zwei Elemente  $x_1 \neq x_2$  in  $X$  erfüllen  $f(x_1) = f(x_2) = y$ .  
Für  $A_1 = \{x_1\}$  und  $A_2 = \{x_2\}$  gilt  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , also  $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$ .  
Wegen  $f(A_1) = f(A_2) = \{y\}$  gilt jedoch  $f(A_1) \cap f(A_2) = \{y\} \supsetneq \emptyset$ .

**Übung:** Führen Sie die verbleibenden Fälle aus, nach obigem Vorbild:  
(a) Zeigen Sie jede der gültigen Inklusionen in D2D durch einen Beweis.  
(b) Belegen Sie jede ungültige Inklusion durch ein Gegenbeispiel.

😊 Das erfordert sowohl (a) Sorgfalt als auch (b) Kreativität.

Es kostet etwas Zeit, aber diese Mühe ist gut investiert:

So lernen Sie Ur/Bilder und Mengenoperationen!

**Warnung:** Zu  $f : X \rightarrow Y$  erfüllen die Abbildungen  $f_* : \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(Y)$  und  $f^* : \mathfrak{P}(Y) \rightarrow \mathfrak{P}(X)$  nur  $f_*(f^*(B)) \subseteq B$  und  $f^*(f_*(A)) \supseteq A$ .  
Im Allgemeinen sind  $f_*$  und  $f^*$  nicht invers zueinander!

Die Lösungsmenge der Gleichung  $f(x) = y$  ist die Urbildmenge  $f^{-1}(\{y\})$ , die Lösungsmenge von  $f(x) \in B$  ist entsprechend  $f^{-1}(B)$ .  
In dieser Form treten Urbildmengen überall in der Mathematik und ihren Anwendungen auf. Hier lernen Sie, die Definitionen präzise zu nutzen.

In einigen Gebieten der Mathematik wird besonders hemmungslos mit Mengen und Abbildungen gearbeitet, so wie hier im Satz zu sehen:

- Maß- und Integrationstheorie
- Wahrscheinlichkeitstheorie
- Fraktale Geometrie
- Topologie

Für diese Art von Fragestellung hat sich das „Rechnen mit Mengen“ als die allgemeine und effiziente Arbeitsweise herauskristallisiert.

Ich sage dies hier vor allem zur Ermutigung und als Ausblick.  
Solide Grundlagen zahlen sich dort und überall aus!

Gegeben seien Relationen

$$\begin{aligned} f_1 &= (X_1, F_1, Y_1) \quad \text{mit} \quad F_1 \subseteq X_1 \times Y_1, \\ f_2 &= (X_2, F_2, Y_2) \quad \text{mit} \quad F_2 \subseteq X_2 \times Y_2. \end{aligned}$$

Dann definieren wir ihre Vereinigung  $f = f_1 \cup f_2$  als die Relation

$$f = (X, F, Y) \quad \text{mit} \quad X = X_1 \cup X_2, \quad Y = Y_1 \cup Y_2, \quad F = F_1 \cup F_2.$$

Gleiches gilt für jede Familie  $f_i = (X_i, F_i, Y_i)$  von Relationen, mit  $i \in I$ :  
Wir definieren die **Vereinigungsrelation**  $f = \bigcup_{i \in I} f_i$  durch

$$f = (X, F, Y) \quad \text{mit} \quad X = \bigcup_{i \in I} X_i, \quad Y = \bigcup_{i \in I} Y_i, \quad F = \bigcup_{i \in I} F_i.$$

😊 Da wir für Relationen nichts weiter als diese Daten verlangen, gelingt diese Konstruktion immer. Meist jedoch wollen wir weitere Eigenschaften erhalten, etwa für Funktionen: sie sind linkstotal und rechtseindeutig. Dazu schauen wir nun genauer hin.

## Anwendung: stückweise definierte Funktionen

Oft wollen wir Funktionen stückweise definieren, wie zum Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto |x| = \begin{cases} +x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

Das ist die Vereinigung von zwei Funktionen, nämlich

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto +x, \\ f_2 &: \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto -x. \end{aligned}$$

Im vorliegenden Falle ist ihre Vereinigung die Funktion

$$f_1 \cup f_2 = f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Nach Konstruktion ist  $f$  linkstotal, denn es gilt  $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \mathbb{R}_{\leq 0} = \mathbb{R}$ .  
Zudem ist  $f$  rechtseindeutig, dank  $f_1(0) = f_2(0)$  auf der Überlappung  $\mathbb{R}_{\geq 0} \cap \mathbb{R}_{\leq 0} = \{0\}$ . Das ist auch schon alles, was wir prüfen müssen!

😊 Dahinter steckt das folgende allgemeine Konstruktionsprinzip.

## Satz D2E: Vereinigung von Funktionen

Zu  $i \in I$  sei  $f_i: X_i \rightarrow Y_i$  eine Funktion, gegeben durch  $f_i = (X_i, F_i, Y_i)$ . Wir können dann die Vereinigungsrelation  $f = \bigcup_{i \in I} f_i$  betrachten:

$$f = (X, F, Y) \quad \text{mit} \quad X = \bigcup_{i \in I} X_i, \quad Y = \bigcup_{i \in I} Y_i, \quad F = \bigcup_{i \in I} F_i$$

Genau dann ist  $f = \bigcup_{i \in I} f_i$  eine Funktion, geschrieben  $f: X \rightarrow Y$ , wenn die folgende **Schnittbedingung** erfüllt ist:

$$\text{Für alle } i, j \in I \text{ und } x \in X_i \cap X_j \text{ gilt } f_i(x) = f_j(x).$$

Sind die Startmengen paarweise disjunkt, also  $X_i \cap X_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$ , so schreiben wir dies zur Betonung als disjunkte Summe  $f = \bigsqcup_{i \in I} f_i$ .

**Beweis:** Nach Konstruktion ist  $f$  linkstotal: Zu jedem  $x \in X$  existiert mindestens ein Index  $i \in I$  mit  $x \in X_i$ . Da  $f_i: X_i \rightarrow Y_i$  eine Funktion ist, existiert genau ein  $y \in Y_i$  mit  $(x, y) \in F_i$ , und somit gilt  $(x, y) \in F$ . Die Schnittbedingung garantiert, dass  $f$  rechtseindeutig ist. QED

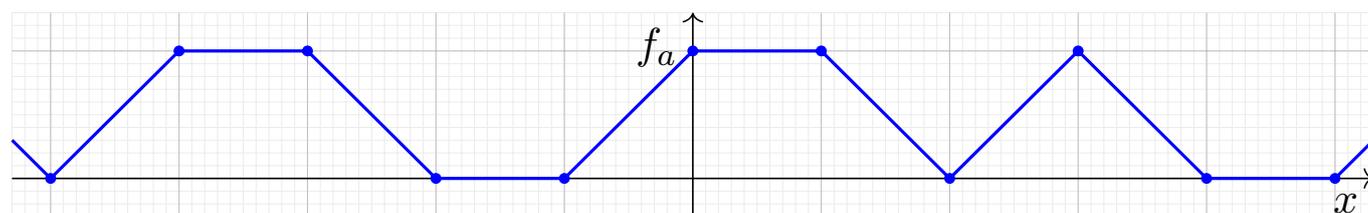
## Anwendung: stückweise definierte Funktionen

😊 Satz D2E erklärt die Konstruktion von stückweise definierten Funktionen; das ist überall sehr bequem und flexibel.

**Beispiele:** Wir konstruieren so die folgenden Funktionen:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}, \quad g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x^2 > 2 \\ 1 & \text{für } x^2 < 2 \end{cases},$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}, \quad k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x \leq 0 \end{cases}.$$



Zu jeder Folge  $a: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$  sei  $f_a: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  die affine Interpolation mit  $f_a(x) = (1 - t)a_k + ta_{k+1}$  für  $x = k + t$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  und  $t \in [0, 1]$ .

Die **Menge aller Relationen zwischen  $X$  und  $Y$**  bezeichnen wir mit

$$\text{Rel}(X, Y) := \{ f = (X, F, Y) \mid F \subseteq X \times Y \}.$$

Für je drei Mengen  $X, Y, Z$  haben wir

$$\text{id}_X \in \text{Rel}(X, X),$$

$$\top : \text{Rel}(X, Y) \rightarrow \text{Rel}(Y, X) : f \mapsto f^\top,$$

$$\circ : \text{Rel}(Y, Z) \times \text{Rel}(X, Y) \rightarrow \text{Rel}(X, Z) : (g, f) \mapsto h = g \circ f,$$

$$\bullet : \text{Rel}(X, Y) \times \text{Rel}(Y, Z) \rightarrow \text{Rel}(X, Z) : (f, g) \mapsto h = f \bullet g.$$

Die Linkskomposition  $\circ$  ist üblich, die Rechtskomposition  $\bullet$  natürlich. Die Komposition ist assoziativ, und die passende Identität ist neutral. Es gilt  $\text{id}_X^\top = \text{id}_X$  sowie  $(g \circ f)^\top = f^\top \circ g^\top$  und  $(f \bullet g)^\top = g^\top \bullet f^\top$ .

**Übung:** Sind  $f$  und  $g$  beide links- / rechtseindeutig / links- / rechtstotal / Funktionen / Injektionen / Surjektionen / Bijektionen, so auch  $g \circ f = f \bullet g$ .

Die **Menge aller Abbildungen von  $X$  nach  $Y$**  bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} \text{Abb}(X, Y) &= \text{Fun}(X, Y) = \text{Map}(X, Y) = Y^X = \{ f : X \rightarrow Y \} \\ &:= \{ f = (X, F, Y) \mid F \subseteq X \times Y \text{ linkstotal und rechtseindeutig} \}. \end{aligned}$$

**Beispiel:** Es gilt  $\text{Abb}(\emptyset, Y) = \{(\emptyset, \emptyset, Y)\}$  und  $\text{Abb}(X, \emptyset) = \{\}$  für  $X \neq \emptyset$ .

Die (Links/Rechts)Komposition definiert hierauf die Verknüpfungen

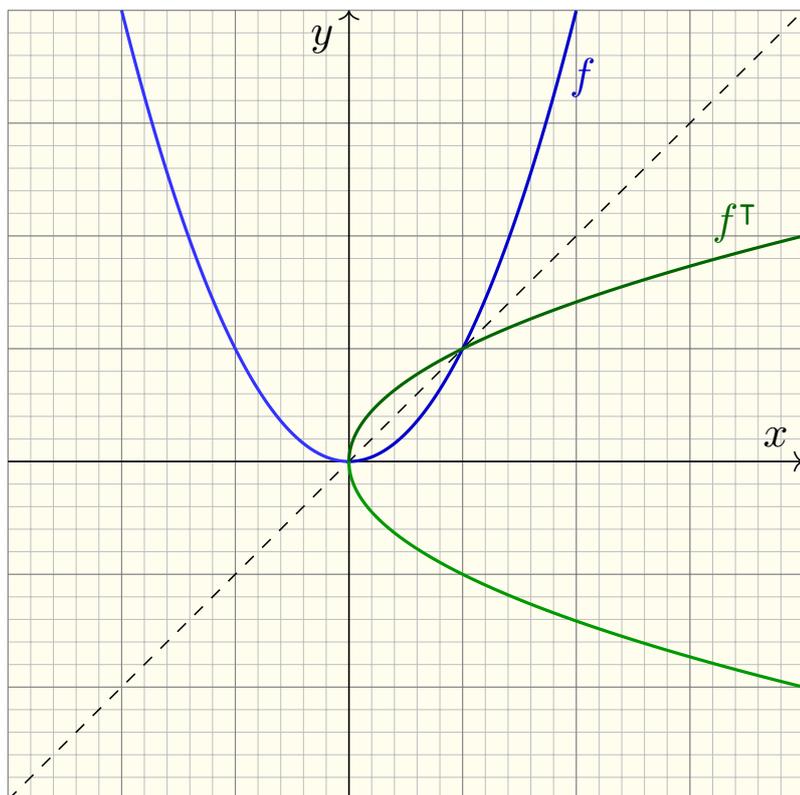
$$\circ : \text{Abb}(Y, Z) \times \text{Abb}(X, Y) \rightarrow \text{Abb}(X, Z) : (g, f) \mapsto h = g \circ f,$$

$$\bullet : \text{Abb}(X, Y) \times \text{Abb}(Y, Z) \rightarrow \text{Abb}(X, Z) : (f, g) \mapsto h = f \bullet g.$$

Die Komposition ist assoziativ, und die passende Identität ist neutral. Gleiches gilt für  $\text{Bij}(X, Y)$ ,  $\text{Inj}(X, Y)$ ,  $\text{Sur}(X, Y) \subseteq \text{Abb}(X, Y)$ .

**⚠** Ist  $f$  eine Funktion, so ist  $f^\top$  im Allgemeinen nur eine Relation. Genau dann ist auch  $f^\top$  eine Funktion, wenn  $f$  bijektiv ist. In diesem Falle ist  $f^\top = f^{-1}$  die Umkehrfunktion (D3A).

## Die Umkehrrelation ist im Allgemeinen keine Funktion!



Hier ist  $f$  die Funktion  
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ,  
 also  $f = (\mathbb{R}, F, \mathbb{R})$  mit  
 $F = \{ (x, x^2) \mid x \in \mathbb{R} \}$ .

Die Umkehrrelation  
 $f^\top = (\mathbb{R}, F^\top, \mathbb{R})$  mit  
 $F^\top = \{ (x^2, x) \mid x \in \mathbb{R} \}$   
 ist keine Funktion:

Sie ist weder linkstotal  
 noch rechtseindeutig!

😊 Dies gelingt erst durch eine geeignete Einschränkung, etwa auf einen Parabelzweig zu  $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x^2$  oder  $h : \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x^2$ .

## Die Umkehrrelation ist im Allgemeinen keine Funktion!

Aus der Schule kennen Sie die Merkregel: *Die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  entsteht aus  $f$  durch Spiegelung an der (Haupt-)Diagonalen.*

Für umkehrbare Funktionen stimmt dies tatsächlich!

Das ist der Inhalt des folgenden Satzes D3A.

Sie wissen auch, dass dies nicht immer so einfach funktioniert, hier sehen Sie ein einfaches, aber recht eindrückliches Beispiel: Die ersehnte Spiegelung  $f \mapsto f^\top$  ergibt hier leider keine Funktion, aber immerhin eine Relation. Wir haben das passende Vokabular!

Das ist einer der Gründe, auch allgemein über Relationen zu sprechen: Dieser universelle Rahmen verlangt wenig, und viele grundlegende Konstruktionen gelingen hier immer. Selbst wenn wir vorrangig an Funktionen interessiert sind, so sind Relationen ein gutes Habitat.

Ein weiterer wichtiger Grund ist, dass wir ohnehin Äquivalenzrelationen und Ordnungsrelationen nutzen wollen. Am Relationsbegriff sollten wir also nicht zwanghaft sparen, er ist in jeder Hinsicht hilfreich und nützlich.

## Einschränkung von Relationen

Sei  $f = (X, F, Y)$  eine Relation sowie  $A \subseteq X$  und  $B \subseteq Y$  Teilmengen. Dies definiert die **Einschränkung in Startmenge und Zielmenge**

$$f|_A^B := (A, E, B) \quad \text{mit} \quad E := F \cap (A \times B)$$

Diese Einschränkung von  $X \times Y$  auf  $A \times B$  definiert die Abbildung

$$\text{Rel}(X, Y) \rightarrow \text{Rel}(A, B) : f \mapsto f|_A^B.$$

Zwei Spezialfälle sind die Einschränkung in der Startmenge  $f|_A := f|_A^Y$  und entsprechend die Einschränkung in der Zielmenge  $f|^B := f|_X^B$ .

Zu jeder Teilmenge  $A \subseteq X$  definieren wir ihre **Inklusion(sabbildung)**

$$\iota_A = \iota_A^X := (A, \Delta_A, X) \quad \text{also} \quad \iota_A^X : A \rightarrow X : a \mapsto a.$$

Damit gilt dann  $f|_A = \iota_A \bullet f$  und  $f|^B = f \bullet \iota_B^\top$ , also  $f|_A^B = \iota_A \bullet f \bullet \iota_B^\top$ , gleichbedeutend  $f|_A = f \circ \iota_A$  und  $f|^B = \iota_B^\top \circ f$ , also  $f|_A^B = \iota_B^\top \circ f \circ \iota_A$ .

**Übung:** Schreiben Sie die Kompositionen aus und prüfen Sie es nach.

## Einschränkung von Abbildungen

Gegeben sei eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  sowie  $A \subseteq X$  und  $B \subseteq Y$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow \iota_A^X & \begin{array}{c} x \mapsto f(x) \\ \downarrow \end{array} & \uparrow \iota_B^Y \\ A & \xrightarrow{f|_A^B} & B \end{array}$$

Genau dann ist die Einschränkung  $f|_A^B$  eine Funktion, wenn  $f(A) \subseteq B$ :

$$f|_A^B : A \rightarrow B : x \mapsto f(x), \quad \iota_B^Y \circ f|_A^B = f \circ \iota_A^X$$

Wichtige Spezialfälle: Immer gilt  $f(A) \subseteq Y$  und manchmal  $f(X) \subseteq B$ :

$$\begin{array}{ll} f|_A = f|_A^Y : A \rightarrow Y : x \mapsto f(x), & f|_A = f \circ \iota_A^X \\ f|^B = f|_X^B : X \rightarrow B : x \mapsto f(x), & f = \iota_B^Y \circ f|^B \end{array}$$

## Beispiel zur Einschränkung von Abbildungen

**Beispiel:** Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2.$$

Die Zielmenge können wir auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  einschränken:

$$g = f|_{\mathbb{R}_{\geq 0}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x^2$$

Die Zielmenge können wir jedoch nicht auf  $[0, 5]$  einschränken:

  ~~$f|_{[0,5]} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 5] : x \mapsto x^2$~~

Die Relation  $f|_{[0,5]}$  ist keine Abbildung mehr! Hingegen gilt

$$f([0, 2]) = [0, 4] \subseteq [0, 5].$$

Daher können wir  $f$  einschränken zur Abbildung

  $h = f|_{[0,2]}^{[0,5]} : [0, 2] \rightarrow [0, 5] : x \mapsto x^2.$

Die Einschränkung  $f|_{[0,2]}^{[0,4]} : [0, 2] \rightarrow [0, 4] : x \mapsto x^2$  ist sogar bijektiv.

## Beispiel zur Einschränkung von Verknüpfungen

**Beispiel:** Wir betrachten die Multiplikation der rationalen Zahlen

$$\mu : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : (x, y) \mapsto x \cdot y.$$

Hier können wir die Zielmenge nicht auf  $\mathbb{Z}$  einschränken:

  ~~$\mu|_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} : (x, y) \mapsto x \cdot y$~~

Die Relation  $\mu|_{\mathbb{Z}}$  ist keine Abbildung mehr! Hingegen gilt

$$\mu(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}.$$

Daher können wir die Multiplikation  $\mu$  einschränken zu

  $\mu|_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : (x, y) \mapsto x \cdot y.$

Diese Einschränkung ist genau die übliche Multiplikation auf  $\mathbb{Z}$ .

Dasselbe gilt für Addition und Multiplikation auf  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

Das ist das **Fortsetzungsprinzip** beim Aufbau des Zahlensystems: Die Verknüpfungen werden schrittweise erweitert, wie hier gezeigt.

Sei  $f : X \rightarrow Y : x \mapsto f(x)$  eine Abbildung von  $X$  nach  $Y$ .  
Zu gegebenem  $y \in Y$  wollen wir folgende Gleichung lösen:

$$f(x) = y$$

Die Abbildung  $f$  ist surjektiv / injektiv / bijektiv, wenn zu jedem  $y \in Y$  mindestens / höchstens / genau ein  $x \in X$  existiert mit  $f(x) = y$ .

**Beispiel:** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper, wie  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ , oder ein Ring, wie  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_n$ ,  $\mathbb{H}$ .  
Jede Matrix  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  definiert die zugehörige Abbildung

$$f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m : x \mapsto f(x) = Ax.$$

Die Abbildung  $f$  ist surjektiv / injektiv / bijektiv, wenn zu jedem  $y \in \mathbb{K}^m$  mindestens / höchstens / genau ein  $x \in \mathbb{K}^n$  existiert mit  $Ax = y$ .

😊 Das Lösen einer Gleichung  $f(x) = y$  ist ein typisches, ja universelles Grundproblem in der Mathematik und ihren zahlreichen Anwendungen.

Die zunächst abstrakten Begriffe surjektiv / injektiv / bijektiv werden daher in jeder Anwendung sogleich konkret und praktisch relevant:  
Sie regieren die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen!

😊 Speziell für lineare Gleichungen der Form  $Ax = y$  mit  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  betrachten wir die Abbildung  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m : x \mapsto f(x) = Ax$ .

Zur Lösung kennen Sie eine sehr effiziente Methode aus Kapitel B:  
Der Gauß-Algorithmus B2c bringt jede Matrix auf Zeilenstufenform!

Daran können wir systematisch *alle* Lösungen von  $Ax = y$  ablesen und somit auch die Surjektivität / Injektivität / Bijektivität von  $f$  klären.

## Illustration: Lösungen linearer Gleichungssysteme

## ◆ Satz B2D: Invertierbarkeitskriterien für Matrizen

Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper, wie  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$ ; es genügt ein Divisionsring, wie  $\mathbb{H}$ . Zur Matrix  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  untersuchen wir  $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m: x \mapsto f(x) = Ax$ . Dazu bringen wir  $A$  auf Zeilenstufenform  $A'$ , mit Rang  $r \leq \min\{m, n\}$ .

**(1) Surjektivität.** Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

- (a) Zu jedem  $y \in \mathbb{K}^m$  existiert mindestens ein  $x \in \mathbb{K}^n$  mit  $Ax = y$ .
- (b) Die Matrix  $A$  ist rechtsinvertierbar,  $\exists C \in \mathbb{K}^{n \times m}: AC = 1_{m \times m}$ .
- (c) Es gilt  $r = m \leq n$ , also Rang gleich Zeilenzahl.

**(2) Injektivität.** Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

- (a) Zu jedem  $y \in \mathbb{K}^m$  existiert höchstens ein  $x \in \mathbb{K}^n$  mit  $Ax = y$ .
- (b) Die Matrix  $A$  ist linksinvertierbar,  $\exists B \in \mathbb{K}^{n \times m}: BA = 1_{n \times n}$ .
- (c) Es gilt  $r = n \leq m$ , also Rang gleich Spaltenzahl.

**(3) Bijektivität.** Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

- (a) Zu jedem  $y \in \mathbb{K}^m$  existiert genau ein  $x \in \mathbb{K}^n$  mit  $Ax = y$ .
- (b) Die Matrix  $A$  ist invertierbar,  $\exists B \in \mathbb{K}^{n \times m}: BA = 1_{n \times n}, AB = 1_{m \times m}$ .
- (c) Es gilt  $r = m = n$ , also  $A$  quadratisch mit vollem Rang.

## Illustration: Lösungen linearer Gleichungssysteme

😊 Sie kennen diesen schönen Satz bereits aus Kapitel B:

Er ist sehr elegant und effizient, zudem konkret und praktisch. Daher wollte ich die ganz handfeste Matrizenrechnung voranstellen, damit Sie einerseits möglichst früh effizient arbeiten können und andererseits gute Vorbilder haben für spätere Entwicklungen.

Sie sehen schöne Parallelen zum allgemeinen Fall von Abbildungen. Matrizen sind in gewisser Weise sehr konkret und noch übersichtlich, Abbildungen anfangs ungewohnt und schwindelerregend allgemein. Ich hoffe, die zahlreichen konkreten Parallelen fördern Ihr Zutrauen.

Auch für Abbildungen klären wir nun die Frage der Invertierbarkeit. Der obige Satz B2D zur Inversion von Matrizen entspricht dem Satz D3A zur Inversion von Abbildungen, wie nachfolgend erklärt.

## Invertierbarkeit von Abbildungen

Vorgelegt seien Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g, h : Y \rightarrow X$ .

Wir nutzen im Folgenden die Komposition von links:

$$g \circ f : X \rightarrow X : x \mapsto g(f(x))$$

$$f \circ h : Y \rightarrow Y : y \mapsto f(h(y))$$

Wir nennen  $g$  **linksinvers** zu  $f$ , falls  $g \circ f = \text{id}_X$  gilt.

Wir nennen  $h$  **rechtsinvers** zu  $f$ , falls  $f \circ h = \text{id}_Y$  gilt.

Ist  $g$  linksinvers zu  $f$  und  $h$  rechtsinvers zu  $f$ , so folgt  $g = h$ , denn

$$g \stackrel{\text{rNtr}}{=} g \circ \text{id}_Y \stackrel{\text{rInv}}{=} g \circ (f \circ h) \stackrel{\text{Ass}}{=} (g \circ f) \circ h \stackrel{\text{lInv}}{=} \text{id}_X \circ h \stackrel{\text{lNtr}}{=} h.$$

Wir nennen  $g$  **invers** zu  $f$ , falls  $g \circ f = \text{id}_X$  und  $f \circ g = \text{id}_Y$  gilt.

Damit ist  $g$  eindeutig durch  $f$  bestimmt, und wir schreiben  $f^{-1} := g$ .

Die Abbildung  $f$  heißt **invertierbar**, falls zu  $f$  eine Inverse  $g$  existiert.

😊 Genau dieselben Begriffe kennen wir bereits von Matrizen B125.

Wir benötigen dazu nur Assoziativität und Links-/Rechts-Neutrale.

Dieselbe Rechnung gilt daher auch in jedem Monoid, siehe B1c.

## Einseitige Inverse sind nicht immer eindeutig.

### Die **Quadratfunktion**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x^2$$

hat mehrere Rechtsinverse  $h$ , mit  $f \circ h = \text{id}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ , zum Beispiel

$$h_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto +\sqrt{x},$$

$$h_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -\sqrt{x}.$$

### Die **Wurzelfunktion**

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$$

hat mehrere Linksinverse  $g$ , mit  $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ , zum Beispiel

$$g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x^2,$$

$$g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x \cdot |x|.$$

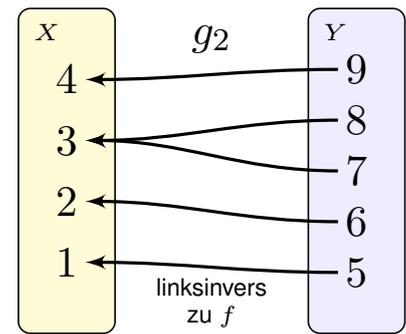
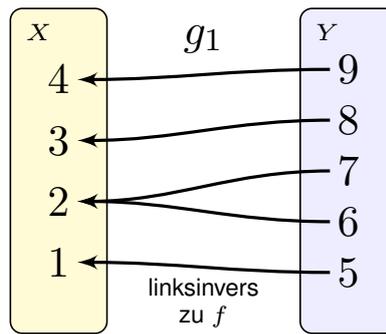
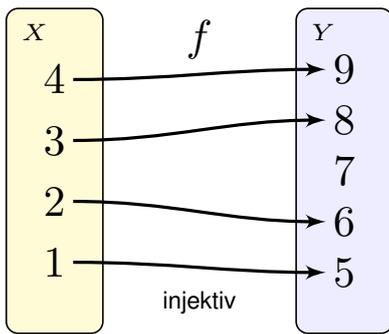
😊 Insbesondere kann  $f$  in diesen Fällen nicht invertierbar sein:

Wäre  $f$  invertierbar, so gäbe es nur genau eine Linksinverse und

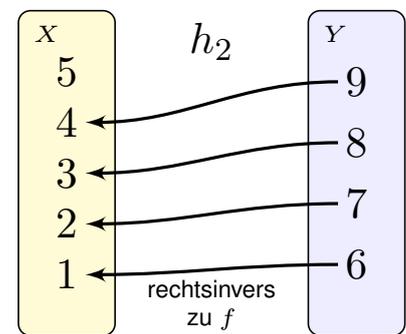
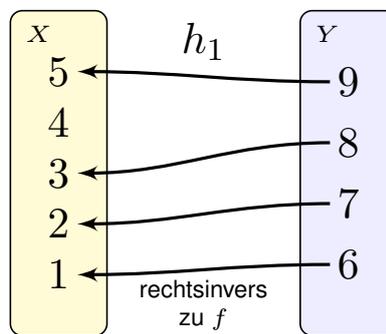
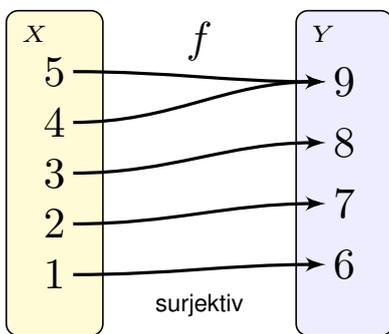
nur genau eine Rechtsinverse, nämlich die (eindeutige!) Inverse zu  $f$ .

## Einseitige Inverse sind nicht immer eindeutig.

Zu  $f : X \rightarrow Y$  injektiv existiert  $g : Y \rightarrow X$  mit  $g \circ f = \text{id}_X$ :



Zu  $f : X \rightarrow Y$  surjektiv existiert  $h : Y \rightarrow X$  mit  $f \circ h = \text{id}_Y$ :



## Einseitige Inverse sind nicht immer eindeutig.

Einseitige Inverse sind im Allgemeinen nicht eindeutig.  
Dieses Phänomen kennen Sie bereits von Matrizen (B126).

Die obigen Beispiele illustrieren dies nun für Abbildungen.  
In den Bildern erkennen Sie eine allgemeine Konstruktion:

- Jede Surjektion  $f : X \twoheadrightarrow Y$  erlaubt (mindestens) eine Rechtsinverse:  
Zu jedem Zielpunkt  $y \in Y$  existiert mindestens ein Urbild  $x \in X$ .  
Im Allgemeinen müssen wir willkürlich wählen, wie skizziert.
- Jede Injektion  $f : X \hookrightarrow Y$  erlaubt (mindestens) eine Linksinverse:  
Zu jedem Bildpunkt  $y \in \text{im}(f)$  existiert höchstens ein Urbild  $x \in X$ .  
Im Allgemeinen müssen wir willkürlich ergänzen, wie skizziert.
- Jede Bijektion  $f : X \xrightarrow{\sim} Y$  erlaubt eine eindeutige Inverse.  
Zu jedem Zielpunkt  $y \in Y$  existiert genau ein Urbild  $x \in X$ .  
Zu dieser Konstruktion ist keine Wahl nötig oder möglich.

😊 Der folgende Satz führt diese Beobachtung präzise aus.

# Invertierbarkeitskriterien für Abbildungen

## Satz D3A: Invertierbarkeitskriterien für Abbildungen

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

(1) **Bijektivität.** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1a)  $f$  ist bijektiv:  $\forall y \in Y \exists! x \in X : f(x) = y$ .

(1b)  $f$  ist invertierbar:  $\exists (g : Y \rightarrow X) : g \circ f = \text{id}_X \wedge f \circ g = \text{id}_Y$ .

😊 Die Inverse  $g$  zu  $f$  ist eindeutig. Wir schreiben  $f^{-1} := g$ .

(2) **Injektivität.** Mit  $X \neq \emptyset$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(2a)  $f$  ist injektiv:  $\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

(2b)  $f$  ist linksinvertierbar:  $\exists (g : Y \rightarrow X) : g \circ f = \text{id}_X$ .

⚠ Zur Konstruktion „(2a)  $\Rightarrow$  (2b)“ müssen wir  $X \neq \emptyset$  voraussetzen. Linksinverse zu  $f$  sind im Allgemeinen nicht eindeutig, siehe oben.

(3) **Surjektivität.** Mit AC sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(3a)  $f$  ist surjektiv:  $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$ .

(3b)  $f$  ist rechtsinvertierbar:  $\exists (g : Y \rightarrow X) : f \circ g = \text{id}_Y$ .

⚠ Für „(3a)  $\Rightarrow$  (3b)“ müssen wir aus  $X = \bigsqcup_{y \in Y} f^{-1}(\{y\})$  auswählen. Rechtsinverse zu  $f$  sind im Allgemeinen nicht eindeutig, siehe oben.

## Bijektiv $\Leftrightarrow$ invertierbar

**Beweis:** (3)  $f$  surjektiv  $\Leftrightarrow f$  rechtsinvertierbar.

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $f \circ g = \text{id}_Y$ . Zu jedem  $y \in Y$  und  $x = g(y)$  gilt dann:

$$f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = \text{id}_Y(y) = y$$

(2)  $f$  injektiv  $\Leftrightarrow f$  linksinvertierbar.

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $g \circ f = \text{id}_X$ . Für alle  $x, x' \in X$  gilt dann:

$$f(x) = f(x') \implies g(f(x)) = g(f(x')) \implies x = x'$$

(1)  $f$  bijektiv  $\Leftrightarrow f$  invertierbar.

„ $\Leftarrow$ “: Dies folgt aus „(2a)  $\Leftarrow$  (2b)“ und „(3a)  $\Leftarrow$  (3b)“.

„ $\Rightarrow$ “: Ist  $f$  bijektiv, so ist  $g = f^{-1}$  eine Funktion und invers zu  $f$ .

$$f = (X, F, Y) \quad \text{mit Graph} \quad F = \{ (x, f(x)) \mid x \in X \}$$

$$g = (Y, G, X) \quad \text{mit Graph} \quad G = \{ (f(x), x) \mid x \in X \}$$

Ausführlich: Wir konstruieren  $g : Y \rightarrow X$  wie folgt. Zu jedem  $y \in Y$  existiert genau ein Urbild  $x \in X$ , mit  $f(x) = y$ , und wir setzen  $g(y) = x$ . Es gilt dann  $f(g(y)) = f(x) = y$  und  $g(f(x)) = g(y) = x$ .

## Injektiv $\Leftrightarrow$ linksinvertierbar

(2)  $f$  injektiv  $\Leftrightarrow f$  linksinvertierbar.

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $x_0 \in X$ ; hierzu muss die Menge  $X$  nicht-leer sein.

Wir konstruieren  $g: Y \rightarrow X$  durch Fallunterscheidung:

- Zu jedem  $y \in \text{im}(f)$  existiert genau ein Urbild  $x \in X$ , mit  $f(x) = y$ . Wir setzen  $g(y) = x$ .
- Für  $y \in Y \setminus \text{im}(f)$  setzen wir  $g(y) = x_0$ .

Für jedes Element  $x \in X$  gilt dann  $g(f(x)) = g(y) = x$ , also  $g \circ f = \text{id}_X$ .

 Im Falle  $X = \emptyset \neq Y$  gilt  $\text{Abb}(\emptyset, Y) = \{(\emptyset, \emptyset, Y)\}$  und  $\text{Abb}(Y, \emptyset) = \{\}$ .

Hier ist  $f = (\emptyset, \emptyset, Y): X \hookrightarrow Y$  injektiv, aber nicht linksinvertierbar:

Es gibt hier keine Abbildung  $g: Y \rightarrow X$ , denn  $\text{Abb}(Y, \emptyset) = \{\}$ .

Die einzige Relation  $g = (Y, \emptyset, \emptyset)$  in  $\text{Rel}(Y, \emptyset)$  ist nicht linkstotal.

 Im Sonderfall  $X = Y = \emptyset$  ist  $f = (\emptyset, \emptyset, \emptyset): X \xrightarrow{\sim} Y$  eine Bijektion und tatsächlich invertierbar dank  $f \circ f = f = \text{id}_\emptyset$ . Ist das Haarspalterei?

Wir können jetzt genau sein, also *sollten* wir jetzt auch genau sein.

 Manchmal lohnt Nullologie: Nachdenken über die leere Menge.

## Surjektiv $\Leftrightarrow$ rechtsinvertierbar

(3)  $f$  surjektiv  $\Leftrightarrow f$  rechtsinvertierbar.

„ $\Rightarrow$ “: Wir konstruieren eine Rechtsinverse  $g: Y \rightarrow X$  wie folgt.

Zu jedem  $y \in Y$  ist die Urbildmenge  $f^{-1}(\{y\})$  nicht leer.

Wir wählen ein  $x \in f^{-1}(\{y\})$  und setzen  $g(y) = x$ .

Damit gilt  $f(g(y)) = f(x) = y$ , also  $f \circ g = \text{id}_Y$ .

Formale Ausführung: Wir haben die Zerlegung  $X = \bigsqcup_{y \in Y} f^{-1}(\{y\})$ .

Hierzu existiert eine Repräsentantenmenge  $R$  dank Auswahlaxiom.

Damit definieren wir die Abbildung  $g: Y \rightarrow X$  durch

$$g = (Y, G, X) \quad \text{mit Graph} \quad G = \{ (f(x), x) \mid x \in R \}$$

Diese Relation ist linkstotal und rechtseindeutig, denn zu jedem  $y \in Y$  existiert genau ein  $x \in R$  mit  $x \in f^{-1}(\{y\})$  (Auswahlmenge, D123).

Für jedes Element  $y \in Y$  gilt dann  $f(g(y)) = f(x) = y$ .

 Für diese einfache und grundlegende Konstruktion benötigen wir zum ersten Mal das Auswahlaxiom. Es wird nicht das letzte Mal sein.

**Aufgabe:** Für jede Relation  $f = (X, F, Y)$  haben wir  $F \bullet F^\top \subseteq X \times X$  und  $F^\top \bullet F \subseteq Y \times Y$ . Genauer gelten dabei folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} F \bullet F^\top \supseteq \Delta_X &\iff f \text{ ist linkstotal} \\ F \bullet F^\top \subseteq \Delta_X &\iff f \text{ ist linkseindeutig} \\ F^\top \bullet F \supseteq \Delta_Y &\iff f \text{ ist rechtstotal} \\ F^\top \bullet F \subseteq \Delta_Y &\iff f \text{ ist rechtseindeutig} \end{aligned}$$

Genau dann gilt  $f \bullet f^\top = \text{id}_X$  und  $f^\top \bullet f = \text{id}_Y$ , wenn  $f$  eine Bijektion ist:

$$\begin{cases} \forall x \in X \exists! y \in Y : (x, y) \in F & \text{das heißt } f \text{ ist eine Funktion} \\ \forall y \in Y \exists! x \in X : (x, y) \in F & \text{das heißt } f^\top \text{ ist eine Funktion} \end{cases}$$

In Worten: Die Relation  $F$  zwischen  $X$  und  $Y$  ordnet jedem  $x \in X$  genau ein  $y \in Y$  zu und umgekehrt jedem  $y \in Y$  genau ein  $x \in X$ .

Daher heißt  $F$  auch **Eins-zu-Eins-Korrespondenz** zwischen  $X$  und  $Y$ . Diesen älteren Sprachgebrauch finden Sie insbesondere noch in vielen englischsprachigen Büchern und mathematischen Anwendungen.

**Lösung:** Wir setzen direkt die Definition D2B der Komposition ein:

Genau dann gilt  $x (F \bullet F^\top) x'$ , wenn ein  $y \in Y$  existiert mit  $x F y F^\top x'$ .

(1) Demnach ist  $F \bullet F^\top \supseteq \Delta_X$  äquivalent zu: Zu jedem  $x \in X$  existiert mindestens ein  $y \in Y$  mit  $x F y$ . Das bedeutet,  $F$  ist linkstotal.

(2) Ebenso ist  $F \bullet F^\top \subseteq \Delta_X$  äquivalent zu: Zu  $x \neq x'$  in  $X$  existiert kein  $y \in Y$  mit  $x F y$  und  $x' F y$ . Das bedeutet,  $F$  ist linkseindeutig.

Die letzten beiden Äquivalenzen ergeben sich aus den ersten beiden durch Vertauschen der Rollen. Ich wiederhole sie zur Betonung:

Genau dann gilt  $y (F^\top \bullet F) y'$ , wenn ein  $x \in X$  existiert mit  $y F^\top x F y'$ .

(3) Demnach ist  $F^\top \bullet F \supseteq \Delta_Y$  äquivalent zu: Zu jedem  $y \in Y$  existiert mindestens ein  $x \in X$  mit  $x F y$ . Das bedeutet,  $F$  ist rechtstotal.

(4) Ebenso ist  $F^\top \bullet F \subseteq \Delta_Y$  äquivalent zu: Zu  $y \neq y'$  in  $Y$  existiert kein  $x \in X$  mit  $x F y$  und  $x F y'$ . Das bedeutet,  $F$  ist rechtseindeutig.

😊 Eine Relation  $f$  ist also genau dann invertierbar durch  $f^\top$ , wenn  $f$  eine Bijektion ist; in diesem Falle ist  $f^\top = f^{-1}$  die Umkehrfunktion.

**Aufgabe:** Seien  $f = (X, F, Y)$  und  $g = (Y, G, X)$  Relationen.  
 Unter welchen Bedingungen gilt  $f \bullet g = \text{id}_X$  und  $g \bullet f = \text{id}_Y$ ?  
 Gilt dies nur, wenn  $f$  und  $g$  zueinander inverse Bijektionen sind?

**Lösung:** Wir setzen direkt die Definition D2B der Komposition ein:  
 Genau dann gilt  $x (F \bullet G) x'$ , wenn ein  $y \in Y$  existiert mit  $x F y G x'$ .  
 (1) Sei  $F \bullet G \supseteq \Delta_X$ : Für jedes  $x \in X$  gilt  $x (F \bullet G) x$ , das bedeutet:  
 Es existiert  $y \in Y$  mit  $x F y G x$ . Somit ist  $f$  linkstotal und  $g$  rechtstotal.  
 (2) Sei  $F \bullet G = \Delta_X$ : Zu  $x \in X$  existiert  $y \in Y$  mit  $x F y G x$ .  
 Aus  $x' F y$  folgt  $x' (F \bullet G) x$ , also  $x' = x$ . Somit ist  $f$  linkseindeutig.  
 Aus  $y G x'$  folgt  $x (F \bullet G) x'$ , also  $x = x'$ . Somit ist  $g$  rechtseindeutig.  
 Wir vertauschen nun die Rollen von  $f$  und  $g$ . Aus  $G \bullet F = \Delta_Y$  folgt:  
 $g$  ist linkstotal und linkseindeutig,  $f$  ist rechtstotal und rechtseindeutig.

**Schlussfolgerung:** Genau dann gilt  $f \bullet g = \text{id}_X$  und  $g \bullet f = \text{id}_Y$ ,  
 wenn  $f : X \xrightarrow{\sim} Y$  und  $g : Y \xrightarrow{\sim} X$  zueinander inverse Bijektionen sind.  
 Kurz gesagt: Die invertierbaren Relationen sind genau die Bijektionen.

**Übung:** Sei  $f = (X, F, Y)$  eine Relation mit Graph  $F \subseteq X \times Y$ .  
 Die Einschränkung der beiden Projektionen definiert die Abbildungen  
 $p_1 : F \rightarrow X : (x, y) \mapsto x$  und  $p_2 : F \rightarrow Y : (x, y) \mapsto y$ . Damit erhalten wir:

$p_1$ ist surjektiv	$\iff$	$f$ ist linkstotal
$p_1$ ist injektiv	$\iff$	$f$ ist rechtseindeutig
$p_2$ ist surjektiv	$\iff$	$f$ ist rechtstotal
$p_2$ ist injektiv	$\iff$	$f$ ist linkseindeutig

Genau dann ist  $f$  eine Abbildung, wenn die Projektion  $p_1$  bijektiv ist.  
 In diesem Fall haben wir  $p_1^{-1} : X \rightarrow F : x \mapsto (x, f(x))$  und  $f = p_2 \circ p_1^{-1}$ .

😊 Anhand des Graphen  $F$  erklärt dies „graphisch“, ob die Relation  $f$   
 eine Funktion ist: Über jedem Punkt  $x \in X$  liegt genau ein Punkt  $y \in Y$ .

Genau dann ist  $f$  eine Bijektion, wenn  $p_1$  und  $p_2$  bijektiv sind.  
 In diesem Fall gilt  $f = p_2 \circ p_1^{-1} : X \rightarrow Y$  und  $f^{-1} = p_1 \circ p_2^{-1} : Y \rightarrow X$ .

😊 Der Graph  $F$  vermittelt die Eins-zu-Eins-Übersetzung von  $X$  nach  $Y$   
 und zurück,  $(F, F^\top)$  funktioniert wie ein zweisprachiges Wörterbuch.

## Bijektionen und Retrakte als Abbildungspaare

Die suggestive Schreibweise  $f : X \hookrightarrow Y$  bzw.  $X \twoheadrightarrow Y$  bzw.  $X \xrightarrow{\sim} Y$  bedeutet, dass  $f$  injektiv / surjektiv / bijektiv ist. Dies dient nur zur Betonung; die Aussage muss jeweils nachgewiesen werden.

### Definition D3B: Retrakt und Bijektion als Abbildungspaar

Ein **Retrakt**  $(i, r) : X \xrightarrow{\rightleftarrows} Y$ , genauer ein **Retraktionspaar**, besteht aus Abbildungen  $i : X \rightarrow Y$  und  $r : Y \rightarrow X$  mit  $r \circ i = \text{id}_X$ . Insbesondere ist  $r$  rechtsinvertierbar / surjektiv und  $i$  linksinvertierbar / injektiv. (Das jeweilige Gegenstück ist im Allgemeinen nicht eindeutig, wie oben gesehen, daher fassen wir hier beide explizit als ein Paar zusammen.)

Eine **Bijektion**  $(f, g) : X \cong Y$ , genauer ein **Bijektionspaar**, besteht aus Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow X$  mit  $g \circ f = \text{id}_X$  und  $f \circ g = \text{id}_Y$ . Das bedeutet,  $f$  und  $g$  sind zueinander invers,  $f^{-1} = g$  und  $g^{-1} = f$ . (Es genügt, eine anzugeben, die andere ist dann eindeutig bestimmt. Es ist jedoch oft bequem, das Paar vollständig und explizit anzugeben.)

Existiert eine Bijektion  $(f, g) : X \cong Y$ , so nennen wir die Mengen  $X$  und  $Y$  **gleichmächtig** oder **in Bijektion**, abgekürzt  $X \cong Y$ .

## Bijektionen und Retrakte als Abbildungspaare

**Beispiele:** Folgende Paare sind vertraute Bijektionen bzw. Retrakte:

$$(f, g) : \mathbb{R} \xrightarrow{\rightleftarrows} \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{mit} \quad f(x) = x^2, \quad g(y) = \sqrt{y}$$

$$(h, k) : \mathbb{R}_{\geq 0} \cong \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{mit} \quad h(x) = x^2, \quad k(y) = \sqrt{y}$$

$$(i, j) : \mathbb{R} \cong \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad i(x) = x^3, \quad j(y) = \sqrt[3]{y}$$

$$(\exp, \ln) : \mathbb{R} \cong \mathbb{R}_{> 0} \quad \text{dank} \quad \ln(e^x) = x, \quad e^{\ln y} = y$$

$$(\text{id}_{\mathbb{R}}, \text{id}_{\mathbb{R}}) : \mathbb{R} \cong \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \text{id}_{\mathbb{R}}(x) = x$$

$$(n, n) : \mathbb{R} \cong \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad n(x) = -x$$

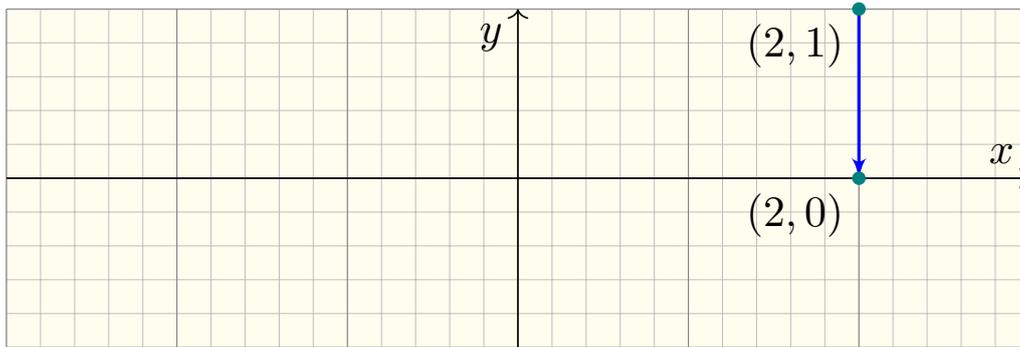
$$(i, i) : \mathbb{R}^* \cong \mathbb{R}^* \quad \text{mit} \quad i(x) = x^{-1}$$

$$(\top, \top) : \mathbb{K}^{m \times n} \cong \mathbb{K}^{n \times m} \quad \text{mit} \quad A \leftrightarrow A^\top$$

$$(\top, \top) : \text{Rel}(X, Y) \cong \text{Rel}(Y, X) \quad \text{mit} \quad f \leftrightarrow f^\top$$

😊 Die Konstruktion eines Paares  $(i, r) : X \xrightarrow{\rightleftarrows} Y$  bzw.  $(f, g) : X \cong Y$  ist ein elegant-effizienter Beweis der Injektivität / Surjektivität / Bijektivität.

## Anwendung: Einbettung und Projektion



Wir können die reelle Gerade  $\mathbb{R}$  in die Ebene  $\mathbb{R}^2$  einbetten als  $x$ -Achse:

$$\iota = \iota_1 : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x, 0)$$

Wir können jeden Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  auf die  $x$ -Achse projizieren:

$$p = \text{pr}_1 : \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$$

Damit gilt  $p \circ \iota = \text{id}_{\mathbb{R}}$ . Wir erhalten so den Retrakt

$$(\iota, p) : \mathbb{R} \rightleftarrows \mathbb{R}^2.$$

Insbesondere ist  $\iota$  linksinv'bar / injektiv und  $p$  rechtsinv'bar / surjektiv.

## Anwendung: Einbettung und Projektion

😊 So gelingt insbesondere die Einbettung  $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x, 0)$ . Die Projektion  $\text{pr}_1 = \text{Re}$  ist der Realteil,  $\text{pr}_2 = \text{Im}$  ist der Imaginärteil.

😊 Derselbe Trick gelingt für *jedes* kartesische Produkt.

Seien  $X_1, \dots, X_n$  nicht-leer; wir wählen je einen Punkt  $a_k \in X_k$ .

Wir können  $X_k$  in das kartesische Produkt  $X = X_1 \times \dots \times X_n$  einbetten:

$$\iota_k : X_k \hookrightarrow X : x_k \mapsto (a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

Wir können jeden Punkt  $x \in X$  auf die  $k$ -te Koordinate projizieren:

$$p_k = \text{pr}_k : X \twoheadrightarrow X_k : (x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) \mapsto x_k$$

Damit gilt  $p_k \circ \iota_k = \text{id}_{X_k}$ . Wir erhalten so den Retrakt

$$(\iota_k, p_k) : X_k \rightleftarrows X.$$

Insbesondere ist  $\iota_k$  linksinv'bar / injektiv und  $p_k$  rechtsinv'bar / surjektiv.

⚠️ Ist einer der Faktoren  $X_k$  leer, so ist auch das Produkt  $X$  leer!

😊 Die Konstruktion eines Paares  $(i, r) : X \rightleftarrows Y$  bzw.  $(f, g) : X \cong Y$  ist ein eleganter Nachweis der Injektivität / Surjektivität / Bijektivität.

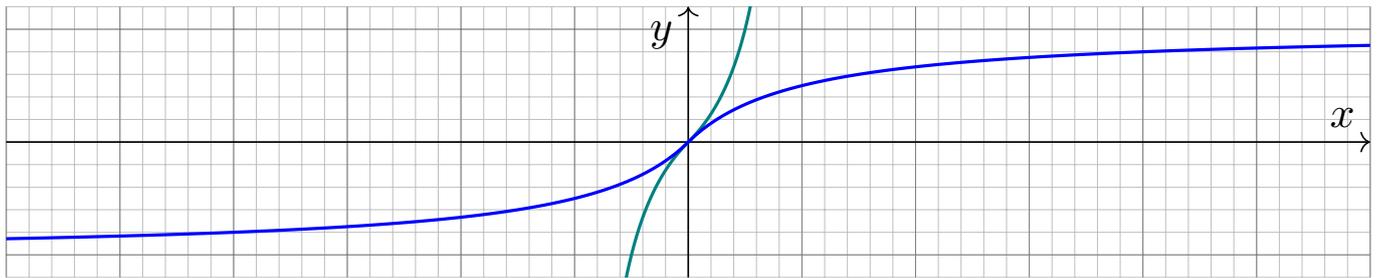
## Beispiel D3C: reelle Gerade und offenes Intervall

Es gilt  $\mathbb{R} \cong ]-1, 1[$ , genauer  $(f, g) : \mathbb{R} \cong ]-1, 1[$  vermöge

$$f : \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[ : x \mapsto x/(1 + |x|),$$

$$g : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto y/(1 - |y|).$$

😊 Stehen die Abbildungen erst einmal vor uns, so genügt sorgfältiges Nachrechnen! Haben Sie also keine Angst vor expliziten Formeln, sie sind nicht Fluch, sondern Segen. Rechnen reinigt die Seele.



😊 Unsere beiden Abbildungen  $f$  und  $g$  sind zudem stetig, sogar stetig differenzierbar. In der Analysis / Topologie ist dies ein schönes Beispiel für einen **Homöomorphismus** bzw. **Diffeomorphismus**  $\mathbb{R} \cong ]-1, 1[$ .

## Eine Bijektion zwischen reeller Gerade und offenem Intervall

**Behauptung:** Es gilt  $(f, g) : \mathbb{R} \cong ]-1, 1[$  mit

$$f : \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[ : x \mapsto x/(1 + |x|),$$

$$g : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto y/(1 - |y|).$$

**Beweis:** Nachrechnen!

**Ausführlich:** Die Abbildungen  $f$  und  $g$  sind wohldefiniert:

- Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $|f(x)| = |x|/(1 + |x|) < 1$ , also  $f(x) \in ]-1, 1[$ .
- Für jedes  $y \in ]-1, 1[$  erfüllt der Nenner die Bedingung  $1 - |y| \neq 0$ .

Zudem sind sie zueinander invers, wie wir geduldig nachrechnen:

$$g(f(x)) = \frac{x/(1 + |x|)}{1 - |x/(1 + |x|)|} = \frac{x}{1 + |x| - |x|} = x, \quad \text{also } g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$$

$$f(g(y)) = \frac{y/(1 - |y|)}{1 + |y/(1 - |y|)|} = \frac{y}{1 - |y| + |y|} = y, \quad \text{also } f \circ g = \text{id}_{]-1, 1[}$$

Damit haben wir die Behauptung  $(f, g) : \mathbb{R} \cong ]-1, 1[$  bewiesen.

□ QED

## Bijektion zwischen Teilmengen und Indikatorfunktionen

Die **Indikatorfunktion** einer Teilmenge  $A \subseteq X$  definieren wir durch

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_A^X : X \rightarrow \{0, 1\} : x \mapsto \langle x \in A \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Der **Träger** von  $f : X \rightarrow Y$  bezüglich eines Nullwertes  $0 \in Y$  ist

$$\text{supp}(f) := \{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \}.$$

Die Bezeichnung  $\text{supp}$  kommt von engl. *support* und frz. *support*; nicht zu verwechseln mit dem Supremum  $\sup M$  in  $(X, \leq)$ , siehe F1J.

### Satz D3D: Bijektion zwischen Teilmengen und Indikatorfunktionen

Wir haben die (übliche, kanonische, natürliche) Bijektion

$$(\mathbf{I}, \text{supp}) : \mathfrak{P}(X) \cong \text{Abb}(X, \{0, 1\}) = \{0, 1\}^X = 2^X$$

**Beweis:** Für jede Teilmenge  $A \subseteq X$  gilt  $A \mapsto \mathbf{I}_A \mapsto \text{supp}(\mathbf{I}_A) = A$ .

Für jede Funktion  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$  gilt  $f \mapsto \text{supp}(f) \mapsto \mathbf{I}_{\text{supp}(f)} = f$ . QED

## Präzise Definition und konzise Notation

😊 Die Konstruktion eines Paares  $(i, r) : X \xrightarrow{\cong} Y$  bzw.  $(f, g) : X \cong Y$  ist ein eleganter Nachweis der Injektivität / Surjektivität / Bijektivität. Sie sehen dies hier bereits an ersten, noch einfachen Beispielen. Die Erfahrung zeigt, dass diese Sichtweise sehr häufig nützt.

Ich folge weiter einem einfachen, aber erfolgreichen Grundprinzip: Zentrale Ideen verdienen gute Namen und konzise Notation. Daher diskutiere ich hier explizit Retraktspaare  $(i, r) : X \xrightarrow{\cong} Y$  und Bijektionspaare  $(f, g) : X \cong Y$ . Es unterstützt Ihre Arbeit.

😊 Klarheit der Sprache und des Denkens: Wir erschaffen hier eine geeignete Sprache, mit der wir auch komplizierte Sachverhalte klar, kurz und präzise formulieren können. Was wir klar benennen können, das können wir gut begreifen, klar denken und klar kommunizieren.

😊 Es mag Ihnen zunächst etwas mühsam, gar pedantisch erscheinen, doch präzise Definitionen und konzise Notation erleichtern Ihre Arbeit, zunächst das Lesen und Schreiben, dann das Sprechen und Denken. Das erfordert anfangs eine große Investition, aber es zahlt sich aus!

Gegeben seien Mengen  $I$  und  $\Omega$ . Eine Abbildung  $x : I \rightarrow \Omega$  ordnet jedem Startelement  $i \in I$  ein Bildelement  $x_i = x(i)$  zu. Wir schreiben

$$\text{Abb}(I, \Omega) = \{ x : I \rightarrow \Omega : x \mapsto x_i \} = \Omega^I =: \prod_{i \in I} \Omega.$$

Eine Familie  $x = (x_i)_{i \in I}$  von Elementen  $x_i \in \Omega$  indiziert durch  $i \in I$  ist eine Abbildung  $I \rightarrow \Omega : i \mapsto x_i$ . Ebenso ist eine Familie  $(X_i)_{i \in I}$  von Teilmengen  $X_i \subseteq \Omega$  eine Abbildung  $I \rightarrow \mathfrak{P}(\Omega) : i \mapsto X_i$ .

### Definition D3E: kartesisches Produkt, allgemein

Gegeben sei eine Familie  $(X_i)_{i \in I}$  von Mengen  $X_i$ .

Wir definieren ihr **kartesisches Produkt** durch

$$\begin{aligned} X &= \prod_{i \in I} X_i := \{ x = (x_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I : x_i \in X_i \} \\ &= \{ x : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i : i \mapsto x_i \mid \forall i \in I : x_i \in X_i \}. \end{aligned}$$

Hierzu gehören die **kanonischen Projektionen**

$$p_i = \text{pr}_i : X \rightarrow X_i : x \mapsto x_i.$$

**Beispiel:** Speziell für  $I = \{1, \dots, n\}$  erhalten wir wie auf Seite D138:

$$\prod_{i \in I} X_i \cong X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n : x \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Meist schreiben wir kurz  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ : Das Element  $x \in \prod_{i \in I} X_i$  wird definiert durch seine Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit  $x_i \in X_i$ .

😊 Die Definition D3E ist bereits im endlichen Fall vorteilhaft, da sie die Mehrdeutigkeit der möglichen Klammerungen umgeht.

**Beispiel:** Das Produkt  $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : n \mapsto f_n \}$  besteht aus allen Folgen  $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$  mit  $f_0, f_1, f_2, \dots \in \mathbb{R}$ .

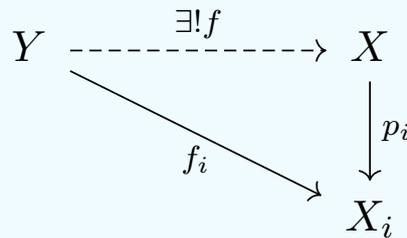
Das Produkt  $\prod_{n \in \mathbb{N}} [0, n] = \{ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} : f_n \in [0, n] \}$  enthält die Folgen  $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$  mit  $f_n \in [0, n]$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beispiel:** Das Produkt  $\prod_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \}$  besteht aus allen Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ohne Einschränkung

Das Produkt  $\prod_{x \in \mathbb{R}} [-x^2, x^2] = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \in [-x^2, x^2] \}$  enthält die Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $|f(x)| \leq x^2$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .

## Satz D3F: universelle Abbildungseigenschaft (UAE)

Sei  $X = \prod_{i \in I} X_i$  das kartesische Produkt der Mengenfamilie  $(X_i)_{i \in I}$ .



Zu jeder Familie  $(f_i : Y \rightarrow X_i)_{i \in I}$  von Abbildungen existiert genau eine Abbildung  $f : Y \rightarrow X$  mit  $p_i \circ f = f_i$  für alle  $i \in I$ , also  $f(y) = (f_i(y))_{i \in I}$ .

Wir haben somit die kanonische Bijektion

$$\Phi : \text{Abb}\left(Y, \prod_{i \in I} X_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \text{Abb}(Y, X_i) : f \mapsto (p_i \circ f)_{i \in I}.$$

Wir schreiben  $f = \prod_{i \in I} f_i := \Phi^{-1}((f_i)_{i \in I})$ , kurz  $f = (f_i : Y \rightarrow X_i)_{i \in I}$ : Die Funktion  $f$  besteht aus ihren Koordinatenfunktionen  $f_i$  für  $i \in I$ .

**Beweis:** Dies folgt aus der Definition D3E des Produkts. □

**Beispiel:** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto (x^2, x^4, x^6)$  ist durch ihre drei Koordinatenfunktionen gegeben:  $f_1(x) = x^2$ ,  $f_2(x) = x^4$  und  $f_3(x) = x^6$ . Dies ist jeweils die Projektion von  $f$  auf die  $i$ te Koordinate,  $f_i = p_i \circ f$ .

Umgekehrt definieren je drei Funktionen  $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eindeutig die Funktion  $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ . Das ist die universelle Abbildungseigenschaft I20 des Produkts.

😊 Das kartesische Produkt  $X = \prod_{i \in I} X_i$  nutzen wir immer dann, wenn wir unabhängige Koordinaten  $X_i$  zusammenfassen wollen.

Genau dies drückt die universelle Abbildungseigenschaft I20 aus.

Sie sieht zuerst kompliziert aus, ist aber recht besehen ganz natürlich:

Jede Funktion in ein Produkt wird koordinatenweise festgelegt.

Gegeben sei eine Familie  $(X_i)_{i \in I}$  von Mengen  $X_i$  (Teilmengen von  $\Omega$ ). Sie sind **paarweise disjunkt**, wenn  $X_i \cap X_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$  in  $I$  gilt. In diesem Falle haben wir die **(interne) disjunkte Vereinigung**

$$\bigsqcup_{i \in I} X_i := \bigcup_{i \in I} X_i \quad \text{wobei } X_i \cap X_j = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

Falls die Mengen  $X_i$  nicht disjunkt sind, können wir sie disjunkt machen: Anschaulich ersetzen wir die Menge  $X_i$  durch die Kopie  $X'_i = \{i\} \times X_i$ ; zwischen beiden übersetzen wir durch die Bijektion  $\text{pr}_2 : X'_i \xrightarrow{\sim} X_i$ .

### Definition D3G: disjunkte Summe, kurz Summe

Gegeben sei eine Familie  $(X_i)_{i \in I}$  von Mengen  $X_i$ . Wir definieren ihre **(disjunkte) Summe** oder **(externe) disjunkte Vereinigung** durch

$$X = \coprod_{i \in I} X_i := \bigcup_{i \in I} \{i\} \times X_i.$$

Der Index  $i \in I$  trennt die disjunkten Mengen  $X'_i = \{i\} \times X_i$  in  $X$ . Hierzu gehören die **kanonischen Injektionen**  $\iota_i : X_i \hookrightarrow X : x \mapsto (i, x)$ .

**Beispiel:** Falls die gegebene Familie  $(X_i)_{i \in I}$  bereits disjunkt ist, so gilt

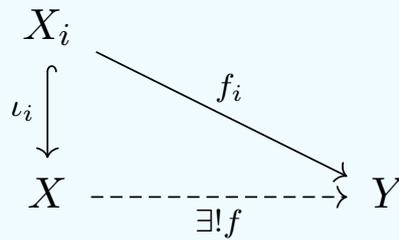
$$(\text{pr}_2, \sigma) : \coprod_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} \{i\} \times X_i \cong \bigcup_{i \in I} X_i = \bigsqcup_{i \in I} X_i$$

durch die Projektion  $\text{pr}_2 : (i, x) \mapsto x$  (vergiss den Index  $i$ ) und umgekehrt  $\sigma : x \mapsto (i, x)$  für  $i \in I$  mit  $x \in X_i$  (suche den Index  $i$ ): Jedes Element  $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$  liegt in genau einer der Mengen  $X_i$ . Der Index  $i$  ist in diesem Falle eine redundante Information.

**Beispiel:** Die Menge  $X = \mathbb{R} \amalg \mathbb{R} = (\{1\} \times \mathbb{R}) \cup (\{2\} \times \mathbb{R})$  besteht aus zwei disjunkt gemachten Kopien der reellen Zahlengeraden  $\mathbb{R}$ . Wir können uns dies als Teilmenge  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  der Ebene  $\mathbb{R}^2$  vorstellen als die achsenparallele Geraden  $X'_1 = \{1\} \times \mathbb{R}$  und  $X'_2 = \{2\} \times \mathbb{R}$ .

**Satz D3H: universelle Abbildungseigenschaft (UAE)**

Sei  $X = \coprod_{i \in I} X_i$  die disjunkte Summe der Mengenfamilie  $(X_i)_{i \in I}$ .



Zu jeder Familie  $(f_i : X_i \rightarrow Y)_{i \in I}$  von Abbildungen existiert genau eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  mit  $f \circ \iota_i = f_i$  für alle  $i \in I$ , also  $f(i, x_i) = f_i(x_i)$ .

Wir haben somit die kanonische Bijektion

$$\Phi : \text{Abb}\left(\coprod_{i \in I} X_i, Y\right) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Abb}(X_i, Y) : f \mapsto (f \circ \iota_i)_{i \in I}.$$

Wir schreiben  $f = \coprod_{i \in I} f_i := \Phi^{-1}((f_i)_{i \in I})$ , alternativ  $f = \bigsqcup_{i \in I} f'_i$  als Vereinigung von  $f'_i : \{i\} \times X_i \rightarrow Y : (i, x_i) \mapsto f_i(x_i)$  wie in Satz D2E.

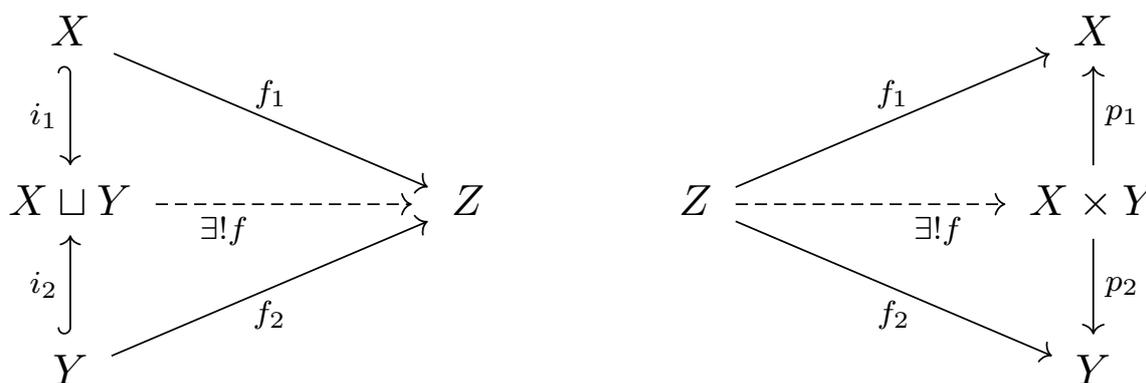
**Beweis:** Dies folgt aus der Definition D3G der Summe.

**QED**

**Beispiel:** Die Menge  $X = \mathbb{R} \amalg \mathbb{R} = (\{1\} \times \mathbb{R}) \cup (\{2\} \times \mathbb{R})$  besteht aus zwei disjunkt gemachten Kopien der reellen Zahlengeraden  $\mathbb{R}$ .

Zu  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$  und  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^4$  ist demnach die Funktion  $f = f_1 \amalg f_2 : \mathbb{R} \amalg \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(1, x) = x^2$  und  $f(2, x) = x^4$ .

😊 Die disjunkte Summe  $X = \coprod_{i \in I} X_i$  nutzen wir immer dann, wenn wir garantieren wollen, dass die Mengen  $X_i$  disjunkt sind. Falls dies bereits der Fall ist, so können wir statt  $X$  auch direkt die übliche disjunkte Vereinigung  $X \cong \bigsqcup_{i \in I} X_i$  nutzen, wie zuvor. Andernfalls ersetzen wir die Menge  $X_i$  durch die Kopie  $X'_i = \{i\} \times X_i$  und betrachten die disjunkt gemachte Vereinigung  $X = \bigsqcup_{i \in I} X'_i$ .



Die universelle Abbildungseigenschaft von Summe und Produkt lautet:

$$\mathcal{C}(X \sqcup Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, Z) \times \mathcal{C}(Y, Z) : f \mapsto (f \circ i_1, f \circ i_2)$$

$$\mathcal{C}(Z, X \times Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(Z, X) \times \mathcal{C}(Z, Y) : f \mapsto (p_1 \circ f, p_2 \circ f)$$

Die Schreibweise  $B^A := \mathcal{C}(A, B)$  und  $X + Y := X \sqcup Y$  ist suggestiv:

$$Z^{(X+Y)} \cong Z^X \times Z^Y \quad \text{und} \quad (X \times Y)^Z \cong X^Z \times Y^Z$$

😊 Das erinnert an die vertrauten Exponentialgesetze für Zahlen.

Die Rechenregeln für Mengen sind wunderbar konkret und praktisch:

$$X \sqcup \emptyset = X = \emptyset \sqcup X,$$

$$X \cup \emptyset = X = \emptyset \cup X,$$

$$X \sqcup Y = Y \sqcup X,$$

$$X \cup Y = Y \cup X,$$

$$(X \sqcup Y) \sqcup Z = X \sqcup (Y \sqcup Z),$$

$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z).$$

Das kartesische Produkt ist distributiv über die (disjunkte) Vereinigung:

$$X \times (Y \sqcup Z) = (X \times Y) \sqcup (X \times Z)$$

ebenso für  $\cup$  und  $\cap$

$$(X \sqcup Y) \times Z = (X \times Z) \sqcup (Y \times Z)$$

ebenso für  $\cup$  und  $\cap$

Für die Summe gelten entsprechend kanonische Bijektionen:

$$X \times (Y \amalg Z) \cong (X \times Y) \amalg (X \times Z), \quad (x, (1, y)) \leftrightarrow (1, (x, y)),$$

$$(x, (2, z)) \leftrightarrow (2, (x, z)),$$

$$(X \amalg Y) \times Z = (X \times Z) \amalg (Y \times Z), \quad ((1, x), z) \leftrightarrow (1, (x, z)),$$

$$((2, y), z) \leftrightarrow (2, (y, z)).$$

😊 Hier muss lediglich über die Indizes buchgeführt werden.

Für kartesische Produkte haben wir folgende kanonische Bijektionen:

$$\begin{aligned} X \times \{a\} &\cong X \cong \{a\} \times X, & (x, a) &\leftrightarrow x \leftrightarrow (a, x) \\ X \times Y &\cong Y \times X, & (x, y) &\leftrightarrow (y, x) \\ (X \times Y) \times Z &\cong X \times (Y \times Z), & ((x, y), z) &\leftrightarrow (x, (y, z)) \end{aligned}$$

Schließlich gelten die vertrauten Potenzgesetze:

$$\begin{aligned} Z^{(X \sqcup Y)} &\cong Z^X \times Z^Y, & f &\mapsto (f|_X, f|_Y) \\ (X \times Y)^Z &\cong X^Z \times Y^Z, & f &\mapsto (\text{pr}_1 \circ f, \text{pr}_2 \circ f) \\ (X^Y)^Z &\cong X^{Y \times Z}, & f &\mapsto g, \quad g(y, z) = f(z)(y) \end{aligned}$$

Die erste Bijektion entsteht aus Einschränkung  $f \mapsto (f|_X, f|_Y)$  und umgekehrt Vereinigung  $(g, h) \mapsto f = g \sqcup h$  wie in Satz D2E.

Die zweite Bijektion entsteht aus Projektion  $f \mapsto (\text{pr}_1 \circ f, \text{pr}_2 \circ f)$  und umgekehrt  $(g, h) \mapsto f$  mit  $f: Z \rightarrow X \times Y: f(x) = (g(x), h(x))$ .

😊 Das entspricht der universellen Abbildungseigenschaft (I2Q, I2O).

Für jede Bijektion  $\varphi: \Lambda \xrightarrow{\sim} \Lambda$  gilt das allgemeine Kommutativgesetz:

$$\begin{aligned} \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda &\cong \prod_{\lambda \in \Lambda} X_{\varphi(\lambda)} : & (\varphi(\lambda), x) &\leftrightarrow (\lambda, x) \\ \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda &\cong \prod_{\lambda \in \Lambda} X_{\varphi(\lambda)} : & (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} &\leftrightarrow (x_{\varphi(\lambda)})_{\lambda \in \Lambda} \end{aligned}$$

Für jede Summe  $\Lambda = \coprod_{i \in I} \Lambda_i$  gilt das allgemeine Assoziativgesetz:

$$\begin{aligned} \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda &\cong \prod_{i \in I} \left( \prod_{\lambda \in \Lambda_i} X_\lambda \right) : & ((i, \lambda), x) &\leftrightarrow (i, (\lambda, x)) \\ \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda &\cong \prod_{i \in I} \left( \prod_{\lambda \in \Lambda_i} X_\lambda \right) : & (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} &\leftrightarrow ((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_i})_{i \in I} \end{aligned}$$

Für jedes Produkt  $\Lambda = \prod_{i \in I} \Lambda_i$  gilt das allgemeine Distributivgesetz:

$$\prod_{i \in I} \left( \prod_{\lambda_i \in \Lambda_i} X_{\lambda_i} \right) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \left( \prod_{i \in I} X_{\lambda_i} \right) : \quad (\lambda_i, x_{\lambda_i})_{i \in I} \leftrightarrow ((\lambda_i)_{i \in I}, (x_{\lambda_i})_{i \in I})$$

😊 Auch hier muss lediglich über die Indizes buchgeführt werden.

