Modulklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Bitte füllen Sie folgendes aus!

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

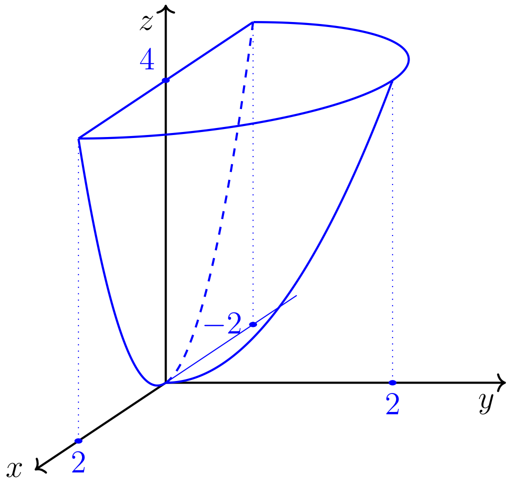
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/60

Aufgabe 1. *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze (10 Punkte)*

Der Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le z \le 4 \\ x^2 + y^2 \le z \\ y \ge 0 \end{matrix} \right\} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z + y \\ 2x + z \\ 2y + x \end{pmatrix}.$$

1A. Skizzieren Sie K.



1

Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \le \varphi \le \boxed{\pi} \\ 0 \le z \le 4 \\ 0 \le \rho \le \boxed{\sqrt{z}} \end{cases}$$

2

1B. Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung das Volumen des Körpers K:

$$\mathrm{vol}_3(K) = \int_K 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{z=0}^{4} \int_{\rho=0}^{\sqrt{z}} \rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\varphi \quad \text{Transformationssatz}$$

$$= \pi \int_{z=0}^{4} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=0}^{\sqrt{z}} \mathrm{d}z = \frac{\pi}{2} \int_{z=0}^{4} z \,\mathrm{d}z \quad \text{Integrale vereinfachen}$$

$$= 4\pi$$

Erläuterung: Beim Transformationssatz die Funktionaldeterminante nicht vergessen!

2

1C. Die Randfläche ∂K setzt sich aus drei Teilen zusammen und zwar dem Deckel D (mit $z = 4$), der Paraboloidfläche P (mit $z = x^2 + y^2$) und dem Schnitt T mit der xz-Ebene (mit $y = 0$).

Wir parametrisieren P und T durch

$$\Phi_P : [0, 2] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad \Phi_T : \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 2,\ x^2 \le z \le 4\} \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit}$$

$$\Phi_P \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ \rho^2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \Phi_P}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi_P}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2\rho \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2\rho^2\cos\varphi \\ -2\rho^2\sin\varphi \\ \rho \end{pmatrix}}$$

$$\Phi_T \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \Phi_T}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi_T}{\partial z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

2

Berechnen Sie den Fluss von $F = \operatorname{rot}(f)$ durch P und T nach außen.

$$F = \operatorname{rot}(f) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_P F \cdot dS = -\int_0^2 \int_0^\pi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\rho^2\cos\varphi \\ -2\rho^2\sin\varphi \\ \rho \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\rho \qquad \text{da } \begin{pmatrix} -2\rho^2\cos\varphi \\ -2\rho^2\sin\varphi \\ \rho \end{pmatrix} \text{ nach innen zeigt}$$

$$= \int_0^2 \int_0^\pi (2\rho^2(\cos\varphi + \sin\varphi) - \rho)\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\rho = \int_0^2 (4\rho^2 - \pi\rho)\, \mathrm{d}\rho = \frac{4}{3} \cdot 8 - \frac{\pi}{2} \cdot 4 = \frac{32}{3} - 2\pi.$$

$$\int_T F \cdot dS = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 -1\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x = \int_{-2}^2 (-4 + x^2)\, \mathrm{d}x = -4 \cdot 4 + (\frac{8}{3} + \frac{8}{3}) = -\frac{32}{3}.$$

2

Sei $\Gamma = \partial D$ orientiert gegen den Uhrzeigersinn. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\Gamma f \cdot \mathrm{d}\Gamma$.

$$\int_\Gamma f \cdot d\Gamma = \int_D \mathrm{rot}(f) \cdot \,\mathrm{d}S = -\int_{P \cup T} \mathrm{rot}(F) \cdot \,\mathrm{d}S$$ Dank Stokes!

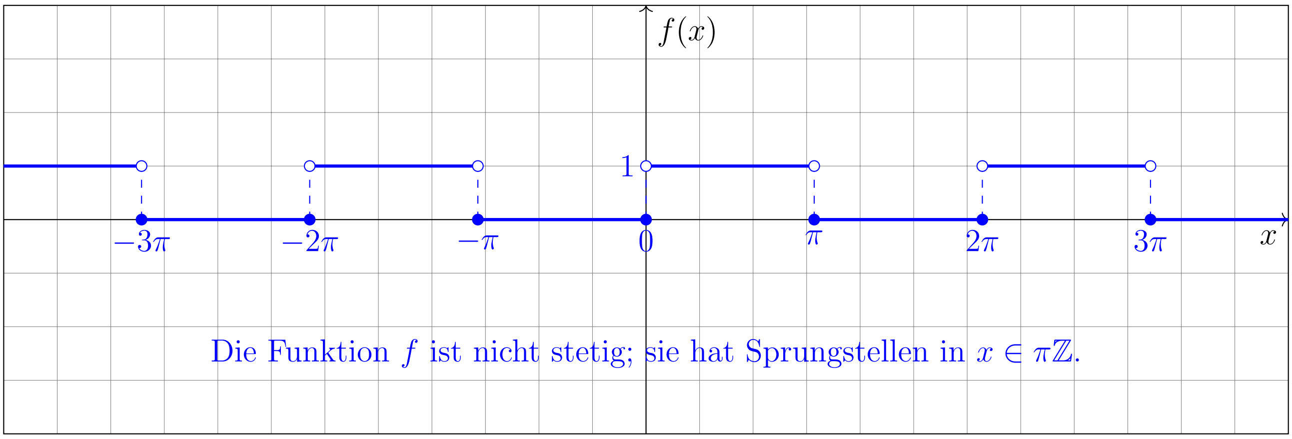
$= 2\pi.$

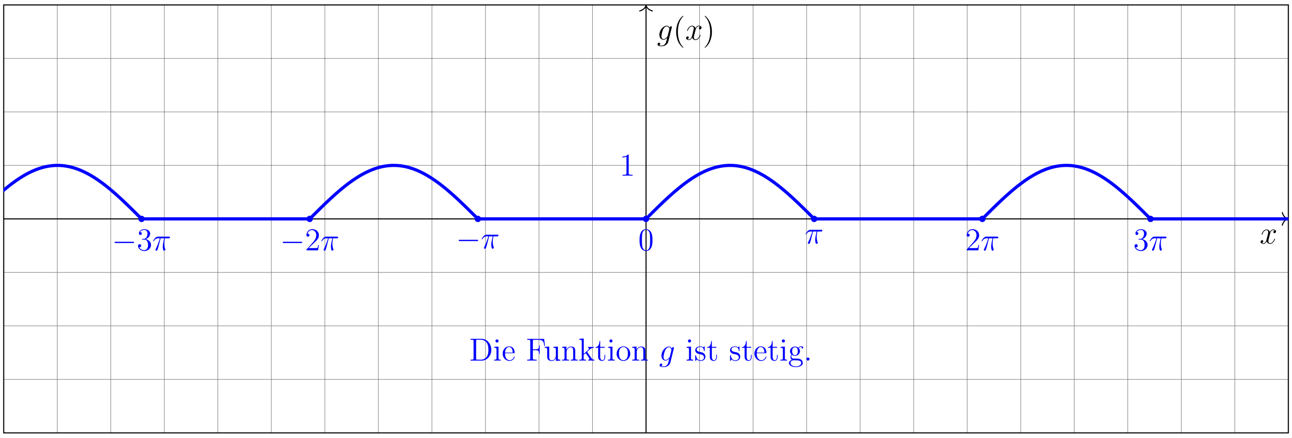
1

Aufgabe 2. *Fourier-Reihen (10 Punkte)*

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion definiert durch $f(x) = 1$ für $0 < x < \pi$ und $f(x) = 0$ für $\pi \le x \le 2\pi$.

2A. Skizzieren Sie die Funktionen $f(x)$ und $g(x) = f(x)\sin(x)$ auf dem Interval $[-3\pi, 3\pi]$.





2

2B. Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier-Reihe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von f im Punkt $x = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

dank Dirichlet-Kriterium

1

2C. Berechnen Sie die Koeffizienten c_k der komplexen Fourier-Reihe $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$:

$$c_k = \begin{cases} \boxed{\frac{1}{2}} & \text{für } k = 0, \\ \boxed{-\frac{\mathrm{i}}{k\pi}} & \text{für } k \text{ ungerade}, \\ \boxed{0} & \text{für } k \neq 0 \text{ gerade}. \end{cases}$$

3

Wir haben nämlich $T = 2\pi$ (also $\omega = 1$) und

$$(k=0) \quad c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\cdot\pi = \frac{1}{2};$$

$$(k\neq 0) \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{-\mathrm{i}k}\Big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\Big]_{t=0}^{t=\pi}$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{2\pi k}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi} - 1) = \begin{cases} -\frac{\mathrm{i}}{k\pi} & \text{für } k \text{ ungerade } (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi} = -1), \\ 0 & \text{für } k \neq 0 \text{ gerade } (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi} = 1). \end{cases}.$$

2D. Folgern Sie die Koeffizienten γ_k der komplexen Fourier-Reihe $g(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.

Erinnerung: Dank der Euler-Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$ gilt

$$\cos(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}.$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \boxed{-\frac{\mathrm{i}}{4}} & \text{für } k = 1. \\ \boxed{\frac{\mathrm{i}}{4}} & \text{für } k = -1. \\ \boxed{-\frac{1}{(k^2-1)\pi}} & \text{für } k \text{ gerade}, \\ \boxed{0} & \text{für } k \neq \pm 1 \text{ ungerade}. \end{cases}$$

4

Wir haben immer $T = 2\pi, \omega = 1$. Wir bemerken Folgendes.

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} f(t)\cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-1)t} f(t)\,\mathrm{d}t}_{c_{k-1}} - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+1)t} f(t)\,\mathrm{d}t}_{c_{k+1}}\Bigg) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(c_{k-1}-c_{k+1}).\end{aligned}$$

Also haben wir

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(c_0 - c_2) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\left(\frac{1}{2}-0\right) = -\frac{\mathrm{i}}{4}, \\ \gamma_{-1} &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(c_{-2} - c_0) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\left(0-\frac{1}{2}\right) = \frac{\mathrm{i}}{4}.\end{aligned}$$

Übrigens ist $k+1$ bzw. $k-1$ ungerade genau dann, wenn k gerade ist. Dementsprechend gilt

$$\gamma_k = \frac{1}{2\mathrm{i}}(c_{k-1} - c_{k+1}) = \begin{cases} \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(-\frac{\mathrm{i}}{(k-1)\pi} + \frac{\mathrm{i}}{(k+1)\pi}\right) = -\frac{1}{(k^2-1)\pi} & \text{für } k \text{ gerade}\,. \\ \frac{1}{2\mathrm{i}}(0-0) = 0 & \text{für } k \neq \pm 1 \text{ ungerade}\,. \end{cases}$$

Aufgabe 3. *Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (10 Punkte)*

3A. Betrachten Sie die folgende homogene lineare Differentialgleichung:

$$y^{(4)}(t) = y(t).$$

Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom p und seine Faktorisierung über $\mathbb{C}$:

$$p(x) = \boxed{x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}).}\,.$$

3

3B. Folgern Sie die allgemeine komplexe Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der oben genannten Differentialgleichung.

$$y(t) = \boxed{c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^{-t} + c_3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + c_4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}\,.$$

1

3C. Betrachten Sie nun die folgende lineare Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) - y(t) = 4\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Benutzen Sie den richtigen Ansatz, um eine partikuläre Lösung zu finden

$$\text{Ansatz: } y(t) = \boxed{ct\,\mathrm{e}^{-t}}\,.$$

2

$$\text{Partikuläre Lösung: } y(t) = \boxed{-t\,\mathrm{e}^{-t}}\,.$$

2

Wir benutzen den Ansatz $y(t) = ct\,\mathrm{e}^{-t}$. Wir haben

$$\begin{aligned}
y'(t) &= c\,\mathrm{e}^{-t} - ct\,\mathrm{e}^{-t}\\
y''(t) &= -2c\,\mathrm{e}^{-t} + ct\,\mathrm{e}^{-t}\\
y'''(t) &= 3c\,\mathrm{e}^{-t} - ct\,\mathrm{e}^{-t}\\
y^{(4)}(t) &= -4c\,\mathrm{e}^{-t} + ct\,\mathrm{e}^{-t}
\end{aligned}$$

. Einsetzen liefert $-4c\,\mathrm{e}^{-t} = 4\,\mathrm{e}^{-t}$, also muss $c = -1$ sein.

3D. Finden Sie eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$y^{(4)}(t) - y(t) = 4\,\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{mit} \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 3, y'''(0) = -2.$$

$$y(t) = \boxed{\mathrm{e}^t(1-t)}\,.$$

2

Die Lösung hat die folgende Form: $y(t) = -t\,\mathrm{e}^t + c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^{-t} + c_3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + c_4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$. Ableiten liefert:

$$\begin{aligned}
y'(t) &= -\,\mathrm{e}^{-t} + t\,\mathrm{e}^{-t} + c_1\,\mathrm{e}^t - c_2\,\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{i}c_3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{i}c_4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\\
y''(t) &= 2\,\mathrm{e}^{-t} - t\,\mathrm{e}^{-t} + c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^{-t} - c_3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - c_4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\\
y'''(t) &= 3\,\mathrm{e}^{-t} + t\,\mathrm{e}^{-t} + c_1\,\mathrm{e}^t - c_2\,\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{i}c_3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{i}c_4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert das folgende System:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 + c_3 + c_4 && = 1 \\ y'(0) &= -1 + c_1 - c_2 + \mathrm{i}c_3 - \mathrm{i}c_4 && = 0 \\ y''(0) &= 2 + c_1 + c_2 - c_3 - c_4 && = 3 \\ y'''(0) &= -3 + c_1 - c_2 - \mathrm{i}c_3 + \mathrm{i}c_4 && = -2. \end{aligned}$$

Also muss $c_2 = c_3 = c_4 = 0$ und $c_1 = 1$ sein.

Aufgabe 4. *Charakteristikmethode* (*10 Punkte*)

Gesucht werden Lösungen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der folgenden partiellen Differentialgleichung:

$$y\partial_x u(x,y) + x\partial_y u(x,y) = 4xyu \qquad \text{mit} \quad u(0,y) = \exp(y^2).$$

4A. Stellen Sie das Differentialgleichungssystem für die charakteristischen Kurven auf.

$$x'(t) = \boxed{y(t)}, \qquad x(0) = 0,$$

$$y'(t) = \boxed{x(t)}, \qquad y(0) = y_0,$$

$$z'(t) = \boxed{4x(t)y(t)z(t)}, \qquad z(0) = \boxed{\exp(y_0^2)}.$$

$\overline{2}$

4B. Betrachten Sie erst mal $x(t)$ und $y(t)$. Sie haben ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem in der Form $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ gefunden.

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

Eigenwert $\lambda_1 = \boxed{1}$ mit Eigenvektor $v = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$,

Eigenwert $\lambda_2 = \boxed{-1}$ mit Eigenvektor $w = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$,

Die Matrix ist $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und ihr charakteristisches Polynom ist $\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$. $\overline{}\ 2$

4C. Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems (abhängig von y_0) für das homogene lineare Differentialgleichungssystem in $(x(t), y(t))$, das Sie gefunden haben.

$$x(t) = \boxed{\frac{y_0}{2}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}) = y_0 \sinh(t)},$$

$$y(t) = \boxed{\frac{y_0}{2}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}) = y_0 \cosh(t)}.$$

$\overline{}\ 2$

Alle Lösungen haben folgende Gestalt $(c_1, c_2 \in \mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1\, \mathrm{e}^t v + c_2\, \mathrm{e}^{-t} w = c_1 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix},$$

also $x(t) = c_1\, \mathrm{e}^t - c_2\, \mathrm{e}^{-t}$ und $y(t) = c_1\, \mathrm{e}^t + c_2\, \mathrm{e}^{-t}$.

Aus den Anfangswerten leiten wir Folgendes her: $c_1 = c_2 = \frac{y_0}{2}$.

4D. Nach Einsetzen von $x(t)$ und $y(t)$ sieht die Differentialgleichung für $z(t)$ folgendermaßen aus:

$$z'(t) = y_0^2(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t})z(t)$$

Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems für $z(t)$:

$$z(t) = \boxed{\exp\left(\frac{y_0^2}{2}(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t})\right)}.$$

$\overline{}\ 2$

Wir können $\dfrac{z'(t)}{z(t)} = y_0^2(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t})$ schreiben. Wir integrieren beide Seiten und bekommen

$$\ln(z(t)) = y_0^2\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2t}\right) + C \qquad \text{für eine Konstante } C.$$

Da $z(0) = \exp(y_0^2)$, muss $C = 0$ sein.

4E. Bestimmen Sie eine explizite Lösung (nur von x und y abhängig) der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung:

$$u(x,y) = \boxed{\exp(x^2 + y^2)}\,.$$

2

Wir müssen nach t und y_0 lösen. Zuerst merken wir:

$$y + x = y_0\,\mathrm{e}^t \qquad \text{und} \qquad y - x = y_0\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Also ist $y_0 = \mathrm{e}^{-t}(y+x)$ aber auch $y_0 = \mathrm{e}^t(y-x)$. Wir schreiben also $\mathrm{e}^{-t}(y+x) = \mathrm{e}^t(y-x)$ und wir lösen nach t:

$$t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+x}{y-x}\right).$$

Einsetzen in einer von den beiden Gleichungen für y_0 ergibt

$$y_0 = (y+x)\sqrt{\frac{y-x}{y+x}} = \sqrt{y^2 - x^2}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} u(x,y) = z(t) &= \exp\left(\frac{y_0^2}{2}(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t})\right) \\ &= \exp\left(\frac{y^2 - x^2}{2}\left(\frac{y+x}{y-x} + \frac{y-x}{y+x}\right)\right) \\ &= \exp(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Aufgabe 5. *Wahrscheinlichkeitsteorie* (*10 Punkte*)

$k\backslash\mu$	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
0	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041	0.0025
1	0.2707	0.2052	0.1494	0.1057	0.0733	0.0500	0.0337	0.0225	0.0149
2	0.2707	0.2565	0.2240	0.1850	0.1465	0.1125	0.0842	0.0618	0.0446
3	0.1804	0.2138	0.2240	0.2158	0.1954	0.1687	0.1404	0.1133	0.0892
4	0.0902	0.1336	0.1680	0.1888	0.1954	0.1898	0.1755	0.1558	0.1339
5	0.0361	0.0668	0.1008	0.1322	0.1563	0.1708	0.1755	0.1714	0.1606
6	0.0120	0.0278	0.0504	0.0771	0.1042	0.1281	0.1462	0.1571	0.1606
7	0.0034	0.0099	0.0216	0.0385	0.0595	0.0824	0.1044	0.1234	0.1377
8	0.0009	0.0031	0.0081	0.0169	0.0298	0.0463	0.0653	0.0849	0.1033
9	0.0002	0.0009	0.0027	0.0066	0.0132	0.0232	0.0363	0.0519	0.0688

Tabelle 1: Werte der Poisson-Dichtefunktion $p_\mu(k) = \frac{\mu^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\mu}$.

5A. Eine Wandervogelgattung überwintert in Ägypten (25%), Algerien (35%), Äthiopien (40%).

Im Sommer kommen die Vögel nach Europa. 9% der Vögel aus Ägypten, 13% der Vögel aus Algerien und 8% der Vögel aus Äthiopien verbringen den Sommer in Belgien.

Berechnen Sie den Prozentsatz der Vögel dieser Gattung, die in Belgien übersommert.

$P(A_1) = 25/100,\ P(A_2) = 35/100,\ P(A_3) = 40/100.$

$P(B|A_1) = 9/100\ P(B|A_2) = 13/100,\ P(B|A_3) = 8/100.$

$\Longrightarrow\ P(B) = P(B|A_1)\cdot P(A_1) + P(B|A_2)\cdot P(A_2) + P(B|A_3)\cdot P(A_3) = 10/100 = 10\%$

2

Ein Ornithologe forscht in Belgien. Er fängt einen Vogel dieser Gattung. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Vogel *nicht* aus Ägypten kommt.

Satz von Bayes:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)\cdot P(A_1)}{P(B)} = 225/1000 = 22,5\%$$

$\Longrightarrow\ P(\overline{A_1}|B) = 1 - P(A_1|B) = 77,5\%$

2

5B. Auf der Welt gibt es geschätzt 10 Millionen Vögel dieser Gattung. Die meisten Vögel haben einen schwarzen Schnabel, aber 0.2% davon haben einen gelben Schnabel. Ein Ornithologenteam fängt nun zufällig 1500 Vögel.

Was ist die erwartete Anzahl gefangener Vögel mit *schwarzem* Schnabel? $\boxed{1497}$.

Die erwartete Anzahl gefangener Vögel mit gelbem Schnabel ist gleich $0.2/100 \cdot 1500 = 3$, also ist die erwartete Anzahl mit schwarzem Schnabel gleich $1500 - 3 = 1497$.

$\overline{}$ 2

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Forscher genau zwei Vögel mit *gelbem* Schnabel gefangen haben? (Geben Sie nur die Formel für den exakten Wert an, ohne den Wert auszurechnen.)

Hypergeometrische Verteilung mit $N = 10.000.000$, $K = 20.000$, $n = 1500$.

$$p(2) = \frac{\binom{20.000}{2}\binom{9.980.000}{1498}}{\binom{10.000.000}{1500}}$$

$\overline{}$ 2

Berechnen Sie explizit mithilfe der Tabelle 1 eine geschickte Approximation von dieser Wahrscheinlichkeit.

$$H(N, K, n) \approx B(n, K/N) \approx P(\lambda)$$

mit $\lambda = nK/N = 3$. Das heißt,

$$p(2) \approx \frac{\lambda^2}{2!} \mathrm{e}^{-\lambda} \approx 0.2240.$$

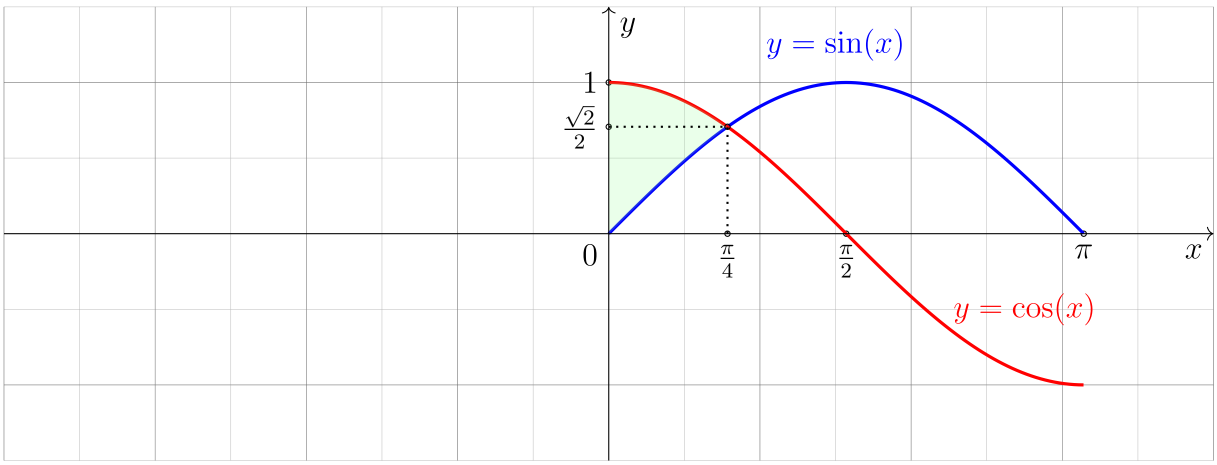
$\overline{}$ 2

Aufgabe 6. *Integration (10 Punkte)*

Betrachten Sie das folgende Integral:

$$\int_0^{\pi/4} \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

6A. Skizzieren Sie den Integrationsbereich in der xy-Ebene.



2

6B. Beschreiben Sie den Integrationsbereich als Normalbereich in y-Richtung:

$0 \leq x \leq \pi/4$ und $\sin(x) \leq y \leq \cos(x)$

4

6C. Bestimmen Sie das Integral.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} xy \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} xy^2 \Big|_{y=\sin x}^{\cos x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} x(\cos^2 x - \sin^2 x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} x\cos(2x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\big[x\sin(2x)\big]_{x=0}^{\pi/4} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{16} + \frac{1}{8}\big[\cos(2x)\big]_{x=0}^{\pi/4} \\
&= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}. \qquad \text{(Auch richtig: } \frac{\pi - 2}{16}.\text{)}
\end{aligned}$$

4