Modulklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Bitte füllen Sie Folgendes aus.

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Name des Tutors:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise.**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben.
- Mobiltelefone und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die Kästen für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander unabhängig.

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/60

Aufgabe 1. *Integration* (*10 Punkte*)

Betrachten Sie die Fläche $A \subset \mathbb{R}^2$, welche durch die Parabeln $y = 3x^2$ und $y = 4 - x^2$ beschränkt wird.

1A. Skizzieren Sie die Fläche A.

/ 2

1B. Beschreiben Sie A als Normalbereich in y-Richtung:

$\boxed{} \leq x \leq \boxed{}$ und $\boxed{} \leq y \leq \boxed{}$

/ 4

1C. Berechnen Sie $\int_A x^2 \,\mathrm{d}(x, y)$.

/ 4

Aufgabe 2. *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze* (*10 Punkte*)

Der Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} 4x^2 + y^2 \le 4 \\ 0 \le z \le 4 - 4x^2 - y^2 \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ 2x + z \\ xy \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Skizzieren Sie K auf Ihrem Schmierpapier.

2A. Parametrisieren Sie K in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \boxed{} \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le z \le \boxed{} \end{cases}$$

2

2B. Berechnen Sie die Funktionaldeterminante der Parametrisierung Φ und das Volumen des Körpers K:

$$\det \Phi' = \boxed{}, \qquad \mathrm{vol}_3(K) = \boxed{}.$$

2

2C. Die Randfläche ∂K besteht aus dem Boden B mit $z = 0$ und dem Mantel M. Wir parametrisieren M in Polarkoordinaten mit $\Phi_M : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$\Phi_M\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ 2\rho\sin\varphi \\ 4 - 4\rho^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi_M}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi_M}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ -8\rho \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ 2\rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

1

2D. Berechnen Sie den Fluss von f durch ∂K nach außen.

$$\int_{\partial K} f \cdot \mathrm{d}S = \boxed{}.$$

1

2E. Berechnen Sie die Rotation $\mathrm{rot}(f)$ und ihren Fluss durch M nach außen.

$$\mathrm{rot}(f) = \boxed{}, \qquad \int_M \mathrm{rot}(f) \cdot \mathrm{d}S = \boxed{}.$$

3

2F. Sei $\Gamma = \partial M$ die Randkurve von M. Berechnen Sie das Arbeitsintegral des Vektorfeldes f längs Γ bezüglich der von M induzierten Orientierung:

$$\int_\Gamma f \cdot \mathrm{d}\Gamma = \boxed{}.$$

1

Aufgabe 3. *Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten* (*10 Punkte*)

3A. Betrachten Sie die folgende homogene lineare Differentialgleichung

$$y''''(t) - 3\,\mathrm{i}\,y'''(t) - 2\,y''(t) = 0.$$

Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom p und seine Faktorisierung über $\mathbb{C}$:

$p(x) = \boxed{}$.

$\overline{}$ 2

3B. Folgern Sie die allgemeine komplexe Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der oben genannten Differentialgleichung.

$y(t) = \boxed{}$.

$\overline{}$ 2

3C. Betrachten Sie nun die folgende lineare Differentialgleichung

$$y''''(t) - 3\,\mathrm{i}\,y'''(t) - 2\,y''(t) = -2(1+3\mathrm{i})\,\mathrm{e}^t.$$

Benutzen Sie den richtigen Ansatz, um eine partikuläre Lösung zu finden

Ansatz: $y(t) = \boxed{}$.

$\overline{}$ 1

Partikuläre Lösung: $y(t) = \boxed{}$.

$\overline{}$ 2

3D. Finden Sie eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$y''''(t) - 3\,\mathrm{i}\,y'''(t) - 2\,y''(t) = -2(1+3\mathrm{i})\,\mathrm{e}^t \qquad \text{mit} \quad y(0) = 3, y'(0) = 1, y''(0) = 2, y'''(0) = 2.$$

$y(t) = \boxed{}$.

$\overline{}$ 3

Aufgabe 4. *Charakteristikmethode* (*10 Punkte*)

Gesucht werden Lösungen $u\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der folgenden partiellen Differentialgleichung:

$$x\partial_x u(x,y) + (y-x)\partial_y u(x,y) = u - y \qquad \text{mit} \quad u(1,y) = y^2/2.$$

4A. Stellen Sie das Differentialgleichungssystem für die charakteristischen Kurven auf.

$x'(t) = \boxed{}, \qquad x(0) = 1,$

$y'(t) = \boxed{}, \qquad y(0) = y_0,$

$z'(t) = z(t) - y(t), \qquad z(0) = \boxed{}.$

$\overline{}$ 3

4B. Sie haben ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem der Form $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

mit $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ gefunden. Schreiben Sie die Matrix A: $A = \boxed{}$.

1

4C. Ergänzen Sie folgende Sätze.

Der Vektor $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Hauptvektor von A zum Eigenwert $\lambda = \boxed{}$ der Stufe 3.

Die dazugehörige Hauptvektorkette ist

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto v_2 = \boxed{} \longmapsto v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2

4D. Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems (abhängig von y_0) für das homogene lineare Differentialgleichungssystem, das Sie gefunden haben.

$x(t) = \boxed{}$,

$y(t) = \boxed{}$,

$z(t) = \boxed{}$.

3

4E. Bestimmen Sie eine explizite Lösung der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung (abhängig nur von x und y):

$u(x, y) = \boxed{}$.

1

Aufgabe 5. *Wahrscheinlichkeitsteorie* (*10 Punkte*)

$k \backslash \mu$	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
0	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041	0.0025
1	0.2707	0.2052	0.1494	0.1057	0.0733	0.0500	0.0337	0.0225	0.0149
2	0.2707	0.2565	0.2240	0.1850	0.1465	0.1125	0.0842	0.0618	0.0446
3	0.1804	0.2138	0.2240	0.2158	0.1954	0.1687	0.1404	0.1133	0.0892
4	0.0902	0.1336	0.1680	0.1888	0.1954	0.1898	0.1755	0.1558	0.1339
5	0.0361	0.0668	0.1008	0.1322	0.1563	0.1708	0.1755	0.1714	0.1606
6	0.0120	0.0278	0.0504	0.0771	0.1042	0.1281	0.1462	0.1571	0.1606
7	0.0034	0.0099	0.0216	0.0385	0.0595	0.0824	0.1044	0.1234	0.1377
8	0.0009	0.0031	0.0081	0.0169	0.0298	0.0463	0.0653	0.0849	0.1033
9	0.0002	0.0009	0.0027	0.0066	0.0132	0.0232	0.0363	0.0519	0.0688

Tabelle 1: Werte der Poisson-Dichtefunktion $p_\mu(k) = \frac{\mu^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\mu}$.

5A. Die Länge der Schlange in der Uni-Mensa ist Poisson-verteilt mit Erwartungswert $\mu = 4$.

Berechnen Sie die Standardabweichung: $\sigma =$ $\boxed{}$. 1

5B. Berechnen Sie mithilfe der oberen Tabelle die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) kein Mensch ansteht: $\boxed{}$, 1

(b) mehr Menschen als erwartet anstehen: $\boxed{}$, 2

(c) die Anzahl der anstehenden Menschen sich von der erwarteten Anzahl um (strikt) weniger als die Standardabweichung unterscheidet: $\boxed{}$. 2

5C. Ein Ameisennest enthält eine Million Ameisen. Die meisten Ameisen sind schwarz, aber 0.1% davon sind rot. Ein Forscher sammelt zufällig 2.500 Ameisen.

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Forscher höchstens 2 rote Ameisen ausgewählt hat?

$\overline{2}$

5D. Berechnen Sie explizit mithilfe der oberen Tabelle eine geschickte Approximation von dieser Wahrscheinlichkeit.

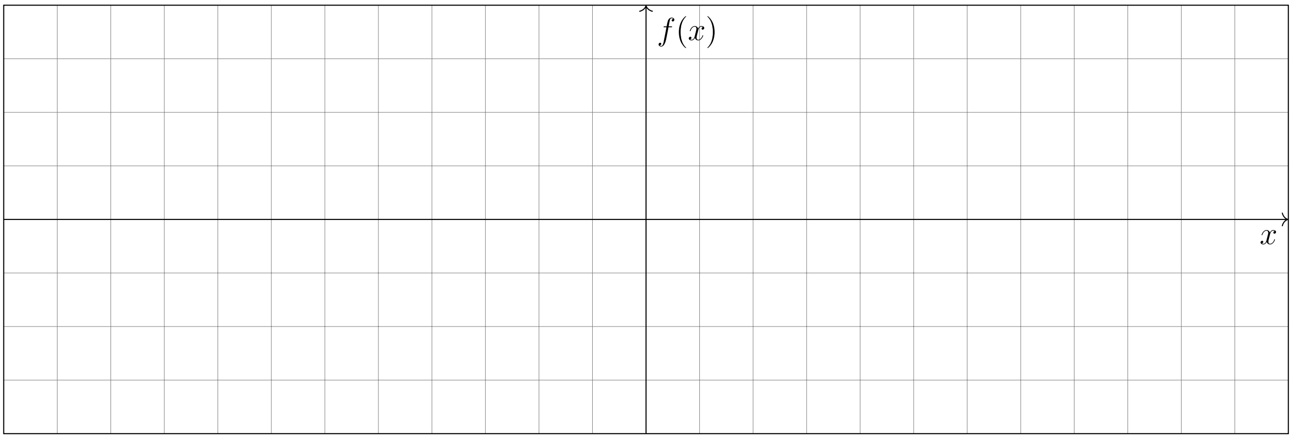
$\overline{2}$

Aufgabe 6. *Fourier-Reihen* (*10 Punkte*)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gerade 2π-periodische Funktion definiert durch

$$f(x) = 1 \quad \text{für } 0 \le x < \frac{\pi}{2} \qquad \text{und} \qquad f(x) = 0 \quad \text{für } \frac{\pi}{2} \le x < \pi.$$

6A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Interval $[-3\pi, 3\pi]$.



2

6B. Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier–Reihe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von f in den Punkten $x = 0$ und $x = \pi/2$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \boxed{\quad\quad}, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(\pi/2) = \boxed{\quad\quad}.$$

2

6C. Berechnen Sie die Koeffizienten c_k der komplexen Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.

$$c_0 = \boxed{\quad\quad}, \qquad c_k = \begin{cases} \boxed{\quad\quad} & \text{falls } k = 4l \ (l \neq 0) \text{ oder } k = 4l+2, \\ \boxed{\quad\quad} & \text{falls } k = 4l+1, \\ \boxed{\quad\quad} & \text{falls } k = 4l+3. \end{cases}$$

4

6D. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier-Reihe an einer geeigneten Stelle den Wert

$$a = \sum_{l\ge 0} \left(\frac{1}{4l+1} - \frac{1}{4l+3} \right) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$$

Auswertung in $x = \boxed{\quad\quad}$ ergibt $a = \boxed{\quad\quad}$.

2