Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Bitte füllen Sie folgendes aus!

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Name des Tutors:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 6 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**.
  Tipp: Sammeln Sie zunächst die für Sie leichten Punkte, und verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine für Sie schwierige Frage.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Gesamt
Punkte	/10	/10	/10	/10	/10	/50

Aufgabe 1. *Hauptvektorketten* (*10 Punkte*)

Betrachten Sie das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} y_1' &= -2y_1 + y_2 - y_3 \\ y_2' &= 3y_1 - y_2 + 3y_3 \\ y_3' &= 4y_1 - y_2 + 3y_3 \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1A. Schreiben Sie dieses System in der Form $y'(t) = Ay(t)$ mit $A = \mathbb{C}^{3\times 3}$.

$A =$

1

1B. Überprüfen Sie, dass $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Hauptvektor zum Eigenwert -1 der Stufe 2 ist. Schreiben Sie die zugehörige Hauptvektorkette.

2

1C. Die Matrix A besitzt einen weiteren Eigenwert λ. Finden Sie den Eigenwert λ und einen zugehörigen Eigenvektor der Form $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

2

1D. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem zum linearen Differentialgleichungssystem $y'(t) = Ay(t)$.

3

1E. Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems.

2

Aufgabe 2. *Integrierender Faktor (10 Punkte)*

Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$xy^2\cos(y^3)y' = -\sin(y^3) \qquad \text{mit} \quad y(1) = \sqrt[3]{\pi/2}.$$

2A. Diese Gleichung lässt sich in der Form $f(x,y) + g(x,y)y' = 0$ schreiben. Berechnen Sie die Rotation $\operatorname{rot}(f,g)$.

$\operatorname{rot}(f,g) =$

2

2B. Ist die Differentialgleichung exakt? Wenn ja, setzen Sie $\lambda(x) = 1$ in der folgenden Frage. Wenn nicht, berechnen Sie einen integrierenden Faktor $\lambda(x)$, der nur von x abhängt.

3

2C. Finden Sie ein Potential $\Phi(x,y)$ zum Vektorfeld $(\lambda(x)f(x,y), \lambda(x)g(x,y))$.

$\Phi(x,y) =$

2

2D. Finden Sie explizit eine Lösung des Anfangswertproblems.

$y =$

3

Aufgabe 3. *Trennung der Variablen (10 Punkte)*

Betrachten Sie die folgende partielle Differentialgleichung für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\partial_x u - \partial_y u = (3x^2 + y)u \qquad \text{mit} \qquad u(0, y) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2 + y}.$$

3A. Benutzen Sie den Produktansatz $u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$ und leiten Sie zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für $v(x)$ und $w(y)$ her.

4

3B. Lösen Sie die zwei Differentialgleichungen, die Sie gefunden haben.

4

3C. Finden Sie explizit eine Lösung des Anfangswertproblems.

2

Aufgabe 4. *Charakteristikmethode (10 Punkte)*

Gesucht werden Lösungen $u\colon (0,+\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ der folgenden partiellen Differentialgleichung:

$$2\,x\partial_x u(x,y) - y\partial_y u(x,y) = xy^2 \qquad \text{mit} \quad u(1,y)=\sin(y^2).$$

4A. Stellen Sie das Differentialgleichungssystem für die charakteristischen Kurven auf.

$\overline{3}$

4B. Lösen Sie das System, das Sie gefunden haben.

$\overline{3}$

4C. Finden Sie explizit eine Lösung u.

$\overline{4}$

Aufgabe 5. *Bedingte Wahrscheinlichkeit* (*10 Punkte*)

Sie haben zwei gezinkte Würfel, bei denen jede Augenzahl zwischen Eins und Fünf mit Wahrscheinligkeit $\frac{1}{7}$ fällt.

5A. Sie werfen einen von den zwei Würfeln. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt die Sechs?

4

5B. Sie werfen nun beide Würfel (unabhängig voneinander). Berechnen Sie $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(\overline{A} \cap B)$ und $\mathbf{P}(A|B)$ für die Ereignisse

$$A = \{\text{Es fällt keine Sechs}\} \quad \text{und} \quad B = \{\text{Die Würfel haben die gleiche Augenzahl}\}.$$

6