Klausur zur Linearen Algebra 2

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie Folgendes aus!* (1 Punkt)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Sitzplatznummer: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Begründen Sie Ihre Antwort, kurz aber überzeugend, etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung. Bei Rechnungen ist ein klar nachvollziehbarer Rechenweg gefragt mit den nötigen Erläuterungen.
- Für die Verständnisfragen in Aufgabe 2 gilt: Es gibt zwei Punkte für die richtige Antwort mit richtiger Begründung, und einen Punkt für die richtige Antwort mit einem ernsthaften Versuch einer Begründung. Allein das Ankreuzen gibt noch keinen Punkt.

Die Klausur enthält etwas zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Gewinnen Sie zunächst einen Überblick und sammeln Sie die Punkte, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/16	/13	/13	/6	/7	/13	/7	/76

Tipp: Viele Fragen sind Wiederholungen aus Vorlesung und Übung; sie belohnen kontinuierliche Mitarbeit während des Semesters und anschließend sorgfältige Klausurvorbereitung. Tipp für zukünftige Leser: Ihre Vorlesung und wöchentlichen Übungen erklären Ihnen die wunderschöne und nützliche Mathematik. Nutzen Sie dies, arbeiten Sie kontinuierlich mit, es lohnt sich!

Vorwort zur Musterlösung: Für Ihre Nacharbeitung dieser Klausur haben wir Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfungssituation verlangt war. Nach der Klausur ist vor der Klausur. Möge es nützen!

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (16 Punkte)

2A. Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mit $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Eig}(A,5) = 2$ und $|\det A| \le 100$.
Ist jede solche Matrix A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

☒ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Die Eigenwerte von A sind $5, 5, \lambda \in \mathbb{C}$, somit gilt $\det A = 25\lambda \in \mathbb{R}$, also insbesondere $\lambda \in \mathbb{R}$. Aus $|\det A| \le 100$ folgt $\lambda \in [-4,4]$, insbesondere gilt $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ und $\dim \operatorname{Eig}(A,\lambda) = 1$.

Erläuterung: Reelle Diagonalisierbarkeit der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bedeutet: Es gibt n reelle Eigenwerte (genauer: das charakteristische Polynom von A zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren), und für jeden erreicht die geometrische Vielfachheit die algebraische.

Im vorliegenden Falle gilt dies, daher existiert eine Eigenbasis, und wir erhalten $A \sim \begin{bmatrix} 5&0&0\\0&5&0\\0&0&\lambda \end{bmatrix}$.

Im Falle $\lambda = 5$ wüssten wir nur $\dim \operatorname{Eig}(A,5) \in \{2,3\}$ und somit $A \sim \begin{bmatrix} 5&0&0\\0&5&0\\0&0&5 \end{bmatrix}$ oder $A \sim \begin{bmatrix} 5&0&0\\0&5&1\\0&0&5 \end{bmatrix}$. In zweiten Falle wäre die Matrix A nicht diagonalisierbar.

$\overline{}$ 2

2B. Sei $A \in \mathbb{C}^{4\times4}$ reell mit Eigenwert i sowie $\det A = 0$ und $\operatorname{tr} A \ne 0$.
Ist jede solche Matrix A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

☒ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Die Eigenwerte von A sind $\mathrm{i}, -\mathrm{i}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ mit $\det A = \lambda\mu = 0$ und $\operatorname{tr} A = \lambda + \mu \ne 0$.
Daraus folgt (evtl. nach Vertauschung) $\lambda = 0$ und $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Somit gilt:

$$A \sim \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Erläuterung: Wir nutzen hier das einfachste Kriterium zur Diagonalisierbarkeit: Hat die Matrix $A \in K^{n\times n}$ verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, so ist A über K diagonalisierbar.

Gibt es wirklich *reelle* Matrizen mit all diesen Eigenschaften? Ja, zum Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

$\overline{}$ 2

2C. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A^2. Ist v dann auch ein Eigenvektor von A?

☐ Ja ☒ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Ein Gegenbeispiel (minimaler Größe) ist die Vierteldrehung $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Hier ist $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, also ist jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ ein Eigenvektor von A^2 zum Eigenwert -1. Hingegen hat A keinen Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$.

Alternative: Sei $A = J(2;0)$ ein 2×2-Jordan–Block zum Eigenwert 0. Dann ist $(0,1)^\top$ ein Eigenvektor von $A^2 = 0$, aber wegen $A \cdot (0,1)^\top = (1,0)^\top$ kein Eigenvektor von A.

Erläuterung: Es ist nicht ganz leicht, geeignete Gegenbeispiele zu erkennen bzw. zu konstruieren. Das gelingt am besten mit einem gewachsenen Beispielfundus, Erfahrung und Übung.

2

2D. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$–Vektorraum und $F \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft $F^3 + 2F = 3F^2$. Ist F dann über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

☒ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Das Minimalpolynom μ_F teilt $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$, zerfällt also über $\mathbb{R}$ und hat nur einfache Nullstellen. Das ist (notwendig und) hinreichend für $\mathbb{R}$–Diagonalisierbarkeit.

Erinnerung: Ausführlich argumentieren wir wie folgt. Über $\mathbb{C}$ können wir F in Jordan–Normalform bringen. Dank $\mu_F \mid X(X-1)(X-2)$ wissen wir $\sigma(F) \subseteq \{0,1,2\}$ und jeder Jordan–Block hat die Größe 1×1. Somit ist F über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar. Mögliche Beispiele:

$$F \sim \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&2&0\\0&0&2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&2&0\\0&0&2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2&0&0\\0&2&0\\0&0&2 \end{bmatrix}.$$

Warnung: Manche vermuten, das char. Polynom sei $\chi_F = X^3 - 3X^2 + 2X$. Das ist i.A. falsch, etwa für $\dim V \neq 3$. Selbst für $\dim V = 3$ gilt dies nur im ersten der obigen zehn Fälle.

Übung zur Wiederholung: Zählen Sie für $\dim V = 4$ alle Fälle auf, bis auf Ähnlichkeit.

2

2E. Seien $U \subseteq V$ Unterräume eines euklidischen $\mathbb{R}$–Vektorraums W. Gilt dann $V^\perp \subseteq U^\perp$?

☒ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Sei $w \in V^\perp$, es gelte also Orthogonalität $w \perp v$ für alle $v \in V$. Dann gilt insbesondere $w \perp v$ für alle $v \in U \le V$, also $w \in U^\perp$. Das zeigt $V^\perp \subseteq U^\perp$, wie behauptet.

Erinnerung: Zu jeder Teilmenge $X \subseteq W$ ist der Orthogonalraum $X^\perp \le W$ definiert durch $X^\perp := \{\, w \in W \mid \forall x \in X : \langle\, w, x \,\rangle = 0 \,\}$. Übung zur Wiederholung: Dies ist ein Unterraum.

Alternative im endlich-dimensionalen Fall: Wir wählen eine ONB $w_1, \dots, w_k$ von U, ergänzen diese zu einer ONB $w_1, \dots, w_\ell$ von V und schließlich zu einer ONB $w_1, \dots, \dots, w_n$ von W. Dann gilt $U^\perp = \langle\, w_{k+1}, \dots, w_n \,\rangle_{\mathbb{R}}^!$ und $V^\perp = \langle\, w_{\ell+1}, \dots, w_n \,\rangle_{\mathbb{R}}^!$, also insbesondere $U^\perp \supseteq V^\perp$.

Warnung: Für Unterräume $X, Y \le W$ genügt es zur Inklusion nicht, nur die Dimensionen zu vergleichen! Aus $X \le Y$ folgt $\dim X \le \dim Y$, aber nicht umgekehrt. (Beispiele als Übung!)

2

2F. Die Matrix $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ erfüllt $\operatorname{im}(A) = \ker(A)$. Angenommen, für eine weitere Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $\operatorname{im}(B) = \ker(B)$. Sind die Matrizen A und B dann ähnlich, also $A \sim B$?

[X] Ja [ ] Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Dank Dimensionsformel gilt $\dim\ker(B) + \dim\operatorname{im}(B) = 2$. Demnach hat $\operatorname{im}(B) = \ker(B)$ die Dimension 1. Wir wählen eine Basis $v_1 \in \mathbb{R}^2$ von $\ker(B) = \operatorname{im}(B)$ und hierzu ein Urbild $v_2 \in \mathbb{R}^2$, also $Bv_2 = v_1$. Insbesondere sind v_1, v_2 linear unabhängig, also eine Basis von $\mathbb{R}^2$. In dieser Basis wird B dargestellt durch die Matrix A.

Alternative: Wie zuvor stellen wir zunächst fest, dass $\operatorname{im}(B) = \ker(B)$ die Dimension 1 hat. Zudem gilt $B^2 = 0$, also hat $\ker(B^2)$ bereits die volle Dimension 2. Damit kennen wir die Jordanform zu B, dies ist gerade die Matrix A. (Das ist noch raffinierter, kürzer, eleganter.)

Noch kürzere Alternative: Es gilt $B^2 = 0$, doch $B \ne 0$. Für das Minimalpolynom gilt also $\mu_B | X^2$, doch $\mu_B \ne X$. Wir schließen $\mu_B = X^2$. Die Jordanform ist also $B \sim \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] = A$.

$\overline{}$ 2

2G. Die symmetrische Bilinearform $\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y) = x^\intercal A^2 y$ sei gegeben durch $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A^\intercal = A$. Es gelte $\det A < 0$. Ist β dann positiv definit?

[X] Ja [ ] Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Dank $\det A \ne 0$ gilt $\ker A = \{0\}$. Für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt demnach $Ax \ne 0$, also $\beta(x, x) = x^\intercal A^2 x = x^\intercal A^\intercal A x = (Ax)^\intercal (Ax) > 0$.

Erläuterung: Zum Nachweis genügt hier direkt die Definition der positiven Definitheit. Für den allgemeinen Fall einer symmetrischen $n\times n$–Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ verfügen wir über drei Kriterien: die Eigenwerte dank Spektralsatz, das Signaturtripel dank Trägheitssatz und schließlich das Hauptminoren-Kriterium für Determinanten. Alle drei sind nützlich.

Alternative: Die Matrix A ist diagonalisierbar mit den reellen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ und $\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \ne 0$. Somit hat A^2 die Eigenwerte $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2 > 0$, ist also positiv definit.

Achtung: Die Symmetrie von A ist wesentlich, wie das Gegenbeispiel $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ zeigt.

$\overline{}$ 2

2H. Gibt es eine reelle lineare Differentialgleichung $a_n u^{(n)}(t) + \dots + a_2 u''(t) + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = 0$ für $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit dem Lösungsraum $L = \langle\, t\,\mathrm{e}^t, t^2\,\mathrm{e}^t \,\rangle_\mathbb{R}$?

[ ] Ja [X] Nein. Beispiel oder Hindernis:

Die Lösungen $t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ und $t^2\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ treten bei (mindestens) dreifachem Eigenwert λ auf, hier für $\lambda = 1$. Dann ist der Eigenraum (mindestens) dreidimensional, denn $L \ge \langle\, \mathrm{e}^{\lambda t}, t\,\mathrm{e}^{\lambda t}, t^2\,\mathrm{e}^{\lambda t} \,\rangle_\mathbb{R}^!$.

Wiederholung: Diese schöne, kleine Anwendung folgt aus der allgemeinen Lösungstheorie zu homogenen Differentialgleichungen $P(\partial)\,u = 0$. Diese ist nicht nur praktisch nützlich, sondern auch theoretisch hilfreich, denn sie verschafft uns einen bequemen, präzisen Überblick: Lösungsräume haben eine sehr spezielle und sehr einfache Struktur.

Erläuterung: Es gilt $\langle\, \mathrm{e}^{\lambda t}, t\,\mathrm{e}^{\lambda t}, t^2\,\mathrm{e}^{\lambda t} \,\rangle_\mathbb{R}^! = \langle\, \mathrm{e}^{\lambda t}, t\,\mathrm{e}^{\lambda t}, \tfrac{1}{2}t^2\,\mathrm{e}^{\lambda t} \,\rangle_\mathbb{R}^!$. Im zweiten Falle ist die angegebene Basis eine Hauptvektorkette des Ableitungsoperators ∂. Der Aufspann ist derselbe.

$\overline{}$ 2

Aufgabe 3. *Jordan–Normalform* (13 Punkte)

Gegeben ist die reelle Matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.

3A. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A sowie das Spektrum $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$.

Zur Berechnung der Determinante nutzen wir geschickt die Formel für Block-Dreiecksmatrizen (oder die Laplace–Entwicklung) und die Formel für 2×2-Matrizen. Damit erhalten wir das charakteristische Polynom

$$P_A = \det(A - XE_5) = \det \begin{bmatrix} 3-X & 1 \\ -1 & 1-X \end{bmatrix} \cdot (2-X)(-1-X)(2-X)$$

$$= -(X^2 - 4X + 4)(X+1)(X-2)^2 = -(X+1)(X-2)^4. \blacktriangleleft\blacktriangleleft$$

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von P_A. Somit erhalten wir das Spektrum

$$\sigma(A) = \{-1, 2\}. \blacktriangleleft$$

Erläuterung: Allgemein suchen wir das Spektrum $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ in den komplexen Zahlen. Im vorliegenden Beispiel erweist sich das Spektrum als reell, es gilt also $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Auch das kommt natürlich vor und sollte Sie nicht weiter verwirren.

—
3

3B. Berechnen Sie zu A die Jordan–Normalform $J_A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.
Hinweis: Es gilt $(A - 2E_5)^2 \cdot (0,0,0,1,1)^\intercal \neq 0$ und $(A - 2E_5)^3 \cdot (0,0,0,1,1)^\intercal = 0$.

Die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts -1 ist $\mu(P_A, -1) = 1$.
Daher gibt es genau einen Jordan-Block der Größe 1×1 zum Eigenwert -1. ◀

Die Anzahl der Jordan-Blöcke zum Eigenwert 2 ist die Dimension des zugehörigen Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, 2) = \ker(A - 2E_5)$. Diese wird mittels Gauß-Algorithmus bestimmt:

$$A - 2E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[(4)+(3)]{(2)+(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hieran können wir bereits $\dim_{\mathbb{R}} \ker(A - 2E_5) = 5 - \operatorname{rang}(A - 2E_5) = 2$ ablesen.

Aus dem Hinweis wissen wir, dass $(0,0,0,1,1)^\intercal$ ein Hauptvektor der Stufe 3 zum Eigenwert 2 ist, d.h. es gibt einen Jordan–Block zum Eigenwert 2 der Dimension mindestens 3. Folglich haben die Jordan-Blöcke zum Eigenwert 2 die Größen 3×3 und 1×1.◀◀

Erläuterung: Mit dem Hinweis lassen sich die Rechnungen abkürzen und Zeit sparen, da Sie nur noch $\ker(A - 2E_5)$ benötigen, hier zunächst die Dimension, anschließend eine Basis. Alternativ können Sie $\ker(A - 2E_5)$, $\ker(A - 2E_5)^2$ und $\ker(A - 2E_5)^3$ selbst berechnen; das entspricht dem Standardverfahren zur Jordanisierung, ist aber aufwändiger.

Wir erhalten die Jordan-Normalform

$$J_A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \blacktriangleleft$$

4

Zur Erinnerung und Vermeidung von Übertragsfehlern: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.

3C. Bestimmen Sie zu A eine Jordan–Basis sowie eine Basiswechselmatrix T mit $T^{-1}AT = J_A$.

Wir bestimmen den Eigenraum $\operatorname{Eig}(A,-1)$ mittels Gauß-Algorithmus:

$$A + 1E_5 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \dots$$

Somit ist $\operatorname{Eig}(A,-1) = \langle\, v_1 \,\rangle_{\mathbb{R}}$ mit $v_1 = (0,0,1,-1,0)^\intercal$. $\blacktriangleleft$

Erläuterung: Natürlich können Sie hier routiniert den Gauß-Algorithmus ausführen, das führt wie immer zum Ziel. Im vorliegenden Fall ist jedoch eine dramatische Abkürzung möglich und auch leicht zu erkennen: Spalte 3 und 4 sind gleich, also liegt $v_1 = (0,0,1,-1,0)^\intercal$ im Kern. Wir wissen bereits, dass der Eigenraum die Dimension 1 hat, also sind wir fertig!

Für den Eigenraum $\operatorname{Eig}(A,2)$ verwenden wir wieder den Gauß-Algorithmus (als Fortsetzung der obigen Rechnung bringen wir die Stufenform in reduzierte Stufenform):

$$A - 2E_5 \xrightarrow[]{\substack{(2)+(1)\\(4)+(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{(3)\cdot\frac{1}{3}\\(2)-(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Somit ist $\operatorname{Eig}(A,2) = \langle\, (1,-1,0,0,0)^\intercal, (0,0,1,-1,-1)^\intercal \,\rangle_{\mathbb{R}}$. ◀

Mit dem Hinweis aus **3B** erhalten wir für den 3×3-Block die Hauptvektorkette

$$v_4 = (0,0,0,1,1)^\intercal \overset{A-2E_5}{\mapsto} v_3 = (0,1,0,0,0)^\intercal \overset{A-2E_5}{\mapsto} v_2 = (1,-1,0,0,0)^\intercal \overset{A-2E_5}{\mapsto} (0,0,0,0,0)^\intercal. ◀◀$$

Für den verbleibenden 1×1-Block können wir den letzten Basisvektor $v_5 = (0,0,1,-1,-1)^\intercal$ aus $\operatorname{Eig}(A,2) \smallsetminus \langle\, v_2 \,\rangle_{\mathbb{R}}$ wählen. ◀

Damit erhalten wir die ersehnte Jordan-Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ und die zugehörige Basiswechselmatrix T:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right), \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. ◀$$

Erläuterung: Hier bietet der Hinweis eine enorme Arbeitsersparnis! Wenn Sie den Hinweis ignorieren, können Sie das Standardverfahren anwenden, also $\ker(A-2E_5)^2$ und $\ker(A-2E_5)^3$ ausrechnen etc. Das ist routiniert möglich, dauert aber länger. Wenn Sie möchten, können Sie dies zur Übung und zum besseren Verständnis einmal in Ruhe durchrechnen.

6

Aufgabe 4. *Euklidische Normalform einer Quadrik* (13 Punkte)

Wir betrachten die Quadrik $Q = \{(x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2 + 6\sqrt{2}x_1 - 10\sqrt{2}x_2 - 2 = 0\}$.

4A. Schreiben Sie die Q definierende Gleichung in Matrixform $x'^\intercal A' x' = 0$ mit symmetrischer Matrix $A' \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ in homogenen Koordinaten $x' = (1, x_1, x_2)^\intercal$.

$$A' = \left[\begin{array}{c|cc} -2 & 3\sqrt{2} & -5\sqrt{2} \\ \hline 3\sqrt{2} & 3 & -5 \\ -5\sqrt{2} & -5 & 3 \end{array}\right] \blacktriangleleft$$

1

4B. Es gibt eine Isometrie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x' \mapsto y' = T'^{-1}x'$, sodass die Matrix $B' = T'^\intercal A' T'$ in *euklidischer* Normalform vorliegt. Bestimmen Sie die Normalform B' und die Transformation T'.

Zuerst bestimmen wir eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$:

$$P_A = \det(A - XE_2) = (3 - X)(3 - X) - 25 = X^2 - 6X - 16 = (X - 8)(X + 2)\,. \blacktriangleleft$$

Die Eigenwerte sind demnach 8 und −2. (Orthonormal-)Basen für die Eigenräume können wir (ohne weitere Rechnung) an den Matrizen

$$A - 8E_2 = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \text{ und } A + 2E_2 = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

ablesen:

$$\mathrm{Eig}(A, 8) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}, \blacktriangleleft$$

$$\mathrm{Eig}(A, -2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}. \blacktriangleleft$$

Wir beginnen daher mit der Transformation T_1' und der beschreibende Matrix A_1' mit

$$T_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_1' = T_1'^\intercal \cdot A' \cdot T_1' = \begin{bmatrix} -2 & 8 & -2 \\ 8 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \blacktriangleleft$$

Ab hier verwenden wir das symmetrische Gaußverfahren:

$$
\begin{array}{ccc|ccc||ccc|l}
\hline
 & & & -2 & 8 & -2 & 1 & 0 & 0 & \\
 & & & 8 & 8 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\
 & & & -2 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & (1) - 1 \cdot (2) \\
\hline
-10 & 0 & -2 & -10 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & \\
8 & 8 & 0 & 0 & 8 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\
-2 & 0 & -2 & -2 & 0 & -2 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & (1) - 1 \cdot (3) \\
\hline
-8 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 8 & 0 & 0 & 8 & 0 & -\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\
-2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{Multiplizieren der} \\
\hline
 & & & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \text{Gleichung mit } \frac{1}{8} \\
 & & & 0 & 1 & 0 & -\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\
 & & & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \qquad\qquad \blacktriangleleft\blacktriangleleft\blacktriangleleft \\
\hline
\end{array}
$$

Somit sind die Normalform B' und eine zugehörige Transformation T' gegeben durch

$$
B' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}, \qquad T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \blacktriangleleft
$$

Erläuterung: Gefragt war hier die *euklidische* Normalform. Viele haben dies mit der *affinen* Normalform durcheinandergebracht und die jeweiligen Rechenmethoden wild gemischt und falsch angewendet. Bitte lernen Sie genau, welche Umformungen was tun und wann sie angebracht sind. (1) Es ergibt keinen Sinn, die erste Zeile/Spalte mit einem Skalar zu multiplizieren. Ebenso darf ein Vielfaches der ersten Zeile/Spalte nicht auf eine andere addiert werden. (2) Eine Skalierung der folgenden Zeilen/Spalten ist keine Isometrie; für die affine Klassifikation ist dies erlaubt, für die euklidische Klassifikation hingegen nicht.

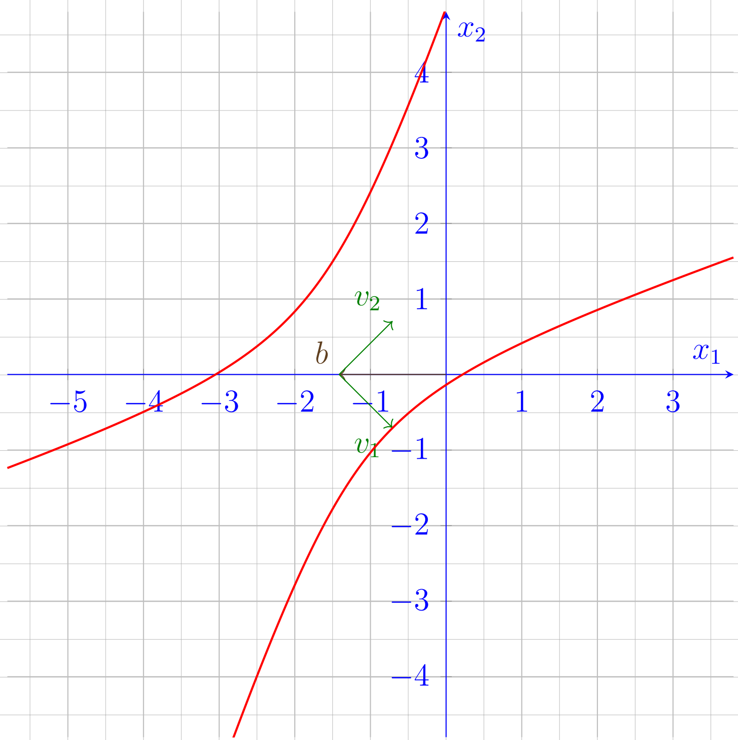
8

4C. Um welche Quadrik handelt es sich gemäß der Klassifikation der ebenen Quadriken?

Die Quadrik beschreibt eine Hyperbel. ◀

Erläuterung: Der ursprünglichen Gleichung sieht man die Form der Lösungsmenge (meist) nicht sofort an. Nach dem Übergang zur Normalform gelingt dies hingegen leicht. Die Klassifikation verschafft uns so einen guten Überblick über alle Möglichkeiten. Zudem können wir die gegebene Quadrik ganz konkret darstellen, wie in der folgenden Skizze. 1

4D. Skizzieren Sie $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ in den ursprünglichen Standardkoordinaten $x = (x_1, x_2)$.



◀◀◀

Erläuterung: Zuerst zeichnen wir den Ursprung $b = (-\sqrt{2}, 0)^\intercal$ des transformierten Koordinatensystems ein. Von diesem Punkt aus werden die Richtungsvektoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^\intercal$ und $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^\intercal$ abgetragen. So erhalten wir das neue Koordinatensystem, dargestellt im alten.

Wir arbeiten nun in den neuen Koordinaten. Die Gleichung $y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 = 1$ beschreibt hier eine Standardhyperbel, die um den Faktor 2 in y_2-Richtung gestreckt ist. Damit lässt sich unsere Quadrik leicht zeichnen. Genau für diese einfache Darstellung haben wir die Koordinaten transformiert, daher ist die graphische Darstellung ein schöner, krönender Abschluss.

Das korrekte Vorgehen und die saubere Zeichnung erfordern Übung. Versuchen Sie es selbst! 3

Aufgabe 5. *Bilinearform* (6 Punkte)

Sei K ein Körper. Sei $V = K^{n\times n}$ der Matrixring über K und $f \in \operatorname{Hom}_K(V, K)$ eine K–lineare Abbildung. Wir definieren $\beta : V \times V \to K : (A, B) \mapsto \beta(A, B) := f(A \cdot B)$.

5A. Zeigen Sie, dass β eine Bilinearform ist.

Additivität: Für $A, B, C \in V$ ist

$$\begin{aligned}\beta(A + B, C) &= f((A + B) \cdot C)\\ &= f(AC + BC) = f(AC) + f(BC) = \beta(A, C) + \beta(B, C)\end{aligned}$$

Die Additivität im zweiten Argument zeigt man ähnlich. ◀

Skalierung: Für $A, B \in V$ und $\lambda \in K$ ist

$$\beta(\lambda A, B) = f(\lambda AB) = \lambda f(AB) = \lambda\beta(A, B)$$

Die Skalierungseigenschaft im zweiten Argument zeigt man ähnlich. ◀

Bemerkung: Die Linearität im zweiten Argument folgt hier *nicht* bereits aus der Symmetrie, denn es gibt Homomorphismen f, für die β nicht symmetrisch ist. Wenn Sie möchten, können Sie sich zur Übung ein Gegenbeispiel überlegen.

2

5B. Sei konkret $f = \operatorname{tr} : K^{2\times 2} \to K$ die Spur auf 2×2-Matrizen. Berechnen Sie die Gramsche Matrix in diesem konkreten Fall bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right])$ von $K^{2\times 2}$.

Ergebnis:

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ◀◀◀

Erläuterung: Um den Eintrag in der zweiten Zeile, dritten Spalte zu bestimmen, berechnen wir $\operatorname{tr}\left(\left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right]\right) = \operatorname{tr}\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right] = 1$

3

5C. Ist β im konkreten Fall $f = \operatorname{tr}$ wie in 5B entartet?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Dank der Vorlesung ist eine symmetrische Bilinearform genau dann nicht-entartet, wenn die Gramsche Matrix vollen Rang hat. Das ist hier offensichtlich der Fall. ◀

1

Aufgabe 6. *Gram–Schmidt* (7 Punkte)

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle -, - \rangle$ sowie darin den Unterraum U und sein orthgonales Komplement $V = U^\perp$:

$$U = \left\langle v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}, \qquad \text{und} \qquad V = U^\perp = \left\langle v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

6A. Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von U mit dem Gram–Schmidt–Verfahren.

Wir wenden Gram-Schmidt auf die Vektoren $v_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, $v_2 = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, $v_3 = \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ an, um aus dem Erzeugendensystem (v_1, v_2, v_3) von U eine Orthonormalbasis (w_1, w_2, w_3) zu gewinnen:

$$u_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \blacktriangleleft\blacktriangleleft$$

Somit erhalten wir die ersehnte Orthonormalbasis (w_1, w_2, w_3) von U.

Erläuterung: Wir empfehlen eine sorgsame und geschickte Organisation der Rechnung! (Man kann sich sonst leicht verhaspeln.) Zur Normierung rechts müssen wir durch die Norm dividieren, dabei sind Ausdrücke mit Quadratwurzeln unvermeidlich. Die Berechnung der (noch nicht normierten) Orthogonalbasis (u_1, u_2, u_3) links hingegen ist ganz bewusst so gestaltet, dass hier keine Wurzeln nötig sind. Das vereinfacht die Rechnung und vermeidet Rechenfehler.

Hinweis: Gefragt ist hier eine Orthonormalbasis von U. In der Klausur haben viele eine ONB von $\mathbb{R}^4$ berechnet, indem sie das Verfahren auf (v_1, v_2, v_3, v_4) angewendet haben. Das verlängert die Rechnung unnötig um einen weiteren Schritt — und liefert eine falsche Antwort.

4

6B. Zerlegen Sie den Vektor $w = (1,0,0,0)^\intercal \in \mathbb{R}^4$ als Summe $w = u + v$ mit $u \in U, v \in V$.

Wir projizieren w orthogonal auf den Unterraum $V = \langle v_4 \rangle_\mathbb{R}$ zum Vektor $v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$:

$$v = \frac{\langle w, v_4 \rangle}{\langle v_4, v_4 \rangle} \cdot v_4 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \blacktriangleleft\blacktriangleleft$$

Den Summanden u erhalten wir nun leicht als Differenz:

$$u = w - v = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

Erläuterung: Wir nutzen hier ganz wesentlich, dass die Unterräume U und V im $\mathbb{R}^4$ senkrecht aufeinander stehen. Damit können wir die Zerlegung $w = u + v$ sehr effizient mit dem Skalarprodukt berechnen, so wie hier gezeigt.

Alternative: Sie können zunächst den Vektor v_4 normieren, dabei treten im Allgemeinen aber Wurzeln auf. Das schafft zusätzliche Möglichkeiten, sich zu verrechnen. Hier gilt glücklicherweise $\|v_4\| = 2$, die Gefahr ist also gering.

Ungünstige Alternative: Sie können den Vektor w statt auf V auch orthogonal auf U projizieren. Die Rechnung verläuft genauso wie mit v_4, nun allerdings mit u_1, u_2, u_3 oder w_1, w_2, w_3. Das ist dreimal so lang, zeitaufwändig und fehleranfällig. Wenn Sie möchten, probieren Sie es zur Übung einmal selbst, dann spüren Sie den Unterschied und sind für immer geheilt.

Ganz ungünstige Alternative: Sie lösen das Gleichungssystem $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$ nach $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ auf und setzen dann $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ und $v = \lambda_4 v_4$. Das gelingt mit dem Gauß-Verfahren, ist aber noch aufwändiger. Ohne Orthogonalität der Unterräume U und V wäre das der richtige Ansatz. Mit Orthogonalität geht es jedoch noch einfacher!

3

Aufgabe 7. *Diagonalisierbarkeit* (13 Punkte)

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Seien $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $v \perp w$. Wir definieren $A := v \cdot v^\intercal + w \cdot w^\intercal \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

7A. Ist v ein Eigenvektor von A?

[X] Ja [ ] Nein.

Es gilt

$$A \cdot v = (v \cdot v^\intercal + w \cdot w^\intercal) \cdot v = v \cdot \underbrace{(v^\intercal \cdot v)}_{=:\lambda \in \mathbb{R}} + w \cdot \underbrace{(w^\intercal \cdot v)}_{=0} = \lambda v$$

Da $v \neq 0$ ist, ist v ein Eigenvektor von A, und zwar zum Eigenwert $\lambda = v^\intercal \cdot v = \|v\|^2$. ◀◀
Dasselbe gilt auch für den Vektor w, die Rechnung verläuft genauso.

2

7B. Zeigen Sie: Ist $u \in \mathbb{R}^n$ orthogonal zu v und w, so gilt $u \in \ker(A)$.

Es gilt

$$A \cdot u = (v \cdot v^\intercal + w \cdot w^\intercal) \cdot u = v \cdot \underbrace{(v^\intercal \cdot u)}_{=0 \text{ da } v \perp u} + w \cdot \underbrace{(w^\intercal \cdot u)}_{=0 \text{ da } w \perp u} = 0,$$

demnach ist $u \in \ker(A)$. ◀◀

Erläuterung: Hier sind $v, v^\intercal, w, w^\intercal$ Matrizen, daher nutzen wir die passenden Rechenregeln, hier insbesondere Distributivität und Assoziativität. Hingegen gilt die Kommutativität nicht, Sie dürfen also nicht vertauschen: $v^\intercal \cdot v$ ist ein Skalar, $v \cdot v^\intercal$ hingegen eine $n \times n$–Matrix!

2

7C. Bestimmen Sie die Dimension des Kerns, $\dim_{\mathbb{R}} \ker(A)$.

$\dim_{\mathbb{R}}(\ker(A)) = n - 2$ ◀

Begründung: (1) Dank 7B gilt $\langle v, w \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \subseteq \ker(A)$. Dank $v, w \neq 0$ und $v \perp w$ ist (v, w) linear unabhängig, also $\langle v, w \rangle_{\mathbb{R}}$ zweidimensional. Es folgt $\dim_{\mathbb{R}}(\langle v, w \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}) = n - 2$, also $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(A)) \geq n - 2$. ◀

(2) Die Vektoren v und w sind linear unabhängige Eigenvektoren zu von 0 verschiedenen Eigenwerten (nämlich $\|v\|^2 \neq 0$ bzw. $\|w\|^2 \neq 0$). Daher ist 0 höchstens $(n-2)$-facher Eigenwert von A, also $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(A)) \leq n - 2$. ◀

3

7D. Ist A orthogonal diagonalisierbar? Falls nein, nennen Sie ein Hindernis. Falls ja, konstruieren Sie eine geeignete Orthonormalbasis und die zugehörige Diagonalmatrix.

Ja, die Matrix A ist orthogonal diagonalisierbar.

Dazu wählen wir eine ONB $(v_1, \dots, v_{n-2})$ von $\ker(A)$.
Dann ist $(\frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|}, v_1, \dots, v_{n-2})$ eine ONB von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren. ◀◀

Die zugehörige Diagonalmatrix ist $D = \operatorname{diag}(\|v\|^2, \|w\|^2, 0, \dots, 0)$. ◀

3

7E. Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an die Vektoren v und w, sodass $v + w$ ein Eigenvektor von A ist.

Notwendige und hinreichende Bedingung:

Es gilt $\|v\| = \|w\|$. ◀

Begründung:

Die Eigenvektorgleichung für $v + w$ lautet:

$$A \cdot (v + w) = \|v\|^2 \cdot v + \|w\|^2 \cdot w \stackrel{!}{=} \mu \cdot (v + w) \quad \text{für ein } \mu \in \mathbb{R}.$$

Da $v, w \neq 0$ senkrecht aufeinanderstehen, ist (v, w) linear unabhängig.
Per Koeffizientenvergleich lesen wir daraus $\mu = \|v\|^2 = \|w\|^2$ ab.
Daher ist $v + w \neq 0$ genau dann ein Eigenvektor, wenn $\|v\| = \|w\|$ ist. ◀◀

Alternative Lösung: Dank einer Bemerkung im Buch von Fischer ist $v + w$ kein Eigenvektor, wenn die Eigenwerte $\|v\|^2$ und $\|w\|^2$ verschieden sind. Die obige Bedingung ist also notwendig. Sie ist auch hinreichend: Sind die Eigenwerte gleich, so liegen v und w im selben Eigenraum, und somit auch ihre Summe $v + w$. Diese Argumentation ist auch sehr aufschlussreich!

3

Aufgabe 8. *Adjungierte Abbildung* (7 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$.
Sei $F \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ein Endomorphismus mit adjungiertem Endomorphismus F^{ad}.

8A. Zeigen Sie: Für alle $v \in \ker(F)$ und $w \in \operatorname{im}(F^{\mathrm{ad}})$ gilt $\langle v, w \rangle = 0$.

Zu $w \in \operatorname{im}(F^{\mathrm{ad}})$ wählen wir ein Urbild $w' \in V$ mit $w = F^{\mathrm{ad}}(w')$. Damit folgt

$$\langle v, w \rangle = \langle v, F^{\mathrm{ad}}(w') \rangle = \langle F(v), w' \rangle = \langle 0, w' \rangle = 0. \quad ◀◀$$

Erläuterung: Diese Frage bietet leichte Punkte; einzige Voraussetzung ist, die Definitionen zu kennen: Kern und Bild und Adjungierte.

2

8B. Sei $v \in V$ und $\langle v, w \rangle = 0$ für alle $w \in \operatorname{im}(F^{\mathrm{ad}})$. Zeigen Sie $v \in \ker(F)$.

Es gilt $\langle F(v), F(v) \rangle = \langle v, F^{\mathrm{ad}}(F(v)) \rangle = 0$.

Da $\langle -, - \rangle$ positiv definit ist, folgt $F(v) = 0$. ◀◀◀

Erläuterung: Der Ansatz ist etwas trickreich, anschließend geht es leicht.

3

8C. Gilt $\ker(F) = (\operatorname{im} F^{\mathrm{ad}})^{\perp}$?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Dank 8A gilt die Inklusion $\ker F \subseteq (\operatorname{im} F^{\mathrm{ad}})^{\perp}$.

Dank 8B gilt auch die umgekehrte Inklusion $\ker F \supseteq (\operatorname{im} F^{\mathrm{ad}})^{\perp}$. ◀◀

Erläuterung: Hier gilt es, die Definitionen zu erkennen, und dass die Arbeit schon getan ist!

2