Modulklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Bitte füllen Sie folgendes aus!

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

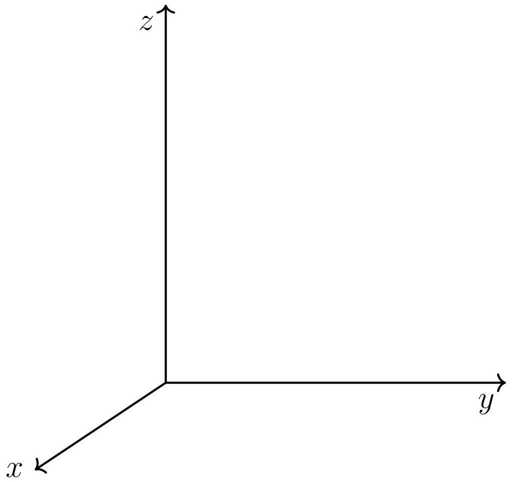
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/60

Aufgabe 1. *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze* (*10 Punkte*)

Der Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le z \le 4 \\ x^2 + y^2 \le z \\ y \ge 0 \end{matrix} \right\} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z + y \\ 2x + z \\ 2y + x \end{pmatrix}.$$

1A. Skizzieren Sie K.



1

Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \le \varphi \le \boxed{\qquad\qquad} \\ 0 \le z \le 4 \\ 0 \le \rho \le \boxed{\qquad\qquad} \end{cases}$$

2

1B. Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung das Volumen des Körpers K:

$\mathrm{vol}_3(K) =$

2

1C. Die Randfläche ∂K setzt sich aus drei Teilen zusammen und zwar dem Deckel D (mit $z = 4$), der Paraboloidfläche P (mit $z = x^2 + y^2$) und dem Schnitt T mit der xz-Ebene (mit $y = 0$).

Wir parametrisieren P und T durch

$$\Phi_P : [0,2] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad \Phi_T : \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 2,\ x^2 \le z \le 4\} \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit}$$

$$\Phi_P \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ \rho^2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \Phi_P}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi_P}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2\rho \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

$$\Phi_T \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \Phi_T}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi_T}{\partial z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

2

Berechnen Sie den Fluss von $F = \operatorname{rot}(f)$ durch P und T nach außen.

$$\int_P F \cdot dS =$$

$$\int_T F \cdot dS =$$

2

Sei $\Gamma = \partial D$ orientiert gegen den Uhrzeigersinn. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\Gamma f \cdot \mathrm{d}\Gamma$.

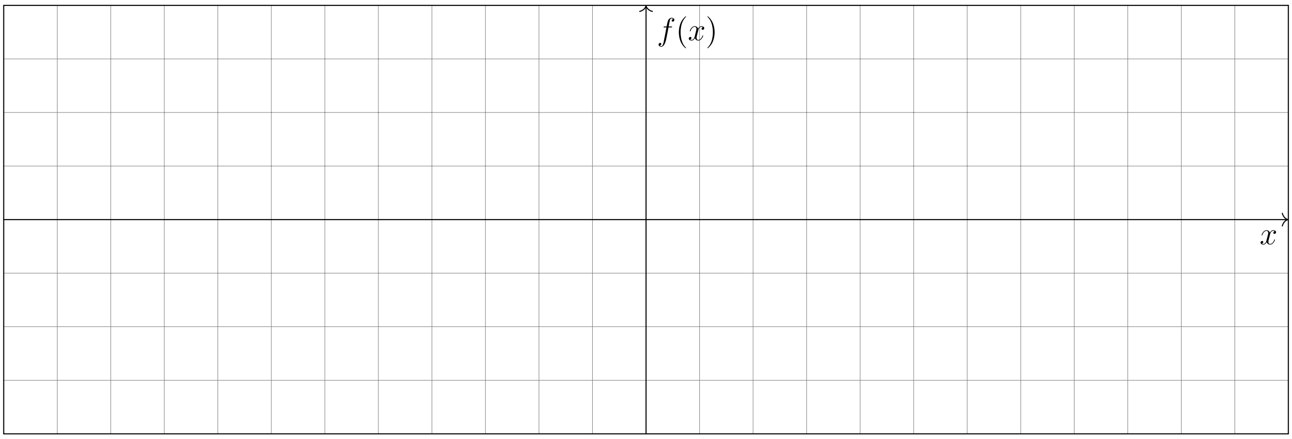
$$\int_\Gamma f \cdot d\Gamma =$$

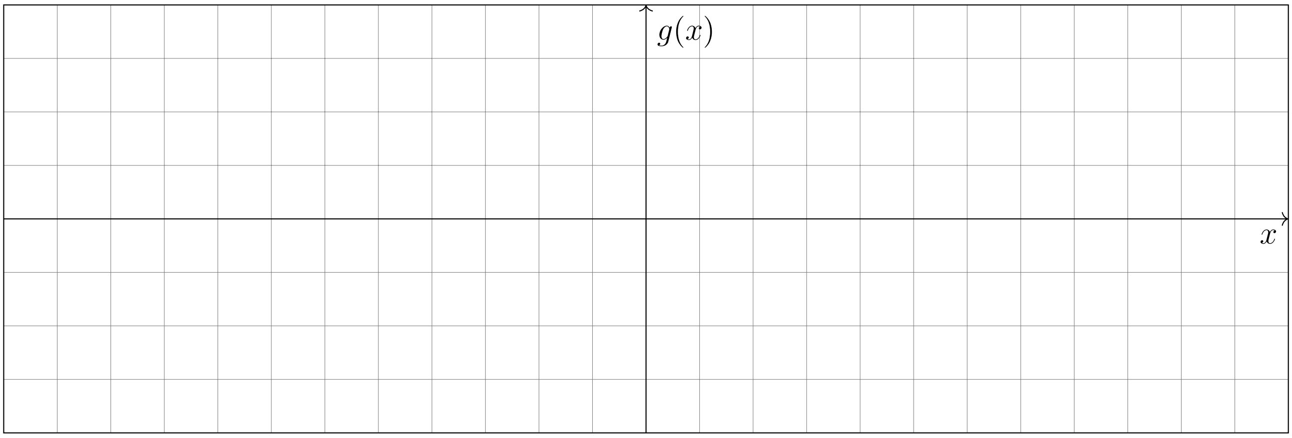
1

Aufgabe 2. *Fourier-Reihen* (*10 Punkte*)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion definiert durch $f(x) = 1$ für $0 < x < \pi$ und $f(x) = 0$ für $\pi \leq x \leq 2\pi$.

2A. Skizzieren Sie die Funktionen $f(x)$ und $g(x) = f(x)\sin(x)$ auf dem Interval $[-3\pi, 3\pi]$.





2

2B. Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier-Reihe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von f im Punkt $x = 0$.

$\lim_{n\to\infty} f_n(0) =$ 1

2C. Berechnen Sie die Koeffizienten c_k der komplexen Fourier-Reihe $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$:

$$c_k = \begin{cases} \boxed{} & \text{für } k = 0, \\ \boxed{} & \text{für } k \text{ ungerade}, \\ \boxed{} & \text{für } k \neq 0 \text{ gerade}. \end{cases}$$

3

2D. Folgern Sie die Koeffizienten γ_k der komplexen Fourier-Reihe $g(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.

Erinnerung: Dank der Euler-Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$ gilt

$$\cos(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}.$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \boxed{} & \text{für } k = 1. \\ \boxed{} & \text{für } k = -1. \\ \boxed{} & \text{für } k \text{ gerade}, \\ \boxed{} & \text{für } k \neq \pm 1 \text{ ungerade}. \end{cases}$$

4

Aufgabe 3. *Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (10 Punkte)*

3A. Betrachten Sie die folgende homogene lineare Differentialgleichung:

$$y^{(4)}(t) = y(t).$$

Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom p und seine Faktorisierung über $\mathbb{C}$:

$$p(x) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} .$$

3

3B. Folgern Sie die allgemeine komplexe Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der oben genannten Differentialgleichung.

$$y(t) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} .$$

1

3C. Betrachten Sie nun die folgende lineare Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) - y(t) = 4\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Benutzen Sie den richtigen Ansatz, um eine partikuläre Lösung zu finden

$$\text{Ansatz: } y(t) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} .$$

2

$$\text{Partikuläre Lösung: } y(t) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} .$$

2

3D. Finden Sie eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$y^{(4)}(t) - y(t) = 4\,\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{mit} \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 3, y'''(0) = -2.$$

$$y(t) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} .$$

2

Aufgabe 4. *Charakteristikmethode (10 Punkte)*

Gesucht werden Lösungen $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der folgenden partiellen Differentialgleichung:

$$y\partial_x u(x,y) + x\partial_y u(x,y) = 4xyu \qquad \text{mit} \quad u(0,y) = \exp(y^2).$$

4A. Stellen Sie das Differentialgleichungssystem für die charakteristischen Kurven auf.

$$x'(t) = \boxed{\qquad\qquad}, \qquad x(0) = 0,$$

$$y'(t) = \boxed{\qquad\qquad}, \qquad y(0) = y_0,$$

$$z'(t) = \boxed{\qquad\qquad}, \qquad z(0) = \boxed{\qquad\qquad}.$$

2

4B. Betrachten Sie erst mal $x(t)$ und $y(t)$. Sie haben ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem in der Form $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ gefunden.

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

Eigenwert $\lambda_1 = \boxed{}$ mit Eigenvektor $v = \boxed{}$,

Eigenwert $\lambda_2 = \boxed{}$ mit Eigenvektor $w = \boxed{}$,

$\overline{}$ 2

4C. Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems (abhängig von y_0) für das homogene lineare Differentialgleichungssystem in $(x(t), y(t))$, das Sie gefunden haben.

$x(t) = \boxed{}$,

$y(t) = \boxed{}$.

$\overline{}$ 2

4D. Nach Einsetzen von $x(t)$ und $y(t)$ sieht die Differentialgleichung für $z(t)$ folgendermaßen aus:

$$z'(t) = y_0^2(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t})z(t)$$

Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems für $z(t)$:

$z(t) = \boxed{}$.

$\overline{}$ 2

4E. Bestimmen Sie eine explizite Lösung (nur von x und y abhängig) der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung:

$u(x, y) = \boxed{}$.

$\overline{}$ 2

Aufgabe 5. *Wahrscheinlichkeitsteorie* (*10 Punkte*)

$k \backslash \mu$	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
0	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041	0.0025
1	0.2707	0.2052	0.1494	0.1057	0.0733	0.0500	0.0337	0.0225	0.0149
2	0.2707	0.2565	0.2240	0.1850	0.1465	0.1125	0.0842	0.0618	0.0446
3	0.1804	0.2138	0.2240	0.2158	0.1954	0.1687	0.1404	0.1133	0.0892
4	0.0902	0.1336	0.1680	0.1888	0.1954	0.1898	0.1755	0.1558	0.1339
5	0.0361	0.0668	0.1008	0.1322	0.1563	0.1708	0.1755	0.1714	0.1606
6	0.0120	0.0278	0.0504	0.0771	0.1042	0.1281	0.1462	0.1571	0.1606
7	0.0034	0.0099	0.0216	0.0385	0.0595	0.0824	0.1044	0.1234	0.1377
8	0.0009	0.0031	0.0081	0.0169	0.0298	0.0463	0.0653	0.0849	0.1033
9	0.0002	0.0009	0.0027	0.0066	0.0132	0.0232	0.0363	0.0519	0.0688

Tabelle 1: Werte der Poisson-Dichtefunktion $p_\mu(k) = \frac{\mu^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\mu}$.

5A. Eine Wandervogelgattung überwintert in Ägypten (25%), Algerien (35%), Äthiopien (40%).

Im Sommer kommen die Vögel nach Europa. 9% der Vögel aus Ägypten, 13% der Vögel aus Algerien und 8% der Vögel aus Äthiopien verbringen den Sommer in Belgien.

Berechnen Sie den Prozentsatz der Vögel dieser Gattung, die in Belgien übersommert.

$\overline{2}$

Ein Ornithologe forscht in Belgien. Er fängt einen Vogel dieser Gattung. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Vogel *nicht* aus Ägypten kommt.

$\overline{2}$

5B. Auf der Welt gibt es geschätzt 10 Millionen Vögel dieser Gattung. Die meisten Vögel haben einen schwarzen Schnabel, aber 0.2% davon haben einen gelben Schnabel. Ein Ornithologenteam fängt nun zufällig 1500 Vögel.

Was ist die erwartete Anzahl gefangener Vögel mit *schwarzem* Schnabel? $\boxed{}$.

2

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Forscher genau zwei Vögel mit *gelbem* Schnabel gefangen haben? (Geben Sie nur die Formel für den exakten Wert an, ohne den Wert auszurechnen.)

2

Berechnen Sie explizit mithilfe der Tabelle 1 eine geschickte Approximation von dieser Wahrscheinlichkeit.

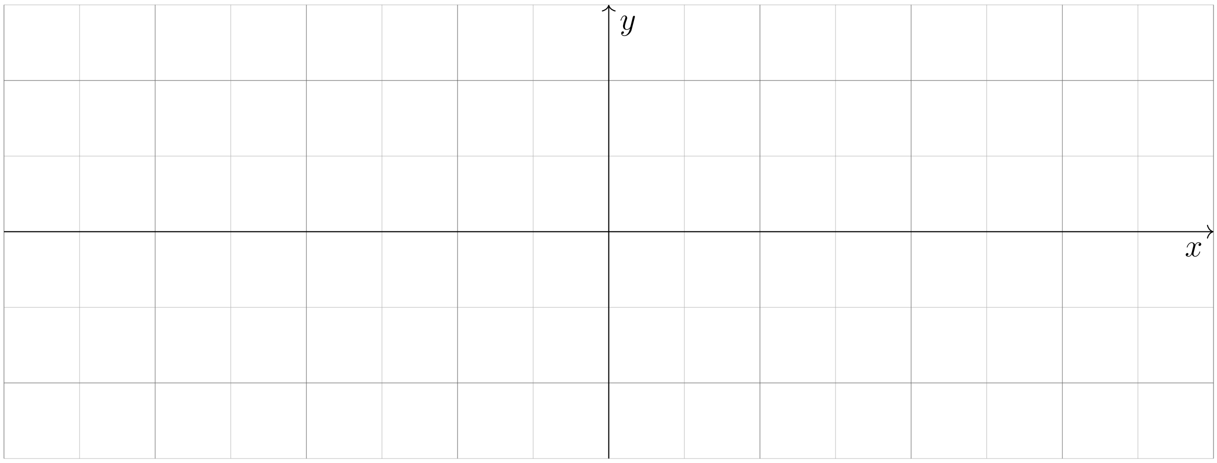
2

Aufgabe 6. *Integration* (*10 Punkte*)

Betrachten Sie das folgende Integral:

$$\int_0^{\pi/4} \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} xy \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$$

6A. Skizzieren Sie den Integrationsbereich in der xy-Ebene.



2

6B. Beschreiben Sie den Integrationsbereich als Normalbereich in y-Richtung:

$\boxed{} \leq x \leq \boxed{}$ und $\boxed{} \leq y \leq \boxed{}$ 4

6C. Bestimmen Sie das Integral.

4