Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik

Prof Dr F. Witt

HM 3 aer/mawi
Scheinklausur
31.01.2017

Name:

Matrikel-Nr.:

Tutor:

Studiengang:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	Σ	Note
Punkte:							

Hinweis:

- Auf dieser Klausur sind maximal 50 Punkte zu erreichen.
- Als Hilfsmittel sind ausschließlich drei eigenhändig und doppelseitig beschriebene DIN-A4 Blätter zugelassen.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**

Lösen Sie die folgenden kurzen Aufgaben.

a) **Ruhig bleiben! Nicht anfangen zu rotieren!** *Gesucht ist eine Parametrisierung des Rotationsparaboloids*

$$P = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 9 + x^2 - y^2 \}.$$

Ersetzen Sie hierfür das Fragezeichen sinnvoll.

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \\ z(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,\cos(\varphi) \\ r\,\sin(\varphi) \\ 9 + r^2(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) \end{pmatrix}.$$

b) **Integration? Nein, danke!** *Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k und b_k der reellen Fourierentwicklung der 2π periodischen Funktion*

$$x \mapsto \cos^2(x).$$

Man hat

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

Daher ist $a_0 = 1, a_2 = \frac{1}{2}$, während alle anderen Koeffizienten verschwinden.

c) **Bitte nicht quetschen!** *Gegeben sei die Koordinatentransformation*

$$(x, y) = \Phi(r, s) = (r\cos(s), 2r\sin(s)).$$

Gesucht ist das Volumenelement in (r, φ)-Koordinaten. Ergänzen Sie hierfür sinnvoll:

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \ 2r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}s$$

Das Volumenelement ist $|\det J\Phi| = \left|2r\cos^2(s) + 2r\sin^2(s)\right| = 2r.$

d) ***Alles glatt?*** *Gegeben sei eine stetige Funktion f mit den Fourierkoeffizienten*

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k}.$$

Ist f stetig differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

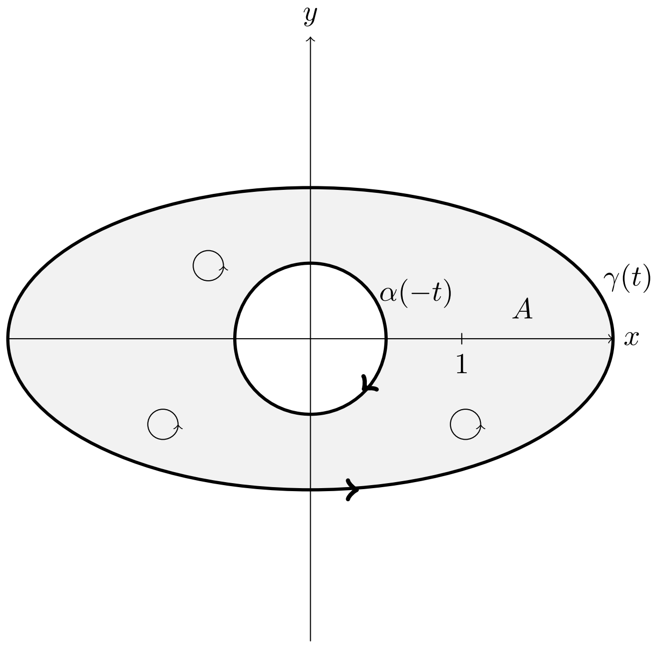
Die Folge $a_k = kc_k$ ist nicht mehr quadrat summierbar. Daher kann die Funktion nicht stetig differenzierbar sein.

e) **Wechseln Sie die Spur!** *Gesucht ist das Arbeitsintegral des Vektorfelds*

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

längs der Ellipse $\gamma\colon\ [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (2\cos(t), \sin(t))$. Verwenden Sie $\operatorname{rot} f = 0$ *auf* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *gilt und den Satz von Green.*

Sei $\alpha(t) = (\frac{1}{2}\cos(t), \frac{1}{2}\sin(t))$ für $t \in [0, 2\pi]$. Die Spuren von $\alpha(-t)$ und von $\gamma(t)$ beranden eine Fläche A, die den Ursprung nicht enthält.



Daher gilt nach dem Satz von Green

$$0 = \int_A \mathrm{rot} f \cdot \mathrm{d}A = \int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma - \int_\alpha f \cdot \mathrm{d}\alpha.$$

Also

$$\int_\beta f \cdot \mathrm{d}A = \int_\alpha f \cdot \mathrm{d}A.$$

Das Arbeitsintegral von f über α ist aus den Übungen bekannt, es gilt

$$\int_\alpha f \cdot \mathrm{d}A = 2\pi.$$

Damit folgt das Resultat, es gilt $\int_\beta f \cdot \mathrm{d}A = 2\pi$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**

Gegeben sei der Halbkreis $K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x^2 + y^2 \leq 4 \text{ und } y \geq 0 \right\}$ mit der Massenverteilung $\rho(x, y) = x^2$ für $(x, y) \in K$. Berechnen Sie

a) die Gesamtmasse von K und

b) den Massenschwerpunkt von K.

Eine Parametrisierung für K ist $\Phi(r, \phi) = (r \cos(\phi), r \sin(\phi)$ für $r \in [0, 2]$ und $\phi \in [0, \pi]$. Daher ist

$$M = \int_0^2 \int_0^\pi r^2 \cos^2(\phi) r dr \; d\phi = \frac{\pi}{2} \int_0^2 r^3 dr = \frac{\pi}{8} 16 = 2\pi.$$

Der Schwerpunkt ergibt sich analog

$$\begin{aligned} M s_y &= \int_0^2 \int_0^\pi \left(r \cos(\phi)\right)^2 \left(r \sin(\phi)\right) r dr \; d\phi \\ &= - \int_0^2 r^4 \frac{1}{3} \left(\cos^3(\pi) - \cos^3(0)\right) dr = \frac{2}{3} \int_0^2 r^4 dr = \frac{64}{15}. \end{aligned}$$

Also $s_y = \frac{32}{15\pi}$. *Aus Symmetriegründen ist* $s_x = 0$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.**

Betrachten Sie den Körper K*, der parametrisiert wird durch*

$$(x, y, z) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$$

mit $r \in [0, 2], \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a) *Skizzieren Sie* K*.* K *ist die obere Halbkugel mit Radius* 2*.*

b) *Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *mit*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz^4 + \sinh(y) \\ y \\ zy \end{pmatrix}.$$

$$\mathit{div} f = 1 + y.$$

c) *Berechnen Sie den Fluss von* f *durch den Rand von* K *nach Außen.*

Nach dem Satz von Gauß ist der Ausfluss von f *gegeben durch*

$$\begin{aligned} &\int_K \operatorname{div} f \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_K 1 + y \; dx\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \big(1 + r\sin\varphi\sin\theta\big) r^2 \sin\theta \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\ &= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = vol(K) = \frac{16}{3}\pi. \end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, dass $\int_0^{2\pi} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = 0$*. Alternativ: Ohne Zylinderkoordinaten zu benutzen kann man auch wie folgt argumentieren. Es ist also das Integral*

$$\int_K 1 + y \; dx\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_K 1 \; dx\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \int_K y \; dx\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

zu berechnen. Mit $(x, y, z) \in K$ *liegt auch* $(x, -y, z) \in K$ *und daher*

$$\int_K y \; dx\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

Die Integration der konstanten Funktion 1 *gibt den das Volumen von* K*, also die Hälfte des Volumens einer runden Kugel vom Radius zwei.*

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.**

Es ist die 2π*-periodische ungerade Funktion* f *mit*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 1 & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

gegeben.

a) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi)$.

b) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

c) Werten Sie die Fourier-Reihe von f bei $x_0 = \frac{\pi}{2}$ aus und bestimmen Sie so den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1}.$$

a) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi)$.

b) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.
Die Koeffizienten a_n und b_n für f folgen durch einfache Integration sofort: da f ungerade ist, hat man $a_k = 0$. Weiter,

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx,$$

Weiter ist f identisch Null auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ und minus Eins auf $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Daher

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(kx) dx \\ &= \frac{-2}{\pi k} [\cos(kx)]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{-2}{\pi k} \big(\cos(\pi k) - \cos(\frac{\pi}{2} k) \big) \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\cos(\pi k) - \cos(\frac{\pi}{2} k) = \begin{cases} 1 - (-1)^\ell, \textit{ falls } k \textit{ gerade mit } k = 2\ell \\ -1, \textit{ falls } k \textit{ ungerade mit } k = 2\,\ell - 1 \textit{ und } \ell = 1, 3, \ldots \end{cases}$$

Wir erhalten die relle Fourierentwicklung

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell - 1}{2\ell} \sin(2\ell x) + \frac{1}{2\ell - 1} \sin((2\ell - 1)x)\ .$$

c) Werten Sie die Fourier-Reihe von f bei $x_0 = 0$ aus und bestimmen Sie so den Grenzwert der Reihe. Man hat $\sin((2\ell-1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^{\ell+1}$ und daher nach dem satz von Dirichlet

$$\frac{1}{2} = \frac{f(\pi/2-) + f(\pi/2+)}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{2\ell - 1}\ .$$

Auflösen nach der gesuchten Reihe und eine Indexverschiebung ergibt

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.**

Lösen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Differentialgleichung

$$y'(t) - y(t) = 1$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$*.*
Die Gleichung transformiert sich zu

$$sY(s) - y_0 - Y(s) = \frac{1}{s}.$$

Daher ist

$$Y(s) = \frac{1+s}{s(s-1)} = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s}.$$

Rücktransformation ergibt

$$y(t) = -1 + 2\mathrm{e}^t.$$

Probe: $y(0) = -1 + 2 = 1$ *und*

$$y'(t) = 2\mathrm{e}^t = y(t) + 1$$