Klausur zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie Folgendes aus!* (1 Punkt)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Sitzplatznummer: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Begründen Sie Ihre Antwort, kurz aber überzeugend, etwa durch Nennung oder Ausführung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung. Bei Rechnungen ist ein klar nachvollziehbarer Rechenweg gefragt mit den nötigen Erläuterungen.
- Für die Verständnisfragen in Aufgabe 2 gilt: Es gibt zwei Punkte für die richtige Antwort mit richtiger Begründung, und einen Punkt für die richtige Antwort mit einem ernsthaften Versuch einer Begründung. Allein das Ankreuzen gibt noch keinen Punkt.

Die Klausur enthält etwas zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Gewinnen Sie zunächst einen Überblick und sammeln Sie die Punkte, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Gesamt
Punkte	/1	/16	/12	/6	/12	/6	/5	/8	/14	/80

Tipp: Viele Fragen sind Wiederholungen aus Vorlesung und Übung; sie belohnen kontinuierliche Mitarbeit während des Semesters und anschließend sorgfältige Klausurvorbereitung. Tipp für zukünftige Leser: Ihre Vorlesung und wöchentlichen Übungen erklären Ihnen die wunderschöne und nützliche Mathematik. Nutzen Sie dies, arbeiten Sie kontinuierlich mit, es lohnt sich!

Vorwort zur Musterlösung: Für Ihre Nacharbeitung dieser Klausur haben wir Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfungssituation verlangt war. Nach der Klausur ist vor der Klausur. Möge es nützen!

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (16 Punkte)

2A. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A, B \subseteq X$. Gilt immer $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?

☐ Ja ☒ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Wir betrachten $f : \{1, 2\} \to \{1\}$. Für $A = \{1\}$ und $B = \{2\}$ gilt $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$, aber $f(A) \cap f(B) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$. ◀◀

Erläuterung: Die Gleichung $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ gilt allgemein nur für injektive Abbildungen, siehe Vorlesung.

$\overline{}$ 2

2B. Ist durch $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} : \frac{a}{b} \mapsto a - b$ eine Abbildung definiert?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Es ist $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, aber $1 - 2 = -1$ und $2 - 4 = -2$ sind verschieden. Somit ist f keine Abbildung, die Zuordnung ist nicht wohldefiniert. ◀◀

Erläuterung: Jeder Bruch ist eine Äquivalenzklasse, daher ist hier immer Vorsicht geboten! Im obigen Beispiel geht es tatsächlich schief. Wenn Sie eine Abbildung auf einer Quotientenmenge definieren wollen, dann stellt sich immer die Frage der Wohldefiniertheit so wie hier. Als allgemeines Werkzeug hilft hier die Faktorisierung über eine Surjektion, siehe Vorlesung.

$\overline{}$ 2

2C. Ist $U = \{\, \overline{1}, \overline{6} \,\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}_{11}^{\times}, \cdot)$?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Es gilt $\overline{6} \cdot \overline{6} = \overline{3} \notin U$. ◀◀

Erinnerung: Die Forderungen für eine Untergruppe kennen Sie aus Vorlesung und Übung. Hier versagt die Abgeschlossenheit.

Erläuterung: Wir nutzen den Restklassenring $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. In Rechnungen steht eine ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ als Repräsentant für ihre Restklasse $\overline{a} = [a] = a + n\mathbb{Z}$. Meist ist die Unterscheidung zwischen a und $\overline{a}$ aus dem Kontext klar, Sie müssen dies dann nicht explizit kennzeichnen.

$\overline{}$ 2

2D. Gibt es einen Körper K, in dem $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ für alle Elemente $a, b \in K$ gilt?

☒ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Hindernis:

Jeder Körper der Charakteristik 2 hat diese Eigenschaft, zum Beispiel $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. ◀◀

Hinweis: Dies ist ein Spezialfall des Frobenius–Endomorphismus, siehe Vorlesung und Übung.

Ausführung: In jedem kommutativen Ring K gilt die binomische Formel $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ für alle $a, b \in K$. Hat K zudem die Charakteristik 2, so gilt $2 = 0$ in K, also $(a+b)^2 = a^2+b^2$.

$\overline{}$ 2

2E. Ist $K = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}\mathrm{i}$ ein Teilring von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Die Menge K ist nicht additiv abgeschlossen: Es gilt $1 \in K$ und $\mathrm{i} \in K$, aber $1 + \mathrm{i} \notin K$. ◀◀

Erläuterung: Die Menge K enthält das Nullelement 0 und mit jedem Element $z \in K$ auch sein Negatives $-z \in K$. Die Menge K ist zudem multiplikativ abgeschlossen, somit ist $(K, \cdot, 1)$ ein Untermonoid von $(\mathbb{C}, \cdot, 1)$. Scheinbar fehlt nicht mehr viel, dennoch ist K kein Teilring.

— 2

2F. Gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A^2 = B := \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$? *Tipp:* Nutzen Sie die Determinante!

☐ Ja ☒ Nein. Beispiel oder Hindernis:

Es gilt $\det(B) = -1$. Gäbe es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A^2 = B$,
so hätten wir $x = \det(A) \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = -1$. Das ist unmöglich! ◀◀

Erläuterung: Alternativ kann man $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ ansetzen und $A^2 = B$ lösen; dabei stellt sich ebenso heraus, dass keine Lösung existiert. Dieser Rechenweg ist allerdings wesentlich aufwändiger.

Diese Aufgabe ist ein weiterer Beleg, dass theoretische Ergebnisse auch praktisch nützen. Wenn Sie die Theorie beherrschen, dann können Sie effizienter arbeiten.

— 2

2G. Gibt es eine $\mathbb{Q}$–lineare Surjektion $f : \mathbb{Q}^{41} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}^{43}$?

☐ Ja ☒ Nein. Beispiel oder Hindernis:

Dies widerspricht der Invarianz der Dimension, wie in der Vorlesung ausgeführt. ◀◀

Alternative Lösung mit der Dimensionsformel: Angenommen, $f : \mathbb{Q}^{41} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}^{43}$ wäre surjektiv und $\mathbb{Q}$–linear. Dann gilt $\dim_{\mathbb{Q}}(\ker f) + \dim_{\mathbb{Q}}(\operatorname{im} f) = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^{41})$, mit $k = \dim_{\mathbb{Q}}(\ker f) \in \mathbb{N}$ also $k + 43 = 41$. Diese Gleichung ist in $\mathbb{N}$ unlösbar!

— 2

2H. Sind die $\mathbb{R}$–Vektorräume $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $W = \mathbb{C}^2$ isomorph?

☒ Ja ☐ Nein. Beweis oder Hindernis:

Wir haben $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 4$ und $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 4$.
Somit gilt die $\mathbb{R}$–lineare Isomorphie $V \cong \mathbb{R}^4 \cong W$. ◀◀

Erläuterung: Vektorräume (endlicher Dimension) werden durch ihre Dimension klassifiziert. Diese nützt in beide Richtungen, zum Nachweis der Isomorphie bzw. der Nicht-Isomorphie.

Alternative: Im positiven Falle genügt es, eine Isomorphie explizit anzugeben, hier etwa $\mathbb{R}^{2\times 2} \cong \mathbb{C}^2 : \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \mapsto \left[\begin{smallmatrix} a+ib \\ c+id \end{smallmatrix}\right]$. Das ist zwar etwas willkürlich, dafür explizit-elegant-informativ.

— 2

Aufgabe 3. *Bild und Kern* (12 Punkte)

Sei $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ und $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -6 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 3}$.

3A. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(A)$.

Wir bringen A mit Zeilenumformungen in reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1.Spalte aufräumen}} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{mit 3.Zeile}]{\text{3.Spalte aufräumen}} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{4.Spalte aufräumen}} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{umsortieren}} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Pivots zu 1}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \blacktriangleleft\blacktriangleleft\blacktriangleleft$$

Eine Basis von $\ker(A)$ ist daher:

$$\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \blacktriangleleft$$

Erläuterung: Bei der Überführung in reduzierte Zeilenstufenform ist das Ergebnis eindeutig, die Wahl der Rechenschritte jedoch nicht. Daher lohnt es sich, geschickt vorzugehen, um die Rechnung möglichst kurz und einfach zu halten.

4

3B. Ist die Matrix A invertierbar?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Dank Frage 3A hat A einen nicht-trivialen Kern und ist daher nicht invertierbar. ◀

Alternative Lösung: Dank Frage 3A hat die 5×5–Matrix A den Rang 3.
Sie hat also nicht vollen Rang und ist daher nicht invertierbar.

1

3C. Berechnen Sie den Rang der Matrix B.

Wir bringen B in Zeilenstufenform:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -6 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{mit der 2.Zeile}]{\text{1.Spalte aufräumen}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{umsortieren}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

Somit hat die Matrix B den Rang 1. ◀

Erläuterung: In der obigen Rechnung nutzen wir nur Zeilenoperationen. Da hier nur der Rang gefragt ist, könnten wir zudem auch Spaltenoperationen verwenden.

Sie können den Rang 1 leicht auch ohne Rechnung sehen! Alle Zeilen sind Vielfache voneinander und es handelt sich nicht um die Nullmatrix, also ist der Zeilenrang gleich 1. Auch alle Spalten sind Vielfache voneinander, also ist der Spaltenrang gleich 1. Aus der Vorlesung wissen Sie: Rang = Zeilenrang = Spaltenrang.

2

3D. Bestimmen Sie die fehlenden Einträge der Produktmatrix $A \cdot B$.

Ergebnis:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

Erläuterung: Wenn Sie sich die Rechnung erleichtern wollen, können Sie ausnutzen, dass Sie bereits wissen, dass der Rang von B gleich 1 ist. Jede Spalte von B ist ein Vielfaches jeder anderen Spalte, dasselbe gilt demnach für die Matrix AB: Beispielsweise ist die erste Spalte das $\frac{2}{3}$-Fache der letzten Spalte, die zweite das $\frac{1}{3}$-fache der letzten Spalte.

1

3E. Gilt $\mathrm{im}(B) \subseteq \ker(A)$?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Für $y \in \mathrm{im}(B)$ gilt $y = Bx$ für ein $x \in \mathbb{R}^3$,
somit $Ay = A(Bx) = (AB)x = 0x = 0$, also $y \in \ker(A)$. ◀◀

Alternative Lösung, aber etwas ungeschickt: Sie können eine Basis von $\mathrm{im}(B)$ bestimmen, wie oben finden Sie $(2, 1, 1, -2, 1)^\intercal$, und dann für jeden Basisvektor v die Gleichung $Av = 0$ prüfen. Genau das ist aber in Aufgabe 3D schon allgemein geschehen, daher wäre das umständlich.

Alternative Lösung, aber sehr ungeschickt: Sie prüfen $(2, 1, 1, -2, 1)^\intercal \in \ker A$, indem Sie per LGS/Gauß berechnen, ob dieser Vektor im Aufspann der Basis aus Frage 3A liegt. Das ist möglich, aber nun wirklich umständlich. Rechnen Sie lieber effizient!

$\overline{2}$

3F. Gilt $\ker(A) \subseteq \mathrm{im}(B)$?

[ ] Ja [X] Nein. Begründung:

Wäre $\ker(A) \subseteq \mathrm{im}(B)$, dann gälte $\dim_\mathbb{R}(\ker(A)) \le \dim_\mathbb{R}(\mathrm{im}(B))$.
Wir haben bereits $\dim_\mathbb{R}(\ker(A)) = 2$ und $\dim_\mathbb{R}(\mathrm{im}(B)) = 1$ berechnet.
Daher kann $\ker(A) \subseteq \mathrm{im}(B)$ hier nicht gelten. ◀◀

Alternative Lösung: Wir überprüfen, ob $v = (-3, -1, 0, 0, 0)^\intercal \in \ker(A)$ auch in $\mathrm{im}(B)$ liegt. Dies ist genau dann der Fall, wenn es ein $x \in \mathbb{R}^3$ gibt mit $v = Bx$. Das lineare Gleichungssystem $Bx = v$ besitzt keine Lösungen, wie Sie leicht nachrechnen könn(t)en. Da Sie die Dimensionen aber schon ausgerechnet haben, ist das Dimensionsargument hier noch etwas leichter. Rechnen Sie lieber effizient!

$\overline{2}$

Aufgabe 4. *Vollständige Induktion* (6 Punkte)

Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt.

$$A(n): \qquad \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k \cdot (k+1)}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

Induktionsanfang:

Wir betrachten den Fall $n = 1$. Auf der linken Seite der Aussage $A(1)$ steht das leere Produkt

$$\prod_{k=2}^{1} \left(1 - \frac{2}{k \cdot (k+1)}\right) = 1. \quad \blacktriangleleft$$

Auf der rechten Seite steht $\frac{1}{3} \cdot (1 + \frac{2}{1}) = 1$, also gilt die Behauptung $A(1)$. ◀

2

Induktionsschritt:

Sei $n \geq 1$. Wir nehmen an, dass die Behauptung $A(n)$ gilt. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{2}{k \cdot (k+1)}\right) &= \left(\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k \cdot (k+1)}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{(n+1) \cdot (n+2)}\right) \\
&\overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{(n+1) \cdot (n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{n+2}{n} \cdot \frac{n^2 + 3n}{(n+1) \cdot (n+2)} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{n+3}{n+1} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Somit gilt die Aussage $A(n+1)$. ◀◀◀◀

Per vollständiger Induktion folgt die Behauptung $A(n)$ für alle $n \geq 1$.

4

Aufgabe 5. *Darstellende Matrizen und Basiswechsel* (12 Punkte)

Wir betrachten die Matrix A, sowie die Standardbasis $\mathcal{E}_3$ und die Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ von $\mathbb{R}^3$ mit

$$A = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 10 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto Ax$.

5A. Berechnen Sie für $i = 1, 2, 3$ die Vektoren $f(b_i) \in \mathbb{R}^3$ und schreiben Sie jeweils $f(b_i)$ als Linearkombination in der Basis $\mathcal{B}$.

$$f(b_1) = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1) \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 \quad \blacktriangleleft$$

$$f(b_2) = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 0 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 \quad \blacktriangleleft$$

$$f(b_3) = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 \quad \blacktriangleleft$$

3

5B. Geben Sie die Darstellungsmatrix $B = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ von f bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ an.

$$B = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \blacktriangleleft$$

Erläuterung: In der Matrix $B = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ stehen die Koeffizienten aus Aufgabe 5A.

1

5C. Berechnen Sie die Transformationsmatrizen $T = \mathrm{T}^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}$ und $\mathrm{T}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3}$.

Die Basiswechselmatrix $T = \mathrm{T}^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}$ erhalten wir, indem wir die Basisvektoren aus $\mathcal{B}$ bezüglich $\mathcal{E}_3$ darstellen und spaltenweise in die Matrix T schreiben:

$$\mathrm{T}^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \blacktriangleleft$$

Umgekehrt erhalten wir die Matrix $\mathrm{T}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3}$ durch Inversion der Matrix $\mathrm{T}^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{aufräumen}]{\text{1.Spalte}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{vertauschen}]{\text{Zeilen}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Pivots zu 1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{aufräumen}]{\text{3.Spalte}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{array}\right]$$

Somit gilt $\mathrm{T}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3} = T^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. $\blacktriangleleft\blacktriangleleft\blacktriangleleft$

Erläuterung: Die Basiswechselmatrix $\mathrm{T}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3}$ enthält spaltenweise die Basisvektoren aus $\mathcal{E}_3$ dargestellt bezüglich $\mathcal{B}$.

4

5D. Geben Sie die Formel für den Basiswechsel an, mit der Sie die Matrix A aus den Matrizen B (aus 5B) und T (aus 5C) berechnen können.

$$A = \mathrm{M}^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(f) = \mathrm{T}^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}} \cdot \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot \mathrm{T}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3} = T \cdot B \cdot T^{-1} \quad \blacktriangleleft$$

1

5E. Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ explizit die Koeffizienten der Matrix B^n an.

$$B^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \blacktriangleleft$$

1

5F. Aus den Matrizen B^n, T und T^{-1} können Sie die Potenz A^n mit nur zwei Matrixmultiplikationen berechnen: Leiten Sie dafür eine geeignete Gleichung her.

$$\begin{aligned} A^n &= (TBT^{-1})^n = \underbrace{(TBT^{-1}) \cdot (TBT^{-1}) \cdots (TBT^{-1})}_{n\text{-mal}} \\ &= TB(T^{-1}T)B(T^{-1}T) \cdots (T^{-1}T)BT^{-1} \\ &= T\,\underbrace{B \cdot B \cdots B}_{n\text{-mal}}\,T^{-1} \\ &= TB^nT^{-1} \quad \blacktriangleleft\blacktriangleleft \end{aligned}$$

Erläuterung: Die Matrix B ist diagonal, daher sind ihre Potenzen B^n besonders leicht zu berechnen. Die Matrix A diagonalisieren Sie hier gemäß $A = TBT^{-1}$. Mit diesem Trick sind auch die Potenzen von A ebenso leicht zu berechnen.

2

Aufgabe 6. *Symmetrische Gruppe* (6 Punkte)

Wir betrachten die Permutation $\sigma := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \in S_6$.

6A. Geben Sie die Menge der Fehlstände von σ an.

Ergebnis:

$\operatorname{Inv}(\sigma) = \{ \{1,2\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{3,4\}, \{3,5\} \}$ ◀◀

2

6B. Schreiben Sie σ als Produkt von möglichst wenigen Fundamentaltranspositionen.

Anzahl der benötigten Fundamentaltranspositionen und Produkt mit Herleitung:

Die Anzahl der Fehlstände von σ ist $\operatorname{inv}(\sigma) = 5$. Demnach können wir σ als Produkt von fünf Fundamentaltranspositionen $\tau_i = (i, i+1)$ schreiben; weniger geht nicht. ◀

Algebraische Lösung:
Wir suchen $i \in \{1, \dots, 5\}$ mit $\sigma(i) > \sigma(i+1)$. Die Wahl $i = 1$ erfüllt dies:

$$\sigma \circ \tau_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{inv} = 4$$

Nach dem selben Muster gehen wir weiter vor:

$$\sigma \circ \tau_1 \circ \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{inv} = 3$$

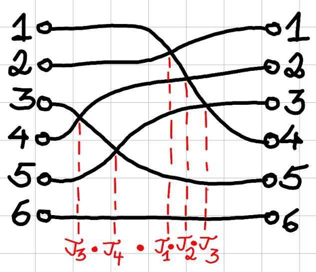
$$\sigma \circ \tau_1 \circ \tau_3 \circ \tau_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{inv} = 2$$

$$\sigma \circ \tau_1 \circ \tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{inv} = 1$$

$$\sigma \circ \tau_1 \circ \tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_4 \circ \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{inv} = 0$$

Somit gilt $\sigma = \tau_3 \circ \tau_4 \circ \tau_2 \circ \tau_3 \circ \tau_1$. ◀◀◀ Diese Darstellung ist nicht eindeutig, weitere mögliche Lösungen sind $\sigma = \tau_3 \circ \tau_4 \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \tau_3 = \tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_4 \circ \tau_3 \circ \tau_1 = \tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_4 \circ \tau_1 \circ \tau_3 = \tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \tau_4 \circ \tau_3$.

Graphische Lösung:
Anhand eines Diagramm der Permutation lesen wir das Produkt ab. Jede Kreuzung steht für eine Fundamentaltransposition. Dabei sollten Sie beachten, dass keine Kreuzungen direkt übereinander liegen, dass sich nicht drei Stränge in einem Punkt schneiden und dass sich zwei Stränge höchstens einmal schneiden. Die Fundamentaltranspositionen werden von rechts nach links gelesen und mit $\circ$ verknüpft, oder von links nach rechts gelesen und mit $\bullet$ verknüpft.



4

Aufgabe 7. *Permutation, Zykelzerlegung und Signatur* (5 Punkte)

7A. Wir betrachten den Restklassenring $\mathbb{Z}_{11} = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} = \{\,\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{10}\,\}$. Schreiben Sie die Abbildung $f : \mathbb{Z}_{11} \to \mathbb{Z}_{11} : x \mapsto x^3$ explizit aus (mit den kanonischen Repräsentanten $0, 1, \dots, 10$)

Ergebnis:

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$f(x)$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$

◀◀◀

3

7B. Schreiben Sie f als Produkt disjunkter Zykel.

Ergebnis:

$f = (\overline{0})\,(\overline{1})\,(\overline{2}, \overline{8}, \overline{6}, \overline{7})\,(\overline{3}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{9})\,(\overline{10}) = (\overline{2}, \overline{8}, \overline{6}, \overline{7})\,(\overline{3}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{9})$ ◀

Erinnerung: Wir nutzen den Restklassenring $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. In Rechnungen steht eine ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ als Repräsentant für ihre Restklasse $\overline{a} = [a] = a + n\mathbb{Z}$. Meist ist die Unterscheidung zwischen a und $\overline{a}$ aus dem Kontext klar, Sie müssen dies dann nicht explizit kennzeichnen.

1

7C. Bestimmen Sie die Signatur von f.

Begründete Antwort:

Mit Hilfe der Zykelzerlegung lässt sich die Signatur der Permutation f leicht berechnen. Es ist

$$\operatorname{sign}(\overline{2}, \overline{8}, \overline{6}, \overline{7}) = (-1)^{4-1} = -1$$

$$\operatorname{sign}(\overline{3}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{9}) = (-1)^{4-1} = -1$$

$$\operatorname{sign}(f) = \operatorname{sign}(\overline{2}, \overline{8}, \overline{6}, \overline{7})\,\operatorname{sign}(\overline{3}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{9}) = (-1) \cdot (-1) = 1$$ ◀

1

Aufgabe 8. *Äquivalenzrelationen* (8 Punkte)

Auf der Menge $\mathbb{R}$ definieren wir die Relation $\sim$ wie folgt:
Genau dann gilt $x \sim y$, wenn ein $\lambda \in [\frac{1}{2}, 2]$ existiert mit $\lambda x = y$.

8A. Welche der drei Axiome einer Äquivalenzrelation sind erfüllt, welche nicht?

Eigenschaften mit Begründung:

Es gelten Reflexivität und Symmetrie, aber nicht Transitivität. ◀

1. Reflexivität ist erfüllt:
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \sim x$, denn $\lambda x = x$ mit $\lambda = 1 \in [\frac{1}{2}, 2]$. ◀

2. Symmetrie ist erfüllt:
Ist $x \sim y$, dann ist $\lambda x = y$ mit $\lambda \in [\frac{1}{2}, 2]$, also $\lambda^{-1} y = x$. Da $\lambda^{-1} \in [\frac{1}{2}, 2]$ ist, folgt $y \sim x$. ◀

3. Transitivität ist nicht erfüllt:
Zum Beispiel gilt $1 \sim 2$ und $2 \sim 4$, aber $1 \not\sim 4$. ◀

4

8B. Auf der Menge $\mathbb{R}$ sei $\approx$ die von $\sim$ erzeugte Äquivalenzrelation. Explizieren Sie $\approx$.

Genau dann gilt $x \approx y$, wenn …

… ein $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert mit $\mu x = y$. ◀◀

Erläuterung: Wir nennen die so definierte Relation $\simeq$ und zeigen, dass diese gleich $\approx$ ist. Man prüft leicht nach, dass $\simeq$ eine Äquivalenzrelation ist. Offensichtlich gilt $x \sim y \Rightarrow x \simeq y$, d.h. $\simeq$ enthält $\sim$, also auch $\approx$. Umgekehrt zeigen wir: $\approx$ enthält $\simeq$, also $x \simeq y \Rightarrow x \approx y$. Angenommen, es gilt $x \simeq y$, also $\mu x = y$ mit $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir können dann ein $n \in \mathbb{N}$ so wählen, dass $\kappa := \sqrt[n]{\mu} \in [\frac{1}{2}, 2]$ gilt. Für $i = 0, \dots, n$ setzen wir $x_i = \kappa^i x$. Dann ist $x = x_0 \sim x_1 \sim \dots \sim x_n = y$, also $x \approx y$. Dieser ausführliche Beweis ist eine gute Übung, war hier aber nicht gefragt.

2

8C. Nennen Sie explizit alle Äquivalenzklassen der Zerlegung $Q = \mathbb{R}/_{\approx}$.

Äquivalenzklassen:

Die Zerlegung ist $Q = \{\mathbb{R}_{<0}, \{0\}, \mathbb{R}_{>0}\}$, also $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{<0} \sqcup \{0\} \sqcup \mathbb{R}_{>0}$. ◀◀

2

Aufgabe 9. *Gruppen und Homomorphismen* (14 Punkte)

Sei $(G, \cdot, 1)$ eine Gruppe. Zu $g \in G$ untersuchen wir die Abbildung $\lambda_g : G \to G : x \mapsto g \cdot x$.

9A. Ist die Abbildung $\lambda_g : G \to G$ bijektiv?

☒ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Die Umkehrabbildung von λ_g ist $\lambda_g^{-1} = \lambda_{g^{-1}}$. Dazu rechnen wir für $x \in G$ nach:

$$\lambda_g \circ \lambda_{g^{-1}}(x) = \lambda_g(g^{-1} \cdot x) = g \cdot (g^{-1} \cdot x) = (g \cdot g^{-1}) \cdot x = 1 \cdot x = x = \mathrm{id}_G(x)$$

$$\lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_g(x) = \dots \qquad = \mathrm{id}_G(x)$$

Somit ist $\lambda_g \circ \lambda_{g^{-1}} = \mathrm{id}_G = \lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_g$, was zu zeigen war. ◀◀

2

9B. Für welche $g \in G$ ist $\lambda_g : G \to G$ ein Gruppenhomomorphismus, für welche nicht?

Begründete Antwort:

Die Abbildung λ_g ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn $g = 1$ ist. ◀

Begründung:

$$\begin{array}{lll} & & \lambda_g : G \to G \text{ ist Gruppenhomomorphismus} \\ \iff & \forall x, y \in G : & \lambda_g(x \cdot y) = \lambda_g(x) \cdot \lambda_g(y) \\ \iff & \forall x, y \in G : & g \cdot (x \cdot y) = (g \cdot x) \cdot (g \cdot y) \\ \iff & \forall x, y \in G : & 1 = g \\ \iff & & 1 = g \quad ◀◀◀ \end{array}$$

Erläuterung: In den Äquivalenzumformungen haben wir ausgenutzt, dass in Gruppen die Kürzungsregel gilt. Hier haben wir den Faktor $g \cdot x$ von links und den Faktor y von rechts gekürzt. Obacht! Den letzten Allquantor kann man nur entfernen, weil es Elemente in G gibt.

4

9C. Ist die Abbildung $\lambda : (G, \cdot) \to (\mathrm{Abb}(G, G), \circ) : g \mapsto \lambda_g$ multiplikativ?

☒ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Für alle $g, h \in G$ und $x \in G$ gilt $\lambda_g \circ \lambda_h(x) = g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x = \lambda_{g \cdot h}(x)$.

Das beweist $\lambda(g \cdot h) = \lambda_{g \cdot h} = \lambda_g \circ \lambda_h = \lambda(g) \circ \lambda(h)$. ◀◀

2

9D. Ist die Abbildung $\lambda : G \to \mathrm{Abb}(G,G) : g \mapsto \lambda_g$ injektiv?

[X] Ja [ ] Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Seien $g, h \in G$ mit $\lambda_g = \lambda_h$. Dann ist $g = \lambda_g(1) = \lambda_h(1) = h$. Somit ist λ injektiv. ◀◀

2

9E. Ist die Menge $U = \{ \lambda_g \mid g \in G \}$ eine Untergruppe in der symmetrischen Gruppe $(\mathrm{S}_G, \circ)$?

[X] Ja [ ] Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Zunächst ist U eine Teilmenge von S_G, denn dank Frage 9A gilt $\lambda_g \in S_G$ für jedes $g \in G$. ◀

Wir zeigen nun, dass U eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe $(\mathrm{S}_G, \circ)$ ist.

Langfassung: Wir prüfen, ob U eine Untergruppe ist:
(i) Es ist $\mathrm{id}_G = \lambda_1 \in U$. ◀
(ii) Für $\lambda_g, \lambda_h \in U$ ist auch die Komposition $\lambda_g \circ \lambda_h = \lambda_{g \cdot h} \in U$. ◀
(iii) Zu $\lambda_g \in U$ gibt es in U ein Inverses, nämlich $\lambda_g^{-1} = \lambda_{g^{-1}} \in U$. ◀
Somit ist U eine Untergruppe in $(\mathrm{Abb}(G,G), \circ)$.

Kurzfassung: Die Menge U ist das Bild des Gruppenhomomorphismus $\lambda|^{\mathrm{S}_G} : G \to \mathrm{S}_G$, somit ist $U \le \mathrm{S}_G$ eine Untergruppe. Wer das erkennt, wird mit einer effizienten Abkürzung belohnt.

Erläuterung: Sie kennen dieses Ergebnis als Satz von Cayley aus der Vorlesung: Da $\lambda(g) = \lambda_g$ bijektiv ist, also $\lambda(g) \in S_G$, ist U eine Untergruppe nicht nur von $\mathrm{Abb}(G,G)$, sondern auch von S_G, weiter ist U isomorph zur Gruppe G, der Isomorphismus ist gegeben durch $\lambda|^U : G \to U$.

4

Diese Seite ist absichtlich leer.