Klausur zur Linearen Algebra 2

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie Folgendes aus!* (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Sitzplatznummer:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Begründen Sie Ihre Antwort, kurz aber überzeugend, etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung. Bei Rechnungen ist ein klar nachvollziehbarer Rechenweg gefragt mit den nötigen Erläuterungen.
- Für die Verständnisfragen in Aufgabe 2 gilt: Es gibt zwei Punkte für die richtige Antwort mit richtiger Begründung, und einen Punkt für die richtige Antwort mit einem ernsthaften Versuch einer Begründung. Allein das Ankreuzen gibt noch keinen Punkt.

Die Klausur enthält etwas zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Gewinnen Sie zunächst einen Überblick und sammeln Sie die Punkte, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/16	/13	/10	/11	/12	/6	/7	/76

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (16 Punkte)

2A. Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Eig}(A, 5) = 2$ und $\operatorname{tr} A < 15$.
Ist jede solche Matrix A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

$\overline{}$ 2

2B. Sei $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ reell mit Eigenwert $2 + \mathrm{i}$ sowie $\operatorname{tr} A = 4$ und $\det A = 5$.
Ist jede solche Matrix A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

$\overline{}$ 2

2C. Die symmetrische Bilinearform $\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y) = x^\intercal A y$ sei gegeben durch $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A^\intercal = A$. Es gelte $\det A > 0$ und $\operatorname{tr} A > 0$. Ist β dann positiv definit?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

/2

2D. Sei W ein euklidischer Raum und $U, V \leq W$ Unterräume. Gilt dann $(U+V)^\perp \supseteq U^\perp \cap V^\perp$?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

/2

2E. Gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit charakteristischem Polynom $P = X^4 - 2X^3 + X^2 + 4X$?

☐ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Hindernis:

/2

2F. Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix.
Ist dann A^{-1} eine K–Linearkombination der Potenzen $E = A^0, A = A^1, A^2, \dots, A^{n-1}$?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

$\overline{}$ 2

2G. Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix. Sind A und $A^{\intercal}$ ähnlich?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2

2H. Wir betrachten das rechtsstehende homogene Differentialgleichungssystem. Erlaubt der Lösungsraum eine $\mathbb{R}$–Basis aus Eigenfunktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$?

$$\begin{cases} u_1'(t) = 2u_1(t) - 3u_2(t) + u_3(t) + 5u_4(t) \\ u_2'(t) = -3u_1(t) - 3u_2(t) + u_3(t) - 4u_4(t) \\ u_3'(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) - u_4(t) \\ u_4'(t) = 5u_1(t) - 4u_2(t) - u_3(t) + 2u_4(t) \end{cases}$$

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2

Aufgabe 3. *Jordan–Normalform* (13 Punkte)

Gegeben ist die reelle Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.

3A. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A sowie das Spektrum $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}$.

3

3B. Berechnen Sie zu A die Jordan–Normalform $J_A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.

Hinweis: Das Minimalpolynom ist $\mu_A = (X+1)^2(X-3)$.

4

Zur Erinnerung und Vermeidung von Übertragsfehlern: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.

3C. Bestimmen Sie zu A eine Jordan–Basis sowie eine Basiswechselmatrix T mit $T^{-1}AT = J_A$.

6

Aufgabe 4. *Affine Normalform einer Quadrik* (10 Punkte)

Wir betrachten die Quadrik $Q = \{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 8x_2 + 8 = 0 \}$.

4A. Schreiben Sie die Q definierende Gleichung in Matrixform $x'^\intercal A' x' = 0$ mit symmetrischer Matrix $A' \in \mathbb{R}^{3\times3}$ in homogenen Koordinaten $x' = (1, x_1, x_2)^\intercal$.

$A' =$

1

4B. Es existiert eine Affinität $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x' \mapsto y' = T'^{-1}x'$, sodass die Matrix $B' = T'^\intercal A' T'$ in affiner Normalform vorliegt. Bestimmen Sie die Normalform B' und die Transformation T'.

5

4C. Um welche Quadrik handelt es sich gemäß der Klassifikation der ebenen Quadriken?

1

4D. Skizzieren Sie $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ in den ursprünglichen Standardkoordinaten $x = (x_1, x_2)$.

3

Aufgabe 5. *Gram–Schmidt* (11 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

5A. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(A, -1)$.

$\overline{}$
5

5B. Ist die Matrix A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar? Falls nein, nennen Sie ein Hindernis. Falls ja, nennen Sie eine Diagonalmatrix D mit einer Begründung der Ähnlichkeit $D \sim A$ über $\mathbb{R}$.

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

3

5C. Ist jede orthogonal diagonalisierbare Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

5D. Ist die Matrix A orthogonal diagonalisierbar?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

1

Aufgabe 6. *Diagonalisierbarkeit* (12 Punkte)

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle -, - \rangle$.
Sei $v \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$. Wir setzen $A = E_n - v \cdot v^\intercal$.

6A. Ist v ein Eigenvektor von A?

☐ Ja ☐ Nein.

2

6B. Sei $w \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ orthogonal zu v. Ist w ein Eigenvektor von A?

☐ Ja ☐ Nein.

2

6C. Bestimmen Sie die Dimension des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, 1)$.

$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Eig}(A, 1) =$

Begründung:

3

6D. Ist A orthogonal diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine zugehörige Diagonalmatrix und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren an. Falls nein, nennen Sie ein Hindernis.

3

6E. Für welche $v \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ ist A eine orthogonale Matrix?
Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an v.

Notwendige und hinreichende Bedingung:

Begründung:

2

Aufgabe 7. *Bilinearform* (6 Punkte)

Sei K ein Körper und $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis des K–Vektorraums K^n.
Auf $V = \mathrm{Hom}_K(K^n, K)$ definieren wir $\beta : V \times V \to K : (f, g) \mapsto \sum_{i=1}^n f(e_i)g(e_i)$.

7A. Zeigen Sie, dass β symmetrisch und bilinear ist.

$\overline{}$ 3

7B. Zeigen Sie, dass β nicht-entartet ist.

$\overline{}$ 3

Aufgabe 8. *Adjungierte Abbildung* (7 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und $U \le V$ ein Unterraum.
Sei $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ein Endomorphismus mit adjungiertem Endomorphismus F^{ad}.

8A. Sei $v \in V$ mit $F^{\mathrm{ad}}(v) \in U^{\perp}$ und $w \in F(U)$. Zeigen Sie $\langle v, w \rangle = 0$.

/3

8B. Zeigen Sie: Gilt $v \in F(U)^{\perp}$, dann folgt $\langle F^{\mathrm{ad}}(v), u \rangle = 0$ für alle $u \in U$.

/2

8C. Gilt $F(U)^{\perp} = (F^{\mathrm{ad}})^{-1}(U^{\perp})$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/2

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.