Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Bitte füllen Sie folgendes aus!

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Name des Tutors: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 6 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**.
  Tipp: Sammeln Sie zunächst die für Sie leichten Punkte, und verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine für Sie schwierige Frage.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

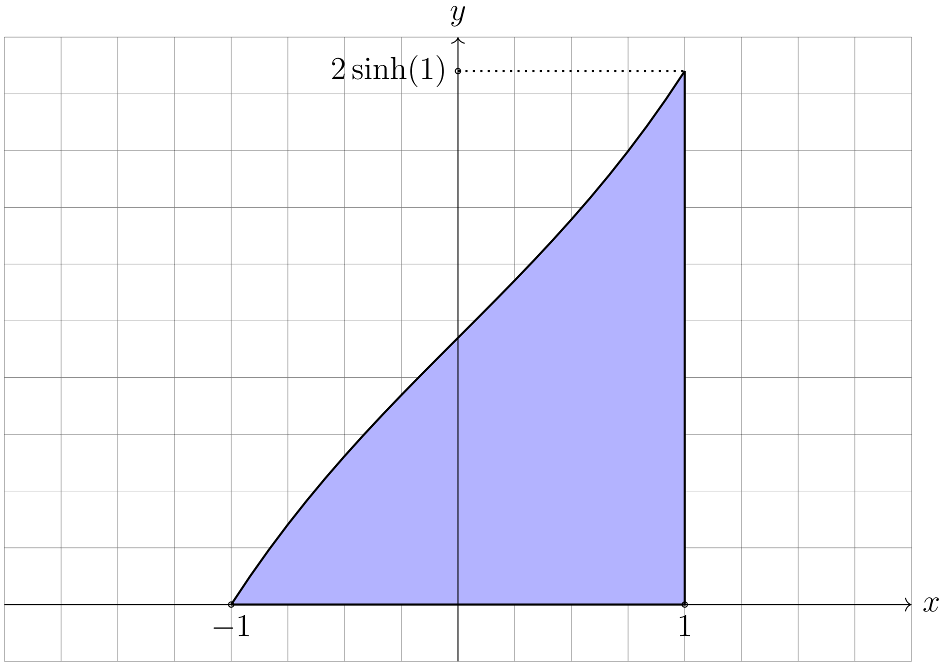
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	/5	/10	/10	/10	/10	/5	/50

Aufgabe 1. *Integration (5 Punkte)*

Betrachten Sie die Fläche gegeben durch

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sinh(x) + \sinh(1)\}.$$

1A. Skizzieren Sie die Fläche F. ($2\sinh(1) = 2.3504\ldots$)



2

1B. Berechnen Sie den Flächeninhalt von F.

Die Fläche F ist ein Normalbereich in der y-Richtung, also ist der Flächeninhalt gleich

$$\begin{aligned}\int_F \mathrm{d}F &= \int_{-1}^{1}\int_0^{\sinh(x)+\sinh(1)} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} (\sinh(x) + \sinh(1))\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\int_{-1}^{1} \sinh(x)\mathrm{d}x}_{0} + \sinh(1)\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \qquad \text{(sinh ist eine ungerade Funktion)} \\ &= 2\sinh(1) = 2.3504\ldots\end{aligned}$$

3

Aufgabe 2. *Integralsätze in der Ebene (10 Punkte)*

Betrachten Sie das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x, y) = (-2x\sin(x), \sin(y) + y\cos(y)).$$

2A. Berechnen Sie die Rotation von f.

$$\operatorname{rot}(f) = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$$

2

2B. Besitzt f ein Potential? Falls ja, finden Sie eines.

$u(x, y) = 2x\cos(x) + 2\sin(x) + y\sin(y)$

Erläuterung: Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist und f rotationsfrei ist, besitzt f ein Potential u.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1 \implies u = -2\int x\sin(x)\mathrm{d}x + \varphi(y) = 2x\cos(x) + 2\sin(x) + C + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_2 \implies u = \int(\sin(y) + y\cos(y))\mathrm{d}y + \psi(x) = \psi(x) + y\cos(y) + C'$$

so we can choose u as above.

4

2C. Berechnen Sie die Arbeitsintegrale $\int_{\gamma_i} f \cdot \mathrm{d}s$ für $i = 1, 2$ wobei

$$\gamma_1(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), t \in [0, 1] \quad \text{und} \quad \gamma_2(t) = (t\sqrt{\pi}, 0), t \in [0, 1].$$

Der Weg γ_1 ist geschlossen, also $\int_{\gamma_1} f \cdot \mathrm{d}s = 0$, da f rotationsfrei ist.

Für das zweite Integral können wir das Potential benutzen:

$$\int_{\gamma_2} f \cdot \mathrm{d}s = u(\sqrt{\pi}, 0) - u(0, 0) = \cos(\pi) - \cos(0) = 2\sqrt{\pi}\cos(\sqrt{\pi}) + 2\sin(\sqrt{\pi}).$$

4

Aufgabe 3. *Der Residuensatz (10 Punkte)*

3A. Bestimmen Sie die Polstellen der holomorphen Funktion $f(z) = \dfrac{z+\mathrm{i}}{z^2(z-\mathrm{i})}$ und ihre Ordnung.

Die Funktion hat zwei Polstellen, nämlich $z_1 = 0$ (Ordnung 2) und $z_2 = \mathrm{i}$ (Ordnung 1, also einfache Polstelle) .

2

3B. Berechnen Sie die Residuen von $f(z)$.

Wir berechnen die Residuen:

$$\operatorname*{res}_0(f) = \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{-2\mathrm{i}}{(z-\mathrm{i})^2} = 2\mathrm{i},$$

$$\operatorname*{res}_\mathrm{i}(f) = \lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{z+\mathrm{i}}{z^2} = \frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2} = -2\mathrm{i}.$$

4

3C. Für $\gamma_1(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$ mit $t \in [0, 4\pi]$ und $\gamma_2(t) = 2\mathrm{i} + \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $t \in [0, 6\pi]$ berechnen Sie die zwei Integrale $\int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z \qquad (j = 1, 2)$.

Der Weg γ_1 läuft zweimal im Uhrzeigersinn um die Polstelle in $z_1 = 0$ (und nicht um z_2). Der Weg γ_2 läuft dreimal im Gegenuhrzeigersinn um die Polstelle in $z_2 = \mathrm{i}$ (und nicht um z_1). Aus Cauchys Residuensatz folgt

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = -2\cdot(2\pi\mathrm{i})\cdot \operatorname*{res}_0(f) = 8\pi,$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = 3\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot \operatorname*{res}_\mathrm{i}(f) = 12\pi.$$

4

Aufgabe 4. *Integralsätze im Raum (10 Punkte)*

Gegeben sei den Zylinder $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 9, -2 \leq z \leq 2\}$ mit der nach außen orientierten Randfläche $S = \partial V$. Die Randfläche S besteht aus der Bodenfläche B (mit $z=-2$), der Mantelfläche M (mit $x^2+y^2=9$) und der Deckfläche D (mit $z=2$).

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das folgende Vektorfeld:

$$f(x,y,z) = (y\cos(z)^2(x^2+y^2-9), x\sin(z)^2(x^2+y^2-9), 4-z^2).$$

4A. Berechnen Sie die Divergenz von f.

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial}{\partial x}(y\cos(z)^2(x^2+y^2-9)) + \frac{\partial}{\partial y}(x\sin(z)^2(x^2+y^2-9)) + \frac{\partial}{\partial z}(4-z^2) = 2(xy-z).$$

2

4B. Berechnen Sie das Volumen von V.

$\operatorname{vol} V = 36\pi.$

Das Volumen von einem Zylinder von Radius r und Höhe h ist gleich $\pi r^2 h$. Hier sind $r=3$ und $h=4$.

3

4C. Berechnen Sie die folgenden fünf Integrale:

$$\int_B f\cdot \mathrm{d}B, \quad \int_M f\cdot \mathrm{d}M, \quad \int_D f\cdot \mathrm{d}D, \quad \int_S f\cdot \mathrm{d}S, \quad \int_V \operatorname{div}(f)\mathrm{d}V$$

Das Vektorfeld ist tangent zu jedem Teil von der Randfläche, also ist

$$\int_B f\cdot \mathrm{d}B = \int_M f\cdot \mathrm{d}M = \int_D f\cdot \mathrm{d}D = \int_S f\cdot \mathrm{d}S = 0.$$

Aus dem Gaußchen Satz folgern wir, dass

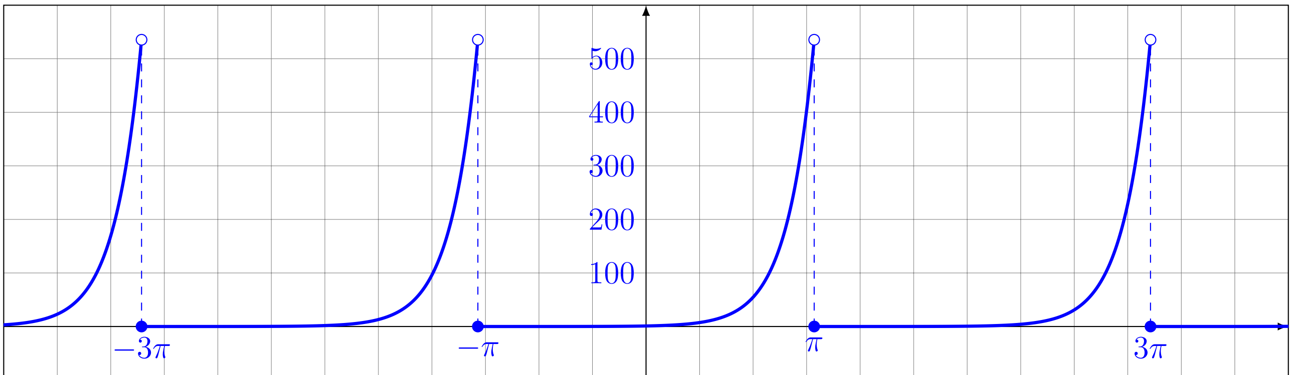
$$\int_V \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}V = \int_S f\cdot \mathrm{d}S = 0.$$

5

Aufgabe 5. *Fourier-Reihen (10 Punkte)*

Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei 2π–periodisch mit $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$ für $-\pi\le x<\pi$.

5A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-3\pi, 3\pi]$:



Erläuterung: Die Funktion f ist nicht stetig; sie hat Sprungstellen in $x=\pm\pi,\pm3\pi,\pm5\pi,\dots$. Sie erfüllt in jedem Punkt $x\in\mathbb{R}$ die Dirichlet–Bedingung, ist aber nicht sprungnormiert. Frage 5B klärt die Grenzwerte der Fourier–Reihe dank des Satzes von Dirichlet.

2

5B. Finden Sie den Grenzwert der Fourier–Reihe $f_n(x)=\sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ in $x=0$ und $x=\pi$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \boxed{1}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(\pi) = \boxed{\frac{\mathrm{e}^{2\pi}+\mathrm{e}^{-2\pi}}{2}=\cosh(2\pi)}$$

2

5C. Bestimmen Sie die Koeffizienten der komplexen Fourier–Reihe $f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{Definition der Fourier–Koeffizienten.}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{(2-\mathrm{i}k)x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{Exponentialgesetz nutzen.}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2-\mathrm{i}k}\,\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i}k)x}\right]_{-\pi}^{\pi} \qquad \text{Stammfunktion ausschreiben.}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2-\mathrm{i}k}\left(\mathrm{e}^{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi}\right) \qquad \text{Mit } \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}k\pi}=(-1)^k \text{ vereinfachen.}$$

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi}\cdot\frac{2+\mathrm{i}k}{4+k^2}\left(\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}\right) \qquad \text{Zu einem reellen Nenner erweitern.}$$

3

5D. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$:

$$a_k = \boxed{c_k + c_{-k} \quad = \quad \frac{(-1)^k 2}{\pi(4+k^2)}\left(e^{2\pi} - e^{-2\pi}\right)} \qquad \text{und } b_k = -\frac{k}{2}a_k \text{ (zur Probe)}$$

1

5E. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier–Reihe an einer geeigneten Stelle den Wert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4+k^2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{13} + \frac{1}{20} + \frac{1}{29} + \dots$. Auswertung an der Stelle $x = \boxed{\pi}$ ergibt:

$$\frac{e^{2\pi} + e^{-2\pi}}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overbrace{\cos(k\pi)}^{=(-1)^k} + b_k \overbrace{\sin(k\pi)}^{=0}$$

Spezialisieren in $x = \pi$.

$$= \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{4\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{\pi} \cdot \frac{2}{4+k^2}$$

Auflösen nach der gesuchten Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4+k^2} = -\frac{1}{8} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^{2\pi} + e^{-2\pi}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} = 0.66040\dots$$

Erläuterung: Die erste Gleichung gilt dank des Satzes von Dirichlet (Frage 5B), denn im Punkt $x = \pi$ existieren die einseitigen Grenzwerte $f(x\pm)$ und Ableitungen $f'(x\pm)$.

2

Aufgabe 6. *Laplace-Transformation (5 Punkte)*

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte zu $f(t) = e^t \sin(t)$.

Zweimalige partielle Integration liefert ($\mathrm{Re}(s) > 1$)

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{(1-s)t} \sin(t) dt \\ &= \underbrace{\left[\frac{1}{1-s} e^{(1-s)t} \sin(t)\right]_{t=0}^{\infty}}_{0} - \frac{1}{1-s} \int_0^{\infty} e^{(1-s)t} \cos(t) dt \\ &= -\frac{1}{1-s}\left(\left[\frac{1}{1-s} e^{(1-s)t} \cos(t)\right]_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{1-s}\int_0^{\infty} e^{(1-s)t} \sin(t) dt\right) \\ &= \frac{1}{(1-s)^2}(1 - F(s)). \end{aligned}$$

Löst man nach dem gesuchten Integral auf, dann erhält man

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 2}.$$

5