Modulklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Bitte füllen Sie Folgendes aus.

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Name des Tutors:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise.**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4
- Mobiltelefone und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die Kästen für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind voneinander unabhängig.

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

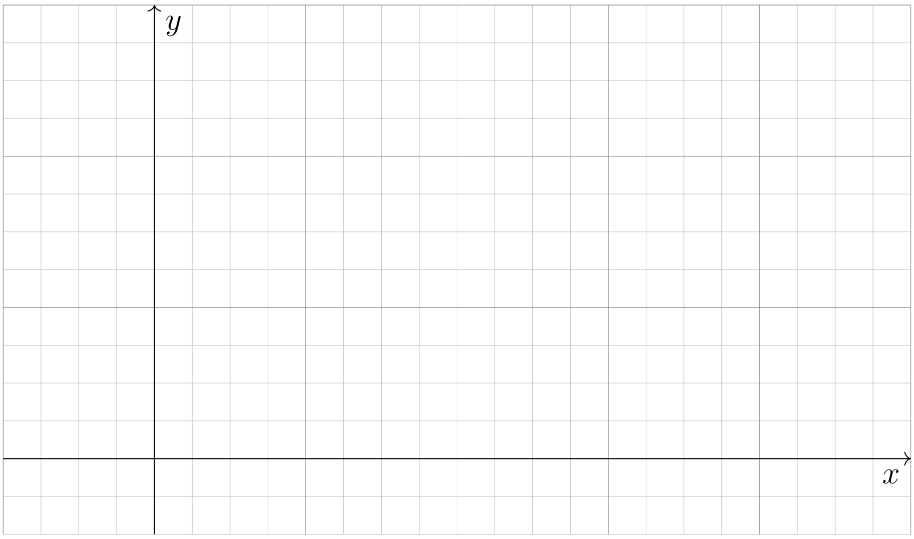
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/60

Aufgabe 1. *Integration und Integralsätze in der Ebene* (*10 Punkte*)

Betrachten Sie das folgende Integral:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{x}{y^5+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

1A. Skizzieren Sie den Integrationsbereich in der xy-Ebene.



/2

1B. Beschreiben Sie den Integrationsbereich als Normalbereich in x-Richtung:

$\boxed{} \leq y \leq \boxed{}$ und $\boxed{} \leq x \leq \boxed{}$

/2

1C. Bestimmen Sie das Integral.

/4

1D. Es seien das ebene Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = (-2y, 3x)$ und die Kurve $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9\}$ gegeben. Berechnen Sie das Flussintegral $\int_\Gamma f \times \mathrm{d}\Gamma$.

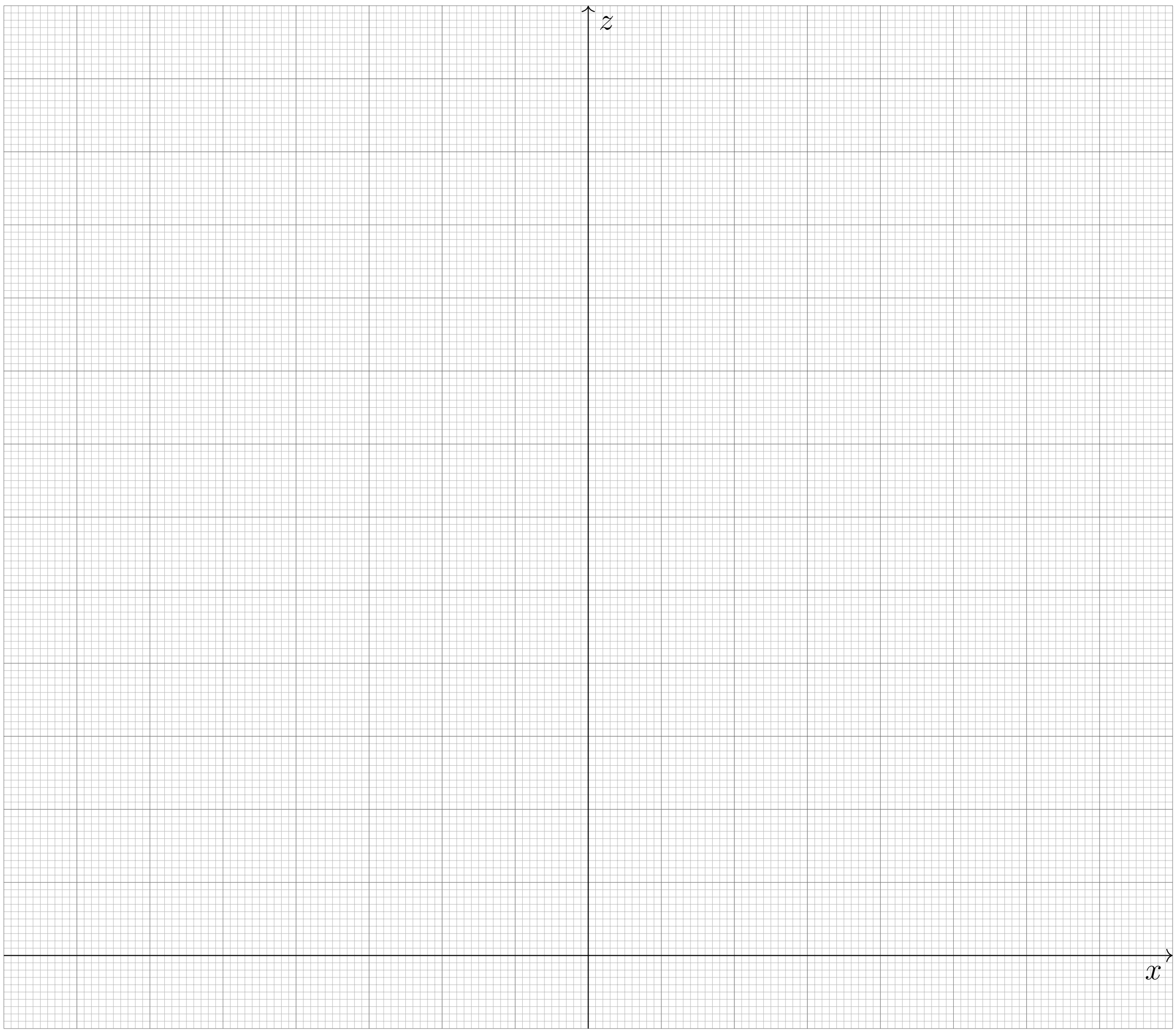
$\overline{}$
2

Aufgabe 2. *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze* (*10 Punkte*)

Der Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 12 - x^2 - y^2 \right\} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 2x + e^y \\ 2y \end{pmatrix}.$$

2A. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der x–z–Ebene, also mit der Ebene $y = 0$:



1

Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten um die z-Achse:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \le \rho \le \boxed{\qquad\qquad} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ \boxed{\qquad\qquad} \le z \le \boxed{\qquad\qquad} \end{cases}$$

3

2B. Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung das Volumen des Körpers K:

$\mathrm{vol}_3(K) =$

2

2C. Die Randfläche ∂K besteht aus dem Boden B mit $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ und dem Deckel D mit $z = 12 - x^2 - y^2$.

Wir parametrisieren D durch $\Phi_D : [0,2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\Phi_D \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ 12 - \rho^2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \Phi_D}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi_D}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -2\rho \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

1

Berechnen Sie den Fluss von $F = \mathrm{rot}(f)$ durch D nach außen.

$\int_D F \cdot dS =$

2

Sei $\Gamma = \partial D$ orientiert gegen den Uhrzeigersinn. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\Gamma f \cdot \mathrm{d}\Gamma$.

$\int_\Gamma f \cdot d\Gamma =$

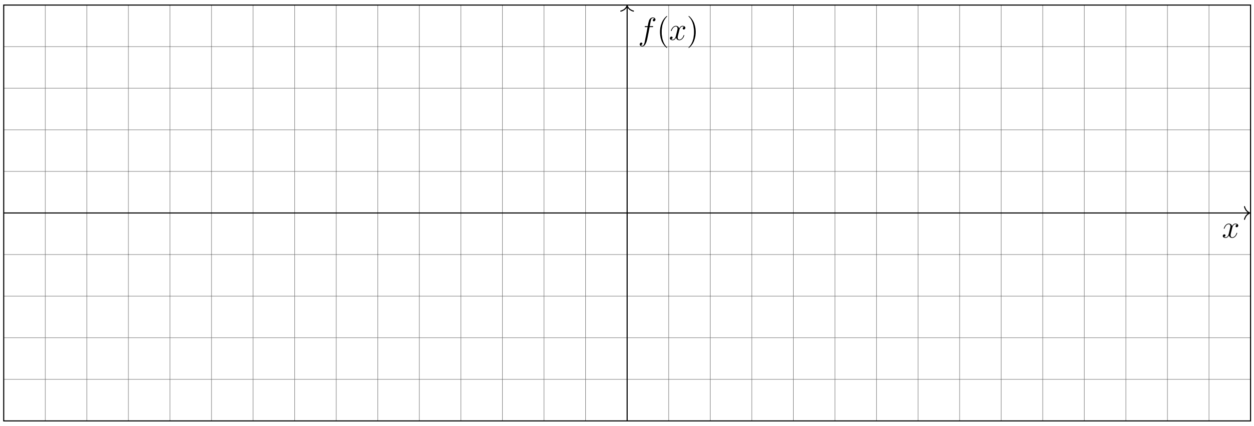
1

Aufgabe 3. *Fourier-Reihen* (*10 Punkte*)

Wir definieren eine 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \frac{x}{2} \text{ für } x \in (0, 2\pi].$$

3A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$.



2

3B. Berechnen Sie die Koeffizienten a_k und b_k der reellen Fourier–Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \right).$$

5

3C. Seien c_k die Koeffizienten der komplexen Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.

Berechnen Sie c_{-k}, falls $k \in \mathbb{Z}_{>0}$.

$$c_{-k} = \boxed{}.$$

1

3D. Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier–Reihe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von f in den Punkten $x = -3\pi$ und $x = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(-3\pi) = \boxed{}, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(0) = \boxed{}.$$

2

Aufgabe 4. *Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung (10 Punkte)*

Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung

$$(2x^2 - x)y'(x) + y(x) = 2x \quad \text{für } x > \frac{1}{2}.$$

4A. Diese Gleichung hat die Form $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$, wobei

$a(x) = \boxed{}$.

$b(x) = \boxed{}$.

/2

4B. Lösen Sie für $x > \frac{1}{2}$ das Anfangswertproblem

$$(2x^2 - x)y'(x) + y(x) = 2x \ \text{ mit } y(1) = 2.$$

/8

Aufgabe 5. *Differentialgleichungssystem* (*10 Punkte*)

Wir betrachten das folgende DG-System

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) \\ y_2'(t) = y_2(t) - y_3(t) \\ y_3'(t) = y_2(t) + y_3(t) \end{cases} .$$

5A. In Matrixschreibweise gilt $y'(t) = Ay(t)$ mit $A = \boxed{}$.

1

Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom p von A und seine Faktorisierung in Polynome 1. Ordnung über $\mathbb{C}$:

$p(\lambda) = \boxed{}$.

2

5B. Berechnen Sie die komplexe Eigenwerte und komplexe Eigenvektoren der Matrix A.

Eigenwert $\lambda_1 = \boxed{}$ mit Eigenvektor $v_1 = \boxed{}$,

Eigenwert $\lambda_2 = \boxed{}$ mit Eigenvektor $v_2 = \boxed{}$,

Eigenwert $\lambda_3 = \boxed{}$ mit Eigenvektor $v_3 = \boxed{}$.

3

5C. Eine komplexe Fundamentalmatrix des DG-Systems ist

$W(t) = \boxed{}$.

1

5D. Bestimmen Sie eine reelle Fundamentalsystem des DG-Systems.

3

Aufgabe 6. *Wahrscheinlichkeitstheorie* (*10 Punkte*)

6A. Es werden zwei verschiedene faire Würfel geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$, $P(B)$, und $P(A \cap B)$ für die Ereignisse

$A = \{\text{Es fällt mindestens eine Sechs}\}$ und $B = \{\text{Die Würfel haben die gleiche Augenzahl}\}$.

Entscheiden Sie (mit Begründung), ob A und B stochastisch unabhängig sind.

/4

6B. Für eine Klausur sind $n = 400$ Studierenden angemeldet. Jeder davon tritt mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.8$ tatsächlich an. (Wir nehmen dabei stochastische Unabhängigkeit an.) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass 360 Plätze reichen!

/4

6C. Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{für } 1 \leq x < 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $\int_{-\infty}^{x} f(s)\, \mathrm{d}s$ von X und berechnen Sie $P(X > 2)$.

2