Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Bitte füllen Sie folgendes aus!

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Name des Tutors:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 6 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**.
  Tipp: Sammeln Sie zunächst die für Sie leichten Punkte, und verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine für Sie schwierige Frage.

VIEL ERFOLG!

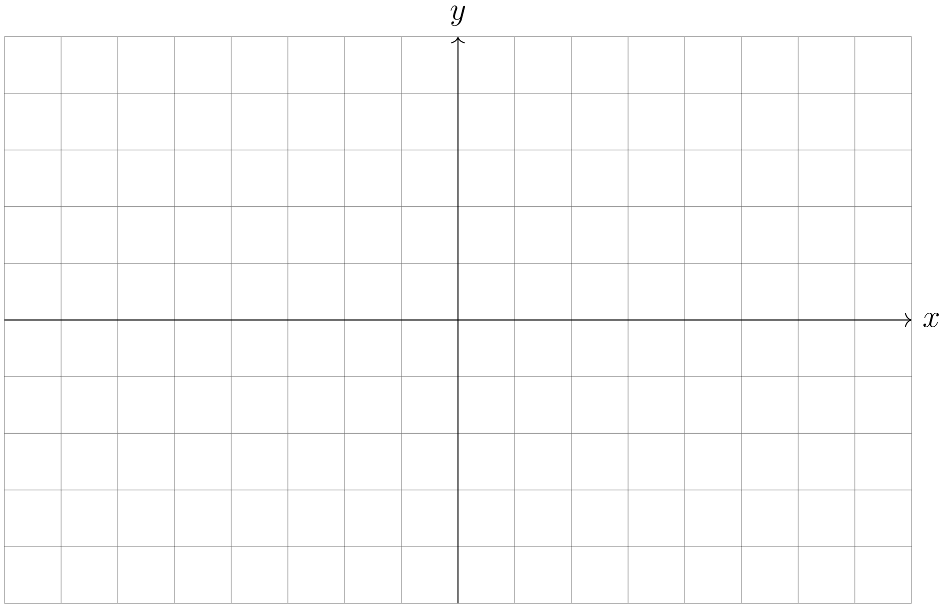
Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	/5	/10	/10	/10	/10	/5	/50

Aufgabe 1. *Integration (5 Punkte)*

Betrachten Sie die Fläche gegeben durch $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, \cosh(x) - 2 \leq y \leq 0\}$.

1A. Skizzieren Sie die Fläche F. ($\cosh(1) = (\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1})/2 = 1.543080\ldots$)



2

1B. Berechnen Sie den Flächeninhalt von F.

3

Aufgabe 2. *Integralsätze in der Ebene (10 Punkte)*

Betrachten Sie das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x, y) = (y^2 \cos(xy^2), 2xy \cos(xy^2)).$$

2A. Berechnen Sie die Rotation von f.

$\operatorname{rot}(f) =$

2

2B. Besitzt f ein Potential? Falls ja, finden Sie eines.

4

2C. Berechnen Sie die Arbeitsintegrale $\int_{\gamma_i} f \cdot \mathrm{d}s$ für $i = 1, 2$ wobei

$$\gamma_1(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), t \in [0, 1] \quad \text{und} \quad \gamma_2(t) = ((\pi/2)t, 1), t \in [0, 1].$$

4

Aufgabe 3. *Der Residuensatz (10 Punkte)*

3A. Bestimmen Sie die Residuen der holomorphen Funktion $f(z) = \dfrac{1}{(z-3)^2(z-\mathrm{i})}$.

/6

3B. Für $\gamma_1(t) = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$ mit $t \in [0, 4\pi]$ und $\gamma_2(t) = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ berechnen Sie die zwei Integrale

$$\int_{\gamma_j} \frac{1}{(z-3)^2(z-\mathrm{i})}\mathrm{d}z \qquad (j = 1, 2).$$

/4

Aufgabe 4. *Integralsätze im Raum (10 Punkte)*

Gegeben sei die Halbkugel $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$ mit der nach außen orientierten Randfläche $S = \partial V$. Die Randfläche S besteht aus der äquatorialen Kreisscheibe A und der nördlichen Hemisphäre B.

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das folgende Vektorfeld: $f(x, y, z) = (\cos y + x, \sin x + y, z)$.

4A. Berechnen Sie die Divergenz von f.

2

4B. Berechnen Sie die folgenden vier Integrale:

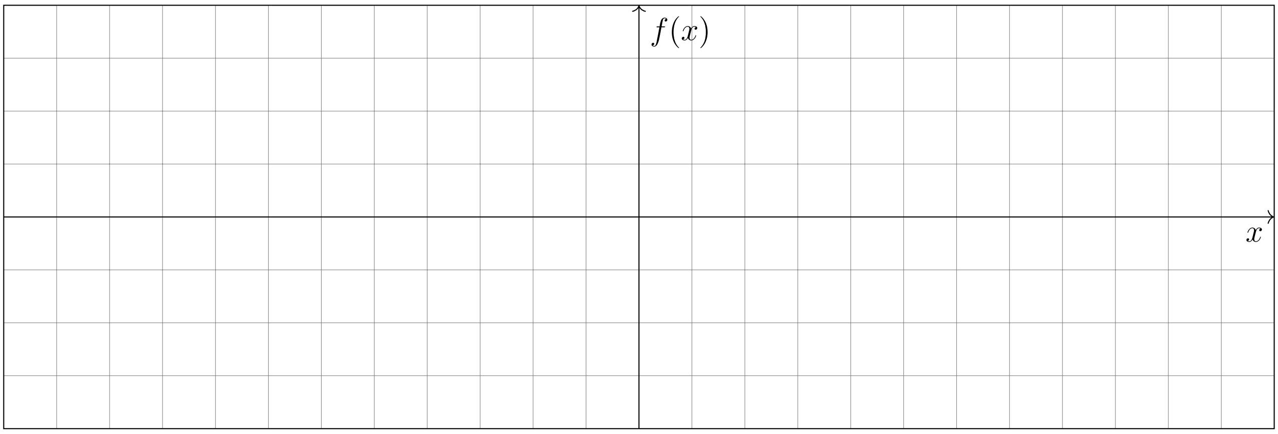
$$\int_V \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}V, \quad \int_A f \cdot \mathrm{d}A, \quad \int_B f \cdot \mathrm{d}B, \quad \int_S f \cdot \mathrm{d}S.$$

Hinweis: Das Volumen einer Kugel vom Radius r ist gleich $\dfrac{4\pi r^3}{3}$.

8

Aufgabe 5. *Fourier-Reihen* (*10 Punkte*)

5A. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gerade, 2π-periodische Funktion mit $f(x) = x$ für $0 \leq x \leq \pi$. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-3\pi, 3\pi]$.



2

5B. Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

6

5C. Berechnen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

$\overline{}$ 2

Aufgabe 6. *Laplace-Transformation* (*5 Punkte*)

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte zu $f(t) = \mathrm{e}^t \cos(t)$.

$\overline{}$ 5