Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Studiengang: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschriebene Notizen
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/12	/11	/8	/9	/7	/12	/14	/74

Erläuterung: Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen! Tipp für zukünftige Leser: Ihre Vorlesung und wöchentlichen Übungen erklären Ihnen diese wunderbaren Rechentechniken. Nutzen Sie dies, arbeiten Sie kontinuierlich mit, es lohnt sich!

Obligater Warnhinweis: Zur Ergänzung sind alte Klausuren wunderbar. Gerne geschehen! Als Lernersatz oder vermeintliche Abkürzung verleiten sie auf den Holzweg. Das können Sie besser! Kommen Sie zur Einsicht: Mit hektischem Hauruck vor der Klausur machen Sie sich das Lernen unnötig schwer. Erst ignorieren, dann spekulieren, schließlich lamentieren? Richtig studieren!

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.49506$.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (12 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegen/Beispiels).

2A. Kann man mit einem Zaun der Länge $L = 62\text{m}$ eine Fläche von $F = 320\text{m}^2$ umschließen?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Nach der isoperimetrischen Ungleichung maximiert allein der Kreis die umschlossene Fläche. Umfang $L = 2\pi r = 62$ entspricht Radius $r = L/2\pi < 10$ und maximaler Fläche $\pi r^2 < 315$.

Erläuterung: Für Ingenieur:innen ist es wichtig zu wissen, was möglich ist und was nicht. Dabei helfen Sachkenntnis, hier geometrische, und Überschlagsrechnungen.

Fun fact: Wir arbeiten hier in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$. Auf der Erdoberfläche bekommen Sie etwas mehr Fläche für denselben Umfang: Das liegt an der positiven Krümmung. Im Extremfall, auf einer Sphäre mit geeignet gewähltem Radius R, bekommen Sie beliebig viel Fläche F zu festem Umfang L. Die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ ist flach, also von konstanter Krümmung 0, daher ist hier alles übersichtlich und die Lösung besonders einfach.

$\frac{\quad}{2}$

2B. Gilt $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ für alle Polynome $P, Q \in \mathbb{R}[x,y]$?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Spektakuläres Gegenbeispiel aus Vorlesung und Übung: $P/Q = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$.

Erläuterung: Der Satz von Fubini eröffnet die Gleichung

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_X \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_Y \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Hinreichend für diese Gleichung ist, dass der Integrand f nicht-negativ ist, $f \ge 0$, oder absolut integrierbar, $\int_{X\times Y} |f(x,y)|\,\mathrm{d}(x,y) < \infty$. Beides ist hier nicht gegeben, also ist Vorsicht geboten. Das Gegenbeispiel ist konkret und lehrreich: Beide Integrale können Sie explizit berechnen und liefern verschiedene Ergebnisse!

$\frac{\quad}{2}$

2C. Gilt $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} \left|\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} \left|\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ für alle Polynome $P, Q \in \mathbb{R}[x,y]$?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

Zum Satz von Fubini genügt, das der Integrand ≥ 0 ist (oder absolut integrierbar).

Erläuterung: Beim obigen Gegenbeispiel $P/Q = (x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2$ aus Vorlesung und Übung können Sie direkt nachrechnen, dass die beiden absoluten Integrale tatsächlich ∞ ergeben. Dieser Integrand P/Q ist demnach nicht absolut integrierbar.

Erinnerung: Bei der Integration von Funktionen $f:\Omega \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ ist es zunächst leichter, mit nicht-negativen Funktionen $f:\Omega \to [0,\infty]$ zu arbeiten, da hier die stärkeren Sätze gelten. Anschließend übertragen wir alles auf den allgemeinen Fall, durch Zerlegung in Negativ- und Positivteil, wobei absolute Integrierbarkeit als die natürliche Bedingung entsteht.

$\frac{\quad}{2}$

2D. Sei $(\Omega, \mathbf{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Gilt für die Varianzen dann $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Ein Gegenbeispiel ist $X = Y$ mit $\mathbf{V}(X) > 0$, etwa $\mathbf{P}(X = \pm 1) = 1/2$ mit $\mathbf{V}(X) = 1$.

Ausführlich: Hier gilt nämlich $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(2X) = 4\mathbf{V}(X) \neq 2\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$.

Erläuterung: Allgemein gilt $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\,\mathbf{Cov}(X, Y)$. Zur Additivität der Varianzen müssen die Zufallsvariablen somit unkorreliert sein, also $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$ erfüllen. Als stärkere Bedingung genügt unabhängig, was in vielen Anwendungen vorausgesetzt wird. Unter dieser Voraussetzung sind die Varianzen additiv, das vereinfacht unsere Rechnungen.

2

2E. Wir untersuchen stetig differenzierbare Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y'(t) = 2 \cdot \sqrt{|y(t)|}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Können sich zwei Lösungen u, v kreuzen, von $u(-1) < v(-1)$ zu $u(1) > v(1)$?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

Eine Lösung ist $v(t) = 0$, eine weitere ist $u(t) = t\,|t|$,
also $u(t) = -t^2$ für $t \le 0$ und $u(t) = +t^2$ für $t \ge 0$.

Erläuterung: Meist wollen wir Eindeutigkeit, dazu gibt es den E&E–Satz; er sichert insbesondere, dass es keine Überkreuzungen geben kann. Hier ist dieser Satz jedoch nicht anwendbar! (Die rechte Seite ist bei $y = 0$ nicht nach y differenzierbar.) Die beiden überkreuzenden Lösungen lassen sich leicht nachprüfen und illustrieren eindrücklich das Problem.

Ausführlich: Jede Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat folgende Form: Es gibt $a \le b$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $y(t) = 0$ für $a \le t \le b$ und $y(t) = -(a-t)^2$ für $t \le a$ und $y(t) = (t-b)^2$ für $t \ge b$.

2

2F. Ist jede Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y'(t) = 1 - \cos(y(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ beschränkt?
Hinweis: Hilfreich sind hier die vielen konstanten Lösungen.

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

Die rechte Seite $f(y) = 1 - \cos(y)$ ist stetig differenzierbar nach y, also können wir den Existenz- und Eindeutigkeitssatz anwenden. Die konstanten Lösungen sind $u_k(t) = 2\pi k$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Jede andere Lösung y startet zwischen zwei konstanten Lösungen u_k und u_{k+1}, kann diese dank E&E–Satz *nicht* kreuzen, bleibt also dazwischen beschränkt!

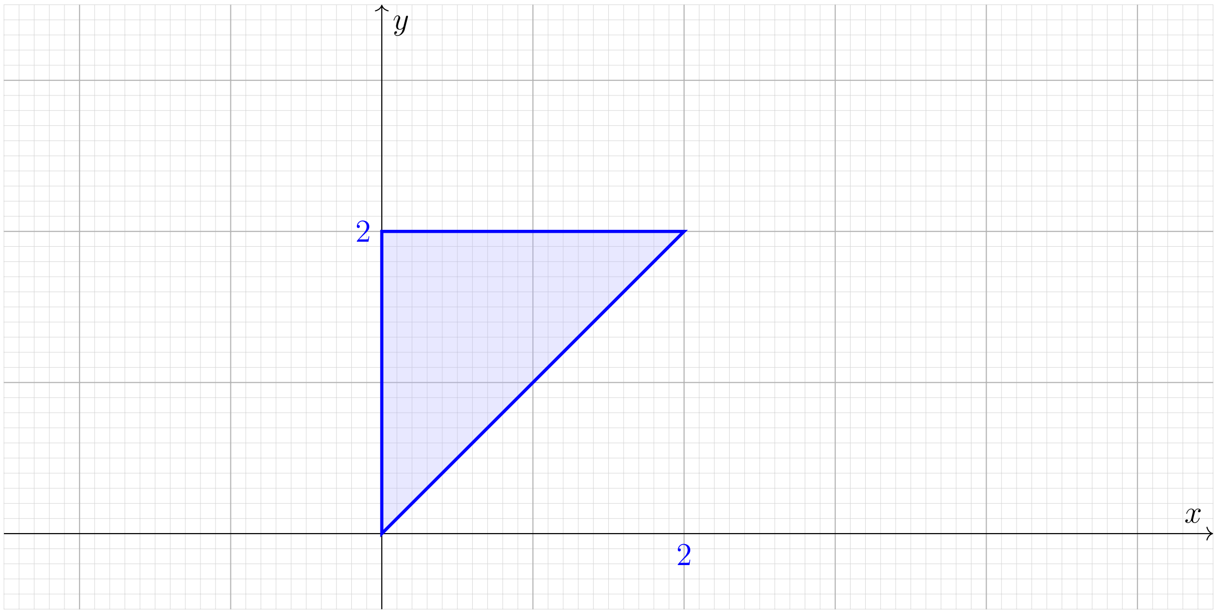
Erläuterung: Diese Differentialgleichung sieht schlimm aus, und das soll sie auch! Als glücklicher Zufall lässt sich sogar explizit lösen, durch $y(t) = -2\,\operatorname{arccot}(t - \cot(y(0)/2))$. Das war hier aber nicht gefragt und nicht die geschickte Lösung. Mit dem E&E–Satz gelingt alles schneller, leichter und effizienter, selbst in noch viel komplizierten Awnendungen. Sie können ja mal ChatGPT befragen und kritisch lesen. Derzeit sprudelt schon viel Schlaues, aber beim Versuch logischer Schlussfolgerungen auch noch viel Unsinn.

2

Aufgabe 3. *Integration und Integralsätze in der Ebene* (11 Punkte)

Wir betrachten das Integral $I := \int_{x=0}^{2} \int_{y=x}^{2} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$.

3A. Skizzieren Sie den Integrationsbereich in der x–y–Ebene:



Beschreiben Sie den Integrationsbereich als Normalbereich in x–Richtung:

$0 \le y \le 2$, $\quad 0 \le x \le y$ 3

3B. Berechnen Sie das Integral I:

$$I = \int_{y=0}^{2} \int_{x=0}^{y} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \qquad \text{dank Fubini, Integrand} \ge 0$$

$$= \int_{y=0}^{2} \mathrm{e}^{-y} \,\mathrm{d}y = \Big[-\mathrm{e}^{-y} \Big]_{y=0}^{2} = 1 - \mathrm{e}^{-2} \qquad \text{HDI, ausrechnen}$$

Erläuterung: Sie kennen diesen wunderbar nützlichen Satz aus Vorlesung, Quizz und Übung, dazu zahlreiche praktische Anwendungsbeispiele, darunter auch erstaunliche so wie dieses.

In der ersten Reihenfolge erlaubt das innere Integral keine elementare Stammfunktion. Die Vertauschung der Integration ist daher ungemein praktisch: Nun gelingt das Integral leicht!

Warum gilt hier Gleichheit? Der Satz von Fubini gilt für alle Integranden ≥ 0, so auch hier. Die absolute Integrierbarkeit ist in diesem Beispiel keine Voraussetzung, sondern Folgerung.

(Zu Fubini siehe auch die beiden obigen Verständnisfragen 2B und 2C.)

2

Zu $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir das ebene Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := (x^2+y^2)^{-a/2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad \text{kurz} \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{r^a}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{mit } r := \sqrt{x^2+y^2}.$$

3C. Berechnen Sie das Arbeitsintegral von f entlang des Kreises vom Radius R um 0:

$$\int_{\partial B(0,R)} f(s) \bullet \mathrm{d}s = \int_{\partial B(0,R)} f(s) \bullet t(s)\, |\mathrm{d}s| \quad \dots \text{ Einheitstangentenvektor } t(s) \dots$$

$$= \int_{\partial B(0,R)} \frac{1}{R^a}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{R}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} |\mathrm{d}s|$$

$$= R^{1-a} \int_{\partial B(0,r)} 1\, |\mathrm{d}s| = 2\pi R^{2-a}$$

Erläuterung: Sie erkennen und nutzen hier die besondere Symmetrie. Alternativ können Sie die Kreislinie $\partial B(0,R)$ parametrisieren, die Rechnung ist dieselbe, nur unwesentlich länger.

2

3D. Berechnen Sie zu f die Rotation $\operatorname{rot} f$:

$$\partial_x f_2(x,y) = \partial_x\big[x\,(x^2+y^2)^{-a/2}\big] \quad \dots \text{ Produktregel } \dots \text{ Kettenregel } \dots$$

$$= (x^2+y^2)^{-a/2} - a x^2 (x^2+y^2)^{-a/2-1}$$

$$(\operatorname{rot} f)(x,y) = \partial_x f_2 - \partial_y f_1 \quad \dots \text{ vorige Rechnung einsetzen } \dots$$

$$= 2(x^2+y^2)^{-a/2} - a(x^2+y^2)(x^2+y^2)^{-a/2-1} = (2-a)(x^2+y^2)^{-a/2}$$

2

3E. Für welche $a \in \mathbb{R}$ besitzt f ein Potential? Begründung?

Für gar kein a, auch nicht für $a = 2$: Das obige Arbeitsintegral verschwindet nie!

Achtung: Sie kennen dieses frappierende Beispiel aus der Vorlesung. Genau dann erlaubt ein Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$, mit $\operatorname{grad} F = f$, wenn das Vektorfeld f konservativ ist: Alle Arbeitsintegrale entlang geschlossener Wege sind null. Die bequeme lokale Rotationsbedingung, $\operatorname{rot} f = 0$, ist hingegen nur notwendig, keineswegs hinreichend! Genau dies illustriert diese Aufgabe, bekannt aus Vorlesung und Übung.

2

Aufgabe 4. *Integration und Integralsätze im Raum* (8 Punkte)

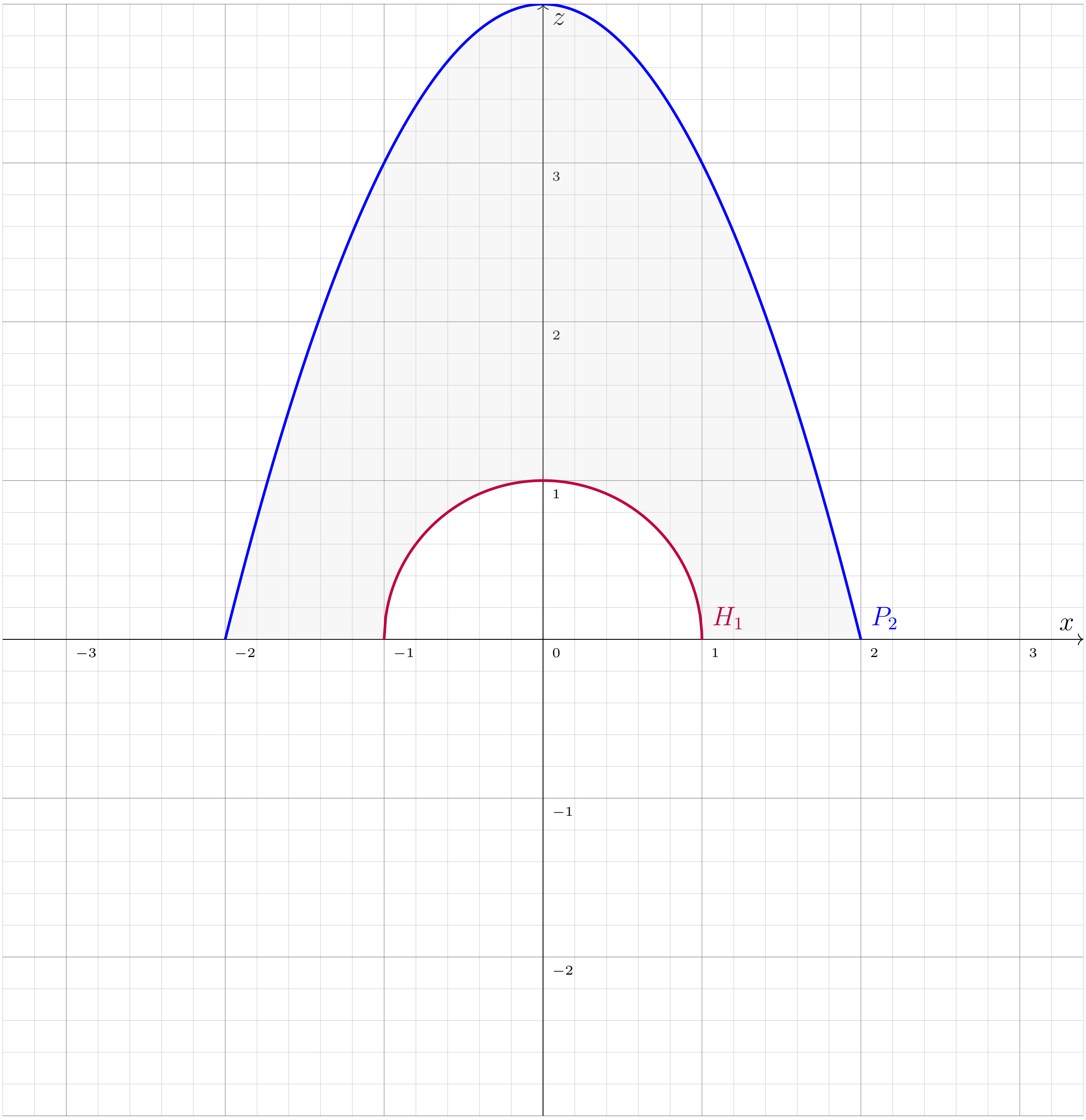
Wir untersuchen das Newton–Feld $f : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(v) = \frac{v}{|v|^3}, \quad \text{ausführlich} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Dazu betrachten wir die Hemisphäre H_r vom Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und das Paraboloid P_r:

$$H_r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= r^2 \\ z &\ge 0 \end{aligned} \right\}, \quad P_r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \le z = r^2 - x^2 - y^2 \right\}$$

4A. Skizzieren Sie den Schnitt von H_1 und P_2 mit der x–z–Ebene.



2

4B. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes f über die Hemisphäre H_r nach oben:
Hinweis: Es geht ohne Parametrisierung der Hemisphäre. Der Wert liegt im Intervall $[6,7]$.

$$\int_{H_r} f(s) \bullet \mathrm{d}S = \int_{H_r} f(s) \bullet n(s)\,|\mathrm{d}S| \qquad \text{Einheitsnormalenvektor } n(s) \ldots$$

$$= \int_{H_r} \frac{s}{|s|^3} \bullet \frac{s}{|s|}\,|\mathrm{d}S| \qquad \ldots \text{ kürzen}$$

$$= \frac{1}{r^2} \int_{H_r} 1|\mathrm{d}S| = \frac{1}{r^2} \cdot 2\pi r^2 = 2\pi \qquad \ldots \text{ Flächeninhalt } \mathrm{vol}_2(H_r)$$

Erläuterung: Sie erkennen und nutzen hier die besondere Symmetrie unserer Fläche $S = H_r$. Alternativ wählen Sie für S eine geeignete Parametrisierung Φ, hier etwa Kugelkoordinaten; die Rechnung ist analog, aber länger. In jedem Punkt $s \in S$ der Fläche hat der angeheftete Normalenvektor $\mathrm{d}S = \partial_1\Phi \times \partial_2\Phi = n(s)\,|\mathrm{d}S|$ eine Richtung $n(s) \in \mathbb{S}^2$, immer normiert und senkrecht zur Fläche S, und als Länge $|\mathrm{d}S| \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ den infinitesimalen Flächeninhalt.

Diese Zerlegung ist immer möglich, zwar meist unnötig, doch manchmal nützlich, so wie hier. Egal welchen Rechenweg Sie wählen, das Ergebnis ist glücklicherweise immer dasselbe. $\overline{}\,2$

4C. Berechnen Sie zu f die Divergenz $\mathrm{div}\, f$: *Hinweis:* Sie ist konstant.

$$\partial_x f_1(x,y,z) = \partial_x \big[x\,(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\big] \qquad \ldots \text{ Produktregel} \ldots \text{ Kettenregel} \ldots$$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$(\mathrm{div}\, f)(x,y,z) = \partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3 \qquad \ldots \text{ vorige Rechnung dreimal einsetzen} \ldots$$

$$= 3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} = 0$$

$\overline{}\,2$

4D. Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes f über das Paraboloid P_2 nach oben:

$$\int_{P_2} f(s) \bullet \mathrm{d}S = \int_{H_1} f(s) \bullet \mathrm{d}S \qquad \text{Satz von Gauß, dank } \mathrm{div}\, f = 0 \text{, siehe Skizze}$$

$$= 2\pi \qquad \text{dank obiger Rechnung}$$

Das Flussintegral über den Boden ist 0, denn hier ist das Vektorfeld f überall parallel.

Erläuterung: Es geht auch mit expliziter Parametrisierung, das ist aber unnötig mühsam. In dieser Aufgabe ist kein Körper K explizit vorgegeben. Zur Berechnung dieses Integrals konstruieren Sie K hilfsweise als den Bereich zwischen P_2 und H_1. Allgemein gelingt es genauso für P_r mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig und dazu H_ε mit $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ hinreichend klein. $\overline{}\,2$

Aufgabe 5. *Lineare Differentialgleichungssysteme* (9 Punkte)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t)$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5A. Berechnen Sie die Bildvektoren Av_1, Av_2, Av_3 in $\mathbb{R}^4$ und schreiben Sie jeden als Linearkombination von v_1, v_2, v_3. Wählen Sie v_4 so, dass $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ aus Hauptvektorketten zu A ist. Bestimmen Sie die zugehörige Jordan–Normalform J von A, also die darstellende Matrix $J = {}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}}$ von A bezüglich der Basis $\mathscr{B}$.

$$Av_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} +2v_1 \\ +0v_2 \\ +0v_3 \end{cases} \qquad \text{Eigenvektor!}}, \qquad Av_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} +1v_1 \\ +2v_2 \\ +0v_3 \end{cases} \qquad \text{Hauptvektor!}}$$

$$Av_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} +0v_1 \\ +0v_2 \\ +0v_3 \end{cases} \qquad \text{Eigenvektor!}}, \qquad v_4 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ Av_4 = 2v_4 \qquad \begin{matrix} \text{Eigenvektor!} \\ (\text{evtl. } v_4' = \alpha v_1 + \beta v_4) \end{matrix}}$$

$$J = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Jordan–Form!}}$$

5

5B. Bestimmen Sie die zugehörige Fundamentalmatrix $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{4\times 4} : t \mapsto W(t)$. Die $k$te Spalte ist die Lösung $w_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4 : t \mapsto w_k(t)$ mit Startvektor $w_k(0) = v_k$ und $w_k'(t) = A\,w_k(t)$.

$$W(t) = \boxed{\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t} \cdot t & 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} & -1 & 0 \\ 2\,e^{2t} & e^{2t} \cdot (1+2t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & e^{2t} \end{pmatrix}}$$

4

Aufgabe 6. *Partielle Differentialgleichungen* (7 Punkte)

Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}_{\geq 1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

$$\text{(P)} \begin{cases} x\,\partial_x u(x,y) - \dfrac{y}{1+\ln x}\,\partial_y u(x,y) = 2\,u(x,y) & \text{für alle } x > 1 \text{ und } y \in \mathbb{R}, \\ u(1,y) = \mathrm{e}^y & \text{für } x = 1 \text{ und alle } y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Hierzu sei $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$ die Charakteristik mit $\gamma(0) = (1, y_0)$ und $U(s) = u(X(s), Y(s))$.

6A. Stellen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem zu (P) auf:

$$X'(s) = X(s)\,, \qquad X(0) = 1,$$

$$Y'(s) = \boxed{-\frac{Y(s)}{1+\ln X(s)}}\,, \qquad Y(0) = y_0,$$

$$U'(s) = \boxed{2U(s)}\,, \qquad U(0) = \mathrm{e}^{y_0}.$$

2

6B. Lösen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem:

$$X(s) = \mathrm{e}^s,$$

$$Y(s) = \boxed{\frac{y_0}{1+s}}\,,$$

$$U(s) = \boxed{\mathrm{e}^{y_0+2s}}\,.$$

2

6C. Bestimmen Sie zu $(x,y) \in \mathbb{R}_{\geq 1} \times \mathbb{R}$ die Werte s und y_0 so, dass $\gamma(s) = (x,y)$ gilt:

$$s = \boxed{\ln x}\,, \qquad y_0 = \boxed{y(1+\ln x)}\,.$$

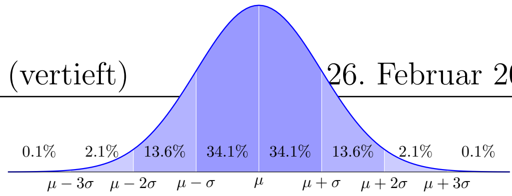
2

6D. Geben Sie die Lösung u von (P) an. *Tipp zur Probe:* Im Punkt $(2,1)$ gilt $u(2,1) = 8\mathrm{e}$.

$u(x,y) = U(s) = \mathrm{e}^y x^{y+2} = x^2(\mathrm{e}x)^y$ Machen Sie die Probe!

Erfolgreiche Probe zeigt die Existenz einer Lösung. Unsere Herleitung zeigt die Eindeutigkeit.

1



Aufgabe 7. *Wahrscheinlichkeit* (12 Punkte)

7A. Sie wiederholen 250 000 mal unabhängig ein Experiment mit Trefferwahrscheinlichkeit 10%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p erhalten Sie höchstens 25 120 Treffer? (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

$\mu = 250\,000 \cdot 0.1 = 25\,000$ — Erwartung zu $B(n,t)$, $n = 250\,000$, $t = 0.1$

$\sigma^2 = 25\,000 \cdot 0.9 = 22\,500, \quad \sigma = 150$ — Varianz und Streuung zu $B(n,t)$

$p \approx \int_{-\infty}^{\beta} \varphi(t)\,\mathrm{d}t, \quad \beta = 120.5/150 = 0.803$ — Lokaler Grenzwertsatz, Stetigkeitskorrektur

$\approx 0.50 + 0.29 = 0.79 = 79\%$ — Ablesen aus der Tabelle

Erläuterung: Die exakte Verteilung ist binomial, $B(n,t)$ mit $n = 250\,000$ und $t = 0.1$. Die exakte Wkt ist somit $p = \sum_{k=0}^{25120} B(n,t)(k)$, doch die Summation ist allzu mühsam. Als gute Näherung nutzen wir die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ dank lokalem Grenzwertsatz. Die Vorlesung erklärt Ihnen dazu hilfreiche Fehlerschranken, diese werden hier nicht gefragt.

Fun fact: Ohne Stetigkeitskorrektur erhalten Sie $\beta = 120/\sigma \approx 0.8$; das ist etwas ungenauer, der Unterschied verschwindet glücklicherweise in der Rundung. Alles wird gut.

/3

7B. Sie wiederholen 1000 mal ein Experiment mit Trefferquote 99.88% (zufällig, unabhängig). Mit welcher Wahrscheinlichkeit q erhalten Sie mindestens 999 Treffer? (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

$\mu = 1000 \cdot 0.12\% = 1.2$ — Erwartungswert für die Anzahl der Nicht-Treffer / Nieten

$q \approx \left[\frac{\mu^0}{0!} + \frac{\mu^1}{1!}\right] \mathrm{e}^{-\mu}$ — Näherung durch die Poisson–Verteilung $P(\mu)$

$\approx 2.2 \cdot 0.301 = 0.6622 \approx 66\%$ — Einsetzen und ausrechnen

Erläuterung: Die exakte Verteilung ist binomial, $B(n,t)$ mit $n = 1000$ und $t = 0.0012$. Im Gegensatz zur vorigen Aufgabe nutzen wir als Näherung hier Poissons Gesetz der kleinen Zahlen. Der exakte Wert ist $q = 0.66258\ldots$, die Poisson–Näherung ist wie erwartet sehr gut. Die Vorlesung erklärt Ihnen dazu hilfreiche Fehlerschranken, diese werden hier nicht gefragt.

Fun fact: Es gibt hier keinerlei Grund, den lokalen Grenzwertsatz zu nutzen. Wenn Sie es dennoch tun, finden Sie $q \approx 61\%$. Diese Näherung ist allzu grob und hier nicht gut genug.

/3

7C. Sie würfeln viermal mit einem fairen, sechsseitigen Würfel. Mit welcher Wkt r erhalten Sie vier verschiedene Zahlen? (Antworten als gekürzter Bruch)

$$r = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5}{18}$$

Erläuterung: Sie kennen diese Rechnung von Kollisionswkten vom Geburtstagsparadox. Hier berechnen und vergleichen wir diese Wkt mal explizit ohne Näherung.

2

7D. Von 73 äußerlich gleichen, sechsseitigen Würfeln sind 72 fair, doch einer ist gezinkt und würfelt immer die 6. Sie wählen zufällig einen dieser 73 Würfel und würfeln n mal unabhängig. Wenn alle n Würfe die 6 ergeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit w_n ist Ihr Würfel der gezinkte? Berechnen Sie allgemein w_n und speziell die Werte w_2, w_3 (Letzere als gekürzte Brüche).

Bezeichnung: Wir betrachten das Ereignis $F :=$ „Ihr Würfel ist fair" und komplementär dazu $G := \overline{F} =$ „Ihr Würfel ist gezinkt" sowie $S_n :=$ „Alle n Testwürfe ergeben die 6".
Daten: Gegeben ist $\mathbf{P}(G) = 1/73$ und $\mathbf{P}(F) = 72/73$ sowie $\mathbf{P}(S_n|G) = 1$ und $\mathbf{P}(S_n|F) = 1/6^n$.
Rechnung:

$$w_n = \mathbf{P}(G|S_n) = \frac{\mathbf{P}(G \cap S_n)}{\mathbf{P}(S_n)} = \frac{\mathbf{P}(S_n|G) \cdot \mathbf{P}(G)}{\mathbf{P}(S_n|G) \cdot \mathbf{P}(G) + \mathbf{P}(S_n|F) \cdot \mathbf{P}(F)} \qquad \text{dank Bayes}$$

$$= \frac{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{73}}{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{73} + \frac{1}{6^n} \cdot \frac{72}{73}} = \frac{1}{1 + \frac{72}{6^n}} \qquad \text{Daten einsetzen und vereinfachen / kürzen}$$

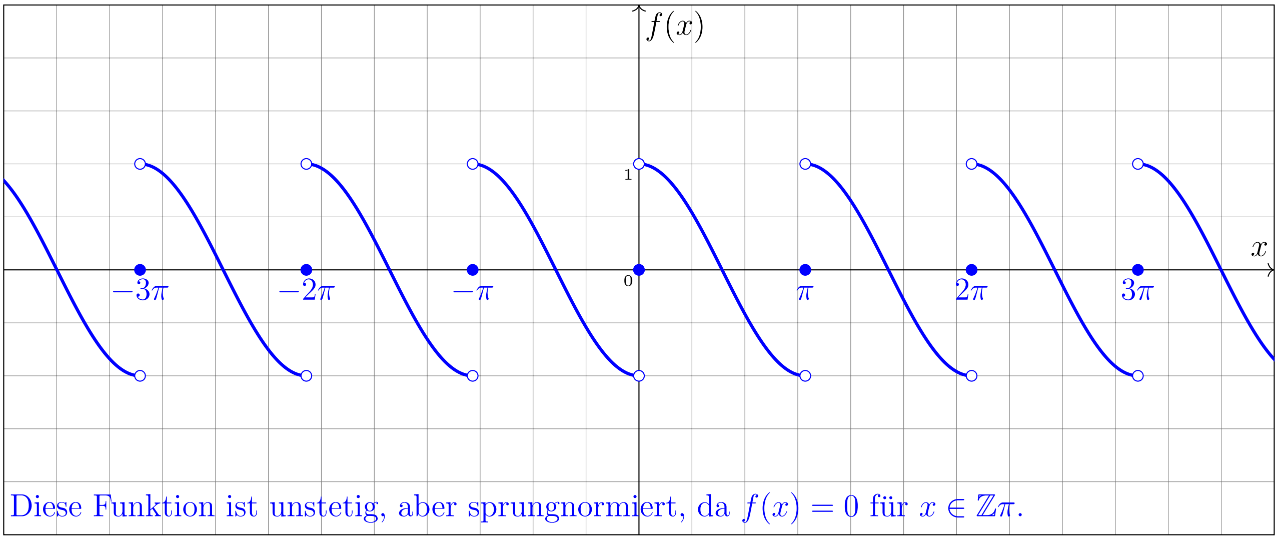
Erläuterung: Dies ist die vertraute Formel von Bayes. Der entscheidende Schritt ist hier, wie so oft, zunächst die gegebenen Daten aufzuschreiben. Die Rechnung ist dann erfreulich leicht. Schön und nützlich: Die Sprache der Mathematik hilft zur Klarheit.

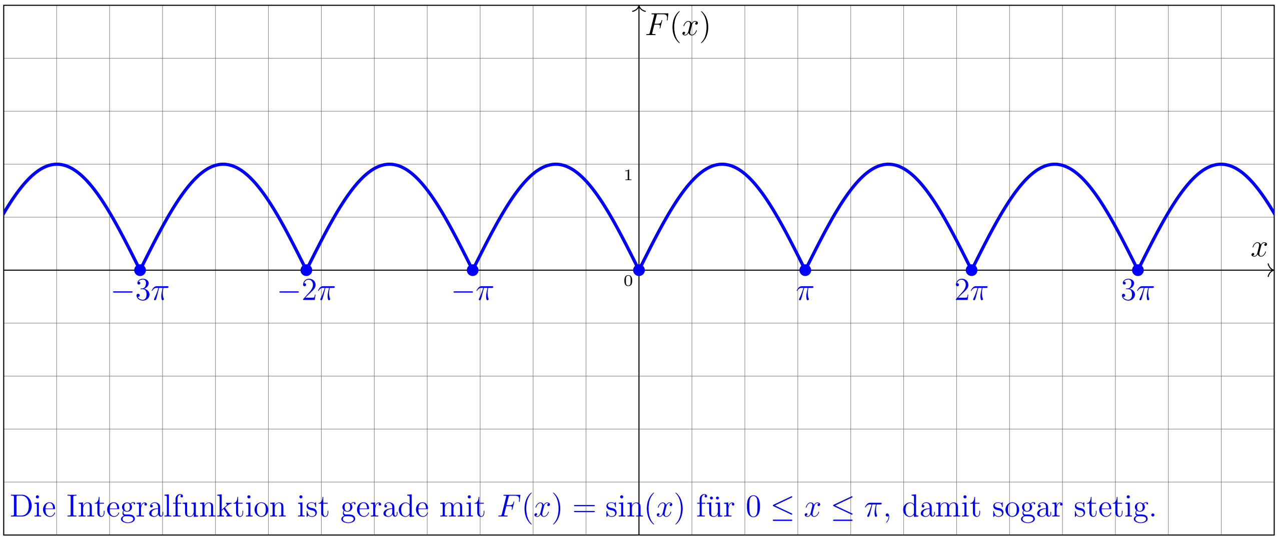
Fun fact: Der Vergleich der konkreten Zahlen ist lehrreich, vielleicht sogar erstaunlich. Die Werte wurden dabei mit Bedacht so gewählt, dass die Rechnung für $n = 1, 2, 3$ leicht aufgeht. Viele würden vermutlich schon bei zwei Sechsen an den gezinkten Würfel glauben, das ist aber mit Wkt $w_2 = 1/3$ noch recht unsicher. Selbst drei Sechsen erhöhen die Wkt nur auf $w_3 = 3/4$. Die Wkten $w_4 = 18/19 \approx 95\%$ und $w_5 = 108/109 \approx 99\%$ liegen recht nahe bei 1.

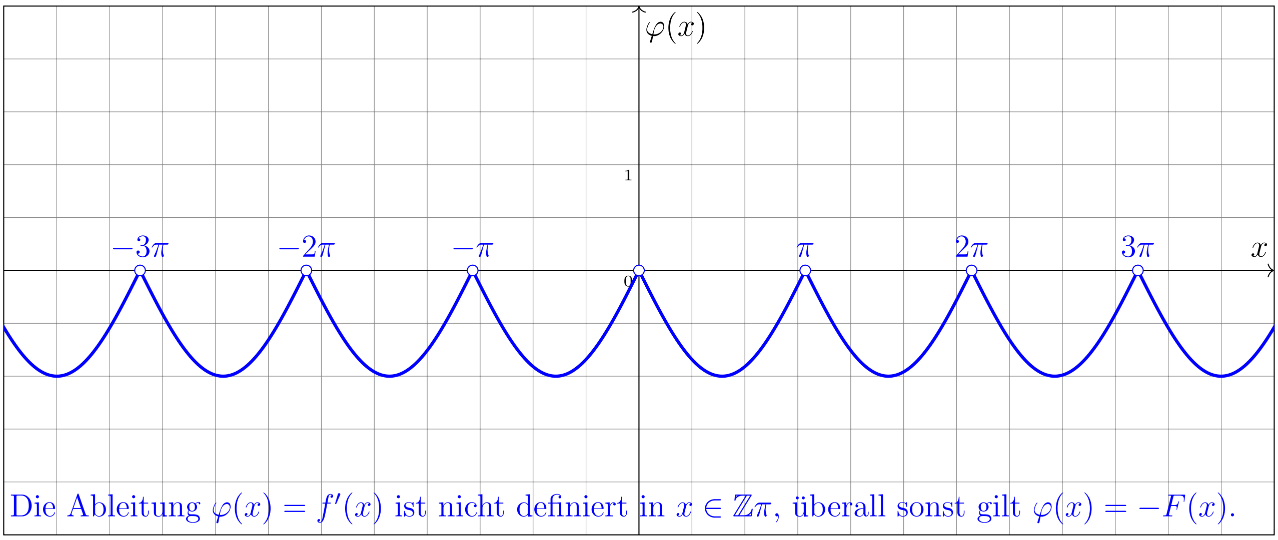
Konkrete Zahlenwerte: $w_0 = \frac{1}{73}$ $w_1 = \frac{1}{13}$ $w_2 = \boxed{\frac{1}{3}}$ $w_3 = \boxed{\frac{3}{4}}$ 4

Aufgabe 8. *Fourier–Reihen* (14 Punkte)

8A. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade und 2π–periodisch mit $f(x) = \cos(x)$ für $0 < x < \pi$. Skizzieren Sie f sowie die Integralfunktion F mit $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ und die Ableitung $\varphi = f'$ auf $[-12, 12]$.







3

8B. Bestimmen Sie zu f die Koeffizienten der Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$.

Hinweis: Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(s)\cos(t) = \frac{1}{2}[\sin(s+t) + \sin(s-t)]$.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{x=0}^{\pi} \cos(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \qquad \text{gerader Integrand!}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{x=0}^{\pi} \sin((k+1)x) + \sin((k-1)x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{dank Hinweis, hier schon } b_1 = 0$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{\cos((k+1)x)}{k+1} - \frac{\cos((k-1)x)}{k-1}\Big]_{x=0}^{\pi} \qquad \text{für } k \ge 2 \text{, für } k = 1 \text{ siehe unten}$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} + \frac{1-(-1)^{k-1}}{k-1}\Big] \qquad \text{einsetzen und vereinfachen}$$

$$= \frac{2k}{\pi(k^2-1)}\Big[1-(-1)^{k+1}\Big] \qquad \text{zusammenfassen}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4k}{\pi(k^2-1)} & \text{für } k \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases} \qquad \text{ausrechnen wie immer}$$

Nachtrag: In der zweiten Zeile sehen wir $b_1 = 0$, die letzte Formel gilt also auch für $k = 1$. Ausführlich finden wir $\pi b_1 = \int_{x=0}^{\pi} \sin(2x) + \sin(0x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(2x)/2]_{x=0}^{\pi} = 0$.

Erläuterung: Wie in der freundlichen Aufgabenstellung angegeben, gilt hier $a_k = 0$, da die Funktion f ungerade ist. Zur Vereinfachung wurde nach diesen Koeffizienten nicht gefragt.

Die grundlegenden Additionstheoreme haben Sie vermutlich in Ihrer Formelsammlung. Um die Rechnung für Sie möglichst flüssig zu gestalten, haben wir die relevante Gleichung explizit angegeben, auch als Hinweis und Zuspruch, dass Sie auf dem richtigen Weg sind. Der Rest ist sorgsames Rechnen, wie zuvor in zahlreichen Beispielen gesehen und geübt.

5

8C. Bestimmen Sie zur Ableitung φ die Fourier–Reihe $\varphi(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx)$.

Für $k \ge 1$ gilt:

$$\alpha_k = -A_k = b_k/k = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi(k^2-1)} & \text{für } k \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Integration (!) von f zu $F = -\varphi$

Erläuterung: Dank Integrationsregel ist die Rechnung leicht. Naive Ableitung wäre fatal!

Nochmal zur Betonung, wie schon in Vorlesung und Übung: Integrieren gelingt termweise, wie hier zu sehen, doch beim Ableiten ist Vorsicht geboten, das wäre hier falsch!

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{x=0}^{\pi} -\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\Big[\cos(x)\Big]_{x=0}^{\pi} = -\frac{4}{\pi}$$

Erläuterung: Bei der Integration wird der nullte Koeffizient / die Integrationskonstante separat berechnet. Hier hilft Ihnen die Skizze, explizite Rechnung ist ebenso gut möglich.

3

8D. Bestimmen Sie den exakten Wert der Reihe $S := \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{4\ell^2}{(4\ell^2-1)^2} \in [0.61, 0.62]$.
Hinweis: Energiegleichung nach Parseval.

$$\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{16 \cdot 4\ell^2}{\pi^2(4\ell^2-1)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(x)\big|^2\,\mathrm{d}x$$ Energiegleichung für f, mit $k = 2\ell$ gerade

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$ Graphik / Formelsammlung / Stammfunktion / ...

$S = \pi^2/16 \approx 0.61685\ldots$ Auflösen nach der gesuchten Reihe

Erläuterung: Wie kommen Sie selbst auf diese Lösung? Der freundliche Hinweis hilft.

Er wäre eigentlich nicht nötig: Ein Vergleich der gesuchten Reihe mit den oben berechneten Koeffizienten führt (quadriert!) direkt zur Energiegleichung. Alternativ kann man die obigen Fourier-Reihen in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ auswerten, das passt aber nicht zur gefragten Reihe.

Wie so oft produziert die Fourier–Theorie wunderbare Reihengrenzwerte, die andernfalls kaum zu berechnen wären. Mit den richtigen Werkzeugen rechnen Sie sicher und effizient.

3