Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Bitte füllen Sie folgendes aus!

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Name des Tutors: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 6 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**.
  Tipp: Sammeln Sie zunächst die für Sie leichten Punkte, und verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine für Sie schwierige Frage.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	/5	/10	/10	/10	/10	/5	/50

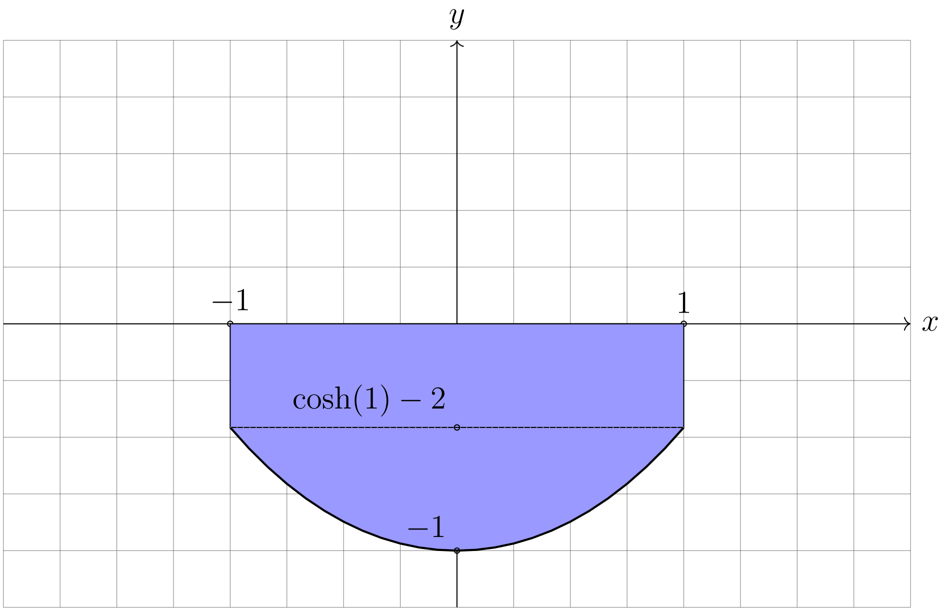
Erläuterung: Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

Diese Scheinklausur ist eine Zwischenbilanz nach wenigen Wochen, eine erste Rückmeldung und Diagnose: Was können Sie schon? Was fehlt noch? Es geht um die Beherrschung der Begriffe und Techniken. Alle Rechnungen, insbesondere Integrale, sind ganz bewusst noch einfach gehalten. In der späteren Abschlussklausur (Modulprüfung) sind die Rechnungen meist anspruchsvoller.

Aufgabe 1. *Integration (5 Punkte)*

Betrachten Sie die Fläche gegeben durch $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, \cosh(x) - 2 \leq y \leq 0\}$.

1A. Skizzieren Sie die Fläche F. ($\cosh(1) = (\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1})/2 = 1.543080\ldots$)



2

1B. Berechnen Sie den Flächeninhalt von F.

Die Fläche F ist ein Normalbereich in der y-Richtung, also ist der Flächeninhalt gleich

$$
\begin{aligned}
\int_F \mathrm{d}F &= \int_{-1}^{1} \int_{\cosh(x)-2}^{0} \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} (2 - \cosh(x)) \mathrm{d}x \\
&= [2x - \sinh(x)]_{-1}^{1} \\
&= 4 - \sinh(1) + \sinh(-1) = 4 - 2\sinh(1) = 1.6495976\ldots
\end{aligned}
$$

3

Aufgabe 2. *Integralsätze in der Ebene (10 Punkte)*

Betrachten Sie das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x, y) = (y^2 \cos(xy^2), 2xy \cos(xy^2)).$$

2A. Berechnen Sie die Rotation von f.

$\operatorname{rot}(f) = 2y\cos(xy^2) - 2xy^3 \sin(xy^2) - \big(2y\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2)\big) = 0$

2

2B. Besitzt f ein Potential? Falls ja, finden Sie eines.

$u(x, y) = \sin(xy^2)$.

Erläuterung: Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist und f rotationsfrei ist, besitzt f ein Potential.

4

2C. Berechnen Sie die Arbeitsintegrale $\int_{\gamma_i} f \cdot \mathrm{d}s$ für $i = 1, 2$ wobei

$$\gamma_1(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), t \in [0, 1] \quad \text{und} \quad \gamma_2(t) = ((\pi/2)t, 1), t \in [0, 1].$$

Der Weg γ_1 ist geschlossen, also $\int_{\gamma_1} f \cdot \mathrm{d}s = 0$, da f rotationsfrei ist.

Für das zweite Integral können wir das Potential benutzen:

$$\int_{\gamma_2} f \cdot \mathrm{d}s = u(\pi/2, 1) - u(0, 1) = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1.$$

4

Aufgabe 3. *Der Residuensatz (10 Punkte)*

3A. Bestimmen Sie die Residuen der holomorphen Funktion $f(z) = \dfrac{1}{(z-3)^2(z-\mathrm{i})}$.

Die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z-3)^2(z-\mathrm{i})}$ hat zwei Polstellen,

nämlich $z_1 = 3$ (Ordnung 2) und $z_2 = i$ (Ordnung 1, also einfache Polstelle) .

Wir berechnen die Residuen:

$$\operatorname*{res}_3(f) = \lim_{z\to 3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right) = -\lim_{z\to 3}\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right)^2 = -\frac{1}{(3-\mathrm{i})^2} = \frac{1}{6\mathrm{i}-8} = \frac{6\mathrm{i}+8}{(6\mathrm{i})^2-8^2} = -\frac{3\mathrm{i}+4}{50},$$

$$\operatorname*{res}_{\mathrm{i}}(f) = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{1}{(z-3)^2} = \frac{1}{(\mathrm{i}-3)^2} = \frac{1}{8-6\mathrm{i}} = \frac{3\mathrm{i}+4}{50}.$$

6

3B. Für $\gamma_1(t) = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$ mit $t \in [0, 4\pi]$ und $\gamma_2(t) = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ berechnen Sie die zwei Integrale

$$\int_{\gamma_j} \frac{1}{(z-3)^2(z-\mathrm{i})}\mathrm{d}z \qquad (j = 1, 2).$$

Der Weg γ_1 läuft zweimal im Uhrzeigersinn um die Polstelle in $z_1 = i$. Der Weg γ_2 läuft einmal im Gegenuhrzeigersinn um beide Polstellen. Aus Cauchys Residuensatz folgt

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = -2\cdot(2\pi\mathrm{i})\cdot\operatorname*{res}_{\mathrm{i}}(f) = \frac{-6\pi+8\pi\mathrm{i}}{25},$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot(\operatorname*{res}_3(f) + \operatorname*{res}_{\mathrm{i}}(f)) = 0.$$

4

Aufgabe 4. *Integralsätze im Raum (10 Punkte)*

Gegeben sei die Halbkugel $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$ mit der nach außen orientierten Randfläche $S = \partial V$. Die Randfläche S besteht aus der äquatorialen Kreisscheibe A und der nördlichen Hemisphäre B.

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das folgende Vektorfeld: $f(x, y, z) = (\cos y + x, \sin x + y, z)$.

4A. Berechnen Sie die Divergenz von f.

$\mathrm{div}(f) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos(y) + x) + \frac{\partial}{\partial y}(\sin(x) + y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3.$

2

4B. Berechnen Sie die folgenden vier Integrale:

$$\int_V \mathrm{div}(f)\,\mathrm{d}V, \qquad \int_A f \cdot \mathrm{d}A, \qquad \int_B f \cdot \mathrm{d}B, \qquad \int_S f \cdot \mathrm{d}S.$$

Hinweis: Das Volumen einer Kugel vom Radius r ist gleich $\dfrac{4\pi r^3}{3}$.

$$\int_V \mathrm{div}(f)\,\mathrm{d}V = 3\,\mathrm{vol}(V) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi \cdot 2^3}{3} = 16\pi.$$

Das Vektorfeld f ist tangent zu A, dementsprechend ist $\int_A f \cdot \mathrm{d}A = 0$.

Aus dem Gaußchen Satz folgern wir, dass

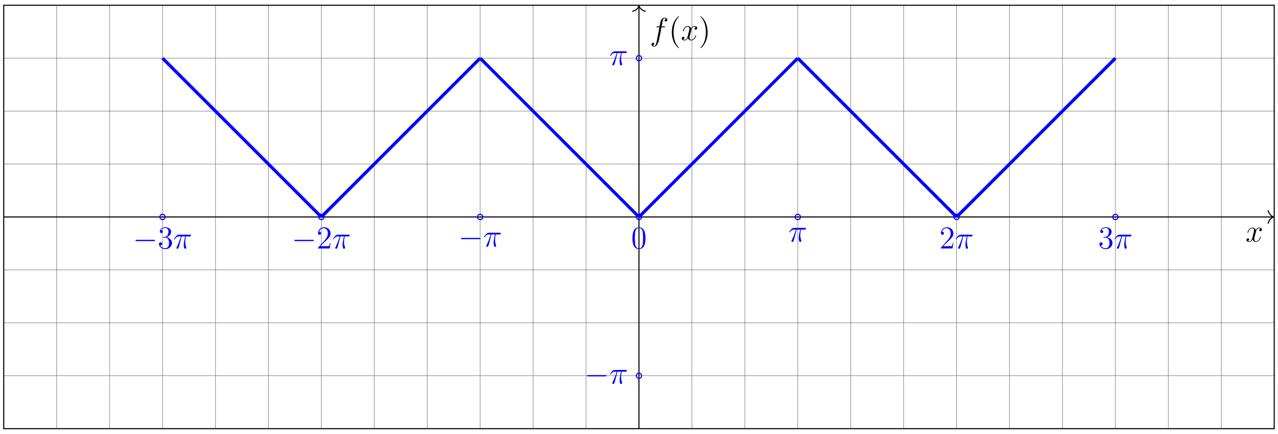
$$\int_S f \cdot \mathrm{d}S = \int_V \mathrm{div}(f)\,\mathrm{d}V = 16\pi$$

und da $\int_S = \int_A + \int_B$ muss auch $\int_B f \cdot \mathrm{d}S = 16\pi$ sein.

8

Aufgabe 5. *Fourier-Reihen* (*10 Punkte*)

5A. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gerade, 2π-periodische Funktion mit $f(x) = x$ für $0 \leq x \leq \pi$. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-3\pi, 3\pi]$.



2

5B. Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

Die Funktion f ist gleich $|x|$ für $-\pi \leq x \leq \pi$.
Insbesondere ist f gerade, also $b_k = 0$.
Der Mittelwert über eine Periode ist

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t| \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Wir haben

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos(kt) \, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(kt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{1}{k} t \sin(kt)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \sin(kt)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\left[\cos(kt)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right)$$

Also: $a_k = 0$ falls k gerade und $a_k = -\frac{4}{\pi k^2}$ falls k ungerade.

Die reelle Fourie-Reihe ist:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos(5x) + \frac{1}{7^2}\cos(7x) + \dots\right)$$

6

5C. Berechnen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Wir werten $f(x)$ in $x=0$ aus:

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Wir folgern, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} = 1.2337005501\ldots$$

2

Aufgabe 6. *Laplace-Transformation (5 Punkte)*

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte zu $f(t) = \mathrm{e}^t \cos(t)$.

Zweimalige partielle Integration liefert ($\mathrm{Re}(s) > 1$)

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{(1-s)t} \cos(t) \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{1-s} \mathrm{e}^{(1-s)t} \cos(t)\right]_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{1-s} \int_0^\infty \mathrm{e}^{(1-s)t} \sin(t) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{1-s} \left(\underbrace{\left[\frac{1}{1-s} \mathrm{e}^{(1-s)t} \sin(t)\right]_{t=0}^{\infty}}_{0} - \frac{1}{1-s} \int_0^\infty \mathrm{e}^{(1-s)t} \cos(t) \mathrm{d}t \right) \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} F(s). \end{aligned}$$

Löst man nach dem gesuchten Integral auf, dann erhält man

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2 - 2s + 2}.$$

5