



HM 3 aer/mawi
Scheinklausur
10.12.2016

Name: Matrikel-Nr.:

Tutor: Studiengang:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	Σ	Note
Punkte:							

Hinweis:

- Auf dieser Klausur sind maximal 50 Punkte zu erreichen.
- Als Hilfsmittel sind ausschließlich drei eigenhändig und doppelseitig beschriebene DIN-A4 Blätter zugelassen.

Aufgabe 1 (10 Punkte).

Lösen Sie die folgenden kurzen Aufgaben.

- a) **Ruhig bleiben! Nicht anfangen zu rotieren!** Gesucht ist eine Parametrisierung des Rotationsparaboloids

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 9 - x^2 - y^2\}.$$

Ersetzen Sie hierfür das Fragezeichen sinnvoll.

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \varphi) \\ y(r, \varphi) \\ z(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ ? \end{pmatrix}.$$

- b) **Integration? Nein, danke!** Bestimmen Sie die komplexe Fourierentwicklung der 2π periodischen Funktion

$$x \mapsto \sin(2x).$$

- c) **Bitte nicht quetschen!** Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$(x, y) = \Phi(r, s) = (3r + s, r - 2s).$$

Gesucht ist das Volumenelement in (r, φ) -Koordinaten. Ergänzen Sie hierfür sinnvoll:

$$dx dy = ? dr ds$$

- d) **Alles glatt?** Gegeben sei eine stetige Funktion f mit den Fourierkoeffizienten

$$c_k = \frac{\sin(2k)}{k^4}.$$

Wie oft ist f mindestens differenzierbar?

- e) **Wechseln Sie die Spur!** Gesucht ist das Arbeitsintegral des Vektorfelds

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

längs der Ellipse $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (2 \cos(t), \sin(t))$. Verwenden Sie $\operatorname{rot} f = 0$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und den Satz von Green.

Aufgabe 2 (10 Punkte).

Gegeben sei der Halbkreis $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \text{ und } y \geq 0\}$ mit der Massenverteilung $\rho(x, y) = y$ für $(x, y) \in K$. Berechnen Sie

- a) die Gesamtmasse von K und
 b) den Massenschwerpunkt von K .

Aufgabe 3 (10 Punkte).

Betrachten Sie den Körper K , der parametrisiert wird durch

$$(x, y, z) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$$

mit $r \in [0, 2]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

a) Skizzieren Sie K .

b) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z^2 \\ yx - x \\ \cosh(x + y) \end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie den Fluss von f durch den Rand von K nach Außen.

Aufgabe 4 (10 Punkte).

Es ist die 2π -periodische gerade Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -1 & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

gegeben.

a) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f .

c) Werten Sie die Fourier-Reihe von f bei $x_0 = 0$ aus und bestimmen Sie so den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1}.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte).

Lösen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Differentialgleichung

$$y'(t) - y(t) = 1$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.