Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4, eigenhandgeschrieben.
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Sofern nicht anders angegeben, ist nur das Endergebnis einzutragen. Andernfalls sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Als „optional" ausgewiesene Aufgaben können bearbeitet werden, um Bonuspunkte zu sammeln.
- Neben den Ergebnissen aus der Vorlesung und den Übungen können Sie folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte ohne Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	$\sin(x)^2$
$f'(x)$	$2\sin(x)\cos(x)$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (Lineare Differentialgleichungen — 4 Punkte)

Das charakteristische Polynom p der homogenen, linearen Differentialgleichung

$$y^{(4)} + y^{(3)} - y'' + y' - 2y = 0 \tag{L}$$

besitzt die Nullstellen 1 und -2.

1. Wie lauten die beiden verbleibenden Nullstellen λ_1, λ_2 von p?

$$\lambda_1 = \boxed{}, \ \lambda_2 = \boxed{}.$$

2. Geben Sie eine Basis für den Raum aller reellwertigen Lösungen von (L) an:

$$\boxed{}.$$

Aufgabe 2 (Fourier–Transformation *(Optional)* — 2 Bonuspunkte)

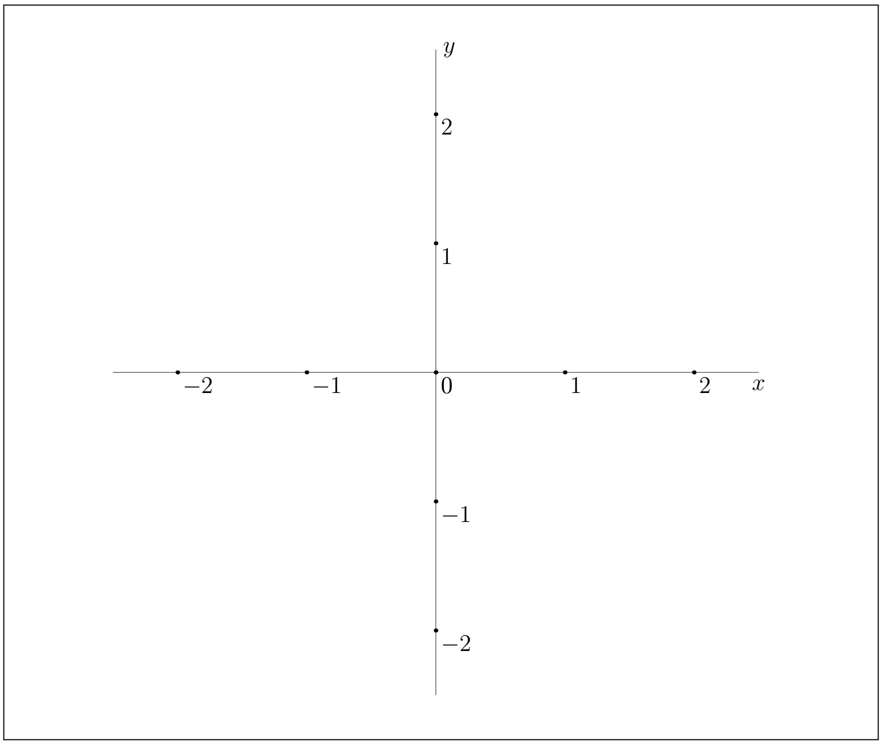
Bestimmen Sie die Fourier–Transformierte $\hat{f} = \mathscr{F}(f)$ der Funktion $f(x) = \mathbf{I}_{[0,\infty)}(x) \cdot e^{-2x} \sinh(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Begründete Antwort:

$\hat{f}(\xi) =$

Aufgabe 3 (Integration in der Ebene *(Optional)* — 8 Bonuspunkte)
Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = -x^2 + 2x$.

1. Skizzieren Sie f und g in einem gemeinsamen Koordinatensystem:



Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ die durch die Graphen von f und g beschränkte Fläche.

2. Stellen Sie A als Normalbereich in y–Richtung dar:

$$A = \left\{ (x,y)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{ccccc} \boxed{} & \le & x & \le & \boxed{} \\ \boxed{} & \le & y & \le & \boxed{} \end{array} \right\}.$$

3. Berechnen Sie $\mathrm{vol}_2(A)$:

Begründete Antwort:

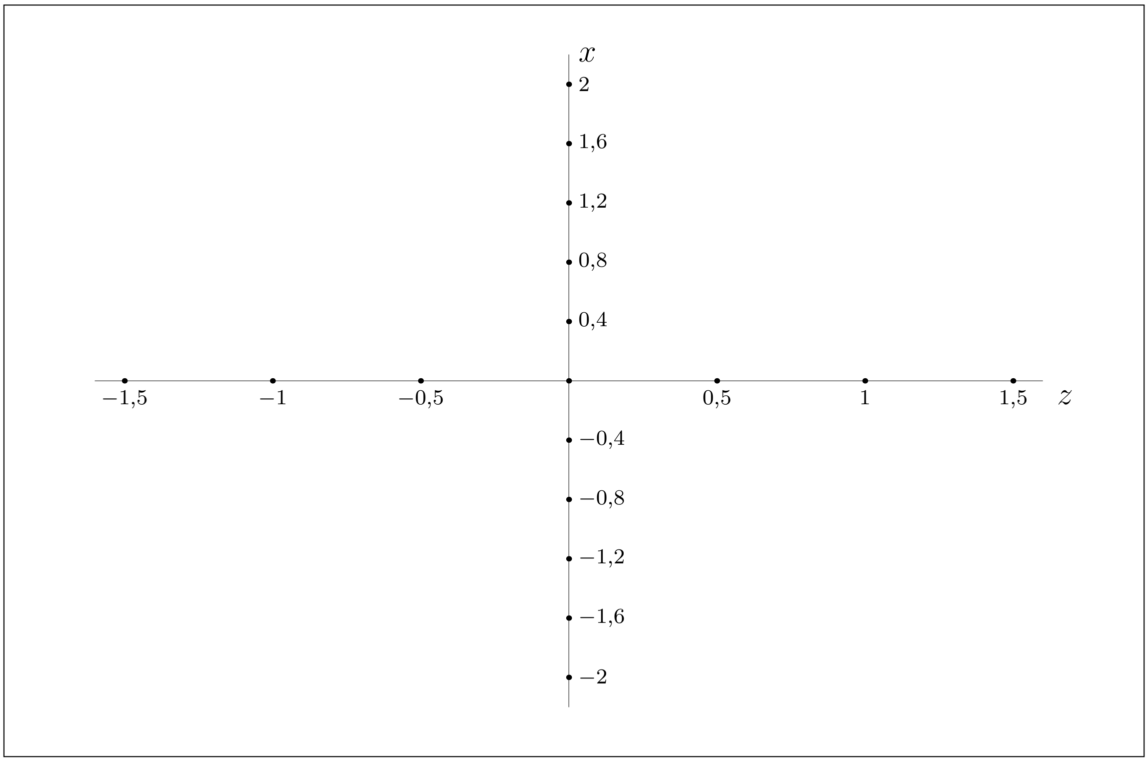
$\mathrm{vol}_2(A) =$

Aufgabe 4 (Integration im Raum — 15 Punkte)

Der Rotationskörper K sei definiert als

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 1 - z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq -z^2 - z + 2 \right\}.$$

1. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der Ebene $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x, z \in \mathbb{R} \right\}$.



2. Parametrisieren Sie K mittels Zylinderkoordinaten $\Phi\colon D \to K$, $\Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$:

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \varphi \in [0, 2\pi];\; \begin{array}{ccccc} \boxed{} & \leq & r & \leq & \boxed{} \\ \boxed{} & \leq & z & \leq & \boxed{} \end{array} \right\}.$$

3. Berechnen Sie das Volumen von K.

Begründete Antwort:

$\mathrm{vol}_3(K) =$

4. Durch $\Psi((\varphi, z)^\mathsf{T}) = ((1-z)\cos(\varphi), (1-z)\sin(\varphi), z)^\mathsf{T}$ wird eine der Randflächen M von K parametrisiert. Berechnen Sie die Jacobi–Matrix $J\Psi$ und das Kreuzprodukt $\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Psi}{\partial z}$:

$$J\Psi \left(\begin{smallmatrix} \varphi \\ z \end{smallmatrix} \right) = \boxed{}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Psi}{\partial z} \left(\begin{smallmatrix} \varphi \\ z \end{smallmatrix} \right) = \boxed{}.$$

Im Nachfolgenden sei M durch den von K nach *außen* zeigenden Normalenvektor orientiert. Wir definieren außerdem das Vektorfeld W auf $\mathbb{R}^3$ durch $W((x,y,z)^\mathsf{T}) = (\sinh(z)y, x, z)^\mathsf{T}$.

5. Die Divergenz $\operatorname{div} W$ von W ist konstant. Berechnen Sie diese und $\int_M W \cdot \mathrm{d}S$:

$$\operatorname{div} W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boxed{}$$

Begründete Antwort:

$\int_M W \cdot \mathrm{d}S =$

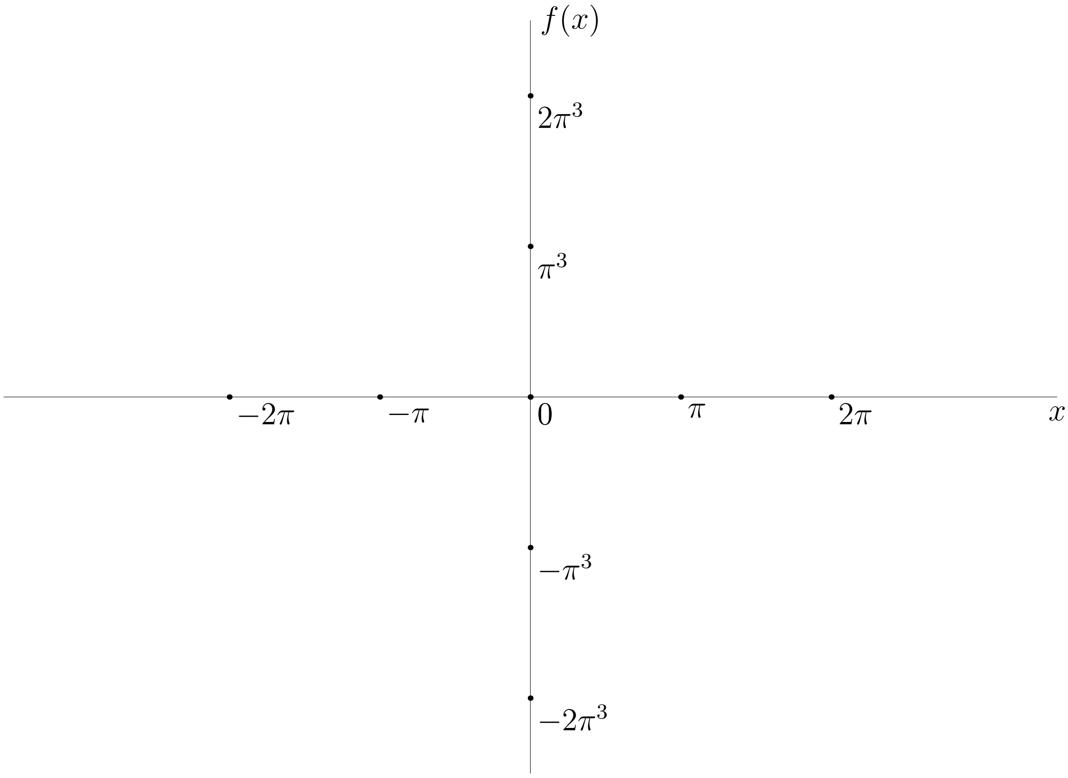
6. Bezeichne N die verbleibende Randfläche von K. Wie M sei auch N durch den von K nach außen zeigenden Normalenvektor orientiert. Schließen Sie auf den Wert $\int_N W \cdot \mathrm{d}S$:

$$\int_N W \cdot \mathrm{d}S = \boxed{}.$$

Aufgabe 5 (Fourier–Reihen — 9 Punkte + 1 Bonuspunkt)

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π–periodische, ungerade Funktion mit $f(x) = (x-\pi)^3$ für alle $x \in (0, \pi]$.

1. Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$. Kennzeichnen Sie dabei Unstetigkeitsstellen.



2. Bezeichne S_f die Fourier–Reihe von f. Berechnen Sie $S_f(0)$ und $S_f(\pi)$.

$$S_f(0) = \boxed{}, \quad S_f(\pi) = \boxed{}.$$

3. Bestimmen Sie die reelle und komplexe Darstellung von S_f:

$$S_f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx}, \text{ mit } c_0 = \boxed{} \text{ und}$$

$$c_k = \boxed{} \quad (k \neq 0).$$

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \text{ mit } a_0 = \boxed{},$$

$$a_k = \boxed{} \text{ und}$$

$$b_k = \boxed{} \quad (k \geq 1).$$

4. *(Optional).* Betrachten Sie S_f bei $\frac{\pi}{2}$, um den Wert von $2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}\left(\frac{6}{(2m+1)^2} - \pi^2\right)$ zu ermitteln:

$$2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}\left(\frac{6}{(2m+1)^2} - \pi^2\right) = \boxed{}.$$

Aufgabe 6 (Lineare Differentialgleichungssysteme — 7 Punkte + 2 Bonuspunkte)

Zu lösen ist das lineare, homogene Differentialgleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} y_1' &=& -y_1 &+& 2y_2 &-& 2y_3 &+& y_4, \\ y_2' &=& -4y_1 &+& 6y_2 &-& 4y_3 &+& 4y_4, \\ y_3' &=& -2y_1 &+& 4y_2 &-& 2y_3 &+& 2y_4, \\ y_4' &=& 3y_1 &-& 2y_2 &+& 2y_3 &-& 3y_4. \end{array}\right. \tag{H}$$

1. Formulieren Sie (H) in der Gestalt $y' = Ay$ für eine Matrix A:

$$A = \boxed{}.$$

2. Die Matrix A besitzt die Jordan–Normalform

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Wie lautet demnach die algebraische Vielfachheit m des Eigenwerts 0?

$$m = \boxed{}.$$

3. Geben Sie eine Basis $B : v_1, v_2, v_3, v_4$ des $\mathbb{C}^4$ an, die obige Jordan–Normalform realisiert.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \boxed{}, \ v_3 = \boxed{} \text{ und } v_4 = \boxed{}.$$

4. Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix W für (H):

$$W(x) = \boxed{}.$$

5. Lösen Sie (H) zu den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 6$, $y_2(0) = 15$, $y_3(0) = 4$ und $y_4(0) = -14$:

$$y(x) = \boxed{}.$$

Wir betrachten nun das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{rclcrcrcrcc} y_1' &=& -y_1 &+& 2y_2 &-& 2y_3 &+& y_4 &-& (1+x)e^{-x}, \\ y_2' &=& -4y_1 &+& 6y_2 &-& 4y_3 &+& 4y_4 &+& e^{-2x}\cosh(x), \\ y_3' &=& -2y_1 &+& 4y_2 &-& 2y_3 &+& 2y_4 &+& e^{-x}, \\ y_4' &=& 3y_1 &+& 2y_2 &+& 2y_3 &-& 3y_4 &-& (xe^{-x} + 2e^{-2x}\cosh(x)). \end{array}\right. \tag{I}$$

6. *(Optional).* Bestimmen Sie die partikuläre Lösung von (I) mit $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 1$ und $y_4(0) = 0$:

$$y_{\mathrm{p}}(x) = \boxed{}.$$

(*Hinweis.* Verwenden Sie den Ansatz $y_{\mathrm{p}}(x) = W(x)c(x)$ für eine noch zu bestimmende Funktion $c(x) = (0, *, *, *)^{\mathsf{T}}$.)

Aufgabe 7 (Partielle Differentialgleichungen — 13 Punkte)

Zu finden ist die Lösung $u\colon (0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \partial_x u\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) + \tfrac{3y}{x}\cdot\partial_y u\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) &= \tfrac{2}{x}u\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) + 3x, \quad \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\in(0,\infty)\times(0,\infty), \\ u\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} &= \ln(y), \qquad \text{für alle } y\in(0,\infty). \end{aligned} \tag{P}$$

In den vier nachfolgenden Aufgabenteilen sei $y_0\in(0,\infty)$ fixiert und $\gamma(s)=(x(s),y(s))^{\mathsf{T}}$ die Charakteristik der Differentialgleichung (P) mit $\gamma(0)=(1,y_0)^{\mathsf{T}}$.

1. Formulieren Sie die charakteristischen Gleichungen zu (P) für die Charakteristik γ.

$$x'(s) = \boxed{}, \quad x(0)=1,$$

$$y'(s) = \boxed{}, \quad y(0)=y_0,$$

$$z'(s) = \boxed{}, \quad z(0)=z_0.$$

2. Die Differentialgleichung $v'=\frac{2v}{s+1}+3(s+1)$, mit $s\in(-1,\infty)$, ist linear und inhomogen. Geben Sie die Lösung w der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung zum Anfangswert $w(0)=w_0$ an, wobei $w_0\in\mathbb{R}$. Bestimmen sie anschließend die Lösung v der inhomogenen Differentialgleichung mit $v(0)=v_0$, für $v_0\in\mathbb{R}$.

$$w(s) = \boxed{}, \quad v(s) = \boxed{}.$$

3. Lösen Sie damit die charakteristischen Gleichungen.

$$x(s) = \boxed{},$$

$$y(s) = \boxed{},$$

$$z(s) = \boxed{}.$$

4. Es sei $\binom{a}{b} \in (0,\infty) \times (0,\infty)$. Wie sind s und y_0 zu wählen, damit $\gamma(s) = \binom{a}{b}$ gilt?

$$s = \boxed{},$$

$$y_0 = \boxed{}.$$

5. Schließen Sie auf die Lösung von (P):

$$u\binom{x}{y} = \boxed{}.$$

6. Machen Sie eine Probe:

$$\partial_x u \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \boxed{},$$

$$\frac{3y}{x} \cdot \partial_y u \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \boxed{}.$$

Aufgabe 8 (Wahrscheinlichkeitsrechnung — 3 Punkte + 3 Bonuspunkte)

Sie haben Gäste zum Abendessen eingeladen, die Sie mit Ihrer berüchtigten Kartoffelsuppe bewirten wollen. Zu diesem Zweck haben Sie beim Frischemarkt Ihres Vertrauens einen Sack Kartoffeln à 9 Stück erstanden. Nun kommt es aber bisweilen vor, dass die ein oder andere Kartoffel grün, ausgetrieben oder aus anderen Gründen ungenießbar ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt bei handelsüblichen Kartoffeln 10%.

1. Bezeichne X die Anzahl der Kartoffeln im Sack, die genießbar ist. Wie ist X verteilt?

$$\mathbb{P}(X = k) = \boxed{}.$$

2. Sind weniger als 7 der gekauften Kartoffeln genießbar, reicht die Menge für das geplante Rezept nicht aus und manche der Gäste bleiben hungrig – ein gastgeberisches Fiasko. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleiben Sie davon verschont? (Hier und nachfolgend ist das Ergebnis als Quotient zweier vollständig berechneter oder in Primfaktoren zerlegter Zahlen anzugeben.)

$$p = \boxed{}.$$

Bauer Hermann ist leidenschaftlicher Kartoffelzüchter. Auf dem Jahreskongress der Vereinigung Deutscher Kartoffelfreunde möchte er seine neueste Züchtung “Dominique” vorstellen. Das Besondere an dieser Sorte ist das schnelle und gleichmäßige Wachstum: nur 2,5% der geernteten Kartoffeln sind grün und müssen aussortiert werden. Von seinem Versuchsacker hat er insgesamt 200 Kartoffeln der Sorte “Dominique” geerntet.

Verwenden Sie im Folgenden eine Poissonverteilung als Approximation.

3. *(Optional).* Sei nun Y die Anzahl der grünen Kartoffeln in der Ernte. Wie ist Y näherungsweise verteilt?

$$\mathbb{P}(Y = k) = \boxed{}.$$

4. *(Optional).* Die Kartoffelfreunde werden nur dann von Bauer Hermanns Züchtung angetan sein und in “Domenique” investieren, wenn weniger als 4 Kartoffeln in der Stichprobe grün sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dies etwa der Fall?

$$p = \boxed{}.$$

5. *(Optional).* Unter den Kartoffelfreunden befindet sich auch der exzentrische Kartoffelmogul V. Corleone, der auf der Suche nach der perfekten Kartoffelsorte ist. Sollte keine einzige Kartoffel aus Bauer Hermanns Stichprobe grün sein, wird er ihm einen Vertrag über die Rechte an “Dominique” anbieten. Angenommen, “Dominique” erntet bereits die Anerkennung der übrigen Kartoffelfreunde (d.h. weniger als 4 Kartoffeln sind grün); mit welcher Wahrscheinlichkeit wird Corleone unserem Bauer dann ein Angebot machen, das er nicht abschlagen kann?

$$p = \boxed{}.$$