Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik

Prof Dr F. Witt

HM 3 aer/mawi
Scheinklausur
31.01.2017

Name:

Matrikel-Nr.:

Tutor:

Studiengang:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	Σ	Note
Punkte:							

Hinweis:

- Auf dieser Klausur sind maximal 50 Punkte zu erreichen.
- Als Hilfsmittel sind ausschließlich drei eigenhändig und doppelseitig beschriebene DIN-A4 Blätter zugelassen.

Aufgabe 1 (10 Punkte).

Lösen Sie die folgenden kurzen Aufgaben.

a) *Gesucht ist eine Parametrisierung der Menge*

$$P = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = 9 + x^2 - y^2 \}.$$

Ersetzen Sie hierfür das Fragezeichen sinnvoll.

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \\ z(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\ \cos(\varphi) \\ r\ \sin(\varphi) \\ ? \end{pmatrix}.$$

b) *Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k und b_k der reellen Fourierentwicklung der 2π periodischen Funktion*

$$x \mapsto \cos^2(x).$$

c) *Gegeben sei die Koordinatentransformation*

$$(x, y) = \Phi(r, s) = (r\cos(s), 2r\sin(s)).$$

Gesucht ist das Volumenelement in (r, s)-Koordinaten. Ergänzen Sie hierfür sinnvoll:

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ?\ \mathrm{d}r\mathrm{d}s$$

d) *Gegeben sei eine stetige Funktion f mit den Fourierkoeffizienten*

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k}.$$

Ist f stetig differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) *Gesucht ist das Arbeitsintegral des Vektorfelds*

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

längs der Ellipse $\gamma\colon\ [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (2\cos(t), \sin(t))$. Verwenden Sie $\operatorname{rot} f = 0$ *auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und den Satz von Green.*

Aufgabe 2 (10 Punkte).

Gegeben sei der Halbkreis $K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, x^2 + y^2 \leq 4 \text{ und } y \geq 0 \right\}$ mit der Massenverteilung $\rho(x, y) = x^2$ für $(x, y) \in K$. Berechnen Sie

a) *die Gesamtmasse von K und*

b) *den Massenschwerpunkt von K.*

Aufgabe 3 (10 Punkte).

Betrachten Sie den Körper K, der parametrisiert wird durch

$$(x, y, z) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$$

mit $r \in [0, 2]\,, \varphi \in [0, 2\pi]\,, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a) Skizzieren Sie K.

b) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz^4 + \sinh(y) \\ y \\ zy \end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie den Fluss von f durch den Rand von K nach Außen.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.**

Es ist die 2π-periodische ungerade Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 1 & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

gegeben.

a) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi)$.

b) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

c) Werten Sie die Fourier-Reihe von f bei $x_0 = \frac{\pi}{2}$ aus und bestimmen Sie so den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1}.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.**

Lösen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Differentialgleichung

$$y'(t) - y(t) = 1$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$.