Klausur zur Linearen Algebra 2

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie Folgendes aus!* (1 Punkt)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Sitzplatznummer: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Begründen Sie Ihre Antwort, kurz aber überzeugend, etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung. Bei Rechnungen ist ein klar nachvollziehbarer Rechenweg gefragt mit den nötigen Erläuterungen.
- Für die Verständnisfragen in Aufgabe 2 gilt: Es gibt zwei Punkte für die richtige Antwort mit richtiger Begründung, und einen Punkt für die richtige Antwort mit einem ernsthaften Versuch einer Begründung. Allein das Ankreuzen gibt noch keinen Punkt.

Die Klausur enthält etwas zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Gewinnen Sie zunächst einen Überblick und sammeln Sie die Punkte, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/16	/13	/10	/11	/12	/6	/7	/76

Tipp: Viele Fragen sind Wiederholungen aus Vorlesung und Übung; sie belohnen kontinuierliche Mitarbeit während des Semesters und anschließend sorgfältige Klausurvorbereitung. Tipp für zukünftige Leser: Ihre Vorlesung und wöchentlichen Übungen erklären Ihnen die wunderschöne und nützliche Mathematik. Nutzen Sie dies, arbeiten Sie kontinuierlich mit, es lohnt sich!

Vorwort zur Musterlösung: Für Ihre Nacharbeitung dieser Klausur haben wir Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfungssituation verlangt war. Nach der Klausur ist vor der Klausur. Möge es nützen!

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (16 Punkte)

2A. Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Eig}(A,5) = 2$ und $\operatorname{tr} A < 15$.
Ist jede solche Matrix A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

$\boxed{\text{X}}$ Ja $\boxed{}$ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Die Eigenwerte von A sind $5, 5, \lambda \in \mathbb{C}$, somit gilt $\operatorname{tr} A = 5 + 5 + \lambda \in \mathbb{R}$, also insbesondere $\lambda \in \mathbb{R}$. Aus $\operatorname{tr} A < 15$ folgt $\lambda < 5$, insbesondere gilt $\lambda \in \mathbb{R} \smallsetminus \{5\}$ und $\dim \operatorname{Eig}(A,\lambda) = 1$. ◀◀

Erläuterung: Reelle Diagonalisierbarkeit der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bedeutet: Es gibt n reelle Eigenwerte (genauer: das charakteristische Polynom von A zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren), und für jeden erreicht die geometrische Vielfachheit die algebraische.

Im vorliegenden Falle gilt dies, daher existiert eine Eigenbasis, und wir erhalten $A \sim \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Für diese Schlussfolgerung mussten wir den Fall $\lambda = 5$ ausschließen. Hätten wir statt $\operatorname{tr} A < 15$ den Fall $\operatorname{tr} A = 15$ und somit $\lambda = 5$, so wüssten wir nur $\dim \operatorname{Eig}(A,5) \in \{2,3\}$ und somit $A \sim \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ oder $A \sim \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. In zweiten Falle wäre die Matrix A nicht diagonalisierbar.

2

2B. Sei $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ reell mit Eigenwert $2 + \mathrm{i}$ sowie $\operatorname{tr} A = 4$ und $\det A = 5$.
Ist jede solche Matrix A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

$\boxed{\text{X}}$ Ja $\boxed{}$ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Die Eigenwerte von A sind $2+\mathrm{i}, 2-\mathrm{i}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{tr} A = 4+\lambda+\mu = 4$ und $\det A = 5\lambda\mu = 5$. Aus $\mu = -\lambda = \lambda^{-1}$ folgt $\lambda^2 = -1$, also $\lambda \in \{\pm\mathrm{i}\}$. Somit gilt:

$$A \sim \begin{bmatrix} 2+\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \quad ◀◀$$

Erläuterung: Wir nutzen hier das einfachste Kriterium zur Diagonalisierbarkeit: Hat die Matrix $A \in K^{n\times n}$ verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, so ist A über K diagonalisierbar.

Gibt es wirklich *reelle* Matrizen mit all diesen Eigenschaften? Ja, zum Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2

2C. Die symmetrische Bilinearform $\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y) = x^\intercal A y$ sei gegeben durch $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mit $A^\intercal = A$. Es gelte $\det A > 0$ und $\operatorname{tr} A > 0$. Ist β dann positiv definit?

☐ Ja ☒ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Ein mögliches Gegenbeispiel ist $A = \operatorname{diag}(-1, -1, +3)$. ◀◀

Erläuterung: Die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ hat drei reelle Eigenwerte $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3$. Dank $\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$ gilt entweder $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3$ oder $\lambda_1 \le \lambda_2 < 0 < \lambda_3$. Die zusätzliche Bedingung $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 > 0$ allein kann den zweiten Fall nicht ausschließen.

Warnung: Nur in Dimension 2 genügen die beiden Bedingungen $\det A > 0$ und $\operatorname{tr} A > 0$ zur positiven Definitheit. Sie sind zudem auch notwendig. In Dimension $n \ge 3$ sind sie immer noch notwendig, aber nicht mehr hinreichend. Für den allgemeinen Fall einer symmetrischen $n\times n$–Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ verfügen wir über drei Kriterien: die Eigenwerte dank Spektralsatz, das Signaturtripel dank Trägheitssatz und schließlich das Hauptminoren-Kriterium für Determinanten. Alle drei sind nützlich.

—
2

2D. Sei W ein euklidischer Raum und $U, V \le W$ Unterräume. Gilt dann $(U+V)^\perp \supseteq U^\perp \cap V^\perp$?

☒ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Sei $w \in U^\perp \cap V^\perp$, also $w \perp u$ für alle $u \in U$ und $w \perp v$ für alle $v \in V$. Für $u + v \in U + V$ folgt $\langle\, w \mid u + v \,\rangle = \langle\, w \mid u \,\rangle + \langle\, w \mid v \,\rangle = 0$, also $w \perp u + v$, kurz $w \in (U + V)^\perp$. ◀◀

Erläuterung: Dies sind Routineaufgaben, wie Sie dies aus Vorlesung und Übung kennen, und doch immer eine gute Wiederholung und Fingerübung. Wenn Sie möchten, wiederholen Sie zur Übung die Umkehrung: Gilt $(U + V)^\perp \subseteq U^\perp \cap V^\perp$?

—
2

2E. Gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ mit charakteristischem Polynom $P = X^4 - 2X^3 + X^2 + 4X$?

☒ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Hindernis:

Zu jedem normierten Polynom $P \in K[X]^1_n$ genügt die Begleitmatrix $C(P) \in K^{n\times n}$, hier

$$A = C(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4}. \quad ◀◀ \quad \text{Alternative} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & \sqrt{7}/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{7}/2 & 3/2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4}$$

Erläuterung: Die Begleitmatrix erfordert keine Faktorisierung des Polynoms P und gelingt einheitlich über jedem Körper. Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hilft die Zerlegung $P = (X - \lambda_1)\cdots(X - \lambda_n)$ in Linearfaktoren, denn dann genügt die Diagonalmatrix $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zur Konstruktion von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sammeln wir jedes komplex-konjugierte Paar von Eigenwerten zu einer reellen 2×2–Matrix wie in Aufgabe 2B. Im Beispiel gilt $P = X(X+1)(X^2 - 3X + 4)$.

—
2

2F. Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix.
Ist dann A^{-1} eine K–Linearkombination der Potenzen $E = A^0, A = A^1, A^2, \dots, A^{n-1}$?

[X] Ja [ ] Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Wir nutzen das charakteristische Polynom

$$P(X) = \det(XE - A) = a_0 + a_1 X^1 + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$$

mit $a_0 = P(0) = (-1)^n \det A \in K^\times$. Der Satz von Cayley–Hamilton garantiert $P(A) = 0$. Multiplikation dieser Gleichung mit $a_0^{-1} A^{-1}$ ergibt

$$A^{-1} = -a_0^{-1}(a_1 E + \dots + a_{n-1} A^{n-2} + A^{n-1}). \quad ◀◀$$

Erläuterung: Sie kennen dieses schöne Argument aus den Übungen.
Es gelingt ebenso über jedem kommutativen Ring.

2

2G. Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix. Sind A und $A^\intercal$ ähnlich?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Nach Voraussetzung existiert $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $S^{-1}AS = D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Transposition ergibt $S^\intercal A^\intercal (S^{-1})^\intercal = D^\intercal = D$. Aus $A^\intercal \sim D$ und $D \sim A$ folgt $A^\intercal \sim A$ dank Transitivität. ◀◀

Erläuterung: Explizit finden wir $A^\intercal = (S^\intercal)^{-1} D S^\intercal = (S^\intercal)^{-1} S^{-1} A S S^\intercal = (SS^\intercal)^{-1} A (SS^\intercal)$.

Alternative: Die Matrix $A^\intercal$ hat dasselbe charakteristische Polynom wie A. Jeder Eigenraum zu $A^\intercal$ hat dieselbe Dimension wie zu A. (Es gilt Zeilenrang gleich Spaltenrang, für quadratische Matrizen also Zeilendefekt gleich Spaltendefekt.) Somit haben $A^\intercal$ und A dieselbe Diagonalform, und wir schließen wie oben per Transitivität.

2

2H. Wir betrachten das rechtsstehende homogene Differentialgleichungssystem. Erlaubt der Lösungsraum eine $\mathbb{R}$–Basis aus Eigenfunktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$?

$$\begin{cases} u_1'(t) = 2u_1(t) - 3u_2(t) + u_3(t) + 5u_4(t) \\ u_2'(t) = -3u_1(t) - 3u_2(t) + u_3(t) - 4u_4(t) \\ u_3'(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) - u_4(t) \\ u_4'(t) = 5u_1(t) - 4u_2(t) - u_3(t) + 2u_4(t) \end{cases}$$

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Die hier gezeigte Systemmatrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ist symmetrisch! Nach dem Spektralsatz lässt sie sich also über $\mathbb{R}$ diagonalisieren (sogar orthogonal diagonalisieren, aber das benötigen wir hier nicht). In diagonalisierter Form können wir eine Basis aus Eigenfunktionen ablesen. ◀◀

Erläuterung: Hier ist nur gefragt, ob eine Basis aus Eigenfunktionen existiert. Wir haben absichtlich eine etwas größere Matrix gewählt und zur Antwort etwas weniger Platz gelassen, um Sie von der konkreten Rechnung abzuhalten. Diese ist nämlich hier unnötig.

2

Aufgabe 3. *Jordan–Normalform* (13 Punkte)

Gegeben ist die reelle Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.

3A. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A sowie das Spektrum $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}$.

Mit Laplace-Entwicklung nach der 3. Zeile und der Formel für Block-Dreiecksmatrizen sowie der Determinantenberechnung für 2×2-Matrizen erhält man das charakteristische Polynom

$$P_A = \det(A - XE_5) = \det \begin{bmatrix} 1-X & 2 \\ -2 & -3-X \end{bmatrix} \cdot (-1-X) \cdot (-1-X)(3-X)$$

$$= -(X^2 + 2X + 1)(X+1)^2(X-3) = -(X+1)^4(X-3). \blacktriangleleft\blacktriangleleft$$

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von P_A und somit erhalten wir das Spektrum

$$\sigma(A) = \{-1, 3\}. \blacktriangleleft$$

3

3B. Berechnen Sie zu A die Jordan–Normalform $J_A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.

Hinweis: Das Minimalpolynom ist $\mu_A = (X+1)^2(X-3)$.

Die Anzahl der Jordan-Blöcke zum Eigenwert -1 ist die Dimension des zugehörigen Eigenraums $\mathrm{Eig}(A,-1) = \mathrm{Kern}(A + 1E_5)$. Diese wird mittels Gauß-Algorithmus bestimmt:

$$A + 1E_5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Hier kann man bereits $\dim_{\mathbb{R}} \ker(A + 1E_5) = 5 - \mathrm{rang}(A + 1E_5) = 2$ ablesen. ◀

Aus dem Hinweis wissen wir, dass der größte Jordan-Block zum Eigenwert -1 die Größe 2×2 hat. Folglich haben beide Jordan-Blöcke zum Eigenwert -1 jeweils die Größe 2×2.◀

Da die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 3 gleich $\mu(P_A, 3) = 1$ ist, gibt es hierzu genau einen Jordan-Block der Größe 1×1.◀

Wir erhalten so die gesuchte Jordan-Normalform

$$J_A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \blacktriangleleft$$

4

Zur Erinnerung und Vermeidung von Übertragsfehlern: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.

3C. Bestimmen Sie zu A eine Jordan–Basis sowie eine Basiswechselmatrix T mit $T^{-1}AT = J_A$.

Für $\mathrm{Eig}(A,3)$ verwenden wir den Gauß-Algorithmus:

$$A - 3E_5 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & -6 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Somit erzeugt $v_5 := (1, -1, 0, -1, -1)^\intercal$ den Eigenraum $\mathrm{Eig}(A,3)$.$\blacktriangleleft$

Nun bestimmen wir den Eigenraum $\mathrm{Eig}(A,-1)$:

$$A + 1E_5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Somit ist $((1,-1,0,0,0)^\intercal, (0,0,0,1,0)^\intercal) = (e_1 - e_2, e_4)$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(A,-1)$. ◀

Eine Basis des Kerns der Matrix

$$(A + 1E_5)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 16 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & -16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & -16 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

ist (offensichtlich) gegeben durch $(e_1, e_2, e_3 + e_5, e_4)$. ◀

Somit ergänzen beispielsweise die Vektoren $v_2 := e_1$ und $v_4 := e_3 + e_5$ die Basis $(e_1 - e_2, e_4)$ von $\ker(A + E_5) = \mathrm{Eig}(A,-1)$ zu unserer Basis von $\ker(A + E_5)^2$. Wir wählen diese als Startvektoren und bilden die Hauptvektorketten

$$v_2 = e_1 \overset{A+E_5}{\mapsto} v_1 = (2,-2,0,0,0)^\intercal \overset{A+E_5}{\mapsto} 0.$$

$$v_4 = (0,0,1,0,1)^\intercal \overset{A+E_5}{\mapsto} v_3 = (-4,4,0,1,0)^\intercal \overset{A+E_5}{\mapsto} 0. \blacktriangleleft\blacktriangleleft$$

Damit erhalten wir die ersehnte Jordan–Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ und die zugehörige Basiswechselmatrix T mit

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right), \qquad T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \blacktriangleleft$$

6

Aufgabe 4. *Affine Normalform einer Quadrik* (10 Punkte)

Wir betrachten die Quadrik $Q = \{\, (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 8x_2 + 8 = 0 \,\}$.

4A. Schreiben Sie die Q definierende Gleichung in Matrixform $x'^\intercal A' x' = 0$ mit symmetrischer Matrix $A' \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ in homogenen Koordinaten $x' = (1, x_1, x_2)^\intercal$.

$$A' = \left[\begin{array}{c|cc} 8 & 0 & -4 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

1

4B. Es existiert eine Affinität $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x' \mapsto y' = T'^{-1}x'$, sodass die Matrix $B' = T'^\intercal A' T'$ in affiner Normalform vorliegt. Bestimmen Sie die Normalform B' und die Transformation T'.

Wir wenden das symmetrische Gaußverfahren an:

			8	0	-4	1	0	0	
			0	1	-1	0	1	0	
			-4	-1	1	0	0	1	$(3) + 1\cdot(2)$
8	0	-4	8	0	-4	1	0	0	
0	1	-1	0	1	0	0	1	1	
-4	0	0	-4	0	0	0	0	1	$(1) + 1\cdot(3)$
4	0	-4	0	0	-4	1	0	0	
0	0	0	0	1	0	1	1	1	
-4	0	0	-4	0	0	1	0	1	Multiplizieren der
			0	0	-1	1	0	0	Gleichung mit $\frac{1}{4}$
			0	$\frac{1}{4}$	0	1	1	1	
			-1	0	0	1	0	1	$(2)\cdot 2$
0	0	-1	0	0	-1	1	0	0	
0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0	1	2	1	
-1	0	0	-1	0	0	1	0	1	

Somit sind die Normalform B' und eine zugehörige Transformation T' gegeben durch

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

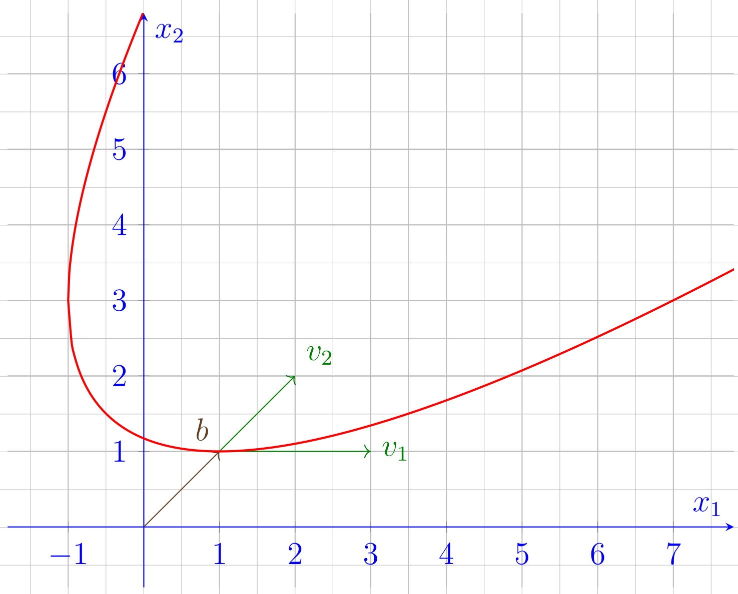
5

4C. Um welche Quadrik handelt es sich gemäß der Klassifikation der ebenen Quadriken?

Die Quadrik beschreibt eine Parabel.◀

1

4D. Skizzieren Sie $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ in den ursprünglichen Standardkoordinaten $x = (x_1, x_2)$.



◀◀◀

Erläuterung: Der Ursprung der transformierten Koordinaten ist $b = (1,1)^\intercal$. Die Richtungsvektoren sind $v_1 = (2,0)^\intercal$ und $v_2 = (1,1)^\intercal$. Man kann zur Unterstützung auch einige Punkte einsetzen, z.B. $b \pm 1 \cdot v_1 + \frac{1}{2} \cdot v_2, b \pm 2 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 \in Q$. Damit lässt sich die Parabel zeichnen.

3

Aufgabe 5. *Gram–Schmidt* (11 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

5A. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(A,-1)$.

Wir bestimmen $\operatorname{Eig}(A,-1) = \operatorname{Kern}(A + 1E_4)$ mittels Gauß-Algorithmus:

$$A + 1E_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eine Basis von $\operatorname{Eig}(A,-1)$ ist gegeben durch (v_1, v_2, v_3) mit $v_1 = (1,1,0,0)^\intercal$, $v_2 = (1,0,-1,0)^\intercal$ und $v_3 = (1,0,0,1)^\intercal$. ◀

Mit Gram-Schmidt bestimmen wir hieraus eine Orthonormalbasis:

$$u_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_2'}, \qquad w_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2' \rangle}{\langle u_2', u_2' \rangle} u_2'$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{u_3'}, \qquad w_3 = \frac{u_3'}{\|u_3'\|} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \blacktriangleleft\blacktriangleleft$$

Somit erhalten wir die Orthonormalbasis (w_1, w_2, w_3) von $\operatorname{Eig}(A,-1)$.

5

5B. Ist die Matrix A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar? Falls nein, nennen Sie ein Hindernis. Falls ja, nennen Sie eine Diagonalmatrix D mit einer Begründung der Ähnlichkeit $D \sim A$ über $\mathbb{R}$.

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Da -1 ein mindestens dreifacher Eigenwert ist, gibt es genau einen weiteren Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von A. Für diesen gilt

$$-2 = \operatorname{tr}(A) = (-1) + (-1) + (-1) + \lambda.$$

Somit folgt $\lambda = 1 \in \mathbb{R}$. ◀

Nach **5A** stimmen für den Eigenwert -1 die algebraische und geometrische Vielfachheit überein. Wegen $1 \le d(A, 1) \le \mu(P_A, 1) = 1$ stimmen auch für diesen Eigenwert die algebraische und die geometrische Vielfachheit überein. ◀

Somit ist A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar und ähnlich zur Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(-1, -1, -1, 1)$. ◀

Erläuterung: Wir verwenden hier, dass die Spur $\operatorname{tr}(A)$ die Summe aller Eigenwerte entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheiten ist, um den fehlenden Eigenwert zu berechnen. Insbesondere sind alle Eigenwerte von A reell.

3

5C. Ist jede orthogonal diagonalisierbare Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Sei B orthogonal diagonalisierbar, d.h. es gibt eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix T mit $B = TDT^{-1}$. ◀ Dann gilt

$$B^\intercal = (TDT^{-1})^\intercal = (T^{-1})^\intercal D^\intercal T^\intercal = TDT^{-1} = B. ◀$$

Daher ist B symmetrisch.

Erläuterung: Wir wissen bereits, dass jede symmetrische reelle Matrix orthogonal diagonalisierbar ist. Diese Aufgabe ist die (leichtere) Umkehrung dieses Satzes.

2

5D. Ist die Matrix A orthogonal diagonalisierbar?

[ ] Ja [X] Nein. Begründung:

Die Matrix A ist nicht symmetrisch und kann nach **5C** somit nicht orthogonal diagonalisierbar sein. ◀

Alternative: Man kann auch nachrechnen, dass die Eigenräume $\operatorname{Eig}(A, -1)$ und $\operatorname{Eig}(A, 1)$ nicht senkrecht zueinander stehen. Hieraus folgt ebenfalls, dass es keine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A gibt.

1

Aufgabe 6. *Diagonalisierbarkeit* (12 Punkte)

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Sei $v \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$. Wir setzen $A = E_n - v \cdot v^\intercal$.

6A. Ist v ein Eigenvektor von A?

$\boxed{X}$ Ja $\square$ Nein.

Der Vektor $v \neq 0$ erfüllt

$$A \cdot v = (E_n - v \cdot v^\intercal) \cdot v = v - v \cdot (v^\intercal \cdot v) = \underbrace{(1 - \|v\|^2)}_{=:\lambda \in \mathbb{R}} \cdot v.$$

Daher ist v ein Eigenvektor von A ◀◀ (nämlich zum Eigenwert $\lambda = 1 - \|v\|^2$).

2

6B. Sei $w \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ orthogonal zu v. Ist w ein Eigenvektor von A?

$\boxed{X}$ Ja $\square$ Nein.

Der Vektor $w \neq 0$ erfüllt

$$A \cdot w = (E_n - v \cdot v^\intercal) \cdot w = w - v \cdot \underbrace{(v^\intercal \cdot w)}_{0} = w = 1 \cdot w.$$

Demnach ist w ein Eigenvektor von A (zum Eigenwert 1). ◀◀

2

6C. Bestimmen Sie die Dimension des Eigenraums $\operatorname{Eig}(A, 1)$.

$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Eig}(A, 1) = n - 1$ ◀

Begründung:

Dank 6A ist $1 - \|v\|^2$ ein Eigenwert, und ungleich 1, daraus folgt $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Eig}(A, 1)) \leq n - 1$. ◀

Dank 6B ist $\langle\, v \,\rangle_{\mathbb{R}}{}^{\perp} \leq \operatorname{Eig}(A, 1)$, also

$$n - 1 = \dim_{\mathbb{R}} \langle\, v \,\rangle_{\mathbb{R}}{}^{\perp} \leq \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Eig}(A, 1). ◀$$

3

6D. Ist A orthogonal diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine zugehörige Diagonalmatrix und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren an. Falls nein, nennen Sie ein Hindernis.

Ja, die Matrix A ist orthogonal diagonalisierbar:

Wir wählen eine Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_{n-1})$ von $\operatorname{Eig}(A, 1) = \langle v \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$, dann ist $\mathcal{B} = (v/\|v\|, v_1, \dots, v_{n-1})$ eine ONB von $\mathbb{R}^n$, bestehend aus Eigenvektoren. ◀◀

Die zugehörige Diagonalmatrix ist $\operatorname{diag}(1 - \|v\|^2, 1, \dots, 1)$. ◀

3

6E. Für welche $v \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ ist A eine orthogonale Matrix?
Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an v.

Notwendige und hinreichende Bedingung: Es gilt $\|v\|^2 = 2$. ◀

Begründung:

Die Matrix A ist genau dann orthogonal, wenn die Diagonalmatrix D es ist. Die Matrix D ist genau dann orthogonal, wenn $D \cdot D^{\intercal} = \operatorname{diag}((1 - \|v\|^2)^2, 1 \dots, 1) = E_n$ ist, also wenn $(1 - \|v\|^2)^2 = 1$ ist. Dies ist äquivalent zu $1 - \|v\|^2 = \pm 1$. Der Fall $\|v\| = 0$ scheidet wegen $v \neq 0$ aus. ◀

2

Aufgabe 7. *Bilinearform* (6 Punkte)

Sei K ein Körper und $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis des K–Vektorraums K^n.
Auf $V = \mathrm{Hom}_K(K^n, K)$ definieren wir $\beta : V \times V \to K : (f, g) \mapsto \sum_{i=1}^{n} f(e_i) g(e_i)$.

7A. Zeigen Sie, dass β symmetrisch und bilinear ist.

Symmetrie: Für $f, g \in V$ ist

$$\beta(f, g) = \sum_{i=0}^{n} f(e_i) g(e_i) = \sum_{i=0}^{n} g(e_i) f(e_i) = \beta(g, f). \quad \blacktriangleleft$$

Da β symmetrisch ist, müssen wir Linearität nur im ersten Argument zeigen.

Additivität: Für $f, g, h \in V$ ist

$$\begin{aligned} \beta(f + g, h) &= \sum_{i=0}^{n} (f + g)(e_i) h(e_i) = \sum_{i=0}^{n} (f(e_i) + g(e_i)) h(e_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (f(e_i) h(e_i) + g(e_i) h(e_i)) \\ &= \sum_{i=0}^{n} f(e_i) h(e_i) + \sum_{i=0}^{n} g(e_i) h(e_i) = \beta(f, h) + \beta(g, h) \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Skalierung: Für $f, g \in V$ und $\lambda \in K$ ist

$$\beta(\lambda f, g) = \sum_{i=0}^{n} \lambda f(e_i) g(e_i) = \lambda \sum_{i=0}^{n} f(e_i) g(e_i) = \lambda \beta(f, g) \quad \blacktriangleleft$$

3

7B. Zeigen Sie, dass β nicht-entartet ist.

Sei $f \in V$ mit $f \neq 0$. Dann gibt es ein $j \in \{ 1, \dots, n \}$ mit $f(e_j) \neq 0$. Sei $g \in V$ mit $g : x \mapsto [\,0\ 0 \dots 0\ 1\ 0 \dots 0\,] x$ (die 1 an der j-ten Stelle). Dann ist

$$\beta(f, g) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) \underbrace{g(e_i)}_{\delta_{ij}} = f(e_j) \neq 0.$$

Somit ist $f \notin V_0(\beta)$, d.h. der Ausartungsraum von β ist $V_0(\beta) = (0)$, d.h. β ist nicht entartet. $\blacktriangleleft\blacktriangleleft\blacktriangleleft$

3

Aufgabe 8. *Adjungierte Abbildung* (7 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und $U \le V$ ein Unterraum.
Sei $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ein Endomorphismus mit adjungiertem Endomorphismus F^{ad}.

8A. Sei $v \in V$ mit $F^{\mathrm{ad}}(v) \in U^{\perp}$ und $w \in F(U)$. Zeigen Sie $\langle v, w \rangle = 0$.

Zu $w \in F(u)$ wählen wir ein Urbild $u \in U$ mit $w = F(u)$. Damit folgt

$$\langle v, w \rangle = \langle v, F(u) \rangle = \langle \underbrace{F^{\mathrm{ad}}(v)}_{\in U^{\perp}}, \underbrace{u}_{\in U} \rangle = 0 \quad ◀◀◀$$

3

8B. Zeigen Sie: Gilt $v \in F(U)^{\perp}$, dann folgt $\langle F^{\mathrm{ad}}(v), u \rangle = 0$ für alle $u \in U$.

Sei $v \in F(U)^{\perp}$ und $u \in U$. Dann gilt

$$\langle F^{\mathrm{ad}}(v), u \rangle = \langle \underbrace{v}_{\in F(U)^{\perp}}, \underbrace{F(u)}_{\in F(U)} \rangle = 0. \quad ◀◀$$

2

8C. Gilt $F(U)^{\perp} = (F^{\mathrm{ad}})^{-1}(U^{\perp})$?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

Es gilt $v \in (F^{\mathrm{ad}})^{-1}(U^{\perp})$ genau dann, wenn $F^{\mathrm{ad}}(v) \in U^{\perp}$ ist, also wenn für alle $u \in U$ gilt: $\langle F^{\mathrm{ad}}(v), u \rangle = 0$. Außerdem ist $v \in F(U)^{\perp}$ äquivalent zu $\langle w, v \rangle = 0$ für alle $w \in F(U)$.

Dank 8A gilt demnach die Inklusion $F(U)^{\perp} \supseteq (F^{\mathrm{ad}})^{-1}(U^{\perp})$.

Frage 8B zeigt die umgekehrte Inklusion $F(U)^{\perp} \subseteq (F^{\mathrm{ad}})^{-1}(U^{\perp})$. ◀◀

2

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.