# Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

*Bitte füllen Sie folgendes aus!*

| | |
|---|---|
| Name: Musterlösung | Matrikelnummer: Musterlösung |
| Vorname: Musterlösung | Name des Tutors: Musterlösung |

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 6 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**.
  *Tipp:* Sammeln Sie zunächst die für Sie leichten Punkte, und verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine für Sie schwierige Frage.

VIEL ERFOLG!

---

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Gesamt |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | /10 | /10 | /10 | /10 | /10 | /50 |

*Erläuterung:* Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

Diese Scheinklausur ist eine Zwischenbilanz nach wenigen Wochen, eine erste Rückmeldung und Diagnose: Was können Sie schon? Was fehlt noch? Es geht um die Beherrschung der Begriffe und Techniken. Alle Rechnungen, insbesondere Integrale, sind ganz bewusst noch einfach gehalten. In der späteren Abschlussklausur (Modulprüfung) sind die Rechnungen meist anspruchsvoller.

---

**Aufgabe 1.** *Hauptvektorketten (10 Punkte)*

Betrachten Sie das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} y_1' &= -2y_1 + y_2 - y_3 \\ y_2' &= 3y_1 - y_2 + 3y_3 \\ y_3' &= 4y_1 - y_2 + 3y_3 \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**1A.** Schreiben Sie dieses System in der Form $y'(t) = Ay(t)$ mit $A = \mathbb{C}^{3\times 3}$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1

**1B.** Überprüfen Sie, dass $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Hauptvektor zum Eigenwert $-1$ der Stufe 2 ist. Schreiben Sie die zugehörige Hauptvektorkette.

[1 Punkt] Wir berechnen $A + E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

[1 Punkt] Die Hauptvektorkette zu $w$ ist also $w = w_2 \mapsto w_1 = (A+E)w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2

**1C.** Die Matrix $A$ besitzt einen weiteren Eigenwert $\lambda$. Finden Sie den Eigenwert $\lambda$ und einen zugehörigen Eigenvektor der Form $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

[1 Punkt] Da die Spur von $A$ gleich 0 ist, muss $\lambda = 2$ sein.

[1 Punkt] Einen zugehörigen Eigenvektor findet man, indem man das System $(A - 2E)v = 0$ löst. Es muss $a = 1$ sein.

2

**1D.** Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem zum linearen Differentialgleichungssystem $y'(t) = Ay(t)$.

[1 Punkt] $x_1(t) = \mathrm{e}^{-t} w_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \\ -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$

[1 Punkt] $x_2(t) = \mathrm{e}^{-t}(tw_1 + w_2) = \begin{pmatrix} t\,\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \\ -t\,\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$

[1 Punkt] $x_3(t) = \mathrm{e}^{2t} v = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$

3

**1E.** Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems.

[1 Punkt] Alle Lösungen sind Linearkombinationen $y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t)$. Also ist

$$y(0) = c_1 x_1(0) + c_2 x_2(0) + c_3 x_3(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 + c_3 \\ -c_1 + c_3 \end{pmatrix}.$$

[1 Punkt] Es folgt, dass $c_1 = 0, c_2 = -2, c_3 = 3$, also ist die Lösung

$$y(t) = \begin{pmatrix} -2t\,\mathrm{e}^{-t} \\ -2e^{-t} + 3\,\mathrm{e}^{2t} \\ -2t\,\mathrm{e}^{-t} + 3\,\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

2

**Aufgabe 2.** *Integrierender Faktor (10 Punkte)*

Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$xy^2\cos(y^3)y' = -\sin(y^3) \qquad \text{mit} \quad y(1) = \sqrt[3]{\pi/2}.$$

**2A.** Diese Gleichung lässt sich in der Form $f(x,y) + g(x,y)y' = 0$ schreiben. Berechnen Sie die Rotation $\operatorname{rot}(f,g)$.

$$\operatorname{rot}(f,g) = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = y^2\cos(y^3) - \cos(y^3)\cdot 3y^2 = -2y^2\cos(y^3).$$

Wir haben nämlich $f(x,y) = \sin(y^3)$ und $g(x,y) = xy^2\cos(y^3)$.

/2

**2B.** Ist die Differentialgleichung exakt? Wenn ja, setzen Sie $\lambda(x) = 1$ in der folgenden Frage. Wenn nicht, berechnen Sie einen integrierenden Faktor $\lambda(x)$, der nur von $x$ abhängt.

[1 Punkt] Da $\operatorname{rot}(f,g) \neq 0$, ist die Differentialgleichung nicht exakt.

[2 Punkte] Ein möglicher integrierender Faktor ist $\lambda(x) = x^2$, denn $-\frac{\operatorname{rot}(f,g)}{g} = \frac{2}{x}$.

/3

**2C.** Finden Sie ein Potential $\Phi(x,y)$ zum Vektorfeld $(\lambda(x)f(x,y), \lambda(x)g(x,y))$.

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{3}x^3\sin(y^3).$$

Wir integrieren $\lambda(x)f(x,y)$ nach $x$ und finden $\Phi(x,y) = \frac{1}{3}x^3\sin(y^3) + \varphi(y)$.

Damit $\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y} = \lambda(x)g(x,y)$ können wir einfach $\varphi(y) \equiv 0$ setzen.

/2

**2D.** Finden Sie explizit eine Lösung des Anfangswertproblems.

$$y = \sqrt[3]{\arcsin\left(\frac{1}{x^3}\right)}.$$

*Erläuterung.* [1 Punkt] Die allgemeinen Lösungen haben die implizite Darstellung $\Phi(x,y(x)) = c$ für eine Konstante $c$.
[1 Punkt] Für $y(1) = \sqrt[3]{\pi/2}$ erhalten wir $c = \Phi(1, \sqrt[3]{\pi/2}) = \frac{1}{3}$.
[1 Punkt] Von der impliziten Darstellung $\frac{1}{3}x^3\sin(y^3) = \frac{1}{3}$ erhalten wir die oben angegebene explizite Darstellung.

/3

**Aufgabe 3.** *Trennung der Variablen (10 Punkte)*

Betrachten Sie die folgende partielle Differentialgleichung für $u:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\partial_x u - \partial_y u = (3x^2 + y)u \qquad \text{mit} \qquad u(0,y) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2+y}.$$

**3A.** Benutzen Sie den Produktansatz $u(x,y) = v(x)\cdot w(y)$ und leiten Sie zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für $v(x)$ und $w(y)$ her.

[1 Punkt] Aus $\partial_x u = v'(x)w(y)$ und $\partial_y u = v(x)w'(y)$ folgt

$$v'(x)w(y) - v(x)w'(y) = (3x^2 + y)v(x)w(y).$$

[2 Punkte] Wir trennen die Variablen: $\frac{v'(x)}{v(x)} - 3x^2 = \frac{w'(y)}{w(y)} + y$.

[1 Punkt] Beide Seiten müssen gleich einer Konstante $\lambda$ sein, da sie von verschiedenen Variablen abhängen. Die zwei gesuchten Differentialgleichungen sind also

$$\frac{v'(x)}{v(x)} - 3x^2 = \lambda \qquad \text{und} \qquad \frac{w'(y)}{w(y)} + y = \lambda.$$

4

**3B.** Lösen Sie die zwei Differentialgleichungen, die Sie gefunden haben.

[2 Punkte] Erste Differentialgleichung:

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = 3x^2 + \lambda \implies \ln(|v(x)|) = x^3 + \lambda x + C_1 \implies v(x) = c_1\,\mathrm{e}^{x^3+\lambda x}.$$

[2 Punkte] Zweite Differentialgleichung:

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = -y + \lambda \implies \ln(|w(y)|) = -\frac{1}{2}y^2 + \lambda y + C_2 \implies w(y) = c_2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2+\lambda y}.$$

4

**3C.** Finden Sie explizit eine Lösung des Anfangswertproblems.

Durch den Produktansatz erhalten wir

$$u(x,y) = c_1\,\mathrm{e}^{x^3+\lambda x}\cdot c_2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2+\lambda y} = c\,\mathrm{e}^{x^3+\lambda x-\frac{1}{2}y^2+\lambda y}$$

Damit die Anfagswertbedingung erfüllt ist, können wir $c = 1$ und $\lambda = 1$ setzen.

2

**Aufgabe 4.** *Charakteristikmethode* (*10 Punkte*)

Gesucht werden Lösungen $u\colon (0,+\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ der folgenden partiellen Differentialgleichung:

$$2\,x\partial_x u(x,y) - y\partial_y u(x,y) = xy^2 \qquad \text{mit} \quad u(1,y)=\sin(y^2).$$

**4A.** Stellen Sie das Differentialgleichungssystem für die charakteristischen Kurven auf.

[2 Punkte für das System, 1 Punkt für die Randbedingungen]

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x(t), & x(0) &= 1 \\ y'(t) &= -y(t), & y(0) &= y_0 \\ z'(t) &= x(t)y(t)^2, & z(0) &= \sin(y_0^2) \end{aligned}$$

3

**4B.** Lösen Sie das System, das Sie gefunden haben.

[1+1 Punkte] Die Differentialgleichungen für $x(t)$ und $y(t)$ kann man direkt lösen:

$$x(t) = \mathrm{e}^{2t}$$
$$y(t) = y_0\,\mathrm{e}^{-t}$$

[1 Punkt] Nach Einsetzen finden wir $z'(t)=y_0^2$. Zusammen mit der Bedingung $z(0)=\sin(y_0^2)$ ergibt dies Folgendes:

$$z(t) = y_0^2 t + \sin(y_0^2)$$

3

**4C.** Finden Sie explizit eine Lösung $u$.

[1 Punkt] Es muss $u(x(t),y(t)) = z(t)$ sein.

[2 Punkte] Wir lösen nach $t$ und $y_0$:

$$t = \frac{1}{2}\ln(x), \qquad y_0 = y\,\mathrm{e}^t = y\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln x} = y\sqrt{x}.$$

[1 Punkt] Daraus folgt

$$u(x,y) = z(t) = y_0^2 t + \sin(y_0^2) = \frac{1}{2}xy^2\ln(x) + \sin(xy^2).$$

4

**Aufgabe 5.** *Bedingte Wahrscheinlichkeit* (*10 Punkte*)

Sie haben zwei gezinkte Würfel, bei denen jede Augenzahl zwischen Eins und Fünf mit Wahrscheinligkeit $\frac{1}{7}$ fällt.

**5A.** Sie werfen einen von den zwei Würfeln. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt die Sechs?

Falls $p$ die gesuchte Wahrscheinligkeit ist, dann $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+p=1$, also $p=\frac{2}{7}$.

4

**5B.** Sie werfen nun beide Würfel (unabhängig voneinander). Berechnen Sie $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(\overline{A}\cap B)$ und $\mathbf{P}(A|B)$ für die Ereignisse

$$A = \{\text{Es fällt keine Sechs}\} \quad \text{und} \quad B = \{\text{Die Würfel haben die gleiche Augenzahl}\}.$$

[2 Punkte] $\mathbf{P}(A) = \frac{5}{7}\cdot\frac{5}{7} = \frac{25}{49}$.

[2 Punkte] $\overline{A}\cap B$ ist das Ereignis, dass mindestens eine Sechs fällt und dass die Würfel die gleiche Augenzahl haben, also $\overline{A}\cap B = \{\text{Es fallen zwei Sechs}\}$ und $\mathbf{P}(\overline{A}\cap B) = \frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7} = \frac{4}{49}$.

[2 Punkte] Wir haben

$$\mathbf{P}(A\cap B) = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7} = \frac{5}{49}$$

$$\mathbf{P}(B) = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7} = \frac{9}{49},$$

also ist

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{5}{9}.$$

6