Klausur zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie Folgendes aus!* (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Sitzplatznummer:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Begründen Sie Ihre Antwort, kurz aber überzeugend, etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung. Bei Rechnungen ist ein klar nachvollziehbarer Rechenweg gefragt mit den nötigen Erläuterungen.
- Für die Verständnisfragen in Aufgabe 2 gilt: Es gibt zwei Punkte für die richtige Antwort mit richtiger Begründung, und einen Punkt für die richtige Antwort mit einem ernsthaften Versuch einer Begründung. Allein das Ankreuzen gibt noch keinen Punkt.

Die Klausur enthält etwas zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Gewinnen Sie zunächst einen Überblick und sammeln Sie die Punkte, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Gesamt
Punkte	/1	/16	/12	/6	/12	/6	/7	/14	/6	/80

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (16 Punkte)

2A. Ist durch $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} : (a, b) \mapsto \frac{a}{b}$ eine Abbildung definiert?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/2

2B. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Gilt $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

/2

2C. Existiert zu je zwei Selbstabbildungen $\sigma, \tau : \{1, \dots, 9\} \to \{1, \dots, 9\}$ genau eine Abbildung $\pi : \{1, \dots, 9\} \to \{1, \dots, 9\}$ mit $\sigma \circ \pi = \tau$?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

/2

2D. Ist $f : (\mathbb{Z}_2, +) \to (\mathbb{Z}_6, +) : \bar{0} \mapsto \bar{0}, \ \bar{1} \mapsto \bar{2}$ ein Gruppenhomomorphismus?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

/2

2E. Ist $K = \{\, a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{Z} \,\}$ ein Teilring von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

$\overline{2}$

2F. Gibt es einen Ringhomomomorphismus $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $f(a) = \left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right]$ für alle $a \in \mathbb{R}$ sowie $f(X) = B := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ und $f(X^2) = C := \left[\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Hindernis:

$\overline{2}$

2G. Gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ mit $A^2 = B := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$? *Tipp:* Nutzen Sie die Determinante!

☐ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Hindernis:

$\overline{2}$

2H. Sind die $\mathbb{R}$–Vektorräume $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 5}$ und $W = \mathbb{C}^5$ isomorph?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Hindernis:

$\overline{2}$

Aufgabe 3. *Bild und Kern* (12 Punkte)

Gegeben sind die beiden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 3}.$$

3A. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(A)$.

4

3B. Berechnen Sie den Rang der Matrix B.

3

3C. Bestimmen Sie die fehlenden Einträge der Matrix $A \cdot B$.

Ergebnis:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ & 8 & 3 \\ & & 0 \\ & & \end{bmatrix}$$

1

3D. Gilt $\operatorname{im}(B) \subseteq \ker(A)$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/2

3E. Gilt $\ker(A) \subseteq \operatorname{im}(B)$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/2

Aufgabe 4. *Vollständige Induktion* (6 Punkte)

4A. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen $a_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeigen Sie per vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Behauptung:

$$A(n): \qquad \prod_{k=0}^{n}(1+a_k) \geq 1 + \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Induktionsanfang:

2

Induktionsschritt:

4

Aufgabe 5. *Darstellende Matrizen* (12 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

und die Abbildung $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2} : X \mapsto A \cdot X - X \cdot A.$

5A. Zeigen Sie, dass f eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung ist.

$\overline{}$ 3

5B. Zum $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ betrachten wir die Basis $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, wobei

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die Bilder $f(E_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ der Basiselemente.

$f(E_{11}) =$

$f(E_{12}) =$

$f(E_{21}) =$

$f(E_{22}) =$

4

5C. Geben Sie die Abbildungsmatrix $B = \mathrm{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(f)$ an.

$\mathrm{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(f) =$

/1

5D. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{im}(B)$.

/2

5E. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{im}(f)$.

/2

Aufgabe 6. *Symmetrische Gruppe* (6 Punkte)

Wir betrachten die Permutation $\sigma := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \in S_7$.

6A. Geben Sie die Menge der Fehlstände von σ an.

Ergebnis:

$\operatorname{Inv}(\sigma) =$

2

6B. Schreiben Sie σ als Produkt von möglichst wenigen Fundamentaltranspositionen.

Anzahl der benötigten Fundamentaltranspositionen und Produkt mit Herleitung:

4

Aufgabe 7. *Äquivalenzrelationen* (7 Punkte)

Wir betrachten den Restklassenring $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_7 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$.

7A. Schreiben Sie $f : \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7 : x \mapsto x^3$ explizit aus (mit den kanonischen Repräsentanten).

Ergebnis:

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$f(x)$							

/2

7B. In der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}_7^\times, \cdot)$ erzeugt das Element $\overline{2}$ die Untergruppe $U = \langle\, \overline{2}\, \rangle$. Zählen Sie die Elemente von U auf (mit den kanonischen Repräsentanten).

Ergebnis:

/2

7C. Auf $\mathbb{Z}_7$ definieren wir die Äquivalenzrelation $x \sim y$ durch $ux = y$ für ein $u \in U$. Nennen Sie zum Quotienten $q : \mathbb{Z}_7 \twoheadrightarrow Q = \mathbb{Z}_7/_\sim$ explizit die Zerlegung Q in Äquivalenzklassen.

Ergebnis:

/2

7D. Finden Sie alle Abbildungen $g : \mathbb{Z}_7/_\sim \to \mathbb{Z}_7$ mit der Eigenschaft $f = g \circ q$.

Ergebnis:

/1

Aufgabe 8. *Gruppen und Homomorphismen* (14 Punkte)

Sei $(G, \cdot, 1)$ eine Gruppe. Untersuchen Sie die Implikationen der beiden Aussagen:

(1) Die Gruppe G ist abelsch.

(2) Die Abbildung $f : G \to G : x \mapsto x^2$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

8A. Gilt (1) impliziert (2)?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

/ 3

8B. Gilt (2) impliziert (1)?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

/ 3

Sei $(G, \cdot, 1)$ eine Gruppe und $g \in G$ ein Element.

8C. Ist die Abbildung $\gamma_g : G \to G : x \mapsto g \cdot x \cdot g$ bijektiv?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

2

8D. Für welche $g \in G$ ist die Abbildung $\gamma_g : G \to G : x \mapsto g \cdot x \cdot g$ ein Gruppenhomomorphismus? Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an g.

Die Abbildung γ_g ist ein Gruppenhomomorphismus genau dann, wenn das Element g ...

Begründung:

3

8E. Für welche Gruppen G ist die Abbildung $\gamma : (G, \cdot) \to (\mathrm{Abb}(G, G), \circ) : g \mapsto \gamma_g$ multiplikativ? Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an G.

Die Abbildung γ ist multiplikativ genau dann, wenn die Gruppe G …

Begründung:

3

Aufgabe 9. *Inversion von Matrizen* (6 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}$ über dem Körper $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ mit fünf Elementen.

9A. Berechnen Sie die Inverse A^{-1} zur Matrix A.

$\overline{}$ 4

9B. Ist die Transponierte $A^\intercal$ invertierbar?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenargument:

$\overline{}$ 2