Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Bitte füllen Sie folgendes aus!

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Name des Tutors: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 6 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**.
  Tipp: Sammeln Sie zunächst die für Sie leichten Punkte, und verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine für Sie schwierige Frage.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Gesamt
Punkte	/10	/10	/10	/10	/10	/50

Aufgabe 1. *Hauptvektorketten (10 Punkte)*

Betrachten Sie das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} y_1' &= -4y_1 + 9y_2 + 9y_3 \\ y_2' &= y_1 - y_2 \\ y_3' &= -5y_1 + 9y_2 + 8y_3 \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1A. Schreiben Sie dieses System in der Form $y'(t) = Ay(t)$ mit $A = \mathbb{C}^{3\times 3}$.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 9 & 9 \\ 1 & -1 & 0 \\ -5 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

1

1B. Überprüfen Sie, dass $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Hauptvektor zum Eigenwert 2 der Stufe 2 ist. Schreiben Sie die zugehörige Hauptvektorkette.

[1 Punkt] Wir berechnen $A - 2E = \begin{pmatrix} -6 & 9 & 9 \\ 1 & -3 & 0 \\ -5 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

[1 Punkt] Die Hauptvektorkette zu w ist also $w = w_2 \mapsto w_1 = (A - 2E)w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2

1C. Die Matrix A besitzt einen weiteren Eigenwert λ. Finden Sie den Eigenwert λ und einen zugehörigen Eigenvektor der Form $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

[1 Punkt] Da die Spur von A gleich 5 ist, muss $\lambda = -1$ sein.

[1 Punkt] Einen zugehörigen Eigenvektor findet man, indem man das System $(A + E)v = 0$ löst. Es muss $a = -1$ sein.

2

1D. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem zum linearen Differentialgleichungssystem $y'(t) = Ay(t)$.

[1 Punkt] $x_1(t) = \mathrm{e}^{2t} w_1 = \begin{pmatrix} 3\,\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$

[1 Punkt] $x_2(t) = \mathrm{e}^{2t}(tw_1 + w_2) = \begin{pmatrix} (3t+1)\,\mathrm{e}^{2t} \\ t\,\mathrm{e}^{2t} \\ (t+1)\,\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$

[1 Punkt] $x_3(t) = \mathrm{e}^{-t} v = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-t} \\ -\,\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$

3

1E. Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems.

[1 Punkt] Alle Lösungen sind Linearkombinationen $y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t)$. Also ist

$$y(0) = c_1 x_1(0) + c_2 x_2(0) + c_3 x_3(0) = \begin{pmatrix} 3c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_1 + c_2 - c_3 \end{pmatrix}.$$

[1 Punkt] Es folgt, dass $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 1$, also ist die Lösung

$$y(t) = \begin{pmatrix} (3t+1)\,\mathrm{e}^{2t} \\ te^{2t} + \mathrm{e}^{-t} \\ (t+1)\,\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

2

Aufgabe 2. *Integrierender Faktor (10 Punkte)*

Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$2\cos(x^3)y' = 3x^2y\sin(x^3) \qquad \text{mit} \quad y(0) = \sqrt{\pi}.$$

2A. Diese Gleichung lässt sich in der Form $f(x,y) + g(x,y)y' = 0$ schreiben. Berechnen Sie die Rotation $\mathrm{rot}(f,g)$.

$$\mathrm{rot}(f,g) = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = -2\sin(x^3)\cdot 3x^2 + 3x^2\sin(x^3) = -3x^2\sin(x^3).$$

Wir haben nämlich $f(x,y) = -3x^2y\sin(x^3)$ und $g(x,y) = 2\cos(x^3)$.

2

2B. Ist die Differentialgleichung exakt? Wenn ja, setzen Sie $\lambda(y) = 1$ in der folgenden Frage. Wenn nicht, berechnen Sie einen integrierenden Faktor $\lambda(y)$, der nur von y abhängt.

[1 Punkt] Da $\mathrm{rot}(f,g) \neq 0$, ist die Differentialgleichung nicht exakt.

[2 Punkte] Ein möglicher integrierender Faktor ist $\lambda(y) = y$, denn $\frac{\mathrm{rot}(f,g)}{f} = \frac{1}{y}$.

3

2C. Finden Sie ein Potential $\Phi(x,y)$ zum Vektorfeld $(\lambda(y)f(x,y), \lambda(y)g(x,y))$.

$\Phi(x,y) = y^2\cos(x^3)$.

Wir integrieren $\lambda(y)g(x,y)$ nach y und finden $\Phi(x,y) = y^2\cos(x^3) + \varphi(x)$.

Damit $\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x} = \lambda(y)f(x,y)$ können wir einfach $\varphi(x) \equiv 0$ setzen.

2

2D. Finden Sie explizit eine Lösung des Anfangswertproblems.

$$y = \sqrt{\frac{\pi}{\cos(x^3)}}.$$

[2 Punkte] Die allgemeinen Lösungen haben die implizite Darstellung $\Phi(x,y(x)) = c$ für eine Konstante c. [1 Punkt] Für $y(0) = \sqrt{\pi}$ erhalten wir $c = \pi$, also

$$y^2\cos(x^3) = \pi.$$

3

Aufgabe 3. *Trennung der Variablen (10 Punkte)*

Betrachten Sie die folgende partielle Differentialgleichung für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\partial_x \partial_y u = x^2 u \qquad \text{mit} \qquad u(x,0) = 2\,\mathrm{e}^{x^3}$$

3A. Benutzen Sie den Produktansatz $u(x,y) = v(x) \cdot w(y)$ und leiten Sie zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für $v(x)$ und $w(y)$ her.

[2 Punkt] Aus $\partial_y u = v(x)w'(y)$ und $\partial_x \partial_y u = v'(x)w'(y)$ folgt
[1 Punkt] $v'(x)w'(y) = x^2 v(x)w(y)$.

[1 Punkt] Umrechnnen liefert:

$$\frac{v'(x)}{x^2 v(x)} = \frac{w(y)}{w'(y)},$$

[2 Punkte] also müssen beide Seiten gleich einer Konstante λ sein, da sie von verschiedenen Variablen abhängen. Die zwei gesuchten Differentialgleichungen sind also

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = \lambda x^2 \qquad \text{und} \qquad \frac{w'(y)}{w(y)} = \frac{1}{\lambda}.$$

4

3B. Lösen Sie die zwei Differentialgleichungen, die Sie gefunden haben.

[2 Punkte] Erste Differentialgleichung:

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = \lambda x^2 \implies \ln(|v(x)|) = \frac{1}{3}\lambda C_1 \implies v(x) = c_1\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\lambda x^3}.$$

[2 Punkte] Zweite Differentialgleichung:

$$\frac{w'(y)}{w(y)} = \frac{1}{\lambda} \implies \ln(|w(y)|) = \frac{1}{\lambda}y + C_2 \implies w(y) = c_2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda}y}.$$

4

3C. Finden Sie explizit eine Lösung des Anfangswertproblems.

Durch den Produktansatz erhalten wir

$$u(x,y) = c_1\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\lambda x^3} \cdot c_2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda}y} = c\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\lambda x^3 + \frac{1}{\lambda}y}$$

Damit die Anfagswertbedingung erfüllt ist, können wir $c = 2$ und $\lambda = 3$ setzen:

$$u(x,y) = 2\,\mathrm{e}^{x^3 + \frac{1}{3}y}$$

2

Aufgabe 4. *Charakteristikmethode (10 Punkte)*

Gesucht werden Lösungen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der folgenden partiellen Differentialgleichung:

$$\partial_x u(x,y) + 5x^4 \partial_y u(x,y) = y - x^5 \qquad \text{mit} \quad u(0,y) = \cos(y).$$

4A. Stellen Sie das Differentialgleichungssystem für die charakteristischen Kurven auf.

[2 Punkte für das System, 1 Punkt für die Randbedingungen]

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1, & x(0) &= 0 \\ y'(t) &= 5x(t)^4, & y(0) &= y_0 \\ z'(t) &= y(t) - x(t)^5, & z(0) &= \cos(y_0) \end{aligned}$$

3

4B. Lösen Sie das System, das Sie gefunden haben.

[1+1 Punkte] Die Differentialgleichungen für $x(t)$ und $y(t)$ kann man direkt lösen:

$x(t) = t$

$y(t) = t^5 + y_0$

[1 Punkt] Nach Einsetzen finden wir $z'(t) = y_0$. Zusammen mit der Bedingung $z(0) = \cos(y_0)$ ergibt dies Folgendes:

$z(t) = y_0 t + \cos(y_0)$

3

4C. Finden Sie explizit eine Lösung u.

[1 Punkt] Es muss $u(x(t), y(t)) = z(t)$ sein.

[2 Punkte] Wir lösen nach t und y_0:

$$t = x, \qquad y_0 = y - t^5 = y - x^5.$$

[1 Punkt] Daraus folgt

$$u(x,y) = z(t) = y_0 t + \cos(y_0) = x(y - x^5) + \cos(y - x^5).$$

4

Aufgabe 5. *Bedingte Wahrscheinlichkeit (10 Punkte)*

Sie haben zwei oktaedrische Würfel, d.h. mit Augenzahlen von Eins bis Acht. Jede Augenzahl fällt mit derselben Wahrscheinlichkeit.

5A. Sie werfen einen von den zwei Würfeln. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt ein Vielfaches von 3?

Zwischen 1 und 8 gibt es zwei Vielfache von 3 (nämlich 3 und 6). Also ist die gesuchte Wahrscheinligkeit gleich $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

$\overline{}$ 4

5B. Sie werfen nun beide Würfel (unabhängig voneinander). Berechnen Sie $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(\overline{A} \cap B)$ und $\mathbf{P}(A|B)$ für die Ereignisse

$$A = \{\text{Es fällt keine Eins}\} \quad \text{und} \quad B = \{\text{Die Würfel haben die gleiche Augenzahl}\}.$$

[2 Punkte] $\mathbf{P}(A) = \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} = \frac{49}{64}$.

[2 Punkte] $\overline{A} \cap B$ ist das Ereignis, dass mindestens eine Eins fällt und dass die Würfel die gleiche Augenzahl haben, also $\overline{A} \cap B = \{\text{Es fallen zwei Eins}\}$ und $\mathbf{P}(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$.

[2 Punkte] Wir haben

$$\mathbf{P}(A \cap B) = 7 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{64}$$

$$\mathbf{P}(B) = 8 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8},$$

also ist

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{7}{8}.$$

$\overline{}$ 6