Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschriebene Notizen
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/12	/11	/8	/9	/7	/12	/14	/74

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.49506$.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (12 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegen/Beispiels).

2A. Kann man mit einem Zaun der Länge $L = 62\mathrm{m}$ eine Fläche von $F = 320\mathrm{m}^2$ umschließen?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}\ 2$

2B. Gilt $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ für alle Polynome $P, Q \in \mathbb{R}[x,y]$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}\ 2$

2C. Gilt $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} \left|\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right|\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} \left|\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ für alle Polynome $P, Q \in \mathbb{R}[x,y]$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}\ 2$

2D. Sei $(\Omega, \mathbf{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Gilt für die Varianzen dann $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2

2E. Wir untersuchen stetig differenzierbare Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y'(t) = 2 \cdot \sqrt{|y(t)|}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Können sich zwei Lösungen u, v kreuzen, von $u(-1) < v(-1)$ zu $u(1) > v(1)$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2

2F. Ist jede Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y'(t) = 1 - \cos(y(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ beschränkt?
Hinweis: Hilfreich sind hier die vielen konstanten Lösungen.

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2

Aufgabe 3. *Integration und Integralsätze in der Ebene* (11 Punkte)

Wir betrachten das Integral $I := \int_{x=0}^{2} \int_{y=x}^{2} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$

3A. Skizzieren Sie den Integrationsbereich in der x–y–Ebene:

Beschreiben Sie den Integrationsbereich als Normalbereich in x–Richtung:

$\boxed{} \le y \le \boxed{}\;, \quad \boxed{} \le x \le \boxed{}$ 3

3B. Berechnen Sie das Integral I:

$I =$

2

Zu $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir das ebene Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := (x^2+y^2)^{-a/2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad \text{kurz} \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{r^a}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \ \text{mit } r := \sqrt{x^2+y^2}.$$

3C. Berechnen Sie das Arbeitsintegral von f entlang des Kreises vom Radius R um 0:

$$\int_{\partial B(0,R)} f(s) \bullet \mathrm{d}s =$$

2

3D. Berechnen Sie zu f die Rotation rot f:

2

3E. Für welche $a \in \mathbb{R}$ besitzt f ein Potential? Begründung?

2

Aufgabe 4. *Integration und Integralsätze im Raum* (8 Punkte)

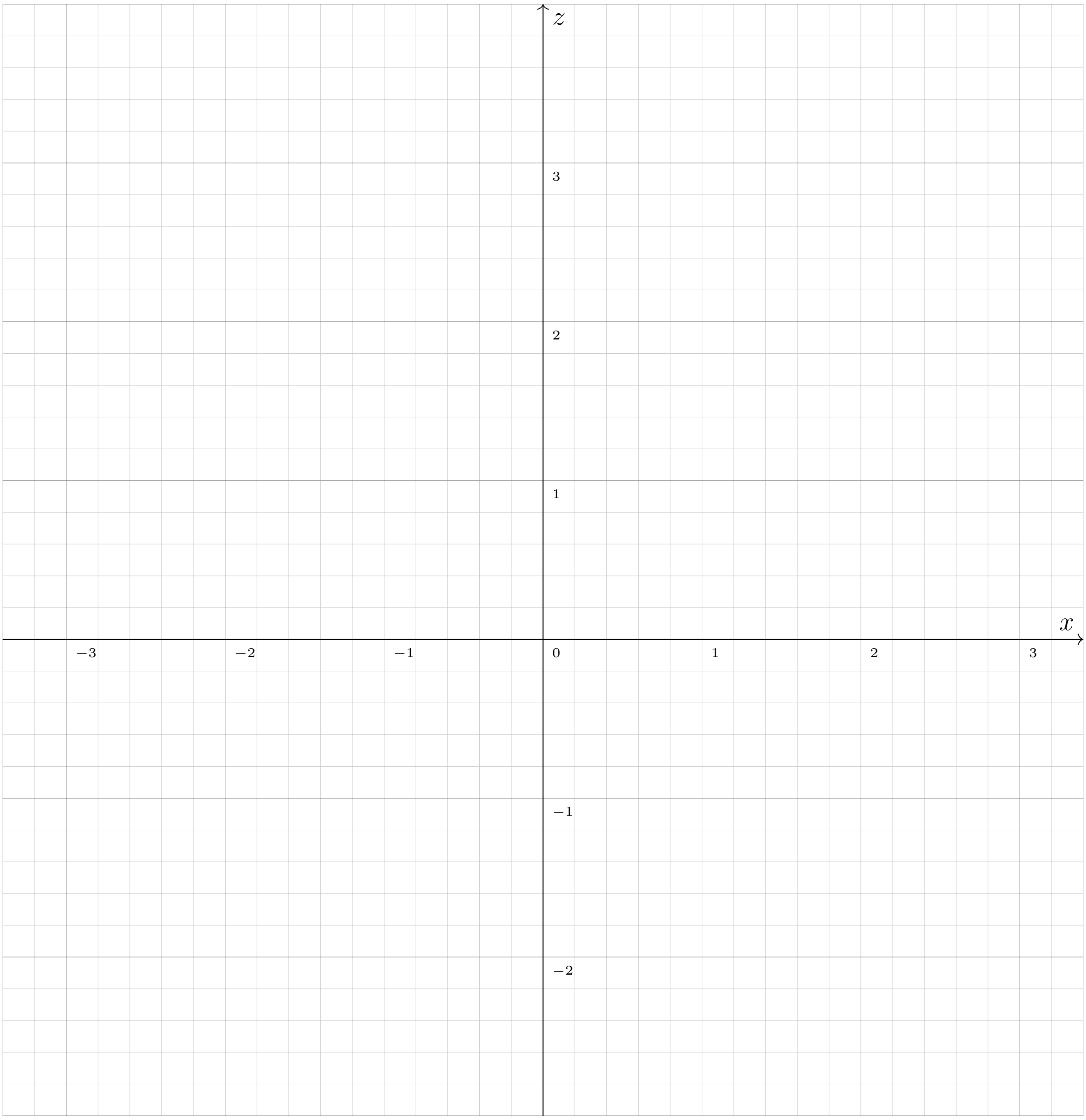
Wir untersuchen das Newton–Feld $f : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(v) = \frac{v}{|v|^3}, \quad \text{ausführlich} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Dazu betrachten wir die Hemisphäre H_r vom Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und das Paraboloid P_r:

$$H_r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{r} x^2+y^2+z^2 = r^2 \\ z \ge 0 \end{array} \right\}, \quad P_r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \le z = r^2 - x^2 - y^2 \right\}$$

4A. Skizzieren Sie den Schnitt von H_1 und P_2 mit der x–z–Ebene.



2

4B. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes f über die Hemisphäre H_r nach oben:
Hinweis: Es geht ohne Parametrisierung der Hemisphäre. Der Wert liegt im Intervall $[6, 7]$.

$$\int_{H_r} f(s) \bullet \mathrm{d}S =$$

$\overline{}\,2$

4C. Berechnen Sie zu f die Divergenz $\operatorname{div} f$: *Hinweis:* Sie ist konstant.

$\overline{}\,2$

4D. Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes f über das Paraboloid P_2 nach oben:

$$\int_{P_2} f(s) \bullet \mathrm{d}S =$$

$\overline{}\,2$

Aufgabe 5. *Lineare Differentialgleichungssysteme* (9 Punkte)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t)$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5A. Berechnen Sie die Bildvektoren Av_1, Av_2, Av_3 in $\mathbb{R}^4$ und schreiben Sie jeden als Linearkombination von v_1, v_2, v_3. Wählen Sie v_4 so, dass $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ aus Hauptvektorketten zu A ist. Bestimmen Sie die zugehörige Jordan–Normalform J von A, also die darstellende Matrix $J = {}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}}$ von A bezüglich der Basis $\mathscr{B}$.

$Av_1 = \boxed{}$, $Av_2 = \boxed{}$

$Av_3 = \boxed{}$, $v_4 = \boxed{}$

$J = \boxed{}$

5

5B. Bestimmen Sie die zugehörige Fundamentalmatrix $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{4\times 4} : t \mapsto W(t)$. Die $k$te Spalte ist die Lösung $w_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4 : t \mapsto w_k(t)$ mit Startvektor $w_k(0) = v_k$ und $w_k'(t) = A\,w_k(t)$.

$$W(t) = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

4

Aufgabe 6. *Partielle Differentialgleichungen* (7 Punkte)

Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}_{\geq 1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

$$
\text{(P)} \begin{cases} x\,\partial_x u(x,y) - \dfrac{y}{1+\ln x}\,\partial_y u(x,y) = 2\,u(x,y) & \text{für alle } x > 1 \text{ und } y \in \mathbb{R}, \\ u(1,y) = \mathrm{e}^y & \text{für } x = 1 \text{ und alle } y \in \mathbb{R}. \end{cases}
$$

Hierzu sei $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$ die Charakteristik mit $\gamma(0) = (1, y_0)$ und $U(s) = u(X(s), Y(s))$.

6A. Stellen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem zu (P) auf:

$X'(s) = \quad X(s)$, $\qquad X(0) = 1,$

$Y'(s) = \boxed{}\,, \quad Y(0) = y_0,$

$U'(s) = \boxed{}\,, \quad U(0) = \mathrm{e}^{y_0}.$

2

6B. Lösen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem:

$X(s) = \quad \mathrm{e}^s,$

$Y(s) = \boxed{}\,,$

$U(s) = \boxed{}\,.$

2

6C. Bestimmen Sie zu $(x,y) \in \mathbb{R}_{\geq 1} \times \mathbb{R}$ die Werte s und y_0 so, dass $\gamma(s) = (x,y)$ gilt:

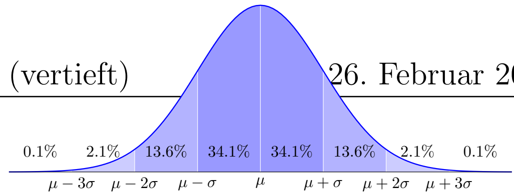
$s = \boxed{}\,, \quad y_0 = \boxed{}\,.$

2

6D. Geben Sie die Lösung u von (P) an. *Tipp zur Probe:* Im Punkt $(2,1)$ gilt $u(2,1) = 8\mathrm{e}$.

$u(x,y) =$

1



Aufgabe 7. *Wahrscheinlichkeit* (12 Punkte)

7A. Sie wiederholen 250 000 mal unabhängig ein Experiment mit Trefferwahrscheinlichkeit 10%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p erhalten Sie höchstens 25 120 Treffer? (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

3

7B. Sie wiederholen 1000 mal ein Experiment mit Trefferquote 99.88% (zufällig, unabhängig). Mit welcher Wahrscheinlichkeit q erhalten Sie mindestens 999 Treffer? (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

3

7C. Sie würfeln viermal mit einem fairen, sechsseitigen Würfel. Mit welcher Wkt r erhalten Sie vier verschiedene Zahlen? (Antworten als gekürzter Bruch)

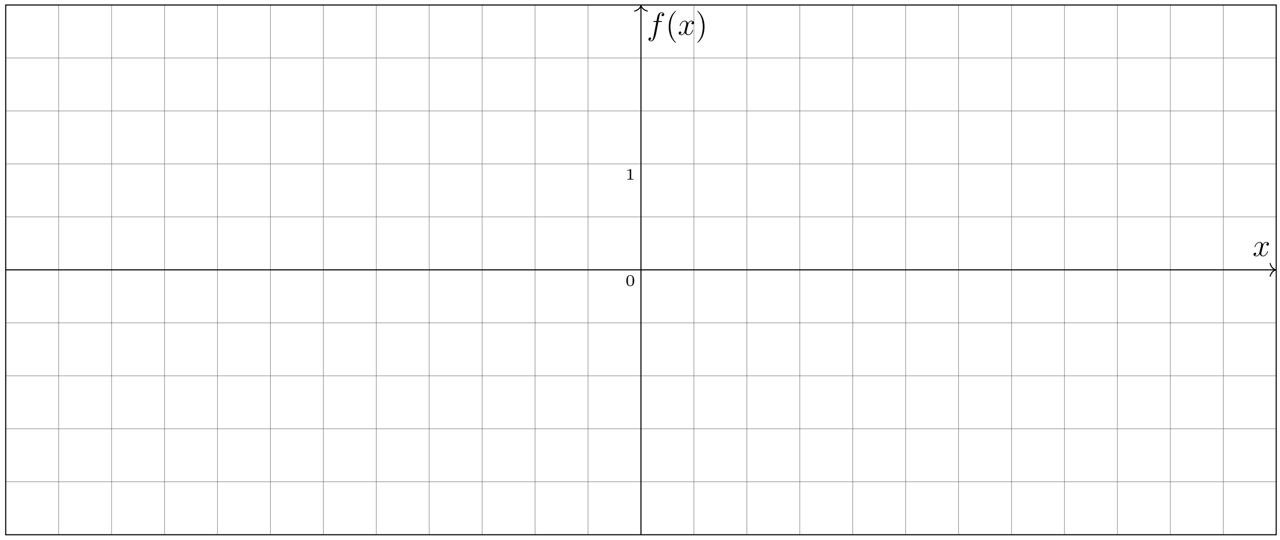
2

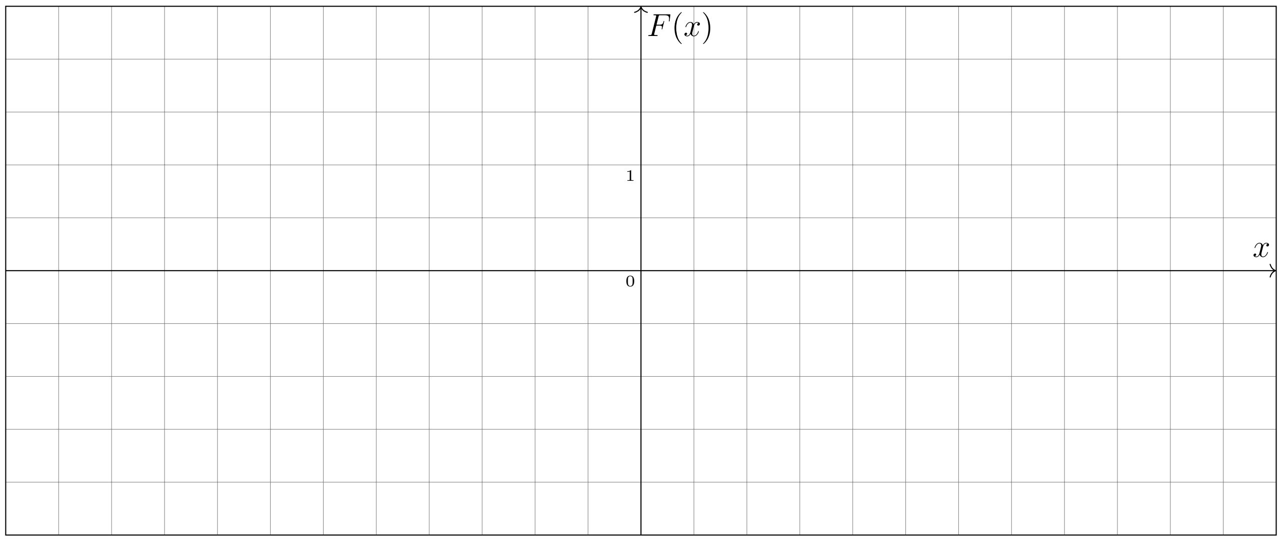
7D. Von 73 äußerlich gleichen, sechsseitigen Würfeln sind 72 fair, doch einer ist gezinkt und würfelt immer die 6. Sie wählen zufällig einen dieser 73 Würfel und würfeln n mal unabhängig. Wenn alle n Würfe die 6 ergeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit w_n ist Ihr Würfel der gezinkte? Berechnen Sie allgemein w_n und speziell die Werte w_2, w_3 (Letzere als gekürzte Brüche).

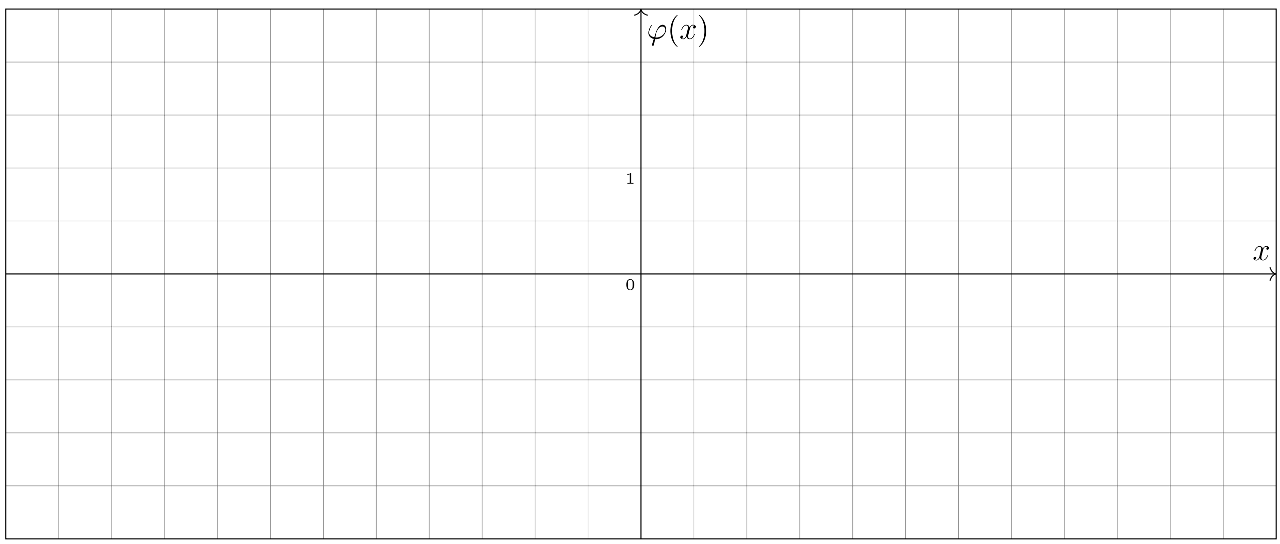
Konkrete Zahlenwerte: $w_0 = \frac{1}{73}$ $w_1 = \frac{1}{13}$ $w_2 =$ $\boxed{}$ $w_3 =$ $\boxed{}$ 4

Aufgabe 8. *Fourier–Reihen* (14 Punkte)

8A. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade und 2π–periodisch mit $f(x) = \cos(x)$ für $0 < x < \pi$. Skizzieren Sie f sowie die Integralfunktion F mit $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ und die Ableitung $\varphi = f'$ auf $[-12, 12]$.







3

8B. Bestimmen Sie zu f die Koeffizienten der Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$.

Hinweis: Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(s)\cos(t) = \frac{1}{2}[\sin(s+t) + \sin(s-t)]$.

$b_k =$

5

8C. Bestimmen Sie zur Ableitung φ die Fourier–Reihe $\varphi(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx)$.

Für $k \geq 1$ gilt:

$\alpha_k =$

$\alpha_0 =$

3

8D. Bestimmen Sie den exakten Wert der Reihe $S := \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{4\ell^2}{(4\ell^2-1)^2} \in [0.61, 0.62]$.
Hinweis: Energiegleichung nach Parseval.

3