Modulklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Bitte füllen Sie Folgendes aus.

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Name des Tutors: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise.**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4
- Mobiltelefone und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die Kästen für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander unabhängig.

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

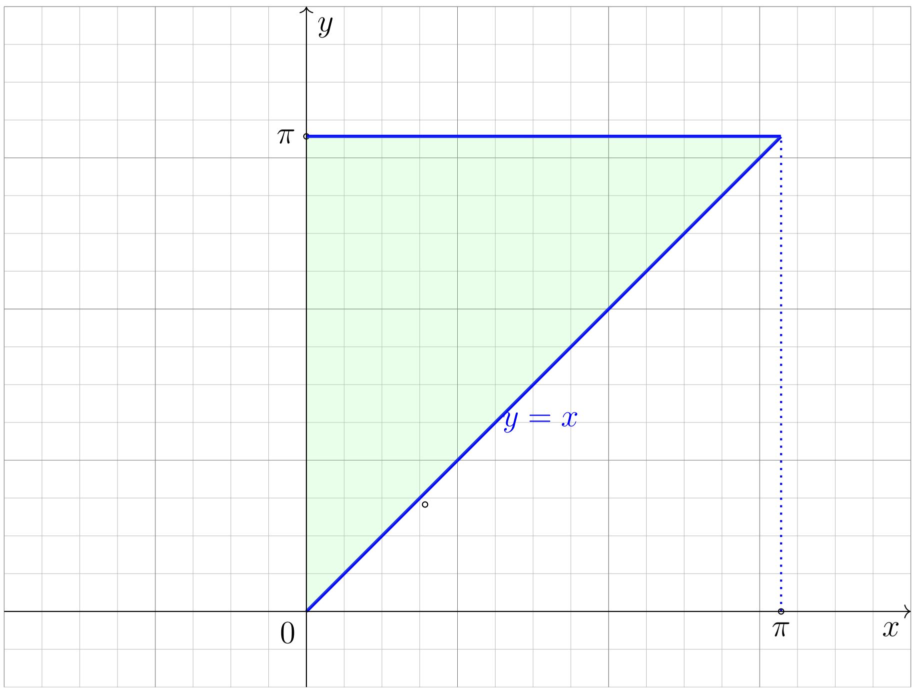
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/60

Aufgabe 1. *Integration und Integralsätze in der Ebene (10 Punkte)*

Betrachten Sie das folgende Integral:

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \sin(y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

1A. Skizzieren Sie den Integrationsbereich in der xy-Ebene.



2

1B. Beschreiben Sie den Integrationsbereich als Normalbereich in x-Richtung:

$\boxed{\;0\;} \leq y \leq \boxed{\;\pi\;}$ und $\boxed{\;0\;} \leq x \leq \boxed{\;y\;}$

2

1C. Bestimmen Sie das Integral.

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \int_x^\pi \sin(y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \int_0^y \sin(y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{[2 Punkte]}\\
&= \int_0^\pi y\sin(y^2)\,\mathrm{d}y = \Big[-\frac{1}{2}\cos(y^2)\Big]_{y=0}^{y=\pi} \quad \text{[1 Punkt]}\\
&= -\frac{1}{2}\cos(\pi^2) + \frac{1}{2} \qquad \Big(\text{Auch richtig: } \frac{1}{2}\sin(\pi^2).\Big) \quad \text{[1 Punkt]}
\end{aligned}$$

4

1D. Es seien das ebene Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = (x,y)$ und die Kurve $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ gegeben. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\Gamma f \cdot \mathrm{d}\Gamma$.

Eine Parametrisierung des Kreises ist

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \Gamma \quad \gamma(t) = (2\cos(t), 2\sin(t)) \quad \text{mit} \quad \gamma'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t)).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f \cdot \mathrm{d}\Gamma &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= 0.\end{aligned}$$

Alternativ können Sie den Satz von Green benutzen: Aus $\operatorname{rot}(f) = 0$ folgt

$$\int_\Gamma f \cdot \mathrm{d}\Gamma = \int_D \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y) = 0$$

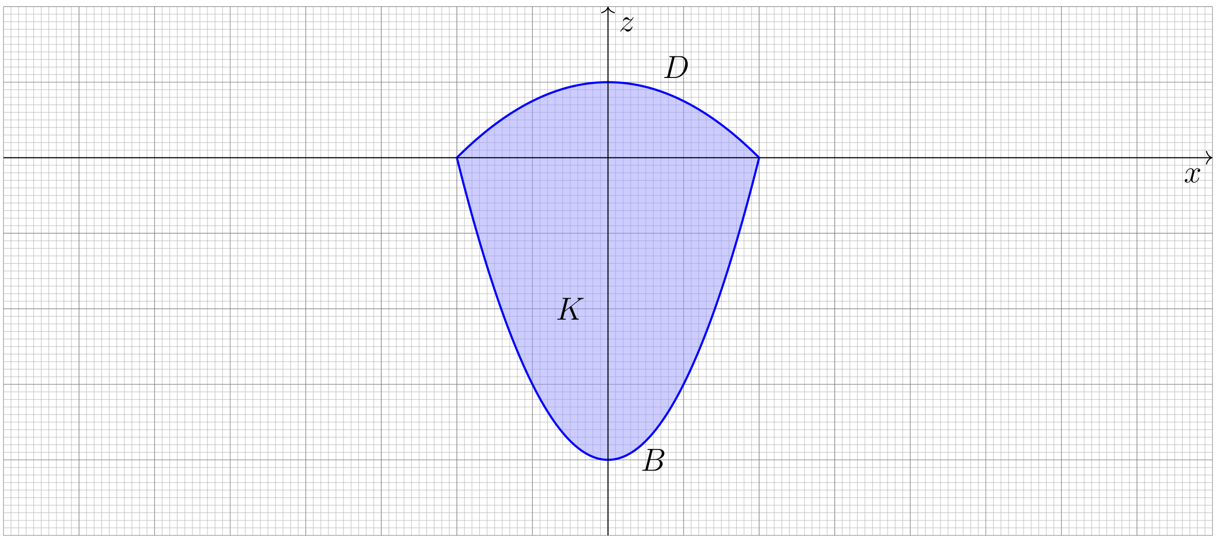
2

Aufgabe 2. *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze (10 Punkte)*

Der Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 - 4 \le z \le 1 - \tfrac{x^2}{4} - \tfrac{y^2}{4} \right\} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -yz \\ xz \\ e^{-x^2-y^2} \end{pmatrix}.$$

2A. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der xz–Ebene (also mit der Ebene $y = 0$):



1

Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten um die z-Achse:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad 0 \le \rho \le \boxed{2}, \\ \boxed{\rho^2 - 4} \le z \le \boxed{1 - \rho^2/4} \end{cases}$$

3

2B. Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung das Volumen des Körpers K:

$$\mathrm{vol}_3(K) = \int_K 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\rho=0}^{2} \int_{z=\rho^2-4}^{1-\rho^2/4} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\rho$$ Transformationssatz anwenden [1 Punkt]

$$= 2\pi \int_{\rho=0}^{2} \rho(1 - \rho^2/4 - (\rho^2 - 4)) \,\mathrm{d}\rho = 2\pi \int_{\rho=0}^{2} (5\rho - \tfrac{5}{4}\rho^3) \,\mathrm{d}\rho$$ innere Integrale vereinfachen

$$= 2\pi \Big[\tfrac{5}{2}\rho^2 - \tfrac{5}{16}\rho^4 \Big]_{\rho=0}^{2} = 2\pi \Big[10 - 5 \Big] = 10\pi$$ Stammfunktion und Einsetzen [1 Punkt]

Erläuterung: Beim Transformationssatz die Funktionaldeterminante nicht vergessen!

2

2C. Die Randfläche ∂K besteht aus dem Boden B mit $z = x^2 + y^2 - 4$ und dem Deckel D mit $z = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}$. Wir parametrisieren B in Zylinderkoordinaten:

$$\Phi_B\begin{pmatrix}\rho\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\\ \rho^2-4\end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial\Phi_B}{\partial\rho} \times \frac{\partial\Phi_B}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 2\rho\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-\rho\sin\varphi\\ \rho\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-2\rho^2\cos\varphi\\ -2\rho^2\sin\varphi\\ \rho\end{pmatrix}}$$

1

Berechnen Sie mit Φ_B den Fluss des Vektorfeldes f durch B:

$$\int_{s\in B} f(s)\bullet \mathrm{d}S = \int_{\rho=0}^{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} f\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\\ \rho^2-4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\rho^2\cos\varphi\\ -2\rho^2\sin\varphi\\ \rho\end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho \quad \text{einsetzen und vereinfachen [1 Punkt]}$$

$$= \int_{\rho=0}^{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = 2\pi\int_{\rho=0}^{2}\rho\mathrm{e}^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = \pi\Big[-\mathrm{e}^{-\rho^2}\Big]_{\rho=0}^{2} \quad \text{Stammfunktion}$$

$$= \pi\Big[1-\mathrm{e}^{-4}\Big] \quad \text{Einsetzen [1 Punkt]}$$

Erläuterung: Das positive Vorzeichen des Integrals entspricht der Anschauung: Vektorfeld und Normalenvektor zeigen hier nach oben, also in den Körper K hinein. Das ist eine der beiden möglichen Orientierungen. Für den Gaußschen Integralsatz in der nächsten Frage benötigen wir die umgekehrte Orientierung. Beide unterscheiden sich nur im Vorzeichen.

2

Folgern Sie den Fluss des Vektorfeldes f aus dem Körper K durch den Deckel D nach oben:

$$\int_{s\in D} f(s)\bullet\mathrm{d}S = \boxed{\int_{s\in B} f(s)\bullet\mathrm{d}S + \int_K \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}K = \pi\Big[1-\mathrm{e}^{-4}\Big] \qquad \text{dank Gauß und } \operatorname{div} f = 0}$$

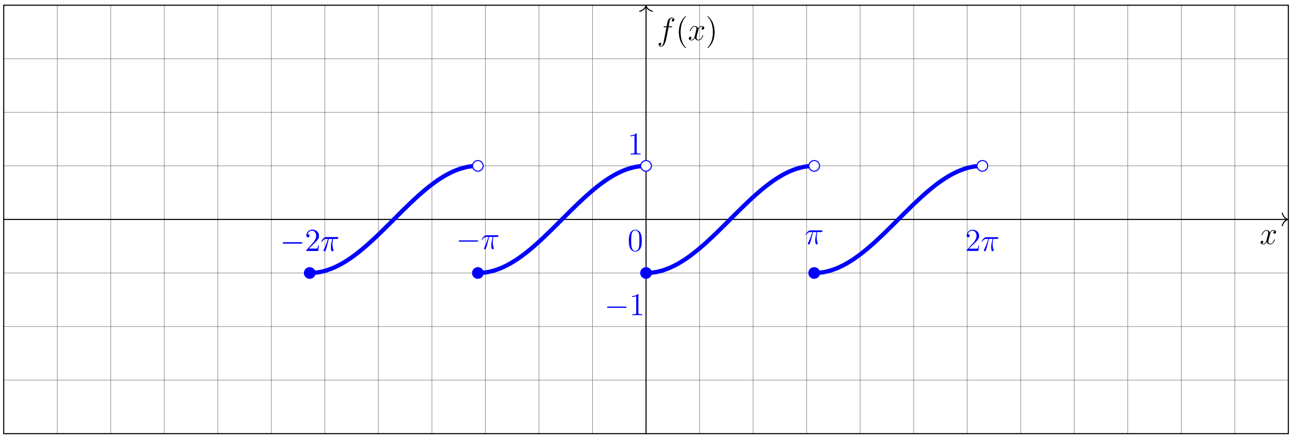
1

Aufgabe 3. *Fourier-Reihen* (*10 Punkte*)

Wir definieren eine ungerade 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = -\cos(x) \text{ für } x \in [0, \pi)\,.$$

3A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.



1 Punkt falls die Funktion 2π-periodisch ist

2

3B. Bestimmen Sie die Koeffizienten der reellen Fourier–Reihe von f.

(Hinweis: Die Formel $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$ könnte nützlich sein.) 5

(1) Weil $f(x)$ ungerade ist, gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. [2 Punkte]
(Alternativ: 1 Punkt für a_0 und 1 Punkt für a_n, $n \geq 1$).

(2) Die Koeffizienten b_n für f folgen durch einfache Integration sofort:

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(x)dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(x)dx = 0. \quad [1 \text{ Punkt}]$$

Für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(nx)dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin((n+1)x)+\sin((n-1)x)]dx = \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{(n+1)}}{n+1}+\frac{(-1)^{(n-1)}}{n-1}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\right)\right) \quad [1 \text{ Punkt}] \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{(n+1)}-1}{n+1}+\frac{(-1)^{(n+1)}-1}{n-1}\right) \\
&= -\frac{2n\,(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-1)} \quad [1 \text{ Punkt}] \quad \left(= \begin{cases} -\dfrac{4n}{\pi(n^2-1)}, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade}\end{cases}\right).
\end{aligned}$$

3C. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier-Reihe an einer geeigneten Stelle den Wert

$$a = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{8l(-1)^{l+1}}{\pi(4l^2-1)}$$

Auswertung in $x = \boxed{\dfrac{\pi}{4}}$ ergibt $a = \boxed{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{8}{3\pi}}$. 2

Diese Aufgabe ist falsch und die Korrekte Ergebnis braucht eine andere Fourier Reihe.
Alle bekommen 2 Punkte.

Es gilt

$$f(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2n\,(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-1)} \sin(nx) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{-8l}{\pi(4l^2-1)} \sin(2lx)\,.$$

Auswertung in $x = \frac{\pi}{4}$ der Fourier-Reihe ergibt

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = f(\frac{\pi}{4}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{-8l}{\pi(4l^2-1)}(-1)^l = \frac{8}{3\pi} + a.$$

Es stimmt nicht, dass $\sin(2l\frac{\pi}{4}) = (-1)^l$ ist. Deswegen ist diese Lösung nicht korrekt.

3D. Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier–Reihe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von f in dem Punkt $x = 3\pi$:

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(3\pi) = \boxed{0}$. dank Dirichlet-Kriterium

$\frac{}{1}$

Aufgabe 4. *Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (10 Punkte)*

4A. Betrachten Sie die folgende homogene lineare Differentialgleichung

$$y^{(5)}(t) + 8y'''(t) + 16y'(t) = 0.$$

Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom p und seine Faktorisierung in Polynome 1. Ordnung über $\mathbb{C}$:

$$p(x) = \boxed{x^5 + 8x^3 + 16x = x(x+2i)^2(x-2i)^2.}\,.$$

2

[2 Punkte: 1 Punkt für das charakteristische Polynom p und 1 Punkt für die Faktorisierung.]

Wir faktorisieren zunächst $x^5 + 8x^3 + 16x = x(x^4 + 8x^2 + 16) = x(x^2+4)^2$. Es bleibt das quadratische Polynom $x^2 + 4$ mit Nullstellen $-2i$ und $2i$ übrig.

4B. Folgern Sie die allgemeine komplexe Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der oben genannten Differentialgleichung.

$$y(t) = \boxed{c_1 + c_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} + c_3 t\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} + c_4 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} + c_5 t\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}}\,.$$

2

Das Fundamentalsystem ist $F := \{1, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}, t\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}, t\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\}$.
[2 Punkte, wenn das Fundamental System richtig ist, 1 Punkt, wenn mindestens drei aber nicht alle Elements von F richtig sind, sonst kein Punkt.]

4C. Finden Sie für jede der folgenden linearen Differentialgleichungen eine partikuläre Lösung.

$$y^{(5)}(t) + 8y'''(t) + 16y'(t) = -32 \quad (1)$$

$$y^{(5)}(t) + 8y'''(t) + 16y'(t) = 9e^{-it} \quad (2)$$

$$y^{(5)}(t) + 8y'''(t) + 16y'(t) = -32 + 9e^{-it} \quad (3)$$

(1): Wir benutzen den Ansatz $y(t) = k_1 t$ (Resonanz: 0 ist eine Nullstelle vom Grad 1 des charakteristischen Polynoms). [1 Punkt]
Es ist $y'(t) = k_1, y''(t) = y'''(t) = y''''(t) = y^{(5)}(t) = 0$. Einsetzen liefert $16k_1 = -32$, also muss $k_1 = -2$ sein. [1 Punkt]

(2): Wir benutzen den Ansatz $y(t) = k_2 e^{-it}$ (Resonanz: -1 ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms). [1 Punkt]
Es ist $y'(t) = -ik_2 e^{-it}$, $y''(t) = -k_2 e^{-it}$, $y'''(t) = ik_2 e^{-it}$, $y''''(t) = k_2 e^{-it}$, $y^{(5)}(t) = -ik_2 e^{-it}$.
[1 Punkt, wenn alle Ableitungen richtig sind.]
Einsetzen liefert $-9ik_2 = 9$, also muss $k_2 = i$ sein. [1 Punkt]

(3): Wir nehmen die partikuläre Lösung von (1) plus die partikuläre Lösung von (2). [1 Punkt]

6

Aufgabe 5. *Differentialgleichungssystem (10 Punkte)*

Wir betrachten das folgende DG-System

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) + \mathrm{e}^{2t} \\ y_2'(t) = -2y_1(t) + 3y_2(t) \end{cases}.$$

5A. In Matrixschreibweise gilt $y'(t) = Ay(t) + b(t)$ mit

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}} \quad \text{und} \quad b(t) = \boxed{\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

2

5B. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

Eigenwert $\lambda_1 = \boxed{1}$ mit Eigenvektor $v = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$,

Eigenwert $\lambda_2 = \boxed{2}$ mit Eigenvektor $w = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$,

Das charakteristisches Polynom der Matrix A ist $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$. 1

5C. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen DG-Systems.

Eine Fundamentalmatrix des homogenen DG-Systems ist

$$W(t) = \boxed{\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{t} & 2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}} \quad \text{und die homogene Lösung ist} \quad y_h(t) = \boxed{c_1 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ 2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}}.$$

2

Alle Lösungen des homogenes DG-Systems haben folgende Gestalt ($c_1, c_2 \in \mathbb{C}$):

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \mathrm{e}^{t} v + c_2 \mathrm{e}^{2t} w.$$

5D. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen DG-Systems.

Für die Fundamentalmatrix $W(t)$ gilt:

$$W(t)^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-t} & -\mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}}.$$

Damit $c(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{t} \\ -t \end{pmatrix}}$.

Die partikuläre Lösung ergibt sich als $y_p(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 2e^{2t} - te^{2t} \\ 2e^{2t} - 2te^{2t} \end{pmatrix}}$.

3

Es gilt: $y_p(t) = W(t)c(t)$, wobei $c(t) = \int_0^t W(\tau)^{-1} b(\tau) d\tau$.

5E. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems.

$y_1(t) = \boxed{c_1 e^t + c_2 e^{2t} + 2e^{2t} - te^{2t}}$ und $y_2(t) = \boxed{c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} + 2e^{2t} - 2te^{2t}}$.

2

Es gilt $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = y_h(t) + y_p(t)$.

Aufgabe 6. *Wahrscheinlichkeitstheorie (10 Punkte)*

6A. In einem Schublade liegen 8 schwarze, 6 blaue und 4 rote Socken durcheinander. Wenn Sie zweimal blind in die Schublade greifen, mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten Sie zwei gleichfarbige Socken?

Die Wahrscheinlichkeiten, dass die erste gezogene Socke schwarz, blau oder rot ist, sind $P(B_1) = 8/18 = 4/9$, $P(B_2) = 6/18 = 1/3$, $P(B_3) = 4/18 = 2/9$. [1 Punkt]

Die Wahrscheinlichkeiten, dass bei der ersten gewählten Socke die zweite die gleiche Farbe hat, sind
$P(A|B_1) = 7/17$, $P(A|B_2) = 5/17$, $P(A|B_3) = 3/17$. [1 Punkt]

Die totale Wahrscheinlichkeit $P(A)$ ist

$$\Longrightarrow P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3) \quad \text{[1 Punkt]}$$

$$= \frac{7}{17} \cdot \frac{8}{18} + \frac{5}{17} \cdot \frac{6}{18} + \frac{3}{17} \cdot \frac{4}{18} = \frac{98}{17 \cdot 18} \approx 32\% \quad \text{[1 Punkt]}$$

4

6B. Man würfelt $n = 18000$ Mal mit einem fairen Würfel. Sei S die Häufigkeit der Augenzahl 6. Wie groß ist die Erwartung und Varianz von S? Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit für $S \in [2500, 3500]$!

Sei X_k die Zufallsvariable, die einem Treffer inm k. Wurf entspricht (also im k. Wurf die Augenzahl 6 erscheint). Also $P(X_k = 1) = \frac{1}{6}$ und $E(X_k) = \frac{1}{6}$, $V(X_k) = \frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6}) = \frac{5}{36}$.

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig und die Summe
$S = X_1 + \ldots + X_n$
zählt die Anzahl der Treffer. Die Erwartungswert und Varianz von S sind $E(S) = n \cdot \frac{1}{6} = 3000$ und $V(S) = n \cdot \frac{1}{6} \cdot (1 - \frac{1}{6}) = \frac{15000}{6} = 2500$
mit $\sigma = 50$. [1 Punkt für $E(S)$ und 1 Punkt für $V(S)$.]

$P(2500 \leq S \leq 3500) = P(2500 - 3000 \leq S - 3000 \leq 3500 - 3000) = P(|S - 3000| \leq 500)$
Mit Chebyshev $P(|S - \mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$ folgt: [1 Punkt]

$P(|S - 3000| \leq 500) = P(|S - 3000| \leq \frac{500}{50} \cdot 50) \geq 1 - \frac{1}{10^2} = \frac{99}{100} = 99\%$ [1 Punkt]

4

6C. Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} ax - 1/2 & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Konstante a. Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt X einen Wert zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ an?

Es muss $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ gelten. Das bedeutet $\int_1^3 (ax - \frac{1}{2})\,\mathrm{d}x = 1$
$\implies a\frac{1}{2}(3^2 - 1^2) - \frac{1}{2}(3-1) = 1$. Es folgt $a = \frac{1}{2}$. [1 Punkt]

$P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}) = P(1 \leq X \leq \frac{3}{2}) = \int_1^{\frac{3}{2}} (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}$. [1 Punkt]

$\overline{}$
2