

Klausur zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie Folgendes aus!* (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Sitzplatznummer:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Begründen Sie Ihre Antwort, kurz aber überzeugend, etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung. Bei Rechnungen ist ein klar nachvollziehbarer Rechenweg gefragt mit den nötigen Erläuterungen.
- Für die Verständnisfragen in Aufgabe 2 gilt: Es gibt zwei Punkte für die richtige Antwort mit richtiger Begründung, und einen Punkt für die richtige Antwort mit einem ernsthaften Versuch einer Begründung. Allein das Ankreuzen gibt noch keinen Punkt.

Die Klausur enthält etwas zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Gewinnen Sie zunächst einen Überblick und sammeln Sie die Punkte, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Gesamt
Punkte	/1	/16	/12	/6	/12	/6	/5	/8	/14	/80

2E. Ist $K = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}i$ ein Teilring von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$?

Ja Nein. Begründung:



2

2F. Gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $A^2 = B := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$? *Tipp:* Nutzen Sie die Determinante!

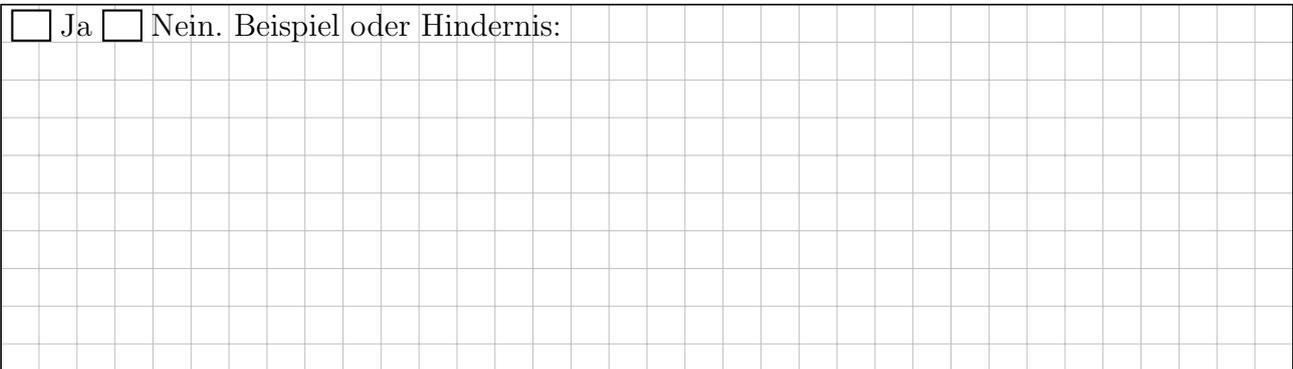
Ja Nein. Beispiel oder Hindernis:



2

2G. Gibt es eine \mathbb{Q} -lineare Surjektion $f: \mathbb{Q}^{41} \rightarrow \mathbb{Q}^{43}$?

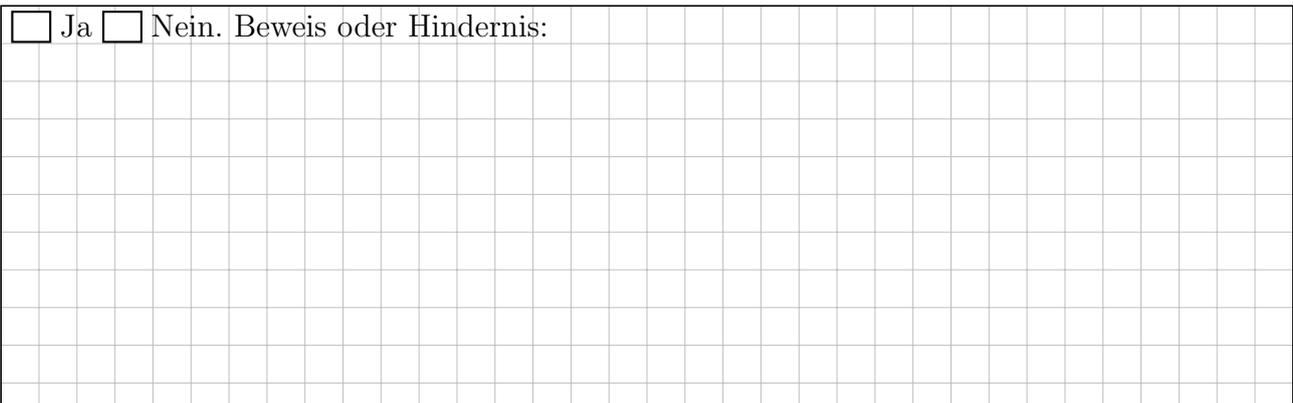
Ja Nein. Beispiel oder Hindernis:



2

2H. Sind die \mathbb{R} -Vektorräume $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $W = \mathbb{C}^2$ isomorph?

Ja Nein. Beweis oder Hindernis:

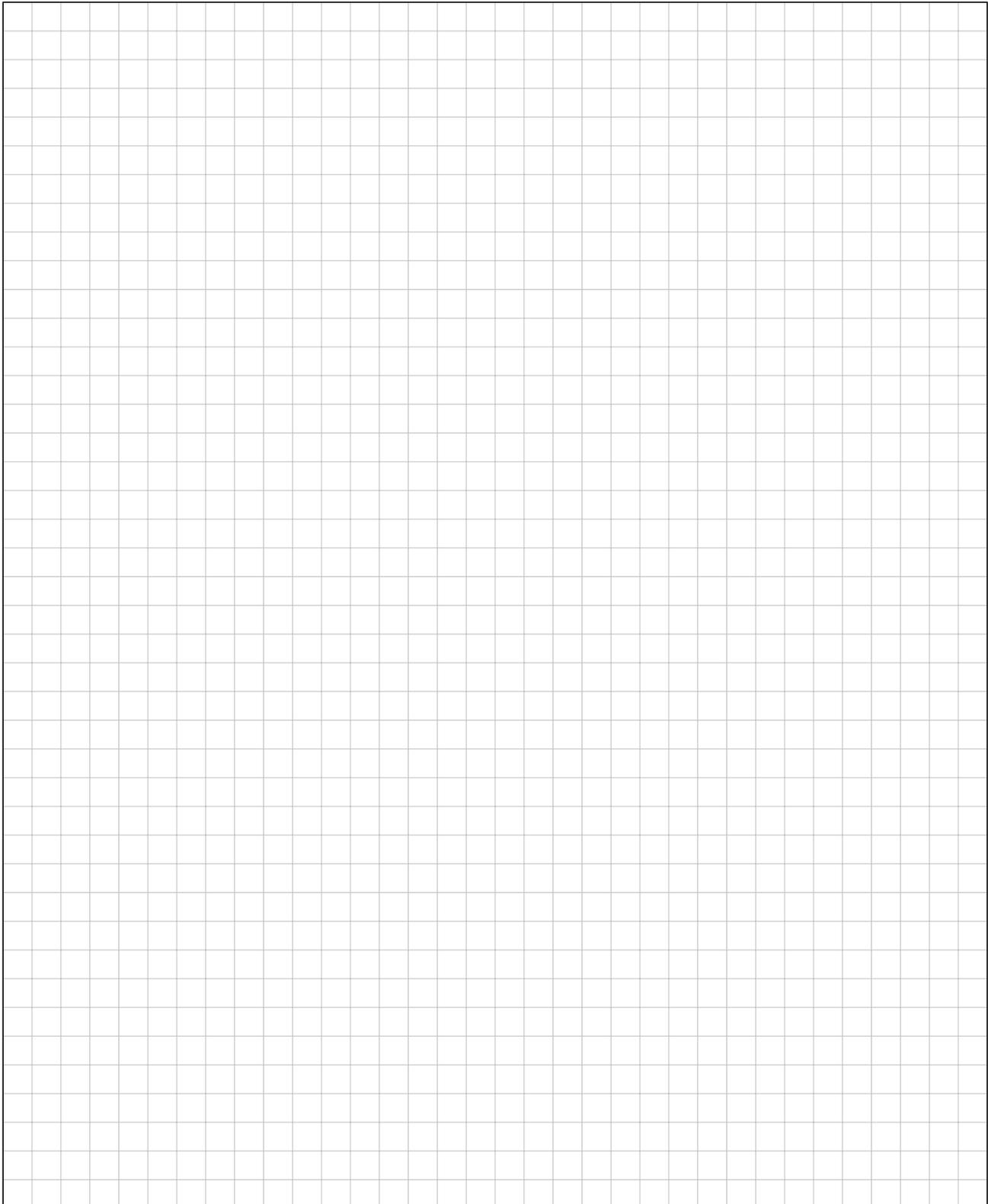


2

Aufgabe 3. *Bild und Kern* (12 Punkte)

Sei $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ und $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -6 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$.

3A. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(A)$.



3B. Ist die Matrix A invertierbar?

Ja Nein. Begründung:



1

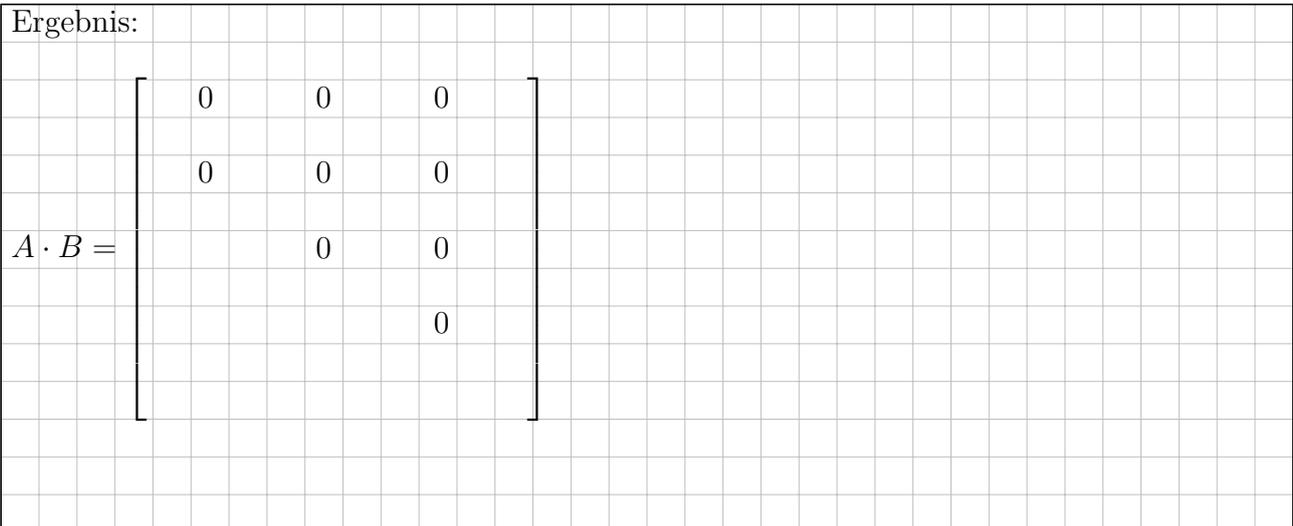
3C. Berechnen Sie den Rang der Matrix B .



2

3D. Bestimmen Sie die fehlenden Einträge der Produktmatrix $A \cdot B$.

Ergebnis:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & \\ & & 0 & \end{bmatrix}$$


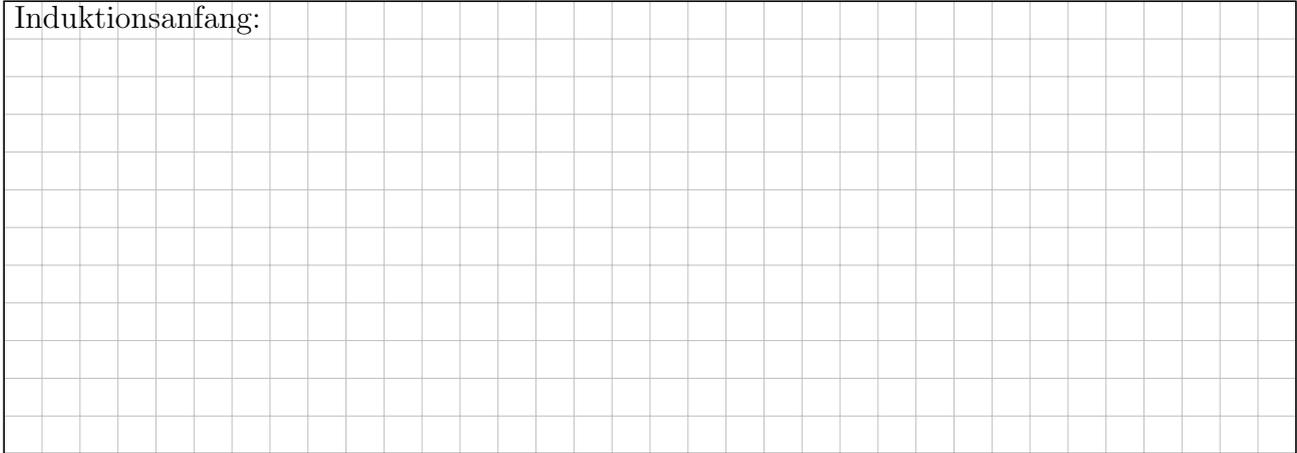
1

Aufgabe 4. *Vollständige Induktion* (6 Punkte)

Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt.

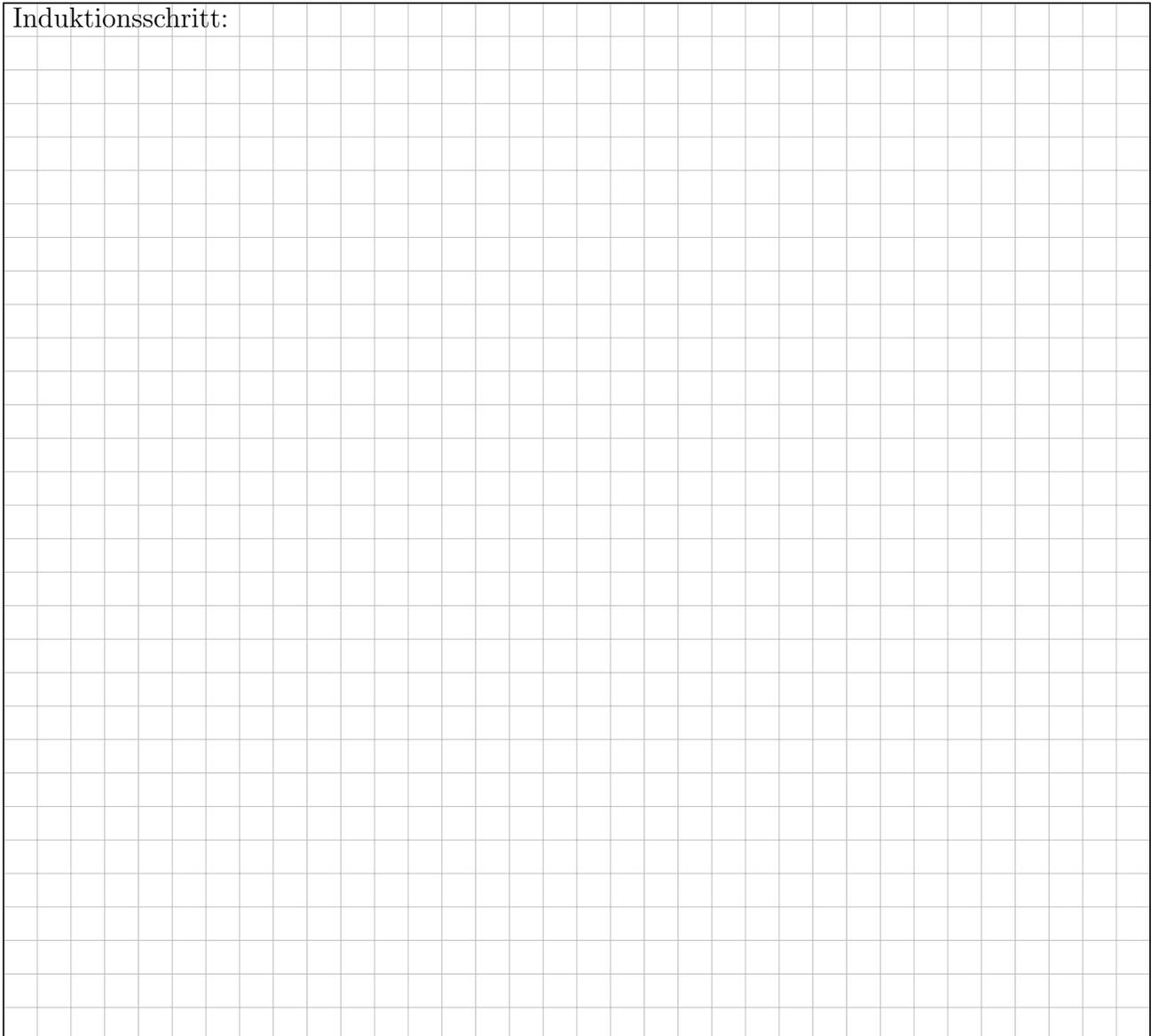
$$A(n): \quad \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{k \cdot (k+1)}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

Induktionsanfang:



2

Induktionsschritt:



4

Aufgabe 5. *Darstellende Matrizen und Basiswechsel* (12 Punkte)

Wir betrachten die Matrix A , sowie die Standardbasis \mathcal{E}_3 und die Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ von \mathbb{R}^3 mit

$$A = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 10 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: x \mapsto Ax$.

5A. Berechnen Sie für $i = 1, 2, 3$ die Vektoren $f(b_i) \in \mathbb{R}^3$ und schreiben Sie jeweils $f(b_i)$ als Linearkombination in der Basis \mathcal{B} .

$f(b_1) =$	
$f(b_2) =$	
$f(b_3) =$	

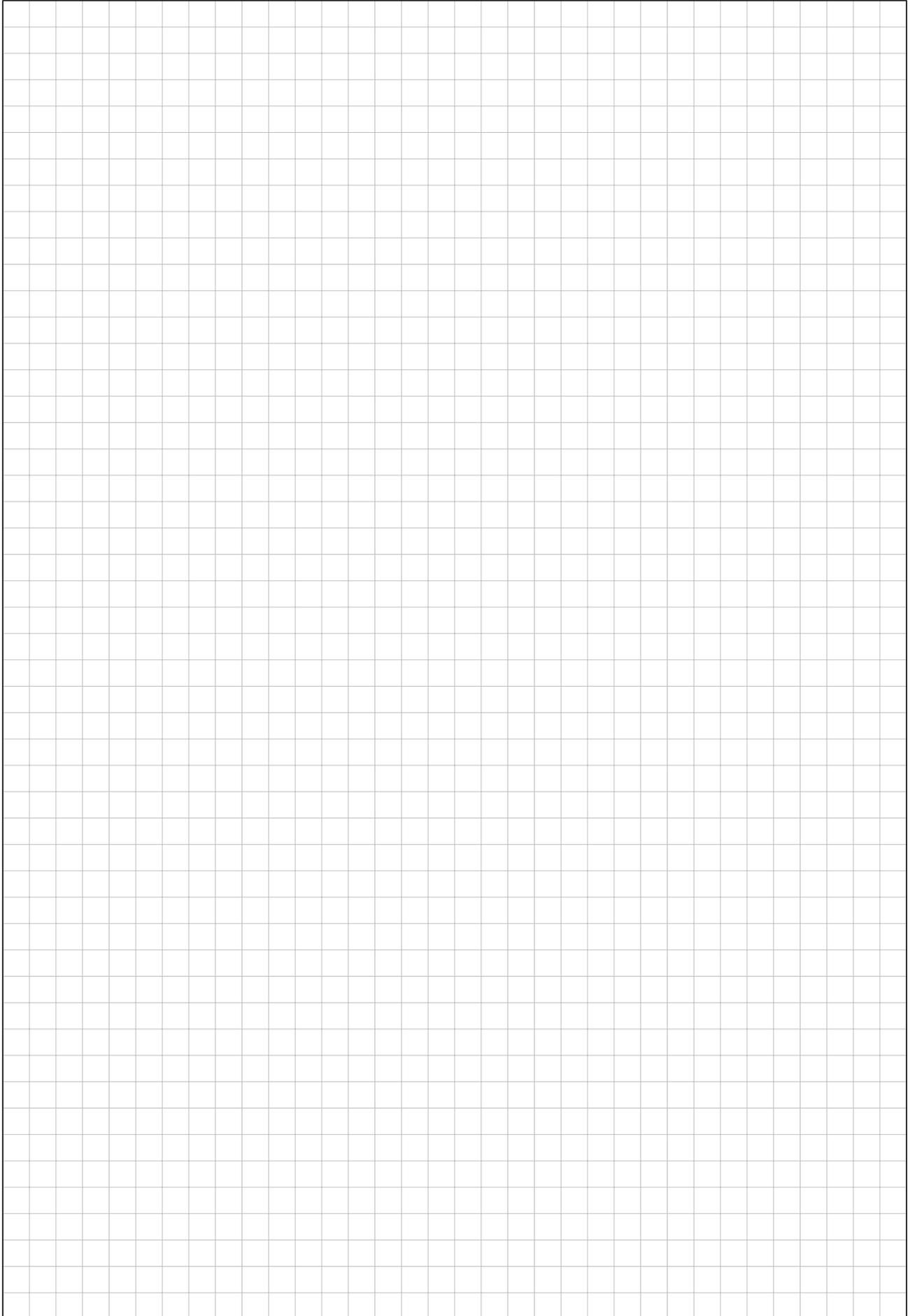
3

5B. Geben Sie die Darstellungsmatrix $B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ von f bezüglich der Basis \mathcal{B} an.

$B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) =$	
--	--

1

5C. Berechnen Sie die Transformationsmatrizen $T = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}$ und $T_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}}$.



Diese Seite ist absichtlich leer.