Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik

Prof Dr F. Witt

HM 3 aer/mawi

Scheinklausur

10.12.2016

Name:

Matrikel-Nr.:

Tutor:

Studiengang:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	Σ	Note
Punkte:							

Hinweis:

- Auf dieser Klausur sind maximal 50 Punkte zu erreichen.
- Als Hilfsmittel sind ausschließlich drei eigenhändig und doppelseitig beschriebene DIN-A4 Blätter zugelassen.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**

Lösen Sie die folgenden kurzen Aufgaben.

a) **Ruhig bleiben! Nicht anfangen zu rotieren!** *Gesucht ist eine Parametrisierung des Rotationsparaboloids*

$$P = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 9 - x^2 - y^2 \}.$$

Ersetzen Sie hierfür das Fragezeichen sinnvoll.

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \\ z(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,\cos(\varphi) \\ r\,\sin(\varphi) \\ 9 - r^2 \end{pmatrix}.$$

b) **Integration? Nein, danke!** *Bestimmen Sie die komplexe Fourierentwicklung der* 2π *periodischen Funktion*

$$x \mapsto \sin(2x).$$

Man hat

$$\sin(2x) = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{2ix} - \mathrm{e}^{-2ix}\right).$$

Weiterhin lauten die Schurschen Orthogonalitätrelationen im Komplexen

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-i\ell t}\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 \textit{ falls } k = \ell \\ 0 \textit{ falls } k \neq \ell \end{cases}$$

Daher folgt aus obiger Darstellung $c_2 = \frac{1}{2i} = -c_{-2}$.

Alternative Lösung: Die Schurschen Orthogonalitätsrelationen im Reellen lauten

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(kt)\sin(\ell t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kt)\cos(\ell t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 \textit{ falls } k = \ell \\ 0 \textit{ falls } k \neq \ell \end{cases}$$

und

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt)\cos(\ell t)\mathrm{d}t = 0\,.$$

Daher hat man $a_k = 0$, $b_2 = 1$ *und* $b_k = 0$ *falls* $k \neq 2$. *Aus den Relationen zwischen komplexen und reellen Koeffizienten folgt*

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 = c_k + c_{-k} \\ b_2 &= i\,(c_2 - c_{-2})\,, \end{aligned}$$

also $c_2 = -c_{-2} = \frac{1}{2i}$ *und* $c_k = 0$ *sonst.*

c) **Bitte nicht quetschen!** *Gegeben sei die Koordinatentransformation*

$$(x, y) = \Phi(r, s) = (3r + s, r - 2s).$$

Gesucht ist das Volumenelement in (r, φ)*-Koordinaten. Ergänzen Sie hierfür sinnvoll:*

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \ 7\ \mathrm{d}r\mathrm{d}s$$

Das Volumenelement ist $|\det J\Phi| = |3 \cdot (-2) - 1 \cdot 1| = 7.$

d) ***Alles glatt?*** *Gegeben sei eine stetige 2π-periodische Funktion f mit den Fourierkoeffizienten*

$$c_k = \frac{\sin(2k)}{k^4}.$$

Wie oft ist f mindestens differenzierbar?

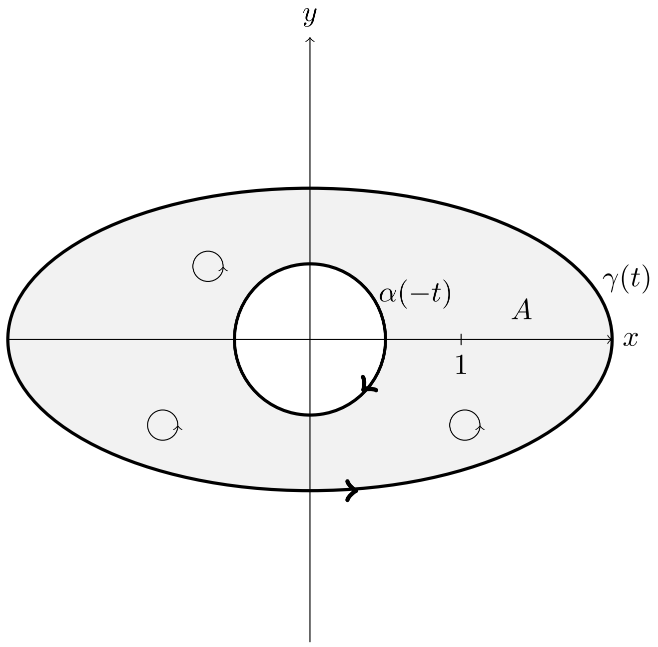
Die Folge $a_k = k^3 c_k$ ist noch quadrat-summierbar. Daher ist die Funktion mindestens zweimal stetig differenzierbar.

e) **Wechseln Sie die Spur!** *Gesucht ist das Arbeitsintegral des Vektorfelds*

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

längs der Ellipse $\gamma\colon\ [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (2\cos(t), \sin(t))$. Verwenden Sie $\mathrm{rot} f = 0$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gilt und den Satz von Green.

Sei $\alpha(t) = (\frac{1}{2}\cos(t), \frac{1}{2}\sin(t))$ für $t \in [0,2\pi]$. Die Spuren von $\alpha(-t)$ und von $\gamma(t)$ beranden eine Fläche A, die den Ursprung nicht enthält.



Daher gilt nach dem Satz von Green

$$0 = \int_A \mathrm{rot} f \cdot \mathrm{d}A = \int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma - \int_\alpha f \cdot \mathrm{d}\alpha.$$

Also

$$\int_\beta f \cdot \mathrm{d}A = \int_\alpha f \cdot \mathrm{d}A.$$

Das Arbeitsintegral von f über α ist aus den Übungen bekannt, es gilt

$$\int_\alpha f \cdot \mathrm{d}A = 2\pi.$$

Damit folgt das Resultat, es gilt $\int_\beta f \cdot \mathrm{d}A = 2\pi$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**

Gegeben sei der Halbkreis $K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x^2+y^2 \leq 4 \text{ und } y \geq 0 \right\}$ *mit der Massenverteilung* $\rho(x,y) = y$ *für* $(x,y) \in K$*. Berechnen Sie*

a) die Gesamtmasse von K *und*

b) den Massenschwerpunkt von K*.*

Eine Parametrisierung für K *ist* $\Phi(r,\phi) = (r\cos(\phi), r\sin(\phi)$ *für* $r \in [0,2]$ *und* $\phi \in [0,\pi]$*. Daher ist*

$$M = \int_0^2 \int_0^\pi r\sin(\phi) r dr \; d\phi = \frac{2}{3}2^3 = \frac{16}{3}.$$

Der Schwerpunkt ergibt sich analog

$$Ms_y = \int_0^2 \int_0^\pi (r\sin(\phi))^2 \, r dr \; d\phi = \frac{\pi}{2}\int_0^2 r^3 dr = \frac{\pi}{8}16 = 2\pi.$$

Also $s_y = \frac{3}{8}\pi$*. Aus Symmetriegründen ist* $s_x = 0$*.*

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.**

Betrachten Sie den Körper K*, der parametrisiert wird durch*

$$(x,y,z) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$$

mit $r \in [0,2]\,, \varphi \in [0,2\pi]\,, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *.*

a) Skizzieren Sie K*.* K *ist die obere Halbkugel mit Radius* 2*.*

b) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *mit*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z^2 \\ y\,x - x \\ \cosh(x+y) \end{pmatrix}.$$

$$divf = 1 + x.$$

c) Berechnen Sie den Fluss von f *durch den Rand von* K *nach Außen.*

Nach dem Satz von Gauß ist der Ausfluss von f *gegeben durch*

$$\begin{aligned} \int_K \mathrm{div} f \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_K 1 + x \; dx\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \big(1 + r\cos\varphi\sin\theta\big) r^2 \sin\theta \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\ &= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = vol(K) = \frac{16}{3}\pi. \end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, dass $\int_0^{2\pi} \cos\varphi \mathrm{d}\varphi = 0$*. Alternativ: Ohne Zylinderkoordinaten zu benutzen kann man auch wie folgt argumentieren. Es ist also das Integral*

$$\int_K 1 + x \; dx\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_K 1 \; dx\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \int_K x \; dx\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

zu berechnen. Mit $(x, y, z) \in K$ *liegt auch* $(-x, y, z) \in K$ *und daher*

$$\int_K x \; dx \mathrm{d}y \mathrm{d}z = 0.$$

Die Integration der konstanten Funktion 1 *gibt den das Volumen von* K*, also die Hälfte des Volumens einer runden Kugel vom Radius zwei.*

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.**

Es ist die 2π*-periodische gerade Funktion* f *mit*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -1 & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

gegeben.

a) *Skizzieren Sie* f *auf dem Intervall* $[-2\pi, 2\pi)$.

b) *Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von* f.
Die Koeffizienten b_n *für* f *folgen durch einfache Integration sofort: da* f *gerade ist,*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(x) dx,$$

Weiter ist f *identisch Eins auf* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *und minus Eins auf* $[\frac{\pi}{2}, \pi]$*. Daher*

$$\begin{aligned} a_k =& \frac{2}{\pi} (\int_0^{\pi/2} \cos(kx) dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(kx) dx \\ =& \frac{2}{\pi k} \left([\sin(kx)]_0^{\pi/2} - [\sin(kx)]_{\pi/2}^{\pi} \right) \\ =& \frac{4}{\pi k} \sin(k\pi/2) \\ =& \frac{4}{\pi k} \sin(k\pi/2) \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\sin(k\pi/2) = \begin{cases} 0, \; \textit{falls } k \textit{ gerade} \\ \frac{4}{\pi k}, \; \textit{falls } k = 2\,\ell - 1 \textit{ mit } \ell = 1, 3, \ldots \\ -\frac{4}{\pi k}, \; \textit{falls } k = 2\,\ell - 1 \textit{ mit } \ell = 2, 4, \ldots \end{cases}$$

Wir erhalten die relle Fourierentwicklung

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell - 1)} \; .$$

c) Werten Sie die Fourier-Reihe von f bei $x_0 = 0$ aus und bestimmen Sie so den Grenzwert der Reihe. Man hat

$$1 = f(0) = \frac{4}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell - 1)} \; .$$

Auflösen nach der gesuchten Reihe und eine Indexverschiebung ergibt

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l-1} = -\frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.**

Lösen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Differentialgleichung

$$y'(t) - y(t) = 1$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.
Die Gleichung transformiert sich zu

$$sY(s) - y_0 - Y(y) = \frac{1}{s}.$$

Daher ist

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}.$$

Rücktransformation ergibt

$$y(t) = -1 + \mathrm{e}^t.$$