Klausur zur Linearen Algebra 2

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie Folgendes aus!* (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Sitzplatznummer:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Begründen Sie Ihre Antwort, kurz aber überzeugend, etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung. Bei Rechnungen ist ein klar nachvollziehbarer Rechenweg gefragt mit den nötigen Erläuterungen.
- Für die Verständnisfragen in Aufgabe 2 gilt: Es gibt zwei Punkte für die richtige Antwort mit richtiger Begründung, und einen Punkt für die richtige Antwort mit einem ernsthaften Versuch einer Begründung. Allein das Ankreuzen gibt noch keinen Punkt.

Die Klausur enthält etwas zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Gewinnen Sie zunächst einen Überblick und sammeln Sie die Punkte, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/16	/13	/13	/6	/7	/13	/7	/76

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (16 Punkte)

2A. Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Eig}(A, 5) = 2$ und $|\det A| \leq 100$.
Ist jede solche Matrix A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

2

2B. Sei $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ reell mit Eigenwert i sowie $\det A = 0$ und $\operatorname{tr} A \neq 0$.
Ist jede solche Matrix A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

2

2C. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A^2.
Ist v dann auch ein Eigenvektor von A?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

2

2D. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$–Vektorraum und $F \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft $F^3 + 2F = 3F^2$. Ist F dann über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

2

2E. Seien $U \subseteq V$ Unterräume eines euklidischen $\mathbb{R}$–Vektorraums W. Gilt dann $V^\perp \subseteq U^\perp$?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

2

2F. Die Matrix $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ erfüllt $\operatorname{im}(A) = \ker(A)$. Angenommen, für eine weitere Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $\operatorname{im}(B) = \ker(B)$. Sind die Matrizen A und B dann ähnlich, also $A \sim B$?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

$\overline{2}$

2G. Die symmetrische Bilinearform $\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y) = x^\intercal A^2 y$ sei gegeben durch $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A^\intercal = A$. Es gelte $\det A < 0$. Ist β dann positiv definit?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

$\overline{2}$

2H. Gibt es eine reelle lineare Differentialgleichung $a_n u^{(n)}(t) + \dots + a_2 u''(t) + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = 0$ für $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit dem Lösungsraum $L = \langle\, t\,\mathrm{e}^t, t^2\,\mathrm{e}^t \,\rangle_{\mathbb{R}}$?

☐ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Hindernis:

$\overline{2}$

Aufgabe 3. *Jordan–Normalform* (13 Punkte)

Gegeben ist die reelle Matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.

3A. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A sowie das Spektrum $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$.

3

3B. Berechnen Sie zu A die Jordan–Normalform $J_A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.
Hinweis: Es gilt $(A - 2E_5)^2 \cdot (0,0,0,1,1)^\intercal \neq 0$ und $(A - 2E_5)^3 \cdot (0,0,0,1,1)^\intercal = 0$.

4

Zur Erinnerung und Vermeidung von Übertragsfehlern: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.

3C. Bestimmen Sie zu A eine Jordan–Basis sowie eine Basiswechselmatrix T mit $T^{-1}AT = J_A$.

6

Aufgabe 4. *Euklidische Normalform einer Quadrik* (13 Punkte)

Wir betrachten die Quadrik $Q = \{(x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2 + 6\sqrt{2}x_1 - 10\sqrt{2}x_2 - 2 = 0\}$.

4A. Schreiben Sie die Q definierende Gleichung in Matrixform $x'^\intercal A' x' = 0$ mit symmetrischer Matrix $A' \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ in homogenen Koordinaten $x' = (1, x_1, x_2)^\intercal$.

$A' =$

1

4B. Es gibt eine Isometrie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x' \mapsto y' = T'^{-1} x'$, sodass die Matrix $B' = T'^\intercal A' T'$ in *euklidischer* Normalform vorliegt. Bestimmen Sie die Normalform B' und die Transformation T'!

8

4C. Um welche Quadrik handelt es sich gemäß der Klassifikation der ebenen Quadriken?

1

4D. Skizzieren Sie $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ in den ursprünglichen Standardkoordinaten $x = (x_1, x_2)$.

3

Aufgabe 5. *Bilinearform* (6 Punkte)

Sei K ein Körper. Sei $V = K^{n\times n}$ der Matrixring über K und $f \in \mathrm{Hom}_K(V, K)$ eine K–lineare Abbildung. Wir definieren $\beta : V \times V \to K : (A, B) \mapsto \beta(A, B) := f(A \cdot B)$.

5A. Zeigen Sie, dass β eine Bilinearform ist.

2

5B. Sei konkret $f = \mathrm{tr} : K^{2\times 2} \to K$ die Spur auf 2×2-Matrizen. Berechnen Sie die Gramsche Matrix in diesem konkreten Fall bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left(\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]\right)$ von $K^{2\times 2}$.

Ergebnis:

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\beta) = \begin{bmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 \\ 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

3

5C. Ist β im konkreten Fall $f = \mathrm{tr}$ wie in 5B entartet?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

1

Aufgabe 6. *Gram–Schmidt* (7 Punkte)

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle -, - \rangle$ sowie darin den Unterraum U und sein orthgonales Komplement $V = U^\perp$:

$$U = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}, \qquad \text{und} \qquad V = U^\perp = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

6A. Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von U mit dem Gram–Schmidt–Verfahren.

4

6B. Zerlegen Sie den Vektor $w = (1, 0, 0, 0)^\intercal \in \mathbb{R}^4$ als Summe $w = u + v$ mit $u \in U, v \in V$.

3

Aufgabe 7. *Diagonalisierbarkeit* (13 Punkte)

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Seien $v, w \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ mit $v \perp w$. Wir definieren $A := v \cdot v^\intercal + w \cdot w^\intercal \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

7A. Ist v ein Eigenvektor von A?

☐ Ja ☐ Nein.

2

7B. Zeigen Sie: Ist $u \in \mathbb{R}^n$ orthogonal zu v und w, so gilt $u \in \ker(A)$.

2

7C. Bestimmen Sie die Dimension des Kerns, $\dim_{\mathbb{R}} \ker(A)$.

$\dim_{\mathbb{R}}(\ker(A)) =$

Begründung:

3

7D. Ist A orthogonal diagonalisierbar? Falls nein, nennen Sie ein Hindernis. Falls ja, konstruieren Sie eine geeignete Orthonormalbasis und die zugehörige Diagonalmatrix.

$\overline{}$ 3

7E. Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an die Vektoren v und w, sodass $v + w$ ein Eigenvektor von A ist.

Notwendige und hinreichende Bedingung:

Begründung:

$\overline{}$ 3

Aufgabe 8. *Adjungierte Abbildung* (7 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$.
Sei $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ein Endomorphismus mit adjungiertem Endomorphismus F^{ad}.

8A. Zeigen Sie: Für alle $v \in \ker(F)$ und $w \in \mathrm{im}(F^{\mathrm{ad}})$ gilt $\langle v, w \rangle = 0$.

/ 2

8B. Sei $v \in V$ und $\langle v, w \rangle = 0$ für alle $w \in \mathrm{im}(F^{\mathrm{ad}})$. Zeigen Sie $v \in \ker(F)$.

/ 3

8C. Gilt $\ker(F) = (\mathrm{im}\, F^{\mathrm{ad}})^{\perp}$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/ 2