Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Bitte füllen Sie folgendes aus!

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Name des Tutors:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 6 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**.
  Tipp: Sammeln Sie zunächst die für Sie leichten Punkte, und verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine für Sie schwierige Frage.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	/5	/10	/10	/10	/10	/5	/50

Aufgabe 1. *Integration* (*5 Punkte*)

Betrachten Sie die Fläche gegeben durch

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sinh(x) + \sinh(1)\}.$$

1A. Skizzieren Sie die Fläche F. ($2\sinh(1) = 2.3504\ldots$)

2

1B. Berechnen Sie den Flächeninhalt von F.

3

Aufgabe 2. *Integralsätze in der Ebene (10 Punkte)*

Betrachten Sie das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x, y) = (-2x\sin(x), \sin(y) + y\cos(y)).$$

2A. Berechnen Sie die Rotation von f.

$\mathrm{rot}(f) =$

2

2B. Besitzt f ein Potential? Falls ja, finden Sie eines.

4

2C. Berechnen Sie die Arbeitsintegrale $\int_{\gamma_i} f \cdot \mathrm{d}s$ für $i = 1, 2$ wobei

$$\gamma_1(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), t \in [0, 1] \quad \text{und} \quad \gamma_2(t) = (t\sqrt{\pi}, 0), t \in [0, 1].$$

4

Aufgabe 3. *Der Residuensatz* (*10 Punkte*)

3A. Bestimmen Sie die Polstellen der holomorphen Funktion $f(z) = \dfrac{z+\mathrm{i}}{z^2(z-\mathrm{i})}$ und ihre Ordnung.

2

3B. Berechnen Sie die Residuen von $f(z)$.

4

3C. Für $\gamma_1(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$ mit $t \in [0, 4\pi]$ und $\gamma_2(t) = 2\mathrm{i} + \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $t \in [0, 6\pi]$ berechnen Sie die zwei Integrale $\int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z \qquad (j = 1, 2)$.

4

Aufgabe 4. *Integralsätze im Raum (10 Punkte)*

Gegeben sei den Zylinder $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 9, -2 \leq z \leq 2\}$ mit der nach außen orientierten Randfläche $S = \partial V$. Die Randfläche S besteht aus der Bodenfläche B (mit $z=-2$), der Mantelfläche M (mit $x^2+y^2=9$) und der Deckfläche D (mit $z=2$).

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das folgende Vektorfeld:

$$f(x,y,z) = (y\cos(z)^2(x^2+y^2-9), x\sin(z)^2(x^2+y^2-9), 4-z^2).$$

4A. Berechnen Sie die Divergenz von f.

$\operatorname{div} f =$

2

4B. Berechnen Sie das Volumen von V.

$\operatorname{vol} V =$

3

4C. Berechnen Sie die folgenden fünf Integrale:

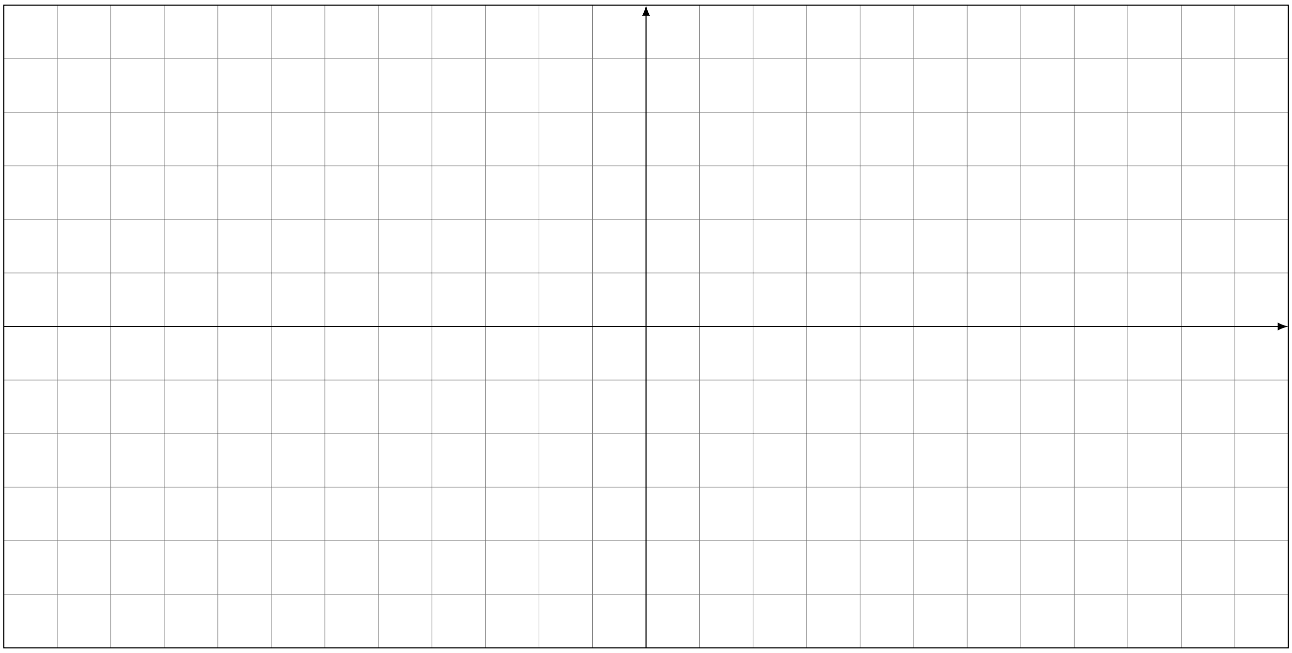
$$\int_B f \cdot \mathrm{d}B, \quad \int_M f \cdot \mathrm{d}M, \quad \int_D f \cdot \mathrm{d}D, \quad \int_S f \cdot \mathrm{d}S, \quad \int_V \operatorname{div}(f)\mathrm{d}V$$

5

Aufgabe 5. *Fourier-Reihen* (*10 Punkte*)

Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei 2π–periodisch mit $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$ für $-\pi\le x<\pi$.

5A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-3\pi,3\pi]$:



2

5B. Finden Sie den Grenzwert der Fourier–Reihe $f_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ in $x=0$ und $x=\pi$:

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) =$ $\boxed{}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\pi) =$ $\boxed{}$

2

5C. Bestimmen Sie die Koeffizienten der komplexen Fourier–Reihe $f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$:

3

5D. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$:

$a_k =$ $\boxed{}$ und $b_k = -\dfrac{k}{2} a_k$ (zur Probe)

1

5E. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier–Reihe an einer geeigneten Stelle den Wert $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4+k^2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{13} + \frac{1}{20} + \frac{1}{29} + \dots$. Auswertung an der Stelle $x =$ $\boxed{}$ ergibt:

2

Aufgabe 6. *Laplace-Transformation (5 Punkte)*

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte zu $f(t) = \mathrm{e}^t \sin(t)$.

5